

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А. А. ЗЫКОВ

ТЕОРИЯ
КОНЕЧНЫХ
ГРАФОВ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК · 1969

ACADEMY OF SCIENCES OF USSR · SIBERIAN BRANCH
INSTITUTE OF MATHEMATICS

A. A. ZYKOV

THEORY
OF FINITE
GRAPHS

PUBLISHING HOUSE «NAUKA» · SIBERIAN BRANCH
NOVOSIBIRSK · 1969

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А. А. ЗЫКОВ

ТЕОРИЯ
КОНЕЧНЫХ
ГРАФОВ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК · 1969

Задачи, приводящие к исследованию графов, возникают в самых различных областях математики и ее приложений; количество таких задач особенно быстро растет в последнее время, и для их своевременного решения необходимо интенсивно разрабатывать общие методы теории графов.

Настоящая монография почти не содержит готовых рецептов решения отдельных задач. Она предназначена для систематического изучения теории графов и ставит целью подготовить читателя к самостоятельной работе в этой области, а также к поискам практически эффективных алгоритмов решения прикладных задач.

В книге вводится единая терминология и символика и делается попытка изложить основные проблемы и наиболее интересные результаты, дать представление об общих методах и подходах, уже сложившихся или еще только намечающихся в современной теории графов. Первый том включает главным образом такие результаты, которые получаются посредством общих рассуждений комбинаторно-логического характера, без предварительной разработки специального аппарата. Второй том посвящен важнейшим методам.

От читателя требуется знание линейной алгебры (включая алгебру матриц), а также знакомство с простейшими понятиями общей алгебры, теории множеств и математической логики. Лишь очень небольшая часть вопросов, затронутых в книге, требует предварительного ознакомления с основами топологии. Книгу можно рекомендовать студентам старших курсов и аспирантам, сотрудникам вычислительных центров и других учреждений, имеющим дело с дискретной математикой и ее приложениями.

Ответственный редактор *В. Г. Вицинг*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Возникновение теории графов и ее место в математике. Цель книги и ее план. Обозначения из теории множеств и математической логики. Полукольца	13
<i>Глава 1. Алгебра теории графов</i>	
§ 1. Определение графа. Понятие графа и его точное определение; вершины, ребра и инцидентор графа. Дуги, петли и звенья. Смежность и инцидентность. Часть графа, подграф и суграф. Изоморфизм. Пример, поясняющий введенные понятия и обозначения. Надграф, сверхграф и объемлющий граф. Конечные графы	21
§ 2. Задание графов с помощью матриц. Полукольцо K и матрица инцидентностей. Матрица соседства вершин; степень и валентность вершины. Матрица смежности. Матрица соседства ребер.	28
§ 3. Вопросы идентификации графов. Проблемы изоморфизма и изоморфного вхождения, трудность их в общем виде, понятие об их частичных решениях. Общие вопросы, касающиеся информации о графе	34
§ 4. Основные типы графов. Орграфы, неорграфы и частично ориентированные графы. Вырожденные и пустые графы. Полуинцидентор и дезориентация графа. Униграфы и мультиграфы, p -графы и p -орграфы. Полные, плотные и квазиполные графы	37
§ 5. Обыкновенные графы. Определение обыкновенного графа, вид его матриц соседства и смежности. Обыкновенный граф как множество с антирефлексивным симметричным бинарным отношением. Полные и пустые обыкновенные графы. Скелет произвольного графа	39
§ 6. Бихроматические графы. Граф Кёнига и различные его представления. Полные графы Кёнига. Паросочетания. Теорема Кёнига — Ore и ее следствие (теорема Кёнига — Холла). Бихроматические графы общего вида	42
§ 7. Графы Бержа. Определение графа Бержа и вид его матрицы смежности. Граф Бержа как множество с произвольным бинарным отношением. Задание графа Бержа с помощью отображения Γ вершин в подмножества и с помощью аддитивного отображения Ξ подмножеств в подмножества. Определения отображений Γ и Ξ и обратных им в случае произвольного ор-	

	графа. Орскелет. Симметрические и антисимметрические орграфы. Обыкновенные орграфы. Полные графы Бержа. Связь между матрицами смежности орграфа и полученного из него дезориентацией неорграфа; пример нахождение ориентации требуемого вида с помощью булевой алгебры	47
§ 8.	Локальная и квазилокальная информация о графах. Характеристика инцидентности графа, I -классы графов. Характеристика смежности, J -классы. Локальная характеристика общего вида. Понятие квазилокальной информации. Проблема Келли. Окрестности и окружения вершин; проблема Трахтенброта и связанная с ней проблема конечности графа	54
§ 9.	Полные и пустые подграфы. Количества полных и пустых подграфов с заданным числом вершин в обыкновенном графе; количества вилок и антивенок. Дополнительные графы. Количества плотных и квазиполных, вырожденных и пустых подграфов в графе общего вида. Выявление максимальных пустых и полных подграфов у обыкновенного графа по способу Магу — Уэйсмана; проблемы практически эффективного выявления и подсчета полных и пустых подграфов	62
§ 10.	Части с экстремальными свойствами в графах. Определение максимальных и наибольших, минимальных и наименьших подграфов или суграфов с заданным свойством. Плотность и неплотность. Опоры и опорное число. Накрытия и накрывающее число, квазипаросочетания. Верные накрывания, теорема Зарецкого. Об оценках Уэйнштейна. Всесмежные подграфы и число всесмежности графа. Полуядро	75
<i>Глава 2. Связность графов</i>		
§ 11.	Маршруты, цепи и циклы. Определение маршрута. Нахождение количеств маршрутов данной длины в графе по его матрице смежности; выявление всех маршрутов. Цепи и циклы, их выявление. Лемма о существовании простой цепи и простого цикла в маршруте. Алгоритмы выявления цепей с помощью разметки вершин	85
§ 12.	Компоненты связности. Отделенность и неотделенность вершин графа; компоненты, связные графы. Выявление компонент по матрице смежности графа. Теорема Кёнига о бихроматических графах и ее следствия. Решение проблемы Келли для несвязных графов. Одно характеристическое свойство связных графов	96
§ 13.	Отделимость и соединимость. Определения k -отделимости и k -соединимости вершин в графе. Теорема Менгера и ее простейшие следствия. Перешейки и цикловые ребра	104
§ 14.	k -связные графы. Определение k -связного графа, критерий k -связности. Три характеристических свойства 2-связных графов. Проблема Адама	110
§ 15.	k -компоненты, точки сочленения, блоки. k -компоненты, их взаимное расположение в графе. Точки сочленения и блоки, обзор всех типов блоков. Две теоремы о взаимном положении блоков и точек сочленения. Выявление точек сочленения и блоков данного графа. Теорема Дирака о системе циклов при данной вершине	113
§ 16.	Отрезаемость и сплетаемость. k -отрезаемость и k -сплетаемость вершин, теорема Коцига. k -сплетенные графы и основы k -го порядка	122

§ 17. Метрика графа. Расстояние между вершинами графа, нахождение матрицы расстояний по матрице смежности. Вопросы реализации данной метрики с помощью графа, теорема Стоцкого. Центральные и периферийные вершины, радиус и диаметр графа; теорема Жордана о центральных вершинах	127
§ 18. Обходы графа. Алгоритм слепого поиска цепи, соединяющей две данные вершины графа. Эйлеровы цепи и эйлеровы циклы, критерий их существования и алгоритм Хоанг Туи для нахождения. Различные обобщения задачи Эйлера. Гамильтоновы цепи и гамильтоновы циклы, некоторые достаточные условия их существования	134
<i>Глава 3. Цикломатика графов</i>	
§ 19. Цикломатическое число. Определение и простейшие свойства цикломатического числа графа. Критерий полноты обыкновенного графа в терминах цикломатического числа и количества ребер	145
§ 20. Графы без циклов. Характеристические свойства графов без циклов. Определение и характеристические свойства дерева. Степени вершин дерева. Простейшие свойства графов без циклов.	148
§ 21. Метрические свойства деревьев. Центральные и бисентральные деревья. Система расстояний между висячими вершинами дерева, теорема Смоленского — Зарецкого и связанные с ней проблемы	152
§ 22. Каркасы. Определение и теоремы существования каркаса графа. Выявление каркасов с помощью разметки вершин графа. Хорды каркаса и ранг графа. Теорема о простом цикле, определяемом каркасом и хордой; преобразования каркасов. О числе связных каркасов без общих ребер	160
§ 23. Пространство суграфов и пространство циклов. Определение линейного пространства (группы) суграфов данного графа. Квазициклы и пространство циклов; цикломатические матрицы графа. Теорема Степанца о кратчайшем базисе циклов.	165
§ 24. Разрезы и пространство разрезов. Определения разреза и простого разреза графа. Теорема о простом разрезе, определяемом ребром каркаса и хордами. Теорема о пересечении цикла с простым разрезом. Квалиразрезы и их свойства, пространство разрезов графа. Матрицы разрезов, связь их с цикломатическими матрицами. Об одном результате Трента	173
§ 25. Преобразования матриц графа. Роль матрицы инциденций над полем вычетов по модулю два; теорема и следствия, выясняющие смысл ранга и линейной зависимости столбцов. Преобразование матрицы инциденций с целью выявления каркаса графа и нахождения матрицы разрезов и цикломатической матрицы; перекройка матриц. Пример. Преобразование матрицы разрезов в цикломатическую и наоборот; некоторые свойства графа, непосредственно устанавливаемые по этим матрицам	179
§ 26. Обзор и подсчет каркасов. Японский метод выявления всех каркасов графа. Выявление простых циклов. Подсчет каркасов, теорема Лантьери — Трента	191
§ 27. Графы с заданными разрезами и заданными циклами. Пример восстановления графа по матрице разрезов или по цикломатической матрице, равносильность обеих задач. Операции	

деления графа по разрезу и деления матрицы по строке. Алгоритм Майеды для установления реализуемости матрицы в виде матрицы разрезов и для нахождения всех реализаций; составление матрицы, преобразующей матрицу разрезов в матрицу инцидентий	200
---	-----

Глава 4. Ориентация графов

§ 28. Маршруты с учетом ориентации дуг. Частично ориентированные маршруты и ормаршруты в графе; орцепи, пути и орциклы. Нахождение количеств частично ориентированных маршрутов и ормаршрутов заданной длины по матрице смежности графа. Выявление кратчайших путей с помощью разметки вершин. Эйлеровы пути. Гамильтоновы пути и гамильтоновы орциклы. О различных уточнениях понятия неотделимости вершин в графе.	218
§ 29. Транзитивные и квазитранзитивные графы. Определения и простейшие свойства транзитивных и квазитранзитивных графов. Критерии транзитивности и квазитранзитивности в терминах матрицы смежности графа. О свойствах графа, близких к транзитивности	222
§ 30. Транзитивное замыкание. Определение транзитивного замыкания, в частности, экономного; теорема существования и единственности. Транзитивные замыкания графов Бержа и неориентированных униграфов. Нахождение транзитивного замыкания по матрице смежности графа. О понятии квазитранзитивного замыкания	224
§ 31. Квазитранзитивная и транзитивная ориентируемость. Определения. Граф Гуйя-Ури для заданного обыкновенного графа. Сукомпоненты графа и их свойства. Критерии транзитивной ориентируемости обыкновенного графа, равносильность транзитивной и квазитранзитивной ориентируемости, алгоритм Гилмора — Гофмана для нахождения транзитивной ориентации. Сильная транзитивность, теорема Уулка. Транзитивная и квазитранзитивная ориентируемость графов общего вида; критерий в терминах матрицы смежности	228
§ 32. Бикомпоненты орграфа. Достижимость вершин. Определение и критерий бисвязности орграфа. Выявление бикомпонент по матрице смежности. Выявление бикомпонент орграфа, заданного списком дуг, по способу Лейфмана. Граф Герца для заданного орграфа. Структура полных обыкновенных орграфов, теорема Камьона — Фаулкса о гамильтоновых орциклах. Проблема исчерпывающего обзора полных бисвязных орграфов, теорема Байнжее — Харари. Теоремы Редди о гамильтоновом пути и Гуйя-Ури о гамильтоновом орцикле. Критерий бисвязной ориентируемости графа, минимизация количества бикомпонент	246
§ 33. Базы вершин. Ядра. Определение базы вершин орграфа. Базовые бикомпоненты, их существование. Полный обзор всех баз вершин в заданном орграфе, нахождение баз по матрице смежности. Антибазы. Положительные и отрицательные ядра орграфа. Теоремы Рудяну и Ричардсона о существовании и единственности ядер и о сведении проблемы их нахождения.	265
§ 34. Базы дуг. Два определения базы дуг орграфа, их равносильность; теорема существования. Некоторые достаточные условия единственности базы дуг (теорема Кёнига и ее следствие).	

	Проблема полного обзора баз дуг в заданном орграфе, сведение этой проблемы к случаю бисвязных орграфов. Теорема Барздыня. Верхняя оценка мощности базы дуг бисвязного орграфа (теорема Гольдберга). Практическое выявление баз. Понятие базы ребер у графа общего вида	275
§ 35.	Теоремы Менгера и Коцига для орграфов. Ориентированные аналоги понятий k -отделимости и т. д. вершин орграфа. Уточнение теорем Менгера и Коцига при учете ориентации ребер графа. Симметрично сплетенные орграфы, проблема Коцига	285
§ 36.	Растущие ордеревья. Определение растущего ордеревья и его корня, характеристические свойства. Поддеревья и сокорневые поддеревья. Равномерно растущие ордеревья, теорема Гольдберга — Лившица. Подсчет растущих каркасов графа, теорема Ботта — Мейберри	288
§ 37.	Орметрика. Отклонение одной вершины от другой в орграфе; ориентированные аналоги метрики, радиуса и диаметра. Квазибисвязность орграфа как достаточное условие конечности его оррадиуса. Нижние оценки оррадиуса и ордиаметра бисвязного орграфа, теорема Гольдберга и решение проблемы Брэттона. Проблема общего изучения орграфов без орциклов. Задача Бекишева	297
§ 38.	Пространство обобщенных суграфов. Теорема о базисе пространства циклов, содержащем наибольшее количество орциклов. Проблема устранения орциклов, теорема Гринберга — Дамбита и ее следствие (теорема Фидрих — Адама). Гипотеза Адама. Пространство обобщенных суграфов, матрицы линейно независимых разрезов и циклов над кольцом целых чисел. Подпространства циклов и разрезов в пространстве обобщенных суграфов; соответствующие матрицы орграфа	306
<i>Глава 5. Отображения и раскраски графов</i>		
§ 39.	Гомоморфизмы графов. Определение и простейшие свойства гомоморфных отображений графа в граф и на граф. Группа автоморфизмов графа, теорема Фракта и связанные с ней вопросы. Полугруппа эндоморфизмов графа. Эндоморфизмы графов Бержа. Эндоклассы, теоремы Попова и Глушкина; другие исследования и дальнейшая проблематика, связанные с теоремой Глушкина. О других результатах, касающихся гомоморфизмов графов.	322
§ 40.	Частичные гомоморфизмы. Раскраски вершин и хроматическое число графа. Стягивание ребер и число Хадвигера. Гипотеза Хадвигера и функция Вагнера. Реберные гомоморфизмы, раскраски ребер и хроматический класс графа. Реберный изоморфизм обыкновенных графов, теорема Уитни—Юнга	343
§ 41.	Хроматическое число. Независимость хроматического числа от плотности графа. Оценка хроматического числа обыкновенного графа через его степень, теорема Брукса и некоторые ее следствия. О других оценках хроматического числа в терминах степеней вершин графа	354
§ 42.	Нахождение минимальной раскраски вершин. Об одной принципиально негодной попытке. Отождествление соцветных вершин. Способ Магу. Теорема Плесневича. Теорема Витавера. Теорема Минти. О практической процедуре раскраски	364

- § 43. **Неполные раскраски вершин.** Задача Уэйсмана и ее сведение к перебору максимальных пустых подграфов графа . . . 377
- § 44. **Раскраска ребер.** Сведение общего случая к рассмотрению графов без петель. Двухцветные цепи и леммы Шеннона. Теорема Шеннона о верхней оценке хроматического класса через степень графа, точность этой оценки. Теорема Визинга о верхней оценке хроматического класса p -графа, точность этой оценки при $p=1$. Хроматический класс полных обыкновенных графов и бихроматических графов, оценка хроматического класса обыкновенного графа через число его вершин. Вывод теоремы Шеннона из теоремы Визинга. Об одновременной раскраске вершин и ребер 379

Глава 6. Представления графов

- § 45. **Теоретико-множественные и алгебраические представления.** Граф пересечений произвольной системы множеств. Граф интервалов; о критериях Леккеркеркера и Боладна, теорема Гилмора — Гофмана. Другие графы пересечений. О теоретико-множественном представлении циклически транзитивных графов. Графы сравнимости. О графах делимости и графах коммутации в группоидах. О функциональных графах . . . 391
- § 46. **Самопредставления.** Граф инцидентности. Граф смежности ребер, теоремы Крауса, Уитни, Харари — Нэш-Вильямса, Седлачека и Чартрэнда. Граф, изоморфный своему графу смежности ребер, теорема Гирлянды — Менона. Графы блоков и графы сочленений, теоремы Харари. О результате Гавела и о других самопредставлениях графов 401
- § 47. **Геометрические и топологические представления.** Геометрическое изображение графа в плоскости и в пространстве. О реберных остовах многогранников и n -мерных кубов. Графы пересечений в геометрии. Топологическое представление графа. Подразделение и слияние ребер, комбинаторный и точечный гомеоморфизмы графов. Плоские графы; условие Мак-Лэйна; двойственные графы и их свойства, условие Уитни; условия Понтрягина — Куратовского и Харари — Татта; теорема о плоских графах. Об алгоритмах расположения графа в плоскости; t -плоские графы (обзор). Неразбивающее расположение графа на поверхности заданного топологического типа. Порядок связности и род графа; расположение полных обыкновенных графов, число полноты поверхности (обзор). Граф как многомерный клеточный комплекс; элементарное подразделение, проблема выявления комбинаторных топологических инвариантов. О других топологических представлениях графов 417
- § 48. **Проблема четырех красок.** Оценки хроматического числа плоского графа, возникновение и формулировка гипотезы четырех красок. Сведение проблемы к случаю триангуляций сферы (плоскости). Теорема Тэйта — Вольтского, движение индексов и псевдоалгоритмы раскраски. Теоремы Хивуда и Петерсена. Теорема Аартса — де Гроота. Краткий обзор других результатов. О плоских 3-хроматических графах (теоремы Грётца и Грюнбаума). О раскраске вершин графов на различных поверхностях. О хроматическом классе плоского графа 452

Заключение первой части

§ 49. Приложения и обобщения графов. Краткий обзор важнейших областей приложения графов и отдельных приложений некоторых вопросов теории графов. Примеры обобщений понятия графа.	477
§ 50. Дальнейшие перспективы. Алгоритмические и метатеоретические проблемы теории графов; практическая и статистическая эффективность конечных алгоритмов. Важнейшие направления развития современной теории графов. Краткий обзор содержания второй части книги.	501
Литература	515
Примечания	543

ОТ АВТОРА

Предлагаемая монография основана на материале лекций, которые были прочитаны автором в Новосибирске, Киеве, Риге, Ташкенте, Ереване, Тбилиси и Самарканде для студентов и преподавателей университетов, сотрудников различных научно-исследовательских институтов и вычислительных центров. Все новые результаты автора и других математиков, вошедшие в монографию, подробно обсуждались на семинаре по теории графов в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР и Новосибирском университете.

Многочисленным участникам семинаров, слушателям лекций и другим советским и зарубежным коллегам, беседы и переписка с которыми способствовали появлению этой книги и перечислить которых здесь нет возможности, автор выражает глубокую благодарность. Особо хочется отметить, что доказательства многих теорем удалось значительно упростить благодаря ценным советам сотрудника Института математики В. Г. Визинга. Немалую помощь при исправлении ошибок и при подготовке рукописи к печати оказали автору Я. Я. Калнынь, С. Е. Маркосян, Ж. К. Адылов, К. А. Зарецкий, Э. А. Капкаев и Т. Е. Зыкова.

Невозможно обойти благодарностью и самых маленьких помощников — Сережу, Лию и Сашу, которые вдохновляли автора и не мешали ему абстрактно мыслить, несмотря на объективную трудность: старшему в это время было всего 5 лет.

ВВЕДЕНИЕ

Скажем прямо: теория графов — не переворот в науке, появление этих «дворянских титулов» на математической арене не означает покушения на основы математики и не вносит каких-либо идей, недоступных большинству современников и ожидающих своего полного признания лишь от потомков. Задачи на графы, как правило, просты и наглядны по своей постановке, среди них немало и таких, которые требуют от решающего не больших математических знаний и способностей, чем давно известная задача о волке, козе и капусте, а многие более трудные тоже можно решать по отдельности, без построения общих теорий и обладая лишь достаточным запасом если не таланта, то хотя бы терпения и свободного времени. Что же касается, например, знаменитой проблемы четырех красок, уже справившей потихоньку свой столетний юбилей, то она долгое время рассматривалась как изысканная, не связанная с главными направлениями развития математики и не имеющая к тому же никакого практического значения.

Возникновение теории графов как отдельной математической дисциплины принято датировать 1936 годом, когда вышла в свет монография Д. Кёнига «Теория конечных и бесконечных графов». До этого графы встречались в разных областях науки и практики, а также в многочисленных головоломках под самыми различными названиями, не объединенные общей теорией. Книга Д. Кёнига представляет весьма общую и полную для того времени систематизацию фактов и содержит ряд новых результатов, а также идей, получивших дальнейшее развитие в трудах других математиков (сам Денеш Кёниг трагически погиб во время Второй мировой войны).

После выхода упомянутой книги количество исследований по теории графов начинает быстро расти, появляются некоторые общие методы. Так, замечательная комбинаторная тео-

рема, установленная Д. Пойя в 1937 г., и его метод производящих функций позволили решать многие задачи на подсчет числа различных графов того или иного вида, встречающихся в химии, физике, социологии и других областях. Язык теории графов оказался весьма удобным для развития так называемого метода чередующихся цепей, идея которого восходит еще к Е. Эгервари (1931) и который под названием «венгерского алгоритма» успешно применяется теперь в некоторых разделах теоретической и прикладной математики, в первую очередь в математической экономике. Постепенно обнаруживалось также, что некоторые задачи алгебры, теории чисел, геометрии, теории множеств, топологии и даже классического анализа допускают формулировку на языке чистой теории графов, причем в отдельных случаях это помогает их решать или сводить друг к другу. Однако, несмотря на значительные успехи теории графов, большинство математиков не торопилось признавать ее самостоятельной дисциплиной и не видело особой нужды в том, чтобы как-то форсировать ее дальнейший рост.

Положение резко изменилось в связи с бурным развитием математической логики, машинной математики, автоматки, кибернетики, теории информации, математической экономики, теории игр, исследования операций, математической лингвистики и других областей, где, в отличие от классического анализа непрерывных величин, на первый план выдвигаются рассуждения и построения дискретно-комбинаторного характера. Сейчас количество важных практических и теоретических задач самого разнообразного конкретного содержания и самой различной степени сложности, сводящихся к задачам и проблемам чистой теории графов, растет столь быстро, что для решения их «в розницу» кустарными методами или остроумными индивидуальными приемами не хватает и не может хватать квалифицированных работников. Единственный выход — учиться решать эти задачи «оптом», используя, с одной стороны, новейшие достижения и идеи теоретической математики, а с другой стороны, современную вычислительную технику.

Попытки целиком подвести теорию графов под какие-либо из уже сложившихся разделов математики (алгебра, комбинаторная топология, математическая логика) оказались несостоятельными. Правда, аппарат алгебры нередко удается использовать здесь не только как вычислительное средство, но и как орудие исследования, однако в изучении графов слишком большую роль играет чисто комбинаторное искусство, недостаточно охваченное алгебраической наукой. Теории гра-

фов нужен свой специфический аппарат, прочно опирающийся на алгебру и насквозь пронизанный комбинаторикой.

Чисто практические задачи, формулируемые при помощи графов, обычно таковы, что их принципиально можно решить без всякой теории, полным перебором всех случаев. Не скажут ли здесь свое решающее слово быстродействующие вычислительные машины? Нет, на одни только машины рассчитывать нельзя, ибо полный перебор требует, вообще говоря, такого количества операций, что даже для графов не более чем с двадцатью вершинами выяснение некоего конкретного вопроса, касающегося структуры заданного конкретного графа, может потребовать десятки лет машинного счета. Таким образом, если попытаться ограничить роль графов сугубо прикладными финитными задачами, то и в этом случае не обойтись без построения общей теории и общих методов.

Современные тенденции отчасти нашли свое выражение в монографиях К. Бержа «Теория графов и ее применения» (1958, русский перевод 1962), О. Оре «Теория графов» (1962, русский перевод 1968) и некоторых других (более специального назначения), однако многие основополагающие идеи и результаты содержатся пока только в оригинальных статьях и не охвачены единой монографией. К тому же до сих пор отсутствует четкая рубрикация теории графов, а в ее определениях и обозначениях царит такой разнобой, что авторы большинства работ вынуждены начинать с разъяснения, под какими именно названиями и символами скрываются в данной работе давно известные понятия.

Наша монография ставит целью хотя бы частично восполнить этот пробел. В ней содержится классификация важнейших вопросов и основных направлений развития современной теории конечных графов и излагаются наиболее интересные ее результаты, методы и проблемы на основе единой терминологии и символики. Книга состоит из двух частей: «Проблемы» и «Методы».

В первой части дано общее определение графа, которое охватывает и такие случаи, когда при вершине может быть одна или несколько петель, пара вершин может соединяться более чем одним ребром, в графе могут одновременно присутствовать как направленные, так и ненаправленные ребра; определение не охватывает лишь графов со взвешенными элементами — эти объекты, являющиеся, по существу, не графами, а функциями, заданными на элементах графа, впоследствии назовем графоидами. Затронуты почти все направления теории конечных графов, однако в некоторых случаях пришлось ограничиться

кратким обзором. Результаты первой части группируются по своему содержанию, а не по способу получения; бóльшая часть их выводится посредством общих рассуждений комбинаторно-логического характера с конечными множествами и не требует предварительного создания специального аппарата. Ряд проблем только ставится, а решение некоторых из них откладывается до второй части книги. О приложениях говорится лишь в Заключение (§ 49); тем, кто желает познакомиться хотя бы с некоторыми приложениями раньше, можно рекомендовать популярную книгу О. Оре (6/1963, русск. 1966), а также книгу Дж. Авондо-Бодио (1962, русск. 1966), посвященную экономическим приложениям графов (из другой популярной литературы, не переведенной на русский язык, отметим книгу И. Седлачека — 4/1964 и статью Л. Мураккини и А. Гирлянды — 1965).

Во второй части сделана попытка систематизации общих методов и подходов, уже сложившихся или явно намечающихся в теории графов; решаемые здесь конкретные задачи служат главным образом для иллюстрации методов. Все изложение основано на фактическом материале первой части, причем теперь находят свое развитие некоторые идеи, фигурировавшие ранее лишь в виде отдельных искусственных приемов. Ряд методов, изучаемых во второй части, применим к гораздо более широким классам объектов, чем графы и даже графоиды, однако мы рассматриваем их приложения только к теории графов. Что же касается таких принципиальных вопросов, как, например, доказательство логической неразрешимости теории конечных графов (т. е. невозможности единого алгоритма для решения всех ее проблем), то они относятся к компетенции математической логики и для теории графов являются уже метатеорией; в книге мы лишь упоминаем об этих результатах. Возможно, что и некоторые конкретные трудные проблемы, такие как проблема четырех красок, неразрешимы в рамках самой теории графов и требуют теоретико-логического исследования в плане аксиоматической арифметики или какой-нибудь аксиоматической комбинаторики.

Библиография включает только те работы по теории графов и ее приложениям, на которые в тексте книги имеются ссылки. Каждая ссылка сопровождается указанием года публикации, причем если библиографический список содержит более одной работы данного автора (или группы авторов), то ссылка имеет вид дроби, числителем которой служит порядковый номер работы в списке, а знаменателем — год ее публикации, например: К. Чулик (2/1959). Литература не по теории графов

в библиографию не включена и упоминается непосредственно в тексте книги. Обширную библиографию по теории графов и ее приложениям (более 1500 названий) с систематическим указателем предполагается выпустить отдельным изданием.

Почти все понятия из теории множеств, алгебры и математической логики, которые встречаются в книге, охвачены первыми двумя главами книги А. Г. Куроша «Лекции по общей алгебре» (М., Физматгиз, 1962), главами 1, 2 и 5 книги Дж. Кемени, Дж. Снелла и Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» (М., ИЛ, 1963, 1965) и книгой Л. А. Калужнина «Что такое математическая логика?» (М., «Наука», 1964). При изучении топологических свойств графов, занимающем в данной монографии весьма скромное место (в первой части — только § 47 и § 48), требуется знакомство читателя с элементами топологии.

Переходя к списку употребляемых нами понятий и обозначений, заметим, что все эти понятия трактуются чисто содержательно, безотносительно к выбору системы аксиом.

$x \in A$ — «элемент x принадлежит множеству A »;

$x \notin A$ — «элемент x не принадлежит множеству A »;

$A \subseteq B$ — « A есть подмножество множества B »;

$A \subset B$ — « $A \subseteq B$ и $A \neq B$ »;

$A \not\subseteq B$ — « A не есть подмножество множества B »;

\overrightarrow{xy} — упорядоченная пара элементов x, y ;

\widetilde{xy} — неупорядоченная пара элементов x, y ;

\emptyset — пустое множество;

$|A|$ — количество элементов (мощность) множества A ;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B ;

$\bigcup_{i \in I} A_i$ — объединение множеств A_i , где i пробегает индексное множество I ;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B ;

$\bigcap_{i \in I} A_i$ — пересечение множеств A_i , где i пробегает индексное множество I ;

$A \setminus B$ — множество тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B (при этом не предполагается, что обязательно $B \subseteq A$);

$\neg \mathcal{A}$ — «не \mathcal{A} » (логическое отрицание высказывания \mathcal{A});

$\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ — « \mathcal{A} и \mathcal{B} » (конъюнкция высказываний \mathcal{A}, \mathcal{B});

$\big\&_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ — конъюнкция высказываний $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ (при

$n = 0$ считается истинным высказыванием);

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ — « \mathcal{A} или \mathcal{B} » (дизъюнкция высказываний \mathcal{A} , \mathcal{B} , допускающая их одновременную истинность);

$\bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ — дизъюнкция высказываний $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ (при $n = 0$ считается ложным высказыванием);

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ — «из \mathcal{A} следует \mathcal{B} », «если \mathcal{A} , то \mathcal{B} » (логическое следствие, или импликация);

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ — « \mathcal{A} равнозначно \mathcal{B} » (необходимое и достаточное условие, логическая равносильность);

$\forall x \in A \mathcal{A}(x)$ — «для любого элемента x множества A истинно высказывание $\mathcal{A}(x)$ об этом элементе» (логическая формула с квантором общности по элементу);

$\forall X \subseteq A \mathcal{A}(X)$ — «для любого подмножества X множества A истинно высказывание $\mathcal{A}(X)$ об этом подмножестве» (логическая формула с квантором общности по множеству);

$\exists x \in A \mathcal{A}(x)$ — «существует хотя бы один такой элемент x в множестве A , что высказывание $\mathcal{A}(x)$ об этом элементе истинно» (логическая формула с квантором существования по элементу);

$\exists X \subseteq A \mathcal{A}(X)$ — «существует такое подмножество X множества A , что истинно высказывание $\mathcal{A}(X)$ об этом подмножестве» (логическая формула с квантором существования по множеству);

$Q(x)$ — «элемент x обладает свойством Q » (одноместный предикат);

$R(x, y)$ — «элемент x находится в отношении R к элементу y » (двуместный предикат);

$P(x, u, y)$ — «упорядоченная тройка элементов x, u, y находится в отношении P » (трехместный предикат);

$\{x/\mathcal{A}(x)\}$ — множество всех тех элементов x , для которых истинно высказывание $\mathcal{A}(x)$;

$\{\vec{x}\vec{y}/\mathcal{A}(x, y)\}$ — множество всех упорядоченных пар $\vec{x}\vec{y}$, для которых истинно высказывание $\mathcal{A}(x, y)$;

$\{\widehat{x}\widehat{y}/\mathcal{A}(x, y)\}$ — множество всех неупорядоченных пар $\widehat{x}\widehat{y}$, для которых истинно высказывание $\mathcal{A}(x, y)$ (используется лишь в случае, когда $\forall x \in A \forall y \in A [\mathcal{A}(x, y) \Leftrightarrow \mathcal{A}(y, x)]$, где A — множество, из которого берутся элементы x и y);

\doteq — «равно по определению» (например, $x^2 \doteq x \cdot x$);

\Leftrightarrow — «равнозначно по определению» (например, $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$); оба эти символа будем ставить, в частности, и между различными обозначениями одного и того же объекта, когда обозначения фигурируют в книге впервые (так, вводя три различных обозначения производной в мате-

матическом анализе, мы могли бы написать

$$f'(x) \doteq \frac{df(x)}{dx} \doteq D_x f(x) \doteq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При употреблении кванторов мы допускаем следующие типы вольностей в обозначениях:

вместо $\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in B \exists t \in B \forall u \in A \mathfrak{A}(x, y, z, t, u)$ пишем просто $\forall x, y \forall z \exists t \forall u \mathfrak{A}(x, y, z, t, u)$, когда из смысла высказывания \mathfrak{A} ясно, какое именно из множеств пробегает каждая переменная x, y, z, t, u ;

если $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т. е. элементы множества A пронумерованы, то вместо $\forall x_i \exists x_j \mathfrak{A}(x_i, x_j)$ пишем $\forall i \exists j \mathfrak{A}(x_i, x_j)$. Не будем также объявлять войну довольно-таки распространенной привычке понимать под словом «определитель» или «минор» то число, то матрицу, когда из контекста ясно, о чем идет речь (в противном случае мы лишились бы права говорить о «строке определителя» и т. п.).

Через $[x]$ и $\lceil x \rceil$ мы обозначим соответственно наибольшее целое число, не превосходящее x (т. е. целую часть от x), и наименьшее целое число, не меньшее x .

$[N]_{\text{mod } k}$ означает вычет числа N по модулю k , т. е. наименьшее целое неотрицательное число, дающее при делении на k тот же остаток, что и N .

Не будем напоминать общеизвестные понятия бинарного отношения, эквивалентности, полугруппы, группы, кольца и поля. Важную роль в нашей книге играет следующее обобщение понятия кольца.

Множество M с заданными в нем операциями «+» (сложение) и «·» (умножение) называется *полукольцом*, если

1) M образует относительно сложения коммутативную полугруппу с нулем «0»;

2) M является группоидом относительно умножения *;

3) $\forall x \in M (x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0)$.

Естественным образом определяется подполукольцо как такое подмножество $M' \subseteq M$, которое образует полукольцо относительно тех же самых операций «+» и «·». Полукольцо называется коммутативным, соответственно ассоциативным или дистрибутивным, если операция умножения коммутативна, соответственно ассоциативна или связана со сложением дистрибутивными законами (правым и левым). Полукольцо может обладать или не обладать единицей 1.

*) Т. е. операция умножения каждой упорядоченной паре \overrightarrow{xu} элементов $x, u \in M$ относит однозначно определяемый элемент $x \cdot u$ того же множества M (см. § 1 главы 2 в упомянутой книге А. Г. Куроша).

Каждое кольцо, а тем более поле, есть частный случай полукольца. В теории графов часто применяется поле вычетов $D \{0,1\}$ целых чисел по модулю два:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 1 + 1 = 0, & 0 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 &= 1 + 0 = 1, & 1 \cdot 1 &= 1. \end{aligned}$$

Полукольцами являются и булевы алгебры; среди них особенно важна для нас булева алгебра $B \{0,1\}$ из двух элементов:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, & 0 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 &= 1 + 0 = 1 + 1 = 1, & 1 \cdot 1 &= 1. \end{aligned}$$

Отметим еще полукольцо всех целых неотрицательных чисел относительно обычных операций сложения и умножения; оно превращается в $D \{0,1\}$ при наложении дополнительного условия $2 = 0$ и превращается в $B \{0,1\}$ при наложении условия $2 = 1$. Во всех трех примерах полукольцо коммутативно, ассоциативно, дистрибутивно и обладает единицей. С примерами полуколец, не обязательно наделенных упомянутыми свойствами, мы встретимся уже в начале первой главы (см. § 2).

Очень часто то или иное конкретное полукольцо M будет задаваться системой образующих элементов и определяющих соотношений. При этом равенство вида $\omega = 1$, где ω — элемент из M , выраженный через образующие, означает одновременно и наличие в M единицы, и совпадение ее с ω ; иначе говоря, $\omega = 1$ есть краткая запись совокупности всевозможных соотношений вида $x\omega = \omega x = x$, где $x \in M$.

Ввиду чрезмерной общности понятия полукольца вряд ли можно вывести какие-нибудь интересные свойства полуколец непосредственно из определения этого понятия. Мы используем его в общей форме главным образом для того, чтобы избежать многочисленных повторений в определениях тех конкретных алгебраических систем, которые нужны в теории графов. Однако ряд полуколец специального вида, встречающихся при этом, относится к числу почти не изученных алгебраических систем, и построение достаточно полных теорий таких полуколец имело бы огромное значение для всей теории графов и вообще для дискретной математики.

АЗБУКА ТЕОРИИ ГРАФОВ

§ 1. Определение графа

Понятие графа служит для математического изучения таких ситуаций, когда имеются две совокупности объектов, причем объекты второй группы играют роль связей, соединяющих пары предметов первой группы друг с другом (конкретно речь может идти, например, об отдельных деталях электрической схемы и соединяющих проводниках; об учреждениях и курьерах, доставляющих бумаги из одного в другое; о людях и отношениях любви, дружбы или родства между ними; о целых числах и отношении делимости; и т. д.). Для одной и той же пары предметов допускается одновременное наличие нескольких связей, среди которых могут быть и односторонние и двусторонние; возможны связи, соединяющие предмет с самим собой.

Общую теорию удалось пока развить достаточно далеко лишь в предположении, что каждая связка соединяет только одну пару предметов. Чтобы не утратить при этом многих приложений, надо условиться не рассматривать связи разных пар как абсолютно тождественные: например, иметь дело с конкретными брачными свидетельствами (за определенными номерами), а не с «понятием брачного свидетельства вообще», и даже делимость 6 на 3 и делимость 8 на 4 трактовать как различные индивидуумы (пусть с одними и теми же свойствами).

Точное определение графа состоит в том, что задаются два множества (первое из них обязательно непустое) и предикат, указывающий, какую пару элементов первого множества соединяет тот или иной элемент второго. Именно, дан *граф*

$$L = (X, U; P),$$

если даны два множества $X \doteq X_L \neq \emptyset, U \doteq U_L (X \cap U = \emptyset)$ и трехместный предикат $P \Leftrightarrow P_L \Leftrightarrow P (, ,)$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

А. P определен на всех таких упорядоченных тройках элементов x, u, y , для которых $x, y \in X$ и $u \in U$;

Б. $\forall u \exists x, y \{P(x, u, y) \& \forall x', y' [P(x', u, y') \Rightarrow \Rightarrow (x = x' \& y = y') \vee (x = y' \& y = x')]\}^*$.

Элементы множества X называются *вершинами*, элементы U — *ребрами*, а предикат P — *инцидентором* графа L ; высказывание $P(x, u, y)$ читается так: *ребро u соединяет вершину x с вершиной y* , или *u соединяет пару \overrightarrow{xy} (упорядоченную) вершин*. Условие Б говорит о том, что каждое ребро графа соединяет какую-либо пару \overrightarrow{xy} его вершин, но кроме этой пары может (хотя и не обязано) соединять еще только обратную пару \overleftarrow{yx} .

Легко проверить, что для каждого $u \in U$ истинно одно и только одно из следующих трех высказываний:

$$\exists x, y [x \neq y \& P(x, u, y) \& \neg P(y, u, x)],$$

$$\exists x P(x, u, x),$$

$$\exists x, y [x \neq y \& P(x, u, y) \& P(y, u, x)].$$

В соответствии с этим множество U разбивается на три попарно не пересекающихся подмножества

$$\vec{U}, \dot{U}, \tilde{U}.$$

Элементы множества \vec{U} (для которых истинно первое из трех высказываний) будем называть *дугами*, элементы множества \dot{U} (для которых истинно второе высказывание) — *петлями*, а элементы \tilde{U} (для которых истинно третье высказывание) — *звеньями*. Ребро, отличное от петли (т. е. являющееся либо дугой, либо звеном), кратко называем *непетлей*.

Пусть для некоторой тройки элементов x, u, y истинно высказывание $P(x, u, y)$, т. е. ребро u соединяет вершину x с вершиной y ; если при этом еще $u \in \vec{U}$, то говорим: *дуга u идет из вершины x в вершину y* , — а если $u \in \dot{U}$ (и, значит, $y = x$), то говорим: *u есть петля при вершине x* . Две вершины x и y называются *смежными*, если существует по крайней

*) Мы пишем, как условились во Введении, $\forall u$ вместо $\forall u \in U$ и т. д., поскольку в силу условия А местоположение предметных переменных в предикатном символе $P(, ,)$ недвусмысленно говорит о том, какое из множеств X, U пробегает каждая переменная, связанная квантором.

мере одно соединяющее их ребро, т. е. если высказывание

$$J(x, y) \Leftrightarrow J_L(x, y) \Leftrightarrow \exists u [P(x, u, y) \vee P(y, u, x)]$$

истинно; в частности, вершина смежна сама с собой в том и только в том случае, когда при ней имеется хотя бы одна петля.

С помощью инцидентора P определим еще три двуместных предиката

$$I^+(x, u) \Leftrightarrow I_L^+(x, u) \Leftrightarrow \exists z P(x, u, z),$$

$$I^-(x, u) \Leftrightarrow I_L^-(x, u) \Leftrightarrow \exists z P(z, u, x),$$

$$I^\circ(x, u) \Leftrightarrow I_L^\circ(x, u) \Leftrightarrow P(x, u, x),$$

а также двуместный предикат

$$I(x, u) \Leftrightarrow I_L(x, u) \Leftrightarrow I^+(x, u) \vee I^-(x, u) \vee I^\circ(x, u).$$

Если $u \in \vec{U}$, то в случае истинности высказывания $I^+(x, u)$ мы говорим, что дуга u исходит из вершины x , а в случае истинности $I^-(x, u)$ — что дуга u заходит в вершину x (быть одновременно истинными эти высказывания не могут ни для какой дуги). При произвольном $u \in U$ мы говорим, что ребро u и вершина x инцидентны или не инцидентны, смотря по тому, истинно или ложно для них высказывание $I^+(x, u)$; в частности, истинность $I^\circ(x, u)$ означает, что u — петля при вершине x . Два ребра u и v называются смежными, если существует хотя бы одна инцидентная им обоим вершина, т. е. если истинно высказывание

$$K(u, v) \Leftrightarrow \exists x [I(x, u) \& I(x, v)];$$

в частности, всякое ребро смежно само с собой.

Инцидентор P однозначно определяется заданием трех предикатов I^+ , I^- и I° , именно:

$$P(x, u, y) \Leftrightarrow [x \neq y \& I^+(x, u) \& \\ \& I^-(y, u)] \vee [x = y \& I^\circ(x, u)],$$

однако из-за относительной громоздкости этой формулы избавляться полностью от трехместного предиката P в общем случае нецелесообразно*.

*) Г. Избицкий (4/1960) обращает внимание на то, что попытка задавать граф с помощью одного двуместного предиката приводит к принципиальным трудностям. Трехместным предикатом пользовались Т. Галлаи (см. Т. Грюнвальд, 1938), К. Вагнер (2/1960) и другие авторы.

Пусть $X' \subseteq X$ и $U' \subseteq U$ — подмножества вершин и ребер графа $L = (X, U; P)$, а P' — предикат, индуцированный инцидентором P на этих подмножествах. Если X' и U' выбраны так, что они вместе с P' удовлетворяют всем пунктам определения графа, то граф $L' = (X', U'; P')$ называется *частью* графа L , порожденной подмножествами X' и U' . Ясно, что произвольно заданная пара подмножеств порождает часть тогда и только тогда, когда

$$X' \neq \emptyset \& \forall u \in U' \exists x, y \in X' P(x, u, y), \quad (*)$$

иначе говоря, включив в U' некоторое ребро графа L , необходимо также включить в X' те вершины L , которые соединяются этим ребром. К числу частей графа L относится и весь L ; прочие его части мы называем, как принято в теории множеств, правильными, или собственными. Предикат P' , индуцированный предикатом P , будем в дальнейшем писать без штриха.

Особо важную роль в теории графов играют следующие два типа частей. Часть $L' = (X', U'; P)$ называется *подграфом* графа $L = (X, U; P)$, порожденным подмножеством вершин $X' \subseteq X$, если подмножество ребер $U' \subseteq U$ выбрано так, что выполняется дополнительное условие

$$\forall x, y \in X' \forall u \in U [P(x, u, y) \Rightarrow u \in U'], \quad (**)$$

т. е. при образовании части L' сохранены все те ребра L , которые соединяют между собой сохраняемые вершины. После произвольного выбора непустого подмножества $X' \subseteq X$ подмножество $U' \subseteq U$, удовлетворяющее (**), определяется однозначно:

$$U' = \{u / u \in U \& \exists x, y \in X' P(x, u, y)\},$$

и условие (*) для такой пары X', U' выполнено, очевидно, автоматически. Часть $L' = (X, U'; P)$, в которой $X' = X$, называется *суграфом* графа L , порожденным подмножеством ребер U' ; ясно, что при $X' = X$ высказывание (*) истинно для любого $U' \subseteq U$.*

Два графа $L = (X, U; P)$ и $L' = (X', U'; P)$ называются *изоморфными*, если между их вершинами, а также между их

*) К. Берж (1/1958, русск. 1962) называет суграф «частичным графом», а часть — «частичным подграфом». У О. Оре в оригинале (3/1962) подграф назван «высеченным графом» (section graph), а суграф — «подграфом».

ребрами можно установить взаимно однозначное соответствие

$$X \leftrightarrow X', \quad U \leftrightarrow U',$$

сохраняющее инцидентор, т. е. такое, что

$$\forall x, y \in X \forall x', y' \in X' \forall u \in U \forall u' \in U' \{x \leftrightarrow x' \& \\ \& y \leftrightarrow y' \& u \leftrightarrow u' \Rightarrow [P(x, u, y) \Leftrightarrow P'(x', u', y')]\}.$$

Отношение изоморфизма графов рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. представляет собой эквивалентность. В дальнейшем нас будут интересовать главным образом такие свойства графов, которые сохраняются при замене графа любым ему изоморфным; тем самым оказываются несущественными как природа элементов, составляющих множества X и U , так и конкретный смысл отношения (предиката) P . Но и в процессе такого абстрактного изучения все-таки требуется индивидуализация элементов, иначе слова «эта вершина», «это ребро», «этот подграф» и т. п., даже подкрепляемые указующим жестом руки, не будут иметь математического смысла. Поэтому мы всегда предполагаем, что вершины и ребра графа либо сами являются определенными объектами (буквами, числами и т. п.), либо помечены различными индексами из каких-либо конкретных индексных множеств (обозначены буквами или пронумерованы)*, и два графа, различающиеся лишь индексацией элементов, рассматриваем как изоморфные, но не как тождественные.

Все введенные понятия и обозначения поясним на примере. Пусть

$$X = \{a, b, c, d\}, \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

а инцидентор P определен так: одиннадцать значений

$$P(a, 1, a); \quad P(a, 2, a); \quad P(a, 3, b); \quad P(a, 4, b);$$

$$P(b, 4, a); \quad P(a, 5, c); \quad P(a, 6, c); \quad P(c, 6, a);$$

$$P(c, 7, b); \quad P(c, 8, b); \quad P(b, 9, c)$$

истинны, остальные 133 значения ложны.

Здесь

$$\vec{U} = \{3, 5, 7, 8, 9\}, \quad \dot{U} = \{1, 2\}, \quad \tilde{U} = \{4, 6\}.$$

*) Это, однако, не обязывает нас на каждом рисунке, изображающем граф, фактически проставлять все индексы.

На рис. 1 ребра графа $L = (X, U; P)$ изображены отрезками, соединяющими инцидентные им вершины, причем стрелка на каждой дуге показывает, из какой вершины в какую идет эта дуга. Ясно, например, что высказывания $I^+(a, 1)$, $I^-(a, 1)$, $I^0(a, 1)$, $I(a, 1)$, $I^+(a, 3)$, $I^-(a, 3)$, $I^+(a, 4)$, $I^-(a, 4)$, $I(a, 4)$ истинны, а высказывания $I^-(a, 3)$, $I^+(a, 7)$, $I^-(a, 7)$, $I^0(a, 3)$, $I^0(a, 4)$, $I^0(b, 1)$, $I^0(d, 1)$ ложны; вершина a смежна сама с собой, вершины a, b, c попарно смежны, вершина d не смежна ни с какой вершиной, т. е. $J(a, a)$, $J(a, b)$, $J(a, c)$, $J(b, c)$ истинны, а $J(d, a)$ и т. п. ложны; ребра 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 3 и 4, 7 и 8, 8 и 8 смежны, а ребра 1 и 8 не смежны, т. е. $K(1, 2)$ и т. д. истинны, а $K(1, 8)$ ложно; дуга 7 идет из вершины c в вершину b , звено 4 соединяет вершины a и b , ребро 2 является петлей при вершине a . Подграф $L' = (X', U'; P)$, для которого $X' = \{a, b\}$, изоморфен подграфу $L'' = (X'', U''; P)$, для которого $X'' = \{a, c\}$, но не изоморфен подграфу L''' , порождаемому множеством вершин $X''' = \{b, c\}$ (рис. 2);

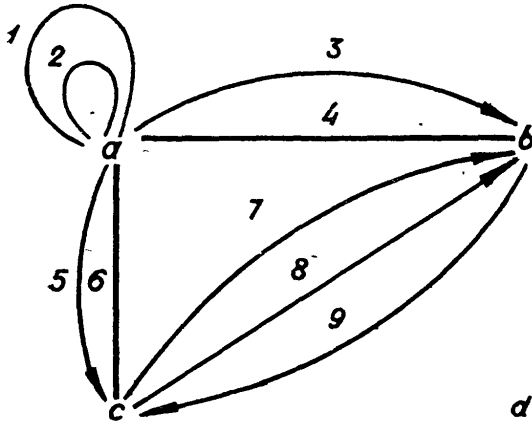


Рис. 1.

которого $X' = \{a, b\}$, изоморфен подграфу $L'' = (X'', U''; P)$, для которого $X'' = \{a, c\}$, но не изоморфен подграфу L''' , порождаемому множеством вершин $X''' = \{b, c\}$ (рис. 2);

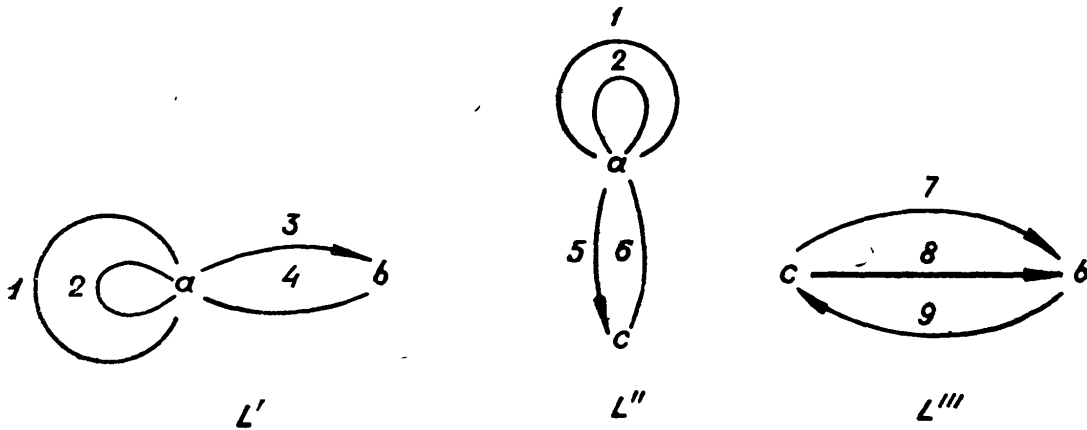


Рис. 2

Изоморфизм между L' и L'' можно установить двумя способами:

$$a \leftrightarrow a; b \leftrightarrow c; 1 \leftrightarrow 1; 2 \leftrightarrow 2; 3 \leftrightarrow 5; 4 \leftrightarrow 6$$

или

$$a \leftrightarrow a; b \leftrightarrow c; 1 \leftrightarrow 2; 2 \leftrightarrow 1; 3 \leftrightarrow 5; 4 \leftrightarrow 6.$$

Из суграфов L_1, L_2, L_3 , для которых соответственно $U_1 = \{1, 3\}$, $U_2 = \{2, 4\}$, $U_3 = \{2, 5\}$, первый и третий изоморфны между собой, но не изоморфны второму (рис. 3). Часть L_0 , для которой $X_0 = \{a\}$, $U_0 = \emptyset$, изоморфна подграфу с множеством вершин $\{d\}$, но не изоморфна подграфу с множеством

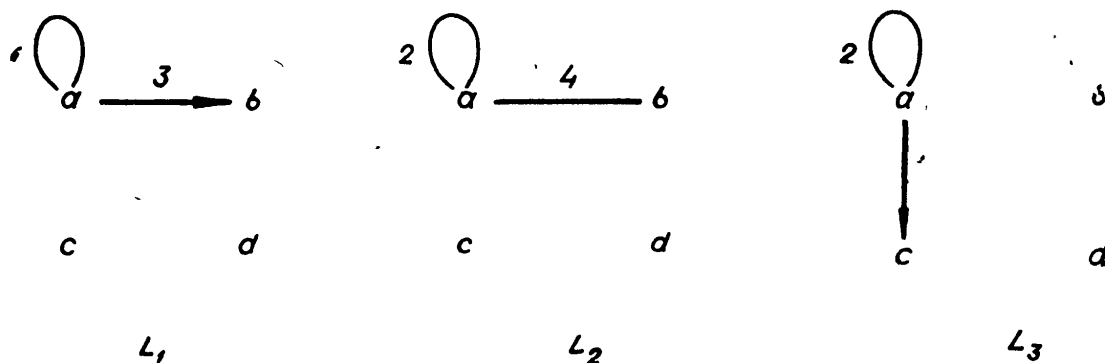


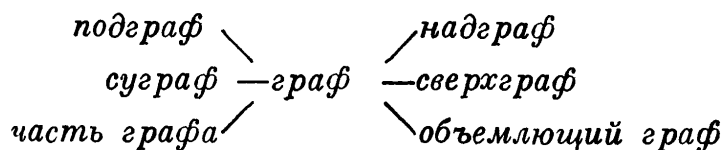
Рис. 3

вершин $\{a\}$; последний же не только изоморфен, но и просто совпадает с частью L^0 , для которой $X^0 = \{a\}$, $U^0 = \{1, 2\}$. Наконец, пара подмножеств

$$Y = \{a, b, d\}, V = \{1, 5, 7\}$$

не определяет никакой части графа L .

Для большей гибкости терминологии введем еще три определения, легко запоминаемые с помощью следующей таблицы:



Именно, если L' — подграф графа L , то сам L является надграфом графа L' ; если L' — суграф для L , то L — сверхграф для L' ; если L' — часть графа L , то L — граф, объемлющий L' .

В дальнейшем мы будем рассматривать только *конечные* графы, т. е. такие $L = (X, U; P)$, у которых оба множества X и U конечны. Количество $|X|$ вершин графа L обозначается также через $n(L)$, а количество $|U|$ его ребер — через $m(L)$.

§ 2. Задание графов с помощью матриц

Чтобы задать конкретный граф, достаточно задать пару множеств X , U и инцидентор P ; последний, будучи трехместным предикатом, требует трехмерной таблицы истинности. Задавая вместо P три двуместных предиката I^+ , I^- и I° , можно обойтись тремя двумерными таблицами. Использование многозначной логики позволяет ограничиться только одной двумерной таблицей; ниже следующий способ, по существу, равносильно применению пятизначной логики, однако его проще и естественнее оформить в терминах полукольца (см. Введение). Обозначим через K свободное полукольцо с нулем θ , порожденное четырьмя образующими ξ , η , ζ , θ .

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество вершин графа $L = (X, U; P)$, а $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ — множество его ребер, которое здесь предполагаем непустым. Матрицей инцидентий (над K) этого графа называется прямоугольная таблица

$$A \doteq A_L \doteq (a_{ij})$$

($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$), элементы которой $a_{ij} \doteq a_{ij}(L)$ принадлежат полукольцу K и определяются по графу L следующим образом:

если u_j — дуга, исходящая из вершины x_i , то $a_{ij} = \xi$;

если u_j — дуга, заходящая в x_i , то $a_{ij} = \eta$;

если u_j — петля при вершине x_i , то $a_{ij} = \zeta$;

если u_j — звено, инцидентное x_i , то $a_{ij} = \theta$;

если ребро u_j и вершина x_i не инцидентны, то $a_{ij} = 0$.

Матрица инцидентий, в свою очередь, однозначно определяет граф (с пронумерованными вершинами и ребрами), ибо из смысла ее элементов следует, что

$$I^+(x_i, u_j) \Leftrightarrow a_{ij} = \xi \vee a_{ij} = \zeta \vee a_{ij} = \theta,$$

$$I^-(x_i, u_j) \Leftrightarrow a_{ij} = \eta \vee a_{ij} = \zeta \vee a_{ij} = \theta,$$

$$I^\circ(x_i, u_j) \Leftrightarrow a_{ij} = \zeta,$$

откуда

$$\begin{aligned} P(x_i, u_j, x_k) &\Leftrightarrow [x_i \neq x_k \& I^+(x_i, u_j) \& I^-(x_k, u_j)] \vee \\ &\vee [x_i = x_k \& I^\circ(x_i, u_j)] \Leftrightarrow [i \neq k \& (a_{ij} = \xi \vee a_{ij} = \zeta \vee \\ &\vee a_{ij} = \theta) \& (a_{kj} = \eta \vee a_{kj} = \zeta \vee a_{kj} = \theta)] \vee \\ &\vee [i = k \& a_{ij} = \zeta]. \end{aligned}$$

Ясно, что прямоугольная таблица с элементами $\xi, \eta, \zeta, \theta, 0$ является матрицей инцидентий некоторого графа в том и только том случае, если каждый ее столбец содержит либо один, либо два ненулевых элемента, причем если в столбце такой элемент только один, то это ζ , а если таких элементов два, то это или ξ и η , или θ и θ .*

Обозначим через $A^* \doteq A_L^*$ матрицу, полученную транспонированием матрицы инцидентий $A = A_L$. Квадратная матрица

$$B \doteq B_L \doteq A \cdot A^*$$

порядка $n = |X|$ называется *матрицей соседства вершин*, а квадратная матрица

$$H \doteq H_L \doteq A^* \cdot A$$

порядка $m = |U|$ — *матрицей соседства ребер* графа L ;**) вторая из этих матриц встречается гораздо реже первой, поэтому, говоря просто «матрица соседства», будем подразумевать матрицу соседства вершин.

Из определения матрицы $B = (b_{ij})$ непосредственно следует, что ее элементы имеют вид

$$b_{ii} = s^+(x_i) \xi^2 + s^-(x_i) \eta^2 + s^0(x_i) \zeta^2 + \tilde{s}(x_i) \theta^2,$$

$$i \neq j \Rightarrow b_{ij} = s^+(x_i, x_j) \xi \eta + s^-(x_i, x_j) \eta \xi + \tilde{s}(x_i, x_j) \theta^2,$$

где

$s^+(x_i) \doteq s_L^+(x_i)$ — количество дуг, исходящих из вершины x_i ;

*) Это условие, формально записываемое в виде

$$\begin{aligned} \bigvee_j \{ \exists_i [a_{ij} = \zeta \ \& \ \forall k (k \neq i \Rightarrow a_{kj} = 0)] \vee \exists_{ik} [i \neq k \ \& \ a_{ij} = \xi \ \& \\ \& \ a_{kj} = \eta \ \& \ \forall l (l \neq i \ \& \ l \neq k \Rightarrow a_{lj} = 0)] \vee \exists_{ik} [i \neq k \ \& \\ \& \ a_{ij} = a_{kj} = \theta \ \& \ \forall l (l \neq i \ \& \ l \neq k \Rightarrow a_{lj} = 0)] \}, \end{aligned}$$

получается посредством эквивалентных преобразований, исчисления предикатов из условия Б (§ 1), если в последнем предварительно перейти от переменных u, x, y, x', y' к индексным переменным j, i, k, i', k' и воспользоваться найденным выражением для $P(x_i, u_j, x_k)$. Такой вывод можно рекомендовать как полезное и не слишком легкое упражнение по технике преобразования логических формул, но не по теории графов.

**) Обе эти матрицы рассматривались для менее общего случая Л. М. Лихтенбаумом (4/1958, 5/1959, 6/1962).

$s^-(x_i) \doteq s_L^-(x_i)$ — количество дуг, заходящих в x_i ;

$s^0(x_i) \doteq s_L^0(x_i)$ — количество петель при вершине x_i ;

$\tilde{s}(x_i) \doteq \tilde{s}_L(x_i)$ — количество звеньев, инцидентных x_i ;

$s^+(x_i, x_j) \doteq s_L^+(x_i, x_j)$ — количество дуг, идущих из вершины x_i в вершину x_j ;

$s^-(x_i, x_j) \doteq s_L^-(x_i, x_j)$ — количество дуг, идущих из x_j в x_i ;

$\tilde{s}(x_i, x_j) \doteq \tilde{s}_L(x_i, x_j)$ — количество звеньев, соединяющих x_i с x_j ($i, j = 1, 2, \dots, n = |X|$). В дальнейшем мы будем встречаться с различными комбинациями (в основном линейными) этих количеств; соответствующие наименования и обозначения удобнее вводить по мере надобности, а сейчас ограничимся лишь следующими: назовем *степенью* вершины x графа $L = (X, U; P)$ число

$$s(x) \doteq s_L(x) \doteq s^+(x) + s^-(x) + s^0(x) + \tilde{s}(x),$$

валентностью вершины x — число

$$v(x) \doteq v_L(x) \doteq s^+(x) + s^-(x) + 2s^0(x) + \tilde{s}(x)$$

(образно говоря, валентность выражает число «усиков» при вершине, в силу чего каждая петля считается дважды). Очевидно,

$$\sum_{x \in X} v(x) = 2|U| = 2m(L).$$

Число ребер, соединяющих вершину x с другими вершинами графа L (т. е. число непетель, инцидентных x), есть

$$2s(x) - v(x) = s^+(x) + s^-(x) + \tilde{s}(x);$$

при $2s(x) - v(x) = 0$ вершина x называется *изолированной*, (в частности, *голой*, если $s(x) = 0$, или, что равносильно, $v(x) = 0$), а при $2s(x) - v(x) = 1$ — *висячей*. Естественно также ввести обозначение количества ребер, соединяющих данную пару вершин x, y графа L , именно

$$s(x, y) \doteq s_L(x, y) \doteq \begin{cases} s^+(x, y) + s^-(x, y) + \tilde{s}(x, y), & \text{если } x \neq y, \\ s^0(x), & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Переходя от матрицы инцидентий к матрице соседства вершин, мы теряем индивидуализацию ребер графа; иначе говоря, матрица B_L определяет граф L с точностью до перенумерования ребер. Эта потеря отчасти восполнится, если в ка-

честве индекса ребра использовать пару индексов инцидентных ему вершин; тогда одинаковые индексы получают лишь такие ребра, которые не слишком часто нужно фактически различать, а именно: дуги, идущие из одной и той же вершины в одну и ту же; петли при одной и той же вершине; звенья, соединяющие одну и ту же пару вершин.

Замена матрицы соседства более употребительной *матрицей смежности* $R \doteq R_L \doteq (r_{ij})$, где

$$r_{ii} \doteq s^0(x_i) \zeta^2, \quad i \neq j \Rightarrow r_{ij} \doteq b_{ij}$$

($i, j = 1, 2, \dots, n = |X|$), ни к какой дальнейшей потере информации о графе L не приводит, ибо $s^+(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n s^+(x_i, x_j)$

и т. д.

В качестве примера рассмотрим уже знакомый нам граф L , изображенный на рис. 1 (§ 1). Для него

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & \zeta & \xi & \theta & \xi & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \theta & 0 & 0 & \eta & \eta & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \theta & \xi & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2\xi^2 + 2\zeta^2 + 2\theta^2 & \xi\eta + \theta^2 & \xi\eta + \theta^2 & 0 \\ \eta\xi + \theta^2 & \xi^2 + 3\eta^2 + \theta^2 & \xi\eta + 2\eta\xi & 0 \\ \eta\xi + \theta^2 & 2\xi\eta + \eta\xi & 2\xi^2 + 2\eta^2 + \theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 2\zeta^2 & \xi\eta + \theta^2 & \xi\eta + \theta^2 & 0 \\ \eta\xi + \theta^2 & 0 & \xi\eta + 2\eta\xi & 0 \\ \eta\xi + \theta^2 & 2\xi\eta + \eta\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А когда произвольно заданная квадратная матрица порядка n над свободным полукольцом K является матрицей смежности какого-то графа L ? Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы ее элементы имели вид

$$r_{ii} = s_i^0 \cdot \zeta^2,$$

$$i \neq j \Rightarrow r_{ij} = s_{ij}^+ \cdot \xi\eta + s_{ij}^- \cdot \eta\xi + \tilde{s}_{ij} \cdot \theta^2,$$

где $s_i^0, s_{ij}^+, s_{ij}^-, \tilde{s}_{ij}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$s_{ij}^+ = s_{ji}^-, \tilde{s}_{ij} = \tilde{s}_{ji}$$

($i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$); нахождение аналогичного условия в случае матрицы соседства вершин предоставим читателю.

Что касается матрицы $H = (h_{ij})$ соседства ребер, то, как нетрудно проверить, ее элемент h_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m = |U|$) следующим образом зависит от типа и взаимного расположе-

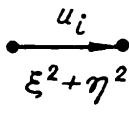

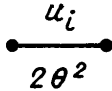
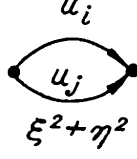
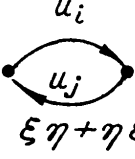
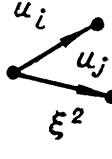
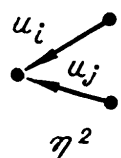
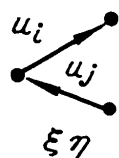


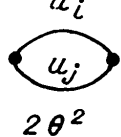
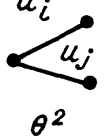
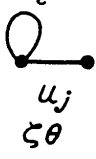
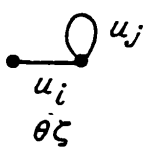
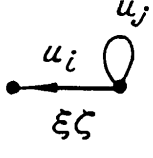
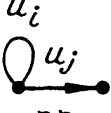
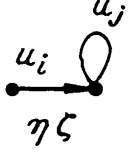
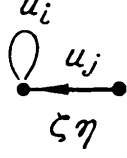
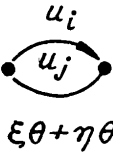
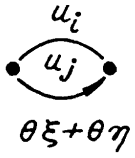

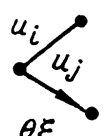
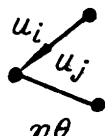
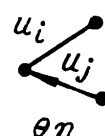
$h_{ii} =$						
$h_{ij} =$						
						
						
						
						

Рис. 4

ния ребер u_i и u_{ij} : если эти ребра не смежны, то $h_{ij} = 0$, все же остальные случаи представлены на рис. 4. В рассмотренном выше примере имеем

$$H = \begin{pmatrix} \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta\xi & \zeta\theta & \zeta\xi & \zeta\theta & 0 & 0 & 0 \\ \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta\xi & \zeta\theta & \zeta\xi & \zeta\theta & 0 & 0 & 0 \\ \xi\xi & \xi\xi & \xi^2 + \eta^2 & \xi\theta + \eta\theta & \xi^2 & \xi\theta & \eta^2 & \eta^2 & \eta\xi \\ \theta\xi & \theta\xi & \theta\xi + \theta\eta & 2\theta^2 & \theta\xi & \theta^2 & \theta\eta & \theta\eta & \theta\xi \\ \xi\xi & \xi\xi & \xi^2 & \xi\theta & \xi^2 + \eta^2 & \xi\theta + \eta\theta & \eta\xi & \eta\xi & \eta^2 \\ \theta\xi & \theta\xi & \theta\xi & \theta^2 & \theta\xi + \theta\eta & 2\theta^2 & \theta\xi & \theta\xi & \theta\eta \\ 0 & 0 & \eta^2 & \eta\theta & \xi\eta & \xi\theta & \xi^2 + \eta^2 & \xi^2 + \eta^2 & \xi\eta + \eta\xi \\ 0 & 0 & \eta^2 & \eta\theta & \xi\eta & \xi\theta & \xi^2 + \eta^2 & \xi^2 + \eta^2 & \xi\eta + \eta\xi \\ 0 & 0 & \xi\eta & \xi\theta & \eta^2 & \eta\theta & \xi\eta + \eta\xi & \xi\eta + \eta\xi & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}.$$

При переходе от матрицы A_L к матрице H_L сохраняется индивидуальность ребер, но теряется индивидуальность вершин графа L . Вопрос о том, в какой мере удастся индивидуализи-

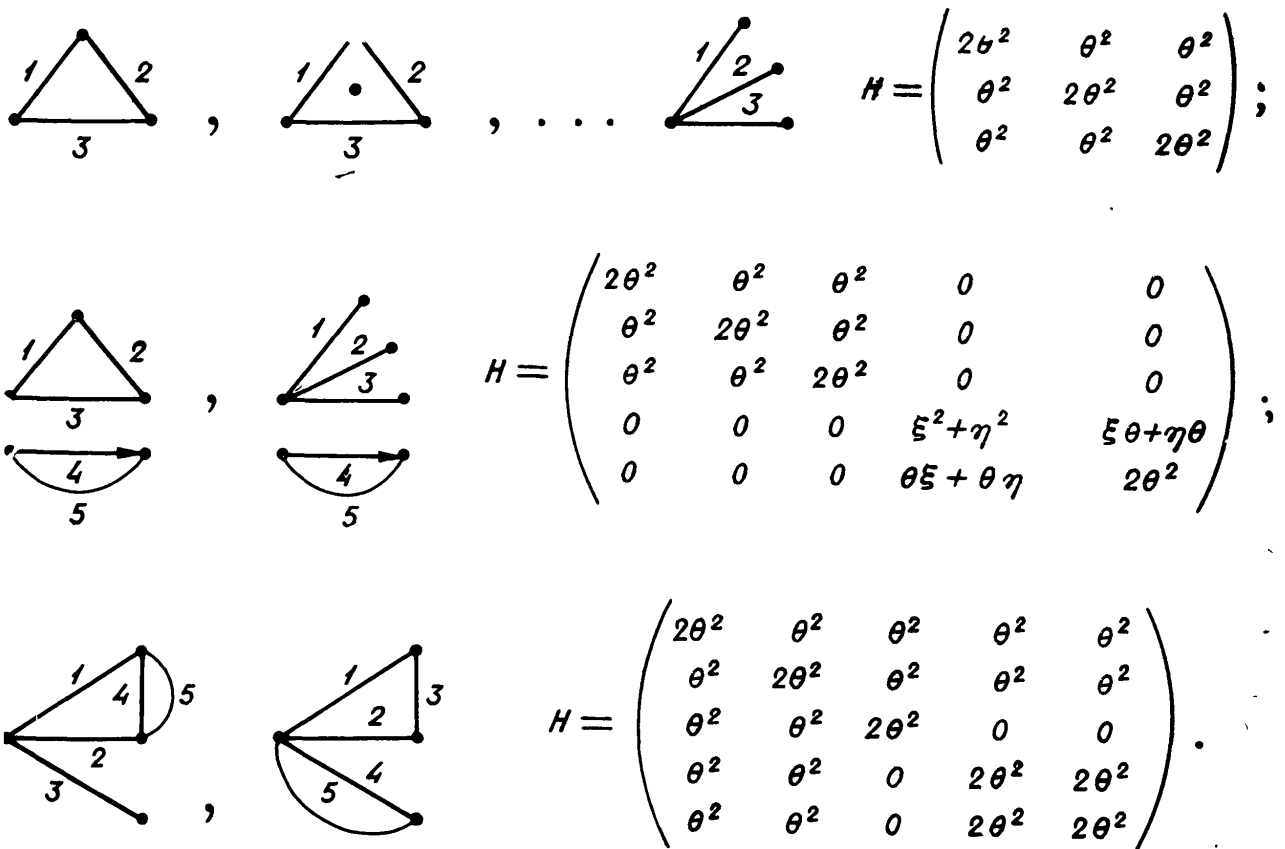


Рис. 5

ровать вершины графа, когда задана только матрица соседства его ребер, мы отложим до главы 5 (см. конец § 40), а пока лишь заметим, что неизоморфные графы могут обладать одинаково-

выми матрицами соседства ребер; примеры таких графов показаны на рис. 5. Необходимое и достаточное условие того, что произвольно заданная квадратная матрица над свободным полукольцом K служит матрицей соседства ребер некоторого графа, еще не сформулировано в компактном виде.

Во многих случаях, когда требуется лишь частичная информация о графе или когда граф заведомо имеет некоторый специальный вид, матрицы A , B , R и H удается значительно упростить, переходя от полукольца K к новому (вообще говоря, уже не свободному) путем наложения тех или иных определяющих соотношений на образующие ξ , η , ζ , θ или (что в принципе то же самое) посредством специализации исходного полукольца. Везде, где это не приводит к путанице, будем обозначать новое полукольцо прежней буквой K .

§ 3. Вопросы идентификации графов

Для графов, как и для других более или менее сложных математических объектов, возникает проблема идентификации, т. е. выяснения, тождественны ли друг другу два каким-либо способом заданных графа. Если рассматриваются графы с упорядоченными (например, пронумерованными) множествами вершин и ребер, а полукольцо K свободно, то для тождественности графов L и L' (с точностью до конкретной природы их элементов) необходимо и достаточно равенство $A_L = A_{L'}$ их матриц инцидентий. Графы, обладающие равными матрицами соседства или смежности, могут различаться, кроме природы элементов, лишь способом упорядочения ребер. Более важная *проблема изоморфизма* теоретически тоже решается просто: графы L и L' изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентий можно преобразовать друг в друга посредством перестановки строк и перестановки столбцов, или когда их матрицы соседства B_L и $B_{L'}$ (матрицы смежности R_L и $R_{L'}$) *сильно подобны*, т. е. переводятся друг в друга перестановкой рядов, что означает одновременную одинаковую перестановку строк и столбцов. Однако практически такое решение неудовлетворительно, так как количество операций, необходимое для сравнения, например, некоторой квадратной матрицы B порядка n со всеми $n!$ матрицами, получаемыми из другой матрицы B' (того же порядка) перестановкой рядов, столь быстро растет с ростом n , что даже при сравнительно небольших n это число операций находится далеко за границами возмож-

ностей современных вычислительных машин*. Еще труднее, с практической точки зрения, более общая *проблема изоморфного вхождения*: для графов L и L' , заданных матрицами инцидентий (или матрицами соседства), выяснить, изоморфен ли граф L' некоторой части, подграфу или суграфу графа L **. Заметим, что непосредственное задание инциденторов вместо матриц ничуть не облегчает решения проблем изоморфизма и изоморфного вхождения графов, а «чисто человеческое» решение путем визуального сравнения рисунков осуществимо лишь при очень малых количествах вершин или ребер, или в некоторых сугубо специальных случаях.

В свете исследований С. В. Яблонского (1959) и Ю. И. Журавлева (1/1964, 2/1965) по теории конечных алгорифмов, для класса всех графов и для целого ряда его наиболее интересных подклассов не может существовать такого алгорифма решения проблем изоморфизма и изоморфного вхождения, который был бы существенно проще полного перебора всех мыслимых случаев (например, перебора всех матриц, сильно подобных данной квадратной матрице); даже без уточнения упомянутых сейчас понятий и результатов становится ясно, что поиски отдельных критериев и признаков изоморфизма, изоморфного вхождения, совпадения некоторых числовых характеристик или наличия тех или иных неравенств между ними для графов того или иного класса могут быть очень трудными и не всегда успешными. Решению задач такого рода посвящена значительная часть теории графов, так что примеров впоследствии будет более чем достаточно, а пока ограничимся лишь двумя.

1. Какому условию должны удовлетворять число n вершин и число \tilde{m} звеньев графа, чтобы он заведомо содержал хотя бы один неориентированный двуугольник, т. е. часть, состоящую из двух вершин и двух звеньев (рис. 6)? Ответ очевиден: n и \tilde{m} должны удовлетворять неравенству

$$\tilde{m} > \frac{1}{2} n(n-1);$$

Эта оценка является точной в том смысле, что если она не выполнена, т. е. если дано любое число $n \geq 1$ и любое \tilde{m} , не превосходящее $\frac{1}{2} n(n-1)$, то всегда можно построить граф без неориентированных двуугольников, имеющий n вершин и \tilde{m}

*) С. Ангер (1964) прикинул, что даже при $n = 15$ может понадобиться 40 лет машинного счета.

**) См. работу В. Б. Борщева и Ф. З. Рохлина (1964).

звеньев. Допустим теперь, что нас интересует наличие в графе неориентированных треугольников, т. е. частей вида, показанного на рис. 7. Очевидно, ни при каких количествах n и m нельзя гарантировать существование в графе хотя бы одного такого треугольника, если не сузить предварительно класс рассматриваемых графов, например, налагая вполне естественное ограничение: граф не должен содержать неориентированных двуугольников; в этом случае же необходимое и достаточное условие получается совсем не просто, его вывод (типичный для довольно широкого класса задач) мы дадим только во второй части книги, а окончательный вид этого условия

$$\tilde{m} > \frac{1}{2} \left[n(n-1) + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) - 2n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right],$$

как нам кажется, вполне может убедить читателя в том, что нахождение его не является банальным вопросом.

II. Когда в n -вершинном графе имеется множество из k попарно несмежных непетель? Как мы увидим впоследствии



Рис. 6

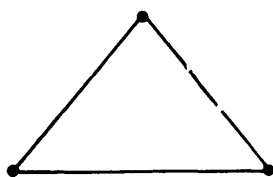


Рис. 7

(см. главу 5, § 44), тривиальное необходимое условие $n \geq 2k$, будучи многократно применено к различным графам, позволяет получить совсем не очевидные и весьма интересные результаты. Что же касается критериев суще-

ствования рассматриваемой системы ребер (разумеется, в терминах не одного только количества вершин), то их установление представляет собой весьма нелегкую задачу, решенную далеко еще не во всех интересных случаях (см., например, § 6 и § 10).

По отношению к любой информации о графе возникает прежде всего вопрос ее *реальности*, т. е. существования хотя бы одного графа с заданными свойствами. Реальная информация может быть полной или неполной в различных смыслах; часто полнота понимается так, что заданная система характеристик определяет граф с точностью до изоморфизма. При неполной информации возникает задача об обзоре всех графов, обладающих заданными свойствами, и в ряде случаев эта задача считается решенной, когда указана более или менее простая система операций, с помощью которых из одного графа или легко обозримого множества графов, удовлетворяющих заданным условиям, можно получить все такие графы.

Понятие полноты информации не имеет смысла пытаться определить сразу в наиболее общей форме, ибо оно имеет различный смысл в разных задачах; например, если требуется найти лишь количество звеньев графа $L = (X, U; P)$, то задание всех количеств $\tilde{s}_L(x)$ ($x \in X$) представляет собой полную информацию, так как определяет искомое количество однозначно (хотя два графа с одинаковыми наборами чисел $\{\tilde{s}_L(x)/x \in X\}$, не обязательно изоморфны — см. начало § 8). Уточнение таких терминов, как «сравнительно простая» (система операций), «легко обозримое» (множество графов), «легко проверяемое» (свойство графа), «эффективно вычисляемая» (числовая характеристика графа) и т. п.* тоже зависит от характера постановки задачи и от способа задания графа.

§ 4. Основные типы графов

Граф $L = (X, U; P)$ в случае $\tilde{U} = \emptyset$ называется *орграфом* (ориентированным графом), а в случае $\vec{U} = \emptyset$ — *неорграфом* (неориентированным графом); если $\dot{U} = \emptyset$, то к слову «граф», «орграф» или «неорграф» добавляются (в случае надобности) слова «без петель». Желая подчеркнуть, что граф L не является ни орграфом, ни неорграфом, будем пользоваться термином «частично ориентированный граф», однако надобность в этом возникает редко.

В матрицах A, B, R, H орграфа никогда не фигурирует образующий элемент θ , т. е. эти матрицы фактически расположены над подполукольцом полукольца K , порожденным только образующими ξ, η, ζ . Точно так же в матрицах неорграфа отсутствуют ξ и η , в матрицах графа без петель отсутствует ζ .

Граф одновременно является орграфом и неорграфом в том и только том случае, когда $\vec{U} = \emptyset$ & $\tilde{U} = \emptyset$, т. е. когда его ребра могут быть лишь петлями. Такой граф будем называть *вырожденным*; его матрица смежности, очевидно, имеет диагональную форму, и в ее элементах (как и в элементах остальных матриц) не фигурируют ξ, η, θ . Частным случаем вырожденного является *пустой* (безреберный) граф, т. е. такой, у которого $U = \emptyset$; он не имеет матрицы инцидентий, а его матри-

*) Заметим, что в теории графов эффективная вычислимость трактуется, как правило, не в смысле математической логики (где это понятие точно определено в терминах теории рекурсивных функций), а в чисто практическом смысле, учитывающем возможности живого математика или вычислительной машины.

цей смежности по определению считается квадратная матрица порядка $|X|$, состоящая сплошь из нулей.

Для бóльшей простоты языка условимся не злоупотреблять приставками «ор» и «неор»; общий принцип их экономии можно пояснить следующим образом. Если в некотором параграфе основным объектом изучения являются неорграфы, а орграфы фигурируют лишь эпизодически, как вспомогательное средство, то вместо «неорграф» мы на протяжении всего параграфа говорим просто «граф». Точно так же называем просто «графами» орграфы, когда основную роль играют именно они, а вспомогательная отводится неорграфам*.

При изучении таких свойств графа $L = (X, U; P)$, которые не зависят от направления его дуг, удобно пользоваться предикатом

$$\tilde{P}(x, u, y) \Leftrightarrow P(x, u, y) \vee P(y, u, x),$$

называемым *полуинцидентором* (неорицидентором) графа L . Легко проверить, что вместе с P предикат \tilde{P} удовлетворяет условиям А и Б в определении графа (§ 1), т. е. сам вполне пригоден на роль инцидентора; о неорграфе $\tilde{L} = (X, U; \tilde{P})$ (у которого, очевидно, $\vec{U}_{\tilde{L}} = \emptyset$) можно сказать, что он получен из L посредством *дезориентации* дуг (образно говоря, превращением всех дуг в звенья путем стирания стрелок). В свою очередь, L получается из \tilde{L} *ориентацией* некоторых звеньев (т. е. нанесением на них стрелок). Наряду со знаком « \sim », соответствующим приставке «неор», будем пользоваться знаком « \rightarrow », отвечающим приставке «ор»: если L обозначает произвольный граф, то всякий орграф, полученный из него какой-либо ориентацией всех звеньев, обозначаем через \vec{L} .

Униграфом называется граф $L = (X, U; P)$, не содержащий двуугольников, т. е. такой, что

$$\forall u, v \forall x, y [\tilde{P}(x, u, y) \& \tilde{P}(x, v, y) \Rightarrow u = v];$$

граф, не являющийся униграфом, есть *мультиграф*. В случае, когда никакая пара вершин не соединена более чем p ребрами ($p \geq 0$), т. е.

$$\forall x, y (|\{u / \tilde{P}(x, u, y)\}| \leq p),$$

или

$$\forall x, y [s(x, y) \leq p]$$

*) Для благозвучия устной речи мы все-таки рекомендуем вместо приставки «неор» полностью произносить слово «неориентированный»; напротив, приставка «ор», как правило, звучит приятно.

(см. § 2), граф называется p -графом; так, 0-граф — это пустой граф, 1-граф — это униграф, а при $p > 1$ всякий p -граф, в котором хотя бы одна пара вершин соединена ровно p ребрами (в частности, для этого достаточно наличия p петель при одной из вершин), представляет собой мультиграф.

Под p -орграфом нам удобно будет понимать не просто ориентированный p -граф, а оргграф, обладающий свойством

$$\forall x, y (|\{u/P(x, u, y)\}| \leq p),$$

которое означает, что при каждой вершине может быть не более p петель и из вершины в другую вершину может идти не более p дуг.

Для некоторых классов графов естественно определяется важное понятие *полного* графа, как такого, который содержит все ребра, возможные при принадлежности графа данному классу и при неизменном множестве вершин. Например, в случае p -графа полнота означает, что при каждой вершине имеется ровно p петель, а каждая пара различных вершин соединена ровно p ребрами (среди которых могут быть как звенья, так и дуги любых направлений); в полном 1-орграфе без петель из каждой вершины в каждую другую идет ровно одна дуга; для графов общего вида понятие полноты не имеет смысла. В дальнейшем определения полноты будем повторять для каждого конкретного класса графов отдельно.

Граф общего вида, в котором две различные вершины всегда смежны, называется *плотным*. Так, полный униграф без петель является в классе всех графов или, например, в классе всех 2-графов не полным, а только плотным. Граф, у которого смежны всякие две вершины (а не только различные), называется *квазиплотным*; это плотный граф хотя бы с одной петлей при каждой вершине.

§ 5. Обыкновенные графы

Особо важную роль в теории графов и ее приложениях играют неориентированные униграфы без петель; такие графы для краткости будем называть *обыкновенными*. Матрица соседства обыкновенного графа $L = (X, U; P)$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{s}(x_1) \theta^2 & \tilde{s}(x_1, x_2) \theta^2 & \dots & \tilde{s}(x_1, x_n) \theta^2 \\ \tilde{s}(x_2, x_1) \theta^2 & \tilde{s}(x_2) \theta^2 & \dots & \tilde{s}(x_2, x_n) \theta^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{s}(x_n, x_1) \theta^2 & \tilde{s}(x_n, x_2) \theta^2 & \dots & \tilde{s}(x_n) \theta^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{s}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \tilde{s}(x_i, x_j),$$

$$i \neq j \Rightarrow \tilde{s}(x_i, x_j) = \tilde{s}(x_j, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны} \end{cases}$$

($i, j = 1, 2, \dots, n = |X|$); как уже известно, эту матрицу можно без всякого ущерба для информации о графе заменить матрицей смежности

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{s}(x_1, x_2) \theta^2 & \dots & \tilde{s}(x_1, x_n) \theta^2 \\ \tilde{s}(x_2, x_1) \theta^2 & 0 & \dots & \tilde{s}(x_2, x_n) \theta^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{s}(x_n, x_1) \theta^2 & \tilde{s}(x_n, x_2) \theta^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы не потеряем никаких сведений об обыкновенном графе L , если еще наложим на полукольцо K соотношение $\theta^2 = 1$ (так чаще всего и поступают в действительности), однако по причинам, которые станут ясны впоследствии, было бы нецелесообразно накладывать это условие раз навсегда.

Относя каждому $u \in U$ такие $x, y \in X$, для которых истинно высказывание $P(x, u, y)$, мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех ребер и множеством всех неупорядоченных пар смежных вершин; не будет большой ошибкой отождествить оба множества и, как это часто делается, называть ребрами сами пары смежных вершин. Таким образом, обыкновенный граф может быть определен как множество с заданным на нем бинарным симметричным антирефлексивным отношением смежности J . Обыкновенный граф нередко обозначают через (X, U) , подчеркивая тем самым, что его инцидентор полностью определяется заданием множеств X и U : в самом деле,

$$P(x, u, y) \Leftrightarrow u = \tilde{xy} \ \& \ u \in U. *$$

Для графа, изображенного на рис. 8, имеем

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad U = \{\tilde{12}, \tilde{13}, \tilde{23}, \tilde{34}\}$$

*) Напомним, что \tilde{xy} означает неупорядоченную пару (см. Введение).

и при $\theta^2 = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти какую-либо из матриц инциденций A обыкновенного графа по его матрице смежности R не составляет труда: надо прежде всего пронумеровать произвольным образом ненулевые элементы, стоящие в R выше главной диагонали; дальнейшее ясно.

В соответствии с общим понятием полноты (см. конец § 4) обыкновенный граф называется *полным* (или *плотным*, что

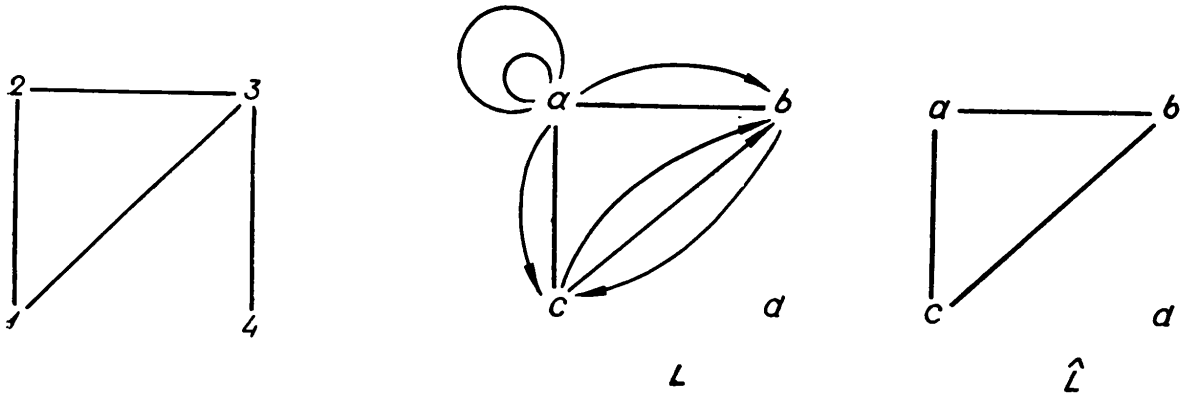


Рис. 8

Рис. 9

в данном случае одно и то же), если всякие две его различные вершины смежны. Полный и пустой обыкновенные n -вершинные графы будем обозначать соответственно через F_n и E_n ; оба эти графа определяются однозначно с точностью до изоморфизма количеством вершин n .

В ряде вопросов при исследовании графа $L = (X, U; P)$ общего вида требуется не полная информация о нем, а лишь знание того, какие пары его различных вершин смежны и какие нет; носителем такой информации служит *скелет* графа L , т. е. обыкновенный граф $\hat{L} \doteq (X, \hat{U})$ с прежним множеством вершин X и новым множеством ребер \hat{U} , определяемым следующим образом:

$$\tilde{xy} \in \hat{U} \Leftrightarrow x, y \in X \ \& \ x \neq y \ \& \ \exists u \in UP(x, u, y).$$

Чтобы из матрицы смежности исходного графа L над свободным полукольцом K получить матрицу смежности его скелета

\hat{L} , достаточно на образующие полукольца наложить соотношения

$$\xi\eta = \eta\xi = \theta^2, \quad \zeta^2 = 0, \quad 2\theta^2 = \theta^2.$$

Так, на рис. 9 вместе с уже знакомым нам графом (см. § 1 и § 2) изображен его скелет; матрица смежности скелета

$$R_{\hat{L}} = \begin{pmatrix} 0 & \theta^2 & \theta^2 & 0 \\ \theta^2 & 0 & \theta^2 & 0 \\ \theta^2 & \theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получается из матрицы смежности R_L исходного графа (см. пример в § 2) выражением всех ее элементов через θ^2 и использованием булева соотношения $2\theta^2 = \theta^2$. И здесь, конечно, можно положить $\theta^2 = 1$. Граф L является плотным тогда и только тогда, когда его скелет \hat{L} — полный.

§ 6. Бихроматические графы

Обыкновенный граф $L = (X, U)$ будем называть *графом Кёнига*, если множество X его вершин можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств X' и X'' так, чтобы никакие вершины одного и того же подмножества не были смежны*; т. е.

$$X = X' \cup X'', \quad X' \cap X'' = \emptyset,$$

$$\forall x, y \in X [\widetilde{xy} \in U \Rightarrow (x \in X' \& y \in X'') \vee (x \in X'' \& y \in X')].$$

Граф Кёнига часто записывают в виде $(X', X''; U)$; такое задание не только указывает на возможность требуемого разбиения множества вершин, но и определяет конкретное разбиение; поэтому в случае, когда существуют по крайней мере два различных разбиения:

$$\begin{aligned} X &= X'_1 \cup X''_1 = X'_2 \cup X''_2, \\ X'_1 \cap X''_1 &= X'_2 \cap X''_2 = \emptyset, \quad X'_1 \neq X'_2 \& X''_1 \neq X''_2, \end{aligned}$$

графы, записанные в виде $(X'_1, X''_1; U)$ и $(X'_2, X''_2; U)$, следует рассматривать лишь как изоморфные, но не как тожде-

*) Допускается возможность, когда одно из множеств X' , X'' пусто (при этом, конечно, $U = \emptyset$).

ственные. Например, граф Кёнига $L = (X, U)$, где

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, U = \{\widetilde{12}, \widetilde{23}, \widetilde{34}, \widetilde{14}, \widetilde{56}\}$$

(рис. 10), порождает четыре графа с предписанными разбиениями множества вершин:

$$L_1 = (X'_1, X''_1; U) = (X''_1, X'_1; U), X'_1 = \{1, 3, 5, 7\}, X''_1 = \{2, 4, 6\};$$

$$L_2 = (X'_2, X''_2; U) = (X''_2, X'_2; U), X'_2 = \{1, 3, 6, 7\}, X''_2 = \{2, 4, 5\};$$

$$L_3 = (X'_3, X''_3; U) = (X''_3, X'_3; U), X'_3 = \{1, 3, 5\}, X''_3 = \{2, 4, 6, 7\};$$

$$L_4 = (X'_4, X''_4; U) = (X''_4, X'_4; U), X'_4 = \{1, 3, 6\}, X''_4 = \{2, 4, 5, 7\}.$$

Матрица смежности графа Кёнига полностью определяется своей прямоугольной подматрицей, строки которой отвечают

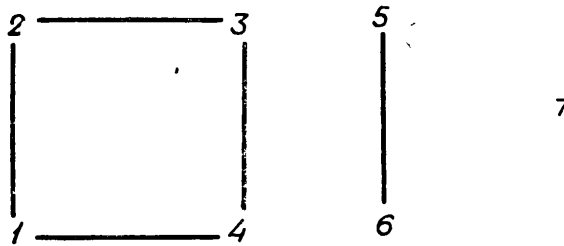


Рис. 10

вершинам X' , а столбцы — вершинам X'' ; так, для графа L_1 (рис. 11) это будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание графа Кёнига $L = (X', X''; U)$ равносильно заданию двух множеств X', X'' и отображения Δ , которое каждой вершине $x' \in X'$ относит подмножество (возможно пустое) $\Delta x' \subseteq X''$ всех смежных с x' вершин $x'' \in X''$.

Граф Кёнига $L = (X', X''; U)$ называется *полным*, если каждая вершина множества X' смежна с каждой вершиной множества X'' , иначе говоря, если $\forall x' \in X' (\Delta x' = X'')$. Такой граф определяется однозначно с точностью до изоморфизма, сохраняющего каждое из множеств X' и X'' , заданием упорядоченной пары чисел $|X'|$ и $|X''|$.

Граф Кёнига $K_m = (X, Y; W)$, в котором $|X| = |Y| = |W| = m \geq 1$ и никакие два ребра не смежны, называется *паросочетанием* (рис. 12). Отображение Δ здесь фактически является взаимно однозначным соответствием между двумя множествами вершин X и Y , поскольку всякое одновершинное подмножество $\{y\} \subseteq Y$ можно отождествить с самой вершиной $y \in Y$.

Одна из проблем, важных как для самой теории графов, так и для многих ее приложений, состоит в следующем: для

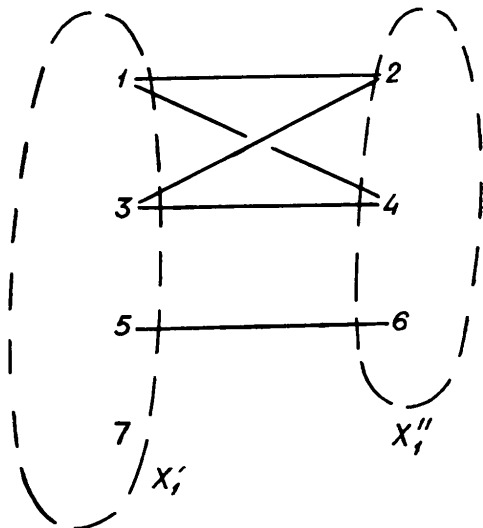


Рис. 11.

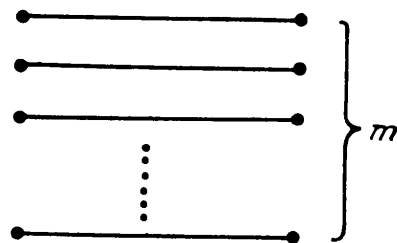


Рис. 12.

данного графа L найти наибольшее натуральное число $m = \pi(L)$, при котором существует паросочетание K_m , являющееся частью L . Если $L = (X', X''; U)$ — граф Кёнига с заданным разбиением множества вершин, то под его паросочетанием понимается часть $K_m = (Y', Y''; W)$, удовлетворяющая условию $Y' \subseteq X' \& Y'' \subseteq X''$; найти $\pi(L)$ — это значит выяснить, какое наибольшее количество вершин множества X' можно взаимно однозначно отобразить в X'' при помощи ребер из U .

Теорема Кёнига — Оре*. Если $L = (X', X''; U)$ — граф Кёнига, то

$$\pi(L) = |X'| - \max_{A \subseteq X'} (|A| - |\Delta A|),$$

где $\Delta A \doteq \bigcup_{x' \in A} \Delta x'$, а максимум берется по всем подмножествам A (включая и пустое) множества X' .

*) См. Д. Кёниг (1936, глава 11) и О. Оре (2/1955).

Доказательство. Пусть $K_{\pi(L)} = (Y', Y''; W)$ — какое-либо паросочетание графа L , с $|Y'| = |Y''| = |W| = \pi(L)$, т. е. с наибольшим возможным числом ребер $|W|$. Для произвольного $A \subseteq X'$ имеем:

$$|A \cap (X' \setminus Y')| \leq |X' \setminus Y'| \quad (\text{тривиально});$$

$|A \cap Y'| \leq |\Delta A|$ (так как все элементы из Y' , в частности из $A \cap Y'$, имеют разные образы в Y''); следовательно,

$$\begin{aligned} |A| &= |A \cap (X' \setminus Y')| + |A \cap Y'| \leq |X' \setminus Y'| + |\Delta A| = \\ &= |X'| - |Y'| + |\Delta A| = |X'| - \pi(L) + |\Delta A|, \end{aligned}$$

т. е.

$$|A| - |\Delta A| \leq |X'| - \pi(L).$$

Осталось доказать существование такого $A \subseteq X'$, при котором достигается равенство.

Если $\pi(L) = |X'|$, то равенство заведомо имеет место для $A = \emptyset$. Допустим теперь, что $\pi(L) < |X'|$, и положим

$$A \doteq (X' \setminus Y') \cap B,$$

где B — множество вершин $x \in Y'$, обладающих свойством: существует последовательность

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_{l-1}, x''_{l-1}, x'_l \doteq x \quad (*)$$

вершин графа L , такая что $l \geq 2$, $x'_1 \in X' \setminus Y'$, x'_i смежна с x''_i , x''_i смежна с x'_{i+1} при $i = 1, 2, \dots, l-1$, причем ребра $u_i = \widetilde{x''_i x'_i}$ не принадлежат W , а ребра $u'_i = \widetilde{x'_i x'_{i+1}}$ принадлежат W . Покажем, что множество A — искомое.

Во-первых, $\Delta(X' \setminus Y') \subseteq \Delta B$, так как если бы имелась вершина $x'' \in \Delta(X' \setminus Y') \setminus \Delta B$, то, выбрав некоторую $x'_1 \in X' \setminus Y'$, смежную с x'' , и обозначив $u = \widetilde{x'_1 x''}$, мы построили бы паросочетание

$$(Y' \cup \{x'_1\}, Y'' \cup \{x''\}; W \cup \{u\})$$

графа L , содержащее $\pi(L) + 1$ ребер, что невозможно. Поэтому $\Delta A \subseteq \Delta B$, а так как $B \subseteq A$, то $\Delta A = \Delta B$ и $|\Delta A| = |\Delta B|$.

Во-вторых, всякая вершина из ΔB соединена с некоторой вершиной множества B ребром, принадлежащим W ; действительно, если бы для некоторой $x'' \in \Delta B$ никакое из ребер, соединяющих ее с вершинами из B , не входило в W , то, взяв за x одну из смежных с x'' вершин множества B и обозначив

через u ребро $\widetilde{xx''}$, мы построили бы паросочетание

$$(Y' \cup \{x'_1\}, Y'' \cup \{x''\}; [W \setminus \{u'_1, u'_2, \dots, u'_{l-1}\}] \cup \{u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u\}),$$

где $x'_1 \in X' \setminus Y'$ — первая вершина одной из тех последовательностей, при наличии которых вершина x включается в множество B (по его определению), а ребра u_i и u'_i ($i = 1, 2, \dots, l - 1$) связаны с выбранной последовательностью как сказано выше; число ребер построенного паросочетания равно $\pi(L) + 1$, что невозможно. Из доказанного следует равенство $|\Delta B| = |B|$.

Итак, $|\Delta A| = |\Delta B| = |B|$; ввиду $(X' \setminus Y') \cap B = \emptyset$ имеем также $|A| = |X' \setminus Y'| + |B|$. Отсюда окончательно

$$\begin{aligned} |A| - |\Delta A| &= |A| - |B| = |X' \setminus Y'| = |X'| - |Y'| = \\ &= |X'| - \pi(L), \end{aligned}$$

т. е. множество A — искомое. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Ввиду равноправия множеств X' и X'' в графе $L = (X', X''; U)$, утверждение теоремы Кёнига — Оре можно записать и так:

$$\pi(L) = |X''| - \max_{A \subseteq X''} (|A| - |\Delta' A|),$$

где $\Delta' A \doteq \bigcup_{x' \in A} \Delta' x''$, а отображение Δ' относит каждой вершине $x'' \in X''$ подмножество $\Delta' x'' \subseteq X'$ всех смежных с ней вершин. Для полного графа Кёнига L , очевидно, $\pi(L) = \min\{|X'|, |X''|\}$.

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы Кёнига — Оре использована идея «сдвига чередующейся цепи», восходящая еще к Е. Эгервари (1931) и послужившая основой для создания так называемого «венгерского метода», о котором мы будем подробно говорить во второй части книги. Сейчас отметим лишь, что те переделки паросочетания, которые приводят к увеличению числа его ребер на единицу и которые в процессе доказательства были использованы нами для получения противоречия, в действительности дают практически эффективный способ нахождения некоторого наибольшего паросочетания у заданного графа Кёнига (см. § 49 Заключение первой части).

С л е д с т в и е (теорема Кёнига — Холла). *Всё множество X' графа Кёнига $(X', X''; U)$ можно взаимно однозначно*

отобразить в X'' при помощи ребер графа тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subseteq X' (|\Delta A| \geq |A|).$$

Свойством, лежащим в основе определения графа Кёнига, может обладать любой, а не только обыкновенный граф. Именно, граф $L = (X, U; P)$ называется *бихроматическим* (или *двудольным*), если множество X его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества X' и X'' так, чтобы никакие вершины одного и того же подмножества не были смежны (т. е. раскрасить вершины двумя цветами так, чтобы смежные вершины всегда имели разные цвета). Очевидно, граф L является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит петель, а его скелет \hat{L} есть граф Кёнига. Отображение Δ , относящее каждой вершине $x' \in X'$ множество $\Delta x' \subseteq X''$ всех смежных с ней вершин, одно и то же в бихроматическом графе L и его скелете \hat{L} . Хотя это отображение, вообще говоря, не определяет граф L однозначно, оно играет решающую роль в вопросах, связанных с нахождением паросочетаний графа. Если слегка расширить понятие паросочетания, допуская, что ребра графа K_m могут быть не только звеньями, но и дугами, то теоремы Кёнига — Оре и Кёнига — Холла останутся в силе. Действительно, из всех ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин бихроматического графа L , в состав паросочетания может войти не более одного, поэтому $\pi(L) = \pi(\hat{L})$; в силу этого равенства, а также совпадения отображений Δ на графах L и \hat{L} , из справедливости теоремы Кёнига — Оре для графов Кёнига сразу следует справедливость этой теоремы, а значит и теоремы Кёнига — Холла для произвольных бихроматических графов.

Вопрос нахождения паросочетаний, в том числе максимальных, в графе общего вида (не обязательно бихроматическом) будет рассмотрен во второй части книги.

§ 7. Графы Бержа

1-орграф (см. конец § 4) $L = (X, U; P)$ будем называть *графом Бержа*; он характеризуется тем, что в нем нет звеньев, из одной вершины в другую может идти не более одной дуги и при вершине может быть не более одной петли. Наложение на полукольцо K условий

$$\eta\xi = 0, \quad \xi\eta = \zeta^2 = 1$$

приводит к следующему выражению для матрицы смежности графа Бержа:

$$R = \begin{pmatrix} s^0(x_1) & s^+(x_1, x_2) & \dots & s^+(x_1, x_n) \\ s^+(x_2, x_1) & s^0(x_2) & \dots & s^+(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^+(x_n, x_1) & s^+(x_n, x_2) & \dots & s^0(x_n) \end{pmatrix},$$

где

$$s^0(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists u P(x_i, u, x_i) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } \exists u P(x_i, u, x_i) \text{ ложно,} \end{cases}$$

$$i \neq j \Rightarrow s^+(x_i, x_j) = s^-(x_j, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists u P(x_i, u, x_j) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } \exists u P(x_i, u, x_j) \text{ ложно} \end{cases}$$

($X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$). Граф Бержа определяется однозначно с точностью до индивидуализации ребер заданием на X бинарного отношения

$$\vec{J}(x, y) \Leftrightarrow \vec{J}_L(x, y) \Leftrightarrow \exists u P(x, u, y),$$

ибо когда произвольное \vec{J} задано, то можно положить

$$U \doteq \{\overrightarrow{xy} / x, y \in X \ \& \ \vec{J}(x, y)\}, *$$

$$P(x, u, y) \Leftrightarrow u = \overrightarrow{xy} \ \& \ u \in U \ (\Leftrightarrow u = \overrightarrow{xy} \ \& \ \vec{J}(x, y)).$$

Вместо отношения \vec{J} обычно задают отображение Γ , относящее каждой вершине $x \in X$ подмножество (возможно и пустое)

$$\Gamma_x \doteq \{y/y \in X \ \& \ \vec{J}(x, y)\}.$$

При таком способе задания графа Бержа $L = (X, U; P)$ имеем

$$U = \{\overrightarrow{xy} / x, y \in X \ \& \ y \in \Gamma_x\},$$

$$P(x, u, y) \Leftrightarrow u = \overrightarrow{xy} \ \& \ y \in \Gamma_x.$$

Поэтому граф Бержа можно обозначать через (X, Γ) , а также

*) Напомним, что \overrightarrow{xy} обозначает упорядоченную пару (см. Введение).

через (X, U) . Например, для графа на рис. 13

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad U = \{\vec{21}, \vec{22}, \vec{23}, \vec{32}, \vec{44}\},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \emptyset, \quad \Gamma_2 = \{1, 2, 3\}, \quad \Gamma_3 = \{2\}, \quad \Gamma_4 = \{4\}.$$

Еще один способ задания графа Бержа состоит в том, что вместо отображения Γ множества X в множество его подмножеств задается отображение Ξ , относящее каждому непустому подмножеству $Y \subseteq X$ некоторое подмножество $\Xi Y \subseteq X$ и удовлетворяющее условию аддитивности:

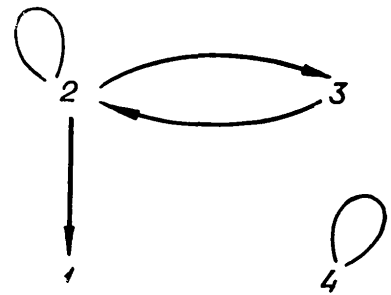


Рис. 13.

$$\forall Y_1, Y_2, \dots, Y_k \subseteq X \quad [\Xi(\bigcup_{i=1}^k Y_i) = \bigcup_{i=1}^k \Xi Y_i]$$

($k = 1, 2, \dots$). В самом деле, если задано Γ , то отображение

$$\Xi Y \doteq \bigcup_{x \in Y} \Gamma x$$

аддитивно, ибо

$$\Xi(\bigcup_{i=1}^k Y_i) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i=1}^k Y_i} \Gamma x = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{x \in Y_i} \Gamma x = \bigcup_{i=1}^k \Xi Y_i;$$

наоборот, если задано аддитивное отображение Ξ , то, полагая

$$\Gamma x \doteq \Xi \{x\},$$

получим именно то отображение Γ вершин в подмножества, для которого

$$\bigcup_{x \in Y} \Gamma x = \bigcup_{x \in Y} \Xi \{x\} = \Xi \bigcup_{x \in Y} \{x\} = \Xi Y.$$

Отображения Γ и Ξ нетрудно ввести для любого орграфа $L = (X, U; P)$, а не только для графов Бержа: именно,

$$\Gamma x \doteq \Gamma_L x \doteq \{y/y \in X \ \& \ \exists u \in UP(x, u, y)\}$$

и при $Y \subseteq X$

$$\Xi Y \doteq \Xi_L Y \doteq \bigcup_{x \in Y} \Gamma x;$$

однако эти отображения не определяют граф L с точностью до изоморфизма, так как позволяют судить лишь о наличии или отсутствии дуги, идущей из одной данной вершины в другую, или петли при данной вершине, но не о количествах ребер такого типа. Граф Бержа

$$\vec{L} \doteq (X, \Gamma_L)$$

называется *орскелетом* данного орграфа L ; для получения матрицы смежности $R_{\vec{L}}$ из R_L надо на образующие полукольца K наложить дополнительное булево соотношение $2 = 1$.

Наряду с отображениями Γ и Ξ , целесообразно ввести обратные им отображения

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}x &\doteq \Gamma_L^{-1}x \doteq \{y/y \in X \ \& \ \exists v \in UP(y, v, x)\} = \\ &= \{y/y \in X \ \& \ x \in \Gamma y\} \end{aligned}$$

и

$$\Xi^{-1}Y \doteq \Xi_L^{-1}Y \doteq \bigcup_{x \in Y} \Gamma^{-1}x.$$

Орграф $L = (X, U; P)$ называется *симметрическим*, если вместе с каждой дугой он содержит хотя бы одну противоположно направленную. т. е. если

$$\forall x, y [\exists u P(x, u, y) \Rightarrow \exists v P(y, v, x)],$$

или, в терминах отображения Γ ,

$$\forall x, y (y \in \Gamma x \Rightarrow x \in \Gamma y).$$

Орграф *антисимметрический*, если он не содержит ни одной петли и ни одной пары противоположно направленных дуг т. е. если

$$\forall x, y [\exists u P(x, u, y) \Rightarrow \neg \exists v P(y, v, x)],$$

или

$$\forall x, y (y \in \Gamma x \Rightarrow x \notin \Gamma y).$$

Антисимметрический граф Бержа можно называть также *обыкновенным оргграфом*, поскольку в результате дезориентации всех дуг он превращается в обыкновенный граф (см. § 5).

Граф Бержа (или симметрический граф Бержа) называется *полным*, если $\forall x, y \in U \exists P(x, y)$; такой граф определяется однозначно с точностью до изоморфизма количеством своих вершин. Для обыкновенных же оргграфов полнота означает лишь наличие дуги между каждой парой (неупорядоченной) различных вершин, не предопределяя направления этой дуги, так что здесь число вершин — весьма слабая характеристика (вопрос о возможной структуре таких графов будет рассмотрен в главе 4, см. § 32).

Взаимосвязь между обыкновенным оргграфом $L = (X, U; P)$ и неорграфом $\tilde{L} = (X, U; P)$, полученным из него дезориентацией дуг (или, в других обозначениях, между \tilde{L} и L), следующим образом выражается в терминах матриц смежности. Пусть образующие полукольца K удовлетворяют условиям

$$\xi\eta = 1, \quad \eta\xi = 0, \quad \theta^2 = 1, \quad 2 = 1,$$

в силу которых K содержит в качестве подполукольца булеву алгебру $B \doteq B\{0,1\}$. Матрица смежности (над B)

$$\tilde{R} \doteq R_{\tilde{L}} = (\tilde{r}_{ij})$$

неорграфа \tilde{L} получается из матрицы смежности

$$R = R_L = (r_{ij})$$

орграфа L путем сложения ее с транспонированной:

$$\tilde{R} = R + R^*.$$

Если, наоборот, первоначально дан неорграф \tilde{L} , то для полного обзора оргграфов, возникающих из него при всевозможных способах ориентации ребер, введем систему из $\frac{1}{2}n(n-1)$ переменных ε_{ij} ($1 \leq i < j \leq n \doteq |X|$) в B и положим

$$R(\{\varepsilon_{ij}\}) \doteq (r_{ij}\{\varepsilon_{ij}\}),$$

где

$$r_{ii}\{\varepsilon_{ij}\} \doteq 0,$$

$$i < j \Rightarrow r_{ij}\{\varepsilon_{ij}\} \doteq \tilde{r}_{ij} \cdot \varepsilon_{ij},$$

$$i > j \Rightarrow r_{ij}\{\varepsilon_{ij}\} \doteq \tilde{r}_{ij} \cdot \varepsilon'_{ji}$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n)$, а

$$\varepsilon' \doteq \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon = 1, \\ 1 & \text{при } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Каждому набору $\{\varepsilon_{ij}^0\}$ значений переменных ε_{ij} отвечает определенный способ ориентации, т. е. определенный оргграф $L = (X, U; P)$ с матрицей смежности $R_L = R(\{\varepsilon_{ij}^0\})$, и всякую ориентацию можно задать таким образом. Рассматривая не все $1/2n(n-1)$ переменных ε_{ij} , а только $|U|$ тех, для которых $\tilde{r}_{ij} = 1$, добьемся того, что соответствие между всеми способами ориентации ребер и всевозможными системами значений $\{\varepsilon_{ij}^0\}$ будет взаимно однозначным.

Для примера рассмотрим обыкновенный граф, изображенный на рис. 14. У него

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\{\varepsilon_{ij}\}) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & 0 \\ \varepsilon'_{12} & 0 & \varepsilon_{23} & 0 \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & 0 & \varepsilon_{34} \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $|\{\varepsilon_{ij}\}| = |\{\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}\}| = 4$, то имеется $2^4 = 16$

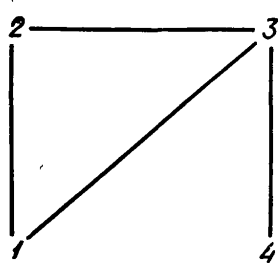


Рис. 14.

способов ориентации ребер. Предположим теперь, что нас интересуют лишь те ориентации, при которых полученный оргграф не содержит тупиковых вершин, т. е. из каждой вершины исходит хотя бы одна дуга. Нахождение всех таких ориентаций равносильно отысканию всех систем значений для $\{\varepsilon_{ij}\}$, удовлетворяющих условию

$$(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}) \cdot (\varepsilon'_{12} + \varepsilon_{23}) \cdot (\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{23} + \varepsilon_{34}) \cdot \varepsilon_{34} = 1$$

(т. е. ни одна строка матрицы $R(\{\varepsilon_{ij}\})$ не должна состоять сплошь из нулей). Раскрывая скобки и учитывая, что всегда

$$\varepsilon \cdot \varepsilon' = 0,$$

приводим наше условие к виду

$$\varepsilon_{12} \cdot \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon'_{13} \cdot \varepsilon_{34} + \varepsilon_{13} \cdot \varepsilon'_{12} \cdot \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{34} = 1,$$

откуда сразу находим два решения:

$$(1) \quad \varepsilon_{12} = 1, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 1, \quad \varepsilon_{34} = 0,$$

$$(2) \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = 1, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{34} = 0;$$

соответствующие орграфы показаны на рис. 15. В примере же графа на рис. 16

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\{\varepsilon_{ij}\}) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12}' & 0 & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{23}' & 0 \end{pmatrix},$$

уравнение для определения $\{\varepsilon_{ij}^{\circ}\}$ имеет вид

$$\varepsilon_{12} (\varepsilon_{12}' + \varepsilon_{23}') \varepsilon_{23}' = 1,$$

или, после преобразования левой части,

$$0 = 1,$$

т. е. искомой ориентации не существует (еще более простой пример такого рода представляет полный обыкновенный граф F_2 и, конечно, граф F_1).

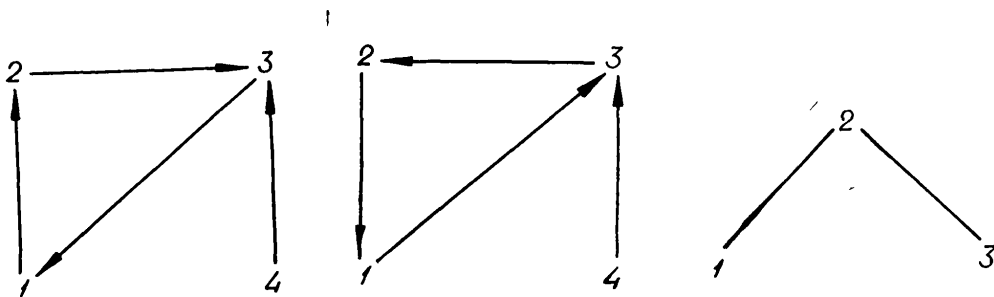


Рис. 15.

Рис. 16.

В дальнейшем нам встретятся и другие задачи, где нужно заданный граф ориентировать некоторым специальным образом, причем требуемое свойство ориентации удастся записать в терминах булевых функций от элементов r_{ij} $\{\varepsilon_{ij}\}$ и применить для решения вычислительный аппарат логики высказываний (таковы, например, задачи о транзитивной и квазитранзитивной ориентации, см. конец § 31 в главе 4).

§ 8. Локальная и квазилокальная информация о графах

Каждой вершине $x \in X$ графа $L = (X, U; P)$ отнесем четырехмерный вектор — упорядоченную четверку чисел

$$\bar{I}(x) \doteq \{s^+(x), s^-(x), s^0(x), \tilde{s}(x)\},$$

которые характеризуют количества ребер того или иного типа, инцидентных вершине x (см. § 2). Совокупность всех $n(L)$ значений этой вектор-функции назовем *характеристикой инцидентности*, или, короче, *I-характеристикой* графа L ; задание ее равносильно заданию одних только диагональных элементов матрицы соседства вершин, или, что то же, сумм элементов каждой строки (либо каждого столбца) матрицы смежности графа L над свободным полукольцом K . Вообще говоря, граф не определяется с точностью до изоморфизма своей *I-характеристикой*, как показывают примеры на рисунках 17 и 18. Проблемой существования и полного обзора графов с заданной *I-характеристикой* мы займемся во второй части книги.

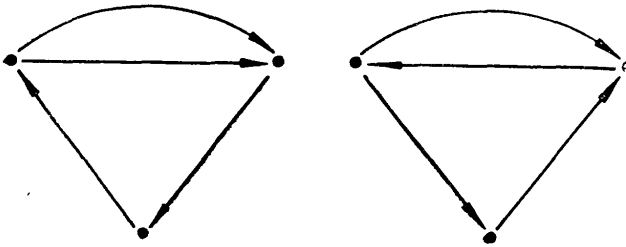


Рис. 17.

Классифицируя по тем или иным признакам системы четырехмерных векторов с целыми неотрицательными координатами, получим некоторые классификации графов. Например, если для данного графа все векторы совпадают (т. е. вектор-функция $\bar{I}(x)$ фактически не зависит от x), то граф называется *однородным*. Граф *равновесный*, если $s^+(x) = s^-(x)$ в каждой вершине x . Классы орграфов, неорграфов, частично ориентированных графов, графов без петель и вырожденных графов (см. § 4), так же как классы однородных и равновесных графов, относятся к *I-классам*, т. е. классам графов, определяемым в терминах одной только *I-характеристики*.

Следующая важная характеристика графа $L = (X, U; P)$ связана с типом инцидентности пар его вершин. Именно, каждой упорядоченной паре \overrightarrow{xy} вершин $x, y \in X$ отнесем четырехмерный вектор

$$\bar{J}(x, y) \doteq \{s^+(x, y), s^-(x, y), s^0(x, y), \tilde{s}(x, y)\},$$

где

$$s^+(x, x) \doteq s^-(x, x) \doteq \tilde{s}(x, x) = 0,$$

$$s^\circ(x, x) \doteq s_L^\circ(x),$$

а при $x \neq y$

$$s^+(x, y) \doteq s_L^+(x, y), \quad s^-(x, y) \doteq s_L^-(x, y), \quad \tilde{s}(x, y) \doteq \tilde{s}_L(x, y),$$

$$s^\circ(x, y) \doteq 0.$$

Задание вектор-функции $\bar{J}(x, y)$ двух аргументов равносильно заданию матрицы смежности графа над свободным полуколь-

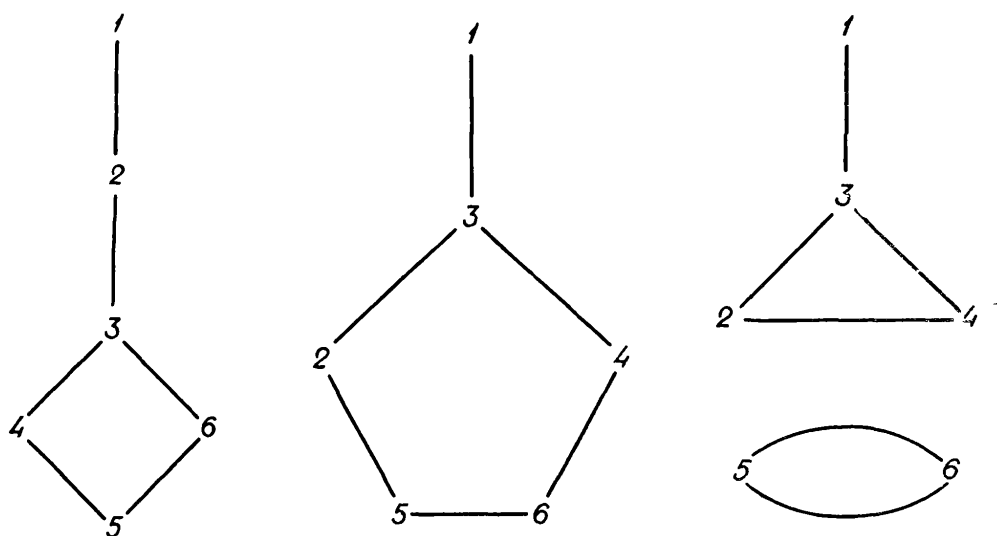


Рис. 18.

цом K и определяет граф по меньшей мере с точностью до изоморфизма (см. § 2). Однако совокупность всех значений этой функции без указания, какой именно паре вершин отвечает то или иное значение, является гораздо более слабой характеристикой графа; назовем ее *характеристикой смежности*, или *J -характеристикой*. Задание этой характеристики равносильно заданию неупорядоченной совокупности всех элементов матрицы смежности графа над свободным полукольцом K . К *J -классам* графов, определимым в терминах одной только J -характеристики, относятся классы униграфов, мультиграфов, p -графов и p -орграфов (§ 4), а также некоторые из I -классов, например классы оргграфов, неорграфов, частично ориентированных графов, графов без петель и вырожденных графов (но не классы однородных и равновесных графов). J -классы составляют обыкновенные графы (§ 5) и графы Бержа (§ 7). Внутри класса обыкновенных графов J -характеристика ни-

какой дальнейшей ценности уже не представляет, так как дает информацию лишь о числе ребер обыкновенного графа (в отличие от I -характеристики, определяющей количества вершин той или иной степени в графе); внутри же класса графов Бержа J -характеристика может продолжать полезную сортировочную работу: так, классы симметрических и антисимметрических графов Бержа являются J -классами. Точно так же классы симметрических и антисимметрических графов $L = (X, U; P)$ общего вида (§ 7) представляют собой J -классы.

I -характеристика и J -характеристика графа дают о нем такую информацию, которая носит явно локальный характер; примерно то же можно сказать о структурной формуле сложного химического соединения, когда сама эта формула неизвестна, а даны лишь количества атомов того или иного химического элемента, обладающих той или иной валентностью в рассматриваемом соединении, и количества одинарных, двойных и т. д. связей между элементами. Понятие локальной информации о графе $L = (X, U; P)$ уточняется в общем случае следующим образом.

Положим

$$\bar{IJ}(x, y) \doteq \begin{cases} I(x) & \text{при } y = x, \\ \bar{J}(x, y) & \text{при } y \neq x; \end{cases}$$

каждой вершине $x \in X$ отнесем неупорядоченную совокупность $\{\bar{IJ}(x, y)/y \in X\}$ из $n = n(L)$ значений вектор-функции $\bar{IJ}(x, y)$, принимаемых ею на тех упорядоченных парах \overrightarrow{xy} , в которых x фиксирована, а y пробегает все множество X . Из полученных n совокупностей, как из элементов, составим, в свою очередь, неупорядоченную совокупность

$$\{\{\bar{IJ}(x, y)/y \in X\}/x \in X\};$$

последняя и называется *локальной характеристикой*, или *IJ -характеристикой* графа L , а всякая информация об L , которую можно извлечь только из этой характеристики, — *локальной информацией*.

Иначе говоря, мы получим о графе локальную информацию, если «рассогласуем» строки его матрицы смежности над свободным полукольцом K , т. е. перечислим лишь все элементы в каждой строке, не указав при этом, какие элементы разных строк принадлежат одному и тому же столбцу, а какие —

разным столбцам*. Каждой строке (без указания порядка расположения ее элементов) отвечает звезда, т. е. такая часть $L' = (X', U'; P)$ графа L , в которой множество X' состоит из вершины x , соответствующей этой строке, и всех смежных с x вершин, а множество U' образовано всеми ребрами, инцидентными x . IJ -характеристика задает с точностью до изоморфизма каждую из n звезд графа L по отдельности, но умалчивает о том, какие именно из этих звезд соседствуют друг с другом. Уже из известных нам примеров обыкновенных графов видно, что локальная информация, вообще говоря, не определяет граф с точностью до изоморфизма. Привести примеры IJ -классов графов предлагаем читателю.

Вопрос об изучении K -характеристики, получающейся в результате «рассогласования» строк (или столбцов) матрицы H соседства ребер графа (см. § 2), мы оставляем в стороне.

Понятие локальной характеристики графа можно по-разному видоизменять и обобщать. Не пытаюсь дать исчерпывающее определение квазилокальной информации о графе, приведем примеры характеристик такого типа.

Пусть R — матрица смежности n -вершинного графа L над свободным полукольцом K ($n \geq 2$) и пусть k — натуральное число, не превосходящее $n - 1$. Вычеркивая из матрицы R произвольно $n - k$ строк и $n - k$ одноименных столбцов, получим матрицу смежности некоторого k -вершинного подграфа графа L . Предположим теперь, что имеется неупорядоченная совокупность $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ всех $N \doteq C_n^{n-k} = C_n^k$ подматриц, получаемых таким способом из R , причем каждая R_i задана с точностью до перестановок рядов (см. § 3); иначе говоря, дана совокупность всех k -вершинных подграфов L_1, L_2, \dots, L_N графа L , но каждый L_i задан с точностью до изоморфизма, и нет абсолютно никаких указаний на то, какие элементы двух различных подграфов представляют один и тот же элемент всего графа L . Совокупность матриц $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ или, что равносильно, совокупность подграфов $\{L_1, L_2, \dots, L_N\}$ естественно считать квазилокальной (точнее, « k -квазилокальной») характеристикой графа. Она, вообще говоря, не определяет граф L с точностью до изоморфизма. При $k = 1$ это очевидно, ибо если даже заменить совокупность $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ совокупностью $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ подматриц матрицы соседства вершин, то последняя будет давать об L ту же информа-

*) Вместо строк можно было бы «рассогласовать» аналогичным образом столбцы матрицы смежности.

цию, что и I -характеристика, а совокупность $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ — еще более бедную информацию. В другом крайнем случае, именно при $k = n - 1$, можно привести примеры неизоморфных графов с одинаковыми характеристиками рассматриваемого типа: два неизоморфных двухвершинных графа, порождающих одну и ту же пару $\{L_1, L_2\}$, показаны на рис. 19, а два неизоморфных трехвершинных графа, которым отвечает одна и та же тройка $\{L_1, L_2, L_3\}$, — на рис. 20.



Рис. 19.

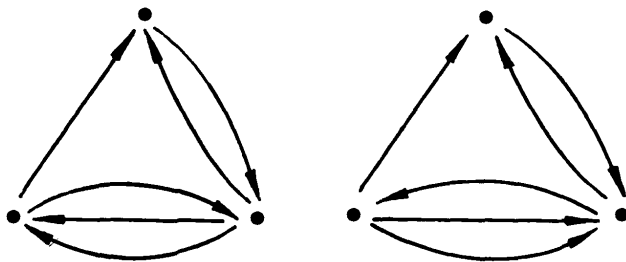


Рис. 20.



С « k -квазилокальными» характеристиками связан ряд интересных и не решенных до сих пор проблем. Во-первых, из того, что при крайних значениях $k = 1$ и $k = n - 1$ эти характеристики неспособны, вообще говоря, определить граф с точностью до изоморфизма, вовсе не вытекает их слабость и при всех промежуточных значениях k (если только $k \geq 4$). Во-вторых, эти характеристики могут оказаться весьма сильными в том или ином специальном классе графов. Так, например, гипотеза о том, что обыкновенный граф L при $n \doteq n(L) \geq 3$ определяется с точностью до изоморфизма совокупностью $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ своих $(n - 1)$ -вершинных подграфов, до сих пор не опровергнута ни одним примером, хотя справедливость ее удалось доказать пока лишь для некоторых подклассов в классе обыкновенных графов; этому вопросу посвящены работы П. Келли (1957) и Ф. Харари (5/1964), о которых мы еще будем говорить ниже (см. § 12 главы 2 и конец § 21 главы 3).

К квазилокальной информации о графе следует вообще отнести всякую такую, которая задается совокупностью правильных частей этого графа, не согласованных между собой (в том смысле, что не указано, какие элементы разных частей совпадают во всем графе), или любой информацией о таких частях. В частности, вместо указанных выше подграфов L_1, L_2, \dots, L_n можно рассматривать суграфы, получаемые из графа

L удалением заданного количества ребер. Так, например, задача о том, определяется ли обыкновенный граф L совокупностью всех $m \doteq m(L)$ суграфов, получаемых из него удалением одного ребра, в общем случае тоже еще не решена.

Окрестностью $O^1(L; x)$ вершины x графа L называется его подграф, порожденный вершиной x и всеми смежными с ней. Окружение $O(L; x)$ вершины x — это подграф графа L , порожденный всеми смежными с x и отличными от нее вершинами. Ясно, что совокупность окрестностей всех вершин графа (без идентификации элементов из разных окрестностей) и, аналогично, несогласованную совокупность окружений следует считать квазилокальной информацией о графе. Вопрос о том, определяется ли граф с точностью до изоморфизма такими совокупностями, не решен пока в общем виде даже для обыкновенных графов.

Понятия окрестности и окружения допускают естественное обобщение. k -окрестностью $O^k(L; x)$ вершины x графа L называется его подграф, порожденный множеством $\{y\}$ всех тех вершин, которые обладают следующим свойством: в L существует последовательность

$$x_0 \doteq x, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l \doteq y$$

из $l + 1$ вершин ($0 \leq l \leq k$), такая что x_{i-1} смежна с x_i при всех $i = 1, 2, \dots, l$. k -окружение — это подграф соответствующей k -окрестности, полученный из нее удалением самой вершины x . Ту информацию о графе L , которую несет несогласованная совокупность k -окрестностей или k -окружений его вершин, будем называть k -локальной.

По отношению к заданной локальной и квазилокальной (в том числе k -локальной) информации, как и вообще по отношению ко всякой конкретной информации о графе, возникают вопросы ее реальности и полноты (в том или ином смысле), а в случае неполноты — вопрос о полном обзоре всех графов, характеризующихся этой информацией (см. § 3). Некоторые общие подходы к трудным проблемам такого рода будут освещены во второй части книги, до этого же мы в процессе накопления необходимых сведений о графах будем сталкиваться лишь с отдельными не слишком сложными частными случаями указанных проблем. В пользу локальной информации, несмотря на ее хроническую неполноту, мы убедимся еще не раз. А этот параграф завершим одной интересной проблемой, возникшей в связи с некоторыми исследованиями Б. А. Трахтенброта по теории автоматов.



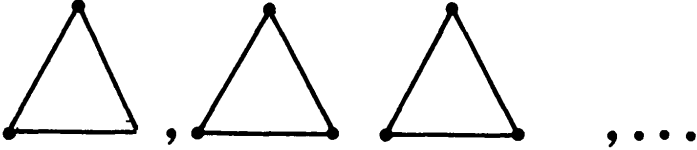
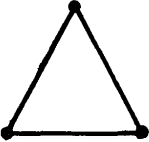
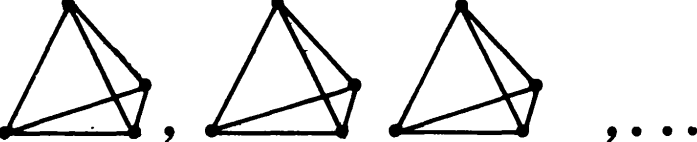

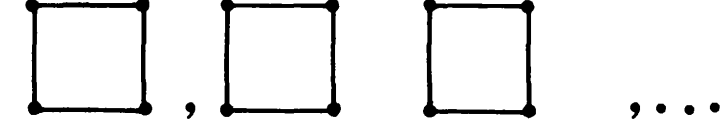
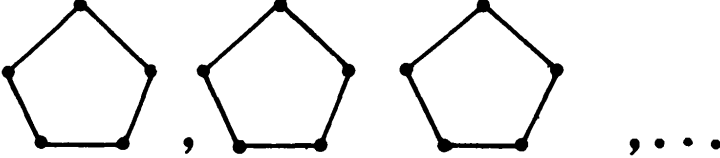
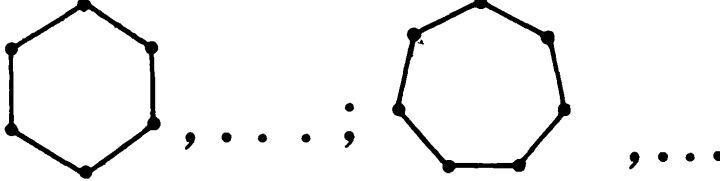
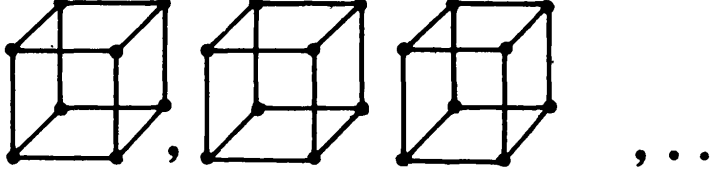
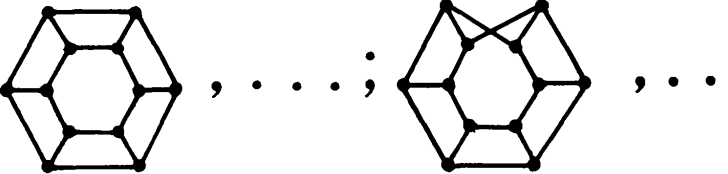
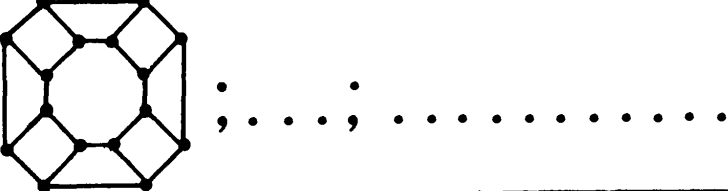

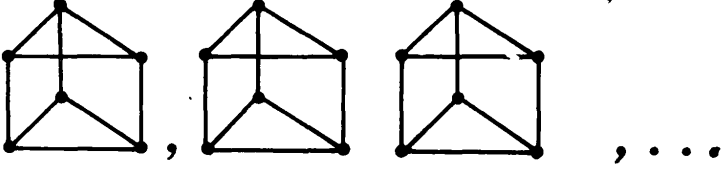
M	L
•	
	
	
	
•	
•	
•	
• •	
•	
	

Рис. 21.

Каким должен быть обыкновенный граф M , чтобы существовал такой обыкновенный граф L , в котором окружение $O(L; x)$ каждой вершины x изоморфно M ? Для любого из графов M , изображенных на рис. 21 слева, имеется даже бесконечное множество соответствующих L (справа); нетрудно вообще установить реализуемость (в указанном смысле) вся-

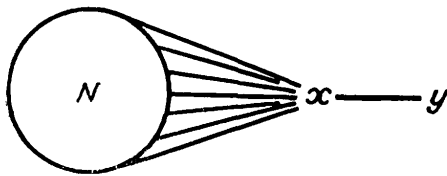


Рис. 22.

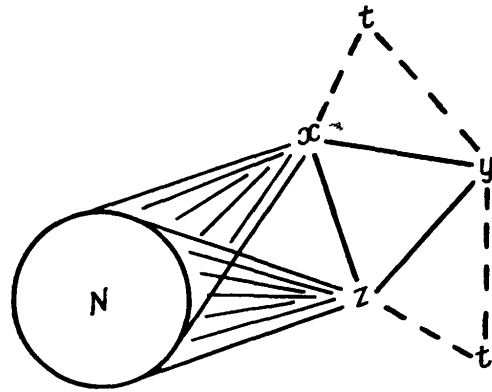


Рис. 23.

кого такого M , который состоит из любых не связанных друг с другом полных графов. В то же время если M — *вилка*, т. е. обыкновенный граф с тремя вершинами и двумя ребрами, то графа L для него не существует; это легко доказать и в более общем случае, указанном Л. С. Мельниковым (устное сообщение), а именно когда граф M имеет такой вид, как на рис. 22, где $N = (X_N, U_N)$ — произвольный граф (обыкновенный), все вершины которого смежны с x . Действительно, если бы M был окружением $O(L; z)$ вершины z в некотором L (рис. 23), то окружение $O(L; y)$, будучи тоже изоморфно M , содержало бы вершину t , отличную от x и от z и в то же время смежную с x или с z ; но тогда по крайней мере одно из окружений $O(L; x)$, $O(L; z)$ не было бы изоморфно M (при $t \notin X_N$ — из-за наличия лишней вершины, а при $t \in X_N$ — из-за наличия лишнего ребра).

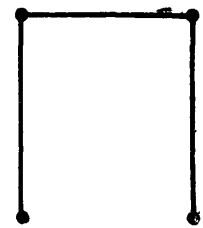


Рис. 2

Любопытно, что для графа M на рис. 24 реализации L опять существуют (рис. 25), а вообще для графа на рис. 26 при произвольном l вопрос пока не решен.

Верно ли следующее утверждение: если для обыкновенного графа M (конечного) существует бесконечный граф, у которого окружения всех вершин изоморфны M , то существует и конечный граф L с тем же свойством? Этот вопрос имеет смысл решать независимо от предыдущего, ибо в случае справедли-

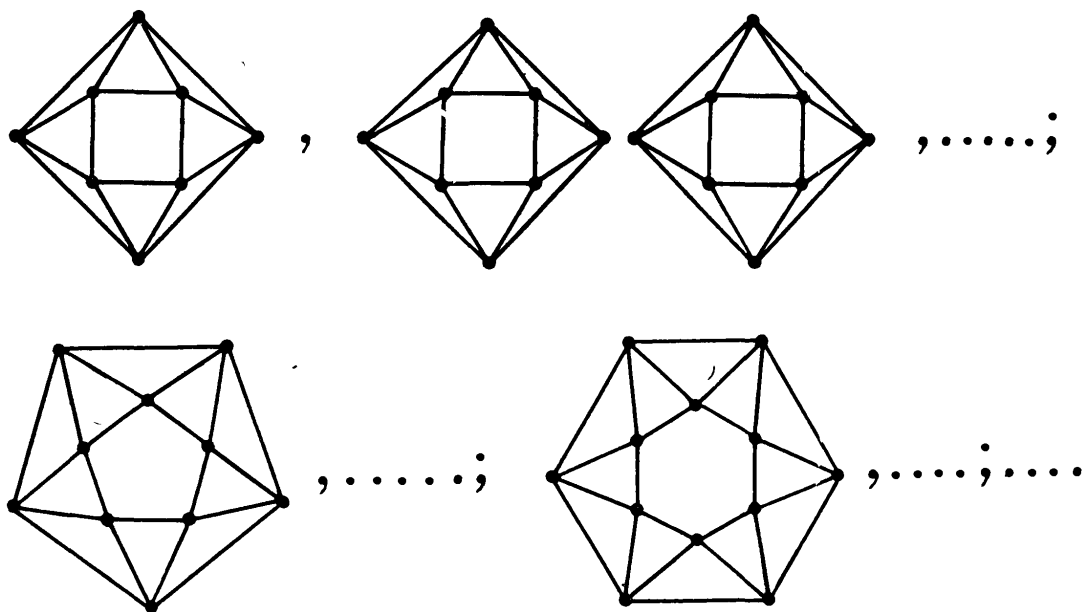


Рис. 25.

ности гипотезы отпадает необходимость вторгаться в область бесконечных графов для рассматриваемой проблемы.

Проблему можно обобщить, задавая вместо одного графа M целый класс графов и требуя, чтобы в искомом графе L все окружения вершин принадлежали заданному классу. Разумеется, для некоторых классов задача может оказаться простой (и даже тривиальной — например, если заданный класс состоит из всех обыкновенных графов).

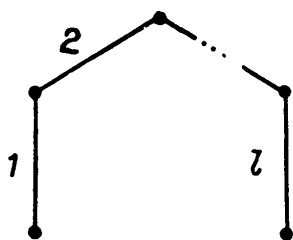


Рис. 26.

§ 9. Полные и пустые подграфы

Познакомимся с важной системой квазилокальных характеристик, которые удобнее сначала ввести для обыкновенных графов. Именно, обозначим через $f_i(L)$ количество i -вершинных полных, а через $e_i(L)$ — количество i -вершинных пустых подграфов обыкновенного графа $L = (X, U)$ (см. § 5). Так,

$$f_1(L) = e_1(L) = n(L), \quad f_2(L) = m(L), \\ e_2(L) = \frac{1}{2} n(L) [n(L) - 1] - m(L)$$

(число пар несмежных различных вершин), $f_3(L)$ выражает число треугольников в L и т. д. По определению считаем для любого графа $f_0(L) \doteq e_0(L) \doteq 1$ и $f_i(L) \doteq e_i(L) \doteq 0$ при $i > n(L)$.

Относить числа $f_i(L)$ и $e_i(L)$ к квазилокальным характеристикам графа вполне естественно, ибо задание всех этих чисел (вернее, конечного числа тех из них, которые не являются заведомыми нулями) равносильно заданию всех полных и пустых подграфов L , не согласованных друг с другом. Система этих чисел не определяет, вообще говоря, граф L с точностью

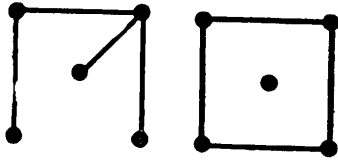


Рис. 27.



Рис. 28.

до изоморфизма: например, для каждого из двух графов на рис. 27 имеем

$$f_0 = e_0 = 1; f_1 = e_1 = 5; f_2 = 4, e_2 = 6;$$

$$f_3 = 0, e_3 = 2; f_4 = e_4 = 0; \dots$$

Критерий реальности информации, даваемой системами чисел $\{f_i\}$ и $\{e_i\}$ (обеими вместе или каждой по отдельности), в общем виде пока не найден; кроме тривиальных необходимых условий вроде $f_0 = e_0 = 1$, $f_1 = e_1$, $f_2 + e_2 = C_{f_1}^2$, целости и неотрицательности чисел f_i и e_i , известны и нетривиальные, которые будут рассмотрены во второй части книги*. Нет также еще систематического обзора всех графов с заданными количествами полных и пустых подграфов. Приведем отдельные примеры таких характеристик обыкновенных графов, которые полностью определяются по системам чисел $\{f_i(L)\}$ и $\{e_i(L)\}$.

Найдем количество $v(L)$ подграфов-вилок (рис. 28 слева) в заданном обыкновенном графе L . Обозначая через $\bar{v}(L)$ число *антивилок*, т. е. подграфов с тремя вершинами и одним ребром (рис. 28 справа), можно записать

$$f_3 + v + \bar{v} + e_3 = C_n^3,$$

где для краткости обозначено $f_3 \doteq f_3(L)$, $v \doteq v(L)$, ..., $n \doteq n(L)$. Второе уравнение для v и \bar{v} получается из следующих соображений: каждой комбинации ребра и не инцидентной ему вершины графа L отвечает трехвершинный подграф, причем треугольник соответствует трем таким комбинациям, вилка — двум, а антивилка — одной; так как общее число ком-

*) См. также конец этого параграфа.

бинаций равно $m(n-2)$, где $m \doteq m(L)$, тс

$$3f_3 + 2v + \bar{v} = m \cdot (n - 2).$$

Из обоих уравнений легко находим

$$v(L) = m(L) \cdot [n(L) - 2] - C_{n(L)}^3 - 2f_3(L) - e_3(L),$$

$$\bar{v}(L) = 2C_{n(L)}^3 - m(L) \cdot [n(L) - 2] + f_3(L) - 2e_3(L).$$

Например, для графов, изображенных на рис. 27, это дает $v = \bar{v} = 4$.

Автором было доказано (А. А. Зыков 3/1960, § 4), что суммы квадратов количеств ребер во всех i -вершинных подграфах ($i = 1, 2, \dots, n(L)$), а также сумма квадратов степеней всех вершин (см. § 2) обыкновенного графа L однозначно определяются системами $\{f_i(L)\}$, $\{e_i(L)\}$ и числом $v(L)$; не повторяя здесь вывода этих результатов (так как они носят весьма частный характер и первый из них требует специального аппарата, который будет развит во второй части книги), заметим лишь, что задание числа $v(L)$ помимо систем чисел $\{f_i(L)\}$ и $\{e_i(L)\}$ было, как теперь видно, излишним.

Дополнительным графом для обыкновенного графа $L = (X, U)$ называется обыкновенный граф $\bar{L} = (X, \bar{U})$ с тем же множеством вершин X и с множеством

$$\bar{U} \doteq \{\widetilde{xy}/x, y \in X \ \& \ x \neq y\} \setminus U$$

ребер, иначе говоря, такой граф, в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в исходном графе L . Например, для графов L_1 и L_2 на рис. 29 имеем: \bar{L}_1 изоморфен L_1 ,* а \bar{L}_2 состоит из треугольника и го-лой вершины. Ясно, что $\bar{\bar{L}} = L$ и что

$$e_i(L) = f_i(\bar{L}),$$

$$f_i(L) = e_i(\bar{L})$$

*) Свойства обыкновенных графов, изоморфных своим дополнительным, а также способы построения всех таких графов изучаются в работах Г. Закса (1/1962) и Г. Рингеля (6/1963). К этой тематике примыкает работа Б. Зелинки (2/1965) о графах, представимых в виде объединения двух своих изоморфных друг другу суграфов без общих ребер. Наконец, естественно распространяя понятие дополнительного графа на ориентированный случай, Г. Закс (3/1965) исследует графы Бержа без петель, изоморфные своим дополнительным.

при всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Так как переход от обыкновенного графа L к его дополнению \bar{L} и наоборот не составляет труда (для получения матрицы смежности $R_{\bar{L}}$ из R_L надо все элементы вида θ^2 заменить нулями, а все недиагональные нули заменить на θ^2 ; переход от матрицы инциденций A_L к $A_{\bar{L}}$ можно совершить через матрицу смежности: $A_L \rightarrow R_L \rightarrow R_{\bar{L}} \rightarrow A_{\bar{L}}$), то, умея находить одну из систем $\{f_i\}$, $\{e_i\}$, мы тем самым умеем находить и другую;

это не означает, конечно, что система $\{f_i(L)\}$ определяет систему $\{e_i(L)\}$ (или наоборот) для того же самого графа L : в примере графов L_1 и L_2 на рис. 29 имеем $f_1(L_1) = f_1(L_2) = 4$, $f_2(L_1) = f_2(L_2) = 3$, $f_3(L_1) =$

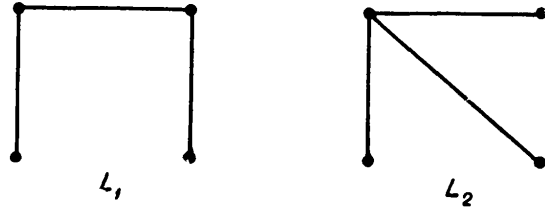


Рис. 29.

$= f_3(L_2) = 0$ и т. д., но $e_3(L_1) = 0$, в то время как $e_3(L_2) = 1$.

Прежде чем перейти к задачам выявления плотных (см. конец § 4) и пустых подграфов в заданном графе, заметим, что для графов $L = (X, U; P)$ общего вида такие задачи легко сводятся к случаю обыкновенных графов. В самом деле, подмножество $Y \subseteq X$ вершин порождает в L плотный подграф тогда и только тогда, когда оно порождает полный подграф в скелете \hat{L} графа L (см. § 5), значит количество плотных i -вершинных подграфов графа L равно $f_i(\hat{L})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n(L)$). Если желательно выявить или подсчитать квазиполные подграфы (т. е. такие, в которых смежны всякие вершины, в том числе и совпадающие), то надо сначала удалить из L все те вершины, при которых нет петель, а затем исследовать скелет \hat{L}' полученного подграфа L' . Вырожденным подграфам (см. начало § 4) графа L соответствуют в \hat{L} пустые поряфы, а для выявления или подсчета пустых подграфов графа L надо предварительно удалить из него все те вершины, при которых есть петли.

Таким образом, для практического выявления или подсчета квазиполных, плотных, вырожденных и пустых подграфов в произвольном графе достаточно уметь выявлять только полные или только пустые подграфы обыкновенных графов. Излагаемый ниже способ нахождения пустых подграфов основан на работах Х. Магу (1959) и Дж. Уэйсмана (1/1962, 2/1962)*.

* См. также И. Г. Илзния (2/1965).

Пусть $L = (X, U)$ — заданный обыкновенный граф с $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и с пронумерованным множеством ребер. Символы вершин x_1, x_2, \dots, x_n мы добавим в качестве новых образующих к прежним образующим ξ, η, ζ, θ полукольца K и расширенную таким образом систему подчиним условиям

$$\theta = 1, \quad 2 = 1,$$

$$x_i^2 = x_i, \quad x_i + 1 = 1$$

($i = 1, 2, \dots, n \doteq n(L)$), а также условиям коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Полученное полукольцо K_X содержит в качестве подполукольца булеву алгебру $B_X \doteq B \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ многочленов от символов x_i с коэффициентами из $B \doteq B \{0, 1\}$ (см. Введение). Разумеется, если рассматривать символы x_i только как переменные, принимающие два значения 0 и 1 (в B), то соотношения $x_i^2 = x_i$ и $x_i + 1 = 1$, а также свойства коммутативности и др. нет необходимости постулировать, поскольку тогда они легко могут быть доказаны на основании определения операций в B ; однако нам требуется более общая точка зрения на природу символов x_i , какая принята в алгебре. Нетрудно показать, что в K_X имеет место закон поглощения:

$$\forall a, b \in K_X (a + ab = a);$$

например, $x_1x_2 + x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2(1 + x_3x_4) = x_1x_2[(1 + x_3) + x_3x_4] = x_1x_2[1 + (x_3 + x_3x_4)] = x_1x_2[1 + x_3(1 + x_4)] = x_1x_2(1 + x_3) = x_1x_2$ и т. п.

Из матрицы инциденций

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

графа L над K_X (фактически над B), где $m \doteq m(L)$, образуем новую матрицу

$$A_X \doteq \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_1 & \dots & \dots & \dots & a_{1m}x_1 \\ a_{21}x_2 & a_{22}x_2 & \dots & \dots & \dots & a_{2m}x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_n & a_{n2}x_n & \dots & \dots & \dots & a_{nm}x_n \end{pmatrix}$$

и составим произведение

$$\Pi_L \doteq \Pi_L(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i;$$

ясно, что j -й сомножитель произведения есть сумма двух слагаемых, представляющих те две вершины, которые в графе L соединены j -м ребром ($j = 1, 2, \dots, m$).

Подмножество вершин $Y \subseteq X$ порождает в L пустой подграф тогда и только тогда, когда для системы $\{x_i^0\}_Y$ значений переменных $\{x_i\}$, определенной условиями

$$x_i \notin Y \Rightarrow x_i^0 = 1,$$

$$x_i \in Y \Rightarrow x_i^0 = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n$), имеет место равенство

$$\Pi_L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 1.$$

В самом деле, для пустоты подграфа с множеством вершин Y необходимо и достаточно, чтобы каждое ребро графа L было инцидентно хотя бы одной вершине из $X \setminus Y$, т. е. чтобы в каждом сомножителе произведения $\Pi_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по крайней мере одно из двух слагаемых представляло вершину не из Y ; но в этом и только в этом случае подстановка единиц вместо переменных x_i , обозначающих вершины не из Y , и нулей вместо переменных, представляющих вершины Y , обратит все произведение Π_L в единицу.

Итак, с помощью вычисления конкретных значений произведения Π_L в булевой алгебре $B\{0,1\}$ можно для любого заданного подмножества $Y \subseteq X$ узнать, является ли порожденный им подграф в L пустым; при такой постановке задачи указанный способ решения едва ли имеет какие-либо практические преимущества перед непосредственной проверкой по матрице смежности (вычеркнем из R_L строки и столбцы, соответствующие вершинам $X \setminus Y$, и посмотрим, будут ли все невычеркнутые элементы нулями). Однако применение булевой алгебры позволяет дать полный обзор всех пустых подграфов.

Пользуясь дистрибутивным, ассоциативным и коммутативным законами, раскроем в произведении Π_L все скобки, далее, в каждом слагаемом полученной суммы устраним повторения сомножителей с помощью соотношений вида $x_i^2 = x_i$ и, наконец, применяя закон поглощения, приведем всю сумму к минимальной форме, которая, как известно из мате-

матической логики, определится однозначно, ибо в нашем случае нигде не фигурирует операция логического отрицания в $B\{0,1\}^*$; полученный многочлен обозначим через $\Sigma_L \doteq \doteq \Sigma_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Разумеется, при любой системе значений $\{x_i^0\}$ из $B\{0,1\}$ имеет место

$$\Pi_L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \Sigma_L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Каждому слагаемому в Σ_L отнесем подграф, порожденный всеми теми вершинами графа L , которые не фигурируют в качестве сомножителей этого слагаемого. Покажем, что все выбранные таким образом подграфы M_1, M_2, \dots, M_k — пустые и ни один из них не есть подграф другого, а всякий пустой подграф графа L содержится хотя бы в одном из них.

Действительно, если все переменные x_i в слагаемом, соответствующем подграфу M_j ($1 \leq j \leq k$), положить равными единице, а остальные переменные — равными нулю, то Σ_L , а значит и Π_L обратятся в единицу, откуда, в силу сказанного выше, следует пустота M_j . Далее если бы M_j был подграфом M_l ($1 \leq j \leq k$, $1 \leq l \leq k$, $j \neq l$), то все переменные слагаемого, отвечающего M_l , присутствовали бы также в слагаемом, отвечающем M_j , и второе слагаемое поглощалось бы первым, в противоречии с минимальностью формы Σ_L . Наконец, если $M \doteq (Y, \emptyset)$ — произвольный пустой подграф графа L , то составленная для него система значений $\{x_i^0\}_Y$ обращает Π_L в единицу, следовательно, в Σ_L есть слагаемое, не имеющее сомножителей x_i из Y , и соответствующий этому слагаемому подграф M_j содержит M .

Пустой подграф графа L , не являющийся подграфом никакого большего пустого подграфа в L , называется *максимальным*. Легко показать, что система M_1, M_2, \dots, M_k , определяемая по слагаемым суммы Σ_L , представляет все максимальные пустые подграфы L . В самом деле, каждый максимальный пустой подграф (как и любой вообще пустой подграф) графа L содержится в некотором M_j , значит, в силу максимальной, совпадает с этим M_j и только с ним (ибо все M_i различны); наоборот, каждый из подграфов M_1, M_2, \dots, M_k максимален, ибо если бы, скажем, M_i не был максимальным ($1 \leq i \leq k$), то в L существовал бы максимальный пустой подграф M , содержащий M_i , и этот M должен был бы, в силу сказанного выше, совпадать с некоторым M_j ($j = 1, 2, \dots, k$; $j \neq i$), что невозможно.

*) Т. е. операция, которая в § 7 записана с помощью штриха.

Таким образом, получаем полный обзор всех максимальных, а значит и всех вообще пустых подграфов данного графа L . Система M_1, M_2, \dots, M_k определяет исходный граф L однозначно (с точностью до природы его ребер), так как для каждой вершины $x_i \in X$ объединение множеств вершин всех содержащих ее максимальных пустых подграфов есть не что иное как множество всех несмежных с x_i вершин L ; такая полнота характеристики обусловлена, конечно, согласованностью подграфов M_i (если упразднить идентификаторы вершин в M_1, M_2, \dots, M_k , то получится довольно слабая квазилокальная характеристика). Выписывание всех максимальных пустых подграфов представляет собой еще один способ задания обыкновенного графа, и в некоторых случаях этот способ может оказаться удобнее матричного.

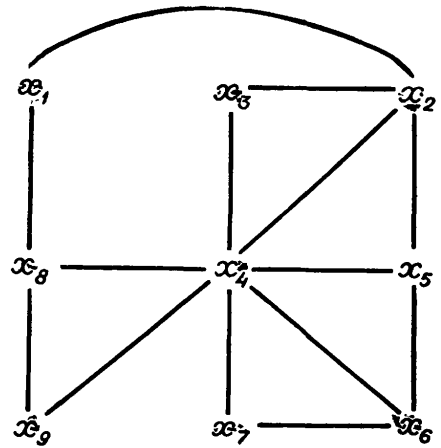


Рис. 30.

Непосредственное раскрытие всех скобок в произведении Π_L дало бы $2^{m(L)}$ слагаемых, т. е. практически обесценило бы рассматриваемый алгоритм. Положение спасает то обстоятельство, что закон поглощения можно применять задолго до полного раскрытия; это удобнее всего продемонстрировать на конкретном примере графа L , показанного на рис. 30.

Чтобы не выписывать матриц A и A_X , заметим, что произведение Π_L можно представить в виде

$$\Pi_L = \prod_{\{\widetilde{x_i x_j} / J_L(x_i, x_j)\}} (x_i + x_j) = \prod_{\{\widetilde{ij} / \widetilde{x_i x_j} \in U\}} (x_i + x_j),$$

где знак умножения Π распространяется на все неупорядоченные пары смежных вершин заданного графа $L = (X, U)$. В нашем примере

$$\begin{aligned} \Pi_L = & (x_1 + x_2)(x_1 + x_8)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_2 + x_5)(x_3 + x_4) \times \\ & \times (x_4 + x_5)(x_4 + x_6)(x_4 + x_7)(x_4 + x_8)(x_4 + x_9)(x_5 + x_6) \times \\ & \times (x_6 + x_7)(x_8 + x_9). \end{aligned}$$

Раскрытие всех скобок без применения закона поглощения дало бы $2^{14} = 16\,384$ слагаемых. Однако, замечая, что в силу закона поглощения всегда

$$(a + b)(a + c) \dots (a + p) = a + bc \dots p,$$

мы можем прежде всего переписать Π_L в виде

$$(x_1 + x_2x_8)(x_2 + x_3x_4x_5)(x_3 + x_4)(x_4 + x_5x_6x_7x_8x_9)(x_5 + x_6) \times \\ \times (x_6 + x_7)(x_8 + x_9),$$

а затем и в виде

$$\Pi_L = (x_1 + x_2x_8)(x_2 + x_3x_4x_5)(x_4 + x_3x_5x_6x_7x_8x_9)(x_6 + x_5x_7) \times \\ \times (x_8 + x_9).$$

Записать Π_L в такой форме можно было и сразу, руководствуясь следующим общим правилом: для $i = 1, 2, \dots$ последовательно составляем сомножители вида $x_i + x_jx_k \dots x_p$, где x_j, x_k, \dots, x_p — все вершины, смежные с x_i и обладающие большими номерами; после этого каждую пару сомножителей вида $(a + b)(b + c)$ заменяем одним сомножителем $(b + ac)$.

В полученном нами выражении для Π_L произведение первых двух скобок

$$(x_1 + x_2x_8)(x_2 + x_3x_4x_5) = x_1x_2 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_8 + x_2x_3x_4x_5x_8 = \\ = x_1x_2 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_8;$$

умножение его на третью скобку дает

$$(x_1x_2 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_8)(x_4 + x_3x_5x_6x_7x_8x_9) = \\ = x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3x_5x_6x_7x_8x_9 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9 + \\ + x_2x_4x_8 + x_2x_3x_5x_6x_7x_8x_9 = x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_4x_8 + \\ + x_2x_3x_5x_6x_7x_8x_9$$

и т. д. Продолжая в том же духе, без труда приходим к окончательному выражению

$$\Sigma_L = x_1x_3x_4x_5x_6x_8 + x_2x_3x_5x_6x_7x_8x_9 + x_2x_4x_6x_8 + x_1x_3x_4x_5x_7x_8 + \\ + x_2x_4x_5x_7x_8 + x_1x_3x_4x_5x_6x_9 + x_1x_2x_4x_6x_9 + x_1x_3x_4x_5x_7x_9 + \\ + x_1x_2x_4x_5x_7x_9.$$

Максимальные пустые подграфы графа L порождаются следующими подмножествами вершин:

$$\{x_2, x_7, x_9\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_3, x_5, x_7, x_9\}, \{x_2, x_6, x_9\},$$

$$\{x_1, x_3, x_6, x_9\}, \{x_2, x_7, x_8\}, \{x_3, x_5, x_7, x_8\}, \{x_2, x_6, x_8\}, \{x_3, x_6, x_8\}.$$

Как сообщает Дж. Уэйсман (1/1962), для конкретного 32-вершинного графа машина IBM7090 менее чем за три секунды

нашла все максимальные пустые подграфы (их оказалось 186). Такого рода успех нельзя, к сожалению, гарантировать в общем случае: во-первых, существуют графы, а именно паросочетания (см. § 6), для которых никакие два сомножителя в произведении Π_L не имеют общих слагаемых x_i , так что закон поглощения совсем не применим; во-вторых, мы не умеем пока эффективно находить ту нумерацию вершин данного графа, при которой закон поглощения (если он вообще применим) дает наибольший эффект. Было бы интересно выяснить, сколь редки «плохие» графы и велики ли шансы в случае «хорошего» графа натолкнуться на «плохую» нумерацию вершин; эти вопросы относятся к области вероятностного и статистического изучения графов (см. § 50 Заключения первой части).

Максимальные полные подграфы, т. е. такие полные, которые не содержатся в больших полных подграфах заданного графа, можно находить аналогичным способом, с той лишь разницей, что вместо Π_L рассматривается произведение

$$\bar{\Pi}_L \doteq \bar{\Pi}_L(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq \Pi(x_i + x_j),$$

$$\{\bar{i}\bar{j}/i \neq j \ \& \ \neg J(x_i, x_j)\}$$

распространенное на всевозможные пары (неупорядоченные) несмежных различных вершин. Так, для уже знакомого нам графа L на рис. 30 имеем

$$\begin{aligned} \Pi_L &= (x_1 + x_3x_4x_5x_6x_7x_9)(x_2 + x_6x_7x_8x_9)(x_3 + x_5x_6x_7x_8x_9) \times \\ &\times (x_5 + x_7x_8x_9)(x_6 + x_8x_9)(x_7 + x_8x_9) = \dots = x_1x_2x_3x_5x_6x_7 + \\ &+ x_1x_2x_3x_5x_8x_9 + x_1x_2x_3x_7x_8x_9 + x_1x_3x_6x_7x_8x_9 + x_1x_5x_6x_7x_8x_9 + \\ &+ x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_9 + x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9 \end{aligned}$$

(прсмежуточные выкладки предоставим читателю), и максимальные полные подграфы порождаются множествами вершин

$$\{x_4, x_8, x_9\}, \{x_4, x_6, x_7\}, \{x_4, x_5, x_6\},$$

$$\{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_8\}, \{x_1, x_2\}.$$

Система таких подграфов, как и система максимальных пустых, вполне определяет граф. Обе системы можно записать в виде матриц, в которых строки соответствуют вершинам, а

столбцы — максимальным подграфам:

матрица максимальных пустых подграфов	x_1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
	x_2	1	0	0	1	0	1	0	1	0
	x_3	0	0	1	0	1	0	1	0	1
	x_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	x_5	0	0	1	0	0	0	1	0	0
	x_6	0	0	0	1	1	0	0	1	1
	x_7	1	0	1	0	0	1	1	0	0
	x_8	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	x_9	1	0	1	1	1	0	0	0	0

матрица максимальных полных подграфов	x_1	0	0	0	0	0	1	1
	x_2	0	0	0	1	1	0	1
	x_3	0	0	0	0	1	0	0
	x_4	1	1	1	1	1	0	0
	x_5	0	0	1	1	0	0	0
	x_6	0	1	1	0	0	0	0
	x_7	0	1	0	0	0	0	0
	x_8	1	0	0	0	0	1	0
	x_9	1	0	0	0	0	0	0

Как поступать, чтобы найти не только максимальные, а все вообще пустые или полные подграфы заданного графа? Реше-

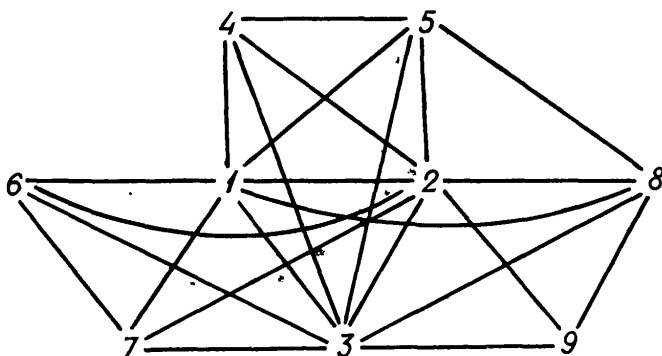


Рис. 31.

$$Y_1 \doteq \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad Y_2 \doteq \{1, 2, 3, 6, 7\},$$

$$Y_3 \doteq \{1, 2, 3, 5, 8\}, \quad Y_4 \doteq \{2, 3, 8, 9\}.$$

Очевидный процесс получения всех i -вершинных полных подграфов ($i = 1, 2, \dots$) состоит в том, что сначала выписываются

ние этой задачи рассмотрим для случая полных подграфов графа L на рис. 31. Допустим, что максимальные полные подграфы уже выявлены; в данном случае это можно сделать прямо по чертежу, и порождающие множества вершин суть

все i -вершинные подмножества множества Y_1 , затем все те i -вершинные подмножества Y_2 , которые еще не выписаны, и т. д. При $i = 1, 2$ проделывать это не имеет смысла, ибо вершины и ребра уже предполагаются выявленными в случае задания графа матрицей инциденций, а выявление их непосредственно по чертежу тоже не представляет труда даже для весьма сложных графов. Начнем с $i = 3$.

Выписываем все тройки (неупорядоченные) вершин Y_1 :

$$123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 \quad (Y_1)$$

затем выписываем все тройки вершин Y_2 и вычеркиваем те, которые уже были выписаны ранее:

$$125, 126, 127, 136, 137, 167, 236, 237, 267, 367 \quad (Y_2)$$

и т. д.; продолжая в том же духе, находим

$$125, 125, 128, 135, 138, 158, 235, 238, 258, 358, \quad (Y_3)$$

$$238, 239, 289, 389. \quad (Y_4)$$

Таким образом, полные трехвершинные подграфы графа L порождены множествами $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \dots, \{3, 8, 9\}$ (всего 28 множеств).

Для $i = 4$ аналогично

$$1234, 1235, 1245, 1345, 2345, \quad (Y_1)$$

$$1236, 1237, 1267, 1367, 2367, \quad (Y_2)$$

$$1235, 1238, 1258, 1358, 2358, \quad (Y_3)$$

$$2389, \quad (Y_4)$$

и множества вершин полных четырехвершинных подграфов суть

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \dots, \{2, 3, 8, 9\}$$

(всего 15 множеств).

Пятивершинные полные подграфы порождаются множествами Y_1, Y_2, Y_3 ; полных подграфов с большим числом вершин, очевидно, нет.

Итак, в данном случае

$$f_0 = 1, f_1 = 9, f_2 = 24, f_3 = 28, f_4 = 15, f_5 = 3, f_6 = \dots = 0.$$

(для нахождения числа $f_2 = m(L)$ можно, например, сложить степени всех вершин и сумму разделить пополам).

Может показаться, что если в произведении $\bar{\Pi}_L$ раскрыть все скобки и, не применяя закона поглощения, лишь устранить повторения слагаемых в полученной сумме (иначе говоря, использовать в K_X соотношение $2 = 1$, но не соотношения $x_i + 1 = x_i$), то мы найдем тем самым все полные подграфы L . Однако это не так, в чем можно убедиться уже для весьма простого графа L на рис. 32: здесь

$$\bar{\Pi}_L = (x + t)(y + t) = xy + xt + yt + t,$$

слагаемым отвечают множества вершин

$$\{z, t\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y, z\},$$

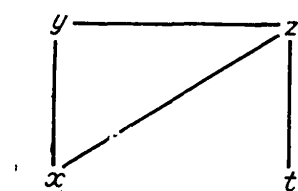


Рис. 32.

задающие не все полные подграфы, ибо отсутствует $\{x, y\}$ (не говоря уже обо всех одновершинных подграфах). Мы не знаем пока наиболее экономного способа выявления всех полных и всех пустых подграфов (может быть, для этого вовсе не надо выявлять сначала максимальные), но и сама задача теряет практический смысл для сложных графов, так как множества полных и пустых подграфов тогда, как правило, необозримо велики. Гораздо важнее было бы научиться практически эффективно находить только числа $f_i(L)$ и $e_i(L)$, не выписывая соответствующих подграфов; об этой нелегкой проблеме мы будем подробно говорить во второй части книги и там же дадим вывод следующих двух оценок, которые сейчас лишь упомянем.

1. Если $n = n(L)$ и $f_k(L) = 0$ при $k \geq l$, то для $i < l$

$$f_i(L) \leq \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq l-2} \left(\prod_{r=1}^i \left[\frac{n + jr}{l-1} \right] \right);$$

то же справедливо и в отношении чисел $e_i(L)$ вместо $f_i(L)$ (второе утверждение получается из первого переходом к дополнительному графу); оценки точные. Этот результат принадлежит А. А. Зыкову (1/1949), явный же вид оценки получил независимо П. Эрдеш (3/1962) другим путем.

2. Наибольшее возможное количество максимальных пол-

ных подграфов в n -вершинном графе равно

$$\begin{aligned} & 3^{\frac{n}{3}} \quad \text{при } n = 3k, \\ & 4 \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1} \quad \text{при } n = 3k + 1, \\ & 2 \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \quad \text{при } n = 3k + 2 \end{aligned}$$

(Дж. Мун и Л. Мозер, 2/1965); то же справедливо и для наибольшего количества максимальных пустых подграфов.

§ 10. Части с экстремальными свойствами в графах

В предыдущем параграфе мы имели дело с пустыми и полными подграфами, максимальными относительно этих свойств. Вместо пустоты или полноты можно рассматривать какое угодно свойство Ω . Подграф L' графа L называется Ω -*максимальным*, если он обладает свойством Ω и в L не существует такого подграфа, который содержал бы L' , не совпадая с ним, и тоже обладал свойством Ω . Подграф L' называется Ω -*наибольшим*, если среди всех подграфов графа L , обладающих свойством Ω , он содержит наибольшее число вершин. Всякий Ω -наибольший подграф Ω -максимален, но не наоборот. Аналогично, Ω -*минимальный* подграф характеризуется тем, что он обладает свойством Ω и не содержит правильных подграфов с этим же свойством, а Ω -*наименьшие* подграфы суть Ω -минимальные с наименьшим количеством вершин.

Определения Ω -максимальности и Ω -минимальности полностью переносятся на суграфы и на произвольные части. Понятия « Ω -наибольший» и « Ω -наименьший» для суграфов отличаются от аналогичных понятий для подграфов лишь тем, что вместо количества вершин речь идет о числе ребер, а для частей общего вида эти понятия надо уточнять в каждом конкретном случае.

С Ω -экстремальными (в перечисленных смыслах) частями графа связаны различные важные его числовые характеристики. Так, число вершин наибольшего плотного подграфа называется *плотностью* $\varphi(L)$, а число вершин наибольшего пустого подграфа — *неплотностью* $\varepsilon(L)$ графа L . Ясно, что в случае обыкновенного графа

$$\begin{aligned} \varphi(L) &= \varepsilon(\bar{L}), \\ \varepsilon(L) &= \varphi(\bar{L}), \end{aligned}$$

т. е. практически достаточно научиться вычислять только одну из этих двух величин. В настоящее время известны точные верхние и нижние оценки плотности и неплотности обыкновенного графа через количества его вершин и ребер; выводом этих оценок мы займемся во второй части книги. Интересно отметить также, что если даны обе величины $\varphi \doteq \varphi(L)$ и $\varepsilon \doteq \varepsilon(L)$ обыкновенного графа L , то число $n = n(L)$ его вершин не может быть сколь угодно большим; в частности, Г. Секереш получил оценку $n < C_{\varphi+\varepsilon}^{\varphi} (= C_{\varphi+\varepsilon}^{\varepsilon})$ (см. П. Эрдеши и Г. Секереш, 1935). Введем еще некоторые важные числовые характеристики графа, связанные с его экстремальными частями, и установим такие соотношения, доказательство которых не требует развития специальных методов.

Опорой графа $L = (X, U; P)$ называется такой его подграф $L' = (X', U'; P)$, что всякое ребро $u \in U$ исходного графа инцидентно по крайней мере одной вершине из X' . Беря за Ω свойство «быть опорой данного графа L », введем понятия *минимальной опоры* и *наименьшей опоры*; количество $\delta(L)$ вершин наименьшей опоры графа L называется его *опорным числом*. Ясно, что подграф L' есть опора графа L тогда и только тогда, когда подграф L'' , порожденный множеством $X \setminus X'$ остальных вершин, пуст, и что опора L' минимальна в том и только том случае, если соответствующий пустой подграф L'' максимален (в частности, наименьшей опоре отвечает наибольший пустой подграф). Отсюда следует, что задачи выявления максимальных пустых подграфов и минимальных опор равносильны и что

$$\varepsilon(L) + \delta(L) = n(L)$$

(см. Т. Галлаи 2/1959). Упомянем еще без доказательства верхнюю оценку опорного числа обыкновенного непустого графа L , принадлежащую П. Эрдеши и Т. Галлаи (1961):

$$\delta(L) \leq \frac{2n(L) \cdot m(L)}{n(L) + 2m(L)};$$

в той же работе получен ряд более тонких оценок для $\delta(L)$, когда известны оценки этого числа у некоторых подграфов графа L .

Суграф $L' = (X', U'; P)$ графа $L = (X, U; P)$ называется его *накрытием*, если всякая вершина, инцидентная хотя бы одному ребру в L , инцидентна также и некоторому ребру в L' , иначе говоря, если множество всех голых вершин у L' то же,

что у L . Количество ребер наименьшего накрытия называется *накрывающим числом* $\iota(L)$ графа L .

Суграф L' назовем *квазипаросочетанием* графа L , если никакие два различных ребра L' не смежны; количество ребер наибольшего квазипаросочетания будем обозначать через $\pi(L)$. Для графа без петель это число совпадает с введенным ранее в § 6, если в паросочетании K_m допускать ориентацию некоторых ребер.

Т. Галлаи (2/1959) показал, что для графа L без петель и изолированных вершин

$$\pi(L) + \iota(L) = n(L).$$

Этот результат непосредственно вытекает из следующих оценок, получаемых аналогичными рассуждениями, но справедливых для произвольного графа $L = (X, U; P)$:

$$n(L) - n_0(L) + n_0^0(L) \leq \pi(L) + \iota(L) \leq n(L) - n_0(L) + n^0(L), (*)$$

где $n_0^0(L)$ — число изолированных неголых (т. е. инцидентных лишь петлям) вершин L , а $n^0(L)$ — число всех тех вершин L , при которых есть петли; в процессе доказательства мы будем пользоваться краткими обозначениями $n_0 \doteq n_0(L)$, $n_0^0 \doteq n_0^0(L)$ и $n^0 \doteq n^0(L)$.

Начнем с вывода верхней оценки. Пусть некоторое наибольшее квазипаросочетание L' графа L содержит μ непетель и λ петель, где $\mu + \lambda = \pi \doteq \pi(L)$. Для каждой из $n - n_0 - \lambda - 2\mu$ неголых вершин L , не инцидентных ребрам L' (т. е. голых в L'), выберем какое-нибудь инцидентное ей (в L) ребро; добавляя все выбранные ребра к L' , получим накрытие графа L , содержащее $\mu + \lambda + n - n_0 - \lambda - 2\mu = n - n_0 - \mu$ ребер. Следовательно,

$$\iota \leq n - n_0 - \mu,$$

а так как $\pi = \mu + \lambda$, то

$$\pi + \iota \leq n - n_0 + \lambda$$

и тем более

$$\pi + \iota \leq n - n_0 + n^0.$$

Переходим к нижней оценке. Пусть L' — некоторое наименьшее накрытие графа L . Никакие две вершины, обладающие в L' степенями > 1 , не могут быть смежны в L' , ибо иначе после удаления соединяющего их ребра получилось бы такое

накрытие графа L , которое имеет меньше ι ребер, что невозможно. Поэтому L' обладает структурой, показанной на рис. 33. Обозначая через λ число петель, через μ — число веерообразных частей (некоторые из них могут состоять из одного ребра), а через ν — общее количество ребер в этих вееро-

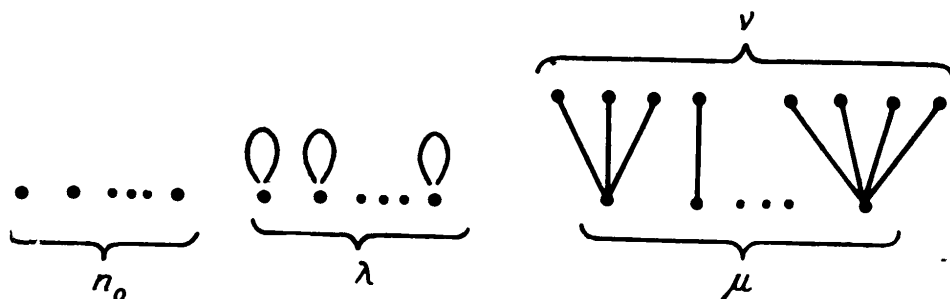


Рис. 33.

образных частях суграфа L' , можем написать

$$\iota = \lambda + \nu, \quad n = n_0 + \lambda + \mu + \nu.$$

Ясно также, что

$$\pi \geq \lambda + \mu,$$

ибо выбрав в L' все λ петель и по одному ребру в каждой из μ веерообразных частей, мы получим квазипаросочетание графа L . Складывая первое равенство с неравенством и вычитая второе равенство, находим

$$\iota + \pi - n \geq \lambda - n_0.$$

Но $\lambda \geq n_0^0$, так как всякое покрытие графа L , в том числе и L' , обязательно должно содержать по одной петле при каждой изолированной неголой вершине. Отсюда окончательно

$$\iota + \pi \geq n - n_0 + n_0^0,$$

что и требовалось.

Оценки (*) доказаны. Вопрос о том, можно ли их как-то улучшить, мы не рассматриваем, поскольку в случае $n_0 = n^0 = 0$ (и, значит, $n_0^0 = 0$), который пока остается самым интересным с точки зрения теоретических и практических приложений, эти оценки переходят в точные равенства.

Для бихроматических графов (см. § 6) справедливо также соотношение

$$\pi(L) = \delta(L),$$

впервые полученное Д. Кёнигом (1936, глава 11). Действительно, в силу теоремы Кёнига — Оре (§ 6), если $L = (X, U; P)$ — бихроматический граф, $X = X' \cup X''$, $X' \cap X'' = \emptyset$ и подграфы, порожденные подмножествами X' и X'' , пусты, то

$$\pi(L) = |X'| - \max_{A \subseteq X'} (|A| - |\Delta A|) = \min_{A \subseteq X'} (|X'| - |A| + |\Delta A|) = \min_{A \subseteq X'} (|X' \setminus A| + |\Delta A|) = \delta(L),$$

так как при любом $A \subseteq X'$ множество вершин $(X' \setminus A) \cup \Delta A$ есть опора графа L , причем всякая наименьшая опора имеет такой вид. Поскольку бихроматический граф не содержит петель, оценки (*) для него переходят в равенство

$$\pi(L) + \iota(L) = n(L) - n_0(L),$$

которое вместе с равенством $\delta(L) + \varepsilon(L) = n(L)$, справедливым для любых графов, дает результат, тоже найденный ранее Д. Кёнигом другим способом: если L — бихроматический граф, то

$$\varepsilon(L) = \iota(L) + n_0(L).$$

Значительный интерес представляют такие квазипаросочетания графа $L = (X, U; P)$, которые содержат все его вершины (очевидным необходимым, но далеко не достаточным условием существования хотя бы одного такого квазипаросочетания является отсутствие у L голых вершин). Следуя К. А. Зарецкому (2/1966), изучим для обыкновенных графов вопрос о существовании накрытия несколько более общего вида, чем паросочетание.

Назовем k -веером ($k \geq 1$) обыкновенный граф, который состоит из $k + 1$ вершин и из k ребер, соединяющих одну вершину со всеми остальными (рис. 34).

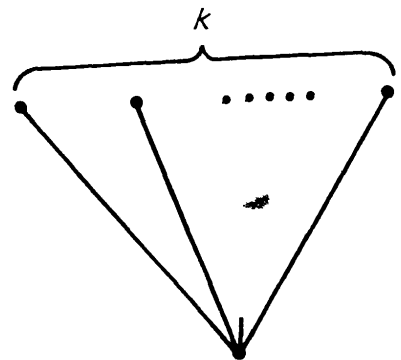


Рис. 34.

Накрытие L' обыкновенного графа L называется его *веерным k -накрытием*, если оно состоит из некоторого множества L'_1, L'_2, \dots, L'_r вееров, попарно не имеющих общих вершин, и таких, что каждый L'_i содержит не более k ребер; в частности, веерное 1-накрытие есть не что иное, как паросочетание графа L , охватывающее все его вершины*. Результат К. А. За-

*) Такие паросочетания называются *совершенными* (см., например, К. Берж, 1/1958, русск. 1962, глава 18).

редкого заключается в установлении необходимого и достаточного условия, которому должен удовлетворять обыкновенный граф для того, чтобы он обладал верным k -накрытием при заданном $k \geq 2$. Нам понадобится еще несколько определений и лемм.

Пусть $L = (X, U)$ — обыкновенный граф. Обозначим $\Delta(Y) \doteq \Delta_L(Y) \doteq \{x/x \in X \ \& \ \widetilde{xy} \in U\}$ при любом $Y \subseteq X$. Если $E = (Z, \emptyset)$ — пустой подграф в L , то число

$$s_L(Z) \doteq \frac{|\Delta_L(Z)|}{|Z|}$$

называется *степенью множества Z (или подграфа E) в графе L* ; для одновершинного множества $Z = \{z\}$ его степень $s_L(Z)$, очевидно, совпадает со степенью $s_L(z)$ вершины z (см. § 2). Через \mathfrak{C}_L обозначим класс всех тех подмножеств множества вершин X графа L , которые порождают в L пустые подграфы, и положим

$$\check{s}(L) \doteq \min \{s_L(Z) / Z \in \mathfrak{C}_L\}.$$

Л е м м а 1. *Если обыкновенный граф L обладает верным k -накрытием, то $\check{s}(L) \geq \frac{1}{k}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L' — верное k -накрытие графа L , образованное веерами L'_1, L'_2, \dots, L'_r , а $Z \in \mathfrak{C}_L$. Так как каждый из вееров L'_i может содержать не более k попарно несмежных вершин графа L , то среди этих вееров не менее $\frac{|Z|}{k}$ содержат хотя бы по одной вершине множества Z , поэтому $|\Delta_{L'}(Z)| \geq \frac{|Z|}{k}$ и тем более $|\Delta_L(Z)| \geq \frac{|Z|}{k}$, т. е. $s_L(Z) \geq \frac{1}{k}$, откуда, ввиду произвольности Z , получаем $\check{s}(L) \geq \frac{1}{k}$.

Л е м м а 2. *Пусть $Z \in \mathfrak{C}_L$ такое, что $s_L(Z) = \check{s}(L)$ и подмножество $X' \doteq X \setminus [Z \cup \Delta_L(Z)]$ непусто, а $L' \doteq (X', U')$ — подграф графа L , порожденный множеством вершин X' . Тогда $\check{s}(L') \geq \check{s}(L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, вопреки утверждению леммы, существует такое $Z' \in \mathfrak{C}_{L'}$, для которого $s_{L'}(Z') < \check{s}(L)$. Тогда $Z \cup Z' \in \mathfrak{C}_L$ (в силу $Z' \subseteq X'$ и определения X'). Так

как $\Delta_L(Z') \subseteq \Delta_{L'}(Z') \cup \Delta_L(Z)$, то

$$\begin{aligned} |\Delta_L(Z \cup Z')| &= |\Delta_L(Z) \cup \Delta_{L'}(Z')| = |\Delta_L(Z)| + |\Delta_{L'}(Z')| = \\ &= s_L(Z) \cdot |Z| + s_{L'}(Z') \cdot |Z'| < \check{s}(\bar{L})(|Z| + |Z'|) = \check{s}(L) \cdot |Z \cup Z'|, \end{aligned}$$

т. е. $s_L(Z \cup Z') < \check{s}(L)$, что невозможно.

Лемма 3. Если $\check{s}(L) \geq 1$, то граф $L = (X, U)$ обладает верным 2-накрытием.

Доказательство. Пусть $K = (Y, V)$ — некоторое наибольшее паросочетание графа L (т. е. такое, что $|V| = \pi(L)$). Тогда $X \setminus Y \in \mathfrak{C}_L$. Рассмотрим вспомогательный граф Кёнига $L' \doteq (Y, X \setminus Y; W)$ (см. § 6), где W — множество всех тех ребер графа L , которые соединяют вершины Y с вершинами $X \setminus Y$. Ввиду условия леммы, для любого $Z \subseteq X \setminus Y$ имеем $s_L(Z) \geq 1$, или, что то же, $s_{L'}(Z) \geq 1$, т. е. $|\Delta_K(Z)| \geq |Z|$. По теореме Кёнига — Холла в L' существует паросочетание $K' = (Y', V')$, содержащее все вершины множества $X \setminus Y$. Если V'' — множество тех ребер L , оба конца которых инцидентны ребрам V' , то граф $(Y \cup Y', (V \cup V') \setminus V'')$ представляет собой искомое верное 2-накрытие для L .

Лемма 4. Пусть $L = (X, Y; U)$ — граф Кёнига с $|X| = q \neq 0$, $|Y| = p$, $p \leq q \leq kp$ ($k \geq 2$), такой что $\forall Z \subseteq X \left(s_L(Z) \geq \frac{p}{q} \right)$. Тогда L имеет верное k -накрытие.

Доказательство. Введем вспомогательный граф Кёнига $L' \doteq (X', Y'; U')$ следующим образом:

$$X' \doteq X \cup X^*,$$

где X^* — множество из $kp - q$ новых вершин (не принадлежащих $X \cup Y$);

Y' — множество упорядоченных пар вида $y\vec{i}$ ($y \in Y$; $i = 1, 2, \dots, k$);

$$\begin{aligned} U' &\doteq \{x \widetilde{y\vec{i}} / x \in X \& y \in Y \& i = 1, 2, \dots, k\} \cup \\ &\cup \{x^* \widetilde{y\vec{i}} / x^* \in X^* \& y \in Y \& i = 2, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Покажем, что L' обладает паросочетанием K' , охватывающим все вершины X' ; для этого, в силу теоремы Кёнига — Холла, достаточно доказать $s_{L'}(Z) \geq 1$ при любом $Z \subseteq X'$.

Пусть $Z_1 \doteq Z \cap X$, $Z_2 \doteq Z \cap X^* = Z \setminus Z_1$; очевидно, $|Z_1| \leq q$ и $|Z_2| \leq kp - q$. Если $Z_2 = \emptyset$, то

$$s_{L'}(Z) = \frac{|\Delta_{L'}(Z)|}{|Z|} = \frac{|\Delta_{L'}(Z_1)|}{|Z_1|} = \frac{k \cdot |\Delta_L(Z_1)|}{|Z_1|} \geq \frac{kp}{q} \geq 1.$$

Если же $Z_2 \neq \emptyset$, то

$$\begin{aligned} s_{L'}(Z) &= \frac{|\Delta_{L'}(Z)|}{|Z|} = \frac{|\Delta_{L'}(Z_1)| + |\Delta_{L'}(Z_2) \setminus \Delta_{L'}(Z_1)|}{|Z_1| + |Z_2|} = \\ &= \frac{k \cdot |\Delta_L(Z_1)| + (k-1)(p - |\Delta_L(Z_1)|)}{|Z_1| + |Z_2|} = \frac{|\Delta_L(Z_1)| + kp - p}{|Z_1| + |Z_2|} = 1 + \alpha, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{|\Delta_L(Z_1)| + kp - p - |Z_1| - |Z_2|}{|Z_1| + |Z_2|} \geq \frac{\frac{p}{q}|Z_1| - |Z_1| + kp - p - (kp - q)}{|Z_1| + |Z_2|} = \\ &= \frac{(q-p)(q - |Z_1|)}{q(|Z_1| + |Z_2|)} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае $s_{L'}(Z) \geq 1$, и искомое K' действительно существует.

Так как $|X'| = |Y'|$ (в силу определения множеств X' и Y'), то K' охватывает не только все вершины X' , но и все вершины Y' , поэтому, в частности, каждая вершина вида $\overrightarrow{y_i} \in Y'$ соединена в L' с некоторой вершиной множества X ребром, принадлежащим паросочетанию K' . Удаляя из K' все ребра вида $\overrightarrow{x^* y_i}$ ($x^* \in X^*$; $i = 2, \dots, k$) и отождествляя между собой все вершины в каждом из множеств $\{\overrightarrow{y_i} / i = 1, 2, \dots, k\}$, мы превратим паросочетание K' в искомое верное k -накрытие графа L .

Лемма 5. Если $\check{s}(L) \geq \frac{1}{k}$, где $k \geq 2$, то граф $L = (X, U)$ обладает верным k -накрытием.

Доказательство. Утверждение тривиально для графов с $n(L) \leq 2$; пусть оно уже доказано для всех обыкновенных графов менее чем с $n_0 \geq 3$ вершинами и пусть $L = (X, U)$ — обыкновенный граф с $|X| = n_0$, такой что $\check{s}(L) \geq \frac{1}{k}$.

Если $\check{s}(L) \geq 1$, то по лемме 3 граф L имеет верное 2-накрытие, которое и будет искомым. Пусть теперь $\check{s}(L) < 1$, т. е. $k \geq \frac{1}{\check{s}(L)} \geq 2$, а $Z \in \mathfrak{C}_L$ — такое, для которого $s_L(Z) = \check{s}(L)$.

Построим граф Кёнига $L' \doteq (Z, \Delta_L(Z); V')$, где V' — множество ребер L , соединяющих вершины Z с вершинами $\Delta_L(Z)$; граф L' , как легко проверить, удовлетворяет всем условиям леммы 4, следовательно, обладает веерным k -накрытием $L_1 = (X_1, U_1)$. В случае $Z \cup \Delta_L(Z) = X$ этот L_1 и есть искомое покрытие для L . Если же $X^* \doteq X \setminus [Z \cup \Delta_L(Z)] \neq \emptyset$, то у подграфа $L^* \doteq (X^*, U^*)$, порожденного множеством вершин X^* , будет $|X^*| < n_0$, и, по лемме 2, $\check{s}(L^*) \geq \check{s}(L) \geq \frac{1}{k}$. Согласно индуктивному предположению, L^* обладает веерным k -накрытием $L_2 = (X_2, U_2)$, и тогда граф $(X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2)$ является искомым покрытием для L .

Из лемм 1 и 5 следует

Теорема Зарецкого. Обыкновенный граф L обладает веерным k -накрытием ($k \geq 2$) тогда и только тогда, когда $\check{s}(L) \geq \frac{1}{k}$.

При $k = 1$ лемма 1 выражает необходимое условие существования в L веерного 1-накрытия, т. е. совершенного паросочетания; пример графа на рис. 35 показывает, что это условие недостаточно. Более глубокое исследование вопроса основано на методе чередующихся цепей, который будет изложен во второй части книги*.



Рис. 35.

Что касается числа $\pi(L)$, то отметим без доказательства его нижние оценки, принадлежащие Дж. Уэйнштейну (1963)**. Пусть $L = (X, U)$ — обыкновенный граф,

$$\sigma(L) \doteq \max \{s_L(x)/x \in X\}, \quad \underline{\sigma} \doteq \min \{s_L(x)/x \in X\},$$

тогда

$$\text{если } \underline{\sigma}(L) \geq 1, \text{ то } n(L) \leq [1 + \sigma(L)] \cdot \pi(L);$$

$$\text{если } \underline{\sigma}(L) \geq 2, \text{ то } 2n(L) \leq [2 + \max\{4, \sigma(L)\}] \cdot \pi(L).$$

При этом обе оценки точны в следующем смысле: для любого $k \geq 1$ существует граф (именно, k -веер), на котором достигается первое равенство, и для любого $k \geq 4$ существует граф (например, полученный из полного F_{k+1} путем деления каж-

*) См. также главу 18 цитированной выше книги К. Бержа.

**) Дальнейшие результаты, касающиеся оценок числа $\pi(L)$, имеются у Т. Галлаи (5/1964—1965).

дого ребра пополам новой вершиной), на котором достигается второе равенство.

Упомянем еще об одной важной характеристике графа. Подграф $L' = (X', U'; P)$ графа $L = (X, U; P)$ (общего вида) называется *всесмежным*, если либо $L' = L$, либо в L каждая вершина из $X \setminus X'$ смежна хотя бы с одной вершиной из X' . Количество вершин наименьшего всесмежного подграфа

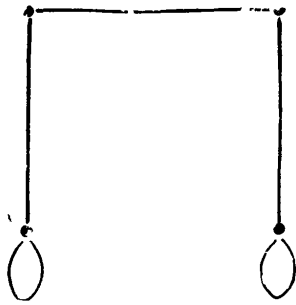


Рис. 36.

называется *числом всесмежности* $\beta(L)$ графа L .^{*} Во второй части книги эта характеристика будет рассмотрена подробнее, в частности, будут даны верхняя и нижняя оценки $\beta(L)$ в терминах $n(L)$ и $m(L)$, найденные В. Г. Визингом (5/1965).

Подграф, одновременно пустой и все-смежный, назовем *полуядром* графа. В графе без петель это то же самое, что максимальный пустой подграф, а граф с петлями может совсем не иметь полуядер: кроме тривиального примера, когда при каждой вершине есть петля, можно указать хотя бы граф на рис. 36.

Впоследствии мы встретимся и с другими экстремальными характеристиками графа, а также с частями, обладающими одновременно более чем одним экстремальным свойством. В ряде случаев, в отличие от рассмотренных сейчас, существенную роль играет направление дуг; так обстоит дело, например, с понятиями положительного и отрицательного ядер (см. § 33 в главе 4).

^{*} В работе Р. Нетлтона, К. Голдберга и М. Грина (1959), посвященной изучению связанных всесмежных подграфов, последние называются *плотными* в исходном графе. Число всесмежности в литературе известно под именем *числа внешней устойчивости*.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ

§ 11. Маршруты, цепи и циклы

В этой и следующей главах будут рассмотрены лишь такие свойства графов, которые не меняются при произвольной ориентации звеньев графа, переориентации или дезориентации дуг (всех или некоторых). Можно было бы, не нарушая общности, рассматривать только неорграфы, но мы избираем другую форму изложения: изучаем только такие свойства графов общего вида $L = (X, U; P)$, которые полностью определяются в терминах полуинцидентора \tilde{P} (см. § 4) и не требуют знания самого инцидентора P .

Чтобы не злоупотреблять многоэтажными индексами вроде x_{i_k} , условимся в следующем: обозначение некоторой вершины графа L через x_i не обязывает нас считать индекс i номером этой вершины в множестве X , когда последнее упорядочено посредством нумерации его элементов; вершины x_i и x_j не обязательно различны при $i \neq j$. Аналогичные соглашения примем по отношению к символам вида u_i , обозначающим ребра.

Конечная последовательность

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

($l \geq 0$) элементов графа L , для которой истинно высказывание $\tilde{P}(x_0, u_1, x_1) \& \tilde{P}(x_1, u_2, x_2) \& \dots \& \tilde{P}(x_{l-1}, u_l, x_l)$, называется *маршрутом* из вершины x_0 в вершину x_l , или маршрутом, соединяющим x_0 с x_l ; в случае $x_0 = x_l$ имеем *циклический маршрут* при вершине x_0 . Число l носит название *длины маршрута*. Заметим, что маршрут — это не просто часть графа, ибо порядок его обхода играет существенную роль; так, маршрут

$$x_l u_l x_{l-1} \dots x_2 u_2 x_1 u_1 x_0$$

при $l \neq 0$ не совпадает с написанным выше, хотя и состоит из тех же самых элементов с тем же отношением инцидентности.

Пусть полукольцо K удовлетворяет условиям

$$\xi\eta = \eta\xi = \zeta^2 = \theta^2 = 1,$$

а также условию дистрибутивности для элементов вида

$$k \doteq 1 + 1 + \dots + 1,$$

в силу чего K содержит в качестве подполукольца множество K' целых неотрицательных чисел с обычным сложением и умножением. Рассмотрим l -ю степень

$$R^l \doteq (r_{ij}^{(l)})$$

($l = 1, 2, \dots$) матрицы смежности $R \doteq R_L \doteq (r_{ij})$ графа L . Ее элемент $r_{ij}^{(l)}$ равен количеству различных маршрутов длины l из вершины с номером i в вершину с номером j ($i, j = 1, 2, \dots, n \doteq n(L)$); это утверждение тривиально при $l = 1$ и легко доказывается в общем случае индукцией по l : если уже известно, что $r_{ik}^{(l)}$ равно количеству различных маршрутов длины l из i -й вершины в k -ю, то для числа маршрутов длины $l + 1$ из i -й вершины в j -ю с фиксированной предпоследней k -й вершиной получаем выражение $r_{ik}^{(l)} \cdot r_{kj}$, а для количества таких маршрутов, но без фиксации предпоследней вершины, — выражение $\sum_{k=1}^n r_{ik}^{(l)} \cdot r_{kj}$, равное, как известно, $r_{ij}^{(l+1)}$.

Если в полукольце K соотношение $\zeta^2 = 1$ заменить соотношением $\zeta^2 = 2$, то $r_{ij}^{(l)}$ будет равно числу маршрутов длины l из i -й вершины в j -ю при условии, что каждый маршрут считается 2^t раз, где t — количество содержащихся в нем петель; это условие можно толковать следующим образом: каждая петля (если ее рассматривать как одномерный континуум, а не чисто комбинаторно) допускает два направления обхода, и маршруты, различающиеся направлением обхода хотя бы одной петли, считаются разными.

Интересуясь только достижимостью j -й вершины из i -й в данное число шагов l , можно к определяющим соотношениям в полукольце K добавить еще булево

$$2 = 1;$$

тогда подполукольцо K' обратится в булеву алгебру $B\{0,1\}$ (см. Введение), а элемент $r_{ij}^{(l)}$ матрицы R^l будет равен 1 или 0, смотря по тому, существует ли хотя бы один маршрут длины l из i -й вершины в j -ю вершину графа L или не существует.

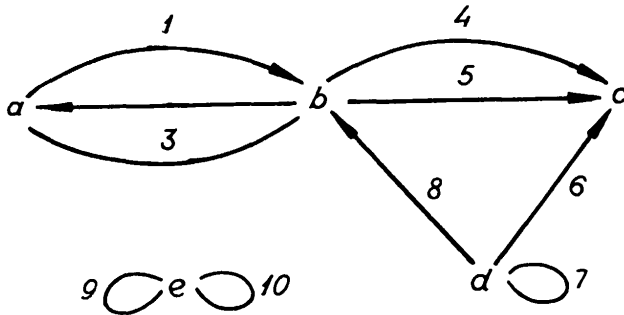


Рис. 37.

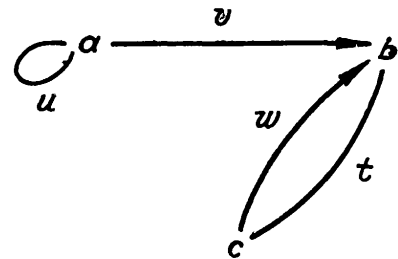


Рис. 38.

Для степеней матрицы смежности графа, изображенного на рис. 37, в «небулевом» случае имеем:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 42 & 3 & 9 & 0 \\ 42 & 5 & 31 & 18 & 0 \\ 3 & 31 & 5 & 9 & 0 \\ 9 & 18 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \dots;$$

например, из вершины a в вершину d идут три маршрута длины 2:

$$a1b8d, \quad a2b8d, \quad a3b8d$$

и девять маршрутов длины 3:

$$a1b4c6d, \quad a1b5c6d, \quad a2b4c6d, \quad a2b5c6d, \quad a3b4c6d, \quad a3b5c6d, \\ a1b8d7d, \quad a2b8d7d, \quad a3b8d7d;$$

из d в d идет один маршрут длины 1:

$$d7d,$$

три маршрута длины 2:

$$d6c6d, d7d7d, d8b8d$$

и девять маршрутов длины 3, разыскать которые предостав-
ляем читателю. В «булевом» случае

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad R^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad R^4 = R^5 = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для фактического выявления всех маршрутов данной дли-
ны, идущих из одной заданной вершины графа в другую, мож-
но предложить следующий способ, который мы во избежание
излишней громоздкости разъясним на простом примере графа,
изображенного на рис. 38.

Составив матрицу смежности L над полукольцом K' всех
целых чисел

$$R = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

и глядя в то же время на матрицу инцидентий L над свободным
полукольцом K

$$A = \begin{matrix} & u & v & w & t \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{vmatrix} \zeta & \xi & 0 & 0 \\ 0 & \eta & \eta & \theta \\ 0 & 0 & \xi & \theta \end{vmatrix} \end{matrix},$$

можно написать «усовершенствованную матрицу смежности»
 R_U , которая указывает не только количества ребер, соединяю-

щих заданную пару вершин, но и сами эти ребра:

$$R_U = \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ v & 0 & w + t \\ 0 & w + t & 0 \end{vmatrix};$$

при этом символы u, w, v, t , соответствующие ребрам графа-рассматриваем как образующие элементы нового некоммутативного кольца S_U , которое считаем ассоциативным (и, конечно, дистрибутивным, как всякое кольцо)*.

Теперь последовательно образуем степени матрицы R_U :

$$R_U^2 = \begin{vmatrix} u^2 + v^2 & uv & vw + vt \\ vu & v^2 + w^2 + t^2 + wt + tw & 0 \\ wv + tv & 0 & w^2 + t^2 + wt + tw \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u^3 + v^2u + uv^2 & u^2v + v^3 + vw^2 + \dots & uvw + uvt \\ & + vwt + vtw + vt^2 & \\ vu^2 + v^3 + w^2v + & vuv & v^2w + w^3 + t^2w + \\ + t^2v + wtv + twv & & + wtw + tw^2 + v^2t \\ wvu + tvu & wv^2 + tv^2 + w^3 + & + u^2t + t^3 + wt^2 + twt \\ & + t^2w + wtw + tw^2 + & \\ & + w^2t + t^3 + wt^2 + twt & \end{vmatrix}$$

.....

Мы видим (и это нетрудно доказать для общего случая), что элемент $Ur_{ij}^{(l)}$ матрицы $R_U^{(l)} = (Ur_{ij}^{(l)})$ равен сумме таких произведений, в каждом из которых сомножители соответствуют (в том же порядке) последовательным ребрам некоторого маршрута длины l из i -й вершины в j -ю, причем ни один маршрут не может быть пропущен и ни один не повторяется. Например, элемент

$$Ur_{22}^{(2)} = v^2 + w^2 + t^2 + wt + tw$$

выявляет последовательности ребер во всех маршрутах длины

*) Было бы интересно придумать такое расширение полукольца K (посредством добавления новых образующих и новых определяющих соотношений), чтобы с помощью матричного умножения сразу получать из матрицы инцидентий «усовершенствованную матрицу смежности».

2 из вершины b в эту же вершину b (последовательность вершин каждого маршрута однозначно восстанавливается с помощью матрицы инциденций A); эти маршруты суть

$$bvavb, bwswb, btctb, bwctb, btcwb.$$

Элемент

$$ur_{21}^{(3)} = vu^2 + v^3 + w^2v + t^2v + wtv + twv$$

позволяет выявить все маршруты длины три из b в a :

$$bvauaua, bvavbva, bwswbva, \dots$$

и т. д. Сложность элементов в матрицах R_U^l резко возрастает с ростом числа l , но виноват в этом не предлагаемый способ, а сам факт наличия колоссального, вообще говоря, количества маршрутов в графе, поэтому сделать решение практически более эффективным можно в принципе лишь за счет упрощения постановки самой задачи (например, если искать не все маршруты, а лишь некоторые, сугубо специального вида, которых в графе не слишком много).

Маршрут

$$x_0u_1x_1u_2x_2\dots x_{l-1}u_lx_l$$

называется *цепью*, если ребра u_1, u_2, \dots, u_l все различны (при $l \leq 1$ это условие выполнено «в силу ложности посылки»). Циклическая цепь ($x_0 = x_l$) при $l \geq 1$ называется *циклом*. Цепь называется *простой*, если все ее вершины x_0, x_1, \dots, x_l различны; в случае же $x_0 = x_l$ & $l \geq 1$ имеем *простой цикл*, который, будучи цепью, в то же время не есть простая цепь. Так, в графе на рис. 37 маршруты $a1b4c4b8d$, $a1b2a1b2a1b$, $a1b1a$ (циклический) и $e9e9e9e$ (циклический) не являются цепями, а значит и циклами; цепи $e9e10e$ (цикл), $a2b4c6d8b$ (не цикл) и $a1b4c5b2a$ (цикл) не просты, цепи a (из одной вершины, т. е. нулевой длины) и $a2b4c6d$ — простые, а цепи $e9e$ и $b4c6d8b$ представляют собой простые циклы.

Желая по матрице R_U выявить не все вообще маршруты данной длины, а только цепи, мы должны после каждого умножения на R_U вычеркивать те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза. Например, в случае графа, изображенного на рис. 38, имеем:

$$(R_U^2)' \doteq \begin{vmatrix} 0 & uv & vw + vt \\ vu & wt + tw & 0 \\ wv + tv & 0 & wt + tw \end{vmatrix}.$$

$$(R_U^2)' \cdot R_U = \begin{vmatrix} uv^2 & vw^2 + vwt + uvw + uvt \\ & + vtw + vt^2 \\ vu^2 + wtv + twv & vuv & w^2t + wtv + \\ & & + twt + t^2w \\ wvu + tvu & wv^2 + tv^2 + & 0 \\ & + wtw + wt^2 + \\ & + tw^2 + twt \end{vmatrix},$$

$$(R_U^3)' = \begin{vmatrix} 0 & vwt + vtw & uvw + uvt \\ wtv + twv & 0 & 0 \\ wvu + tvu & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и т. д. (ясно, что матрица $(R_U^5)'$ будет состоять в данном случае из одних нулей). Описать аналогичным образом способ выявления только тех маршрутов, которые являются простыми цепями или простыми циклами, мы предоставляем читателю. Как отмечают А. Кофман и И. Мальгранж (1963), этот алгоритм легко программируется.

Для дальнейшего построения теории нам понадобится следующая

Л е м м а. *Всякий маршрут (в частности, всякая цепь) графа содержит хотя бы одну простую цепь, соединяющую ту же пару вершин. Всякий циклический маршрут нечетной длины содержит простой цикл нечетной длины. Всякий цикл содержит простой цикл.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если x_i — первая из тех вершин маршрута

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

которые фигурируют в нем более одного раза, а x_j — последняя из совпадающих с x_i вершин этого маршрута, то его можно заменить более коротким

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_i u_{j+1} x_{j+1} u_{j+2} x_{j+2} \dots x_{l-1} u_l x_l;$$

если в полученном маршруте еще есть повторения вершин, то с ним поступаем так же, как с исходным, и т. д. до тех пор, пока не выделим маршрут без повторяющихся вершин, соединяющий x_0 с x_l , т. е. искомую простую цепь (в случае, когда исходный маршрут — циклический, эта цепь будет состоять из единственной вершины $x_0 = x_l$).

Пусть в L есть циклический маршрут

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{2k} u_{2k+1} x_0$$

нечетной длины. Тогда этот маршрут либо сам является простым циклом, либо содержит простой цикл нечетной длины, так как если x_i и x_j — две вершины маршрута, такие что $0 \leq i < j \leq 2k$ и $x_i = x_j$, то оба маршрута

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{i-1} u_i x_i u_{j+1} x_{j+1} \dots x_{2k} u_{2k+1} x_0$$

и

$$x_i u_{i+1} x_{i+1} \dots x_{j-1} u_j x_j$$

циклические и один из них имеет нечетную длину; применяя именно к этому маршруту аналогичное рассуждение, мы в конце концов выделим циклический маршрут нечетной длины без повторяющихся вершин (за исключением первой и последней), т. е. простой цикл нечетной длины.

Доказательство третьего утверждения леммы предоставим читателю, заметив при этом, что заменить в условии цикл произвольным циклическим маршрутом нельзя. Например, циклический маршрут четной длины $a3b4c4b3a$ в графе на рис. 37 не содержит циклов, а процесс постепенного устранения повторяющихся вершин, примененный для доказательства первых двух утверждений (и вполне пригодный для доказательства третьего), привел бы в данном случае к маршруту нулевой длины, который, как известно, циклом не считается.

С л е д с т в и е. *Всякий кратчайший маршрут между двумя заданными вершинами графа есть простая цепь. Всякий цикл наименьшей длины при заданной вершине является простым.*

Понятия маршрута, цепи и цикла играют важную роль в исследовании структуры графов; основные теоретические приложения этих понятий изложены в следующих параграфах. Пока остановимся еще на одном практически эффективном алгоритме выявления цепей и циклов.

Начнем с известного способа нахождения кратчайших (и, следовательно, простых) цепей между заданными вершинами x и y графа L (см., например, К. Берж, 1/1958, русск. 1962, глава 7). Помечаем вершину x значком 0; затем все смежные с x не помеченные еще вершины* помечаем значком 1; далее помечаем значком 2 каждую такую вершину, которая еще не помечена и смежна хотя бы с одной из вершин, помеченных

*) Напомним, что при вершине x могут быть петли.

единицей; и т. д. Как только вершина y окажется помеченной некоторым значком $l \geq 1$, процесс прекращаем. Теперь каждая кратчайшая цепь ненулевой длины

$$xu_1x_1u_2x_2\dots x_{l-1}u_ly,$$

соединяющая x с y , может быть найдена следующим образом: за x_{l-1} берем любую из вершин, смежных с y и помеченных значком $l-1$, а за u_l — любое ребро, соединяющее x_{l-1} с y ; за x_{l-2} берем любую вершину, смежную с x_{l-1} и помеченную значком $l-2$, а за u_{l-1} — любое ребро, соединяющее x_{l-2} с x_{l-1} ; и т. д., пока не дойдем до вершины x .*

При $y = x$ этот процесс даст нам все циклы наименьшей длины, проходящие через x . Задача о выявлении кратчайших циклов, содержащих данное ребро u графа L , сводится к предыдущей: достаточно удалить u из L и в оставшемся суграфе найти все кратчайшие цепи между теми вершинами x и y , которые в исходном графе L были соединены ребром u .

Описанный алгоритм можно видоизменить так, чтобы он выявлял все простые цепи и простые циклы, а не только кратчайшие. Для этого понадобится помечать некоторые вершины более чем одним значком, из которых первый будет играть особую роль.

Помечаем вершину x значком 0. Затем все смежные с x вершины помечаем значком 1; при этом если вершина x смежна сама с собой (т. е. имеет петлю), то единица будет ее вторым значком. Далее помечаем значком 2 каждую такую вершину z , которая обладает свойствами: а) z не имела до этого значка 2; б) z смежна хотя бы с одной такой вершиной, у которой значок 1 — первый. Затем помечаем значком 3 все те вершины, которые не имели еще этого значка и смежны с какой-нибудь из вершин, имеющих 2 в качестве первого значка. И т. д. На этот раз мы не станем искусственно обрывать процесс, дойдя до вершины y , а дождемся его естественного конца, который наступит тогда, когда все вершины будут помечены хотя бы один раз и для каждой вершины, имеющей первый значок i , все смежные с ней будут содержать $i+1$ в числе своих значков (но не обязательно на первом месте).

Произведя указанным образом разметку вершин, выявляем затем цепи, как было описано выше, но с той разницей,

*) С целью экономии ячеек памяти вычислительной машины В. А. Тюренок (1963) изменил алгоритм так, чтобы для разметки вершин графа использовались только три индекса 1, 2, 3.

что если уже построена (с конца) часть

$$x_i u_{i+1} x_{i+1} \dots x_{l-1} u_l x_l$$

цепи ($1 \leq i \leq l$, $x_l \doteq y$) и вершина x_i имеет значки j_1, j_2, \dots, j_k ($k \geq 1$), то за x_{i-1} можно взять любую такую вершину, которая отлична от всех $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{l-1}, x_l$, смежна с x_i и у которой первый значок (именно первый, а не какой-нибудь!) равен одному из чисел $j_1 - 1, j_2 - 1, \dots, j_k - 1$.

Проиллюстрируем процесс на примере графа, изображенного на рис. 39. В скобках стоят значки вершин после той раз-

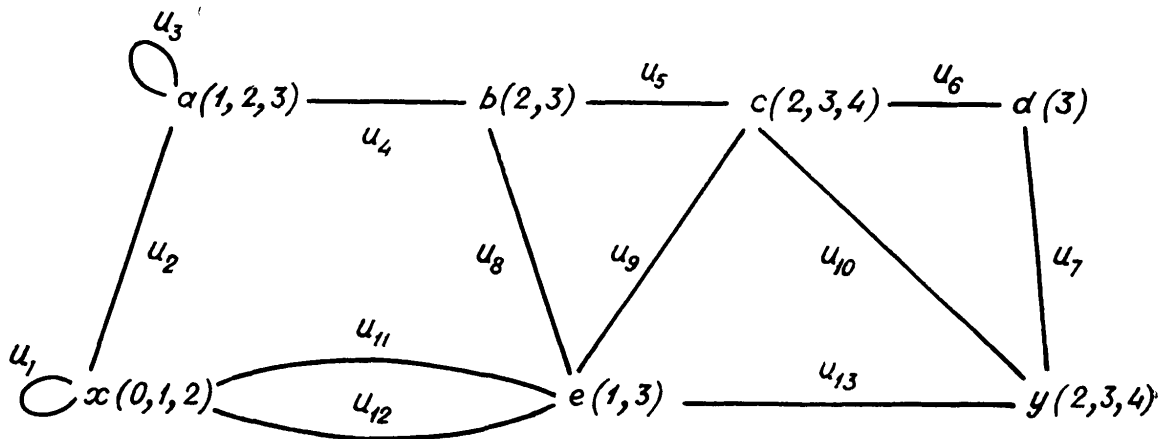


Рис. 39.

метки, ход осуществления которой запишем следующей последовательностью строк (где каждая строка состоит из тех вершин, которые на данном этапе разметки приобрели хотя бы один новый значок):

$$x(0),$$

$$x(0, 1), a(1), e(1),$$

$$x(0, 1, 2), a(1, 2), b(2), c(2), y(2),$$

$$a(1, 2, 3), b(2, 3), c(2, 3), d(3), e(1, 3), y(2, 3),$$

$$c(2, 3, 4), y(2, 3, 4)$$

(для бóльшей ясности заметим, например, что в третьей строке вершина x приобрела новый значок 2 потому, что у смежной с ней вершины a значок 1 — первый, а вовсе не потому, что при x есть петля, ибо 1 не является первым значком вершины x).

В процессе выявления цепей будем указывать не все значки вершины x_i , а лишь один или два из них: первый (т. е. тот, согласно которому x_i выбрана) и тот, который служит для выбора x_{i-1} (если он отличен от первого). Последовательность

$$y (2), e (1), x (0)$$

дает две цепи (длины 2):

$$xu_{11}eu_{13}y \text{ и } xu_{12}eu_{13}y,$$

последовательность

$$y (2), e (1, 3), b (2), a (1), x (0)$$

дает цепь

$$xu_2au_4bu_8eu_{13}y$$

(длины 4), а последовательность

$$y (4), d (3), c (2, 3), b (2), a (1), x (0)$$

— цепь

$$xu_2au_4bu_5cu_6du_7y$$

(длины 5) и т. п. Вопрос о том, как упорядочить акты выбора вершины x_{i-1} после x_i , адресован программистам, а мы заметим лишь, что при описанном алгоритме две цепи, построение которых различается хотя бы одним актом, различны и что таким способом получают все простые цепи между x и y .

Разрешая повторения вершин в последовательности y , x_{l-1} , x_{l-2}, \dots , но запрещая повторения ребер в цепи, мы получим алгоритм выявления всех цепей и циклов, а не только простых. Так, в рассмотренном только что примере последовательность вершин

$$y (2), e (1, 3), b (2, 3), c (2), e (1), x (0)$$

даст две непростые цепи

$$xu_{11}eu_5cu_5bu_8eu_{13}y \text{ и } xu_{12}eu_9cu_5bu_8eu_{13}y.$$

Попытка разрешить также повторения ребер приводит к тому, что процесс выявления маршрутов никогда не окончится, ибо, в отличие от цепей, длина которых не превосходит числа ребер данного графа L , маршруты в фиксированном непустом графе могут быть сколь угодно длинными. Задача же о выяв-

лении всех маршрутов с длиной, не превосходящей заданного числа, кажется нам не особенно интересной и полезной, так как львиная доля маршрутов возникает за счет банального «хождения взад-вперед».

В заключение заметим, что если данный граф L совсем не имеет маршрутов между x и y , то не только второй, но и первый алгоритм естественно оборвется, причем вершина y так и останется непомеченной. Такой пример легко изготовить, хотя бы добавляя к только что рассмотренному графу изолированную вершину z и пытаясь найти кратчайшую (или любую) цепь из x в z .

§ 12. Компоненты связности

Вершины x и y графа $L = (X, U; P)$ называются *отделенными*, если в L не существует никакой соединяющей их цепи, и *неотделенными*, если хотя бы одна такая цепь имеется. Отношение неотделенности рефлексивно, так как каждая вершина соединена с собой цепью нулевой длины; оно симметрично, поскольку всякая цепь, записанная в обратном порядке, тоже есть цепь; наконец, оно транзитивно, ибо если имеются цепи из x в y и из y в z , то сочленение этих цепей в вершине y дает маршрут, соединяющий x с z , а из этого маршрута, согласно лемме § 11, можно выделить цепь (и даже простую), соединяющую x с z . Таким образом, неотделенность представляет собой отношение эквивалентности на множестве X вершин графа L , и поэтому X разбивается на классы X_1, X_2, \dots, X_k ($k \geq 1$) попарно неотделенных вершин. Подграфы $L_i = (X_i, U_i; P)$, порожденные множествами X_i , не имеют друг с другом общих вершин (и общих ребер, поскольку вершины разных классов отделены) и называются *компонентами связности*, или просто *компонентами* графа L ; число их будем обозначать через $k \doteq k(L)$. В случае $k(L) = 1$ граф L называется *связным*; другую крайность представляют вырожденные графы: у них компонент столько же, сколько вершин. Отметим еще, что

$$\bigcup_{i=1}^k U_i = U \quad \text{и} \quad i \neq j \Rightarrow U_i \cap U_j = \emptyset,$$

т. е. отношение «быть в одной компоненте» для ребер, как и для вершин, есть эквивалентность.

Рассмотрим матрицу смежности $R = R_L$ графа L над булевой алгеброй $B \{0,1\}$ и, обозначив через E единичную мат-

рицу порядка n (L), образуем последовательно матрицы $E + R$, $(E + R)^2 = E + R + R^2$, $(E + R)^3 = E + R + R^2 + R^3, \dots$, элементы которых выражают количества маршрутов длины не более 1, не более 2, не более 3, ... Для некоторого l_0 , заведомо не превышающего m (L), будем иметь

$$(E + R)^{l_0} = (E + R)^{l_0+1} = (E + R)^{l_0+2} = \dots^*$$

Каждой системе всех одинаковых столбцов (или одинаковых строк) «установившейся» матрицы $(E + R)^{l_0}$ отвечает компонента связности графа L .

В терминах маршрутов и связности нетрудно установить критерий того, что заданный граф является бихроматическим (в частности, графом Кёнига), и дать полный обзор всех представлений графа Кёнига в виде (X', X'', U) .

Т е о р е м а 1 (Кёнига). *Граф $L = (X, U; P)$ является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклических маршрутов нечетной длины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия очевидна: если

$$X = X' \cup X'', \quad X' \cap X'' = \emptyset$$

и

$$\forall x, y [x, y \in X' \vee x, y \in X'' \Rightarrow \neg J(x, y)],$$

то у любого маршрута

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

вершины $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l$ должны попеременно входить то в X' , то в X'' , в силу чего совпадение $x_l = x_0$ возможно лишь при четном l .

Пусть теперь $L = (X, U; P)$ — граф без циклических маршрутов нечетной длины, $L_i = (X_i, U_i; P)$ — его компоненты связности, $i = 1, 2, \dots, \kappa(L)$. Рассмотрим i -ю компоненту.

Будем говорить, что вершины $x, y \in X_i$ находятся в отношении R_i , если существует маршрут четной длины из x в y .

*) На практике, очевидно, надо лишь зарегистрировать первое совпадение, т. е. наименьшее l_0 , при котором $(E + R)^{l_0} = (E + R)^{l_0+1}$. Более экономный способ нахождения «установившейся» матрицы, предложенный В. В. Мартынюком (1962), будет рассмотрен во второй части книги.

Отношение R_i рефлексивно, симметрично и транзитивно, поэтому оно разбивает X_i на классы; количество этих классов (для каждого i) не превышает двух, ибо если бы существовали три вершины $x, y, z \in X_i$ из разных классов, то никакие две из них нельзя было бы соединить маршрутом четной длины и в то же время, ввиду связности L_i , каждая пара этих вершин соединялась бы некоторым нечетным маршрутом, что невозможно, поскольку нечетные маршруты из x в y и из y в z , будучи соединены последовательно, образуют четный маршрут из x в z . Классы разбиения множества X_i обозначим через X'_i и X''_i (один из них может оказаться пустым); никакие две вершины одного класса не смежны, ибо иначе соединяющее их ребро вместе с соединяющим их четным маршрутом образовало бы циклический маршрут нечетной длины.

Теперь можно представить множество вершин X исходного графа L в виде

$$X = X' \cup X'',$$

где

$$X' \doteq \bigcup_{i=1}^{x(L)} X'_i, \quad X'' \doteq \bigcup_{i=1}^{x(L)} X''_i, \quad X' \cap X'' = \emptyset,$$

причем множества X' и X'' состоят из попарно несмежных вершин. Следовательно, граф L — бихроматический.

Из доказательства теоремы ясно, что различные представления множества вершин бихроматического графа L в виде объединения двух непересекающихся множеств, состоящих из попарно несмежных вершин, обусловлены исключительно перестановками классов X'_i и X''_i в каждой компоненте L_i ; поэтому число представлений равно $2^{x(L)-1}$ (или $2^{x(L)}$, если представления, получаемые друг из друга перестановкой множеств X' и X'' , считать различными).

С л е д с т в и е 1. Обыкновенный граф $L = (X, U)$ является графом Кёнига в том и только том случае, если он не содержит циклических маршрутов нечетной длины; число различных представлений графа Кёнига L в виде $(X', X''; U)$ равно $2^{x(L)-1}$ (или $2^{x(L)}$, если графы $(X', X''; U)$ и $(X'', X'; U)$ не считать тождественными).

С л е д с т в и е 2. Граф $L = (X, U; P)$ является бихроматическим (в частности, обыкновенный граф является графом Кёнига) тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины.

Действительно, граф без циклических нечетных маршрутов не содержит, в частности, нечетных простых циклов. Если же

в L есть циклический нечетный маршрут, то из него, по второму утверждению леммы § 11, можно выделить простой цикл нечетной длины.

Из теоремы Кёнига ясно, что граф L является бихроматическим тогда и только тогда, когда все нечетные степени его матрицы смежности $R = R_L$ над булевой алгеброй $B\{0,1\}$ обладают нулевыми диагоналями ($SpR^{2k+1} = 0$), и что достаточно проверять этот факт для степеней, не превышающих числа вершин графа.

Многие характеристики графа обладают тем свойством, что если они известны для каждой компоненты, то они однозначно определяются и для всего графа; таковы количества вершин и ребер, количества дуг, петель и звеньев, количества маршрутов данного вида в графе, характеристики инцидентности и смежности (см. § 8 в главе 1) и многие другие свойства, которые будут неоднократно встречаться в дальнейшем. Большая часть интересных свойств графов такова, что свойство, присущее всем несвязным графам, присуще также связным (если, конечно, не считать «интересными» такие свойства, которые тривиально следуют из предположения о несвязности графа). Тем более кажется любопытным тот факт, что проблему Келли (см. § 8 в главе 1) удалось решить именно для несвязных графов. Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Связный граф L с $n(L) \geq 2$ содержит по крайней мере две такие вершины, что после удаления любой из них остается связный подграф.*

Доказательство. Так как простая цепь не может иметь более $n(L)$ вершин, то в графе L всегда можно найти простую цепь

$$Q \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

наибольшей длины l ; эта длина $l \geq 1$, поскольку L — невырожденный граф (см. § 4 в главе 1), ибо он связан и имеет не менее двух вершин. Каждая из двух различных вершин x_0 и x_l обладает требуемым свойством, так как если бы, например, после удаления x_l граф L распался на две или более компоненты (рис. 40), то вершина x_l была бы в L инцидентна некоторой непетле u , второй конец которой y не принадлежит компоненте, содержащей цепь Q , и в L существовала бы простая цепь

$$Q' = x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l u y$$

бóльшей длины, чем Q , что невозможно.

Л е м м а 2. Для связности графа L с числом вершин $n \doteq \doteq n(L) \geq 3$ необходимо и достаточно, чтобы среди его $(n - 1)$ -вершинных подграфов L_1, L_2, \dots, L_n по крайней мере два были связными.

Необходимость условия непосредственно следует из только что доказанной леммы; установим его достаточность.

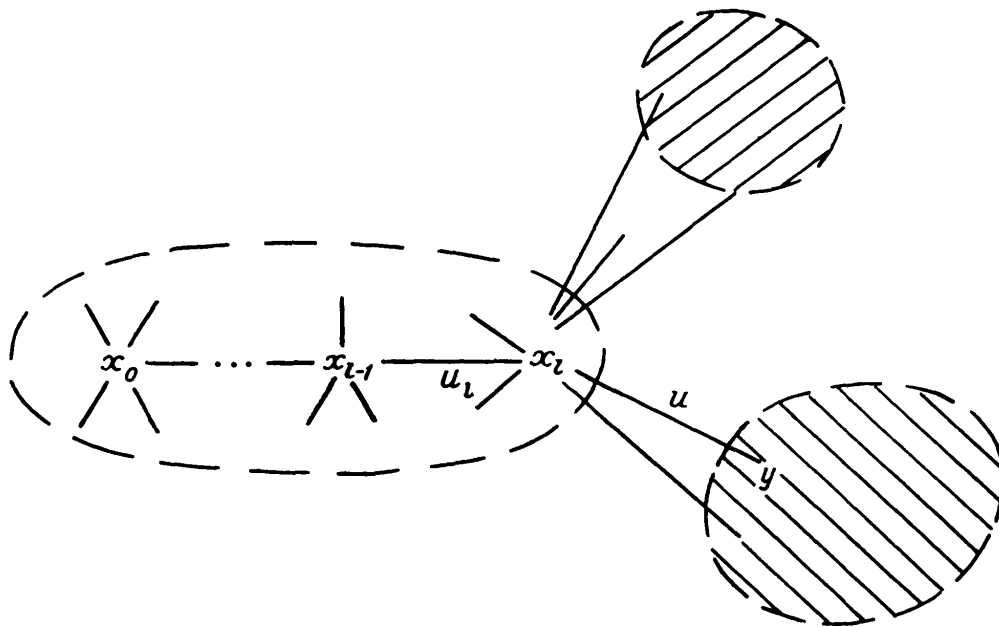


Рис. 40.

Пусть подграфы L_i и L_j связны ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$); достаточно доказать, например, что вершина x_i графа L , отсутствующая в L_i , не отделена в L хотя бы от одной из остальных вершин. Но ввиду $n(L) \geq 3$ подграфы L_i и L_j содержат общую вершину x_k , отличную от x_i и от той вершины x_j , при удалении которой L превращается в L_j ; вершина x_i соединима с x_k в подграфе L_j и, тем более, в исходном графе L , что и требовалось.

Решение проблемы Келли для несвязных графов дает

Т е о р е м а 2. Если L и L' — два несвязных n -вершинных графа, где $n \geq 2$, а совокупности $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ и $\{L'_1, L'_2, \dots, L'_n\}$ всех их $(n - 1)$ -вершинных подграфов можно привести во взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответствующие подграфы были изоморфны, то L изоморфен L' .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, каким образом по совокупности $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ всех $(n - 1)$ -вершинных подграфов, заданных с точностью до изоморфизма, выявить все компоненты исходного графа L (тоже с точностью до изоморфизма). Тем самым теорема будет доказана.

Из общей массы компонент всех подграфов $\{L_i\}$ выберем какую-либо M , обладающую наибольшим числом p вершин. Хотя бы одна компонента графа L изоморфна M , ибо если бы M возникла в результате удаления вершины x_i из некоторой компоненты M' графа L , то подграф L_j , полученный из L удалением вершины x_j , не принадлежащей M' (а такие вершины есть ввиду несвязности L), содержал бы компоненту M' с числом вершин $> p$, что невозможно. Пусть q — количество тех компонент графа L , которые изоморфны M ; здесь и в других аналогичных случаях условимся кратко говорить: « M содержится q раз в L ».

Каждый подграф L_i , полученный из L удалением вершины одной из компонент M , содержит эту компоненту $q - 1$ раз, а остальные подграфы L_i содержат M по q раз; просмотр компонент всех подграфов $\{L_i\}$ позволяет выделить подграфы первого типа и найти число q . Для выявления остальных (т. е. не изоморфных M) компонент графа L

L_1	\square	\square	\square	\square	\square
L_2	\square	\square	Δ	\square	\square
L_3	\square	\square	\square	\square	\square
L_4, L_5	\square	\square	\square	\square	\square
L_6, L_7	\square	\square	Δ	\square	\square
L_8, L_9, L_{10}, L_{11}	\square	\square	Δ	\square	\square
$L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{15}$	\square	\square	\square	\square	\square

Рис. 41.

надо лишь из какого-нибудь подграфа L_i первого типа изъять компоненты M (если они там еще есть, т. е. если $q > 1$) и те компоненты, которые возникли в результате удаления вершины графа L , принадлежащей M (если такие «продукты распада» в L_i есть, т. е. если $p > 1$); нам осталось научиться отличать «продукты распада компоненты M » от настоящих компонент графа L в случае $p > 1$.

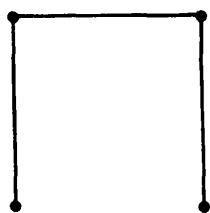


Рис. 42.

Итак, пусть $p \geq 2$. Поскольку компонента M сама является связным графом, то среди всех ее $(p - 1)$ -вершинных подграфов M_1, M_2, \dots, M_p в силу леммы 2 заведомо есть связные; пусть, например, M_1 связан и фигурирует в числе этих p подграфов r раз ($1 \leq r \leq p$). Тогда среди подграфов L_i первого типа будет ровно rq таких, в каждом из которых M_1 содержится большее число раз, чем в каждом из остальных подграфов первого типа. Эти rq подграфов, очевидно, изоморфны друг другу; если взять любой из них, удалить одну M_1 и добавить

M , то получим (с точностью до изоморфизма) граф L , что и требовалось.

В качестве примера рассмотрим такой граф L , для которого совокупность $\{L_i\}$ изображена на рис. 41. Все L_i несвязны, и по лемме 2 сам L заведомо несвязен. За M возьмем, например, компоненту, показанную на рис. 42 ($p = 4$); она фигурирует по два раза в L_1, L_2, \dots, L_7 и по одному разу в L_8, L_9 ,

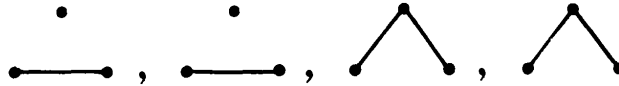


Рис. 43.

\dots, L_{15} , поэтому $q = 2$ и последние 8 подграфов должны содержать ее «продукты распада», т. е. две вилки и две антивилки (рис. 43). Взяв за M_1 вилку, получим $r = 2$; среди подграфов $L_8 - L_{15}$ ровно $rq = 4$ штуки, а именно $L_8 - L_{11}$, содержат вилку по одному разу, в то время как $L_{12} - L_{15}$ содержат ее по 0 раз. Из подграфа, изображенного в предпоследней строке на рис. 41, удалим вилку, а вместо нее добавим M . Восстановленный таким образом граф L показан на рис. 44.

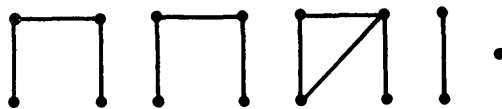


Рис. 44.

В рассмотренном случае граф L — обыкновенный, но читатель может путем построения своих примеров легко убедиться в том, что наличие дуг, петель и параллельных ребер ничуть не усложняет, скорее даже упрощает, процесс восстановления исходного графа. Заметим также, что для лучшего пояснения доказательства теоремы мы нарочно провели процесс самым неэкономным образом (в действительности за M выгоднее было взять ту четырехвершинную компоненту, для которой $q = 1$).

Критерий существования графа с заданной совокупностью $\{L_i\}$ пока не найден; тем, кто хочет испробовать свои силы, мы рекомендуем начать со следующего: задавая конкретные явно нереальные совокупности $\{L_i\}$ для небольших n , смот-

реть, по какой причине неосуществим тот план восстановления, на котором основано доказательство теоремы 2.

Ф. Харари (9/1964) исследовал ряд свойств обыкновенного графа L , полностью определяемых по совокупности $\{L_i\}$; к таким относятся связность, количества вершин, ребер и точек сочленения (см. ниже, § 15) и другие. Мы предлагаем читателю доказать формулы

$$f_k(L) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n f_k(L_i), \quad e_k(L) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n e_k(L_i),$$

обобщающие некоторые результаты упомянутой работы ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; определение чисел f_k и e_k см. в § 9 главы 1). Легко показать также, что обыкновенный граф L восстанавливается с точностью до изоморфизма по совокупности $\{L_i\}$ и в том случае, когда несвязен не он сам, а дополнительный граф \bar{L} .

В заключение приводим одно свойство связных графов, которое при несущественных ограничениях оказывается характеристическим.

Т е о р е м а 4. * *В связном графе $L = (X, U; P)$ для любых двух непетель u и v существует простая цепь или простой цикл с первым ребром u и последним ребром v .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если оба выбранных ребра соединяют одну и ту же пару вершин x, y , то искомой цепью будет простой цикл $xu y v x$. Если u соединяет x с y , а v соединяет x с вершиной $z \neq y$, то искомой является простая цепь $yu x v z$. Осталось рассмотреть случай, когда u соединяет x с y , v соединяет z с t , причем все четыре вершины x, y, z, t различны. В силу связности графа L , вершины x и z соединены некоторой простой цепью

$$Q = xu_1x_1u_2x_2 \dots x_{l-1}u_lz.$$

Случай 1: все вершины x_1, x_2, \dots, x_{l-1} отличны от y и от t ; тогда искомой цепью будет

$$yu x u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l z v t.$$

*) См., например, К. Берж (1/1958, русск. 1962, глава 20).

Случай 2: $x_i = y$ ($1 \leq i \leq l - 1$), но все x_1, x_2, \dots, x_{l-1} отличны от t ; тогда искомой цепью будет

$$xuyx_{i+1} \dots x_{l-1}u_lzvt.$$

Случай 3: $x_i = t$ ($1 \leq i \leq l - 1$), но все x_1, x_2, \dots, x_{l-1} отличны от y ; тогда искомой цепью будет

$$yuxu_1x_1u_2x_2 \dots x_{i-1}u_itvz.$$

Случай 4: $x_i = y, x_j = t$ ($1 \leq i \leq l - 1, 1 \leq j \leq l - 1, i \neq j$); тогда искомой будет цепь

$$xuyu_{i+1}x_{i+1} \dots x_{j-1}u_jtvz$$

или цепь

$$xuyu_jx_{j-1}u_{j-1}x_{j-2} \dots x_{i+1}u_{i+1}tvz,$$

смотря по тому, $i < j$ или $i > j$. Так как цепь Q — простая, то все возможные случаи исчерпаны и теорема доказана.

Обратное утверждение (о связности графа при наличии в нем цепей указанного вида) будет, очевидно, справедливо, если наложить на граф следующее весьма слабое ограничение: в случае, когда он состоит более чем из одной вершины, в нем не должно быть изолированных вершин (см. § 2 в главе 1).

§ 13. Отделимость и соединимость

Понятия отделенности и неотделенности вершин, а также связности графа имеют важные обобщения.

Две несмежные вершины x и y графа $L = (X, U; P)$ называются k -отделимыми ($k \geq 0$), если из L можно так удалить не более k вершин, чтобы в оставшемся подграфе вершины x и y оказались отделенными. В общем случае, когда x и y соединены друг с другом ребрами u_1, u_2, \dots, u_p ($p \geq 0$), эти вершины называются k -отделимыми, если $p \leq k$ и они $(k - p)$ -отделимы в суграфе $L' = (X, U \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_p\}; P)$. Ясно, что 0-отделимость — это отделенность и что совпадающие вершины не являются k -отделимыми ни при каком k . Отношение k -неотделимости рефлексивно и симметрично, но при $k > 1$ не транзитивно, как показывает пример графа, изображенного на рис. 45.

Вершины x и y графа L называются k -соединимыми, если в L существует k цепей, соединяющих x с y и попарно не имеющих других общих вершин, а также общих ребер; по понятной причине можно в определении вместо «цепь» говорить «простая цепь». В любом графе любые вершины 0-соединимы, а 1-соединимость, или просто соединимость, означает неотделенность. Всякая вершина k -соединима сама с собой при любом $k \geq 0$, ибо, как это ни курьезно, совокупность любого числа цепей нулевой длины, состоящих каждая из одной и той же вершины, формально соответствует определению k -соединимости.

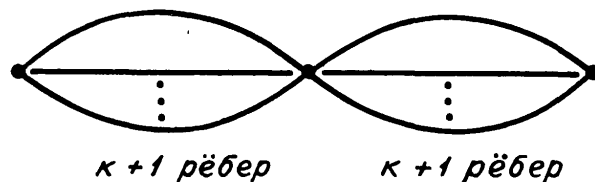


Рис. 45.

Таким образом, отношение k -соединимости вершин любого графа рефлексивно; оно, очевидно, также симметрично; однако транзитивность не имеет места при $k > 1$, как опять видно из примера на рис. 45*.

Т е о р е м а М е н г е р а. В графе $L = (X, U; P)$ две вершины x и y тогда и только тогда k -неотделимы ($k \geq 0$), когда они $(k + 1)$ -соединимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Две совпадающие вершины k -неотделимы и k -соединимы при любых $k \geq 0$, и для них утверждение теоремы Менгера является тавтологией. Поэтому в дальнейшем, говоря о вершинах x и y , будем всегда предполагать, что $x \neq y$.

Пусть вершины x и y графа L соединены ребрами u_1, u_2, \dots, u_p ($p \geq 0$). При $p > k$ утверждение теоремы для этих вершин тривиально. При $p \leq k$ высказывание о k -неотделимости вершин x и y в графе L равносильно высказыванию о $(k - p)$ -неотделимости их в суграфе $L' = (X, U \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_p\}; P)$, а $(k + 1)$ -соединимость этих вершин в L равносильна $(k - p + 1)$ -соединимости их в L' . Поэтому можно без нарушения общности считать вершины x и y несмежными.

Если x и y $(k + 1)$ -соединимы, то существует система из $k + 1$ цепей, соединяющих x с y и не имеющих попарно других общих вершин; удалением любых k вершин графа L , отличных

*) В литературе встречаются (под разными названиями) отношения точной k -неотделимости и точной k -соединимости вершин графа; первое означает, что вершины x и y , будучи k -неотделимыми, в то же время $(k + 1)$ -отделимы ($k \geq 1$); второе определяется аналогично. Оба эти отношения не транзитивны при $k > 1$, как показывает все тот же пример на рис. 45.

от x и y , можно разрушить не более, чем k из этих цепей, поэтому вершины x и y являются k -неотделимыми в L . Обратное утверждение, что k -неотделимость влечет $(k + 1)$ -соединимость, доказывается значительно сложнее.

Пусть L — произвольный граф с двумя выделенными несмежными различными вершинами x и y . Всякую вершину графа L , отличную от x и y и не смежную ни с одной из них, будем

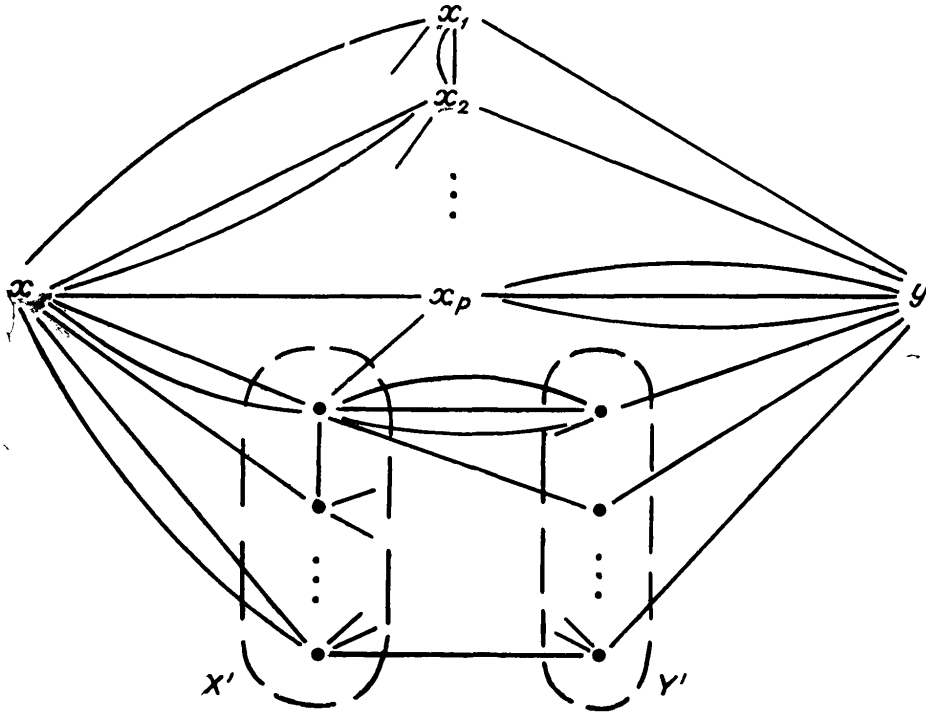


Рис. 46.

называть «внутренней». Обозначим через $\mathfrak{A}(L)$ высказывание о том, что k -неотделимость вершин x и y графа L влечет их $(k + 1)$ -соединимость при любом $k \geq 0$; утверждение $\forall L \mathfrak{A}(L)$, где квантор общности распространяется на все графы со всевозможными парами выделенных несмежных различных вершин, докажем индукцией по числу

$$q \doteq q(L) \doteq q(L; x, y)$$

внутренних вершин.

Сначала докажем $\mathfrak{A}(L)$ для графов без внутренних (относительно x и y) вершин. Пусть $L = (X, U; P)$ — граф с двумя выделенными несмежными k -неотделимыми вершинами x и y , такой что $q(L; x, y) = 0$, и пусть x_1, x_2, \dots, x_p — те его вершины, которые смежны с x и y одновременно (рис. 46). В случае $p \geq k + 1$ искомая система $k + 1$ цепей находится сразу. При $p \leq k$ в подграфе L' , полученном из L удалением вершин

x_1, x_2, \dots, x_p , вершины x и y будут $(k - p)$ -неотделимы, и достаточно отыскать в этом подграфе систему из $k - p + 1$ попарно непересекающихся (в промежуточных вершинах) цепей, соединяющих x с y .

Итак, пусть $p \leq k$, а $X', Y' \subseteq X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ — множества вершин подграфа L' , смежных с x , соответственно с y . Рассмотрим вспомогательный граф Кёнига $L^k = (X', Y'; V)$ (см. § 6 в главе 1), в котором $x'y' \in V$ тогда и только тогда, когда $x' \in X', y' \in Y'$ и вершины x', y' смежны в L' (рис. 47). Достаточно доказать, что в L^k имеется паросочетание с $k - p + 1$ ребрами, т. е. что $\pi(L^k) \geq k - p + 1$. Но в случае $\pi(L^k) < k - p + 1$ по теореме Кёнига — Оре имели бы

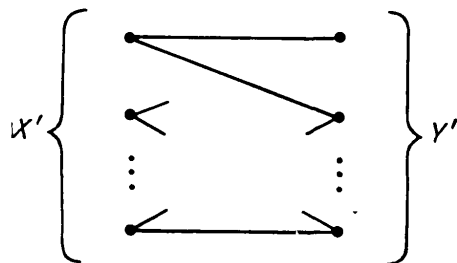


Рис. 47.

$$|X'| - \max_{A \subseteq X'} (|A| - |\Delta A|) < k - p + 1,$$

т. е.

$$|X'| - |A| + |\Delta A| < k - p + 1,$$

или

$$|X' \setminus A| + |\Delta A| < k - p + 1$$

для некоторого $A \subseteq X'$; удалив из графа L' множество $(X' \setminus A) \cup \Delta A$, содержащее не более $k - p$ вершин, мы отделили бы x от y , что невозможно, так как эти вершины $(k - p)$ -неотделимы в L' . Утверждение $\mathfrak{U}(L)$ доказано для графов L с $q(L) = 0$.

Допустим $\mathfrak{U}(L)$ доказанным для всех графов L с двумя выделенными несмежными вершинами, таких что $q(L) < q_0 > 0$, и рассмотрим произвольный граф $L = (X, U; P)$ с несмежными k -неотделимыми вершинами x и y , такой что $q(L) \doteq q(L; x, y) = q_0$; пусть x_0 — одна из внутренних вершин этого графа. Если в подграфе L' , полученном из L удалением x_0 , вершины x и y по-прежнему k -неотделимы, то они $(k + 1)$ -соединимы в L' , а значит и в L , в силу предположения индукции, ибо $q(L') < q(L)$. Если же x и y являются k -отделимыми в L' , то в L заведомо имеется множество $X_0 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ из $k + 1$ вершин, содержащее x_0 и такое, что удаление X_0 из графа L разделяет вершины x и y .

Пусть L_0 — подграф графа L , порожденный множеством вершин $X \setminus X_0$; X_x — множество вершин L_0 , соединимых с x в L_0 , а $X_y \doteq (X \setminus X_0) \setminus X_x$; $L_x \doteq (X_x \cup X_0, U_x; P)$ и $L_y \doteq (X_y \cup X_0, U_y; P)$ — подграфы L , порожденные множествами

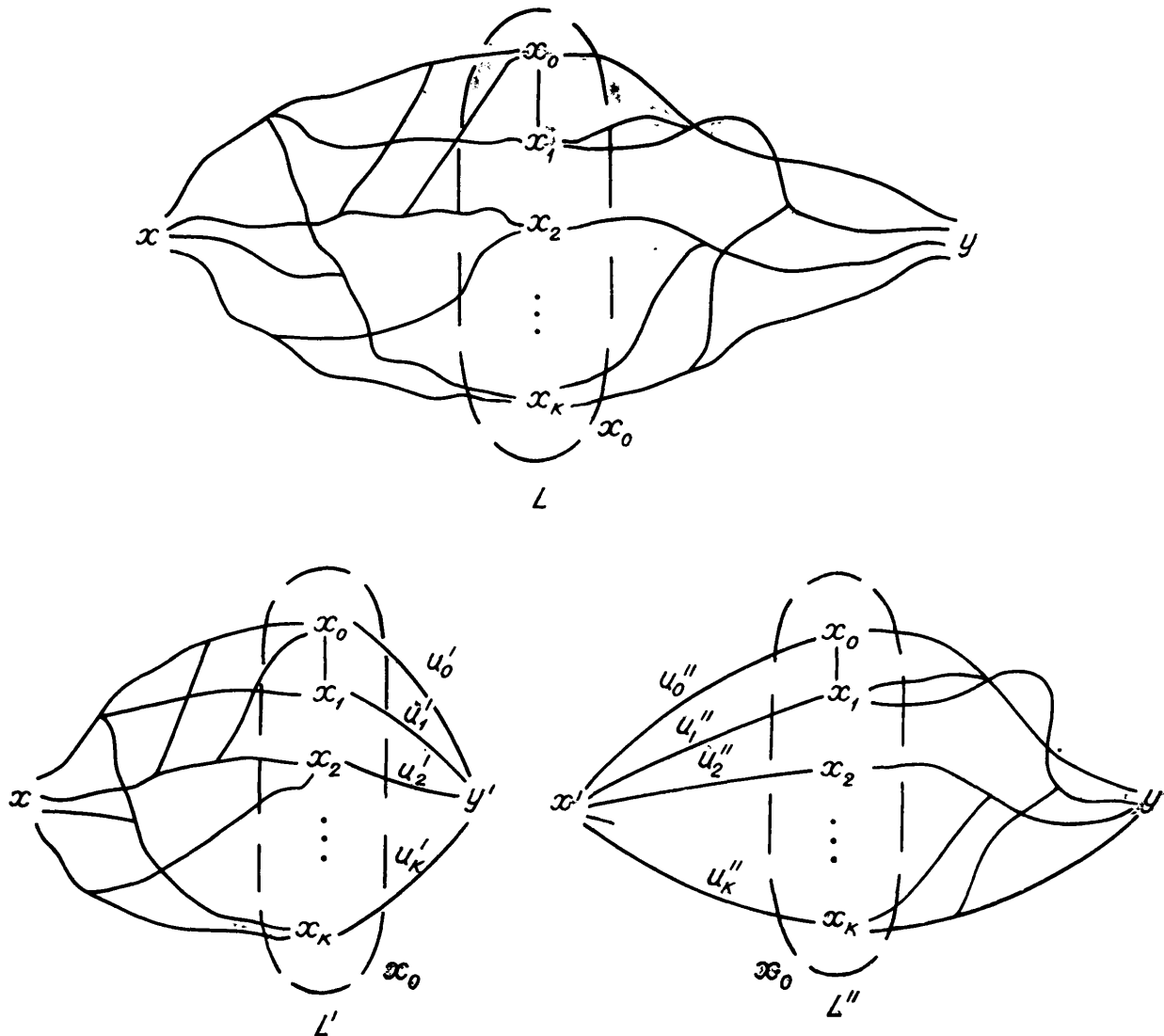


Рис. 48.

вершин $X_x \cup X_0$ и $X_y \cup X_0$ соответственно. Образум, наконец, надграфы (см. конец § 1 в главе 1)

$$L' = (X', U'; P) \quad \text{и} \quad L'' = (X'', U''; P)$$

графов L_x и L_y , полагая

$$X' \doteq X_x \cup X_0 \cup \{y'\}, \quad X'' \doteq X_y \cup X_0 \cup \{x'\},$$

где x' , y' — новые вершины;

$$U' \doteq U_x \cup \{u'_0, u'_1, \dots, u'_k\}, \quad U'' \doteq U_y \cup \{u''_0, u''_1, \dots, u''_k\},$$

где u'_i — новое ребро, соединяющее x_i с y' в L' , а u''_i — новое ребро, соединяющее x' с x_i в L'' , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, (рис. 48).

В графе L' вершины x и y' не смежны (так как $x \notin X_0$) и k -неотделимы (иначе x и y были бы k -отделимы в L). Кроме того, $q(L'; x, y') < q(L; x, y)$, так как каждая внутренняя вершина L' является внутренней и в L , но в то же время x_0 , будучи внут-

ренной вершиной в L , не является таковой в L' . По допущению индукции, вершины x и y' ($k + 1$)-соединимы в L' . Совершенно аналогичное рассуждение показывает, что x' и y ($k + 1$)-соединимы в L'' . Строя в L' и в L'' системы из $k + 1$ цепей требуемого вида и выделяя те их вершины и ребра, которые принадлежат исходному графу L , мы автоматически получим систему $k + 1$ цепей, соединяющих x с y в L и попарно не имеющих общих вершин, кроме x и y . Теорема доказана.

Заметим, что мысль о доказательстве теоремы Менгера индукцией по числу внутренних вершин навеяна работой П. Элайса, А. Фейнштейна и К. Шеннона (1956). Доказательство самого К. Менгера (1/1926, 2/1932), а также последующие доказательства Х. Уитни (3/1932), Д. Хайоша (1/1934), Д. Кёнига (1936, глава 14), Т. Галлаи (см. Т. Грюнвальд, 1938) сложнее, однако все упомянутые попытки упрощения первоначального доказательства основаны на оригинальных идеях, оказавших в дальнейшем заметное влияние на развитие теории графов; доказательство Р. Галина (3/1964) связано с исследованием разбивающих множеств вершин.

С л е д с т в и е 1. *Две различные вершины графа 1-неотделимы тогда и только тогда, когда через них проходит некоторый простой цикл.*

Ребро u графа L называется *перешейком*, если соединяемые им вершины x и y являются 1-отделимыми, т. е. после удаления u из L остается такой суграф, в котором x и y отделены. Из следствия вытекает, что ребро, не являющееся перешейком, всегда *цикловое*, т. е. принадлежит хотя бы одному циклу графа L ; при этом речь идет именно о цикле, а не о циклическом маршруте, ибо ребро u заведомо входит, например, в состав циклических маршрутов $xuux$, $xuuxuux$ и т. д. Очевидно, петля есть цикловое ребро.

С л е д с т в и е 2. *Пусть L' — суграф, полученный из L удалением ребра u . Тогда количество компонент*

$$\kappa(L') = \begin{cases} \kappa(L) + 1, & \text{если } u \text{ — перешеек в } L; \\ \kappa(L), & \text{если } u \text{ — цикловое ребро в } L. \end{cases}$$

Мы пока исследуем, как влияет на неотделенность вершин x и y графа L удаление из него других вершин, а также тех ребер, которые соединяют x с y . В § 16 будет изучен аналогичный вопрос в случае, когда из L удаляются любые ребра, но не удаляются вершины. Отметим еще, что общий случай удаления как вершин, так и ребер рассматривается в работе С. Йоу (1962).

§ 14. k -связные графы

Граф называется k -связным ($k \geq 1$), если любые две его вершины $(k - 1)$ -неотделимы. Из теоремы Менгера (§ 13) непосредственно следует

Т е о р е м а 1. *Граф k -связен тогда и только тогда, когда всякие две его вершины k -соединимы.*

Отметим еще, что

1) при $n(L) \geq k + 1$ утверждение о k -связности графа L равносильно такому: для любых $k + 1$ различных вершин x, x_1, x_2, \dots, x_k в L существует система k цепей, соединяющих x соответственно с x_1, x_2, \dots, x_k и попарно не имеющих общих вершин, кроме x ;

2) при $n(L) \geq 2k$ утверждение о k -связности L равносильно такому: для любых $2k$ различных вершин $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k$ существует система k цепей Q_1, Q_2, \dots, Q_k попарно без общих вершин и такая, что Q_i соединяет x_i с y_{j_i} ($i = 1, 2, \dots, k$), где (j_1, j_2, \dots, j_k) — некоторая перестановка индексов $1, 2, \dots, k$;

необходимость обоих условий доказана Г. Дираком (9/1960) *, а достаточность — Р. Галином и Г. Юнгом (1/1963).

Остановимся подробно на трех важных характеристических свойствах k -связных графов при $k = 2$.

Во-первых, из теоремы 1 сразу вытекает

С л е д с т в и е. *Граф 2-связен тогда и только тогда, когда для любых двух его различных вершин существует простой цикл, содержащий обе эти вершины **.*

Во-вторых, имеет место

Т е о р е м а 2 (Эрса) *.** *Граф 2-связен тогда и только тогда, когда для любой тройки его вершин x, y, z (не обязательно различных) существует цепь из x в z , проходящая через y и являющаяся при $x \neq z$ или $x = z = y$ простой цепью, а при $x = z = y$ — простым циклом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть граф $L = (X, U; P)$ 2-связен и пусть $x, y, z \in X$. В силу теоремы 1, существуют две простые цепи Q_1, Q_2 без общих неконцевых вершин, соединяющие x с y . Если z принадлежит хотя бы одной из этих цепей, скажем

*) В этой же работе исследуется еще более общий случай, когда некоторые из вершин x_1, x_2, \dots, x_k , а также некоторые из вершин y_1, y_2, \dots, y_k могут совпадать друг с другом.

**) Для графов L с $n(L) \geq 2$ слово «различных» можно опустить.

***) Aïres W. L. См. К. Менгер (2/1932), или, например, Д. Кёниг (1936, глава 14), или О. Оре (4/1962, русск. 1968, глава 5, теорема 5.4.3).

цепи Q_1 , то искомой будет цепь, состоящая из Q_2 и из отрезка цепи Q_1 от y до z (в случае $z = x$ получим простой цикл, а при $z = y$ — простую цепь Q_2). Если z не является вершиной ни одной из цепей Q_1, Q_2 , то пусть Q'_1 и Q'_2 — две простые цепи

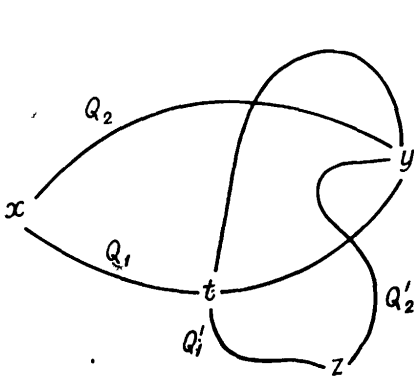


Рис. 49.

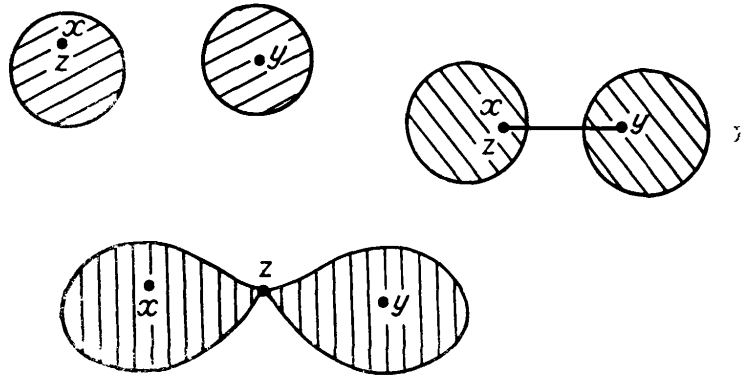


Рис. 50.

без общих неконцевых вершин, соединяющие y с z . Обозначим через t первую вершину цепи Q_1 (считая от x), принадлежащую объединению цепей Q'_1 и Q'_2 , и пусть, например, t находится на цепи Q'_1 (рис. 49). Искомую простую цепь можно образовать из отрезка цепи Q_1 от x до t , отрезка цепи Q'_1 от t до y и цепи Q'_2 , причем в случае $t = y$ средний участок (он тогда будет циклом) надо выбросить. Итак, требуемая цепь всегда существует.

Пусть теперь граф L не является 2-связным; это значит, что у него есть пара 1-отделимых вершин x, y . Покажем, как надо выбрать вершину z , чтобы заведомо не существовало ни простой цепи, ни простого цикла из x в z через y .

Если x и y находятся в разных компонентах графа L , то достаточно положить $z \doteq x$. Если x и y смежны, то в силу их 1-отделимости соединяющее их ребро является перешейком, и мы опять полагаем $z \doteq x$. Наконец, если x и y не смежны, но и не отделены, то ввиду их 1-отделимости существует вершина z , удаление которой разделяет x и y ; эта z и будет искомой. Все три случая проиллюстрированы на рис. 50.

В-третьих, справедлива

Теорема 3.* Граф $L = (X, U; P)$ с $|U \setminus \dot{U}| \geq 2$ (т. е. имеющий хотя бы две непетли) является 2-связным тогда и только тогда, когда он не содержит изолированных вершин и через любые две его непетли проходит некоторый простой цикл.

Доказательство. Пусть граф L 2-связен, тогда, ввиду свойства $|X| \geq 2$, вытекающего из условия $|U \setminus$

*) См. Г. Дирак (3/1952, 4/1953) или К. Берж (1/1958, русск. 1962, глава 20, теорема 4).

$|U \setminus \dot{U}| \geq 2$, он не содержит изолированных вершин. Пусть, далее, u и v — две непетли L . Если u и v соединяют одну и ту же пару вершин x, y , то цикл $xu y v x$ — искомым. Если u соединяет x с y , а v соединяет x с вершиной $z \neq y$, то в подграфе

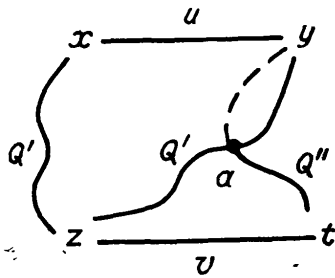


Рис. 51.

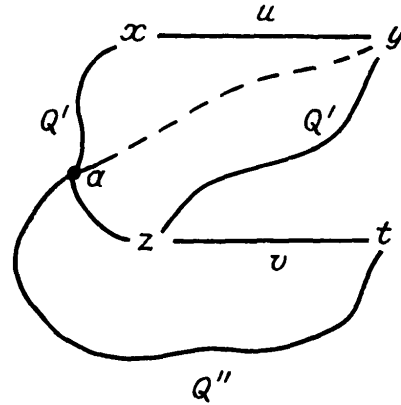


Рис. 52.

L' , полученном из L удалением вершины x (и связном, ввиду 2-связности L), вершины z и y соединяются некоторой простой цепью Q ; в исходном графе L цепь Q вместе с ребрами u и v образует искомым простой цикл. Остался случай, когда u соединяет x с y , а v соединяет z с t , причем все четыре вершины x, y, z, t различны.

Так как граф L 2-связен, то по теореме Эрса существует простая цепь Q' , идущая из x в y через z . Если Q' содержит вершину t , то, заменяя участок этой цепи между z и t ребром v и добавляя ребро u , получим искомым простой цикл. Если Q' не содержит t , то в подграфе L'' , полученном из L удалением вершины z (и связном, ввиду 2-связности L), существует простая цепь Q'' , соединяющая t с y . Обозначим через a первую (считая от t) вершину цепи Q'' , принадлежащую также Q' , и рассмотрим два случая.

Случай 1: вершина a лежит на той части цепи Q' , которая соединяет (в графе L) вершины z и y . Тогда искомым будет простой цикл, состоящий из ребра u , части цепи Q' от x до z , ребра v , части цепи Q'' от t до a и части цепи Q' от a до y (рис. 51).

Случай 2: a лежит на той части цепи Q' , которая соединяет x с z . Тогда искомым цикл состоит из ребра u , части цепи Q' от x до a , части цепи Q'' от a до t , ребра v и части цепи Q' от z до y (рис. 52).

Наоборот, пусть $L = (X, U; P)$ — граф с $|U \setminus \dot{U}| \geq 2$, без изолированных вершин и такой, что всякие две его непетли принадлежат некоторому простому циклу. Пусть x и y — две произвольные вершины L . Покажем, что через x и y проходит

простой цикл, а это, в силу следствия из теоремы 1, и будет означать, что граф L 2-связен.

Так как L не содержит изолированных вершин, то существует непетля u , инцидентная вершине x , а также непетля v , инцидентная вершине y . Если $u \neq v$, то простой цикл, содержащий оба ребра u и v , будет искомым. Если же $u = v$, то ввиду $|U \setminus \dot{U}| \geq 2$ у графа L есть непетля w , отличная от u , и искомым является простой цикл, проходящий через u и w . Теорема доказана.

Что касается k -связных графов при $k > 2$, то отметим следующие результаты. В. Татт (6/1961) дал способ построения, позволяющий получить все 3-связные, и только такие, графы, а Г. Дирак (15/1963) полностью описал класс 3-связных графов, не содержащих ни одной пары циклов без общих вершин* (см. также доказательство В. Брауна—1965); к этим вопросам мы вернемся во второй части книги. Еще упомянем более раннюю работу Г. Дирака (8/1960), а также работу Р. Галина и Г. Юнга (1/1963), относящуюся к случаю произвольного k (по духу это исследование тоже подходит ко второй части).

А. Адам (1/1961) поставил проблему: каким должен быть граф L и как надо выбрать в нем ребра u_1, u_2, \dots, u_k , чтобы нашелся простой цикл, содержащий все эти k ребер. При $k = 1$ вопрос решается тривиально: выбранное ребро не должно быть перешейком. При $k = 2$ ответ дается теоремой 3. Случай $k = 3$ полностью исследован самим А. Адамом (1/1961, 2/1963); в частности, оказывается, что очевидное необходимое условие, а именно отсутствие вершины, инцидентной сразу всем трем ребрам u_1, u_2, u_3 , и сохранение связности при удалении всей тройки из L , в случае 3-связных графов также достаточны. Эти вопросы имеют прямое отношение к двуполюсникам, т. е. графам с двумя особо отмеченными вершинами — см., например, работы Б. А. Трахтенброта (1958) и А. Адама (1/1961).

§ 15. k -компоненты, точки сочленения, блоки

Назовем k -компонентой ($k \geq 0$) графа $L = (X, U; P)$ всякий его k -связный подграф, максимальный относительно этого свойства, т. е. не являющийся подграфом никакого большего k -связного подграфа графа L . В частности, каждый граф об-

*) Описанию всех, а не только 3-связных, графов, в которых всякие два цикла имеют хотя бы одну общую вершину, посвящена работа Л. Лóваса (1965).

ладает единственной 0-компонентой, коей является он сам, а 1-компоненты графа — это обычные его компоненты связности.

Т е о р е м а 1. Пусть $L_1 = (X_1, U_1; P)$ и $L_2 = (X_2, U_2; P)$ — две различные k -компоненты ($k \geq 1$) графа $L = (X, U; P)$. Тогда $|X_1 \cap X_2| \leq k - 1$, причем в случае $|X_1 \cap X_2| = k - 1$ никакая вершина из $X_1 \setminus X_2$ не смежна ни с одной вершиной из $X_2 \setminus X_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подграф $M = (X_1 \cup X_2, V; P)$, порожденный объединением множеств вершин подграфов L_1 и L_2 . Ввиду того, что k -компоненты L_1 и L_2 различны, и в силу максимального свойства k -компонент, подграф M не является k -связным. Но всякие две вершины из M , принадлежащие обе множеству X_1 или обе множеству X_2 , $(k - 1)$ -неотделимы. Поэтому в M существуют такие две вершины $x_0 \in X_1 \setminus X_2$, $y_0 \in X_2 \setminus X_1$ и такое множество $Y \subseteq (X_1 \cup X_2) \setminus \{x_0, y_0\}$, что удаление из M всех вершин Y вместе с множеством $U(x_0, y_0)$ всех ребер, соединяющих x_0 и y_0 , приводит к отделению x_0 от y_0 , причем

$$|Y| + |U(x_0, y_0)| \leq k - 1. \quad (*)$$

Имеем

$$X_1 \cap X_2 \subseteq Y,$$

ибо в случае $(X_1 \cap X_2) \setminus Y \neq \emptyset$ вершина $z \in (X_1 \cap X_2) \setminus Y$ после удаления Y и $U(x_0, y_0)$ осталась бы соединимой как с x_0 (ввиду k -связности графа L_1), так и с y_0 (ввиду k -связности L_2), т. е. x_0 осталась бы соединимой с y_0 , что невозможно. Следовательно,

$$|X_1 \cap X_2| \leq |Y|,$$

откуда, в силу (*), получаем

$$|X_1 \cap X_2| \leq k - 1.$$

Если теперь $|X_1 \cap X_2| = k - 1$, то $X_1 \cap X_2 = Y$ и $U(x_0, y_0) = \emptyset$. Но тогда никакие две вершины $x \in X_1 \setminus X_2$ и $y \in X_2 \setminus X_1$ не могут быть смежны, ибо иначе соединяющее их ребро, которое, очевидно, принадлежит подграфу M , сохранилось бы после удаления множества Y ; при этом вершина x_0 осталась бы соединимой с x , а y_0 — с y , т. е. x_0 осталась бы соединимой с y_0 в M , вопреки определению множества Y . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае $k = 2$ второе утверждение теоремы можно усилить следующим образом: если $|X_1 \cap X_2| = 1$, то в графе L не существует цепи, соединяющей вершину из $X_1 \setminus X_2$ с вершиной из $X_2 \setminus X_1$ и не содержащей вершин множества $X_1 \cap X_2$. Действительно, при наличии такой цепи (рис. 53) подграф M' графа L , порожденный объединением множества вершин этой цепи с множеством $X_1 \cup X_2$, был бы 2-связен, ибо, как нетрудно проверить, при любом варианте выбора двух вершин в M' через них можно провести простой цикл этого подграфа; однако вывод о 2-связности M' противоречит максимальному свойству каждой из 2-компонент L_1 и L_2 .

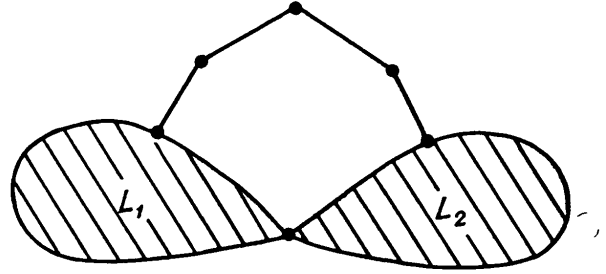


Рис. 53.

Было бы очень важно продолжать в общем виде исследование тех свойств графа, которые связаны с наличием и взаимным расположением его k -компонент. Отметим, что для $k > 2$ пока не найдено практически удобного алгоритма выявления

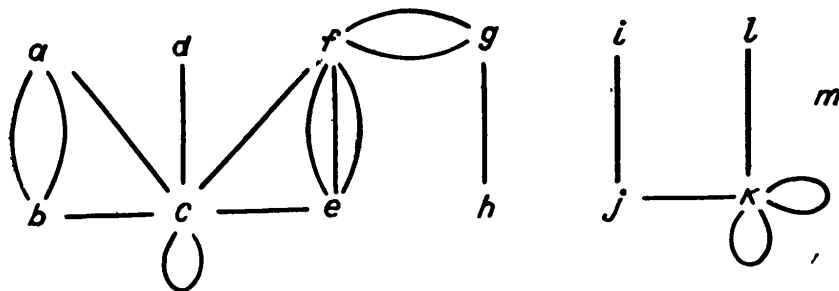


Рис. 54.

k -компонент и соединяющих их подграфов в графе (например, заданном какой-либо из своих матриц). Остановимся на случае $k = 2$.

Точкой сочленения графа L называется такая его вершина, удаление которой приводит к увеличению числа компонент связности. Максимальный связный подграф, не имеющий своих точек сочленения, называется *блоком* графа L . Например, у графа на рис. 54 блоками являются подграфы с множествами вершин

$\{a, b, c\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e, f\}$, $\{f, g\}$, $\{g, h\}$, $\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{k, l\}$, $\{m\}$,

а вершины c, f, g, j, k , будучи точками сочленения всего графа L ,

не являются таковыми ни для какого из блоков, рассматриваемого как отдельный граф.

Нетрудно проверить, что блоками графа служат следующие его подграфы и только они:

- 1) 2-компоненты, содержащие не менее двух вершин;
- 2) двухвершинные подграфы с одним ребром, в случае когда это ребро является перешейком всего графа *;
- 3) одновершинные компоненты связности.

Действительно, с одной стороны, каждый из перечисленных подграфов максимален относительно свойства быть связным и не иметь своих точек сочленения; с другой стороны, всякий связный, но не 2-связный подграф более чем с двумя вершинами необходимо имеет точку сочленения (это непосредственно следует из определения k -связности), а при наличии не более двух вершин может быть только однореберным, причем это ребро не должно быть цикловым * в графе, ибо иначе множество вершин цикла породило бы связный подграф без точек сочленения и рассматриваемый однореберный подграф не обладал бы максимальным свойством.

Разбиение графа на блоки, очевидно, не порождает в общем случае разбиения множества всех вершин на классы, ибо каждая точка сочленения принадлежит по крайней мере двум различным блокам; точно так же каждая петля, инцидентная точке сочленения, входит сразу в несколько блоков (например, пара петель при вершине k графа на рис. 54 сохраняется как в блоке с вершинами $\{j, k\}$, так и в блоке с вершинами $\{k, l\}$, а петля при вершине s принадлежит сразу трем блокам). Разбиение на классы, соответствующие блокам, имеет место, очевидно, для множества непетель графа.

Т е о р е м а 2. Два блока графа могут иметь не более одной общей вершины, и она необходимо является точкой сочленения; две точки сочленения могут входить не более, чем в один общий блок.

Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 1 и замечания к ней в случае, когда оба блока являются 2-компонентами; рассмотрение же случая, когда хотя бы один из блоков сводится к ребру, не представляет труда. Второе утверждение сразу вытекает из первого.

С л е д с т в и е. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{p(L)}$ — все точки сочленения, а $L_1, L_2, \dots, L_{q(L)}$ — все блоки графа L , причем a_i содержится ровно в g_i блоках ($i = 1, 2, \dots, p(L)$), а блок L_j содержит ровно

*) См. конец § 13.

t_j точек сочленения L ($j = 1, 2, \dots, q(L)$). Тогда

$$q(L) = \kappa(L) + \sum_{i=1}^{p(L)} (g_i - 1) \quad \text{и} \quad p(L) = \kappa(L) + \sum_{j=1}^{q(L)} (t_j - 1).$$

Оба равенства * доказываются индукцией по числу $r(L) \doteq q(L) - \kappa(L)$. Действительно, они тривиальны для графов L с $r(L) = 0$ (т. е. когда каждый блок есть компонента связности) и, будучи верными для произвольного несвязного графа L , сохраняют силу для графа L' , полученного из L отождествлением любой пары вершин x, y разных компонент (очевидно, $r(L') = r(L) + 1$); сохранение равенств легко проверить отдельно для каждого из трех случаев: 1) обе вершины x, y суть точки сочленения L ; 2) x является, а y не является точкой сочленения L ; 3) ни x , ни y не есть точка сочленения L .

Т е о р е м а 3. Пусть $S = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_{p-1}, L_p \doteq L_0\}$ — некоторая система из $p \geq 2$ различных блоков графа $L = (X, U; P)$, обладающая тем свойством, что для любого $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ блоки L_i и L_{i+1} имеют общую вершину. Тогда общая вершина — одна и та же для всех блоков системы S .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим общую вершину блоков L_i и L_{i+1} через x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$), полагая при этом $x_p \doteq x_0$, и допустим, вопреки утверждению теоремы, что не все вершины $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ совпадают. Пусть, скажем, $x_0 \neq x_1$. В каждом из блоков L_i при $i = 1, 2, \dots, p - 1$ соединим цепью вершины x_i и x_{i+1} (в случае $x_i = x_{i+1}$ можно взять в L_i цепь нулевой длины). Сочленив последовательно эти $p - 1$ цепей, получим цепь Q графа L , соединяющую x_1 с x_0 (рис. 55) и имеющую по крайней мере одну вершину вне блока L_0 , поскольку никакой блок, отличный от L_0 , не может иметь с ним двух общих вершин. Объединение множества всех вершин блока L_0 с множеством всех вершин цепи Q порождает в графе L подграф, очевидно, связный и не имеющий своих точек сочленения, но в то же время содержащий блок L_0 в качестве собственного подграфа, а это противоречит максимальному свойству в определении блока.

Переходим к задаче выявления точек сочленения и блоков графа по его матрице смежности.

Пусть $L = (X, U; P)$ — данный граф, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а $R \doteq R_L$ — его матрица смежности над булевой алгеброй $B\{0,1\}$. Из определения точки сочленения ясно, что для про-

*) Для связных графов первое равенство получил Ф. Харари (5/1959), второе — Т. Галлаи (4/1964).

верки того, является ли вершина x_i такой точкой, достаточно выявить компоненты связности графа L и его подграфа $L_i \doteq (X \setminus \{x_i\}, U_i; P)$, полученного удалением x_i , а это мы уже умеем делать (см. §12). Прделав такое выявление для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, можно определить, какие вершины графа

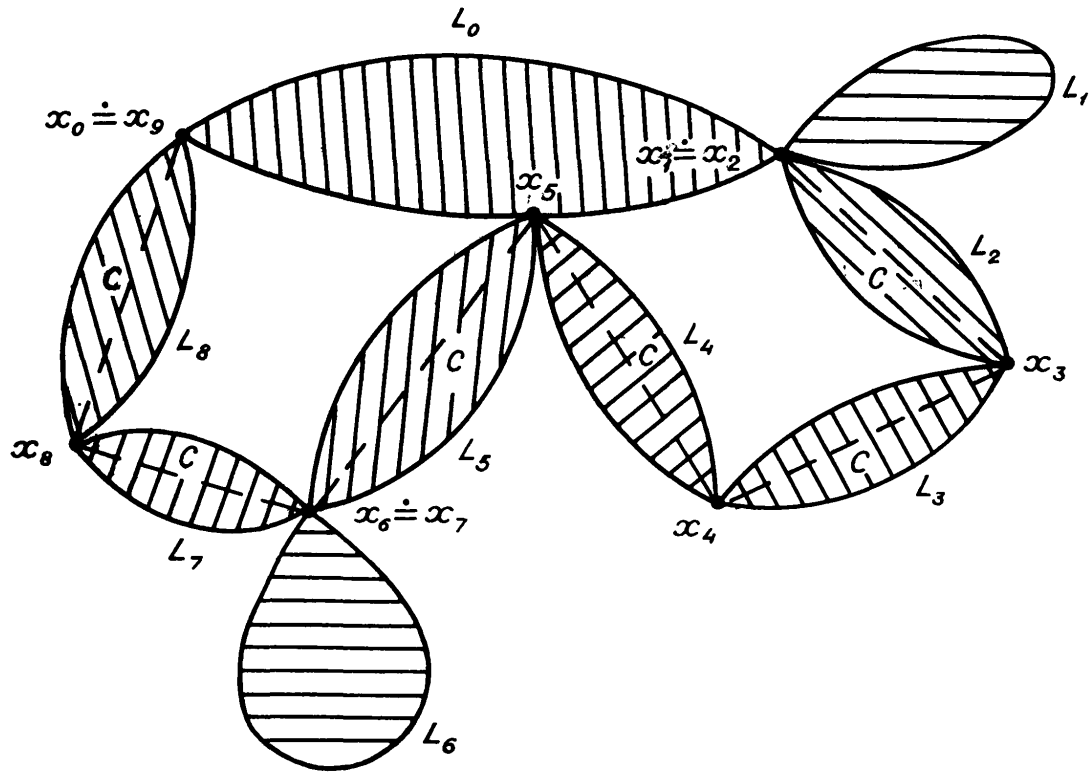


Рис. 55.

L служат его точками сочленения, и из совокупности компонент графов L, L_1, L_2, \dots, L_n скомбинировать все блоки L .

Поясним этот процесс на конкретном примере графа, который изображен на рис. 54.

Имеем $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$. Испытывая поочередно подграфы L_a, L_b, \dots, L_m (получаемые из L удалением вершины a , вершины b , ..., вершины m), обнаруживаем, что $\kappa(L_a) = \kappa(L)$, $\kappa(L_b) = \kappa(L)$, $\kappa(L_c) > \kappa(L)$ и т. п., т. е., что точками сочленения графа L служат c, f, g, j, k ; одновременно выявляем компоненты графов $L, L_c, L_f, L_g, L_j, L_k$, точнее, множества вершин, порождающие эти компоненты. В данном случае это будут

для L : $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$;

для L_c : $\{a, b\}, \{d\}, \{e, f, g, h\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$;

для L_f : $\{a, b, c, d, e\}, \{g, h\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$;

для L_g : $\{a, b, c, d, e, f\}, \{h\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$;

для L_j : $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{i\}, \{k, l\}, \{m\}$;

для L_k : $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{i, j\}, \{l\}, \{m\}$.

Образуем теперь системы множеств, добавляя ко всем множествам каждой строки соответствующую удаленную вершину:

0) $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$;

1) $\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c, e, f, g, h\}, \{c, i, j, k, l\}, \{c, m\}$;

2) $\{a, b, c, d, e, f\}, \{f, g, h\}, \{f, i, j, k, l\}, \{f, m\}$;

3) $\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{g, h\}, \{g, i, j, k, l\}, \{g, m\}$;

4) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, j\}, \{i, j\}, \{j, k, l\}, \{j, m\}$;

5) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}, \{i, j, k\}, \{k, l\}, \{k, m\}$.

Далее составим всевозможные непустые пересечения множеств, взятых по одному из каждой строки. Для этого сначала пересекаем множества строки 0) с множествами строки 1); получаем новую строку

01) $\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c, e, f, g, h\}, \{c\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$.

Затем пересекаем множества строки 01) с множествами строки 2); это дает новую строку

012) $\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c, e, f\}, \{f, g, h\}, \{f\}, \{c\}, \{i, j, k, l\}, \{m\}$

и т. д. Наконец, пересекая строку 01234) со строкой 5), находим систему множеств

012345) $\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c, e, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{i, j\},$
 $\{j, k\}, \{k, l\}, \{m\}, \{c\}, \{f\}, \{g\}, \{j\}, \{k\},$

соответствующих всем блокам и точкам сочленения исходного графа L . Выбрасывая те одновершинные множества, которые отвечают точкам сочленения (т. е. $\{c\}, \{f\}, \{g\}, \{j\}$ и $\{k\}$), получим множества вершин всех блоков графа L :

$\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c, e, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{i, j\}, \{j, k\}, \{k, l\}, \{m\}$.

Описание и обоснование указанного способа в общем виде не представляет труда, однако мы не будем этого делать, так как считаем наш способ громоздким и неудобным. Надеемся, что читатели в случае надобности построят более привлекательный алгоритм; при этом было бы желательно оформить его так,

чтобы все действия производились только над матрицей смежности (подобно тому, как при выявлении компонент связности).

Понятие точки сочленения дает возможность сформулировать интересный результат, полученный Г. Дираком (12/1962); для его доказательства понадобится следующая

Л е м м а. Пусть $L = (X, U; P)$ — связный граф, а $Y \subseteq X$ — произвольное подмножество, состоящее из четного числа его вершин. Всегда можно так разбить Y на пары вершин

$$\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_k, y_k\},$$

где $k \doteq \frac{1}{2} |Y|$, чтобы в L нашлась система цепей

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_k$$

таких, что Q_i соединяет x_i с y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и при $i \neq j$ цепи Q_i и Q_j не могут иметь более одной общей вершины.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу связности графа L , при любом разбиении множества Y на k пар для каждой пары вершин $\{x_i, y_i\}$ найдется соединяющая их цепь Q_i . При заданном разбиении всегда можно выбрать систему цепей $\{Q_i\}$ с наименьшей суммой длин, а из всех разбиений данного множества Y на пары выбрать такое, при котором эта наименьшая сумма длин принимает наименьшее значение. Покажем, что выбранное разбиение — искомое и что всякая составленная для него система цепей с наименьшей суммарной длиной обладает тем свойством, что никакие две цепи не имеют более одной общей вершины.

Допустим противное, что полученная таким образом система цепей $\{Q_i\}$ не удовлетворяет поставленному условию. Не нарушая общности, можно считать, что цепь Q_1 , соединяющая x_1 с y_1 , и цепь Q_2 , соединяющая x_2 с y_2 , имеют не менее двух общих вершин и что первая вершина цепи Q_1 (считая от x_1), принадлежащая также цепи Q_2 , является в то же время первой вершиной цепи Q_2 (считая от x_2), принадлежащей Q_1 (этого всегда можно добиться перенумерованием пар и цепей, а также, в случае надобности, перестановкой вершин x_2 и y_2 в паре). Первую из указанных общих вершин обозначим через x , вторую через y (рис. 56). Так как цепи Q_1, Q_2, \dots все простые (ввиду минимальности суммы их длин), то $x \neq y$.

Ясно теперь, что если выбранное разбиение множества Y заменить новым разбиением

$$\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \dots, \{x_k, y_k\},$$

то найдется и новая система цепей

$$Q'_1, Q'_2, Q_3, \dots, Q_k,$$

которые соединяют пары вершин нового разбиения и обладают меньшей суммарной длиной, чем цепи системы $\{Q_i\}$ (именно, цепь Q'_1 состоит из отрезка цепи Q_1 от x_1 до x и отрезка обращенной цепи Q_2 от x до x_2 , а цепь Q'_2 выделяется из маршрута, составленного отрезком обращенной цепи Q_1 между y_1 и y и отрез-

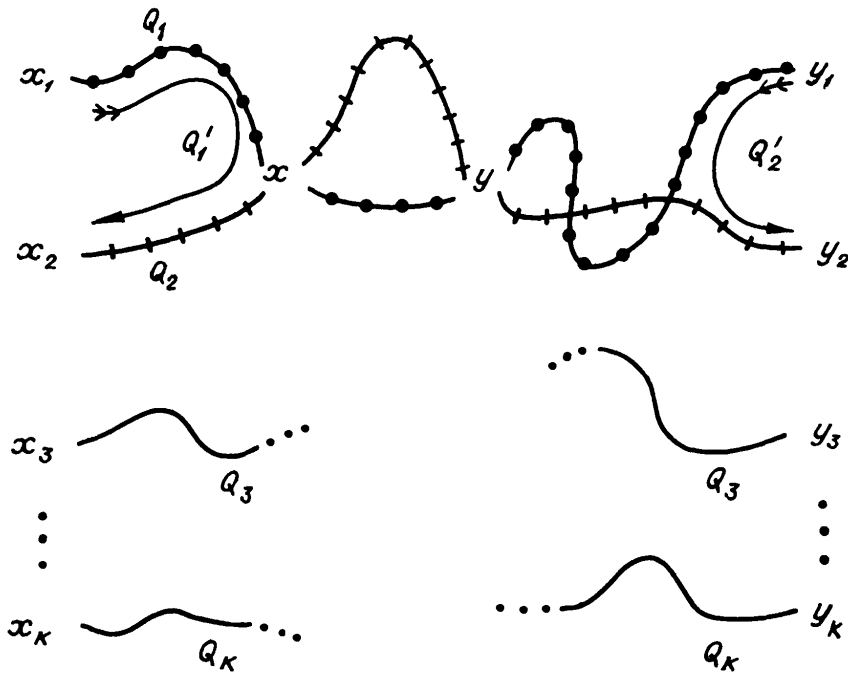


Рис. 56.

ком цепи Q_2 между y и y_2). Но это противоречит минимальности первоначального разбиения множества Y и минимальности суммы длин цепей соответствующей системы $\{Q_i\}$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 4 (Дирака). *Если вершина x графа L не является его точкой сочленения и обладает четной валентностью $v_L(x) = 2k$ (см. § 2), то в L существует система из k проходящих через x простых циклов попарно без общих ребер, такая что два различных цикла системы могут иметь, кроме x , еще не более одной общей вершины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если число $s^0 \doteq s_L^0(x)$ петель при x отлично от нуля, то, включив все эти петли в искомую систему циклов, мы используем $2s^0$ единиц валентности вершины x . Пусть теперь x_1, x_2, \dots, x_p ($p \geq 0$) — вершины L , смежные с x и отличные от нее, а $s_i \doteq s_L(x, x_i)$ — число ребер, соединяющих x с x_i ($i = 1, 2, \dots, p$). Из ребер, соединяющих x с теми

x_i , для которых $s_i > 1$, составим $q \doteq \sum_{i=1}^p \left[\frac{s_i}{2} \right]$ циклов длины два

таким образом, чтобы они попарно не имели общих ребер; включив эти циклы в искомую систему, мы используем тем самым еще $2q$ единиц валентности вершины x . Количество $2l \doteq 2k - 2s^0 - 2q$ единиц, оставшихся пока неиспользованными, четно и если оно не равно нулю, то соответствующие им ребра u_1, u_2, \dots, u_{2l} соединяют вершину x с $2l$ различными (и отличными от x) вершинами (именно теми из x_1, x_2, \dots, x_p , для которых s_i нечетны); множество этих $2l$ вершин обозначим через Y .

Так как x не есть точка сочленения графа L , то подграф $L' = (X', U'; P)$, полученный из L удалением x , связан. Но $Y \subseteq X'$ и $|Y| = 2l$, поэтому, в силу леммы, можно разбить множество Y на пары и построить в L' систему из l цепей таким образом, чтобы каждая пара соединялась своей цепью и никакие две цепи не имели более одной общей вершины. Эти l цепей вместе с ребрами u_1, u_2, \dots, u_{2l} образуют в L такие l простых циклов, которые попарно не имеют общих ребер и могут пересекаться, кроме x , еще не более, чем в одной вершине. Система всех построенных $s^0 + q + l = k$ циклов графа L , очевидно, обладает требуемыми свойствами. Теорема доказана.

§ 16. Отрезаемость и сплетаемость

В §§ 13—15 графы изучались главным образом с точки зрения того, какое влияние на их связность оказывает удаление вершин. А. Коциг (2/1956, 6/1961) предпринял исследование аналогичных свойств графов, проявляющихся при удалении из них только ребер. «Реберным аналогом» точки сочленения является теперь перешеек (см. конец § 13).

Вершины x и y графа L будем называть k -отрезаемыми ($k \geq 0$), если из L можно удалить не более k ребер таким образом, чтобы в полученном суграфе вершины x и y были отделены. В частности 0-отрезаемость, как и 0-отделимость, означает отделенность вершин. Отношение k -неотрезаемости, в отличие от k -неотделимости, есть эквивалентность, ибо его рефлексивность и симметрия очевидны, а транзитивность доказывается без труда: если вершины x, y и вершины y, z соответственно k -неотрезаемы, то после удаления из графа не более k ребер заведомо сохранится маршрут из x в z через y , т. е. вершины x, z тоже k -неотрезаемы.

Две вершины графа называются k -сплетаемыми ($k \geq 0$), если они соединяются по крайней мере k цепями, попарно не имеющими общих ребер. Ясно, что всякие k -соединимые вершины в то же время k -сплетаемы, но обратное утверждение неверно.

Нижеследующая теорема, аналогичная теореме Менгера (§ 13), доказывается несколько проще*.

Т е о р е м а К о ц и г а. В графе $L = (X, U; P)$ две различные вершины x и y тогда и только тогда k -неотрезаемы, когда они $(k + 1)$ -сплетаемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если x и y $(k + 1)$ -сплетаемы в L , то существует система из $k + 1$ соединяющих их цепей попарно без общих ребер; удаление из L не более k ребер сохранит хотя бы одну из этих цепей, поэтому x и y k -неотрезаемы в L . Пусть теперь $\mathfrak{B}(L)$ означает высказывание, что в графе L с двумя выделенными вершинами x, y из k -неотрезаемости этих вершин следует их $(k + 1)$ -сплетаемость при любом $k \geq 0$. Ребро графа L , не инцидентное ни x , ни y , назовем «внутренним» и будем доказывать утверждение $\forall L \mathfrak{B}(L)$ индукцией по числу $q \doteq q(L) = q(L; x, y)$ внутренних ребер.

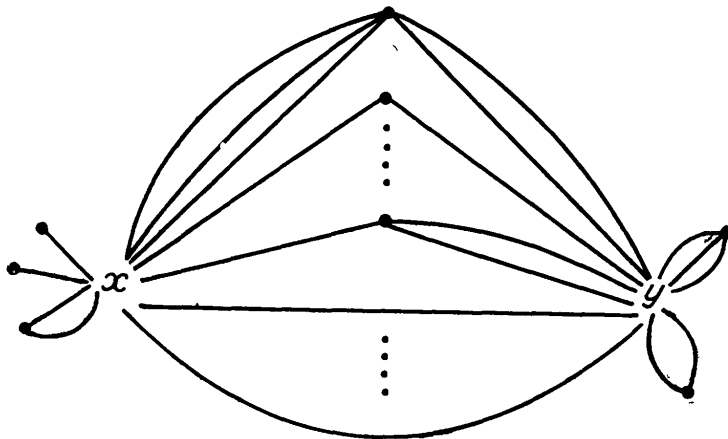


Рис. 57.

Примерный вид графа L с $q(L) = 0$ показан на рис. 57, и утверждение $\mathfrak{B}(L)$ для таких графов устанавливается без труда (предоставим это читателю). Пусть $\mathfrak{B}(L)$ уже доказано для всех L с $q(L) < q_0 > 0$ и пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный граф, в котором две различные вершины x и y k -неотрезаемы, причем $q(L; x, y) = q_0$; обозначим через u_0 какое-либо внутреннее ребро графа L . Если в суграфе $L^- \doteq (X, U \setminus \{u_0\}; P)$ вершины x и y по-прежнему k -неотрезаемы, то, по предположению индукции, они $(k + 1)$ -сплетаемы в L^- , а значит и в L , ибо $q(L^-; x, y) < q(L; x, y)$. Если же x и y k -отрезаемы в L^- , то в L имеется множество ребер $U_0 = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_k\}$, которое содержит u_0 и удаление которого из L отделяет вершины x и y .

Вследствие k -неотрезаемости вершин x и y в L , возвращение любого из удаленных ребер u_i приводит к образованию цепи, соединяющей x с y , поэтому из двух вершин, инцидентных u_i в L , ровно одна (обозначим ее x_i) соединима с x и ровно одна

*) Идею мы опять позаимствовали из работы П. Элайса, А. Фейнштейна и К. Шеннона (1956); доказательства самого А. Коцига более сложны.

(пусть это y_i) соединима с y ($i=0, 1, 2, \dots, k$) в суграфе $L_0 \doteq (X, U \setminus U_0; P)$; среди вершин $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ и среди вершин $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$ некоторые могут совпадать друг с другом. Пусть X_x — множество всех вершин, соединимых с x в L_0 , а $X_y \doteq X \setminus X_x$. Рассмотрим подграфы $L_x \doteq (X_x, U_x; P)$ и $L_y \doteq (X_y, U_y; P)$ графа L , порожденные множествами вершин X_x и X_y , и образуем объемлющие графы L' и L'' графов L_x и L_y соответственно следующим образом:

$$L' = (X_x \cup \{y'\}, U_x \cup U_0; P'), \quad L'' = (X_y \cup \{x'\}, U_y \cup U_0; P''),$$

где y' и x' — новые вершины, а инциденторы P' и P'' определены так, что ребро $u_i \in U_0$ соединяет вершину x_i с y' в L' и соединяет x' с y_i в L'' при $i = 0, 1, 2, \dots, k$ (рис. 58)*.

Вершины x и y' k -неотрезаемы в L' (иначе x и y были бы k -отрезаемы в L), и $q(L'; x, y') < q(L; x, y)$, поэтому, в силу допущения индукции, x и y' $(k+1)$ -сплетаемы в L' ; при этом все $k+1$ ребер u_i , соединяющих вершины $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ с y' , принадлежат $k+1$ различным цепям без общих ребер, соединяющим x с y' . По аналогичной причине вершины x' и y $(k+1)$ -сплетаемы в L'' , и все $k+1$ ребер u_i , соединяющих x' с вершинами $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$, принадлежат $k+1$ различным цепям без общих ребер, соединяющим x' с y . В исходном графе L обе системы цепей вместе (при условии, конечно, что каждое ребро $u_i \in U_0$ считается только один раз) образуют систему из $k+1$ цепей, соединяющих x с y и попарно не имеющих общих ребер. Теорема доказана.

Граф, в котором любые две вершины $(k-1)$ -неотрезаемы ($k \geq 1$), называется k -сплетенным. Ясно, что 1-сплетенность, как и 1-связность, означает просто связность. Из теоремы Кюцига непосредственно следует, что граф является k -сплетенным тогда и только тогда, когда любые две его вершины k -сплетаемы.

k -сплетенный суграф графа L , не содержащий никакого меньшего k -сплетенного суграфа, называется *основой k -го порядка* графа L . Естественный способ нахождения какой-либо из основ k -го порядка данного k -сплетенного графа L состоит в последовательном удалении ребер, не нарушающем свойства k -сплетенности, до тех пор пока такое удаление возможно. Как

*) Для наглядности можно считать, что ребро u_i в графе L' не совпадает с ребром u_i в графе L'' , а является его дубликатом; это никоим образом не повлияет на рассуждение (в силу той роли, которую играет инцидентор в определении графа) и лишь усложнит оформление доказательства.

показал А. Коциг (5 / 1961), проверку k -сплетенности суграфа на каждом этапе можно заменить проверкой $(k - 1)$ -неотрезаемости лишь той пары вершин, которая соединялась удаленным на этом этапе ребром. Именно, справедлива

Л е м м а. Пусть $L = (X, U; P)$ — k -сплетенный граф, x и y — две его k -неотрезаемые вершины, соединенные ребром u . Тогда суграф L' , полученный из L удалением ребра u , является k -сплетенным.

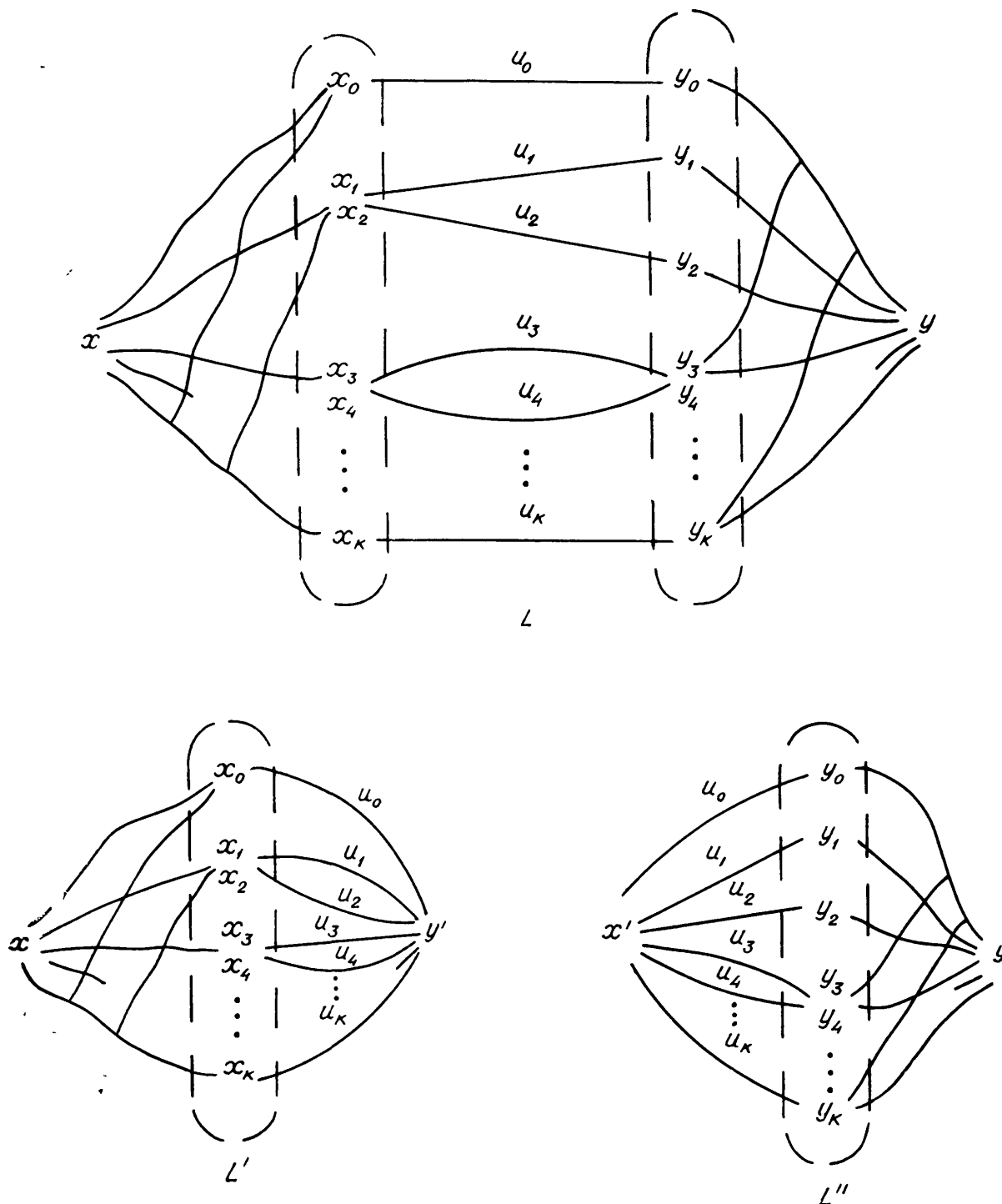


Рис. 58.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что в суграфе L' имеются $(k - 1)$ -отрезаемые вершины z и t . Тогда в L' существует множество $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ из $k - 1$ ребер, удаление которого разделяет z и t ; значит, удаление множества $\{u, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ из графа L разделяет в нем вершины z и t . В то же время в суграфе L'' , полученном из L удалением только ребер $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$, вершины z и t соединимы ввиду

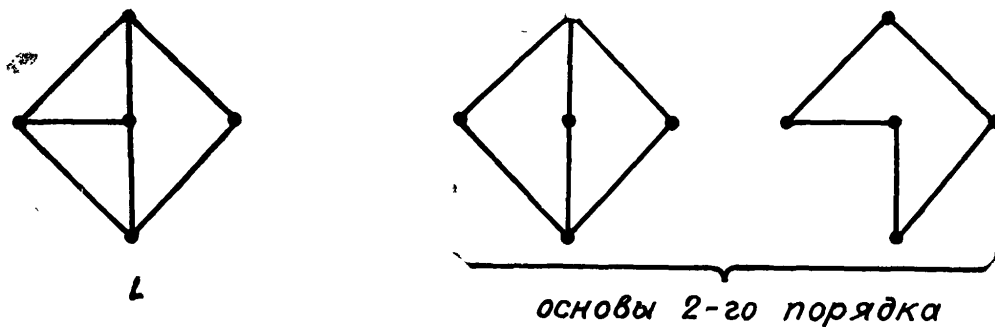


Рис. 59.

k -сплетенности L . Следовательно, всякая цепь, соединяющая z с t в L'' , неизбежно содержит ребро u , поэтому после удаления u из L'' в оставшемся суграфе $L''' = (X, U \setminus \{u, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}; P)$ вершина z соединима с одной из вершин x, y , а вершина t — с другой; так как z и t не соединимы в L''' , то x и y тоже не соединимы в L''' . Но это противоречит условию леммы, согласно которому x и y k -неотрезаемы в L . Лемма доказана.

Таким образом, для нахождения какой-либо из основ k -го порядка данного k -сплетенного графа L надо найти в нем пару смежных k -неотрезаемых вершин и удалить одно из соединяющих их ребер, с полученным суграфом поступить аналогично и продолжать этот процесс до тех пор, пока не останется такой суграф, в котором каждые две смежные вершины k -отрезаемы (и который, в частности, не содержит петель, ибо все они тоже будут удалены нашим процессом). Полученный суграф является основой k -го порядка для L , поскольку этот суграф k -сплетен в силу леммы, а удаление из него любого ребра приводит к $(k - 1)$ -отрезаемости тех вершин, которые оно соединяло.

Основы первого порядка хорошо изучены (в § 22 мы называем их «каркасами»). Дальнейшее же изучение основ k -го порядка читатель найдет в упомянутой работе А. Коцига (5/1961); отметим лишь, что при $k > 1$ различные основы одного и того же порядка k в заданном графе могут обладать неодинаковым количеством ребер (пример для $k = 2$ приведен на рис. 59) и что проблема практически эффективного нахождения основ

(в том числе с наименьшим количеством ребер) по матрице инциденций или другой матрице графа L при $k > 1$ пока остается открытой.

§ 17. Метрика графа

Свойства k -отделимости, k -отрезаемости вершин и другие, рассмотренные в §§ 13—15, представляют в теории графов одно из важных направлений, основанных на понятии цепи; другим направлением, тоже целиком построенным на понятии цепи, является введение метрики и изучение метрических свойств графов.

Расстоянием $\rho_L(x, y)$ между вершинами x и y графа $L = (X, U; P)$ называется длина кратчайшего из маршрутов (и, значит, кратчайшей из простых цепей), соединяющих эти вершины; если x и y отделены в L , то $\rho_L(x, y) \doteq +\infty$. Функция $\rho = \rho(x, y) \doteq \rho_L(x, y)$, определенная на множестве всех пар вершин графа L и принимающая целые неотрицательные значения (к числу которых мы относим и бесконечное), заслуживает названия *метрики* графа, поскольку она удовлетворяет трем аксиомам Фреше:

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y],$$

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) = \rho(y, x)],$$

$$\forall x, y, z \in X [\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)]$$

выполнение первых двух аксиом тривиально, проверим третью (неравенство треугольника).

Если вершины x, y или вершины y, z отделены, то по крайней мере одна из двух величин $\rho(x, y)$ и $\rho(y, z)$ есть $+\infty$. Если же ни x и y , ни z и y не отделены, то пусть

$$x u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{\rho(x, y)-1} u_{\rho(x, y)} y;$$

и

$$y v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{\rho(y, z)-1} v_{\rho(y, z)} z$$

— какие-либо из кратчайших цепей, соединяющих эти пары вершин; маршрут

$$x u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{\rho(x, y)-1} u_{\rho(x, y)} y v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{\rho(y, z)-1} v_{\rho(y, z)} z$$

обладает длиной $\rho(x, y) + \rho(y, z)$ значит, длина $\rho(x, z)$ кратчайшей цепи между x и z не превышает $\rho(x, y) + \rho(y, z)$. Та-

ким образом, в обоих случаях неравенство треугольника выполнено.

Для нахождения метрики графа $L(X, U; P)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, достаточно знать его матрицу смежности R над булевой алгеброй $B\{0, 1\}$. Сопоставляя уже известные нам способы для установления существования маршрутов данной длины (§ 11) и для выявления компонент связности (§ 12) по матрице R , легко приходим к следующему выводу: *если*

$$(s_{ij}^{(k)}) \doteq (E + R)^k,$$

где E — единичная матрица порядка $n = |X|$, и

$$k_0 \doteq \min \{k/k \geq 0 \ \& \ (E + R)^k = (E + R)^{k+1}\},$$

то

$$\rho(x_i, x_j) = \begin{cases} \min \{\rho/0 \leq \rho \leq k_0 \ \& \ s_{ij}^{(\rho)} = 1\} \text{ при } s_{ij}^{(k_0)} = 1, \\ +\infty \text{ при } s_{ij}^{(k_0)} = 0. \end{cases}$$

Например, для графа, изображенного на рис. 60, имеем

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (E + R)^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E + R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (E + R)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (E + R)^3,$$

откуда $k_0 = 2$, и искомая матрица расстояний

$$(\rho(x_i, x_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty & +\infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ 2 & 2 & 1 & 0 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В какой мере граф определяется своей метрикой? Ясно, что метрика графа $L = (X, U; P)$ совпадает с метрикой его скелета $\hat{L} = (X, \hat{U})$ (см. § 5 в главе 1), т. е.

$$\forall x, y \in X [\rho_L(x, y) = \rho_{\hat{L}}(x, y)],$$

поэтому графы с одним и тем же скелетом обладают одной и той же метрикой. Наоборот, графы с одинаковой метрикой имеют общий скелет, ибо последний, будучи обыкновенным графом, однозначно определяется своей метрикой: его вершины смежны тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно 1. В свете этого можно при изучении метрических свойств графов ограничиваться обыкновенными графами; перенос результатов на графы общего вида является чисто фразеологической задачей.

Пусть на произвольном множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ задана метрика ρ , т. е. функция от пар его элементов, принимающая целые неотрицательные значения (включая $+\infty$) и удовлетворяющая трем аксиомам Фреше. Всегда ли существует граф (обыкновенный) $L = (X, U)$, метрика которого ρ_L совпадает с ρ ? Очевидно, не всегда: например, если $n = |X| = 4$, а метрика ρ на X задана матрицей

$$(\rho(x_i, x_j)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

то требуемого графа не существует, ибо, судя по единичным элементам матрицы $(\rho(x_i, x_j))$, это может быть только граф, показанный на рис. 61, но тогда расстояние между x_1 и x_4 было бы 3, а не 2. Положение вещей изменится, если при построении искомого графа L разрешить добавление к множеству X новых вершин. Именно, справедлива

Т е о р е м а 1 (Э. Д. Стоцкий, 1964). Пусть на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ задана метрика ρ , принимающая целые неотрицательные значения (включая $+\infty$). Всегда существует обыкновенный граф $L = (Y, U)$, такой что $X \subseteq Y$ и ρ_L совпадает

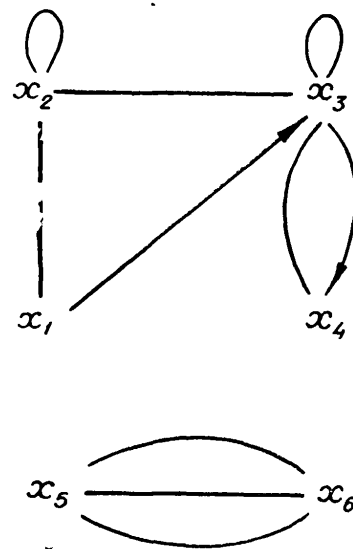


Рис. 60

с ρ на X , т. е.

$$\forall x, y \in X [\rho_L(x, y) = \rho(x, y)].$$

Доказательство. Построим граф $L' \doteq (X, U')$, полагая

$$\widetilde{xy} \in U' \Leftrightarrow x, y \in X \ \& \ \rho(x, y) = 1.$$

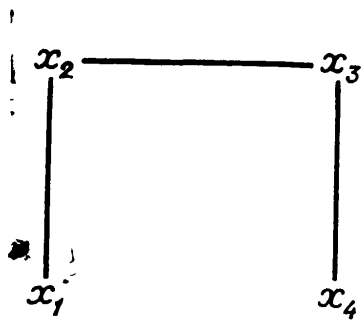


Рис. 61.

Если $\rho_{L'} = \rho$ (на X), то граф L' — иско-
мый. Допустим теперь, что $\rho_{L'} \neq \rho$, т. е.
 $\rho_{L'}(x_0, y_0) \neq \rho(x_0, y_0)$ для какой-то пары
вершин $x_0, y_0 \in X$; при этом, очевидно,
 $\rho_{L'}(x_0, y_0) > 1$ и $\rho(x_0, y_0) > 1$.

Имеем

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) \leq \rho_{L'}(x, y)],$$

ибо если

$$xu_1x_1u_2x_2 \dots x_{l-1}u_ly,$$

где $l = \rho_{L'}(x, y)$, — кратчайшая цепь между x и y в L' , то, вви-
ду простоты этой цепи,

$$\rho_{L'}(x, x_1) = 1 = \rho(x, x_1), \quad \rho_{L'}(x_1, x_2) = 1 = \rho(x_1, x_2), \dots,$$

$$\rho_{L'}(x_{l-1}, y) = 1 = \rho(x_{l-1}, y),$$

и для $\rho(x, y)$ повторным применением аксиомы треугольника
получаем

$$\rho(x, y) \leq l = \rho_{L'}(x, y).$$

В частности, $\rho(x_0, y_0) < \rho_{L'}(x_0, y_0)$.

Образуем объемлющий граф $L'' \doteq (X'', U'')$ для L' , соеди-
няя вершины x_0 и y_0 простой цепью Q длины $\rho(x_0, y_0)$, состав-
ленной из новых (за исключением x_0 и y_0) вершин и новых звень-
ев, и покажем, что

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) \leq \rho_{L''}(x, y) \leq \rho_{L'}(x, y)].$$

Во-первых, от сделанного добавления новых вершин и звень-
ев длина цепи между старыми вершинами не может возрасти,
поэтому всегда $\rho_{L''}(x, y) \leq \rho_{L'}(x, y)$. Во-вторых, если для неко-
торой пары вершин $x, y \in X$ расстояние $\rho_{L''}(x, y) < \rho_{L'}(x, y)$,
то это означает, что кратчайшая цепь Q_{xy} между x и y в графе
 L'' содержит добавленную цепь Q ; пусть, например, вершина

x_0 предшествует y_0 на цепи Q_{xy} (считая от x), тогда

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y) \leq \rho_{L'}(x, x_0) + \\ &+ \rho(x_0, y_0) + \rho_{L'}(y_0, y) = \rho_{L''}(x, x_0) + \rho_{L''}(x_0, y_0) + \\ &+ \rho_{L''}(y_0, y) = \rho_{L''}(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, переход от графа L' к графу L'' приводит к уменьшению количества тех пар вершин множества X , для которых расстояние в графе отлично от расстояния, определяемого заданной метрикой ρ . Продолжая процесс присоединения новых цепей, мы, ввиду конечности множества X , в конце концов получим такой граф $L = (Y, U)$, для которого $X \subseteq Y$ и $\rho_L = \rho$ на X ; граф L — обыкновенный, так как длина каждой добавленной цепи больше единицы. Значит, L и есть искомый граф.

Имеет смысл пытаться реализовать данную метрику ρ на X таким графом $L = (Y, U)$, который обладает наименьшим возможным числом вершин или ребер, т. е. пытаться обойтись минимальным (в каком-то смысле) добавлением элементов к $L' = (X, U')$; вопросами такого рода занимается Э. Д. Стоцкий (1964). Возникают также разнообразные задачи о возможности реализации данной метрики графами того или иного специального вида; решение одной из таких задач мы рассмотрим в следующей главе (см. § 21). А сейчас остановимся на некоторых метрических характеристиках графа и его вершин.

Пусть $\rho = \rho(x, y)$ — метрика графа $L = (X, U; P)$. Вершина x_0 называется *центральной*, если

$$\forall x \in X [\max_{y \in X} \rho(x, y) \geq \max_{y \in X} \rho(x_0, y)],$$

и *периферийной*, если

$$\forall x \in X [\max_{y \in X} \rho(x, y) \leq \max_{y \in X} \rho(x_0, y)].$$

В силу того, что множество X конечно, а значение $+\infty$ является допустимым для ρ , центральные и периферийные вершины всегда существуют. Величина

$$r(L) \doteq \min_{x \in X} \max_{y \in X} \rho(x, y)$$

носит название *радиуса*, а величина

$$d(L) \doteq \max_{x, y \in X} \rho(x, y)$$

— диаметра графа L . Например, у графа L , изображенного на рис. 62, вершины x_4 и x_{10} — центральные, вершины x_1, x_7, x_8, x_{13} — периферийные, $r(L) = 4$, $d(L) = 7$. У несвязного графа $\max_{y \in X} \rho(x, y) = +\infty$ для любой вершины x , поэтому каждая его вершина является одновременно как центральной, так и периферийной, а радиус и диаметр бесконечны.

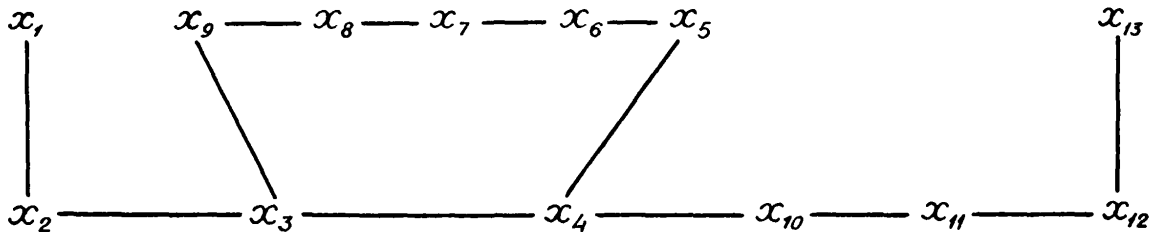


Рис. 62.

Т е о р е м а 2 (Жордана) *. Пусть в связном обыкновенном графе $L = (X, U)$ с $|X| \geq 2$ некоторая центральная вершина x_0 обладает тем свойством, что каждое инцидентное ей ребро представляет собой перешеек **. Тогда L может, кроме x_0 , иметь самое большее еще одну центральную вершину и эта вершина обязательно смежна с x_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через

$$L_1 = (X_1, U_1), L_2 = (X_2, U_2), \dots, L_k = (X_k, U_k)$$

компоненты связности подграфа, полученного из L удалением вершины x_0 (рис. 63). Так как x_0 — центральная, то, в силу особенности структуры графа L , хотя бы для одного значения $i = 1, 2, \dots, k$ имеем

$$\max_{y \in X_i} \rho(x_0, y) = r(L) < +\infty;$$

например, пусть $r(L) = \max_{y \in X_1} \rho(x_0, y)$. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $k = 1$. Тогда $|X_1| = 1$, ибо иначе для вершины $y_0 \in X_1$, смежной с x_0 , было бы $\max_{x \in X} \rho(y_0, x) = r(L) - 1 < r(L)$. Граф L состоит из двух вершин, соединенных одним ребром, и для него справедливость утверждения теоремы тривиальна.

(*) См., например, К. Берж (1/1958, русск. 1962, глава 20).

***) См. конец §13.

Случай 2: $k \geq 2$ и для какого-либо из значений $i = 2, 3, \dots, k$, скажем для $i = 2$,

$$\max_{y \in X_2} \rho(x_0, y) = r(L).$$

Тогда никакая вершина y_0 , отличная от x_0 , не может быть в L центральной, ибо расстояние от y_0 до периферийной вершины графа L , принадлежащей тому из множеств X_1, X_2 , которое не содержит y_0 , больше радиуса $r(L)$.

Случай 3: $k \geq 2$ и при всех $i = 2, 3, \dots, k$

$$\max_{y \in X_i} \rho(x_0, y) < r(L).$$

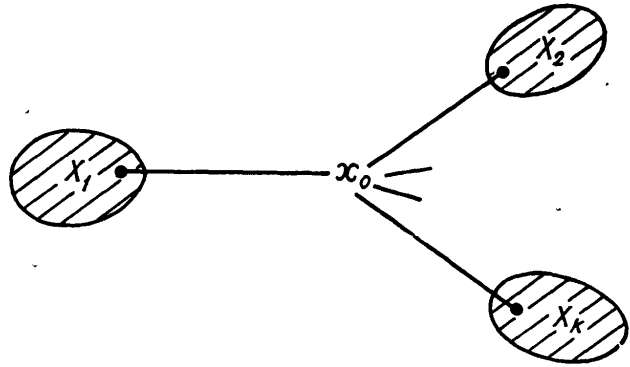


Рис. 63.

Пусть y_0 — вершина из X_1 , смежная с x_0 ; тогда, очевидно,

$$\max_{y \in X_1} \rho(y_0, y) = r(L) - 1.$$

Среди чисел $\max_{y \in X_i} \rho(x_0, y)$ при $i = 2, 3, \dots, k$ заведомо есть равное $r(L) - 1$, ибо если бы все эти числа не превышали $r(L) - 2$, то $\max_{y \in X} \rho(y_0, y)$ был бы равен $r(L) - 1$, т. е. число $r(L)$ не было бы радиусом (а вершина x_0 — центральной) графа L . Допустим, например, что

$$\max_{y \in X_2} \rho(x_0, y) = r(L) - 1.$$

Вершина y_0 — центральная, так как при всех $y \in X$

$$\rho(y_0, y) \leq r(L)$$

и для периферийных вершин графа L , принадлежащих множеству X_2 , достигается равенство. Никакая же вершина $z \in X \setminus \{x_0, y_0\}$ не может быть центральной, ибо если $z \in X_1$, то расстояние от z до той периферийной вершины, которая находится в X_2 , превышает $d(L)$, а если $z \in X_i$ ($2 \leq i \leq k$), то расстояние от z до периферийной вершины, лежащей в X_1 , больше $r(L)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для произвольных униграфов без петель (т. е. графов, полученных из обыкновенных ориентацией неко-

торых звеньев) теорема Жордана сохраняет силу в неизменной формулировке. Перефразировку ее для графов $L = (X, U; P)$ общего вида предоставим читателю.

В виде упражнения предлагаем доказать, что периферийная вершина связного графа не может быть его точкой сочленения.

Дальнейшие результаты, относящиеся к радиусу и диаметру графа, имеются у О. Оре (4/1962, русск. 1968, глава 2), Дж. Муна (3/1965) и В. Г. Визинга (6/1967).

§ 18. Обходы графа

Среди задач, связанных с непрерывным движением по какому-либо геометрическому или другим объектам с соблюдением некоторых требований, имеется немало таких, которые по сути дела носят дискретный характер. Например, маршрут путешественника без карты в лабиринте с точностью до несущественных деталей определяется последовательностью проходимых коридоров и перекрестков. Многие из таких задач удобно ставить и решать на языке теории графов.

Пусть x и y — две различные вершины данного графа $L = (X, U; P)$. Требуется выяснить, отделены ли вершины x и y в L , и если нет, то найти какую-либо соединяющую их простую цепь. Один из способов решения этой задачи был изложен в § 11; соответствующий алгоритм вполне эффективен с точки зрения числа операций, однако не во всех приложениях является самым удобным: например, путешественник, заблудившийся в лабиринте и изрядно проголодавшийся, заинтересован вовсе не в том, чтобы из всех путей к выходу ценой долгих поисков найти кратчайший, а в том, чтобы найти какой-нибудь путь к выходу, но в процессе поисков пройти как можно меньшее суммарное расстояние; аналогичная ситуация встречается и в ряде задач совсем другого конкретного содержания. Мы опишем еще один известный алгоритм.

С помощью индуктивного процесса строим в графе L некоторый маршрут следующим образом. В качестве начальной вершины x_0 берем x . Пусть уже построен маршрут

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{i-1} u_i x_i$$

длины $k \geq 0$. В случае $x_k = y$ процесс прекращаем, а в случае $x_k \neq y$ поступаем так. Если в L имеется ребро u , которое соединяет x_k с некоторой вершиной z , отличной от всех

$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$, то добавим к построенному маршруту ребро $u_{k+1} \doteq u$ и вершину $x_{k+1} \doteq z$ (при наличии более чем одного ребра с указанным свойством за u берем любое из них). Если такого ребра u нет, то в случае $x_k = x_0$ процесс прекращаем, а в случае $x_k \neq x_0$ удлиняем маршрут, полагая $u_{k+1} \doteq u_p$ и $x_{k+1} \doteq x_{p-1}$, где p — наименьшее из таких чисел, для которых $x_p = x_k$.

Можно показать, что описанный процесс всегда оборвется и мы получим некоторый маршрут

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

длины $l \leq 2m(L)$, где $x_l = x_0 (=x)$, если вершины x и y отделены в L , и $x_l = y$, если x и y не отделены. Все это становится совершенно очевидным после рассмотрения любого нетривиального примера, «какой сама рука начертит», а строгое обоснование предоставим читателю.

В случае $x_l = y$ из построенного маршрута надо еще выделить простую цепь; это нетрудно сделать тем способом, с помощью которого доказывается лемма § 11,

но в данном случае проще всего воспользоваться легко устанавливаемым фактом, что в искомую цепь войдут все те и только те ребра маршрута, которые фигурируют в нем ровно по одному разу.

Например, один из вариантов «слепого» поиска простой цепи из x в y в графе L на рис. 64 выглядит следующим образом:

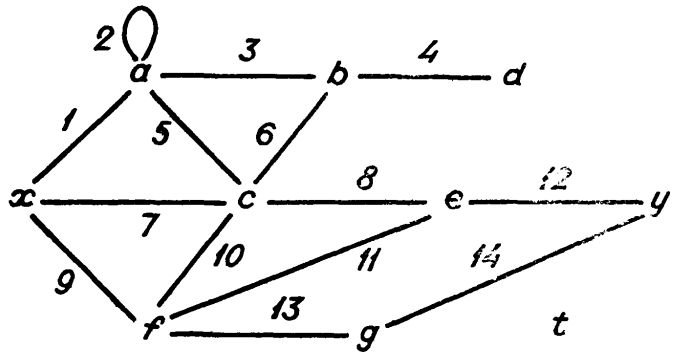


Рис. 64.

$$\begin{aligned}
 &x, \\
 &x1a, \\
 &\dots \\
 &x1a5c\bar{10}f\bar{11}e\bar{12}y,
 \end{aligned}$$

откуда получаем простую (не кратчайшую) цепь

$$x1a5c\bar{10}f\bar{11}e\bar{12}y.$$

Одна из попыток найти несуществующую цепь из x в t приводит

к циклическому маршруту

$$x_1 a_5 c_1 \bar{0} f_1 \bar{3} g_1 \bar{4} y_1 \bar{2} e_1 \bar{2} y_1 \bar{4} g_1 \bar{3} f_1 \bar{0} c_6 b_4 d_4 b_6 c_5 a_1 x.$$

Переходим к другим задачам обхода.

Цепь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

в графе $L = (X, U; P)$ называется *эйлеровой цепью*, если множество ее ребер совпадает с U ; при $x_0 = x_l$ имеем *эйлеров цикл*. Ясно, что если граф L несвязен, то он может иметь (но не обязательно имеет) эйлерову цепь лишь в том случае, когда все его компоненты связности, кроме, быть может, одной, представляют собой голые вершины. Это дает нам полное право ограничиться исследованием эйлеровых цепей и эйлеровых циклов только у связных графов. Критерий существования был дан еще самим Л. Эйлером (1736), но мы изложим другое доказательство, основанное на алгоритме Хоанг Туи (2/1964) для практического выявления таких цепей.

Т е о р е м а 1. Пусть x и y — две вершины (не обязательно различные) связного графа $L = (X, U; P)$. Для существования в L эйлеровой цепи, идущей из x в y , необходимо и достаточно, чтобы все отличные от x и y вершины L обладали четными валентностями, а валентности вершин x и y в случае $x \neq y$ были нечетными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия очевидна: в каждую вершину, отличную от x и y , эйлерова цепь должна зайти столько же раз, сколько выйти; при $x \neq y$ из вершины x эта цепь должна выйти на один раз больше, чем войти, а в y цепь должна войти на один раз больше, чем выйти. При этом все ребра надо пройти ровно по одному разу.

Пусть теперь условия теоремы соблюдены. Мы опишем алгоритм Хоанг Туи и покажем, что таким образом всегда получается некоторая эйлерова цепь, идущая из x в y .

1) Находим простую цепь Q , соединяющую x с y ; если ее длина больше нуля (т. е. если $x \neq y$, иначе говоря, искомая эйлерова цепь не является циклом), то все ребра цепи Q помечаем значком 0.

2) Если в L имеются еще непомеченные ребра, то среди них выбираем такое u , которое инцидентно хотя бы одной вершине цепи Q ; в суграфе, порожденном всеми непомеченными ребрами, выявляем простой цикл, содержащий u (например, с помощью алгоритма § 11), и все ребра этого цикла помечаем значком 1.

3) Если в L остались непомеченные ребра, то из них выбираем такое v , которое смежно хотя бы с одним помеченным; в суграфе, порожденном непомеченными ребрами, выявляем простой цикл, содержащий v , и все ребра этого цикла помечаем значком 2. И т. д.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не будут помечены все ребра L . После этого строим маршрут следующим образом. В качестве начальной вершины берем $x_0 \doteq x$. Если уже построен маршрут

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{k-1} u_k x_k$$

($k \geq 0$), в котором все ребра u_1, u_2, \dots, u_k различны, то в случае $k = t(L)$ процесс прекращаем, а в случае $k < t(L)$ среди ребер, инцидентных вершине x_k и не совпадающих ни с одним из u_1, u_2, \dots, u_k , выбираем такое, которое помечено наибольшим значком (если таких ребер несколько, то берем любое из них) и добавляем его к маршруту в качестве u_{k+1} , а за x_{k+1} берем ту вершину, с которой выбранное ребро соединяет вершину x_k (возможен и случай $x_{k+1} = x_k$, когда u_{k+1} — петля).

Докажем, что описанный процесс действительно осуществим и результирующий маршрут M будет эйлеровой цепью между x и y .

Цепь Q в пункте 1) существует ввиду связности графа L .

В пунктах 2), 3) и подразумеваемых следующих среди непомеченных ребер всегда найдется такое, которое инцидентно уже помеченной части графа — это опять вытекает из связности. Покажем, что всякое такое ребро w — цикловое в суграфе L' , который порожден непомеченными (на данном этапе) ребрами. В самом деле, из условия теоремы следует, что все вершины L' обладают четными валентностями; но если бы ребро w было в L' перешейком, то суммы валентностей вершин в каждой из двух частей суграфа L' , соединенных между собой этим ребром, были бы нечетны (ибо при суммировании валентностей вершин в каждой части все ее ребра, кроме w , засчитываются дважды, а w — один раз), что невозможно, так как валентности всех вершин L' четны.

Согласно правилу построения маршрута, все его ребра различны, и нам остается лишь показать, что процесс построения обрывается именно тогда, когда построен маршрут M длины $t(L)$, и что последней вершиной маршрута будет именно y .

Это утверждение мы докажем индукцией по величине k наибольшего из значков, которыми помечены ребра графа. Для $k = 0$ оно тривиально, ибо данный граф L тогда сводится к одной простой цепи. Пусть оно уже доказано для всех слу-

чаев, когда граф L и его вершины x, y удовлетворяют условиям теоремы, а разметка ребер произведена так, что наибольший значок равен $k \geq 0$; докажем справедливость утверждения и в случае, если наибольший значок есть $k + 1$.

Через L' обозначим суграф, полученный из L удалением ребер со значком $k + 1$, а через L'' — подграф суграфа L' (т. е. часть исходного графа L), остающийся после удаления из L' голых вершин; если $n(L') = 1$, то полагаем $L'' \doteq L'$. Обе вершины x и y принадлежат L'' , ибо в случае $x \neq y$ они инцидентны ребрам со значком 0 и в силу $k + 1 \geq 1$ не могли оказаться голыми в L' , а в случае же $x = y$ & $k + 1 = 1$ вершина $x = y$ сохранится согласно определению L'' . Далее, L'' связан, так как при наличии у суграфа L' хотя бы двух непустых компонент мы всегда смогли бы указать такое j , меньшее k , что ребра со значком j и ребра со значком $j + 1$ находятся в разных компонентах L' , а это противоречит правилу присвоения значков (согласно которому помечаемое ребро всегда смежно с каким-либо из уже помеченных *). Наконец, валентности вершин в L'' удовлетворяют условию теоремы, поскольку это условие выполнено в исходном графе L , а удаление всех ребер некоторого простого цикла и последующее удаление голых вершин не меняет четности валентностей остальных вершин. Согласно допущению индукции, всякий маршрут, построенный по указанному выше правилу выбора ребра с наибольшим значком в размеченном графе L'' , содержит все ребра L'' и оканчивается в вершине y .

Вернемся к рассмотрению маршрута M в исходном графе L . Так как $k + 1 \geq 1$, то ребра со значком $k + 1$ образуют простой цикл C , причем хотя бы одно из этих ребер смежно с некоторым ребром, значок которого $\leq k$ (или, в случае $x = y$ & $l(Q) = 0$, инцидентно вершине $x = y$); поэтому маршрут M , в силу правила его построения, necessarily содержит все ребра C и эти ребра идут в M подряд. Удаляя из M ребра цикла C , получим маршрут M' , который полностью присутствует в части L'' и в этой части построен тоже с соблюдением всех правил. Согласно доказанному выше, M' содержит все ребра L'' и оканчивается в вершине y ; значит, первоначальный маршрут M , который можно рассматривать как результат вставки цикла C в маршрут M' , содержит все ребра графа L и тоже оканчивается в y . Теорема доказана.

*) Или с вершиной $x = y$, если $k + 1 = 1$ и $l(Q) = 0$.

бы количество цепей в системе было наименьшим. Покажем, как свести эту задачу к уже рассмотренной.

Обозначим через

$$L_1 = (X_1, U_1; P), L_2 = (X_2, U_2; P), \dots, L_k = (X_k, U_k; P)$$

непустые (т. е. не сводящиеся к голым вершинам) компоненты графа L , и пусть X^i — множество тех вершин компоненты

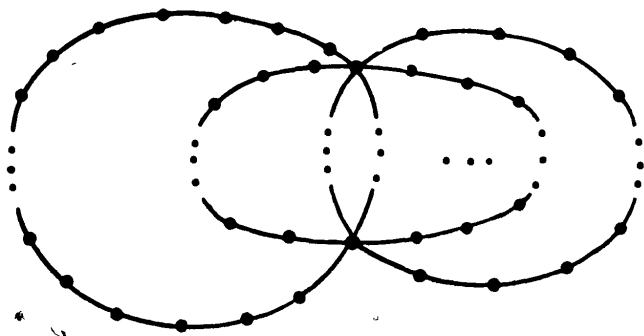


Рис. 66.

L_i , которые обладают нечетными валентностями ($i = 1, 2, \dots, k$). Так как сумма валентностей всех вершин компоненты четна (равна $2|U_i|$), то $|X^i|$ четно; разобьем вершины множества X^i произвольным образом на пары и вершины каждой пары соединим новым ребром. В полученном сверхграфе L'_i

для L_i все вершины уже имеют четные валентности, и по теореме 1 существует эйлеров цикл C_i . Удаляя из L'_i все $\frac{1}{2}|X^i|$ добав-

ленных ребер, разобьем C_i на $\frac{1}{2}|X^i| - 1$ цепей, попарно не имеющих общих ребер и в совокупности содержащих все ребра множества U_i . Прделав так с каждой из k компонент L_i ,

мы построим систему, содержащую $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |X^i| - k$ цепей, которая

и будет искомой (тот факт, что обойтись меньшим количеством цепей невозможно, предлагаем доказать читателю). Можно было бы показать, что все решения задачи получаются за счет различных способов разбиения множеств X^i на пары (и что, например, введение вспомогательных ребер не только внутри компонент L_i , но и между ними, ничего нового не даст).

Другое обобщение состоит в том, чтобы обойти все ребра связного графа L , пройдя по каждому не более двух раз. Тривиальное решение — заменить каждую непетлю парой параллельных ребер и в полученном графе найти эйлеров цикл; можно, однако, резко сократить число проходимых дважды ребер, если в L сначала выявить систему попарно непересекающихся простых цепей, каждая из которых соединяет две вершины нечетной валентности, а затем дублировать только ребра этих цепей.

Рассмотрим, наконец, задачи об обходах гамильтоновского типа, которые, несмотря на некоторое сходство с эйлеровыми задачами, оказываются гораздо сложнее их. Простая цепь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

графа $L = (X, U; P)$, содержащая все его вершины, называется *гамильтоновой цепью*; при $x_0 = x_l$ имеем *гамильтонов цикл*. Тривиальным необходимым условием существования хотя бы одной такой цепи или цикла является связность графа L ; в случае цикла необходимо еще отсутствие точек сочленения (см.



Рис. 67.

§ 15), а в случае цепи такие точки могут быть, но блоки графа L должны иметь расположение, показанное на рис. 67 слева (в примерах справа уже ясно, что гамильтоновой цепи нет). Критерии существования гамильтоновой цепи и гамильтонова цикла в графах общего вида пока не найдены. Переходя к выводу некоторых достаточных условий, принадлежащих О. Оре (4/1962, русск. 1968, глава 3), заметим, что если речь идет только о существовании, а не о полном обзоре, то граф L в случае $n(L) \geq 3$ можно заменить его скелетом \hat{L} (см. § 5 в главе 1), т. е. можно без существенного ограничения общности рассматривать только обыкновенные графы.

Простая цепь графа L называется *максимальной*, если она не является частью никакой более длинной простой цепи в L ; самая длинная из максимальных простых цепей называется *наибольшей*; через $s(x) \doteq s_L(x)$, как прежде, будем обозначать степень вершины x графа L (см. § 2 в главе 1).

Т е о р е м а 2 (Оре). Пусть в связном обыкновенном графе $L = (X, U)$ имеется наибольшая простая цепь

$$Q \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

такая что $l \geq 2$ и $s(x_0) + s(x_l) \geq l + 1$. Тогда в L существует гамильтонов цикл.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем существование в L простого цикла C длины $l + 1$, содержащего все вершины цепи Q (и только эти вершины).

Так как цепь Q — наибольшая и, следовательно, максимальная, то ее концевые вершины x_0 и x_l могут быть смежны лишь с вершинами этой же цепи. При $l = 2$ в силу $s(x_0) + s(x_l) \geq 3$ вершины x_0 и x_l смежны друг с другом, и требуемый цикл (треугольник) находится сразу. При $l \geq 3$ среди ребер u_2, u_3, \dots, u_{l-1} цепи Q есть такое u_i , что x_{i-1} смежна с x_l , а x_i смежна

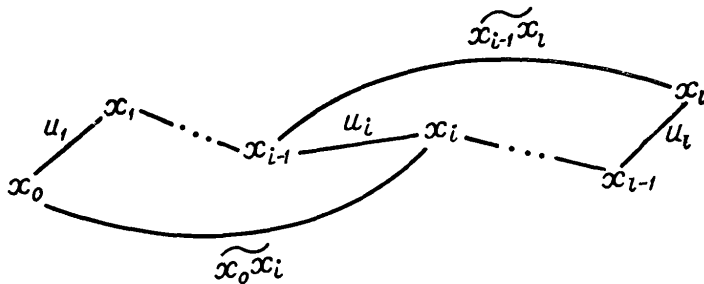


Рис. 68.

с x_0 , ибо если бы для любого u_i ($i = 2, 3, \dots, l - 1$) либо x_{i-1} была несмежна с x_l , либо x_i несмежна с x_0 , то общее количество ребер, инцидентных вершинам x_0 и x_l , как нетрудно подсчитать, было бы меньше $l + 1$, вопреки условию теоремы. Требуемый

цикл C состоит из отрезка цепи Q от x_0 до x_{i-1} , ребра $x_{i-1}x_l$, отрезка обращенной цепи Q от x_l до x_i и ребра x_0x_i (рис. 68).

Теперь покажем, что найденный цикл C является гамильтоновым. В самом деле, если C содержит не все вершины графа L , то, в силу связности L , имеется такое ребро u , один конец которого принадлежит C , а другой не принадлежит. Заменяя одно из двух ребер цикла C , смежных с u , этим ребром u (и добавляя вторую концевую вершину этого ребра), мы превратим цикл C в простую цепь длины больше l , что противоречит условию теоремы.

Т е о р е м а 3. Если для любых двух несмежных различных вершин x и y связного обыкновенного графа L с $n(L) \geq 3$

$$s(x) + s(y) \geq n(L), \quad (*)$$

то L имеет гамильтонов цикл; заменяя (*) более слабым предположением

$$s(x) + s(y) \geq n(L) - 1, \quad (**)$$

можно гарантировать существование в L гамильтоновой цепи. Первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 2, так как длина наибольшей цепи графа L не превосходит $n(L) - 1$. Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что при условии (**) всякая наибольшая простая цепь в L — гамильтонова.

Допустим противное, что некоторая наибольшая простая цепь

$$Q \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

графа L содержит не все его вершины. Обозначим через L' подграф графа L , порожденный множеством всех вершин цепи Q . Из того, что Q — наибольшая в L , как и при доказательстве теоремы 2 выводится $s_{L'}(x_0) = s_L(x_0)$ и $s_{L'}(x_l) = s_L(x_l)$; но $n(L') < n(L)$, поэтому

$$s_{L'}(x_0) + s_{L'}(x_l) \geq n(L') \geq l + 1.$$

В силу теоремы 2, подграф L' имеет гамильтонов цикл C . Так как исходный граф L связан и не все его вершины принадлежат C , то в L существует ребро, один конец которого принадлежит, а другой не принадлежит циклу C ; тем же способом, что и при доказательстве теоремы 2, построим в L простую цепь длины $l + 1$, что невозможно. Теорема доказана.

Из теоремы 3 сразу вытекает результат, ранее полученный Д. Ньюманом (1958) и Г. Дираком (6/1959) другим путем:

С л е д с т в и е. Если L — связный обыкновенный граф с $n(L) \geq 3$, такой что для всех его вершин x

$$s(x) \geq \frac{1}{2} n(L),$$

то L обладает гамильтоновым циклом.

В дальнейшем О. Оре (3/1961) нашел еще одно достаточное условие существования гамильтонова цикла, которое затем было обобщено П. Эрдемем (2/1962) следующим образом*.

Пусть $1 \leq k < \frac{1}{2} n$ и

$$l_k \doteq 1 + \max_{k \leq t < \frac{1}{2} n} \{C_{n-t}^2 + t^2\};$$

тогда всякий обыкновенный связный граф с n вершинами и l_k ребрами, обладающий свойством

$$\forall x \in X [s(x) \geq k],$$

содержит гамильтонов цикл; при этом число l_k нельзя уменьшить.

У полного n -вершинного графа F_n ($n \geq 3$) все гамильтоновы циклы находятся непосредственно: они взаимно однозначно

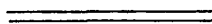
*) При этом используется результат, который установил Л. Поша (1/1962).

соответствуют всевозможным $n!$ способам упорядочения вершин, а количество этих циклов, считааемых с точностью до выбора начала и направления обхода, равно, очевидно, $\frac{1}{2}(n-1)!$.

Для графов Кёнига $L = (X, Y; U)$ с $|X| = |Y| \doteq p$ (см. § 6 в главе 1) Дж. Мун и Л. Мозер (1/1963) установили следующее достаточное условие наличия гамильтонова цикла: каково бы ни было подмножество $X' \subseteq X$, степень каждой вершины которого $\leq |X'|$, любая вершина $y \in Y$ степени $\leq p - |X'|$ должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из X' . Упомянем еще работу Л. Поши (2/1963—1964), один из результатов которой выражает достаточное условие существования гамильтонова цикла, включающего наперед выделенную в графе систему цепей попарно без общих вершин.

Граф L называется *гамильтоново связным*, если любая пара его различных вершин соединяется гамильтоновой цепью. О. Оре (5/1963) показал, что наименьшее число k , для которого всякий n -вершинный обыкновенный граф с k ребрами гамильтоново связан, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 3$, а Дж. Мун (2/1965) нашел, что всякий обыкновенный гамильтоново связный граф с $n \geq 4$ вершинами имеет не менее $\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ ребер.

Гамильтоновы циклы, в отличие от эйлеровых, можно с точностью до выбора начала и направления обхода считать суграфами специального вида, и вопросы их существования, выявления и подсчета естественно становятся в ряд аналогичных задач, относящихся к суграфам других видов. Непосредственным обобщением гамильтоновых циклов служат факторы, т. е. однородные суграфы (см. начало § 8 в главе 1), которые будут подробно изучаться во второй части книги. Там же мы встретимся и с такими любопытными и важными обходами графа, когда шаги по ребрам чередуются с шагами по пустоте.



ЦИКЛОМАТИКА ГРАФОВ

§ 19. Цикломатическое число

Важной числовой характеристикой графа $L = (X, U; P)$, не зависящей от направления дуг и инвариантной относительно изоморфизма, является цикломатическое число * $\lambda(L)$, определяемое следующим образом:

$$\lambda(L) \doteq m(L) - n(L) + \kappa(L),$$

где $n(L) = |X|$ — количество вершин, $m(L) = |U|$ — количество ребер, $\kappa(L)$ — число компонент связности графа L . Если $L' \doteq (X, U \setminus \{u\}; P)$ — суграф, полученный из L удалением ребра u , то, как мы уже знаем (см. следствие 2 из теоремы Менгера в конце § 13 главы 2),

$$\kappa(L') = \begin{cases} \kappa(L) + 1, & \text{когда } u \text{ — перешеек в } L; \\ \kappa(L), & \text{когда } u \text{ — цикловое ребро в } L. \end{cases}$$

Так как $n(L') = n(L)$ и $m(L') = m(L) - 1$, то отсюда следует, что

$$\lambda(L') = \begin{cases} \lambda(L), & \text{если } u \text{ — перешеек в } L; \\ \lambda(L) - 1, & \text{если } u \text{ — цикловое ребро в } L. \end{cases}$$

Допустим, что мы превратили данный граф L в пустой $E = (X, \emptyset)$, последовательно удалив все $m(L)$ ребер. При каждом удалении цикломатическое число могло только уменьшиться, поэтому $\lambda(L) \geq \lambda(E)$; с другой стороны, $\lambda(E) = 0$, так как $m(E) = 0$ и $\kappa(E) = n(E)$. Следовательно, всегда $\lambda(L) \geq 0$.

*) Если граф рассматривать как клеточный топологический комплекс (см. ниже, § 47 в главе 6), то цикломатическое число есть не что иное, как одномерное число Бетти. Однако для наших целей удобнее подойти к этой характеристике иначе, не опираясь на комбинаторную топологию.

Далее, ясно, что $\lambda(L) = 0$ в том и только том случае, если на каждом этапе удаляемое ребро было перешейком того графа, из которого его удаляли, т. е. если в исходном графе L не имелось ни одного цикла. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 1. *Цикломатическое число любого графа неотрицательно; оно равно нулю тогда и только тогда, когда граф не содержит циклов.*

Непосредственно из определения цикломатического числа вытекает

Т е о р е м а 2. *Если L_1, L_2, \dots, L_x — компоненты связности графа L , то $\lambda(L) = \sum_{i=1}^x \lambda(L_i)$.*

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lambda(L) &= m(L) - n(L) + \kappa(L) = \sum_{i=1}^x m(L_i) - \sum_{i=1}^x n(L_i) + \kappa = \\ &= \sum_{i=1}^x [m(L_i) - n(L_i) + 1] = \sum_{i=1}^x \lambda(L_i). \end{aligned}$$

В следующих параграфах мы полностью выясним смысл цикломатического числа и увидим, сколь важной характеристикой графа оно является. А сейчас остановимся на одном частном результате, который, будучи интересен и сам по себе, понадобится нам во второй части книги и для получения которого достаточно уже имеющихся у нас сведений.

Если известны число вершин $n = n(L)$ и число ребер $m(L)$ обыкновенного графа L , то не составляет никакого труда выяснить, является этот граф полным или нет. Именно, L — полный ($L = F_n$) тогда и только тогда, когда

$$m(L) = \frac{1}{2} n(L)[n(L) - 1].$$

Тривиально решается вопрос о полноте обыкновенного графа и тогда, когда не дано число его вершин, но зато известны количество ребер и цикломатическое число, а также известно заранее, что граф связан, ибо по этим данным сразу же находится количество вершин:

$$n(L) = m(L) - \lambda(L) + 1.$$

Менее очевидна, однако, следующая

Т е о р е м а 3. Обыкновенный граф L без изолированных вершин является полным тогда и только тогда, когда

$$[m(L) - \lambda(L)]^2 = m(L) + \lambda(L).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $L = F_n$, то $n(L) = n$, $m(L) = \frac{1}{2}n(n-1)$, $\kappa(L) = 1$, откуда $\lambda(L) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Подставляя выражения для $m(L)$ и $\lambda(L)$ в доказываемое равенство, получаем тождество относительно n , т. е. для полных графов равенство всегда имеет место.

Обозначим теперь

$$\Delta(L) \doteq [m(L) - \lambda(L)]^2 - [m(L) + \lambda(L)]$$

и покажем, что для всякого неполного графа L без изолированных вершин $\Delta(L) > 0$, т. е. равенство не выполняется.

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_\kappa$ — компоненты связности графа L . Если среди них имеется хотя бы одна неполная, то, соединяя пару несмежных вершин в этой компоненте новым ребром, получим граф L' , для которого $\Delta(L') < \Delta(L)$, ибо $m(L') - \lambda(L') = n(L') - \kappa(L') = n(L) - \kappa(L) = m(L) - \lambda(L)$, но $m(L') > m(L)$ и $\lambda(L') \geq \lambda(L)$ *. Повторяя эту операцию, мы в конце концов придем к такому графу M , у которого все компоненты связности $M_1, M_2, \dots, M_\kappa$ являются полными графами и $\Delta(M) < \Delta(L)$. Осталось показать, что $\Delta(M) > 0$, если только $\kappa > 1$.

Ввиду полноты графов M_i , имеем, на основании уже доказанной части теоремы,

$$\Delta(M_i) = [m(M_i) - \lambda(M_i)]^2 - [m(M_i) + \lambda(M_i)] = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, \kappa).$$

Но

$$m(M) = \sum_{i=1}^{\kappa} m(M_i), \quad \lambda(M) = \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda(M_i)$$

(теорема 2), следовательно,

$$\Delta(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} [m(M_i) - \lambda(M_i)] \right\}^2 - \sum_{i=1}^{\kappa} [m(M_i) + \lambda(M_i)].$$

*) Даже $\lambda(L') > \lambda(L)$, поскольку новое ребро не может оказаться перешейком в графе L' .

А так как, в силу условия, граф M не может содержать изолированных вершин, то $m(M_i) > \lambda(M_i)$ и, в силу $\kappa > 1$,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} [m(M_i) - \lambda(M_i)] \right\}^2 > \sum_{i=1}^{\kappa} [m(M_i) - \lambda(M_i)]^2,$$

откуда

$$\Delta(M) > \sum_{i=1}^{\kappa} \Delta(M_i) = 0,$$

что и требовалось.

§ 20. Графы без циклов

Для более полной характеристики графов с нулевым цикломатическим числом полезна следующая

Т е о р е м а 1. *Высказывания (о произвольном L):*

- (1) *граф L не содержит циклов;*
- (2) *граф L не содержит простых циклов;*
- (3) *никакие вершины x и y (в указанном порядке *) графа L не могут соединяться более, чем одной цепью;*
- (4) *все цепи графа L — простые равносильны друг другу.*

Докажем, что (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (3). Если

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l \quad \text{и} \quad x_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{m-1} v_m x_l$$

— две различные цепи, соединяющие вершину $x = x_0$ с вершиной $y = x_l$, причем $l \geq m$, то первая из этих цепей заведомо обладает ненулевой длиной. Тогда ребро u_i , где $i \doteq \min \{k / u_k \neq v_k\}$ (если $l > m$ и $u_k = v_k$ при $k = 1, 2, \dots, m$, то полагаем $i \doteq m + 1$), является цикловым, так как после его удаления из L вершины x_{i-1} и x_i останутся соединенными маршрутом

$$x_{i-1} v_i y_i \dots y_{m-1} v_m x_l u_l x_{l-1} \dots x_{i+1} u_{i+1} x_i;$$

по определению циклового ребра, граф L имеет циклы.

(3) \Rightarrow (4). Если цепь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

*) Эта оговорка нужна потому, что цепи $x u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l y$ и $y u_l x_{l-1} \dots x_2 u_2 x_1 u_1 x$, строго говоря, различны.

не простая, то, обозначив через x_i первую повторяющуюся в ней вершину, а через x_j — последнее повторение этой вершины, можем составить цепь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_i u_{j+1} x_{j+1} \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

отличную от первой и соединяющую те же вершины x_0 и x_l (при $i = 0$ & $j = l$ вторая цепь имеет нулевую длину).

(4) \Rightarrow (2). Тривиально: простой цикл не является простой цепью (см. § 11 в главе 2).

(2) \Rightarrow (1). Сразу следует из леммы § 11: если бы в L был какой-нибудь цикл, то был бы и простой.

Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом*. В дальнейшем нам будет полезен некоторый запас характеристических свойств дерева; равносильность этих характеристик устанавливает

Теорема 2. Следующие шесть высказываний (о произвольном графе L) равносильны друг другу:

(1) $\kappa(L) = 1$ & $\lambda(L) = 0$ (определение дерева);

(2) $\lambda(L) = 0$ & $n(L) - m(L) = 1$;

(3) $\kappa(L) = 1$ & $n(L) - m(L) = 1$;

(4) для любой пары вершин x, y (в указанном порядке) графа L существует одна и только одна соединяющая их цепь;

(5) $\kappa(L) = 1$, но если из L удалить любое ребро, то для полученного графа L^- будет $\kappa(L^-) = 2$;

(6) $\lambda(L) = 0$, но если к L добавить любое ребро (без добавления вершин), то у полученного графа L^+ будет $\lambda(L^+) = 1$.

Доказательство. Непосредственно из определения цикломатического числа следует (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3). Существование цепи в высказывании (4) равносильно связности графа, а единственность цепи — отсутствию циклов (на основании теоремы 1), поэтому имеем также (1) \Leftrightarrow (4). Далее, (1) \Leftrightarrow (5), ибо при $\lambda(L) = 0$ и только в этом случае каждое ребро графа L является перешейком и его удаление увеличивает количество компонент на единицу. Наконец, (1) \Leftrightarrow (6), ибо в том и только том случае, когда граф L связан, никакое добавляемое к нему ребро (разумеется, без добавления вершин) не может быть перешейком нового графа.

Степень вершины дерева, ввиду отсутствия петель, совпадает с валентностью и равна

$$s(x) = v(x) = s^+(x) + s^-(x) + \tilde{s}(x)$$

(см. § 2 в главе 1). Из $m(L) = n(L) - 1$ (теорема 2) вытекает, что

$$\sum_{x \in X} s(x) = 2m(L) = 2n(L) - 2;$$

обозначая через $n_i \doteq n_i(L)$ количество тех вершин дерева L , которые имеют степень i , можно полученному равенству придать вид

$$\sum_{i=1}^{\sigma} i \cdot n_i(L) = 2n(L) - 2, \quad (*)$$

где

$$\sigma \doteq \sigma(L) \doteq \max_{x \in X} s(x) = \max \{i/n_i \neq 0\}.$$

Отсюда вытекает ряд простых, но важных следствий. Так, замечая, что

$$n_1 + 2(n_2 + \dots + n_{\sigma}) \leq 2n(L) - 2$$

и что при $n(L) \geq 2$

$$n_2 + \dots + n_{\sigma} = n(L) - n_1(L),$$

ибо в этом случае $n_0(L) = 0$, получаем

$$n_1 + 2[n(L) - n_1] \leq 2n(L) - 2,$$

т. е.

$$n_1(L) \geq 2,$$

иными словами, *всякое дерево, состоящее более чем из одной вершины, обладает по крайней мере двумя висячими вершинами**. Далее, из

$$n_1 + \sigma(n_2 + \dots + n_{\sigma}) \geq 2n(L) - 2$$

при $n(L) \geq 3$ получаем

$$n_1 + \sigma[n(L) - n_1] \geq 2n(L) - 2,$$

откуда вытекает верхняя оценка числа висячих вершин

$$n_1(L) \leq \frac{n(L)[\sigma(L) - 2] + 2}{\sigma(L) - 1}$$

во всяком дереве, содержащем не менее трех вершин (при $n(L) = 2$, очевидно, $\sigma(L) = 1$ и $n_1(L) = n(L)$, дробь теряет смысл, а предшествующее ей неравенство, оставаясь верным, приводит к тривиальному выводу $n_1(L) \leq 2$). Наконец, если $n_i(L) > 0$

*Этот результат является также непосредственным следствием леммы 1 § 12 (глава 2).

хотя бы при одном $i \geq 3$, то

$$n_1(L) + 2[n(L) - n_1(L)] < 2n(L) - 2,$$

т. е.

$$n_1(L) > 2;$$

отсюда, в частности, следует, что *всякое дерево ровно с двумя висячими вершинами есть простая цепь*.



Рис. 69.

Система степеней дерева, вообще говоря, не определяет его однозначно (с точностью до изоморфизма); так, на рис. 69 изображены два неизоморфных дерева с соответственно равными

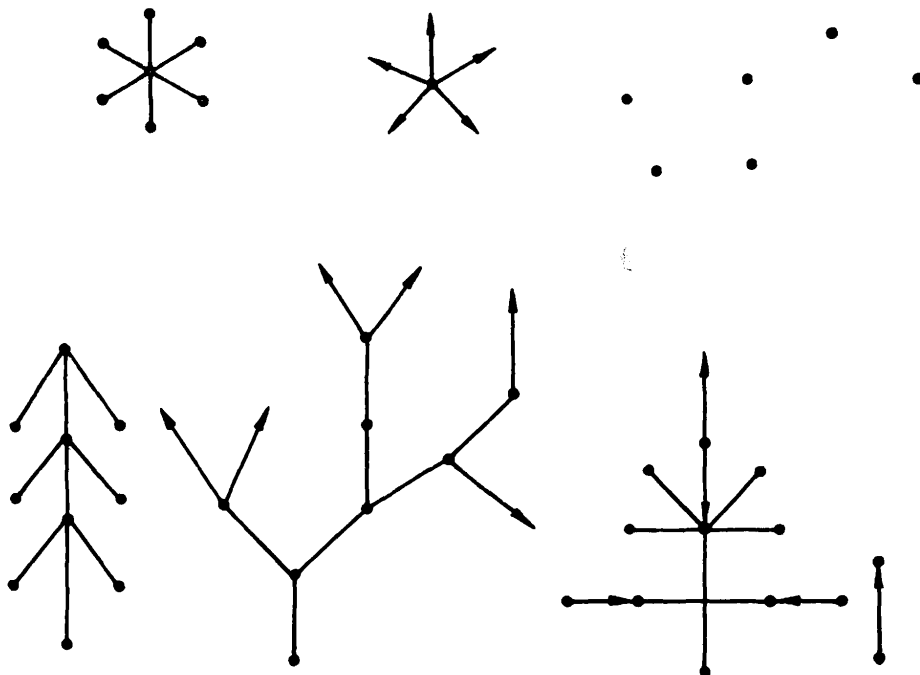


Рис. 70.

степенями вершин: $s(x_1) = s(x_2) = s(x_3) = 1$, $s(x_4) = s(x_5) = 2$, $s(x_6) = 3$. Возможности построения неизоморфных деревьев с одинаковыми наборами степеней вершин в действительности намного шире, поскольку изоморфные деревья можно превращать в неизоморфные надлежащей ориентацией некоторых звеньев и переориентацией дуг. Вопросом существова-

ния деревьев с заданными степенями вершин мы займемся во второй части книги.

В следующем параграфе изучение деревьев будет продолжено, а сейчас, для завершения обзора всех графов без циклов, остается лишь заметить, что у графа с нулевым цикломатическим числом каждая компонента связности представляет собой дерево (рис. 70). Поэтому из установленных выше свойств дерева вытекает

Т е о р е м а 3. *Всякий непустой граф без циклов обладает по крайней мере двумя висячими вершинами. Всякий граф без циклов, имеющий ровно две висячие вершины, состоит из одной простой цепи и, может быть, еще некоторого количества голых вершин.*

§ 21. Метрические свойства деревьев

Так как дерево связно и каждое его ребро является перешейком, то условия теоремы Жордана (с учетом замечания к ней, см. § 17 в главе 2) выполнены для любой его вершины x_0 . Поэтому каждое дерево имеет либо одну центральную вершину, и тогда само называется *центральным*, либо две смежные центральные вершины, и тогда называется *бицентральным*. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что радиус и диаметр дерева L удовлетворяют условию

$$d(L) = \begin{cases} 2r(L), & \text{если } L \text{ — центральное,} \\ 2r(L) - 1, & \text{если } L \text{ — бицентральное} \end{cases}$$

и что каждая его цепь наибольшей длины ($d(L)$) проходит через все его центральные вершины (одну или две).

В силу теоремы 2 § 20, для любых вершин x и y дерева существует ровно одна соединяющая их цепь, причем эта цепь простая; будем обозначать ее через $[x, y]$. Длина цепи $[x, y]$ равна расстоянию $\rho(x, y)$ в данном дереве. Легко видеть, что для трех вершин x, y, z дерева равенство в аксиоме треугольника достигается в том и только том случае, когда вершина y лежит на цепи $[x, z]$.

Интересной характеристикой дерева является система расстояний между его висячими вершинами. Е. А. Смоленский (1962) показал, что эта система определяет дерево однозначно с точностью до изоморфизма и ориентации ребер, а затем К. А. Зарецкий (1/1965) дал критерий существования дерева, отвечающего указанным образом наперед заданной системе чисел. Оба результата удобно объединить в одну теорему.

Теорема Смоленского — Зарецкого. Пусть дана система S , из $\frac{1}{2} v(v-1)$ натуральных чисел $\rho_{ij} \doteq \rho_{ji}$, где $v \geq 2$; $i, j = 1, 2, \dots, v$; $i \neq j$. Для существования дерева $L = (X, U; P)$ с множеством всех висячих вершин $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_v\}$, удовлетворяющего условию

$$\rho(y_i, y_j) = \rho_{ij}$$

при всех $i, j = 1, 2, \dots, v$ ($i \neq j$), необходимо и достаточно, чтобы система S , обладала следующими свойствами:

(1) для любой тройки попарно различных индексов $i, j, k \in \{1, 2, \dots, v\}$ число

$$\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk}$$

четно и положительно;

(2) для любой четверки попарно различных индексов $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, v\}$ из трех чисел

$$\rho_{ij} + \rho_{kl}, \quad \rho_{ik} + \rho_{jl}, \quad \rho_{il} + \rho_{jk}$$

два совпадают, а оставшееся не превосходит их*.

Если условия (1), (2) выполнены и если, кроме L , имеется еще дерево $L' = (X', U'; P')$ с множеством всех висячих вершин $Y' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_v\}$, такое что

$$\rho(y'_i, y'_j) = \rho_{ij}$$

при всех $i, j = 1, 2, \dots, v$ ($i \neq j$), то неордеревья \tilde{L} и \tilde{L}' , полученные из L и L' дезориентацией всех дуг, изоморфны, причем изоморфизм можно установить так, чтобы висячие вершины с одинаковыми номерами соответствовали друг другу.

Доказательство. Необходимость условий (1) и (2) станет очевидной, если выяснить смысл фигурирующих в них величин. Пусть y_i, y_j, y_k — три различные висячие вершины дерева L . Если x — последняя общая вершина двух цепей $[y_i, y_j]$ и $[y_i, y_k]$ (рис. 71), то, как легко подсчитать,

$$\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk} = 2\rho(y_i, x);$$

*) При $v \leq 3$ условие (2), а при $v = 2$ также и условие (1) не налагает на числа системы S , никаких ограничений.

полученное заведомо четное число не может равняться нулю, ибо иначе висячая вершина y_i совпала бы с невисячей x . Теперь пусть y_i, y_j, y_k, y_l — четыре различные висячие вершины. Система цепей, соединяющих эти вершины друг с другом, имеет с точностью до перестановки индексов i, j, k, l структуру,

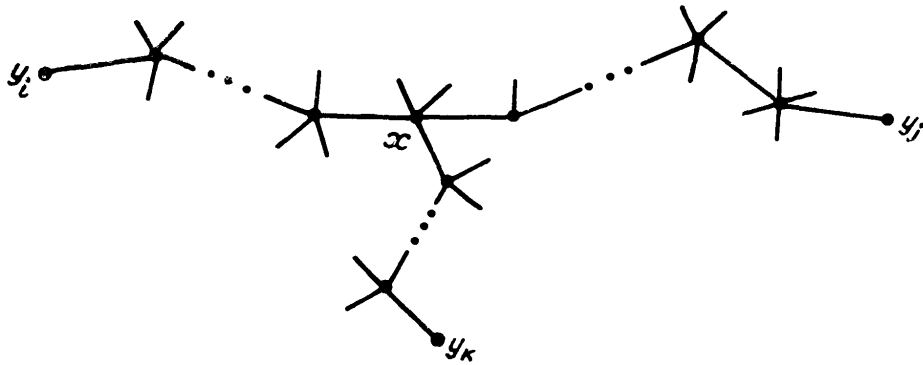


Рис. 71.

показанную на рис. 72, где z — последняя из вершин, принадлежащих одновременно трем цепям $[y_l, y_i]$, $[y_l, y_j]$ и $[y_l, y_k]$, а вершина x определена, как выше (см. рис. 71); при этом допускается возможность $z = x$. При указанной индексации, очевидно,

$$\rho_{ij} + \rho_{kl} = \rho_{il} + \rho_{jk} \geq \rho_{ik} + \rho_{jl}$$

(равенство всех трех сумм соответствует случаю $z = x$); остальные возможности в условии (2) возникают в результате перестановок индексов i, j, k, l .

Для доказательства достаточности условий (1) и (2), а также утверждения об изоморфизме мы можем, очевидно, ограничиться построением и сопоставлением только неордеревьев. Оба доказательства будем вести одновременно, индукцией по числу висячих вершин.

При $v = 2$ условия (1) и (2) ничего не требуют, а система S_2 сводится к единственному числу ρ_{12} ; искомым неордеревом L_2 будет простая цепь, состоящая из ρ_{12} звеньев, и только она (ввиду наличия у L_2 ровно двух висячих вершин, см. § 20).

Пусть теперь для некоторого $v \geq 2$ уже доказано, что всякой системе S_v из $\frac{1}{2}v(v-1)$ чисел $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, v; i \neq j$), удовлетворяющей условиям (1) и (2), соответствует неордерево L_v с множеством висячих вершин $Y_v = \{y_1, y_2, \dots, y_v\}$, так что $\rho(y_i, y_j) = \rho_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots, v$ ($i \neq j$), и что

всякое другое неордерено L'_v с множеством висячих вершин $Y'_v = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_v\}$, для которого тоже $\rho(y'_i, y'_j) = \rho_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots, v$ ($i \neq j$), можно привести в изоморфное соответствие с L_v так, чтобы при этом y'_i соответствовала y_i ($i = 1, 2, \dots, v$). Рассмотрим произвольную систему S_{v+1} из $\frac{1}{2}(v+1)v$ чисел ρ_{ij} , удовлетворяющую условиям (1) и (2) при индексах, пробегающих множество $\{1, 2, \dots, v, v+1\}$.

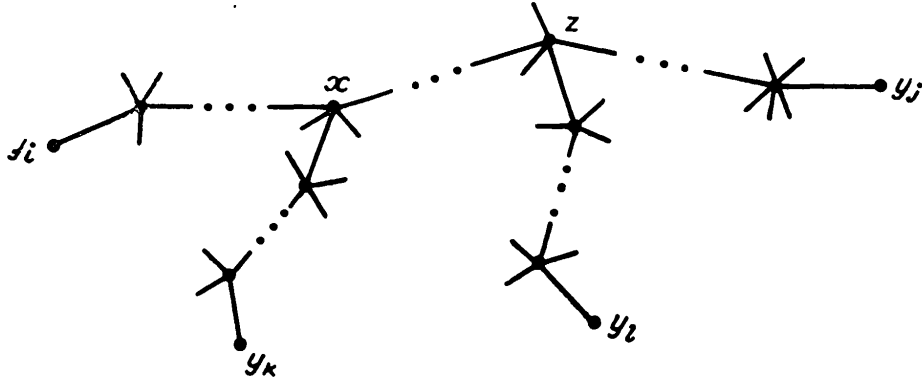


Рис. 72.

Удаляя из S_{v+1} все те величины ρ_{ij} , которые содержат индекс $v+1$, получим систему S_v , по-прежнему удовлетворяющую условиям (1) и (2). Согласно предположению индукции, существует неордерено L_v с множеством висячих вершин Y_v , отвечающее системе S_v .

Пусть теперь i, j — одна из таких пар различных индексов из множества $\{1, 2, \dots, v\}$, для которой величина $\rho_{v+1,i} + \rho_{v+1,j} - \rho_{ij}$ принимает наименьшее значение. Зафиксировав эту пару i, j , образуем три величины:

$$\frac{1}{2}(\rho_{v+1,i} + \rho_{v+1,j} - \rho_{ij}),$$

$$\rho_{v+1,i} - \frac{1}{2}(\rho_{v+1,i} + \rho_{v+1,j} - \rho_{ij}) = \frac{1}{2}(\rho_{ij} + \rho_{i,v+1} - \rho_{j,v+1})$$

и

$$\rho_{v+1,j} - \frac{1}{2}(\rho_{v+1,i} + \rho_{v+1,j} - \rho_{ij}) = \frac{1}{2}(\rho_{ij} + \rho_{j,v+1} - \rho_{i,v+1});$$

все они целые и положительные, поскольку система S_{v+1} удовлетворяет условию (1). В неордерено L_v существует единствен-

ная такая вершина x , для которой

$$\rho(y_i, x) = \frac{1}{2}(\rho_{ij} + \rho_{i, v+1} - \rho_{j, v+1})$$

и

$$\rho(x, y_j) = \frac{1}{2}(\rho_{ji} + \rho_{j, v+1} - \rho_{i, v+1}),$$

ибо в силу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\rho_{ij} + \rho_{i, v+1} - \rho_{j, v+1}) + \frac{1}{2}(\rho_{ji} + \rho_{j, v+1} - \rho_{i, v+1}) &= \rho_{ij} = \\ &= \rho(y_i, y_j) \end{aligned}$$

вершина x необходимо лежит на цепи $[y_i, y_j]$ (см. случай равенства в аксиоме треугольника для метрики дерева), а единственная вершина этой цепи, находящаяся на расстоянии $\rho(y_i, x)$ от y_i , обладает расстоянием $\rho(x, y_j)$ до y_j . Отсюда, в частности, следует, что если другое неордерево L'_v с множеством висячих вершин Y'_v , отвечающее той же системе S_v , что и L_v , приведено с последним в изоморфное соответствие, сохраняющее нумерацию висячих вершин, то вершина x' неордерева L'_v , для которой

и
$$\rho(y_{i'}, x') = \frac{1}{2}(\rho_{ij} + \rho_{i, v+1} - \rho_{j, v+1})$$

$$\rho(x', y_{j'}) = \frac{1}{2}(\rho_{ji} + \rho_{j, v+1} - \rho_{i, v+1}),$$

необходимо должна соответствовать x .

Для завершения доказательства теоремы остается лишь показать, что построение искомого неордерева L_{v+1} с множеством висячих вершин $Y_{v+1} = \{y_1, y_2, \dots, y_v, y_{v+1}\}$ путем добавления новых вершин и звеньев к L_v возможно, притом единственным образом.

В L_{v+1} расстояние от новой висячей вершины y_{v+1} до ближайшей к ней вершины z цепи $[y_i, y_j]$ должно быть равно

$$\rho(y_{v+1}, z) = \frac{1}{2}(\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, j} - \rho_{ij}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho(y_i, z) &= \rho_{i, v+1} - \rho(y_{v+1}, z) = \rho_{i, v+1} - \\ &- \frac{1}{2}(\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, j} - \rho_{ij}) = \rho(y_i, x), \end{aligned}$$

т. е. $z = x$, поскольку обе вершины x и z принадлежат цепи $[y_i, y_j]$. Таким образом, новая висячая вершина y_{v+1} необходимо

должна соединяться с x простой цепью $[y_{v+1}, x]$ длины

$$\rho(y_{v+1}, x) = \frac{1}{2} (\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, j} - \rho_{ij}).$$

Каждая отличная от y_{v+1} и x вершина этой цепи (если такие вершины на ней есть) обладает степенью два, так как в противном случае имелась бы некоторая цепь $[y_i, y_k]$ ($k \neq i, j, v+1$), расстояние которой

$$\frac{1}{2} (\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, k} - \rho_{ik})$$

от вершины y_{v+1} было бы меньше, чем

$$\rho(y_{v+1}, x) = \frac{1}{2} (\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, j} - \rho_{ij})$$

(рис. 73), а это противоречит выбору пары индексов i, j как такой, для которой величина $\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, j} - \rho_{ij}$ является наименьшей. Значит, неордеререво L_{v+1} можно получить из L_v толь-

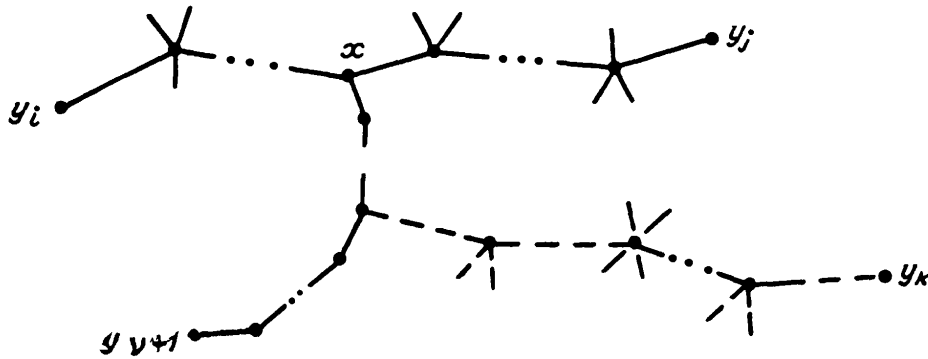


Рис. 73.

ко одним способом, а именно путем присоединения к L_v простой цепи $[x, y_{v+1}]$ длины $\rho(y_{v+1}, x)$ в вершине x . Покажем, что такое неордеререво обладает множеством всех висячих вершин $\{y_1, y_2, \dots, y_v, y_{v+1}\}$ и соответствует системе S_{v+1} .

Прежде всего, множество Y_{v+1} действительно есть $\{y_1, y_2, \dots, y_v, y_{v+1}\}$, поскольку вершина x , находясь на цепи $[y_i, y_j]$ и будучи удалена на положительные расстояния от обоих ее концов, не является висячей в L_v , в силу чего присоединение цепи $[x, y_{v+1}]$ не превратит ни одну из вершин y_1, y_2, \dots, y_v в невисячую. Далее,

$$\begin{aligned} \rho(y_{v+1}, y_i) &= \rho(y_{v+1}, x) + \rho(x, y_i) = \frac{1}{2} (\rho_{v+1, i} + \rho_{v+1, j} - \rho_{ij}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\rho_{ij} + \rho_{i, v+1} - \rho_{j, v+1}) = \rho_{v+1, i} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\rho(y_{v+1}, y_j) = \rho_{v+1, j}.$$

Наконец, пусть y_k — висячая вершина в L_{v+1} , отличная от y_i , y_j и y_{v+1} ; покажем, что $\rho(y_k, y_{v+1}) = \rho_{k, v+1}$.

В силу выбора пары индексов i, j имеем

$$\rho_{j, v+1} + \rho_{j, v+1} - \rho_{ij} \leq \rho_{k, v+1} + \rho_{j, v+1} - \rho_{jk},$$

откуда

$$\rho_{ik} + \rho_{i, v+1} \leq \rho_{ij} + \rho_{k, v+1}.$$

Обозначим через t последнюю общую вершину трех цепей $[y_k, y_i]$, $[y_k, y_j]$ и $[y_k, y_{v+1}]$. Так как все неконцевые вершины цепи

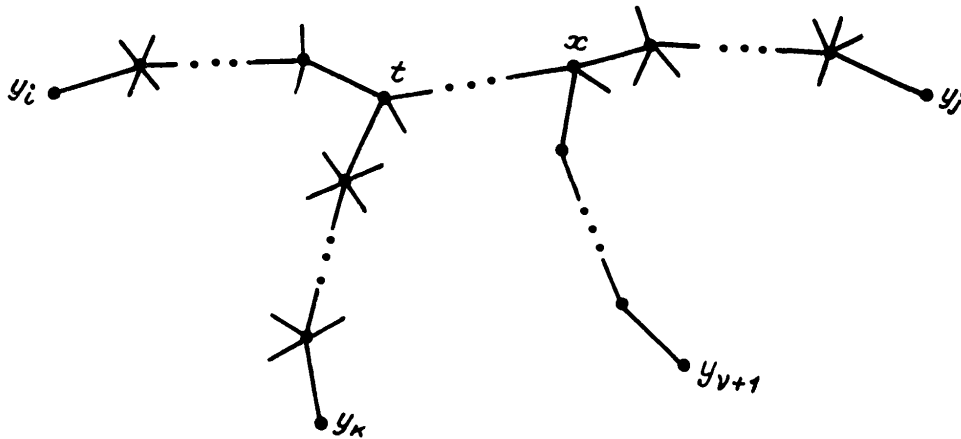


Рис. 74.

$[y_{v+1}, x]$ имеют степень 2, то t принадлежит цепи $[y_i, x]$ или цепи $[x, y_j]$, скажем, первой из них (рис. 74). Тогда

$$\rho(y_i, t) \leq \rho(y_i, x),$$

т. е.

$$\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk} \leq \rho_{ij} + \rho_{i, v+1} - \rho_{j, v+1},$$

откуда

$$\rho_{ik} + \rho_{j, v+1} \leq \rho_{jk} + \rho_{i, v+1}.$$

Таким образом,

$$\rho_{ik} + \rho_{j, v+1} \leq \rho_{jk} + \rho_{i, v+1} \leq \rho_{ij} + \rho_{k, v+1},$$

а это, ввиду условия (2) теоремы, влечет

$$\rho_{jk} + \rho_{i, v+1} = \rho_{ij} + \rho_{k, v+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\rho(y_k, y_{v+1}) &= \rho(y_i, y_{v+1}) + \rho(y_k, y_j) - \rho(y_i, y_j) = \\ &= \rho_{i, v+1} + \rho_{jk} - \rho_{ij} = \rho_{ij} + \rho_{k, v+1} - \rho_{ij} = \rho_{k, v+1},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что в работе К. А. Зарецкого (1/1965) критерий существования установлен для несколько более общего случая, чем при нашем изложении. Именно, там множество Y , расстояния между элементами которого даны, означает произвольное подмножество вершин дерева, содержащее все его висячие вершины. При этом не предполагается заранее известным, какие именно вершины из Y должны быть висячими — это выясняется само собой в процессе построения.

Обладая столь сильной характеристикой дерева, как система расстояний между его висячими вершинами, естественно попытаться выразить через эти числа другие характеристики дерева, не зависящие от ориентации ребер, например, количества $n_i(L)$ вершин данной степени. Этот вопрос еще ждет своего решения. Даже для такой простой характеристики, как число вершин, или, что равносильно, число ребер, способ нахождения, непосредственно вытекающий из доказательства теоремы Смоленского — Зарецкого, выглядит весьма неудобным: именно, пусть

$$\rho_1 \doteq \min \frac{1}{2} (\rho_{1i} + \rho_{1j} - \rho_{ij}), \quad \text{где } i, j \in \{2, 3, \dots, v\}, \quad i \neq j;$$

$$\rho_2 \doteq \min \frac{1}{2} (\rho_{2i} + \rho_{2j} - \rho_{ij}), \quad \text{где } i, j \in \{3, \dots, v\}, \quad i \neq j;$$

.....

$$\rho_{v-3} \doteq \min \frac{1}{2} (\rho_{v-3, i} + \rho_{v-3, j} - \rho_{ij}), \quad \text{где } i, j \in \{v-2, v-1, v\}, \\ i \neq j;$$

$$\rho_{v-2} \doteq \frac{1}{2} (\rho_{v-2, v-1} + \rho_{v-2, v} - \rho_{v-1, v});$$

$$\rho_{v-1} \doteq \rho_{v-1, v};$$

тогда

$$m(L) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{v-3} + \rho_{v-2} + \rho_{v-1};$$

нельзя ли выразить $m(L)$ через числа ρ_{ij} проще, без операций взятия минимума?

Из свойств дерева, легко определяемых по заданной системе чисел ρ_{ij} , мы пока можем указать лишь тривиальные, например диаметр и радиус, наличие одной или двух центральных вершин, местоположение центральных и периферийных вершин; детали оставляем читателю.

Как показал Э. Д. Стоцкий (1964), реализация метрики с помощью дерева является наиболее экономной в следующем смысле: если метрику ρ , заданную на множестве X , можно реализовать деревом $L_0 = (Y_0, U_0)$, то для всякого графа $L = (Y, U)$, реализующего ту же метрику (см. § 17 в главе 2), имеем

$$|Y| \geq |Y_0|, \quad |U| \geq |U_0|.$$

Среди других исследований, посвященных метрическим свойствам деревьев, упомянем работу Ф. Неймана (1964), где найдены необходимые и достаточные условия существования такой нумерации $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ множества вершин дерева $L(X, U)$, при которой $\rho(x_i, x_{i+1}) \leq 2$ для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Отметим также, что в работе П. Келли (1957) проблема восстановления n -вершинного графа L по совокупности его $(n - 1)$ -вершинных подграфов (см. § 8 в главе 1 и § 12 в главе 2) решена для случая, когда L — неордерево, и что, как показали Ф. Харари и Э. Палмер (1966), для восстановления L в этом случае достаточно знать лишь все его максимальные собственные поддеревья.

§ 22. Каркасы

Подробное изучение графов без циклов, предпринятое в § 20, позволит теперь легко понять смысл цикломатического числа и в тех случаях, когда оно отлично от нуля.

Т е о р е м а 1. *Из любого графа L можно удалить $\lambda(L)$ ребер так, чтобы полученный суграф T не имел циклов и обладал тем же числом компонент связности, что и L . Всякий же суграф, получаемый из L удалением менее чем $\lambda(L)$ ребер, содержит циклы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение при $\lambda(L) = 0$ тривиально; допустим его уже доказанным для всех графов с цикломатическим числом $l \geq 0$ и рассмотрим произвольный граф L , у которого $\lambda(L) = l + 1$. Так как $\lambda(L) > 0$, то граф L заведомо имеет цикловые ребра; удалив любое из них, получим граф L' , для которого $\lambda(L') = l$, $\kappa(L') = \kappa(L)$. Согласно предположению индукции, из L' можно удалить l

ребер так, чтобы остался граф T без циклов, с числом компонент $\kappa(T) = \kappa(L')$; тот же T получен из исходного графа L удалением $l + 1$ ребер, причем $\kappa(T) = \kappa(L)$, что и требовалось. Второе утверждение справедливо потому, что при удалении любого ребра цикломатическое число графа не может уменьшиться более, чем на единицу.

Всякий суграф T графа L , удовлетворяющий условиям

$$m(T) = m(L) - \lambda(L), \quad \kappa(T) = \kappa(L), \quad \lambda(T) = 0$$

(из которых любые два влекут оставшееся, в силу равенства $n(T) = n(L)$ и определения цикломатического числа), называется *каркасом* графа L . Существование у каждого графа хотя бы одного каркаса следует из только что доказанной теоремы; справедлива и более сильная

Т е о р е м а 2 (А. Коциг, 2/1956). *Если T' — произвольный суграф без циклов данного графа L , то L обладает хотя бы одним таким каркасом T , который содержит T' в качестве своего суграфа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по числу

$$p \doteq p(T') \doteq \kappa(T') - \kappa(L).$$

При $p = 0$ сам T' является искомым каркасом T . Пусть существование T уже доказано для $p = k \geq 0$ и пусть T' — суграф без циклов в L , такой что $p = k + 1$. Так как $p > 0$, т. е. $\kappa(T') > \kappa(L)$, то всегда можно найти такие две компоненты T'_1 и T'_2 суграфа T' и такое ребро u графа L , чтобы u соединяло вершину T'_1 с вершиной T'_2 . Добавив к суграфу T' ребро u , мы получим суграф T'' , по-прежнему не содержащий циклов, но такой, что для него $p(T'') = k$. Согласно допущению индукции, для суграфа T'' , взятого в качестве T' , существует требуемый каркас T графа L . Ясно, что этот каркас будет искомым и для суграфа T' .

Естественный алгоритм нахождения какого-нибудь каркаса в заданном графе $L = (X, U; P)$ состоит в последовательном удалении цикловых ребер, однако отличить цикловое ребро от перешейка практически не всегда просто*. Г. Ф. Степанец и Г. Э. Влэдуц (1963) предлагают следующим образом исполь-

*) Но и не всегда трудно. Например, если граф реализован в виде системы контактов (вершин), соединенных проводниками (ребрами), то для выяснения, является ли данное ребро перешейком, достаточно чисто электрическим способом проверить, нарушает ли его удаление проводимость между теми вершинами, которые оно соединяло.

зывать ту разметку вершин, которая рассмотрена в § 11 главы 2 в связи с задачей нахождения кратчайшей цепи.

Выберем произвольно по одной вершине в каждой компоненте графа L и пометим эти вершины значком 0, далее присвоим значок 1 не помеченным еще вершинам, смежным с помеченными, и т. д. до тех пор, пока не окажутся помеченными все вершины L . (Желая обойтись без предварительного выявления компонент графа, мы можем начать разметку с одной вершины и продолжать ее до остановки, затем присвоить значок 0 какой-либо не помеченной еще вершине, если такие вершины остались, и снова вести процесс до остановки и т. д.) Из описания правила разметки непосредственно следует, что значки смежных вершин графа не могут различаться более, чем на единицу.

Окончив разметку, будем последовательно просматривать вершины графа L (в любом порядке) и удалять некоторые ребра по следующему правилу. Если на данном этапе мы находимся в вершине x со значком μ , то удаляем все те не удаленные на предыдущих этапах ребра, которые соединяют x с вершинами, имеющими тот же значок μ , а из ребер, соединяющих x с вершинами, помеченными значком $\mu - 1$, сохраняем одно (любое), удаляя остальные; прочие инцидентные x ребра на этом этапе не удаляем. Покажем, что суграф T , оставшийся после проведения указанного процесса удаления ребер по всем вершинам, является каркасом графа L .

Во-первых, $\kappa(T) = \kappa(L)$, ибо правило удаления ребер таково, что разметка вершин сохранит силу и для суграфа T , поэтому множество вершин, соединимых с заданной вершиной со значком 0, одинаково в T и в L . Во-вторых, $\lambda(L) = 0$, ибо каждый простой цикл (а значит, и всякий вообще цикл) графа L содержит хотя бы одно ребро, удаляемое описанным процессом; в самом деле, из того, что значки соседних вершин цикла либо равны, либо различаются на единицу, легко выводится существование на простом цикле такого ребра, которое соединяет вершины с одинаковым значком, или такой пары соседних ребер, для которой значок средней вершины на единицу больше значка крайних (в случае цикла длины два эти крайние вершины совпадают друг с другом).

В примере графа на рис. 75 ребра каркаса T изображены жирными линиями; вершины просматривались в алфавитном порядке, и для каждой вершины выбор инцидентного ей неудаляемого ребра при прочих равных условиях определялся алфавитным расположением второй концевой вершины этого ребра.

Другой, чисто алгебраический, способ выявления какого-

нибудь каркаса в заданном графе будет рассмотрен в § 25, а полным обзором всех каркасов и подсчетом их количества мы займемся в § 26.

Ребра графа L , не принадлежащие данному его каркасу T , называются *хордами* каркаса T в L . Число ребер каждого из каркасов графа L называется *рангом* этого графа и обозначается через $\rho(L)$; таким образом,

$$\rho(L) \doteq m(L) - \lambda(L) = n(L) - \kappa(L).$$

В удачности термина «ранг» мы убедимся довольно скоро (см. § 25).

Если граф L связан, то всякий его каркас является деревом. Каркас связного графа — это его основа первого порядка (см. § 16 в главе 2). Однако при $k > 1$ понятие основы k -го порядка нецелесообразно считать прямым обобщением понятия каркаса, ибо тогда, как мы уже знаем, количество ребер основы k -го порядка в заданном графе, вообще говоря, не определяется однозначно.

Т е о р е м а 3. *Каковы бы ни были каркас T графа $L = (X, U; P)$ и хорда u этого каркаса, в L существует цикл, содержащий u и не содержащий других хорд каркаса T , причем этот цикл — простой и только один (с точностью до выбора начальной вершины и направления обхода).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x и y — вершины графа L , соединенные ребром u , а T' — та компонента каркаса T , которая содержит эти вершины. Так как T' — дерево, то в нем имеется одна и только одна (с точностью до направления обхода) цепь, притом простая, соединяющая x с y (см. теорему 2 § 20). и эта цепь вместе с ребром u образует искомый цикл, который оказывается простым и единственным (с точностью до выбора начала и направления обхода).

Эта теорема позволяет легко получать одни каркасы графа из других. Пусть T — некоторый каркас L , а u — какая-либо

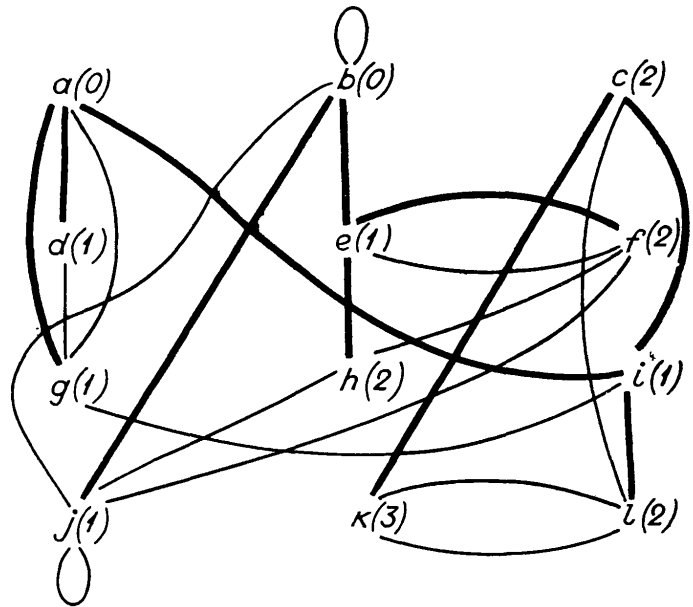


Рис. 75.

хорда этого каркаса, не являющаяся петлей (если таких хорд нет, то каркас T — единственный у графа L , и задача теряет смысл). В силу теоремы 3, ребро u образует в L простой цикл вместе с некоторым подмножеством ребер каркаса T , притом это подмножество непусто, поскольку u — непетля. Добавляя к T ребро u и удаляя из образовавшегося цикла какое-нибудь другое ребро, мы получим каркас графа L , отличный от T . Покажем теперь, что с помощью операций указанного типа всегда **можно** из любого каркаса получить любой другой каркас того же графа.

В самом деле, пусть T и T' — два разных каркаса графа L . Добавим к T некоторое ребро u' каркаса T' , не принадлежащее T (такое заведомо есть, ибо всякие два каркаса одного графа обладают одинаковым количеством ребер). На образовавшемся простом цикле найдется ребро v , не принадлежащее T' (иначе каркас T' содержал бы цикл). После добавления u' и удаления v каркас T перейдет в другой каркас T'' , у которого количество ребер, не принадлежащих T' , заведомо меньше, чем у T . Если $T'' \neq T'$, то с каркасом T'' поступим так же, как с T , и т. д. до тех пор, пока не придем к T' .

Итак, если известен не только исходный каркас T , но и результирующий T' , то последовательность замен одного ребра другим, переводящая T в T' , находится без труда (и всякая последовательность, находящаяся таким способом, очевидно, принадлежит к числу кратчайших по количеству операций замены). Напрашивается вопрос: если известен только один каркас графа L , то в каком порядке надо совершать операции замены, чтобы получить все остальные каркасы L , притом по возможности без повторений? Мы не будем его решать, ибо другой подход, уже сугубо алгебраический, позволит нам в § 26 просто справляться с задачами о полном обзоре и подсчете каркасов графа.

В заключение параграфа упомянем без доказательства следующий результат Дж. Нэш-Вильямса (1961): обыкновенный граф $L = (X, U)$ имеет k связных каркасов попарно без общих ребер в том и только том случае, если при любом разбиении \mathfrak{P} множества вершин X на классы выполняется неравенство

$$|U(\mathfrak{P})| \geq k(|\mathfrak{P}| - 1),$$

где $U(\mathfrak{P})$ означает множество тех ребер L , которые соединяют вершины разных классов, а $|\mathfrak{P}|$ — число классов разбиения \mathfrak{P} .

§ 23. Пространство суграфов и пространство циклов

Пусть $L = (X, U; P)$ — граф с пронумерованным множеством ребер $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, а \mathfrak{L}_L — множество всех суграфов этого графа. Относительно операции сложения

$$(X, U_1; P) + (X, U_2; P) \doteq (X, (U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2); P)$$

множество \mathfrak{L}_L образует абелеву группу. Действительно, \mathfrak{L}_L заведомо является группоидом (см. Введение); относя каждому суграфу $L' = (X, U'; P)$ строку чисел (a_1, a_2, \dots, a_m) , в которой

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in U', \\ 0, & \text{если } u_i \notin U' \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, m$), и определяя сложение строк как покомпонентное по модулю два, мы получим изоморфный \mathfrak{L}_L группоид, элементами которого служат всевозможные строки длины m из нулей и единиц и который уже без всякого сомнения представляет собой абелеву группу. Еще одна изоморфная абелева группа состоит из всех подмножеств множества U ребер графа L с операцией сложения

$$U_1 + U_2 \doteq (U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2).$$

Мы не будем различать между собой эти три группы и обозначим их одним и тем же символом \mathfrak{L}_L . В дальнейшем группу \mathfrak{L}_L удобно рассматривать как линейное пространство над полем коэффициентов $D \doteq D \setminus \{0, 1\}$, называемое *пространством суграфов* данного графа L . Размерность этого пространства

$$\dim \mathfrak{L}_L = m \doteq m(L),$$

ибо множество элементов

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1),$$

представляющих однореберные суграфы, образует базис.

Элемент пространства \mathfrak{L}_L называется *квазициклом*, если в соответствующем суграфе графа L все вершины обладают четными валентностями (см. § 2 в главе 1). О структуре суграфов, отвечающих квазициклам, можно сказать, что у них каждая компонента связности, отличная от голой вершины, представляет собой такую часть графа L , которая порождена множествами вершин и ребер некоторого его цикла, а именно любого из эйлеровых циклов этой компоненты (см. § 18 в главе 2).

Из определений квазицикла и операции сложения в \mathfrak{Q}_L непосредственно следует, что сумма двух квазициклов есть квазицикл и что поэтому множество \mathfrak{Q}_L^Δ всех квазициклов образует в \mathfrak{Q}_L подпространство. Мы будем называть \mathfrak{Q}_L^Δ *пространством циклов* графа L ; определим его размерность $\dim \mathfrak{Q}_L^\Delta$.

Пусть T — произвольный каркас графа L . Каждой хорде каркаса отнесем тот единственный простой цикл, который она образует вместе с некоторыми ребрами каркаса (см. теорему 3 § 22), и покажем, что система $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$ квазициклов, отвечающих всем этим $\lambda \doteq \lambda(L)$ простым циклам, представляет собой базис пространства \mathfrak{Q}_L^Δ .

Во-первых, все квазициклы в $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$ линейно независимы, ибо каждый из них содержит ребро (хорду каркаса T), не входящее ни в один из остальных; это особенно отчетливо видно при такой нумерации ребер, когда сначала идут все хорды, а потом уже ребра каркаса T — тогда квазициклы в $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$ имеют вид

$$(1, 0, \dots, 0, a_{\lambda+1}^1, \dots, a_m^1), (0, \overset{\circ}{1}, \dots, 0, a_{\lambda+1}^2, \dots, a_m^2), \dots, \\ \dots (0, 0, \dots, 1, a_{\lambda+1}^\lambda, \dots, a_m^\lambda).$$

Во-вторых, всякий квазицикл в \mathfrak{Q}_L^Δ либо является нулевым (пустой суграф, пустое множество ребер, нуль-строка), либо может быть получен сложением надлежащих элементов множества $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$. Действительно, пусть L' — суграф графа L , отвечающий произвольному квазициклу

$$(a_1, a_2, \dots, a_\lambda, a_{\lambda+1}, \dots, a_m)$$

при указанной выше нумерации ребер. Очевидным образом находится то единственное подмножество строк из $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$, сумма которых имеет на первых λ местах такие же элементы, что и заданный квазицикл. Но остальные элементы тоже совпадают; в самом деле, складывая найденную сумму квазициклов с заданным квазициклом, получим квазицикл, у которого первые λ элементов — нули, а значит и все остальные элементы — тоже нули, поскольку из ребер каркаса, очевидно, нельзя образовать ни одного цикла. Так как в пространстве \mathfrak{Q}_L сложение равносильно вычитанию, то сумма выбранных нами элементов множества $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$ равна заданному квазициклу. Таким образом, $\mathfrak{Q}_L^\Delta(T)$ есть базис пространства циклов, что и требовалось доказать.

Разумеется, если рассматривать пространство \mathfrak{Q}_L^Λ как абстрактное, то оно не даст нам о графе L никакой другой информации, кроме цикломатического числа $\lambda = \lambda(L)$, ибо всякие два линейных пространства одной и той же конечной размерности (над одним и тем же полем коэффициентов) изоморфны друг другу. Поэтому внутренняя структура элементов пространств \mathfrak{Q}_L и \mathfrak{Q}_L^Λ , а именно конкретное расположение единиц и нулей в строках, играет существенную роль. Задача полного обзора всех элементов линейного пространства считается в известном смысле решенной, если указан какой-нибудь базис этого пространства. Всякую матрицу

$$A_L^\Lambda \doteq (a_{ij}^\Lambda) \doteq \begin{pmatrix} a_{11}^\Lambda & a_{12}^\Lambda & \dots & a_{1m}^\Lambda \\ a_{21}^\Lambda & a_{22}^\Lambda & \dots & a_{2m}^\Lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\lambda 1}^\Lambda & a_{\lambda 2}^\Lambda & \dots & a_{\lambda m}^\Lambda \end{pmatrix}$$

с $\lambda = \lambda(L)$ строками и $m = m(L)$ столбцами над полем $D = D\{0, 1\}$, у которой строки представляют элементы некоторого базиса пространства циклов \mathfrak{Q}_L^Λ , мы будем называть *цикломатической матрицей* графа L .

Зная матрицу A_L^Λ , можно для любого элемента $a \doteq (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathfrak{Q}_L$ выяснить, принадлежит ли он пространству \mathfrak{Q}_L^Λ , т. е. является ли соответствующий суграф графа L квазициклом. Для этого надо дописать к матрице A_L^Λ строку a и определить, повысился ли ранг матрицы. Было бы, однако, поспешностью утверждать, что знание базиса в \mathfrak{Q}_L^Λ , т. е., например, матрицы A_L^Λ , полностью решает задачу обзора всех циклов графа L . Так, если нам понадобится выделить, скажем, все простые циклы, то чисто алгебраический способ, основанный на непосредственном исследовании цикломатической матрицы A_L^Λ , будет выглядеть следующим образом: перебираем по очереди все элементы $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathfrak{Q}_L$ и для каждой из этих строк выясняем, не является ли элементом \mathfrak{Q}_L^Λ также какая-либо строка, полученная из рассматриваемой заменой некоторых (не всех) единиц нулями. Ясно, что при таком процессе для каждой строки из \mathfrak{Q}_L^Λ , содержащей k единиц, понадобится, вообще говоря, $2^k - 2$ испытаний на принадлежность пространству \mathfrak{Q}_L^Λ . До удобного способа выявления всех простых циклов и выяснения картины их взаимного расположения в данном графе здесь еще очень далеко. При решении подобного рода вопросов большую

роль, наряду с алгебраическим аппаратом, играет и чистая комбинаторика.

Одной лишь алгебры недостаточно и для некоторых метрических задач. Например, Г. Ф. Степанец (1964) ставит вопрос о нахождении в \mathfrak{Z}_L^Δ такого базиса, чтобы сумма длин его квазициклов была наименьшей (или наибольшей). Остановимся на результатах этой работы подробнее. Под длиной $l(C)$ квазицикла $C \in \mathfrak{Z}_L^\Delta$ мы понимаем количество ребер соответствующего суграфа графа L , а под длиной $l(\mathfrak{C})$ базиса $\mathfrak{C} \doteq \{C_1, C_2, \dots, C_\lambda\}$

пространства \mathfrak{Z}_L^Δ — сумму $\sum_{i=1}^{\lambda} l(C_i)$, где $\lambda \doteq \lambda(L)$.

Т е о р е м а С т е п а н ц а. Пусть

$$\mathfrak{C} \doteq \{C_1, C_2, \dots, C_\lambda\} \text{ и } \mathfrak{C}' \doteq \{C'_1, C'_2, \dots, C'_\lambda\}$$

— два базиса пространства циклов \mathfrak{Z}_L^Δ графа L , обладающие наименьшей возможной длиной $l(\mathfrak{C}) = l(\mathfrak{C}')$. Тогда квазициклы этих базисов можно привести во взаимно однозначное соответствие так, чтобы длины соответственных квазициклов были одинаковы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала предположим, что \mathfrak{C} и \mathfrak{C}' приведены в такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждому $C_i \in \mathfrak{C}$ отнесен один из членов его разложения по базису \mathfrak{C}' ($i = 1, 2, \dots, \lambda$), причем нумерация квазициклов в \mathfrak{C} и \mathfrak{C}' выбрана так, что соответственные квазициклы имеют одинаковый номер. Докажем, что тогда $l(C_i) = l(C'_i)$ при всех $i = 1, 2, \dots, \lambda$.

Пусть

$$C_i = C'_{k_1^i} + C'_{k_2^i} + \dots + C'_{k_{p_i}^i}$$

— разложение i -го квазицикла из \mathfrak{C} по базису \mathfrak{C}' . Имеем

$$l(C_i) \geq l(C'_{k_j^i})$$

($j = 1, 2, \dots, p_i$), ибо если бы при некотором j было $l(C_i) < l(C'_{k_j^i})$, то базис $(\mathfrak{C}' \setminus \{C'_{k_j^i}\}) \cup \{C_i\}$ пространства \mathfrak{Z}_L^Δ обладал бы меньшей длиной, чем \mathfrak{C} , что невозможно. В частности, $l(C_i) \geq l(C'_i)$, поскольку в силу сделанного предположения среди членов разложения C_i обязательно присутствует C'_i ($i = 1, 2, \dots$).

..., λ). А так как длины квазициклов неотрицательны и суммы

$$l(\mathfrak{C}) \doteq \sum_{i=1}^{\lambda} l(C_i), \quad l(\mathfrak{C}') \doteq \sum_{i=1}^{\lambda} l(C'_i)$$

равны друг другу, то $l(C_i) = l(C'_i)$ при всех $i = 1, 2, \dots, \lambda$.

Осталось убедиться в том, что между базисами \mathfrak{C} и \mathfrak{C}' всегда можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором квазициклу из \mathfrak{C} отвечает некоторый член его разложения по \mathfrak{C}' . Этот чисто алгебраический факт, имеющий место для любых двух базисов произвольного конечномерного линейного пространства (над любым полем коэффициентов), легко доказывается при помощи теоремы Кёнига — Холла (следствие из теоремы Кёнига — Оре, см. § 6 в главе 1).

В самом деле, построим вспомогательный граф Кёнига $L^K \doteq \doteq (Y, Y'; V)$, в котором вершины множества $Y \doteq \{y_1, y_2, \dots, y_\lambda\}$ взаимно однозначно соответствуют квазициклам базиса \mathfrak{C} , вершины множества $Y' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_\lambda\}$ — квазициклам \mathfrak{C}' , а y_i смежна с y'_j тогда и только тогда, когда разложение $C_i \in \mathfrak{C}$ по базису \mathfrak{C}' содержит C'_j ; для простоты мы считаем, что номера вершин в Y и Y' совпадают с номерами отвечающих им квазициклов*. В силу определения графа L^K , для любого $Z \subseteq Y$ все квазициклы исходного графа L , соответствующие элементам множества Z , линейно выражаются через квазициклы, соответствующие образу $\Delta Z \subseteq Y'$; но так как система квазициклов, отвечающих Z , линейно независима (как часть базиса \mathfrak{C}), то

$$\forall Z \subseteq Y (|\Delta Z| \geq |Z|).$$

По теореме Кёнига — Холла в графе L^K существует паросочетание, взаимно однозначно отображающее всё множество Y на Y' . Это паросочетание и определит искомое соответствие между базисами \mathfrak{C} и \mathfrak{C}' . Теорема доказана.

Точно так же доказывается аналогичная теорема о двух базисах наибольшей длины. Но если требовать лишь равенства длин базисов, отказавшись от их экстремальности, то утверждение потеряет силу, как видно из следующего примера.

*) Один и тот же квазицикл из \mathfrak{L}_L^Λ может одновременно фигурировать в \mathfrak{C} и в \mathfrak{C}' , но соответствующие вершины в Y и Y' , конечно, считаются различными.

Для графа L , изображенного на рис. 76, каждая из двух систем подмножеств ребер

$$\{1, 2\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 7\} \quad (\mathfrak{C})$$

и

$$\{1, 3, 6\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 6\} \quad (\mathfrak{C}')$$

определяет в \mathfrak{Q}_L^Δ базис длины 12. Так как

$$\{1, 2\} = \{1, 3, 6\} + \{2, 3, 6\},$$

$$\{1, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 6\} + \{4, 5, 6\},$$

$$\{1, 3, 6\} = \{1, 3, 6\},$$

$$\{1, 4, 7\} = \{1, 3, 6\} + \{3, 5, 7\} + \{4, 5, 6\},$$

то соответствие

$$\{1, 2\} \leftrightarrow \{2, 3, 6\}, \quad \{1, 3, 4, 5\} \leftrightarrow \{4, 5, 6\},$$

$$\{1, 3, 6\} \leftrightarrow \{1, 3, 6\}, \quad \{1, 4, 7\} \leftrightarrow \{3, 5, 7\}$$

относит каждому элементу из \mathfrak{C} некоторое слагаемое его разложения по \mathfrak{C}' . Однако не только данное, но и никакое вообще взаимно однозначное соответствие между \mathfrak{C} и \mathfrak{C}' не сохраняет длин квазициклов. Предлагаем читателю разыскать в \mathfrak{Q}_L^Δ все базисы с наименьшей и с наибольшей длиной и убедиться, что для них теорема справедлива.

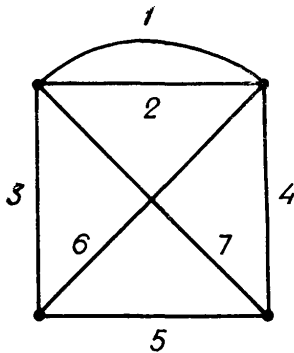


Рис. 76.

Таким образом, количества квазициклов данной длины в каждом из кратчайших и в каждом из длиннейших базисов пространства \mathfrak{Q}_L^Δ представляют собой набор числовых характеристик графа L , не меняющихся при произвольных перенумерациях вершин и ребер, а также при любой ориентации, дезориентации или переориентации ребер.

Информация о графе L , которую несут эти характеристики, очевидно, не является локальной и едва ли может быть отнесена к квазилокальной (см. § 8 в главе 1), поэтому дальнейшее исследование тех свойств графов, которые определяются указанными характеристиками, было бы весьма интересно. Для фактического же нахождения этих количеств достаточно решить несколько более общие и сами по себе полезные задачи о выявлении в \mathfrak{Q}_L^Δ какого-нибудь

кратчайшего и какого-нибудь длиннейшего базисов; следуя цитируемой работе Г. Ф. Степанца, рассмотрим первую из этих задач.

Пусть u_1 — произвольное цикловое ребро данного графа $L = (X, U; P)$. Среди циклов L , содержащих u_1 , выберем какой-либо C_1 наименьшей длины (он, очевидно, будет простым), и пусть $U(C_1)$ — множество ребер этого цикла. Если в множестве $U \setminus U(C_1)$ есть цикловые ребра графа L , то пусть u_2 — какое-нибудь из них, а C_2 — некоторый цикл наименьшей длины среди тех циклов графа L , которые содержат u_2 ; множество ребер этого цикла обозначим через $U(C_2)$. Если в множестве $U \setminus [U(C_1) \cup U(C_2)]$ еще есть цикловые ребра графа L , то выбираем одно из них u_3 и проходящий через него цикл C_3 наименьшей длины, и т. д. Процесс продолжаем до тех пор, пока не выберем такую систему циклов C_1, C_2, \dots, C_μ , чтобы множество $U \setminus \bigcup_{i=1}^{\mu} U(C_i)$ уже не содержало цикловых ребер графа L . Покажем, что $\mu \leq \lambda \doteq \lambda(L)$ и что найденную систему всегда можно пополнить некоторыми $\lambda - \mu$ квазициклами таким образом, чтобы получить один из кратчайших базисов в \mathfrak{Q}_L^Δ ; для простоты элементы пространства будем обозначать так же, как и соответствующие циклы (квазициклы) графа.

Утверждение тривиально при $\mu = 0$, ибо в этом случае граф L совсем не имеет цикловых ребер ($\lambda = 0$). Пусть оно уже доказано для некоторого $\mu = k \geq 0$ и пусть описанным процессом мы нашли систему циклов $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$ такую, что множество $U \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} U(C_i)$ не содержит цикловых ребер графа L .

По допущению индукции, среди базисов наименьшей длины в \mathfrak{Q}_L^Δ существует такой

$$\mathfrak{C}_k = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_k, C'_{k+1}, \dots, C'_\lambda\},$$

в котором $C'_i = C_i$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть

$$C_{k+1} = C'_{p_1} + C'_{p_2} + \dots + C'_{p_t}; \quad (*)$$

цикл C_{k+1} проходит через ребро u_{k+1} , поэтому в правой части равенства (*) имеется квазицикл C'_{p_q} , содержащий это ребро.

Так как $u_{k+1} \in U \setminus \bigcup_{i=1}^k U(C_i)$, то $k + 1 \leq p_q \leq \lambda$. Равенство (*) позволяет выразить C'_{p_q} через C_{k+1} и остальные элементы бази-

са \mathfrak{C}_k , поэтому система

$$\mathfrak{C}_{k+1} \doteq (\mathfrak{C}_k \setminus \{C'_{p_q}\}) \cup \{C_{k+1}\}$$

тоже есть базис пространства \mathfrak{Q}_L^Δ . Этот базис и является искомым расширением системы квазициклов $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$, поскольку он все их содержит и принадлежит к числу кратчайших, ибо C_{k+1} — кратчайший из циклов графа L , содержащих ребро u_{k+1} , откуда $l(C_{k+1}) \leq l(C'_{p_q})$, а базис \mathfrak{C}_k тоже предполагается кратчайшим. Утверждение доказано.

Пусть C_1, C_2, \dots, C_μ — система циклов, полученная с помощью описанного процесса (до его естественной остановки). Если $\mu = \lambda \doteq \lambda(L)$, то

$$\mathfrak{C} \doteq \{C_1, C_2, \dots, C_\mu\}$$

— один из кратчайших базисов в \mathfrak{Q}_L^Δ , и задача решена. Если же $\mu < \lambda$, то можно попытаться выбрать вместо C_μ другой кратчайший цикл, содержащий ребро u_μ ; в случае, когда никакой вариант выбора C_μ не позволяет продолжить процесс, можно выбрать другое ребро u_μ , а если и это не поможет, то пересмотреть выбор цикла $C_{\mu-1}$, и т. д.

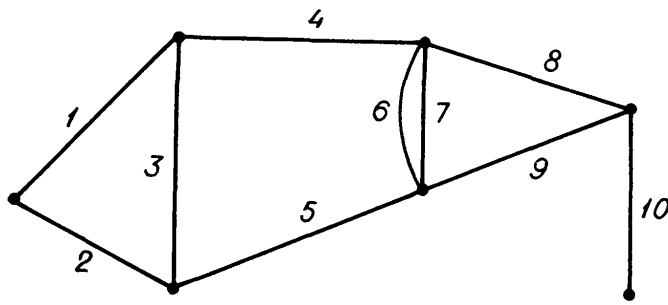


Рис. 77.

Соответствующий алгоритм сходен с алгоритмом слепого поиска выхода из лабиринта (см. начало § 18), однако теперь каждый шаг намного сложнее, ибо состоит в выявлении циклового ребра (§ 22) и кратчайшего цикла (§ 11). Хотелось бы придумать существенно более простой алгоритм.

Для иллюстрации описанного процесса рассмотрим граф L на рис. 77. Имеем, например,

$$u_1 = 5, \quad U(C_1) = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$u_2 = 8, \quad U(C_2) = \{7, 8, 9\},$$

$$u_3 = 1, \quad U(C_3) = \{1, 2, 3\};$$

так как $U(C_1) \cup U(C_2) \cup U(C_3)$ содержит все цикловые ребра L , то $\mu = 3$, но в то же время $\lambda = 4$. Цикл C_3 — единствен-

ный кратчайший среди проходящих через ребро 1; замена выбора $u_3 = 1$ выбором $u_3 = 2$, очевидно, ничего не дает. Пересмотрим C_2 , полагая на этот раз $U(C_2) = \{6, 8, 9\}$; после этого можно выбрать

$$u_3 = 7, \quad U(C_3) = \{6, 7\},$$

$$u_4 = 1, \quad U(C_4) = \{1, 2, 3\}.$$

Теперь $\mu = \lambda$, и четыре квазицикла с множествами ребер

$$\{3, 4, 5, 6\}, \{6, 8, 9\}, \{6, 7\}, \{1, 2, 3\}$$

образуют один из кратчайших базисов.

Мы не будем здесь исследовать, всегда ли такой процесс выделения кратчайших циклов «с пересмотром» приводит к цели, т. е. действительно ли он является алгоритмом. Заметим, что если в качестве C_1, C_2, \dots выбирать не кратчайшие, а длиннейшие квазициклы, то система C_1, C_2, \dots, C_μ (полученная без пересмотров) всегда может быть дополнена до какого-либо базиса наибольшей длины в \mathcal{Q}_L^Δ (доказательство совершенно аналогично предыдущему), однако для некоторых графов, например, для графа на рис. 77, никакой вариант процесса сам по себе не даст искомого базиса, т. е. после любых пересмотров все равно будет $\mu < \lambda$. Нам неизвестно также, получится ли алгоритм в случае, если вместо самых длинных квазициклов выбирать самые длинные простые циклы. Однако и при положительном ответе на последний вопрос соответствующий процесс оказался бы менее эффективным, чем в задаче о кратчайшем базисе, ибо тот алгоритм разметки вершин, с помощью которого выявляются кратчайшие циклы (см. § 11 в главе 2), непригоден для нахождения самых длинных циклов.

§ 24. Разрезы и пространство разрезов

Если алгебра циклов графа была известна в топологии очень давно *, то алгебраическое изучение разрезов, в некотором смысле двойственных циклам, начато в основном только работами Х. Уитни (2/1932, 4/1933, 5/1933) и продолжено А. Коцигом (3/1956).

*) Так, цикломатическое число графа есть не что иное, как одномерное число Бетти по модулю два соответствующего топологического комплекса (о связи между графами и топологическими комплексами см. § 47 главы 6).

Разрезом графа $L \doteq (X, U; P)$ называется подмножество $U' \subseteq U$ его ребер, обладающее тем свойством, что суграф, полученный из L удалением U' , имеет больше компонент связности, чем L . В дальнейшем будем иногда понимать под разрезом графа не само множество U' , а порождаемый им суграф $L' \doteq (X, U'; P)$. Разрез U' — *простой*, если никакое его правильное подмножество $U'' \subset U'$ не является разрезом графа L .

З а м е ч а н и е. Простой разрез, очевидно, заслуживает также названия «минимального разреза»; но с таким же успехом можно было простой цикл именовать «минимальным циклом», ибо он характеризуется аналогичным свойством минимальности: если U' — множество ребер простого цикла, а $U'' \subset U'$, то никакие из ребер U'' не могут образовывать цикла в L .

Нижеследующая теорема о разрезах сходна с теоремой § 22 о циклах.

Т е о р е м а 1. *Каковы бы ни были каркас T графа $L = (X, U; P)$ и ребро u этого каркаса, существует один и только один такой разрез U' графа L , который содержит u и не содержит других ребер каркаса T ; этот разрез — простой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$L_1 = (X_1, U_1; P), L_2 = (X_2, U_2; P), \dots, L_x = (X_x, U_x; P),$$

где $x \doteq x(L) \geq 1$, — компоненты связности данного графа L , а

$$T_1 = (X_1, V_1), T_2 = (X_2, V_2), \dots, T_x = (X_x, V_x)$$

— соответствующие компоненты каркаса T . Если $u \in V_i$ ($1 \leq i \leq x$), то обозначим через $T'_i = (X'_i, V'_i)$ и $T''_i = (X''_i, V''_i)$ те два дерева, на которые распадается T_i после удаления ребра u .

Очевидно, ребро u вместе с множеством V_i тех ребер, которые соединяют в L_i вершины X'_i с вершинами X''_i , образует простой разрез графа L . Но все другие разрезы, составленные ребром u и какими-то хордами каркаса T , обязательно должны содержать множество $\{u\} \cup V_i$, ибо удаление из L любых хорд каркаса T не разбивает ни одну из компонент L_1, L_2, \dots, L_x , а удаление хорд вместе с ребром u может привести к распадению только компоненты L_i , причем лишь в том случае, когда наряду с ребром u будут удалены и все те ребра, которые соединяли между собой множества X'_i и X''_i . Следовательно, $\{u\} \cup V_i$ — единственный разрез, обладающий требуемым свойством.

Т е о р е м а 2. *Любой цикл и любой простой разрез графа имеют четное число (возможно нуль) общих ребер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U' — простой разрез, а $L_i = (X_i, U_i; P)$ — та компонента связности графа L , которая

при удалении U' распадается на две: (X'_i, U'_i, P) и $(X''_i, U''_i; P)$. Пусть, далее, C — произвольный цикл в L . Так как U' — простой разрез, пара соседних вершин цикла C соединена в L ребром из U' тогда и только тогда, когда одна из этих вершин принадлежит X'_i , а другая X''_i ; но таких пар вершин на C , очевидно, четное число, ибо при полном обходе цикла мы попадаем из X'_i в X''_i столько же раз, сколько из X''_i в X'_i (в частности, это число — нуль, когда хотя бы одно из множеств X'_i и X''_i не содержит вершин цикла C).

З а м е ч а н и е. В теореме 2 цикл может не быть простым, но требование простоты разреза существенно: например, три стороны контура квадрата образуют разрез, имеющий три общих ребра с единственным (притом простым) циклом. Казалось бы, это портит ту двойственность между циклами и разрезами, которая явно наметилась в определении простого разреза и в теореме 1. Однако, как мы увидим, двойственность сохранится, если вместо циклов общего вида рассматривать еще более широкий класс квазициклов, а вместо всевозможных разрезов, наоборот, некоторый класс разрезов специального вида (в то же время более широкий, чем класс простых разрезов).

Элемент пространства \mathfrak{Q}_L суграфов графа L (§ 23) назовем *квалиразрезом*, если соответствующий суграф имеет с любым циклом в L четное число (возможно, и нуль) общих ребер. Приведем несколько примеров.

1) Нулевой элемент пространства \mathfrak{Q}_L (пустой суграф графа L) есть квалиразрез.

2) Всякому простому разрезу графа L отвечает в силу теоремы 2 квалиразрез в \mathfrak{Q}_L .

3) Если x — произвольная вершина графа L , то множеству всех его непетель, инцидентных x , отвечает квалиразрез; сам разрез при этом будем называть *центральным*, с центром в вершине x .

4) Если L — граф без циклов, то любой его суграф определяет квалиразрез.

Природу квалиразрезов выясняет

Т е о р е м а 3. *Непустое подмножество $U' \subseteq U$ ребер графа $L = (X, U; P)$ соответствует квалиразрезу в пространстве \mathfrak{Q}_L тогда и только тогда, когда U' является объединением попарно непересекающихся простых разрезов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $U' = \bigcup_{i=1}^k U'_i$, где U'_1, U'_2, \dots, U'_k — попарно непересекающиеся простые разрезы, то всякий цикл графа L имеет, согласно теореме 2, четное число общих ребер

с каждым из U'_i , а значит и с U' ; поэтому подмножество U' определяет квалиразрез.

Наоборот, пусть непустое $U' \doteq \{u, v, \dots\} \subseteq U$ определяет квалиразрез. Прежде всего, U' — разрез графа L . В самом деле, если U' — не разрез, то ребро u не может быть перешейком в суграфе L' , порожденном подмножеством ребер $(U \setminus U') \cup \{u\}$; поэтому в L' существует цикл, содержащий u , т. е. имеющий в L ровно одно общее ребро с U' , что противоречит определению квалиразреза.

Выберем в U' некоторое подмножество $U'' \subseteq U'$, являющееся простым разрезом графа L . Если $U' \setminus U'' = \emptyset$, то U' есть объединение системы простых разрезов, состоящей из единственного разреза U'' . В случае же непустоты множество $U' \setminus U''$ представляет собой квалиразрез, ибо всякий цикл графа L обладает четным числом общих ребер как с U' (по определению квалиразреза), так и с U'' (по теореме 2), следовательно, и с $U' \setminus U''$. Применяя к $U' \setminus U''$ то же рассуждение, что и к U' , мы выделим еще один простой разрез, и т. д. В конце концов исходное множество U' окажется представленным в виде объединения попарно непересекающихся простых разрезов, что и требовалось.

Непосредственно из определения квалиразреза следует, что сумма двух квалиразрезом есть квалиразрез, поэтому множество \mathcal{Q}_L^P всех квалиразрезом составляет подпространство в \mathcal{Q}_L . Назовем \mathcal{Q}_L^P *пространством разрезов* графа L ; найдем размерность $\dim \mathcal{Q}_L^P$.

Пусть T — произвольный каркас графа L . Каждому ребру из T отнесем тот единственный простой разрез, который оно в силу теоремы 1 образует вместе с некоторыми хордами, и покажем, что соответствующая система $\mathcal{Q}_L^P(T)$ из $\rho \doteq \rho(L)$ квалиразрезом составляет базис пространства \mathcal{Q}_L^P . Рассуждение двойственно тому, которое мы проводили в § 23 при определении размерности пространства циклов, поэтому сейчас изложим его более сжато.

Во-первых, все квалиразрезом в $\mathcal{Q}_L^P(T)$ линейно независимы, ибо каждый из них содержит ребро, не входящее в остальные (именно, ребро каркаса T). Во-вторых, всякий квалиразрез в \mathcal{Q}_L^P либо является нулевым, либо может быть образован сложением некоторых элементов $\mathcal{Q}_L^P(T)$; действительно, выбирая элемен-

*) При произношении верхний индекс P следует считать греческим «ро», а не латинским «пэ».

ты в $\mathcal{Q}_L^P(T)$ так, чтобы их сумма совпадала с заданным квалиразрезом на ребрах каркаса T , мы автоматически получим совпадение и на остальных ребрах графа L , ибо в противном случае сложение заданного квалиразреза с построенной суммой дало бы непустой квалиразрез, в котором участвуют только хорды каркаса, что невозможно, поскольку никакое подмножество хорд фиксированного каркаса не может служить разрезом графа.

Таким образом, $\mathcal{Q}_L^P(T)$ — базис пространства \mathcal{Q}_L^P и $\dim \mathcal{Q}_L^P = \rho(L)$ (ранг графа L). Всякую матрицу

$$A_L^P \doteq (a_{ij}^P) \doteq \begin{pmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \dots & a_{1m}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \dots & a_{2m}^P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\rho 1}^P & a_{\rho 2}^P & \dots & a_{\rho m}^P \end{pmatrix}$$

с $\rho \doteq \rho(L)$ строками и $m \doteq m(L)$ столбцами над полем $D \doteq D\{0, 1\}$, у которой строки представляют элементы некоторого базиса пространства разрезов \mathcal{Q}_L^P , будем называть *матрицей разрезов* графа L .

Как мы сейчас увидим, между матрицами разрезов и цикломатическими матрицами (§ 23) одного и того же графа существует взаимосвязь, позволяющая находить одни матрицы по другим. Если элементы

$$a \doteq (a_1, a_2, \dots, a_m) \text{ и } b \doteq (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

пространства суграфов \mathcal{Q}_L , удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i = 0,$$

назвать *ортогональными*, то в силу теоремы 2 и того факта, что в \mathcal{Q}_L^Λ существует базис из простых циклов, а в \mathcal{Q}_L^P — базис из простых разрезов, получаем: *каждый квазицикл ортогонален каждому квалиразрезу, иначе говоря, подпространства \mathcal{Q}_L^Λ и \mathcal{Q}_L^P в \mathcal{Q}_L ортогональны*. Отсюда следует, что для любой матрицы разрезов A_L^P и любой цикломатической матрицы A_L^Λ графа L

$$A_L^P \cdot (A_L^\Lambda)^* = 0,$$

или, что равносильно,

$$A_L^\Delta \cdot (A_L^P)^* = O$$

(* — операция транспонирования), где символ O означает нулевые матрицы (в первом случае — с ρ строками и λ столбцами, во втором — с λ строками и ρ столбцами).

Первое из этих матричных равенств показывает, что квазициклы являются решениями однородной системы уравнений (т. е. фактически сравнений по модулю два)

$$A_L^P \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}} \right\} \rho \text{ строк,}$$

а так как размерность пространства решений равна $m - \rho = \lambda$, то это пространство совпадает с \mathcal{Q}_L^Δ . Таким образом, нахождение некоторой цикломатической матрицы графа L по какой-либо из его матриц разрезов A_L^P равносильно нахождению фундаментальной системы решений для однородной системы линейных уравнений (сравнений), а нахождение всех цикломатических матриц — нахождению всех фундаментальных систем (при неизменной A_L^P). Точно так же, если известна одна из цикломатических матриц A_L^Δ , то нахождение некоторой матрицы (или всех матриц) разрезов A_L^P сводится к решению системы

$$A_L^\Delta \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}} \right\} \lambda \text{ строк.}$$

В следующем параграфе мы покажем, как можно получать матрицы A_L^P и A_L^Δ друг из друга и из матрицы A_L непосредственными преобразованиями, не прибегая к решению линейных систем.

В заключение отметим без доказательства один результат Г. Трента (2/1964). Пусть L — обыкновенный 2-связный граф без вершин степени два, T — некоторый каркас (дерево) графа L , а u_0 — некоторое ребро T . Тогда у L существует такой каркас T' (это может быть и сам T), который содержит ребро u_0 .

и обладает тем свойством, что после удаления из L ребер простого разреза, образованного ребром u_0 с некоторыми хордами каркаса T' , остается суграф без перешейков.

§ 25. Преобразования матриц графа

Пусть

$$\xi = \eta = \theta = 1, \quad \zeta = 0, \quad 2 = 0,$$

т. е. полукольцо K представляет собой поле $D \doteq D \{0, 1\}$ вычетов целых чисел по модулю два, и пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный непустой граф с пронумерованными множествами вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и ребер $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Матрица инциденций $A \doteq A_L$ над полем D дает о графе L неполную информацию, так как не позволяет различать направлений дуг и отличать дуги от звеньев, а в отношении петель указывает лишь их количество, ничего не говоря о расположении. Однако и такая информация оказывается весьма важной: в этом параграфе мы покажем, как по заданной матрице A_L легко можно выявить какой-либо из каркасов графа L , построить некоторые базисы в пространстве циклов \mathcal{Q}_L^A (§ 23) и пространстве разрезов \mathcal{Q}_L^P (§ 24), а в следующем параграфе дадим способы обзора всех каркасов и подсчета их количества в графе L .

Столбцы всякой матрицы над D , имеющей k строк, можно считать элементами k -мерного линейного пространства над полем коэффициентов D , если определить сложение столбцов как покомпонентное по модулю два (см. определение пространства суграфов в § 23). Для простоты условимся под «столбцом» понимать всякий вертикально записанный элемент указанного k -мерного пространства, независимо от того, присутствует он фактически в матрице или нет. Линейная зависимость системы столбцов S означает существование непустой подсистемы $S' \subseteq S$ такой, что сумма всех столбцов из S' есть нуль-столбец (состоящий сплошь из нулей). Все сказанное можно повторить по отношению к строкам.

Начнем с выяснения смысла линейной зависимости между столбцами матрицы инциденций графа.

Т е о р е м а 1. Система S некоторых столбцов матрицы инциденций A_L (над D) графа L линейно независима тогда и только тогда, когда суграф T_S , порожденный множеством тех

ребер графа L , которые соответствуют столбцам S , не содержат циклов.

Доказательство. Пусть сначала T_S обладает циклом C . Если у C есть петля, то соответствующий столбец в S является нуль-столбцом и вся система линейно зависима. Если же C не содержит петель, то каждая вершина графа L инцидентна четному числу ребер этого цикла, значит, подсистема из тех столбцов S , которые отвечают ребрам цикла C , в сумме дает нуль-столбец, т. е. S опять линейно зависима.

Пусть теперь суграф T_S не содержит циклов и пусть S' — произвольная непустая подсистема в S . Ей соответствует суграф $T_{S'}$ без циклов, который, будучи непустым, обладает внешней вершиной (см. теорему 3 § 20), скажем x_k . Среди элементов матрицы A_L , стоящих на пересечении k -й строки со столбцами системы S' , ровно один отличен от нуля, а именно тот, который соответствует единственному инцидентному x_k ребру суграфа $T_{S'}$; поэтому сумма всех столбцов системы S' не может быть нуль-столбцом. Иначе говоря, никакая подсистема из S не может в сумме давать нуль-столбец, а это и означает линейную независимость системы S . Теорема доказана.

Следствие 1. Ранг $\rho(A_L)$ матрицы инциденций A_L над D равен рангу $\rho(L)$ графа L .

В самом деле, из графа L всегда можно так удалить $m - \rho(L)$ ребер, чтобы оставшийся суграф L' не имел циклов (см. теорему 1 § 22), т. е. чтобы $\rho(L)$ ребрам L' отвечали линейно независимые столбцы матрицы A_L ; поэтому $\rho(A_L) \geq \rho(L)$. С другой стороны, всякий суграф, получаемый из L удалением менее чем $m - \rho(L)$ ребер, обладает циклами (в силу той же теоремы 1 § 22), поэтому система более чем из $\rho(L)$ столбцов матрицы A_L всегда линейно зависима, откуда $\rho(A_L) \leq \rho(L)$.

Следствие 2. Система S из $\rho(L)$ столбцов матрицы A_L линейно независима тогда и только тогда, когда соответствующий суграф T_S является каркасом графа L .

Действительно, высказывание о линейной независимости в данном случае равносильно высказыванию $\rho(T_S) = \rho(L)$, т. е., вместе с $m(T_S) = \rho(L)$, высказыванию

$$m(T_S) = m(L) - \lambda(L) \text{ \& } \lambda(T_S) = 0,$$

означающему, что T_S — каркас графа L (см. определение каркаса в § 22).

Теперь приступим к непосредственному решению задач, сформулированных в начале параграфа. Пусть нам дана мат-

рица инцидентий графа L

$$A_L \doteq (a_{ij}) \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

над полем D .

Задача нахождения базиса пространства разрезов \mathcal{Q}_L^P решается просто: так как каждая строка матрицы A_L есть квалиразрез (ибо ее единицы отвечают непетлям графа L , инцидентным соответствующей вершине — см. пример 3 к определению квалиразреза в § 24), то для получения матрицы разрезов достаточно сохранить в A_L произвольную систему из $\rho(L)$ линейно независимых строк (такие системы есть ввиду следствия 1) и отбросить остальные строки. Мы дадим такой процесс преобразования матрицы A_L , который позволит сразу выявить в L некоторый каркас, в \mathcal{Q}_L^P — некоторый базис, состоящий из простых разрезов, а в \mathcal{Q}_L^Δ — некоторый базис, состоящий из простых циклов*. Заодно получим простой способ преобразования матрицы A_L^P в A_L^Δ и наоборот.

С матрицами над полем D будем производить операции следующих трех типов:

1) перестановка столбцов;

2) перестановка строк;

3) замена строки суммой ее с другой строкой матрицы; применение первой операции к A_L соответствует перенумерованию ребер графа L , применение второй операции — перенумерованию вершин, а третья операция вполне может перевести A_L в такую матрицу, которая вообще не будет матрицей инцидентий никакого графа. Важно, однако, заметить следующее.

Во-первых, операции 2) и 3) не нарушают взаимно-однозначного соответствия между столбцами матрицы и ребрами графа, а после применения операции 1) это соответствие легко восстановить надлежащим перенумерованием ребер; мы будем считать, что такое перенумерование всегда производится, и под «одноименными» столбцами исходной и результирующей матриц понимать именно те столбцы, которые от-

*) Точнее было бы говорить о квалиразрезах, соответствующих простым разрезам, и о квазициклах, соответствующих простым циклам графа L .

вечают одному и тому же ребру графа (а не те, которые в матрицах расположены на одинаковых местах).

Во-вторых, операции 1), 2), 3) не меняют не только ранга матрицы, но и полной системы линейных зависимостей между столбцами. Это значит, что подсистема столбцов исходной матрицы линейно зависима или независима одновременно с подсистемой одноименных столбцов результирующей матрицы.

Преобразование матрицы инциденций A_L будем вести следующим образом.

Если не все элементы a_{ij} равны нулю, то с помощью операций 1) и 2) переведем какой-либо из единичных элементов на место a_{11} и затем, применяя в случае надобности операцию 3), добьемся того, чтобы все остальные элементы первого столбца стали нулями. Если в полученной матрице будут еще единичные элементы, не принадлежащие ни первой строке, ни первому столбцу, то при помощи перестановок остальных строк и столбцов переведем один из таких элементов на место a_{22} , а затем посредством операции 3) уничтожим все остальные ненулевые элементы второго столбца. Продолжая в том же духе, мы придадим матрице A_L вид

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,\rho+1} & a'_{1,\rho+2} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,\rho+1} & a'_{2,\rho+2} & \dots & a'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{\rho,\rho+1} & a'_{\rho,\rho+2} & \dots & a'_{\rho,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

где $\rho \doteq \rho(L)$. Возможность образования в A' единичной квадратной подматрицы порядка $\rho(L)$, но не выше, а также тот факт, что в A' всякий элемент a_{ij} с индексами $i \geq \rho + 1$, $j \geq \rho + 1$ автоматически окажется нулем, следует из общеизвестных положений линейной алгебры. Случай, когда все $a_{ij} = 0$, т. е. когда L — вырожденный граф, не является исключительным, ибо пустую подматрицу можно рассматривать как единичную порядка $\rho(L) = 0$.

Множество ребер, соответствующих первым ρ столбцам матрицы A' , порождает, в силу следствия 2, некоторый каркас T графа L .

Далее, подматрица

$$A_L^P \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1, \rho+1} & a'_{1, \rho+2} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2, \rho+1} & a'_{2, \rho+2} & \dots & a'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{\rho, \rho+1} & a'_{\rho, \rho+2} & \dots & a'_{\rho m} \end{pmatrix},$$

образованная первыми ρ строками A' , представляет собой некоторую матрицу разрезов графа L , ибо ее строки линейно независимы, являются квалиразрезами (как линейные комбинации строк матрицы A_L) и количество их $\rho = \dim \mathfrak{Z}_L^P$. Притом каждый из этих квалиразрезов — простой: если U' — соответствующее ему подмножество ребер L , то, с одной стороны, U' есть объединение попарно непересекающихся простых разрезов (теорема 3 § 24), каждый из которых должен содержать ребра каркаса T (ибо никакой разрез не может состоять из одних лишь хорд фиксированного каркаса), а с другой стороны, U' содержит только одно ребро каркаса T (как видно из структуры матрицы A_L^P).

Наконец, отбросим от матрицы A_L^P единичную матрицу E_ρ , образованную первыми ρ столбцами, к оставшейся матрице припишем снизу единичную матрицу $E_{m-\rho}$ и полученную матрицу транспонируем; всю такого рода процедуру будем кратко называть *перекройкой*. Результирующая матрица

$$A_L^\Lambda = \left\| \begin{array}{cccccccc} a'_{1, \rho+1} & a'_{2, \rho+1} & \dots & a'_{\rho, \rho+1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{1, \rho+2} & a'_{2, \rho+2} & \dots & a'_{\rho, \rho+2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1m} & a'_{2m} & \dots & a'_{\rho m} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|$$

является цикломатической для графа L , если считать, что столбцы матриц A_L^P и A_L^Λ с одинаковым номером отвечают одному и тому же ребру графа. Действительно, все $m - \rho = \lambda \doteq \doteq \lambda(L) = \dim \mathfrak{Z}_L^\Lambda$ строк матрицы A_L^Λ , очевидно, линейно независимы и образуют базис пространства решений системы*

*) Поскольку в процессе преобразования матрицы A_L производились перестановки столбцов, под пространством циклов \mathfrak{Z}^Λ следует понимать не исходное, отвечающее прежней нумерации ребер графа, а изоморфное, полученное соответствующими перестановками компонент во всех строках. То же самое относится к пространству разрезов \mathfrak{Z}_L^P . Все пространство суграфов \mathfrak{Z}_L при перенумерации ребер L изоморфно отображается на себя (т. е. претерпевает автоморфизм).

$$A_L^P \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(см. конец § 24), ибо, как непосредственно следует из структуры наших матриц A_L^P и A_L^Δ ,

$$A_L^P \cdot (A_L^\Delta)^* = \begin{pmatrix} 2a'_{1, \rho+1} & 2a'_{1, \rho+2} & \dots & 2a'_{1m} \\ 2a'_{2, \rho+1} & 2a'_{2, \rho+2} & \dots & 2a'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a'_{\rho, \rho+1} & 2a'_{\rho, \rho+2} & \dots & 2a'_{\rho m} \end{pmatrix} = 0.$$

Каждой строке матрицы A_L^Δ отвечает в L простой цикл, поскольку у соответствующего квазицикла ровно одно ребро (то, ко-

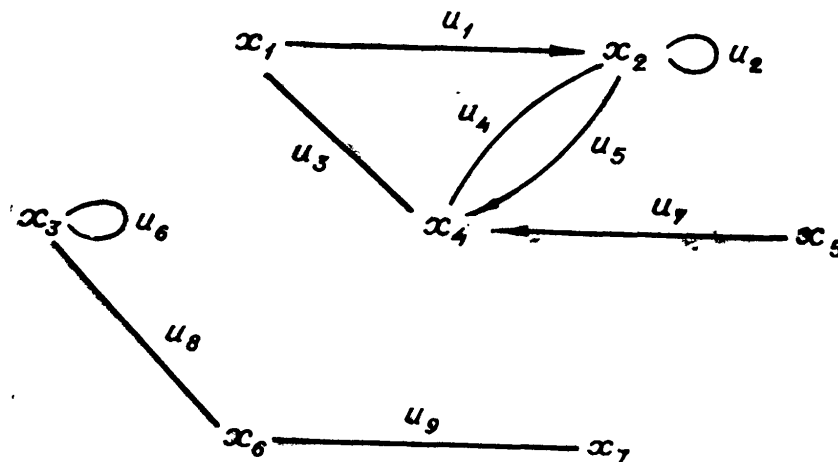


Рис. 78.

торому отвечает единица в подматрице $E_{m-\rho}$) является хордой каркаса T , а остальные принадлежат T , но в силу теоремы 3 § 22 квазициклу с таким составом ребер необходимо соответствует простой цикл.

Чтобы на практике не потерять индивидуальности ребер графа в процессе преобразования его матрицы инциденций, можно с самого начала дописать к этой матрице строку, содержащую исходные номера (или другие знаки отличия) ребер, которая будет участвовать только в преобразованиях типа 1, но не 2 и 3.

Пример. Графу L на рис. 78 отвечает матрица инциденций

$$A_L = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

с добавочной строкой номеров вверху. Последовательно производя операции, типы которых указаны над стрелками (для нескольких операций одного и того же типа подряд промежуточные результаты не выписаны), придадим матрице требуемый вид:

$$A_L \xrightarrow{3} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{1} & \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} & \xrightarrow{3} & \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{1} & \begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} & \xrightarrow{3} & \begin{matrix} 1 & 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow$$

$$A_L^\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 7 & 9 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрице A' мы сразу видим, что один из каркасов данного графа L порождается множеством ребер

$$\{u_1, u_3, u_8, u_7, u_9\}$$

(жирные линии на рис. 79), а один из базисов пространства разрезов \mathcal{Q}_L^P образован квалирезами, соответствующими мно-

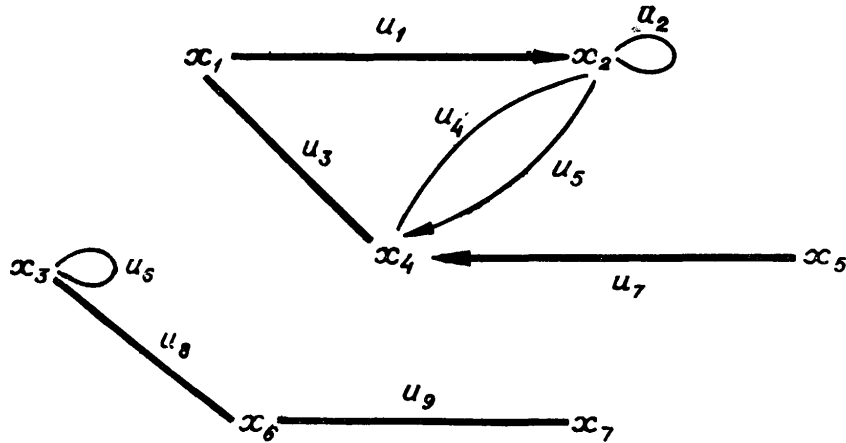


Рис. 79.

жествам

$$\{u_1, u_4, u_5\}, \{u_3, u_4, u_5\}, \{u_8\}, \{u_7\}, \{u_9\}$$

(все эти разрезы в данном случае оказались простыми; так будет наверняка, если определять базис по матрице A_L^P , а не по A'). Матрица A_L^Δ указывает базис пространства циклов \mathcal{Q}_L^Δ ; базисные квазициклы, как и следовало ожидать, отвечают простым циклам, и их множества ребер суть

$$\{u_2\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_6\}.$$

Для полного восстановления второго и третьего циклов (вместе с вершинами, с точностью до выбора начальной вершины и направления обхода) достаточно обратиться к исходной матрице A_L (над D); это дает, например, циклы

$$x_2 u_1 x_1 u_3 x_4 u_4 x_2 \quad \text{и} \quad x_2 u_1 x_1 u_3 x_4 u_5 x_2.$$

Что же касается первого и четвертого циклов, обладающих длиной 1, то по матрице A_L нельзя сказать, какие именно вершины графа в них входят. Естественно, однако, предположить, что граф L первоначально был задан матрицей инциденций

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
 \xi & 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \eta & \xi & 0 & \theta & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & \theta & 0 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & \theta & \theta & \eta & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & \theta & 0 & 6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 7
 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Номера вершин}$$

над свободным полукольцом K , и лишь затем на образующие этого полукольца были наложены соотношения, превратившие его в поле $D \{0, 1\}$; по первоначальной матрице без труда восстанавливаем первый и второй базисные циклы:

$$x_2 u_2 x_2 \text{ и } x_3 u_6 x_3.$$

Процесс преобразования матрицы A_L к виду A' , разумеется, неоднозначен; действуя в ином порядке, чем было только что описано, мы можем в том же примере придать матрице вид

$$A' = \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 4 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 5 & 6 \\
 \left\| \begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right\| ;
 \end{array}$$

ребра u_1, u_4, u_7, u_8, u_9 соответствующего каркаса изображены на рис. 80 жирными линиями, а записать базисы в пространствах \mathfrak{Q}_L^P и \mathfrak{Q}_L^Λ предоставим читателю.

Итак, мы описали способ нахождения матриц A_L^P и A_L^Λ по A_L с помощью эффективной алгоритмической последовательности алгебраических преобразований; обратная задача о восстановлении A_L по матрице A_L^P или по A_L^Λ оказывается более сложной

и будет специально рассмотрена в § 27. Сейчас мы покажем, как получать цикломатические матрицы графа L из его матриц разрезов и наоборот, не зная матрицы инциденций A_L .

Допустим сначала, что дана некоторая матрица разрезов; с помощью операций типа 1), 2), 3) приводим ее к такому ви-

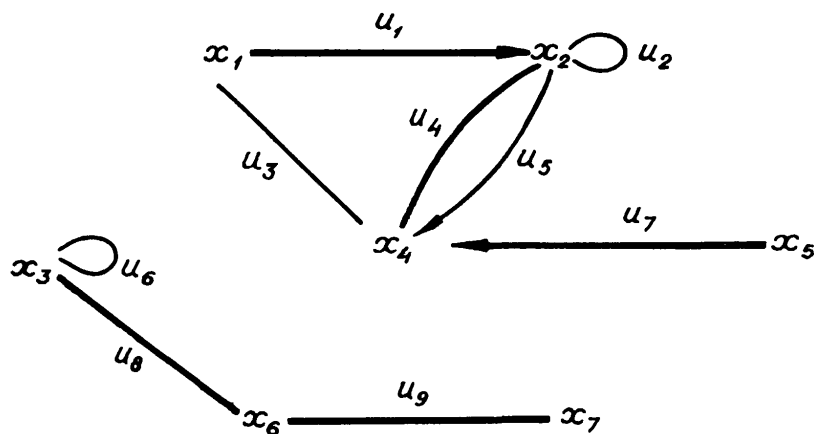


Рис. 80.

ду, чтобы первые столбцы образовывали единичную подматрицу E_ρ . Строкам полученной матрицы A_L^P отвечает некоторый базис пространства \mathfrak{Q}_L^P (изоморфного исходному пространству разрезов графа L). Перекройка матрицы A_L^P превращает ее в матрицу A_L^Λ , которая и будет одной из цикломатических для L , ибо

$$A_L^P \cdot (A_L^\Lambda)^* = O.$$

Наоборот, пусть первоначально дана некоторая цикломатическая матрица графа L . Применяя операции типа 1), 2), 3), добьемся того, чтобы последние λ столбцов образовали единичную подматрицу E_λ . Строкам полученной матрицы A_L^Λ отвечает некоторый базис пространства \mathfrak{Q}_L^Λ (изоморфного исходному пространству циклов графа L). Над A_L^Λ совершим процедуру, обратную перекройке A_L^P в A_L^Λ , а именно отбросим E_λ , допишем сверху $E_{m-\lambda}$ ($=E_\rho$) и всю матрицу транспонируем; эту процедуру тоже будем называть перекройкой. Результирующая матрица A_L^P представляет собой одну из матриц разрезов для L , ибо

$$A_L^\Lambda \cdot (A_L^P)^* = O.$$

Т е о р е м а 2. Пусть A — матрица над D , содержащая единичную матрицу E с тем же количеством строк, что и у A . Тогда

1) если для некоторого графа матрица A является матрицей разрезов, то разрезы, отвечающие всем ее строкам, — простые;

2) если для некоторого графа матрица A — цикломатическая, то циклы, отвечающие строкам, — простые.

Эти факты уже установлены для матриц A_L^P и A_L^Δ , специальным образом полученных из A_L ; однако способ их получения учитывался лишь в следующем виде: первым ρ столбцам матрицы A_L^P (или, что равносильно, первым ρ столбцам A_L^Δ) отвечают ребра некоторого каркаса графа L . Достаточно поэтому показать, что аналогичное условие, только для столбцов матрицы E вместо первых ρ столбцов, выполнено и в общем случае.

Пусть A_L^Δ — цикломатическая матрица графа L , содержащая единичную подматрицу $E \doteq E_\lambda$ ($\lambda \doteq \lambda(L)$), а $\mathcal{Q}_L^\Delta(A_L^\Delta)$ — множество квазициклов L , определяемых строками A_L^Δ . Каждое из λ ребер, отвечающих в L столбцам E , содержится в одном и только одном из квазициклов $\mathcal{Q}_L^\Delta(A_L^\Delta)$, притом разные ребра — в разных квазициклах. Поэтому последовательное удаление этих λ ребер из графа L уменьшит его цикломатическое число ровно на λ единиц, и оставшиеся $\rho = m - \lambda$ ребер определят некоторый каркас графа L . В случае, когда данная матрица A есть A_L^P для некоторого L , можно провести двойственное рассуждение или (что проще) свести этот случай к предыдущему, переставив столбцы подматрицы E на первые ρ мест и затем перекраивая всю матрицу в цикломатическую.

Из свойств графа L , непосредственно устанавливаемых по его матрицам A_L^P и A_L^Δ , отметим еще следующие.

Т е о р е м а 3. Пусть A — матрица над D , содержащая единичную подматрицу с тем же числом строк. Если в A некоторый столбец S_j и некоторая строка содержат единицу только на пересечении, т. е. если

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \dots & S_j & \dots & S_m \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & 0 & \dots & a_{pm} \end{array} \right\| \end{array},$$

то

1) в случае $A = A_L^P$ ребро графа L , отвечающее столбцу S_j , является перешейком;

2) в случае $A = A_L^\Delta$ ребро L , отвечающее S_j , — петля. Наоборот, перешейкам и петлям графа L всегда отвечают пары «столбец — строка» указанного вида в матрице A_L^P , соответственно в A_L^Δ .

Очевидно, ввиду теоремы 2.

Т е о р е м а 4. *Одинаковым ненулевым столбцам матрицы A_L^P отвечают в графе L непетли, соединенные параллельно, т. е. инцидентные одной и той же паре вершин. Одинаковым ненулевым столбцам матрицы A_L^Δ отвечают непетли, соединенные последовательно, т. е. образующие в L простую цепь, неконцевые вершины которой не инцидентны никаким другим непетлям. Наоборот, параллельным ребрам графа отвечают одинаковые столбцы в A_L^P , а последовательным ребрам — одинаковые столбцы в A_L^Δ .*

Действительно, если несколько непетель соединены параллельно, то всякий квалиразрез либо содержит весь пучок сразу, либо не содержит ни одного ребра этого пучка. Точно так же если несколько непетель соединены последовательно, то всякий квазицикл либо содержит всю цепочку, либо не содержит ни одной ее непетли.

Что касается местоположения петель и перешейков в графе, то об этом по матрицам A_L^P и A_L^Δ абсолютно ничего нельзя узнать; они не дают также сведений о количестве компонент и о числе изолированных вершин, так как ни сочленение двух компонент в одной вершине, ни отбрасывание изолированной вершины (при условии передачи инцидентных ей петель на попечение других вершин) не меняет этих матриц.

§ 26. Обзор и подсчет каркасов

Как мы уже знаем, подмножество $U' \subseteq U$ из $\rho(L)$ ребер графа $L(X, U; P)$ порождает его каркас тогда и только тогда, когда ранг подматрицы, образованной теми столбцами матрицы инциденций A_L , которые отвечают ребрам U' , равен $\rho(L)$ (см. следствие 2 из теоремы 1 § 25). Мы знаем также, что полная система линейных зависимостей столбцов в матрице инциденций A_L — такая же, как и в любой матрице разрезов A_L^P . Поэтому каркасы графа L взаимно однозначно соответствуют тем минорам порядка $\rho(L)$ матрицы A_L^P , которые отличны от нуля, т. е. значение которых равно 1 (ибо определители вычисляются в поле $D \doteq D \setminus \{0, 1\}$). А определитель в поле D равен единице тог-

да и только тогда, когда в его разложении (согласно определению) количество слагаемых, не содержащих нулевых сомножителей, нечетно.

Из сказанного вытекает правильность следующего алгоритма для выявления всех каркасов данного графа, который предложен четырьмя японскими математиками (И. Касахара, К. Тезука, Линг Шун Тонг и Т. Китахаша, 1962) и выглядит гораздо привлекательнее полного перебора всех миноров $\rho(L)$ -го порядка матрицы A_L^P .

Рассмотрим коммутативное кольцо $D(\{u_i\})$, порожденное элементами u_1, u_2, \dots, u_m (все ребра графа L) и 1 (единица), удовлетворяющими, кроме соотношений коммутативности, также соотношениям

$$u_1^2 = u_2^2 = \dots = u_m^2 = 0, \quad 2 = 0.$$

Пусть $A_L^P(\{u_i\})$ — матрица, полученная умножением каждого столбца матрицы A_L^P на соответствующий элемент — ребро u_i ; так, если

$$A_L^P = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{\rho 1} & a'_{\rho 2} & \dots & a'_{\rho m} \end{vmatrix},$$

а номера столбцов совпадают с номерами соответствующих ребер графа L , то

$$A_L^P(\{u_i\}) = \begin{vmatrix} a'_{11}u_1 & a'_{12}u_2 & \dots & a'_{1m}u_m \\ a'_{21}u_1 & a'_{22}u_2 & \dots & a'_{2m}u_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{\rho 1}u_1 & a'_{\rho 2}u_2 & \dots & a'_{\rho m}u_m \end{vmatrix}.$$

Раскрывая произведение

$$\prod_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^m a'_{ij}u_j$$

и пользуясь определяющими соотношениями кольца $D(\{u_i\})$, мы получим сумму, каждое слагаемое которой представляет собой произведение $\rho = \rho(L)$ различных множителей-ребер u_i , с коэффициентом, равным определителю из соответствующих

$\rho(L)$ столбцов матрицы A_L^P (поскольку в поле D и кольце $D(\{u_i\})$ вычитание равносильно сложению). Окончательно уцелееет сумма таких произведений, в которых сомножители взаимно однозначно соответствуют ребрам всевозможных каркасов данного графа L .

Например, для полного четырехвершинного обыкновенного графа F_4 , ребра которого мы вместо символов u_i обозначили различными буквами без индексов (рис. 81), имеем

$$A_{F_4} = \begin{vmatrix} & a & b & c & d & e & f \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

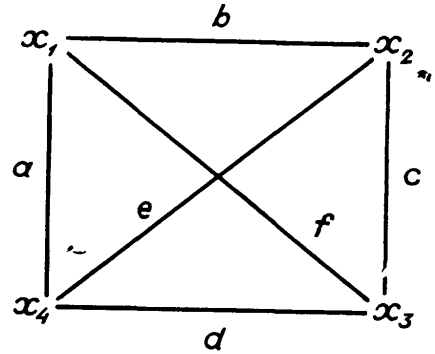


Рис. 81.

$\rho(A_F) = \rho(F_4) = 3$, и линейная независимость первых трех строк очевидна из структуры левого верхнего минора. Поэтому одной из матриц разрезов отвечает над кольцом $D(a, b, c, d, e, f)$ матрица

$$A_{F_4}^P(a, b, c, d, e, f) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & b & c & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & f \end{pmatrix},$$

дающая произведение

$$(a + b + f)(b + c + e)(c + d + f) = abc + abd + abf + acd + ace + acf + ade + aef + bcd + bce + \underbrace{2bcf}_{=0} + bde + bdf + bef + cdf + cef + def$$

(слагаемые ac^2 и т. п. равны нулю в силу определяющих соотношений $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 0$ кольца). Таким образом, все 16 каркасов (судеревьев) графа F_4 порождаются множествами ребер

- $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, f\}, \{a, c, d\},$
- $\{a, c, e\}, \{a, c, f\}, \{a, d, e\}, \{a, e, f\},$
- $\{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{b, d, f\},$
- $\{b, e, f\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}.$

Если бы мы в качестве $A_{F_4}^P$ взяли другую матрицу разрезов того же графа, например

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{matrix}$$

то получили бы

$$\begin{aligned} (a + b + f)(b + c + e)(b + d + e + f) &= abd + \underbrace{2abe}_{=0} + abf + \\ &+ abc + acd + ace + acf + ade + aef + bcd + bce + \underbrace{2bcf}_{=0} + \\ &+ bde + \underbrace{3bef}_{=bef} + bdf + cdf + cef + def, \end{aligned}$$

т. е., конечно, прежний результат.

Второй алгоритм выявления каркасов, двойственный первому и предложенный теми же четырьмя авторами, мы поясним на конкретном примере, притом опять для графа F_4 . Найдём одну из цикломатических матриц:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \xrightarrow{(3)} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{F_4}^\Delta; \end{matrix} \end{aligned}$$

по аналогии с матрицей $A_L^P(\{u_i\})$ составляем над кольцом $D(a, b, c, d, e, f)$ матрицу

$$A_{F_4}^\Delta(a, b, c, d, e, f) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

и раскрываем произведение

$$\begin{aligned}
 (a + b + c + d)(a + b + e)(b + c + f) &= \underbrace{3abc}_{=abc} + \underbrace{2abf}_{=0} + \\
 + abe + ace + aef + \underbrace{2bce}_{=0} + bef + acf + bcf + cef + abd + \\
 + acd + adf + bcd + bdf + bde + cde + def.
 \end{aligned}$$

Сомножители слагаемых отвечают хордам различных каркасов, т. е. множества хорд всевозможных каркасов графа F_4 суть $\{a, b, c\}, \dots, \{d, e, f\}$. Составив дополнения этих множеств до множества $\{a, b, c, d, e, f\}$ всех ребер графа, опять получим все 16 каркасов (только в другом порядке). Обосновать второй алгоритм можно по той же схеме, что и первый, воспользовавшись двойственностью между циклами и разрезами (§ 24); предоставим этот труд читателю.

Зная множества хорд всех каркасов, можно выявить все простые циклы графа; процесс разъясним опять на примере графа F_4 . Выпишем еще раз множества хорд (для удобства в словарном порядке):

$$\left. \begin{aligned}
 &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \\
 &\{a, c, f\}, \{a, d, f\}, \{a, e, f\}, \{b, c, d\}, \{b, c, f\}, \{b, d, e\}, \\
 &\{b, d, f\}, \{b, e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\};
 \end{aligned} \right\} (*)$$

каждое из них содержит $\lambda(F_4) = 3$ ребра. Для каждого сочетания из всех m ребер графа по $\lambda - 1$ (в данном случае таких сочетаний $C_6^2 = 15$) найдем в (*) те множества, каждое из которых содержит все ребра этого сочетания, и из каждого множества выпишем единственное ребро, не вошедшее в сочетание; совокупность выписанных (для данного сочетания) ребер определяет простой цикл графа. Нетрудно показать, что, перебрав все $C_m^{\lambda-1}$ сочетаний, мы получим все простые циклы, но, к сожалению, некоторые из этих циклов — по несколько раз. Так, в рассматриваемом примере сочетание $\{a, b\}$ входит в три множества $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}$ и $\{a, b, e\}$, откуда получаем простой цикл, составленный ребрами c, d, e ; но тот же самый цикл (с точностью до выбора начальной вершины и направления обхода) дадут нам также сочетания $\{a, f\}$ и $\{b, f\}$. Остальные циклы длины 3 тоже получают по три раза, но зато циклы длины 4 (с множествами $\{b, d, e, f\}, \{a, c, e, f\}$ и $\{a, b, c, d\}$) выда-

ются лишь по одному разу. Обоснование описанного процесса в общем виде и его усовершенствование предложим читателю.

Умея выявлять все каркасы графа, мы тем самым умеем находить их количество; однако в случае, когда полный обзор каркасов не требуется, подсчет их числа хотелось бы упростить. Для этой задачи существует удобный и поучительный способ решения, предложенный Ж. Лантьери (1950) и Г. Трентом (1/1954)*; для его обоснования нам понадобятся две леммы об определителях над кольцом S всех целых чисел.

Л е м м а 1. *Если в определителе над S изменить знак какого-либо элемента, то значение полученного определителя будет четным или нечетным одновременно со значением исходного. Действительно, изменение знака произвольного элемента повлечет изменение знака некоторых слагаемых в разложении определителя, а так как все слагаемые — числа целые, то четность их суммы не изменится.*

Л е м м а 2. *Пусть определитель над S составлен из чисел $0, 1$ и -1 и пусть каждый его столбец содержит не более двух ненулевых элементов, причем если таких элементов в столбце ровно два, то один из них равен 1 , а другой равен -1 . Тогда значение определителя может быть только $0, 1$ или -1 .*

Это утверждение докажем индукцией по порядку k определителя. При $k = 1$ оно тривиально. Допустим его уже доказанным для некоторого $k \geq 1$ и рассмотрим произвольный определитель M порядка $k + 1$, удовлетворяющий условию леммы. Если в M есть нуль-столбец, то значение $M = 0$. Если в M имеется столбец с единственным ненулевым элементом, то, разлагая M по этому столбцу, мы в силу допущения индукции получим для M значение $0, 1$ или -1 . Наконец, если в M нет столбцов менее чем с двумя ненулевыми элементами, то пусть в первом столбце на i -м месте стоит 1 , а на j -м месте стоит -1 ; заменяя j -ю строку суммой ее с i -й строкой, получим определитель M' , у которого в первом столбце только один элемент отличен от нуля, причем соответствующий этому элементу минор k -го порядка будет удовлетворять условию леммы** и, по предположению индукции, обладать значением $0, 1$ или -1 . Поэтому M' , а значит и M , имеет значение $0, 1$ или -1 , что и требовалось доказать.

*) Этот способ можно видоизменить так, чтобы получать не количество, а полное перечисление каркасов графа. Другие способы перечисления каркасов графа предложены С. Хаками (1961), М. Пекарским (1965) и Дж. Минти (2/1965).

**) Весь определитель M' , очевидно, может и не удовлетворять условию леммы.

Пусть дан граф $L = (X, U; P)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Образует квадратную матрицу

$$S_L \doteq (s_{ij}) \doteq \begin{pmatrix} 2s(x_1) - v(x_1) & -s(x_1, x_2) & \dots & -s(x_1, x_n) \\ -s(x_2, x_1) & 2s(x_2) - v(x_2) & \dots & -s(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -s(x_n, x_1) & -s(x_n, x_2) & \dots & 2s(x_n) - v(x_n) \end{pmatrix},$$

в которой каждый диагональный элемент s_{ii} выражает количество петель графа L , инцидентных соответствующей вершине x_i , а элемент s_{ij} при $i \neq j$ равен взятому со знаком минус числу ребер, соединяющих вершины x_i и x_j .

Т е о р е м а Лантьери-Трента. Пусть Δ — некоторый главный минор порядка $\rho = \rho(L)$ матрицы S_L , полученный вычеркиванием $\kappa(L)$ строк и такого же количества одноименных столбцов. Если вычеркнутые ряды соответствуют вершинам графа L , взятым по одной из каждой его компоненты связности, то Δ равен числу различных каркасов графа L ; в остальных случаях $\Delta = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ и пусть

$$A_L^D \doteq A_L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

— матрица инцидентий графа L над полем $D \doteq D\{0,1\}$, а A_L^C — та же матрица (a_{ij}) , в которой, однако, элементы считаются принадлежащими кольцу C всех целых чисел. Ясно, что некоторый минор (любого порядка) матрицы A_L^D равен нулю тогда и только тогда, когда в матрице A_L^C этот же минор является четным числом.

Изменим знаки некоторых элементов матрицы A_L^C с таким расчетом, чтобы полученная матрица \vec{A}_L^C оказалась вполне унимодулярной, т. е. чтобы ее миноры могли принимать только значения $0, 1$ и -1 . Для этого, ввиду леммы 2, достаточно в каждом столбце, содержащем две единицы, заменить одну из них на -1 (никакой столбец не может содержать более двух единиц, по смыслу исходной матрицы инцидентий A_L^D). В силу леммы 1 абсолютная величина некоторого минора матрицы \vec{A}_L^C равна значению одноименного минора матрицы A_L^D ; отсюда вытекает, что система некоторых строк (или столбцов) матрицы

\vec{A}_L^C линейно зависима тогда и только тогда, когда зависима система одноименных строк (столбцов) в матрице A_L^D .

На основании определения матрицы \vec{A}_L^C получаем

$$\vec{A}_L^C \cdot (\vec{A}_L^C)^* = S_L,$$

а в силу формулы Бинэ — Коши (см., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М. ГТТИ, 1953) главный минор матрицы S_L , образованный k строками и k одноименными столбцами с номерами i_1, i_2, \dots, i_k ($1 \leq k \leq n$), равен сумме квадратов всех тех миноров порядка k матрицы \vec{A}_L^C , которые можно образовать из k ее строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_k , т. е. попросту равен числу отличных от нуля миноров указанного вида, ибо квадраты их суть единицы. Но минор матрицы \vec{A}_L^C отличен от нуля в том и только том случае, если системы строк и столбцов матрицы \vec{A}_L^C , на пересечении которых он находится, обе линейно независимы.

В случае $k = \rho \doteq \rho(L)$ линейная независимость системы ρ столбцов матрицы \vec{A}_L^C (или, что то же, матрицы A_L^D) имеет место тогда и только тогда, когда суграф графа L , отвечающий этим ρ столбцам, является его каркасом. Для завершения доказательства всей теоремы нам остается лишь убедиться в том, что система ρ строк матрицы \vec{A}_L^C линейно независима тогда и только тогда, когда остальным $n - \rho$ строкам отвечают вершины, взятые по одной из каждой компоненты графа L .

Пусть компоненты L суть

$$L_1 = (X_1, U_1; P), L_2 = (X_2, U_2; P), \dots, L_x = (X_x, U_x; P).$$

Не нарушая общности, можно считать нумерацию вершин графа такой, что сначала идут все вершины X_1 , затем все вершины X_2 и т. д.; при этом матрица \vec{A}_L^C имеет вид

$$\begin{array}{l} X_1 \left\{ \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m \\ \hline \vec{A}_{L_1}^C \\ \hline \end{array} \right. \\ X_2 \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}_{L_2}^C \\ \hline \dots \\ \hline \end{array} \right. \\ X_x \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}_{L_x}^C \end{array} \right. \end{array} .$$

Каждый ее столбец либо состоит только из нулей, либо имеет ровно два ненулевых элемента, 1 и -1 , причем оба — в одной и той же из подматриц $\vec{A}_{L_i}^C$ ($1 \leq i \leq \kappa$), поскольку вершины разных компонент графа не смежны. Поэтому сумма строк в каждой подматрице есть нуль-строка и число линейно независимых строк i -й подматрицы не может превышать $|X_i| - 1$. Таким образом, для получения линейно независимой системы из $\rho(L)$ строк матрицы $\vec{A}_{L_i}^C$ необходимо вычеркнуть по одной строке из каждой $\vec{A}_{L_i}^C$. С другой стороны, всякая полученная таким образом система $\rho(L)$ строк линейно независима, ибо вычеркивание из каждой $\vec{A}_{L_i}^C$ строки, являющейся линейной комбинацией остальных строк этой подматрицы, не может понизить ранга $\rho(L)$ всей матрицы \vec{A}_L^C . Теорема доказана.

Например, для графа F_4 имеем

$$S_{F_4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

Вообще, если граф $L = (X, U; P)$ связан, то $\rho(L) = n - 1$ ($n \doteq |X|$) и искомое количество каркасов равно любому из главных миноров $(n - 1)$ -го порядка матрицы S_L . При несвязном L , видимо, выгоднее начинать с выявления компонент, ибо шансы на то, что взятый наудачу главный минор $(n - 1)$ -го порядка отличен от нуля, могут оказаться весьма малыми*.

Впоследствии (§ 38 главы 4) мы познакомимся с одним видоизменением способа Лантьери — Трента. А сейчас заметим,

*) Как нетрудно подсчитать, вероятность этого (в предположении равновероятности выбора любого из главных миноров порядка $\rho(L)$) равна

$$\prod_{i=1}^{\kappa} |X_i| \cdot \frac{\kappa - i + 1}{n - i + 1},$$

где $\kappa \doteq \kappa(L)$, а X_i — множество вершин i -й компоненты ($i = 1, 2, \dots, \kappa$). Так, при $n = 45$, $\kappa = 3$, $|X_1| = 10$, $|X_2| = 15$, $|X_3| = 20$ искомая вероятность $10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44} \cdot \frac{1}{43} = \frac{100}{473} \approx \frac{1}{5}$, а при $n = 49$, $\kappa = 7$, $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_7| = 7$ она близка к $\frac{1}{150}$.

что выражение числа каркасов с помощью определителя не всегда удобно для исследования общих свойств этой характеристики, поэтому представляет интерес работа Й. Седлачека (5/1966), содержащая другой подход.*

§ 27. Графы с заданными разрезами и заданными циклами

Начнем с конкретного примера. Пусть дана матрица (над полем $D \doteq D \{0, 1\}$):

$$A^\Delta \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Попытаемся найти такой связный неориентированный граф L , для которого A^Δ служила бы одной из цикломатических матриц A_L^Δ .

Сначала преобразуем A^Δ с помощью операций типа 1), 2) и 3) так, чтобы последние 4 столбца составили единичную матрицу E_4 :

$$\begin{aligned} & A^\Delta \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \boxed{1 & 0 & 0 & 0} \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{0 & 1 & 0 & 0} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0 & 0 & 1 & 0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0 & 0 & 0 & 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*) См. также работы Г. Закса (2/1964—1965), где дан еще один способ подсчета каркасов в графах некоторого специального класса.

Полученную матрицу перекраиваем в

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq A^P.$$

Затем с помощью операций типа 3) преобразуем матрицу A^P так, чтобы в итоге никакой столбец не содержал более двух единиц; для этого в данном случае достаточно, например, к третьей

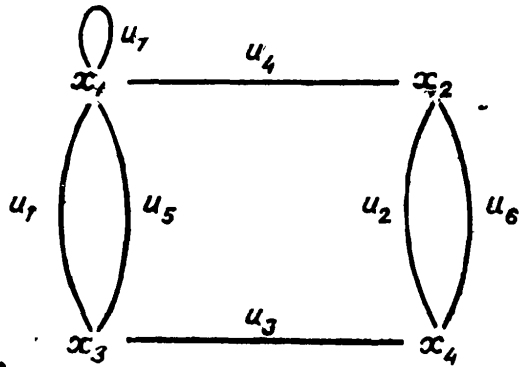


Рис. 82.

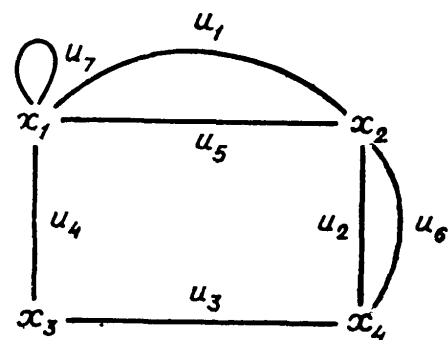


Рис. 83.

строке прибавить первую:

$$A^P \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, к полученной матрице дописываем одну строку — являющуюся линейной комбинацией старых и такую, чтобы образовалась матрица, в которой каждый ненулевой столбец содержит ровно две единицы; новая строка, очевидно, определяется однозначно как сумма всех старых:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \doteq A.$$

Матрице A отвечает граф на рис. 82 (с точностью до местоположения петли).

Матрицу A^P мы могли бы преобразовать иначе, а именно прибавить ко второй строке первую. Совершая это и дальней-

шие действия, находим

$$A^P \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результирующей матрице соответствует граф на рис. 83, не изоморфный предыдущему ни при каком положении петли.

В описанной процедуре алгоритмичны все этапы, кроме одного, а именно устранения избыточных единиц в столбцах матрицы A^P . Но как раз в этом пункте сфокусированы вопросы существования искомого графа и обзора всех таких графов. Так, например, «матрице разрезом»

$$A^P \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и перекроенной из нее «цикломатической матрице»

$$A^\Lambda \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в действительности не соответствует никакой граф; однако предлагать убедиться в этом при помощи перебора всех возможных результатов применения операций типа 3) к матрице A^P можно только в шутку.

Задачей о нахождении графа по его цикломатической матрице занимались многие авторы. Решения Р. Гоулда (1/1958, 2/1959), а также Л. Аусландера и Г. Трента (1/1959, 2/1961) практически малоэффективны. Л. Лёфгрен (1959) предложил вполне удовлетворительный способ, основанный на сложно доказываемой теореме Х. Уитни (4/1933). С. Халкиас и В. Ким (1962) предложили удобный способ построения, обладающий, однако, тем недостатком, что если искомого графа не существует, то это обнаруживается лишь в самом конце. Наконец, В. Майеда (1/1960, 2/1963) дал простое решение равносильной задачи о нахождении графа по его матрице разрезом; на этом

результате мы остановимся подробно. Под словом «граф» будем понимать неорграф без петель, до тех пор, пока не снимем это ограничение; все матрицы в настоящем параграфе условимся рассматривать только над полем $D \{0,1\}$.

Мы скажем, что граф L является P -реализацией* матрицы A , если между ребрами L и столбцами A можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы A оказалась матрицей разрезов графа L . Произвольно заданная матрица может оказаться P -нереализуемой, а при P -реализуемости возможно наличие нескольких неизоморфных реализаций.

Пусть в матрице A выделено некоторое подмножество $\mathfrak{J}(A)$ ее строк, которые мы будем называть «отмеченными»; это множество может, в частности, быть пустым или совпадать с множеством всех строк. P -реализация L матрицы A называется *правильной*, если граф L связан и отмеченным строкам соответствуют центральные разрезы** (при этом неотмеченным строкам могут отвечать как центральные, так и нецентральные разрезы).

Пусть U' — простой разрез связного графа $L = (X, U; P)$. Нам понадобится операция *деления L по разрезу U'* , которая ранее фигурировала (правда, с некоторым «довеском» в виде двух выделенных вершин) в доказательстве теоремы Кюцига (см. § 16 в главе 2) и которая превращает данный граф L в два графа $L_1 = (X_1, U_1; P_1)$ и $L_2 = (X_2, U_2; P_2)$, тоже связанные, определяемые следующим образом.

Обозначим через $L'_1 \doteq (X'_1, U'_1; P)$ и $L'_2 \doteq (X'_2, U'_2; P)$ компоненты связности суграфа, полученного из L удалением ребер U' ; этих компонент ровно две, поскольку исходный граф L связан, а его разрез U' — простой. Положим

$$X_1 \doteq X'_1 \cup \{y_1\}, \quad X_2 \doteq X'_2 \cup \{y_2\},$$

где y_1 и y_2 — новые вершины, не принадлежащие X ;

$$U_1 \doteq U'_1 \cup U', \quad U_2 \doteq U'_2 \cup U';$$

новые предикаты P_1 и P_2 определим так, чтобы на компонентах L'_1 и L'_2 они совпадали с P и чтобы ребро u разреза U' , соединяв-

*) « P -реализация» (P — греческое «ро» прописное).

**) Напомним (см. пример 3 к определению квалиразреза в § 24), что центральным разрезом с центром x называется такой, который образован всеми непетлями, инцидентными вершине x , т. е., в данном случае, — просто всеми инцидентными x ребрами, поскольку петель у L нет.

шее в L вершину $x_1 \in X'_1$ с вершиной $x_2 \in X'_2$, оставаясь звеном, теперь соединяло в L_1 вершину x_1 с y_1 , а в L_2 это же звено соединяло y_2 с x_2 (рис. 84)*.

Если разрез U' — центральный с центром x , то один из графов L_1, L_2 отличается от исходного L лишь тем, что роль вершины x в нем играет y_1 или y_2 , а второй граф состоит из двух вер-

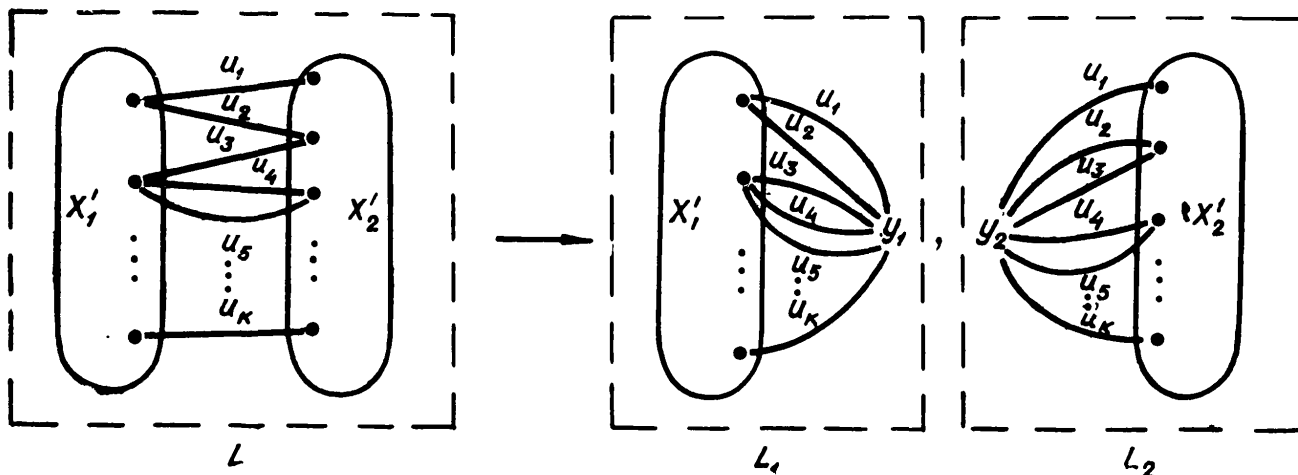


Рис. 84

шин, соединенных друг с другом ребрами множества U' (рис. 85). В случае же нецентрального разреза каждый из графов L_1, L_2 имеет заведомо меньше вершин, чем L .

Параллельно с делением графа по разрезу определим *деление матрицы по строке*. Пусть A — матрица с единичной подматрицей в начале, а r — некоторая строка матрицы A . Обозначим через A_r подматрицу, остающуюся от A после удаления строки r и всех тех столбцов, которые имели в этой строке единицу. С помощью перестановок строк и столбцов приведем A_r к виду

$$\begin{pmatrix} A'_r & 0 \\ 0 & A''_r \end{pmatrix}; \quad (*)$$

при этом допускается возможность, когда A''_r — пустая подматрица (и, значит, A'_r совпадает с A_r после перестановок), поэтому тривиальное представление указанного вида всегда существует; нетривиальных же представлений может совсем не быть, а может, напротив, быть несколько. Каждому представ-

*) Впрочем, можно считать, что в L_2 фигурируют не сами ребра U' , включенные в L_1 , а их дубликаты (см. сноску к доказательству упомянутой теоремы Коцига).

лению (*), включая и тривиальное, мы отнесем пару подматриц A_r^1 и A_r^2 , получаемых из A удалением всех тех строк и столбцов, которые образуют в A_r (после перестановок) подматрицу A_r'' , соответственно A_r' . Пара матриц A_r^1, A_r^2 и будет, по определению, результатом деления исходной матрицы A по

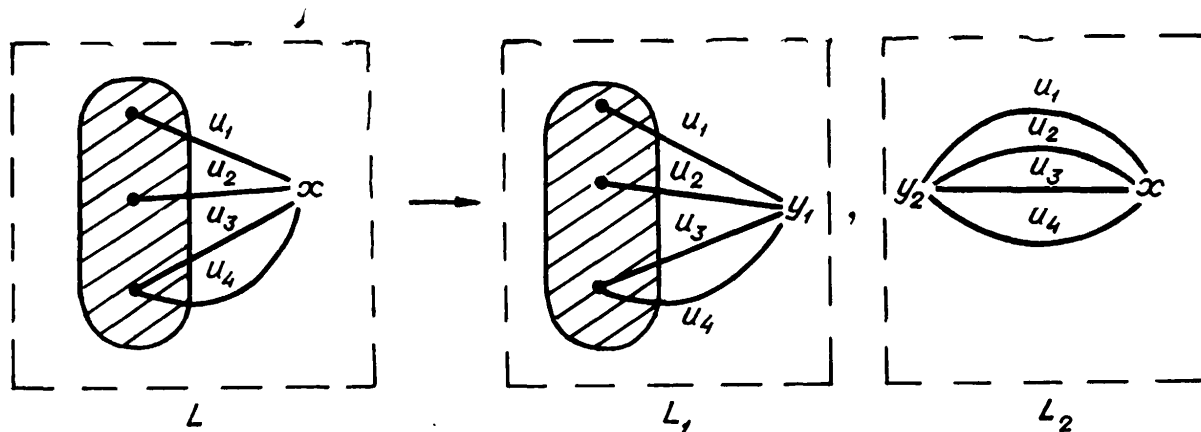


Рис. 85.

ее строке r ; этот результат зависит, как мы видим, не только от выбора строки r в A , но и от выбора представления (*), если оно не единственно. Ясно, что вместе с исходной матрицей A обе результирующие A_r^1 и A_r^2 всегда начинаются с единичных подматриц.

Например, пусть

$$A = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \\ & & & & & & & 2, \\ & & & & & & & 3 \end{matrix}$$

а r — первая строка. Тогда

$$A_1 \doteq A_r \doteq \begin{matrix} & b & c & e \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 2 \\ & & & & & & & 3 \end{matrix}.$$

Кроме тривиального представления

$$A_1' = A_1, \quad A_1'' = \emptyset,$$

имеется одно нетривиальное

$$A_1' = \begin{matrix} & b & e \\ (1, 1) & 2, \end{matrix} \quad A_1'' = \begin{matrix} & c \\ (1) & 3. \end{matrix}$$

Таким образом, деление A по первой строке дает два результата:

$$A_1^1 \doteq A, \quad A_1^2 \doteq \begin{matrix} a & d & f \\ (1 & 1 & 1) & 1 \end{matrix}$$

и

$$A_{1'}^1 \doteq \begin{matrix} a & b & d & e & f \\ (1 & 0 & 1 & 0 & 1) & 1 \\ (0 & 1 & 1 & 1 & 0) & 2 \end{matrix}, \quad A_{1'}^2 \doteq \begin{matrix} a & c & d & f \\ (1 & 0 & 1 & 1) & 1 \\ (0 & 1 & 1 & 0) & 3 \end{matrix}.$$

В качестве второго примера рекомендуем читателю рассмотреть матрицу

$$A = \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix},$$

дающую при делении по любой из строк четыре разных результата (включая тривиальный).

Л е м м а 1. Пусть A — матрица с единичной подматрицей в начале. Если все строки A отмечены, то для ее правильной P -реализуемости необходимо и достаточно, чтобы каждый ее столбец содержал только одну или две единицы. При этом правильная P -реализация L матрицы A в классе всех неорграфов без петель определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как A начинается с единичной подматрицы E_ρ , то ранг $\rho \doteq \rho(A)$ равен количеству строк A . У правильной P -реализации L должно быть $\kappa(L) = 1$, т. е. $n \doteq n(L) = \rho + 1$. В то же время всем ρ строкам A должны отвечать центральные разрезы с центрами в $\rho = n - 1$ различных вершинах (они все различны ввиду линейной независимости строк матрицы A), т. е. A должна быть подматрицей, получаемой из матрицы инцидентий A_L графа L удалением одной строки. Но эта строка однозначно определяется требованием, чтобы после ее добавления к A каждый столбец содержал ровно две единицы, а это требование равносильно условию для матрицы A в лемме.

Чтобы в дальнейшем краткость речи не привела к путанице, заметим следующее. Мы считаем, что строки матрицы A пронумерованы (или снабжены какими-либо другими идентификаторами), причем во всех подматрицах, образуемых из A , сохраняются

прежние номера у оставшихся строк. О строках из двух подматриц (в частности, из матрицы и ее подматрицы) мы говорим как об «одной и той же строке», когда эти строки имеют один и тот же номер (идентификатор), несмотря на то, что по длине и по составу они могут различаться. Аналогичное соглашение принимаем и в отношении столбцов.

Л е м м а 2. Пусть A — матрица с единичной подматрицей в начале и с заданным множеством $\mathfrak{S}(A)$ отмеченных строк. Пусть, далее, r — произвольная неотмеченная строка матрицы A . Граф L является правильной P -реализацией матрицы A в том и только том случае, если графы L_1 и L_2 , полученные делением L по разрезу U_r , определяемому строкой r , служат правильными P -реализациями тех матриц A_r^1 и A_r^2 , которые порождаются матрицей A при каком-то из вариантов деления по строке r и в каждой из которых отмеченными считаются строка r и все строки, отмеченные в A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим сначала, что матрица A указанного вида обладает правильной P -реализацией L . Из всех результатов деления A по r выберем тот, при котором разбиение множества столбцов матрицы A_r на два класса соответствует разбиению множества ребер графа L по двум компонентам связности после удаления разреза U_r ; в частности, в случае центрального разреза выбранным окажется обязательно тот результат деления, который отвечает тривиальному представлению (*), а в случае нецентрального разреза — результат, определяемый одним из нетривиальных представлений. Пусть A_r^1, A_r^2 — выбранная пара результирующих матриц.

Сопоставляя определение деления графа по разрезу с определением деления матрицы по строке, мы непосредственно видим, что A_r^1 и A_r^2 служат матрицами разрезов тех двух связных графов L_1 и L_2 , которые получаются из L делением по разрезу U_r ; обе эти P -реализации правильны, так как центральные разрезы графа после деления переходят, очевидно, в центральные разрезы результирующих графов, а разрез U_r , каким бы он ни был, переходит в центральные разрезы.

Теперь пусть, наоборот, матрицы A_r^1 и A_r^2 , возникшие из A при каком-нибудь варианте деления по строке r , обладают правильными P -реализациями L_1 и L_2 . Граф L , дающий пару L_1, L_2 при делении по одному из своих простых разрезов, однозначно восстанавливается по этой паре, поскольку каждое ребро упомянутого разреза имеет в L_1 и в L_2 один и тот же идентификатор (для наглядности можно обратиться к прежним рисункам 84 и 85, изменив направление стрелки на противоположное);

притом граф L , очевидно, оказывается правильной P -реализацией матрицы A . Поэтому всякий связный неорграф без петель, ребра которого приведены во взаимно однозначное соответствие со столбцами матрицы A , а разрезы некоторого базиса, состоящего из простых разрезов, — с ее строками, притом такой, что результатом его деления по разрезу U_r является пара L_1, L_2 , необходимо совпадает с L . Лемма доказана.

На леммах 1 и 2 основан следующий алгоритм для нахождения всех P -реализаций данной матрицы A (или установления ее P -нереализуемости).

Пусть A — матрица, начинающаяся с единичной подматрицы E_ρ , где $\rho \doteq \rho(A)$. Пронумеруем строки A числами $1, 2, \dots, \rho$ в произвольном порядке (например, естественным образом сверху вниз). Столбцы обозначим различными буквами.

Положив $\mathfrak{S}(A) \doteq \emptyset$, делим матрицу A по строке r с номером $\bar{1}$; пусть A_1^1, A_1^2 — один из результатов (любой) этого деления. Полагая далее $\mathfrak{S}(A_1^1) \doteq \{r\}$, $\mathfrak{S}(A_1^2) \doteq \{r\}$, делим ту из матриц A_1^1, A_1^2 , которая содержит строку s с номером $\bar{2}$, по этой строке и в каждой из полученных подматриц отмечаем, наряду с r , также строку s ; и т. д. Продолжая процесс пока возможно, мы в конце концов придем к системе из $\rho + 1$ матриц, в каждой из которых все строки отмечены.

Так как результат деления матрицы по строке, вообще говоря, неоднозначен, то описанный процесс — ветвящийся. Рассмотрев все возможные варианты, найдем для матрицы A некоторую систему множеств $\{\mathfrak{M}_i\}$, каждое из которых содержит $\rho + 1$ матриц со сплошь отмеченными строками.

P -реализуемость матрицы A равносильна ее правильной P -реализуемости, поскольку, во-первых, $\mathfrak{S}(A) = \emptyset$ и, во-вторых, несвязный реализующий граф всегда можно переделать в связный, выбрав произвольно по одной вершине в каждой компоненте и отождествив все эти вершины между собой (или вообще построив любым способом такой связный граф, блоки которого совпадают с компонентами исходного). В силу леммы 2, эта реализуемость имеет место тогда и только тогда, когда среди множеств $\{\mathfrak{M}_i\}$ хотя бы одно состоит сплошь из P -реализуемых матриц, т. е., в силу леммы 1, из таких матриц, в которых каждый столбец содержит только одну или две единицы.

Исследовать зависимость системы $\{\mathfrak{M}_i\}$ от порядка нумерации строк исходной матрицы A не надо, ибо построение какой-либо одной из таких систем, соответствующей произвольно выбранной нумерации, достаточно не только для установления P -реализуемости, но и для нахождения всех правильных P -реа-

лизаций данной матрицы. В самом деле, пусть L — некоторая правильная P -реализация матрицы A . Среди результатов деления A по строке r с номером 1 имеется, в силу леммы 2, такой, что матрицы A_r^1, A_r^2 правильно P -реализуемы графами L_1 и L_2 , полученными из L делением по разрезу U_r . Из двух матриц A_r^1, A_r^2 одна и только одна содержит строку s с номером 2; если, например, это A_r^1 , то опять в силу леммы 2 есть такой результат деления матрицы A_r^1 по строке s , при котором матрицы \bar{A}_{rs}^{11} и A_{rs}^{12} правильно P -реализуются графами L_{11} и L_{12} , полученными от деления L_1 по разрезу U_s . Среди трех матриц $A_{rs}^{11}, A_{rs}^{12}, A_r^2$ (или соответственно $A_r^1, A_{rs}^{21}, A_{rs}^{22}$, если строка s была в A_r^2 , а не в A_r^1) одна и только одна содержит строку t с номером 3; к этой последней матрице и к ее строке t применяем аналогичное рассуждение и т. д. до тех пор, пока не будут просмотрены все ρ строк. В итоге мы приходим к одному из множеств \mathfrak{M} системы $\{\mathfrak{M}_i\}$, причем по этому множеству граф L однозначно восстанавливается, ибо каждой матрице множества \mathfrak{M} отвечает, в силу леммы 1, единственный граф, а вся последовательность операций деления графов, с помощью которой мы отнесли графу L множество \mathfrak{M} , однозначно обратима (см. доказательство леммы 2). Наоборот, всякое множество системы $\{\mathfrak{M}_i\}$, состоящее сплошь из правильно P -реализуемых матриц, соответствует указанным образом некоторой правильной P -реализации исходной матрицы A , а именно тому графу, который находится процессом восстановления; осуществимость и однозначность этого процесса без предположения о существовании графа, деление которого привело к множеству \mathfrak{M} , вытекает из того, что каждая строка исходной матрицы A содержится ровно в двух матрицах множества \mathfrak{M} , причем эти две матрицы не имеют других общих строк.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Оба результата деления A по первой строке нам уже известны из недавнего примера. Рассмотрим сначала первый результат:

$$A_1^1 = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ 2, \\ 3 \end{array} \end{array}, \quad A_1^2 = \begin{array}{c} a \quad d \quad f \\ (1 \quad 1 \quad 1) \textcircled{1} \end{array}$$

(кружками мы обводим номера отмеченных строк). Деление A_1^1 по второй строке дает, в свою очередь, два результата:

$$A_{12}^{11} = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \overline{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2}, \\ 3 \end{array} \end{array}, \quad A_{12}^{12} = \begin{array}{c} b \quad d \quad e \\ (1 \quad 1 \quad 1) \textcircled{2} \end{array}$$

и

$$A_{12'}^{11} = \begin{array}{c} a \quad b \quad d \quad e \quad f \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}, \quad A_{12'}^{12} = \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Деление A_{12}^{11} по третьей строке опять приводит к двум результатам:

$$A_{123}^{111} = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2}, \\ \textcircled{3} \end{array} \end{array}, \quad A_{123}^{112} = \begin{array}{c} c \quad d \\ (1 \quad 1) \textcircled{3} \end{array}$$

и

$$A_{123'}^{111} = \begin{array}{c} a \quad c \quad d \quad f \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \end{array}, \quad A_{123'}^{112} = \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \end{array}$$

Если разделить по третьей строке не A_{12}^{11} , а $A_{12'}^{12}$ (т. е. не первый, а второй результат предшествующего деления), то получится, на этот раз однозначно,

$$A_{12'3}^{121} = \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}, \quad A_{12'3}^{122} = \begin{array}{c} c \quad d \\ (1 \quad 1) \textcircled{3} \end{array}$$

Наконец, рассмотрим второй результат деления исходной матрицы A по первой строке:

$$A_{1'}^1 = \begin{pmatrix} a & b & d & e & f \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ 2 \end{matrix}, \quad A_{1'}^2 = \begin{pmatrix} a & c & d & f \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ 3 \end{matrix};$$

дальнейшее деление по второй и по третьей строкам протекает однозначно, и мы находим

$$A_{1'2}^{11} = \begin{pmatrix} a & b & d & e & f \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}, \quad A_{1'2}^{12} = (1 \ 1 \ 1) \textcircled{2},$$

$$A_{1'3}^{21} = \begin{pmatrix} a & c & d & f \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \end{matrix}, \quad A_{1'3}^{22} = (1 \ 1) \textcircled{3}.$$

Таким образом, система $\{\mathfrak{M}_i\}$ в данном примере состоит из четырех множеств:

$$\mathfrak{M}_1 \doteq \{A_{123}^{111}, A_{123}^{112}, A_{12}^{12}, A_1^2\},$$

$$\mathfrak{M}_2 \doteq \{A_{123'}^{111}, A_{123'}^{112}, A_{12}^{12}, A_1^2\},$$

$$\mathfrak{M}_3 \doteq \{A_{12'}^{11}, A_{12'3}^{121}, A_{12'3}^{122}, A_1^2\},$$

$$\mathfrak{M}_4 \doteq \{A_{1'2}^{11}, A_{1'2}^{12}, A_{1'3}^{21}, A_{1'3}^{22}\}.$$

В \mathfrak{M}_1 матрица A_{123}^{111} не является правильно P -реализуемой, так как ее четвертый столбец содержит три единицы. В \mathfrak{M}_2 , \mathfrak{M}_3 и \mathfrak{M}_4 все матрицы правильно P -реализуемы. Построим, например, граф L , соответствующий множеству матриц \mathfrak{M}_2 .

К каждой из матриц $A_{123'}^{111}$, $A_{123'}^{112}$, A_{12}^{12} , A_1^2 дописываем (снизу) по одной строке так, чтобы получились матрицы инцидентий, причем новым строкам присваиваем различные номера, не совпадающие с номерами старых. Пополненным таким образом матрицам

$$(A_{123'}^{111})^+ \doteq \begin{pmatrix} a & c & d & f \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad (A_{123'}^{112})^+ \doteq \begin{pmatrix} b & c & d & e \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix},$$

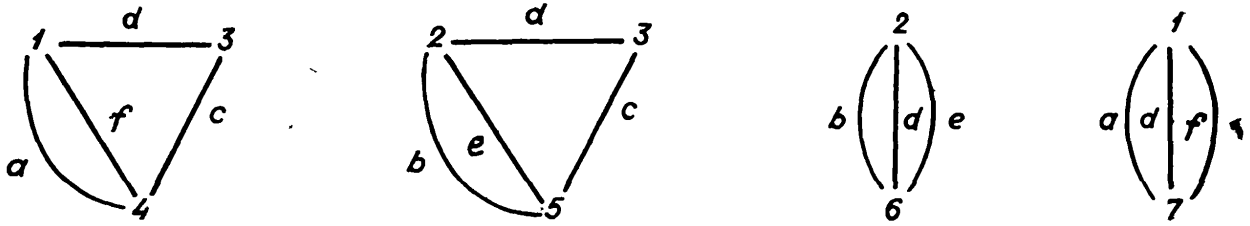


Рис. 86.

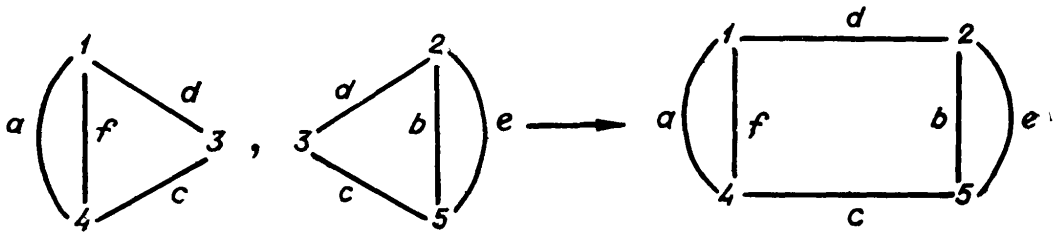


Рис. 87.

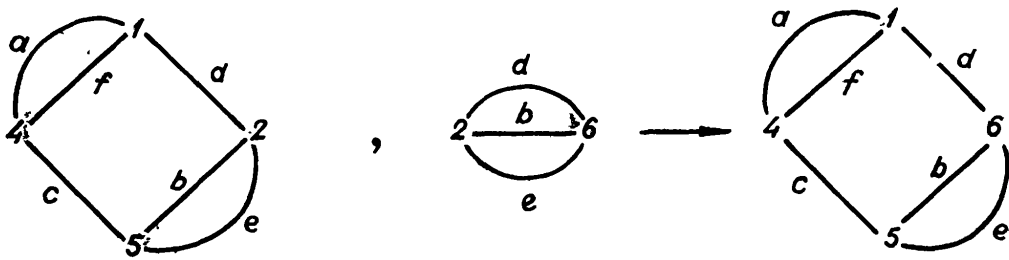


Рис. 88.

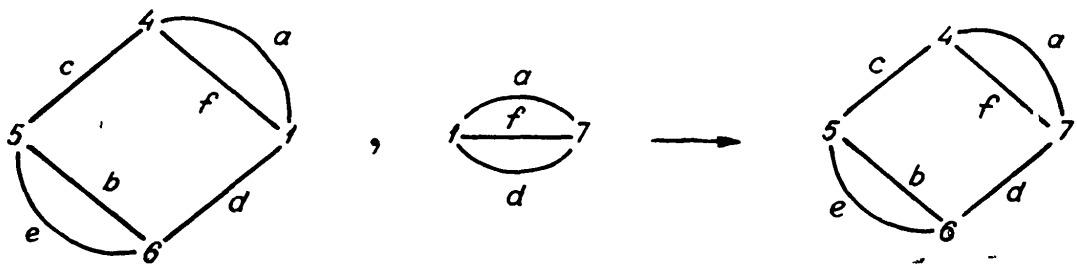


Рис. 89.

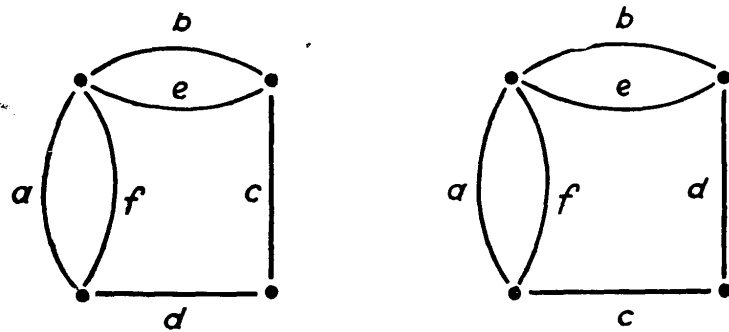


Рис. 90.

$$(A_{12}^{12})^+ \doteq \begin{matrix} & b & d & e \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \\ & & & 6 \end{matrix}, \quad (A_1^2)^+ \doteq \begin{matrix} & a & d & f \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 1 \\ & & & 7 \end{matrix}$$

соответствуют (в том же порядке) четыре графа на рис. 86. Так как в процессе построения множества \mathfrak{M}_2 последним действием было деление по строке с номером 3, то из четырех графов надо в первую очередь выбрать те два, которые содержат вершину со значком 3, т. е. первый и второй графы. Рассматривая выбранную пару как результат деления некоторого графа, восстановим его посредством «исключения вершины 3», как показано на рис. 87. Точно так же, «исключая вершину 2» из полученного графа и из третьего графа на рис. 86, образуем граф (рис. 88), который вместе с четвертым графом на рис. 86 после «исключения вершины 1» даст нам искомый граф L (рис. 89). Графы, найденные аналогичным образом по множествам \mathfrak{M}_3 и \mathfrak{M}_4 , показаны на рисунке 90. Таким образом, все неизоморфные правильные P -реализации заданной матрицы A исчерпываются двумя графами.

Пример 2. Без труда устанавливается P -нереализуемость матрицы

$$A \doteq \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 \\ & & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & 3 \\ & & & & & & & & 4 \end{matrix}.$$

Действительно, какую бы строку мы ни взяли в качестве r (один из столбцов подматрицы A_r (именно тот, номер которого на 4 больше номера строки r) будет состоять целиком из единиц, в силу чего как на первом шаге, так и на остальных результат деления однозначен и соответствует тривиальному представлению (*) матрицы A_r . Следовательно, матрица A в неизменном виде, только с отмеченными строками, попадет в единственное множество \mathfrak{M} , но такая A не является правильно P -реализуемой, ибо содержит столбцы более чем с двумя единицами.

В виде упражнения предлагаем читателю убедиться в P -нереализуемости матрицы

$$A \doteq A^P \doteq \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix},$$

упомянутой в начале параграфа; система $\{\mathfrak{M}_i\}$ на этот раз состоит из трех множеств.

При практическом применении алгоритма Майеды к матрице A больших размеров одна из основных трудностей связана с выявлением всех представлений (*) для подматриц. Здесь можно отнести подматрице вспомогательный обыкновенный граф, вершины которого отвечают ее строкам, а смежность вершин означает наличие столбца с единицами в обеих строках; тогда задача сведется к выявлению компонент связности (см. § 12 в главе 2) вспомогательного графа и нахождению всех разбиений множества компонент на две части.

Что касается ветвимости процесса деления матриц, то это, видимо, неизбежное зло, обусловленное неоднозначностью P -реализации матрицы в общем случае. Исследование классов графов с одной и той же матрицей разрезов (или, что равносильно, с одной и той же цикломатической матрицей) будет предпринято во второй части книги.

Наконец, процедура восстановления графа по множеству матриц $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_i\}$ хотя и не сложна принципиально, но требует громоздкой записи. Этого можно, однако, полностью избежать благодаря изящному результату, полученному В. Майедой во второй из цитируемых работ. Оказывается, для нахождения матрицы инцидентий A_L (с точностью до порядка строк) того графа L , который соответствует множеству \mathfrak{M} , надо умножить данную матрицу разрезов A слева на матрицу $D \doteq (d_{ij})$ с $\rho + 1$ строками и ρ столбцами, элементы которой определяются следующим образом: пусть

$$\mathfrak{M} = \{A_1, A_2, \dots, A_{\rho+1}\}$$

(нумерация матриц в множестве выбирается произвольно), тогда

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если матрица } A_i \text{ содержит строку, имеющую в } A \\ & \text{номер } j, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, \rho, \rho + 1; j = 1, 2, \dots, \rho$). При доказательстве мы используем те обозначения матриц инциденций и новых вершин и тот порядок исключения старых вершин, которые ясны из описания процесса восстановления графа L в примере 1.

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_{\rho+1}$ — графы с матрицами инциденций $(A_1)^+, (A_2)^+, \dots, (A_{\rho+1})^+$, полученными из $A_1, A_2, \dots, A_{\rho+1}$. В процессе восстановления L все старые вершины графов $L_1, L_2, \dots, L_{\rho+1}$ исключаются, а все новые становятся вершинами L , причем центральные разрезы при новых вершинах остаются центральными с неизменными составами ребер. Поэтому для нахождения i -й строки матрицы A_L достаточно знать центральный разрез U_i^+ при новой вершине в графе L_i ($i = 1, 2, \dots, \rho + 1$).

Но разрез U_i^+ , рассматриваемый как элемент пространства суграфов \mathcal{Q}_L , есть сумма тех центральных разрезов графа L_i , которые соответствуют всем его старым вершинам (ибо сумма центральных разрезов при всех вершинах любого графа равна нулевому квалиразрезу, поскольку каждое ребро фигурирует в этой сумме два раза), а эти последние разрезы по составу ребер совпадают с одноименными (т. е. определяемыми строками того же номера) простыми разрезами графа L . Поэтому для получения i -й строки матрицы A_L надо в исходной матрице разрезов A сложить те строки, номера которых совпадают с номерами старых вершин графа L_i , т. е. сложить именно те строки, которые фигурируют также в матрице A_i ; но совокупность всех таких сложений равносильна умножению матрицы A слева на матрицу D , определенную выше.

Для иллюстрации вернемся к примеру 1. Так как матрицы множества \mathfrak{M}_2 содержат соответственно строки 1, 3, строки 2, 3, строку 2 и строку 1 данной матрицы A , то

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A_L = D_2 \cdot A = \begin{matrix} & & & a & b & c & d & e & f \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

т. е. мы получили как раз матрицу инциденций графа L , изображенного на рис. 89 (с точностью до нумерации вершин). Точно так же множеству \mathfrak{M}_3 соответствует преобразующая матрица

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим матрицу инциденций

$$A_L = D_3 \cdot A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

графа на рис. 90 слева, а множество \mathfrak{M}_4 аналогично дает

$$D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$A_L = D_4 \cdot A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(см. рис. 90 справа).

До сих пор мы имели дело только с неорграфами без петель, однако избавиться от этого ограничения нетрудно. Во-первых, матрицы инциденций, разрезов и циклов над полем $D\{0,1\}$, возникшим из полукольца K в результате наложения условий

$$\xi = \eta = \theta = 1, \quad \zeta = 0, \quad 2 = 0,$$

не зависят от ориентации ребер, так что заданной R -реализуемой матрице отвечают, наряду с каждым реализующим ее неорграфом, также все графы, получаемые из него произвольной ориентацией любых ребер. Во-вторых, каждой петле графа вза-

имно однозначно соответствует нулевой столбец его матрицы разрезов, так что все эти столбцы можно с самого начала удалить, сохранив в памяти лишь их количество.

Р. Калман (1967) предлагает более экономный, чем у Майеды, способ построения одной из P -реализаций. Еще один способ принадлежит В. Татту (10/1964). Отметим, что к рассмотренным задачам весьма близка задача восстановления графа с двумя полюсами (выделенными вершинами) по матрице путей, соединяющих эти полюсы — см. работы О. Уинга и В. Кима (1/1959, 2/1959).

Для матриц A с единичной подматрицей, порядок которой равен числу строк A , без сомнения справедливо, что если A является P -реализуемой (или L -реализуемой, т. е. служит цикломатической для какого-то графа), то и всякая ее подматрица P -реализуема (соответственно L -реализуема). Было бы полезно дать этим утверждениям такое доказательство, из которого непосредственно ясны операции преобразования реализующего графа, отвечающие удалению строки и удалению столбца матрицы (в § 47 главы 6 эти вопросы решаются в некоторых частных случаях); интересно также выяснить, когда эти утверждения остаются в силе, если не требовать линейной независимости строк (в частности, наличия единичной подматрицы) в A , предполагая лишь, что ее строки порождают всё пространство разрезов \mathcal{L}_L^P .

Во второй части книги будут даны преобразования графов, позволяющие из одного графа получить все остальные с той же матрицей разрезов или, что равносильно, с той же цикломатической матрицей.

ОРИЕНТАЦИЯ ГРАФОВ

§ 28. Маршруты с учетом ориентации дуг

Если в определении маршрута

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

графа $L = (X, U; P)$ заменить требование истинности высказывания

$$\tilde{P}(x_0, u_1, x_1) \& \tilde{P}(x_1, u_2, x_2) \& \dots \& \tilde{P}(x_{l-1}, u_l, x_l)$$

более жестким требованием истинности

$$P(x_0, u_1, x_1) \& P(x_1, u_2, x_2) \& \dots \& P(x_{l-1}, u_l, x_l),$$

то получится определение *частично ориентированного маршрута* из вершины x_0 в вершину x_l ; понятия *частично ориентированной цепи* и *частично ориентированного цикла* (в частности, простых) возникают автоматически. Налагая на частично ориентированный маршрут еще одно дополнительное условие, чтобы все его ребра u_1, u_2, \dots, u_l были дугами, приходим к понятиям *ормаршрута*, *орцепи* и *орцикла* (в частности, простой орцепи и простого орцикла). Кроме того, удобно называть *путем* частично ориентированную цепь, не содержащую

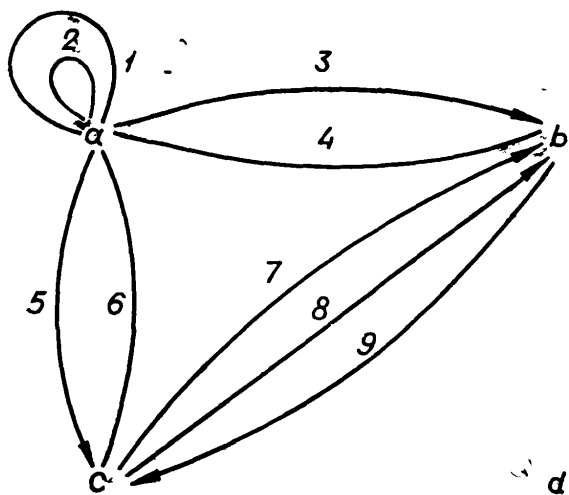


Рис. 91.

звеньев; таким образом, орцепь есть путь без петель, а простой путь означает то же самое, что простая орцепь. Например, в графе на рис. 91 маршруты $a1a4b9c$, $a3b9cба$ (циклический) и $a1a2a1a1a$ (циклический) являются частично ориентированными, но не ормаршрутами, а $b9c8b9c$ и $b9c8b9c8b$ (циклический)

звеньев; таким образом, орцепь есть путь без петель, а простой путь означает то же самое, что простая орцепь. Например, в графе на рис. 91 маршруты $a1a4b9c$, $a3b9cба$ (циклический) и $a1a2a1a1a$ (циклический) являются частично ориентированными, но не ормаршрутами, а $b9c8b9c$ и $b9c8b9c8b$ (циклический)

суть ормаршруты; маршрут $a3b9c8b$ есть орцепь (не простая), а $a3b9c$ — простая орцепь; маршрут $a1a3b9c8b$ представляет собой путь (не простой), но не орцепь, а маршрут $b9c8b$ является простым орциклом.

Для нахождения количества частично ориентированных маршрутов * заданной длины $l \geq 1$ из i -й в j -ю вершину графа L по его матрице смежности R достаточно на образующие полукольца K наложить соотношения

$$\eta\xi = 0, \quad \xi\eta = \zeta^2 = \theta^2 = 1;$$

тогда искомое количество будет равно элементу $r_{ij}^{(l)}$ матрицы $R_L^l \doteq (r_{ij}^{(l)})$. Аналогично подсчитываются ормаршруты, если K подчинить условиям

$$\eta\xi = \zeta^2 = \theta^2 = 0, \quad \xi\eta = 1,$$

а чтобы подсчитать частично ориентированные маршруты без звеньев, надо положить

$$\eta\xi = \theta^2 = 0, \quad \xi\eta = \zeta^2 = 1.$$

Так, для только что рассмотренного графа (см. рис. 91) в первом случае

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R^2 = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 30 & 28 & 24 & 0 \\ 12 & 10 & 10 & 0 \\ 14 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

во втором

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

* Ряд результатов в этой области принадлежит Г. Н. Поварову (1959).

и в третьем

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R^2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R^3 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

Интересуясь не количеством, а только наличием или отсутствием маршрутов данной длины, мы можем наложить на соответствующее полукольцо K дополнительное булево соотношение $2 = 1$. Напротив, строя над K (без соотношения $2 = 1$) полукольцо многочленов от «реберных переменных», подобно тому как это делалось в § 11 главы 2, можно не только подсчитывать, но и выявлять все маршруты того или иного типа в заданном графе, а также подсчитывать его частично ориентированные цепи, орцепи и пути.

Лемма § 11, очевидно, останется в силе, если фигурирующие в ней термины понимать везде в смысле «частичной ориентации» или везде в смысле «ор(иентации)»; например, любой ормаршрут из x_0 в x_l содержит простой путь из x_0 в x_l , а из всякого орцикла и даже из всякого циклического ормаршрута ненулевой длины можно выделить простой орцикл.

Алгоритм разметки вершин (§ 11) применяется для выявления кратчайших орцепей из данной вершины x в данную вершину y следующим образом. Помечаем вершину x значком 0; все вершины, в которые идут дуги из x , помечаем значком 1; все не помеченные еще вершины, в которые идут дуги из вершин со значком 1, помечаем значком 2; и т. д. до тех пор, пока вершина y не окажется помеченной некоторым значком $l \geq 1$. Искомые орцепи

$$xu_1x_1u_2x_2 \dots x_{l-1}u_lx_l$$

получаются, как и прежде, последовательным выбором вершин и дуг «с конца»: x_{l-1} — одна из тех вершин со значком $l - 1$, откуда идут дуги в y , а u_l — одна из таких дуг, и т. д. Задача о выявлении кратчайших орциклов, проходящих через данную дугу, опять непосредственно сводится к предыдущей. Разрешая присваивать вершине более одного значка, подобно тому как в § 11, получим алгоритм выявления всех, а не только кратчайших, орцепей и орциклов. Наконец, алгоритм «слепого поиска», изложенный в начале § 18 той же главы 2, без труда переносится на задачу нахождения (или установления отсутствия) пути из x в y у графа L .

Путь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

в орграфе $L = (X, U; P)$, содержащий все его ребра, называется *эйлеровым путем*; при $x_0 = x_l$ имеем *циклический эйлеров путь*. Вводя числа

$$v^+(x) \doteq v_L^+(x) \doteq s_L^+(x) + s_L^0(x)$$

и

$$v^-(x) \doteq v_L^-(x) \doteq s_L^-(x) + s_L^0(x)$$

(см. § 2 в главе 1), называемые соответственно *полуvalентностью исхода* и *полуvalентностью захода* вершины x , можно сформулировать следующий критерий:

Т е о р е м а. *Для существования эйлерова пути из вершины x_0 в вершину y_0 связного орграфа L необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\forall x \in X \setminus \{x_0, y_0\} [v^+(x) = v^-(x)],$$

$$x_0 \neq y_0 \Rightarrow v^+(x_0) - v^-(x_0) = v^-(y_0) - v^+(y_0) = 1.$$

Доказательство этой теоремы и алгоритм Хоанг Туи, на котором оно основано, можно полностью позаимствовать из § 18, с той лишь разницей, что вместо циклов говорить теперь о циклических путях, а вместо перешейка — о дуге, не принадлежащей никакому орциклу.

Гамильтоновым путем (гамильтоновым орциклом) орграфа L называется простой путь (соответственно простой орцикл), содержащий все вершины L ; некоторые условия существования таких орцепей будут рассмотрены в § 32.

Учет ориентации дуг графа придает понятию неотделенности вершин (см. § 12 в главе 2) несколько различных оттенков. Так, сами собой выплывают отношения:

«существует частично ориентированная цепь из x в y »

и

«существует путь (значит, и орцепь) из x в y »,

оба рефлексивные, транзитивные, но не симметричные. Искусственное симметрирование, например, второго из них дает важное отношение эквивалентности:

«существуют путь из x в y и путь из y в x »

и менее важное нетранзитивное отношение

«существует путь из x в y или путь из y в x ».

Эти отношения не изменятся, если вместо пути говорить о простом пути. Упражняясь в остроумии, можно выдумывать

и другие симметричные отношения, скажем: «существуют путь из x в y и частично ориентированная цепь из y в x или существуют путь из y в x и частично ориентированная цепь из x в y », — но мы не станем без надобности продолжать подобное творчество. Наиболее интересные отношения будут рассмотрены в следующих параграфах.

§ 29. Транзитивные и квазитранзитивные графы

Граф $L = (X, U; P)$ называется *транзитивным*, если

$$\forall x, y, z \in X [\exists u \in UP(x, u, y) \& \exists v \in UP(y, v, z) \Rightarrow \Rightarrow \exists w \in UP(x, w, z)],$$

и *квазитранзитивным*, если

$$\forall x, y, z \in X [\exists u \in UP(x, u, y) \& \exists v \in UP(y, v, z) \Rightarrow \Rightarrow \exists w \in UP(x, w, z)];$$

таким образом, транзитивный граф есть частный случай квазитранзитивного. Из определений непосредственно вытекает: *всякий подграф (не суграф!) транзитивного (квазитранзитивного) графа является транзитивным (соответственно квазитранзитивным);*

если квазитранзитивный граф содержит звено или пару противоположно направленных дуг, то при каждой из двух вершин, инцидентных этому звену (этой паре дуг), имеется хотя бы одна петля;

если транзитивный граф содержит циклический частично ориентированный маршрут длины ≥ 2 , то при каждой вершине этого маршрута есть хотя бы одна петля.

Первое утверждение очевидно в силу определения подграфа (§ 1), для доказательства второго достаточно в определении квазитранзитивности положить $x = z$, третье получается последовательным применением определения транзитивности.

Пусть образующие полукольца K подчинены условиям

$$\xi\eta = \zeta^2 = \theta^2 = 1, \quad \eta\xi = 0, \quad 2 = 1, \quad (*)$$

т. е. элементы матрицы смежности графа принадлежат булевой алгебре $B \doteq B \{0,1\}$. При этом матрица смежности не определяет граф однозначно (с точностью до изоморфизма), но позволяет узнать, является ли он транзитивным или квазитранзитивным.

Т е о р е м а. Пусть $L = (X, U; P)$ — граф с упорядоченным множеством вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а $R \doteq R_L$ — его матрица смежности над V . Необходимым и достаточным условием транзитивности графа L является

$$R + R^2 = R,$$

а условием квазитранзитивности —

$$R + R^* + R^2 = R + R^*,$$

где R^* — транспонированная матрица смежности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из смысла элементов r_{ij} матрицы смежности R (см. § 2 в главе 1) и из соотношений (*) в K вытекает, что $r_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда в графе L имеется хотя бы одна дуга, идущая из x_i в x_j , или звено, соединяющее эти вершины (а в случае $i = j$ — петля при вершине $x_i = x_j$); это, в свою очередь, равносильно истинности высказывания $\exists u P(x_i, u, x_j)$. Элемент $r_{ij}^{(2)}$ матрицы R^2 равен 1 в том и только том случае, если в графе L из вершины x_i в вершину x_j ведет некоторый частично ориентированный маршрут длины 2 (см. § 28), т. е. если в L существует такая вершина $x_k \in X$, что высказывание $\exists u P(x_i, u, x_k) \& \exists v P(x_k, v, x_j)$ истинно; но при транзитивности графа L , и только тогда, это высказывание влечет за собой истинность $\exists w P(x_i, w, x_j)$, т. е. равенство $r_{ij} = 1$, какие бы ни были первоначально выбраны вершины x_i и x_j . Значит, L транзитивен в том и только том случае, если матрица R^2 поглощается при сложении матрицей R , т. е. если $R + R^2 = R$.

Аналогично, L квазитранзитивен тогда и только тогда, когда высказывание $\exists u P(x_i, u, x_k) \& \exists v P(x_k, v, x_j)$ влечет $\exists w \tilde{P}(x_i, w, x_j)$, т. е. когда матрица R^2 при сложении поглощается матрицей смежности $R + R^*$ неорграфа, полученного в результате дезориентации L (см. § 4 и § 7 в главе 1). Теорема доказана.

Можно изучить некоторые более слабые свойства графа $L = (X, U; P)$, чем транзитивность, например, требуя лишь существование такого $k \geq 2$, для которого

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_k \in X \left[\bigwedge_{i=1}^k \exists u_i P(x_{i-1}, u_i, x_i) \Rightarrow \exists v P(x_0, v, x_k) \right],$$

или же требуя, чтобы это высказывание было истинно при заданном фиксированном $k \geq 3$. Мы не будем заниматься этими свойствами (и аналогичными ослабленными свойствами квазитранзитивности) и только укажем на некоторое сходство их по

форме определения со свойствами цикличности (К. Чулик, 2/1958): граф L называется k -циклическим ($k \geq 1$), если

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_k \in X \left[\bigwedge_{i=1}^k \exists u_i P(x_{i-1}, u_i, x_i) \Rightarrow \exists v P(x_k, v, x_0) \right].$$

Близко сюда свойство *циклической транзитивности* графа Бержа (бинарного отношения) $L = (X, U)$, которое состоит в следующем: для любой конечной последовательности вершин $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ из $\overrightarrow{x_0 x_1} \in U$ & $\overrightarrow{x_1 x_2} \in U$ & ... & $\overrightarrow{x_{k-1} x_k} \in U$ & $\overrightarrow{x_k x_0} \in U$ вытекает, что $\overrightarrow{x_i x_j} \in U$ при любых $i = 0, 1, 2, \dots, k$ и $j = 0, 1, 2, \dots, k$; о работе Т. Радо и П. Райхельдерфера (1947), где исследуется это свойство, мы упомянем еще раз в главе 6 (см. § 45).

§ 30. Транзитивное замыкание

Транзитивным замыканием графа $L = (X, U; P)$ называется его минимальный транзитивный сверхграф, т. е. такой граф $N = (X, V; P)$, что 1) N есть сверхграф для L (см. конец § 1 в главе 1); 2) N — транзитивный граф; 3) не существует транзитивного сверхграфа $N' = (X', V'; P)$ графа L , у которого $U \subseteq V' \subset V$.

Как мы увидим, всякий граф обладает транзитивным замыканием, притом даже некоторого специального типа. Транзи-

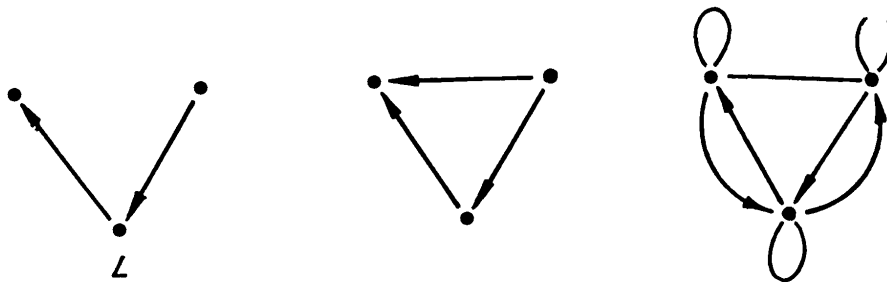


Рис. 92.

тивное замыкание $N = (X, V; P)$ графа $L = (X, U; P)$ назовем *экономным*, если множество $V \setminus U$ не содержит звеньев. На рис. 92 изображены два транзитивных замыкания одного и того же графа L , первое из которых — экономное — получается добавлением к L одной дуги, а второе — неэкономное — представляет собой результат перестраховки: если начать с того, что вместо дуги добавить к L звено, то это потребует, в свою очередь, дальнейшего добавления дуг (или звеньев), а также петель.

Т е о р е м а. *Всякий граф обладает одним и только одним (с точностью до изоморфизма) экономным транзитивным замыканием.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если данный граф $L = (X, U; P)$ транзитивен, то он сам, очевидно, является единственным своим транзитивным замыканием, притом экономным. Если L не транзитивен, то для некоторой тройки его вершин x, y, z истинно высказывание

$$\exists u P(x, u, y) \& \exists v P(y, v, z) \& \neg \exists w P(x, w, z),$$

поэтому всякий транзитивный сверхграф графа L необходимо должен содержать ребро $w' \notin U$, для которого истинно $P(x, w', z)$. В частности, всякое экономное транзитивное замыкание графа L должно содержать такое ребро $w' \notin U$, которое в случае $x \neq z$ является дугой, идущей из x в z (в случае $x = z$ ребро w' — петля); пусть $L' = (X, U'; P)$ — сверхграф, полученный из L добавлением этого ребра w' . Множество $U' \setminus U$ не содержит звеньев, и всякое экономное транзитивное замыкание графа L обладает суграфом, изоморфным L' . Если L' все еще не транзитивен, то с ним поступаем так же, как с L , и продолжаем процесс до тех пор, пока не придем к некоторому транзитивному сверхграфу $N = (X, V; P)$ графа L ; это наверняка случится через конечное число шагов, ибо все сверхграфы, получаемые из L указанным процессом, являются суграфами заведомо транзитивного графа M , в котором при каждой вершине есть петли, а каждая пара различных вершин соединена хотя бы одним звеном или парой противоположно направленных дуг; для получения же сверхграфа типа M из L к последнему надо добавить не более $|X|$ петель и не более $|X|(|X| - 1)$ дуг, т. е. в общей сложности не более (в действительности даже менее) $|X|^2$ ребер.

Согласно построению, граф N представляет собой экономное транзитивное замыкание исходного графа L . Всякое другое экономное транзитивное замыкание $N' = (X, V'; P)$ графа L изоморфно N , так как N' должен обладать графом $N'' = (X, V''; P)$, изоморфным N' , и в случае $V' \setminus V'' \neq \emptyset$ граф N' не удовлетворял бы условию 3) (минимальности) в определении транзитивного замыкания.

З а м е ч а н и е. Из процесса построения экономного транзитивного замыкания $N = (X, V; P)$ графа $L = (X, U; P)$ при доказательстве теоремы видно, что множество $V \setminus U$ не содержит петель при тех вершинах, при которых уже были петли в исходном графе L , и не содержит дуг, идущих из x в y

$(x, y \in X)$, если сам L имел такие дуги. Отсюда, в частности, вытекает

С л е д с т в и е 1. *В классе \mathbb{L} всех графов Бержа каждый граф обладает единственным (с точностью до изоморфизма) транзитивным замыканием.*

Действительно, с одной стороны, операция построения N по L не выводит за пределы класса \mathbb{L} , а, с другой стороны, графы этого класса не содержат звеньев, в силу чего всякое транзитивное замыкание графа $L \in \mathbb{L}$, принадлежащее \mathbb{L} , поневоле является экономным и поэтому изоморфно N .

С л е д с т в и е 2. *В классе $\tilde{\mathbb{L}}$ всех неориентированных униграфов* каждый граф обладает единственным (с точностью до изоморфизма) транзитивным замыканием.*

Это можно вывести из предыдущего следствия, заменяя каждое звено графа двумя противоположно направленными дугами. Однако мы предпочитаем другой путь, который позволит не только установить единственность транзитивного замыкания в классе $\tilde{\mathbb{L}}$, но и охарактеризовать структуру этого замыкания.

Если две различные вершины графа $L \in \tilde{\mathbb{L}}$ принадлежат одной его компоненте, то они соединены цепью и в транзитивном замыкании $N \in \tilde{\mathbb{L}}$ графа L должны быть смежны; значит, для построения N необходимо в каждой компоненте L соединить новым ребром всякую пару несмежных различных вершин. Кроме того, в N при каждой неизолированной вершине должна быть петля, так что к L надо добавить недостающие петли. Но всех указанных добавлений достаточно, так как граф $N \in \tilde{\mathbb{L}}$, у которого все неоднoverшинные компоненты являются полными графами**, очевидно, транзитивен.

Переходим к задаче нахождения транзитивного замыкания графа по его матрице смежности. Пусть, как и в § 26, $R \doteq R_L \doteq \doteq (r_{ij})$ — матрица смежности графа $L = (X, U; P)$ над булевой алгеброй $B \doteq B \{0,1\}$.

Обозначим через S матрицу смежности (над B) экономного транзитивного замыкания графа L . Во всяком транзитивном замыкании $N = (X, V; P)$ вместе с каждым частично ориентированным маршрутом

$$x_0 v_1 x_1 v_2 x_2 \dots x_{l-1} v_l x_l$$

*) Т. е. графов, отличающихся от обыкновенных лишь тем, что при любой вершине может быть петля (см. § 4 в главе 1).

**) В классе $\tilde{\mathbb{L}}$ полный граф, по определению, имеет петлю при каждой вершине (см. конец § 4 в главе 1).

ненулевой длины ($x_0, x_1, x_2, \dots, x_l \in X; v_1, v_2, \dots, v_l \in V; l \geq 1$) должно присутствовать и ребро, соединяющее x_0 с x_l , причем если это ребро — дуга, то она направлена от x_0 к x_l . Поэтому матрица S при сложении поглощает все степени матрицы R (см. § 28), т. е. поглощает сумму

$$R + R^2 + \dots + R^{l+1} = R \cdot (E + R)^l$$

при любом $l \geq 0$. Далее, при некотором l_0 , заведомо не превы-

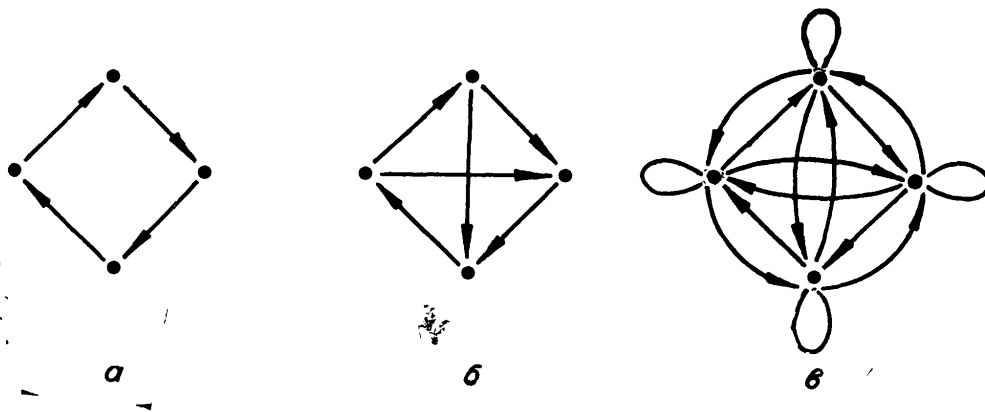


Рис. 93.

шающем числа ребер графа L , впервые наступит равенство

$$R \cdot (E + R)^l = R \cdot (E + R)^{l+1},$$

из которого, в свою очередь, следует, что

$$R \cdot (E + R)^l = R \cdot (E + R)^l$$

при всех $l \geq l_0$, т. е. что $R \cdot (E + R)^{l_0}$ — «установившаяся» матрица; последняя, как нетрудно проверить, поглощает свой квадрат, поэтому всякий сверхграф графа L , имеющий $R \cdot (E + R)^{l_0}$ в качестве своей матрицы смежности над V , является транзитивным (см. теорему § 29). Но один такой сверхграф можно получить из L добавлением только дуг и петель, именно соответствующих тем единичным элементам матрицы $R \cdot (E + R)^{l_0}$, для которых в R на тех же местах стоят нули; этот сверхграф и будет искомым экономным транзитивным замыканием, в силу его единственности, значит,

$$S = R \cdot (E + R)^{l_0}.$$

Вопрос о построении прочих транзитивных замыканий (неэкономных) мы оставляем в стороне. Что же касается уменьшения числа операций, нужных для нахождения матрицы S , то об

этом будет идти речь во второй части книги (см. работу В. В. Мартынюка, 1962).

В заключение заметим, что было бы интересно (по крайней мере теоретически) исследовать понятие *квазитранзитивного замыкания*. Например, для обыкновенного орграфа на рис. 93а одно из квазитранзитивных замыканий, изображенное на рис. 93б, значительно проще экономного транзитивного замыкания (рис. 93в).

§ 31. Квазитранзитивная и транзитивная ориентируемость

Граф $L = (X, U; P)$ называется *(квази)транзитивно ориентируемым*, если надлежащей ориентацией звеньев и переориентацией дуг его можно превратить в (квази)транзитивный орграф. Далее мы покажем, как устанавливать эти свойства по

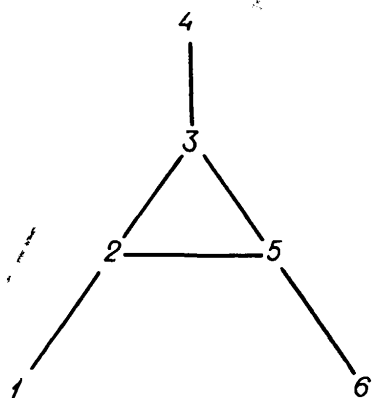


Рис. 94.

матрице смежности графа, а сейчас, опираясь на исследования А. Гуйя-Ури (2/1962), П. Гилмóра и А. Гофмана (1964), изложим другие критерии; особенно интересен факт, открытый А. Гуйя-Ури: квазитранзитивная ориентируемость графа влечет его транзитивную ориентируемость. Нижеследующие два определения будут нужны также и в дальнейшем.

Триангулятором маршрута

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

($l \geq 2$) в графе $L = (X, U; P)$ называется такое ребро графа (не обязательно принадлежащее маршруту), которое соединяет вершины x_i и x_{i+2} ($0 \leq i \leq l - 2$), причем в случае $x_l = x_0$ (циклический маршрут) триангулятором считается также ребро, соединяющее x_{l-1} с x_1 . В случае графа без петель триангулятор характеризуется как ребро, образующее треугольник вместе с двумя последовательными ребрами маршрута. Например, у графа на рис. 94 маршрут

$$1 \overset{\sim}{1}2 \ 2 \overset{\sim}{2}3 \ 3 \overset{\sim}{3}4 \ 4 \overset{\sim}{4}3 \ 3 \overset{\sim}{5}5 \ 5 \overset{\sim}{6}6 \ 6 \overset{\sim}{6}5 \ 5 \overset{\sim}{2}5 \ 2 \overset{\sim}{1}2 \ 1$$

не имеет триангуляторов, а для маршрута

$$1 \overset{\sim}{1}2 \ 2 \overset{\sim}{2}3 \ 3 \overset{\sim}{3}4 \ 4 \overset{\sim}{4}3 \ 3 \overset{\sim}{5}5 \ 5 \overset{\sim}{2}5 \ 2 \overset{\sim}{1}2 \ 1$$

триангулятором, притом единственным, служит ребро $\widetilde{23}$ (принадлежащее этому маршруту).

Маршрут в графе $L = (X, U; P)$ без петель называется *бесповторным*, если при последовательном прохождении ребер этого маршрута никакое ребро не оказывается пройденным более одного раза в одном и том же направлении. Так, оба маршрута в только что рассмотренном примере — бесповторные.

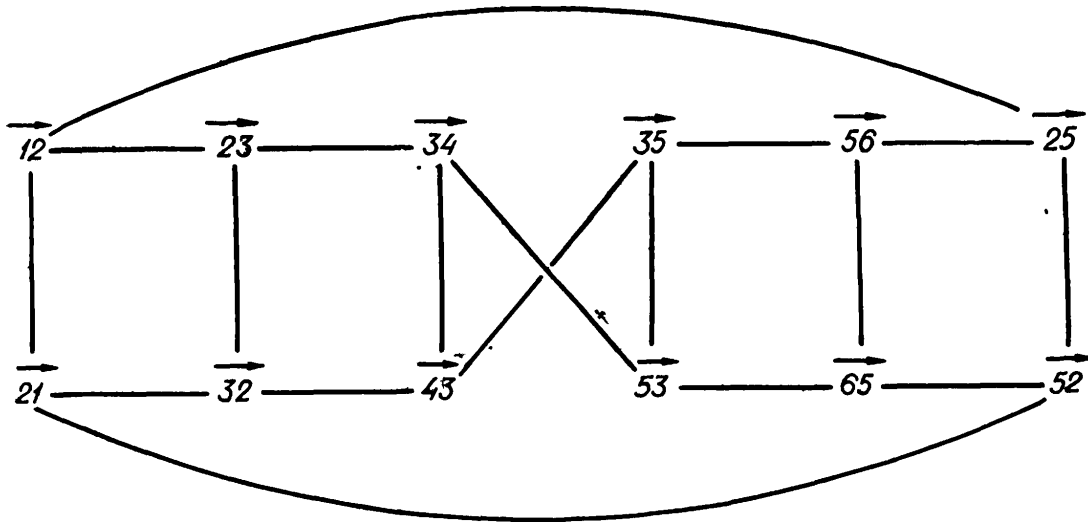


Рис. 95.

Сначала ограничимся исследованием обыкновенных графов, а в конце параграфа перенесем результаты на графы общего вида.

Графом Гуйя-Ури обыкновенного графа $L = (X, U)$ называется обыкновенный граф $GH(L) \doteq (Y, V)$, у которого

$$Y \doteq \{\overrightarrow{xy} \mid x, y \in X \ \& \ \overrightarrow{xy} \in U\},$$

т. е. вершинами служат упорядоченные пары смежных вершин L , а

$$V \doteq \{\overrightarrow{xy} \overrightarrow{yz} \mid \overrightarrow{xy} \in U \ \& \ \overrightarrow{yz} \in U \ \& \ \overrightarrow{xz} \notin U\},$$

т. е. вершина \overrightarrow{xy} графа $GH(L)$ смежна с \overrightarrow{yx} (это соответствует случаю $z = x$) и со всеми теми \overrightarrow{yz} , для которых x и z не смежны в L . Например, для графа L на рис. 94 граф Гуйя-Ури изображен на рис. 95, а графу L на рис. 96 слева отвечает граф $GH(L)$ на том же рисунке справа.

Разбиение множества вершин графа $GH(L)$ по компонентам связности этого графа порождает разбиение множества U ребер исходного графа L на $\kappa(GH(L))$ попарно непересекающихся

классов; эти классы, а также определяемые ими суграфы графа L будем называть его *субкомпонентами квазитранзитивности*, или просто *субкомпонентами*, а их количество $qt(L) \doteq \kappa(GH(L))$ — *числом квазитранзитивности*. Отношение эквивалентности, разбивающее множество U на субкомпоненты, можно охарактеризовать и не в терминах графа Гуйя-Ури, как показывает

Л е м м а 1. *Ребра $u, v \in U$ графа L принадлежат одной его субкомпоненте тогда и только тогда, когда в L существует*

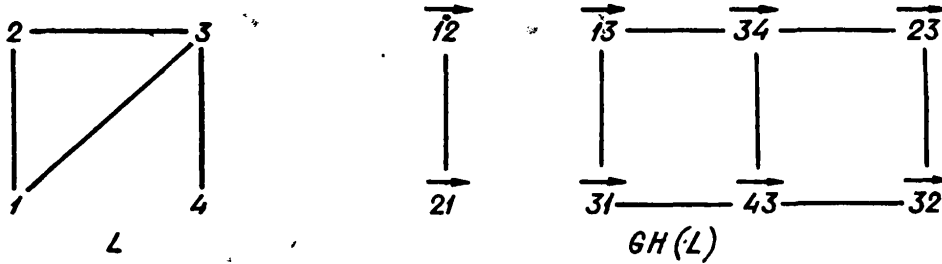


Рис. 96.

бесповторный маршрут без триангуляторов, с первым ребром u и последним ребром v .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u, v \in U'$, где подмножество $U' \subseteq U$ (или, что равносильно, суграф $L' = (X, U')$ графа L) является субкомпонентой L , и $u = \overrightarrow{xy}$, $v = \overrightarrow{zt}$, то в графе $GH(L)$ вершины \overrightarrow{xy} и \overrightarrow{yx} находятся в одной компоненте связности с вершинами \overrightarrow{zt} и \overrightarrow{tz} , и можно соединить \overrightarrow{xy} , например, с \overrightarrow{zt} цепью Q ; пара последовательных вершин на Q отвечает, в силу определения графа Гуйя-Ури, такая пара смежных ребер графа L , которая не дополняется никаким его ребром до треугольника. Выписав ребра L , соответствующие вершинам Q , в том же порядке и дублируя в случае надобности некоторые из этих ребер или, наоборот, устраняя некоторые дубликаты, мы всегда сможем составить в L маршрут без триангуляторов, с первым ребром u и последним ребром v , соединяющий вершины x и t ; дублирование ребер нужно в следующих случаях: пусть три последовательных ребра суть $w_1 = \overrightarrow{x'y'}$, $w_2 = \overrightarrow{y'z'}$, $w_3 = \overrightarrow{y'z'}$, тогда соответствующая часть маршрута будет $x'w_1 y'w_2 z'w_2 y'w_3 t'$ (рис. 97); типичным же случаем, когда надо устранить дублирование, является следующий: пусть четыре последовательные вершины цепи Q суть $\overrightarrow{x'y'}$, $\overrightarrow{y'z'}$, $\overrightarrow{z'y'}$, $\overrightarrow{t'z'}$, тогда им в L отвечают ребра $w_1 = \overrightarrow{x'y'}$, $w_2 = w_3 = \overrightarrow{y'z'}$, $w_4 = \overrightarrow{z't'}$, и соответствующая часть маршрута будет $x'w_1 y'w_2 z'w_4 t'$ (рис. 98).

В построенном маршруте может встретиться ребро w , проходящее дважды в одном и том же направлении, — тогда удалим часть маршрута между этими прохождениями, вместе с одним из прохождений w ; при помощи таких укорачиваний мы в конце концов образуем требуемый бесповторный маршрут.

Обратное утверждение, что соединимость ребер u и v графа L маршрутом (даже не обязательно бесповторным) без три-

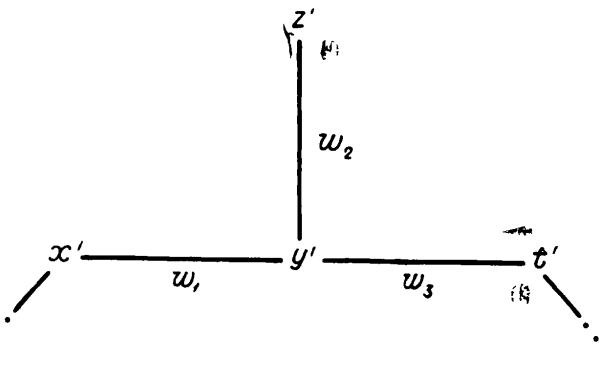


Рис. 97.

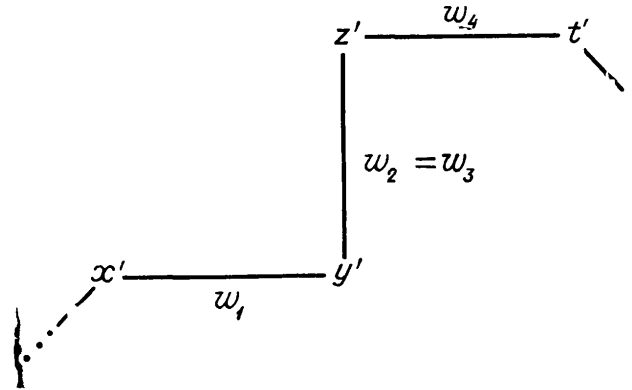


Рис. 98.

ангуляторов влечет принадлежность этих ребер к одной и той же сукомпоненте, является непосредственным следствием определений графа Гуйя-Ури и сукомпонент.

З а м е ч а н и е 1. В маршруте указанного вида все ребра, а не только u и v , принадлежат одной сукомпоненте.

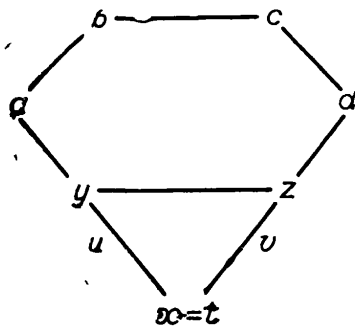


Рис. 99.

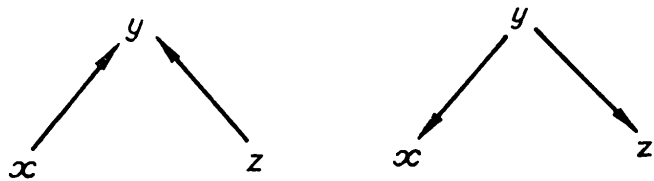


Рис. 100.

З а м е ч а н и е 2. Всегда можно добиться, чтобы в бесповторном маршруте без триангуляторов, соединяющем ребро $u = \widetilde{xy}$ с ребром $v = \widetilde{zt}$, первой вершиной была любая наперед выбранная из x, y , а последней — любая из z, t , отличная от первой. Оговорка, означающая нецикличность маршрута, необходима, как видно из примера графа на рис. 99: бесповторные маршруты без триангуляторов, соединяющие u и v ,

существуют — например,

$$y \text{ и } x \text{ и } y \widetilde{y}a \widetilde{a} \widetilde{a}b \widetilde{b} \widetilde{b}c \widetilde{c} \widetilde{c}d \widetilde{d} \widetilde{d}z \text{ и } v \text{ и } t;$$

однако среди таких маршрутов нет циклического при вершине $x = t$ (ибо для него ребро $\widetilde{y}z$ было бы триангулятором).

Л е м м а 2. Пусть $L = (X, U)$ — обыкновенный граф, $L' = (X, U')$ — его сукомпонента, и пусть все ребра U' удалось ориентировать так, чтобы выполнялось условие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \widetilde{x}y \in U' \text{ \& } \widetilde{y}z \in U' \text{ \& } \widetilde{x}z \notin U', \text{ то ребра } \widetilde{x}y \text{ и } \widetilde{y}z \\ \text{направлены либо оба в сторону к } y, \text{ либо оба от} \\ y \text{ (рис. 100)}. \end{array} \right\} (*)$$

Тогда ориентированный суграф $\vec{L}' \doteq (X, \vec{U}')$, рассматриваемый как самостоятельный орграф (независимо от L), является транзитивным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что

$$\forall x, y, z \in X (\vec{x}y \in \vec{U}' \text{ \& } \vec{y}z \in \vec{U}' \Rightarrow \vec{x}z \in \vec{U}').$$

Пусть $\vec{x}y$ и $\vec{y}z$ — две дуги орграфа \vec{L}' ; тогда $\widetilde{x}z \in U'$, ибо иначе ориентация сукомпоненты L' не удовлетворяла бы условию (*).

Докажем, что $\vec{x}z \in \vec{U}'$, т. е. что ребро $\widetilde{x}z$ при данной ориентации сукомпоненты приобретает направление от x к z .

Согласно лемме 1 и обоим замечаниям к ней, в графе L вершина x соединена с y некоторым маршрутом Q без триангуляторов, причем ребра этого маршрута принадлежат U' и ориентированы попеременно то в направлении обхода, то в противоположном направлении, откуда следует, что длина $l(Q)$ четна ($= 2k$, где $k \geq 1$); пусть

$$Q \doteq x \widetilde{x}y \widetilde{y}x_2 x_2 \widetilde{x}_2x_3 x_3 \dots x_{2k} \widetilde{x}_{2k}z z \widetilde{y}z \widetilde{y}.$$

На рис. 101 пунктиром мы соединили заведомо несмежные пары вершин (в действительности такие вершины не обязательно различны: например, x_2 может совпадать с x , x_3 — с y , x_4 — с x_2 и т. п.).

Имеем $\widetilde{z}x_2 \in U'$, так как иначе для дуг \vec{x}_2y и $\vec{y}z$ нарушалось бы условие (*). Если $\vec{x}_2z \in \vec{U}'$, то в силу (*) сразу получаем требуемое утверждение $\vec{x}z \in \vec{U}'$, поэтому осталось привести к противоречию допущение $\vec{z}x_2 \in \vec{U}'$. Но из справедливости по-

Ясно, что граф, обладающий хотя бы одной не ориентируемой транзитивно сукомпонентой, не является квазитранзитивно (а тем более транзитивно) ориентируемым. Напротив, если все сукомпоненты графа L по отдельности транзитивно ориентируемы, то сам L квазитранзитивно ориентируем; более того, любая комбинация транзитивных ориентаций всех

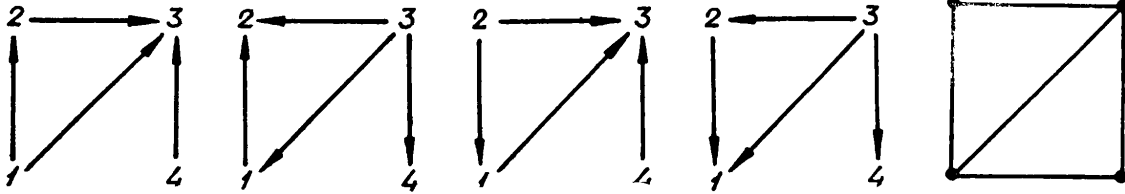


Рис. 102.

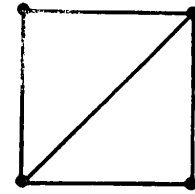


Рис. 103.

сукомпонент дает некоторую квазитранзитивную ориентацию графа, так что общее количество таких его ориентаций равно $2^{qt(L)}$. В самом деле, пусть для каждой из $qt(L)$ сукомпонент выбрана какая-то из двух противоположных транзитивных ориентаций и тем самым L превращен в орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$; тогда из $\vec{xy} \in \vec{U} \& \vec{yz} \in \vec{U}$ неизбежно следует $\vec{xz} \in \vec{U}$, ибо в случае $\vec{xz} \notin \vec{U}$ дуги xy и yz принадлежали бы одной и той же сукомпоненте графа L , но ориентация этой сукомпоненты не была бы транзитивной.

Пример. У графа L на рис. 96 слева сукомпоненты суть $\{1\bar{2}\}$ и $\{1\bar{3}, \bar{2}\bar{3}, \bar{3}\bar{4}\}$, так что $qt(L) = 2$ и имеется $2^2 = 4$ квазитранзитивных ориентаций (все они даже транзитивны) — см. рис. 102. Предлагаем читателю найти сукомпоненты графа, изображенного на рис. 103, и убедиться в том, что он допускает восемь квазитранзитивных ориентаций, из которых две не транзитивны.

Теорема 1. Пусть $L = (X, U)$ — произвольный обыкновенный граф, а $GH(L) = (Y, V)$ — его граф Гуйя-Ури. Тогда следующие пять высказываний равносильны:

- (1) L транзитивно ориентируем;
- (2) L квазитранзитивно ориентируем;
- (3) всякий бесповторный циклический маршрут нечетной длины в L обладает по крайней мере одним триангулятором (условие Гилмбра — Гоффмана);
- (4) $GH(L)$ есть граф Кёнига * (условие Гуйя-Ури);

*) См. § 6 в главе 1.

(5) каждая сукомпонента графа L в отдельности транзитивно ориентируема.

Докажем, что $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$ тривиально: транзитивная ориентация в то же время является квазитранзитивной.

$(2) \Rightarrow (3)$. При любой ориентации всех ребер графа L каждый циклический маршрут (в частности, неповторный) нечетной длины без триангуляторов обязательно будет содержать хотя бы одну пару соседних ребер с одинаковой (относительно направления обхода маршрута) ориентацией, и если полученный оргграф \vec{L} квазитранзитивен, то такая пара необходимо должна дополняться некоторым ребром L до треугольника.

$(3) \Rightarrow (4)$. Предположим, что граф Гуйя-Ури $GH(L)$ для L не есть граф Кёнига, и найдем в L неповторный циклический маршрут нечетной длины без триангуляторов.

Из предположения, в силу теоремы Кёнига (см. § 12 в главе 2), вытекает существование в $GH(L)$ циклического маршрута

$$C_{GH} \doteq y_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{2k} v_{2k+1} y_{2k+1}$$

($y_{2k+1} \doteq y_0$) нечетной длины. Не нарушая общности, можно считать, что C_{GH} представляет собой простой цикл, удовлетворяющий условию:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для любого } i = 0, 1, 2, \dots, 2k \text{ вершины } y_i \text{ и } y_{i+1} \\ \text{имеют соответственно вид } \overrightarrow{xz} \text{ и } \overrightarrow{zt}, \text{ где } x, z, t \in X \\ \text{(при этом вершины } x \text{ и } t \text{ графа } L \text{ не обязательно} \\ \text{различны)}. \end{array} \right\} (**)$$

В самом деле, множество ребер маршрута C_{GH} , ввиду нечетности его длины, не пусто, и, меняя в случае надобности направление обхода C_{GH} , всегда можно отыскать на нем пару последовательных вершин вида \overrightarrow{xz} и \overrightarrow{zt} . Пусть начало и направление обхода C_{GH} уже выбраны так, что

$$y_0 = \overrightarrow{x_1 x_2}, y_1 = \overrightarrow{x_2 x_3}, \dots, y_l = \overrightarrow{x_{l+1} x_{l+2}},$$

но

$$y_{l+1} = \overrightarrow{p x_{l+1}},$$

где $p \neq x_{l+2}$ ($1 \leq l \leq 2k$). Заменяем в C_{GH} часть

$$y_l v_{l+1} y_{l+1}$$

на

$$y_l \widetilde{y_l y'_l} y'_l \widetilde{y'_l y'_{l+1}} y'_{l+1} \widetilde{y'_{l+1} y_{l+1}} y_{l+1},$$

где $y'_l \doteq \overrightarrow{x_{l+2} x_{l+1}}$, $y'_{l+1} \doteq \overrightarrow{x_{l+1} p}$; при этом

$$\widetilde{y_l y'_l}, \widetilde{y'_l y'_{l+1}}, \widetilde{y'_{l+1} y_{l+1}} \in V,$$

в силу определения графа Гуйя-Ури и в силу того, что

$$v_{l+1} \doteq y_l \widetilde{y_{l+1}} = \overrightarrow{x_{l+1} x_{l+2}} \overrightarrow{p x_{l+1}} \in V$$

(рис. 104). Получился циклический маршрут нечетной длины $(2k + 3)$, в котором количество соседних пар вершин вида $\overrightarrow{xz}, \overrightarrow{tx}$ на единицу меньше, чем в исходном. Продолжая в том же

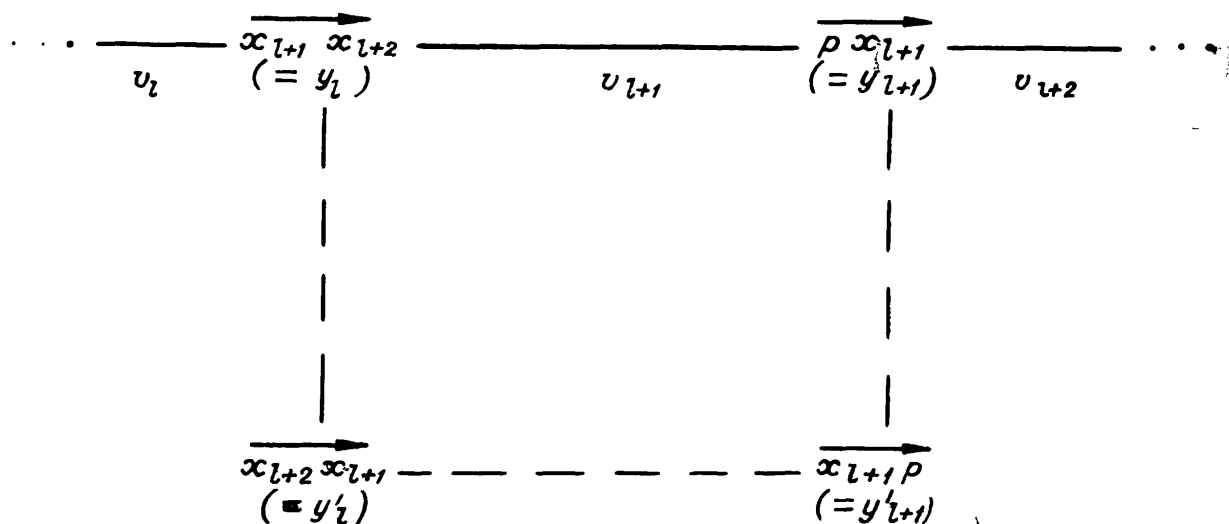


Рис. 104.

духе, мы придем наконец к циклическому маршруту нечетной длины, удовлетворяющему условию (**), а из этого маршрута, в силу леммы § 11 (глава 2), можно выделить простой цикл нечетной длины, который, очевидно, тоже удовлетворяет условию (**).

Итак, пусть в цикле C_{GH} (с прежними обозначениями вершин и ребер)

$$y_i \doteq \overrightarrow{x_{i+1} x_{i+2}}$$

($i = 0, 1, 2, \dots, 2k + 1$; $y_{2k+1} \doteq y_0$; $x_1, x_2, \dots, x_{2k+2}, x_{2k+3} \doteq x_1 \in X$).

Маршрут

$$C \doteq x_1 \widetilde{x_1 x_2} x_2 \widetilde{x_2 x_3} x_3 \dots x_{2k+1} \widetilde{x_{2k+1} x_{2k+2}} x_{2k+2} \widetilde{x_{2k+2} x_1} x_1$$

в графе L — искомый. Действительно, так как на цикле C_{GH} нет повторяющихся вершин, т. е. повторяющихся пар вида \overrightarrow{xz} , то в C не может быть повторных проходов ребра в одном и том же направлении; далее, длина C нечетна, ввиду нечетности длины C_{GH} ; наконец, у C нет триангуляторов, ибо если бы в L имелось ребро $x_j x_{j+2}$ ($1 \leq j \leq 2k + 2$, $x_{2k+3} \doteq x_1$, $x_{2k+4} \doteq x_2$), то в графе $GH(L)$, согласно его определению, вершины $y_{j-1} \doteq \overrightarrow{x_j x_{j+1}}$ и $y_j \doteq \overrightarrow{x_{j+1} x_{j+2}}$ не могли бы быть смежны.

(4) \Rightarrow (5). Пусть $GH(L)$ есть граф Кёнига и пусть $(Y', Y''; V)$ — та его компонента связности, которая отвечает наперед заданной сукомпоненте U' , т. е. суграфу $L' \doteq (X, U')$ графа L . Превратим L' в оргграф $\vec{L}' = (X, \vec{U}')$, полагая $\vec{U}' \doteq Y'$; так как две пары вида $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} \in Y' \cup Y''$ (где $\widetilde{xy} \in U'$) являются смежными вершинами в $GH(L)$, то из них одна и только одна войдет в Y' , т. е. действительно каждое ребро L' получит одну определенную ориентацию.

Оргграф \vec{L}' транзитивен. В самом деле, если $\widetilde{xy} \in U' \ \& \ \widetilde{yz} \in U' \ \& \ \widetilde{xz} \notin U'$, то в графе $(Y', Y''; V)$ вершина \overrightarrow{xy} смежна с \overrightarrow{yz} , а вершина \overrightarrow{yx} — с \overrightarrow{zy} , поэтому, ввиду смежности \overrightarrow{xy} с \overrightarrow{yx} , либо $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{zy} \in Y'$, либо $\overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz} \in Y'$, т. е. ориентация сукомпоненты U' — транзитивная, откуда по лемме 2 следует транзитивность оргграфа \vec{L}' .

(5) \Rightarrow (1). Пусть $L_1 = (X, U_1), L_2 = (X, U_2), \dots, L_q = (X, U_q)$ — сукомпоненты графа L и пусть все они по отдельности транзитивно ориентируемы. Уже известно (см. второе утверждение перед теоремой), что какой бы из двух вариантов транзитивной ориентации каждой из сукомпонент ни был осуществлен, оргграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$, полученный в результате из L , будет квазитранзитивным. Мы не только докажем возможность такого согласования транзитивных ориентаций отдельных сукомпонент, при котором весь оргграф \vec{L} транзитивен, но и изложим удобный алгоритм Гилмора — Гофмана, позволяющий для произвольного обыкновенного графа $L = (X, U)$ найти какую-нибудь его транзитивную ориентацию или убедиться в отсутствии таких ориентаций.

Очевидно, квазитранзитивный оргграф, не содержащий циклических ормаршрутов, транзитивен. Поэтому процесс последовательной ориентации сукомпонент графа L достаточно вести так, чтобы ни на каком этапе не появился циклический ормаршрут. Действуем следующим образом:

1. Выбираем любое ребро $u \in U$, придаем ему произвольное направление и ориентируем транзитивно ту сукомпоненту, которая содержит u (как практически осуществить эту ориентацию, не предполагая всю сукомпоненту заранее выявленной, мы уже знаем). Пусть, скажем, это сукомпонента L_1 , а результат ее ориентации — $\vec{L}_1 \doteq (X, \vec{U}_1)$. Так как орграф \vec{L}_1 транзитивен (см. лемму 2), то он, а значит и частично ориентированный граф L^1 , полученный из L ориентацией только ребер U_1 , не содержит циклических ормаршрутов.

2. Пусть сукомпоненты L_1, L_2, \dots, L_k , где $1 \leq k \leq q - 1$, уже ориентированы транзитивно таким образом, что частично ориентированный граф L^k , полученный из L ориентацией только этих сукомпонент, не содержит циклических ормаршрутов; орграфы, определяемые ориентированными сукомпонентами, обозначим через $\vec{L}_1 = (X, \vec{U}_1), \vec{L}_2 \doteq (X, \vec{U}_2), \dots, \vec{L}_k \doteq (X, \vec{U}_k)$, и пусть $\vec{U}^k \doteq \bigcup_{i=1}^k \vec{U}_i$. Могут представиться два случая.

Случай 1: в L^k есть звено $u \doteq \widetilde{xy} \in U \setminus \vec{U}^k$ такое, что существуют две дуги $\vec{xz}, \vec{zy} \in \vec{U}^k$. Тогда придаем ребру u направление от x к y и всю сукомпоненту, скажем L_{k+1} , содержащую u , ориентируем транзитивно. Полученный орграф обозначаем через $\vec{L}_{k+1} \doteq (X, \vec{U}_{k+1})$, а частично ориентированный граф L , в котором дугами являются ребра множества $\vec{U}^{k+1} \doteq \bigcup_{i=1}^{k+1} \vec{U}_i$, — через L^{k+1} .

Случай 2: в L^k нет такого звена. Тогда выбираем любое звено, придаем ему произвольное направление и транзитивно ориентируем содержащую его сукомпоненту L_{k+1} ; получаем соответственно орграф \vec{L}_{k+1} и частично ориентированный граф L^{k+1} . Если в L^k вообще нет звеньев, то процесс окончен.

Покажем, что в обоих случаях циклические ормаршруты не появятся.

В случае 1 допустим, что граф L^{k+1} содержит циклический ормаршрут \vec{C} . На нем должны иметься дуги множества \vec{U}_{k+1} , ибо иначе он целиком принадлежал бы орграфу L^k , вопреки предположению; пусть $v \doteq \vec{pq}$ — любая из таких дуг.

В силу леммы 1 и второго замечания к ней, в сукомпоненте L_{k+1} есть маршрут

$$Q \doteq x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_3 \dots x_{2s-1} u_{2s} x_{2s} u_{2s+1} q v p$$

которой не была бы транзитивной, а при $\widetilde{xz} \in U$ необходимо $\overrightarrow{xz} \in \overrightarrow{U}^k$ (поскольку L^k не содержит циклических ормаршрутов и поскольку предполагается, что имеет место случай 2, а не случай 1), и мы могли бы получить из \vec{C} более короткий циклический ормаршрут в L^k , заменяя пару дуг $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz}$ одной дугой \overrightarrow{xz} . Точно так же две последовательные дуги на \vec{C} не могут одновременно принадлежать \overrightarrow{U}_{k+1} , ибо из $\overrightarrow{xy} \in \overrightarrow{U}_{k+1}$ & $\overrightarrow{yz} \in \overrightarrow{U}_{k+1}$ в силу транзитивности \vec{L}_{k+1} следует $\overrightarrow{xz} \in \overrightarrow{U}_{k+1}$, и циклический ор-

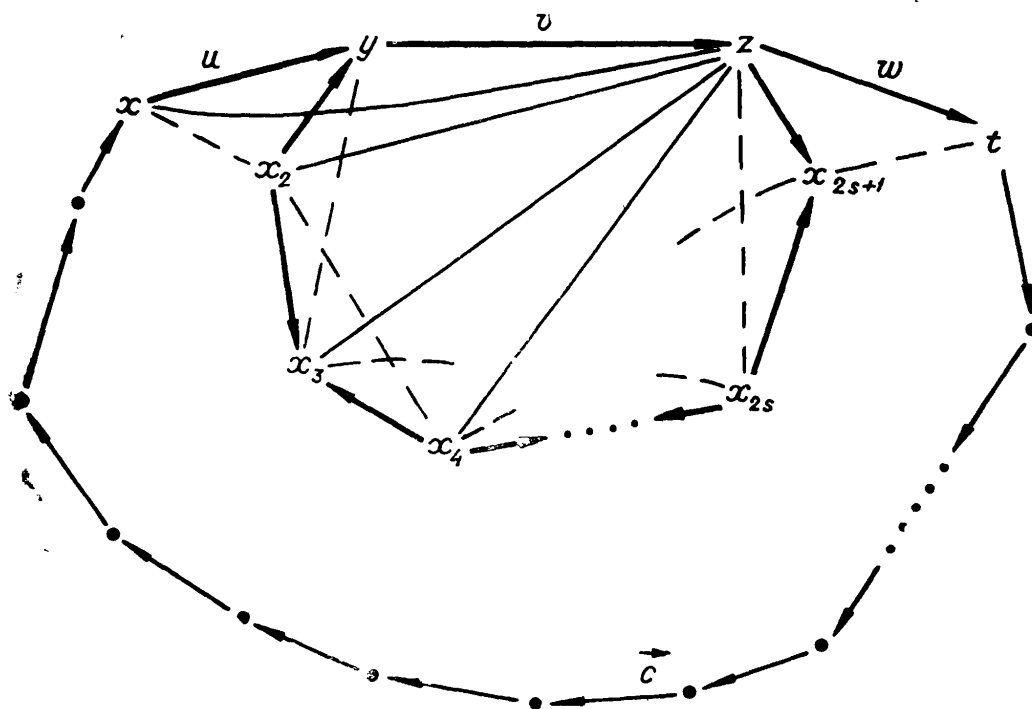


Рис. 106.

маршрут \vec{C} опять можно было бы укоротить. Поэтому на \vec{C} заведомо найдется такая тройка последовательных дуг $u \doteq \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz}, w \doteq \overrightarrow{zt}$, что $u, w \in \overrightarrow{U}_{k+1}, v \in \overrightarrow{U}^k$ и $x \neq t$.

В \vec{L}_{k+1} есть маршрут

$$Q \doteq x \overbrace{u} \overbrace{y} \overbrace{y} \overbrace{x_2} \overbrace{x_2} \overbrace{x_2} \overbrace{x_3} \overbrace{x_3} \dots \overbrace{x_{2s}} \overbrace{x_{2s}} \overbrace{x_{2s+1}} \overbrace{x_{2s+1}} \overbrace{x_{2s+1}} \overbrace{z} \overbrace{z} \overbrace{w} \overbrace{t}$$

без триангуляторов, дуги которого направлены так, как показано на рис. 106. Поскольку ребра u и v принадлежат заведомо разным суккомпонентам графа L , имеем $\widetilde{xz} \in U$; по аналогичной причине $\widetilde{x_2z} \in U$. Далее, из $\widetilde{x_3z} \notin U$ следовало бы $\overrightarrow{x_2z} \in \overrightarrow{U}_{k+1}$ и $\overrightarrow{xz} \in \overrightarrow{U}_{k+1}$, т. е. циклический ормаршрут \vec{C} в L^{k+1} опять можно было бы укоротить, заменив две дуги u и v одной дугой \overrightarrow{xz} ; значит,

$\widetilde{x}_3z \in U$. В свою очередь, из $\widetilde{x}_4z \notin U$ следовало бы $\vec{zx}_3 \in \vec{U}_{k+1}$, что невозможно, поскольку y и x_3 не смежны, а $v \notin \vec{U}_{k+1}$; значит, $\widetilde{x}_4z \in U$. Продолжая в том же духе, неизбежно приходим к противоречию: $\widetilde{x}_{2s}z \in U$.

Теорема доказана. По поводу же алгоритма Гилмора — Гофмана остается добавить следующее: если применить его к графу L , не допускающему транзитивных (а значит, и квазитранзитивных) ориентаций, то этот факт обнаружится лишь после того, как все ребра L будут ориентированы, и выразится в наличии орциклов длины 3 у полученного орграфа \vec{L} ; однако визуально противоречие можно обнаружить значительно раньше, увидев, что в какой-то из сукомпонент маршруты без триангуляторов передают на одно и то же ребро две противоположные ориентации. Предлагаем читателю так усовершенствовать алгоритм, чтобы подобные противоречия обнаруживались как можно раньше и при чисто механическом решении задачи. Заметим еще, что бесповторностью маршрутов в условии Гилмора — Гофмана (пункт (3) формулировки теоремы) мы фактически нигде не пользовались, но она может оказаться полезной, например, если непосредственно применять это условие для проверки графа на транзитивную ориентируемость.

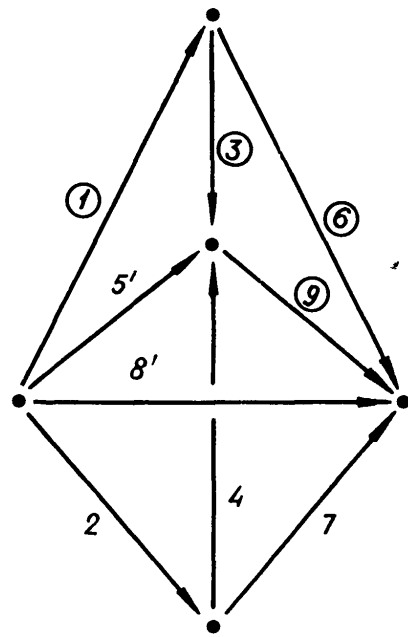


Рис. 107.

Для примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 107. Его ребра мы пронумеровали в том порядке, в каком происходит их ориентация согласно алгоритму Гилмора — Гофмана; номера тех ребер, ориентация которых выбиралась произвольно (пункт 1 и случаи 2 в пункте 2 описания алгоритма), обведены кружком, а номера ребер, ориентированных в соответствии со случаем 1 пункта 2, снабжены штрихом.

Полный обзор всех транзитивных ориентаций, в отличие от квазитранзитивных, затруднителен по следующей причине: хотя в случае 2 второго пункта описания алгоритма выбор любой из двух ориентаций очередного звена приводит к некоторой транзитивной ориентации данного графа L (или к противоречию, если L не является транзитивно ориентируемым), однако от того, какое именно направление мы припишем звену, будет за-

висеть количество «степеней свободы» на последующих этапах. За примерами недалеко ходить: рассмотрим треугольник с вершинами x, y, z ; здесь каждое ребро является сукомпонентой, и если, например, ориентировать ребра \widetilde{xy} и \widetilde{yz} так, чтобы получились дуги \overrightarrow{xy} и \overrightarrow{yz} , то ориентация ребра \widetilde{xz} определится однозначно (случай 1), а если оба ребра \widetilde{xy} и \widetilde{yz} ориентировать по направлению к вершине y или оба в сторону от y , то для направления ребра \widetilde{xz} сохранится свобода выбора (случай 2).

Остановимся теперь на одном частном виде транзитивной ориентации, изученном И. Уулком (1962) и играющем важную роль в теории представлений графов (см. главу 6, § 45). Обыкновенный оргграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$ называется *сильно транзитивным*, если он транзитивен и не содержит ни одной пары дуг, идущих из двух различных несмежных вершин в одну и ту же вершину.

Т е о р е м а 2 (Уулка). *Обыкновенный граф $L = (X, U)$ допускает сильно транзитивную ориентацию в том и только том случае, если в L каждая простая цепь длины 3 обладает хотя бы одним триангулятором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия очевидна, докажем его достаточность. Пусть в L каждая простая цепь длины 3 имеет триангулятор (если в L вообще нет простых цепей длины 3, то это условие все равно выполнено «в силу ложности посылки»). Покажем сначала, что в каждой компоненте связности графа L имеется по крайней мере одна такая вершина, которая смежна со всеми остальными вершинами компоненты.

В компоненте $L' = (X', U')$ графа L выберем вершину $x' \in X'$, степень которой $s(x')$ — наибольшая в этой компоненте, и пусть $X_{x'} \doteq \{x/x \in X' \& \widetilde{xx'} \in U'\}$. Если бы в L' имелись вершины, не смежные с x' и отличные от нее, то, в силу связности L' , существовали бы такие $y, z \in X'$, для которых $\widetilde{yz} \in U'$, $y \in X_{x'}$ и $z \notin X_{x'}$. Тогда всякая вершина $t \in X_{x'}$ была бы смежна с y , поскольку цепь

$$t \widetilde{tx} \widetilde{xy} \widetilde{yz} z$$

должна обладать триангулятором, а $\widetilde{xz} \notin U'$; но при этом $s(y) \geq s(x') + 1$, что противоречит выбору вершины x' . Значит, вершина x' — искомая.

Теперь требуемая ориентация графа L находится легко. Выбираем в каждой компоненте вершину наибольшей (для этой компоненты) степени и все ребра, инцидентные выбранной вершине, ориентируем в сторону от этой вершины. Суграф, обра-

зованный не ориентированными еще ребрами L , очевидно, тоже удовлетворяет условию теоремы, поэтому в каждой его компоненте опять можно выбрать вершину, смежную с остальными, и ориентировать инцидентные ребра в сторону от этой вершины, и т. д. до тех пор, пока не будут ориентированы все ребра графа L . Сильная транзитивность полученного таким образом орграфа \vec{L} очевидна.

Заметим, что из приведенного доказательства (принадлежащего В. Г. Визингу) видно, сколь сильное ограничение на структуру графа накладывает свойство сильно транзитивной ориентируемости; полный обзор всех таких графов можно было бы дать и сейчас, однако тематически это лучше сделать во второй части книги, в связи с более общей задачей.

Переходим к графам $L = (X, U; P)$ общего вида. Пусть $\hat{L} = (X, \hat{U})$ — скелет графа L (см. § 5 в главе 1).

Т е о р е м а 3. *Следующие три высказывания равносильны:*

- (1) L транзитивно ориентируем;
- (2) L квазитранзитивно ориентируем;
- (3) \hat{L} транзитивно ориентируем.

Докажем, что $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$ тривиально.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $\vec{L} = (X, U; \vec{P})$ — орграф, полученный из L в результате некоторой квазитранзитивной ориентации; тогда для любых $x, y, z \in X$ истинна импликация

$$\exists u \vec{P}(x, u, y) \& \exists v \vec{P}(y, v, z) \Rightarrow \exists w \vec{P}(x, w, z), \quad (*)$$

где \vec{P} — полуинцидентор орграфа \vec{L} , совпадающий, очевидно, с полуинцидентором исходного графа L .

Прежде всего заметим, что если из некоторой вершины орграфа \vec{L} в другую его вершину y идет несколько дуг и если из этих дуг сохранить лишь одну, удалив остальные, то полученный орграф по-прежнему будет квазитранзитивным: это очевидно, поскольку все дуги в импликациях (*) связаны кванторами существования. Далее, если из двух противоположно направленных дуг между вершинами x и y сохранить только одну (любую), то в некоторых импликациях (*) посылки станут ложными, остальные посылки не изменятся, а из следствий не изменится ни одно (так как в них везде стоит полуинцидентор), значит, квазитранзитивность опять не нарушится. Пользуясь обеими возможностями выбрасывания дуг, мы в конце концов получим квазитранзитивный орграф, отличающийся от результата

ориентации скелета \hat{L} графа L лишь возможным наличием петель. Однако теперь (но не раньше!) петли можно удалить, ибо во всех тех импликациях (*), где $z = x$, посылка будет ложной, поскольку вершины x и y не могут соединяться двумя разными дугами. Следовательно, скелет \hat{L} допускает квазитранзитивную ориентацию, а так как он является обыкновенным графом, то, согласно теореме 1, его можно ориентировать и транзитивно.

(3) \Rightarrow (1). Пусть скелет \hat{L} графа L удалось транзитивно ориентировать. Каждому ребру $u \in U \setminus \overset{\circ}{U}$ суграфа, полученного из L удалением петель, мы придадим такое же направление, какое имеет дуга $\overset{\rightarrow}{xy}$ в ориентированном скелете, где x и y — вершины, инцидентные ребру u ; эта ориентация суграфа будет, очевидно, транзитивной, т. е. для любых $x, y, z \in X$ будет

$$\begin{aligned} \exists u \in U \setminus \overset{\circ}{U} \vec{P}(x, u, y) \ \& \ \exists v \in U \setminus \overset{\circ}{U} \vec{P}(y, v, z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists w \in U \setminus \overset{\circ}{U} \vec{P}(x, w, z). \end{aligned} \quad (**)$$

Восстановление петель графа L означает замену в (**) кванторов вида $\exists u \in U \setminus \overset{\circ}{U}$ кванторами вида $\exists u \in U$, а это не нарушит транзитивности, ибо каждая из импликаций в (**) как при $x = y$, так и при $y = z$ превращается в тавтологию. Следовательно, граф L транзитивно ориентируем.

Непосредственно доказать (1) \Rightarrow (3), минуя теорему 1, видимо, было бы трудно.

Заметим еще, что теорему Уулка легко перенести на графы общего вида, но в этом едва ли есть надобность. Основная роль этой теоремы связана с бесконечными графами (см. § 49 Заключение первой части).

По отношению к частично ориентированному графу L естественно поставить вопрос: можно ли, не меняя направлений его дуг, так ориентировать все звенья, чтобы полученный орграф \vec{L} был транзитивным (или квазитранзитивным)? Теорема 1 в принципе позволяет найти соответствующие критерии и алгоритмы; мы не будем этим заниматься. Другой круг вопросов состоит в следующем: каким должен быть неорграф (или частично ориентированный граф), чтобы посредством ориентации некоторых, не обязательно всех, его звеньев можно было придать ему свойство квазитранзитивности, транзитивности или сильной транзитивности? Это направление, видимо, пока не исследовалось.

В заключение рассмотрим критерий транзитивной ориентируемости графа L в терминах его матрицы смежности. Пусть образующие полукольца K связаны соотношениями

$$\xi\eta = \eta\xi = \theta^2 = 1, \quad \zeta^2 = 0, \quad 2 = 1,$$

так что матрица смежности R_L графа L совпадает с матрицей смежности $R_{\hat{L}}$ его скелета \hat{L} и элементы этой матрицы принадлежат булевой алгебре $B\{0,1\}$. Пусть, далее, $R_L(\{\varepsilon_{ij}\}) \doteq (r_{ij}\{\varepsilon_{ij}\})$ — общий вид матрицы смежности всех обыкновенных орграфов, которые можно получить из \hat{L} различной ориентацией ребер, где $\{\varepsilon_{ij}\}$ — система $m(\hat{L})$ булевых переменных, отвечающих ребрам \hat{L} (см. конец § 7 в главе 1). Транзитивная ориентируемость графа L равносильна транзитивной ориентируемости его скелета \hat{L} (теорема 3) и поэтому означает возможность выбора такой системы значений $\{\varepsilon_{ij}^0\}$ переменных, при которой

$$R(\{\varepsilon_{ij}^0\}) + R^2(\{\varepsilon_{ij}^0\}) = R(\{\varepsilon_{ij}^0\})$$

(см. теорему § 29), т. е. равносильна выполнимости формулы исчисления высказываний

$$\prod_{i < j} [(r_{ij}^{(2)}\{\varepsilon_{ij}\})' + r_{ij}\{\varepsilon_{ij}\}],$$

где сумма соответствует дизъюнкции, произведение — конъюнкции, штрих — отрицанию *, а произведение \prod достаточно распространять лишь на такие пары индексов, которые являются номерами смежных вершин графа L . На основании той же теоремы § 29 можно составить аналогичную формулу для квазитранзитивной ориентируемости:

$$\prod_{i < j} [(r_{ij}^{(2)}\{\varepsilon_{ij}\})' + r_{ij}\{\varepsilon_{ij}\} + r_{ji}\{\varepsilon_{ij}\)];$$

в силу теоремы 1, эта формула выполнима или невыполнима одновременно с предыдущей.

*) В самом деле, формула высказываний $A \vee B \Leftrightarrow A$ равносильна: $B \Rightarrow A$. т. е. $\neg B \vee A$.

§ 32. Бикомпоненты орграфа

Говорят, что в орграфе $L = (X, U; P)$ вершина y *достижима* из вершины x , если существует путь из x в y ; высказывание « y достижима из x в L » будем обозначать через $D_L(x, y)$ или просто через $D(x, y)$. Вершины x и y в L *взаимодостижимы*, если истинно

$$D(x, y) \& D(y, x).$$

Отношение взаимодостижимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, поэтому множество X вершин графа L распадается

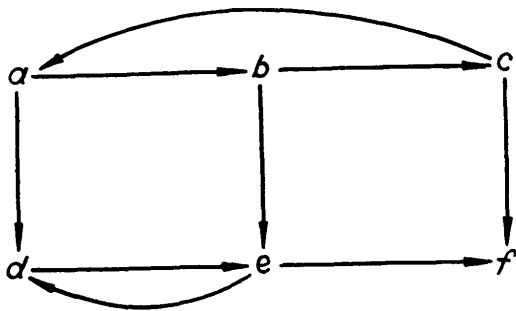


Рис. 108.

на попарно непересекающиеся подмножества взаимодостижимых; подграфы, порожденные этими подмножествами, будем называть *компонентами бисвязности*, или, короче, *бикомпонентами* графа L , а их количество обозначать через $\vec{\kappa} \doteq \vec{\kappa}(L)$. В отличие от компонент обычной связности (см.

§ 12¹ в главе 2), бикомпоненты в общем случае не определяют разбиения множества ребер U графа L , ибо некоторые дуги могут соединять вершины из разных бикомпонент. При $\vec{\kappa}(L) = 1$ граф L называется *бисвязным**. На рис. 108 показан граф с тремя компонентами бисвязности — они порождаются множествами вершин $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$ и $\{f\}$; стоит, однако, лишь изменить направление дуги \vec{cf} на противоположное, как получится бисвязный граф.

Нижеследующий критерий бисвязности был установлен Б. Руа (1/1958) с использованием транспортных сетей, однако его можно получить гораздо проще. Положим

$$\Delta x \doteq \{y / y \in X \& \exists u P(x, u, y)\}$$

и

$$\Delta A \doteq A \cup \bigcup_{x \in A} \Delta x,$$

где $x \in X$, $A \subseteq X$.

*) В литературе употребляются также термины «сильно связный» и «двусторонне связный».

Т е о р е м а 1 (Пуа). *Орграф $L = (X, U; P)$ бисвязен тогда и только тогда, когда не существует такого непустого правильного подмножества $A \subset X$, для которого $\Delta A \subseteq A$.*

В самом деле, если существует такое A , что $\emptyset \neq A \subset X$ & $\Delta A \subseteq A$, то, очевидно, никакая вершина множества $X \setminus A \neq \emptyset$ не достижима из вершин A , т. е. граф L не бисвязен. Если же такого A не существует, то для любой вершины $x_0 \in X$ имеем

$$\{x_0\} \subset \Delta \{x_0\} \subset \Delta \Delta \{x_0\} \subset \Delta \Delta \Delta \{x_0\} \subset \dots;$$

в силу конечности графа, эта итерация отображения Δ , примененного вначале к одновершинному множеству $\{x_0\}$, в конце концов даст все множество X , а это и значит, что все вершины графа L достижимы из произвольной его вершины x_0 , т. е. L бисвязен.

Для множества вершин графа L , достижимых из заданной его вершины x , введем обозначение

$$D(x) \doteq D_L(x) \doteq \{y \mid y \in X \text{ \& } D(x, y)\}.$$

Т е о р е м а 2. *Вершины x и y орграфа $L = (X, U; P)$ взаимодостижимы тогда и только тогда, когда $D(x) = D(y)$. Действительно, так как $x \in D(x)$ и $y \in D(y)$, то из равенства $D(x) = D(y)$ следует, что $x \in D(y)$ и $y \in D(x)$, т. е. что вершины x и y взаимодостижимы. Наоборот, если x и y взаимодостижимы, то для любой $z \in X$, ввиду транзитивности отношения достижимости, из $z \in D(x)$ следует $z \in D(y)$, а из $z \in D(y)$ следует $z \in D(x)$, поэтому $D(y) = D(x)$.*

Пользуясь этой теоремой, можно выявить бикомпоненты графа L , заданного матрицей смежности $R = R_L$ над булевой алгеброй $B \doteq B \{0,1\}$. Элемент $s_{ij}^{(l)}$ матрицы $(E + R)^l \doteq (s_{ij}^{(l)})$ равен 1 тогда и только тогда, когда из i -й вершины графа L в его j -ю вершину существует путь длины не более l . Как и в аналогичном случае в § 12 (глава 2), для некоторого натурального l_0 , заведомо не превышающего числа вершин графа L , впервые наступит равенство

$$(E + R)^{l_0} = (E + R)^{l_0+1},$$

и тогда элемент $s_{ij}^{(l_0)}$ матрицы $(E + R)^{l_0}$ будет равен единице в том и только том случае, если j -я вершина достижима из i -й. Каждая бикомпонента графа L состоит из тех вершин, которым в матрице $(E + R)^{l_0}$ отвечают одинаковые строки. Так, напри-

мер, для графа, изображенного на рис. 108, имеем

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad E + R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(E + R)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(E + R)^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (E + R)^4 = (E + R)^3,$$

и из матрицы $(E + R)^3$ видно, что первые три вершины образуют одну бикомпоненту, следующие две — другую, последняя — третью.

Кстати, если обозначить через $D^{-1}(x)$ множество тех вершин графа $L = (X, U; P)$, из которых достижима его вершина x , то будет справедлива

Т е о р е м а 2'. *Вершины x и y графа L взаимодостижимы тогда и только тогда, когда $D^{-1}(x) = D^{-1}(y)$.*

Доказать ее можно точно такими же рассуждениями, как и теореме 1, или вывести из этой теоремы непосредственно, замечая, что если направление всех дуг графа изменить на противоположное, то отношение взаимодостижимости его вершин не изменится, а множество $D^{-1}(x)$ перейдет в $D(x)$, и наоборот, для каждой $x \in X$. Из теоремы 2' следует, что в «установившейся» матрице $(E + R)^l$ строки совпадают тогда и только тогда, когда совпадают одноименные им столбцы, так что искать бикомпоненты графа L можно путем поиска одинаковых столбцов в этой матрице.

Во многих практически важных задачах встречаются графы с числом вершин порядка нескольких тысяч*. Написать матрицу смежности такого графа можно лишь чисто теоретически, поскольку ни одна вычислительная машина пока не способна удерживать в своей памяти миллионы элементов, да еще и оперировать с ними. Если граф не очень «густой», т. е. число его дуг не слишком велико по сравнению с числом вершин, то обычно его задают списком дуг (для каждой дуги указываются номера начальной и конечной вершин, а при наличии параллельных дуг вводится третий индекс или же допускаются повторения в списке); такое задание по сути дела равносильно систематической записи всех ненулевых элементов матрицы смежности R (или матрицы инцидентий A), однако алгоритм выявления бикомпонент, основанный на возведении матрицы $E + R$ в последовательные степени, становится при этом непригодным. Видимо, способ экономного построения установившейся матрицы, предложенный В. В. Мартынюком (1962), можно усовершенствовать так, чтобы избежать оперирования с нулевыми элементами. Остановимся на другом алгоритме, который найден Л. Я. Лейфманом (1966) и на практике обычно оказывается эффективным.

Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный орграф. Вершина $x \in X$ порождает его одновершинную бикомпоненту в том и только том случае, если x не принадлежит никакому орциклу в L ; в частности, такими вершинами являются все *тупиковые* (из которых не исходит ни одна дуга) и *антитупиковые* (в которые не заходит ни одна дуга), легко находимые однократным просмотром списка дуг L . Зачислив в список бикомпонент все тупики и антитупики (точнее, порожденные ими одновершинные подграфы), мы удаляем их, затем ищем такого же рода вершины в оставшемся подграфе L' , зачисляем в список бикомпонент L и удаляем из L' , и т. д. до тех пор, пока не придем к подграфу $L^0 = (X^0, U^0; P)$, не содержащему тупиков и антитупиков (если от L совсем ничего не осталось, то задача уже решена).

Выберем в L^0 произвольную вершину x_0 , а всем тем вершинам, в которые из x_0 идут дуги, присвоим значок 1; далее, всем не помеченным еще вершинам, в которые идут дуги из уже помеченных, придадим тот же значок 1; и т. д. до остановки процесса, т. е. до тех пор, пока в L^0 не останется ни одной такой помеченной вершины, из которой шла бы дуга в непомеченную.

*) Такими обычно бывают сетевые графики, применяемые при составлении оптимального плана работ (система ПЕРТ).

После остановки всем непомеченным вершинам припишем значок 0. Таким образом, каждая вершина графа L^0 приобретет значок 0 или 1, который мы назовем ее «левым значком»; ясно, что левый значок 1 будет у тех и только тех вершин $x \in X^0$, которые *нетривиально достижимы* из x_0 : при $x \neq x_0$ это означает обычную достижимость ($x \in D_{L^0}(x_0)$), а при $x = x_0$ — наличие в L^0 орцикла, содержащего x_0 .

С помощью аналогичного процесса, но двигаясь уже не по направлению дуг, а против, мы придадим каждой вершине графа L^0 второй значок 0 или 1, который назовем ее «правым значком» и смысл которого состоит в том, что вершина x_0 нетривиально достижима из тех и только тех вершин графа L^0 , правый значок которых равен 1. Функцию, относящую каждой вершине $x \in X^0$ упорядоченную пару $\overrightarrow{\mu\nu}$, где μ — левый, а ν — правый значок этой вершины, обозначим через

$$\ddagger(x) \doteq \ddagger_{L^0}^{x_0}(x).$$

Множество X^0 вершин графа L^0 разбивается на четыре попарно непересекающихся подмножества:

$$X^0 = X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11},$$

где

$$X_{\mu\nu} \doteq \{x / x \in X^0 \ \& \ \ddagger(x) = \overrightarrow{\mu\nu}\}$$

($\mu, \nu = 0, 1$), и нетрудно показать, что каждая бикомпонента графа L^0 полностью содержится в каком-либо из четырех подграфов $L_{\mu\nu} \doteq (X_{\mu\nu}, U_{\mu\nu}; P)$, порождаемых этими подмножествами (например, если бы некоторая бикомпонента содержала вершины $x \in X_{10}$ и $y \in X_{01}$, то в силу транзитивности отношения достижимости вершина y была бы достижима из x_0 , вопреки определению множества X_{01} ; и т. п.). Рассмотрим два случая.

Случай 1: $X_{11} \neq \emptyset$. Тогда L_{11} представляет собой бикомпоненту графа L^0 (а значит и исходного графа L), содержащую вершину x_0 , но не только эту вершину. Если $X_{00} = X_{01} = X_{10} = \emptyset$, то задача уже решена. Если же среди множеств X_{00}, X_{01}, X_{10} есть непустые, то с соответствующими подграфами $L_{\mu\nu}$ по отдельности поступаем так же, как с L (т. е. начинаем опять с удаления тупиков и антитупиков в каждом из них, и т. д.); список дуг графа L^0 (уменьшившийся по сравнению со списком дуг L при удалении тупиков и антитупиков) заметно поредеет за счет дуг, которые соединяли множества $X_{\mu\nu}$ между собой.

Случай 2: $X_{11} = \emptyset$. Тогда $X_{01} \neq \emptyset \ \& \ X_{10} \neq \emptyset$, так как вершина x_0 — не тупик и не антитупик; далее, $x_0 \in X_{00}$,

ибо в случае нетривиальной достижимости x_0 из самой себя через эту вершину проходил бы орцикл, и множество X_{11} не было бы пустым. Таким образом, теперь x_0 порождает одновершинную бикомпоненту (которую мы включим в список бикомпонент графа L), но при этом задача выявления остальных не

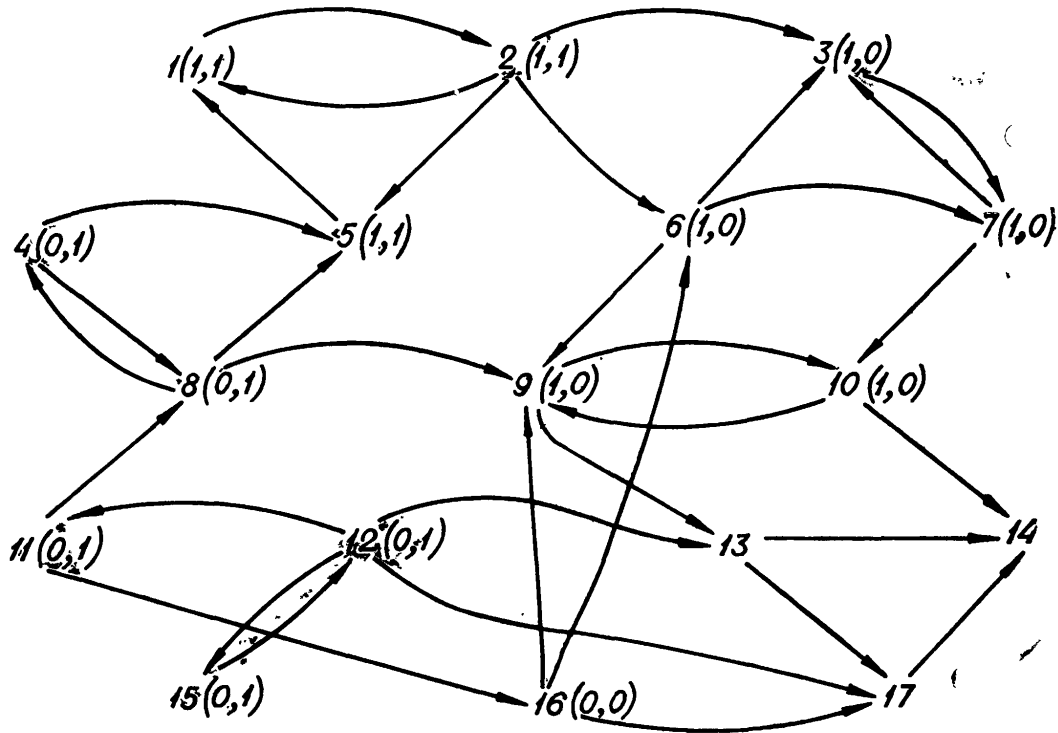


Рис. 109.

выявленных еще бикомпонент сводится к нахождению их отдельно в подграфах L_{01} и L_{10} , а также в подграфе L_{00}^* , порожденном множеством вершин $X_{00} \setminus \{x_0\}$, если последнее не пусто.

В качестве примера возьмем граф L , показанный на рис. 109. Список его дуг:

- $\vec{12}$, $\vec{21}$, $\vec{23}$, $\vec{25}$, $\vec{26}$, $\vec{37}$, $\vec{45}$,
- $\vec{48}$, $\vec{51}$, $\vec{63}$, $\vec{67}$, $\vec{69}$, $\vec{73}$, $\vec{7(10)}$,
- $\vec{84}$, $\vec{85}$, $\vec{89}$, $\vec{9(10)}$, $\vec{9(13)}$, $\vec{(10)9}$, $\vec{(10)(14)}$,
- $\vec{(11)8}$, $\vec{(11)(16)}$, $\vec{(12)(11)}$, $\vec{(12)(13)}$, $\vec{(12)(15)}$, $\vec{(12)(17)}$, $\vec{(13)(14)}$,
- $\vec{(13)(17)}$, $\vec{(15)(12)}$, $\vec{(16)6}$, $\vec{(16)9}$, $\vec{(16)(17)}$, $\vec{(17)(14)}$.

После удаления тупиковой вершины 14 вершина 17 становится тупиковой, а удалив 17, мы по той же причине должны будем удалить и 13. В оставшемся подграфе L^0 берем за x_0 вершину 1; левые и правые значки вершин L^0 после разметки указаны на рисунке в скобках. Имеем

$$X_{00} = \{16\}, \quad X_{01} = \{4, 8, 11, 12, 15\}, \quad X_{10} = \{3, 6, 7, 9, 10\}, \\ X_{11} = \{1, 2, 5\}.$$

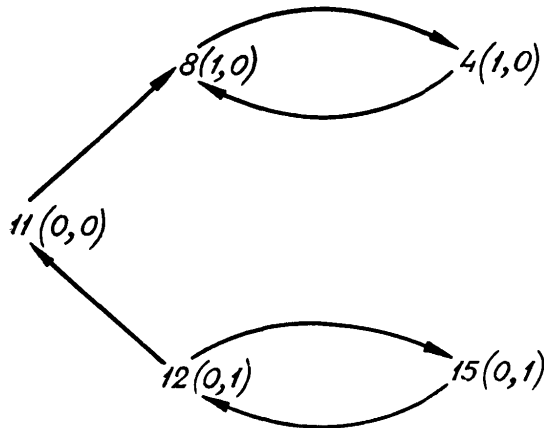


Рис. 110.

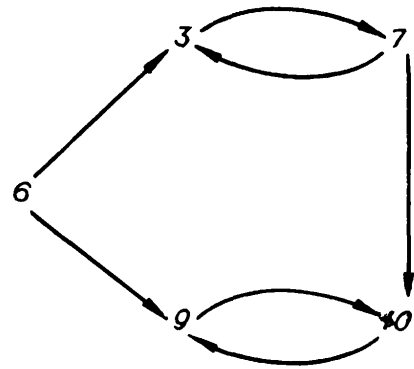


Рис. 111.

Таким образом, уже выделены пять бикомпонент графа L , с множествами вершин

$$\{14\}, \{17\}, \{13\}, \{16\}, \{1, 2, 5\},$$

и остается рассмотреть подграфы L_{01} и L_{10} . В первом из них (рис. 110) берем за x_0 вершину 11, тогда разметка будет соответствовать случаю 2, и это даст еще бикомпоненты с множествами вершин

$$\{11\}, \{4, 8\}, \{12, 15\}.$$

В подграфе L_{10} (рис. 111) удаляем антитупиковую вершину 6, а оставшийся подграф исследуем как выше; это приводит к выявлению последних трех бикомпонент, порождаемых множествами

$$\{6\}, \{3, 7\}, \{9, 10\}.$$

Итак, все одиннадцать бикомпонент графа L выявлены.

Для того чтобы характеризовать достижимость бикомпонент орграфа $L = (X, U; P)$ друг из друга, П. Герц (1922) и Д. Кёниг (1936, глава 7) ставят ему в соответствие более простой (вообще говоря) обыкновенный орграф $H(L) \doteq (Y, V)$ следующим образом. Вершинами $y_1, y_2, \dots, y_{\vec{x}}$ графа $H(L)$ служат бикомпоненты

$$L_1 = (X_1, U_1; P), L_2 = (X_2, U_2; P), \dots, L_{\vec{x}} = (X_{\vec{x}}, U_{\vec{x}}; P)$$

графа L , т. е. $y_i \doteq L_i (i=1, 2, \dots, \vec{x} = \vec{x}(L))$, а $\vec{y}_i \vec{y}_j \in V$ в том и только том случае, когда $i \neq j$ и в L имеется хотя бы одна дуга, идущая из вершины множества X_i в вершину множества X_j .

Мы будем называть $H(L)$ *графом Герца* для L . Ясно, что $H(L)$ не содержит орциклов, ибо иначе объединение множеств вершин всех тех бикомпонент графа L , которые представляют собой вершины орцикла в его графе Герца, породило бы в L бисвязный подграф, содержащий вершины из разных его бикомпонент, что невозможно.

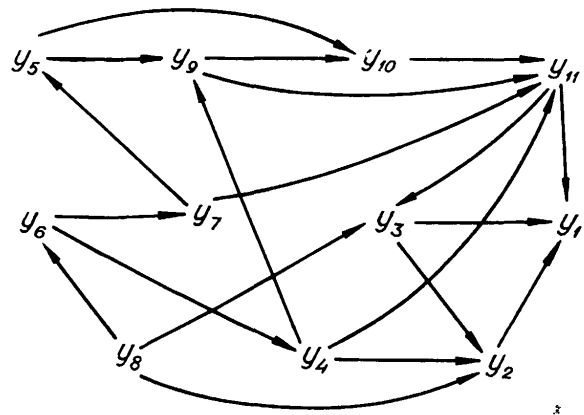


Рис. 112.

На рис. 112 показан граф Герца для рассмотренного выше графа L (рис. 109); бикомпоненты L пронумерованы в том порядке, в каком мы писали их при выявлении (например, y_1 изображает одновершинную бикомпоненту, порожденную множеством $\{14\}$, а y_5 — бикомпоненту с множеством вершин $\{1, 2, 5\}$).

Граф Герца в дальнейшем будет применяться неоднократно, а сейчас воспользуемся им для исследования структуры полных обыкновенных орграфов, которые обозначаем через $\vec{F} \doteq \vec{F}_n$, где $n \doteq n(\vec{F})$. Пусть $H(\vec{F}_n)$ — граф Герца для заданного \vec{F}_n . Ввиду полноты \vec{F}_n , граф $H(\vec{F}_n)$ тоже полон, а полнота его вместе с отсутствием орциклов влечет транзитивность. Поэтому \vec{F}_n представляет собой результат *подстановки* некоторых бисвязных полных обыкновенных орграфов $\vec{F}_{n_1}^1, \vec{F}_{n_2}^2, \dots, \vec{F}_{n_{\vec{x}}}^{\vec{x}}$ вместо вершин $y_1, y_2, \dots, y_{\vec{x}}$ в транзитивный полный обыкновенный орграф $H(\vec{F}_n)$, т. е. получается из $H(\vec{F}_n)$ заменой каждой вершины y_i соответствующим графом $\vec{F}_{n_i}^i$, а каждой

дуги $\vec{y_i y_j}$ — совокупностью всевозможных дуг, идущих из вершин $\vec{F}_{n_i}^i$ в вершины $\vec{F}_{n_j}^j$ *.

Структура графа $H(\vec{F}_n)$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется количеством $\vec{\kappa} \doteq \vec{\kappa}(\vec{F}_n)$ его вершин (И. Седлачек, 1/1957). Действительно, граф такого типа имеет тупиковую вершину (иначе он содержал бы орцикл) и только одну (вследствие полноты); удалив эту вершину, мы получим подграф, снова транзитивный (см. начало § 29), полный и обыкновенный, обладающий, в свою очередь, ровно одной тупиковой вершиной; и т. д. Из описанного процесса последовательного удаления тупиков ясно, что $H(\vec{F}_n)$ изоморфен графу отношения порядка на отрезке $\{1, 2, \dots, \vec{\kappa}\}$ натурального ряда. Таким образом, проблема полного обзора графов типа \vec{F} свелась к обзору всех бисвязных графов этого класса.

Т е о р е м а 3 (П. Камьон, 1/1959, 2/1960; Дж. Фаулкс, 1960). *Полный обыкновенный орграф обладает гамильтоновым орциклом тогда и только тогда, когда он бисвязен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что наличие гамильтонова орцикла влечет бисвязность, тривиален даже для любых орграфов, а не только полных обыкновенных. Пусть, наоборот, граф $\vec{F}_n \doteq (X, U)$ бисвязен и пусть \vec{C} — его простой орцикл наибольшей длины (орциклы заведомо есть, так как $n > 1$). Нам достаточно привести к противоречию допущение о том, что длина \vec{C} меньше n , т. е. что множество Y тех вершин \vec{F}_n , которые не принадлежат \vec{C} , непусто.

Для любой $x \in Y$ дуги, соединяющие x с вершинами цикла \vec{C} , направлены либо все от \vec{C} к x , либо все от x к \vec{C} , ибо если бы некоторая $x \in Y$ соединялась с \vec{C} дугами обоих направлений, то на цикле \vec{C} нашлись бы две последовательно расположенные вершины y и z , такие что $\vec{y z} \in U$ & $\vec{y x} \in U$ & $\vec{x z} \in U$, и, заменив в \vec{C} дугу $\vec{y z}$ (точнее, путь $y \vec{y z} z$) путем

$$y \vec{y x} x \vec{x z} z,$$

мы получили бы простой орцикл бóльшей длины, что невозможно. Поэтому

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$

*) Общее определение подстановки графов в граф будет дано во второй части книги.

$(Y_1 \cap Y_2 = \emptyset)$, где Y_1 — множество тех вершин Y , в которые идут дуги из вершин \vec{C} (притом из всех, ввиду полноты \vec{F}_n), а Y_2 — множество тех вершин Y , из которых идут дуги в вершины (притом все) цикла \vec{C} .

В силу бисвязности \vec{F}_n , оба множества Y_1 и Y_2 непусты и хотя бы одна дуга должна идти из некоторой вершины $x_1 \in Y_1$ в некоторую вершину $x_2 \in Y_2$. Выбрав на \vec{C} произвольную дугу \vec{yz} , мы заменим ее путем

$$\begin{array}{ccccccc} & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & \\ y & ux_1 & x_1 & x_1x_2 & x_2 & x_2z & z \end{array}$$

и получим орцикл бóльшей длины, чем \vec{C} , что невозможно.

Теорема доказана. Из нее видно, что бисвязный граф типа \vec{F}_n представляет собой, говоря на геометрическом языке, ориентированный n -угольник со всеми диагоналями, как угодно направленными. Проблему полного обзора таких графов нельзя еще считать исчерпанной, поскольку разные ориентации диагоналей могут приводить как к неизоморфным, так и к изоморфным графам; о связанных с этим трудностях говорит хотя бы задача нахождения точной верхней оценки $\vec{c}_k(n)$ количества простых орциклов длины k в полном обыкновенном орграфе \vec{F}_n : если М. Кендалл и Б. Бабингтон Смит (1940) легко показали, что

$$\vec{c}_3(n) = \begin{cases} \frac{1}{24} n(n^2 - 1) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{1}{24} n(n^2 - 4) & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

то вывод равенства

$$\vec{c}_4(n) = \begin{cases} \frac{1}{48} n(n-3)(n^2-1) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{1}{48} n(n-3)(n^2-4) & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

потребовал от У. Коломбо (1964) объемистого исследования, а значения $\vec{c}_k(n)$ при $k > 4$ неизвестны до сих пор. В дальнейшем Л. Байнеке и Ф. Харари (5/1965) нашли точную верхнюю оценку $\vec{f}_k(n)$ количества бисвязных k -вершинных подграфов в \vec{F}_n , из которой, в частности, вытекают оба предыдущих результата, поскольку бисвязные графы типов \vec{F}_3 и \vec{F}_4 содержат только по одному гамильтонову орциклу (с точностью до выбора начала

обхода), так что $\vec{c}_3(n) = \vec{f}_3(n)$ и $\vec{c}_4(n) = \vec{f}_4(n)$; однако уже $\vec{c}_5(n) > \vec{f}_5(n)$ при $n \geq 5$.

Т е о р е м а 4 (Байнеке — Харари).

$$\vec{f}_k(n) = \begin{cases} C_n^k - n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^k & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ C_n^k - \frac{n}{2} \cdot \left(C_{\frac{n}{2}}^{k-1} + C_{\frac{n-2}{2}}^{k-1} \right) & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{F}_n = (X, U)$, где $X \doteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и пусть $s_i^+ \doteq s^+(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — полустепени исхода его вершин (см. § 2 в главе 1). Никакой подграф \vec{F}_k графа \vec{F}_n , имеющий вершину x с полустепенью исхода $s_{\vec{F}_k}^+(x) = k - 1$ (относительно \vec{F}_k), не может быть бисвязным, поэтому

\vec{F}_n содержит по крайней мере $S \doteq \sum_{i=1}^n C_{s_i^+}^{k-1}$ подграфов типа \vec{F}_k ,

не являющихся бисвязными. При данной сумме $\sum_{i=1}^n s_i^+ = |U|$ и

данном k ($3 \leq k \leq n$) сумма S принимает наименьшее значение тогда, когда ее слагаемые различаются не более, чем на единицу; это сразу следует из элементарно доказываемого неравенства

$$C_l^{k-1} + C_{l+p}^{k-1} > C_{l+1}^{k-1} + C_{l+p-1}^{k-1}$$

при $p \geq 2$. Поэтому система чисел $\{s_i^+\}$, минимизирующая S , должна при надлежащей нумерации иметь вид

$$s_1^+ = s_2^+ = \dots = s_n^+ = \frac{n-1}{2}, \text{ если } n \text{ нечетно,}$$

$$s_1^+ = s_2^+ = \dots = s_{\frac{n}{2}}^+ = \frac{n}{2} - 1, \quad s_{\frac{n}{2}+1}^+ = \dots = s_n^+ = \frac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четно.}$$

Убедимся в существовании графа \vec{F}_n с такой системой полустепеней исхода.

Пусть сначала $n = 2p + 1$. Построим n -вершинный граф $\vec{F}_n^* = (X, U)$ с $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и с дугами, идущими из x_i в $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+p}$ при всех i , считая здесь $x_{j+n} \doteq x_j$ для любого j . Этот граф — полный, ибо при любых i и j с $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ имеет место либо $j < i + p$, либо $i < j + p$. Каж-

дая вершина $x \in X$ обладает в \vec{F}_n^* полустепенью исхода $s^+(x) = p$.

Существует всего четыре (с точностью до изоморфизма) графа \vec{F}_4 : они изображены на рис. 113. Оказывается, в построенном только что \vec{F}_n^* всякий подграф \vec{F}_4 либо транзитивен, либо бисвязен, т. е. имеет вид A или B . В самом деле, пусть \vec{F}_n^* содержит подграф $\vec{F}_4^C = (X_C, U_C)$, где $X_C \doteq \{x_i, x_j, x_q, x_r\}$, а $U_C \doteq \{\overrightarrow{x_i x_j}, \overrightarrow{x_j x_q}, \overrightarrow{x_q x_i}, \overrightarrow{x_i x_i}, \overrightarrow{x_i x_j}, \overrightarrow{x_r x_q}\}$. Тогда $j \leq i + p$, $q \leq j + p$, $q > i + p$ (в силу определения \vec{F}_n^*) и $n \geq r > i + p$, $r > j + p$ (в силу определения \vec{F}_4^C), т. е. $\overrightarrow{x_q x_r} \in U_C$, вопреки $\overrightarrow{x_r x_q} \in U_C$. Аналогично доказывается отсутствие у \vec{F}_n^* подграфов \vec{F}_4^D вида D .

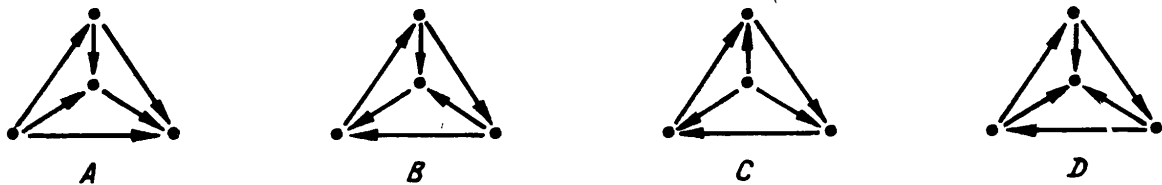


Рис. 113.

Теперь пусть $n = 2p$. Построим граф \vec{F}_{n+1}^* , как указано выше, и обозначим через \vec{F}_n^* любой из его n -вершинных подграфов (все они изоморфны друг другу). Половина всех вершин \vec{F}_n^* обладает полустепенью исхода $\frac{n}{2} - 1$, а половина — полустепенью $\frac{n}{2}$. Аналогично предыдущему доказывается, что всякий подграф \vec{F}_4 в \vec{F}_n^* транзитивен или бисвязен.

Итак, граф \vec{F}_n^* определен для любого n и обладает свойством: при $k = 4$ (и $n \geq k$) всякий его подграф \vec{F}_k либо транзитивен, либо бисвязен. Покажем, что это свойство остается в силе и при любом $k \geq 4$.

Пусть \vec{F}'_k — произвольный нетранзитивный подграф графа \vec{F}_n^* . Ввиду полноты и нетранзитивности, \vec{F}'_k содержит орцикл длины 3, с последовательными вершинами, скажем, x_i, x_j, x_q, x_i . Если \vec{F}'_k не бисвязен, то в нем найдется такая вершина x_r , что либо все три дуги $\overrightarrow{x_i x_r}, \overrightarrow{x_j x_r}, \overrightarrow{x_q x_r}$, либо все три дуги $\overrightarrow{x_r x_i}, \overrightarrow{x_r x_j}, \overrightarrow{x_r x_q}$ принадлежат \vec{F}'_k , иначе говоря, \vec{F}'_k содер-

жит подграф \vec{F}_k вида C или D . Но \vec{F}_n^* не может иметь таких подграфов, следовательно, \vec{F}_k необходимо бисвязен.

Так как число транзитивных k -вершинных подграфов в \vec{F}_n достигает наименьшего значения при $\vec{F}_n = \vec{F}_n^*$, а все остальные k -вершинные подграфы в \vec{F}_n^* бисвязны, то количество бисвязных подграфов типа \vec{F}_k в \vec{F}_n является при $\vec{F}_n = \vec{F}_n^*$ наибольшим возможным. Формула теоремы получается теперь элементарным подсчетом.

С л е д с т в и е. *Наибольшее число бисвязных подграфов в \vec{F}_n равно*

$$\sum_{k=3}^n \vec{f}_k(n) + n = \begin{cases} 2^n - n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + n - 1 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 2^n - 3n \cdot 2^{\frac{n-2}{2}} + n - 1 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Т е о р е м а 5 (Л. Редей, 1/1934). *Всякий плотный* орграф имеет хотя бы один гамильтонов путь.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно считать данный граф полным обыкновенным орграфом \vec{F} (поскольку петли и лишние дуги можно удалить). Добавим к \vec{F} новую вершину x_0 и соединим ее дугами со всеми вершинами \vec{F} , причем направления дуг выберем так, чтобы выполнялись следующие два условия (а в остальном произвольно):

1) если \vec{F}' — такая бикомпонента графа \vec{F} , в которую не заходит ни одна дуга из вершины \vec{F} , не принадлежащей \vec{F}' , то хотя бы одна дуга должна быть направлена от x_0 к \vec{F}' ;

2) если \vec{F}'' — бикомпонента \vec{F} , из которой не исходит ни одна дуга в вершину \vec{F} , не принадлежащую \vec{F}'' , то хотя бы одна дуга должна идти из \vec{F}'' в x_0 .

Легко видеть, что если сам \vec{F} не бисвязен, то бисвязен построенный граф, поэтому, в силу теоремы 3, последний обладает гамильтоновым орциклом, а он после удаления x_0 превращается в искомый гамильтонов путь графа \vec{F} ; в случае же, когда бисвязен сам \vec{F} , наше дополнительное построение становится излиш-

*) Определение термина «плотный» дано в конце § 4 (глава 1).

ним, поскольку наличие в \vec{F} гамильтонова орцикла тем более означает наличие гамильтонова пути. *

Т. Галлаи и А. Милгрэм (1960) получили интересное обобщение теоремы Редеи, которое мы упомянем здесь без доказательства: если орграф L обладает неплотностью ε (L) $\doteq \varepsilon$ (см. § 10 в главе 1), то в нем существует система не более чем из ε путей такая, что каждая вершина графа L принадлежит хотя бы одному из этих путей.

А. Гуйя-Ури (1/1960) нашел достаточное условие существования гамильтонова орцикла, по форме напоминающее условие Оре для неориентированного случая (см. § 18 в главе 2), но доказываемое много сложнее. Напомним (см. § 7 в главе 1), что для произвольного орграфа $L = (X, U; P)$

$$\Gamma_L x \doteq \{y/y \in X \ \& \ \exists u P(x, u, y)\},$$

$$\Gamma_L^{-1} x \doteq \{y/y \in X \ \& \ \exists u P(y, u, x)\} = \{y/y \in X \ \& \ x \in \Gamma y\}$$

($x \in X$). Мы скажем, что орграф L обладает свойством \mathfrak{Q}_0 , если для него справедливо высказывание

$$\forall x \in X (|\Gamma_L x| + |\Gamma_L^{-1} x| \geq n(L)),$$

которое кратко обозначаем через $\mathfrak{Q}_0(L)$.

Т е о р е м а 6 (Гуйя-Ури). *Бисвязный орграф L без петель, обладающий свойством \mathfrak{Q}_0 , имеет гамильтонов орцикл.*

Д о к а з а т е л ь с т в о**. Утверждение тривиально при $n(L) = 2$; пусть оно уже доказано для графов менее чем с n_0 вершинами, где $n_0 \geq 3$, и пусть L — произвольный n_0 -вершинный граф, удовлетворяющий условиям теоремы. Мы приведем к противоречию предположение об отсутствии в L гамильтоновых орциклов.

Выберем в L некоторый простой орцикл

$$\vec{C}_0 \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

наибольшей длины; поскольку в дальнейшем будут рассматриваться некоторые циклические суммы, то нам удобно считать обозначения вершин графа L такими, что $x_{k+l} \doteq x_k$ при любом k , а не только при $k = 0$. Так как орграф L бисвязен и содер-

*) Прямое доказательство теоремы Редеи, не опирающееся на теорему Камьона — Фаулкса, можно найти, например, в книжке О. Оре (6/1963, русск. 1965).

***) Упрощено М. К. Гольдбергом.

жит более одной вершины, то в нем имеется орцикл длины ≥ 2 ; отсюда и из предположения о том, что в L нет гамильтоновых орциклов, следует

$$2 \leq l < n_0. \quad (1)$$

Обозначим множество $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}\}$ всех вершин \vec{C}_0 через X_0 , и пусть

$$L_1 \doteq (X_1, U_1; P), L_2 \doteq (X_2, U_2; P), \dots, L_p \doteq (X_p, U_p; P),$$

где $p \geq 1$ — бикомпоненты подграфа, порожденного множеством вершин $X \setminus X_0$. Покажем, что при всех $i = 1, 2, \dots, p$

$$\forall x \in X_i \quad (l - |X_i| + 2 \leq |\Gamma_L x \cap X_0| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_0| \leq l). \quad (2)$$

Так как ни для каких вершин x и y , взятых из разных бикомпонент, не может быть $x \in \Gamma_L y$ & $y \in \Gamma_L x$, то при $j \neq i$ всегда

$$\forall x \in X_i \quad (|\Gamma_L x \cap X_j| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_j| \leq |X_j|); \quad (3)$$

отсюда и из очевидного неравенства

$$\forall x \in X_i \quad (|\Gamma_L x \cap X_i| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_i| \leq 2(|X_i| - 1)),$$

используя условие $\Omega_0(L)$, получаем для любого $x \in X_i$

$$\begin{aligned} |\Gamma_L x \cap X_0| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_0| &= |\Gamma_L x| + |\Gamma_L^{-1} x| - \sum_{j=1}^p (|\Gamma_L x \cap X_j| + \\ &+ |\Gamma_L^{-1} x \cap X_j|) \geq n_0 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |X_j| - 2(|X_i| - 1) = n_0 - \\ &- \sum_{j=1}^p |X_j| - |X_i| + 2 = l - |X_i| + 2, \end{aligned}$$

т. е. нижнюю оценку в (2). Для доказательства верхней оценки заметим, что, ввиду отсутствия в L простых орциклов длины $> l$, ни для каких $x \in X_i$, $x_j \in X_0$, $x_{j+1} \in X_0$ не может быть $x \in \Gamma_L x_j$ & $x_{j+1} \in \Gamma_L x$, поэтому всегда

$$|\Gamma_L x \cap \{x_{j+1}\}| + |\Gamma_L^{-1} x \cap \{x_j\}| \leq 1,$$

в силу чего

$$\begin{aligned} |\Gamma_L x \cap X_0| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_0| &= \sum_{j=1}^l |\Gamma_L x \cap \{x_j\}| + \\ + \sum_{j=1}^l |\Gamma_L^{-1} x \cap \{x_j\}| &= \sum_{j=0}^{l-1} |\Gamma_L x \cap \{x_{j+1}\}| + \sum_{j=1}^l |\Gamma_L^{-1} x \cap \{x_j\}| = \\ &= \sum_{j=1}^l (|\Gamma_L x \cap \{x_{j+1}\}| + |\Gamma_L^{-1} x \cap \{x_j\}|) \leq l, \end{aligned}$$

что и требовалось (мы совершили круговую перестановку слагаемых в первой сумме).

Выберем теперь какую-нибудь одну из бикомпонент L_i , например L_1 , и пусть $q \doteq |X_1|$. Справедливо $\Omega_0(L_1)$: в самом деле, используя $\Omega_0(L)$, (3) и верхнюю оценку в (2), получаем для любого $x \in X_1$

$$\begin{aligned} |\Gamma_{L_1} x| + |\Gamma_{L_1}^{-1} x| &= |\Gamma_L x \cap X_1| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_1| = |\Gamma_L x| + |\Gamma_L^{-1} x| - \\ - (|\Gamma_L x \cap X_0| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_0|) &- \sum_{j=2}^p (|\Gamma_L x \cap X_j| + |\Gamma_L^{-1} x \cap X_j|) \geq \\ &\geq n_0 - l - \sum_{j=2}^p |X_j| = |X_1| = q. \end{aligned}$$

Так как $2 \leq q < n_0$ (левое неравенство получается из (2) сравнением крайних частей), то, по индуктивному предположению, в L_1 есть гамильтонов орцикл

$$\vec{C}_1 \doteq y_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{q-1} v_q y_q;$$

как и выше, полагаем $y_{k+q} \doteq y_k$ при любом k . Заметим, что если из некоторой вершины $x_i \notin X_0$ в некоторую вершину $y_j \in X_1$ ведет простой путь Q длины $p \geq 1$, остальные вершины которого (в случае $p > 1$) не принадлежат ни X_0 , ни X_1 , то

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, q\} \quad (x_{i+k} \notin \Gamma_L y_{j-1}), \quad (4)$$

ибо иначе граф L содержал бы простой орцикл длины $\geq (l - q) + p + (q - 1) + 1 = l + p > l$ (рис. 114).

Пусть

$$\alpha(y_j) \doteq |\{x/x \in X_0 \ \& \ y_j \in \Gamma_L x\}|,$$

$$\beta(y_j) \doteq |\{x/x \in X_0 \ \& \ x \in \Gamma_L y_j\}|$$

($j = 1, 2, \dots, q$); тогда левое неравенство в (2) примет вид

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, q\} [\alpha(y_j) + \beta(y_j) \geq l - q + 2]. \quad (2')$$

Суммируя (2') по j и совершая круговую перестановку вторых слагаемых, получаем

$$\sum_{j=1}^q [\alpha(y_j) + \beta(y_{j-1})] \geq q \cdot (l - q + 2),$$

откуда следует существование такого t ($1 \leq t \leq q$), при котором

$$\alpha(y_t) + \beta(y_{t-1}) \geq l - q + 2. \quad (5)$$

Докажем теперь, что

$$\alpha(y_t) \geq 1; \quad (6)$$

для этого более чем достаточно опровергнуть допущение

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, q\} [\alpha(y_j) = 0]. \quad (7)$$

Предположим последнее верным, и пусть

$$Q \doteq x_i w_1 z_1 w_2 z_2 \dots z_{p-1} w_p y_j,$$

—какой-либо из кратчайших путей от \vec{C}_0 к \vec{C}_1 , удовлетворяющих условию:

$$\text{если } p = 1, \text{ то } \alpha(y_{j_0-1}) = 0; \quad (8)$$

существование хотя бы одного такого пути вытекает из связности графа L и из допущения (7). Так как Q — кратчайший, а при $p > 1$ условие (8)

выполнено для любого $j_0 = 1, 2, \dots, q$, то $z_k \notin X_0 \cup X_1$ ($k = 1, 2, \dots, p-1$), и из (4), полагая $i = i_0, j = j_0$, получаем

$$\alpha(y_{j_0-1}) + \beta(y_{j_0-1}) \leq 0 + (l - q) < l - q + 2,$$

в противоречии с (2').

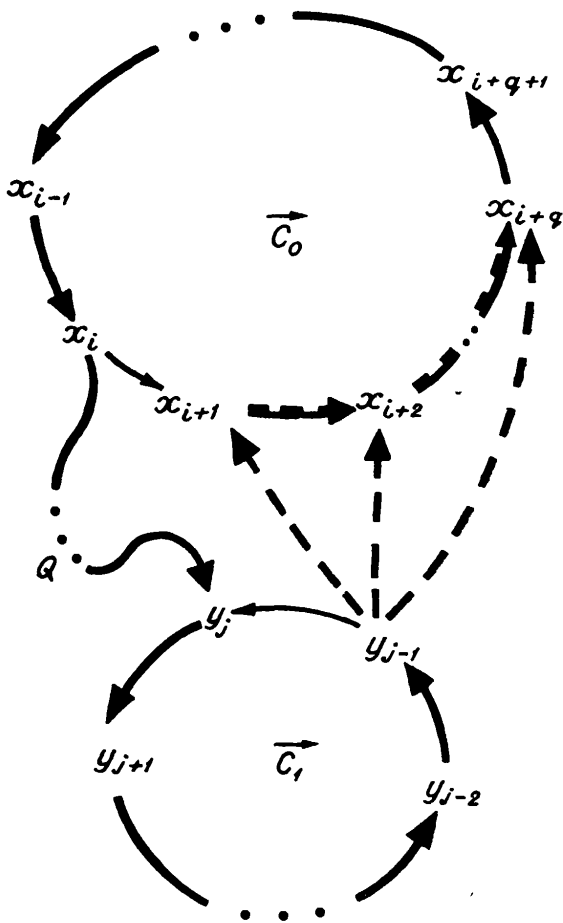


Рис. 114.

Итак, (6) справедливо. Производя в случае надобности круговую перенумерацию вершин орцикла \vec{C}_0 , мы добьемся того, что $y_t \in \Gamma_L x_0$. Тогда на основании (4), полагая сначала $i = 0$ и $j = t$, находим q вершин x_1, x_2, \dots, x_q , не принадлежащих множеству $\Gamma_L y_{t-1}$, а затем, просматривая значения $i = 1, 2, \dots, l - 1$ и сохраняя $j = t$, мы для каждой из тех вершин x_i , которые принадлежат $\Gamma_L y_{t-1}$, выявим дополнительно по одной вершине (из числа вершин $x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_l = x_0$), не принадлежащей $\Gamma_L y_{t-1}$; таким образом,

$$\beta(y_{t-1}) \leq l - q - [\alpha(y_t) - 1],$$

т. е.

$$\alpha(y_t) + \beta(y_{t-1}) \leq l - q + 1,$$

что опять противоречит (2'). Теорема доказана.

Тот факт, что условие $\mathfrak{D}_0(L)$ нельзя ослабить сразу для всех вершин, виден из следующего примера М. К. Гольдберга. Пусть $X \doteq \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, а U состоит из дуг $\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_1 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{n-2} x_{n-1}}$ и из всевозможных дуг $\overrightarrow{x_j x_i}$ с $j > i$, за исключением $\overrightarrow{x_{n-1} x_0}$. Тогда в бисвязном графе Бержа $L = (X, U)$ будет $|\Gamma_L x_i| + |\Gamma_L^{-1} x_i| = n$ при $i = 1, 2, \dots, n - 2$ и $|\Gamma_L x_i| + |\Gamma_L^{-1} x_i| = n - 1$ при $i = 0, n - 1$. Граф L не имеет гамильтоновых орциклов. Действительно, на таком орцикле после x_0 должно следовать x_1 , после x_1 следовать x_2, \dots , после x_{n-2} следовать x_{n-1} , но после x_{n-1} не может следовать x_0 , поскольку $\overrightarrow{x_{n-1} x_0} \notin U$. Итак, правую часть в \mathfrak{D}_0 нельзя заменить на $n - 1$ даже для двух вершин; пытаться же сделать это лишь для одной вершины едва ли интересно.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких условиях заданный граф $L = (X, U; P)$ общего вида является бисвязно ориентируемым, т. е. может быть посредством ориентации звеньев и переориентации некоторых дуг превращен в бисвязный орграф. Ответ на вопрос дает

Т е о р е м а 7. *Для бисвязной ориентируемости графа L необходимо и достаточно, чтобы он был связан и не содержал перешейков.**

Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности надо лишь показать, что если L — произвольный связный

*) См. конец § 13 (глава 2).

орграф без перешейков, с $\vec{\kappa}(L) \geq 2$, то путем переориентации дуг всегда можно уменьшить число его бикомпонент.

Если какие-то две бикомпоненты L_i и L_j ($i \neq j$) орграфа L соединены более чем одной дугой, то для уменьшения общего числа бикомпонент достаточно одну из этих дуг переориентировать с таким расчетом, чтобы в результате иметь как дугу, идущую из L_i в L_j , так и дугу, идущую из L_j в L_i . Если же никакие две бикомпоненты L не соединены более чем одной дугой, то, ввиду отсутствия перешейков и ввиду связности L , граф Герца $H(L)$ для L содержит хотя бы один цикл C ; переориентировав дуги между бикомпонентами L таким образом, чтобы C стал орциклом, мы опять уменьшим число бикомпонент графа L . Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть L — произвольный граф, а L' — суграф, полученный из L удалением всех перешейков. Наименшее количество бикомпонент, которого можно добиться при всевозможных ориентациях звеньев и переориентациях дуг графа L , равно числу $\kappa(L')$ компонент суграфа L' .

Как показал И. Седлачек (2/1959), если обыкновенный граф $L = (X, U)$ с $n(L) \geq 3$ не содержит висячих (т. е. степени 1) вершин, то при любом выборе вершины $x_0 \in X$ можно так ориентировать L , чтобы в полученном орграфе \vec{L} все орциклы проходили через x_0 .

Вопросам оценки количества вершин наибольшего подграфа без орциклов, содержащегося в любом полном n -вершинном обыкновенном орграфе, посвящена работа П. Эрдеша и Дж. Муна (1965). П. Эрдеш (4/1963) дает оценки наименьшего числа вершин обыкновенного графа L , обладающего следующим свойством S_k : можно так ориентировать L , чтобы в полученном орграфе $\vec{L} = (X, \vec{U})$ было

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_k \in X \exists y \in X (\overrightarrow{yx_1}, \overrightarrow{yx_2}, \dots, \overrightarrow{yx_k} \in \vec{U}).$$

Наконец, укажем на объемистую монографию Ф. Харари, Р. Нормана и Д. Картрайта (1965), специально посвященную орграфам.

Для графа L общего вида достижимость его вершины y из вершины x можно понимать двояко: либо как существование ормаршрута (пути), либо как существование частично ориентированного маршрута (частично ориентированной цепи) из x в y (см. § 28). Вся изложенная выше теория бисвязности сохранит силу, если в первом случае удалить из L звенья, а во втором заменить каждое звено парой противоположно направленных дуг.

§ 33. Базы вершин. Ядра

Множество $Z \subseteq X$ называется базой вершин орграфа $L = (X, U; P)$, если

$$\bigcup_{z \in Z} D(z) = X$$

и

$$\forall z_1, z_2 \in Z [z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1 \notin D(z_2)],$$

т. е. если всякая вершина L достижима хотя бы из одной вершины Z , но различные вершины множества Z недостижимы друг из друга. Нас будут интересовать вопросы существования, единственности и нахождения базы вершин в заданном орграфе L . Заметим, что если не учитывать ориентацию дуг и заменить отношение достижимости отношением неотделенности, то решение этих вопросов окажется тривиальным, а именно всякая база будет состоять из вершин, произвольно выбранных по одной в каждой компоненте, и поэтому только у вырожденного графа база будет единственной. Учет ориентации дуг делает поставленные задачи нетривиальными, а решение их важно не только для самой теории графов, но и для ряда ее приложений.

Бикомпоненту $L_i = (X_i, U_i; P)$ орграфа $L = (X, U; P)$ назовем базовой, если в нее не заходит извне ни одна дуга (т. е. не существует дуги, идущей из вершины $x \in X \setminus X_i$ в вершину $y \in X_i$). Базовым бикомпонентам графа L , очевидно, соответствуют антигупиковые вершины в его графе Герца $H(L)$. Так как $H(L)$ не содержит орциклов, то он обладает хотя бы одним антигупиком, в силу чего справедлива

Л е м м а. *Всякий орграф имеет по крайней мере одну базовую бикомпоненту.*

Полный обзор всех баз вершин в данном орграфе $L = (X, U; P)$ дает

Т е о р е м а 1. *Множество $Z \subseteq X$ является базой вершин орграфа L тогда и только тогда, когда оно образовано вершинами, взятыми по одной из каждой базовой бикомпоненты этого графа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения базовой бикомпоненты, никакая ее вершина не достижима извне, поэтому база вершин графа L необходимо должна содержать по вершине из каждой его базовой бикомпоненты. Выбрав ровно по одной такой вершине, мы получим множество Z (непустое в силу леммы, различные вершины которого недостижимы друг из друга). Покажем, что для любого множества Z , построенного таким образом, всякая вершина $x \in X \setminus Z$ достижима хотя бы из одной вершины $z \in Z$.

Если x принадлежит какой-либо из базовых бикомпонент, то x достижима из той вершины $z \in Z$, которая была выбрана в рассматриваемой бикомпоненте при построении множества Z . Пусть теперь бикомпонента L_i , содержащая вершину x , — не базовая, т. е. соответствующая вершина y_i графа Герца $H(L)$ не является антитуфиком. Выбирая в $H(L)$ какую-либо дугу $\overrightarrow{y_j y_i}$, заходящую в y_i , затем для вершины y_j , если она — не антитуфик, — некоторую дугу $\overrightarrow{y_k y_j}$, заходящую в y_j , и т. д., мы в силу отсутствия в $H(L)$ орциклов рано или поздно найдем такую антитуфиковую вершину y_p , из которой в $H(L)$ достижима вершина y_i . Вследствие взаимодостижимости всех вершин в бикомпоненте и ввиду транзитивности отношения достижимости вершина x графа L достижима из той вершины $z \in Z$, которая была выбрана в бикомпоненте L_p .

С л е д с т в и е 1. *Все базы вершин одного и того же орграфа обладают одинаковым количеством вершин.*

С л е д с т в и е 2. *Для единственности базы вершин орграфа необходимо и достаточно, чтобы каждая его базовая бикомпонента была одновершинной*.*

Таким образом, нахождение баз вершин свелось к выявлению базовых бикомпонент графа, а это нетрудно сделать по «установившейся» матрице $(E + R)^l$ (см. § 32): ее столбец отвечает вершине из базовой бикомпоненты тогда и только тогда, когда он не поглощает (при сложении) никакой другой столбец с меньшим числом единиц; иначе: строка отвечает вершине из базовой бикомпоненты тогда и только тогда, когда она не поглощается никакой строкой с большим числом единиц. Выявляя бикомпоненты по способу Лейфмана, можно попутно построить граф Герца $H(L)$ для данного графа L , и нахождение базовых бикомпонент L сведется к нахождению антитуфиковых вершин в $H(L)$.

В ряде вопросов требуется исследование не базы, а *антибазы*, т. е. такого множества $\bar{Z} \subseteq X$ вершин орграфа $L = (X, U; P)$, что различные вершины \bar{Z} недостижимы друг из друга, но из всякой $x \in X \setminus \bar{Z}$ можно попасть в какую-нибудь вершину \bar{Z} ; антибаза — это база вершин орграфа, полученного из L перероентацией всех дуг. Я. Я. Дамбит (1/1963) исследовал вопрос о существовании в графе так называемой «усиленной базы», т. е. такой антибазы вершин, из которой не исходит наружу ни одна дуга. Все сказанное выше приводит к выводу, что «усилен-

*) Это условие (в несколько иной формулировке) найдено Я. М. Барздынем (1959).

ная база» — это не что иное, как обычная антибаза вершин в случае ее единственности, и что оргграф, обладающий более чем одной антибазой, не имеет «усиленной базы». Поэтому алгоритм цитируемой работы полностью пригоден для нахождения антибазы или базы вершин в случае ее единственности.

Ф. Харари и М. Ричардсон (1959) изучают понятие r -базы, т. е. такого подмножества $Z \subseteq X$ вершин оргграфа $L = (X, U; P)$, что

- 1) никакая вершина $y \in Z$ не достижима ни из какой другой вершины $x \in Z$ по пути длины $\leq r$;
- 2) любая вершина $z \in X \setminus Z$ достижима из какой-нибудь $x \in Z$ по пути длины $\leq r$.

Мы на этом останавливаться не будем.

Приступаем к изучению ядер. Нам будет удобно пользоваться отображениями Γ_L , Γ_L^{-1} , Ξ_L и Ξ_L^{-1} , определенными в § 7 (глава 1) для произвольного оргграфа $L = (X, U; P)$. Введем еще следующие обозначения:

$E^- \doteq E_L^- \doteq \{x/x \in X \text{ \& } \Gamma_L x = \emptyset\}$ — множество всех тупиков графа L ;

$E^+ \doteq E_L^+ \doteq \{x/x \in X \text{ \& } \Gamma_L^{-1} x = \emptyset\}$ — множество всех анти-тупиков L ;

$\dot{X} = \dot{X}_L \doteq \{x/x \in X \text{ \& } x \in \Gamma x\}$ — множество всех тех вершин графа L , при которых есть петли. Ясно, что

$$E^+ \cap \dot{X} = E^- \cap \dot{X} = \emptyset$$

и что пересечение $E^+ \cap E^-$ состоит из всех голых вершин графа (см. § 2 в главе 1).

Множество $N^+ \subseteq X$ называется *положительным ядром*, или *(+)-ядром* оргграфа L , если

$$\Xi_L N^+ = X \setminus N^+;$$

аналогично множество $N^- \subseteq X$ есть *отрицательное ядро*, или *(-)-ядро* L , когда

$$\Xi_L^{-1} N^- = X \setminus N^-.$$

Равносильные определения для N^+ и N^- суть

$$\forall x \in N^+ (\Gamma_L x \cap N^+ = \emptyset) \text{ \& } \forall y \in X \setminus N^+ (\Gamma_L^{-1} y \cap N^+ \neq \emptyset)$$

и

$$\forall x \in N^- (\Gamma_L x \cap N^- = \emptyset) \ \& \ \forall y \in X \setminus N^- (\Gamma_L y \cap N^- \neq \emptyset).$$

Из определений непосредственно следует, что *всякое ядро в то же время является полуядром* (см. конец § 10 в главе 1) и, значит, порождает в L максимальный пустой подграф; в дальнейшем под ядрами будем в равной мере понимать как сами множества вершин N^+ и N^- , так и соответствующие подграфы $(N^+, \emptyset; P)$, $(N^-, \emptyset; P)$ графа L . Очевидно, для любых ядер всегда

$$E^+ \subseteq N^+, \quad N^+ \cap \dot{X} = \emptyset$$

и

$$E^- \subseteq N^-, \quad N^- \cap \dot{X} = \emptyset.$$

Граф L_1 на рис. 115 обладает как $(+)$ -ядром, так и $(-)$ -ядром (оба ядра одновершинные), а граф L_2 имеет два ядра, каждое из которых одновременно и положительное и отрицательное. Не у всякого орграфа есть ядра (даже при отсутствии петель): так, в орцикле длины три нет ни $(+)$ -ядер, ни $(-)$ -ядер, а добавив к этому ориентированному треугольнику новую вершину и три дуги, идущие из нее в прежние вершины (см. граф L_3 на рис. 115), получим пример орграфа, который обладает положительным ядром (добавленная вершина), но не имеет отрицательных ядер.

Если ориентацию всего орграфа изменить на противоположную т. е. одновременно переориентировать все дуги, то множества E^- , E^+ , \dot{X} перейдут соответственно в E^+ , E^- , \dot{X} , а все положительные ядра станут отрицательными и наоборот; такая двойственность позволяет нам избегать дублирования в формулировках и доказательствах некоторых теорем. Нижеследующие теоремы 2 и 3 принадлежат С. Рудяну (1964). *

Т е о р е м а 2. *Подмножество $N \subseteq X$ вершин орграфа $L = (X, U; P)$ является его положительным ядром тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

- (1) $E^+ \subseteq N$;
- (2) $N \cap \Xi_L E^+ = \emptyset$;
- (3) множество $N \setminus E^+$ есть $(+)$ -ядро подграфа $L' \doteq (X', U'; P)$, порожденного множеством вершин $X' \doteq X \setminus (E^+ \cup \Xi_L E^+)$.

Для отрицательных ядер справедлива двойственная теорема.

*) В цитируемой работе, как и в предшествующей литературе, исследуются только $(-)$ -ядра, называемые просто ядрами.

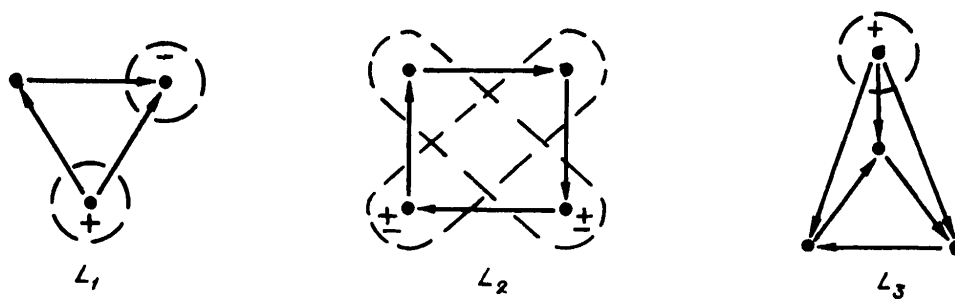


Рис. 115.

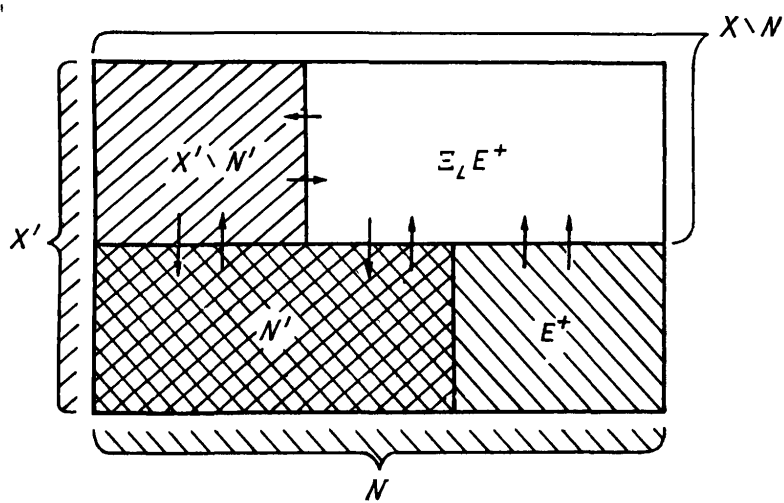


Рис. 116.

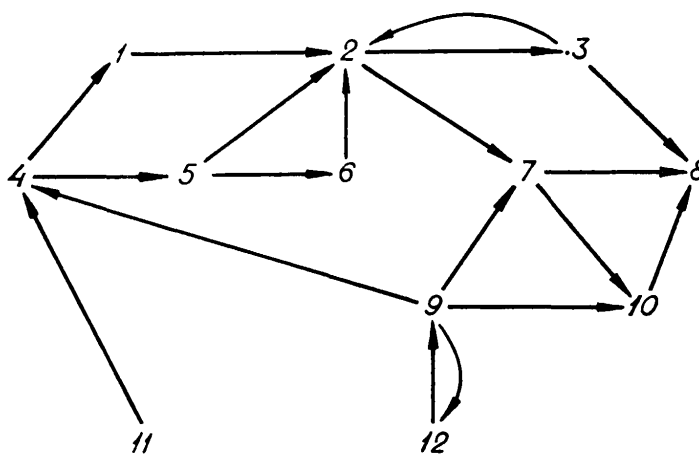


Рис. 117.

Доказательство. Пусть N — произвольное подмножество у X , удовлетворяющее условиям (1) и (2), а $N' \doteq N \setminus E^+$. Ясно, что

$$\Xi_L N = \Xi_L N' \cup \Xi_L E^+$$

и

$$\Xi_L N' = \Xi_L N \setminus \Xi_L E^+$$

(рис. 116). Если N удовлетворяет, кроме (1) и (2), также условию (3), т. е.

$$\Xi_L N' = X' \setminus N',$$

то

$$\Xi_L N = \Xi_L N' \cup \Xi_L E^+ = (X' \setminus N') \cup \Xi_L E^+ = X \setminus N,$$

а это и значит, что N является $(+)$ -ядром графа L . Наоборот, если N — положительное ядро L , т. е.

$$\Xi_L N = X \setminus N,$$

то условия (1) и (2) тоже, очевидно, выполнены, поэтому

$$\Xi_L N' = \Xi_L N \setminus \Xi_L E^+ = (X \setminus N) \setminus \Xi_L E^+ = X' \setminus N',$$

иначе говоря, N' есть $(+)$ -ядро подграфа L' . Теорема доказана.

В случае $E^+ = \emptyset$ теорема вырождается в тавтологию, но при $E^+ \neq \emptyset$ она может оказаться весьма полезной, как показывает следующий

Пример. Найти ядра графа L , изображенного на рис. 117.

Начнем с положительных ядер. Прежде всего,

$$E_L^+ = \{11\}, \quad \Xi_L E_L^+ = \{4\}.$$

В подграфе L' , полученном из L удалением вершин 4 и 11, имеем

$$E_{L'}^+ = \{1, 5\}, \quad \Xi_{L'} E_{L'}^+ = \{2, 6\}.$$

Удаляя, в свою очередь, из L' вершины 1, 5, 2 и 6, получаем подграф L'' , у которого

$$E_{L''}^+ = \{3\}, \quad \Xi_{L''} E_{L''}^+ = \{8\}.$$

Наконец, удаление из L'' вершин 3 и 8 дает граф L''' без антикуиков (рис. 118). Визуально находим в L''' два $(+)$ -ядра:

{9} и {7, 12}. Согласно теореме 2, (+)-ядрами L'' являются {3,9} и {3,5,7,12}, (+)-ядрами L' — {1,3,5,9} и {1,3,5,7,12}, а (+)-ядрами исходного графа L — множества $N_1^+ = \{1,3,5,9,11\}$ и $N_2^+ = \{1,3,5,7,11,12\}$.

Для (−)-ядер аналогично имеем

$$E_L^- = \{8\}, \quad \Xi_L^{-1}E_L^- = \{3, 7, 10\}.$$

В подграфе L' (после удаления из L вершин 8,3,7,10):

$$E_{L'}^- = \{2\}, \quad \Xi_{L'}^{-1}E_{L'}^- = \{1, 5, 6\}$$

и т. д. Окончательно получаем единственное (−)-ядро графа L : $N^- = \{2,4,8,12\}$.

Теорема 3. Подмножество $N \subseteq X$ является (+)-ядром графа $L = (X, U; P)$ в том и только том случае, если выполнены два условия:

(1) $\dot{X} \subseteq \Xi_L N$;

(2) N есть (+)-ядро подграфа

$L' \doteq (X \setminus \dot{X}, U'; P)$, полученного из L удалением всех вершин с петлями. Для (−)-ядер справедлива двойственная теорема.

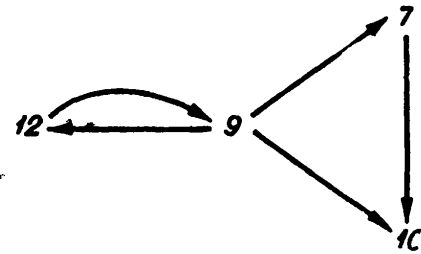


Рис. 118.

Доказательство. Пусть N удовлетворяет условию (1), тогда

$$\Xi_L N = \Xi_{L'} N \cup \dot{X}$$

и

$$\Xi_{L'} N = \Xi_L N \setminus \dot{X}$$

(рис. 119). Если N — (+)-ядро графа L , то (1) также выполнено и

$$\Xi_{L'} N = \Xi_L N \setminus \dot{X} = (X \setminus N) \setminus \dot{X} = (X \setminus \dot{X}) \setminus N,$$

т. е. N — (+)-ядро графа L' . Наоборот, если N есть (+)-ядро графа L' и выполняется (1), то

$$\Xi_L N = \Xi_{L'} N \cup \dot{X} = [(X \setminus \dot{X}) \setminus N] \cup \dot{X} = X \setminus N,$$

т. е. N есть (+)-ядро графа L .

Благодаря этой теореме можно, не нарушая общности, ограничиться в дальнейшем изучением ядер в орграфах без петель.

Т е о р е м а 4 (М. Ричардсон, 1/1946, 2/1953, 3/1953). *Всякий орграф без петель, не содержащий орциклов нечетной длины, обладает хотя бы одним положительным и хотя бы одним отрицательным ядром.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для построения одного из (+)-ядер сначала определим подмножества $Y_0, Z_0, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \dots$ вершин данного графа L следующим образом.

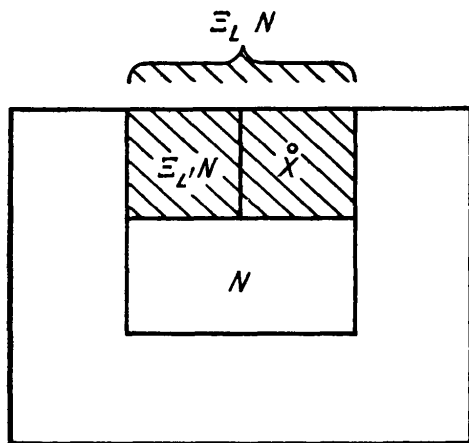


Рис. 119.

1) Полагаем $Y_0 \doteq \emptyset$, а за Z_0 берем какую-либо базу вершин графа $L_0 \doteq L$ (существование базы обеспечено леммой и теоремой 1).

2) Пусть для некоторого $k \geq 0$ уже построены подмножества

$$Y_0, Z_0, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \dots, Y_k, Z_k (*)$$

и пусть

$$Y_{k+1} \doteq Y_k \cup Z_k \cup \Xi Z_k.$$

Если $Y_{k+1} = X$, то процесс построения прекращаем и последовательность (*) считаем результирующей. Если же $X \setminus Y_{k+1} \neq \emptyset$, то к последовательности (*) дописываем подмножество Y_{k+1} , а также подмножество Z_{k+1} , которое представляет собой некоторую базу вершин подграфа

$$L_{k+1} \doteq (X \setminus Y_{k+1}, U_{k+1}; P)$$

(порожденного множеством вершин $X \setminus Y_{k+1}$), состоящую только из вершин множества $\Xi(\Xi Z_k \setminus Y_k)$.

Чтобы определение было корректным, надо убедиться в существовании базы Z_{k+1} с требуемыми свойствами. Для этого достаточно, в свете теоремы 1, показать, что всякая базовая бикомпонента $L'_{k+1} \doteq (X'_{k+1}, U'_{k+1}; P)$ подграфа L_{k+1} имеет хотя бы одну вершину в множестве $\Xi(\Xi Z_k \setminus Y_k)$. Так как Z_k — база вершин подграфа $L_k \doteq (X \setminus Y_k, U_k; P)$, то все вершины X'_{k+1} достижимы из Z_k в L_k , т. е. существует простой путь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

у которого $x_0 \in Z_k$, $x_l \in X'_{k+1}$, $x_i \notin X'_{k+1}$ для $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ и $x_i \notin Y_k$ для $i = 0, 1, 2, \dots, l$; при этом $l \geq 1$, поскольку $Y_k \subseteq Y_{k+1}$, в силу чего $X'_{k+1} \cap Z_k = \emptyset$. Вершина x_{l-1} не может принадлежать $X \setminus Y_{k+1}$, ибо бикомпонента L'_{k+1}

— базовая, и поэтому $x_{l-1} \in Y_{k+1}$. Но $x_{l-1} \notin Y_k$; в то же время $x_{l-1} \notin Z_k$, иначе имели бы $x_l \in \Xi Z_k$, т. е. $x_l \in Y_{k+1}$. Значит, $x_{l-1} \in \Xi Z_k \setminus Y_k$, откуда $x_l \in \Xi(\Xi Z_k \setminus Y)$, что и требовалось.

Из определения подмножеств Y_k и из непустоты Z_k на каждом этапе построения следует

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots;$$

в силу конечности X , для некоторого $k_0 \geq 0$ будет $Y_{k_0+1} = X$, так что процесс наверняка окончится, и мы получим последовательность подмножеств (*) для этого k_0 . Покажем, что множество

$$N \doteq \bigcup_{k=0}^{k_0} Z_k$$

представляет собой положительное ядро графа L .

Во-первых,

$$\Xi N \supseteq X \setminus N,$$

ибо если $x \in X \setminus N$, то

$$x \in Y_k \setminus Y_{k-1} = Z_{k-1} \cup \Xi Z_{k-1}$$

для некоторого k ($1 \leq k \leq k_0$), но $x \notin Z_{k-1}$ (ибо $x \notin N$), следовательно, $x \in \Xi Z_{k-1}$ и тем более $x \in \Xi N$.

Во-вторых,

$$\Xi N \subseteq X \setminus N.$$

Действительно, допустим противное, что некоторая вершина x принадлежит множеству ΞN , но не принадлежит $X \setminus N$. Тогда $x \in \Xi Z_i \cap Z_j$ для некоторых i и j ($0 \leq i, j \leq k_0$). При этом не может быть ни $i=j$ (иначе в L были бы петли), ни $i < j$ (так как $\Xi Z_i \subseteq Y_{i+1}$, $Z_j \subseteq X \setminus Y_j$ и $Y_{i+1} \subseteq Y_j$ при $i < j$); следовательно, $i > j$. Пусть y — вершина множества Z_i , из которой идет дуга v в x . Так как y достижима из Z_{i-1} (в L_{i-1} , значит и в L), а всякая вершина Z_{i-1} достижима из Z_{i-2} и т. д., то существует простой путь

$$y_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{p-1} v_p y,$$

такой что $y_0 \in Z_j$, $y_1 \in \Xi Z_j \setminus Y_j$, $y_2 \in Z_{j+1}$, $y_3 \in \Xi Z_{j+1} \setminus Y_{j+1}$, ..., $y_{p-2} \in Z_{i-1}$, $y_{p-1} \in \Xi Z_{i-1} \setminus Y_{i-1}$, т. е. обладающий четной длиной p . Однако на самом деле такого пути быть не может, ибо в случае $y_0 = x$ этот путь вместе с дугой v образовал бы орцикл нечетной длины, вопреки условию теоремы, а в случае $y_0 \neq x$ вершина $x \in Z_j$ была бы достижима из $y_0 \in Z_j$ в подграфе L_j ,

для которого Z_j служит базой вершин, что противоречит определению базы.

Следовательно,

$$\Xi N = X \setminus N,$$

т. е. N — положительное ядро данного орграфа L . Из того, что одновременная переориентация всех дуг не нарушает условия об отсутствии орциклов, вытекает также справедливость двойственного утверждения о существовании в L отрицательного ядра. Теорема доказана.

Интересно было бы выяснить, при каком ослаблении условия теоремы Ричардсона можно гарантировать наличие в L только положительного или только отрицательного ядра и при каких условиях существуют ядра, одновременно и положительные и отрицательные.

Одно из достаточных условий единственности ядер выражает

Т е о р е м а 5 (С. Рудяну, 1964). *Орграф без орциклов может иметь не более одного положительного и не более одного отрицательного ядра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть орграф $L = (X, U; P)$ без орциклов имеет, скажем, два $(+)$ -ядра: N_1^+ и N_2^+ . Так как каждое ядро есть максимальный пустой подграф и $N_1^+ \neq N_2^+$, то $N_1^+ \setminus N_2^+ \neq \emptyset$ и $N_2^+ \setminus N_1^+ \neq \emptyset$.

Выберем произвольно вершину $x_1 \in N_1^+ \setminus N_2^+$. Поскольку N_2^+ — положительное ядро графа L , найдется такая $y_1 \in N_2^+$, что $\Gamma y_1 = x_1$ ($\Gamma \doteq \Gamma_L$); при этом $y_1 \notin N_1^+$, в силу пустоты подграфа N_1^+ , следовательно, $y_1 \in N_2^+ \setminus N_1^+$. Точно так же найдется вершина $x_2 \in N_1^+ \setminus N_2^+$ такая, что $\Gamma x_2 = y_1$, затем вершина $y_2 \in N_2^+ \setminus N_1^+$, для которой $\Gamma y_2 = x_2$, и т. д. Ввиду конечности графа L , вершины $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ не могут быть все различны; в то же время совпадение каких-либо двух из этих вершин означает наличие в L орцикла, вопреки условию теоремы.

Упомянем, наконец, еще одно очевидное достаточное условие существования и единственности (тоже содержащееся в цитируемой работе С. Рудяну): *если в произвольном орграфе $L = (X, U; P)$ множество E_L^+ всех антитупиков обладает свойством*

$$\forall x \in X \setminus E_L^+ (E_L^+ \cap \Gamma_L^{-1}x \neq \emptyset),$$

то само E_L^+ есть единственное $(+)$ -ядро L . Точно так же если

$$\forall x \in X \setminus E_L^- (E_L^- \cap \Gamma_L x \neq \emptyset),^*$$

то множество E_L^- всех тупиков есть единственное $(-)$ -ядро L .

Критериев существования и единственности, а также удобных алгоритмов нахождения всех ядер орграфа общего вида пока нет. В свете теорем 2 и 3 проблему достаточно было бы решить для орграфов без петель, без тупиков и антитупиков. Можно также ограничиться графами Бержа. Для графов частного вида, связанных с теорией игры Ним, проблема решена в работе П. Константинеску, К. Лулеа и С. Никулеску (1964).

§ 34. Базы дуг

Понятие, которое мы будем здесь изучать, представляет собой естественный перенос понятия каркаса (см. § 22 в главе 3) на случай, когда в орграфе отношение неотделенности вершин заменяется более тонким, учитывающим направление дуг, несимметричным отношением достижимости.

База дуг — это минимальное подмножество множества дуг, порождающее суграф с тем же отношением достижимости вершин, что и в исходном графе. Для более точной формулировки условимся отношение достижимости в орграфе $L = (X, U; P)$ обозначать через $D_U(x, y)$, или, что то же, через $D_{\vec{U}}(x, y)$, поскольку петли в данном вопросе не играют никакой роли; тогда $D_{\vec{V}}(x, y)$ будет означать отношение достижимости вершин в суграфе $L' \doteq (X, \vec{V}; P)$, порожденном подмножеством дуг $\vec{V} \subseteq \vec{U}$ ($= U \setminus \dot{U} \subseteq U$). *Базой дуг* орграфа $L = (X, U; P)$ называется такое подмножество $\vec{W} \subseteq \vec{U}$, которое удовлетворяет двум условиям:

$$(1) \quad \forall x, y \in X [D_{\vec{U}}(x, y) \Rightarrow D_{\vec{W}}(x, y)],$$

$$(2) \quad \forall \vec{V} \subset \vec{W} \exists x, y \in X [D_{\vec{W}}(x, y) \& \neg D_{\vec{V}}(x, y)].$$

В литературе это определение встречается обычно в несколько иной форме: база дуг — это такое подмножество $\vec{W} \subseteq \vec{U}$, что

* Множество вершин $Y \subseteq X$, для которого

$$\forall x \in X \setminus Y (Y \cap \Gamma_L x \neq \emptyset),$$

в литературе называют *внешне устойчивым*.

(а) если $u \in \vec{U} \setminus \vec{W} \ \& \ P(x, u, y)$, то в L существует путь из вершины x в вершину y , все дуги которого принадлежат \vec{W} ;

(б) если $u \in \vec{W} \ \& \ P(x, u, y)$, то в L нет такого пути из x в y , который состоял бы только из дуг множества $\vec{W} \setminus \{u\}$.

Покажем, что множество \vec{W} является базой дуг (в смысле нашего определения) графа L тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами (а) и (б).

Пусть \vec{W} — база дуг графа $L = (X, U; P)$. Если $u \in \vec{U} \setminus \vec{W}$ — дуга, идущая из x в y , то $D_{\vec{U}}(x, y)$ истинно, но тогда, в силу первого пункта определения базы, истинно также $D_{\vec{W}}(x, y)$, т. е. имеет место (а); если же $u \in \vec{W}$, то имеем $D_{\vec{W}}(x, y)$ и в то же время, в силу второго пункта определения базы, $\neg D_{\vec{W} \setminus \{u\}}(x, y)$ для $\vec{V} \doteq \vec{W} \setminus \{u\}$, т. е. выполняется (б).

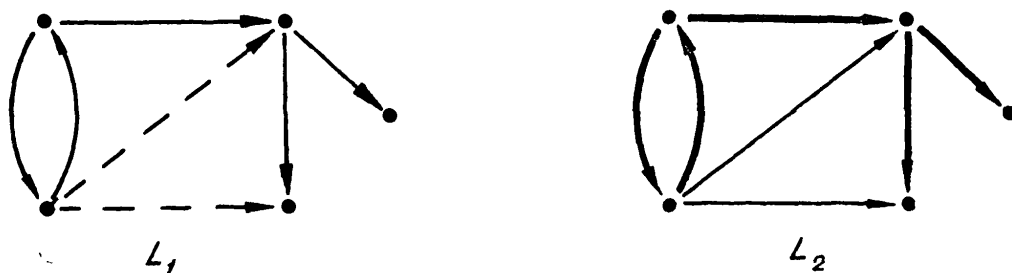


Рис. 120.

Наоборот, пусть \vec{W} — множество дуг в L , удовлетворяющее условиям (а) и (б). Тогда в любом пути графа L , идущем из вершины x в вершину y , можно каждую дугу, не принадлежащую \vec{W} , заменить путем из x в y , составленным только дугами \vec{W} , на основании (а); произведя такую замену, мы затем из полученного маршрута можем выделить путь (см. § 28), т. е. для \vec{W} выполнен первый пункт определения базы. Выполнение второго пункта непосредственно следует из (б).

Задача отыскания базы дуг в некотором смысле обратна задаче нахождения транзитивного замыкания. Так, в число дуг, которые надо добавить к графу L_1 на рис. 120 при построении его экономного транзитивного замыкания, входят две дуги, изображенные пунктиром; напротив, для образования базы дуг графа L_2 (см. тот же рисунок) следует удалить из него две дуги, показанные нежирными линиями.

Т е о р е м а 1. *Каждый орграф обладает по крайней мере одной базой дуг.*

Для получения какой-нибудь базы достаточно удалять, пока возможно, дуги из L , руководствуясь лишь следующим правилом: дугу, идущую из вершины x в y , можно удалить, если после этого y останется достижимой из x .

На рис. 121 жирными линиями выделены две различные базы дуг одного и того же графа. Как видно из этого примера, раз-



Рис. 121.

ные базы дуг одного графа не всегда содержат одинаковое число дуг (точная верхняя оценка этого числа через число вершин в случае бисвязных графов будет дана в конце параграфа). Критерия единственности базы дуг для орграфов общего вида пока не найдено; ряд достаточных условий имеется в книге Д. Кёнига (1936, глава 7), а необходимое условие установлено Я. М. Барздынем (1959).

Т е о р е м а 2 (Кёнига). *Обыкновенный орграф, не содержащий орциклов, обладает единственной базой дуг.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть \vec{W}_1 и \vec{W}_2 — две различные базы дуг обыкновенного орграфа $L = (X, U) = (X, \vec{U})$ и пусть, например, $u = \vec{xy} \in \vec{W}_1 \setminus \vec{W}_2$. Так как \vec{W}_2 — база, то существует путь

$$xu_1x_1u_2x_2\dots x_{l-1}u_ly,$$

все дуги которого принадлежат \vec{W}_2 . В свою очередь, поскольку \vec{W}_1 — база, для каждой дуги $u_i = \vec{x_{i-1}x_i}$ (где x_0 означает x , а x_l означает y) существует путь Q_i из x_{i-1} в x_i ($i = 1, 2, \dots, l$), составленный только дугами множества \vec{W}_1 . Среди путей Q_1, Q_2, \dots, Q_l какой-то обязательно должен содержать дугу u , иначе из ормаршрута Q_1, Q_2, \dots, Q_l можно было бы выделить путь, идущий из x в y и состоящий только из дуг множества $\vec{W}_1 \setminus \{u\}$, вопреки второму пункту определения базы \vec{W}_1 . Пусть

$u \in Q_i (1 \leq i \leq l)$ и

$$Q_i = x_{i-1}v_1y_1v_2y_2 \dots y_{j-2}v_{j-1}xuyv_{j+1}y_{j+1} \dots x_i.$$

Рассмотрим два циклических ормаршрута:

$$xu_1x_1u_2x_2 \dots x_{i-1}v_1y_1v_2y_2 \dots y_{j-2}v_{j-1}x$$

и

$$yv_{j+1}y_{j+1} \dots x_iu_{i+1}x_{i+1} \dots x_{l-1}u_ly.$$

Хотя бы один из них содержит не менее двух различных вершин, так как иначе дуга u_i , отличная от u , шла бы из x в y , что невозможно, поскольку L — обыкновенный граф; из этого маршрута можно выделить орцикл, в противоречии с условием теоремы.

С л е д с т в и е. *Транзитивный обыкновенный орграф обладает единственной базой дуг.*

Действительно, такой граф не может содержать орциклов, иначе в нем были бы также петли.

Как показали П. Герц (1922) и Д. Кёниг (1936, глава 7), для полного обзора всех баз дуг в произвольных орграфах достаточно было бы иметь такой обзор только у всех бисвязных графов. Именно, пусть

$$L_1 = (X_1, U_1; P), \quad L_2 = (X_2, U_2; P), \dots, L_{\vec{x}} = (X_{\vec{x}}, U_{\vec{x}}; P)$$

— бикомпоненты орграфа $L = (X, U; P)$, а $H(L) \doteq (Y, V)$ — граф Герца для L (см. § 32). В силу свойств $H(L)$ ясно, что всякая база дуг \vec{W} графа L получается следующим образом:

1) находим базу дуг \vec{W}_H графа $H(L)$ (она единственна, вследствие теоремы 2);

2) образуем подмножество дуг \vec{W}_0 графа L , выбирая по одной дуге в каждом таком множестве дуг \vec{U}_{ij} , идущих из X_i в X_j , для которого $\overrightarrow{y_iy_j} \in \vec{W}_H$ в $H(L)$;

3) находим по одной базе дуг \vec{W}_i в каждой из бикомпонент L_i ($i = 1, 2, \dots, \kappa$) графа L ;

тогда

$$\vec{W} = \vec{W}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\kappa} \vec{W}_i.$$

Как вытекает из всего сказанного, для единственности базы дуг графа L необходимо и достаточно, чтобы единственность

имела место у каждой из бикомпонент L_i в отдельности и чтобы никакие две бикомпоненты не соединялись более чем одной дугой. Картина была бы прозрачной, если бы имелся полный обзор всех баз дуг в бисвязном орграфе, подобно тому как имеется полный обзор всех баз вершин орграфа (§ 33). Ниже-следующую теорему можно считать одним из первоначальных шагов в указанном направлении.

Т е о р е м а 3 (Барздыня). *Если орграф $L = (X, U; P)$ обладает единственной базой дуг, то он не может содержать ни одной такой пары подграфов*

$$L_1 = (X_1, U_1; P) \text{ и } L_2 = (X_2, U_2; P),$$

которая удовлетворяла бы следующим условиям:

- 1) L_1 и L_2 бисвязны;
- 2) $X_1 \cap X_2 = \emptyset$;
- 3) множество \vec{U}_{12} всех дуг, идущих из вершин X_1 в вершины X_2 , содержит по крайней мере две дуги;
- 4) в суграфе $(X, U \setminus \vec{U}_{12}; P)$ ни одна вершина множества X_2 не достижима ни из одной вершины X_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L_1, L_2 — пара подграфов графа L , обладающая свойствами 1) — 4), и пусть \vec{W}_1 — некоторая база дуг у L . Имеем

$$\vec{W}_1 \cap \vec{U}_{12} \neq \emptyset,$$

ибо $\vec{U}_{12} \neq \emptyset$ в силу 3), и в случае $\vec{W}_1 \cap \vec{U}_{12} = \emptyset$, т. е. $\vec{W}_1 \subseteq U \setminus \vec{U}_{12}$, для дуги $u \in \vec{U}_{12}$ ее концевая вершина y ввиду 4) не была бы достижима из начальной вершины x в суграфе $(X, \vec{W}_1; P)$, вопреки первому пункту определения базы дуг. Пусть $u_1 \in \vec{W}_1 \cap \vec{U}_{12}$. Согласно 3), существует дуга $u_2 \in \vec{U}_{12}$, отличная от u_1 ; множество дуг

$$\vec{W}_2 \doteq (\vec{W}_1 \setminus \{u_1\}) \cup \{u_2\},$$

очевидно, не совпадает с \vec{W}_1 . Покажем, что \vec{W}_2 тоже есть база дуг графа L .

Во-первых,

$$\forall x, y \in X [D_{\vec{W}_1}(x, y) \Leftrightarrow D_{\vec{W}_2}(x, y)], \quad (*)$$

т. е. замена дуги u_1 дугой u_2 и наоборот не меняет отношения достижимости; это вытекает из бисвязности подграфов L_1, L_2 и из транзитивности отношения достижимости вершин. В частности, (*) говорит о том, что наряду с \vec{W}_1 множество \vec{W}_2 также удовлетворяет первому пункту определения базы дуг.

Во-вторых, если бы для некоторого $\vec{V} \subset \vec{W}_2$ высказывание

$$\forall x, y \in X [D_{\vec{W}_2}(x, y) \Rightarrow D_{\vec{V}}(x, y)]$$

было истинным, то в случае $u_2 \notin \vec{V}$ имело бы место также $\vec{V} \subset \vec{W}_1$ и, в силу (*),

$$\forall x, y \in X [D_{\vec{W}_1}(x, y) \Rightarrow D_{\vec{V}}(x, y)], \quad (**)$$

что является логическим отрицанием второго пункта определения базы, а в случае $u_2 \in \vec{V}$ тот же результат (**) получался бы для множества $(\vec{V} \setminus \{u_2\}) \cup \{u_1\}$ вместо \vec{V} .

Теорема доказана. Заметим, что условие 4) опустить нельзя: например, каждый из двух графов, изображенных на рис.

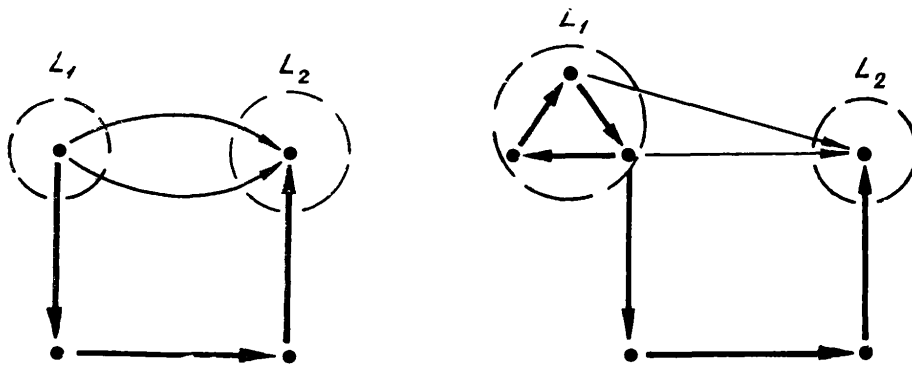


Рис. 122.

122, обладает единственной базой дуг (жирные дуги), а условиям 1), 2), 3) удовлетворяет только пара подграфов L_1, L_2 , для которой 4) не имеет места (второй пример мы привели на всякий случай, желая показать, что наличие кратных дуг здесь не при чем).

Верна ли обратная теорема? В работе Я. М. Барздыня (1959) условие теоремы 3 формулируется как необходимое и достаточное, однако вместо достаточности там в действительности доказано более слабое утверждение:

если оргграф L имеет по крайней мере две базы дуг, то в нем есть пара подграфов L_1, L_2 , удовлетворяющая условиям 1), 2) и 3).

В самом деле, пусть граф $L = (X, U; P)$ обладает двумя различными базами дуг \vec{W}_1 и \vec{W}_2 и пусть, например, дуга u , идущая из вершины x в вершину y , принадлежит множеству $\vec{W}_1 \setminus \vec{W}_2$. Так как \vec{W}_2 — база, то существует простой путь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

где $x_0 \doteq x$, $x_l \doteq y$ и все дуги $u_1, u_2, \dots, u_l \in \vec{W}_2$. Обозначим через x_i последнюю вершину этого пути, достижимую из x в суграфе $(X, \vec{W}_1 \setminus \{u\}; P)$; ясно, что $i < l$, иначе дуга u не могла бы принадлежать базе \vec{W}_1 (в силу первого пункта определения базы дуг).

Так как \vec{W}_1 — база, то в суграфе $(X, \vec{W}_1; P)$ из вершины x_i в вершину x_{i+1} ведет некоторый простой путь Q , который необходимо содержит дугу u , ибо иначе x_{i+1} была бы достижима из x в $(X, \vec{W}_1 \setminus \{u\}; P)$; пусть

$$Q = x_i v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{j-2} v_{j-1} x u y v_{j+1} y_{j+1} \dots y_k x_{i+1}.$$

Положим

$$X_1 \doteq \{x, x_1, x_2, \dots, x_i, y_1, y_2, \dots, y_{j-2}\},$$

$$X_2 \doteq \{x_{i+1}, \dots, x_{l-1}, y, y_{j+1}, \dots, y_k\}.$$

Подграфы

$$L_1 \doteq (X_1, U_1; P) \text{ и } L_2 \doteq (X_2, U_2; P),$$

порожденные этими множествами вершин, бисвязны, поскольку каждый из них содержит орцикл, проходящий через все его вершины, а именно

$$x u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_i v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{i-2} v_{j-1} x \quad (\text{в } L_1)$$

и

$$y v_{j+1} y_{j+1} \dots y_k x_{i+1} u_{i+2} x_{i+2} \dots x_{l-1} u_l y \quad (\text{в } L_2);$$

далее, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, так как иначе некоторая из вершин $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{l-1}, y$ оказалась бы достижимой из x в суграфе $(X, \vec{W}_1 \setminus \{u\}; P)$; наконец, множество \vec{U}_{12} заведомо содержит две дуги: u и u_{i+1} . Таким образом, пара L_1, L_2 удовлетворяет условиям 1), 2) и 3). Вопрос о том, удовлетворяет ли найденная

пара L_1, L_2 также условию 4), остается открытым.*

В отличие от изложенных выше результатов П. Герца и Д. Кёнига, где бикомпоненты фактически рассматриваются как «черные ящики», исследование Я. М. Барздыня частично проникает во внутреннюю структуру этих «ящиков» и поэтому заслуживает продолжения. Ясно, что при этом можно предполагать данный оргграф L бисвязным.

Т е о р е м а 4 (М. К. Гольдберг, 1/1965). Для любой базы дуг \vec{W} бисвязного оргграфа $L = (X, U; P)$ справедлива оценка

$$|\vec{W}| \leq 2n(L) - 2, \quad (*)$$

точная в том смысле, что при любом $n \geq 1$ существует такой n -вершинный оргграф, в котором есть база ровно с $2n - 2$ дугами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (*) тривиально при $n = 1$ (тогда $|\vec{W}| = 0$). Пусть оно уже доказано для всех $n < n_0 \geq 2$, и пусть L — произвольный бисвязный n_0 -вершинный оргграф, \vec{W} — любая из его баз дуг, а $L_W \doteq (X, \vec{W}; P)$ — суграф графа L , порожденный множеством ребер \vec{W} .

Так как $D_{\vec{W}}(x, y) \Leftrightarrow D_U(x, y)$, а L бисвязен, то L_W тоже бисвязен. Выберем в L_W какой-нибудь простой орцикл

$$\vec{C} \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_0$$

($l \geq 2$). Пусть L' — оргграф, полученный из L удалением дуг u_1, u_2, \dots, u_l и отождествлением всех вершин $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}$, а $L'_W \doteq (X', \vec{W}'; P')$ — оргграф, в который переходит L_W при этой же операции. Легко показать, что L' бисвязен и \vec{W}' служит его базой дуг. Но суграф L_W не содержит петель и в нем никакие две вершины орцикла \vec{C} не соединяются дугой, отличной от u_1, u_2, \dots, u_l (иначе \vec{W} не удовлетворяло бы второму пункту определения базы дуг), поэтому

$$m(L'_W) = m(L_W) - l = |\vec{W}| - l.$$

Кроме того,

$$n(L') = n_0 - (l - 1).$$

По предположению индукции,

$$|\vec{W}'| - l = m(L'_W) \leq 2n(L') - 2 = 2n_0 - 2l,$$

* Недавно С. Е. Маркосян (1967) несколько другим путем доказал, что условие теоремы 3 также достаточно для единственности базы дуг.

откуда

$$|\vec{W}| \leq 2n_0 - l \leq 2n_0 - 2,$$

т. е. оценка (*) справедлива и при $n(L) = n_0$.

Точность оценки следует из того, что для графа $L^{(n)}$, показанного на рис. 123, всегда имеет место равенство (ибо здесь $L_W^{(n)} = L^{(n)}$); $n = 1, 2, 3, \dots$

Л. Редей (2/1954) занимается проблемой баз дуг у симметрических полных графов Бержа. Даже в этом сугубо частном случае исследование оказывается весьма нелегким; продолжая его, И. Седлачек (1/1957) в то же время отмечает ошибочность одного из выводов своего предшественника.

Для фактического нахождения всех баз дуг Х. Ураков (1968) предлагает следующий способ, обоснование которого несложно (ср. со способом Магу — Уэйсмана в § 9 главы 1) и может быть представлено читателю. Так как из пучка параллельных дуг в базу входит не более одной, и все дуги пучка в этом смысле взаимозаменяемы, то можно ограничиться рассмотрением графов Бержа, притом без петель.

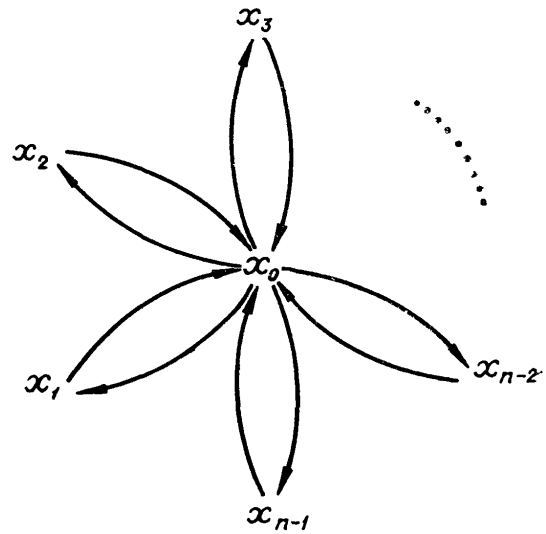


Рис. 123.

Пусть $L = (X, U)$ — граф указанного класса, и его вершинами служат натуральные числа $1, 2, \dots, n$, а дугами — упорядоченные пары чисел. Пусть, далее, C_U — булева алгебра (полукольцо) с множеством образующих $\{0, 1\} \cup U$, подчиненных, кроме обычных для такой алгебры условий (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, равенства вида $(\vec{ij})^2 = \vec{ij}$ и $\vec{ij} + 1 = 1$, влекущие, в частности, закон поглощения, — см. § 9), также всевозможным соотношениям следующего типа: если не все вершины $i_1, i_2, \dots, i_k \in X$ различны, то произведение $\vec{i_1 i_2} \cdot \vec{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot \vec{i_{k-1} i_k} = 0$ ($k = 3, 4, \dots$). Если R_U — усовершенствованная матрица смежности (над C_U) графа L (см. § 11 в главе 2), а E — единичная матрица того же порядка, то, начиная с некоторого показателя степени l , будет

$$(E + R_U)^l = (E + R_U)^{l+1} = \dots$$

Составляя произведение (конъюнкцию) всех тех элементов установившейся матрицы $(E + R_U)^l$, для которых одноименные элементы матрицы R_U отличны от нуля, и приводя это произведение к минимальной дизъюнктивной форме (посредством раскрытия скобок и применения закона поглощения), мы получим сумму произведений, в каждом из которых сомножители-дуги составляют базу, притом каждая база дуг графа L будет во всей сумме представлена таким образом в точности один раз.

Например, для графа на рис. 121, положив $X = \{1, 2, 3\}$, $U = \{\vec{ij}/i, j \in X\}$, будем иметь,

$$R_U = \begin{vmatrix} 0 & \vec{12} & \vec{13} \\ \vec{21} & 0 & \vec{23} \\ \vec{31} & \vec{32} & 0 \end{vmatrix}, \quad E + R_U = \begin{vmatrix} 1 & \vec{12} & \vec{13} \\ \vec{21} & 1 & \vec{23} \\ \vec{31} & \vec{32} & 1 \end{vmatrix},$$

$$(E + R_U)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \dots & \vec{12} + \vec{12} + \vec{13} \cdot \vec{32} & \vec{13} + \vec{12} \cdot \vec{23} + \vec{13} \\ \vec{21} + \vec{21} + \vec{23} \cdot \vec{31} & 1 + \dots & \vec{21} \cdot \vec{13} + \vec{23} + \vec{23} \\ \vec{31} & \vec{32} \cdot \vec{21} + \vec{31} & \vec{31} \cdot \vec{12} + \vec{32} + \vec{32} & 1 + \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \vec{12} + \vec{13} \cdot \vec{32} & \vec{13} + \vec{12} \cdot \vec{23} \\ \vec{21} + \vec{23} \cdot \vec{31} & 1 & \vec{21} \cdot \vec{13} + \vec{23} \\ \vec{31} + \vec{32} \cdot \vec{21} & \vec{31} \cdot \vec{12} + \vec{32} & 1 \end{vmatrix}, \quad (E + R_U)^3 =$$

$$= (E + R_U)^2.$$

В данном случае все недиагональные элементы матрицы R_U отличны от нуля, так что надо составить произведение всех недиагональных элементов установившейся матрицы $(E + R_U)^2$:

$$(\vec{12} + \vec{13} \cdot \vec{32}) \cdot (\vec{13} + \vec{12} \cdot \vec{23}) \cdot (\vec{21} + \vec{23} \cdot \vec{31}) \cdot (\vec{21} \cdot \vec{13} + \vec{23}) \cdot (\vec{31} + \vec{32} \cdot \vec{21}) \cdot (\vec{31} \cdot \vec{12} + \vec{32}).$$

Перемножая все скобки (и применяя закон поглощения в процессе последовательного умножения — например, сразу же преобразуя произведение первых двух скобок так: $(\vec{12} + \vec{13} \cdot \vec{32}) \times (\vec{13} + \vec{12} \cdot \vec{23}) = \vec{12} \cdot \vec{13} + (\vec{12})^2 \cdot \vec{23} + (\vec{13})^2 \cdot \vec{32} + \vec{12} \cdot \vec{13} \cdot \vec{23} \cdot \vec{32} =$

$$= \vec{12} \cdot \vec{13} + \vec{12} \cdot \vec{23} + \vec{13} \cdot \vec{23}), \text{ получим окончательно сумму}$$

$$\vec{12} \cdot \vec{23} \cdot \vec{31} + \vec{13} \cdot \vec{32} \cdot \vec{21} + \vec{12} \cdot \vec{21} \cdot \vec{13} \cdot \vec{31} + \vec{12} \cdot \vec{21} \cdot \vec{23} \cdot \vec{32} +$$

$$+ \vec{13} \cdot \vec{31} \cdot \vec{23} \cdot \vec{32},$$

выявляющую все пять баз дуг $(\{\vec{12}, \vec{23}, \vec{31}\}, \dots)$ данного графа.

Заметим, наконец, что всё сказанное в этом параграфе дословно переносится на графы общего вида, если достижимость понимать как существование соответствующего пути; звенья в этом случае никакой роли не играют и их можно попросту удалить. Но если достижимость толковать как наличие частично ориентированного маршрута и при введении понятия

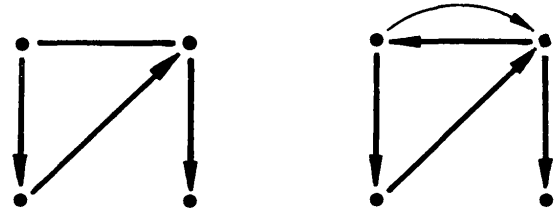


Рис. 124.

базы ребер не разрешать «удаление половины звена» (т. е. превращение звена в дугу), то положение осложнится, ибо теперь нельзя будет заменять звенья парами противоположных дуг. Например, база ребер графа, изображенного на рис. 124 слева, состоит из всех его ребер, но если заменить звено парой дуг (см. тот же рисунок справа), то самая верхняя дуга в базу уже не войдет. Теория баз ребер для графов общего вида пока не построена.

§ 35. Теоремы Менгера и Коцига для орграфов

Понятия k -отделимости, k -соединимости, k -отрезаемости и k -сплетаемости вершин x и y (см. § 13 и § 16 в главе 2) нетрудно перенести на случай, когда в заданном орграфе $L = (X, U; P)$ учитываются направления дуг. Чтобы не придумывать новых названий, будем для четырех соответствующих бинарных несимметричных отношений употреблять прежние термины, но вместо «двух вершин x и y » говорить об упорядоченной паре вершин \overrightarrow{xy} ; слова «пара \overrightarrow{xy} смежна» означают существование дуги, идущей из x в y .

Несмежная пара \overrightarrow{xy} вершин орграфа L называется k -отделимой, если из L можно так удалить не более k вершин, отличных от x и y , чтобы в оставшемся подграфе вершина y оказалась недостижимой из x (см. § 32). В общем случае, когда из x в y идет p дуг u_1, u_2, \dots, u_p ($p \geq 0$), пара \overrightarrow{xy} называется k -отделимой,

если $p \leq k$ и эта пара $(k-p)$ -отделима в суграфе $(X, U \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_p\}; P)$. Пара \vec{xu} k -соединима, если в L существует k путей из x в y , попарно не имеющих общих вершин, за исключением начальной x и конечной y . Теорема Менгера (§ 13) сохраняет силу и при новых определениях, именно: пара вершин \vec{xu} орграфа k -неотделима тогда и только тогда, когда она $(k+1)$ -соединима. План доказательства — прежний, и мы укажем лишь, какие изменения надо сделать при его осуществлении.

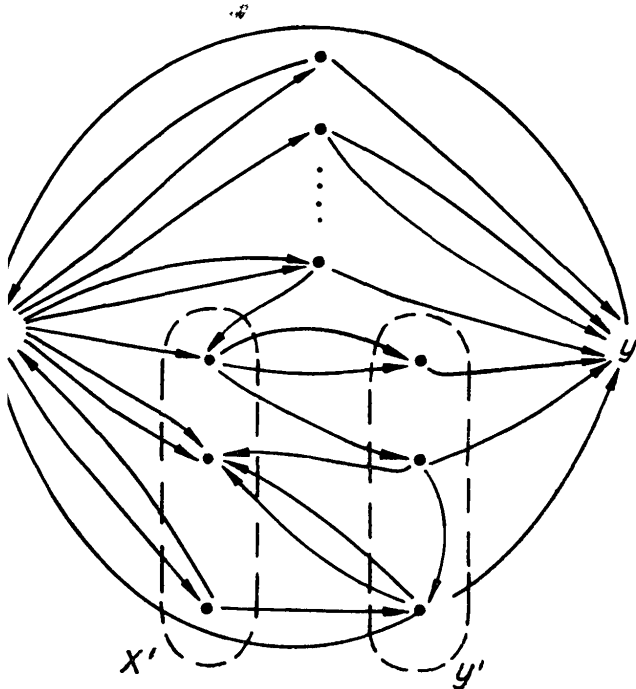


Рис. 125.

Вершину z , отличную от x и y , теперь называем «внутренней» в том случае, если обе пары \vec{xz} и \vec{zy} несмежны; примерный вид графа с $q = 0$ (т. е. без внутренних вершин) показан на рис. 125. В графе Кёнига $L^k = (X', Y'; V)$ считаем вершины $x' \in X'$ и $y' \in Y'$ смежными тогда и только тогда, когда пара $\vec{x'y'}$ смежна в орграфе L' . Далее, производя «расщепление» орграфа L по множеству вершин X_0 при индуктивном шаге, мы под X_x будем понимать множество вершин $z \in X \setminus X_0$, достижимых из x . Наконец, в надграфах L' и L'' каждое из новых ребер u_i' должно быть дугой, идущей из x в y' , а каждое новое ребро u_i'' — дугой, идущей из x' в x_i .

Заметим, что «ориентированная теорема Менгера» была впервые получена Г. Дираком (13/1963), указавшим требуемые изменения в доказательстве Г. Хайоша (1/1934). Следует также сказать, что понятие k -связности графа в «ориентированном» случае переходит в понятие k -бисвязности, и первый критерий в § 14 переносится на этот случай.

Пара \vec{xu} вершин орграфа L называется k -отрезаемой, если из L можно удалить не более k дуг таким образом, чтобы в полученном суграфе вершина y была недостижима из x . Пару \vec{xu} назовем k -сплетаемой, если существует не менее k путей, идущих из x в y и попарно не имеющих общих дуг. Справедлива «ориентированная теорема Коцига»: пара вершин \vec{xu} оргра-

фа k -неотрезаема тогда и только тогда, когда она $(k + 1)$ -сплетаема. Доказательство легко получить из прежней теоремы (§ 16) надлежащими изменениями; другое доказательство имеется в работах А. Коцига (2/1956, 6/1961).

Сюда примыкает результат А. Дьюгида (1961). Пусть A и B — два непересекающихся подмножества вершин орграфа $L = (X, U; P)$; следующие два высказывания равносильны:

1) при любом $r \leq \min \{|A|, |B|\}$ существует r путей, попарно без общих вершин, идущих из любых r вершин множества A в любые r вершин множества B ;

2) для любого $Z \subseteq X$ существует $r = \min \{|Z \cap A|, |(X \setminus Z) \cap B|\}$ попарно несмежных дуг, идущих из Z в $X \setminus Z$.

Остановимся еще на некоторых свойствах орграфов, характеризующих сплетенность пар его вершин. Пусть x и y — две вершины орграфа $L = (X, U; P)$; под $\vec{\omega}(x, y) \doteq \vec{\omega}_L(x, y)$, следуя А. Коцигу (4/1959, 6/1961), понимаем наибольшее k , для которого упорядоченная пара \vec{xu} является k -сплетаемой (или, что равносильно, $(k - 1)$ -неотрезаемой). Граф L назовем симметрично сплетенным, если

$$\forall x, y \in X [\vec{\omega}(x, y) = \vec{\omega}(y, x)].$$

Напомним, что L называется равновесным, когда

$$\forall x \in X [s^+(x) = s^-(x)]$$

(см. § 8 в главе 1). Как показал А. Коциг, всякий равновесный орграф является симметрично сплетенным; приведем более простое доказательство этого утверждения.

Пусть $x \neq y$ и $\vec{\omega}(x, y) = k$ (мы опускаем тривиальный случай $x = y$), т. е. имеется k , но не более, простых путей, попарно без общих ребер, идущих из x в y (см. пути 1, 2, 3 для случая $k = 3$ на рис. 126). Множество дуг всех этих k путей обозначим через $\vec{U}_\omega(x, y)$. При $k \geq 1$ в силу $s^+(y) = s^-(y)$ из вершины y исходит некоторая дуга $u \in \vec{U} \setminus \vec{U}_\omega(x, y)$; если z — та вершина, в которую заходит u , то ввиду $s^+(z) = s^-(z)$ из z должна исходить дуга $v \in \vec{U} \setminus [\vec{U}_\omega(x, y) \cup \{u\}]$; и т. д. Образую шаг за шагом путь, в котором каждая следующая дуга не принадлежит ни $\vec{U}_\omega(x, y)$, ни множеству дуг уже построенной части пути, мы в силу равновесности графа L и его конечности рано или поздно придем в вершину x . Из полученного пути I' (см. пунктир на рис. 126) выделим простой путь, идущий из y в x . Если $k > 1$, то

из вершины y должна исходить дуга, не принадлежащая ни множеству $\vec{U}_\omega(x, y)$, ни пути I' ; как и выше, находим второй простой путь из y в x . Ясно, что таким процессом удастся выявить k путей из y и x , попарно без общих дуг, поэтому $\vec{\omega}(y, x) \geq \vec{\omega}(x, y)$ при $k \geq 1$, а для $k = 0$ это же неравенство тривиально. Меняя ролями вершины x и y , мы докажем аналогично, что $\vec{\omega}(x, y) \geq \vec{\omega}(y, x)$. Следовательно, $\vec{\omega}(x, y) = \vec{\omega}(y, x)$.

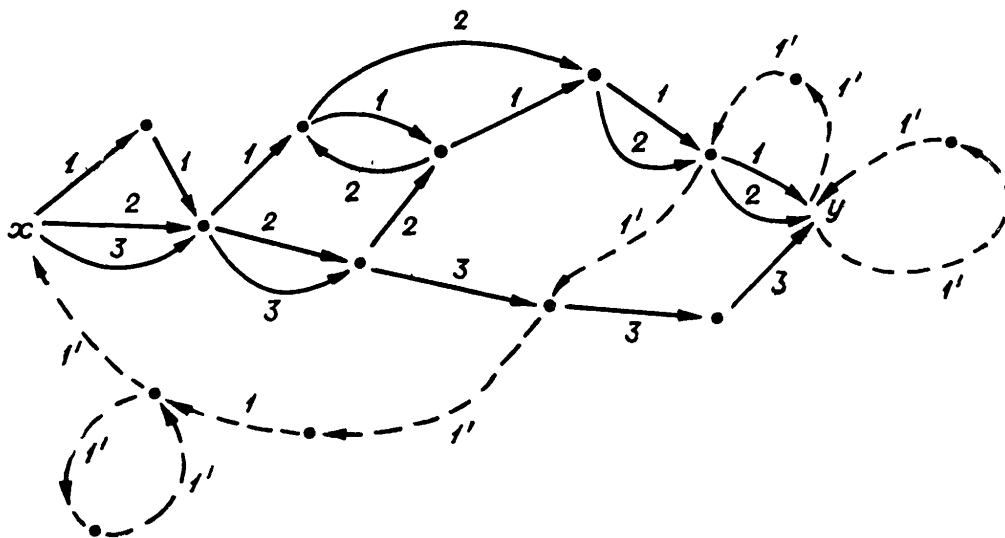


Рис. 126.

Вопрос о том, справедливо ли обратное утверждение, т. е. всякий ли симметрично сплетенный орграф является равновесным, пока не решен.

В заключение отметим следующий результат Дж. Нэш-Вильямса (1/1960): любой неорграф L можно так ориентировать, чтобы в полученном орграфе \vec{L} для любых двух вершин x, y было $\vec{\omega}(x, y) \geq \lfloor \frac{1}{2} \omega(x, y) \rfloor$, где $\omega(x, y)$ — наибольшее k , при котором неупорядоченная пара xy вершин k -сплетаема (в смысле § 16).

§ 36. Растущие ордеревья

Об ордереве общего вида, т. е. дереве, о котором лишь известно, что все его ребра являются дугами, мы пока не можем сказать ничего существенного сверх того, что было сказано о деревьях вообще (§§ 20 и 21 в главе 3). Было бы интересно получить какой-нибудь аналог теоремы Смоленского — Зарецкого, т. е. найти систему чисел, существенно более простую по сравнению с матрицей смежности и в то же время определяющую

ордереву с точностью до изоморфизма. Вопросы существования ордеревас заданными количествами $s^+(x)$ исходящих и $s^-(x)$ заходящих дуг в каждой вершине x мы рассмотрим во второй части книги. А сейчас остановимся на одном важном классе ордеревьев.

Вершина x_0 графа $L = (X, U; P)$ называется его *корнем*, если все цепи, начинающиеся в x_0 , представляют собой пути. Ясно, что связный граф не может иметь более одного корня, ибо из двух цепей, соединяющих две различные вершины и отличающихся друг от друга только направлением обхода, хотя бы одна не является путем.

При наличии корня x_0 связный граф L не содержит циклов (ибо цепь, идущую из x_0 в какую-нибудь вершину цикла, можно так продолжить, чтобы полученная цепь не была путем), а также не имеет звеньев (иначе из x_0 можно было бы провести цепь, содержащую звено и, значит, не являющуюся путем). Иначе говоря, связный граф L с корнем x_0 представляет собой ордереву, притом некоторого специального вида: все его дуги направлены от x_0 (рис. 127), и мы будем называть это ордереву *растущим* (из корня x_0).

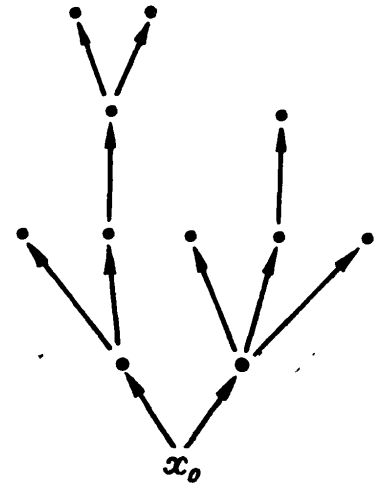


Рис. 127.

Теорема 1. Орграф без петель $L = (X, U; P)$ является ордеревом, растущим из корня $x_0 \in X$, в том и только том случае, если выполнены следующие три условия:

- 1) $\kappa(L) = 1 \vee \lambda(L) = 0$,
- 2) $s_L^-(x_0) = 0$,
- 3) $\forall x \in X \setminus \{x_0\} (s_L^-(x) = 1)$ *.

Доказательство. Допустим сначала, что L — ордереву, растущее из x_0 . Тогда, по определению дерева (§ 20 в главе 3), имеет место даже более сильное утверждение, чем 1), а именно

$$\kappa(L) = 1 \ \& \ \lambda(L) = 0.$$

Из определения растущего ордереву сразу следует 2). Наконец, если бы не выполнялось 3), то в некоторую вершину x

*) Иначе говоря, если L обладает по крайней мере одним из двух свойств: связность и отсутствие циклов — и если, кроме того, в его вершину x_0 не заходит ни одна дуга, а в каждую из остальных вершин заходит ровно по одной дуге.

заходило бы по крайней мере две дуги u и v ; ввиду связности L , существует цепь из x_0 в x , и добавив к этой цепи то из ребер u, v , которое ей не принадлежало, мы построили бы цепь, начинающуюся в x_0 и заведомо не являющуюся путем, что невозможно.

Теперь предположим, что оргграф без петель L с выделенной вершиной x_0 удовлетворяет условиям 1), 2) и 3). Пусть Q — произвольная цепь, начинающаяся в x_0 ; если бы цепь Q содержала дугу, ориентированную противоположно направлению обхода цепи, то, обозначив через u первую из таких дуг (в порядке прохождения цепи), а через x — вершину, в которую заходит дуга u , мы получили бы в случае $x = x_0$ противоречие с условием 2), а в случае $x \neq x_0$ — противоречие с условием 3). Следовательно, вершина x_0 — корень графа. Осталось установить связность L , для чего, ввиду условия 1), достаточно показать, что несвязность влечет наличие в L циклов. Но это сделать нетрудно: если x_1 — некоторая вершина той компоненты графа L , которая не содержит x_0 , то, ввиду условия 3), в x_1 заходит дуга u_1 , исходящая из какой-то вершины x_2 ; в свою очередь, в x_2 заходит дуга u_2 , исходящая из какой-то вершины x_3 ; и т. д. Продолжая в том же духе, мы, в силу конечности графа, рано или поздно натолкнемся на уже выбранную ранее вершину и получим цикл. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если не предполагать заранее, что граф $L = (X, U; P)$ не содержит звеньев и петель, то условия 2) и 3) теоремы надо заменить на

$$2') \quad v_L^-(x_0) = 0;$$

$$3') \quad \forall x \in X \setminus \{x_0\} (v_L^-(x) = 1),$$

где $v_L^-(x) = s_L^-(x) + s_L^0(x) + \tilde{s}_L(x)$ (см. § 2 в главе 1).

Т е о р е м а 2. Если L — произвольное дерево, а x_0 — любая его вершина, то ребра L можно ориентировать, притом единственным образом, так, чтобы полученное ордереве росло из корня x_0 .

Справедливость этого утверждения не вызывает сомнений, а строгое его доказательство мы предоставим читателю. Из теоремы следует, что задание растущего ордереве равносильно заданию неордереве с отмеченной вершиной.

Всякий связный подграф L' растущего ордереве L сам является растущим ордереве; мы кратко называем L' *поддереве* ордереве L . Если при этом корни обоих ордереве совпадают, то L' — *сокорневое* поддереве L .

Пусть $L = (X, U)$ — ордереве, растущее из x_0 ; о вершинах L , находящихся на расстоянии k ($k \geq 0$) от x_0 , говорят, что они об-

разуют k -й ярус ордеревя L . Наибольшее k , при котором k -й ярус непуст, называется *высотой* растущего ордеревя. Растущее ордеревя называется *равномерным*, если количество v_k дуг, исходящих из вершины k -го яруса, одинаково для всех вершин этого яруса, т. е. является функцией только от k . Ясно, что равномерно растущее ордеревя определяется однозначно с точностью до изоморфизма конечной последовательностью натуральных чисел (v_1, v_2, \dots, v_h) , где h — высота ордеревя; одновершинному дереву отвечает пустая последовательность ($h = 0$).

В связи с некоторыми задачами, возникающими, в частности, в теории автоматов, М. К. Гольдберг и Э. М. Лившиц (1968) получили следующий результат, который интересен и сам по себе.

Т е о р е м а 3 (Гольдберга — Лившица). Пусть $L = (X, U)$ — произвольное растущее ордеревя. Количество его сокорневых равномерных поддеревьев, не изоморфных друг другу и обладающих заданной

высотой $k \geq 0$,* равно числу вершин k -го яруса в L .

Д о к а з а т е л ь с т в о** . Утверждение тривиально при $k = 0$ (оба числа тогда равны 1); допустим его уже доказанным для некоторого $k \geq 0$ и предположим теперь, что заданная высота поддеревьев есть $k + 1$. Пусть L — произвольное ордеревя, растущее из x_0 , а L_1, L_2, \dots, L_p — те ордеревья, растущие соответственно из x_1, x_2, \dots, x_p , на которые распадается L после удаления корня x_0 (рис. 128).

В силу допущения индукции, число попарно неизоморфных сокорневых равномерных поддеревьев ордеревя L_i равно количеству $n(i) \doteq n^k(i)$ тех вершин, которые в L_i образуют k -й ярус (считая от корня x_i). Этим неизоморфным поддеревьям от-

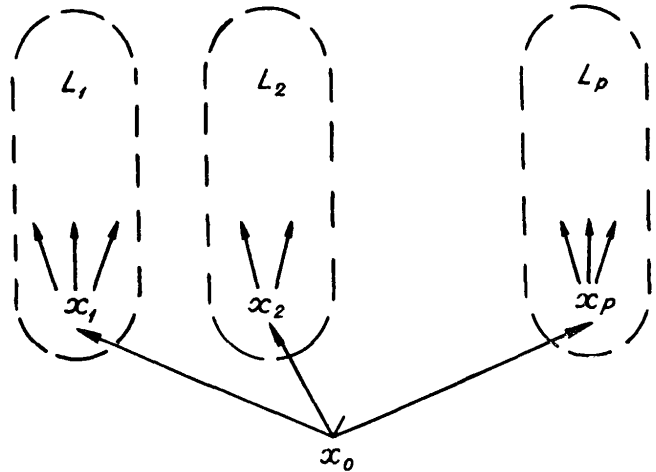


Рис. 128.

*) Т. е. число классов эквивалентности, на которые разбивается множество всех таких поддеревьев отношением изоморфизма.

**) Это доказательство, более простое по сравнению с первоначальным, получено М. К. Гольдбергом уже после сдачи упомянутой работы в печать.

данном графе общего вида $L = (X, U; P)$. Пусть на образующие полукольца K наложены соотношения

$$\xi^2 = 0, \eta^2 = 1, \xi\eta = -1, \eta\xi = 0, \zeta^2 = \theta^2 = 0,$$

а также все такие соотношения вида $-1 + 1 = 0, 1 \cdot (-1) = -1$ и др., которые необходимы для того, чтобы подполукольцо полукольца K , порожденное элементами $+1$ и -1 , было

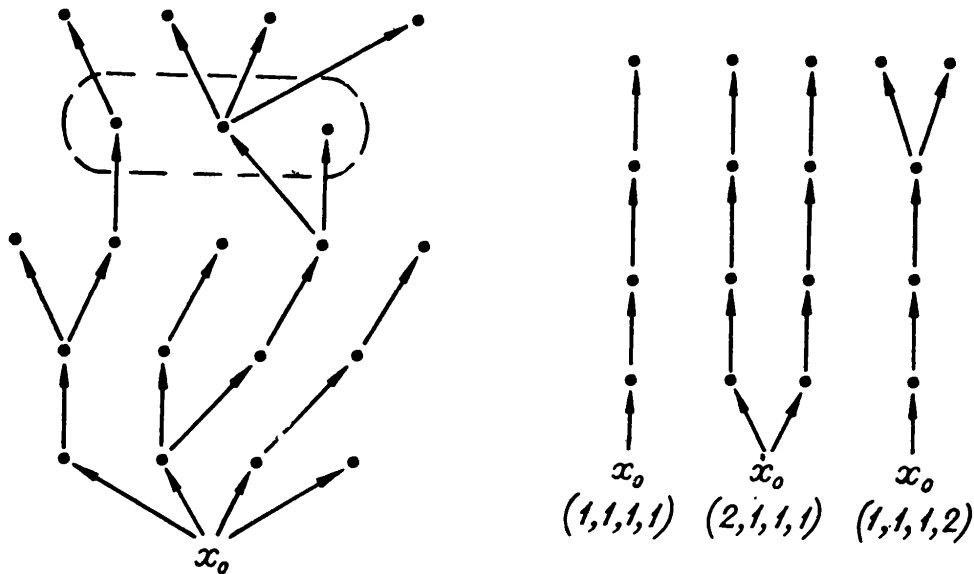


Рис. 129.

обычным кольцом S всех целых чисел. Допустим, что $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Матрица соседства вершин графа L (см. § 2 в главе 1) над K имеет вид

$$B_L = \left\| \begin{array}{cccc} s_L^-(x_1) & -s_L^+(x_1, x_2) & \dots & -s_L^+(x_1, x_n) \\ -s_L^+(x_2, x_1) & s_L^-(x_2) & \dots & -s_L^+(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -s_L^+(x_n, x_1) & -s_L^+(x_n, x_2) & \dots & s_L^-(x_n) \end{array} \right\|;$$

ее главный минор, полученный вычеркиванием i -й строки и i -го столбца, обозначим через Δ_i . Нижеследующий результат Р. Ботта и Дж. Мейберри (1954) сходен с теоремой Лантьери—Трента (см. § 26 в главе 3), но доказывается несколько иначе.

Т е о р е м а 4 (Ботта — Мейберри). *Значение минора Δ_i матрицы B_L равно количеству всех таких каркасов графа L , которые представляют собой ордеревья, растущие из вершины x_i ($i = 1, 2, \dots, n \doteq n(L)$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как удаление петель и звеньев из графа L не меняет ни матрицы B_L (ввиду наличия в K соотношений $\zeta^2 = \theta^2 = 0$), ни искомого числа растущих карка-

сов, то можно без нарушения общности считать заданный граф L оргграфом без петель.

Мы начнем с частного случая, когда оргграф без петель L имеет ровно $n(L) - 1$ дуг, причем во все его вершины, кроме x_i , заходит ровно по одной дуге (и, следовательно, в x_i не заходит ни одна дуга). Покажем, что в этих предположениях

$$\Delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } L \text{ — ордеререво, растущее из } x_i, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть L — растущее ордеререво с корнем x_i . Перенумеровав вершины L так, чтобы каждая дуга шла из вершины с меньшим номером в вершину с бóльшим номером, мы не изменим значения минора Δ_i и в то же время придадим ему треугольный вид. А так как, в силу сделанных предположений о графе L , все диагональные элементы этого минора равны 1, то $\Delta_i = 1$.

Теперь допустим, что $\Delta_i \neq 0$. Тогда оргграф L связан, ибо иначе сумма тех строк минора Δ_i , которые отвечают вершинам компоненты, не содержащей x_i , была бы нуль-строкой (ввиду смысла элементов матрицы B_L и в силу того, что никакая дуга не может соединять вершины из разных компонент). Но связность гарантирует выполнение условия 1) теоремы 1, а другие предположения, сделанные нами о графе L , обеспечивают выполнение условий 2) и 3) этой теоремы, следовательно, L есть ордеререво, растущее из x_i (и, значит, $\Delta_i = 1$).

Переходим к рассмотрению произвольного оргграфа L без петель. j -й столбец ($j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) минора Δ_i можно представить в виде суммы $s_L^-(x_j)$ таких столбцов, в каждом из которых имеется ровно один элемент 1, не более одного элемента -1 , а все остальные элементы — нули. Выбирая всевозможными способами по одному слагаемому-столбцу из каждой суммы, составим

$$s \doteq s_L^-(x_1) \cdot s_L^-(x_2) \cdot \dots \cdot s_L^-(x_{i-1}) \cdot s_L^-(x_{i+1}) \cdot \dots \cdot s_L^-(x_n)$$

определителей $(n-1)$ -го порядка, сумма которых, как известно из курса линейной алгебры, равна значению Δ_i . Но эти s определителей взаимно однозначно соответствуют всевозможным суграфам графа L , содержащим по $n-1$ дуг и обладающим тем свойством, что в каждую вершину, отличную от x_i , заходит ровно одна дуга: именно, если j -й столбец определителя не содержит -1 , то в вершину x_j соответствующего суграфа

идет дуга из x_i , а если j -й столбец содержит -1 в k -й строке (при этом, очевидно, $k \neq i, j$), то в x_j идет дуга из x_k . Каждый из s определителей представляет собой главный минор матрицы соседства вершин соответствующего суграфа, получаемый вычеркиванием i -й строки и i -го столбца, поэтому, в силу доказанного выше частного случая теоремы, этот определитель равен 0 или 1, в зависимости от того, является ли суграф ордеревом, растущим из x_i , или не является, иначе говоря, представляет ли он собой каркас требуемого вида или нет (поскольку каркас должен содержать именно $n - 1$ дуг). Теорема доказана.

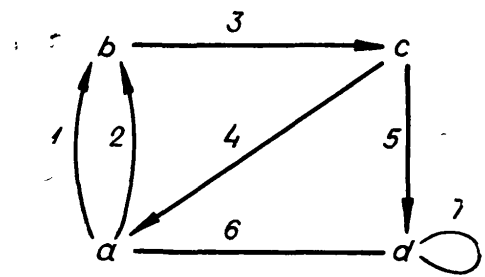


Рис. 130.

Пример. Для графа L на рис. 130 имеем

$$A_L = \begin{vmatrix} \xi & \xi & 0 & \eta & 0 & \theta & 0 \\ \eta & \eta & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \xi & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \theta & \zeta \end{vmatrix},$$

$$B_L = A_L \cdot A_L^* = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

соответствующие растущие каркасы показаны на рис. 131.

З а м е ч а н и е. Если суграф L' , полученный из произвольного графа L удалением всех петель и звеньев, несвязен, то $\Delta_i = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, n = n(L)$. Однако выбирая по одной вершине в каждой компоненте суграфа L' , можно поста-

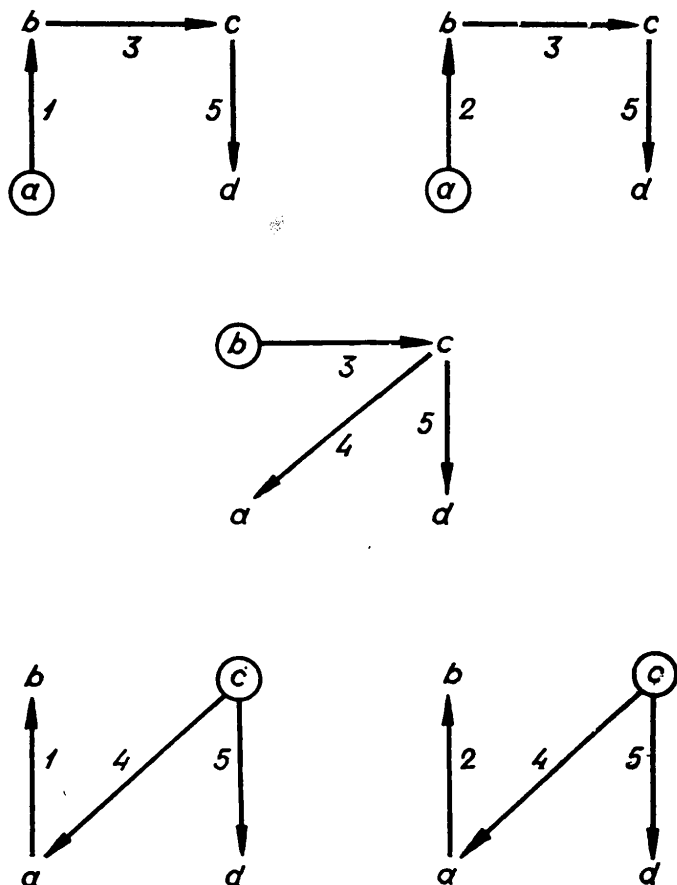


Рис. 131.

Пронумеруем компоненты суграфа L' и перенумеруем вершины графа L так, чтобы сначала шли все вершины первой компоненты, затем все вершины второй и т. д. Тогда матрица $B_L = B_{L'}$ примет клеточно-диагональную форму

$$\left\| \begin{array}{cccc} \boxed{} & & & \\ & \boxed{} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{} \\ 0 & & & \end{array} \right\|,$$

где клетки на главной диагонали являются матрицами соседства вершин компонент суграфа L' . Выбирая корневую вершину в каждой компоненте и вычеркивая соответствующие строки и столбцы матрицы B_L , мы получим минор порядка $n - \kappa(L')$, значение которого равно произведению аналогичных определителей (т. е. миноров типа Δ_i), составленных для каждой из $\kappa(L')$ компонент. Но и количество искомого каркасов всего

вить задачу о нахождении числа всех таких каркасов L , которые состоят из растущих ордеревьев с корнями в выбранных вершинах. Искомое количество равно значению главного минора матрицы B_L , полученного вычеркиванием $\kappa(L')$ строк и $\kappa(L')$ одноименных столбцов, соответствующих выбранным корневым вершинам. Чтобы обосновать это утверждение, можно было бы сразу доказывать теорему Ботта — Мейберри для более общего случая (подобно тому, как было сделано в теореме Лантьери — Трента), однако в данном случае это сильно усложнило бы доказательство. Гораздо проще рассуждать следующим образом.

графа L равно, очевидно, произведению количеств растущих каркасов (с выбранными корнями) во всех компонентах суграфа L' .

Дальнейшие исследования, связанные с наличием в графе таких суграфов, у которых все компоненты являются растущими ордеревьями, читатель найдет в работе М. Фидлера и И. Седлачека (1958).

§ 37. Орметрика

Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный оргграф. Отклонением $\vec{\rho}(x, y) \doteq \vec{\rho}_L(x, y)$ его вершины y от вершины x называется длина кратчайшего пути (необходимо простого) из x в y ; если y недостижима из x (см. § 32), то $\vec{\rho}(x, y) \doteq +\infty$.

Ясно, что всегда

$$\forall x, y \in X [\vec{\rho}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$$

и

$$\forall x, y, z \in X [\vec{\rho}(x, y) + \vec{\rho}(y, z) \geq \vec{\rho}(x, z)]$$

(см. доказательство неравенства треугольника для метрики $\rho(x, y)$ в § 17 главы 2). Симметрия же $\forall x, y \in X [\vec{\rho}(x, y) = \vec{\rho}(y, x)]$ имеет место в том и только том случае, когда граф L — симметрический (см. § 7 в главе 1); доказательство не представляет труда. Функция $\rho = \vec{\rho}(x, y)$ от упорядоченных пар $\vec{x}y$ вершин графа L называется его *орметрикой*. Для симметрических оргграфов, и только для них, орметрика совпадает с обычной «неориентированной» метрикой.

Орметрика находится по матрице смежности оргграфа таким же способом, как и метрика, с той лишь разницей, что теперь на образующие полукольца K надо наложить соотношения

$$\xi\eta = 1, \eta\xi = \zeta^2 = 0.$$

Теорема Стоцкого, вместе с доказательством, дословно переносится на ориентированный случай.

Оррадиус $\vec{r}(L)$ и ордиаметр $\vec{d}(L)$ определяются аналогично радиусу и диаметру (см. § 17 в главе 2), именно

$$\vec{r}(L) \doteq \min_{x \in X} \max_{y \in X} \vec{\rho}(x, y),$$

$$\vec{d}(L) \doteq \max_{x, y \in X} \vec{\rho}(x, y);$$

в случае надобности нетрудно дать также определения «орцентральной» и «орпериферийной» вершин. Очевидно,

$$\vec{r}(L) \leq \vec{d}(L),$$

причем равенство достигается, например, всякий раз, когда L — простой орцикл.

Орграф обладает конечным ордиаметром тогда и только тогда, когда он бисвязен, ибо в этом и только в этом случае его орметрика конечна, а последнее свойство, ввиду конечности графа, равносильно ограниченности его орметрики на множестве всех упорядоченных пар вершин. При бесконечном ордиамetre оррадиус, однако, может быть конечным: например, у графа на рис. 132 $\vec{r} = 1$, хотя $\vec{\rho}(a, b) = \vec{\rho}(a, c) = \vec{\rho}(c, b) = \vec{\rho}(c, a) = +\infty$ и $\vec{d} = +\infty$. Приведем одно достаточное условие конечности оррадиуса.

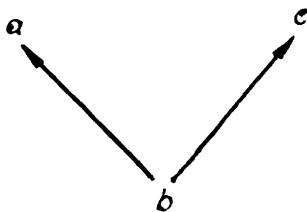


Рис. 132.

Орграф называется *квазибисвязным*, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Т е о р е м а 1. *Квазибисвязный орграф $L = (X, U; P)$ всегда обладает конечным оррадиусом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду конечности графа, достаточно убедиться в наличии у него такой вершины, из которой достижимы все вершины. Пусть x_0 — одна из тех вершин L , в которых величина $|D(x_0)|$ (количество вершин, достижимых из x_0) принимает наибольшее значение. Вершина x_0 и будет искомой, ибо если бы для некоторой $y_0 \in X$ имело место $y_0 \notin D(x_0)$, то в силу квазибисвязности графа L было бы $x_0 \in D(y_0)$, а значит и $D(x_0) \cup \{y_0\} \subseteq D(y_0)$, т. е. $D(x_0) \subset D(y_0)$, откуда $|D(x_0)| < |D(y_0)|$, в противоречии с определением x_0 .

Как показывает пример графа на рис. 132, условие квазибисвязности не является необходимым для конечности оррадиуса.

Остановимся подробнее на нижних оценках оррадиуса и ордиаметра. Пусть

$$p \doteq p(L) \doteq \max_{x \in X} |\Gamma x|,$$

где $\Gamma x \doteq \Gamma_L x$ — множество тех вершин орграфа $L = (X, U; P)$, в которые идут дуги из вершины x (см. § 7 в главе 1), и пусть $n \doteq n(L)$.

Т е о р е м а 2*. Если $p \geq 2$, то

$$\vec{r}(L) \geq \frac{\log(np - n + 1)}{\log p} - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\vec{r}(L) = \infty$ оценка очевидна. Теперь пусть оррадиус $r \doteq \vec{r}(L)$ конечен и пусть x_0 — один из орцентров графа L . Тогда $X = \bigcup_{i=0}^r X_i$, где $X_i \doteq \{x/x \in X \& \vec{\rho}(x_0, x) = i\}$. Из определения числа $p \doteq p(L)$ следует, что $|X_i| \leq p^i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), поэтому $n \leq \sum_{i=0}^r p^i$, т. е. $n \leq \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$; решая неравенство относительно r , получим требуемую оценку.

Для важного класса бисвязных орграфов $L = (X, U)$ нижние оценки оррадиуса и ордиаметра через количество вершин $n \doteq n(L)$ и цикломатическое число $\lambda \doteq \lambda(L)$, т. е. через n и число ребер $m \doteq m(L)$ (ибо $\lambda = m - n + 1$ в силу связности L), дает

Т е о р е м а 3 (М. К. Гольдберг, 1/1965, 2/1966). Если L — бисвязный орграф без петель, то

$$\vec{r}(L) \cdot \lambda(L) \geq n(L) - 1, \quad (*)$$

а при $\lambda(L) \geq 2$ также

$$\vec{d}(L) \cdot \lambda(L) \geq 2n(L) - 2. \quad (**)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как L бисвязен, то для любой $x \in X$ существует такой каркас T_x графа L , который представляет собой ордеререво, растущее из корня x (см. § 36), и обладает свойством

$$\forall y \in X [\vec{\rho}_{T_x}(x, y) = \vec{\rho}_L(x, y)]. \quad (1)$$

Действительно, мы наверняка получим один из таких каркасов, если сначала проведем из x по одному кратчайшему пути в каждую вершину X , затем составим объединение U^* множеств дуг этих путей и, наконец, удалим часть дуг U^* по следующему правилу: когда в некоторую вершину заходит более одной дуги, сохраняем только одну (любую) из этих дуг, удаляя остальные.

Из (1) следует, что высота ордеререва T_x , т. е. величина

$$h(T_x) \doteq \max_{y \in X} \vec{\rho}_{T_x}(x, y), \text{ равна } \max_{y \in X} \vec{\rho}_L(x, y).$$

*) См. К. Берж (1/1958, русск. 1962, глава 12).

Если $t(T_x)$ — количество тупиковых вершин (см. § 32) орде-
рева T_x , то, используя равенство $h(T_x) = \max_{y \in X} \vec{\rho}_L(x, y)$, легко
прийти к выводу, что для любой $x \in X$

$$h(T_x) \cdot t(T_x) \geq n(L) - 1.$$

Так как, кроме того,

$$\lambda(L) \geq i(T_x) \quad (2)$$

(ибо в графе L , ввиду его бисвязности, из каждой вершины, в
том числе и тупиковой для T_x , исходит по крайней мере одна
дуга), то

$$h(T_x) \cdot \lambda(L) \geq n(L) - 1. \quad (3)$$

Отсюда, ввиду произвольности x , следует оценка (*), поскольку
 $\vec{r}(L) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} \vec{\rho}_L(x, y) = \min_{x \in X} h(T_x)$.

Среди всех путей

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

графа L , обладающих тем свойством, что при $i = 0, 1, 2, \dots, l - 1$ из вершины x_i не исходит ни одна отличная от u_i дуга L , выберем путь Q наибольшей длины l . Пусть T_{x_0} — такой каркас графа L , который является ордеревом, растущим из корня $x = x_0$, и обладает свойством (1). Если $\lambda(L) \geq 2$, то также

$$\lambda(L) \geq t(T_{x_0}) + 1. \quad (4)$$

В самом деле, в силу (2) не может быть $\lambda(L) < t(T_{x_0})$. Если бы было $\lambda(L) = t(T_{x_0})$, то все дуги графа L , не принадлежащие каркасу T_{x_0} , исходили бы из тупиковых вершин каркаса, при-
том ровно по одной дуге из каждой такой вершины; хотя бы одна из этих дуг должна заходить в вершину x_0 (ввиду бисвязности L), но тогда путь Q можно было бы продолжить, что противоречит максимальной его длине.

Положим для краткости $n \doteq n(L)$, $\lambda \doteq \lambda(L)$, $d \doteq \vec{d}(L)$, $t \doteq t(T_{x_0})$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $d \leq 2l$. Тогда, очевидно,

$$n - 1 \leq l + (d - l) \cdot t = d \cdot t - l \cdot (t - 1),$$

поэтому

$$2(n - 1) \leq 2d \cdot t - 2l \cdot (t - 1) \leq 2d \cdot t - d \cdot (t - 1) = d \cdot (t + 1),$$

откуда, в силу (4), получаем (**).

Случай 2: $d > 2l$. Пусть

$X_1 \doteq \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_l\}$ — множество вершин пути Q ;

X_2 — множество таких вершин графа L , из которых существует путь длины $\leq l - 1$ по ордереву T_{x_0} хотя бы в одну тупиковую вершину ордерова (при $l = 0$ $X_2 \doteq \emptyset$);

$$X_3 \doteq X \setminus (X_1 \cup X_2)$$

(см., например, рис. 133, где $l = 3$, вершины X_2 обведены кружками, а вершины X_3 — квадратиками). Очевидно,

$$n \leq |X_1| + |X_2| + |X_3| \tag{5}$$

(именно \leq , а не $=$, поскольку X_1 и X_2 могут пересекаться). Далее, $x_0 \neq x_l$, ибо иначе Q был бы орциклом, а в силу бисвязности L и в силу $\lambda(L) \geq 2$ хотя бы из одной вершины Q должна была бы исходить дуга, не принадлежащая Q , вопреки определению этого пути. Следовательно,

$$|X_1| = l + 1. \tag{6}$$

Из определения X_2 вытекает

$$|X_2| \leq l \cdot t. \tag{7}$$

Покажем, что

$$|X_3| \leq (d - 2l) \cdot \frac{\lambda}{2}. \tag{8}$$

Пусть $X'_3 \subseteq X_3$ — подмножество «наивысших» в ордереве T_{x_0} вершин множества X_3 , т. е. таких $z \in X_3$, что из z нет пути по T_{x_0} ни в какую другую вершину X_3 (на рис. 133 вершины множества X'_3 отмечены штрихом). Система всех путей по T_{x_0} ,

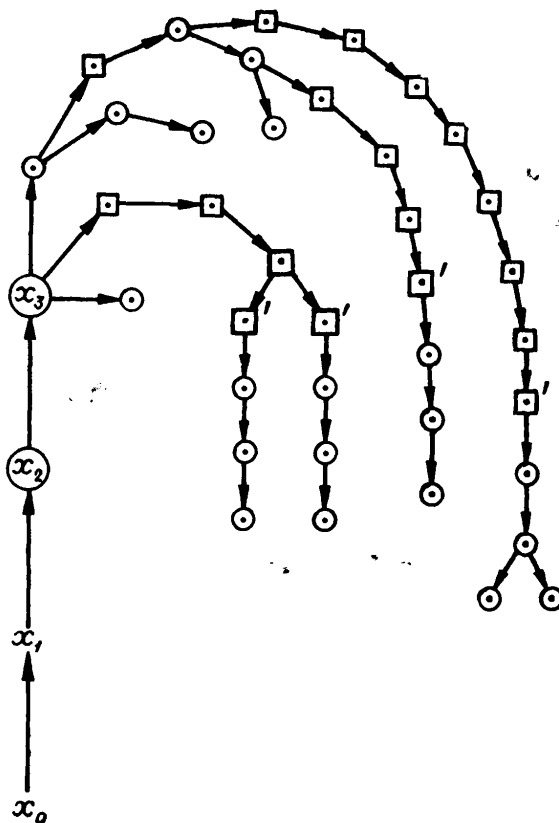


Рис. 133.

имеющих начало и конец в X_3 и максимальных относительно этого свойства, состоит ровно из $|X'_3|$ путей и включает в себя все вершины X_3 ; но длина каждого такого пути, в силу определения множеств X_1 , X_2 и X_3 , не превосходит $d - (l + 1) - l = d - 2l - 1$, значит, число его вершин $\leq d - 2l$, и для доказательства неравенства (8) остается лишь убедиться в том, что $|X'_3| \leq \lambda/2$.

Каждой вершине $z \in X'_3$ отнесем множество $U(z)$ тех дуг графа L , которые исходят из вершин, достижимых из z по ордеру T_{x_0} , но сами не принадлежат T_{x_0} . Очевидно,

$$\forall z_1, z_2 \in X'_3 [z_1 \neq z_2 \Rightarrow U(z_1) \cap U(z_2) = \emptyset]. \quad (9)$$

Далее,

$$\forall z \in X'_3 (|U(z)| \geq 2). \quad (10)$$

В самом деле, допустим, что

$$|U(z_0)| \leq 1 \quad (11)$$

для некоторой $z_0 \in X'_3$. Тогда, в силу определения множеств X_3 и X'_3 , на ордеру T_{x_0} должен существовать путь

$$Q_0 \doteq z_0 v_1 z_1 v_2 z_2 \dots z_{l-1} v_l z_l$$

длины l , оканчивающийся тупиковой вершиной z_l ордеру T_{x_0} и обладающий тем свойством, что при $i = 0, 1, 2, \dots, l - 1$ ни из одной вершины z_i не исходит дуга L , отличная от v_i ; напомним, что при этом длина l — наибольшая возможная, согласно определению пути Q (из x_0 в x_l). В силу бисвязности, граф L обладает дугой \bar{u} , исходящей из z_l , и на основании (11) такая дуга только одна (т. е. на самом деле (11) — равенство). Дуга \bar{u} не может заходить ни в какую вершину, отличную от $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{l-1}$, ибо иначе путь Q_0 можно было бы удлинить с сохранением его основного свойства; значит, \bar{u} идет из z_l в некоторую z_k ($0 \leq k \leq l - 1$). Но в таком случае граф L , будучи бисвязным, должен был бы состоять только из орцикла

$$z_k v_{k+1} z_{k+1} \dots z_{l-1} v_l z_l \bar{u} z_k,$$

а это утверждение явно абсурдно хотя бы уже потому, что $\lambda(L) \geq 2$.

Итак, неравенство (10) доказано. Поскольку в каждом из множеств $U(z)$ ($z \in X'_3$) все дуги являются хордами каркаса

T_{x_0} , то из (9) и (10) получаем

$$\lambda(L) \geq \left| \bigcup_{z \in X'_3} U(z) \right| \geq 2 |X'_3|,$$

т. е. $|X'_3| \leq \lambda/2$, что и требовалось. Следовательно, оценка (8) справедлива.

Из (5), (6), (7) и (8) находим

$$n \leq l + 1 + l \cdot t + (d - 2l) \cdot \frac{\lambda}{2} = 1 + l(1 + t) + (d - 2l) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

а так как $1 + t \leq \lambda$ (оценка (4)), то

$$n \leq 1 + l \cdot \lambda + (d - 2l) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$2(n - 1) \leq d \cdot \lambda.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Оценка (*) точна в следующем смысле: для любой тройки целых неотрицательных чисел n, λ, r , удов-

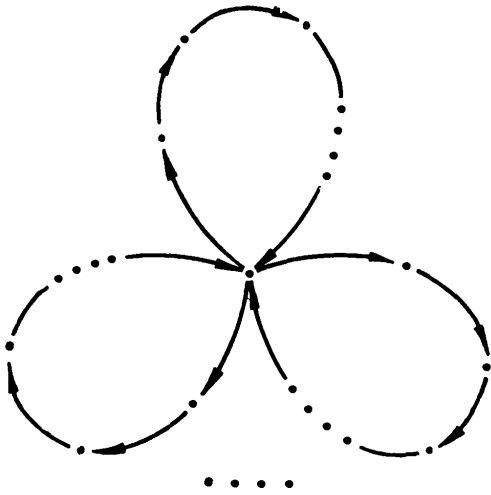


Рис. 134.

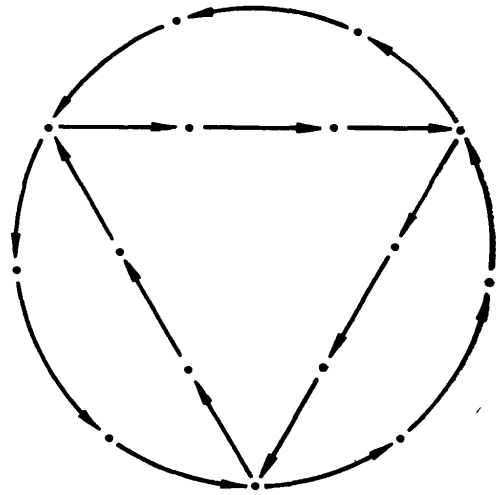


Рис. 135.

летворяющих условию $r\lambda = n - 1$, найдется бисвязный оргграф L , у которого $n(L) = n$, $\lambda(L) = \lambda$, $r(L) = r$; именно, за L можно взять граф, изображенный на рис. 134, где каждый «лепесток» содержит r вершин, не считая центральной, а количество «лепестков» равно λ . Относительно точности оценки (**) мы пока знаем лишь, что уменьшить правую часть на единицу сразу для всех графов L нельзя, ибо, например, для графа на рис. 135

имеет место равенство; в то же время для некоторых графов оценка, видимо, может быть улучшена.

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 3 вытекает, в частности, решение следующей проблемы, поставленной Д. Брэттоном (1955). Пусть q — частное, s — остаток от деления $n - 1$ на λ и пусть

$$B(n, \lambda) \doteq \begin{cases} 2q & \text{при } s = 0, \\ 2q + 1 & \text{при } s = 1, \\ 2q + 2 & \text{при } s \geq 2; \end{cases}$$

основываясь на исследованиях Л. Кристи, Р. Льюса и Дж. Мейси (1952), а также на своих собственных, Д. Брэттон высказал предположение, что для любого бисвязного орграфа L

$$\vec{d}(L) \geq B(n(L), \lambda(L)) - 1;$$

как легко теперь видеть, это неравенство при $\lambda(L) \geq 2$ непосредственно вытекает из (**), а при $\lambda(L) = 1$ неверно, ибо тогда оно имеет вид $\vec{d}(L) \geq 2n(L) - 3$ и нарушается всякий раз, когда L — простой орцикл длины > 2 .

З а м е ч а н и е 3. Теорема 2 будет справедлива и при наличии у графа L петель, если в формулировке заменить $\lambda(L)$ на $\lambda(L) - |\dot{U}_L|$, где $|\dot{U}_L|$ — число петель.

Что касается верхних оценок, то здесь известен следующий результат А. Гуйя-Ури (1/1960): если L — бисвязный граф Бержа без петель, то

$$\vec{d}(L) \leq \begin{cases} n - 1 & \text{при } n \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3, \\ \left[n + \frac{1}{2} - \sqrt{2m - n^2 - n - \frac{17}{4}} \right] & \text{при } \frac{n(n+1)}{2} - 3 < m \leq n(n-1), \end{cases}$$

причем это точная оценка. Доказательство по своему духу более всего подходит для второй части нашей книги.

Интересные исследования локальных и квазилокальных свойств графов (см. § 8 в главе 1) с помощью орметрики, предпринятые Ф. Я. Ветухновским (1/1964, 2/1964), мы тоже осветим во второй части.

В ряде вопросов целесообразно использовать несколько иную орметрику $\vec{\rho}'(x, y)$, совпадающую с $\vec{\rho}(x, y)$ при $x \neq y$, но отличающуюся от нее при $x = y$ тем, что $\vec{\rho}'(x, x)$ равно не нулю, а

длине кратчайшего частично ориентированного цикла при вершине x (в частности, $\vec{\rho}'(x, x) = 1$, если x инцидентна хотя бы одной петле, и $\vec{\rho}'(x, x) = +\infty$, если через x не проходит ни один частично ориентированный цикл) *.

Поскольку орграфы без петель и орциклов играют важную роль в приложениях (к задачам программирования, сетевым графикам работ и др.), а также интересны и с чисто теоретической стороны, следовало бы предпринять систематическое изучение этого класса графов. У таких графов все бикомпоненты — одновершинные, так что проблема в известном смысле противоположна проблеме изучения всех бисвязных орграфов. Отдельные результаты имеются, например, у О. Оре (4/1962, русск. 1968, глава 9), Ю. Чена и О. Уинга (1966). Весьма частным случаем таких графов являются растущие ордеревья (см. § 36). В случае графов Бержа без петель характеристическим свойством рассматриваемого класса является изоморфизм графа L и его графа Герца $H(L)$ (см. § 32). Видимо, орметрика должна быть важнейшим орудием при решении проблемы.

В заключение упомянем об одной задаче, относящейся к графам Бержа $L = (X, \Gamma)$ без петель и орциклов. Из всех разбиений множества X вершин на классы

$$X = \bigcup_{i=1}^k X_i, \quad i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset,$$

удовлетворяющих условию

$$\exists X_i \subseteq \bigcup_{j=i+1}^k X_j \left(i = 1, 2, \dots, k; \bigcup_{j=k+1}^k X_j \doteq \emptyset \right), \quad (1)$$

надо выбрать такое, при котором

$$|X_i| \leq l \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (2)$$

где l — заданное натуральное число, а k — наименьшее возможное при соблюдении (1) и (2). Г. А. Бекишев (1963) сводит проверку выполнения условий (1) и (2) для заданного графа L при заданном k к вопросу о разрешимости некоторой системы линейных неравенств в целых числах. Хотелось бы дать более удобный способ решения задачи.

*) Например, в алгоритме Лейфмана для выявления бикомпонент (см. § 32) первый индекс вершины x в подграфе L^0 равен $\left[\frac{1}{\vec{\rho}'(x_0, x)} \right]$, т. е. 1 при $\vec{\rho}'(x_0, x) < +\infty$ и 0 при $\vec{\rho}'(x_0, x) = +\infty$.

§ 38. Пространство обобщенных суграфов

Пусть $L = (X, U; P)$ — орграф без петель,

$$L_1 = (X_1, U_1; P), L_2 = (X_2, U_2; P), \dots, L_{\vec{x}} = (X_{\vec{x}}, U_{\vec{x}}; P),$$

где $\vec{x} = \vec{x}(L)$, — его бикомпоненты, а \mathfrak{Q}_L^Δ — пространство циклов (см. § 23 в главе 3).

Т е о р е м а 1.* *Базис пространства \mathfrak{Q}_L^Δ всегда можно выбрать так, чтобы среди $\lambda(L)$ его элементов было $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i)$ таких, которым в графе L отвечают простые орциклы. В то же время никакой базис пространства \mathfrak{Q}_L^Δ не может содержать более $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i)$ таких элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда данный орграф без петель L бисвязен, т. е. $\vec{x}(L) = 1$. Покажем, что тогда всякий квазицикл (элемент \mathfrak{Q}_L^Δ), отвечающий простому циклу, а значит и вообще всякий квазицикл графа L можно представить в виде суммы таких, которым в L отвечают простые орциклы.

Пусть

$$C \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

где $l \geq 2$ и $x_l = x_0$, — произвольный простой цикл графа L . Если направления всех дуг цикла C совпадают с направлением его обхода, то он сам есть простой орцикл. В противном случае рассмотрим одну из тех его дуг, направление которых не совпадает с направлением обхода; пусть, скажем, такова дуга u_i ($1 \leq i \leq l$), идущая из вершины x_i в вершину x_{i-1} . В силу бисвязности графа L , существует простой путь \vec{Q}_i , идущий из x_{i-1} в x_i ; вместе с дугой u_i этот путь образует простой орцикл \vec{C}_i .

Если в цикле C каждую из тех дуг u_i , которые направлены противоположно обходу цикла, мы заменим соответствующим путем \vec{Q}_i , то получится циклический маршрут \vec{C}' (он не обязательно будет циклом, так как пути вида \vec{Q}_i могут иметь друг с другом общие дуги). Покажем, что \vec{C}' можно разбить на такие части, каждая из которых является простым орциклом.

*) См. К. Берж (1/1958, русск. 1962, глава 4).

Меняя для простоты обозначения, положим

$$\vec{C}' = y_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{p-1} v_p y_p,$$

где $y_0 \doteq y_p \doteq x_0$. Пусть y_j — первая вершина ормаршрута \vec{C}' , имеющая в нем отличные от y_p повторения, а y_k — первое из таких ее повторений ($0 \leq j < k < p$); тогда можем записать

$$\vec{C}' = y_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{j-1} v_j \vec{C}'' v_{k+1} y_{k+1} \dots y_{p-1} v_p y_p,$$

где

$$\vec{C}'' \doteq y_j v_{j+1} y_{j+1} \dots y_{k-1} v_k y_k.$$

Ормаршрут \vec{C}'' представляет собой простой орцикл, а ормаршрут

$$y_0 v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{j-1} v_j y_j v_{k+1} y_{k+1} \dots y_{p-1} v_p y_p,$$

будучи по-прежнему циклическим, обладает меньшей длиной, чем \vec{C}' , и к нему можно применить то же рассуждение. Продолжая описанный процесс, мы в конце концов представим ормаршрут \vec{C}' в виде объединения простых орциклов.

В пространстве \mathfrak{Q}_L^Δ ормаршруту \vec{C}' соответствует сумма элементов, отвечающих исходному циклу C и тем орциклам \vec{C}_i , которые были составлены для дуг u_i , ориентированных противоположно обходу цикла C ; иначе говоря, циклу C отвечает сумма элементов, соответствующих этим \vec{C}_i и ормаршруту \vec{C}' . Последний же элемент складывается из элементов, соответствующих всем выделенным из \vec{C}' простым орциклам.

Таким образом, множество \mathfrak{E} тех квазициклов, которые соответствуют простым орциклам графа L , порождает всё пространство \mathfrak{Q}_L^Δ . Так как $\dim \mathfrak{Q}_L^\Delta = \lambda(L)$, то среди элементов \mathfrak{E} найдется $\lambda(L)$ таких, которые уже порождают пространство \mathfrak{Q}_L^Δ , и эти элементы будут линейно независимы. Искомый базис в случае $\vec{\kappa}(L) = 1$ получен.

Допустим теперь, что орграф L не является бисвязным, т. е. $\vec{\kappa} \doteq \vec{\kappa}(L) \geq 2$. В i -й бикомпоненте L_i , на основании уже доказанной части теоремы, можно выбрать систему из $\lambda(L_i)$ простых орциклов, которым в пространстве \mathfrak{Q}_L^Δ отвечает система $\vec{\mathfrak{C}}_i$ из $\lambda(L_i)$ линейно независимых элементов. Объединенная система

тема $\bigcup_{i=1}^{\vec{\kappa}} \vec{\mathfrak{C}}_i$, состоящая из $\sum_{i=1}^{\vec{\kappa}} \lambda(L_i)$ элементов, тоже линейно

независима, так как орциклы разных бикомпонент не имеют общих дуг; дополняя эту систему до базиса всего пространства \mathfrak{Q}_L^Δ , мы получим базис требуемого вида.

Наконец, никакой базис для \mathfrak{Q}_L^Δ не может содержать более $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i)$ таких элементов, которые соответствовали бы простым орциклам. В самом деле, всякий орцикл целиком лежит в одной бикомпоненте (ибо все его вершины взаимодостижимы), и если бы в \mathfrak{Q}_L^Δ имелась система более чем из $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i)$ линейно независимых элементов такого рода, то в какой-либо из бикомпонент, скажем в L_i , имелось бы более $\lambda(L_i)$ линейно независимых циклов, что невозможно. Теорема доказана.

Если снять ограничение об отсутствии петель, то в формулировке теоремы надо будет лишь заменить число $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i)$ чис-

лом $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i) - |\mathring{U}_L|$, где $|\mathring{U}_L|$ — количество петель графа L , поскольку каждой петле отвечает свой базисный элемент в пространстве \mathfrak{Q}_L^Δ .

В различных приложениях теории графов нередко возникает вопрос: какое наименьшее число ребер надо удалить из данного орграфа L , чтобы оставшийся суграф не имел орциклов? Из сказанного выше ясно, что искомое число не превосходит $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i) - |\mathring{U}_L|$, однако оно может быть и меньше, поскольку удаление дуг из бикомпоненты, вообще говоря, нарушает ее бисвязность; хотелось бы оценить это число точнее, выяснить, через какие легко вычисляемые характеристики графа оно выражается, и дать удобный алгоритм выявления какой-либо из систем дуг, подлежащей удалению. Аналогичный вопрос для произвольных циклов вместо орциклов гораздо проще, и он решен в главе 3: искомое число равно $\lambda(L)$, а удаляемое множество состоит из всех хорд произвольного каркаса.

Другой подход заключается в том, чтобы ликвидировать орциклы не удалением, а переориентацией некоторого (возможно меньшего) числа дуг. Казалось бы, это труднее, поскольку пе-

реориентация дуги на орцикле хотя и уничтожает его, но может в то же время привести к появлению новых орциклов. Однако в действительности вторая задача равносильна первой. Именно, пусть \mathfrak{S}_1 — класс всех подмножеств U' множества U , обладающих тем свойством, что суграф $L' \doteq (X, U \setminus U'; P)$ не содержит орциклов, и минимальных относительно этого свойства; \mathfrak{S}_2 — класс подмножеств $U'' \subseteq U$ таких, что после переориентации всех дуг U'' граф L переходит в граф L'' без орциклов, причем U'' минимально относительно этого свойства. Тогда справедлива

Т е о р е м а 2 (Э. Я. Гринберг, Я. Я. Дамбит, 1968).
Для любого орграфа L классы \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2 совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно,

$$\forall U'' \in \mathfrak{S}_2 \exists U' \in \mathfrak{S}_1 (U' \subseteq U''), \quad (*)$$

ибо если некоторое множество $U'' \subseteq U$ обладает тем свойством, что переориентация всех дуг U'' приводит к полному уничтожению орциклов, то удаление U'' из L тем более дает такой эффект. а в U'' всегда можно выделить минимальное подмножество с тем же свойством. Покажем теперь, что

$$\forall U' \in \mathfrak{S}_1 \exists U'' \in \mathfrak{S}_2 (U'' \subseteq U'). \quad (**)$$

Пусть U' — произвольное множество класса \mathfrak{S}_1 , а $L' \doteq (X, U \setminus U'; P)$ — суграф, полученный из L удалением U' . Обозначим через X_0 множество всех тупиковых вершин графа L' , а через $X_i (i=1, 2, \dots)$ — множество вершин x , обладающих тем свойством, что самая длинная простая орцепь из x в X_0 имеет длину i . Ясно, что $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и что $X = \bigcup_{i=0}^l X_i$, где l — длина наибольшей простой орцепи графа L' .

В L' не существует орцепи, идущей из вершины множества X_i в отличную от нее вершину множества X_j при $i \leq j$: действительно, если бы такая орцепь имелась, то она содержала бы простую орцепь Q длины $p \geq 1$, идущую из вершины $x_0 \in X_i$ в вершину $x_p \in X_j$, где $i \leq j$; эта Q не может пересекаться ни с какой из длиннейших простых цепей, идущих из x_p в X_0 , в вершине, отличной от x_p (иначе граф L' содержал бы орцикл), но тогда из x_0 в X_0 вела бы простая орцепь длины $j + p > i$, что противоречит определению множества X_i . Поэтому добавление к L' дуги, направленной из X_j в X_i , не может привести к появлению орциклов. Отсюда следует, что в исходном графе L каждая дуга множества U' , ввиду минимальности последнего, идет из некоторого X_s в некоторое X_t с $t > s$ и что переориентация дуг U' не дает орциклов. В множестве же U' всегда можно

найти подмножество, минимальное относительно указанного свойства.

Из (*) и (**) непосредственно следует справедливость теоремы. Действительно, пусть $U' \in \mathfrak{S}_1$. Согласно (**), всегда можно найти такое $U'' \in \mathfrak{S}_2$, что $U'' \subseteq U'$; в свою очередь, ввиду (*) можно найти такое $U''' \in \mathfrak{S}_1$, что $U''' \subseteq U''$. Из $U''' \subseteq U'' \subseteq U'$ и минимальности U' следует $U' = U''$, т. е. $U' \in \mathfrak{S}_2$. Точно так же доказывается, что $U'' \in \mathfrak{S}_2 \Rightarrow U'' \in \mathfrak{S}_1$.

С л е д с т в и е (И. Фидрих, 1965; А. Адам, 3/1965). Пусть $\vec{c}(L)$ означает количество простых орциклов, рассматриваемых с точностью до выбора начальной вершины, в орграфе $L = (X, U; P)$. В L всегда имеется такое подмножество дуг $V \doteq \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subseteq \vec{U}$, что

$$1) 0 \leq k \leq \vec{c}(L);$$

2) каждая дуга из V принадлежит хотя бы одному орциклу графа L ;

3) орграф, полученный из L переориентацией всех дуг множества V (и только этих дуг), не содержит орциклов.

Алгоритм (довольно-таки громоздкий) нахождения всего класса \mathfrak{S}_1 для заданного орграфа предложен Д. Юнгером (1963). Далее, в работе А. Адама (3/1965) доказательство основной теоремы проведено так, что дает алгоритм нахождения некоторого $U'' \in \mathfrak{S}_2$. Наконец, Э. Я. Гринберг и Я. Я. Дамбит (1966) находят класс $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ (или какое-нибудь из множеств этого класса) с помощью алгоритма Х. Магу и Дж. Уэйсмана (изложенного нами в § 9 главы 1 применительно к другой задаче) в предположении, что все простые орциклы графа L уже выявлены.

Следующий вопрос, пока не решенный, поставлен А. Адамом: если орграф L имеет орциклы, то всегда ли можно уменьшить их количество посредством переориентации только одной дуги? Разрешение переориентировать одновременно не одну, а любое число дуг, превращает задачу в тривиальную: пронумеровав вершины L произвольным образом и ориентируя каждую дугу в направлении от меньшего номера к большему, мы добьемся полного исчезновения орциклов. Результат И. Фидрих и А. Адама представляет промежуточный случай между обеими крайностями, когда переориентируется сразу не более $\vec{c}(L)$ дуг. Нетрудно показать, что если ответ на вопрос А. Адама отрицательный, то граф-опровержитель с наименьшим количеством вершин необходимо должен быть бисвязным.

Вообще проблема изучения орциклов в орграфе тесно связана с понятием базы дуг (§ 34), а также со свойствами направленной

соединимости и направленной сплетаемости вершин (§ 35). Здесь не создано столь удобного алгебраического аппарата, как в случае обычных циклов. Элементы пространства циклов \mathfrak{Z}_L^Λ , соответствующие орциклам, не образуют подпространства и едва ли могут быть дополнены до подпространства путем добав-

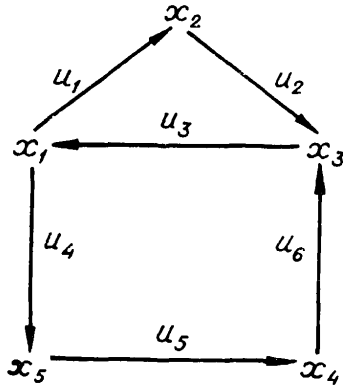


Рис. 136.

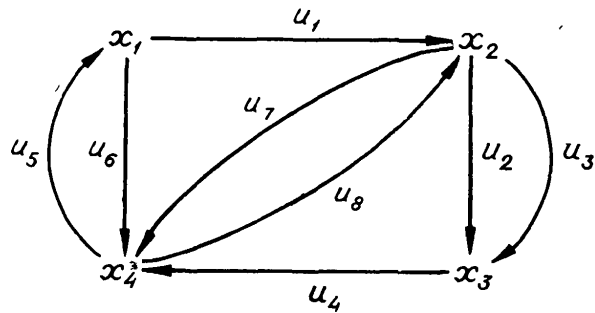


Рис. 137.

ления каких-то элементов, которым в L отвечали бы части, близкие по свойствам к орциклам; это видно из примера графа на рис. 136: сумма двух орциклов

$$x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_3 x_1$$

и

$$x_3 u_3 x_1 u_4 x_5 u_5 x_4 u_6 x_3$$

дает цикл

$$x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_6 x_4 u_5 x_5 u_4 x_1,$$

решительно ничем не напоминающий маршрут. Одна из попыток выйти из создавшегося положения состоит в отказе от заманчиво простого сложения по модулю два и переходе к обычному кольцу целых чисел. Хотя, как мы увидим, такой подход и не решает проблемы создания алгебры орциклов, мы остановимся на нем подробнее, ибо он приводит к некоторым другим полезным результатам (этого вполне можно ожидать в свете теоремы Лантьери — Трента, см. § 26 в главе 3).

Пусть $L = (X, U; P)$ — орграф без петель, с пронумерованным множеством дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Всевозможные строки длины m с целочисленными элементами образуют относительно сложения абелеву группу, а линейные формы от этих строк с целочисленными коэффициентами составляют линейное пространство \mathfrak{Z}_L размерности m , которое мы назовем *пространством обобщенных суграфов* графа L . Грубо говоря, обобщенный су-

граф — это суграф, ребрам которого приписаны целочисленные «кратности» (положительные, нулевые или отрицательные).

Каждому циклическому маршруту

$$x_0 v_1 x_1 v_2 x_2 \dots x_{l-1} v_l x_0$$

графа L отнесем элемент (вектор) пространства $\check{\mathfrak{Q}}_L$ следующим образом. Пусть при обходе маршрута дуга u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) проходится r_i^+ раз в направлении ее ориентации и r_i^- раз в противоположном направлении; тогда данному маршруту сопоставляем вектор

$$(r_1^+ - r_1^-, r_2^+ - r_2^-, \dots, r_m^+ - r_m^-).$$

Например, если L — граф, изображенный на рис. 137, то маршруту

$$x_1 u_1 x_2 u_8 x_4 u_4 x_3 u_3 x_2 u_8 x_4 u_5 x_1 u_6 x_4 u_6 x_1$$

отвечает вектор $(1, 0, -1, 1, 1, 0, 0, -2)$.

Разным циклическим маршрутам может соответствовать один и тот же элемент пространства $\check{\mathfrak{Q}}_L$; так, маршрутам

$$x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_3 x_2 u_1 x_1 u_5 x_4 u_6 x_1$$

и

$$x_1 u_5 x_4 u_4 x_3 u_3 x_2 u_2 x_3 u_4 x_4 u_6 x_1$$

графа на рис. 137 отвечает вектор $(0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, 0)$, а маршрутам

$$x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_4 x_4 u_8 x_2 u_7 x_4 u_6 x_1$$

и

$$x_1 u_1 x_2 u_7 x_4 u_8 x_2 u_2 x_3 u_4 x_4 u_6 x_1$$

(циклы) — вектор $(1, 1, 0, -1, 0, -1, 1, 1)$. Легко понять также, что всякому циклическому маршруту, не содержащему циклов, отвечают нуль-вектор пространства $\check{\mathfrak{Q}}_L$. Однако если циклический маршрут является простым циклом, то соответствующий вектор определяет его с точностью до выбора на нем начальной вершины. Отличительная особенность орцикла состоит в том, что ненулевые компоненты вектора равны все $+1$ или все -1 ,

Какие элементы содержатся в подпространстве пространства $\check{\mathfrak{L}}_L$, порожденном теми его элементами, которые соответствуют орциклам графа L ? Обратимся опять к примеру графа на рис. 136. Орциклам

$$x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_3 x_1 \quad \text{и} \quad x_3 u_3 x_1 u_4 x_5 u_5 x_4 u_6 x_3$$

отвечают векторы

$$r_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0) \quad \text{и} \quad r_2 = (0, 0, 1, 1, 1, 1);$$

искомое подпространство должно содержать также вектор

$$r_1 - r_2 = (1, 1, 0, -1, -1, -1),$$

отвечающий циклу

$$x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_6 x_4 u_5 x_5 u_4 x_1,$$

но последний, как и прежде, ничем не напоминает орцикла.

Хорошей алгебры орциклов опять не получилось. Образно говоря, положение таково: в характеристике орциклов (среди всевозможных суграфов графа L) доля чисто комбинаторных свойств по сравнению с алгебраическими значительно больше, чем в характеристике циклов. Однако пространство $\check{\mathfrak{L}}_L$ имеет перед \mathfrak{L}_L уже хотя бы то преимущество, что, например, по виду вектора $(1, 1, 0, -1, -1, -1)$ мы можем, не обращаясь к матрице инцидентий графа над свободным полукольцом K , сразу сказать: на соответствующем цикле дуги u_1 и u_2 имеют одинаковое направление, противоположное направлению дуг u_4 , u_5 и u_6 .

Теорема 3. Среди тех элементов пространства $\check{\mathfrak{L}}_L$, которые соответствуют циклическим маршрутам орграфа без петель L , наибольшее количество линейно независимых равно $\lambda(L)$. Среди элементов, соответствующих ормаршрутам, наибольшее число линейно независимых есть $\sum_{i=1}^{\vec{x}} \lambda(L_i)$, где L_1, L_2, \dots

$\dots, L_{\vec{x}}$ — бикомпоненты графа L .

Доказательство. Пусть T — какой-либо каркас графа L . В произвольном циклическом маршруте

$$C = x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

каждая дуга, не принадлежащая T , образует вместе с некоторыми дугами T простой цикл (см. теорему 3 § 22); пусть, скажем,

дуга u_i ($1 \leq i \leq l$) образует цикл

$$C_i = x_{i-1} u_i x_i v_1 y_1 v_2 y_2 \dots y_{k-1} v_k x_{i-1},$$

где v_1, v_2, \dots, v_k все принадлежат каркасу T . Заменяя в маршруте C дугу u_i остальной частью цикла C_i , проходимой в обратном порядке, получим циклический маршрут

$$C' = x_0 u_1 x_1 \dots x_{i-1} v_k y_{k-1} v_{k-1} y_{k-2} \dots y_1 v_1 x_i u_{i+1} x_{i+1} \dots x_{l-1} u_l x_l$$

(рис. 138), в котором число дуг, не принадлежащих T , на единицу меньше, чем в исходном маршруте C . Продолжая в том же духе, мы придем, наконец, к циклическому маршруту, \hat{C} все дуги которого принадлежат каркасу T .

Переходу от C к C' соответствует в \check{Q}_L вычитание вектора для цикла C' из вектора \mathbf{r} для маршрута C ; если $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ — все те дуги C , которые не принадлежат T , а циклам $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_p}$ отвечают в \check{Q}_L векторы $\mathbf{r}_{i_1}, \mathbf{r}_{i_2}, \dots, \mathbf{r}_{i_p}$, то маршруту C отвечает вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i_1} - \mathbf{r}_{i_2} - \dots - \mathbf{r}_{i_p}$. Но этот вектор — нулевой, так как циклический маршрут \hat{C} состоит только из ребер каркаса T и поэтому не может содержать циклов; следовательно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{i_1} + \mathbf{r}_{i_2} + \dots + \mathbf{r}_{i_p}.$$

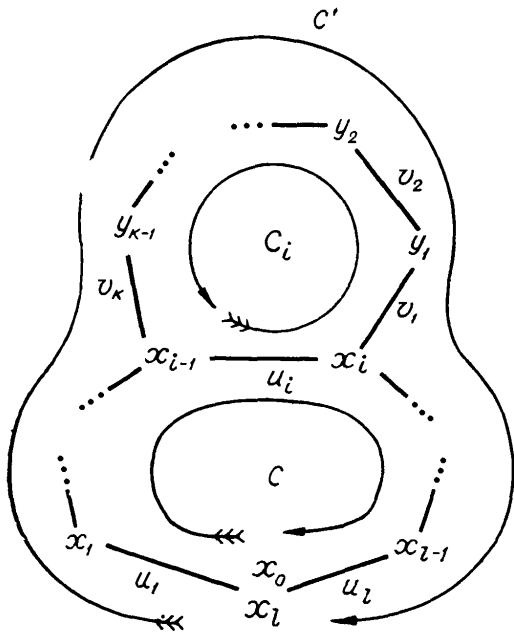


Рис. 138.

Таким образом, если каждой хорде каркаса T отнести тот единственный простой цикл, который она образует вместе с некоторыми дугами каркаса, то полученной системе циклов будет в \check{Q}_L отвечать система \mathfrak{C}_λ из $\lambda(L)$ элементов, через которые линейно выражается любой вектор \mathbf{r} , соответствующий произвольному циклическому маршруту в L . Сама система \mathfrak{C}_λ линейно независима, поскольку каждый ее вектор заведомо содержит компоненту, равную ± 1 и такую, что одноименные ей компоненты всех остальных векторов системы равны нулю (этой ненулевой компоненте соответствует хорда каркаса T , определяющая простой цикл).

Первая часть теоремы доказана. Доказательство второй части почти дословно совпадает с доказательством теоремы 1.

Первая часть теоремы доказана. Доказательство второй части почти дословно совпадает с доказательством теоремы 1.

Итак, подпространство $\check{\mathfrak{Q}}_L^\Lambda$ в $\check{\mathfrak{Q}}_L$, порожденное векторами системы \mathfrak{C}_λ , дает такую же алгебраическую характеристику графа L , что и подпространство \mathfrak{Q}_L^Λ в \mathfrak{Q}_L . То же можно сказать и о подпространстве $\check{\mathfrak{Q}}_L^P$ в $\check{\mathfrak{Q}}_L$, аналогичном пространству разрезов \mathfrak{Q}_L^P в \mathfrak{Q}_L и определяемом следующим образом.

Каждому простому разрезу графа L (см. § 24 в главе 3) припишем ориентацию, упорядочив любым из двух возможных способов пару тех подграфов, на которые разбивается компонента связности графа L , содержащая ребра данного разреза, после удаления этих ребер; вектор (элемент $\check{\mathfrak{Q}}_L$), соответствующий разрезу, имеет, по определению, в качестве i -й компоненты число 1, если дуга u_i графа L принадлежит разрезу и ориентирована так же, как разрез (т. е. идет из первой «половинки» разбиваемой компоненты во вторую «половинку»); число -1 , если u_i принадлежит разрезу и ориентирована противоположно ему (идет из второй «половинки» в первую); число 0, если u_i не принадлежит разрезу. Множество векторов, отвечающих указанным образом всем простым разрезам графа L , порождает в $\check{\mathfrak{Q}}_L$ подпространство, которое мы обозначаем через $\check{\mathfrak{Q}}_L^P$. Его размерность $\dim \check{\mathfrak{Q}}_L^P = m(L) - \lambda(L) = n(L) - \kappa(L) = \rho(L)$ (ранг графа L , см. § 22 в главе 3); доказательство двойственно доказательству первой части теоремы 2 в том смысле, в каком доказательство равенства $\dim \mathfrak{Q}_L^P = \rho(L)$ в § 24 двойственно доказательству $\dim \mathfrak{Q}_L^\Lambda = \lambda(L)$ в § 23 (глава 3), и мы не будем его проводить.

Например, у графа L на рис. 137 разрезу $\{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8\}$, ориентированному от $\{x_1, x_2\}$ к $\{x_3, x_4\}$, отвечает вектор $(0, 1, 1, 0, -1, 1, 1, -1) \in \check{\mathfrak{Q}}_L^P$.

Пусть образующие полукольца K удовлетворяют условиям

$$\xi = 1, \quad \eta = -1,$$

а также тождественным соотношениям, в силу которых подполукольцо, порожденное элементами 1 и -1 , является кольцом S целых чисел. В силу леммы 2 § 26 (глава 3), матрица инцидентий \check{A}_L графа L над S вполне унимодулярна, т. е. значения ее миноров могут быть только 0, $+1$ и -1 . Строки матрицы A_L соответствуют центральным разрезам (см. пример 3 к определению разреза в § 24 главы 3), ориентированным в направлении от своих центров, поэтому ранг $\rho(\check{A}_L)$ матрицы \check{A}_L не превосходит $\rho(L)$; теорема § 25 (глава 3) и оба ее следствия дословно перено-

сятся на матрицы над S (вместо поля D), так что $\rho(\check{A}_L) = \rho(L)$ и максимальные системы линейно независимых столбцов матрицы \check{A}_L отвечают каркасам графа L .

Матрицы разрезов и циклов одного и того же графа L над S получаются друг из друга операцией перекройки, мало чем отличающейся от той, которая определена в § 25 (глава 3). Во-первых, чтобы получить из \check{A}_L некоторую матрицу разрезов

$$\check{A}_L^P = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{}^{\rho} & \overbrace{}^{\lambda} \\ \hline A_T & A'_T \end{array} \right) \rho,$$

надо, как и прежде, расположить столбцы \check{A}_L в таком порядке, чтобы первые $\rho \doteq \rho(L)$ столбцов отвечали ребрам некоторого каркаса T графа L , и затем сохранить любые ρ линейно независимых строк, отбрасывая остальные. Далее, линейным комбинированием строк надо придать матрице разрезов вид

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{}^{\rho} & \overbrace{\phantom{(A_T)^{-1} \cdot A'_T}}^{\lambda} \\ \hline 1 \ 0 \dots 0 & \\ 0 \ 1 \dots 0 & \\ \dots & \\ 0 \ 0 \dots 1 & (A_T)^{-1} \cdot A'_T \end{array} \right) \rho;$$

здесь мы должны сделать два замечания: 1) процесс приведения матрицы к такому виду, когда спереди стоит единичная матрица E_ρ , равносильно умножению \check{A}_L^P слева на A_T^{-1} — это сразу следует из правила оперирования с блочными матрицами (см. например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. М., ГТТИ, 1953, глава 1, § 2); 2) этот процесс не выводит за пределы кольца S , ибо в силу леммы 2 § 26 (глава 3) элементы матрицы A_T^{-1} , обратной для A_T , тоже суть только 0, 1 и -1 . Преобразованную матрицу разрезов по-прежнему обозначаем через \check{A}_L^P . Наконец, перекройка (сопровождаемая теперь изменением знака у сохраняемой части) даст нам одну из матриц циклов

$$\check{A}_L^\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\phantom{-(A_T^{-1} \cdot A'_T)^*}}^{\rho} & \overbrace{}^{\lambda} \\ \hline -(A_T^{-1} \cdot A'_T)^* & 1 \ 0 \dots 0 \\ & 0 \ 1 \dots 0 \\ & \dots \\ & 0 \ 0 \dots 1 \end{array} \right) \lambda;$$

действительно, $\check{A}_L^P \cdot (\check{A}_L^\Delta)^* = 0$, строки \check{A}_L^Δ линейно независимы и их число равно $\lambda \doteq \lambda(L) = \dim \check{\mathfrak{Z}}_L^\Delta$, а ортогональность подпространства $\check{\mathfrak{Z}}_L^\Delta$ подпространству $\check{\mathfrak{Z}}_L^P$ следует из теоремы, аналогичной теореме 2 § 24 (глава 3) и доказываемой примерно так же.

Все сказанное проиллюстрируем на примере уже знакомого нам графа L на рис. 137. У него

$$\check{A}_L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}.$$

Разрезы, соответствующие строкам этой матрицы, суть

(1) $\{u_1, u_5, u_6\}$, ориентированный от $\{x_1\}$ к $\{x_2, x_3, x_4\}$;

(2) $\{u_1, u_2, u_3, u_7, u_8\}$ — — от $\{x_2\}$ к $\{x_1, x_3, x_4\}$;

(3) $\{u_2, u_3, u_4\}$ — — от $\{x_3\}$ к $\{x_1, x_2, x_4\}$;

(4) $\{u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ — — от $\{x_4\}$ к $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Выбирая в качестве T каркас с ребрами u_1, u_2, u_4 , переставляем в \check{A}_L третий и четвертый столбцы. Так как $\rho(\check{A}_L) = \rho(L) = 3$, а первые три строки линейно независимы, мы можем отбросить четвертую строку, и это даст матрицу

$$\check{A}_L^P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу для A_T :

$$A_T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

тогда

$$A_T^{-1} \cdot \check{A}_L^P = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Строкам полученной матрицы отвечают разрезы:

$\{u_1, u_5, u_8\}$, ориентированный от $\{x_1\}$ к $\{x_2, x_3, x_4\}$;
 $\{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ — от $\{x_1, x_2\}$ к $\{x_3, x_4\}$;
 $\{u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ — от $\{x_4\}$ к $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Перекройка дает матрицу

$$\check{A}_L^\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

строкам которой отвечают, с точностью до выбора начальной вершины, простые циклы

$$x_3 u_2 x_2 u_3 x_3, \quad x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_4 x_4 u_5 x_1,$$

$$x_1 u_6 x_4 u_4 x_2 u_2 x_1, \quad x_2 u_7 x_4 u_4 x_3 u_2 x_2, \quad x_2 u_2 x_3 u_4 x_4 u_8 x_2.$$

Более подробное изучение матриц разрезов и циклов над кольцом S читатель найдет в книге С. Сешу и М. Рида (1961, глава 5); мы ограничимся тем, что приведем без доказательства следующие два результата, полученные уже после выхода упомянутой книги.

1. В работе В. Майеды (3/1963) вопрос о P -реализуемости и Λ -реализуемости матрицы A с элементами $0, 1$ и -1 посредством орграфов без петель решается в том же плане, что и для матриц над D и их реализаций неорграфами (см. § 27 в главе 3). Операции деления графа по разрезу и деления матрицы по строке определяются в точности как прежде, а P -реализуемость матрицы в одной из систем \mathfrak{M}_i означает, что каждый столбец матрицы содержит один или два ненулевых элемента и что умножением в случае надобности некоторых строк на -1 можно добиться того, чтобы никакой столбец не содержал двух единиц одинакового знака. Весь алгоритм, включая составление матрицы D , преобразующей A в A_L , мы разъясним на конкретном примере.

Пусть

$$A = \begin{array}{cccccccccc|c} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}.$$

Нетривиальный результат деления A по первой строке есть

$$A_1^1 = \begin{array}{cccccc|c} a & b & c & f & g & h & i & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ 2 \\ 3 \end{array}, \quad A_1^2 = \begin{array}{cccccc|c} a & d & e & f & g & j & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ 4 \\ 5 \end{array}.$$

Далее, нетривиальный результат деления A_1^1 по второй строке:

$$A_{12}^{11} = \begin{array}{cccc|c} a & b & f & g & h & i & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}, \quad A_{12}^{12} = \begin{array}{cccc|c} b & c & f & g & h & i & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}.$$

Единственный результат деления A_{12}^{12} по третьей строке (тривиальный):

$$A_{123}^{121} = \begin{array}{cccc|c} b & c & f & g & h & i & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}, \quad A_{123}^{122} = \begin{array}{ccc|c} c & g & h & \\ \hline 1 & -1 & 1 & \end{array} \textcircled{3}.$$

Нетривиальное деление A_1^2 по четвертой строке дает

$$A_{14}^{21} = \begin{array}{ccccc|c} a & d & f & g & j & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{4} \end{array}, \quad A_{14}^{22} = \begin{array}{ccccc|c} d & e & f & g & j & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array},$$

а деление A_{14}^{22} по пятой строке —

$$A_{145}^{221} = \begin{array}{ccccc|c} d & e & f & g & j & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array}, \quad A_{145}^{222} = \begin{array}{ccc|c} e & f & j & \\ \hline 1 & -1 & -1 & \end{array} \textcircled{5}.$$

Таким образом, одна из систем матриц \mathfrak{M} составлена матрицами A_{12}^{11} , A_{123}^{121} , A_{123}^{122} , A_{14}^{21} , A_{145}^{221} , A_{145}^{222} . Чтобы в столбцах не было одинаковых ненулевых элементов, достаточно умножить на -1 вторую строку в A_{12}^{11} , а также четвертую строку в A_{14}^{22} и в A_{145}^{221} ; отметим номера этих строк знаком $(-)$ и выпишем преобразованные матрицы (в простой нумерации):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2(-) \end{matrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix},$$

$$A_3 = (1 \quad -1 \quad 1) \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4(-) \end{matrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4(-) \\ 5 \end{matrix}, \quad A_6 = (1 \quad -1 \quad -1) \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Все шесть матриц P -реализуемы; можно было бы построить шесть соответствующих орграфов и затем последовательным исключением вершин, как в § 27, скомбинировать один из тех графов L , для которых $\check{A}_L^P = A$. Мы не станем это проделывать и сразу напомним преобразующую матрицу $D = (d_{ij})$, где

$$d_{ij} \doteq \begin{cases} 1, & \text{если матрица } A_i \text{ содержит } j\text{-ю строку без знака } (-); \\ -1, & \text{если } A_i \text{ содержит } j\text{-ю строку со знаком } (-); \\ 0, & \text{если } A_i \text{ не содержит } j\text{-ю строку.} \end{cases}$$

В данном примере $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$;

$$D = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это еще не матрица инциденций, но она становится таковой после умножения первой, второй и пятой строк на -1 ; получаем

$$\check{A}_L = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий граф L изображен на рис. 139.

2. Как показал Я. Я. Дамбит (2/1966), для любого связного орграфа L без петель $\det [\check{A}_L^P \cdot (\check{A}_L^P)^*] = \det [\check{A}_L^\Delta \cdot (\check{A}_L^\Delta)^*] =$ числу каркасов графа L , где \check{A}_L^P — матрица разрезов с E_ρ в начале, а \check{A}_L^Δ — матрица циклов с E_λ в конце, полученная из \check{A}_L^P перекройкой. Так как порядок второго определителя равен $\lambda(L)$, то для графов с малым цикломатическим числом («почти деревья») выгоднее подсчитывать каркасы таким способом, чем с помощью теоремы Лантьери — Трента (см. § 26 в главе 3). Результат легко перенести на случай, когда граф L не предполагается связным.

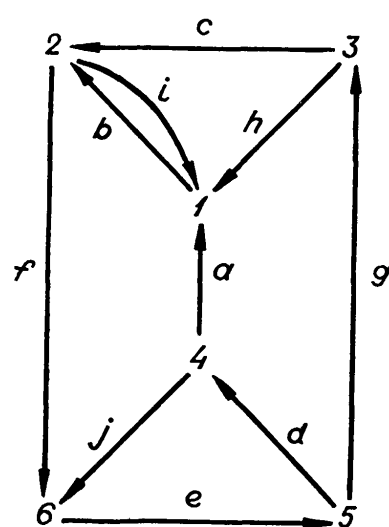


Рис. 139.

ОТОБРАЖЕНИЯ И РАСКРАСКИ ГРАФОВ

§ 39. Гомоморфизмы графов

Мы скажем, что дано *гомоморфное отображение* (гомоморфизм) ψ графа $L = (X, U; P)$ в граф $L' = (X', U'; P')$, если каждой вершине $x \in X$ и каждому ребру $u \in U$ графа L однозначно отнесены их образы $\psi(x) \in X'$ и $\psi(u) \in U'$ в L' с сохранением инцидентности, т. е. так, что

$$\forall x, y \in X \forall u \in U [P(x, u, y) \Rightarrow P'(\psi(x), \psi(u), \psi(y))]. \quad (*)$$

Из определения гомоморфизма ясно, что он не обязательно сохраняет тип ребер; так, если две различные вершины $x, y \in X$ имеют один и тот же образ $\psi(x) = \psi(y) \in X'$, то все ребра, соединяющие x и y , переходят в петли. Вообще при гомоморфизме дуга может перейти в дугу, звено или петлю, звено может перейти в звено или петлю, а петля — только в петлю; поэтому, например, дезориентация графа (см. § 4 в главе 1) есть частный случай гомоморфизма (отображение ψ тождественно как на X , так и на U , а образом графа $L = (X, U; P)$ служит соответствующий неорграф $\tilde{L} = (X, U; \tilde{P})$), в то время как ориентация не есть гомоморфизм. ψ -образы подмножеств $Y \subseteq X$ и $V \subseteq U$ обозначаем соответственно через

$$\psi(Y) \doteq \bigcup_{x \in Y} \psi(x) \quad \text{и} \quad \psi(V) \doteq \bigcup_{u \in V} \psi(u).$$

Если Y и V порождают часть $M = (Y, V; P)$ графа L , т. е. если

$$\forall u \in V \forall x, y \in X [P(x, u, y) \Rightarrow x, y \in Y]$$

(см. § 1 в главе 1), то образы $\psi(Y)$ и $\psi(V)$ порождают часть

$$\psi(M) \doteq (\psi(Y), \psi(V); P')$$

графа L' , иными словами, *гомоморфизм переводит часть в часть*. В самом деле, пусть $u' \in \psi(V)$, а $x', y' \in X'$ таковы, что $P'(x', u', y')$ истинно. Выберем в L такое ребро $u \in V$, для которого $u' = \psi(u)$, и такие вершины $x, y \in X$, для которых истинно $P(x, u, y)$; тогда необходимо $x, y \in Y$, откуда, в силу определения гомоморфизма, следует истинность $P'(\psi(x), u', \psi(y))$, а так как $\psi(x), \psi(y) \in \psi(Y)$ и ребро u' было выбрано в $\psi(V)$ произвольно, то

$$\forall u' \in \psi(V) \exists x', y' \in \psi(Y) P'(x', u', y'),$$

что и требовалось доказать.

В случае $\psi(L) = L'$ отображение ψ есть гомоморфизм L на L' (в общем случае ψ является гомоморфизмом L на некоторую часть $\psi(L)$ графа L'). Считая, что $\psi(L) = L'$, обозначим ψ -прообразы подмножеств $Y' \subseteq X'$ и $V' \subseteq U'$ соответственно через

$$\psi^{-1}(Y') \doteq \{x/x \in X \ \& \ \psi(x) \in Y'\}$$

и

$$\psi^{-1}(V') \doteq \{u/u \in U \ \& \ \psi(u) \in V'\}.$$

Если пара Y', V' порождает часть

$$M' \doteq (Y', V'; P')$$

графа L' , то пара прообразов $Y \doteq \psi^{-1}(Y') \subseteq X$, $V \doteq \psi^{-1}(V') \subseteq U$ порождает часть

$$\psi^{-1}(M') \doteq (Y, V; P)$$

графа L , иными словами, *прообраз части есть часть*. Действительно, пусть $u \in V$, а $x, y \in X$ таковы, что $P(x, u, y)$ истинно; тогда истинно также $P'(\psi(x), \psi(u), \psi(y))$. В силу пункта Б определения графа (§ 1), всякие вершины $x', y' \in X'$, для которых $P'(x', \psi(u), y')$ истинно, суть $\psi(x)$ и $\psi(y)$ (с точностью до перестановки); а так как, с другой стороны, $\psi(x), \psi(y) \in Y'$, то $x, y \in Y$. Отметим еще один очевидный факт, который понадобится нам впоследствии: *если при вершине $x' \in X'$ графа L' нет петель, то полный прообраз $\psi^{-1}(x') \subseteq X$ этой вершины порождает в L пустой подграф*. Это верно и при $\psi(L) \subset L'$ (если только x' служит образом какой-либо вершины графа L), а в случае $\psi(L) = L'$ справедливо также обратное утверждение.

Из всего сказанного относительно отображения частей следует, что *образами и прообразами подграфов и суграфов при*

гомоморфизме являются опять подграфы, соответственно суграфы.

Гомоморфизм ψ графа L на L' представляет собой *изоморфизм* (§ 1), если отображение ψ^{-1} , обратное ψ , тоже является гомоморфизмом (L' на L), т. е. если ψ^{-1} однозначно как для вершин, так и для ребер, а вместо импликации (*) имеет место более сильное условие равнозначности:

$$\forall x, y \in X \forall u \in U [P(x, u, y) \Leftrightarrow P'(\psi(x), \psi(u), \psi(y))].$$

Мы не будем классифицировать и изучать гомоморфизмы в самом общем виде, а остановимся лишь на важнейших частных случаях.

Изоморфизм графа L на себя носит название *автоморфизма*. Автоморфизм ψ графа $L = (X, U; P)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, можно рассматривать как подстановку

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ \psi(x_1) & \psi(x_2) & \dots & \psi(x_n) & \psi(u_1) & \psi(u_2) \dots & \psi(u_m) \end{pmatrix}$$

$n + m$ элементов. Всякий граф допускает тождественный автоморфизм

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix},$$

причем существуют графы (например, каждый из семи графов на рис. 140), для которых он является единственным автоморфизмом. Граф на рис. 141 допускает, кроме тождественного, например, такие автоморфизмы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 9 & a & b & c & \dots & p \\ 1 & 2 & \dots & 9 & b & a & c & \dots & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & 9 & a & b & c & d & e \dots & p \\ 1 & 3 & 2 & 4 \dots & 9 & a & b & d & c & e \dots & p \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & a & b & c & d & g & h & i & j & e & f & t & n & o & p & k & l \end{pmatrix}.$$

Понятия произведения подстановок и обратной подстановки автоматически переносятся на автоморфизмы графов. Так, граф на рис. 141 допускает, наряду с упомянутыми, также автоморфизм

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 & a & b & c & d & e & \dots & p \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & 9 & b & a & d & c & e & \dots & p \end{pmatrix},$$

являющийся произведением первого на второй; автоморфизм

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & a & b & c & d & i & j & e & f & g & h & o & p & k & l & m & n \end{pmatrix},$$

обратный третьему, и т. п. Вообще справедлива

Т е о р е м а 1. Множество $A(L)$ всех автоморфизмов произвольного графа L образует группу относительно операции умножения.

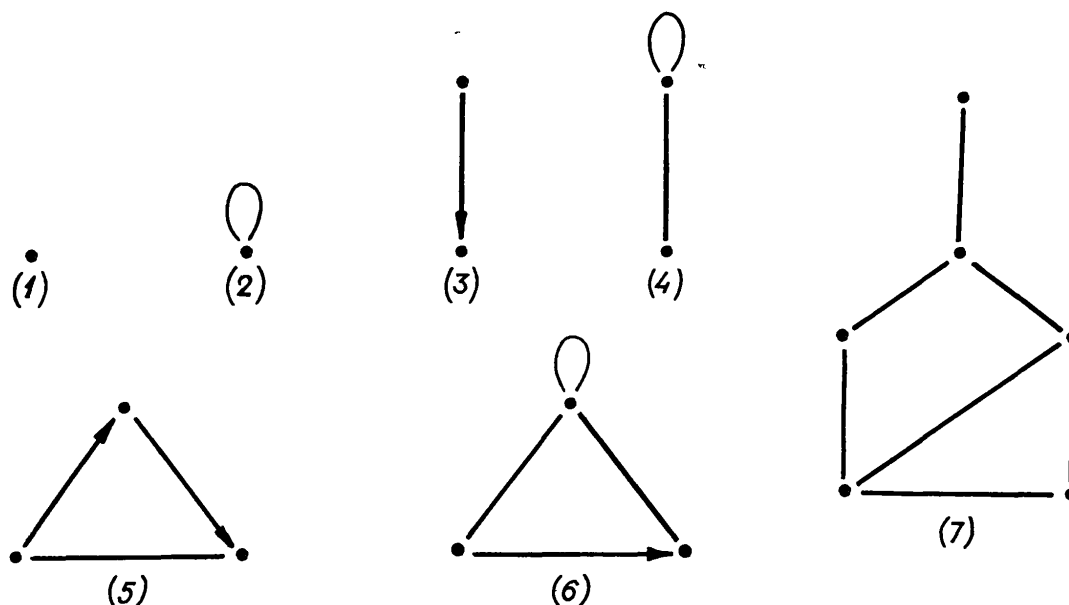


Рис. 140.

Действительно, каждый автоморфизм $\psi \in A(L)$ принадлежит той подгруппе $\mathfrak{S}(L)$ симметрической группы подстановок множества $X \cup U$, которая образована всеми подстановками, переводящими X в X и U в U . Поэтому достаточно проверить, что 1) тождественный автоморфизм 1 принадлежит $A(L)$; 2) если $\psi_1, \psi_2 \in A(L)$, то произведение $\psi_1 \cdot \psi_2 \in A(L)$; 3) если $\psi \in A(L)$, то $\psi^{-1} \in A(L)$. Но утверждение 1) тривиально, а 2) и 3) проверяются без труда. Кстати, поскольку граф L предполагается конечным, третье утверждение следует из второго*.

Итак, каждый граф (конечный) обладает конечной группой автоморфизмов. Как показал Р. Фракт (1/1938), справедливо и обратное: всякая конечная группа может быть представлена как группа автоморфизмов некоторого конечного графа.

*) Так как группа $\mathfrak{S}(L)$ конечна, а $A(L) \subseteq \mathfrak{S}(L)$, то для любого $\psi \in A(L)$ найдется такое натуральное s , что $\psi^s = 1$. Тогда элемент ψ^{s-1} , тоже принадлежащий $A(L)$ (при $s = 1$ — в силу 1), а при $s > 1$ — в силу 2)), будет обратным для ψ .

Т е о р е м а 2 (Фракта). Для любой конечной группы G можно построить такой обыкновенный граф $L = (X, U)$, чтобы его группа автоморфизмов $A(L)$ была изоморфна G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единичной группе соответствует, например, одновершинный граф F_1 , группе из двух элементов

(все такие группы изоморфны) — полный двухвершинный граф F_2 . Пусть теперь

$$G = \{g_1 = 1, g_2, g_3, \dots, g_N\}$$

— произвольная группа из $N \geq 3$ элементов. Каждому ее неединичному элементу g_i ($i = 2, 3, \dots, N$) отнесем обыкновенный граф L_i , показанный на рис. 142, причем среди всех $4i - 1$ вершин этого графа особо отметим две: «начало» и «конец». Ясно, что графы L_2, L_3, \dots, L_N попарно неизоморфны и каждый из них допускает только тождественный автоморфизм. Далее, образуем систему $\{L_i^j\}$ из $N(N - 1)$ обыкновенных графов, где $L_i^1, L_i^2, \dots, L_i^N$ — графы, изоморфные L_i ($i = 2, 3, \dots, N$). Так как изоморфное отображение L_i^j на L_i определяется однозначно, то можно во всех графах L_i^j выделить «начала» и «концы» как образы таких вершин в соответствующих графах L_i . Наконец, отождествим начала и концы различных графов системы $\{L_i^j\}$ следующим образом: сначала для каждого $j = 1, 2, \dots, N$ отождествим между собой начала всех графов $L_2^j, L_3^j, \dots, L_N^j$ и полученную вершину обозначим тем же символом g_j , что и j -й элемент группы G ; после этого для каждой пары i, j ($i = 2, 3, \dots, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$) отождествим конец графа L_i^j с той вершиной g_k , для которой $g_j g_i = g_k$ в группе G . Покажем, что построенный таким образом обыкновенный граф $L = (X, U)$ — искомый.

Вершины графа L , обозначенные символами элементов группы G , будем кратко называть «групповыми», а прочие вершины L (которые не являются ни началом, ни концом ни в каком L_i^j) — «вспомогательными». Подграфы L , принадлежащие системе

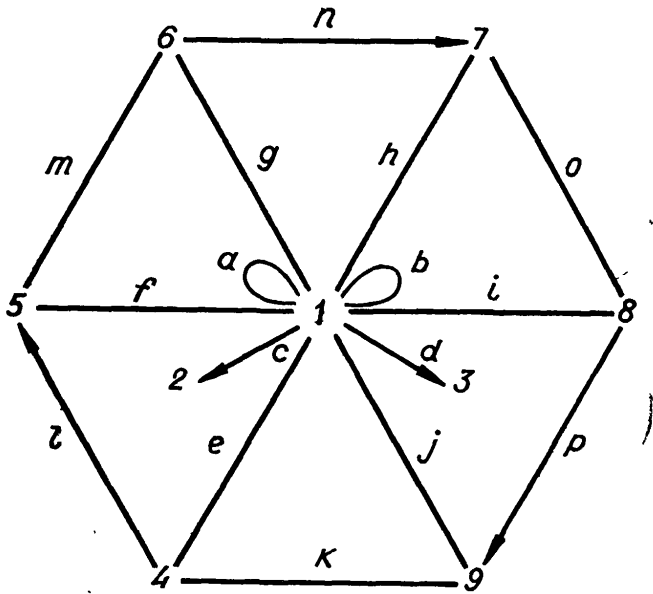


Рис. 141

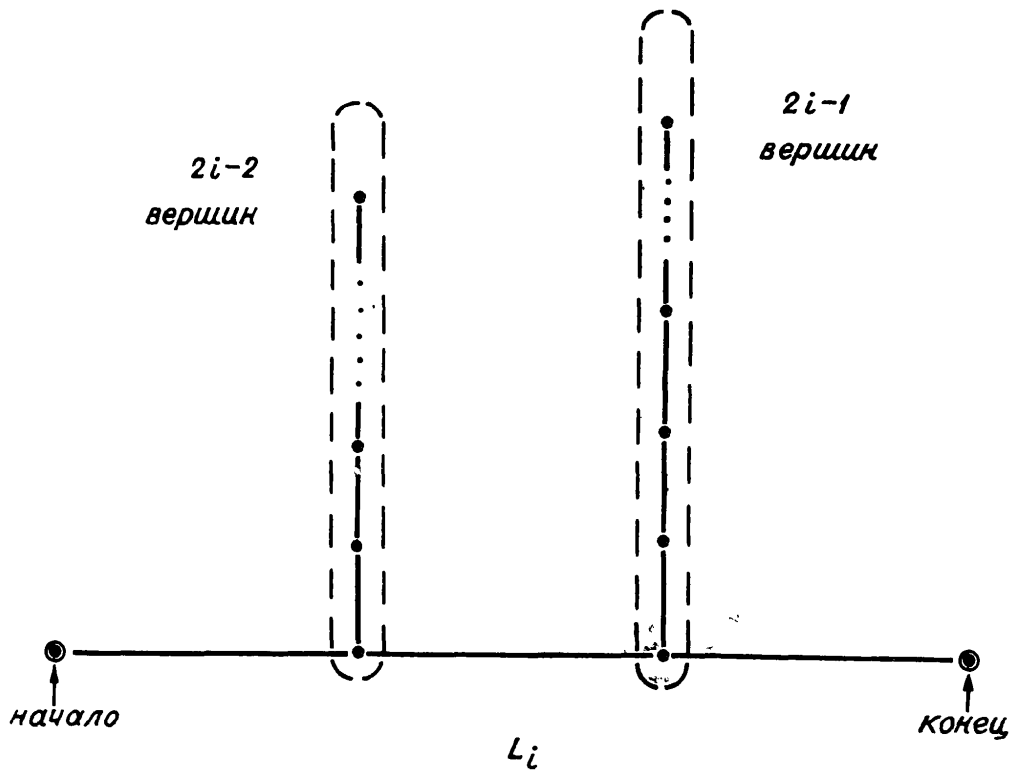


Рис. 142.

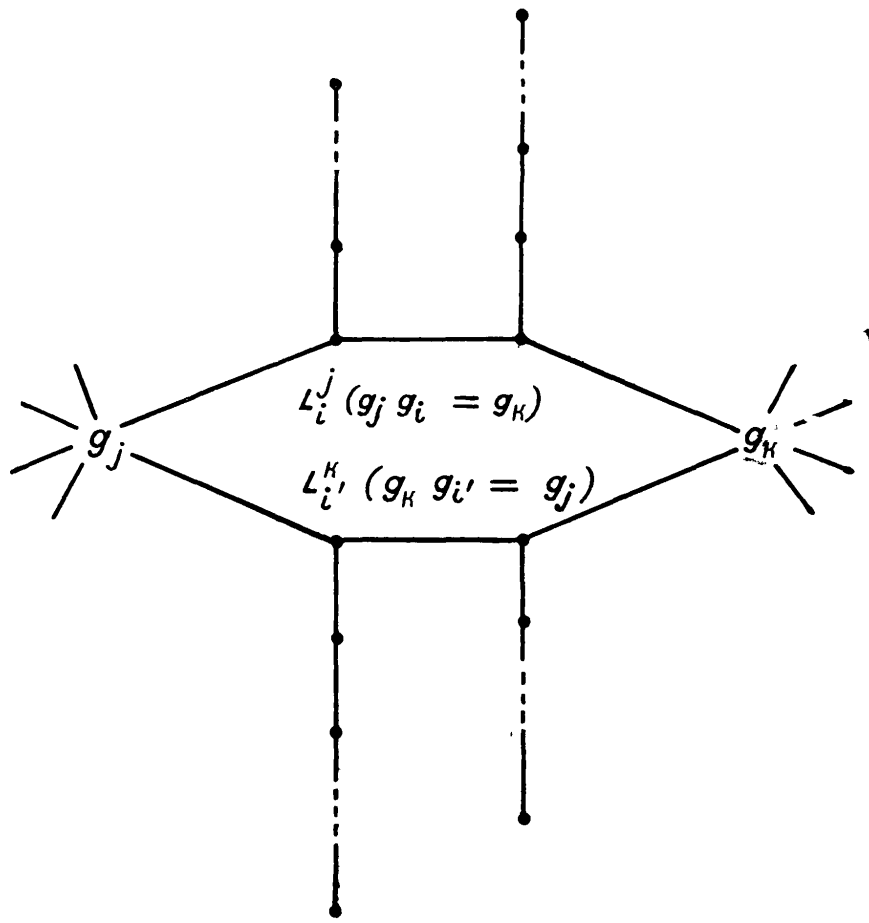


Рис. 143.

$\{L_i^j\}$, тоже будем называть вспомогательными. Структура графа L следующая: каждой упорядоченной паре $\overrightarrow{g_j g_k}$ различных групповых вершин отвечает в точности один вспомогательный подграф с началом g_j и концом g_k (рис. 143), именно тот L_i^j , у которого верхний индекс j служит номером элемента g_j , а нижний индекс i — номером элемента $g_i = g_j^{-1} g_k$ (однозначно определяемого из условия $g_j g_i = g_k$). Степень каждой групповой вершины L равна $2(N-1) \geq 4$ (ибо $N \geq 3$), степени же вспомогательных вершин не превышают 3. Ясно, что если две вспомогательные вершины x, y принадлежат одному и тому же вспомогательному подграфу, то кратчайшая цепь между x и y целиком лежит в этом подграфе и, значит, не содержит групповых вершин, а если x и y принадлежат разным вспомогательным подграфам, то всякая соединяющая их цепь содержит хотя бы одну групповую вершину.

Так как любой автоморфизм ψ графа L сохраняет степени вершин и переводит цепь, соединяющую x с y , в цепь, соединяющую $\psi(x)$ с $\psi(y)$, то при автоморфизме групповые вершины переходят в групповые, а вспомогательные — во вспомогательные, причем две вспомогательные вершины принадлежат одному и тому же вспомогательному подграфу в том и только том случае, когда их образы тоже входят в один вспомогательный подграф. Из структуры графа L и свойств его вспомогательных подграфов $\{L_i^j\}$ ясно, что каждый автоморфизм $\psi \in A(L)$ полностью определяется индуцируемой им подстановкой множества групповых вершин, причем автоморфизмы отвечают тем и только тем подстановкам, для которых выполнено следующее условие:

если $\psi(g_j) = g_k$ и $\psi(g_l) = g_t$, то вспомогательный подграф с началом g_j и концом g_l изоморфен вспомогательному подграфу с началом g_k и концом g_t .

Поэтому группа $A(L)$ изоморфна подгруппе тех подстановок группы $\mathfrak{S}(G)$, которые обладают указанным свойством, и остается лишь показать, что эта подгруппа изоморфна G .

Пусть автоморфизм $\psi \in A(L)$ индуцирует подстановку

$$\psi_G \doteq \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_N \\ g_{s_1} & g_{s_2} & \cdots & g_{s_N} \end{pmatrix}$$

множества групповых вершин графа L , или, что равносильно, элементов группы G . Условие, которому должна удовлетворять подстановка ψ_G , можно выразить в следующей форме: при любых j и k ($j, k = 1, 2, \dots, N; j \neq k$) вспомогательные графы L_i^j

и $L_i^{s_j}$, где i и i' определяются равенствами

$$g_j g_i = g_k, \quad g_{s_j} g_{i'} = g_{s_k}, \quad (*)$$

изоморфны друг другу. Но изоморфизм этих графов равносильен равенству $i = i'$, т. е. условию

$$g_j g_i = g_k \ \& \ g_{s_j} g_i = g_{s_k}. \quad (**)$$

Если g_s — такой элемент группы G , что $g_s g_j = g_{s_j}$ (т. е. $g_s = g_j^{-1} g_{s_j}$), то из (***) следует $g_s g_k = g_{s_k}$, причем g_s не зависит от k ; наоборот, существование элемента g_s , для которого $g_s g_k = g_{s_k}$ при любом $k = 1, 2, \dots, N$, влечет равенство $i = i'$ в (*): действительно, $g_{i'} = g_{s_j}^{-1} g_{s_k} = (g_s g_j)^{-1} (g_s g_k) = g_j^{-1} g_s^{-1} g_s g_k = g_j^{-1} g_k = g_i$.

Таким образом, подстановка из $\mathfrak{S}(G)$ определяет некоторый автоморфизм ψ графа G в том и только том случае, когда она имеет вид

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_N \\ g_s g_1 & g_s g_2 & \dots & g_s g_N \end{pmatrix}.$$

В силу известной теоремы Кэли (см., например, А. Г. Курош, Теория групп, М., ГТТИ, 1953, глава II), множество подстановок такого вида, где g_s пробегает всю группу G , само образует группу, изоморфную G . Теорема доказана.

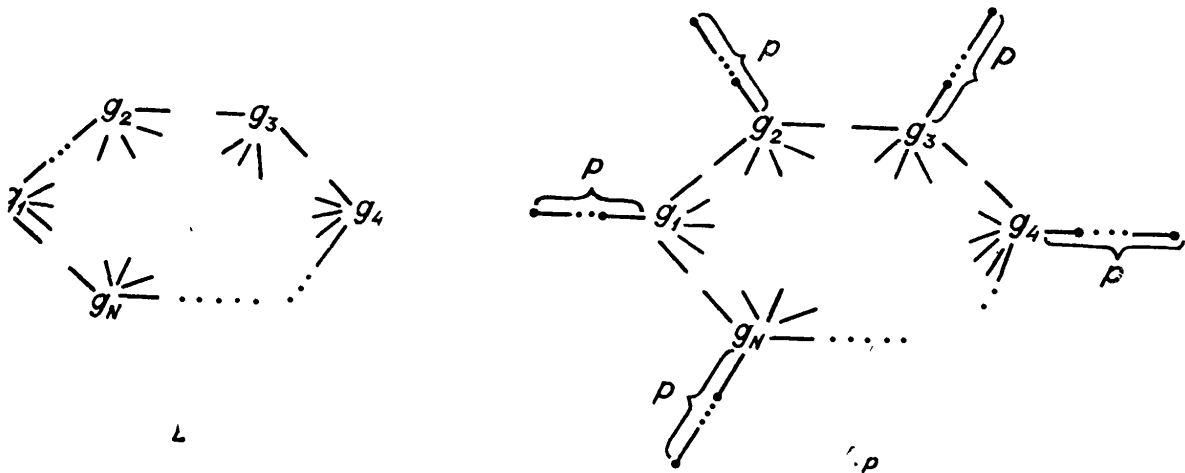


Рис. 144.

Существует бесконечно много неизоморфных графов с заданной группой автоморфизмов. Например, присоединяя к каждой групповой вершине только что построенного графа L простую цепь произвольной длины p , мы получим граф L_p (рис. 144), для которого группа $A(L_p)$ изоморфна $A(L)$. Можно было бы, наоборот, убрать из L некоторые вершины, соблюдая осторож-

ность, чтобы не появились новые автоморфизмы. Наконец, возможны и совершенно иные построения искомого графа L . При столь широких возможностях естественно возникают задачи нахождения графов, обладающих не только заданной (с точностью до изоморфизма) группой автоморфизмов, но и другими предписанными свойствами. Не останавливаясь подробно на этих вопросах, отметим следующее.

Построением графов с данной группой автоморфизмов и возможно меньшим количеством вершин занимался Г. Сабидусси (4/1959). Ему удалось доказать, что наименьшее количество $\alpha(G)$ вершин графа L , для которого $A(L)$ изоморфна заданной абстрактной группе G с p элементами и минимальным числом образующих q , удовлетворяет неравенству $\alpha(G) \leq p \cdot f(q)$, где $f(q) = O(\log q)$; при этом автор высказывает гипотезу о том, что функция $f(q)$ не может быть существенно улучшена, в частности, что она не может иметь порядок роста $O(\log \log q)$. Проблема точного нахождения $\alpha(G)$, решенная Г. Сабидусси для циклических групп G , в общем случае пока остается открытой. Р. Хэммингер (1966) исследует класс таких конечных групп G , для которых существует обыкновенный граф $L = (X, U)$ с $A(L)$ изоморфной G и с $|X| = |G|$, а для некоторых групп, не принадлежащих этому классу, дает их представление в виде групп автоморфизмов ориентированных графов. Задачами построения графов с заданной группой автоморфизмов, обладающих дополнительными свойствами такого рода как однородность, k -связность, наличие подграфов заданного вида, отсутствие неподвижных (относительно группы автоморфизмов) вершин, заданные хроматические свойства (см. дальнейшие параграфы) и др. посвящены работы Р. Фракта (2/1948, 3/1949, 4/1949, 5/1950, 6/1950), Г. Избицкого (1/1957, 2/1960), Г. Сабидусси (2/1957, 5/1959, 6/1960), Ф. Шерка (1962), Дж. Муна (1964) и других авторов. Исследования группы $A(L)$ для графов L специальных видов, в частности, графов, получающихся из графов с известными группами автоморфизмов при помощи некоторых операций, имеются у И. Каньо (1946), Г. Избицкого (3/1960), Ф. Харари (2/1959), Г. Сабидусси (3/1958, 6/1960, 8/1964). Чао Чонг-юн (1964) доказал, что не существует графа L с $n(L) > 2$, для которого группа $A(L)$ была бы транзитивной абелевой. Полный обзор всех графов с заданным множеством вершин, допускающих данный автоморфизм, сделал Э. Г. Давыдов (1/1965)*. Важная

*) Дальнейшие исследования того же автора см. в 2/1966.

проблема практически эффективного нахождения группы $A(L)$ по L решена пока только для некоторых весьма частных классов графов (например, для реберных остовов всех выпуклых и некоторых невыпуклых правильных многогранников). Связь группы автоморфизмов с операциями над графами и с задачами подсчета графов заданного вида будет изучаться во второй части книги.

В значительно большей мере, чем группа автоморфизмов, характеризует граф L полугруппа его эндоморфизмов. *Эндоморфизмом* графа называется его гомоморфизм в себя; к числу эндоморфизмов относятся, конечно, и все автоморфизмы. Каждый эндоморфизм графа $L = (X, U; P)$ можно представить как некоторое преобразование множества $X \cup U$ в себя, переводящее X в X и U в U и отличающееся от подстановки лишь тем, что образы различных вершин или различных ребер могут совпадать. Поэтому для эндоморфизмов одного и того же графа имеет смысл операция умножения, и относительно этой операции множество $E(L)$ всех эндоморфизмов графа L образует полугруппу с единицей $*$. Например, для графа L на рис. 145 полугруппа $E(L)$ содержит, кроме тождественного, также эндоморфизмы

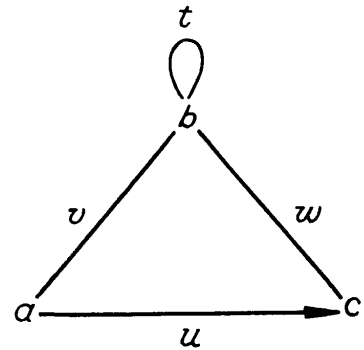


Рис. 145.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & u & v & w & t \\ a & b & b & v & v & t & t \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a & b & c & u & v & w & t \\ b & b & b & t & t & t & t \end{pmatrix}.$$

Мы ограничимся изучением эндоморфизмов графов Бержа $L = (X, \Gamma) = (X, U)$ (см. § 7 в главе 1); класс всех этих графов будем здесь обозначать через L . Напомним, как выглядят для графов Бержа основные понятия теории бинарных отношений.

Рефлексивность (наличие петли при каждой вершине):

$$\forall x \in X \quad (x \in \Gamma x).$$

Симметрия:

$$\forall x, y \in X \quad (y \in \Gamma x \Rightarrow x \in \Gamma y).$$

*) О полугруппах преобразований множеств в себя см., например, Е. С. Ляпин, Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.

Транзитивность (см. § 29 в главе 4):

$$\forall x, y, z \in X (y \in \Gamma x \ \& \ z \in \Gamma y \Rightarrow z \in \Gamma x).$$

Подклассы всех рефлексивных, всех симметричных и всех транзитивных графов Бержа будем обозначать соответственно через L^R , L^S и L^T . Напомним также, что вырожденный граф Бержа не имеет дуг, а пустой не имеет и петель и что в полном графе Бержа из каждой вершины в каждую другую идет дуга и при каждой вершине есть петля. Подклассы пустых, вырожденных и полных графов Бержа обозначаем соответственно через L^E , L^D и L^F . Наконец, как и в § 32 главы 4, высказывание $D_L(x, y)$, или просто $D(x, y)$, означает достижимость вершины y из x в графе L .

Всякий эндоморфизм ψ графа Бержа $L = (X, \Gamma)$ можно рассматривать как преобразование одного только множества вершин X в себя, обладающее свойством

$$\forall x, y \in X [y \in \Gamma x \Rightarrow \psi(y) \in \Gamma\psi(x)],$$

ибо преобразование ребер однозначно определяется таким преобразованием вершин. Следуя Л. М. Глускину (1961) и Б. В. Попову (2/1965, 3/1966), изучим взаимосвязь между графами Бержа и их полугруппами эндоморфизмов.

Т е о р е м а 3. *Подкласс всех тех графов $L = (X, U) \in L$, для которых полугруппа эндоморфизмов $E(L)$ совпадает с полугруппой $E(X)$ всех преобразований множества вершин*, есть $L^E \cup (L^D \cap L^R) \cup L^F$.*

Тот факт, что для любого $L \in L^E \cup (L^D \cap L^R) \cup L^F$ всегда $E(L) = E(X)$, очевиден. Наоборот, если для некоторого $L \in L$ обе полугруппы совпадают, то из наличия в L хотя бы одной петли следует его рефлексивность, а из наличия хотя бы одной дуги — наличие всех возможных дуг и петель. В самом деле, пусть две упорядоченные пары $\vec{x}y, \vec{z}t$ вершин графа L подчинены единственному условию, что если $x = y$, то $z = t$; тогда в $E(X)$ всегда найдется преобразование, переводящее x в z и y в t .

Эндоклассом мы назовем всякий подкласс $L^* \subseteq L$, обладающий свойством: для любых принадлежащих L^* графов $L = (X, \Gamma)$ и $L' = (X, \Gamma')$ с общим множеством вершин X из $E(L) = E(L')$ следует $L = L' \vee L^{-1} = L'$, где $L^{-1} \doteq (X, \Gamma^{-1})$ — граф

*) Речь идет не об изоморфизме, а именно о совпадении обеих полугрупп преобразований множества X .

Бержа, полученный из L переориентацией одновременно всех дуг. Например, L^E , L^D и L^F — эндоклассы; для L^E и L^F это тривиально, а для L^D следует из того, что полугруппа $E(L)$ эндоморфизмов вырожденного графа состоит из всех тех преобразований множества его вершин, которые подчинены единственному ограничению: вершина, инцидентная петле, не может отображаться в голую, — поэтому заданием $E(L)$ однозначно определяется, при каких именно вершинах L есть петли. Весь L не есть эндокласс, ибо если L и L' — графы с общим множеством вершин X , $|X| \geq 2$, такие что $L \in L^R \cap L^D$, $L' \in L^F$, то $E(L) = E(L')$, однако $L \neq L'$ и $L^{-1} \neq L'$. Работа Л. Б. Шнепермана (1962) содержит, помимо прочего, пример, показывающий, что $L \setminus (L^D \cup L^F)$ тоже не является эндоклассом. Нижеследующие леммы 1—4 и теорема 4 открывают нам ряд нетривиальных эндоклассов.

Рассмотрим подмножество $E_2(X) \subseteq E(X)$ всех таких преобразований f произвольного конечного множества X в себя, для которых $|f(X)| \leq 2^*$; эти преобразования будем записывать в виде подстановок

$$f = \begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix},$$

где $\{y, z\} \doteq f(X)$ (причем допускается возможность $y = z$), а $Y \doteq f^{-1}(y) \subseteq X$ и $Z \doteq f^{-1}(z) \subseteq X$ — полные прообразы вершин y и z (оба, очевидно, непустые). Если $y = z$, то $Y = Z = X$, а при $y \neq z$ имеем $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$. Для каждого $f = \begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix} \in E_2(X)$ определим преобразование $\bar{f} \doteq \begin{pmatrix} Y & Z \\ z & y \end{pmatrix} \in E_2(X)$ и положим

$$\vec{E}_2(L) \doteq \{f/f \in E_2(X) \cap E(L) \text{ \& } \bar{f} \notin E(L)\}.$$

Лемма 1. Пусть граф $L = (X, \Gamma) \in L^R$, $\vec{E}_2(L) \neq \emptyset$ и $f \doteq \begin{pmatrix} Y & Z \\ y_0 & z_0 \end{pmatrix} \in \vec{E}_2(L)$. Тогда имеет место одно из двух: либо

$$z_0 \in \Gamma y_0 \text{ \& } y_0 \notin \Gamma z_0, \quad (1)$$

либо

$$y_0 \in \Gamma z_0 \text{ \& } z_0 \notin \Gamma y_0. \quad (2)$$

*) Т. е. преобразований ранга ≤ 2 ; вообще рангом преобразования $f \in E(X)$ называется число $|f(X)|$ элементов образа $f(X)$.

При этом в случае (1) у графа L есть хотя бы одна дуга, идущая из Y в Z , но нет дуг, идущих из Z в Y , и справедливо

$$\forall y, z \in X \left[z \in \Gamma y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix} \in E(L) \right]. \quad (3)$$

Аналогично в случае (2) у L имеется дуга, идущая из Z в Y , но нет дуг из Y в Z и справедливо

$$\forall y, z \in X \left[y \in \Gamma z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix} \in E(L) \right]. \quad (4)$$

Доказательство. При условиях леммы случаи $z_0 \in \Gamma y_0$ & $y_0 \in \Gamma z_0$ и $z_0 \notin \Gamma y_0$ & $y_0 \notin \Gamma z_0$ (в частности, $y_0 = z_0$) невозможны, ибо в каждом из них, ввиду рефлексивности графа, $f \in E(L)$ влечет $\bar{f} \in E(L)$. Поэтому остаются только (1) и (2).

Если выполнено (1), то

$$z \in \Gamma y \Rightarrow \begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix} \in E(L)$$

при любых $y, z \in X$ (в том числе и при $y = z$, благодаря рефлексивности L). В свою очередь, из условия $\begin{pmatrix} Y & Z \\ z_0 & y_0 \end{pmatrix} \notin E(L)$ вытекает наличие в L дуги, идущей из Y в Z (иначе опять $f \in E(L)$ влекло бы $\bar{f} \in E(L)$, поэтому

$$\begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix} \in E(L) \Rightarrow Z \in \Gamma y.$$

Наконец, дуг, идущих из Z в Y , нет, так как в противном случае $f \in E(L)$ влекло бы $y_0 \in \Gamma z_0$, вопреки (1). Меняя ролями множества Y и Z , докажем аналогично, что в случае (2) имеет место (4) и есть дуга, идущая из Z в Y , но нет дуг из Y в Z .

Положим

$$L^{\vec{E}_2} \doteq \{L/L \in L \text{ \& } \vec{E}_2(L) \neq \emptyset\}.$$

Критерий принадлежности рефлексивного графа Бержа классу $L^{\vec{E}_2}$ в терминах структуры самого графа выражает

Л е м м а 2. Граф $L = (X, \Gamma) \in L^R$ входит в класс $L^{\vec{E}_2}$ тогда и только тогда, когда L содержит дугу, не принадлежащую никакому орциклу.

Доказательство. Пусть сначала $\overrightarrow{y_0 z_0}$ — дуга L , через которую не проходит ни один орцикл; тогда вершина y_0 недостижима из z_0 , т. е. высказывание $D_L(z_0, y_0)$ ложно. Положим

$$Y \doteq \{x/x \in X \& D_L(x, y_0)\}, \quad Z \doteq X \setminus Y$$

и

$$f \doteq \begin{pmatrix} Y & Z \\ y_0 & z_0 \end{pmatrix}.$$

Так как $y_0 \in Y$ и $z_0 \in Z$, то множества Y и Z оба непусты и $f \in E_2(X)$. Из определения Y и Z непосредственно следует, что ни одна дуга графа L не может идти из Z в Y ; отсюда получаем $\bar{f} \notin E(L)$, а учитывая $L \in L^R$, также $f \in E(L)$. Следовательно, $f \in \vec{E}_2(L)$, т. е. $\vec{E}_2(L) \neq \emptyset$.

Наоборот, пусть $\vec{E}_2(L) \neq \emptyset$ и $f = \begin{pmatrix} Y & Z \\ y_0 & z_0 \end{pmatrix} \in \vec{E}_2(L)$. Согласно лемме 1, справедливо одно и только одно из высказываний (1), (2) в ее формулировке. Если имеет место (1), то, по лемме 1, в графе L из Y в Z идет некоторая дуга u , но из Z в Y нет ни одной дуги, поэтому u не может принадлежать никакому орциклу в L . Аналогично при выполнении (2) искомой дугой будет любая, идущая из Z в Y .

Следствие. $(L^R \cap L^T) \setminus L^S \subseteq L^R \cap L^{\vec{E}_2}$. В самом деле, пусть $L = (X, U) \in (L^R \cap L^T) \setminus L^S$. Так как $L \notin L^S$, то у графа L есть такая дуга $\overrightarrow{xy} \in U$, что $\overrightarrow{yx} \notin U$. Далее ввиду $L \in L^T$ дуга \overrightarrow{xy} не может принадлежать ни одному орциклу, иначе было бы $\overrightarrow{yx} \in U$. В силу леммы 2 и ввиду $L \in L^R$ имеем $L \in L^R \cap L^{\vec{E}_2}$. Следовательно, $(L^R \cap L^T) \setminus L^S \subseteq L^R \cap L^{\vec{E}_2}$. Поскольку граф, показанный на рис. 146, принадлежит $L^R \cap L^{\vec{E}_2}$, но не принадлежит L^T и, тем более, $(L^R \cap L^T) \setminus L^S$, то

$$(L^R \cap L^T) \setminus L^S \neq L^R \cap L^{\vec{E}_2}.$$

Лемма 3. Пусть $L = (X, \Gamma)$ и $L' = (X, \Gamma')$ — два графа из L^R , с общим множеством вершин, причем известно, что $L \in L^{\vec{E}_2}$. Тогда

$$E(L) = E(L') \Leftrightarrow (L = L' \vee L^{-1} = L').$$

Доказательство. То, что любое из равенств $L = L'$ и $L^{-1} = L'$ влечет $E(L) = E(L')$, тривиально. Пусть, наоборот, $E(L) = E(L')$, где L и L' — графы, удовлетворяющие условию

леммы, и пусть $f = \begin{pmatrix} Y & Z \\ y_0 & z_0 \end{pmatrix} \in E_2(L)$; тогда, очевидно, также $f \in \vec{E}_2(L')$.

Согласно лемме 1, для каждого из графов L, L' имеет место либо (1) (значит, и (3)), либо (2) (значит, и (4)) в ее формулировке, т. е. по отношению к паре L, L' могут представиться четыре случая. Все эти случаи аналогичны, и мы рассмотрим один из них, например тот, когда для L справедливо (2), а для L' — (1); используя тогда утверждение (4) для графа L и утверждение (3) для L' , получаем при любых $y, z \in X$:



Рис. 146.

$$y \in \Gamma z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y & Z \\ y & z \end{pmatrix} \in E(L) = E(L') \Leftrightarrow z \in \Gamma' y,$$

т. е. $L^{-1} = L'$. Вообще к равенству $L = L'$ приходим тогда, когда для L и L' в лемме 1 имеют место одинаковые случаи, а равенство $L^{-1} = L'$ соответствует разным случаям.

З а м е ч а н и е. Вместо $L' \in L^R$ можно предполагать $L' \notin L^E$, ибо из $L \in L^R \& L' \notin L^E \& E(L) = E(L')$ уже следует $L' \in L^R$. В самом деле, благодаря $L' \notin L^E$ граф L' содержит хотя бы одну такую пару вершин x_0, y_0 (возможно и совпадающих), что $y_0 \in \Gamma' x_0$. Так как $L \in L^R$, то все преобразования $f \in E(X)$ ранга 1 (для которых $|f(X)| = 1$) принадлежат $E(L)$, значит, и $E(L')$. Но такого рода преобразованием всегда можно перевести сразу все вершины X , в том числе x_0 и y_0 , в любую наперед заданную вершину $z \in X$; следовательно, $\forall z \in X (z \in \Gamma' z)$, т. е. $L' \in L^R$.

С л е д с т в и е. $L^R \cap L^E$ и $(L^R \cap L^T) \setminus L^S$ — эндоклассы. Первое утверждение получается из леммы 3 непосредственно, второе — с использованием следствия леммы 2 и с учетом очевидного факта, что любой подкласс эндокласс есть эндокласс.

Л е м м а 4. Пусть $L = (X, U) \in (L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F$ и $L' = (X, U') \in L^R \setminus L^F$ — два графа с общим множеством вершин. Тогда

$$E(L) = E(L') \Leftrightarrow L = L'.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация справа налево тривиальна. Пусть теперь выполнены условия леммы и $E(L) = E(L')$; покажем, что $U = U'$.

Если $L \in L^D$, то $L \in L^R \cap L^D$ и по теореме 3 имеем $E(L) = E(X)$, т. е. $E(L') = E(X)$, откуда в силу той же теоремы и в силу $L' \in L^R \setminus L^F$ получаем $L' \in L^R \cap L^D$. Но $L^R \cap L^D$ — эндокласс,

поэтому $L = L' \vee L^{-1} = L'$, причем $L^{-1} = L$, и лемма в этом случае доказана.

Пусть теперь $L \notin L^D$. Тогда в L имеется дуга $\overrightarrow{x_0 y_0}$. Так как $L \in L^R \cap L^S \cap L^T$, то каждая компонента связности графа L представляет собой полный граф, а ввиду $L \notin L^F$ число компонент $\kappa(L) \geq 2$. Отсюда ясно, что преобразование $f \in E(X)$ принадлежит $E(L)$ в том и только том случае, когда оно не переводит никакие две вершины одной компоненты в вершины разных компонент, и что обе вершины x_0, y_0 находятся в одной компоненте.

Если бы имелась дуга $\overrightarrow{x_1 y_1} \in U \setminus U'$, то преобразование $f_1 \in E_2(X)$, такое что $f_1(X) = \{x_0, y_0\}$, $f_1(x_1) = x_0$ и $f_1(y_1) = y_0$, принадлежало бы $E(L)$, но не принадлежало $E(L')$, что невозможно. Поэтому $U \subseteq U'$. Осталось доказать $U' \subseteq U$.

Допустим противное, что есть дуга $\overrightarrow{x_2 y_2} \in U' \setminus U$, и обозначим через $L_1 \doteq (X_1, U_1)$, $L_2 \doteq (X_2, U_2)$ компоненты графа L , содержащие соответственно вершину x_2 и вершину y_2 ; так как $L_1, L_2 \in L^F$, то $L_1 \neq L_2$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\overrightarrow{y_2 x_2} \notin U'$; тогда, ввиду $L' \in L^R$, преобразование $\begin{pmatrix} X_1 & X \setminus X_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ принадлежит $E(L)$, но не принадлежит $E(L')$, что невозможно.

Случай 2: $\overrightarrow{y_2 x_2} \in U'$; тогда преобразование $f_2 \in E_2(X)$, такое что $f_2(X) = \{x_2, y_2\}$, $f_2(x_0) = x_2$ и $f_2(y_0) = y_2$, принадлежит $E(L')$, но не принадлежит $E(L)$, а это опять невозможно.

Итак, $U' \subseteq U$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если известно, что $L' \notin L^E$, то можно не предполагать $L' \in L^R \setminus L^F$. В самом деле, из $L \in L^R \& L' \notin L^E \& E(L) = E(L')$ вытекает $L' \in L^R$ (см. замечание к лемме 3); кроме того, $L' \notin L^F$, ибо в противном случае по теореме 3 было бы $E(L') = E(X)$, в то время как $E(L) \neq E(X)$, что невозможно.

С л е д с т в и е. $(L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F$ есть эндокласс.

Из лемм 2, 3 и 4 вытекает

Т е о р е м а 4 (Попова). $L^R \cap \{(L^S \cap L^T) \setminus L^F\} \cup L^{\vec{E}_2}$ есть эндокласс.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, $L^R \cap \{(L^S \cap L^T) \setminus L^F\} \cup L^{\vec{E}_2} = [(L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F] \cup (L^R \cap L^{\vec{E}})$. Вообще объединение эндоклассов не обязательно является эндоклассом (как показывает хотя бы пример класса $L^E \cup L^F$), однако в данном конкретном случае получается эндокласс; чтобы это установить, надо опираться на полные формулировки лемм, а не только на

их следствия. Именно, пусть $E(L) = E(L')$; если $L \in L^R \cap L^{\vec{E}_2}$ и $L' \in L^R$, то из леммы 3 уже автоматически следует $L' \in L^R \cap L^{\vec{E}_2}$; если же $L \in (L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F$ и $L' \in L^R$, то $L' \notin L^F$ (ибо $L^F \cap L^{\vec{E}_2} = \emptyset$ в силу леммы 2, так что ни один из двух объединяемых эндоклассов не содержит полных графов), и из $E(L) = E(L')$ по лемме 4 выводим $L' \in (L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F$. Таким образом, графы L и L' , принадлежащие рассматриваемому объединению и удовлетворяющие условию $E(L) = E(L')$, необходимо входят в один и тот же из двух исходных эндоклассов, поэтому $L = L' \vee L^{-1} = L'$.

С л е д с т в и е. $(L^R \cap L^T) \setminus [L^E \cup (L^R \cap L^D) \cup L^F]$ *есть эндокласс.*

В самом деле,

$$\begin{aligned} & (L^R \cap L^T) \setminus [L^E \cup (L^R \cap L^D) \cup L^F] = \\ & = L^R \cap \{L^T \setminus [L^E \cup (L^R \cap L^D) \cup L^F]\} = L^R \cap [L^T \setminus (L^D \cup L^F)] = \\ & = L^R \cap \{[(L^T \cap L^S) \setminus (L^D \cup L^F)] \cup [(L^T \cap (L \setminus L^S)) \setminus (L^D \cup L^F)]\} = \\ & = L^R \cap \{[(L^T \cap L^S) \setminus (L^D \cup L^F)] \cup [L^T \cap (L \setminus L^S)]\} \subseteq \\ & \subseteq L^R \cap \{[(L^T \cap L^S) \setminus L^F] \cup [L^T \setminus L^S]\} = \\ & = [(L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F] \cup [(L^R \cap L^T) \setminus L^S] \subseteq \\ & \subseteq [(L^R \cap L^S \cap L^T) \setminus L^F] \cup (L^R \cap L^{\vec{E}_2}), \end{aligned}$$

поскольку $(L^R \cap L^T) \setminus L^S \subseteq L^R \cap L^{\vec{E}_2}$ в силу следствия из леммы 2.

Этот результат первоначально был установлен другим способом в упомянутой выше работе Л. М. Глушкина. Основной итог этой работы представляет следующая очень важная

Т е о р е м а 5 (Глушкина). *Пусть L^* — такой эндокласс, что $L^* \subseteq L^R$, а $L = (X, \Gamma)$ и $L' = (X', \Gamma')$ — два графа из L^* . Тогда*

(1) *полугруппы $E(L)$ и $E(L')$ изоморфны в том и только том случае, если граф L или граф L^{-1} изоморфен L' ;*

(2) *всякий изоморфизм Ω полугруппы $E(L)$ на $E(L')$ имеет вид*

$$\Omega(\psi) = \omega^{-1} \cdot \psi \cdot \omega$$

($\psi \in E(L)$), где ω — изоморфизм графа L или, соответственно, графа L^{-1} на L' .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение, что если L или L^{-1} изоморфен L' , то $E(L)$ изоморфна $E(L')$, тривиально. Нам надо доказать вторую часть (1), а также (2).

Пусть Ω — произвольный изоморфизм полугруппы $E(L)$ на $E(L')$. Для каждой $x \in X$ определим преобразование ψ_x (ранга 1), переводящее X в $\{x\}$; вследствие $L \in L^R$ множество

$$E_1 \doteq \{\psi_x / x \in X\}$$

образует в $E(L)$ подполугруппу, причем все элементы E_1 и только они обладают свойством

$$\forall \psi \in E(L) (\psi \cdot \psi_x = \psi_x).$$

Поэтому изоморфизм Ω отображает E_1 на подполугруппу E_1' полугруппы $E(L')$, определяемую аналогично E_1 :

$$E_1' \doteq \{\psi_{x'} / x' \in X'\},$$

где $\psi_{x'}$ — преобразование, переводящее X' в $\{x'\}$. С помощью Ω определим взаимно однозначное отображение ω множества X на X' :

$$x' = \omega(x) \Leftrightarrow \psi_{x'} = \Omega(\psi_x).$$

Из определения ω сразу следует, что

$$\forall z \in X \{\omega^{-1}([\Omega(\psi)](\omega(z))) = \psi(z)\} \quad (*)$$

в частном случае, если после выбора z положить $\psi \doteq \psi_z$; докажем, однако, что $(*)$ справедливо и при любом $\psi \in E(L)$. Действительно, каково бы ни было $z \in X$,

$$\begin{aligned} [\Omega(\psi)](\omega(z)) &= [\Omega(\psi)](\psi'_{\omega(z)}(\omega(z))) = \\ &= [\Omega(\psi)]([\Omega(\psi_z)](\omega(z))) = [\Omega(\psi_z) \cdot \Omega(\psi)](\omega(z)) = \\ &= [\Omega(\psi_z \cdot \psi)](\omega(z)) = [\Omega(\psi_{\psi(z)})](\omega(z)) = \\ &= \psi'_{\omega(\psi(z))}(\omega(z)) = \omega(\psi(z)) \end{aligned}$$

и

$$\omega^{-1}([\Omega(\psi)](\omega(z))) = [\omega \cdot \omega^{-1}](\psi(z)) = \psi(z).$$

Рассмотрим вспомогательный граф $L_1 \doteq (X, \Gamma_1)$, изоморфный L' , с тем же множеством вершин, что и у L , и с отображением Γ_1 , определяемым следующим образом:

$$\forall x, y \in X [y \in \Gamma_1 x \Leftrightarrow \omega(y) \in \Gamma' \omega(x)].$$

Имеем $E(L) = E(L_1)$. В самом деле, ввиду $(*)$, для любого

преобразования $\psi \in E(X)$:

$$\begin{aligned} \psi \in E(L) &\Leftrightarrow \Omega(\psi) \in E(L') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x', y' \in X' \{y' \in \Gamma' x' \Rightarrow [\Omega(\psi)](y') \in \Gamma' [\Omega(\psi)](x')\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X \{\omega(y) \in \Gamma' \omega(x) \Rightarrow [\Omega(\psi)](\omega(y)) \in \Gamma' [\Omega(\psi)](\omega(x))\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X \{y \in \Gamma_1(x) \Rightarrow \omega^{-1}([\Omega(\psi)](\omega(y))) \in \Gamma_1 \omega^{-1}([\Omega(\psi)](\omega(x)))\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X \{y \in \Gamma_1(x) \Rightarrow \psi(y) \in \Gamma_1 \psi(x)\} \Leftrightarrow \psi \in E(L_1). \end{aligned}$$

Так как L_1 изоморфен L' , то $L_1 \in L^*$, и из определения эндокласса вытекает $L = L_1 \vee L^{-1} = L_1$, т. е. хотя бы один из графов L, L^{-1} изоморфен L' . Утверждение (1) доказано.

Осталось выяснить вид произвольного изоморфизма полугруппы $E(L)$ на $E(L')$. Равенство (*) можно переписать так:

$$\forall z \in X \{[\omega \cdot \Omega(\psi) \cdot \omega^{-1}](z) = \psi(z)\};$$

отсюда

$$\omega \cdot \Omega(\psi) \cdot \omega^{-1} = \psi,$$

т. е.

$$\Omega(\psi) = \omega^{-1} \cdot \psi \cdot \omega$$

при любом $\psi \in E(L)$, причем, как следует из определения графа L_1 , отображение ω есть изоморфизм L_1 на L' , т. е. изоморфизм графа L или графа L^{-1} на L' . Таким образом, утверждение (2) тоже доказано.

Л. М. Глускиным наряду с теоремой 5 было получено следующее ее обобщение. Пусть $E^\mu(L)$ означает подполугруппу полугруппы $E(L)$, состоящую из всех эндоморфизмов ранга не выше μ . Тогда теорема останется в силе, если заменить в ее формулировке $E(L)$ на $E^\mu(L)$, а $E(L')$ — на $E^{\mu'}(L')$, где предполагается $\mu \geq 3$; при этом из изоморфизма полугрупп $E^\mu(L)$ и $E^{\mu'}(L')$ уже автоматически следует $\mu' = \mu$.

Теорема Глускина открывает возможность для достаточно широкого класса графов Бержа L (т. е. бинарных отношений) изучать их структурные свойства по свойствам полугрупп $E(L)$, рассматриваемых как абстрактные, т. е. с точностью до изоморфизма. Подробное исследование в этом направлении проведено Л. Б. Шнеперманом (1962).

Читатель, вероятно, уже заметил, что при доказательстве теоремы 5, а также предшествующих ей теорем и лемм решающую роль играют преобразования ранга ≤ 2 . Именно это обстоятельство побудило Б. В. Попова (4/1966) заняться изуче-

нием «разрешающей способности» полугруппы $E^2(L)$ и выявлением тех свойств графа, которые определяются ее структурой.

Так как никакая из полугрупп $E(L)$, $E^v(L)$ не обладает идеальной «разрешающей способностью», т. е. никакой эндокласс не исчерпывает класса L всех графов Бержа, то для нахождения алгебраической системы, равноценной классу L по богатству информации о графах, можно двигаться, например, в следующих направлениях.

I. *Вместо эндоморфизмов рассматривать другие близкие к ним преобразования графов.* На этом пути решающий результат получен Л. М. Поповой (2/1963). Именно, будем рассматривать *частичные эндоморфизмы*, отличающиеся от обычных тем, что можно еще выбрасывать вершины (вместе с инцидентными ребрами). Пусть $E_v^\mu(L)$ — множество тех частичных эндоморфизмов f графа $L = (X, \Gamma) \in L$, для которых число неудаляемых вершин графа (т. е. элементов подмножества $Y \subseteq X$, где определено f) не превосходит v , а ранг (число элементов $|f(Y)|$ образа подмножества Y) не больше μ ; очевидно, $E_v^\mu(L)$ — полугруппа. Тогда утверждение о том, что изоморфизм полугрупп $E_v^\mu(L)$ и $E_{v'}^{\mu'}(L')$ влечет $\mu = \mu'$, $v = v'$ и изоморфизм графов L и L' или графов L^- и L'^- доказывается в предположении лишь $L \in L^R \setminus (L^D \cup L^F)$, $L' \in L$. Доказательство этого, а также утверждения, аналогичного (2) в теореме 5, проводится по той же схеме. Дальнейшие обобщения этого результата имеются у А. М. Калмановича (1965), а изучению свойств графов по свойствам полугрупп их частичных эндоморфизмов посвящена работа Л. М. Поповой (1/1962).

II. *Каждому графу L отнести некоторый объемлющий его граф L'* (см. конец § 1 в главе 1) *по такому закону, чтобы для любого $L \in L$ соответствующий L' принадлежал фиксированному эндоклассу и чтобы изоморфизм L'_1 и L'_2 влек изоморфизм L_1 и L_2 .* Эту идею в настоящее время разрабатывает Б. В. Попов.

III. *Изучать графы не с точностью до изоморфизма и перориентации всех дуг, а с точностью до некоторых преобразований более широкого класса.* К указанному направлению относится работа Б. В. Попова (1/1965), где изучаются изотопизмы, в частности эндотопизмы, μ -арных отношений. В случае $\mu = 2$, т. е. для графов Бержа, *изотопизмом* называется пара $\vec{f}_1 \vec{f}_2$ взаимно однозначных отображений множества X вершин графа $L = (X, \Gamma)$ на множество X' вершин графа $L' = (X', \Gamma')$, обладающее свойством: $\forall x, y \in X [y \in \Gamma x \Leftrightarrow f_2(y) \in \Gamma' f_1(x)]$.

Грубо говоря, изотопизм преобразует начала и концы дуг по отдельности. Отношение изотопизма графов есть эквивалентность. Множество $G(L)$ эндотопизмов графа L , т. е. всех его изотопизмов в себя, является полугруппой, структура которой характеризует граф с точностью до изотопизма, т. е. оказывается, что изоморфизм полугрупп $G(L)$ и $G(L')$ равносильен изотопизму соответствующих графов L и L' . С этой же точки зрения А. М. Калманович (1965) изучает другое отношение эквивалентности, так называемую сопряженность графов, причем в качестве полугруппы, характеризующей граф с точностью до сопряженности, выступает прежняя полугруппа эндоморфизмов.

Разумеется, представляют интерес и такие работы, в которых не ставится задача построения достаточно хорошей алгебраической системы, адекватно характеризующей граф, а просто изучаются системы, какие они есть, тех или иных классов преобразований графа. Так, Г. Сабидусси (1/1954) установил, что изоморфизмы графа L без петель в другой граф L' , переводящие L в подграфы L' , составляют алгебраическую систему, известную под названием группоида Леви. А. Адам, К. Чулик и Д. Поллак (1963) называют *сильным* такой гомоморфизм ψ графа Бержа $L = (X, \Gamma)$ без петель на граф $L' = (X', \Gamma')$ того же класса, что для любых $x, y \in X$:

$$y \in \Gamma x \ \& \ x \in \Gamma y \Rightarrow \psi(x) = \psi(y),$$

$$y \in \Gamma x \ \& \ x \notin \Gamma y \Rightarrow \psi(y) \in \Gamma' \psi(x) \ \& \ \psi(x) \notin \Gamma' \psi(y),$$

$$y \notin \Gamma x \ \& \ x \notin \Gamma y \Rightarrow \psi(y) \notin \Gamma' \psi(x) \ \& \ \psi(x) \notin \Gamma' \psi(y).$$

Как показано в работе, граф L допускает такой гомоморфизм в том и только том случае, если для любой тройки $x, y, z \in X$ попарно различных вершин выполнено условие

$$(y \in \Gamma x \ \& \ z \in \Gamma x \Rightarrow z \in \Gamma y) \ \& \ (y \in \Gamma x \ \& \ x \in \Gamma z \Rightarrow y \in \Gamma z)$$

В заключение отметим результат З. Гедрлина и А. Пультра (1/1964), аналогичный теореме Фракта и состоящий в следующем: для любой полугруппы S с единицей и конечным множеством образующих существует такой граф L (и даже бесконечное множество неизоморфных графов), что полугруппа эндоморфизмов $E(L)$ изоморфна S . Эти же авторы доказали (2/1966), что обыкновенные n -вершинные графы ($n \geq 2$), допускающие лишь тождественный эндоморфизм, существуют тогда и только тогда, когда $n > 7$.

§ 40. Частичные гомоморфизмы

Важную роль в теории графов играют некоторые обобщения гомоморфных отображений, которые мы будем называть *частичными гомоморфизмами*, не пытаясь дать самое общее определение этого понятия.

К *первому типу* отнесем отображения, отличающиеся от гомоморфизмов лишь тем, что не все вершины и не все ребра обязательно имеют образы. Таковы, например, операции образования любой части данного графа (выбрасывание некоторых ребер и некоторых вершин вместе с инцидентными им ребрами), с возможным последующим добавлением новых элементов (в случае отображения в граф, а не на граф), операция образования скелета данного графа (см. § 5 в главе 1), частичные эндоморфизмы (см. пункт I в конце § 39) и др. Особый интерес представляют следующие два частичных гомоморфизма указанного типа.

I. *Раскраской вершин* графа L называется такой частичный гомоморфизм первого типа, который отображает L в полный обыкновенный граф F и при котором каждое ребро имеет образ, если только обе инцидентные ему вершины обладают образами. Наглядное истолкование отображения состоит в следующем: граф F — это палитра, в вершинах которой находятся различные краски; некоторые вершины L окрашиваются, притом с соблюдением условия, чтобы никакие две смежные вершины не оказались окрашенными в один и тот же цвет. В число неокрашенных (т. е. не имеющих образа) вершин, очевидно, попадут все те, при которых есть петли. Другое представление раскраски вершин заключается в том, что вершине x графа $L = (X, U; P)$ относится целое неотрицательное число $g(x)$ с соблюдением условия

$$\forall x, y \in X [J(x, y) \Rightarrow g(x) \neq g(y) \vee g(x) = 0 \vee g(y) = 0];*$$

при этом равенство $g(x) = 0$ означает, что вершина x не окрашена, а при $g(x) = i > 0$ число i можно рассматривать как номер той вершины графа F , в которую отображена x . Наконец, раскраска вершин равносильна выделению в L некоторой системы попарно непересекающихся пустых подграфов, поскольку в силу замечания, сделанного в начале § 39, прообраз каждой вершины графа F есть пустой подграф в L . В дальнейшем мы будем поль-

*) Напомним, что предикат J означает отношение смежности вершин в графе L (см. § 1 в главе 1).

зоваться всеми тремя представлениями и соответствующей терминологией.

Если раскраска вершин графа L является отображением на F (т. е. использованы все краски палитры F), то имеем *раскраску $n(F)$ цветами*. Раскраска вершин графа L называется *полной*, если окрашены все те вершины L , при которых нет петель. Наименьшее количество цветов, достаточное для полной раскраски вершин графа L , называется его *хроматическим числом* и обозначается через $\gamma(L)$. Например, если L — бихроматический граф (см. § 6 в главе 1), то $\gamma(L) \leq 2$, причем $\gamma(L) = 2$ в случае непустоты и $\gamma(L) = 1$ в случае пустоты L .

Заметим, что всевозможные раскраски вершин произвольного графа $L = (X, U; P)$ находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными раскрасками вершин скелета \hat{L}' того подграфа L' , который получается из L удалением всех вершин, имеющих петли; в частности, $\gamma(L) = \gamma(\hat{L}')$. Следовательно, мы имеем возможность при изучении раскрасок вершин ограничиваться, когда это удобно, только обыкновенными графами; в таких случаях не будем каждый раз напоминать о том, что подобное ограничение не нарушает общности вопроса.

Очевидно, имеет место

Т е о р е м а 1. Если L_1, L_2, \dots, L_x — компоненты связности графа L , то

$$\gamma(L) = \max \{ \gamma(L_1), \gamma(L_2), \dots, \gamma(L_x) \}.$$

II. *Стягиванием ребер* графа L называется частичный гомоморфизм ψ первого типа, при котором все подграфы, порожденные полными прообразами $\psi^{-1}(x')$ вершин x' графа-образа $\psi(L)$, связны. Название обусловлено тем, что из L всегда можно получить граф, изоморфный $\psi(L)$, с помощью последовательных отождествлений некоторых пар смежных вершин (и, если нужно, выбрасываний некоторых ребер и вершин). Отображение графа L в (на) L' посредством стягивания ребер мы будем кратко называть *стягиванием графа L в (на) граф L'* .

При стягивании L на полный обыкновенный граф F (именно «на», а не «в») полные прообразы двух различных вершин F необходимо соединены в L хотя бы одним ребром. Наибольшее натуральное число k , такое что граф L можно стянуть на полный k -вершинный обыкновенный граф F_k , называется *числом Хадвигера* графа L и обозначается через $\eta(L)$. Например, это число равно 1 для вырожденных графов, равно 2 для деревьев с $n > 1$, равно 3 для простых циклов длины ≥ 3 . Так как все-

гда $\eta(L) = \eta(\hat{L})$, то мы опять можем ограничиться рассмотрением обыкновенных графов.

Справедлива очевидная

Т е о р е м а 2. Если L_1, L_2, \dots, L_x — компоненты графа L , то

$$\eta(L) = \max \{ \eta(L_1), \eta(L_2), \dots, \eta(L_x) \}.$$

Исследованию числа Хадвигера и близких к нему характеристик (например, связанных со стягиванием графа на «почти полный», который получается из F_k удалением одного ребра) посвящены работы Г. Дирака (10/1961), К. Вагнера (7/1960, 8/1964) и др. Особенно интересна проблема взаимосвязи чисел $\gamma(L)$ и $\eta(L)$. Г. Хадвигер (1958) выдвинул гипотезу

$$\forall L [\eta(L) \geq \gamma(L)],$$

т. е. что при любом $k \geq 1$ истинно высказывание \mathfrak{S}_k , где

$$\mathfrak{S}_k \Leftrightarrow \forall L [\gamma(L) \geq k \Rightarrow \eta(L) \geq k],$$

квантор общности распространяется на всевозможные графы (конечные) или, что не меняет дела, только на все обыкновенные графы. Вопрос о справедливости этой гипотезы пока остается открытым, удалось получить лишь ряд более слабых утверждений*; некоторые исследования, не требующие применения специальных методов, мы осветим здесь, часть упомянем в главе 6 (см. § 48), а некоторые более сложные отнесем во вторую часть книги. Нам понадобится следующая

Л е м м а. Если $L = (X, U; P)$ — произвольный граф, а L^+ — надграф, полученный добавлением к L новой вершины x_0 и соединением ее новыми ребрами со всеми вершинами L , то

$$\gamma(L^+) = \gamma(L) + 1 \text{ и } \eta(L^+) = \eta(L) + 1.$$

Первое равенство очевидно, ибо раскрасив вершины L наименьшим числом γ цветов, мы не только можем, но и обязаны придать вершине x_0 новый, $(\gamma + 1)$ -й цвет. Очевидно также, что $\eta(L^+) \geq \eta(L) + 1$, поскольку стягивание подграфа L графа L^+ на полный граф $F_{\eta(L)}$, не содержащий x_0 , будучи естественно продолжено на весь L^+ (так, чтобы x_0 перешла в себя), превратит L^+ в полный граф $F_{\eta(L)+1}$. Для доказательства обратного неравенства допустим, что некоторая операция стягивания ψ

*) Например, К. Чулик (3/1959) доказал гипотезу для обыкновенных графов, обладающих тем свойством, что добавление любого ребра (без добавления вершин) увеличивает хроматическое число. Некоторые частные результаты имеются также у Г. Дирака (1/1952, 5/1957).

отображает L^+ на $F_{\eta(L)+1}$, и пусть $Y \subseteq X \subset X \cup \{x_0\}$ — множество тех вершин графа L^+ , образы которых отличны от $\psi(x_0)$. Тогда $x_0 \notin Y$, и подграф графа L^+ , порожденный подмножеством вершин Y , т. е. целиком принадлежащий L , стягивается отображением ψ на тот полный граф $F_{\eta(L^+)-1}$, который получается из $F_{\eta(L^+)}$ удалением вершины $\psi(x_0)$. Следовательно, $\eta(L) \geq \eta(L^+) - 1$, что и требовалось.

В работе К. Вагнера и Р. Галина (1962) доказывается, в частности, что при любом натуральном k справедливость \mathfrak{H}_{k+1} влечет справедливость \mathfrak{H}_k . Это можно непосредственно получить из леммы. Пусть при некотором $k \geq 1$ имеет место \mathfrak{H}_{k+1} и пусть L — произвольный граф, такой что $\gamma(L) \geq k$. Тогда для графа L^+ в силу первого утверждения леммы будет $\gamma(L^+) \geq k + 1$, а так как высказывание \mathfrak{H}_{k+1} предполагается верным, то $\eta(L^+) \geq k + 1$, откуда в силу второго утверждения леммы, $\eta(L) \geq k$, т. е. \mathfrak{H}_k тоже имеет место.

К. Вагнер (8/1964) исследовал ряд свойств функции (которую будем называть его именем)

$$w(k) \doteq \min \{p/\forall L [\gamma(L) \geq p \Rightarrow \eta(L) \geq k]\},$$

где квантор общности можно считать распространенным на все обыкновенные графы. Из определения сразу не видно, что $w(k)$ существует при всех натуральных значениях аргумента*, однако в действительности это так. Во-первых, очевидно, $w(1) = 1$. Во-вторых, $w(2) = 2$, ибо обыкновенный граф с хроматическим числом ≥ 2 заведомо не пуст и поэтому может быть стянут на F_2 . Далее, $w(3) = 3$, поскольку всякий обыкновенный граф с хроматическим числом ≥ 3 (т. е. не бихроматический) в силу теоремы Кёнига (см. § 12 в главе 2) содержит цикл и, значит, допускает стягивание на F_3 . Наконец, справедлива

Т е о р е м а 3 (Вагнера). *Функция $w(k)$ определена при всех натуральных k , причем если $k \geq 2$, то*

$$w(k+1) \leq 2w(k) - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как мы только что видели, $w(k)$ определена при $k = 1, 2, 3$; для $k = 2$ второе утверждение теоремы верно (имеет место равенство). Теорема будет доказана, если мы, предположив существование $w(k)$ при некотором $k \geq 2$, покажем, что всякий обыкновенный граф L , у которого $\gamma(L) \geq 2w(k) - 1$, можно стянуть на F_{k+1} .

* Ибо мыслим случай, когда для некоторого k нет числа p , одного и того же при всех графах L и такого, что $\gamma(L) \geq p$ влечет $\eta(L) \geq k$.

Итак, пусть $L = (X, U)$ — обыкновенный граф с хроматическим числом $\gamma(L) \geq 2w(k) - 1$. Можно считать L связным, ибо в противном случае мы вместо L рассмотрели бы ту его компоненту L_i , у которой $\gamma(L_i) \geq 2w(k) - 1$ (а такая заведомо есть в силу теоремы 1). Выберем в L произвольную вершину x_0 , и пусть

$$X_p \doteq \{x/x \in X \ \& \ \rho(x_0, x) = p\},$$

т. е. X_p — множество тех вершин L , которые находятся от x_0 на расстоянии p (см. § 17 в главе 2); подграф графа L , порожденный множеством X_p , обозначим через $L_p \doteq (X_p, U_p)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$).

Среди подграфов $\{L_p\}$ есть такой, для которого $\gamma(L_p) \geq w(k)$. Действительно, если бы при всех p было $\gamma(L_p) \leq w(k) - 1$, то, окрасив вершины каждого из подграфов L_{2q} с помощью $w(k) - 1$ различных цветов, а вершины каждого L_{2q+1} — с помощью $w(k) - 1$ цветов, отличных друг от друга и от всех предыдущих ($q = 0, 1, 2, \dots$), мы получили бы раскраску всех вершин L не более, чем $2w(k) - 2$ цветами (ибо, как следует из определения расстояния, две вершины, принадлежащие двум подграфам вида L_{2q_1} и L_{2q_2} или вида L_{2q_1+1} и L_{2q_2+1} при $q_1 \neq q_2$, не могут быть смежными); но это противоречит предположению $\gamma(L) \geq 2w(k) - 1$.

Рассмотрим тот подграф L_p , для которого $\gamma(L_p) \geq w(k)$. В силу определения функции Вагнера, граф L_p можно стянуть на F_k ; это значит, что в L_p имеется k попарно непересекающихся связных подграфов $L_p^1, L_p^2, \dots, L_p^k$ (порожденных полными прообразами вершин F_k), таких что всякие два из них соединены между собой хотя бы одним ребром (иначе в лучшем случае возможно было бы отображение L_p в F_k , но не на F_k). Выберем произвольно по одной вершине в каждом L_p^i и построим в L систему C_1, C_2, \dots, C_k кратчайших цепей, идущих из x_0 в эти вершины. У каждой C_i только последняя вершина принадлежит L_p (в силу определения множества X_p). Стягивая каждый подграф L_p^i в одновершинный и стягивая у цепей C_i все ребра, кроме последних, мы превратим L в такой граф, который заведомо содержит полный $(k+1)$ -вершинный подграф (рис. 147). Следовательно, $\eta(L) \geq k+1$, что и требовалось доказать.

В цитируемой работе получена также

Т е о р е м а 4. При любом натуральном k

$$k \leq w(k) < w(k+1).$$

Доказательство. При $k = 1, 2$ оба неравенства верны (левое переходит в равенство). Если бы при некотором $k \geq 3$ было $k > w(k)$, то, взяв за L граф $F_{w(k)}$, мы получили бы из определения функции Вагнера явно абсурдное утверждение $\eta(F_{w(k)}) \geq k$ (т. е. что граф можно стянуть на другой с большим числом вершин), поэтому первое неравенство теоремы верно при всех k . Теперь допустим, что $w(k) \geq w(k+1)$ при некотором $k \geq 2$. По определению функции Вагнера, найдется

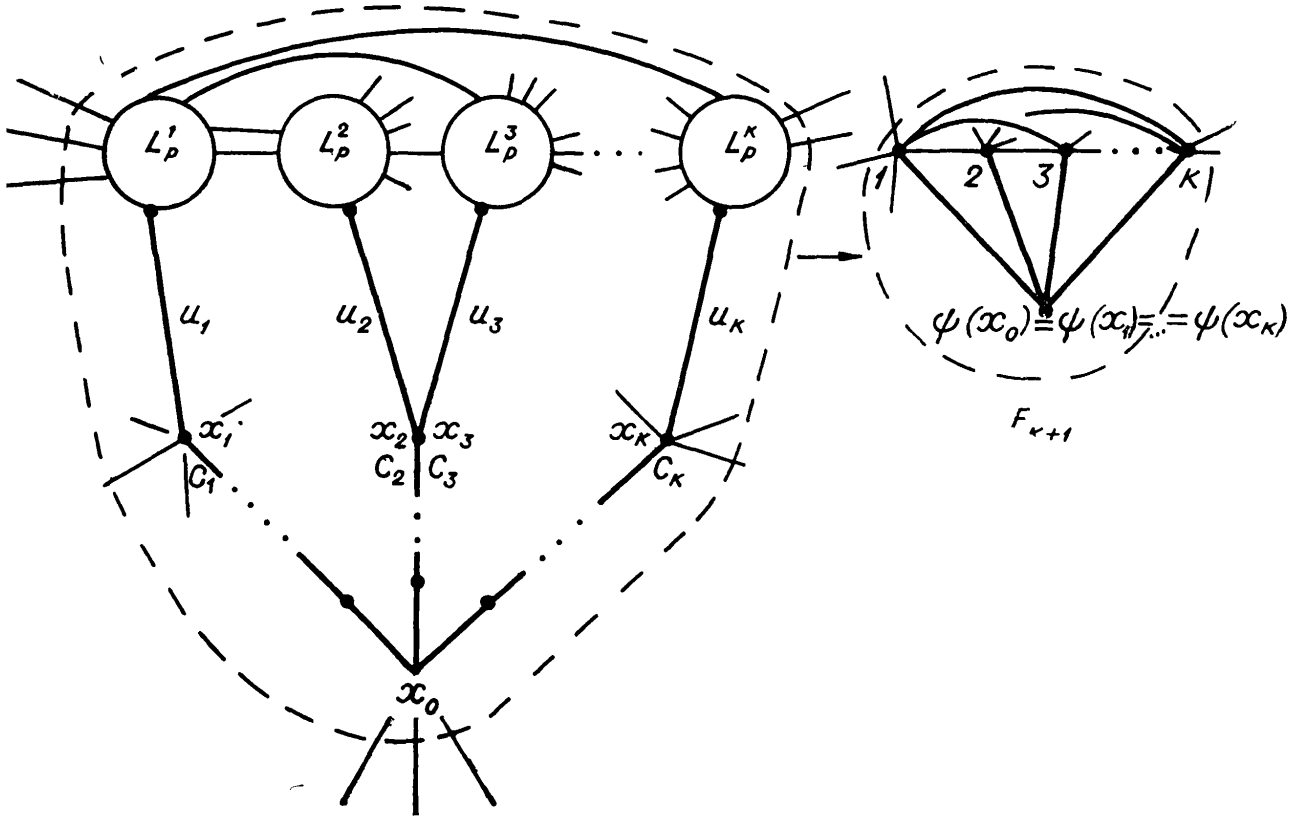


Рис. 147.

такой граф L с $\gamma(L) = w(k) - 1$, который невозможно стянуть на F_k . В силу леммы, $\gamma(L^+) = w(k)$, а так как это число по нашему допущению не меньше $w(k+1)$, то граф L^+ можно стянуть на F_{k+1} , т. е. $\eta(L^+) \geq k+1$. Отсюда, снова применяя лемму, получаем $\eta(L) \geq k$, вопреки тому, что L нельзя стянуть на F_k . Теорема доказана.

Из теоремы 4 и из определения функции w вытекает равносильность

$$\mathfrak{H}_k \Leftrightarrow w(k) = k$$

при любом $k = 1, 2, \dots$. Так как равенство $w(k) = k$ справедливо для $k = 1, 2, 3$, то гипотеза \mathfrak{H}_k при этих значениях k верна. Полагая в теореме Вагнера $k = 3$, получаем оценку $w(4) \leq 5$; в действительности $w(4) = 4$, ибо, как показал

Г. Дирак (2/1952), а затем другим способом К. Вагнер (3/1960), утверждение \mathfrak{H}_4 тоже верно. Особый интерес в связи со знаменитой проблемой четырех красок (см. § 48 в главе 6) представляет гипотеза \mathfrak{H}_5 . Учитывая, что $w(4) = 4$, мы из теоремы Вагнера получаем $w(5) \leq 7$. Правда, исследования в цитированных выше работах позволяют снизить эту оценку на единицу, однако отвергнуть возможность $w(5) = 6$ или, напротив, подтвердить ее до сих пор не удалось, так что \mathfrak{H}_5 остается не доказанной и не опровергнутой. Мы уже знаем, что \mathfrak{H}_{k+1} влечет \mathfrak{H}_k , поэтому для истинности \mathfrak{H}_5 достаточно было бы существования такого $k \geq 5$, при котором \mathfrak{H}_k истинно, а для справедливости всей гипотезы Хадвигера достаточно установить верность \mathfrak{H}_k для некоторой монотонно возрастающей бесконечной последовательности значений индекса k . Но независимо от решения этих проблем было бы полезно любое улучшение той верхней оценки

$$w(k) \leq 3 \cdot 2^{k-4} + 1$$

($k \geq 4$), которая легко получается из теоремы Вагнера с учетом равенства $w(4) = 4$.

Дальнейшее развитие идей К. Вагнера имеется в работах Р. Галина (2/1964) и Г. Юнга (1/1965).

Ко второму типу частичных гомоморфизмов мы относим такие отображения ψ множества ребер одного графа в множество ребер другого, при которых сохраняется характер смежности или, в более общем случае, лишь сам факт смежности ребер друг с другом, но в то же время может не происходить однозначного отображения вершин. Таковы, например, изотопизмы и эндотопизмы (см. конец § 39). В случае, когда сохраняется характер смежности, точное определение отображения ψ можно дать в терминах матрицы соседства ребер $H = (h_{ij})$ графа (см. § 2 в главе 1), требуя, чтобы ψ однозначно относило каждому ребру $u \in U$ графа $L = (X, U; P)$ ребро $\psi(u) = U'$ графа-образа $L' = (X', U'; P')$ с соблюдением условия: если $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $U' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_m\}$, то $\forall u, v \in U [h(u, v) = h'(\psi(u), \psi(v))]$, где $h(u, v)$ означает тот элемент h_{ij} матрицы H_L , у которого i и j суть номера ребер u и v соответственно ($u, v \in U$), а $h'(u', v')$ — элемент h'_{ij} матрицы $H_{L'}$, у которого i и j являются номерами ребер u' и v' ($u', v' \in U'$). Нас будут интересовать менее жесткие частичные гомоморфизмы второго типа, отображающие U и U' так, что

$$\forall u, v \in U [K(u, v) \Rightarrow K'(\psi(u), \psi(v))], \quad (*)$$

где K и K' означают отношения смежности ребер в L , соответственно в L' (см. § 1 в главе 1); такие отображения называются *реберными гомоморфизмами* графа L в граф L' . Реберные гомоморфизмы могут менять тип ребер графа. Если каждое ребро графа L' имеет хотя бы один прообраз, то ψ есть реберный гомоморфизм L на L' . Реберный гомоморфизм может принадлежать одновременно как ко второму, так и к первому типу частичных гомоморфизмов: в этом случае не все ребра U обязательно имеют образы, и условие (*) выполнено лишь для таких ребер u, v , которые обладают образами.

Раскраской ребер графа $L = (X, U; P)$ называется его реберный гомоморфизм (вообще говоря, частичный в обоих смыслах) в k -веер V_k ($k = 1, 2, \dots$) *. В случае отображения L на V_k имеем раскраску ребер k цветами. Если все ребра L окрашены, то раскраска — *полная*. Наглядно речь идет об окраске ребер графа L таким образом, чтобы никакие два смежных различных ребра не получили одинаковый цвет. Прообразами ребер веера V_k при раскраске ψ являются, очевидно, квазипаросочетания (см. § 10 в главе 1).

Наименьшее натуральное число k , такое что граф L допускает полную раскраску ребер k цветами, называется его *хроматическим классом* и обозначается через $\chi(L)$. Вопросам раскраски ребер и оценки хроматического класса графа мы посвятим отдельный параграф. А сейчас остановимся на реберных изоморфизмах.

Мы ограничимся рассмотрением обыкновенных графов; тогда вопрос о том, сохраняет ли отображение ребер характер их смежности или только сам факт смежности, теряет смысл, и *реберный изоморфизм* ψ графа $L = (X, U)$ на $L' = (X', U')$ определяется просто как взаимно однозначное отображение U на U' , сохраняющее (притом в обе стороны) отношение смежности ребер, т. е. удовлетворяющее условию

$$\forall u, v \in U [K(u, v) \Leftrightarrow K'(\psi(u), \psi(v))]$$

(с теми же обозначениями, что и в (*)).

Задание изоморфизма (в обычном смысле) графа L на L' в случае обыкновенных графов равносильно заданию взаимно однозначного отображения ψ множества вершин X на X' , сохраняющего (в обе стороны) отношение смежности вершин. Ана-

*) Напомним, что k -веером называется обыкновенный граф с $k + 1$ вершинами и k ребрами, соединяющими одну вершину со всеми остальными (см. рис. 34 в § 10 главы 1).

логичное утверждение уже не будет иметь места, если отображение вершин заменить реберным изоморфизмом: так, два графа на рис. 148 не изоморфны, несмотря на наличие реберного изоморфизма, а каждая из пар графов на рисунках 149, 150 и 151 хотя и изоморфна, но допускает такой реберный изоморфизм, который невозможно продолжить на множество вершин, т. е. который не порождается никаким обычным изоморфизмом.

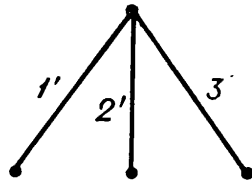
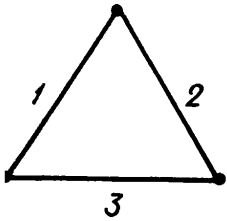


Рис. 148.

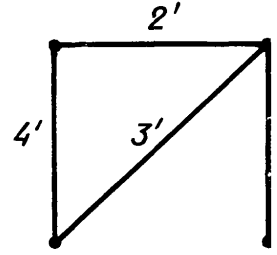
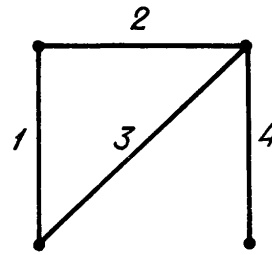


Рис. 149.

Однако приведенные примеры представляют собой исключительное явление, как показывает следующая теорема, которая получена Х. Уитни (3/1932) и к которой Г. Юнг (2/1966) добавил формулировку единственности, а также дал новое доказательство, не опирающееся на математическую индукцию*.

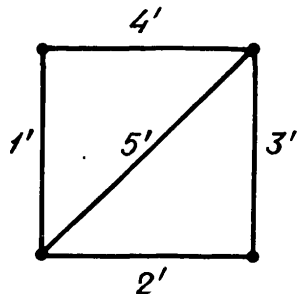
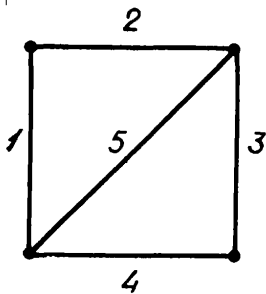


Рис. 150.

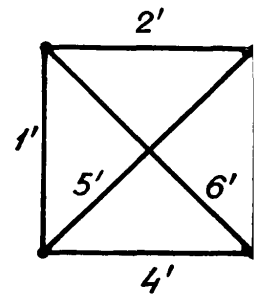
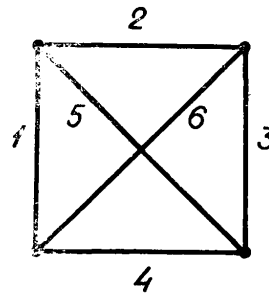


Рис. 151.

Теорема 5 (Уитни — Юнга). Пусть связный обыкновенный граф $L = (X, U)$ не принадлежит ни к одному из пяти типов, показанных на рисунках 148—151, и пусть ψ — реберный изоморфизм графа L на некоторый обыкновенный граф $L' = (X', U')$ с тем же количеством вершин n . Тогда отображение ψ можно распространить на вершины так, чтобы получился обычный изоморфизм графа L на L' ; если при этом $n \geq 3$, то такое продолжение ψ единственно.

* И благодаря этому пригодное также для бесконечных графов; тем самым решена одна из проблем, приведенных в книге О. Оре (4/1962, русск. 1968, глава 15, п. 4, проблема 2*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $n \geq 5$. Пусть x — произвольная вершина графа L , а u_1, u_2, \dots, u_s — инцидентные ей ребра, где $s \doteq s_L(x)$ — степень x в L (см. § 2 главы 1). Наша ближайшая цель — найти в графе L' такую вершину, которая инцидентна сразу всем ребрам $u'_1 \doteq \psi(u_1), u'_2 \doteq \psi(u_2), \dots, u'_s \doteq \psi(u_s)$.

Указанные только что ребра в L' располагаются веером, т. е. имеют общую инцидентную вершину x' . Это очевидно при $s \neq 3$, а при $s = 3$ второе мыслимое расположение u'_1, u'_2, u'_3 — в виде треугольника — отвергается следующим рассуждением: ввиду связности графа L и предположения $n \geq 5$ в L заведомо есть ребро u , отличное от u_1, u_2, u_3 и смежное ровно с одним из них, в то время как образ $\psi(u)$ в L' не может быть смежен только с одним из трех ребер треугольника. В случае $s \geq 2$ искомой вершиной будет x' и только она. В случае $s = 1$ пусть $u_1 \doteq \widetilde{xy}$, тогда $s_L(y) \geq 2$ (ибо L связан и $n \geq 5$), и, по доказанному выше, образы ребер, инцидентных y , располагаются в графе L' веером; если y' — общая инцидентная вершина этих образов, а x' — вторая концевая вершина ребра $u'_1 \doteq \psi(u_1)$, то обе эти вершины, и только они, обладают требуемым свойством, и в качестве искомой мы выбираем вершину x' .

Теперь для каждой $x \in X$ положим $\psi(x) = x'$, где вершина $x' \in X'$ определяется по x как сказано выше, и покажем, что такое продолжение исходного реберного изоморфизма ψ приводит к требуемому изоморфизму графа L на L' ; чтобы не возвращаться более к вопросу единственности продолжения, заметим, что в случае $s = 1$, когда выбор образа $\psi(x)$ не был единственным возможным, второй вариант $\psi(x) \doteq y'$ ввиду $\psi(y) = y'$ несовместим с взаимной однозначностью отображения вершин, которая будет установлена в ходе дальнейших рассуждений.

Построенное отображение (по-прежнему условимся обозначать его через ψ) множества $X \cup U$ в $X' \cup U'$ сохраняет отношение инцидентности вершин с ребрами не только в прямую, но и в обратную сторону. Действительно, допустим противное, что некоторая вершина $x \in X$ и некоторое ребро $u \in U$ не инцидентны, в то время как их образы $x' = \psi(x)$ и $u' = \psi(u)$ в L' инцидентны, и пусть $v \doteq \widetilde{xy}$ — какое-нибудь ребро графа L , инцидентное x ; тогда, как мы уже знаем, образ $v' = \psi(v)$ инцидентен x' , значит смежен с u' , поэтому ребро v смежно с u .

Случай 1: $s_L(x) = 1$. Согласно нашему определению отображения ψ в вершинах, должно быть $\psi(y) = x'$ и $\psi(x) = z'$, где z' — вторая концевая вершина ребра v' (рис. 152), в противоречии с тем, что $\psi(x) = x'$.

Случай 2: $s_L(x) \geq 2$. Пусть v и w — два ребра графа L , отличные от u и инцидентные вершине x ; так как оба образа $v' \doteq \psi(v)$ и $w' \doteq \psi(w)$ инцидентны x' , то все три ребра u', v', w' в L' попарно смежны, а так как исходное отображение ψ является реберным изоморфизмом, то ребра u, v, w в L тоже попарно смежны и необходимо образуют треугольник, поскольку u

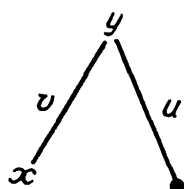


Рис. 152.

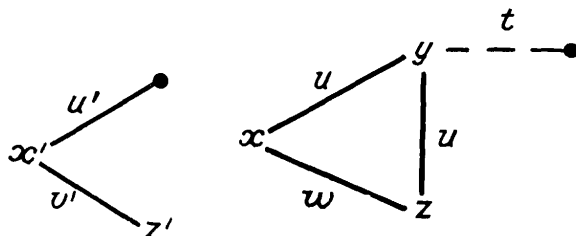
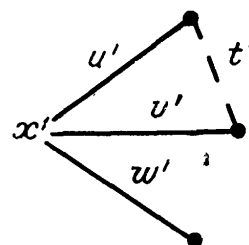


Рис. 153.



неинцидентно x (рис. 153 слева). В L , ввиду его связности и $n \geq 5$, имеется ребро t , инцидентное ровно одной из вершин x, y, z упомянутого треугольника. t не инцидентно x , ибо его образ $t' \doteq \psi(t)$ не может одновременно быть инцидентен вершине x' , смежен с ребрами v', w' и не смежен с u' . Пусть, например, t инцидентно y (случай, когда t инцидентно z , совершенно аналогичен); тогда ребро t' смежно с u', v' и не смежно с w' , т. е. тройка ребер u', v', t' образует в L' треугольник (рис. 153 справа), в то время как прообразы u, v, t этих ребер имеют в L общую вершину y , что невозможно (см. начало доказательства теоремы).

Итак, x инцидентна u тогда и только тогда, когда $\psi(x)$ инцидентна $\psi(u)$, следовательно, отображение ψ переводит реберный веер вершины x (т. е. множество всех инцидентных ей ребер) в реберный веер вершины $\psi(x)$; так как для любых двух различных вершин $x, y \in X$ их реберные веера различны, то и $\psi(x) \neq \psi(y)$, т. е. ψ отображает взаимно однозначно X в X' , а значит на X' , ибо $|X| = |X'|$ по условию теоремы. Наконец, отображение ψ сохраняет смежность вершин, притом в обе стороны, ибо две различные вершины $x, y \in X$ смежны тогда и только тогда, когда их реберные веера содержат общее ребро, т. е. когда образы этих вееров содержат общее ребро, иначе говоря, когда вершины $\psi(x)$ и $\psi(y)$ графа L' смежны.

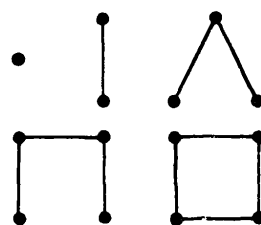


Рис. 154.

Остался лишь случай $n \leq 4$. Но связных обыкновенных графов, содержащих не более четырех вершин и не изоморфных ни одному из пяти исключенных, существует всего пять (рис. 154), и для них справедливость теоремы проверяется непосредственно.

З а м е ч а н и е . Легко показать, что при условиях теоремы граф L' тоже оказывается связным. Не представляет большого труда изменить формулировку теоремы так, чтобы она стала справедливой без предположения о связности графа L .

С л е д с т в и е . Если два связных обыкновенных графа отличны от F_3 и от V_3 и реберно изоморфны, то они изоморфны в обычном смысле.

§ 41. Хроматическое число

Во всём этом параграфе мы будем иметь дело только с обыкновенными графами. Раскраску вершин будем понимать как функцию $g(x)$, определенную в § 40.

Оценки хроматического числа через количество вершин графа тривиальны, именно

$$1 \leq \gamma(L) \leq n(L),$$

причем нижняя граница достигается для пустых, а верхняя — для полных графов. Если же известны одновременно число вершин $n(L)$ и число ребер $m(L)$, то верхняя и нижняя оценки для $\gamma(L)$ оказываются далеко не простыми и будут рассмотрены только во второй части книги, поскольку их вывод связан с развитием специального метода.

Очевидная оценка хроматического числа графа через его плотность (см. § 10 в главе 1)

$$\gamma(L) \geq \varphi(L)$$

является точной, так как для полных графов имеет место равенство. Оценки же сверху для $\gamma(L)$ в терминах одной только плотности не может существовать при $\varphi(L) > 1$: чтобы в этом убедиться, достаточно указать способ построения графа плотности 2 с заданным сколь угодно большим хроматическим числом. Первая конструкция, предложенная А. А. Зыковым (1/1949, глава 3), весьма неэкономна: для $\gamma = 3$ соответствующий граф имеет 8 вершин (вместо 5 возможных), а при $\gamma = 4$ получается уже $n = 536$ (вместо 11). Приводимое ниже экономное построение принадлежит Я. Мыцельскому (1953).

При $\gamma = 2$ искомый граф есть F_2 . Пусть для некоторого $\gamma \geq 2$ уже построен граф $L = (X, U)$ с $\varphi(L) = 2$ и $\gamma(L) = \gamma$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Добавим к L «дубликаты» вершин X , т. е. новые вершины x_1', x_2', \dots, x_n , соединив каждую x_i' новыми ребрами с теми вершинами X , с которыми смежна x_i в L ; затем добавим еще одну новую вершину y и соединим ее со всеми вершинами множества $X' \doteq \{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$. Покажем, что

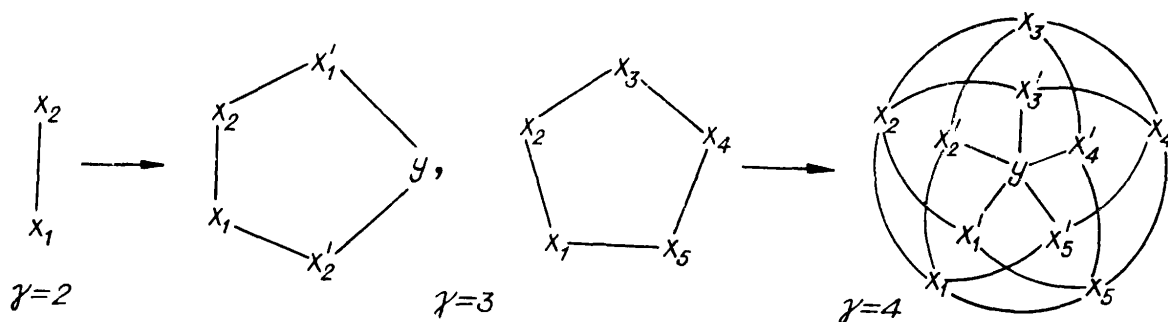


Рис. 155.

полученный таким образом $(2n + 1)$ -вершинный граф L' — искомый.

Во-первых, $\varphi(L') = 2$. Действительно, никакой треугольник в L' не может состоять только из вершин X (ибо $\varphi(L) = 2$), а также не может содержать y (так как вершины множества X' попарно несмежны) или какую-нибудь из x_i' (иначе, заменив эту вершину на x_i , мы получили бы треугольник в L). Во-вторых, $\gamma(L') = \gamma + 1$. В самом деле, раскрасив вершины L в γ цветов, можно затем каждой $x_i' \in X'$ придать цвет соответствующей вершины x_i , а вершину y окрасить в новый, $(\gamma + 1)$ -й цвет. С другой стороны, если бы L' допускал раскраску только γ цветами, то при этом на вершины множества X' ушло бы не более $\gamma - 1$ цветов (отличных от цвета вершины y), и, перекрашивая вершины X так, чтобы x_i приняла цвет вершины x_i' ($i = 1, 2, \dots, n$), мы получили бы раскраску вершин исходного графа L с помощью только $\gamma - 1$ цветов, тогда как по условию $\gamma(L) = \gamma$.

На рис. 155 показаны графы с $\varphi = 2$ и $\gamma = 2, 3, 4$. Ясно, что при таком построении граф с заданным γ будет иметь $3 \cdot 2^{\gamma-2} - 1$ вершин. Представляет интерес дальнейшее исследование относительной независимости хроматического числа графа от его «густоты», например: для любых ли $l > 3$ и $\gamma_0 > 0$ возможно построить граф с хроматическим числом γ_0 , не содержащий циклов длины $\leq l$? Такие вопросы рассматриваются у Б. Декарта (1954), Дж. и Л. Келли (1954), Р. Риды (1957),

П. Эрдеша (1/1959) и других авторов; мы не будем на этом останавливаться. Свойства графов L , у которых $\gamma(L) = \varphi(L)$, изучаются в работах А. А. Зыкова (1/1949), К. Бержа (2/1960) и Т. Галлаи (3/1962).

Степень графа $L = (X, U)$, а именно

$$\sigma(L) \doteq \max \{s(x) / x \in X\},$$

является характеристикой, легко находимой как по матрице смежности или инциденций, так и по чертежу; поэтому представляет особый интерес оценка хроматического числа $\gamma(L)$ в терминах степени $\sigma(L)$.

Легко показать, что всегда

$$\gamma(L) \leq \sigma(L) + 1.$$

В самом деле, пусть $g(x)$ — произвольная полная раскраска вершин графа $L = (X, U)$ и пусть $y \in X$ — вершина, в которой $g(y) > \sigma(L) + 1$. Положим

$$g'(y) \doteq \min \{k / k > 0 \ \& \ \forall z [J(y, z) \Rightarrow g(z) \neq k]\},$$

$$x \neq y \Rightarrow g'(x) \doteq g(x).$$

Новая раскраска $g'(x)$ — тоже полная, но ввиду $s(y) \leq \sigma(L)$ теперь уже $g'(y) \leq \sigma(L) + 1$. Перекрасив таким образом по очереди все те вершины, в которых было $g(x) > \sigma(L) + 1$, получим полную раскраску вершин L не более, чем $\sigma(L) + 1$ цветами.

Эта оценка является точной, так как для полных графов имеет место равенство; однако после наложения несущественных ограничений на класс рассматриваемых графов (и в результате существенных усилий) Р. Бруксу (1941) удалось снизить ее на единицу. Предварительно докажем две леммы.

Л е м м а 1. Пусть $x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$ — простая цепь $(l \geq 0)$ обыкновенного графа $L = (X, U)$, а

$$s \doteq \max \{s(x) / x \in X \setminus \{x_0\}\}.$$

Если $g(x)$ — некоторая (не обязательно полная) раскраска вершин L , то можно построить новую раскраску $g'(x)$, такую что

$$\begin{aligned} x \in \{x_1, x_2, \dots, x_l\} &\Rightarrow 0 < g'(x) \leq s, \\ x \notin \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_l\} &\Rightarrow g'(x) = g(x). \end{aligned} \quad (*)$$

Доказательство. Утверждение тривиально при $l = 0$, ибо в этом случае исходная раскраска $g(x)$ сама удовлетворяет условиям (*). Допустим, что для некоторого $l \geq 0$ утверждение уже доказано, и рассмотрим в графе L простую цепь

$$Q_{l+1} \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l u_{l+1} x_{l+1}.$$

Так как эта цепь простая, а $l + 1 > 0$, то $x_{l+1} \neq x_0$ и, в силу условия леммы, $s(x_{l+1}) \leq s$. Положим

$$g''(x_{l+1}) \doteq \min \{k / k > 0 \ \& \ \forall x [J(x_{l+1}, x) \ \& \ x \neq x_l \Rightarrow g(x) \neq k]\},$$

$$g''(x_l) \doteq 0,$$

$$x \neq x_l \ \& \ x \neq x_{l+1} \Rightarrow g''(x) \doteq g(x).$$

Раскраска $g''(x)$ и цепь

$$Q_l \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

удовлетворяют условиям леммы, поэтому, согласно предположению индукции, существует раскраска $g'(x)$, для которой по отношению к цепи Q_l выполнены требования (*); но при этом

$$g'(x_{l+1}) = g''(x_{l+1}) \leq s,$$

т. е. раскраска $g'(x)$ удовлетворяет требованиям (*) и по отношению к цепи Q_{l+1} .

Лемма 2.* Если обыкновенный граф $L = (X, U)$ связан, x_0 — некоторая его вершина и

$$\forall x \in X \setminus \{x_0\} \ [s(x) \leq s \geq 1],$$

то существует полная раскраска $g(x)$ вершин L , такая что

$$x \neq x_0 \Rightarrow g(x) \leq s.$$

Доказательство. Зададим какую-нибудь раскраску $g'(x)$ вершин графа L , удовлетворяющую условию $x \neq x_0 \Rightarrow g'(x) \neq 0$ (такие раскраски заведомо существуют, так как можно, например, окрасить все вершины в разные цвета). Если

$$|\{x / x \in X \setminus \{x_0\} \ \& \ g'(x) > s\}| = 0,$$

*) В статье К. Бержа (2/1960) эта лемма названа Теоремой Кемпе.

то искомой раскраской будет

$$g(x_0) \doteq s + 1,$$

$$x \neq x_0 \Rightarrow g(x) \doteq g'(x).$$

Допустим, что при условии

$$|\{x/x \in X \setminus \{x_0\} \& g'(x) > s\}| < n_0,$$

где $n_0 \geq 1$, всегда можно получить из $g'(x)$ требуемую раскраску $g(x)$, и пусть

$$|\{x/x \in X \setminus \{x_0\} \& g'(x) > s\}| = n_0.$$

Рассмотрим какую-либо вершину $x \neq x_0$, в которой $g'(x) > s$; в силу связности L , существует простая цепь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

($l > 0$). Применяя лемму 1, построим новую раскраску $g''(x)$, удовлетворяющую условиям (*); для этой раскраски уже

$$|\{x/x \in X \setminus \{x_0\} \& g''(x) > s\}| < n_0,$$

и ее, по предположению индукции, можно изменить таким образом, чтобы получилась требуемая раскраска $g(x)$.

Теорема Брукса. Пусть обыкновенный граф $L = (X, U)$ удовлетворяет условиям

- 1) $\forall x \in X [s(x) \leq s]$, где $s \geq 3$;
- 2) ни одна компонента связности графа L не есть полный $(s + 1)$ -вершинный граф F_{s+1} .

Тогда

$$\gamma(L) \leq s.$$

Доказательство. При $n(X) \leq 3$ теорема тривиальна; допустим ее уже доказанной для всех графов менее чем с n_0 вершинами, где $n_0 \geq 4$, и рассмотрим произвольный граф $L = (X, U)$ с $n(X) = n_0$, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы.

А. Можно считать L связным, иначе каждая компонента имела бы менее n_0 вершин и удовлетворяла условиям 1) и 2), т. е., в силу предположения индукции, допускала бы полную раскраску не более, чем s цветами; тогда и для всего графа L имели бы $\gamma(L) \leq s$, и теорема была бы доказана.

Б. Можно считать, что у L нет точек сочленения. Действительно, если L распадается на блоки (см. § 15 в главе 2), то каж-

дый блок имеет менее n_0 вершин и удовлетворяет условиям 1) и 2), поэтому, в силу предположения индукции, допускает полную раскраску вершин не более, чем s цветами. Раскрасив отдельно каждый блок, будем последовательно склеивать из этих блоков исходный граф L , сопровождая каждый шаг присоединения (в одной вершине!) нового блока к уже восстановленной части таким изменением номеров цветов этого блока, чтобы отождествляемые вершины имели одинаковый цвет. В итоге получим полную раскраску вершин L не более, чем s цветами.

В. Можно считать, что

$$\forall x \in X [s(x) = s],$$

ибо если $s(x_0) < s$ для некоторой $x_0 \in X$, то, учитывая связность L и применяя лемму 2, мы построим раскраску $g(x)$, для которой

$$x \neq x_0 \Rightarrow g(x) \leq s,$$

а затем образуем новую раскраску $g'(x)$:

$$g'(x_0) \doteq \min\{k/k > 0 \ \& \ \forall x [J(x_0, x) \Rightarrow g(x) \neq k]\},$$

$$x \neq x_0 \Rightarrow g'(x) \doteq g(x);$$

в силу того, что $s(x_0) < s$, будет $g'(x_0) \leq s$.

Из А, В и условия 2) следует, что граф L — неполный. Пусть y и z — две его несмежные вершины. Полагая $x_0 \doteq y$ и применяя лемму 2, найдем такую полную раскраску $g(x)$, что

$$x \neq y \Rightarrow g(x) \leq s.$$

В частности, $g(z) \leq s$, поэтому среди вершин, смежных с z , найдутся хотя бы две a, b одинакового цвета (и, значит, несмежные).

Г. Можно считать, что множество $\{a, b\}$ разделяет вершины y и z . В самом деле, если бы в подграфе графа L , порожденном множеством вершин $X \setminus \{a, b\}$, вершины y и z не были отделены, то в L имелась бы простая цепь

$$zu_1x_1u_2x_2 \dots x_{l-1}u_ly$$

($l \geq 2$), не содержащая ни a , ни b . Полагая $x_0 \doteq z$ и применяя лемму 1, образуем новую раскраску $g'(x)$ вершин L , такую что

$$x \in \{x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, y\} \Rightarrow g'(x) \leq s,$$

$$x \notin \{z, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, y\} \Rightarrow g'(x) = g(x),$$

в частности, $g'(a) = g(a)$ и $g'(b) = g(b)$, поэтому $g'(a) = g'(b)$. После этого положим

$$g''(z) \doteq \min \{k/k > 0 \ \& \ \forall x [J(z, x) \Rightarrow g'(x) \neq k]\},$$

$$x \neq z \Rightarrow g''(x) \doteq g'(x);$$

так как $s(z) \leq s$ (и даже $s(z) = s$ в силу В), а $g''(a) = g''(b)$, то $g''(z) \leq s$, откуда $\gamma(L) \leq s$.

Пусть L^+ — граф, полученный из L добавлением ребра \widetilde{ab} , а $L_1^+, L_2^+, \dots, L_p^+$ — подграфы L^+ , порождаемые соответственно множествами вершин $X_1 \cup \{a, b\}$, $X_2 \cup \{a, b\}, \dots, X_p \cup \{a, b\}$, где X_1, X_2, \dots, X_p — множества вершин компонент связности того графа, который возникнет, если из L^+ удалить обе вершины a и b . В каждом L_i^+ будет $s(a) \leq s$, $s(b) \leq s$, ибо если бы в некотором L_i^+ было, скажем, $s(a) > s$, то вершина b являлась бы точкой сочленения исходного графа, вопреки Б.

Если все графы L_i^+ отличны от F_{s+1} , то каждый из них имеет менее n_0 вершин и удовлетворяет условиям 1) и 2), следовательно, по предположению индукции, обладает полной раскраской вершин не более, чем в s цветов. При этом в каждом из графов L_i^+ вершины a и b , будучи смежными, получают разные цвета. Выбирая нумерацию цветов в этих графах так, чтобы цвет вершины a , а также цвет вершины b были одними и теми же для всех L_i^+ , мы затем из окрашенных графов L_i^+ склеим граф L^+ ; наконец, удаляя ребро \widetilde{ab} , получим исходный граф L с требуемой раскраской вершин.

Допустим, наконец, что среди графов L_i^+ есть полный $(s+1)$ -вершинный, скажем, $L_1^+ = F_{s+1}$. Тогда из В следует, что $p=2$, вершины a и b имеют в графе L_2^+ степень 2 и всякая вершина из X_1 смежна в L только с вершинами множества $X_1 \cup \{a, b\}$ (рис. 156). Удаляя из графа L_2^+ ребро \widetilde{ab} и отождествляя a с b , получим вершину (ab) степени два и превратим L_2^+ в граф, отличный от F_{s+1} (ввиду $s \geq 3$) и имеющий менее n_0 вершин, значит, допускающий, согласно предположению индукции, полную раскраску вершин не более, чем s цветами. Для построения требуемой раскраски исходного графа L достаточно теперь сохранить все цвета вершин множества X_2 , придать вершинам a и b цвет вершин (ab) и окрасить вершины X_1 в $s-1$ цветов, отличных от цвета вершин a и b . Теорема доказана.

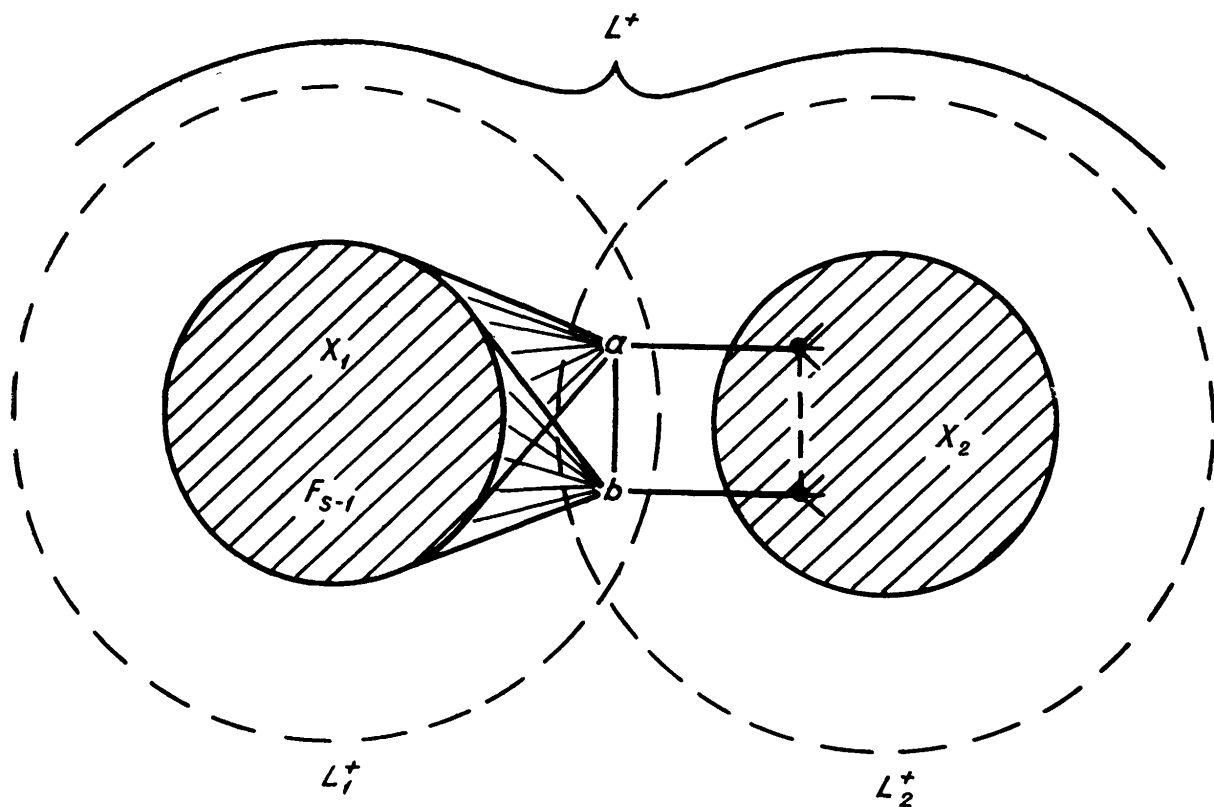


Рис. 156.

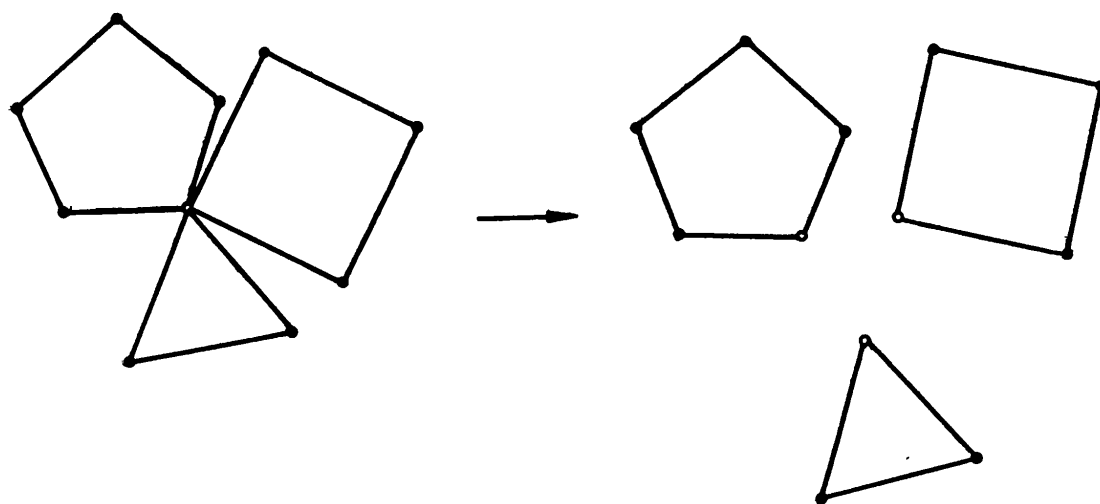


Рис. 157.

З а м е ч а н и е 1. Пример пятиугольника показывает, что требование $s \geq 3$ в теореме Брукса существенно.

З а м е ч а н и е 2. Всё условие 1) теоремы Брукса можно заменить условием

$$\sigma(L) \geq 3;$$

однако если бы мы поступили так с самого начала, то это усложнило бы доказательство, ибо для отдельных блоков, фигурирующих в пункте Б, условие $\sigma \geq 3$ может нарушаться (рис. 157).

С л е д с т в и е 1. Пусть $L = (X, U)$ — связный неполный обыкновенный граф с хроматическим числом $\gamma = \gamma(L)$ и пусть $g(x)$ — какая-нибудь полная раскраска его вершин в γ цветов. Тогда существует хотя бы одна пара вершин $a, b \in X$, имеющих один и тот же цвет и отстоящих друг от друга на расстоянии $\rho(a, b) = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о *. При $\gamma(L) \leq 2$ утверждение тривиально, ибо в этом случае L представляет собой связный граф Кёнига, содержащий более двух вершин (в силу неполноты). Если $\gamma(L) \geq 3$, то в L имеется хотя бы одна вершина y степени $s(y) \geq \gamma$, ибо иначе по теореме Брукса было бы $\gamma(L) < \gamma$. Так как $\forall x \in X [g(x) \leq \gamma]$, то среди вершин, смежных с y , заведомо есть одинаково окрашенные.

Этот результат понадобится нам в дальнейшем.

Оценка хроматического числа, даваемая теоремой Брукса, часто оказывается неудовлетворительной: так, легко указать граф сколь угодно высокой степени σ с хроматическим числом два, именно σ -веер V_σ (см. § 10 в главе 1). Для дальнейшего улучшения оценки можно предположить, например, что о степенях вершин графа известно нечто большее, чем их верхняя граница. В этом направлении мы отметим один результат (см. К. Берж, 2/1960), где, впрочем, кроме степеней вершин, фигурирует еще и плотность графа.

С л е д с т в и е 2. Пусть обыкновенный граф $L = (X, U)$ обладает свойствами:

1) подграф L_1 , порожденный множеством вершин

$$\{x/x \in X \ \& \ s(x) > s\},$$

где $s \geq 4$, является пустым;

*) Этот простой вывод предложен Г. Дираком (устно). Утверждение о существовании полной раскраски вершин L в $\gamma(L)$ цветов, при которой имеются вершины a и b с указанными свойствами, было получено А. П. Ершовым и Г. И. Кожухиным (1962) без использования теоремы Брукса.

2) подграф L_2 , порожденный множеством вершин

$$X \setminus \{x/x \in X \& s(x) > s\},$$

обладает плотностью $\varphi(L_2) \leq s - 1$.

Тогда

$$\gamma(L) \leq s.$$

Доказательство. Обозначим через L' подграф, полученный из L удалением некоторого максимального пустого подграфа, содержащего L_1 . В L' будет $s'(x) \leq s - 1$, граф L' удовлетворяет условиям теоремы Брукса, поэтому его вершины допускают полную раскраску не более чем $s - 1$ цветами, а для окраски остальных вершин исходного графа L достаточен один добавочный цвет.

Упомянем без доказательства также следующие оценки. Пусть $vs(L) \doteq |\{s(x)/x \in X\}|$ — *степенная вариация*, т. е. количество различных значений степени вершины обыкновенного графа $L = (X, U)$. Г. Дирак (16/1964) нашел точную верхнюю оценку*

$$\gamma(L) \leq n(L) - \left\lfloor \frac{1}{2} vs(L) \right\rfloor$$

и следующим образом обобщил этот результат: если

$$\varphi(L) \leq n(L) + \left\lfloor \frac{1}{2} vs(L) \right\rfloor - 1,$$

то

$$\gamma(L) \leq n(L) - \left\lfloor \frac{1}{2} vs(L) \right\rfloor - 1.$$

Л. С. Мельников (устное сообщение) предполагает справедливой точную нижнюю оценку

$$\gamma(L) \geq \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{1}{2} vs(L) \right\rfloor}{n(L) - vs(L)} \right\rceil + 1,$$

но пока доказал лишь, что такая оценка не превосходит написанного справа выражения. Для обыкновенных графов, удовлетворяющих условию $\sigma(L) \leq n(L) - 3$, Дж. Уэйнстейн (1963)

*) Ранее Р. Нетлтон (1960) получил несколько более грубую верхнюю оценку.

нашел, что

$$\gamma(L) \leq n(L) - \frac{2n(L)}{2 + \max\{4, n(L) - \underline{\sigma}(L) - 1\}},$$

где $\underline{\sigma}(L) \doteq \min\{s(x)/x \in X\}$ (см. § 10 в главе 1).

Уместно поставить проблему нахождения точных верхней и нижней оценок числа $\gamma(L)$ в случае, когда для графа L полностью известны количества $n_i(L)$ его вершин степени i ($i = 0, 1, 2, \dots, n(L) - 1$); ввиду большой важности хроматического числа представляют интерес любые нетривиальные оценки его через различные легко вычисляемые характеристики графа. Вообще заметим, что изучению взаимосвязи между хроматическим числом и другими свойствами графов посвящена весьма обширная литература.

§ 42. Нахождение минимальной раскраски вершин

Как мы уже знаем (§ 40), при раскраске X_1, X_2, \dots, X_k ($k > 0$) вершин графа $L = (X, U)$ каждое из множеств X_i порождает пустой подграф. Ясно поэтому, что хроматическое число графа как-то зависит от взаимного расположения пустых подграфов в графе; однако эта зависимость весьма непростая.

Предположим, что мы выбрали в L какой-нибудь пустой подграф с наибольшим числом, а именно $\varepsilon(L)$, вершин (см. § 10 в главе 1) и окрасили выбранные вершины в первый цвет; затем в подграфе, порожденном неокрашенными вершинами, снова выбрали наибольший пустой подграф и окрасили его вершины во второй цвет; и т. д. В конечном итоге получится полная раскраска исходного графа L , но, вообще говоря, не наименьшим возможным числом цветов, как показывает хотя бы пример в книге К. Бержа (1/1958, русск. 1962, гл. 4, рис. 4—6). Надежды некоторых эмпириков на то, что при таком способе раскраски число цветов все-таки не слишком далеко от минимального, окончательно разбиваются следующим примером В. Г. Винга.

Определим последовательность деревьев

$$T_1 = (X_1, U_1), \quad T_2 = (X_2, U_2), \dots, \quad T_k = (X_k, U_k), \dots$$

следующим образом:

$$1) \quad |X_1| \doteq 1, \quad U_1 \doteq \emptyset;$$

2) если дерево $T_i = (X_i, U_i)$ при $i \geq 1$ уже построено и $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то полагаем

$$X_{i+1} \doteq X_i \cup \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{n1}, y_{n2}\},$$

$$U_{i+1} \doteq U_i \cup \{\widetilde{x_1 y_{11}}, \widetilde{x_1 y_{12}}, \widetilde{x_2 y_{21}}, \widetilde{x_2 y_{22}}, \dots$$

$$\dots, \widetilde{x_n y_{n1}}, \widetilde{x_n y_{n2}}\},$$

где $y_{11}, y_{12}, y_{21}, \dots, y_{n2}$ — новые вершины, а $\widetilde{x_1 y_{11}}, \widetilde{x_1 y_{12}}, \widetilde{x_2 y_{21}}, \dots, \dots, \widetilde{x_n y_{n1}}, \widetilde{x_n y_{n2}}$ — новые ребра (рис. 158).

Среди пустых подграфов дерева T_k только один обладает $\varepsilon(T_k)$ вершинами, а именно тот, который порожден множеством $X \setminus X_{k-1}$ (под $X_1 \setminus X_0$ понимается просто X_1); в самом деле,

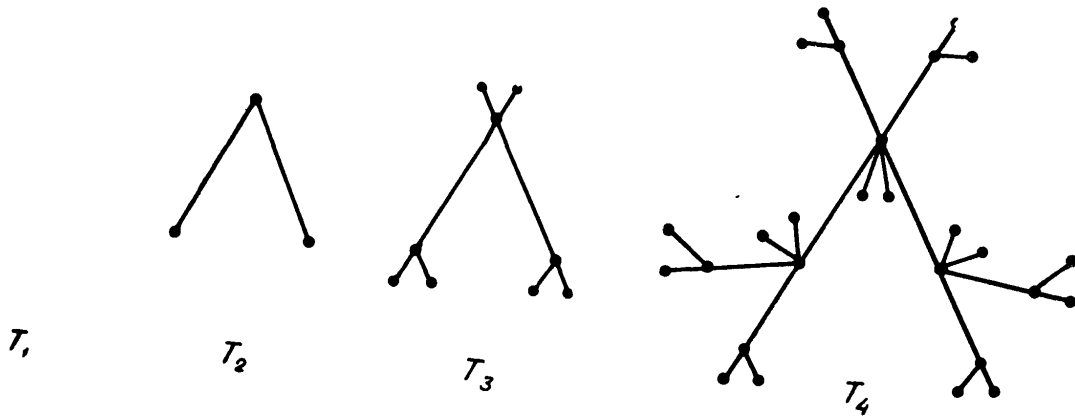


Рис. 158.

всякий пустой подграф, имеющий в своем составе хотя бы одну вершину x из X_{k-1} , содержит менее $\varepsilon(T_k)$ вершин, так как заменяя x двумя смежными с ней вершинами из $X_k \setminus X_{k-1}$, мы получим пустой подграф с большим числом вершин. Отсюда следует, что для полной раскраски вершин дерева T_k описанным выше процессом понадобится ровно k цветов, притом различных, поскольку на каждом этапе для окраски выбирается максимально возможное множество вершин, т. е. всякая вершина, еще не окрашиваемая на данном этапе, смежна хотя бы с одной, подлежащей окраске. В действительности же всякое дерево есть бихроматический граф, и для полной раскраски его вершин достаточно двух цветов.

Полную раскраску вершин графа $L = (X, U)$ в $\gamma(L)$ цветов будем кратко называть *минимальной*; мы видели только что, как не нужно ее искать. Рассмотрим другой процесс, на этот раз принципиально верный, хотя и неприменимый пока

непосредственно в практике; его теоретическое значение связано с постановкой важной проблемы, а также с некоторыми конкретными результатами, которые уже имеют непосредственные приложения и будут освещены во второй части книги.

Две вершины y и z графа $L = (X, U)$ мы назовем *соцветными*, если существует такая минимальная раскраска $g(x)$ его вершин, при которой $g(y) = g(z)$. * Отношение соцветности рефлексивно и симметрично, но не транзитивно (так, у графа на рис. 159 вершины a и f соцветны, вершины f и d тоже соцветны, а вершины a и d не соцветны).

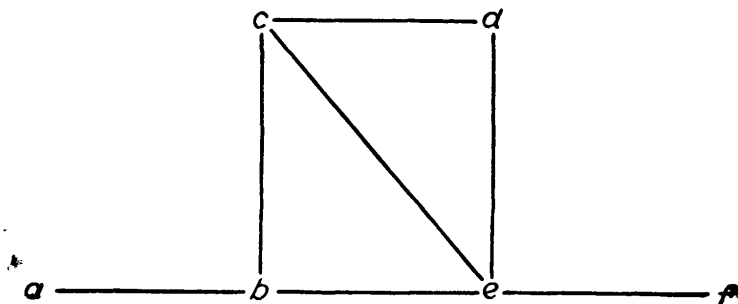


Рис. 159.

Смежные вершины всегда несоцветны, но обратное утверждение неверно (см., например, вершины a и d). Как показывает следствие 1 из теоремы Брукса (§ 41), неполный связный граф $L = (X, U)$ всегда обладает хотя бы одной парой соцветных различных вершин **. Отождествление двух таких вершин превращает L в связный граф L' с прежним хроматическим числом (чтобы L' не оказался мультиграфом, условимся отождествлять также между собой такие ребра, которые налагаются друг на друга вследствие отождествления вершин). Если L' — неполный, то в нем опять имеется пара различных соцветных вершин, и т. д. Продолжая процесс отождествлений, в конечном итоге получим полный граф $F_{\gamma(L)}$, а одна из минимальных раскрасок вершин исходного графа L находится следующим образом: окрасим вершины $F_{\gamma(L)}$ в цвета $1, 2, \dots, \gamma(L)$ и придадим вершине $x \in X$ графа L цвет той вершины графа $F_{\gamma(L)}$, в которую она перешла после всех отождествлений.

Описанный процесс был бы весьма удобен при наличии хорошего критерия, позволяющего распознавать соцветность вершин, не зная заранее ни одной минимальной раскраски. Такого критерия пока нет (все известные доказательства существо-

*) В терминологии А. П. Ершова и Г. И. Кожухина (1962) при этом еще требуется, чтобы $\rho(y, z) = 2$.

**) Существование такой пары легко доказать и без теоремы Брукса, однако с практической точки зрения может оказаться полезным тот факт, что, согласно следствию 1, соцветные вершины всегда найдутся в окружении любой вершины степени $\gamma(L)$.

вания соцветных вершин предполагают, что некоторая минимальная раскраска уже задана), нахождение этого критерия представляет очень трудную проблему, а без него весь описанный процесс с чисто практической точки зрения не более эффективен, чем общеизвестный рецепт: чтобы поймать воробья, надо насыпать ему на хвост соли.

Ознакомившись с двумя попытками, одна из которых принципиально порочна, а другая представляет пока лишь чисто теоретический интерес, перейдем, наконец, к таким способам нахождения хроматического числа и некоторой минимальной раскраски, которые, несмотря на недостаточную эффективность, не являются абсурдными и, видимо, могут быть усовершенствованы.

Способ Х. Магу (1959), основанный на выявлении всех максимальных пустых подграфов (см. § 9 в главе 1), мы разъясним на конкретном примере графа L рис. 159. Раскрыв произведение

$$(a + b)(b + ce)(c + de)(e + f) = ace + bce + bde + bcdf$$

и образовав дополнения к множествам сомножителей, составляем матрицу максимальных пустых подграфов:

$$\begin{array}{c} P \quad Q \quad R \quad S \\ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| ; \end{array}$$

сами эти подграфы обозначены буквами P, Q, R, S . Каждой из вершин L отнесем сумму (формальную) тех из подграфов P, Q, R, S , которые содержат эту вершину, и напишем произведение этих сумм:

$$(Q + R + S) P R (P + Q) S (P + Q + R). \quad (*)$$

Если теперь раскрыть все скобки по правилам булевой алгебры, используя до конца закон поглощения, то получится сумма, в которой, как мы докажем ниже, каждое слагаемое состоит из множеств, в совокупности содержащих все вершины L , причем для всякого представления множества вершин L в виде объединения максимальных пустых подграфов имеется соответствующее слагаемое. В нашем примере (*) равно PRS , так что

вся сумма свелась к одному слагаемому. Для нахождения всевозможных минимальных раскрасок достаточно всеми возможными способами устранить дублирование вершин в системе множеств P, R, S . Это дает четыре раскраски:

	красный цвет	зеленый цвет	синий цвет
I	b, d, f	a, c	e
II	b, d	a, c, f	e
III	b, d, f	c	a, e
IV	b, d	c, f	a, e

В общем случае, когда после раскрытия произведения может остаться более одного слагаемого, для нахождения всех минимальных раскрасок надо рассмотреть все слагаемые с наименьшим количеством сомножителей; рекомендуем читателю поупражняться на графах, рассмотренных в § 9 (рис. 30 и 31).

Чтобы обосновать описанный алгоритм, будем каждую из букв P, Q, R, S трактовать как высказывание о том, что некоторая система \mathfrak{M} максимальных пустых подграфов L содержит подграф, обозначенный соответствующей буквой. Те и только те системы \mathfrak{M} , для которых высказывание (*) истинно, охватывают все вершины графа L ; поэтому после приведения формулы (*) к минимальной нормальной форме путем раскрытия всех скобок и применения закона поглощения (а такая форма единственна) мы получим полный и неповторный обзор всех объединений множеств P, Q, R, S , содержащих все вершины графа L . Остальное ясно.

Опасность, что закон поглощения мало упростит выкладки, здесь возникает дважды: при выявлении множеств P, Q, R, S и при раскрытии произведения (*). Нельзя ли переделать весь алгоритм так, чтобы эта опасность возникала только на одном этапе?

Второй способ предложен Г. С. Плесневичем (см. В. Г. Вининг и Г. С. Плесневич, 1965). Пусть $L = (X, U)$ — данный граф, причем $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Для каждого натурального числа k определим обыкновенный граф $L_k = (Y, V)$ следующим образом:

1) $Y \doteq \{y_{ij} / 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$, где y_{ij} — различные элементы, не принадлежащие X ;

2) вершины $y_{i_1 j_1}$ и $y_{i_2 j_2}$ графа L_k смежны тогда и только тогда, когда либо $i_1 = i_2$ & $j_1 \neq j_2$, либо x_{i_1} смежна с x_{i_2} в L и $j_1 = j_2$ (см., например, рис. 160)*.

Т е о р е м а П л е с н е в и ч а.

$$\gamma(L) = \min \{k/\varepsilon(L_k) = n(L)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X_1, X_2, \dots, X_k — правильная раскраска вершин L . В графе L_k множество

$$Y' \doteq \{y_{ij}/x_i \in X_j\},$$

состоящее из $|Y'| = \sum_{j=1}^k |X_j|$ вершин, порождает пустой подграф; поэтому для количества окрашенных вершин графа L имеем оценку

$$\sum_{j=1}^k |X_j| \leq \varepsilon(L_k).$$

Наоборот, всякому пустому подграфу (Y', \emptyset) графа L_k отвечает правильная раскраска вершин L в $\leq k$ цветов, именно

$$X_j = \{x_i/y_{ij} \in Y'\}$$

($j = 1, 2, \dots, k$); в частности, всегда существует правильная раскраска, для которой

$$\sum_{j=1}^k |X_j| = \varepsilon(L_k).$$

Далее, при любом k

$$\varepsilon(L_k) \leq n(L).$$

Из всего этого следует, что полная раскраска вершин графа L в k цветов возможна тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon(L_k) = n(L),$$

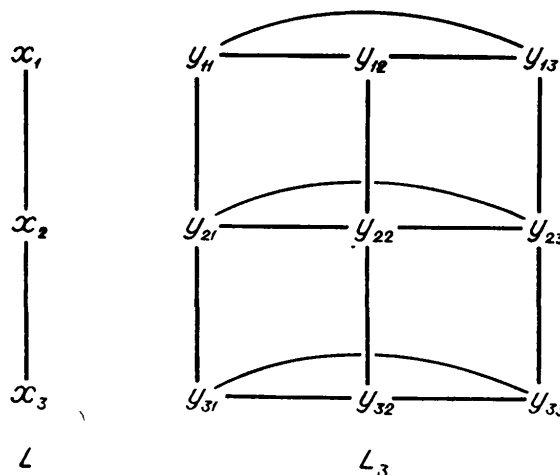


Рис. 160.

*) Граф L_k изоморфен декартову произведению (см., например, Ф. Харари, 2/1959, а также вторую часть нашей книги) графа L на F_k ; в частности, L_1 изоморфен L .

откуда, на основании определения хроматического числа,

$$\gamma(L) = \min \{k/\varepsilon(L_k) = n(L)\},$$

что и требовалось.

Таким образом, для нахождения хроматического числа мы из данного графа L последовательно образуем вспомогательные графы L_1, L_2, \dots и определяем их неплотности $\varepsilon(L_1), \varepsilon(L_2), \dots$ до тех пор, пока впервые не наступит равенство $\varepsilon(L_k) = n(L)$; тогда $\gamma(L) = k$, и всевозможным подграфом типа $\varepsilon_{n(L)}$ в L_k отвечают всевозможные минимальные раскраски вершин исходного графа L . Неудобство этого способа состоит лишь в том, что неплотность графа сама вычисляется не слишком просто.

Третий способ, предложенный И. М. Витавером (1962), основан на нахождении некоторой специальной ориентации ребер. Пусть $L = (X, U)$ — данный обыкновенный граф. Через $\tau(L)$ обозначим наибольшее из таких целых чисел k , что при любой ориентации всех ребер графа L полученный орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$ содержит по крайней мере один ормаршрут длины k .

Т е о р е м а В и т а в е р а.

$$\gamma(L) = \tau(L) + 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $l \doteq \gamma(L)$ и пусть $g(x)$ — одна из минимальных раскрасок вершин графа L . Полагая

$$\vec{U} \doteq \{xy/\widetilde{xy} \in U \ \& \ g(x) > g(y)\},$$

получим орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$, не содержащий ормаршрутов длины l , а значит, и подавно, ормаршрутов еще большей длины. Следовательно, $\tau(L) \leq l - 1$, т. е.

$$(I) \quad \gamma(L) \geq \tau(L) + 1.$$

Пусть теперь, наоборот, данный граф $L = (X, U)$ превращен некоторой ориентацией ребер в орграф $\vec{L} = (X, \vec{U}) = (X, \Gamma)$, не содержащий ни одного ормаршрута длины более $\tau(L)$. Определим последовательность X_1, X_2, \dots множеств вершин, полагая

$$X_i \doteq \{x/x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \ \& \ \Gamma x \subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j\}$$

($i = 1, 2, \dots$); при этом считаем $\bigcup_{j=1}^0 X_j \doteq \emptyset$, т. е.

$$X_1 \doteq \{x/x \in X \ \& \ \Gamma x = \emptyset\}.$$

Из определения множеств X_i непосредственно следует, что

$$(1) i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset;$$

(2) в каждом X_i никакие две вершины не смежны.

Кроме того,

$$(3) X_i = \emptyset \Rightarrow X = \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \quad \text{при } i \geq 1;$$

в самом деле, равенство $X_i = \emptyset$ означает (согласно определению X_i), что

$$\forall x \in X (x \notin X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \vee \Gamma x \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j),$$

или

$$\forall x [x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \Rightarrow \Gamma x \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j) \neq \emptyset],$$

иначе говоря,

$$\forall x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \exists y \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j (y \in \Gamma x),$$

откуда сразу видно, что в случае $X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \neq \emptyset$ оргграф \vec{L} обладал бы сколь угодно длинными ормаршрутами.

Далее,

$$(4) X_i \neq \emptyset = \forall x \in X_i \exists y \in X_{i-1} (y \in \Gamma x) \quad \text{при } i \geq 2.$$

Действительно, пусть $X_i \neq \emptyset$, а x — произвольная вершина из X_i ; по определению X_i имеем $\Gamma x \subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j$ и $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j$,

значит, и подавно $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-2} X_j$, а так как $x \notin X_{i-1}$, то

$\Gamma x \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{i-2} X_j$; следовательно, $\Gamma x \cap X_{i-1} \neq \emptyset$, откуда и вытекает (4).

Наконец, из (4) и из предположения об отсутствии в \vec{L} ормаршрутов длины $> \tau(L)$ заключаем, что

$$(5) i > \tau(L) + 1 \Rightarrow X_i = \emptyset.$$

На основании (3), (5) и непустоты X имеем

$$X = \bigcup_{j=1}^l X_j,$$

где $1 \leq l \leq \tau(L) + 1$ и $X_i \neq \emptyset$ при $i = 1, 2, \dots, l$; значит, ввиду (1) и (2), система множеств X_1, X_2, \dots, X_l есть полная раскраска вершин графа L в $l \leq \tau(L) + 1$ цветов. Отсюда

$$(II) \quad \gamma(L) \leq \tau(L) + 1.$$

Из (I) и (II) вытекает справедливость теоремы.

Таким образом, нахождение хроматического числа $\gamma(\vec{L})$ равносильно нахождению числа $\tau(L)$, а для построения какой-либо из минимальных раскрасок вершин графа L достаточно задать одну из ориентаций ребер так, чтобы полученный орграф \vec{L} не содержал ормаршрутов длины более $\tau(L)$, и затем выявить множества X_1, X_2, \dots , фигурирующие во второй части доказательства теоремы. Осуществим этот план, пользуясь матрицей смежности графа над булевой алгеброй $B \doteq B\{0, 1\}$ (см. § 7 в главе 1).

Пусть $R \doteq R_L = (r_{ij})$ — матрица смежности графа L над B ; $\{\epsilon_{ij}\}$ — система переменных в B , соответствующих ребрам L ; $\vec{R} = \vec{R}(\{\epsilon_{ij}\}) = (\vec{r}_{ij}(\{\epsilon_{ij}\}))$ — общий вид матрицы смежности орграфов \vec{L} , получаемых из L всевозможными ориентациями ребер. Как мы уже знаем (см § 28 в главе 4), элемент $\vec{r}_{ij}^{(l)}(\{\epsilon_{ij}^0\})$ матрицы $[\vec{R}(\{\epsilon_{ij}^0\})]^l$ равен 1 или 0, смотря по тому, существует или не существует ормаршрут длины l из вершины x_i в вершину x_j в орграфе \vec{L} , полученном из L той ориентацией ребер, которая отвечает системе значений $\{\epsilon_{ij}^0\}$. Поэтому

$$\tau(L) = \max \left\{ l \mid \sum_{i, j=1}^{n(L)} \vec{r}_{ij}^{(l)}(\{\epsilon_{ij}\}) \equiv 1 \right\},$$

где \equiv означает равенство при всех системах значений переменных $\{\epsilon_{ij}\}$. Для нахождения одной из минимальных раскрасок надо задать конкретную систему значений $\{\epsilon_{ij}^0\}$, при которой

$$\sum_{i, j=1}^{n(L)} \vec{r}_{ij}^{\tau(L)+1}(\{\epsilon_{ij}^0\}) = 0,$$

после чего образовать матрицу $\vec{R}(\{\epsilon_{ij}^0\})$ и определить по ней множества X_1, X_2, \dots следующим образом: к X_1 относим все те вершины $x \in X$, которым в $\vec{R}(\{\epsilon_{ij}^0\})$ отвечают строки из одних нулей; затем вычеркиваем из матрицы строки и столбцы, соответствующие вершинам X_1 , и по оставшейся матрице ищем X_2 точно так же, как искали X_1 по исходной; и так далее до тех пор, пока не будет исчерпана вся матрица.

Существенным недостатком этого способа является весьма быстрый рост сложности булева выражения $\sum_{i,j=1}^{n(L)} \vec{r}_{ij}^{(l)} \{\varepsilon_{ij}\}$ при увеличении l .

Для иллюстрации рассмотрим граф, показанный на рис. 161. Имеем

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{R}(\{\varepsilon_{ij}\}) = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & 0 \\ \varepsilon'_{12} & 0 & \varepsilon_{23} & 0 \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & 0 & \varepsilon_{34} \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\sum_{i,j=1}^4 \vec{r}_{ij} \{\varepsilon_{ij}\} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon'_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{23} + \varepsilon_{34} + \varepsilon'_{34} \equiv 1$$

(факт, выражаемый этим тождеством, тривиален: ввиду непустоты данного графа ормаршруты длины 1 существуют при любой ориентации ребер);

$$[\vec{R}(\{\varepsilon_{ij}\})]^2 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} & \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} & \varepsilon_{13}\varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} & 0 & \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23}\varepsilon_{34} \\ \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{23} & \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13} & 0 & 0 \\ \varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} & \varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

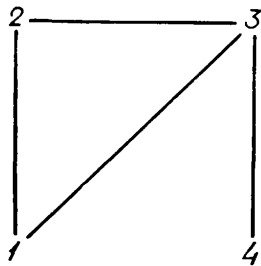


Рис. 161.

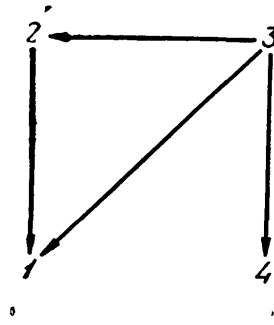


Рис. 162.

$$\sum_{i,j=1}^4 \vec{r}_{ij}^{(2)} \{\varepsilon_{ij}\} = \varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{34} + \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} + \varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} \equiv 1; *$$

*) Мы не указываем, как получается это тождество, ибо считаем известным разрешающий алгоритм для исчисления высказываний.

$$[\vec{R}(\{\varepsilon_{ij}\})]^3 =$$

$$= \begin{vmatrix} \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon'_{34} \\ 0 & \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} & 0 & \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{34} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} & 0 \\ \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} & \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\sum_{i, j=1}^4 \vec{r}_{ij}^{(3)} \{\varepsilon_{ij}\} = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} +$$

$$+ \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} \neq 1;$$

следовательно, $\tau = 2$, $\gamma = 3$. Одной из систем значений, при которой последняя сумма равна нулю, будет

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{34} = 1;$$

соответствующий орграф изображен на рис. 162, а его матрица смежности

$$\vec{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{номера} \\ \text{вершин.} \end{matrix}$$

Из \vec{R} сразу находим $X_1 = \{1, 4\}$; вычеркивая первую и четвертую строки, а также первый и четвертый столбцы, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix},$$

из которой $X_2 = \{2\}$; вычеркивая первую строку и первый столбец (они являются вторыми в исходной матрице \vec{R}), получаем матрицу $(0) 3$, откуда $X_3 = \{3\}$. Таким образом, хроматическое число графа равно 3, а одной из минимальных раскрасок вершин является такая, при которой первая и четвертая вершины окрашены в красный цвет, вторая — в зеленый и третья — в синий.

Другие способы нахождения хроматического числа по матрице инцидентий графа будут рассмотрены во второй части книги. А сейчас мы не можем удержаться от соблазна изложить изящный результат Дж. Минти (1/1962), несмотря на то, что возможности эффективного практического применения этого результата нам пока не ясны.

Если

$$Z \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

— произвольный маршрут в обыкновенном орграфе $\vec{L} = (X, \vec{U})$, то через $p^+(Z)$ обозначим количество тех дуг маршрута, которые ориентированы в направлении его обхода (т. е. количество тех u_i из Z , для которых $u_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i}$), а через $p^-(Z)$ — количество дуг маршрута, ориентированных противоположно (т. е. таких u_i из Z , для которых $u_i = \overrightarrow{x_i x_{i-1}}$). Каждому маршруту Z и натуральному числу k отнесем функцию

$$\varphi_k(Z) \doteq p^+(Z) - (k - 1) p^-(Z),$$

выражающую, образно говоря, прибыль от путешествия по маршруту Z при условии, что за прохождение дуги в направлении ее ориентации путешественник получает 1 доллар, а за прохождение дуги против ее ориентации платит штраф в размере $k - 1$ долларов. Функция $\varphi_k(Z)$ аддитивна, т. е. если

$$Z = x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l u_{l+1} x_{l+1} \dots x_{s-1} u_s x_s,$$

$$Z_1 \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l \quad \text{и} \quad Z_2 \doteq x_l u_{l+1} x_{l+1} \dots x_{s-1} u_s x_s,$$

то

$$\varphi_k(Z) = \varphi_k(Z_1) + \varphi_k(Z_2);$$

это вытекает из очевидного факта аддитивности функций $p^+(Z)$ и $p^-(Z)$.

Т е о р е м а **М и н т и.** *Обыкновенный граф $L = (X, U)$ обладает хроматическим числом $\gamma(L) \leq k \geq 1$ тогда и только тогда, когда его ребра допускают такую ориентацию, при которой в полученном орграфе $\vec{L} = (X, \vec{U})$ для любого циклического маршрута Z выполняется условие $\varphi_k(Z) \leq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала допустим, что $\gamma(L) \leq k$, где $k \leq 1$, и пусть $g(x)$ — какая-либо полная раскраска вершин графа L с помощью цветов $1, 2, \dots, \gamma(L)$. Ориентируем каждое ребро $u \in U$ в направлении возрастания $g(x)$, т. е. положим

$$\overrightarrow{xy} \in \vec{U} \Leftrightarrow u = \widetilde{xy} \in U \quad \& \quad g(x) < g(y),$$

и в полученном обыкновенном орграфе $\vec{L} = (X, \vec{U})$ рассмотрим произвольный циклический маршрут

$$Z \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l,$$

где $x_l = x_0$. Так как

$$0 < |g(x_{i-1}) - g(x_i)| < \gamma(L) \leq k,$$

т. е.

$$1 \leq |g(x_{i-1}) - g(x_i)| \leq k - 1$$

($i = 1, 2, \dots, l$), то

$$\begin{aligned} \varphi_k(Z) &= p^+(Z) - (k-1)p^-(Z) \leq \sum_{(i)}^{\rightarrow} [g(x_i) - g(x_{i-1})] - \\ &- \sum_{(i)}^{\leftarrow} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] = \sum_{i=1}^l [g(x_i) - g(x_{i-1})] = g(x_l) - g(x_0) = 0, \end{aligned}$$

причем $\sum_{(i)}$ означает суммирование по тем $i \in \{1, 2, \dots, l\}$,

для которых $u_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i}$, а $\sum_{(i)}^{\leftarrow}$ — по тем i , для которых $u_i = \overleftarrow{x_i x_{i-1}}$.

Наоборот, пусть граф L удалось ориентировать так, чтобы неравенство $\varphi_k(L) \leq 0$ соблюдалось для всех циклических маршрутов. Выбрав произвольно вершину $x_0 \in X$, положим

$$f(x) \doteq \max \varphi_k(Z),$$

где максимум берется по всем маршрутам из x_0 в x . Функция $f(x)$ определена для каждой вершины $x \in X$; в самом деле, замена маршрута Z простой цепью посредством отбрасывания его циклических частей (см. лемму § 11 в главе 2) не может уменьшить значения функции φ_k (ввиду ее неположительности на циклических маршрутах и свойства аддитивности), поэтому при нахождении максимума достаточно в качестве Z брать только простые цепи, соединяющие x_0 с x , а число всех таких цепей конечно. Для смежных вершин x и y всегда

$$0 < |f(x) - f(y)| < k, \quad (*)$$

ибо в случае $f(x) = f(y)$ & $\overrightarrow{xy} \in \vec{U}$ маршрут из x_0 в y через x мог бы принести доход $\varphi_k = f(x) + 1 > f(y)$, а в случаях $f(x) \geq f(y) + k$ & $\overrightarrow{xy} \in \vec{U}$ и $f(x) \geq f(y) + k$ & $\overrightarrow{yx} \in \vec{U}$ тот

же маршрут мог бы дать прибыль $\varphi_k = f(x) + 1 \geq f(y) + k + 1 > f(y)$, соответственно $\varphi_k = f(x) - (k - 1) \geq f(y) + k - (k - 1) = f(y) + 1 > f(y)$, что противоречит определению функции $f(x)$. Из неравенств (*) вытекает, что функция

$$g(x) \doteq [f(x)]_{\text{mod } k} + 1^*$$

представляет собой полную раскраску вершин графа L не более, чем k цветами. Теорема доказана.

Э. Я. Гринберг и И. Г. Илзиня, 1964 (см. также И. Г. Илзиня, 1965) описывают процедуру, которой пока приходится пользоваться на практике за неимением других эффективных алгоритмов нахождения минимальной раскраски и которая напоминает алгоритм слепого поиска выхода из лабиринта (см. начало § 18 в главе 2). Чтобы получить полную раскраску вершин не более чем в заданное число k цветов (или обнаружить, что это невозможно), сначала окрасим цветами $1, 2, \dots, \varphi(L)$ вершины некоторого наибольшего полного подграфа в L . Затем для не окрашенной еще вершины x выбираем наименьший из цветов $1, 2, \dots, \varphi(L), \dots, k$ так, чтобы не нарушилась правильность раскраски, и т. д.; если на каком-либо шаге такого цвета нет, то пересматриваем раскраску на предыдущем шаге, пробуя придать соответствующей вершине следующий (по номеру) допустимый цвет, а если и это невозможно, то возвращаемся еще на один шаг, ... В заметке И. Г. Илзини (1965) приведены следующие конкретные примеры решения на машине типа М-3: для графа с 46 вершинами и 126 ребрами в течение 8 сек найдена раскраска 6 цветами, а за 5 мин подсчитано 252 варианта такой раскраски; для другого графа, с 88 вершинами и 247 ребрами, в течение 21 сек найдена раскраска пятью цветами (вместо ожидаемых шести), а за 5 мин подсчитано 214 вариантов раскраски. Кстати, в обоих примерах степень графа значительно превышает его хроматическое число, так что непосредственное применение теоремы Брукса ничего бы не дало.

§ 43. Неполные раскраски вершин

При нахождении раскрасок вершин графа не всегда требуется полнота раскраски; иногда это требование заменено другим. Мы ограничимся здесь рассмотрением одной задачи Дж.

*) $[N]_{\text{mod } k}$ означает вычет числа N по модулю k (см. Введение).

Уэйсмана (1/1962), в которой фигурирует более общее условие, чем полнота.

Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный граф, а Y_1, Y_2, \dots, Y_k — некоторая система непустых попарно непересекающихся подмножеств множества X его вершин. Требуется найти правильную раскраску вершин графа L наименьшим количеством цветов, такую чтобы каждое из множеств Y_i содержало ровно по одной окрашенной вершине. В частности, если

$$\bigcup_{i=1}^k Y_i = X \text{ и } |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_k| = 1,$$

то получается уже рассмотренная в § 42 задача о нахождении минимальной полной раскраски.

Прежде всего, если хотя бы одно из множеств Y_i таково, что при каждой его вершине есть петля, то задача заведомо неразрешима. Если же каждое Y_i содержит вершину, не инцидентную ни одной петле, то решение, очевидно, существует, причем его достаточно искать для подграфа, полученного из L удалением всех вершин с петлями. Поэтому в дальнейшем мы можем без нарушения общности считать, что заданный граф L не имеет петель.

Задачу Уэйсмана в принципе можно решать перебором различных систем пустых подграфов, однако такой путь практически неприемлем для графов L с не слишком малым числом вершин. Получить достаточно эффективный алгоритм в общем случае пока не удалось, но задача облегчается тем, что для ее решения, оказывается, можно ограничиться рассмотрением не всех пустых подграфов графа L , а только максимальных (см. § 9 в главе 1).

Именно, пусть

$$L_1 = (Z_1, \emptyset; P), L_2 = (Z_2, \emptyset; P), \dots, L_p = (Z_p, \emptyset; P)$$

— какая-либо система максимальных пустых подграфов L , обладающая свойством

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \left(\bigcup_{j=1}^p Z_j \right) \cap Y_i \neq \emptyset$$

и такая, что в L не существует систем с этими свойствами, состоящих менее, чем из p подграфов. образуем множество Z , выбирая по одной вершине из каждого $\left(\bigcup_{j=1}^p Z_j \right) \cap Y_j$,

и положим

$$X_l \doteq \left(Z_l \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} Z_j \right) \cap Z$$

($l = 1, 2, \dots, p$). Так как $x_l \subseteq Z_l$, то множества X_l порождают в L пустые подграфы, и из определения Z и X_l следует далее, что

$$\begin{aligned} \left| \left(\bigcup_{l=1}^p X_l \right) \cap Y_i \right| &= \left| \left\{ \bigcup_{l=1}^p \left[Z_l \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} Z_j \right] \cap Z \right\} \cap Y_i \right| = \\ &= \left| \left\{ \left[\bigcup_{l=1}^p \left(Z_l \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} Z_j \right) \right] \cap Y_i \right\} \cap Z \right| = \left| \left[\left(\bigcup_{l=1}^p Z_l \right) \cap Y_i \right] \cap Z \right| = 1 \end{aligned}$$

при всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Таким образом, система подмножеств X_1, X_2, \dots, X_p , порождающих в L пустые подграфы, содержит ровно по одной вершине из каждого Y_i . В то же время никакая система X'_1, X'_2, \dots, X'_q при $q < p$ не может обладать всеми этими свойствами, ибо иначе, обозначая через Z'_l множество вершин максимального пустого подграфа в L , содержащего X'_l ($l = 1, 2, \dots, q$), мы получили бы систему

$$L'_1 = (Z'_1, \emptyset; P), L'_2 = (Z'_2, \emptyset; P), \dots, L'_q = (Z'_q, \emptyset; P)$$

максимальных пустых подграфов L , обладающую свойством

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \left(\bigcup_{j=1}^q Z'_j \right) \cap Y_i \neq \emptyset$$

и состоящую менее, чем из p подграфов, что невозможно.

Что же касается задачи выявления всех максимальных пустых подграфов заданного графа, то для обыкновенных графов она уже рассмотрена (см. § 9), а граф общего вида без петель можно, очевидно, заменить его скелетом.

§ 44. Раскраска ребер

Раскраску ребер (см. § 40) графа $L = (X, U; P)$ общего вида в k цветов, где $0 \leq k \leq m(L)$ нам сейчас будет удобнее всего трактовать как систему

$$U_1, U_2, \dots, U_k$$

попарно непересекающихся непустых подмножеств множества U его ребер, удовлетворяющую условию, что никакие два

различных ребра из одного и того же подмножества не смежны. Если последнее условие не соблюдено, то мы будем говорить о *неправильной раскраске*, хотя такая система подмножеств вообще не является раскраской в смысле первоначального определения (ибо U_1, U_2, \dots, U_k уже не служат прообразами ребер ни при каком частичном гомоморфизме графа на веер). Под словом «раскраска», если нет оговорки, по-прежнему будет пониматься только правильная раскраска. Напомним, что раскраска ребер называется *полной*, когда $k > 0$ и

$$\bigcup_{i=1}^k U_i = U,$$

и что наименьшее k , при котором граф L допускает такую раскраску, есть, по определению, хроматический класс $\chi(L)$.

Пусть L' — суграф, полученный из L удалением всех петель; тогда

$$\chi(L) = \chi(L') + \frac{1}{2} \max \{s(x) - \chi(L') + |s(x) - \chi(L')| / x \in X\},$$

где $s(x)$ — степень вершины x в L , т. е.

$$s(x) \doteq s^+(x) + s^-(x) + s^0(x) + \tilde{s}(x)$$

(см. § 2 в главе 1). В самом деле, после раскраски ребер L' в k цветов можно без увеличения общего количества цветов окрасить при каждой вершине x еще не более $k - s'(x) = k - s(x) + s^0(x)$ петель ($s'(x)$ означает степень x в L'); остальные же $s - (k - s(x) + s^0(x)) = s^0(x) - k$ петель, если они есть (т. е. если $s(x) - k > 0$), потребуют различных добавочных цветов. При этом получение самих раскрасок ребер L из раскрасок ребер L' не представляет труда. Учитывая сказанное и тот факт, что степени вершин графа являются хорошо обозримыми и легко вычислимыми его характеристиками, мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением графов без петель.

Степенью графа $L = (X, U; P)$ мы по-прежнему называем число

$$\sigma(L) \doteq \max \{s(x) / x \in X\},$$

где на этот раз, ввиду отсутствия петель, $s(x) = s^+(x) + s^-(x) + \tilde{s}(x)$. Нижняя оценка хроматического класса через степень тривиальна:

$$\chi(L) \geq \sigma(L);$$

при этом равенство достигается, например, на веерах. Вывод точной верхней оценки, принадлежащий К. Шеннону (1949), опирается на ряд определений и лемм.

Пусть U_1, U_2, \dots, U_k — какая-либо раскраска ребер графа L , причем $k \geq 2$; цепь

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

называется (s, t) -цепью ($1 \leq s \leq k, 1 \leq t \leq k, s \neq t$), если ее ребра попеременно окрашены в цвета s и t , т. е. если

либо $u_i \in U_s$ при нечетных i , $u_i \in U_t$ при четных i ,

либо $u_i \in U_t$ при нечетных i , $u_i \in U_s$ при четных i ;

в частности, (s, t) -цепь может обладать длиной 0 или 1, а также может оказаться циклом. Ясно, что всякая (s, t) -цепь есть либо простая цепь, либо простой цикл четной длины (иначе раскраска ребер графа не была бы правильной).

(s, t) -цепь, не являющаяся частью никакой более длинной (s, t) -цепи, называется максимальной.

Л е м м а 1. В графе, ребра которого окрашены не менее чем двумя цветами, никакие две максимальные (s, t) -цепи (с одной и той же парой цветов s, t) не могут иметь общих вершин.

Очевидно.

При заданной раскраске ребер графа мы будем обозначать через M_x множество тех цветов, которые не использованы для ребер, инцидентных вершине x , т. е.

$$M_x \doteq \{i / \forall u \in U [I(x, u) \Rightarrow u \notin U_i] \ \& \ \exists v \in U_i\}.$$

Л е м м а 2. Пусть U_1, U_2, \dots, U_k — раскраска ребер графа $L = (X, U; P)$, причем $|X| \geq 3, |U| \geq 2$ и $k \geq 2$. Пусть три различные вершины $x_1, x_2, x_3 \in X$ и два различных цвета s, t ($1 \leq s \leq k, 1 \leq t \leq k, s \neq t$) таковы, то

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} (s \in M_{x_i} \vee t \in M_{x_i})$$

(т. е. около каждой из вершин x_1, x_2, x_3 отсутствует хотя бы один из двух цветов s, t). Тогда по крайней мере одна из вершин x_i ($i = 1, 2, 3$) не соединена (s, t) -цепью ни с какой из двух остальных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия, вершина x_i ($i = 1, 2, 3$) не может быть инцидентна более чем одному ребру (s, t) -цепи. Поэтому существует ровно одна максимальная (s, t) -цепь, начинающаяся в x_1 ; если эта цепь оканчивается в

вершине, отличной от x_2 и x_3 , то, ввиду леммы 1, вершина x_1 обладает требуемым свойством; если же цепь оканчивается, скажем, в x_2 , то искомой является вершина x_3 , вследствие той же леммы 1.

Под *перекраской* (s, t) -цепи графа L понимается переход от заданной раскраски его ребер (не менее чем двумя цветами) к новой раскраске, при которой все ребра данной цепи, имевшие цвет s , получают цвет t , и наоборот, а ребра, не принадлежащие этой цепи, сохраняют прежнюю окраску.

Л е м м а 3. *В графе, ребра которого окрашены не менее чем двумя цветами, перекраска любой максимальной (s, t) -цепи не нарушает правильности всей раскраски.*

Очевидно, ввиду леммы 1 и максимальности цепи.

Верхнюю оценку хроматического класса дает

Т е о р е м а Ш е н н о н а. *Если $L = (X, U; P)$ — граф без петель, то*

$$\chi(L) \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma(L) \right\rfloor.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о *. Пусть U_1, U_2, \dots, U_k — такая правильная раскраска ребер L с помощью $k \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor$ цветов ($\sigma \doteq \sigma(L)$), при которой количество окрашенных ребер является максимально возможным; покажем, что эта раскраска — полная.

Допустим противное, что при данной раскраске некоторое ребро u , инцидентное вершинам x и y , осталось неокрашенным. Тогда $k = \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor$, ибо в случае $k < \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor$ можно было бы окрасить ребро u одним из неиспользованных цветов.

$$(1) \quad M_x \cap M_y = \emptyset,$$

так как иначе мы окрасили бы ребро u в цвет, общий для M_x и M_y .

Из (1) следует, что если $M_x = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$, то вершина y инцидентна ребрам u_1, u_2, \dots, u_l , окрашенным соответственно в цвета t_1, t_2, \dots, t_l и не инцидентным вершине x . Пусть ребро u_i соединяет y с вершиной z_i ($1 \leq i \leq l$; некоторые z_1, z_2, \dots, z_l могут совпадать).

$$(2) \quad M_{z_i} \cap M_y = \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots, l),$$

*) Как будет показано в конце параграфа, теорему Шеннона нетрудно вывести из теоремы Визинга, которая доказывается независимо. Однако из методических соображений мы приводим отдельное доказательство теоремы Шеннона.

ибо если $M_{z_i} \cap M_y \neq \emptyset$ при некотором i , то можно перекрасить ребро u_i в цвет, общий для M_{z_i} и M_y , а затем окрасить u в цвет t_i .

$$(3) \quad \left(\bigcup_{i=1}^l M_{z_i} \right) \cap M_x \neq \emptyset.$$

В самом деле, ввиду (2) множество

$$N \doteq \left(\bigcup_{i=1}^l M_{z_i} \right) \cap (M_x \cup M_y)$$

совпадает с множеством левой части (3); учитывая (1) и (2). имеем

$$|N| = \left| \bigcup_{i=1}^l M_{z_i} \right| + |M_x| + |M_y| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^l M_{z_i} \right) \cup M_x \cup M_y \right|.$$

Далее, для любой $z \in X$

$$|M_z| \geq \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor - \sigma = \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor,$$

а для вершины x , ввиду наличия инцидентного ей неокрашенного ребра u , даже

$$|M_x| \geq \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor - (\sigma - 1) = \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor + 1,$$

и по той же причине

$$|M_y| \geq \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor + 1.$$

Наконец, имеем тривиальную оценку

$$\left| \left(\bigcup_{i=1}^l M_{z_i} \right) \cup M_x \cup M_y \right| \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |N| &\geq \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{3}{2} \sigma \right\rfloor = \\ &= 2 - \left(\sigma - 2 \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor \right) \geq 1, \end{aligned}$$

поскольку число в круглых скобках, будучи остатком от деления σ на 2, не превосходит единицы. Итак, $N \neq \emptyset$, поэтому (3) доказано.

Пусть

$$t_j \in \left(\bigcup_{i=1}^l M_{z_i} \right) \cap M_x$$

и M_{z_i} — одно из множеств, содержащих t_j . Выберем какой-нибудь цвет $t \in M_y$. Тройка вершин x, y, z_i и пара цветов t_j, t удовлетворяют условиям леммы 2, значит, среди этих трех

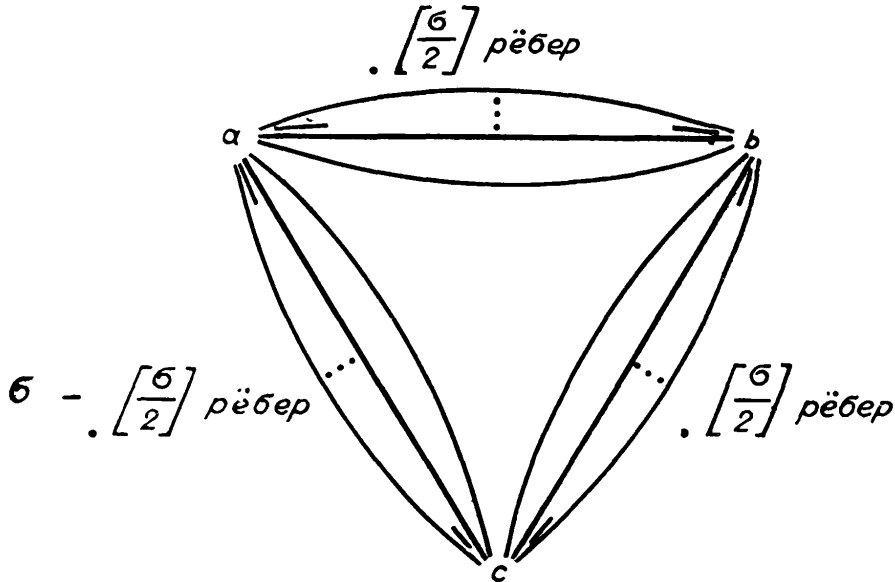


Рис. 163.

вершин есть такая z_0 , которая не соединена (t_j, t) -цепью ни с одной из двух остальных. Выбрав вершину z_0 , перекрасим начинающуюся в ней максимальную (t_j, t) -цепь; после этого:

если $z_0 = x$, то окрасим ребро u в цвет t ;

если $z_0 = y$, то окрасим u в цвет t_j ;

если $z_0 = z_i$, то перекрасим ребро u_i в цвет t , а затем окрасим u в цвет t_i .

Таким образом, во всех случаях удастся осуществить такую раскраску ребер не более чем $\left\lceil \frac{3}{2} \sigma \right\rceil$ цветами, при которой число окрашенных ребер превышает максимально возможное. Полученное противоречие говорит о том, что раскраска U_1, U_2, \dots, U_k — полная. Теорема доказана.

Оценку Шеннона нельзя улучшить без привлечения дополнительной информации о графе, ибо граф $(X, U; P)$, у которого $X = \{a, b, c\}$, $|\{u/\tilde{P}(a, u, b)\}| = |\{u/\tilde{P}(b, u, c)\}| = \left\lceil \frac{\sigma}{2} \right\rceil$ и $|\{u/\tilde{P}(a, u, c)\}| = \sigma - \left\lceil \frac{\sigma}{2} \right\rceil$ (рис. 163), обладает степенью σ и требует ровно $\left\lceil \frac{3}{2} \sigma \right\rceil$ цветов для полной раскраски ребер. Привлечение же дополнительной характеристики гра-

фа (практически столь же легко вычисляемой, как и степень), а именно наибольшего количества ребер между смежными вершинами, позволило В. Г. Визингу (1/1964, 2/1965, 3/1965) значительно улучшить оценку.

Теорема Визинга. Если $L = (X, U; P)$ — p -граф ($p \geq 0$) без петель (см. § 4 в главе 1), то

$$\chi(L) \leq \sigma(L) + p.$$

Доказательство. Пусть U_1, U_2, \dots, U_k — правильная раскраска максимально возможного количества ребер графа L посредством $k \leq \sigma + p$ цветов ($\sigma \doteq \sigma(L)$) и пусть u — ребро, инцидентное вершинам x и y , оставшееся неокрашенным; тогда $k = \sigma + p$ и $\forall z \in X (|M_z| \geq p)$. Как и при доказательстве теоремы Шеннона, $M_x \cap M_y = \emptyset$.

Каждому окрашенному ребру, инцидентному вершине y , сопоставим другой цвет таким образом, чтобы всем ребрам, соединяющим y с одной и той же вершиной z , оказались сопоставленными различные цвета из множества M_z ; это всегда возможно, поскольку вершины y и z соединены не более чем p ребрами, а $|M_z| \geq p$. Попутно заметим, что $|M_x| \geq p + 1$.

Существует такая последовательность u_1, u_2, \dots, u_l ребер инцидентных вершине y , что

(1) все u_i различны и окрашены; цвет ребра u обозначим через s_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, l$);

(2) $s_0 \in M_x$, причем цвет s_0 не сопоставлен ни одному из ребер, соединяющих y с x ;

(3) ребру u_i сопоставлен цвет s_i ($i = 1, 2, \dots, l$);

(4) последовательность максимальна, т. е. ее невозможно продолжить с сохранением свойств (1), (2) и (3).

Действительно, ввиду $|M_x| \geq p + 1$ цвет s_0 , удовлетворяющий условию (2), всегда найдется, а в силу $M_x \cap M_y = \emptyset$ имеем $s_0 \notin M_y$, т. е. вершине y инцидентно некоторое ребро u_1 цвета s_0 , откуда $l \geq 1$; но l конечно, ибо все u_i различны. Концы ребер u_1, u_2, \dots, u_l , отличные от y , обозначим соответственно через z_1, z_2, \dots, z_l (некоторые из этих вершин могут совпадать друг с другом или с x).

По отношению к цвету s_l (сопоставленному последнему ребру последовательности) возможны следующие случаи.

Случай 1: $s_l \in M_y$. Тогда перекрасим ребро u_l в цвет s_l , ребро u_{l-1} в цвет s_{l-1}, \dots , ребро u_1 в цвет s_1 , после чего окрасим ребро u в цвет s_0 .

Случай 2: $s_l = s_0$. Пусть t — некоторый цвет из M_y ; тогда $t \neq s_0$. Для вершин x, y, z_l ($\neq x$, ввиду условия (2)) и цветов s_0, t выполнены условия леммы 2, значит, среди этих трех вершин имеется такая z_0 , которая не соединена ни с одной из двух остальных (s_0, t) -цепью. Выбрав z_0 , перекрасим начинающуюся в ней максимальную (s_0, t) -цепь; после этого:

если $z_0 = z_l$, то, сопоставляя ребру u_l цвет t (без изменения закона сопоставления цветов остальным ребрам), мы окажемся в условиях случая 1;

если $z_0 = x$, то окрасим ребро u в цвет t ;

если $z_0 = y$, то окрасим u в цвет s_0 .

Случай 3: $s_l = s_j$, где $1 \leq j \leq l - 1$. Пусть $t \in M_y$; тогда $t \neq s_j$, так как в цвет s_j окрашено инцидентное y ребро u_{j+1} . Условия леммы 2 соблюдены теперь для вершин y, z_l, z_j и цветов s_j, t . Выбрав из трех вершин такую z_0 , которая не соединена ни с какой из двух остальных (s_j, t) -цепью, перекрасим максимальную (s_j, t) -цепь, начинающуюся в z_0 . Если $z_0 = z_l$, то, сопоставляя (после перекраски) ребру u_l цвет t , мы окажемся в условиях случая 1. Если $z_0 = y$, то первым ребром максимальной (s_j, t) -цепи, начинающейся в y , является u_{j+1} цвета s_j , поэтому после перекраски мы снова оказываемся в условиях случая 1, с той лишь разницей, что роль числа l теперь играет j . Наконец, если $z_0 = z_j$, то, сопоставив после перекраски ребру u_j цвет t , мы опять придем к случаю 1, где роль l играет j .

В силу свойств (1), (2), (3), (4) последовательности u_1, u_2, \dots, u_l , разобранными тремя случаями исчерпываются все возможности. Каждый раз предположение о существовании неокрашенного ребра u приводит к противоречию с допущением, что при данной раскраске U_1, U_2, \dots, U_k окрашено максимально возможное число ребер графа L . Теорема доказана.

Для тех p -графов, у которых $p \geq \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor$, новая оценка, очевидно, не лучше шенноновской, зато при $p < \left\lfloor \frac{\sigma}{2} \right\rfloor$ она заведомо лучше. Дальнейшие исследования В. Г. Визинга (на которых мы не будем здесь останавливаться) показывают, что его оценка не при всех σ и p точна. Однако в особо интересном частном случае $p = 1$, т. е. когда L представляет собой униграф (см. § 4 в главе 1), оценка

$$\chi(L) \leq \sigma(L) + 1$$

является точной, за исключением тривиальных случаев $\sigma(L) = 0$ и $\sigma(L) = 1$ (во втором из них всегда $\chi(L) = 1$, поскольку

никакие два различных ребра графа L не смежны). Покажем, что если $\sigma \geq 2$, то при четном σ равенство $\chi = \sigma + 1$ достигается для полного $(\sigma + 1)$ -вершинного обыкновенного графа $F_{\sigma+1}$, а при нечетном σ — для графа F' , полученного из $F_{\sigma+1}$ путем деления пополам одного из ребер новой вершиной (рис. 164).

1) Пусть $\sigma = 2k > 0$. Так как при правильной раскраске рёбра одного цвета образуют (вместе с инцидентными им вер-

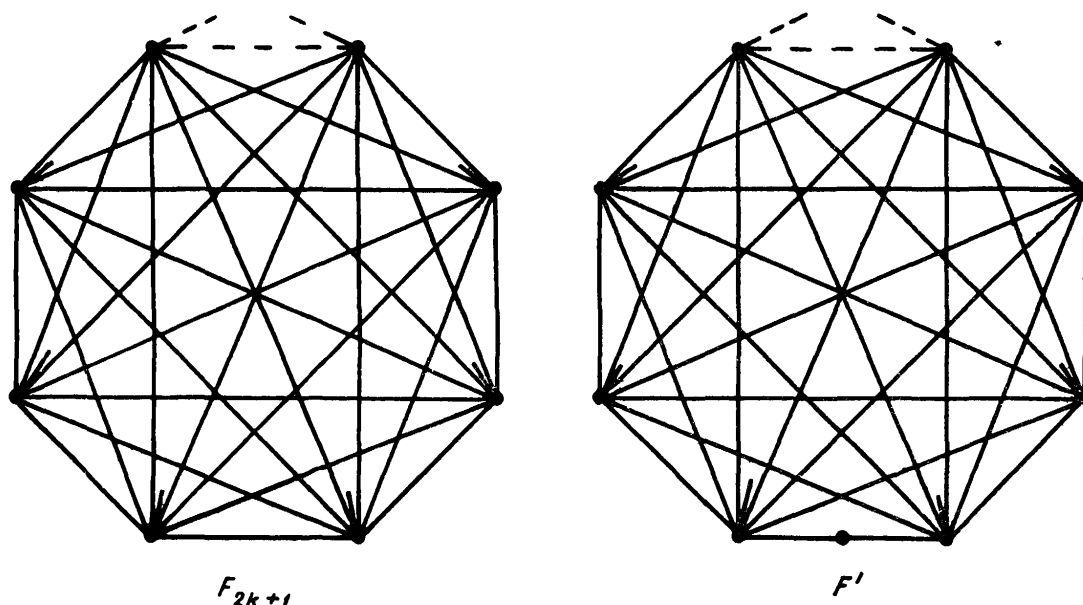


Рис. 164.

пинами) некоторое паросочетание (см. § 6 в главе 1), а никакое паросочетание графа F_{2k+1} не может содержать более k ребер, то с помощью σ цветов можно окрасить не более чем $k\sigma = 2k^2$ ребер, в то время как число всех ребер графа F_{2k+1} равно $\frac{(2k+1)2k}{2} = 2k^2 + k > 2k^2$.

2) Пусть $\sigma = 2k + 1$, $k > 0$; так как $n(F') = 2k + 3$, то никакое паросочетание графа F' не может содержать более $k + 1$ ребер, поэтому с помощью σ цветов можно окрасить не более чем $\sigma \cdot (k + 1) = (2k + 1)(k + 1)$ ребер этого графа, в то время как $m(F') = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} + 1 = (2k + 1)(k + 1) + 1$.

Отметим два важных частных случая, когда $\chi(L) = \sigma(L)$.

I. Для полного обыкновенного графа F_{2k} (с четным числом вершин) $\chi(F_{2k}) = 2k - 1 = \sigma(F_{2k})$.

Действительно, пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}$ — вершины графа F_{2k} . Подграф F_{2k-1} , полученный из F_{2k} удалением вершины x_{2k} , удовлетворяет условию $\sigma(F_{2k-1}) = 2k - 2$, поэтому его

ребра можно правильно раскрасить $2k - 1$ цветами $1, 2, \dots, 2k - 1$; осуществим одну из таких раскрасок. С одной стороны, каждая вершина x_i графа F_{2k-1} инцидентна ровно $2k - 2$ его ребрам, поэтому $|M_{x_i}| = 1$; пусть $M_{x_i} = \{t_i\}$, $0 \leq t_i \leq 2k - 1$; $i = 1, 2, \dots, 2k - 1$. С другой стороны, множество всех ребер цвета t_i образует (вместе с инцидентными им вершинами) паросочетание, и в графе F_{2k-1} , ввиду нечетности числа его вершин, заведомо найдется такая x_i , что $M_{x_i} = \{t_i\}$;

значит, множество $\bigcup_{i=1}^{2k-1} M_{x_i}$ не может содержать меньше чем $2k - 1$ цветов. Из равенств $|M_{x_i}| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, 2k - 1$) и $|\bigcup_{i=1}^{2k-1} M_{x_i}| = 2k - 1$ следует, что цвета $t_1, t_2, \dots, t_{2k-1}$ все различны. Для получения требуемой раскраски ребер исходного графа F_{2k} остается окрасить каждое ребро $\overline{x_{2k} x_i}$ в соответствующий цвет t_i ($i = 1, 2, \dots, 2k - 1$).

Из этого утверждения и из сказанного выше вытекает, в частности, что для полных обыкновенных n -вершинных графов

$$\chi(F_n) = \begin{cases} \sigma(F_n) & \text{при } n \text{ четном,} \\ \sigma(F_n) + 1 & \text{при } n \text{ нечетном.}^* \end{cases}$$

Отсюда непосредственно находится верхняя оценка хроматического класса униграфа L в зависимости от числа его вершин

$$\chi(L) \leq \begin{cases} n(L) - 1, & \text{если } n(L) \text{ четно;} \\ n(L), & \text{если } n(L) \text{ нечетно.} \end{cases}$$

II. Если граф $L = (X, U; P)$ (не обязательно униграф) — бихроматический, то

$$\chi(L) = \sigma(L).$$

В самом деле, пусть $U_1, U_2, \dots, U_\sigma$ — раскраска максимально возможного числа ребер графа L ; если u — неокрашенное ребро, инцидентное вершинам x и y , то M_x и M_y не пусты. В случае $M_x \cap M_y \neq \emptyset$ окрасим u в цвет, общий для M_x и M_y . В случае $M_x \cap M_y = \emptyset$ пусть $s \in M_x$, $t \in M_y$, $s \neq t$; вершины x и y не могут соединяться (s, t) -цепью, ибо эта цепь вместе с ребром u образовала бы цикл нечетной длины, а

*) Этот факт можно получить также на основе соображений, применяемых при составлении таблиц Бергера для определения порядка игр в турнирах.

такого цикла в бихроматическом графе не может быть (см. § 12 в главе 2); перекрасив максимальную (s, t) -цепь, начинающуюся в x , мы сможем затем окрасить ребро u в цвет t .

С л е д с т в и е. *Во всяком бихроматическом графе существует паросочетание, содержащее все вершины наибольшей степени.*

Именно, такое паросочетание образуют все ребра одного цвета при произвольной полной раскраске наименьшим числом цветов.

Хотя теорема Визинга и не является непосредственным обобщением теоремы Шеннона, последнюю можно вывести из нее следующим рассуждением от противного.

Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный граф без петель, хроматический класс которого, однако, превышает $\lceil \frac{3}{2} \sigma \rceil$, где $\sigma \doteq \sigma(L)$. Не нарушая общности, можно считать, что $\chi(L) = \lceil \frac{3}{2} \sigma \rceil + 1$ и что после удаления любого ребра из L оставшийся суграф L' уже обладает хроматическим классом $\chi(L') = \lceil \frac{3}{2} \sigma \rceil$; в самом деле, исходный граф всегда можно превратить в такой «критический» подходящим удалением ребер.

В L имеется хотя бы одна такая пара x, y различных вершин, для которой

$$|U(x, y)| \geq \lceil \frac{1}{2} \sigma \rceil + 1,$$

где $U(x, y)$ означает множество ребер, соединяющих x и y ; действительно, в случае $\forall x, y \in X (|U(x, y)| \leq \lceil \frac{1}{2} \sigma \rceil)$ по теореме Визинга мы имели бы $\chi(L) \leq \sigma + \lceil \frac{\sigma}{2} \rceil = \lceil \frac{3}{2} \sigma \rceil$. Выберем одну из таких пар x, y , и пусть $u \in U(x, y)$.

Суграф $L' = (X, U \setminus \{u\}; P)$, полученный из L удалением ребра u , допускает, как мы предположили, раскраску всех ребер $\lceil \frac{3}{2} \sigma \rceil$ цветами. Так как в L' степени вершин x и y не превосходят $\sigma - 1$, то на окраску всех ребер суграфа L' , инцидентных по крайней мере одной из вершин x, y , будет израсходовано не более

$$\begin{aligned} & (s(x) - |U(x, y)|) + (s(y) - |U(x, y)|) + \\ & + (|U(x, y)| - 1) = s(x) + s(y) - \\ & - |U(x, y)| - 1 \leq \sigma + \sigma - \left(\lceil \frac{1}{2} \sigma \rceil + 1 \right) - 1 = \\ & = 2\sigma - \lceil \frac{1}{2} \sigma \rceil - 2 \leq \lceil \frac{3}{2} \sigma \rceil - 1 \end{aligned}$$

цветов, откуда следует, что все ребра L можно раскрасить $\lceil \frac{3}{2}\sigma \rceil$ цветами, вопреки предположению.

Отметим, что доказательства теорем Шеннона и Визинга, а также утверждения о раскраске ребер бихроматического графа носят конструктивный характер, несмотря на внешнее оформление «от противного». Соответствующие алгоритмы, основанные на нахождении степени графа и наибольшего числа параллельных ребер, на поисках и перекрасках двуцветных цепей, не требуют слишком большого количества операций (благодаря тому, что двуцветные цепи не могут «ветвиться») и практически вполне эффективны.

Дальнейшие исследования по хроматическому классу читатель найдет в работах В. Г. Визинга (3/1965, 4/1965); в частности, там доказано, что если для графа L без петель $\chi(L) = \lceil \frac{3}{2}\sigma(L) \rceil$, то в L обязательно есть такой подграф, который изображен на рис. 163. Имеет смысл пытаться еще более сузить промежуток между верхней и нижней оценками хроматического класса мультиграфов за счет привлечения дополнительных легко вычисляемых характеристик, вплоть до полной локальной информации (см. § 8 в главе 1).

Иногда возникают задачи на одновременную раскраску и вершин и ребер. Одно из определений правильности такого рода раскраски состоит в том, чтобы никакие смежные или инцидентные элементы не окрашивались в один и тот же цвет; В. Г. Визинг высказал предположение, что в случае обыкновенного графа L наименьшее число цветов для такой раскраски всех вершин и ребер не превосходит $\sigma(L) + 2$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

§ 45. Теоретико-множественные и алгебраические представления

До сих пор при изучении графов мы отвлекались от конкретной природы элементов, составляющих вершины и ребра, и от конкретной природы отношения, выражаемого инцидентором. Теперь же будем рассматривать граф как средство описания тех или иных взаимосвязей между известными математическими объектами.

Пусть дана система $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ произвольных множеств. *Графом пересечений* $L(\mathfrak{M})$ этой системы называется обыкновенный граф, вершинами которого служат сами множества M_1, M_2, \dots, M_n (при $i \neq j$ вершины M_i и M_j считаются различными, даже если сами эти множества состоят из одних и тех же элементов), и вершины M_i, M_j ($i \neq j$) смежны тогда и только тогда, когда $M_i \cap M_j \neq \emptyset$.

Вопрос о том, когда наперед заданный обыкновенный граф изоморфен графу пересечений какой-то системы множеств, решается тривиально в случае, если на природу множеств не налагать никаких ограничений. Именно, каков бы ни был $L = (X, U)$ с $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $X \cap U = \emptyset$, система множеств $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, где

$$M_i \doteq \{x_i\} \cup U(x_i),$$

а $U(x_i)$ означает множество ребер, инцидентных вершине x_i , обладает тем свойством, что ее граф пересечений $L(\mathfrak{M})$ изоморфен L . Нетривиальный вопрос построения такой системы

\mathfrak{M} , для которой число элементов $|\bigcup_{i=1}^n M_i|$ — наименьшее, решен

П. Эрдешем, А. Гудманом и Л. Пошей (1966) следующим образом: если L — обыкновенный граф, то в множестве M с $|M| = \left\lceil \frac{n^2(L)}{4} \right\rceil$ всегда существует такая система \mathfrak{M} подмножеств, что $L(\mathfrak{M})$ изоморфен L ; более точной оценки, зависящей только от $n(L)$, не существует.

Одним из важных и интересных ограничений является следующее: множества системы \mathfrak{M} должны быть интервалами какого-либо линейно упорядоченного множества. Свойства соответствующих графов пересечений исследовались Г. Хайошем (2/1957), А. Хайналом и Я. Шураньи (1958), Ц. Леккеркеркером и Й. Боландом (1962), А. Коцигом (7/1963), П. Гилмбром и А. Гофманом (1964) и другими авторами.

Интервал линейно упорядоченного множества M характеризуется как такое непустое подмножество $M' \subseteq M$, для которого

$$\forall a, b, c \in M (a, b \in M' \ \& \ a < c < b \Rightarrow c \in M').$$

Нужные нам свойства интервалов, вытекающие из определения, становятся совершенно очевидными, если изображать множество M в виде ориентированной прямой, а интервалы — в виде отрезков, так что мы не будем останавливаться на формулировке и доказательстве этих свойств. В качестве упражнения можно предложить читателю строго вывести, например, следующее утверждение: если два интервала M' и M'' не пересекаются, то либо все элементы M' больше (в смысле порядка множества M) всех элементов интервала M'' , либо все элементы M'' больше всех элементов M' .

Обыкновенный граф $L = (X, U)$ называется *графом интервалов*, или *графом Хайоша*, если существует такое линейно упорядоченное множество M и такая система \mathfrak{M} интервалов этого множества, что граф пересечений $L(\mathfrak{M})$ изоморфен L . Для формулировки условий того, что граф L является графом интервалов, надо напомнить следующее определение (данное в § 31 главы 4 для более общего случая): триангулятором цикла в графе называется такое ребро графа, которое образует треугольник вместе с некоторой парой последовательных ребер цикла. Введем еще новое определение: граф называется *триангулированным*, если всякий его цикл обладает хотя бы одним триангулятором*.

Т е о р е м а 1. *Всякий граф интервалов является триангулированным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L = (X, U)$ — граф интервалов, C — какой-либо его цикл. Если $l(C) = 3$, т. е. C — треугольник, то каждое ребро цикла C служит его триангулятором. Предположим теперь, что

$$C = x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_0,$$

*) Некоторые свойства таких графов изучаются в работе Г. Дирака (11/1962).

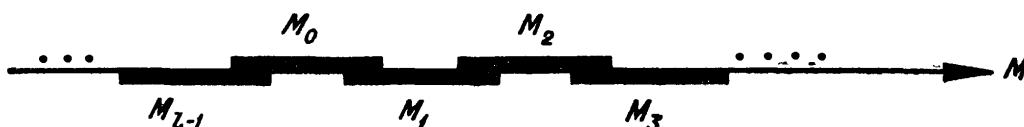


Рис. 165.

где $l \geq 4$. По условию теоремы, существуют такое линейно упорядоченное множество M и такая система \mathfrak{M} из $n \doteq n(L)$ интервалов этого множества, что $L(\mathfrak{M})$ изоморфен L ; пусть при некотором изоморфизме вершине x_i цикла C отвечает интервал, который мы для простоты будем обозначать через M_i , условившись также всегда считать $M_{i+l} \doteq M_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, l-1$).

По определению графа $L(\mathfrak{M})$, имеем

$$\forall i \geq 0 (M_i \cap M_{i+1} \neq \emptyset). \tag{1}$$

Допустим теперь, вопреки утверждению теоремы, что у цикла C нет триангуляторов, т. е. что

$$\forall i \geq 0 (M_i \cap M_{i+2} \neq \emptyset). \tag{2}$$

Как следует из (1) и (2), взаимное расположение интервалов M_0, M_1, \dots, M_{l-1} может быть, с точностью до зеркального отображения всей системы, только таким, как показано на рис. 165. В таком случае,

$$\forall i \geq 2 \forall m \in M_i \forall m' \in M_0 \quad (m > m')$$

или соответственно

$$\forall i \geq 2 \forall m \in M_i \forall m' \in M_0 \quad (m < m'),$$

но оба варианта приводят к противоречию при $i = l$.

Теорема доказана. Тот факт, что триангулированность графа является только необходимым, но не достаточным условием представимости его в виде графа пересечений интервалов, ясен уже из примера графа L на рис. 166; предоставим читателю самому убедиться в том, что для L невозможно построить соответствующую систему интервалов.

Можно ли указать свойство, которое вместе с триангулированностью целиком характеризовало бы класс графов Хайоша? Ц. Леккеркеркер и Й. Боланд (1962) называют граф

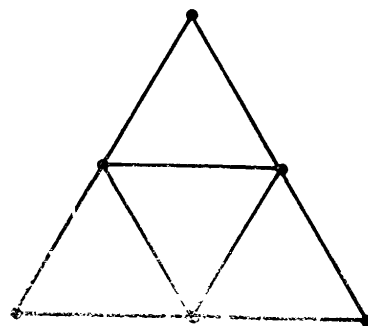


Рис. 166.

«астероидальным», если в нем есть три различные вершины x_1, x_2, x_3 и три цепи Q_1, Q_2, Q_3 такие, что цепь Q_i соединяет x_j с x_k и ни одна вершина этой цепи не смежна с x_i ($i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k \neq i$); ими доказана теорема: обыкновенный граф является графом интервалов тогда и только тогда, когда он триангулированный («ациклический» по терминологии работы), но не астероидальный. Это условие, несмотря на кажущуюся сложность, достаточно эффективно для практической проверки, а также позволило авторам установить другой

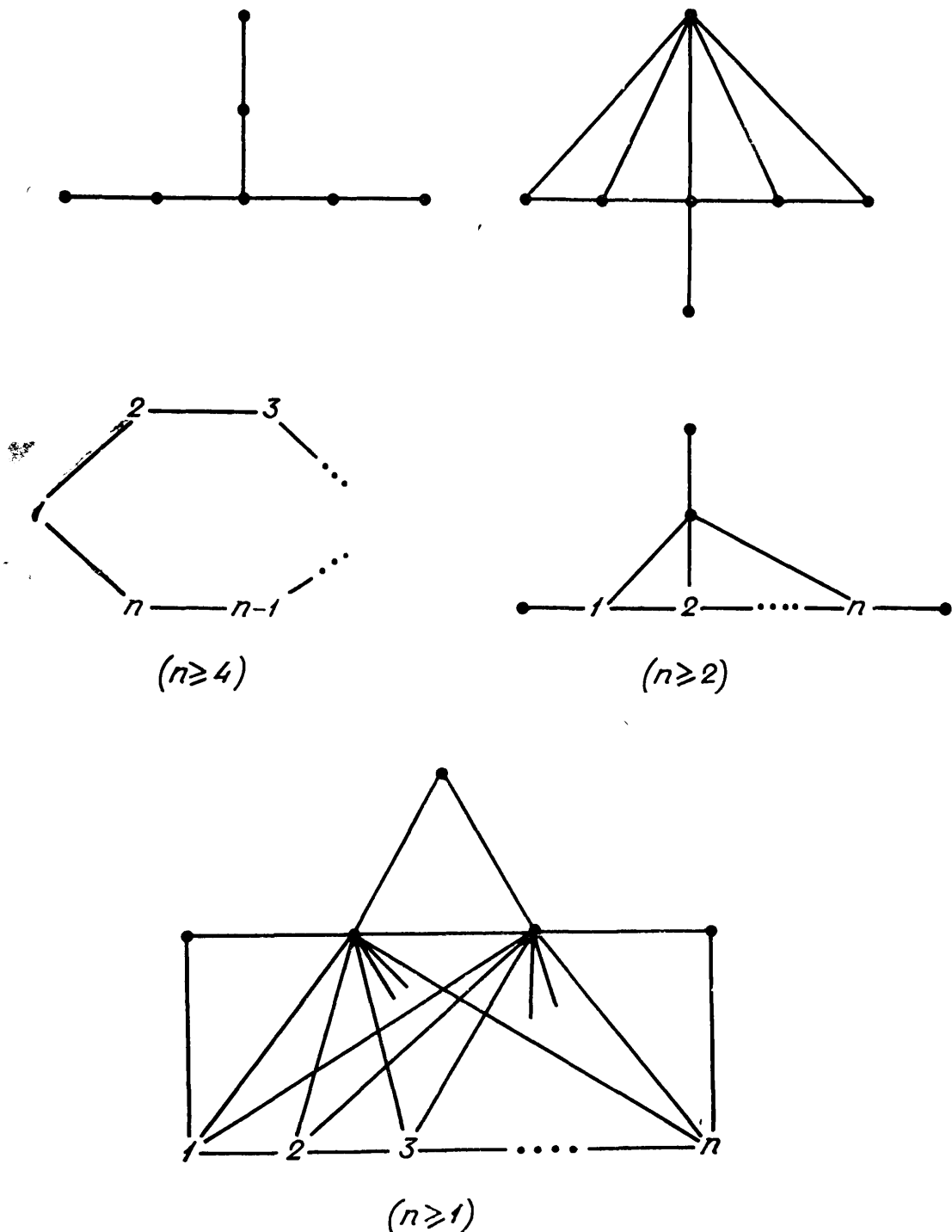


Рис. 167.

критерий: обыкновенный граф представляет собой граф интервалов в том и только том случае, если он не содержит ни одного из подграфов, изображенных на рис. 167. Не будем приводить доказательств этих теорем и описывать основанные на них алгоритмы проверки * и перейдем к более удобному, на наш взгляд, критерию П. Гилмóра и А. Гофмана (1964).

Т е о р е м а 2 (Гилмóра — Гофмана). *Обыкновенный граф $L = (X, U)$ является графом интервалов в том и только том случае, если всякий его простой цикл длины 4 имеет хотя бы один триангулятор, а дополнительный** к L граф $\bar{L} = (X, \bar{U})$ транзитивно ориентируем***.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала пусть L — граф интервалов. По теореме 1, у L всякий цикл, в том числе всякий простой цикл длины 4, обладает триангулятором. Ориентируя ребро $\widetilde{xy} \in \bar{U}$ графа \bar{L} от x к y в том случае, когда все элементы интервала, соответствующего вершине x , меньше всех элементов интервала, соответствующего вершине y , получим транзитивную ориентацию графа \bar{L} .

Теперь, наоборот, допустим, что в L всякий простой цикл длины 4 обладает триангулятором, а дополнительный граф \bar{L} уже превращен в транзитивный орграф, который по-прежнему обозначаем через $\bar{L} = (X, \bar{U})$; при этом запись вида $\widetilde{xy} \in \bar{U}$ будет означать, что вершины x и y смежны в \bar{L} , а запись $\vec{xy} \in \bar{U}$ — что, кроме того, ребро \widetilde{xy} в орграфе \bar{L} направлено от x к y . Докажем прежде всего в этих предположениях справедливость следующего высказывания:

пусть вершины $x, y, z, t \in X$ таковы, что

$$\left. \begin{aligned} & \widetilde{xy} \notin \bar{U} \ \& \ \widetilde{zt} \notin \bar{U} \ \& \ \widetilde{xz} \in \bar{U} \ \& \ \widetilde{yt} \in \bar{U}; \\ & (\vec{xz} \in \bar{U} \ \& \ \vec{yt} \in \bar{U}) \vee (\vec{zx} \in \bar{U} \ \& \ \vec{ty} \in \bar{U}). \end{aligned} \right\} (*)$$

тогда

Высказывание при $x = y \ \& \ z = t$ является тавтологией (ибо граф \bar{L} — обыкновенный), а при $x = y \ \& \ z \neq t$ и при $x \neq y \ \& \ z = t$ сразу следует из транзитивности орграфа \bar{L} . Рассмотрим случай $x \neq y \ \& \ z \neq t$.

*) Заметим, что достаточно эффективный алгоритм в терминах матриц имеется у Д. Фалкерсона и О. Гросса (1/1964, 2/1966).

**) См. § 9 (глава 1).

***) См. § 31 (глава 4).

Не может быть $\widetilde{xt} \in U \& \widetilde{yz} \in U$, ибо иначе простой цикл

$$x \widetilde{xt} t \widetilde{zt} z \widetilde{yz} y \widetilde{yx} x$$

длины 4 в графе L не имел бы триангуляторов. Значит, $\widetilde{xt} \in \bar{U} \vee \widetilde{yz} \in \bar{U}$; пусть, например, $\widetilde{xt} \in \bar{U}$ (рис. 168, где ребра графа L изображены сплошными линиями, а ребра \bar{L} — пунктирными). Но тогда, как легко видеть, при любой ориентации ребра \widetilde{xt} в орграфе \bar{L} не может быть ни $\vec{xz} \in \bar{U} \& \vec{ty} \in \bar{U}$, ни $\vec{zx} \in \bar{U} \& \vec{yt} \in \bar{U}$, ибо в обоих случаях нарушалась бы транзитивность.

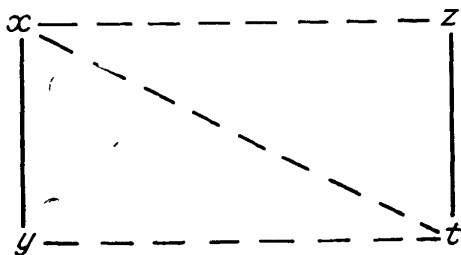


Рис. 168.

Аналогичное противоречие получается и в предположении $\widetilde{yz} \in \bar{U}$. Утверждение (*) доказано.

В качестве M возьмем множество всех максимальных полных подграфов (см. § 9 в главе 1) графа L ; совокупность этих подграфов, очевидно, содержит все вершины и все ребра графа L . Порядок « $<$ » в M установим следующим образом.

Пусть F и F' — два различных элемента из M . Так как подграфы F и F' графа L — максимальные полные, то всегда найдутся вершины x и x' , соответственно в F и в F' , такие что $x \neq x' \& \widetilde{xx'} \notin U$, т. е. $\widetilde{xx'} \in \bar{U}$. В силу утверждения (*), дуги орграфа \bar{L} , соединяющие вершины F с вершинами F' , направлены либо все от F к F' , либо все от F' к F ; в первом случае полагаем $F < F'$, во втором $F' < F$. Всякие два элемента из M будут сравнимы; покажем, что отношение « $<$ » на M транзитивно.

Допустим противное, т. е. что введенное отношение не транзитивно, иначе говоря, существуют такие $F, F', F'' \in M$, для которых $F < F' < F'' < F$. Это означает наличие в орграфе \bar{L} дуг $\vec{xx'}, \vec{y'y''}, \vec{z''z} \in \bar{U}$, идущих соответственно из F в F' , из F' в F'' и из F'' в F (рис. 169). Случай $x = z \& x' = y' \& y'' = z''$ невозможен, ибо иначе нарушалась бы транзитивность орграфа \bar{L} . Пусть, например, $x \neq z$. Тогда $\widetilde{yz} \in \bar{U}$, так как в случае $\widetilde{yz} \notin \bar{U}$ ориентация ребер $\vec{y'y''}$ и $\vec{z''z}$ орграфа \bar{L} противоречила бы высказыванию (*) для четверки вершин y', z, y'', z'' ; применяя, далее, (*) к четверке x, z, x', y' , получаем $\vec{zy'} \in \bar{U}$. Из транзитивности \bar{L} следует теперь $\vec{z''y'} \in$

$\in \bar{U}$ и $y''z'' \in \bar{U}$, но последнее противоречит тому, что $\widetilde{y''z''} \in U$.

Итак, различные элементы M всегда сравнимы и отношение порядка транзитивно, поэтому упорядочение множества M — линейное (последнее утверждение получается сразу, если, рассматривая элементы M как вершины вспомогательного полного орграфа, воспользоваться исследованием структуры полных орграфов в § 32 главы 4).

Каждой вершине $x \in X$ графа L мы отнесем подмножество $M_x \subseteq M$ тех максимальных полных подграфов графа L , которые содержат x . При любой x подмножество M_x представляет собой интервал в M . Действительно, пусть $F \in M_x$, $F'' \in M_x$ и $F < F' < F''$, но $F' \notin M_x$;

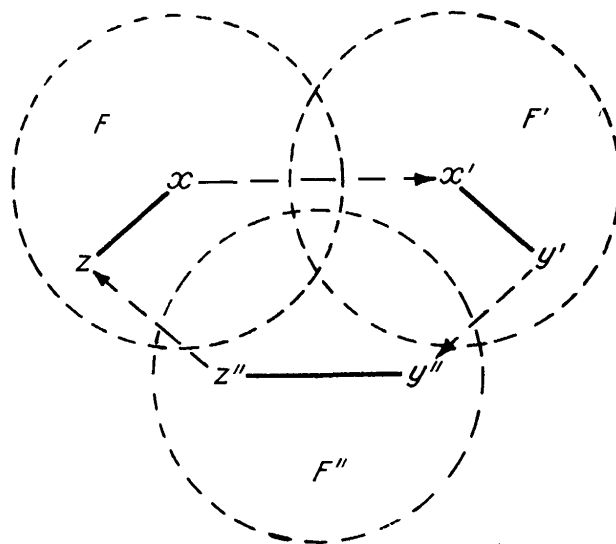


Рис. 169.

последнее означает, что в графе L вершина x не принадлежит F' . Но ввиду максимальной полноты подграфа F' , в нем найдется такая вершина y , что $\widetilde{xy} \notin U$, а это невозможно, ибо ребро \widetilde{xy} орграфа \bar{L} ввиду $F < F'$ должно быть направлено от x к y , а ввиду $F' < F''$ — от y к x .

Наконец, пусть $\mathfrak{M} \doteq \{M_x / x \in X\}$ — система интервалов M_x множества M , соответствующих всем вершинам L . Граф пересечений $L(\mathfrak{M})$ изоморфен L , ибо если $\widetilde{xy} \in U$, то пересечение $M_x \cap M_y$ содержит тот максимальный полный подграф графа L , которому принадлежит ребро \widetilde{xy} , т. е. $M_x \cap M_y \neq \emptyset$, а если $\widetilde{xy} \notin U$, то никакой полный подграф в L не может одновременно содержать вершины x и y , откуда $M_x \cap M_y = \emptyset$. Теорема доказана.

Упомянем еще результат А. Коцига (7/1963): граф Кёнига (см. § 6 в главе 1) является графом интервалов в том и только том случае, если каждая его компонента есть дерево (см. § 20 в главе 3), которое либо состоит не более чем из двух вершин, либо обладает тем свойством, что после удаления всех его висячих вершин остается простая цепь.

Кроме графов интервалов, интересно изучить графы пересечений некоторых других специальных систем множеств. На-

пример, в следующем параграфе мы увидим, какое значение для геометрии может иметь поставленный А. Коцигом (устное сообщение на коллоквиуме в Галле, 1960 г.) вопрос об исследовании графов пересечений хорд в круге *, а в обзоре приложений теории графов (см. § 49. Заключение первой части) будет сказано несколько слов о графах пересечений систем замкнутых множеств, покрывающих компакт. Сейчас упомянем о графе пересечений всех подполугрупп в полугруппе. Ю. Босак (1964) установил ряд свойств таких графов (например, наличие простого цикла длины 3, если у графа более двух вершин)**, выявил отдельные свойства полугрупп, определяемые по соответствующим графам, а также дал полное описание всех полугрупп, отвечающих графам не более чем с тремя вершинами. Критерии того, что заданный обыкновенный граф соответствует какой-либо полугруппе*** (или полугруппе с одним из таких ограничений, как конечность, периодичность, коммутативность), пока не найдены; неизвестно даже, существует ли полугруппа более чем с двумя элементами, для которой граф пересечений всех подполугрупп несвязен.

Остановимся кратко на других теоретико-множественных представлениях графов уже не в виде графов пересечений.

Пусть X — произвольное множество, а \mathfrak{K} — класс его подмножеств, удовлетворяющий условиям:

$$\emptyset \in \mathfrak{K}, \quad X \in \mathfrak{K},$$

$$\forall x \in X (\{x\} \in \mathfrak{K}),$$

$$\forall \mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{K} (\bigcap_{Y \in \mathfrak{K}'} Y \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{Y \in \mathfrak{K}'} Y \in \mathfrak{K}).$$

\mathfrak{K} -компонентой произвольного множества называется всякое его максимальное подмножество, принадлежащее \mathfrak{K} . Определим граф Бержа $L = (X, U)$ следующим образом: $\overrightarrow{xy} \in U$ в том и только в том случае, если для любого $z \in X \setminus \{x, y\}$ элементы x и y принадлежат одной и той же \mathfrak{K} -компоненте

*) Некоторые свойства таких графов установил впоследствии Б. Зелинка (3/1965).

**) Б. Зелинка (1/1965) доказал, что диаметр такого графа (см. § 17 в главе 2) не превосходит 2, если полугруппа коммутативна.

***) Аналогичный вопрос для групп равносильен вопросу о количестве подгрупп в группе: так как пересечение любых двух подгрупп не пусто, то граф пересечений всегда будет полным.

множества $X \setminus \{z\}$. Как показали Т. Радо и П. Райхельдерфер (1947), граф Бержа допускает представление указанного вида тогда и только тогда, когда он рефлексивен, симметричен и циклически транзитивен (см. конец § 29 в главе 4).

Пусть теперь X — произвольное частично упорядоченное множество с отношением порядка « $<$ »; два элемента $x, y \in X$ называются сравнимыми, если либо $x < y$, либо $y < x$. Обыкновенный граф $L = (X, U)$ с множеством вершин X называется *графом сравнимости множества X* , если $\overleftarrow{xy} \in U$ тогда и только тогда, когда x и y сравнимы; просто *граф сравнимости* — это граф, изоморфный графу сравнимости некоторого частично упорядоченного множества.

Т е о р е м а 3. *Обыкновенный граф является графом сравнимости тогда и только тогда, когда он транзитивно ориентируем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сперва пусть данный граф есть граф сравнимости; это означает существование такого частично упорядоченного множества X , для которого граф сравнимости $L = (X, U)$ изоморфен данному. Ориентируя ребро $\overleftarrow{xy} \in U$ от x к y в случае $x < y$ и от y к x в случае $y < x$, мы, очевидно, превратим L в транзитивный орграф. Наоборот, допустим, что данный обыкновенный граф удалось подходящей ориентацией ребер превратить в транзитивный орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$; полагая $x < y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in \vec{U}$, мы сделаем множество X частично упорядоченным, и L будет его графом сравнимости.

Таким образом, класс графов сравнимости совпадает с классом транзитивно ориентируемых, а значит, и с классом квазитранзитивно ориентируемых обыкновенных графов (см. § 31 в главе 4). Для выяснения принадлежности графа к этому классу и для нахождения транзитивных ориентаций, как мы видели, имеются удобные алгоритмы. Далее, если частичный порядок в множестве X подчинить дополнительному условию: при любых $x, y, z \in X$ из $x < z$ и $y < z$ следует сравнимость x с y , — то характеристическим свойством графа сравнимости $L = (X, U)$ будет его сильная транзитивная ориентируемость (в смысле Уулка, см. § 31). Наконец, для случаев, когда X образует модулярную или дистрибутивную структуру, аналогичные вопросы решаются Л. Альваресом (1965).

В заключение упомянем о некоторых алгебраических представлениях графов. Прежде всего, сюда следовало бы отнести (в качестве тривиальных случаев) представления обыкновенного графа и графа Бержа в виде бинарного отношения на множестве вершин (см. § 5 и § 7 в главе 1).

Пусть теперь X — полугруппа; граф Бержа $L = (X, \Gamma)$ называется ее *графом правой делимости*, если

$$\forall x, y \in X [y \in \Gamma x \Leftrightarrow \exists z (x \cdot z = y)],$$

и ее *графом левой делимости*, если

$$\forall x, y \in X [y \in \Gamma x \Leftrightarrow \exists z (z \cdot x = y)].$$

А. Паалман-де Миранда и З. Гедрлин (1962) исследуют вопрос, когда заданный граф Бержа служит графом левой делимости (или графом правой делимости) какой-либо полугруппы с единицей, в частности, для каких графов эта полугруппа может быть выбрана коммутативной. К числу необходимых условий представимости графа полугруппой относятся его рефлексивность и транзитивность, а также равенство длин всех кратчайших циклов; достаточным (но далеко не необходимым) условием является то, чтобы L был растущим ордеревом (см. § 36 в главе 4). Критериев представимости пока не найдено. Замена полугруппы группой, как легко понять, делает задачу тривиальной.

Далее, если X — группа, или полугруппа, или вообще произвольный группоид (см. Введение), то можно изобразить с помощью графа отношение перестановочности элементов в X ; однако, чтобы не вводить петель и ограничиться обыкновенными графами, удобнее за основу взять отношение неперестановочности в X , а именно определить граф $L = (X, U)$ следующим образом:

$$\forall x, y \in X (\widetilde{xy} \in U \Leftrightarrow x \cdot y \neq y \cdot x).$$

Исследований в этом направлении мы пока не знаем.

Наконец, пусть Γ — преобразование множества X в себя, тогда граф Бержа $L = (X, \Gamma)$, полностью определяющий это преобразование, обладает свойством $\forall x \in X (|\Gamma x| = 1)$. Структуру таких графов, называемых функциональными, в общем виде изучил Ф. Харари (3/1959). Р. Кроуэлл (1962) рассматривает случай, когда X — n -мерное векторное пространство над полем P характеристики p , имеющим p^m элементов, а Γ — линейное преобразование X в X , и исследует зависимость структуры графа L от свойств преобразования Γ (в терминах его алгебраических инвариантов), поля P и пространства X .

§ 46. Самопредставления

Под самопредставлениями мы понимаем такие представления, когда математическим объектом, отношения в котором представлены с помощью графа, является опять-таки граф. Например, для произвольного графа $L = (X, U; P)$ можно при фиксированном $k \geq 0$ построить обыкновенный граф k -неотделимости его вершин (X, V) , полагая $\tilde{xu} \in V$ в том и только том случае, если вершины $x, u \in X$ различны и k -неотделимы

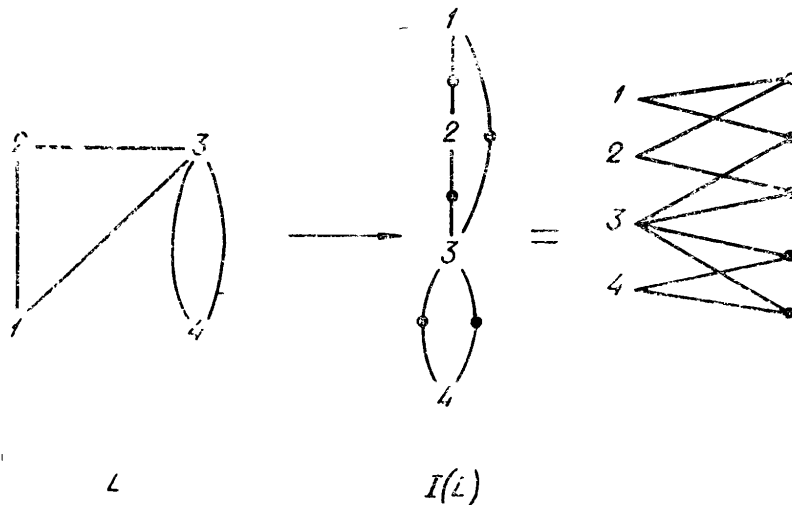


Рис. 170.

в L (см. § 13 главы 2); граф направленной k -неотделимости (§ 35 главы 4) будет, очевидно, графом Бержа без петель.

Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный неорграф без петель; его *графом инциденций* называется граф Кёнига (см. § 6 главы 1) $I(L) \doteq (X, U; V)$, у которого «левым» и «правым» множествами вершин служат соответственно множество вершин и множество ребер графа L , а $\tilde{xu} \in V$ тогда и только тогда, когда $x \in X$, $u \in U$ и вершина x инцидентна ребру u в L . Образно говоря, чтобы получить граф $I(L)$ из L , надо расположить все вершины L в один ряд, затем на каждое ребро L поместить новую вершину и, наконец, предполагая ребра резиновыми, оттянуть все новые вершины так, чтобы они образовали второй ряд (рис. 170). Ясно, что мы получили взаимно однозначное соответствие между всеми неорграфами без петель и всеми такими графами Кёнига, у которых каждая вершина «правого» множества имеет степень 2 (если в L допускать петли, то в

$I(L)$ им будут отвечать вершины степени 1)*). Наконец, если в L есть дуги, то их направление не восстанавливается по графу $I(L)$; можно, разумеется, условиться сохранять эти направления и в $I(L)$, но тогда последний граф, оставаясь бихроматическим, не будет уже графом Кёнига.

Значительно большую роль, чем граф инцидентий, играет *граф смежности ребер* $K(L)$ данного графа L ; определение мы вначале дадим для случая, когда L — непустой обыкновенный граф. Тогда под $K(L)$ понимается обыкновенный граф (U, W) , вершинами которого служат ребра L , причем $\widetilde{uv} \in W$ тогда и только тогда, когда $u, v \in U$, $u \neq v$ и ребра u, v графа L смежны. Просто *граф смежности ребер* — это граф, изоморфный $K(L)$ для некоторого L .

Т е о р е м а 1 (Й. Краус, 1943). *Обыкновенный граф $L = (X, U)$ является графом смежности ребер в том и только том случае, если в L существует такая система полных подграфов, что всякое ребро L принадлежит ровно одному, а всякая вершина L — ровно двум подграфам этой системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала пусть L изоморфен $K(L')$, где $L' = (X', U')$ — некоторый обыкновенный граф. Не нарушая общности, можно считать $L = K(L')$, т. е. $X = U'$. Каждой вершине $x' \in X'$ графа L' отнесем множество $U'(x')$ инцидентных ей ребер; так как ребра этого множества попарно смежны, то, будучи рассматриваемы как вершины графа L , они порождают в L полный подграф. Система \mathfrak{F} полных подграфов L , отвечающих всем вершинам L' , обладает требуемыми свойствами. В самом деле, ребро $\widetilde{xy} \in U$ в L принадлежит именно тому подграфу системы \mathfrak{F} , который отвечает вершине графа L' , инцидентной его ребрам x и y , а такая вершина только одна (ибо L' — обыкновенный граф); каждая вершина L принадлежит ровно двум подграфам из \mathfrak{F} (поскольку в L' каждое ребро соединяет две различные вершины).

Наоборот, пусть в графе $L = (X, U)$ выделена система \mathfrak{F} полных подграфов, удовлетворяющая условиям теоремы. За вершины графа L' возьмем подграфы системы \mathfrak{F} , понимая смежность двух различных подграфов как наличие у них общей вершины в L ; такая вершина только одна, ибо если бы два разных подграфа из \mathfrak{F} имели две общие вершины x и y , то граф L содержал бы ребро \widetilde{xy} , принадлежащее одновременно обоим

*) Наличие такого соответствия говорит о том, что «проблема полного изучения» графов Кёнига не проще, чем аналогичная «проблема» для любых неорграфов.

подграфам (в силу их полноты), вопреки условию теоремы. Граф $K(L')$, как мы сейчас покажем, изоморфен L .

Вершинами $K(L')$ служат ребра L' , т. е. пересекающиеся пары различных подграфов системы \mathfrak{F} ; каждой вершине графа $K(L')$ отнесем ту единственную вершину графа L , по которой пересекается соответствующая пара, и докажем, что это соответствие вершин порождает изоморфизм $K(L')$ на L .

Во-первых, каждая вершина графа L , поскольку она входит ровно в два подграфа (пересекающихся по ней) системы \mathfrak{F} , отвечает ребру L' , т. е. обладает прообразом среди вершин графа $K(L')$. Во-вторых, две вершины u' , v' графа $K(L')$ смежны тогда и только тогда, когда они, как ребра графа L' , смежны в L' , т. е. когда две пары подграфов из \mathfrak{F} , соответствующие этим ребрам, содержат общий подграф. Но последнее равносильно смежности в L тех вершин, по которым общий подграф пересекается с каждым из двух остальных, т. е. смежности именно образов вершин u' и v' . Действительно, если u' и v' смежны в $K(L')$, то их образы входят в один и тот же полный подграф графа L и поэтому смежны. Наоборот, если образы вершин u' и v' смежны в L , то, по условию теоремы, в системе \mathfrak{F} имеется ровно один подграф, содержащий оба образа; этот подграф поневоле будет общим для двух пар подграфов из \mathfrak{F} , отвечающих u' и v' , т. е. u' и v' смежны в $K(L')$. Теорема доказана.

К сожалению, мы пока не располагаем более удобным критерием того, что наперед заданный граф L является графом смежности ребер. Что же касается единственности (с точностью до изоморфизма) того графа L' , для которого $K(L')$ изоморфен L , то, благодаря следствию из теоремы Уитни — Юнга (см. конец § 40 в главе 5), непосредственно получается

Т е о р е м а 2. *Если для связанных обыкновенных графов L' и L'' графы смежности их ребер $K(L')$ и $K(L'')$ изоморфны, то и сами графы L' , L'' изоморфны друг другу, за исключением лишь случая, когда один из них есть F_3 (полный трехвершинный), а другой V_3 (3-веер).*

В самом деле, изоморфизм между $K(L')$ и $K(L'')$ означает рёберный изоморфизм между L' и L'' . Распространение теоремы 2 на несвязные графы (обыкновенные) не составляет труда, поскольку компонентам графа L взаимно однозначно соответствуют компоненты графа $K(L)$.

Подробному исследованию свойств графов смежности ребер, в особенности выяснению, когда изоморфизм $K(L)$ и $K(L')$ влечет изоморфизм L и L' , посвящена работа Г. Сабидусси (7/1961). Заметив мимоходом, что графы смежности ребер

полных графов Кёнига (см. § 6 в главе 1) рассматриваются А. Гофманом (1964), остановимся на вопросе о существовании гамильтоновых цепей и циклов (см. § 18 в главе 2) у графов смежности ребер.

Т е о р е м а 3 (Ф. Харари и Дж. Нэш-Вильямс, 1965). Пусть $L = (X, U)$ — обыкновенный граф. Для существования в графе $K(L) = (U, W)$ гамильтоновой цепи (в частности, гамильтонова цикла) необходимо и достаточно, чтобы в L имелась цепь (соответственно цикл) Q со свойством: каждое ребро графа L инцидентно хотя бы одной вершине цепи Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в $K(L)$ есть гамильтонова цепь с последовательными вершинами u_1, u_2, \dots, u_m ($\neq u_1$), то эти вершины в качестве ребер графа L образуют последовательность без повторений, у которой всякие два рядом стоящих ребра смежны (в циклическом случае также последнее ребро смежно с первым). Если в этой последовательности некоторый ее отрезок (т. е. подпоследовательность без пропусков) состоит более чем из двух ребер с одной общей инцидентной вершиной, то удалим из этого отрезка все ребра, кроме первого и последнего; повторяя такую процедуру пока возможно, мы в конце концов получим последовательность ребер искомой цепи (цикла) Q .

Наоборот, если в L есть цепь (цикл) Q с указанным в теореме свойством, то для получения гамильтоновой цепи (цикла) графа $K(L)$ достаточно в последовательность ребер цепи Q вставить недостающие ребра следующим образом: перед u_1 располагаем в любом порядке те ребра графа L , не принадлежащие Q , которые смежны с u_1 , но не смежны с $u_2; \dots$; перед u_i ставим те ребра L , не принадлежащие Q и не добавленные на предыдущих шагах, которые смежны с u_i , но не с u_{i+1} ($i = 2, \dots, m$; если Q — цикл, то полагаем $u_{m+1} \doteq u_1$, а если Q — не цикл, то при $i = m$ слова «но не с u_{m+1} » опускаем).

Из теоремы 3 непосредственно вытекает более ранний результат, а именно

С л е д с т в и е (И. Седлачек, 3/1964). Если обыкновенный граф L имеет гамильтонову цепь (цикл), то граф $K(L)$ тоже имеет гамильтонову цепь (цикл).

Обратное утверждение неверно. Например, известный граф Петерсена (Ю. Петерсен, 1891), показанный на рис. 171, не имеет гамильтоновых циклов, хотя граф смежности его ребер обладает таким циклом (см. пунктирную линию); другим примером может служить граф, рассмотренный В. Таттом (1/1946) и изображенный на рис. 172.

Пусть $K^p(L)$ означает p -ю итерацию перехода от заданного графа к графу смежности его ребер, т. е.

$$K^0(L) \doteq L,$$

$$p \geq 1 \rightarrow K^p(L) \doteq K[K^{p-1}(L)];$$

в случае, когда $K^{p-1}(L)$ — пустой граф, под $K^p(L)$ мы будем понимать не граф, а пару (\emptyset, \emptyset) пустых множеств. Вследствие теоремы 3, если для некоторого $p_0 \geq 0$ граф $K^{p_0}(L)$ существует и имеет гамильтонов цикл, то этим свойством обладают и все графы $K^p(L)$ с $p \geq p_0$; наименьшее из таких p_0 называется *гамильтоновым индексом* $\text{Нам}(L)$ данного графа L , а в случае несуществования такого p_0 полагаем $\text{Нам}(L) \doteq +\infty$. Исследование Г. Чартрэнда (1965) позволяет для обыкновенных графов L выяснить, при каких условиях $\text{Нам}(L)$ конечен, а в случае $\text{Нам}(L) = +\infty$ — когда $K^p(L)$ существует не при всех $p \geq 0$ и когда все графы $K^p(L)$ хотя и существуют, но не имеют гамильтоновых циклов.

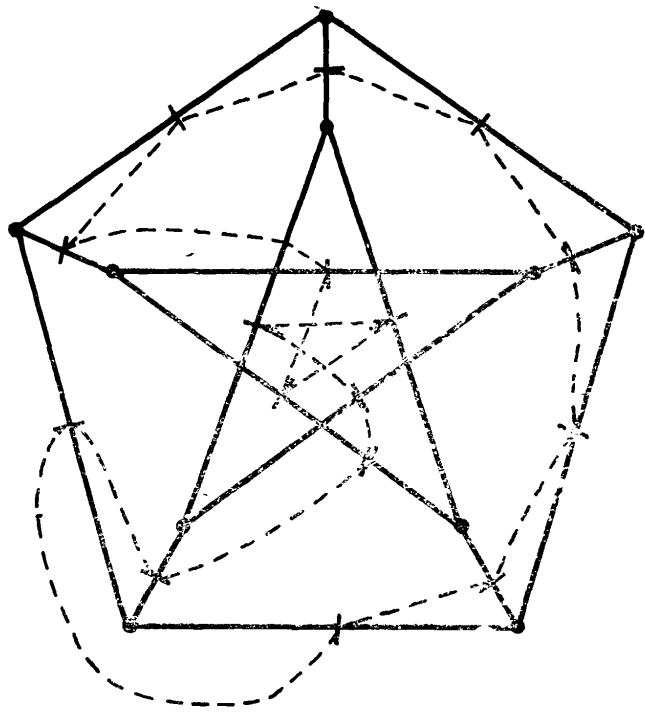


Рис. 171.

Л е м м а 1. Граф $K(L)$ обладает гамильтоновым циклом тогда и только тогда, когда ребра графа L (обыкновенного) можно расположить в последовательность

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m \doteq u_0$$

($m \doteq m(L)$) таким образом, чтобы при каждом $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ребро u_i было смежно с u_{i+1} .

Очевидно.

Л е м м а 2. Пусть обыкновенный граф L состоит из простого цикла C и некоторых диагоналей этого цикла, а также из простых цепей Q_1, Q_2, \dots, Q_s ($s \geq 0$), расположенных следующим образом: а) начальная вершина, и только она, у каждой цепи Q_i принадлежит C ; б) две различные цепи Q_i и Q_j не могут иметь

общей вершины вне C (рис. 173). Тогда

$$\text{Нам}(L) = \max\{l(Q_1), l(Q_2), \dots, l(Q_s)\}^*.$$

Доказательство. Обозначим $l(L) \doteq \max\{l(Q_1), l(Q_2), \dots, l(Q_s)\}$. При $l(L) = 0$ сам граф $L = K^0(L)$ содержит гамильтонов цикл, именно C , т. е. $\text{Нам}(L) = 0 = l(L)$. Пусть равенство $\text{Нам}(L) = l(L)$ уже доказано при $l(L) = k \geq 0$ и пусть L — граф с $l(L) = k + 1$, удовлетворяющий условию леммы.

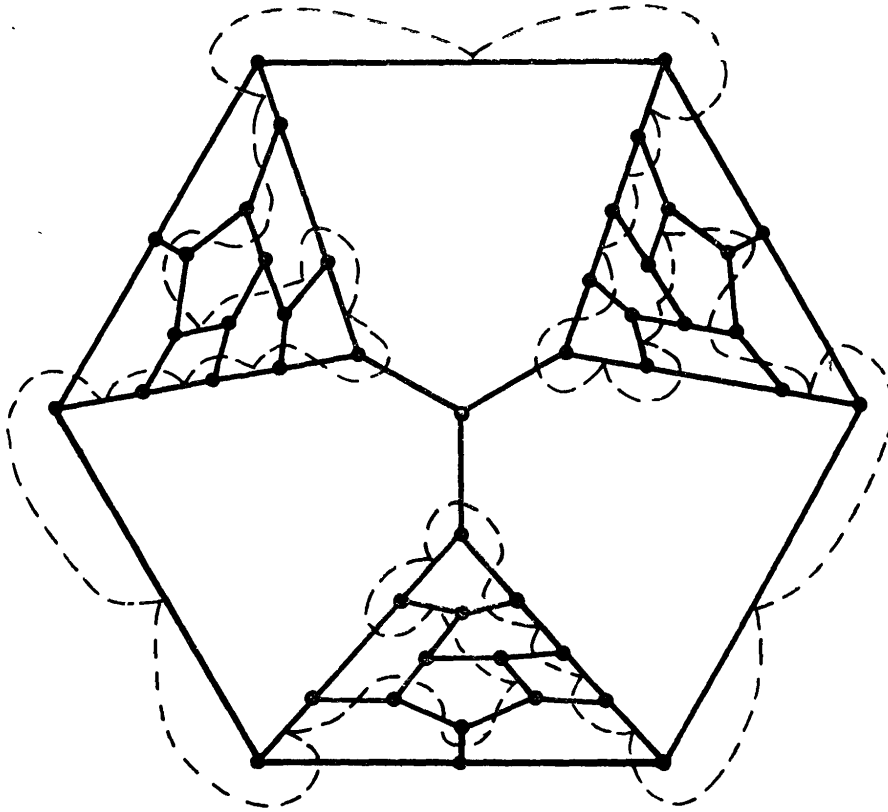


Рис. 172.

Граф $K(L)$ тоже имеет структуру, указанную в лемме. Действительно, суграф L' графа L , образованный ребрами и диагоналями цикла C вместе с первыми ребрами цепей Q_1, Q_2, \dots, Q_s , обладает, в силу леммы 1, гамильтоновым циклом; последнему отвечает в графе $K(L)$ некоторый цикл C' , причем остальные ребра $K(L)$ либо служат диагоналями этого цикла, либо принадлежат цепям $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{s'}$, расположенным по отношению к нему в согласии с условиями а) и б). При этом $s' \leq s$, и если ребрам цепи Q_i ненулевой длины отвеча-

*) $l(Q)$ означает длину цепи Q (см. начало § 11 в главе 2).

ют вершины, скажем, цепи Q_i' , то $l(Q_i') = l(Q_i) - 1$; следовательно, $l(K(L)) = l(L) - 1$. Но по предположению индукции $\text{Нам}(K(L)) = l(K(L)) = k$, а это значит, что граф $K^{k+1}(L) = K^k(K(L))$ содержит гамильтонов цикл, в то время как граф $K^k(L) = K^{k-1}(K(L))$ уже не содержит (для $k = 0$ последнее равенство графов теряет смысл, однако отсутствие гамильтоновых циклов у L при $l(L) = 1$ непосредственно очевидно). Таким образом, $\text{Нам}(L) = k + 1 = l(L)$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 4 (Чартрэнда).
 Если $L = (X, U)$ — связный обыкновенный граф, отличный от простой цепи, то

$$\text{Нам}(L) \leq n(L) - 3. \quad (*)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n(L) = 3$ условие теоремы выполняется только для $L = F_3$, и тогда (*) справедливо, поскольку $\text{Нам}(F_3) = 0 = n(F_3) - 3$. Пусть утверждение уже доказано при условии $n(L) < n_0 \geq 4$ и пусть $L = (X, U)$ — связный обыкновенный n_0 -вершинный граф, отличный от простой цепи. Если L — простой цикл, то $\text{Нам}(L) = 0$ и (*) выполнено. Допустим теперь, что L не является простым циклом, и пусть $x_0 \in X$ — некоторая его вершина степени $s(x_0) \geq 3$, а $U(x_0)$ — множество инцидентных ей ребер.

Обозначим через M_0 звезду с центром x_0 , т. е. часть графа L , образованную вершиной x_0 , вершинами, смежными с x_0 , и ребрами $U(x_0)$ (см. § 8 в главе 1; по своей структуре M_0 является $s(x_0)$ -веером, см. § 10). $K(M_0)$ есть полный подграф графа $K(L)$ и поэтому имеет гамильтонов цикл. Через M_1 обозначим граф, состоящий из $K(M_0)$ и всех тех ребер (вместе с инцидентными им вершинами) графа $K(L)$, которые инцидентны хотя бы одной вершине $K(M_0)$; ясно, что ребра графа M_1 можно расположить в круговую последовательность, охарактеризованную в лемме 1, поэтому $K(M_1)$ обладает гамильтоновым циклом. Обозначим, далее, через M_2 граф, состоящий из $K^2(M_1)$ и всех ребер $K^2(L)$, инцидентных вершинам $K^2(M_1)$; опять по лемме 1 граф $K(M_2)$ обладает гамильтоновым циклом, и т. д. Таким образом, можно последовательно определять графы $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$, и каждый из графов $K(M_0), K(M_1),$

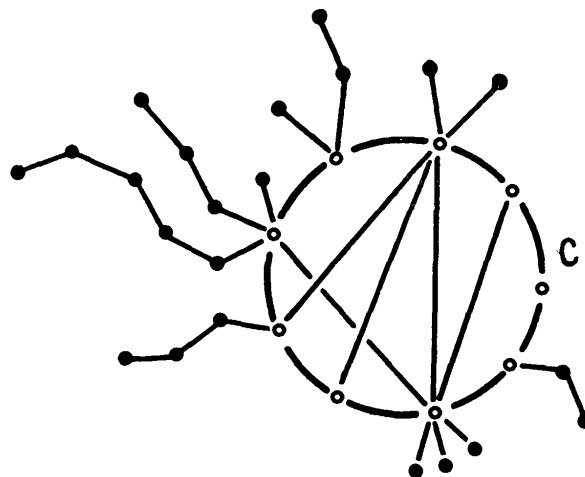


Рис. 173.

$K(M_2), K(M_3), \dots$ будет обладать гамильтоновым циклом.

Наряду с M_0 , рассмотрим также часть $L' \doteq (X \setminus \{x_0\}, U \setminus U(x_0))$ графа L , и пусть L_1, L_2, \dots, L_k — компоненты этой части. Если для любого $i = 1, 2, \dots, k$ и любого $p \geq 0$ положим $K^p(L_i) \doteq (X_i^p, U_i^p)$, $K^p(L) \doteq (X^p, U^p)$ и $M_p \doteq (Y^p, V^p)$, то, как нетрудно показать,

$$U_i^p \cap V^p = \emptyset$$

и

$$X^p = Y^p \cup \bigcup_{i=1}^k X_i^p, \quad U^p = V^p \cup \bigcup_{i=1}^k U_i^p.$$

Случай 1: все компоненты L_1, L_2, \dots, L_k являются простыми цепями. Тогда граф $K(L)$ имеет структуру, указанную в лемме 2, причем длина наибольшей из его цепей Q_1, Q_2, \dots, Q_s не превосходит $n_0 - 4$; по лемме 2 в этом случае $\text{Нам}(K(L)) \leq n_0 - 4$, откуда $\text{Нам}(L) \leq n_0 - 3$, т. е. для графа L выполнено (*).

Случай 2: не все L_1, L_2, \dots, L_k — простые цепи. Пусть, скажем, именно L_1, L_2, \dots, L_t , где $1 \leq t \leq k$, отличны от простых цепей. Так как $n(L_i) \geq 3$ при $i = 1, 2, \dots, t$, то длина каждой из простых цепей L_{t+1}, \dots, L_k (если они есть, т. е. если $t < k$) не превосходит $n_0 - 5$,* поэтому $K^{n_0-4}(L_{i+1}) = \dots = K^{n_0-4}(L_k) = (\emptyset, \emptyset)$. Каждая из компонент L_1, L_2, \dots, L_t содержит менее n_0 вершин, и ее гамильтонов индекс, согласно индуктивному предположению, меньше $n_0 - 3$, т. е. соответствующий граф $K^{n_0-4}(L_i)$ обладает гамильтоновым циклом. В каждом $K^{n_0-4}(L_i)$ при $i = 1, 2, \dots, t$ есть ребро u^i , оба конца которого смежны с одной и той же вершиной $y^i \in Y^{n_0-4} \setminus X_i^{n_0-4}$ — это очевидно в случае $n_0 = 4$ (тогда $L = F_4$, $t = k = 1$ и $y^i = x_0$), а при $n_0 \geq 5$ легко доказывается на основании того, что в X_i всегда есть вершина x степени $s_{L_i}(x) \geq 3$, расстояние которой $\rho_L(x_0, x)$ от x_0 в графе L не превосходит $n_0 - 5$.

Пусть w и w' — те два ребра, которые в графе $K^{n_0-4}(L)$ соединяют вершину y^1 с концами ребра u^1 . Так как $w, w' \in V^{n_0-4} \setminus V^{n_0-5}$, то упорядочение ребер множества V^{n_0-4} в круговую последовательность, отвечающую условию леммы 1, можно произвести таким образом, чтобы ребра w и w' в этой последовательности шли подряд, т. е. чтобы она имела вид

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{q-1}, w, w', v_{q+2}, \dots, v_r \doteq v_0,$$

*) Легко видеть, что если $t < k$, то $n_0 \geq 5$.

где $r = |V^{n_0-4}|$. Поскольку $K^{n_0-4}(L_1)$ обладает гамильтоновым циклом, то все ребра $U_1^{n_0-4}$ тоже можно расположить в последовательность

$$u_0^1, u_1^1, u_2^1, \dots, u_{q_1-1}^1, u^1, u_{q_1+1}^1, \dots, u_{r_1}^1 \doteq u_0^1,$$

где $r_1 \doteq |U_1^{n_0-4}|$, в соответствии с условием леммы 1. Но тогда и последовательность

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{q-1}, w, u_{q_1+1}^1, \dots, u_{r_1}^1 \doteq u_0^1, u_1^1,$$

$$u_2^1, \dots, u_{q_1-1}^1, w', v_{q+2}, \dots, v_r \doteq v_0$$

будет удовлетворять требованиям леммы 1. К полученной последовательности аналогично подключаем ребра множества $U_2^{n_0-4}$, затем множества $U_3^{n_0-4}, \dots$, наконец множества $U_t^{n_0-4}$. Из леммы 1 будет вытекать наличие в графе $K(K^{n_0-4}(L)) = K^{n_0-3}(L)$ гамильтонова цикла, т. е. соблюдение неравенства (*) для графа L , что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Оценка (*) точна, так как, например, для графов, показанных на рисунке 174, имеет место равенство.

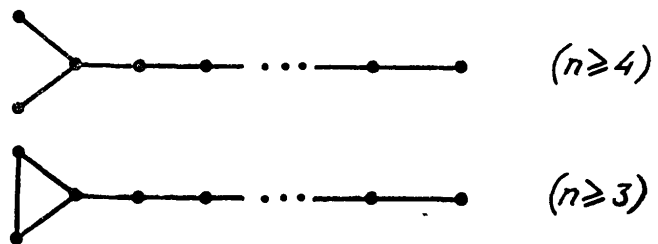


Рис. 174.

С л е д с т в и е. Пусть L — обыкновенный граф;

L_1, L_2, \dots, L_x , где $x \doteq x(L)$, — его компоненты, причем первые t компонент ($0 \leq t \leq x$) не являются простыми цепями, а остальные $x - t$ компонент — простые цепи. Тогда

1) если $t = 0$, то графы $K^p(L)$ не существуют при $p \geq \max\{n(L_1), n(L_2), \dots, n(L_x)\}$, и $\text{Нам}(L) = +\infty$;

2) если $t = 1$, то $\text{Нам}(L) = \max\{n(L_1) - 3, n(L_2), \dots, n(L_x)\}$;

3) если $t \geq 2$, то все графы $K^p(L)$ при $p \geq 0$ хотя и существуют, но не имеют гамильтоновых циклов, и $\text{Нам}(L) = +\infty$.

Вопрос о существовании эйлерова цикла в графе смежности ребер данного обыкновенного связного графа L решен Ф. Харари и Дж. Нэш-Вильямсом (1965): $K(L)$ имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин L обладают одинаковой четностью.

А. Гирлянда (1963) выясняет, когда граф L изоморфен своему графу смежности ребер *, а В. Менон (1965) исследует аналогичный вопрос в несколько более общей постановке. Предварительно условимся, что если $L = (X, U; P)$ — произвольный неорграф без петель, то его графом смежности ребер $K(L)$ по определению служит неориентированный 2-граф без петель, вершинами которого являются ребра L , причем две различные вершины в $K(L)$ либо несмежны, либо соединены одним ребром, либо соединены двумя ребрами, смотря по тому, будут ли эти вершины, рассматриваемые как ребра L , несмежны, иметь одну общую вершину или иметь две общие вершины.

Л е м м а. Пусть $L = (X, U; P)$ — неорграф без петель, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а $s_i \doteq s_L(x_i)$ — степень вершины x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)**. Тогда количество ребер графа $K(L)$ равно

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} s_i(s_i - 1).$$

Действительно, в графе L ребра, инцидентные вершине x_i , образуют $\frac{1}{2} s_i (s_i - 1)$ неупорядоченных пар смежных ребер; суммируя эти количества по i от 1 до n , мы получим общее число неупорядоченных пар смежных ребер в графе L , причем каждая пара ребер, смежных обоими концами, окажется сосчитанной дважды, т. е. в итоге получится как раз число ребер графа $K(L)$.

Определим теперь символ $K^p(L)$ для любых целых $p \geq 0$ следующим образом:

$$K^0(L) \doteq L,$$

$$p \geq 1 \Rightarrow K^p(L) \doteq K K^{p-1}(L).$$

Т е о р е м а 4 (Гирлянды — Менона). Для неорграфа $L = (X, U; P)$ без петель четыре высказывания:

- (1) L изоморфен $K^p(L)$ при любом $p \geq 0$,
- (2) L изоморфен $K^p(L)$ при некотором $p \geq 1$,
- (3) $\forall x \in X [s_L(x) = 2]$,
- (4) все компоненты графа L — простые циклы

равносильны друг другу.

*) Этот вопрос был поставлен О. Оре (4/1962, русск. 1968, глава 1, § 5, проблема 5).

**) См. § 2 в главе 1.

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ тривиальна, а вывод импликаций $(3) \Rightarrow (4)$ и $(4) \Rightarrow (1)$ не представляет труда, поэтому остается лишь доказать, что $(2) \Rightarrow (3)$.

Пусть граф L изоморфен $K^p(L)$ при некотором $p \geq 1$. Покажем сначала, что $s_i \geq 2$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, где $s_i \doteq s_L(x_i)$.

Если $s_i = 0$ при некотором i ($1 \leq i \leq n$), то x_i — изолированная вершина L ; в графе $K^p(L)$, изоморфном L , тоже должна быть изолированная вершина; эта вершина служит в графе $K^{p-1}(L)$ ребром, образующим вместе со своими концевыми вершинами отдельную компоненту, которой в графе $K^{p-2}(L)$, в свою очередь, отвечает простая цепь длины 2, образующая компоненту, и т. д. Продолжая в том же духе, мы установим существование в L простой цепи длины p в качестве компоненты. Если теперь повторить всё рассуждение с начала, отправляясь от найденной компоненты вместо изолированной вершины, то мы обнаружим среди компонент графа L простую цепь длины $2p$; следующие повторения будут давать нам простые цепи длины $3p$, $4p$ и т. д. до бесконечности, а это невозможно, поскольку L — конечный граф.

Аналогично приводится к противоречию допущение о существовании в L вершины степени 1: если $s_i = 1$ при некотором i ($1 \leq i \leq n$), то x_i — висячая вершина в L , т. е. граф $K^p(L)$ содержит висячую вершину x . Этой вершине и смежной с ней в $K^p(L)$ вершине y соответствуют в графе $K^{p-1}(L)$ два ребра, образующие простую цепь, которая прикреплена к остальной части графа только одной вершиной z . В графе $K^{p-2}(L)$ мы обнаруживаем уже цепь длины 3 с аналогичными свойствами (рис. 175), ..., а в графе L и изоморфном ему графе $K^p(L)$ — цепь длины $p+1$. Неограниченное повторение процесса даст нам в L простые цепи длины $2p+1$, $3p+1$ и т. д., что опять противоречит конечности графа.

Теперь покажем, что строгое неравенство $s_i > 2$ невозможно ни при каком i ($1 \leq i \leq n$). Количество вершин и ребер графа $K^q(L)$ будем обозначать соответственно через n_q и m_q ($q = 0, 1, 2, \dots$).

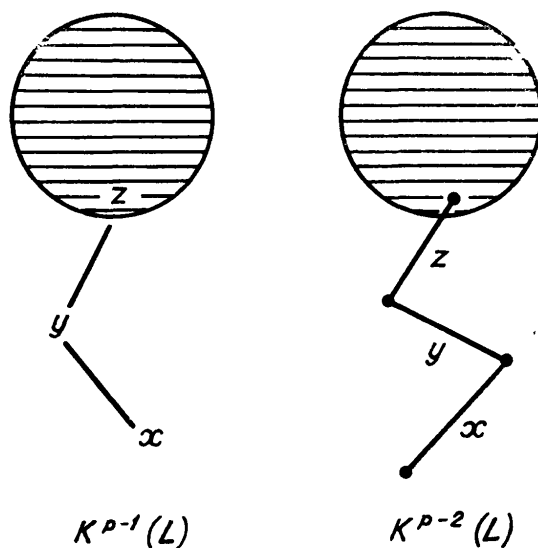


Рис. 175.

Ввиду $s_i \geq 2$ и в силу леммы получаем

$$n_0 (\doteq n(L)) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} s_i (s_i - 1) = m_1,$$

причем если $s_i > 2$ хотя бы для одного i , то имеет место строгое неравенство $m_1 > n_0$. Благодаря отсутствию в L изолированных и висячих вершин, в графе $K(L)$ степени всех вершин тоже ≥ 2 , причем наличие в L вершины степени > 2 влечет наличие такого рода вершины и в $K(L)$. Применяя это рассуждение последовательно к графам $L, K(L), K^2(L), \dots$, получим, что и вообще

$$n_q \leq m_{q+1}, \quad (*)$$

а наличие в L вершины степени > 2 влечет строгие неравенства при всех $q \geq 0$.

С другой стороны, по определению графов $K^q(L)$,

$$m_q = n_{q+1} \quad (**)$$

для всех $q \geq 0$, а так как $K^p(L)$ и L изоморфны, то

$$n_0 = n_p \ \& \ m_0 = m_p. \quad (***)$$

Из (*), (***) и (***) в случае четного p следует

$$m_0 = n_1 \leq m_2 = n_3 \leq \dots \leq m_p = m_0,$$

а в случае нечетного p —

$$\begin{aligned} n_0 \leq m_1 = n_2 \leq \dots \leq m_p = m_0 = \\ = n_1 \leq m_2 = n_3 \leq \dots \leq m_{p-1} = n_p = n_0, \end{aligned}$$

т. е. на самом деле в (*) везде имеют место равенства; но это означает, что в L нет вершин степени > 2 . Теорема доказана.

Заканчивая изучение графов смежности ребер, отметим, что в случае графа $L = (X, U; P)$ общего вида попытка определить граф $K(L)$ таким образом, чтобы по нему исходный граф L восстанавливался «почти однозначно» (как, например, в случае обыкновенных графов, см. теорему 2), приводит к замене довольно-таки естественного соответствия «вершины \leftrightarrow ребра» искусственным соответствием типа кодирования, ибо, как мы видели в § 2 (глава 1), между парой ребер возможно 25 различных типов взаимоотношений, которые пришлось бы пронумеровать и условно передавать, например, количествами ре-

бер между парами вершин графа $K(L)$. Если же позволить более или менее значительную потерю информации о графе L при переходе к $K(L)$, то можно привести следующее интересное утверждение (см. Ф. Харари и Р. Норман, 1960), доказательство которого несложно и может быть рекомендовано читателю в качестве упражнения. Именно, пусть $L = (X, \Gamma)$ — граф Бержа, а $\vec{K}(L) = (U, \vec{\Gamma})$ — другой граф Бержа, вершинами которого служат ребра L и в котором отображение $\vec{\Gamma}$ определено следующим образом: если $u = \vec{xy}$ и $v = \vec{zt}$ — два ребра графа $\vec{K}(L)$, где $x, y, z, t \in X$, то

$$v \in \vec{\Gamma} u \Leftrightarrow y = z.$$

Оказывается, наперед заданный граф Бержа L изоморфен графу $\vec{K}(L')$ при каком-нибудь L' в том и только том случае, когда для любых двух вершин x и y графа L их образы Γx и Γy либо совпадают, либо не пересекаются.

Переходим к дальнейшим самопредставлениям.

Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный граф, а $B(L)$ — его граф блоков, т. е. обыкновенный граф, вершинами которого служат блоки графа L (см. § 15 в главе 2) и смежность различных блоков означает наличие у них общей вершины.

Т е о р е м а 5 (Ф. Харари, 8/1963). *Обыкновенный граф $L = (X, U)$ является графом блоков (т. е. существует такой L' , что $B(L')$ изоморфен L) в том и только том случае, если у самого L все блоки представляют собой полные графы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала допустим, что L — граф блоков, т. е. изоморфен $B(L')$ для некоторого $L' = (X', U'; P')$, и докажем полноту всех блоков самого L . Допустим противное, что среди блоков графа L есть неполный и поэтому 2-связный (см. классификацию блоков в § 15 главы 2) L_1 ; выбрав в L_1 пару различных несмежных вершин, мы можем (в силу следствия из теоремы 1 в начале § 14 главы 2) провести через эти вершины простой цикл

$$C \doteq x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_0$$

графа L_1 . Вершинам цикла C соответствуют l различных блоков $L'_0, L'_1, L'_2, \dots, L'_{l-1}$ графа L' , причем для любого $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ блоки L'_i и L'_{i+1} (где $L'_l \doteq L'_0$) имеют общую вершину. Но тогда по теореме 3 § 15 все блоки $L'_0, L'_1, L'_2, \dots, L'_{l-1}$ должны иметь общую вершину, т. е. попарно пересекаться, а это означало бы смежность любых двух различных вер-

шин цикла C , вопреки тому, что он проводился через две смежные вершины.

Теперь, наоборот, пусть обыкновенный граф $L = (X, U)$ обладает тем свойством, что все его блоки — полные. Один из графов L' (притом обыкновенный), для которого $B(L')$ изоморфен L , можно построить так. Сначала образуем граф блоков $B(L) \doteq (Y, V)$ для L ; рассматривая вершину $y \in Y$ как

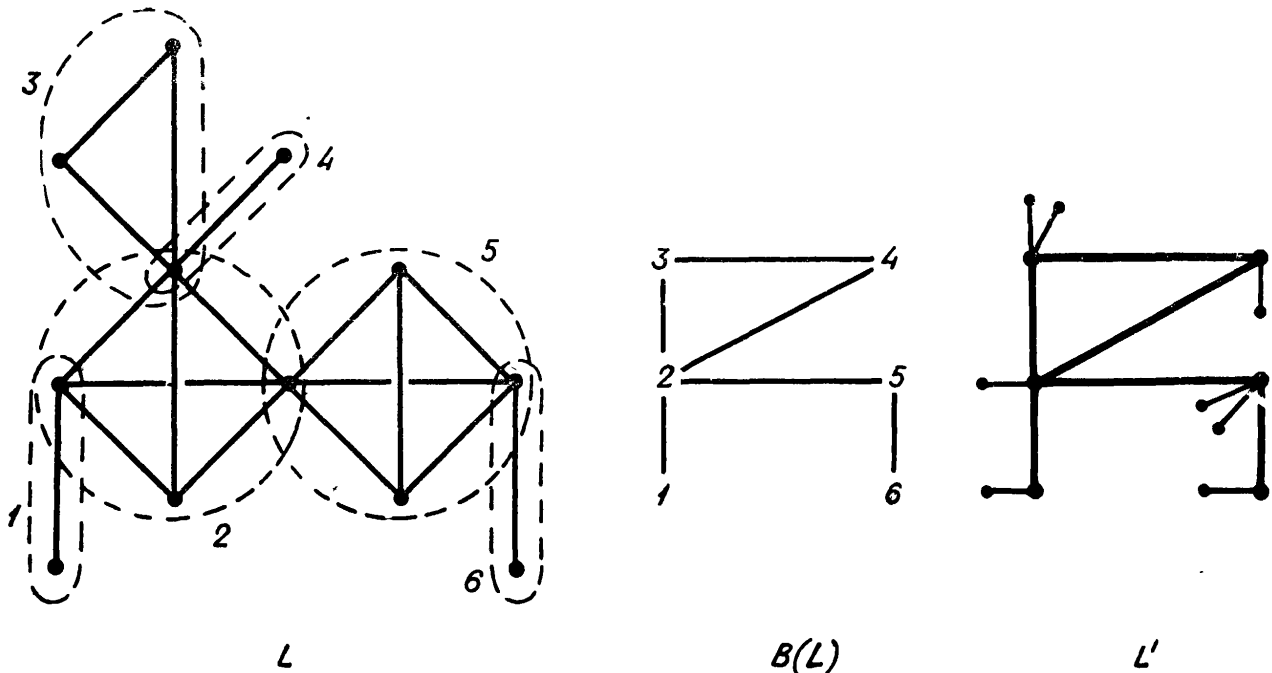


Рис. 176.

блок графа L , обозначим через $\nu(y)$ количество тех вершин этого блока, которые не являются точками сочленения в L . Теперь к каждой вершине y графа $B(L)$ присоединим $\nu(y)$ новых (т. е. не принадлежащих Y) висячих вершин с помощью $\nu(y)$ новых ребер (см., например, рис. 176). Полученный граф L' , как нетрудно проверить, и будет искомым.

З а м е ч а н и е. У построенного только что обыкновенного графа L' все блоки — полные, т. е. L' сам является графом блоков.

Пусть символ $B^p(L)$ означает p -ю итерацию операции перехода к графу блоков, т. е.

$$B^0(L) \doteq L, \quad B^p(L) \doteq B(B^{p-1}(L)) \quad \text{при } p \geq 1,$$

а граф сочленений $C(L)$ для L определяется следующим образом: его вершинами служат точки сочленения графа L , причем две различные вершины в $C(L)$ смежны тогда и только тогда, когда в L они принадлежат одному и тому же блоку. Ни-

же следующие результаты, как и теорема 5, получены Ф. Харари (8/1963).

Т е о р е м а 6. *Если граф $L = (X, U; P)$ обладает тем свойством, что ни один его блок не является компонентой связности, то $B^2(L)$ изоморфен $C(L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой точке сочленения x графа L мы отнесем подмножество $Y(x)$ всех тех вершин в $B(L)$, которые, будучи рассматриваемы как блоки L , содержат вершину x . Очевидно, всегда $|Y(x)| \geq 2$. Покажем, что подграф $B_x(L)$ графа $B(L)$, порожденный множеством $Y(x)$, является блоком и что указанное соответствие между точками сочленения L и блоками $B(L)$, т. е. вершинами $B^2(L)$, есть изоморфизм графа $C(L)$ на $B^2(L)$.

Подграф $B_x(L)$ полный, поэтому он связан и не имеет своих точек сочленения. Если бы он не был максимален относительно этого свойства, то в $B(L)$ нашелся бы содержащий его больший подграф $B'_x(L)$ с этим свойством, значит 2-связный, поскольку сам $B_x(L)$ имеет не менее двух вершин (см. обзор всевозможных типов блоков после определения понятия блока в § 15). Выбрав произвольно две разные вершины в $B_x(L)$ и третью вершину z в $B'_x(L)$, но вне $B_x(L)$, мы бы затем по теореме Эrsa (см. начало § 14) провели простую цепь C из первой вершины во вторую через z . Блоки графа L , соответствующие вершинам цепи C , удовлетворяют условию теоремы 3 § 15 и поэтому имеют общую вершину, которая в силу теоремы 2 § 15 необходимо совпадает с x . Но тогда и блок графа L , отвечающий z , содержал бы x , что невозможно, так как z не принадлежит $B_x(L)$. Итак, для любой точки сочленения x графа L соответствующий подграф $B_x(L)$ графа $B(L)$ есть блок, причем разным точкам сочленения отвечают, очевидно, разные блоки.

Наоборот, пусть $B_0(L)$ — произвольный блок графа $B(L)$. По теореме 5 этот блок является полным графом, а по условию доказываемой сейчас теоремы блок $B_0(L)$ в $B(L)$ не может сводиться к одной вершине. Поэтому система S тех блоков графа L , которые в качестве вершин графа $B(L)$ порождают подграф $B_0(L)$, состоит не менее чем из двух блоков, и все ее блоки обладают, в силу теоремы 3 § 15, общей вершиной x . По теореме 2 того же § 15, вершина x и будет той точкой сочленения графа L , которой отнесен блок $B_0(L)$. Разным блокам в $B(L)$, очевидно, отвечают разные точки сочленения графа L .

Наконец, установленное нами соответствие между точками сочленения L и блоками $B(L)$ есть изоморфизм графов

$C(L)$ и $B^2(L)$, ибо две различные точки сочленения x и y в L принадлежат одному блоку (т. е. смежны в $C(L)$, как вершины этого графа) тогда и только тогда, когда системы блоков $B_x(L)$ и $B_y(L)$ содержат общий блок, т. е. когда эти системы, рассматриваемые как блоки графа $B(L)$, имеют общую вершину, а последнее равносильно тому, что вершины графа $B^2(L)$, изображающие блоки $B_x(L)$ и $B_y(L)$, смежны.

Теорема доказана. Чтобы освободиться от единственного ограничения на граф L в ее условии, надо несколько изменить определение графа $C(L)$, считая вершинами последнего не только точки сочленения графа L , но и те его блоки, которые являются в то же время компонентами связности (для графа $C(L)$ они будут голыми вершинами).

Т е о р е м а 7. *Обыкновенный граф L есть граф сочленений (т. е. изоморфен $C(L')$ для какого-то L') в том и только том случае, если каждый блок u L является полным графом.*

Иначе говоря, в классе обыкновенных графов подкласс графов блоков совпадает с подклассом графов сочленений. Равносильность обоих утверждений следует из теоремы 5, а справедливость второго доказать теперь уже легко. В самом деле, если L изоморфен $C(L')$ для какого-то L' , то, в силу теоремы 6, граф L изоморфен графу блоков для $B(L')$. Если же, наоборот, L есть граф блоков, то, ввиду замечания к теореме 5, граф L' , для которого $B(L')$ изоморфен L , можно всегда выбрать так, чтобы сам этот L' был графом блоков, т. е. был изоморфен $B^2(L'')$ при каком-то L'' ; но тогда по теореме 6 граф L изоморфен $C(L'')$, т. е. представляет собой граф сочленений.

Исследование того, насколько велика потеря информации при переходе от графа L к $B(L)$ или к $C(L)$, т. е. насколько обширны классы графов, обладающих изоморфными графами блоков или изоморфными графами сочленений, видимо, не производилось.

И. Гавел (1965) относит обыкновенному графу $L = (X, U)$ граф $G = (U, V)$, вершинами которого служат ребра L и в котором вершины u_1 и u_2 смежны тогда и только тогда, когда они различны и, будучи рассматриваемы как ребра графа L , не принадлежат одному и тому же полному подграфу последнего; в работе доказывается, что $\varphi(L) = \gamma(G)$,* и устанавливается некоторое необходимое условие, которому должен удовлетворять граф G , являющийся представлением в указанном смысле для какого-то графа L .

*) Напомним, что φ означает плотность (см. § 10 в главе 1), γ — хроматическое число (см. § 40 в главе 5) соответствующего графа.

В заключение заметим, что к самопредставлениям вполне можно отнести соответствие между оргграфом и его графом Герца (см. § 33 в главе 4), однако связанные с этим стандартные вопросы существования и единственности решаются почти тривиально (предоставим читателю самому разобраться до конца). Самопредставлением является и соответствие между данным обыкновенным графом и его графом Гуйя-Ури (см. § 31 в главе 4). Вообще под понятие самопредставления формально можно подвести почти всякое преобразование графа, а существенных самопредставлений тоже можно придумать сколь угодно много, и мы рассматриваем лишь те, относительно которых известны достаточно интересные результаты.

§ 47. Геометрические и топологические представления

С геометрическим представлением графа мы фактически имеем дело всякий раз, когда изображаем на рисунке вершины точками, а ребра — соединяющими их линиями. Уточнение вопросов, связанных с такого рода изображением, начнем для случая обыкновенных графов.

Каждой вершине $x \in X$ графа $L = (X, U)$ отнесем некоторую точку плоскости (разным вершинам — различные точки), а каждому ребру $u \in U$ — прямолинейный отрезок с концами в тех точках, которые отвечают вершинам, соединенным в L ребром u . Условимся точки и отрезки, соответствующие вершинам и ребрам графа, тоже называть вершинами и ребрами и обозначать прежними буквами x, u и т. п. всегда, когда такое отождествление понятий не приводит к недоразумениям. Можно ли изобразить граф в плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались в точке, не являющейся концом хотя бы одного из этих ребер? Очевидно, не всегда: если, например, граф F_4 допускает такое представление (рис. 177), то уже граф F_5 не допускает, и мы вынуждены в последнем случае как-то отмечать точки-вершины (например, изображать их жирными кружками), чтобы они отличались от точек пересечения отрезков-ребер, не соответствующих вершинам графа (рис. 178). Для любого графа, однако, можно пытаться выбрать такое расположение его вершин в плоскости, при котором количество лишних пересечений было бы наименьшим; так, граф F_5 допускает расположение с одной лишь «паразитной» точкой (рис. 179). Вопрос минимизации числа лишних точек пересечения в плоском представлении полного обыкновенного графа F_n

рассматривается, в частности, в статье Ф. Харари и А. Хилла (1963). Заметим, что речь пока идет только о евклидовой плоскости, ибо, например, в проективную плоскость граф F_5 охотно помещается (рис. 180).

Гораздо бóльшим злом, чем ненужное пересечение ребер, является их частичное перекрытие, однако его всегда можно

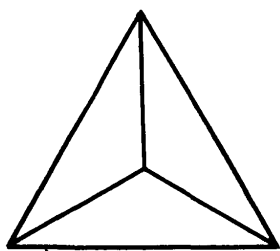


Рис. 177.

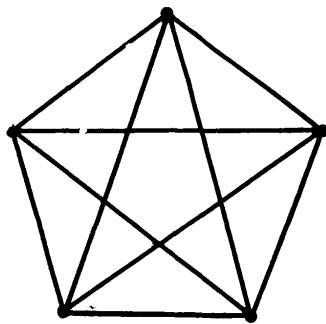


Рис. 178.

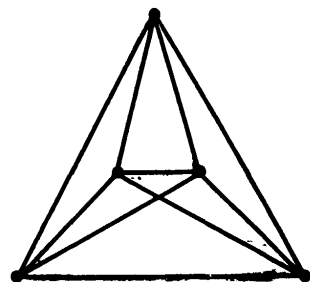


Рис. 179.

избежать, если в процессе последовательного размещения вершин графа на плоскости применять следующее индуктивное правило: а) первые две вершины помещаем в любые две различные точки плоскости; б) если $k \geq 2$ вершин уже размещены, то мысленно проводим все C_k^2 прямых через пары этих точек и помещаем $(k + 1)$ -ю вершину на плоскость так, чтобы она не лежала ни на одной из этих прямых.

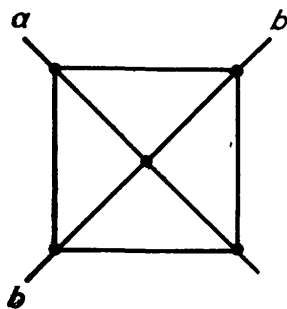


Рис. 180.

В трехмерном пространстве обыкновенный граф всегда допускает такое расположение, при котором никакие два ребра не пересекаются в точке, отличной от концевых. Достаточно процесс размещения вершин вести следующим образом: а) первые три вершины помещаем так, чтобы они не были коллинеарны; б) если $k \geq 3$ вершин уже размещены, то мысленно проводим все C_k^3 плоскостей через тройки этих вершин, а $(k + 1)$ -ю вершину выбираем вне указанных плоскостей. Ясно, что тогда никакие четыре вершины не будут компланарны и, следовательно, никакие два ребра не смогут иметь «паразитного» пересечения.

Для мультиграфов правильное изображение с помощью точек и прямолинейных отрезков n -мерного евклидова пространства невозможно ни при каком n , однако уже при $n = 3$

оно станет возможным, если представлять ребра, вообще говоря, криволинейными отрезками, т. е. жордановыми дугами. Именно, сначала изобразим скелет данного мультиграфа (см. § 5 в главе 1), а затем каждое ребро этого изображения окружим достаточно узкой веретенообразной областью, в которой, очевидно, можно провести сколько угодно ребер с теми же концевыми вершинами (рис. 181); разместить в пространстве все петли графа тоже не составляет труда.

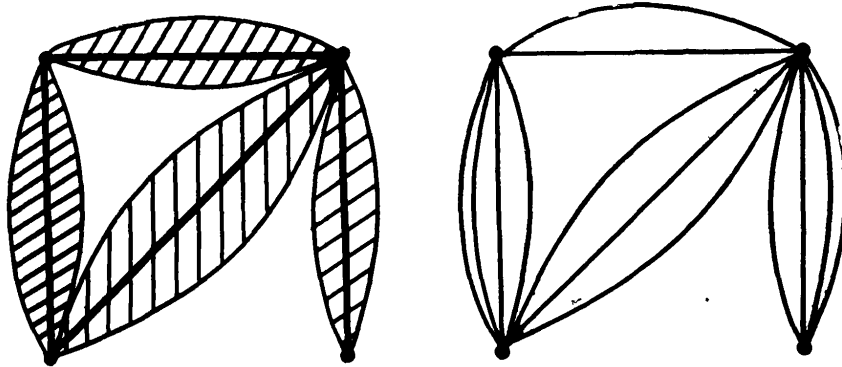


Рис. 181.

Интересны такие графы, которые изоморфны реберным остовам многогранников. Например, в случае правильного многогранника соответствующий обыкновенный граф L однороден (см. § 8 в главе 1), и все простые циклы, окаймляющие грани, имеют одну и ту же длину, причем совокупность этих циклов без одного определяет базис пространства циклов (см. § 23 в главе 3). Обозначая степень каждой вершины графа L через s , а длину каждого его цикла-грани — через l , мы можем, очевидно, написать

$$2m = n \cdot s = (\lambda + 1) \cdot l,$$

где $n \doteq n(L)$, $m \doteq m(L)$, $\lambda \doteq \lambda(L)$; но так как $\kappa(L) = 1$, то $\lambda = m - n + 1$, и мы получаем систему двух уравнений, связывающих n , m , s , l :

$$2m = n \cdot s = (m - n + 2) \cdot l. \quad (*)$$

Требование, чтобы многогранник был выпуклым, легко приводит к выводу, что $s \leq 5$ и $l \leq 5$; перебирая все пары целых чисел s и l , удовлетворяющие условиям

$$3 \leq s \leq 5, \quad 3 \leq l \leq 5,$$

далее находя для каждой пары соответствующие значения n и m из системы (*) и, наконец, отбирая только целые положительные значения, мы установим, что никаких других правильных выпуклых многогранников, кроме пяти платоновых тел (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр), не существует. Сам этот факт, конечно, давно известен, однако способ исследования с помощью графов можно применить и к многогранникам более общего вида, как делают, например, А. Котиг (1/1955), С. Билинский (1959), Т. Браун (1961), Б. Грюнбаум (2/1963), В. Кли (1/1963, 2/1964, 3/1964, 4/1964) и другие авторы. Реберными остовами выпуклых многогранников в многомерных евклидовых пространствах занимаются, в частности, Б. Грюнбаум и Т. Моцкин (1962).

Важную роль играют реберные остовы n -мерных кубов и всевозможные части таких графов (о приложениях мы скажем в § 49 Заключения первой части книги). Например, вопрос о том, когда заданная целочисленная метрика на конечном множестве реализуется (см. § 17 в главе 2) частью остова n -мерного куба и каково при этом наименьшее возможное значение n , изучается в работах М. Е. Тылкина (1/1960, 2/1962); перечислить же все труды, в которых так или иначе участвуют графы n -мерных кубов, мы не беремся.

В работе Ю. Л. Зимана (1965) рассматриваются такие графы, вершины которых можно расположить в узлах прямоугольной решетки так, чтобы смежным вершинам отвечали только соседние узлы. П. Эрдеш, Ф. Харари и В. Татт (1965) исследуют наименьшее k , при котором данный граф можно так поместить в k -мерное евклидово пространство, чтобы каждое ребро было прямолинейным отрезком длины 1.

К геометрическим представлениям принадлежат и такие теоретико-множественные, когда граф выражает отношения между геометрическими объектами, например, элементами различных геометрических конфигураций. Граф пересечений (см. § 45) произвольного множества прямых линий в евклидовой плоскости имеет весьма простую структуру: каждому классу параллельных прямых этого множества отвечает пустой подграф, притом, очевидно, максимальный (см. § 9 в главе 1), и всякие две вершины из различных таких подграфов смежны. Исследование же графов пересечений (или нерасходимости) систем прямых в плоскости Лобачевского равносильно исследованию графов пересечений систем хорд фиксированной окружности (в случае графов пересечений, а не расходимости, надо хорды с общей точкой на окружности рассматривать как непересекающиеся); это следует из существования интерпрета-

ции Бельтрами — Клейна для плоской геометрии Лобачевского.

Топологическим представлением абстрактного графа общего вида называется изоморфный ему граф $L = (X, U; P)$, вершинами которого служат различные точки трехмерного евклидова пространства, ребрами — жордановы дуги (замкнутые и незамкнутые, с указанием и без указания направления), а инцидентор определен естественным образом, т. е. так, что для $x, y \in X$ и $u \in U$ высказывание $P(x, u, y)$ истинно в том и только том случае, если либо а) $x \neq y$ и u — жорданова дуга с указанием направления, идущая из точки x в точку y , либо б) $x = y$ и u — замкнутая жорданова дуга без указания направления, проходящая через точку x , либо в) $x \neq y$ и u — жорданова дуга без указания направления, соединяющая x с y . При этом требуется еще, чтобы никакие две жордановы дуги из U не имели друг с другом общих точек, отличных от концов незамкнутой дуги и от единственной инцидентной точки из X для замкнутой дуги. Во избежание ненужных усложнений мы будем по отношению к топологическому представлению пользоваться теми же обозначениями и терминами, которыми все время пользовались для абстрактных графов, т. е. по-прежнему называть точки множества X вершинами, жордановы дуги из U — ребрами (дугами, петлями или звеньями в случаях а), б), в) соответственно) и т. д. В отличие от геометрических представлений, никакие другие требования, кроме перечисленных, на элементы множеств X и U не накладываются (в частности, ребра не обязаны быть прямолинейными).

Пусть u — произвольное ребро абстрактного графа $L = (X, U; P)$, соединяющее его вершины x и y . Операция *подразделения* этого ребра определяется следующим образом: само u удаляем, зато добавляем новую вершину z и два новых ребра v и w , соединяющих соответственно x с z и z с y ; при этом если u — звено или петля, то v и w — звенья, а если ребро u было дугой, идущей из x в y , то v — дуга, идущая из x в z , а w — дуга, идущая из z в y . Обратная операция *слияния* двух ребер применима, очевидно, лишь в случае, когда в графе имеются вершина z и ровно два инцидентных ей ребра v и w , такие что либо оба эти ребра — звенья, либо оба — дуги, причем в последнем случае одна из них идет в z из некоторой вершины x , а другая идет из z в некоторую вершину y , отличную от x . Два графа, переводимые друг в друга конечным числом подразделений и слияний ребер, называются *гомеоморфными* (таковы, например, графы L_1 и L_2 на рис. 182). Гомеоморфизм

графов можно определить также как возможность преобразовать эти графы в изоморфные посредством одних только подразделений. Очевидно, отношение гомеоморфизма представляет собой эквивалентность, и в каждом классе гомеоморфных

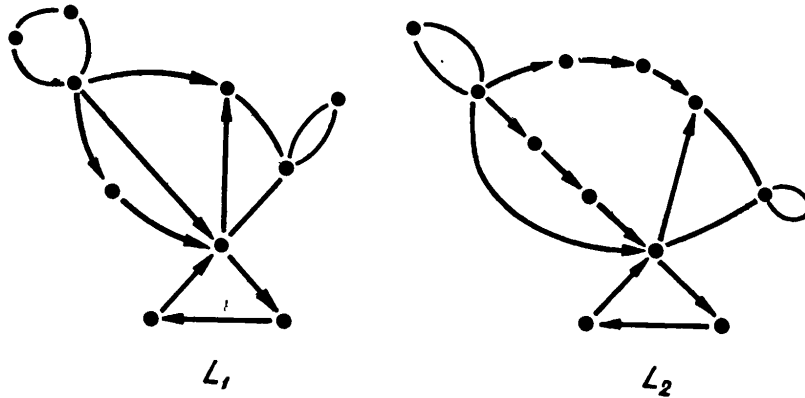


Рис. 182.

графов имеется ровно один (с точностью до изоморфизма) неприводимый граф, к которому неприменима операция слияния; так, неприводимым представителем класса, содержащего графы L_1 и L_2 рисунка 182, служит граф на рис. 183.

Топологические представления гомеоморфных графов гомеоморфны также и в том смысле, что они допускают взаимно

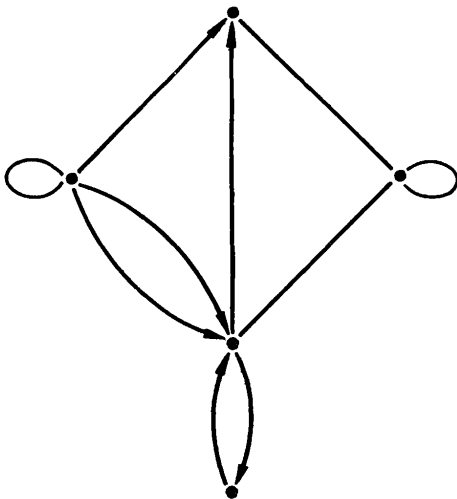


Рис. 183.

однозначное непрерывное в обе стороны преобразование друг на друга (с сохранением направления ориентированных дуг); этот последний гомеоморфизм мы будем называть *точечным*, в отличие от определенного выше *комбинаторного* гомеоморфизма абстрактных графов. Наоборот, *точечно гомеоморфным* топологическим представлениям соответствуют комбинаторно гомеоморфные абстрактные графы — это легко доказать, основываясь на том очевидном факте, что *точечно гомеоморфные* простые цепи (или простые циклы, или простые пути) могут различаться только количеством вершин.

Поэтому изучение топологических свойств *одномерных комплексов* (множеств в евклидовом пространстве, являющихся топологическими представлениями абстрактных графов) равносильно изучению тех свойств графов, которые

инвариантны относительно комбинаторного гомеоморфизма. Попытки общего исследования этих инвариантов мы включили во вторую часть книги, а сейчас займемся одним интересным топологическим свойством графа, именно возможностью или невозможностью разместить его на плоскости; условимся под плоскостью везде, где не оговорено противное, понимать евклидову плоскость.

Говорят, что абстрактный граф L *расположен* на плоскости S , если задано такое его топологическое представление L_S , все точки которого (как вершины, так и точки ребер) принадлежат S . Граф L называется *плоским*, если он может быть расположен на какой-нибудь (а значит, и на любой) плоскости; ясно, что в этом и только в этом случае L можно расположить также на сфере: в самом деле, поверхность, полученная из сферы удалением всего лишь одной точки, гомеоморфна евклидовой плоскости, а единственная «точечная дырка», проколота в сфере, не может, очевидно, ни помочь, ни помешать расположению на ней графа. Мы в дальнейшем будем неоднократно пользоваться классической теоремой Жордана: *всякий простой цикл C , расположенный на плоскости или сфере S , разбивает эту поверхность на две области* (т. е. множество $S \setminus C_S$ состоит из двух компонент связности в смысле теоретико-множественной топологии)*; в случае сферы обе области ничем не отличаются друг от друга (топологически), а в случае плоскости одна из этих областей — «внутренняя» — гомеоморфна кругу без границы, другая же область — «внешняя» — такому же кругу, из которого удалена центральная точка, или, что равносильно, — кольцу без граничных окружностей.

Известен ряд критериев того, что заданный граф является плоским; мы сформулируем четыре условия, относительно которых докажем затем в виде одной теоремы, что каждое из них характеризует плоский граф. Понятия и обозначения из § 22—27 главы 3 будут использоваться без напоминания.

1. Пусть $L = (X, U; P)$ — произвольный граф, а $L_C = (X_C, U_C; P)$ — его часть, полученная удалением всех перешейков и петель, с последующим удалением голых вершин; если L не содержит циклов длины > 1 , то под L_C понимается не граф, а пустое множество. Мы скажем, что граф L удовлетворяет *условию Мак-Лэйна*, когда либо $L_C = \emptyset$, либо в про-

*) См., например, П. С. Александров, Комбинаторная топология. М.— Л., ОГИЗ, ГТТИ, 1947.

пространстве циклов $\mathfrak{Q}_{L_C}^\Lambda$ графа L_C имеется система квазициклов

$$U_1, U_2, \dots, U_\lambda, U_{\lambda+1} \subseteq U$$

($\lambda \doteq \lambda(L_C) = \lambda(L) - |\dot{U}_L| \geq 1$) такая, что

а) $U_1, U_2, \dots, U_\lambda$ линейно независимы, т. е. образуют базис пространства $\mathfrak{Q}_{L_C}^\Lambda$;

б) каждое ребро $u \in U_C$ графа L_C принадлежит ровно двум из квазициклов $U_1, U_2, \dots, U_\lambda, U_{\lambda+1}$.

Ясно, что из б) следует $\sum_{i=1}^{\lambda+1} U_i = 0$, т. е. $U_{\lambda+1} = \sum_{i=1}^{\lambda} U_i$, где

Σ означает сложение в пространстве суграфов \mathfrak{Q}_{L_C} (значит, и в пространстве циклов $\mathfrak{Q}_{L_C}^\Lambda$), а 0 — нулевой элемент пространства. Поэтому при выполнении обоих условий а) и б) квазицикл $U_{\lambda+1}$ не может быть нулевым, ибо иначе $U_1, U_2, \dots, U_{\lambda+1}$ были бы линейно зависимы.

2. Граф $L' = (X', U'; P)$ называется двойственным для графа $L = (X, U; P)$, если между их ребрами можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы некоторая матрица разрезов графа L в то же время служила цикломатической матрицей графа L' ; при этом, очевидно, и все матрицы разрезов L будут цикломатическими для L' . Наоборот, цикломатические матрицы графа L служат матрицами разрезов двойственного графа L' ; в самом деле, если $A_L^P = A_{L'}^\Lambda$, то после перекройки обеих матриц получаем $A_L^\Lambda = A_{L'}^P$ (тот факт, что цикломатическая матрица $A_{L'}^\Lambda$ содержит единичную подматрицу не в конце, а в начале, очевидно, не влияет на окончательный результат). Поэтому отношение двойственности графов симметрично.

Два графа L' и L'' , двойственные одному и тому же L , не обязательно изоморфны (даже если они неориентированные, см. пример на рис. 184). Существуют графы, не имеющие ни одного двойственного: важным примером служат изображенные на рис. 185 графы F_5 (полный пятивершинный обыкновенный) и $K_{3,3}$ (полный граф Кёнига $(X, Y; U)$ с $|X| = |Y| = 3$, представляющий схему хорошо известной задачи о трех домах и трех колодцах). Доказательство того, что у F_5 и у $K_{3,3}$ нет двойственных графов, является стандартным упражнением на применение алгоритма Майеды (§ 27): надо составить цикломатические матрицы $A_{F_5}^\Lambda$, $A_{K_{3,3}}^\Lambda$ и убедиться в их P -нерализуемости; предоставим это читателю.

Из теоремы 3 § 25 непосредственно следует, что *перешейкам графа L в двойственном графе L' отвечают петли, и наоборот.*

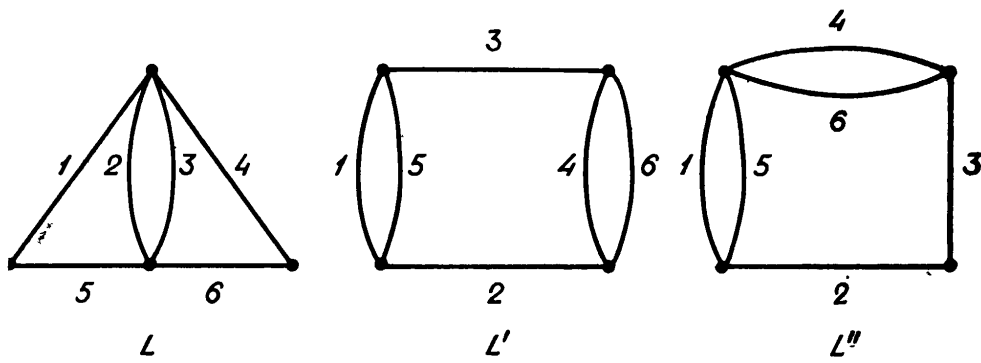
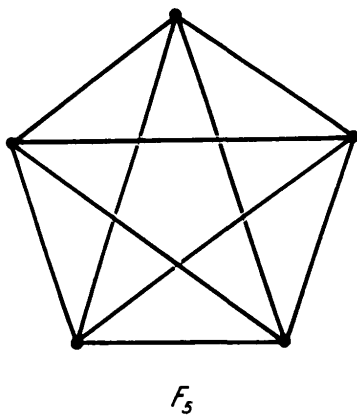
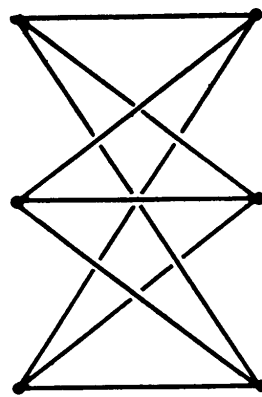


Рис. 134.



F_5



$K_{3,3}$

Рис. 185.

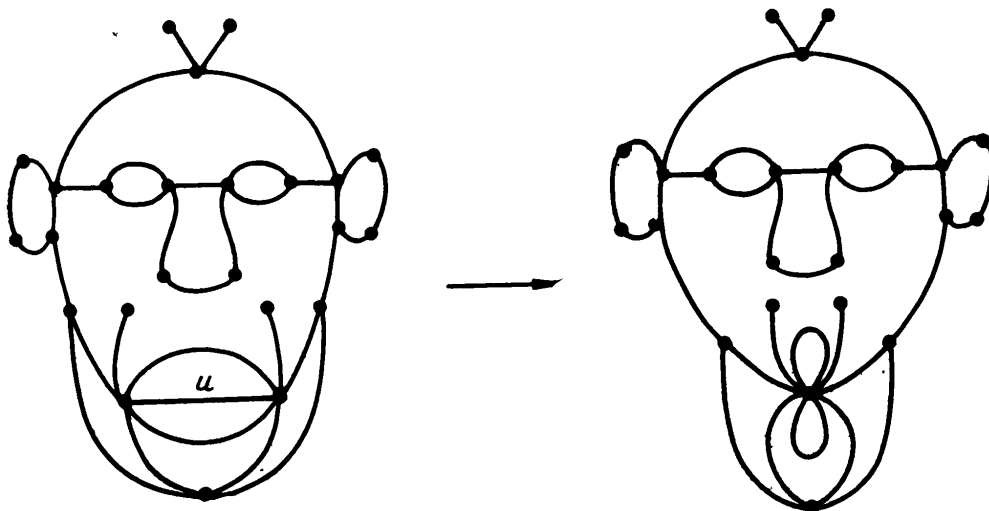


Рис. 186.

Л е м м а 1. Если граф L обладает двойственностью, то и любая часть L_1 графа L имеет двойственный граф.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно, очевидно, доказать лемму в предположении, что L_1 — суграф, полученный из L удалением одного ребра u .

Случай 1: u — перешеек; тогда ребро u входит во всякий каркас графа L . Пусть A_L^P — матрица разрезов графа, начинающаяся с единичной подматрицы E_ρ , и пусть ребру u отвечает ρ -й столбец в A_L^P . По теореме 3 § 25 все остальные элементы этого столбца и ρ -й строки равны нулю. Удаление ребра u из L приводит к удалению соответствующего однореберного простого разреза из базиса пространства \mathcal{Q}_L^P , так что матрица $A_{L_1}^P$ получается из A_L^P следующим образом:

$$A_L^P = \left\| \begin{array}{cccc|c|cc} & & & & u & & & \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c|cc} & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & & & \end{array} \right\| = A_{L_1}^P.$$

Если первая матрица Λ -реализуема, то по той же теореме 3 § 25 столбцу « u » отвечает в реализующем графе L' петля, а граф L'_1 , для которого $A_{L'_1}^\Lambda \doteq A_{L_1}^P$, получается из L' удалением этой петли. (Наоборот, если вторая матрица Λ -реализуема некоторым графом L'_1 , то добавляя к нему петлю (при любой вершине), получим граф, Λ -реализующий матрицу A_L^P).

Случай 2: u — цикловое ребро. Всегда существует каркас T графа L , не содержащий u : для его построения достаточно провести какой-нибудь простой цикл через ребро u и затем, согласно теореме 2 § 22, найти в L каркас, содержащий все отличные от u ребра этого цикла. Пусть матрица A_L^P отвечает именно такому выбору каркаса, тогда столбец ребра u не находится в числе ρ первых и удаление его не сопровождается удалением строк (ибо все строки по-прежнему будут определять простые разрезы и останутся линейно независимыми). Таким образом,

$$A_L^P = \left\| \begin{array}{cccc|c|c|cc} & & & & u & & & \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & b_p & & \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c|c|cc} & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & & & \end{array} \right\| = A_{L-u}^P.$$

Если граф L' служит Λ -реализацией матрицы A_L^P , то для построения графа L'_1 , являющегося Λ -реализацией $A_{L_1}^P$, достаточно удалить из L' ребро u и затем отождествить между собой те две вершины, которые оно соединяло в L' (второй шаг не нужен, когда u — петля), без отождествления ребер (рис. 186; ребра, параллельные u , переходят в петли). Действительно, при указанном отождествлении все циклы графа L' переходят в циклы L'_1 , цикломатическое число не меняется (ибо $\lambda(L'_1) = m(L'_1) - n(L'_1) + \kappa(L'_1) = m(L') - 1 - [n(L') - 1] + \kappa(L') = \lambda(L')$) и все строки матрицы остаются линейно независимыми, поэтому $A_{L_1}^{\Lambda} = A_{L_1}^P$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если граф L обладает двойственным, то и любой граф L_1 , гомеоморфный L , имеет двойственный.

Доказательство. Достаточно показать, что свойство обладать двойственным графом инвариантно относительно операции подразделения любого ребра u и относительно обратной операции слияния.

Случай 1: u — петля; ей в матрице разрезов A_L^P отвечает нулевой столбец. Граф L_1 , полученный из L подразделением петли u на два звена v и w , содержит по сравнению с L новый базисный простой разрез $\{v, w\}$, поэтому

$$= \left\| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] & 0 \\ \text{штрихованная область} \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v & w \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{array} \\ \text{штрихованная область} \end{array} \right\| = A$$

Если матрицу A_L^P предположить Λ -реализуемой, то в графе L' , двойственном L , нулевому столбцу будет отвечать перешеек (как ребро, не принадлежащее ни одному циклу, в том числе ни одному базисному), и для получения графа L'_1 , у которого $A_{L_1}^{\Lambda} = A_{L_1}^P$, достаточно к L' добавить ребро, параллельное этому перешейку: тогда, очевидно, оба ребра вместе образуют простой цикл длины два, не принадлежащий пространству прежних циклов, и этому новому циклу будет отвечать нижняя строка матрицы $A_{L_1}^{\Lambda} = A_{L_1}^P$. Наоборот, если предположить Λ -реализуемой матрицу $A_{L_1}^P$, то в графе L'_1 , для которого $A_{L_1}^{\Lambda} \doteq A_{L_1}^P$, столбцам « v » и « w » будут соответствовать два

ребра, образующие вместе базисный цикл длины 2 и не принадлежащие никаким другим базисным циклам, а значит и вообще никаким другим циклам графа L_1 ; поэтому после удаления одного из этих ребер второе станет перешейком, и полученный граф L' будет Λ -реализацией матрицы A_L^P .

Случай 2: u — непетля. По теореме 2 § 22 в графе L можно найти каркас T , содержащий u ; пусть матрица разрезов A_L^P соответствует такому выбору каркаса и пусть ребру u отвечает ее ρ -й столбец. Обозначим через L_1 и T_1 граф и его каркас, полученные соответственно из L и T подразделением ребра u на v и w . Простому разрезу графа L , образованному ребром u каркаса и некоторыми хордами, соответствуют в L_1 два простых разреза, получающиеся заменой ребра u ребром v или ребром w ; оба эти разреза — базисные, так что

$$P_L = \left\| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overbrace{1 \ 0 \dots 0}^u \\ 0 \ 1 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \ 0 \dots 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{штрихованная область} \\ b_1 \dots b_\lambda \end{array} \\ \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overbrace{1 \ 0 \dots 0}^v \quad \overbrace{}^w \\ 0 \ 1 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \ 0 \dots 1 \\ 0 \ 0 \dots 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \ b_1 \dots b_\lambda \\ 1 \ b_1 \dots b_\lambda \end{array} \end{array} \right\| = A_{L_1}^P$$

Если матрица A_L^P является Λ -реализуемой, то для построения Λ -реализации матрицы $A_{L_1}^P$ достаточно к графу, реализующему A_L^P как цикломатическую матрицу, присоединить ребро, параллельное u . Наоборот, если вторая матрица Λ -реализуема, то циклы, отвечающие двум нижним строкам, различаются лишь одним ребром, поэтому в реализующем графе имеется пара параллельных ребер v и w ; удаляя одно из них (любое), получим Λ -реализацию матрицы A_L^P . Лемма доказана.

Мы будем говорить, что граф удовлетворяет *условию Уитни*, если он обладает хотя бы одним двойственным графом.

3. Говорят, что граф $L = (X, U; P)$ удовлетворяет *условию Понтрягина — Куратовского*, если скелет \hat{L} этого графа (см. § 5 в главе 1) не содержит ни частей, гомеоморфных F_5 , ни частей, гомеоморфных $K_{3,3}$.

4. Говорят, что граф L удовлетворяет *условию Харари — Татта*, если его скелет \hat{L} невозможно посредством стягивания ребер (см. § 40 в главе 5) превратить ни в F_5 , ни в $K_{3,3}$.

Теорема о плоских графах. Для графа $L = (X, U; P)$ критерием того, что он плоский (0), служит каж-

дое из четырех условий: Мак-Лэйна (1), Уитни (2), Понтрягина — Куратовского (3) и Харари — Татта (4).

Докажем, что $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (0)$.

$(0) \Rightarrow (1)$. Пусть L — плоский; тогда плоским будет и граф L_C , полученный из L удалением всех петель и перешейков, с последующим удалением голых вершин. Случай $L_C = \emptyset$ мы не рассматриваем (так как тогда нечего доказывать) и поэтому считаем $\lambda(L_C) \geq 1$.

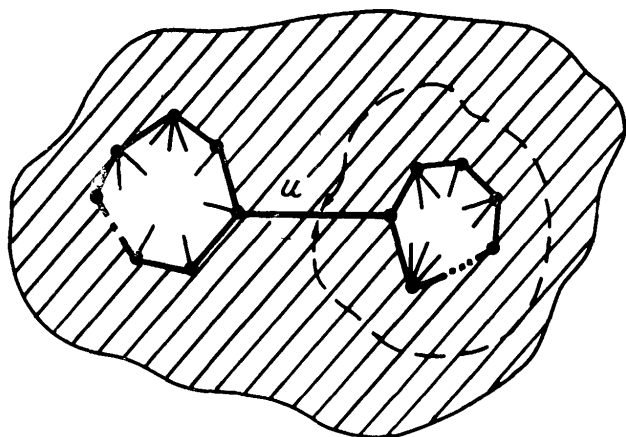


Рис. 137.

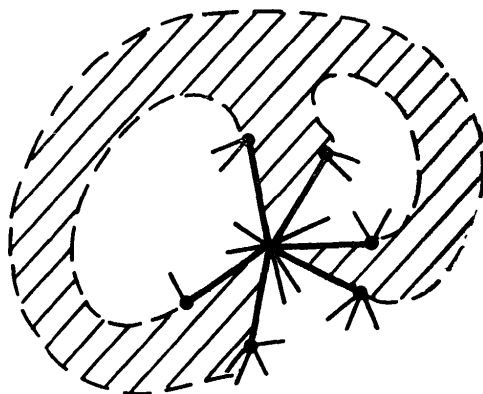


Рис. 188.

Обозначим через L_{CS} некоторое представление графа L_C в плоскости S . Компоненты связности (в смысле теоретико-множественной топологии) множества $S \setminus L_{CS}$ называются *гранями* графа (точнее, представления) L_{CS} . Множество граничных точек каждой грани называется ее *краем* и состоит из вершин и ребер графа L_{CS} .

Очевидно, все ребра L_{CS} принадлежат краям каких-то граней. При этом каждое ребро входит в края ровно двух граней и край каждой грани является квазициклом графа. В самом деле, никакое ребро u не может принадлежать краю только одной грани, ибо иначе, как следует из теоремы Жордана, это ребро было бы перешейком (рис. 187: если бы u принадлежало какому-то циклу, то последний должен был бы пересекать пунктирную линию, т. е. иметь точки внутри грани, что невозможно). Также ясно, что ребро не может принадлежать краям более чем двух граней. Но в таком случае каждая вершина графа инцидентна четному числу ребер края заданной грани (рис. 188).

Пусть $\mu(L_{CS})$ — количество граней графа L_{CS} , а U_1, U_2, \dots, U_μ — квазициклы, образованные краями этих граней. Осталось доказать, что $\mu(L_{CS}) = \lambda(L_C) + 1$ и что среди всех квазициклов-краев имеется ровно $\lambda(L_C)$ линейно независимых;

докажем это индукцией по цикломатическому числу $\lambda(L_{CS}) = \lambda(L_C)$.

При $\lambda(L_{CS}) = 1$ граф L_{CS} состоит из единственного простого цикла, который делит плоскость на две грани и является краем каждой из них, так что здесь $\mu(L_{CS}) = 2$ и утверждение

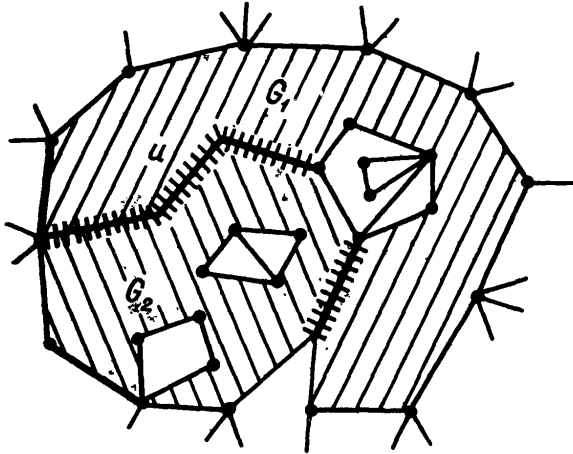


Рис. 189.

очевидно. Пусть уже известно, что всякий раз, когда $\lambda(L_{CS}) = \lambda_0 \geq 1$, количество граней $\mu(L_{CS}) = \lambda_0 + 1$ и среди квазициклов, составленных их краями, имеется λ_0 линейно независимых. Тогда аналогичное утверждение справедливо и в случае $\lambda(L_{CS}) = \lambda_0 + 1$. Действительно, пусть u — произвольное ребро графа L_{CS} , а G_1 и G_2 — грани, разделяемые этим ребром. После удаления u из L_{CS} грани G_1 и G_2 объединя-

тся в одну; если в L_{CS} были, кроме u , еще ребра, принадлежащие одновременно краям обеих граней G_1 и G_2 , то все эти (и только эти) ребра превратятся в перешейки (рис. 189); удалим их (а также голые вершины) и оставшуюся часть графа L_{CS} обозначим через L'_{CS} .

Ясно, что $\lambda(L'_{CS}) = \lambda(L_{CS}) - 1$ и $\mu(L'_{CS}) = \mu(L_{CS}) - 1$, а так как, по индуктивному предположению, $\mu(L_{CS}) = \lambda(L_{CS}) + 1$, то $\mu(L'_{CS}) = \lambda(L'_{CS}) + 1$. Далее, согласно предположению, среди квазициклов $U_1, U_2, \dots, U_{\mu(L'_{CS})}$, отвечающих краям всех граней (в том числе и грани $G_1 \cup G_2$) графа L'_{CS} , имеется $\lambda(L'_{CS})$ линейно независимых. Поскольку край грани $G_1 \cup G_2$, рассматриваемый как элемент пространства \mathcal{Q}_{L_C} суграфов графа L_C , равен сумме краев граней G_1 и G_2 и так как оба слагаемых содержат ребро u , не принадлежа-

щее $\bigcup_{i=1}^{\mu(L'_{CS})} U_i$, в силу чего не могут быть линейными комбинациями остальных краев, то среди $\mu(L_{CS})$ краев граней графа L_{CS} заведомо есть $\lambda(L_{CS})$ линейно независимых.

(1) \Rightarrow (2). Пусть граф L удовлетворяет условию Мак—Лэйна, а $U_1, U_2, \dots, U_{\lambda(L_C)}, U_{\lambda(L_C)+1}$ — соответствующая система квазициклов графа $L_C = (X_C, U_C; P)$, полученного из L удалением петель, перешейков и голых вершин (причем первые

$\lambda(L_C)$ квазициклов образуют базис пространства $\mathcal{Q}_{L_C}^\Lambda$). Построим граф $L_C^* \doteq (X_C^*, U_C; P^*)$, вершинами которого служат квазициклы системы, т. е. $X^* \doteq \{U_1, U_2, \dots, U_{\lambda(L_C)+1}\}$, ребрами служат ребра графа L_C , а инцидентор P^* определен так, что ребро u в графе L_C^* соединяет те две вершины, которые, будучи рассматриваемы как квазициклы графа L_C , содержат u . Для каждого $i = 1, 2, \dots, \lambda(L_C)$ множество ребер U_i составляет в графе L_C^* центральный разрез, а так как $n(L_C^*) = \lambda(L_C) + 1$, то квалиразрезы, соответствующие $\lambda(L_C)$ квазициклам $U_1, U_2, \dots, U_{\lambda(L_C)}$, образуют базис пространства $\mathcal{Q}_{L_C^*}^P$. Поэтому цикломатическая матрица графа L_C , написанная для базиса $U_1, U_2, \dots, U_{\lambda(L_C)}$, совпадает с матрицей разрезов графа L_C^* , написанной для базиса из соответствующих квалиразрезов, т. е. граф L_C^* — двойственный по отношению к L_C . Чтобы построить граф, двойственный исходному L , достаточно к L_C^* добавить столько петель, сколько перешейков имеет L , и добавить столько перешейков, сколько у L петель (при этом вершины в случае надобности можно добавлять в любом количестве).

(2) \Rightarrow (3). Допустим, что импликация неверна, т. е. что скелет \hat{L} графа L содержит часть, гомеоморфную F_5 , или часть, гомеоморфную $K_{3,3}$, но в то же время граф L обладает двойственным графом. Так как переход от L к \hat{L} можно осуществить путем удаления некоторых ребер, дезориентации дуг и удаления голых вершин, причем операции второго и третьего типа не меняют ни матриц разрезов, ни цикломатических матриц, то, в силу леммы 1, вместе с графом L двойственным графом обладает и его скелет \hat{L} . Последующим удалением ребер, а также слиянием ребер можно, согласно предположению, превратить \hat{L} в F_5 или $K_{3,3}$; но в силу лемм 1 и 2, результирующий граф должен обладать двойственным, что невозможно, ибо, как мы уже говорили (см. пример к определению двойственного графа), ни F_5 , ни $K_{3,3}$ не имеют двойственных графов.

(3) \Rightarrow (4). Так как в формулировках обоих условий (3) и (4) фигурируют только скелеты графов, т. е. обыкновенные графы, то достаточно доказать, что всякий обыкновенный граф, допускающий стягивание на F_5 или $K_{3,3}$, содержит часть, гомеоморфную какому-либо из этих двух графов. Доказательство будем вести индукцией по числу вершин $n(L)$.

При $n(L) < 5$ доказываемое условное предложение (имп-

ликация) верно в силу ложности посылки*; пусть оно уже доказано для всех обыкновенных графов с числом вершин $n_0 \geq \geq 4$ и пусть L — обыкновенный граф с $n(L) = n_0 + 1$, допускающий стягивание на F_5 или стягивание на $K_{3,3}$. Покажем, что у L есть часть, гомеоморфная F_5 , или часть, гомеоморфная $K_{3,3}$.

Так как операция стягивания графа включает не только стягивание ребер, но также удаление ребер и удаление вершин,

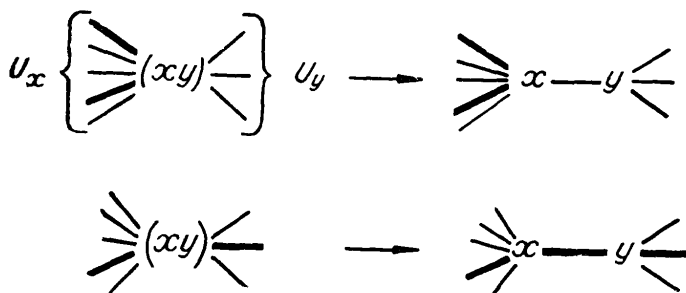


Рис. 190.

то можно, не нарушая общности, считать граф L минимальным в том смысле, что он не содержит голых вершин и после удаления любого ребра (без удаления вершин) превращается в такой суграф, который уже невозможно стянуть ни на F_5 , ни на $K_{3,3}$.

Если сам L не является ни одним из графов F_5 , $K_{3,3}$ (в противном случае больше нечего было бы доказывать), то пусть $u \doteq \widetilde{xy}$ — первое ребро в одной из тех серий ребер, последовательное стягивание которых превращает L в F_5 или в $K_{3,3}$. Тогда никакая вершина z графа L не может быть одновременно смежна с x и y , иначе удаление одного (любого) из ребер \widetilde{zx} , \widetilde{zy} не устранило бы возможности стянуть граф на F_5 или на $K_{3,3}$. Поэтому $U_x \cap U_y = \emptyset$, где U_x и U_y означают множества всех ребер L , отличных от u и инцидентных вершине x , соответственно y .

Так как граф L' , полученный из L стягиванием ребра u , по-прежнему допускает стягивание на F_5 или $K_{3,3}$, а $n(L') = n_0$, то, согласно индуктивному предположению, L' содержит часть L'' , гомеоморфную F_5 или $K_{3,3}$. Если в L'' вершина (xy) , возникшая в результате отождествления x с y , имеет степень 2, то требуемая часть исходного графа L находится без труда: оба возможных случая (с точностью до перемены ролями вершин x и y) проиллюстрированы на рис. 190, где ребра, принадлежащие части L'' , — жирные, причем изображена не вся эта часть, а только ее фрагмент**. Если же вершина (xy)

*) Тот, кто относится с недоверием к подобным логическим трюкам (в действительности вполне законным), может начать индукцию с $n = 5$.

**) Здесь и в последующих случаях нежирные ребра, отличные от u , на самом деле отсутствуют (в силу предположения о минимальном

имеет в L'' степень ≥ 3 , то надо рассмотреть два случая.

Случай 1: L'' гомеоморфен $K_{3,3}$; тогда при любом распределении трех ребер, инцидентных вершине (x, y) в графе L'' , по множествам U_x и U_y легко и в L найти часть, гомеоморфную $K_{3,3}$ (рис. 191).

Случай 2: L'' гомеоморфен F_5 . Если при этом из четырех ребер, принадлежащих L'' и инцидентных (xy) , все четыре или

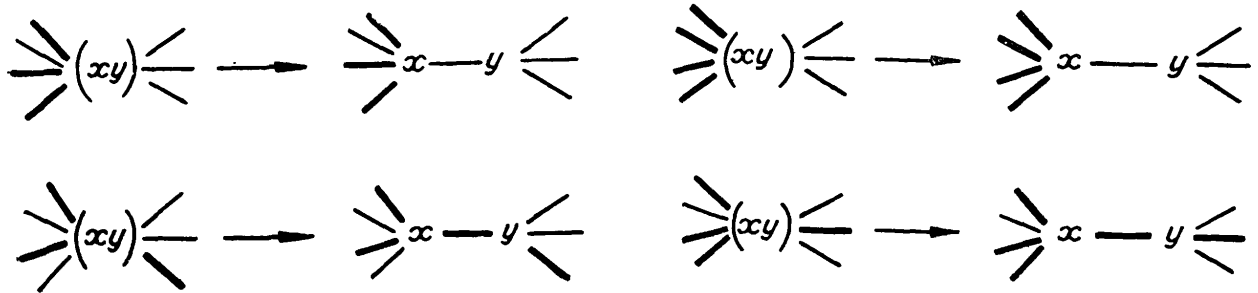


Рис. 191.

Рис. 192.

три принадлежат одному из множеств U_x, U_y , то искомая часть в L , тоже гомеоморфная F_5 , находится просто (рис. 192). Наконец, если два ребра из L'' принадлежат U_x , а два принадлежат U_y , то в L можно найти часть, гомеоморфную $K_{3,3}$: см. рис. 193, где «дома» обведены кружком, а «колодцы» — квадратиком.

(4) \Rightarrow (0). Как мы уже отмечали в начале параграфа в связи с геометрическими представлениями графов, если скелет \hat{L} графа L является плоским графом, то и сам L — плоский. Поэтому достаточно показать, что всякий обыкновенный неплоский граф допускает стягивание на F_5 или на $K_{3,3}$.

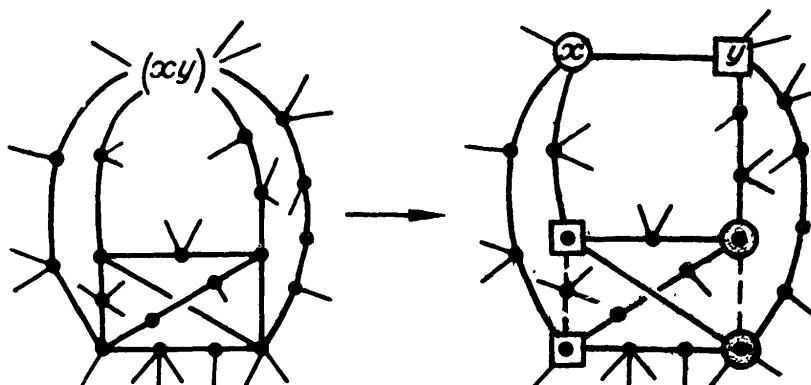


Рис. 193.

характере графа L). По аналогичной причине степень вершины (xy) в L' не может быть меньше 2.

Пусть L — неплоский обыкновенный граф. Не нарушая общности, можно считать граф L минимальным в том смысле, что в результате удаления любого ребра, удаления любой вершины или, наконец, стягивания любого ребра он превращается в плоский. При этом нетрудно было бы доказать, что L является 3-связным (см. § 14 в главе 2), однако нам понадобится лишь следующее более слабое утверждение: удаление из L любой пары смежных вершин (тем более любой вершины) не нарушает его связности; в самом деле, если бы удаление ребра \widetilde{xy} вместе с вершинами x и y разбивало граф на $L_1 \doteq (X_1, U_1), L_2 \doteq (X_2, U_2), \dots, L_k \doteq (X_k, U_k)$, где $k \geq 2$, то каж-

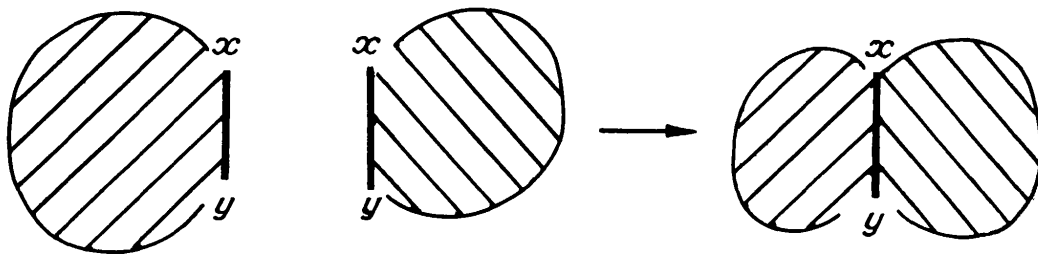


Рис. 194.

дый из двух подграфов графа L , с множествами вершин $X_1 \cup \{x, y\}$ и $\bigcup_{i=2}^k X_i \cup \{x, y\}$, был бы плоским (в силу минимальности L), и располагая их так, чтобы у каждого из них ребро \widetilde{xy} находилось на краю внешней грани, мы легко получили бы плоское расположение самого L (рис. 194), вопреки условию.

Пусть теперь x, y — произвольная пара смежных вершин L , а L'_S — некоторое плоское представление того графа L' , который получается из L стягиванием ребра \widetilde{xy} ; вершину, возникшую в результате отождествления x с y , будем обозначать через \widetilde{xy} . В силу сказанного выше об L , граф L' не имеет точек сочленения.

В графе L'_S существует простой цикл, не содержащий вершину \widetilde{xy} . Действительно, в силу минимальности L , граф L^- , полученный из L удалением ребра \widetilde{xy} (без удаления вершин), допускает плоское расположение L'_S ; при этом x и y не могут оказаться на краю одной и той же грани (иначе в плоскости S можно было бы провести ребро \widetilde{xy} и тем самым расположить в ней исходный граф L), поэтому у L'_S есть цикл, разделяющий вершины x и y . Этому циклу соответствует естественным обра-

зом цикл графа L' , не содержащий вершину xu , а из последнего цикла всегда можно выделить простой.

Для наглядности будем считать расположение L'_S графа L' в плоскости S таким, при котором хотя бы один простой цикл, не проходящий через вершину xu , окружает ее. В классе \mathfrak{C} всех простых циклов, окружающих xu , мы выберем цикл C , минимальный в следующем смысле: не существует другого цикла $C' \in \mathfrak{C}$, для которого область плоскости S , ограниченная им и содержащая вершину xu , была бы правильной частью аналогичной области цикла C . Обозначим через L''_S часть графа L'_S , полученную удалением всех ребер (но не вершин) цикла C и удалением вершины xu , а также всех вершин, расположенных во внешней области цикла C (рис. 195). Пусть X_C — множество вершин C , а

$$L'_1 \doteq (X_1, U_1), L'_2 \doteq (X_2, U_2), \dots, L'_k \doteq (X_k, U_k)$$

— компоненты графа L''_S .

Имеем

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} (|X_i \cap X_C| = 1),$$

ибо если бы для некоторого i было $|X_i \cap X_C| \geq 2$, то в компоненте L'_i существовала бы простая цепь, соединяющая две вершины множества X_C (см. пунктир на рис. 195), и цикл C не был минимальным в \mathfrak{C} , а в случае $X_i \cap X_C = \emptyset$ вершина xu была бы точкой сочленения графа L' .

Определим два подмножества $X_C^x, X_C^y \subseteq X_C$ следующим образом: вершина $z \in X_C$ принадлежит X_C^x тогда и только тогда, когда среди множеств X_1, X_2, \dots, X_k имеется такое, которое содержит вершину z и хотя бы одну вершину, смежную с x в графе L ; аналогично определяется подмножество X_C^y .

Случай 1: $|X_C^x \cap X_C^y| \geq 3$. Тогда исходный граф L допускает стягивание на F_5 (рис. 196.)

Случай 2: $|X_C^x \cap X_C^y| \leq 2$. Тогда L можно стянуть на $K_{3,3}$; чтобы в этом убедиться, достаточно обнаружить на цикле C такую четверку различных вершин $a \in X_C^x, b \in X_C^y, c \in X_C^x, d \in X_C^y$, которые при обходе цикла встречаются именно в указанном порядке (рис. 197). Существование требуемой четверки докажем от противного: если бы ее не было, т. е. никакая пара вершин из X_C^x и никакая пара вершин из X_C^y не разделяли друг друга на C , то из L'_S можно было бы получить плоское расположение L_S графа L , как показано на рис. 198; наша ссылка на чертеж станет доказательством, когда мы покажем, что если $X_C^x \cap X_C^y \neq \emptyset, z \in X_C^x \cap X_C^y$, а $L'_i \doteq (X_i, U_i)$ — та ком-

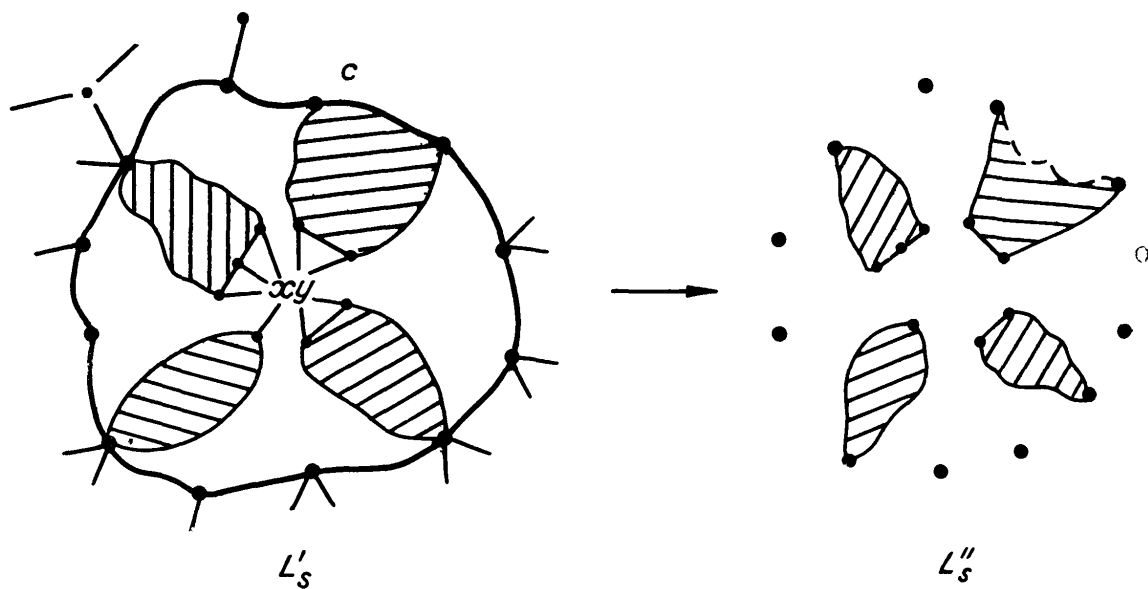


Рис. 195.

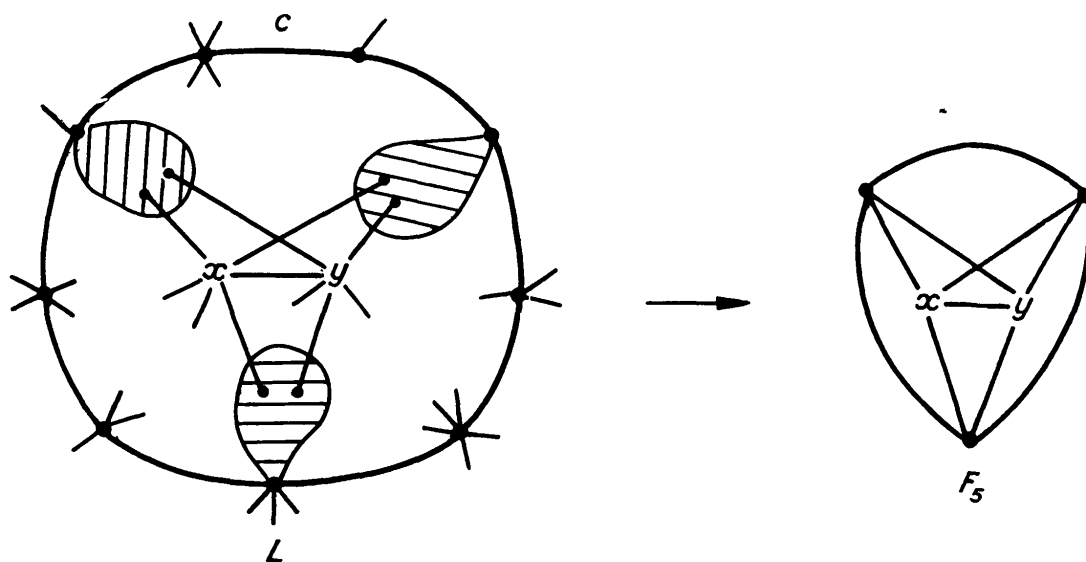


Рис. 196.

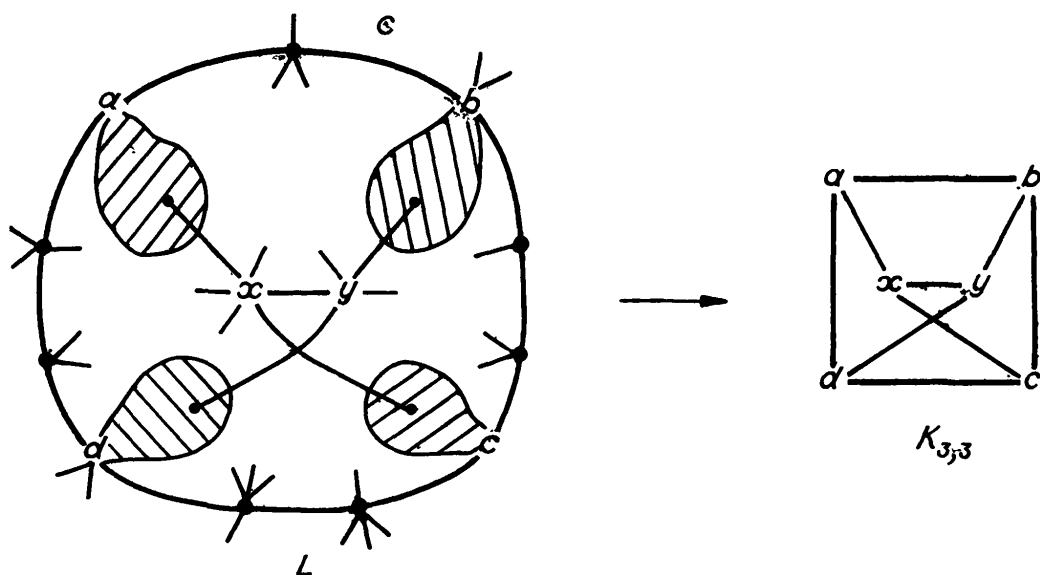


Рис. 197.

понента L_s^+ , которая содержит вершину z , то подграф $L_i^+ \doteq (X_i \cup \{x, y\}, U_i^+)$ графа L , порожденный вершинами $X_i \cup \{x, y\}$, можно расположить в плоскости таким образом, чтобы у полученного представления ребро \widetilde{xy} находилось вместе с вершиной z на краю одной и той же грани. Заметим, однако, что надобность именно в таком плоском расположении графа L_i^+ возникает лишь тогда, когда оба множества $X_C^x \setminus \{z\}$ и $X_C^y \setminus \{z\}$ непусты. Если же $X_C^x \setminus \{z\} \neq \emptyset$ & $X_C^y \setminus \{z\} = \emptyset$, то достаточно гарантировать расположение L_i^+ в плоскости таким образом, чтобы обе вершины x и z оказались на краю одной и той же грани, а в случае $X_C^x \setminus \{z\} = \emptyset$ & $X_C^y \setminus \{z\} \neq \emptyset$ на край одной грани должны попасть y и z ; наконец, при $X_C^x \setminus \{z\} = X_C^y \setminus \{z\} = \emptyset$ от графа L_i^+ , очевидно, совсем ничего не требуется сверх того, чтобы он был плоским.

Итак, допустим сначала, что $X_C^x \setminus \{z\} \neq \emptyset$ & $X_C^y \setminus \{z\} = \emptyset$. Тогда исходный граф L можно стянуть на граф L_i^{++} , отличающийся от L_i^+ наличием дополнительной вершины t и трех ребер \widetilde{tx} , \widetilde{ty} , \widetilde{tz} (рис. 199). Это стягивание — нефиктивное (иначе в L вершина t была бы соединена с z двумя ребрами), поэтому, ввиду минимальности L , результирующий граф L_i^{++} является плоским. Строя для L_i^{++} какое-нибудь плоское представление и удаляя затем вершину t , мы получим требуемое расположение графа L_i^+ . Если же, например, $X_C^x \setminus \{z\} \neq \emptyset$ & $X_C^y \setminus \{z\} = \emptyset$, то L допускает нефиктивное стягивание на граф, получающийся из L_i^+ добавлением ребра \widetilde{xz} и опять плоский (ввиду минимальности L), откуда следует возможность искомого расположения графа L_i^+ .

Доказательство импликации (4) \Rightarrow (0), а вместе с тем и всей теоремы о плоских графах, завершено. Мы хотим сделать теперь ряд примечаний.

1) Утверждение (0) \Leftrightarrow (3) было доказано (но не опубликовано) в 1927 году Л. С. Понтрягиным, а затем независимо получено Г. Куратовским (1930). Другое доказательство, более простое и выдержанное в духе теории графов, дали Г. Дирак и С. Шустер (1954). Во всех случаях трудность представляет лишь часть (3) \Rightarrow (0), ибо для прямого доказательства импликации (0) \Rightarrow (3) достаточно убедиться в том, что сами графы F_5 и $K_{3,3}$ — неплоские, а это доказывается просто*;

* См., например, К. Берж, 1/1958, русск. 1962, глава 21.

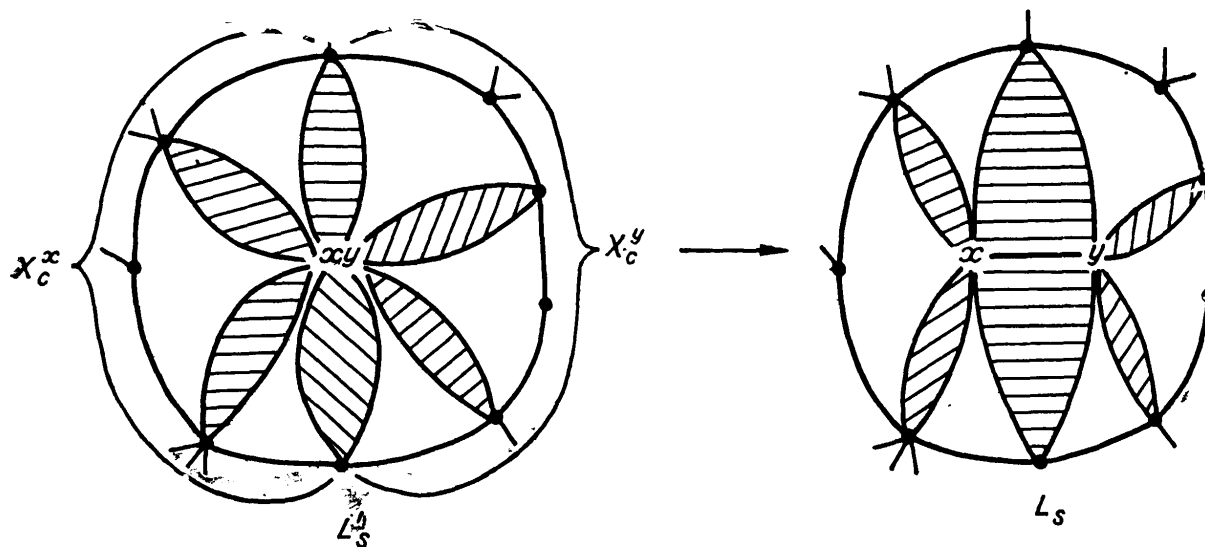


Рис. 198.

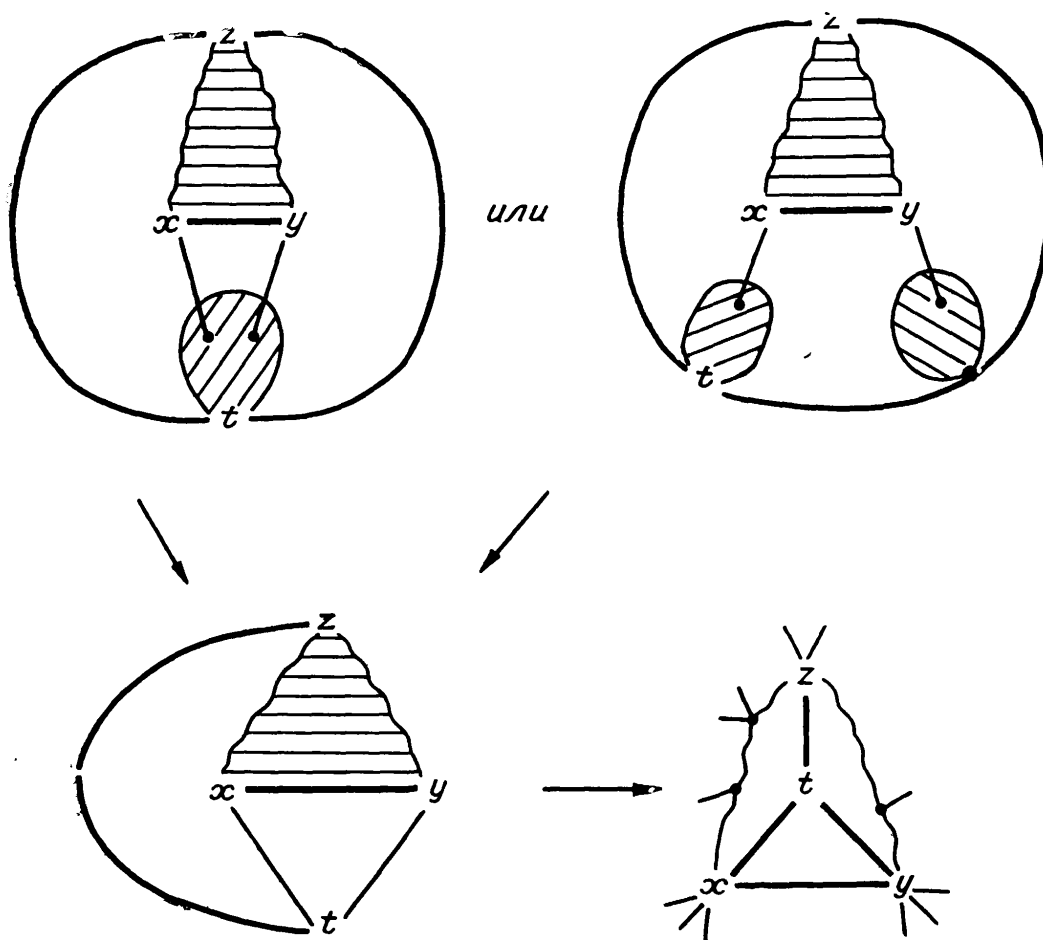


Рис. 199.

мы не использовали это доказательство лишь потому, что оно не помогло бы включить в «орцикл равносильных высказываний» важные условия Мак-Лэйна и Уитни.

2) Равносильность $(0) \Leftrightarrow (1)$ доказана С. Мак-Лэйном (1937). В. Татт (3/1960) усиливает условие (1) с тем, чтобы граф допускал такое плоское представление, при котором его грани являются выпуклыми многоугольниками.

3) Х. Уитни (2/1932, 3/1932, 4/1933), введя и подробно изучив понятие двойственности графов, доказал равносильность $(0) \Leftrightarrow (2)$, а затем (5/1933) — равносильность $(2) \Leftrightarrow (3)$; отсюда, в частности, получилось новое доказательство для $(0) \Leftrightarrow (3)$, хотя все еще более сложное, чем у Дирака и Шустера, но уже выдержанное в духе теории графов.

4) Прямые доказательства импликации $(3) \Rightarrow (4)$ содержатся в работе Р. Галина (1/1964), а также в работе Ф. Харари и В. Татта (2/1965); приведенное нами более простое доказательство принадлежит В. Г. Визингу (устное сообщение). Отметим, что именно Ф. Харари и В. Татт (1/1965, 2/1965)

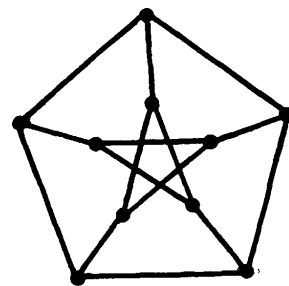


Рис. 200.

обратили внимание на большую естественность критерия $(0) \Leftrightarrow (4)$ по сравнению с $(0) \Leftrightarrow (3)$: так, для графа Петерсена (рис. 200) стягиваемость на F_5 очевидна, однако частей, гомеоморфных F_5 , в нем нет, и для установления его неплоского характера с помощью критерия $(0) \Leftrightarrow (3)$ надо искать часть, гомеоморфную $K_{3,3}$; с другой стороны, из наличия в графе L части, гомеоморфной F_5 или $K_{3,3}$, тривиально следует стягиваемость L на соответствующий граф*.

5) Наш вариант доказательства $(4) \Rightarrow (0)$ — далеко не самый простой, ибо при сделанном допущении о минимальности графа L последний в действительности может быть только либо F_5 , либо $K_{3,3}$, мы же в рассужении вынуждены все время считать L , вообще говоря, гораздо более сложным графом; хотелось бы найти краткое доказательство, использующее все те возможности, которые таит в себе предположение о минимальности L .

6) В смысле практической эффективности удобнее всего, пожалуй, условие Уитни, так как преобразовать матрицу ин-

*) К. Вагнер (4/1937) исследовал, насколько может отличаться от плоского граф, не содержащий частей, гомеоморфных $K_{3,3}$ (если части, гомеоморфные F_5 , допускаются).

циденций графа в его цикломатическую матрицу совсем просто (см. § 25 в главе 3), а проверка P -реализуемости последней с помощью алгоритма Майеды (§ 27) тоже не слишком трудна. Все это не дает, однако, способа фактического нахождения какого-либо из плоских представлений данного конкретного графа. Л. Аусландер и С. Партер (1961), Г. С. Плесневич (1963), В. Татт (4/1960, 7/1963), В. Бадер (1964), Ж. Демукрон, И. Мальгранж и Р. Пертюизе (1964) и, наконец, А. Лемпл, С. Эвен и И. Седербаум (1967) разработали эффективные алгоритмы, позволяющие для заданного обыкновенного графа L шаг за шагом найти одно из его плоских расположений или сразу же заключить, что он неплоский, если хотя бы один шаг окажется невыполнимым. Интересно заметить, что в обосновании этих алгоритмов существенную роль играет критерий Понтрягина — Куратовского, как раз самый неэффективный с точки зрения непосредственного практического применения.

7) Известно, что всякий плоский 9-вершинный обыкновенный граф обладает неплоским дополнительным графом (см. § 9 в главе 1), иными словами, граф F_9 нельзя представить как объединение двух своих плоских суграфов. Установить это лобовым перебором всех 9-вершинных графов было невыполнимо, и доказательство получилось лишь тогда, когда Дж. Бэтл, Ф. Харари и Ю. Кодама (1962), а также В. Татт (9/1963) сумели объединить различные случаи в относительно небольшое число классов, перебор которых уже практически осуществим.

А что делать с неплоскими графами? Ответ, конечно, зависит от конкретной задачи. В ряде случаев, например, можно помещать L в плоскость и неправильно, но так, чтобы число пересечений ребер было наименьшим; для обыкновенного графа L это наименьшее число, согласно Т. Саати (1964), не превосходит $\frac{1}{64} n (n - 2)^2 (n - 4)$ при n четном и не превосходит $\frac{1}{64} (n - 1)^2 (n - 3)^2$ при n нечетном. Вопрос об улучшении этой оценки, особенно для неполных графов (конечно, с привлечением дополнительных их характеристик, помимо числа вершин), остается открытым; с ним тесно связан и другой вопрос: какое наименьшее число ребер надо удалить из данного графа, чтобы он превратился в плоский? (см. работу В. Бадера, 1964).

В других случаях бывает выгодно размещать граф на нескольких плоскостях. Граф $L = (X, U; P)$, по определению,

допускает расположение в k плоскостях, если существуют k его плоских суграфов

$$L_1 = (X, U_1; P), L_2 = (X, U_2; P), \dots, L_k = (X, U_k; P),$$

таких что $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$. Наименьшее k , при котором L допускает такое расположение, называется *толщиной* $t(L)$ этого графа.

Для каждого графа L можно построить гомеоморфный ему граф L' толщины $t(L') \leq 2$. В самом деле, если заданный L — неплоский, то сначала поместим его на плоскость S неправильно; далее малой деформацией ребер (в случае надоб-

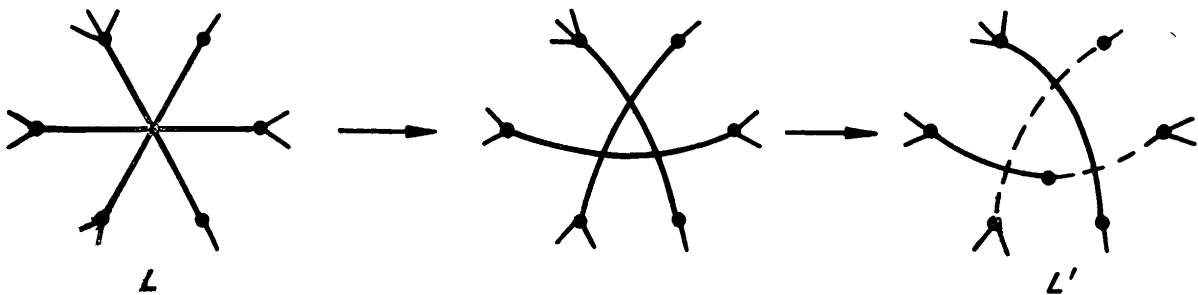


Рис. 201.

ности) добьемся того, чтобы ни в какой точке плоскости, отличной от вершины графа, не пересекалось более двух ребер; наконец, ликвидируем каждую из точек пересечения, перемещая во вторую плоскость некоторые ребра или их части, полученные надлежащим подразделением, как ясно из рис. 201 (ребра, оказавшиеся во второй плоскости, изображены пунктиром). Так как графы толщины ≥ 3 существуют (например F_9 — см. примечание 7 к теореме о плоских графах), то из сказанного следует, что толщина графа, вообще говоря, не является его топологическим инвариантом, хотя эта характеристика и связана непосредственно с топологическими свойствами графов.

Дж. Уэйсман (1/1962) следующим образом сводит задачу о расположении заданного обыкновенного графа в наименьшем числе плоскостей к нахождению неполной раскраски вершин (см. § 43 в главе 5) некоторого вспомогательного графа. Именно, пусть $L = (X, U)$ — данный граф и пусть его вершины как-то размещены в плоскости S . Два расположения u_S и u'_S одного и того же ребра $u \in U$ назовем *изотопными*, если можно непрерывно деформировать u_S в u'_S так, чтобы при этом все

вершины графа оставались неподвижными, а ребро ни разу не вышло за пределы плоскости S и не прошло ни через одну вершину. В бесконечном множестве всевозможных расположений всех ребер L отношение изотопии есть эквивалентность, причем множество классов $U_S^1, U_S^2, \dots, U_S^k$ этой эквивалентности конечно. Примем эти классы за вершины нового обыкновенного графа $W(L)$, считая два класса U_S^i и U_S^j смежными в том и только том случае, если всякие два ребра $u_S \in U_S^i$ и $v_S \in U_S^j$ имеют точку пересечения, отличную от вершин графа L_S . Каждому ребру $u \in U$ графа L отнесем множество Y_u тех классов U_S^i , ребра которых являются представлениями ребра u в плоскости S . Задача о расположении L в наименьшем числе плоскостей свелась к нахождению такой раскраски вершин графа $W(L)$ наименьшим количеством цветов, при которой каждое из множеств Y_u ($u \in U$) содержало бы ровно по одной окрашенной вершине, а это и есть задача Уэйсмана, рассмотренная в § 43.

В. Татт (8/1963) называет обыкновенный граф t -минимальным, если его толщина равна t и уменьшается при удалении любого ребра; так, 2-минимальные графы суть только $F_5, K_{3,3}$ и все гомеоморфные им. Доказывается, в частности, что при $t \geq 3$ граф, полученный из t -минимального подразделением (не фиктивным) ребер, не может быть t -минимальным. Для полных графов Л. Байнеке и Ф. Харари (1/1964, 4/1965) нашли оценку $t(F_n) \geq \left\lfloor \frac{1}{6}(n+7) \right\rfloor$ и показали, что при $n \neq 9$ и $n \not\equiv 4 \pmod{6}$ имеет место равенство, а также что $t(F_9) = t(F_{10}) = 3$ и $t(F_{23}) = 5$. Вопросу о толщине полных графов Кёнига (см. § 6 в главе 1) посвящена работа Л. Байнеке, Ф. Харари и Дж. Муна (1964).

Весьма обширный круг вопросов, обобщающих задачу размещения графа в плоскости, связан с расположением его на поверхности заданного топологического типа. Как известно из топологии, всякая замкнутая поверхность (при достаточно общем определении этого понятия) гомеоморфна одной из поверхностей $P_0, P_1, P_2, \dots; N_1, N_2, \dots$, где P_k означает поверхность, полученную из сферы вырезанием $2k$ отверстий, гомеоморфных кругу, и попарным соединением краев этих отверстий с помощью k ручек (поверхностей, гомеоморфных боковой поверхности круглого цилиндра) — см. рис. 202, а N_k означает поверхность, полученную из сферы вырезанием k круглых отверстий и заклеиванием каждого из них

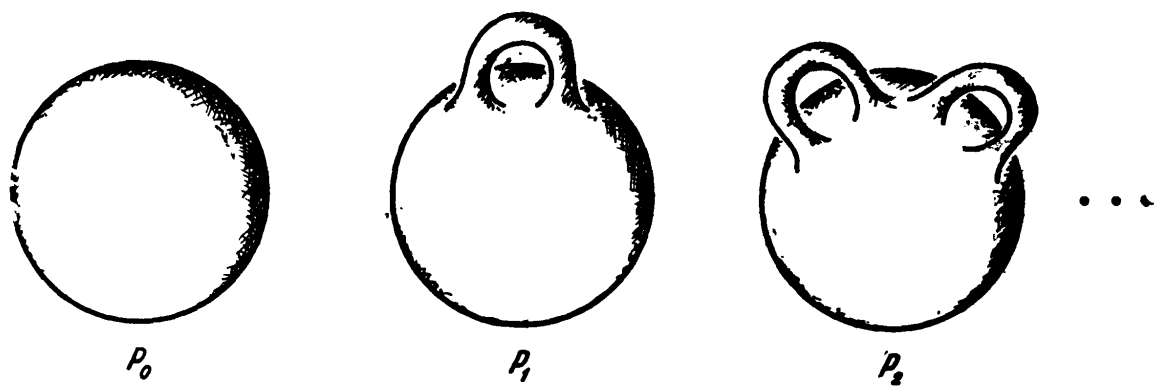


Рис. 202.

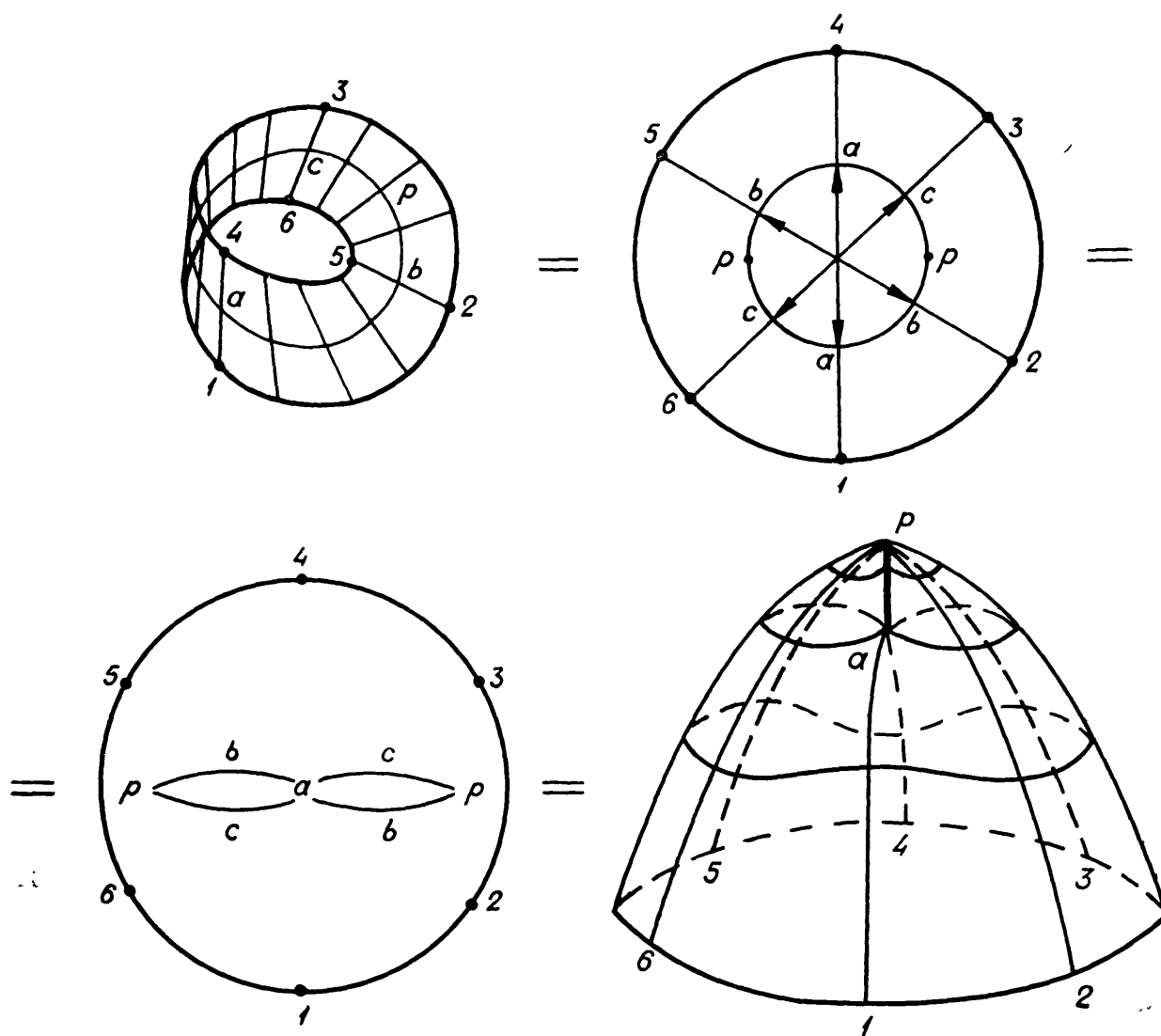


Рис. 203.

листом Мёбиуса или, что равносильно, отождествлением диаметрально противоположных точек* — см. первые два чертежа на рис. 203 (последний чертеж наглядно изображает лист Мёбиуса в виде «скрещенного колпака», на котором отрезок ap в действительности не есть линия самопересечения поверхности и возник только из-за «неудачного» помещения ее в трехмерное пространство). Кроме того, доказано, что всякую замкнутую поверхность можно поместить без самопересечений в четырехмерное евклидово пространство (для P_k помещаемость даже в трехмерное пространство очевидна). Под *поверхностью с краем* будем понимать результат удаления конечного числа попарно непересекающихся частей, гомеоморфных открытым (т. е. без границы) кругам, из любой замкнутой поверхности, причем считаем, что границы удаленных частей не имеют друг с другом общих точек (т. е. «дыры» не соприкасаются). Объединение множеств точек всех этих границ называется *краем* поверхности. Напомним, что всякая поверхность, гомеоморфная P_k (или P_k с дырами), является ориентируемой, или двусторонней, а поверхность, гомеоморфная N_k (или N_k с дырами), — неориентируемой, или односторонней (см., например, главу об интегралах по поверхности в любом курсе математического анализа).

Мы говорим, что абстрактный граф L *расположен* на поверхности S , если задано такое его топологическое представление L_S , все точки которого (как вершины, так и точки ребер) принадлежат поверхности S . Заметим при этом, что в случае неориентируемой поверхности S ее, строго говоря, надо считать помещенной хотя бы в четырехмерное пространство, однако «неполноценное» (т. е. с самопересечениями) изображение S в трехмерном пространстве отнюдь не мешает «полноценному» расположению на ней графа L , ибо если бы два ребра L_S имели общую неконцевую точку только из-за того, что они встречаются линию самопересечения поверхности S в одном месте, то это «паразитное» пересечение ребер всегда можно было бы устранить небольшим смещением одного из них. Очевидно, возможность или невозможность расположения графа L на поверхности S является топологическим фактом, т. е. не меняется от замены L любым гомеоморфным ему (комбинаторно) графом и от замены S любой гомеоморфной ей (точечно) поверхностью. Наконец, достаточно ограничиться замкнутыми поверхностями, ибо непосредственно ясно, что наличие на поверхности дыр, полученных вырезанием открытых кругов, как было сказано

*) См. П. С. Александров, Комбинаторная топология (М.—Л., ОГИЗ, ГТТИ, 1947, глава III) или, например, Г. Рингель (З/1959, § 6).

выше, и поэтому не разбивающих поверхность, не может ни помочь, ни помешать расположению на ней графа.

Пусть L_S — некоторое расположение графа L на поверхности S ; говорят, что граф L_S не разбивает поверхность S , если множество ее точек $S \setminus L_S$, остающееся после удаления всех точек L_S , является связным в смысле теоретико-множественной топологии (т. е. если любые две точки этого множества можно соединить жордановой дугой, целиком ему принадлежащей). Наибольшее целое неотрицательное число k , такое что существует граф L_S с цикломатическим числом $\lambda(L_S) = k$, лежащий на поверхности S и не разбивающий ее, называется *порядком связности* этой поверхности и обозначается через $\nu(S)$; поскольку указанное определение в сущности не отличается от того, которое дано в третьей главе цитированной выше книги П. С. Александрова, то мы можем считать известными топологическими теоремами следующие утверждения:

а) число $\nu(S)$ является топологическим инвариантом поверхности, т. е. не меняется при замене S любой гомеоморфной ей поверхностью;

б) $\nu(P_k) = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $\nu(N_k) = k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Оказывается, каковы бы ни были граф L и неориентируемая поверхность S , удовлетворяющие условию $\lambda(L) \leq \nu(S)$, всегда можно так поместить L на S , чтобы L_S не разбивал S ; аналогичное высказывание для ориентируемых поверхностей неверно: например, из двух графов на рис. 204, обладающих цикломатическим числом $\lambda = 2$, только первый можно поместить неразбивающим образом на поверхности тора (P_1). Схема доказательства утверждения для неориентируемой поверхности $S = N_\nu$ такова. Сначала «огородим» на S какую-нибудь часть, гомеоморфную кругу, и на этой части разместим некоторый каркас T данного графа L ; тогда множество $S \setminus T_S$ будет гомеоморфно поверхности N_ν с ν дырами (края которых тоже удалены). Затем проведем любую из хорд u каркаса T так, чтобы она частично выходила за пределы огороженного участка и при этом пересекала ровно один из листов Мёбиуса (рис. 205); можно показать, что тогда множество $(S \setminus T_S) \setminus u_S$ будет гомеоморфно поверхности $N_{\nu-1}$ с ν дырами. И т. д. (при $\nu = 1$ под N_0 понимается P_0). В случае ориентируемой поверхности S такое рассуждение не проходит по сле-

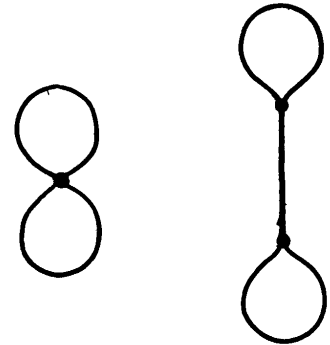


Рис. 204.

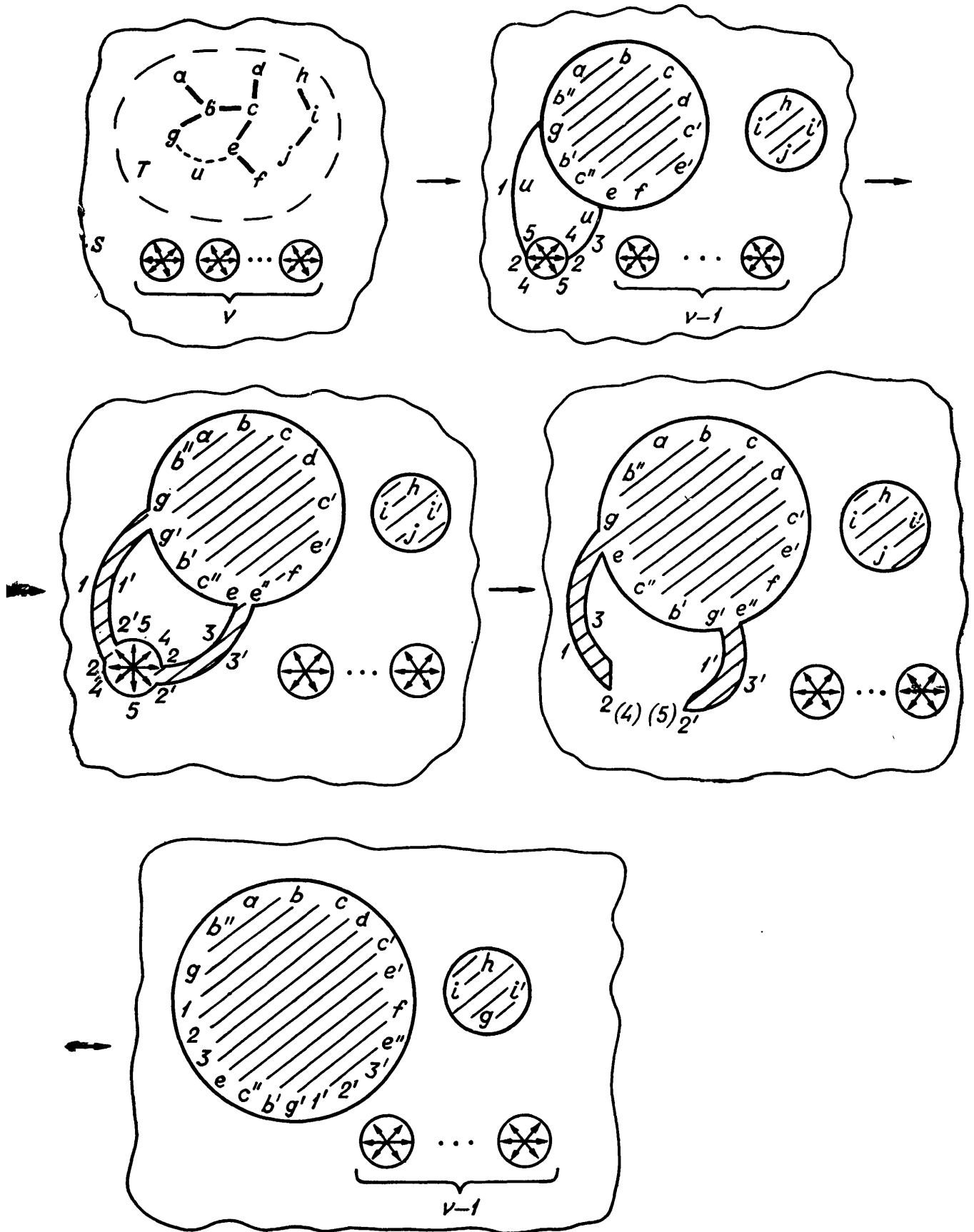


Рис. 205.

дующей причине: ценой ликвидации одной ручки мы можем провести, не разбив S , не любую пару хорд каркаса T , а лишь такую, что концы обеих хорд находятся на краю одной и той же дыры, притом разделяют друг друга (рис. 206). Было бы интересно выяснить, для каких именно графов существует неразбивающее расположение на ориентируемой поверхности P_k с заданным порядком связности $2k$.

С точки зрения характеристики самого графа L , а не поверхности S , интересен и такой вопрос: каков наименьший порядок связности поверхности, на которой можно данный граф расположить, независимо от того, разобьет он поверхность или нет? Искомое число $\nu(L)$ называется *порядком связности графа*. Аналогичный вопрос ставится и при дополнительном условии, чтобы поверхность была ориентируемой; тогда наименьшее k , при котором L можно расположить на P_k , называется *родом графа L* и обозначается через $g(L)$.*

Тот факт, что всякий граф можно расположить на какой-то поверхности, притом ориентируемой, тривиален: поместим на сферу некоторый плоский суграф данного графа, а для проведения остальных ребер приделаем к сфере надлежащее количество ручек. Менее очевидно, однако, что если граф L связан, то всегда можно добиться его *регулярного* расположения, т. е. такого расположения на некоторой поверхности S , при котором все *границы* — компоненты множества $S \setminus L_S$ — гомеоморфны открытым кругам; это утверждение доказано Д. Кёнигом (1936, глава 12), а затем более просто Дж. Линдси (1959).

Пусть $\mu(L_S)$ — число граней данного регулярного расположения L_S графа L на поверхности S . Регулярное расположение L_S называется *максимальным*, если для всякого другого регулярного расположения L'_S того же абстрактного графа L

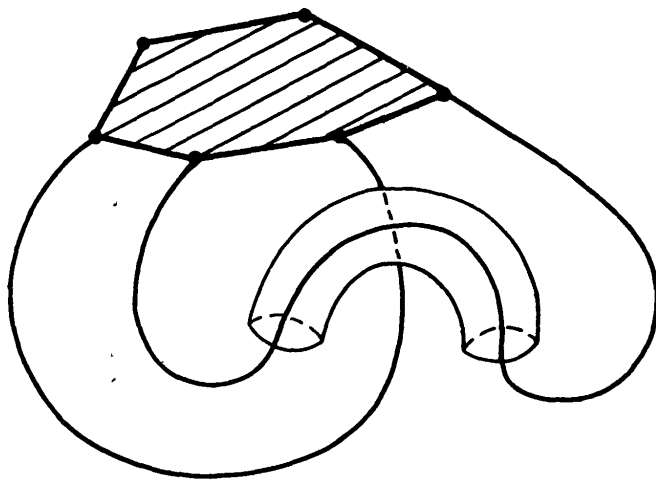


Рис. 206.

*) Напомним, что род поверхности $g(S)$ определяется так: $P_k) = k$, $g(N_k) = k$.

на любой поверхности S' имеем $\mu(L_{S'}) \leq \mu(L_S)$. Как показал Дж. Юнгс (1963), если регулярное расположение L_S графа L максимально, то $\nu(L) = \nu(S)$; при этом

$$\mu(L_S) = m(L) - n(L) - \nu(L) + 2 = \lambda(L) - \nu(L) + 1.$$

Результат можно перенести и на несвязные графы, если под регулярным расположением понимать такое, когда все грани, кроме одной, гомеоморфны открытым кругам, а оставшаяся грань — открытому кругу с $\kappa(L) - 1$ дырами; формула для $\mu(L_S)$ в общем случае будет иметь вид

$$\mu(L_S) = m(L) - n(L) - \nu(L) + \kappa(L) + 1 = \lambda(L) - \nu(L) + 1$$

Таким образом, в конечном итоге $\mu(L_S)$ не зависит от S .

Представляется непосредственно очевидным, что если L^1, L^2, \dots, L^k — блоки графа L (см. § 15 в главе 2), то

$$\nu(L) = \sum_{i=1}^k \nu(L^i),$$

и в частности, для расположения на ориентируемых поверхностях,

$$g(L) = \sum_{i=1}^k g(L^i);$$

строгое доказательство второго равенства дали Дж. Бэтл, Ф. Харари, Ю. Кодама и Дж. Юнгс (1962). Отсюда и из формулы для $\mu(L_S)$, учитывая простейшие свойства цикломатического числа (см. § 19 в главе 3), легко вывести, что

$$\mu(L_S) = 1 - k + \sum_{i=1}^k \mu(L_S^i).$$

В целом, однако, задачи о нахождении порядка связности и рода данного графа очень трудны, практически эффективных алгоритмов решения их в общем случае пока нет. Исследованиям, относящимся к этому кругу вопросов, посвящены работы Л. Аусландера, Т. Брауна и Дж. Юнгса (1963); Л. Байнеке и Ф. Харари (2/1965, 3/1965); Ф. Харари и Ю. Кодамы

(1963); Й. Боланда (1965) и другие*). Упомянем еще работу Р. Дьюка (1966).

В связи с проблемой четырех красок и некоторыми ее обобщениями (см. ниже, § 48) представляют особый интерес порядок связности $\nu_n \doteq \nu(F_n)$ и род $g_n \doteq g(F_n)$ полного обыкновенного графа F_n , а также число полноты $\varphi(S)$ поверхности S , равное, по определению, наибольшему такому n , при котором можно расположить граф F_n на S . П. Хивуд (1890) показал, что

$$\varphi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24\nu(S)}}{2} \right\rfloor,$$

и поставил вопрос: всегда ли на самом деле имеет место равенство? Для некоторых поверхностей, а именно ориентируемых с $g(S) = \frac{1}{2}\nu(S) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 20, 63, 221, 336, 1530, 2351, \dots$, Л. Хефтер (1891) получил утвердительный ответ. Далее, Г. Рингель (3/1959) показал, что для неориентируемых поверхностей с $\nu(S) \neq 2$ справедливо равенство, а $\varphi(N_2) = 6$, и что для ориентируемых поверхностей по крайней мере всегда

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24\nu(S)}}{2} \right\rfloor - 2 \leq \varphi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24\nu(S)}}{2} \right\rfloor.$$

Однако гипотеза Хивуда о том, что для всех ориентируемых поверхностей выполняется правое равенство, пока не опровергнута; позднее Г. Рингель (4/1961, 5/1961) установил ее справедливость в случае, когда род $g \doteq g(S) = \frac{1}{2}\nu(S)$ удовлетворяет какому-либо из неравенств

$$12k^2 - k \leq g \leq 12k^2 + k - 1,$$

$$12k^2 + 7k + 1 \leq g \leq 12k^2 + 9k + 1,$$

$$12k^2 + 13k + 4 \leq g \leq 12k^2 + 15k + 4,$$

где k пробегает натуральный ряд чисел. Проблеме расположения полных графов на ориентируемых поверхностях посвя-

*) В последней и отчасти в первой из перечисленных работ рассматриваются условия, при которых граф можно расположить в проективной плоскости (N_1); вторая посвящена взаимосвязи между родом $g(L)$ и толщиной $t(L)$ графа; в третьей показано, что род остова r -мерного куба равен $(r-4) \cdot 2^{r-3} + 1$; четвертая исследует род k -связного графа (см. § 14 в главе 2).

щена также работа Д. Коэна, Ф. Харари и Ю. Кодамы (1963). Гипотеза $g_n = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ подтверждена пока не для всех значений n . Для рода $g_{p,q}$ полного графа Кёнига $K_{p,q} = (X', X'', U)$ с $|X'| = p$, $|X''| = q$ и $p, q \geq 2$ Г. Рингель (8/1965, 9/1965) нашел, что

$$g_{p,q} = \begin{cases} \left\lceil \frac{(p-2)(q-2)}{4} \right\rceil & \text{в случае ориентируемой поверхности,} \\ \left\lceil \frac{(p-2)(q-2)}{2} \right\rceil & \text{в случае неориентируемой поверхности.} \end{cases}$$

Отметим еще, что если говорить о представлении графа в виде объединения наименьшего числа своих суграфов, допускающих расположение на поверхности тора (вместо плоскости), то для графа F_n такая *тороидальная толщина*, как показал Г. Рингель (7/1965), равна $\left\lceil \frac{n+4}{6} \right\rceil$.

Что касается исследования свойств графов, расположенных (или допускающих расположение) на поверхности данного конкретного топологического типа, то мы упомянем работы Х. Уитни (1/1931) и В. Татта (1/1946, 2/1956, 5/1960), где исследуются условия существования гамильтонова цикла в плоском графе; результат И. Седлачека (3/1964): если L — обыкновенный плоский граф, то граф $K(L)$ смежности его ребер (см. § 46) является плоским в том и только том случае, когда $\sigma(L) \leq 4$ и всякая вершина степени 4 графа L служит его точкой сочленения; работы А. Андреатты (1/1964, 2/1964), вторая из которых трактует о свойствах графов на поверхности тора. К некоторым свойствам плоских графов, связанным со знаменитой проблемой четырех красок, мы вернемся в следующем параграфе.

До сих пор мы толковали граф топологически как одномерный комплекс (в случае обыкновенного графа — симплицальный, в общем случае — клеточный). Можно, однако, рассматривать обыкновенный граф и как многомерный симплицальный комплекс, если условиться, что всякий его полный i -вершинный подграф определяет $(i-1)$ -мерный симплекс; тогда размерность графа L в этом смысле будет на единицу меньше его плотности $\varphi(L)$ (см. § 10 в главе 1). Считая, что всякий полный подграф автоматически заполнен «веществом» соответствующей размерности (в частности, каждый цикл длины 3 затянута двумерной пленкой, каждый подграф типа F_4 «залит водой» и т. д.), мы, конечно, ограничиваем класс рассматриваемых комплексов. Однако для всякого комплекса без этого соглашения найдется точно гомеоморфный ему комплекс, удо-

влетворяющий нашему дополнительному условию. Например, вместо треугольной дыры, которая в нашем случае должна была бы немедленно зарости, можно образовать четырехугольную, как показано на рис. 207; развить это соображение до рассуждения общего характера не составляет большого труда. Поэтому класс топологических объектов, гомеоморфно представимых комплексами, не обедняется, зато постановка проблемы изучения комбинаторных топологических инвариантов гораздо легче переводится на язык чистой теории графов.

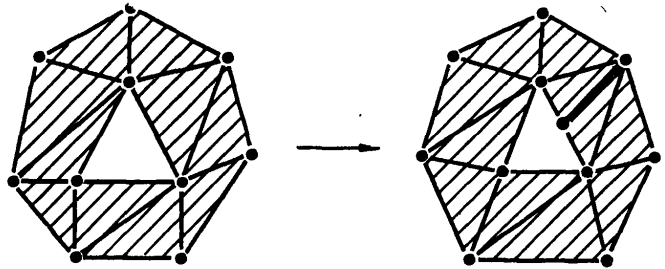


Рис. 207.

Именно, речь идет о таких характеристиках графа, которые не меняются при любом его элементарном подразделении, а последнее определяется следующим образом: из графа L удаляем некоторое ребро \widetilde{xy} и к полученному суграфу добавляем новую вершину z и новые ребра, соединяющие z с x , с y и со всеми теми вершинами, которые в L смежны одновременно как с x , так и с y . К числу комбинаторных инвариантов при-

надлежит эйлерова характеристика $\sum_{i=0}^{\varphi(L)} (-1)^i f_i(L)$, где $f_i(L)$ — количество полных i -вершинных подграфов L (см. § 9 в главе 1); несложное доказательство инвариантности мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

Можно показать, что если два графа переводятся в изоморфные надлежащими последовательностями элементарных подразделений, то эти графы, как многомерные комплексы, точно гомеоморфны. Вопрос о справедливости обратного утверждения долгое время оставался открытым, пока, наконец, эта «Основная гипотеза топологии» (*Hauptvermutung*) не была опровергнута Дж. Милнором (1961), построившим пример двух шестимерных комплексов, точно гомеоморфных, но не переводимых в изоморфные никакими последовательностями элементарных подразделений. Для одномерных и двумерных комплексов гипотеза справедлива, а для комплексов размерности 3, 4 и 5 вопрос еще не решен; но даже если и в этих случаях решение окажется отрицательным, проблема исследования топологического смысла комбинаторных инвариантов и их выражения через другие известные характеристики графов останется важной и интересной.

Заканчивая параграф, отметим, что существуют и другие топологические представления графов. Например, представление, введенное А. Часаром (1962), относится к области теоретико-множественной топологии; мы не будем его рассматривать.

§ 48. Проблема четырех красок

Что можно сказать о хроматическом числе графа, если известно, что он плоский? Как показывает пример графа F_4 , это число может быть равно 4; очевидно, оно может быть также 3, 2 и 1. Однако до сих пор не удалось построить ни одного плоского графа L с $\chi(L) > 4$, и это дает основание выдвинуть гипотезу четырех красок: хроматическое число плоского графа никогда не превосходит 4.

Первоначально гипотеза формулировалась в терминах раскраски областей карты. По-видимому, постановкой проблемы мы обязаны А. Мёбиусу (устное сообщение на лекциях, 1840). Известно также, что в 40—50 гг. этой проблемой увлекались студенты-математики Лондона, ее знали Ф. Гутри и А. Де Морган; затем увлечение временно остыло, пока за проблемой не взялся А. Кэли, вынужденный, однако, в 1878 г. признать, что не может ее решить. Через год гипотеза была опубликована А. Кэли (в Трудах Лондонского Королевского Географического общества) и А. Кемпе (1/1879).

Вполне разумная идеализация задачи состоит в замене географической карты графом, расположенным на плоскости (или, что равносильно, на сфере), и тогда вопрос заключается в такой раскраске граней наименьшим числом цветов, при которой никакие две грани, имеющие общее ребро, не окрашиваются одинаково. Строя двойственный граф, вершины которого отвечают граням данного, мы сведем задачу к раскраске вершин и избавимся от необходимости всегда рассматривать конкретное расположение графа в плоскости (вместо общего предположения, что его можно как-то поместить на плоскость); таким образом, приходим к формулировке в первом абзаце, которая, как показывает пример многочисленных работ, значительно удобнее для дальнейших исследований, чем формулировка в терминах раскраски граней графа (или стран на карте)*.

*) К сожалению, некоторые авторы затрудняют работу себе и читателям тем, что не переходят на язык раскраски вершин графа: например, доказательство теоремы Петерсена (см. ниже), данное Х. Яаксоном

Заманчивая простота формулировки проблемы четырех красок, по-видимому, явилась причиной того, что за ее решение, как и за доказательство Великой теоремы Ферма, взялись, кроме серьезных математиков, также целые полчища дилетантов, в том числе маниаков. Мы сразу же отметим одну ошибку, характерную для многих доморощенных «доказательств»: усмотрев очевидный факт, что плоский граф L не может содержать более четырех попарно смежных вершин, очередной неудачник пытался затем только из этого факта вывести оценку $\gamma(L) \leq 4$, не используя вторично условие, что L — плоский; несостоятельность таких попыток сразу следует из того, что для хроматического числа не может существовать верхней оценки в терминах одной только плотности $\phi(L)$ (см. начало § 41 в главе 5).

Разумеется, не все попытки решения проблемы оказались бесполезными для дальнейшего развития теории графов (см. обзорную статью Х. Кокстера, 2/1959). Так, ошибочное доказательство А. Кемпе (2/1880) в то же время содержало идею, позволившую П. Хивуду (1890) уже без ошибок получить для плоских графов более слабую оценку $\gamma(L) \leq 5$. Идея Кемпе (состоящая, грубо говоря, в надлежащей перекраске вершин вдоль некоторых цепей) играет существенную роль также в доказательствах теоремы Брукса (см. § 41 в главе 5), теоремы Аартса — де Гроота (см. ниже) и в некоторых других исследованиях; пожалуй, наиболее яркое воплощение нашла она применительно к раскраске ребер (см. леммы Шеннона о двуцветных цепях в начале § 44 главы 5). Саму же оценку $\gamma(L) \leq 5$ нам теперь выгоднее доказывать не так, как это делал П. Хивуд; предварительно установим лемму, интересную и с других точек зрения.

Л е м м а 1. *В плоском обыкновенном графе всегда есть такая вершина, степень которой не превышает 5.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — плоский обыкновенный граф. Если он не содержит циклов, то он либо состоит из единственной вершины, либо обладает висячими вершинами (см. теорему 3 в конце § 20 главы 3), и утверждение леммы для него тривиально. Поэтому будем считать, что $\lambda(L) \geq 1$. Пусть L_c — граф, полученный из L удалением всех перешейков,

(1/1957), выглядело весьма запутанным только из-за того, что проводилось в терминах раскраски карт; число примеров такого рода можно было бы сильно увеличить. По той же причине несколько проигрывает, на наш взгляд, последняя глава превосходной популярной книги О. Оре (6/1963, русск. 1965).

с последующим удалением голых вершин. В силу теоремы о плоских графах (см. § 47), L удовлетворяет условию Мак-Лэйна; благодаря этому условию и вытекающему из него следствию $U_{\lambda+1} \neq O$ (см. пункт 1 в § 47), а также благодаря тому, что граф L_C вместе с L является обыкновенным, получаем

$$3[\lambda(L_C) + 1] \leq 2m(L_C),$$

поскольку длина каждого из квазициклов $U_1, U_2, \dots, U_\lambda, U_{\lambda+1}$ не меньше 3. Но $\lambda(L_C) = \lambda(L)$ (так как L не содержит петель), а $m(L_C) \leq m(L)$, поэтому

$$3(\lambda + 1) \leq 2m, \quad (1)$$

где $\lambda \doteq \lambda(L)$, $m \doteq m(L)$.

Имеем, далее,

$$\sum_{i=1}^{\sigma} i \cdot n_i = 2m, \quad \sum_{i=0}^{\sigma} n_i = n, \quad (2)$$

где $n \doteq n(L)$, $n_i \doteq n_i(L)$ — количество вершин степени i в L , а $\sigma \doteq \sigma(L) \doteq \max \{i/n_i \neq 0\}$ — степень графа L (см. § 41 в главе 5). Но

$$\lambda = m - n + \kappa(L) \geq m - n + 1;$$

умножая обе части этого неравенства на 3 и используя (1), находим

$$3m - 3n + 3 \leq 3\lambda \leq 2m - 3,$$

откуда

$$m \leq 3n - 6. \quad (3)$$

Первое равенство (2) вместе с неравенством (3) дает

$$\sum_{i=1}^{\sigma} i \cdot n_i \leq 6n - 12;$$

заменяя здесь n его выражением из второго равенства (2), получаем после несложных преобразований

$$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + [n_7 + 2n_8 + \dots], \quad (4)$$

и тем более

$$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12, \quad (5)$$

откуда и следует утверждение леммы.

Т е о р е м а 1. Если $L = (X, U; P)$ — плоский граф, то

$$\gamma(L) \leq 5.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как мы видели в пункте 1 § 40 (глава 5), $\gamma(L) = \gamma(\hat{L}')$, где \hat{L}' — скелет того подграфа L' , который получается из L удалением всех вершин, имеющих петли; так как граф \hat{L}' является плоским вместе с L , то мы можем, не нарушая общности, рассматривать только обыкновенные графы.

При $n(L) \leq 5$ утверждение теоремы тривиально; пусть оно уже доказано для всех обыкновенных графов с числом вершин $< n_0 \geq 6$ и пусть L — произвольный обыкновенный n_0 -вершинный граф. Если у L есть вершина x степени $s(x) \leq 4$, то удаляя ее из L , получим плоский граф с числом вершин $< n_0$, который, согласно предположению индукции, допускает раскраску вершин не более чем пятью цветами; при этом для окраски вершин, смежных с x в L , будет использовано не более четырех цветов, и придавая вершине x один из неиспользованных цветов, получим требуемую раскраску исходного графа L . Если у L нет вершин степени ≤ 4 , то по лемме 1 наверняка имеется вершина x степени $s(x) = 5$; пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — вершины, смежные с x в L .

Среди вершин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 есть хотя бы одна пара несмежных (иначе граф L , содержа F_5 , не был бы плоским); пусть, например, вершина x_1 не смежна с x_2 . Удалим из L вершину x , после чего отождествим x_1 с x_2 (при этом пары ребер вида $\widetilde{x_1y}$, $\widetilde{x_2y}$ же отождествляем друг с другом, дабы не возник мультиграф). Полученный обыкновенный граф L' с $n(L') < n_0$ — плоский, ибо при размещении L в плоскости всегда можно добиться такого расположения вершин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (не обязательно в указанном круговом порядке), чтобы натянутый на них выпуклый пятиугольник не содержал внутри себя никаких вершин графа L , кроме x , и никаких его ребер, кроме $\widetilde{xx_1}$, $\widetilde{xx_2}$, $\widetilde{xx_3}$, $\widetilde{xx_4}$, $\widetilde{xx_5}$; но при таком расположении совершенно очевидно, что после удаления x всегда можно произвести отождествление x_1 с x_2 , сохранив плоский характер графа (рис. 208).

По предположению индукции, вершины графа L' можно окрасить не более чем пятью цветами; при этом на четыре вершины $x_1 = x_2, x_3, x_4, x_5$ будет израсходовано не более четырех красок, и для получения искомой раскраски исходного

графа L достаточно придать вершине x неиспользованный цвет. Таким образом, $\gamma(L) \leq 5$, что и требовалось доказать.

Попытки вывести рассуждениями такого же типа оценку $\gamma(L) \leq 4$ не увенчались успехом, и это не случайно. Дело в том, что индукция при доказательстве теоремы 1 носит явно локальный характер: для получения раскраски L из раскраски L' не нужно ничего перекрашивать. В то же время многочислен-

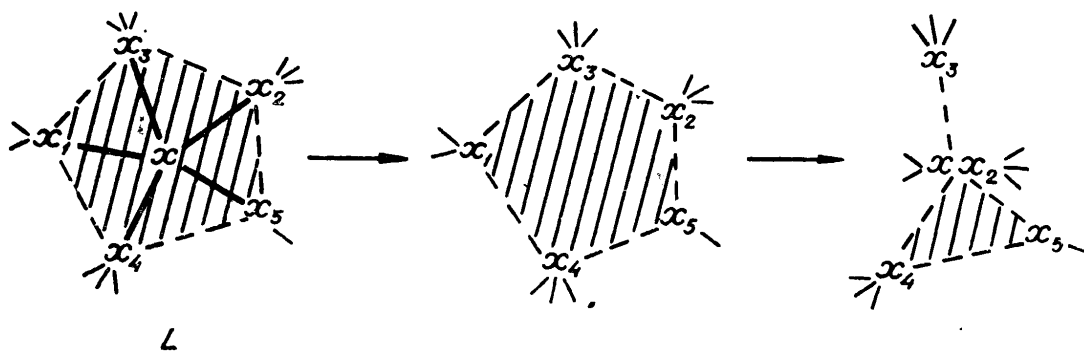


Рис. 208.

ные примеры, которых мы не будем приводить, показывают, что если вершины L' окрашены четырьмя цветами, причем цвета вершин $x_1 = x_2, x_3, x_4, x_5$ все различны, то для получения такой раскраски L' , при которой на эти четыре вершины было бы израсходовано не более трех цветов, понадобится, вообще говоря, тотальное перекрашивание всего L' .

Поиски доказательства гипотезы четырех красок выявили также ряд равносильных ей предложений. Формально сюда относятся и всевозможные сведения, позволяющие заключить о справедливости гипотезы для всех графов в предположении, что она справедлива в том или ином специальном подклассе* (например, для всех обыкновенных графов). Чтобы рассмотреть наиболее интересные равносильные предложения, нам понадобится еще следующее сведение проблемы.

Пусть $L = (X, U; P)$ — плоский неорграф без петель (вообще говоря, мультиграф), а L_S — некоторое его плоское представление. Граф L_S называется *плоской триангуляцией*, если край каждой его грани представляет собой треугольник (простой цикл длины 3); ясно, что всякая плоская триангуляция связна**. Гипотеза четырех красок для обыкновенных,

*) Ряд результатов такого рода принадлежит Г. Биркгофу (1913).

***) Для обыкновенного графа критерии представимости его в виде плоской триангуляции даны в работе Й. Аартса и Й. де Гроота (1962).

а значит и для любых графов равносильна следующей: хроматическое число всякой плоской триангуляции не превышает 4. Действительно, с одной стороны, плоская триангуляция есть частный случай плоского графа; с другой стороны, любой расположенный в плоскости обыкновенный граф не менее чем с тремя вершинами всегда можно надлежащим добавлением ребер дополнить до плоской триангуляции, а раскраска вершин последней сохраняет силу и для исходного графа.

Т е о р е м а 2 (Тэйта — Волынского)*. *Для того чтобы вершины плоской триангуляции L с $n(L) \geq 4$ допускали раскраску четырьмя цветами, необходимо и достаточно, чтобы ребра L можно было пометить тремя значками с соблюдением условия: у каждой грани значки трех ее ребер все различны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала вершины L раскрашены четырьмя цветами 1, 2, 3, 4 (не обязательно с использованием всех четырех). Рассмотрим аддитивно записанную абелеву группу \mathfrak{R} , состоящую из четырех подстановок:

O (тождественная), $A \doteq (12)(34)$, $B = (13)(24)$, $C = (14)(23)$ (это так называемая группа Клейна). Ее таблица сложения имеет вид

$$A + A = B + B = C + C = O,$$

$$A + B = B + A = C, \quad A + C = C + A = B, \quad B + C = C + B = A.$$

Для каждой пары цветов \widetilde{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) существует в точности одна подстановка группы \mathfrak{R} , переводящая эти цвета друг в друга; ребру графа L , соединяющему вершины цветов i и j , мы отнесем соответствующую подстановку, и так как $i \neq j$ (ввиду предполагаемой правильности раскраски вершин), то каждому ребру будет отнесена нетождественная подстановка, т. е. все ребра L окажутся помеченными с помощью трех значков: A, B, C . При этом край каждой грани получит три разных значка. Действительно, сумма трех подстановок, соответствующих сторонам треугольника, должна переводить цвет каждой из вершин в себя (ибо обход треугольника приводит в исходную вершину), т. е. эта сумма равна O , поскольку никакая другая подстановка группы \mathfrak{R} не сохраняет неизменным ни одного из цветов 1, 2, 3, 4; но, как непосредственно сле-

*) См. П. Тэйт (1880). Изящный вариант строгого доказательства этой теоремы принадлежит студенту В. В. Волынскому, погибшему в 1943 г. в возрасте 20 лет на фронте Великой Отечественной войны (см. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, М.—Л., ГТТИ, 1952, раздел 1, § 3).

дует из таблицы сложения, три нетождественных подстановки дают в сумме тождественную тогда и только тогда, когда они попарно различны.

Наоборот, пусть ребра L помечены тремя значками A , B , C так, что край каждой грани имеет три разных значка. Окрасим произвольно выбранную вершину графа L в любой из цветов 1, 2, 3, 4, а затем, трактуя A , B , C как подстановки группы \mathfrak{K} , придадим цвета остальным вершинам по следующему правилу: если вершина x уже имеет цвет i , то смежную не окрашенную еще вершину y окрашиваем в тот цвет, в который переводится i подстановкой, соответствующей ребру \widetilde{xy} . Ввиду связности L , каждая вершина в конце концов будет окрашена, и надо лишь убедиться в правильности полученной раскраски; для этого, в свою очередь, достаточно показать, что каков бы ни был циклический маршрут в L , сумма подстановок, соответствующих последовательно проходимым ребрам этого маршрута, равна O .

Каждому суграфу $L' = (X, U')$ графа L отнесем сумму подстановок, соответствующих ребрам U' . Это отображение пространства суграфов \mathfrak{L}_L , рассматриваемого как группа (см. начало § 23 в главе 3), в группу \mathfrak{K} будет, очевидно, гомоморфизмом в теоретико-групповом смысле*. Ядро этого гомоморфизма** включает в себя, в частности, всё пространство циклов \mathfrak{L}_L^Δ , поскольку край каждой грани переходит в $A + B + C = O$, а из краев граней можно, согласно условию Мак-Лэйна (см. доказательство пункта (0) \Rightarrow (1) теоремы о плоских графах в § 47), составить базис пространства \mathfrak{L}_L^Δ .

Пусть теперь C — произвольный циклический маршрут в L , а $L_C \doteq (X, U_C)$ — суграф, порожденный множеством U_C тех ребер L , каждое из которых фигурирует в C нечетное число раз. Так как маршрут C — циклический, то степени всех вершин графа L_C четны, т. е. L_C — квазицикл графа L . Ясно также, что сумма (в смысле группы \mathfrak{K}) подстановок, соответствующих последовательно проходимым ребрам маршрута C , равна сумме подстановок, соответствующих ребрам множества U_C ; но эта сумма есть тождественная подстановка, так как суграф L_C , будучи квазициклом графа L , принадлежит ядру гомоморфизма группы \mathfrak{L}_L в \mathfrak{K} .

Теорема доказана. Из нее вытекает, что гипотеза четырех красок равносильна следующей: ребра любой плоской три-

*) Т. е. переводит сумму элементов в сумму их образов.

**) Подгруппа элементов, переходящих в O .

ангуляции можно пометить тремя значками так, чтобы на краю каждой грани значки всех трех ребер были разными.

Прежде чем говорить о других предложениях, равносильных гипотезе четырех красок, остановимся на одном псевдоалгоритме раскраски, основанном на теореме 2, который был введен автором книги вместе с Ю. И. Неймарком в 1943—1944 годах (без опубликования).

Пусть дана плоская триангуляция L , все ребра которой произвольно размечены символами A, B, C подстановок группы \mathfrak{S} . *Индексом* грани назовем сумму подстановок, соответствующих ребрам ее края; грань *правильно размечена*, если индекс ее есть O . Наша цель — добиться правильной разметки всех граней путем изменения значков на некоторых ребрах L ; процесс изменения будет осуществляться с помощью следующего *правила движения индексов*: любой ненулевой индекс можно переместить в соседнюю грань через ребро, пометка которого не совпадает с этим индексом; в результате перемещения индекс первой грани станет равным O , индекс второй грани — сумме прежнего ее индекса с перемещенным, а новая пометка ребра тоже будет суммой старой пометки с перемещаемым индексом. На рис. 209 приведены три примера последовательных перемещений (нулевые индексы в гранях не пишутся); во втором и третьем примерах общее количество ненулевых индексов в результате перемещений уменьшается.

Так как каждое ребро L принадлежит краям ровно двух граней, то сумма индексов всех граней есть O . Что же может помешать уничтожить все ненулевые индексы путем их движения и «столкновения»? А вот что: «дороги» индексов не всегда пересекаются — см., например, рис. 210 (где одна из дорог изображена полностью, а другие обозначены пунктиром); дорога может даже состоять только из одного треугольника, т. е. фактически быть «клеткой» (рис. 211). Покажем на конкретном примере, как преодолевать подобные препятствия.

Пусть L — триангуляция, изображенная на рис. 212, с некоторой неправильной разметкой ребер, полученной следующим образом: ребра помечались непринужденно (начиная с левой стороны рисунка), уже проставленные пометки более не менялись, а новые пометки ставились так, чтобы по возможности не возникало граней с ненулевыми индексами. В итоге получились только две неправильно размеченные грани, с индексами $C + C + A = A$ и $B + B + A = A$; дороги этих индексов (показанные на рисунке пунктиром) не пересекаются.

Разложим индекс A одной из граней на сумму $B + C$ и будем двигать, например, индекс C ; при этом в грани останет-

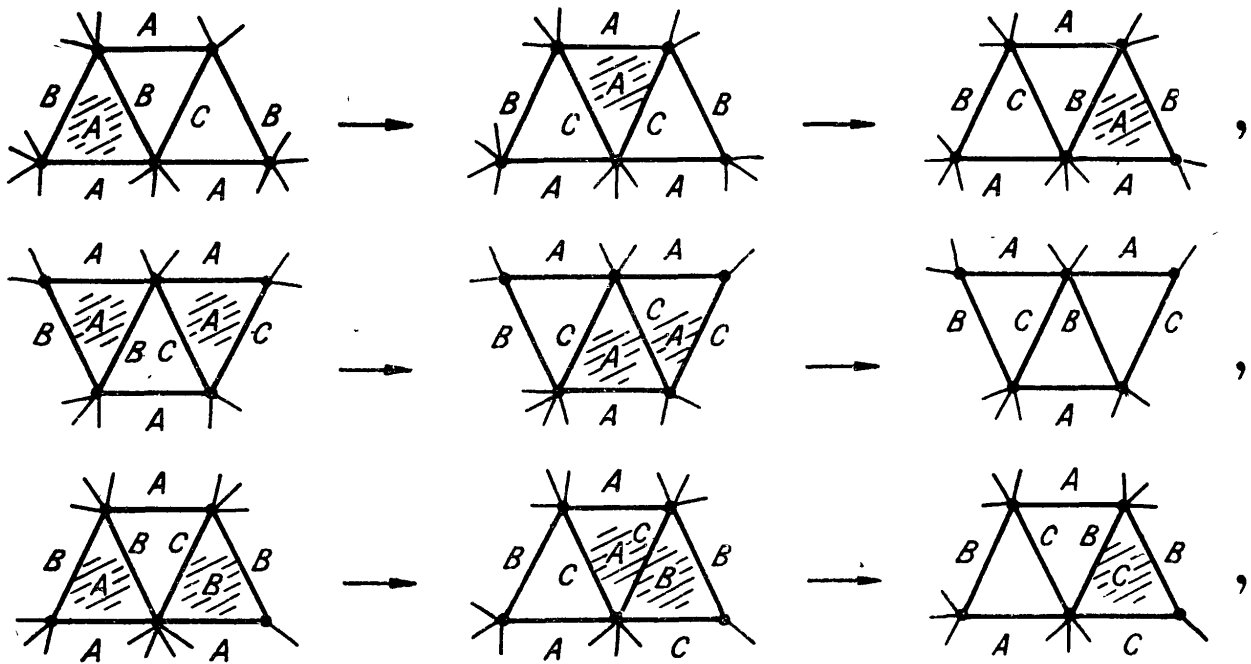


Рис. 209.

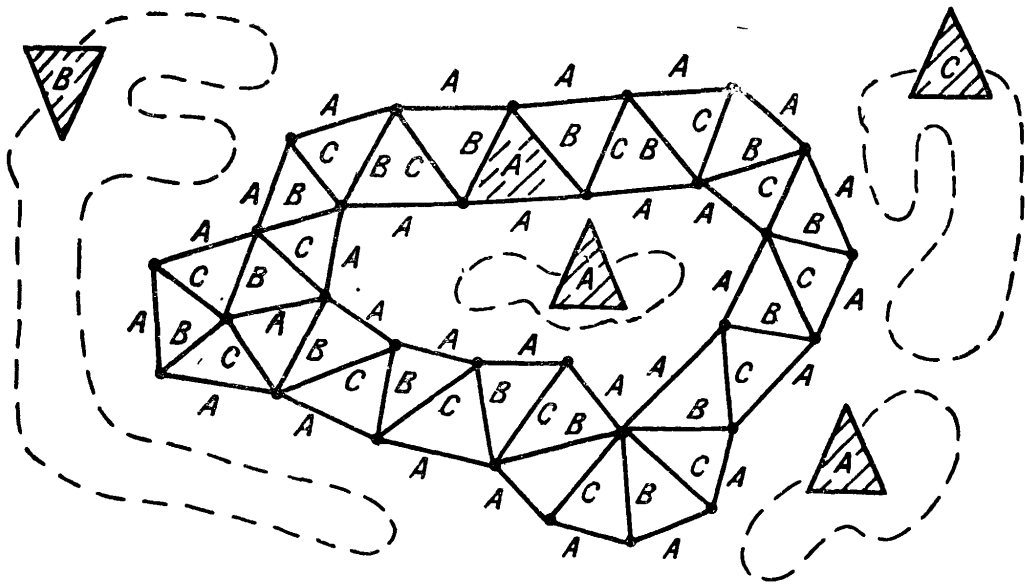


Рис. 210.

ся, конечно, уже не O , а B . Дорога индекса C в данном случае пересекает дорогу второго A — более того, этот A просто находится на дороге C . Двигая C до столкновения с A , получим в результате второй индекс B , а возникшая разметка всего L показана на рис. 213 (пунктиром изображен «след» индекса C). И хотя общее количество ненулевых индексов не изменилось, общая картина дорог претерпела изменение, в результате которого оба индекса B оказались на одной дороге (тонкая сплошная линия) и теперь легко могут быть уничтожены путем движения любого из них до столкновения со вторым.

Если бы дорога индекса C не проходила через сам индекс A , а только пересекала его дорогу, то мы подвели бы оба индекса к месту пересечения. Затруднение возникает тогда, когда дороги C и A совсем не пересекаются или когда оба индекса B опять оказываются на разных дорогах. Так как дорога C огорожена «с обеих сторон» ребрами с пометкой C , то после

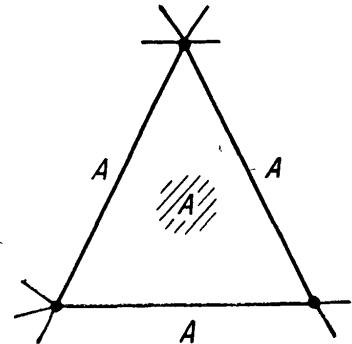


Рис. 211.

полного ее обхода индекс C необходимо должен оказаться в исходном треугольнике, где после сложения с «домоседом» B он опять даст A . Однако в итоге такого «турне» индекса C общая картина дорог изменится по сравнению с первоначальной, и теперь оба A вполне могут оказаться на одной дороге. Если же дороги обоих A все еще различны, то в нашем распоряжении есть много других возможностей, чтобы попытаться изменить ситуацию: например, передвинем какой-либо A в соседний треугольник, после чего расщепим на $B + C$, и т. д. Можно также после расщепления отправить в путешествие не C , а B . Все возможности (как перечисленные, так и другие) пока даже не приведены в порядок: мы не знаем, какие попытки целесообразно предпринимать на том или ином этапе в первую очередь. Однако для нескольких триангуляций, с числом вершин порядка сотни, начерченных «наугад», правильная разметка практически находилась таким путем вручную очень быстро. Вообще трудно вообразить себе такую «особо вредную» триангуляцию, в которой ненулевые индексы упорно не уничтожаются даже после нескольких тотальных переделок разметки ребер, вызываемых «кругосветными путешествиями».

По-видимому, плоские триангуляции, для которых правильная разметка ребер не находится достаточно быстро с помо-

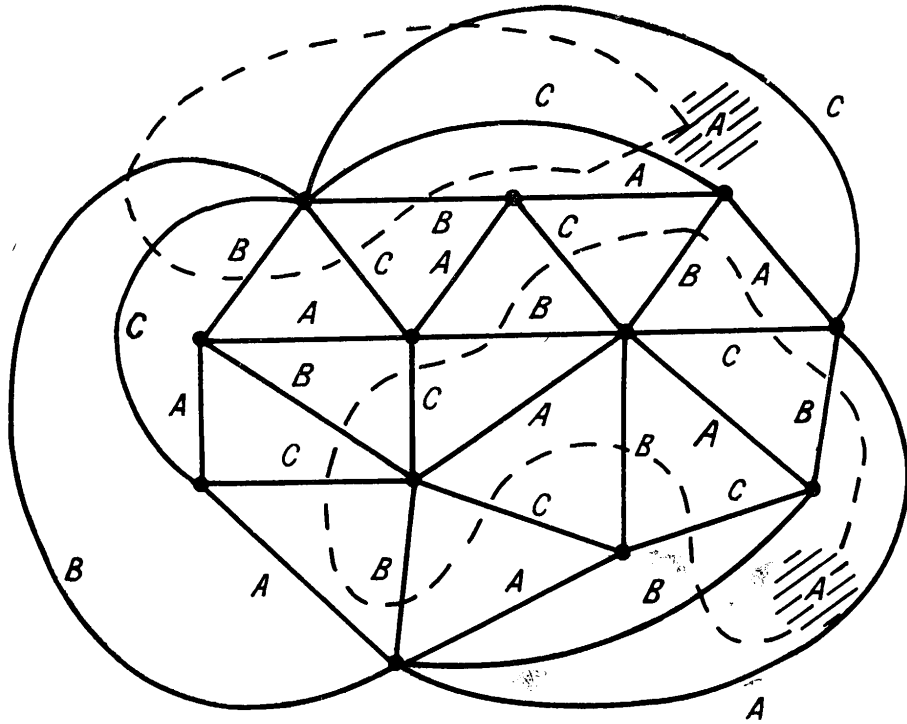


Рис. 212.

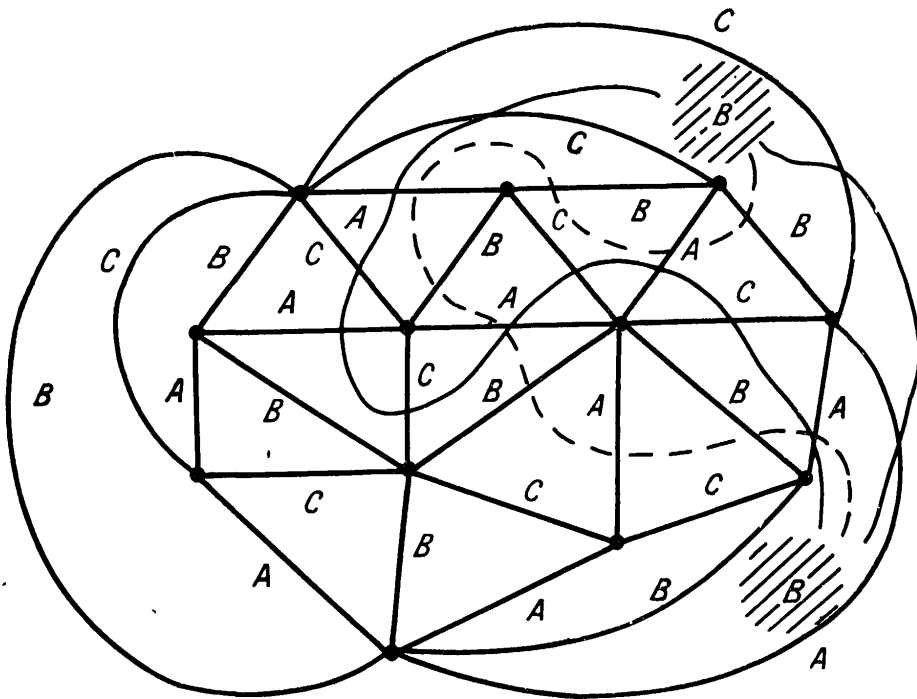


Рис. 213.

пью описанных приемов (или вообще не существует), очень редки; было бы интересно уточнить всё сказанное и найти хотя бы грубые статистические оценки. Интересно также систематизировать указанные приемы и описать такую процедуру движения индексов, которая в случае существования правильных разметок триангуляции давала бы одну из таких разметок как можно скорее. Однако даже такую процедуру следовало бы с точки зрения практической эффективности рассматривать как псевдоалгоритм, а не алгоритм, поскольку в случае, когда для конкретной триангуляции он не даст результата в приемлемое время, останется нерешенным вопрос, существует ли вообще правильная разметка ребер (а значит и раскраска четырьмя цветами вершин) данной триангуляции; выяснять же это перебором всевозможных разметок нереально, ибо их количество равно 3^m (или $\frac{1}{6} 3^m$, если разметки, различающиеся перестановкой обозначений A, B, C , считать одинаковыми).

Нельзя ли и для произвольного графа, а не только плоской триангуляции, придумать аналогичный псевдоалгоритм раскраски вершин в заданное число k цветов?

Переходим к дальнейшим предложениям, равносильным гипотезе четырех красок; те доказательства равносильности, которые имеются в достаточно популярной литературе, мы будем опускать.

Т е о р е м а 3 (Хивуда). *Для того чтобы вершины плоской триангуляции L допускали раскраску четырьмя цветами, необходимо и достаточно, чтобы каждой грани можно было отнести одно из чисел 1, 2 с соблюдением условия: для каждой вершины L сумма чисел, отнесенных примыкающим к ней граням, кратна 3.**

С л е д с т в и е 1. *Плоская триангуляция, степени всех вершин которой кратны 3, допускает раскраску вершин четырьмя цветами.*

С л е д с т в и е 2. *Гипотеза четырех красок равносильна каждой из двух следующих: (1) грани всякой плоской триангуляции можно пометить двумя числами 1 и 2 так, чтобы для каждой вершины сумма чисел в гранях, примыкающих к этой вершине, делилась на 3; (2) у всякой плоской триангуляции можно*

*) П. Хивуд (1890). Доказательство можно найти, например, в упомянутой выше книге Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского, а также в книгах К. Бержа (1/1958, русск. 1962, глава 21) и Г. Рингеля (3/1959, § 2).

некоторые грани разбить на три (помещая в грань новую вершину и соединяя ее с тремя старыми, рис. 214) таким образом, чтобы получилась триангуляция, степени всех вершин которой кратны 3.

Для формулировки следующего предложения, равносильного гипотезе четырех красок, нам понадобится теорема, принадлежащая Ю. Петерсену (1891); доказательство ее затем упрощалось многими авторами (см. Д. Кёниг 1936, глава 12).

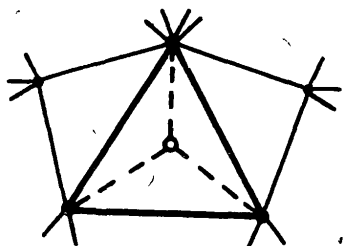


Рис. 214.

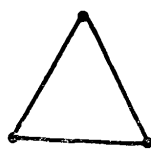


Рис. 215.

Мы приводим доказательство Х. Яксона (1/1959) в терминах графов (а не карт).

Т е о р е м а 4 (Петерсена). *Ребра любой плоской триангуляции можно разметить двумя значками P и Q так, чтобы край каждой грани содержал одно ребро со значком P и два ребра со значком Q . При этом всегда можно добиться выполнения любого из следующих двух начальных условий: а) произвольно выбранное ребро должно иметь значок P ; б) произвольно выбранное ребро должно иметь значок Q .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, достаточно рассматривать только начальное условие а); в самом деле, требование, чтобы некоторое ребро u приобрело значок Q , будет автоматически выполнено, если для другого ребра v , находящегося вместе с u на краю одной и той же грани, мы потребуем, чтобы оно имело значок P . Доказательство существования требуемой разметки, удовлетворяющей условию а), мы проведем индукцией по числу вершин триангуляции.

Существуют только три плоские триангуляции с числом вершин не более 4, а именно показанные на рис. 215; для них утверждение проверяется непосредственно. Пусть теорема уже доказана для всех плоских триангуляций с числом вершин $< n_0 \geq 5$ и пусть L — произвольная плоская триангуляция, имеющая n_0 вершин, а \textcircled{P} — ее ребро, которому надлежит придать значок P .

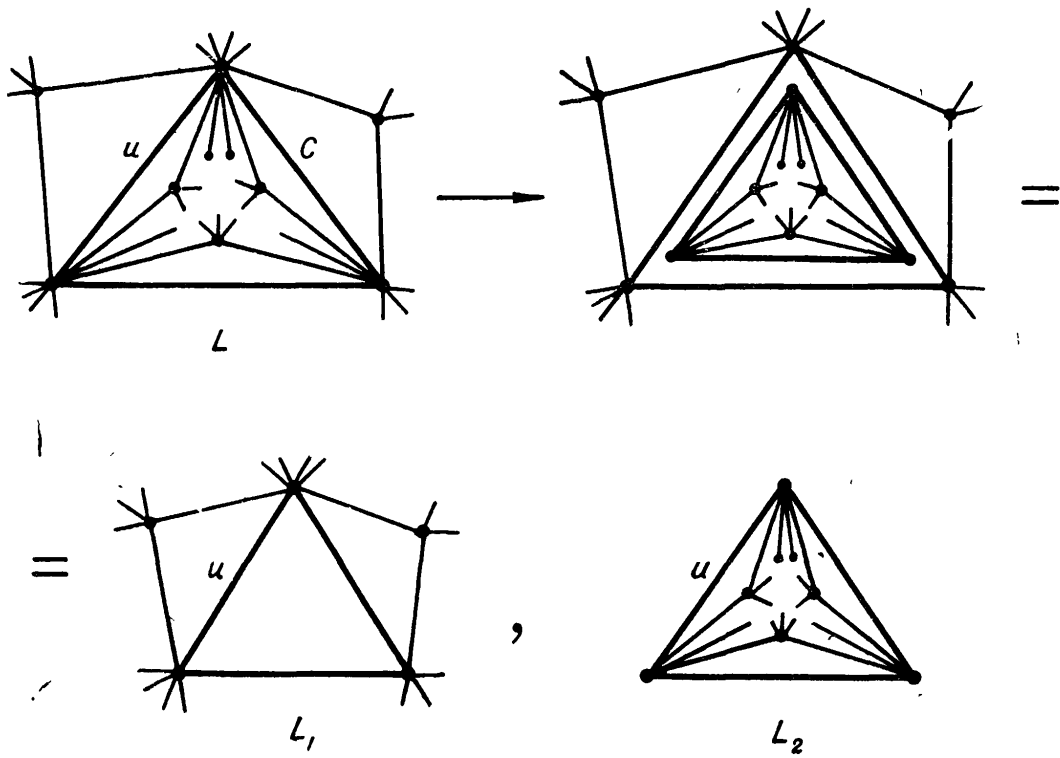
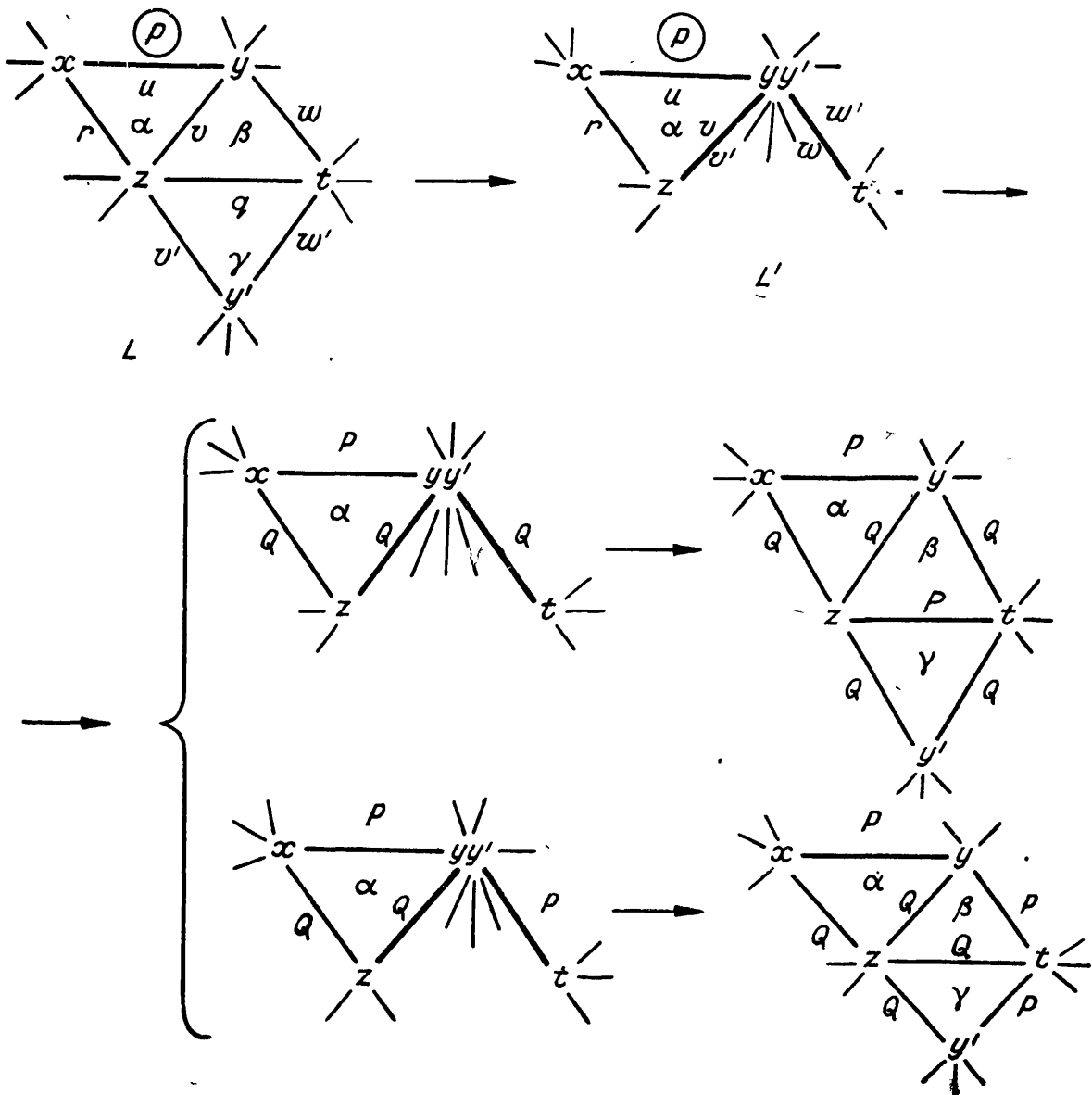


Рис. 216.



Случай 1: триангуляция L содержит разбивающий треугольник, т. е. такой простой цикл C длины 3, который не является краем никакой грани. Разрезая L по этому треугольнику (рис. 216; точный смысл «разрезания» дать нетрудно), образуем две плоские триангуляции L_1 и L_2 . При этом каждое из трех ребер C будет представлено в двух экземплярах: один в L_1 , другой в L_2 . Так как $n(L_1) < n_0$ и $n(L_2) < n_0$, то для каждой из триангуляций L_1 и L_2 в отдельности существует разметка ребер, соответствующая требованию теоремы с начальным условием типа а) (согласно индуктивному предположению). Если в L ребро \textcircled{P} есть u , принадлежащее C , то в L_1 и L_2 мы считаем ребрами \textcircled{P} копии u . Если же ребро \textcircled{P} в L не принадлежит C , то пусть это ребро попало, скажем, в L_1 ; считая его ребром \textcircled{P} в L_1 , найдем соответствующую разметку этой триангуляции и затем уже разметим L_2 , считая в последней ребром \textcircled{P} то ребро треугольника C , копия которого приобрела значок \textcircled{P} в L_1 . В обоих случаях значки обеих копий одного и того же ребра C всегда будут одинаковыми, поэтому разметки ребер L_1 и L_2 автоматически дают нам искомую разметку L .

Случай 2: L не содержит разбивающих треугольников. Пусть α — одна из граней L , край которой

$$x u y v z r x$$

содержит ребро $u = \textcircled{P}$; β — грань, примыкающая к α по ребру v , с краем

$$z v y w t q z;$$

γ — грань, примыкающая к β по ребру q , с краем

$$z q t w' y' v' z$$

(см. первый граф на рис. 217). Вершина y' отлична от x и не смежна с y , ибо иначе, как нетрудно показать, в любом случае L либо содержит разбивающий треугольник, либо сводится к F_4 . Удалим из L ребро q и отождествим вершину y' с y , ребро v' с v и ребро w' с w . Полученный граф L' будет плоской триангуляцией, причем $n(L') < n_0$. По предположению индукции, L' можно разметить требуемым образом так, чтобы ребро u приобрело значок P . При этом ребро $v = v'$ необходимо получит значок Q . Сохраняя значки ребер v, v' и w, w' в исходной триангуляции L , мы придадим ребру q значок P или Q , смотря по тому, имеет ли ребро $w = w'$ в L' значок Q или P (рис. 217). Теорема доказана.

Допустим, что ребра плоской триангуляции L размечены значками P и Q в соответствии с теоремой 4 (при любом начальном условии). Мы скажем, что две грани находятся в Q -связи, если из одной грани можно пройти в другую по плоскости, не проходя через вершины и пересекая только ребра со значком Q . Отношение Q -связи, очевидно, есть эквивалентность, поэтому множество всех граней L распадается на попарно непересекающиеся Q -классы; в соответствии с этим множество всех ребер значка Q распадается на Q -классы ребер, принадлежащих граням соответствующих классов. Грани каждого Q -класса образуют «дорогу», пересеченную ребрами соответствующего Q -класса ребер и окаймленную ребрами значка P (см., например, «дорогу индекса A », изображенную на рис. 210, если сам этот индекс в грани опустить, значок A ребер заменить везде на P , а значки B и C — на Q).

С л е д с т в и е 1. *Плоская триангуляция L допускает разметку ребер тремя значками A, B, C (в соответствии с теоремой 3) тогда и только тогда, когда она допускает такую разметку ребер двумя значками P и Q (в соответствии с теоремой 4), при которой каждый Q -класс ребер содержит четное число ребер.* Действительно, если L размечена тремя значками A, B, C , то полагая, например, $A \doteq P, B \doteq C \doteq Q$, получим требуемую разметку L двумя значками. Наоборот, если ребра L размечены значками P и Q с соблюдением (кроме условия теоремы 4) требования четности Q -классов ребер, то полагая $P \doteq A$ и придавая ребрам каждого Q -класса, последовательно пересекаемым при движении вдоль Q -дороги, попеременно значки B и C , мы получим искомую разметку L тремя значками.

С л е д с т в и е 2. *Гипотеза четырех красок равносильна такой: ребра всякой плоской триангуляции можно пометить двумя значками P и Q так, чтобы край каждой грани имел один значок P и два значка Q и чтобы каждый Q -класс ребер содержал четное число ребер.*

Пусть L^* — граф, двойственный плоской триангуляции L (рис. 218). Вообще говоря, L^* — не триангуляция, но зато этот неорграф без петель является однородным степени 3.* Если значки ребер L сохранить за соответствующими ребрами графа L^* , то Q -классам ребер L будут отвечать в L^* простые циклы, все ребра которых помечены значком Q . Из следствия 2 теперь непосредственно вытекает

*) Т. е. степень каждой его вершины равна 3 (см. начало § 8 в главе 1).

С л е д с т в и е 3. *Гипотеза четырех красок равносильна такой: ребра всякого плоского однородного степени 3 неорграфа без петель можно пометить двумя значками P и Q с соблюдением условий, чтобы каждая вершина была инцидентна одному ребру значка P и двум ребрам значка Q , а все простые циклы, образованные ребрами со значком Q , обладали четной длиной.*

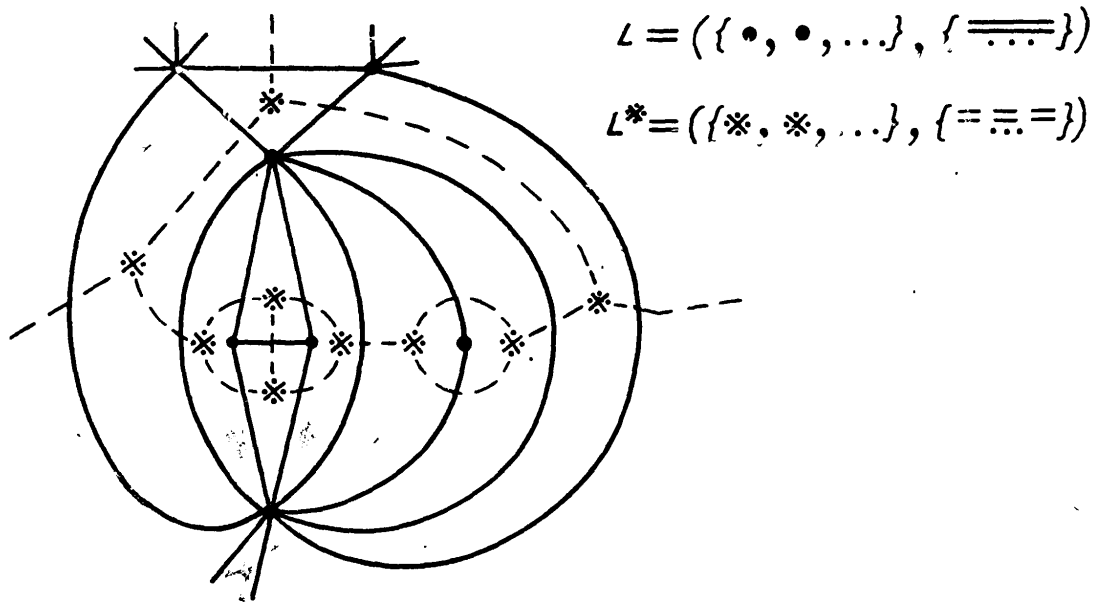


Рис. 218.

Мы скажем, что обыкновенный граф (не обязательно триангуляция) $L = (X, U)$ есть объединение двух своих суграфов $L_1 = (X, U_1)$ и $L_2 = (X, U_2)$, если $U = U_1 \cup U_2$ (множества ребер U_1 и U_2 могут пересекаться); пишем $L = L_1 \cup L_2$.

Т е о р е м а 5.* *Вершины обыкновенного графа L допускают раскраску четырьмя (или менее) цветами в том и только том случае, если L можно представить в виде объединения двух таких своих суграфов, каждый из которых является графом Кёнига (см. § 6 в главе 1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала пусть вершины графа $L = (X, U)$ раскрашены четырьмя цветами 1, 2, 3, 4 (не обязательно с использованием всех четырех); через $X(i)$ обозначим множество вершин цвета i . Если U_1 — множество тех ребер L , которые соединяют вершины $X(1) \cup X(2)$ с вершинами $X(3) \cup X(4)$, а U_2 — множество ребер L , соединяющих $X(1) \cup X(3)$ с $X(2) \cup X(4)$, то $U_1 \cup U_2 = U$ и оба графа $L_1 \doteq (X(1) \cup X(2), X(3) \cup X(4); U_1)$, $L_2 \doteq (X(1) \cup X(3), X(2) \cup X(4); U_2)$ являются графами Кёнига.

Наоборот, пусть $L = L_1 \cup L_2$, где L_1 и L_2 — графы Кёнига. Раскрасим вершины каждого из графов L_1 и L_2 двумя цвета-

*) См. А. А. Зыков (1/1949, глава 2, § 2).

ми 1 и 2; тогда каждой вершине L будет отвечать упорядоченная пара \vec{ij} , где i — цвет этой вершины в L_1 , а j — ее цвет в L_2 ($i, j = 1, 2$); рассматривая все четыре пары $\vec{11}, \vec{12}, \vec{21}, \vec{22}$ как четыре цвета 1, 2, 3, 4, получим правильную раскраску L , так как вершины, смежные в L , смежны в L_1 или в L_2 , и поэтому пары вида \vec{ij} для таких вершин заведомо различаются первыми или вторыми компонентами.

Следствие. Гипотеза четырех красок равносильна следующей; всякую плоскую триангуляцию можно представить как объединение таких двух суграфов, в каждом из которых края всех граней обладают четными длинами.

В § 40 (глава 5) была определена операция стягивания обыкновенного графа и были сформулированы гипотезы Хадвигера \mathfrak{H}_k (решенные положительно при $k = 1, 2, 3, 4$); в частности, \mathfrak{H}_5 означает, что всякий обыкновенный граф с хроматическим числом ≥ 5 можно стянуть на F_5 . Из допущения о справедливости \mathfrak{H}_5 немедленно следует справедливость гипотезы четырех красок, ибо плоский граф остается плоским после стягивания и удаления любых ребер, а граф F_5 не является плоским. Совсем не очевидно, однако, обратное утверждение, которое получено К. Вагнером (5/1937) и доказательство которого мы сможем привести только во второй части книги: из допущения о справедливости гипотезы четырех красок следует справедливость \mathfrak{H}_5 . Таким образом, частная гипотеза Хадвигера \mathfrak{H}_5 оказывается равносильной гипотезе четырех красок. На других равносильных гипотезах мы не будем здесь останавливаться.

Ряд результатов, возникших при исследовании проблемы четырех красок, состоит в установлении тех или иных достаточных условий, при которых у плоского графа L хроматическое число $\chi(L) \leq 4$, или, что равносильно, в выделении некоторых подклассов графов, для которых гипотеза четырех красок справедлива. Например, таков класс всех однородных степени 3 плоских триангуляций, как показывает следствие 1 из теоремы 3. Различные достаточные условия имеются у Х. Яксона (2/1961), Г. Дирака (14/1963) и многих других авторов, перечислить которых нет возможности. Упомянем результат К. Уинна (2/1940), согласно которому всякий плоский граф не более чем с 35 вершинами допускает раскраску вершин четырьмя цветами, и подробно остановимся на теореме И. Аартса и Й. де Гроота (1962). Ей предшествует

Л е м м а 2. Пусть $L = (X, U)$ — плоский обыкновенный граф, а $M = (Y, V)$ — его подграф с $\chi(M) \leq 4$.

Если для любой вершины $x \in X \setminus Y$ имеет место $s_L(x) \leq 5$,* а в каждой компоненте связности подграфа $N \doteq (X \setminus Y, W)$, полученного из L удалением вершин Y , имеется такая вершина y , для которой $s_L(y) \leq 4$, то $\gamma(L) \leq 4$.

Доказательство. Утверждение леммы тривиально для графов L с $n(L) \leq 4$; пусть оно уже доказано во всех случаях, когда $n(L) < n_0 \geq 5$, и пусть $L = (X, U)$ — граф с $n(L) = n_0$, содержащий такой подграф $M = (Y, V)$, что пара \overrightarrow{LM} «граф — подграф» удовлетворяет всем условиям леммы. Если $M = L$, то $\gamma(L) = \gamma(M) \leq 4$ и больше нечего доказывать, поэтому будем считать $X \setminus Y \neq \emptyset$. Пусть $y_0 \in X \setminus Y$ — такая вершина, для которой $s_L(y_0) \leq 4$ (она существует по условию леммы), и пусть $L' \doteq (X \setminus \{y_0\}, U')$ — подграф, полученный из L удалением y_0 ; граф M является подграфом L' . Покажем, что пара $\overrightarrow{L'M}$ удовлетворяет условиям леммы.

Ясно, что $\forall x \in X \setminus \{y_0\} [s_{L'}(x) \leq 5]$. Пусть теперь N_0 — та компонента графа N , которая содержит y_0 . При $n(N_0) = 1$ тот факт, что каждая компонента графа $N' \doteq ((X \setminus \{y_0\}) \setminus Y, W')$ содержит вершину степени ≤ 4 , вытекает из аналогичного предположения об L , поэтому будем считать $n(N_0) \geq 2$. Пусть

$$N_1 \doteq (X_1, W_1), N_2 \doteq (X_2, W_2), \dots, N_k \doteq (X_k, W_k)$$

($k \geq 1$) — компоненты, на которые распадается N_0 после удаления вершины y_0 . В каждой N_i есть вершина x_i , смежная с y_0 (в графе L). Так как по условию $s_L(x_i) \leq 5$, то $s_{L'}(x_i) \leq 4$. Таким образом, все компоненты графа N' , как старые, так и новые (возникшие из N_0 в результате удаления вершины y_0), содержат по вершине степени ≤ 4 (относительно графа L').

Поскольку $n(L') < n_0$, применение леммы к паре $\overrightarrow{L'M}$ в силу индуктивного предположения дает $\gamma(L') \leq 4$. Если при раскраске вершин L' четырьмя цветами на вершины x_1, x_2, x_3, x_4 , смежные с y_0 в L , будет израсходовано в общей сложности не более трех цветов, то придавая вершине y_0 неиспользованный цвет, мы получим искомую раскраску графа L . Допустим теперь, что цвета вершин x_1, x_2, x_3, x_4 в L' все различны; не нарушая общности, можно считать номера цветов совпадающими с индексами в обозначении этих четырех вершин, а сами вершины расположенными на плоскости в таком порядке, как показано на рис. 219.

*) Напомним, что $s_L(x)$ означает степень вершины x в графе L (см. § 2 главы 1).

Пусть X'_{13} — множество вершин L' , соединимых с x_1 такими цепями, вершины которых имеют только цвета 1 и 3, а X'_{24} — множество вершин L' , соединимых с x_2 цепями, вершины которых имеют цвета 2 и 4. Если $x_3 \notin X'_{13}$, то перекрашивая в X'_{13} все вершины цвета 1 в цвет 3, а все вершины цвета 3 — в цвет 1, мы не нарушим правильности раскраски всего L' и не изменим цветов у x_2, x_3, x_4 , но сама x_1 приобретет цвет 3, и в L можно будет окрасить вершину y_0 в цвет 1. Если же $x_3 \in X'_{13}$, то, как следует из теоремы Жордана о плоских кривых, $x_4 \notin X'_{24}$, и мы можем, поменяв аналогично предыдущему цвета 2 и 4 в X'_{24} , окрасить затем y_0 в цвет 2. Таким образом, $\gamma(L) \leq 4$ и лемма доказана.

Т е о р е м а 6 (Аартса — де Гроота). *Всякий плоский граф $L = (X, U; P)$, степень которого $\sigma(L) \leq 5$,* обладает хроматическим числом $\gamma(L) \leq 4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение тривиально при $n(L) \leq 4$; пусть оно уже доказано для графов с $n(L) < n_0 \geq 5$ и пусть $L = (X, U; P)$ — такой граф, что $n(L) = n_0$ и $\sigma(L) \leq 5$. Выдвинем о графе L ряд предположений (А — Д), каждое из которых не нарушает общности или обладает тем свойством, что его невыполнение уже влечет $\gamma(L) \leq 4$.

А. L — обыкновенный граф (X, U) . Действительно, если \hat{L}' — скелет подграфа L' , полученного из L удалением всех вершин с петлями, то $\sigma(\hat{L}') \leq \sigma(L)$ и в то же время $\gamma(\hat{L}') = \gamma(L)$ (см. пункт 1 в § 40 главы 5).

Б. L связан и не имеет точек сочленения. Доказательство точно такое же, как в аналогичной ситуации в теореме Брукса (см. § 41 в главе 5).

В. $\forall x \in X [s_L(x) = 5]$. Действительно, если для некоторой вершины $y \in X$ имеем $s_L(y) \leq 4$, то при $M \doteq (X \setminus \{y\}, U')$ пара \overrightarrow{LM} удовлетворяет условиям леммы 2 (ибо $\gamma(M) \leq 4$ в силу индуктивного предположения относительно L), поэтому $\gamma(L) \leq 4$.

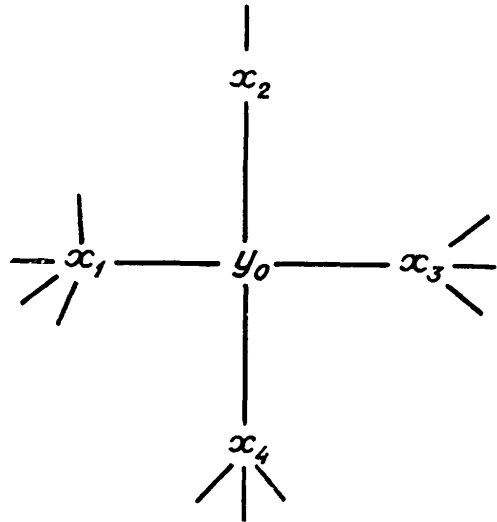


Рис. 219.

*) Напомним, что $\sigma(L) \doteq \max \{s_L(x) / x \in X\}$.

Г. Граф L остается связным после удаления любых двух вершин. Допустим, что для некоторой пары вершин $x_0, y_0 \in X$ подграф $L' \doteq (X \setminus \{x_0, y_0\}, U')$ несвязен, и пусть

$$L'_1 \doteq (X'_1, U'_1), L'_2 \doteq (X'_2, U'_2), \dots, L'_k \doteq (X'_k, U'_k)$$

($k \geq 2$) — компоненты L' , а $L'_i \doteq (X'_i \cup \{x_0, y_0\}, U'_i)$ — подграф исходного графа L , порожденный множеством вершин $X'_i \cup \{x_0, y_0\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Пусть L_i^{++} означает граф, совпадающий с L_i^+ в случае $\widetilde{x_0 y_0} \in U$ и полученный из L_i^+ добавлением ребра $\widetilde{x_0 y_0}$ в случае $\widetilde{x_0 y_0} \notin U$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Каждый L_i^{++} — плоский граф, ибо все графы $L_1^+, L_2^+, \dots, L_k^+$ связны вследствие отсутствия у L точек сочленения (см. Б) и поэтому L_i^{++} можно получить из L стягиванием всех L_j^+ с $j \neq i$ в одно ребро. Далее, каждый L_i^{++} содержит менее n_0 вершин, и $\forall x \in X'_i \cup \{x_0, y_0\} [s_{L_i^{++}}(x) \leq 5]$ (в противном случае вершина x_0 или y_0 была бы точкой сочленения графа L , вопреки Б). По индуктивному предположению, вершины каждого из графов L_i^{++} можно раскрасить четырьмя цветами; при этом цвета вершин x_0 и y_0 ввиду их смежности окажутся различными. Надлежащим переименованием цветов в графах $L_1^{++}, L_2^{++}, \dots, L_k^{++}$ можно добиться совпадения их раскраски на x_0 и совпадения на y_0 , т. е. получить раскраску четырьмя цветами для всего L .

Д. Каждая грань графа L — треугольник. Ввиду Б край каждой грани является простым циклом, а ввиду А длина этого цикла ≥ 3 . Пусть для некоторого края

$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_0$$

имеем $l \geq 4$; тогда $\widetilde{x_0 x_2} \notin U$, ибо иначе удаление вершин x_0 и x_2 разбивало бы граф L , вопреки Г (см. левый граф на рис. 220).

Отождествляя вершину x_0 с x_2 и ребро $\widetilde{x_0 x_1}$ с ребром $\widetilde{x_2 x_1}$, получим плоский граф L' (правый на рис. 220). Так как $s_L(x_1) \leq 5$, то $s_{L'}(x_1) \leq 4$. Удаление вершины $(x_0 x_2)$ из L' не разбивает этот граф (иначе удаление x_0 и x_2 разбивало бы исходный граф L), поэтому для пары $\overrightarrow{L'M}$, где $M \doteq ((x_0 x_2), \emptyset)$ (одновершинный подграф) выполнены все условия леммы 2, следовательно, $\gamma(L') \leq 4$. Сохраняя за вершинами x_0 и x_2 графа L цвет вершины $(x_0 x_2)$ в L' и не меняя цветов остальных вершин, получим искомую раскраску L , откуда $\gamma(L) \leq 4$.

Итак, теорема осталась недоказанной лишь в случае, когда граф L удовлетворяет одновременно пяти условиям А—Д. Но тогда, очевидно,

$$\lambda(L) = m(L) - n(L) + 1, \quad 3[\lambda(L) + 1] = 2m(L) = 5n(L),$$

откуда $n(L) = 12$, $m(L) = 30$ и $\lambda(L) + 1 = 20$. Неравенство $\gamma(L) \leq 4$ сразу следует из упомянутого выше результата К. Уинна, однако, поскольку мы не привели его доказательства, сошлемся еще на легко доказываемый факт, что из всех однородных степени 5 плоских триангуляций только ребер-

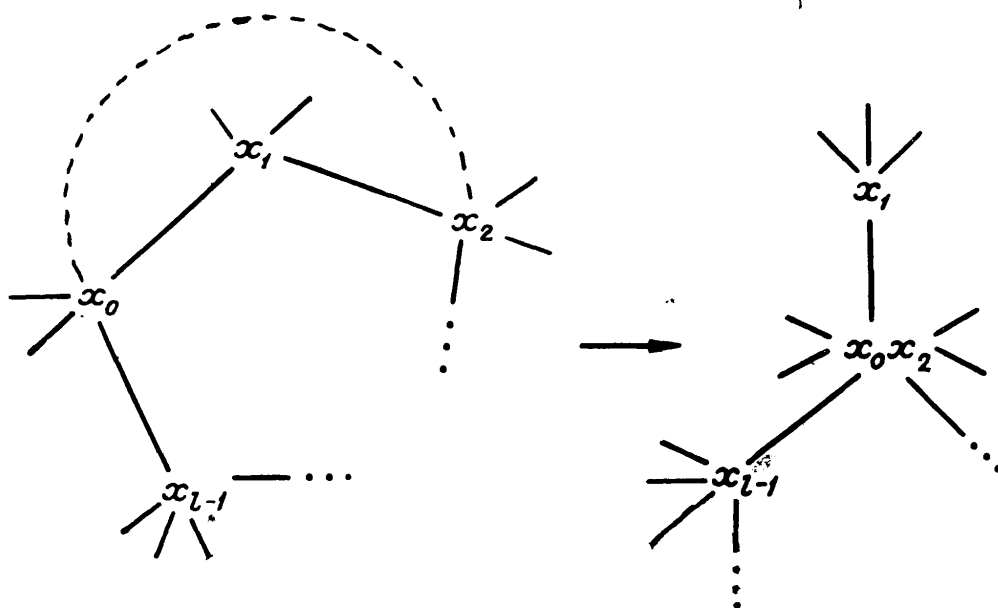


Рис. 220.

ный остов икосаэдра обладает двенадцатью вершинами, тридцатью ребрами и двадцатью гранями (см. § 47), а раскраска вершин такого графа четырьмя цветами находится без труда (рис. 221).

Попытки построить опровержительный пример для гипотезы четырех красок привели к установлению целого ряда свойств, которыми должен был бы обладать плоский обыкновенный граф $L = (X, U)$ с $\gamma(L) \geq 5$ и наименьшим числом вершин. Отметим некоторые из этих свойств.

1) L не содержит разбивающих треугольников (см. случай 1 в доказательстве теоремы Петерсена); действительно, иначе мы могли бы раскрасить 4 цветами каждый из двух графов L_1 и L_2 , полученных разрезанием L по такому треугольнику (ибо $n(L_1) < n(L)$ и $n(L_2) < n(L)$), а затем изменить нумерацию цветов, скажем, у L_2 так, чтобы каждая вершина рас-

смаатриваемого треугольника имела в L_2 тот же цвет, что и в L_1 .

2) $\forall x \in X [s_L(x) \geq 5]$; в самом деле, при наличии у L вершины x_0 с $s_L(x_0) \leq 4$ мы могли бы применить лемму 2, беря за M подграф с множеством вершин $X \setminus \{x_0\}$.

3) Если все грани L имеют одинаковое число сторон, то $|\{x/x \in X \& s_L(x) \geq 7\}| \geq 2$ — показано К. Уинном (1/1937).

4) $n(L) \geq 36$ — результат К. Уинна (2/1940).

5) *Граф L является 5-связным* (см. § 14 в главе 2) — результат Г. Дирака (7/1960).

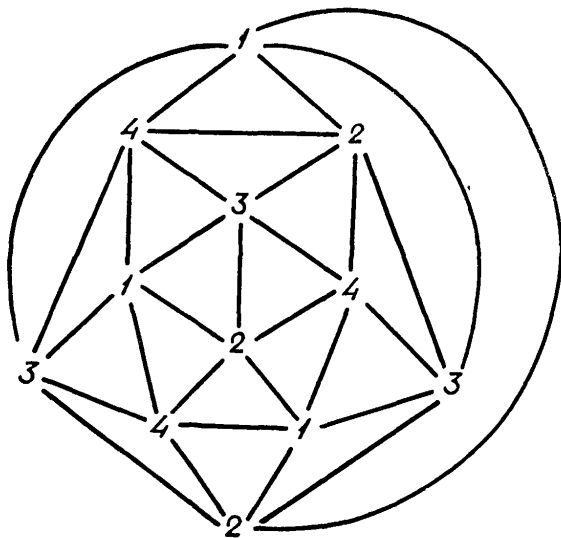


Рис. 221.

Кроме того, можно в случае надобности считать L триангуляцией, так как добавление ребер (без добавления вершин и такое, чтобы граф оставался обыкновенным) не нарушает свойств 1) — 5). Дальнейшие результаты в указанном направлении можно получить из более общих, содержащихся в работах Г. Дирака (2/1952, 4/1953), Дж. и Л. Келли (1954) и других, где рассматриваются k -хроматические графы, превращающиеся в $(k-1)$ -хроматические после удаления

любой вершины*. В этой связи укажем еще раз на работу Г. Дирака (14/1963), содержащую наиболее полные итоги.

Отметим без доказательства четыре ранних результата К. Вагнера, которые могут оказаться полезными при дальнейшем исследовании проблемы четырех красок:

1) из произвольной плоской триангуляции можно получить любую другую плоскую триангуляцию с тем же числом вершин, последовательно применяя операцию перемены диагонали в четырехугольнике, т. е. в паре треугольников с общим ребром (1/1936);

2) всякую плоскую триангуляцию можно получить из некоторого плоского графа с четырехугольными гранями, проводя надлежащим образом по одной диагонали в каждой грани (2/1936);

* Вообщее критическими графами по отношению к различным свойствам мы будем заниматься во второй части книги.

3) если в плоской триангуляции соединить новым ребром любую пару несмежных вершин, то полученный граф обязательно будет содержать часть, гомеоморфную F_5 (3/1936);

4) пусть L — плоский граф с четырехугольными гранями, и пусть его вершины правильно раскрашены двумя цветами (это всегда возможно в силу теоремы Кёнига, см. § 12 в главе 2); тогда всякий граф, который можно получить, соединяя в L новым ребром произвольную пару несмежных вершин разного цвета, содержит часть, гомеоморфную $K_{3,3}$ (3/1936).

Объем книги не позволяет нам дать сколько-нибудь полного обзора исследований по проблеме четырех красок; с некоторыми не упомянутыми здесь работами читатель может познакомиться по статьям Х. Кокстера (1/1959, 2/1959). Тому, кто хочет заниматься этим вопросом всерьез, нельзя пройти мимо большого исследования Г. Грещца (1/1957—16/1962). Бурное развитие машинной математики дает право питать некоторые умеренные надежды на то, что в один прекрасный день машина выдаст пример плоского графа, не раскрашиваемого четырьмя цветами; Х. Ямабе и Д. Поуп (1961) указывают метод программирования задачи о разметке граней данного графа (или, что то же, вершин двойственного графа), в соответствии с теоремой Хивуда, на машине UNIVAC 1103.

В заключение остановимся кратко на задачах, близких по тематике к проблеме четырех красок.

Среди результатов упомянутого выше исследования Г. Грещца имеется такой (7/1958): если плоский обыкновенный граф L не содержит циклов длины 3, то он обладает хроматическим числом $\chi(L) \leq 3$; как показал Б. Грюнбаум (1963), результат сохраняет силу и при более слабом предположении, что L содержит не более трех циклов длины 3.

Весьма интересны результаты Г. Рингеля (1/1952, 2/1954, 3/1959, 4/1961) относительно хроматического числа графа, допускающего расположение на поверхности заданного топологического типа. Пусть S — замкнутая поверхность (ориентируемая или неориентируемая), $\varphi(S)$ — ее число полноты (см. § 47). Обозначим через $\chi(S)$ наибольшее из хроматических чисел всех тех обыкновенных графов, которые можно поместить на поверхности S . Основным результатом Г. Рингеля заключается в том, что для всякой S , отличной от сферы (т. е. для любой из поверхностей $P_1, P_2, \dots; N_1, N_2, \dots$), имеет место равенство

$$\chi(S) = \varphi(S); \quad (*)$$

доказательство содержится в книге Г. Рингеля (3/1959), излагать же его где-нибудь еще имеет смысл лишь после существен-

ного упрощения (если последнее вообще возможно). Так как $\varphi(P_0) = 4$, то сфера остается единственной замкнутой поверхностью, для которой равенство (*) не установлено (и не опровергнуто), и можно лишь утверждать, что

$$\varphi(P_0) \leq \gamma(P_0) \leq \varphi(P_0) + 1.$$

В отношении хроматического класса (см. § 40 и § 44 в главе 5) плоских графов L без петель скажем следующее. На основании теоремы Визинга (§ 44), если степень $\sigma(L) \leq 3$, то хроматический класс $\chi(L) \leq 4$, а ввиду теоремы Тэйта — Волынского (перефразированной для двойственных графов) гипотеза о том, что для любого плоского однородного степени 3 обыкновенного графа L всегда $\chi(L) = 3$, равносильна гипотезе четырех красок. Наконец, в работе В. Г. Визинга (4/1965) имеется такой результат: если плоский обыкновенный граф L содержит хотя бы одну вершину степени ≥ 8 (т. е. если $\sigma(L) \geq 8$), то $\chi(L) = \sigma(L)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ I ЧАСТИ

§ 49. Приложения и обобщения графов

Во Введении мы перечислили ряд областей, непосредственно использующих теорию графов. Остановимся теперь на некоторых приложениях более подробно.

Теория электрических цепей — одна из наиболее старых областей применения графов, возникла благодаря открытию законов Кирхгофа. Рассмотрим конкретный пример.

Пусть в схеме, изображенной на рис. 222, известны величины R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 всех пяти сопротивлений; требуется найти

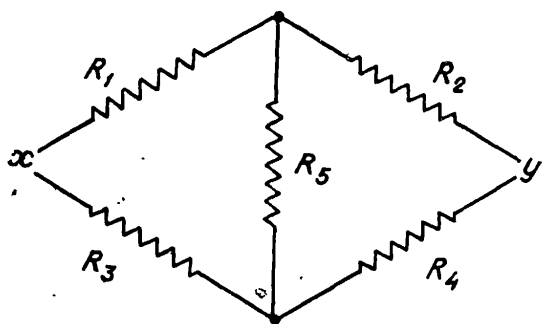


Рис. 222.

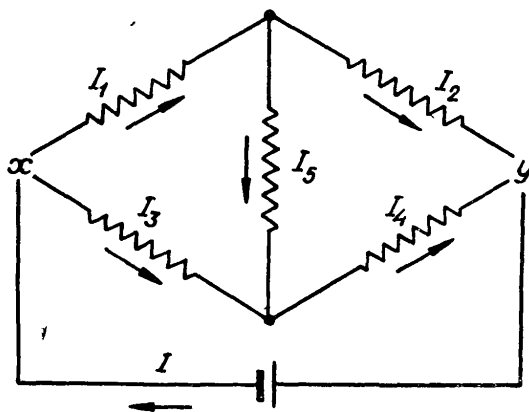


Рис. 223.

сопротивление R всей цепи между узлами x и y . Поскольку данная схема, рассматриваемая как двухполюсная с полюсами x и y , не является результатом последовательного или параллельного соединения более простых двухполюсных схем, то для решения задачи предполагают, что узлы x и y подключены к источнику тока, и вводят вспомогательные неизвестные, именно силы токов $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I$ в данных сопротивлениях и во всей цепи; не зная заранее фактического направления всех токов (в данном случае это заведомо относится к току I_5), мы произвольно «ориентируем» сопротивления и считаем силу тока

I_i в сопротивлении R_i положительной или отрицательной, смотря по тому, совпадает или не совпадает направление тока с ориентацией сопротивления (рис. 223). Согласно первому закону Кирхгофа, в каждом узле сети алгебраическая сумма токов равна нулю; это дает четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} I - I_1 - I_2 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_5 &= 0, \\ I_3 + I_5 - I_4 &= 0, \\ I_2 + I_4 - I &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Второй закон Кирхгофа позволяет составлять уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_2 R_2 &= IR, \\ I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_4 R_4 &= IR, \\ I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_3 R_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Легко проверить, что система (1) линейно зависима. Относительно уравнений (2) сразу не ясно, сколько их надо написать, чтобы вместе с подходяще выбранными уравнениями первой группы они образовали независимую систему, достаточную для определения R . Оказывается, из уравнений (1) надо сохранить те, которые соответствуют некоторому базису пространства \mathcal{Q}_L^P ,

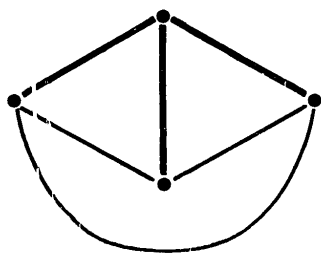


Рис. 224.

составленному из центральных разрезов графа L на рис. 224, а уравнения (2) написать для некоторой системы простых циклов, определяющей базис в пространстве \mathcal{Q}_L^A (см. § 22—25 в главе 3). В нашем случае $\kappa(L) = 1$, $\rho(L) = 4 - 1 = 3$, и из четырех уравнений (1) можно сохранить, например, первые три. Выделяя в L произвольный каркас (жирные ребра на

рис. 224), мы пишем затем уравнения второй группы для каждого из циклов, определяемых хордой и каркасом согласно теореме 3 (§ 22); в данном примере это даст еще три уравнения, поскольку $\lambda(L) = 3$. Исключая из системы

$$\begin{aligned} I_3 - I_1 - I_2 &= 0, & I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_3 R_3 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_5 &= 0, & I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_5 R_5 &= 0, \\ I_3 + I_5 - I_4 &= 0; & I_1 R_1 + I_2 R_2 &= IR \end{aligned}$$

вспомогательные неизвестные I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 и сокращая обе части полученного равенства на I , находим выражение R через R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 . Описанный способ действия в свете теории пространств разрезов и циклов графа кажется вполне естественным, а строгое обоснование имеется, например, в статье Л. Д. Кудрявцева (1948), книге С. Сешу и М. Рида (1961), книге Л. Робишо, М. Буавера и Ж. Робера (1961, русск. 1964), учебном пособии Л. А. Бессонова (1964); по этой же литературе читатель может познакомиться с дальнейшими приложениями теории графов к анализу и синтезу электрических цепей, причем более сложных, содержащих не только омические, но также индуктивные и емкостные сопротивления, трансформаторы и т. д. *

Теория логических сетей, возникшая недавно, использует примерно те же результаты теории графов, что и теория электрических цепей. Теперь вместо величины сопротивления ребру u ставится в соответствие некоторая булева функция $f_u(t_1, t_2, \dots, t_s)$ от системы переменных (одной и той же для заданного графа L). Каждой системе значений $t_1^0, t_2^0, \dots, t_s^0$, взятых из $B\{0,1\}$, отвечает суграф с теми ребрами u графа L , для которых $f_u(t_1^0, t_2^0, \dots, t_s^0) = 1$. Простейшая задача анализа такой сети состоит в нахождении булевой функции $F_{x,y}(t_1, t_2, \dots, t_s)$, равной 1 при тех и только тех значениях аргументов, при которых заданные вершины x и y не отделены в соответствующем суграфе. Одна из задач синтеза формулируется так: построить сеть с заданной функцией $F_{x,y}(t_1, t_2, \dots, t_s)$ и с возможно меньшим числом элементов при заданных ограничениях на вид функций $f_u(t_1, t_2, \dots, t_s)$ для ребер. Более подробно ознакомиться с логическими сетями можно, например, по статьям С. В. Яблонского (1959), Л. Лёфгрена (1959, русск. 1962) и В. Бенеша (1962). Близки к этому топологические аспекты теории релейно-контактных схем—см., например, работы А. В. Кузнецова (1/1958, 2/1958), Б. А. Трахтенброта (1958) и Р. Гоулда (2/1959); дальнейшим полем приложений служит теория автоматов **. О транспортных и вероятностных сетях мы скажем немного позднее.

*) См. также обзорную статью В. Долежала, Й. Прокопа и Э. Ворела (1962).

***) Не перечисляя общеизвестной литературы по теории автоматов, отметим статью В. К. Кабулова (1965), где особо подчеркнута роль графов как рабочего аппарата анализа и синтеза конечных автоматов.

Задача о назначениях в своем простейшем виде сводится к нахождению какого-нибудь из наибольших паросочетаний у заданного графа Кёнига (см. § 6 в главе 1). Удобный алгоритм решения этой задачи, предложенный Е. Эгервари (1931) и известный под названием венгерского, мы проиллюстрируем на конкретном примере.

Пусть к нам прибыло одновременно девять групп иностранных туристов, причем гости группы T_1 говорят на английском языке, гости T_2 — на французском, T_3 — на немецком, T_4 — на английском, T_5 — на французском, T_6 — на испанском, T_7 — на итальянском, T_8 — на испанском, T_9 — на португальском; бюро обслуживания «Интурист» располагает в данный момент десятью свободными переводчиками, владеющими такими иностранными языками: P_1 — английским и немецким, P_2 — английским и испанским, P_3 — английским, P_4 — французским, немецким и итальянским, P_5 — английским и немецким, P_6 — английским, P_7 — испанским и португальским, P_8 — французским и португальским, P_9 — французским, испанским и итальянским, P_{10} — английским и немецким. Как прикрепить (взаимно однозначно) переводчиков к группам, чтобы в первую же очередь было обслужено возможно большее число групп?

Построим граф Кёнига $L = (X_1, X_2; U)$, в котором роль вершин множества X_1 играют переводчики, роль вершин X_2 — группы туристов, а смежность вершины $P_i \in X_1$ с вершиной $T_j \in X_2$ означает владение i -го переводчика языком j -й группы (рис. 225). Требуется найти в L паросочетание с наибольшим количеством, именно $\pi(L)$, ребер. Алгоритм решения состоит в следующем.

Пусть какое-то паросочетание $K = (Y_1, Y_2; V)$ уже построено (в начальный момент это пустое паросочетание, $V = \emptyset$). Ребра графа L , принадлежащие V , назовем «жирными», а ребра из $U \setminus V$ — «тонкими». Вершину, инцидентную жирному ребру, тоже будем называть жирной, а вершину, не инцидентную жирному ребру, — тонкой. Под «чередующейся цепью» будем понимать простую цепь, на которой тонкие ребра строго чередуются с жирными; такую цепь назовем тонкой, если ее длина положительна, а начальная и конечная вершины — обе тонкие. В частности, тонкой чередующейся является цепь (длины 1) из двух тонких вершин и соединяющего их (тонкого) ребра.

Ясно, что при наличии у графа L с заданным паросочетанием K хотя бы одной тонкой чередующейся цепи Q можно вместо K построить новое паросочетание K' , содержащее на одно ребро больше: для этого надо все тонкие ребра цепи Q сделать жир-

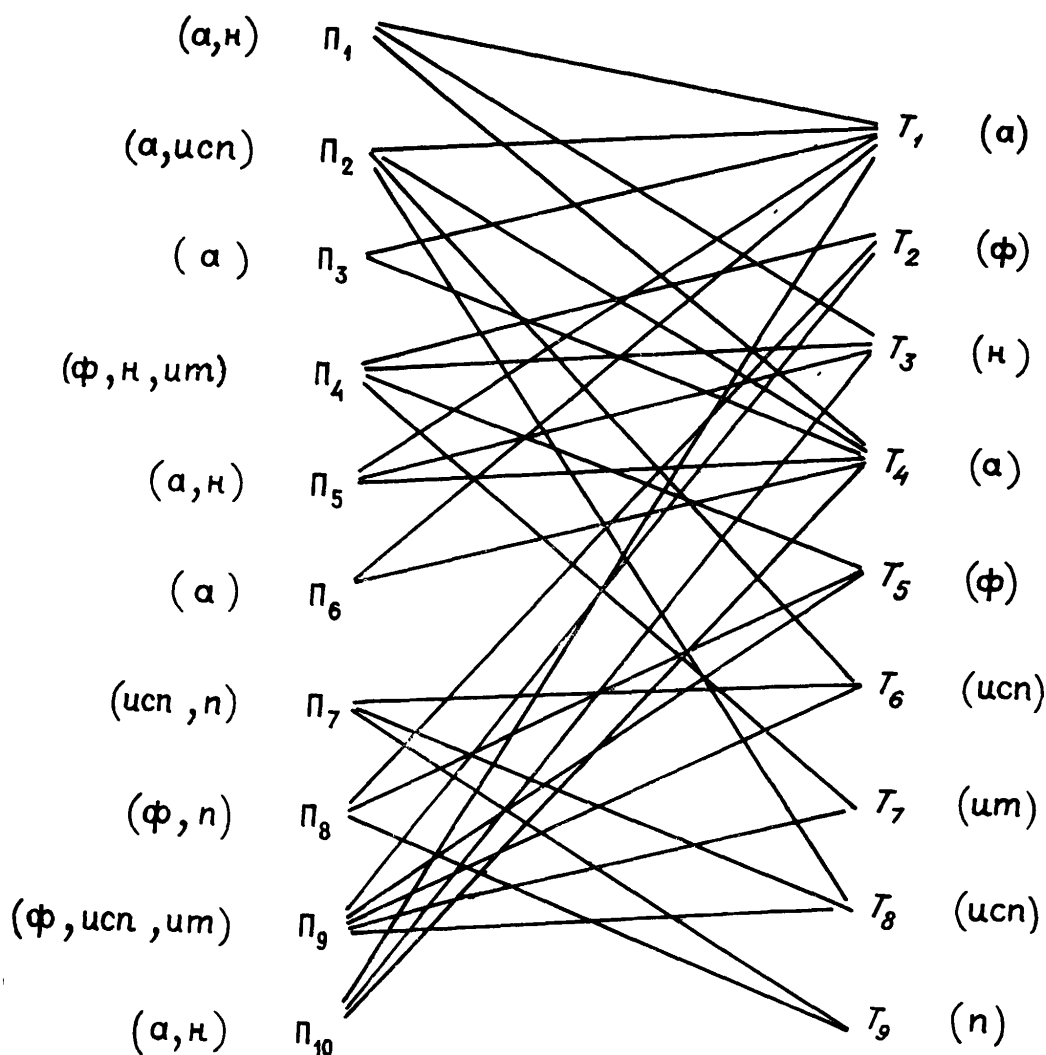


Рис. 225.

ными, а жирные — тонкими, не трогая ребер вне Q ; иначе говоря, надо удалить из множества V все те ребра, которые принадлежат цепи Q , и к остатку добавить ребра Q , принадлежащие $U \setminus V$. В свою очередь, если у графа L с паросочетанием K' опять есть тонкая чередующаяся цепь, то аналогично предыдущему можно получить паросочетание K'' , имеющее уже на два ребра больше исходного, и т. д.

Оказывается, если на каком-то этапе тонких чередующихся цепей больше нет, то полученное паросочетание K^* — наибольшее, т. е. содержит ровно $\pi(L)$ ребер. Это очевидно в случае, когда множество X_1 не имеет тонких вершин, а в общем случае следует из теоремы Кёнига — Оре. Именно, пусть $Y \subseteq X_1$ — множество тонких вершин в X_1 , а $Z \subseteq X_1$ — множество тех жирных вершин в X_1 , которые достижимы из Y по чередующимся цепям; тогда отсутствие тонких чередующихся цепей влечет

$\Delta(Y \cup Z) = \Delta Z$, т. е. $\max(|A| - |\Delta A|) \geq |Y|$, откуда $\pi(L) \leq \leq |X_1| - |Y| = |X_1 \setminus Y|$, а значит, и $\pi(L) = |X_1 \setminus Y|$, поскольку равенство уже достигнуто при паросочетании K^* .

Процедура поиска тонкой чередующейся цепи в графе с заданным паросочетанием по сути дела не отличается от «слепого» поиска выхода из лабиринта (см. § 18 в главе 2) и состоит в следующем: выбираем в X_1 любую тонкую вершину и строим из нее чередующуюся цепь, отмечая штрихом пройденные ребра и не выбирая их в дальнейшем; попав в уже пройденную вершину или в такую вершину из X_1 , которая не инцидентна ни одному еще не пройденному тонкому ребру, возвращаемся на один шаг, отмечаем ребро вторым штрихом и пытаемся продолжить чередующуюся цепь иначе, и т. д. В результате процесс либо оборвется в тонкой вершине множества X_2 , и мы получим искомого цепь (она состоит из ребер, отмеченных ровно одним штрихом), либо этот процесс приведет нас в исходную вершину*, и тогда надо начать аналогичный поиск с другой тонкой вершины множества X_1 .

В нашем конкретном примере всё решение выглядит следующим образом. Сначала просматриваем поочередно вершины Π_1, Π_2, \dots , относя каждой из них первую смежную и еще свободную из вершин T_1, T_2, \dots (пока такие есть); полученное паросочетание изображено на рис. 226 слева. Далее ищем тонкую чередующуюся цепь, выбирая при наличии нескольких возможностей всегда «самую верхнюю»: это приводит к цепи Q с последовательными вершинами $\Pi_3, T_1, \Pi_1, T_3, \Pi_5, T_4, \Pi_2, T_6, \Pi_7, T_8$. Делая затем тонкие ребра цепи Q жирными и наоборот, приходим к паросочетанию, показанному на рис. 226 справа. Наконец, убеждаемся в отсутствии тонких чередующихся цепей; невозможность дальнейшего улучшения паросочетания видна и из того, что подмножество $A = \{\Pi_1, \Pi_3, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_{10}\} \subseteq X_1$, составленное тонкими вершинами и вершинами, достижимыми из них по чередующимся цепям, обладает образом $\Delta A = \{T_1, T_3, T_4\}$, т. е. для A имеем $|A| = 5$ и $|\Delta A| = 3$, откуда $|A| - |\Delta A| = 2$ и $\pi(L) \leq 10 - 2 = 8$, значит, ни при каком другом способе прикрепления все равно не удастся использовать одновременно более восьми переводчиков и обслужить тем самым сразу все девять групп. О том, как полностью выявить множество всех наилучших решений, будет сказано во второй части книги.

*) Сюда относится также случай, когда исходная вершина — изолированная.

Теория транспортных сетей во многом обязана своим успешным развитием теории чередующихся цепей, так как весьма эффективный алгоритм Форда — Фалкерсона для нахождения наибольшего потока имеет в сущности ту же идейную подоплеку, что и венгерский метод. Для ознакомления с этой теорией мы отсылаем читателя к книге Л. Форда и Д. Фалкерсона (1962, русск. 1966) или же к главе 8 книги К. Берга (1958, русск. 1962) и статье Хоанг Туи (1962). Отме-

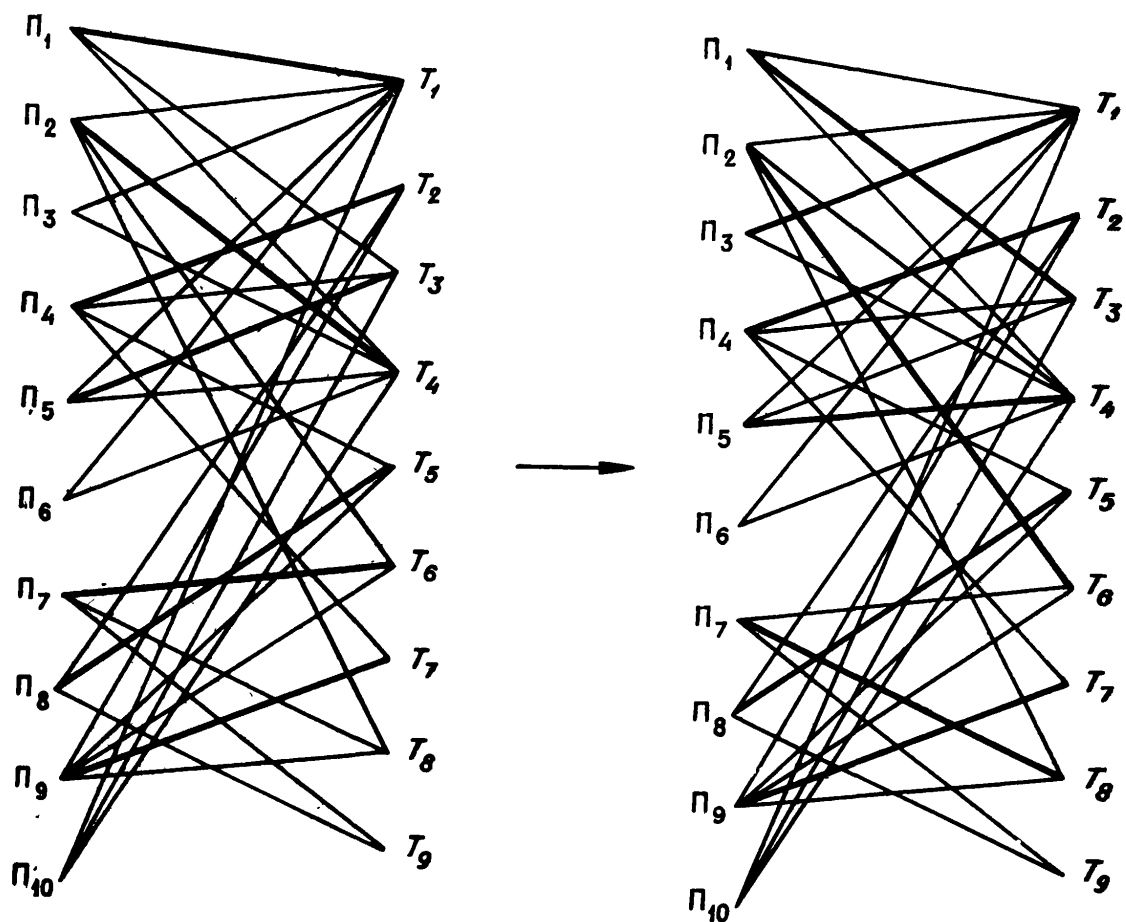


Рис. 226.

тим, что в ряде работ транспортные сети изучаются без помощи графов, в терминах одних только матриц; к чему это может привести, видно на примере двух работ (которые мы здесь не называем, щадя их авторов): в первом случае довольно сложными алгебраическими рассуждениями на четырех страницах доказывается утверждение, равносильное наличию хотя бы двух висячих вершин у нетривиального дерева (см. § 20 в главе 3 нашей книги), во втором случае аналогично замаскированной оказывается теорема о простом цикле, определяемом хордой и каркасом (§ 22). Опираясь на теорию графов, теория транспорт-

ных сетей, в свою очередь, представляет один из эффективных методов теоретического исследования и практического решения сравнительно широкого класса задач на графы — именно в этом плане мы будем рассматривать транспортные сети во второй части книги. Заметим еще, что чередующиеся цепи и транспортные сети широко используются в исследовании операций, математической экономике и при решении многих других комбинаторных задач. Изложению основ теории графов в свете ее экономических приложений посвящена книга Дж. Авондо-Бодино (1960, 1962, русск. 1966); применения к экономике и исследованию операций рассматривают также Б. Руа (2/1964, 3/1964) и другие авторы*. Отдельные задачи теории графов, возникающие в связи с сетевым планированием (система ПЕРТ), решаются, в частности, Дж. Фаулксом (1960) и Л. Я. Лейфманом (1966), а систематическое изложение этих вопросов читатель найдет, например, в книге А. Кофмана и Ж. Дебазеиля (1964).

Теория игр, как и теория транспортных сетей, сильно выгадывает, когда ее построение ведется на основе теории графов. Весьма важная роль принадлежит понятию ядра, точнее, в нашей терминологии, — отрицательного ядра (см. § 33 в главе 4). Многие из игр можно представить в следующей абстрактной форме. Дан граф Бержа $L = (X, \Gamma)$ с выделенным подмножеством $X_0 \subseteq X$ «начальных» вершин. Один из двух игроков (какой именно — обычно определяется жребием) в качестве своего хода выбирает некоторую вершину $x_1 \in X_0$; затем второй игрок делает ход, выбирая вершину $y_1 \in \Gamma x_1$; после этого первый игрок выбирает $x_2 \in \Gamma y_1$; и т. д. Выигрывает тот игрок, который первым сумеет выбрать тупиковую вершину и тем самым лишить противника возможности сделать очередной ход.

Ясно, что если игрок A в какой-то момент игры выбрал вершину некоторого (—)-ядра N , то в дальнейшем он может застраховать себя от проигрыша, ибо его противник B очередным ходом должен выбрать вершину в ΞN , значит вне N (поскольку $\Xi^{-1}N = X \setminus N$), после чего игрок A опять получает возможность выбора в N (так как $\Xi(X \setminus N) = N$), и т. д.; в самом худшем для A случае партия теоретически будет продолжаться без конца, т. е. практически окончится вничью в силу того или иного дополнительного правила игры, исключающего бесконеч-

*) См. еще примеры в главе 8 цитированной книги К. Бержа, а также работу В. Г. Визинга и Г. С. Плесневича (1965). Упомянем еще книгу С. Цоя, Е. И. Рогова и В. Н. Горбенко (1965).

ные продолжения — например, правила 50 ходов или троекратного повторения позиции в шахматах *.

Более подробное изложение теории игр на основе теории графов имеется в главах 5 и 6 книги К. Бержа (1958, русск. 1962) и в добавлении I к этой книге, а отдельные задачи теории графов, возникшие в связи с играми, решаются, например, в работах С. Рудяну (1964), П. КонстантINESКУ, К. Лулеа и С. Никулеску (1964), цитированных нами в § 33.

Графы широко используются в математической лингвистике — см., например, статьи С. Маркуса и Эм. Василиу (1960) **, И. Лесерфа (1961) и К. Чулика (4/1964, 5/1965). О связях теории графов с геометрией мы уже говорили в § 47 (глава 6); отметим, что в упомянутых там работах М. Е. Тылкина (1/1960, 2/1962) реберные остовы n -мерных кубов рассматриваются в связи с задачами теории кодирования, поскольку всевозможные слова длины n , буквами которых служат 0 и 1, находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами единичного куба в n -мерном евклидовом пространстве. Изображая с помощью графов различные типы геометрических связей, встречающихся в машиностроении, Б. С. Мордвинов (1965) предлагает новый способ расчета размерностных цепей, позволяющий конструкторам и технологам избежать сложных логических построений и тем самым значительно упростить проектную инженерную работу. Некоторые преобразования графов, имеющие геометрическое значение, будут рассмотрены во второй части книги. С приложениями графов к теории механизмов можно познакомиться по работе В. П. Черенина (1959), а также заметке Н. Мартинова и Бл. Сендова (1962). Все чаще используются графы в физике и химии: многочисленные результаты, связанные с подсчетом количеств изомеров, кристаллических структур, способов взаимодействия частиц и т. п., основаны на знаменитой теореме Д. Пойя (1937), которую мы будем подробно изучать, вместе с ее дальнейшим развитием, во второй части книги; сейчас упомянем в этом плане лишь работы

*) Строго говоря, шахматы подойдут под сформулированное выше определение игры лишь при условии, если пат расценивать как мат (в шашках это затруднение отсутствует). Однако всё сказанное здесь о роли ядра справедливо и для шахмат, ибо если игрок A будет, начиная с некоторого момента, выбирать вершины только в N , то в патовом положении может очутиться лишь его противник B .

**) Кстати, в этой работе встречается ядро, притом не искусственно определенное, а фактически существующее в графе фоном румынского языка.

Е. А. Смоленского (2/1964), Г. Трента (3/1965) и большую статью П. Кастелена (1967). Запись проблемы изоморфного вхождения (см. § 3 в главе 1) для электронных вычислительных машин (в некоторых конкретных случаях) предпринята В. Б. Борщевым и Ф. З. Рохлиным (1964) в связи с задачей поиска фрагмента в химическом соединении. Отметим несколько подробнее роль графов в вычислительных задачах линейной алгебры.

В начале параграфа шла речь об уравнениях Кирхгофа. Именно то обстоятельство, что требуемая система линейных уравнений характеризует электрическую цепь, структура которой задается графом, позволяет использовать теорию графов для наиболее рационального составления, а возможно и решения этой системы. Однако графы помогают также исследовать и решать линейные системы общего вида, не обязательно имеющие сетевое происхождение. Например, если матрице $A = (a_{ij})$ системы $AX = B$ отнести оргграф L , вершинами которого служат неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n и в котором из x_i в x_j идет дуга тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$, то, как показали Ф. Харари (6/1959) и С. Партер (1/1960, 2/1961), изучение структуры этого графа в случае, когда матрица A имеет много нулей, сильно облегчает практическое решение задач о нахождении неизвестных по методу Гаусса, о нахождении собственных векторов и чисел матрицы A и др. Ф. Харари (7/1962) использует теорию графов для преобразования заданной квадратной матрицы к виду $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ посредством перестановок рядов (см. § 3 в главе 1), а С. Партер и Дж. Юнгс (1962) пользуются графами при симметризации данной матрицы с помощью диагональной. Наконец, если в графе, соответствующем однородной линейной системе, снабдить дуги числовыми значениями элементов матрицы, то такой взвешенный граф будет уже полностью нести информацию о системе, и весь ход решения системы можно представить в виде последовательности преобразований этого графа, сопровождаемых надлежащим пересчетом числовых значений дуг — см., например, работу Э. Я. Хоменко (1965). Несколько более сложным путем П. Е. Краснушкин (1/1965, 2/1966) относит взвешенный граф неоднородной линейной системе, получая тем самым еще один способ решения, особенно удобный для ряда задач сетевой электродинамики.

Систематическое применение теории графов к программированию для вычислительных машин начато работой Р. Карпа (1960), где графы используются для описания блок-схем программ и самих программ и где показы-

вается, в частности, как свойства орграфов помогают обнаруживать ошибки и исключать излишние части в программах. А. П. Ершов (1962) сводит задачу экономии ячеек памяти к нахождению хроматического числа некоторого графа — об этом мы несколько подробнее скажем в дальнейшем. Отметим еще, что работы Я. Я. Дамбита (1/1963) и Г. А. Бекишева (1963), о которых мы говорили в § 33 и § 37 (глава 4), тоже возникли в связи с программированием; так, вторая из этих работ связана с оптимальным распараллеливанием алгоритмов для решения математических задач на вычислительных системах. Упомянем еще работы А. Шурмана (1965) и А. Сальвицкого (1965), посвященные применению теории графов к автоматическому программированию, и остановимся подробно на очень интересной проблеме, поставленной Ю. Г. Решетняком (1962).

Пусть $L = (X, U; P)$ — оргграф без петель и пусть множество его вершин разбито на заданное число k попарно непесекающихся подмножеств

$$X = \bigcup_{i=1}^k X_i, \quad i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset \quad (*)$$

$1 \leq k \leq n \doteq n(L)$, и в X , независимо от этого разбиения, выделено k вершин y_1, y_2, \dots, y_k . Требуется построить в L систему путей Π , обладающую следующими свойствами:

1) для любой выделенной вершины y_i и любой $x \in X_i$ (из множества с тем же номером $i = 1, 2, \dots, k$) существует ровно один путь системы Π , ведущий из y_i в x ;

2) при $i, j = 1, 2, \dots, k$; $i \neq j$ никакой путь системы Π , ведущий из y_i в множество X_i , и никакой путь Π , ведущий из y_j в X_j , не имеют общих дуг.

Конечно, не во всяком оргграфе L построение системы Π возможно при любом k , любом разбиении (*) и любом выборе вершин y_1, y_2, \dots, y_k ($1 \leq k \leq n$): тривиальный пример — пустой граф; напротив, в полном графе Бержа (без петель) такая система, очевидно, всегда существует. Напрашивающийся вопрос об установлении критерия существования в действительности не очень интересен для приложений; чтобы прийти к наиболее важным постановкам, надо рассмотреть конкретный смысл проблемы.

Допустим, что оргграф L изображает систему, где вершинам отвечают различные вычислительные машины, а дугам — направленные каналы связи. Выделенные вершины y_1, y_2, \dots, y_k означают управляющие машины, а X_1, X_2, \dots, X_k — множества соответственно управляемых ими машин. Искомая си-

стема путей Π должна обеспечить одновременную подачу команд с управляющих машин на все управляемые ими, причем так, чтобы команды, посланные разными управляющими машинами, нигде не шли по одному и тому же каналу. При этом сама вычислительная среда, т. е. граф L , считается неизменной, а системы управляющих вершин и управляемых ими подмножеств могут произвольно меняться (в зависимости от той или иной конкретной задачи, решаемой на среде), и в каждом случае надо как можно скорее строить систему Π надлежащим переключением коммутаторов в вершинах графа L . Каждой дуге, заходящей в вершину $x \in X$, отвечает коммутатор на столько положений, какова полустепень исхода $s_L^+(x)$ этой вершины (т. е. количество исходящих из нее дуг). Ясно теперь, что одна из задач состоит в построении при данном n такого орграфа L с $n(L) = n$, который всегда обеспечивает систему путей Π и у которого величина $\max_{x \in X} s_L^+(x)$ — наименьшая возможная; обозначим

$$f(n) \doteq \min_L \max_{x \in X} s_L^+(x),$$

где минимум берется по всем n -вершинным орграфам $L = (X, U; P)$, обладающим требуемым свойством.

Пример полного орграфа Бержа сразу дает грубую верхнюю оценку $f(n) \leq n - 1$. О наличии верхней оценки порядка $2\sqrt{n}$ говорит следующее простое построение: если n — полный квадрат, то в графе Бержа $L = (X, U)$ без петель, с

$$X \doteq \{x_{ij}/i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$$

и

$$U \doteq \{\overrightarrow{x_{ij} x_{ik}}, \overrightarrow{x_{ji} x_{ki}}/i, j, k = 1, 2, \dots, \sqrt{n}; j \neq k\}$$

система Π существует при любом разбиении (*) и любом выборе управляющих вершин. Не доказана и не опровергнута пока гипотеза Ю. Г. Решетняка о том, что в орграфе, полученном из реберного остова n -мерного куба заменой каждого ребра парой противоположно направленных дуг, тоже всегда существует система путей Π ; из справедливости этой гипотезы вытекает наличие для $f(n)$ верхней оценки порядка $\log_2 n$, которую уже едва ли можно существенно понизить.

Разумеется, возможны и другие постановки; так, не лишена интереса задача о минимизации количества дуг в орграфе с за-

данным числом n вершин, допускающем систему путей Π во всех случаях. Можно для начала ограничиться в обеих задачах частным случаем когда $k = n$ (все вершины — управляющие) и, следовательно, $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_n| = 1$. Имеет смысл изучить аналогичные задачи для неориентированных графов (ненаправленные каналы связи).

Не только в геометрии, но и в других классических областях математики графы фигурируют все чаще. Так, систематическое развитие идей теории графов применительно к теоретико-множественной топологии начато книгой Б. Линфилда (1925), а ряд результатов в этом направлении, касающихся покрытий тора и других компактов системами замкнутых множеств, получен Л. М. Лихтенбаумом (1/1936, 2/1948, 3/1948); естественно, в комбинаторной топологии графы стали использоваться еще раньше. О связи между графами и различными алгебраическими системами, тем самым и общей алгеброй, уже говорилось в § 39 (глава 5) и § 45 (глава 6).

Наш далеко не полный обзор* продолжим теперь в несколько ином плане: называя отдельные вопросы теории графов, будем указывать некоторые их приложения, главным образом в областях, не упомянутых нами до сих пор. Многочисленные же примеры, когда графы привлекаются лишь для наглядного изображения, без существенных ссылок на теорию, мы не станем рассматривать по той же причине, по какой не стали бы говорить о нумерации домов на улице как об одном из приложений теории чисел.

Начнем с того, что теория паросочетаний в графе Кёнига (см. § 6 в главе 1) находит применение в математических вопросах, не только близких к теории графов (как уже рассмотренная задача о назначениях), но и далеких от нее: например, теорема Кёнига — Холла используется при доказательстве важной теоремы о среднем значении в теории почти-периодических функций**.

Понятия отделимости и соединимости, отрезаемости и сплетаемости вершин играют важную роль при проектировании различных сетей коммуникаций (а также при разрушении этих сетей, т. е. в военном деле): степень надежности связи между пунктами x и y характеризуется

*) Укажем еще обзоры Ж. Риге (1954) и А. Кофмана (1964), а также популярную книгу О. Оре (6/1963, русск. 1965).

**) См. Б. М. Левитан, Почти-периодические функции (М., ГТТИ, 1953, глава 6, § 2); заметим, что вместо первоисточников там указана гораздо более поздняя работа 1950 г., в которой теорема Кёнига — Холла передоказана другими авторами.

наименьшим числом промежуточных пунктов или линий, выход из строя которых приводит к отделению x от y . Если, например, по смыслу конкретной задачи надежность сети выражается в ее k -сплетенности (с заданным k) и если уже есть предварительный грубый проект сети, с избытком гарантирующий ее k -сплетенность, то выбор наиболее экономного варианта приводит к задаче нахождения (и сравнения по каким-то признакам) основ k -го порядка (см. § 16 в главе 2) в графе, изображающем «избыточный» проект. Отметим еще одно возможное приложение.

Допустим, что найдено достаточно большое количество текстов, написанных иероглифами или словами неизвестного языка. Не имея словаря, можно пытаться расшифровать тексты путем машинного перебора различных вариантов идентификации иероглифов с известными понятиями той области, к которой, вероятнее всего, относятся исследуемые тексты; производя такой перебор, мы должны руководствоваться каким-то критерием, позволяющим предпочитать один вариант другому. Если о значении (в предполагаемой области) того или иного отдельного иероглифа нам совсем ничего не известно, то отправным пунктом исследования может служить математическая структура системы отношений, определенных на множестве данных иероглифов и характеризующих частоту их появления в одном и том же тексте, частоты различных случаев взаимного расположения и т. п. Строя аналогичную структуру какого-нибудь известного языка, мы в идеальном (но, увы, практически нереальном) случае должны были бы получить две изоморфные структуры с единственным вариантом изоморфизма. В действительности приходится рассматривать лишь незначительную часть отношений, притом наиболее простых, а вместо изоморфизма довольствоваться минимизацией числа «несовпадений» (в том или ином конкретном смысле) при различных соответствиях между множествами элементов. Одной из грубых характеристик неизвестного языка является неориентированный граф, вершинами которого служат иероглифы, причем каждая пара соединена таким количеством ребер, в скольких различных текстах эти два иероглифа встречаются вместе. Оставляя в стороне вопрос о том, как подбирать тексты известного языка для построения аналогичного графа, заметим лишь, что оба графа окажутся, вообще говоря, слишком сложными, и о полном переборе (даже на самых быстродействующих машинах) всех вариантов соответствия вершин нельзя будет и мечтать. Поэтому надо пытаться сравнивать не графы целиком, а некоторые их подграфы, представляющие собой как бы сгустки из наиболее тесно связанных друг с другом вершин.

В качестве характеристики «тесноты связи» вершин можно рекомендовать отношение k -сплетаемости (совпадающее, в силу теоремы Коцига, с отношением $(k - 1)$ -неотрезаемости), поскольку оно представляет собой эквивалентность*, а также зависит от параметра k ; так как $(k + 1)$ -сплетаемость двух вершин влечет их k -сплетаемость, то увеличение k приводит к дроблению классов эквивалентности на более мелкие, и где-то в промежутке между крайними значениями $k = 0$ (единственный класс) и таким k , для которого наступает предел дробления (столько классов, сколько вершин), вполне может найтись число k_0 , дающее наиболее удобную в данной конкретной задаче степень дробления. К сожалению, задача выделения классов эквивалентности для отношения k -сплетаемости, как и равносильная задача нахождения наибольшего k для каждой из пар вершин, не имеет пока практически эффективного решения (за исключением случаев $k=0,1$ и достаточно больших k).

Отметим еще, что понятия соединимости и т. д., а также блока, точки сочленения и другие, связанные с ними, играют важную роль в социологии**. Там же и во многих других областях, перечислить которые мы не в силах, широко используется метрика графа (см. § 17 в главе 2); в частности, алгоритмы поиска кратчайших цепей (§ 11) применяются В. А. Тюренок-вым (2/1965) для построения кратчайших соединений на плате печатного монтажа. Целый ряд задач математической экономики, теории расписаний, исследования операций, программирования и др. может быть сформулирован в виде ставшей уже классической задачи о бродячем торговце (коммивояжере)***, которая является обобщением задачи нахождения гамильтонова цикла (см. § 18) и состоит в следующем.

Пусть каждому ребру $u \in U$ обыкновенного графа $L = (X, U)$ отнесена длина — вещественное число $\rho(u) > 0$; требуется найти в L циклический маршрут, содержащий все вершины X и такой, чтобы сумма длин ребер этого маршрута (считая

*) В отличие, например, от k -соединимости.

**) См., например, статью Ф. Харари (4/1959).

***) Постановка принадлежит Дж. Краскалу (1956). Пример из области программирования для вычислительных машин читатель найдет хотя бы в конце статьи Р. Карпа (1960), а некоторые другие примеры у У. Хардгрэйва и Г. Немхаузера (1962). Первоначальный малоэффективный способ решения задачи с помощью целочисленного программирования (Гомори и др.) был значительно улучшен В. И. Мудровым (1963), а Дж. Литл, К. Мёрти, Д. Суини и К. Карел (1963) предложили новый эффективный алгоритм.

каждое ребро столько раз, сколько оно фигурирует в маршруте) была наименьшей. Гамильтоновы циклы (если они есть) соответствуют случаю $\rho(u) \equiv 1$, и хотя это весьма частный случай, он, как показывают многочисленные попытки решения, не проще общего, т. е. концентрирует в себе все его принципиальные трудности. О самих гамильтоновых циклах и цепях можно прочитать более подробно в книгах К. Бержа (1/1958, русск. 1962) и О. Оре (4/1962, русск. 1968; 6/1963, русск. 1965); там же говорится и о некоторых приложениях эйлеровых цепей и циклов.

Деревья играют весьма важную роль в самой теории графов хотя бы уже потому, что каркас связного графа есть дерево (см. § 22 в главе 3); результат Е. А. Смоленского (1/1962), изложенный нами в § 21, был получен в связи с задачей о кодировании графов общего вида. Из внешних областей применения деревьев отметим проблему организации информационного поиска, различные схемы разборки или комплектования сложных объектов, описания логических возможностей и т. д.; широко используются деревья в теории автоматов.

О значении цикломатических свойств графов мы уже говорили достаточно много; добавим лишь, что одно из решений задачи восстановления графа по его цикломатической матрице (см. § 27) было получено Л. Лёфгреном (1959, русск. 1962) не чисто абстрактно, а в связи с проблемой реализации булевых функций схемами, и что одной из многих областей, где важно уметь выявлять различные каркасы данного графа, является сетевая гидродинамика — см. работы В. Я. Хасилева (1/1964, 2/1966) *.

Одной из многих областей применения ориентированных графов является социология: так, с помощью дуги $\vec{x}y$ можно изобразить отношение «кандидат y пользуется поддержкой избирателя x » или отношение «лицо y находится в зависимости от лица x » и т. п. **. Близки к этому вопросы наиболее точной оценки результатов спортивных соревнований; о некоторых приложениях орграфов, в частности гамильтоновых путей и орциклов, в этом плане можно прочесть у К. Бержа (2/1958, русск. 1962, главы 11 и 14) и у О. Оре (6/1963, русск. 1965). Рассмотрим одну задачу, возникшую в связи с избирательной проблемой.

*) Некоторые другие приложения задач о выявлении и подсчете каркасов приводятся А. К. Кельмансом (1966).

***) См. уже упомянутую статью Ф. Харари (4/1959).

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество кандидатов, баллотирующихся в некоторый орган, а Y — множество избирателей. Будем считать избирателя столь осведомленным и принципиальным, что он однозначно определяет для себя порядок предпочтения одних кандидатов другим; тогда каждому элементу из Y однозначно соответствует некоторая перестановка элементов множества X . Построим теперь «граф предпочтений», т. е. обыкновенный оргграф $L = (X, U)$, в котором из x_i в x_j идет дуга тогда и только тогда, когда большинство избирателей предпочитает кандидата x_j кандидату x_i , иными словами, когда более чем половине элементов множества Y отвечают такие перестановки элементов X , в которых x_j предшествует x_i . Спрашивается, при каком наименьшем количестве избирателей может осуществиться любая картина предпочтений, т. е. каково наименьшее число $p(n)$ такое, что любой n -вершинный обыкновенный оргграф $L = (X, U)$ можно представить как граф предпочтений при подходяще выбранном множестве Y с $|Y| \leq p(n)$? Д. Мак-Гарвей (1953), сформулировавший проблему нахождения $p(n)$, указал очевидную верхнюю оценку $p(n) \leq n(n-1)$, затем Р. Стернс (1959) улучшил эту оценку: $p(n) < n+2$ и вывел оценку снизу $p(n) > \frac{0,55n}{\ln n}$, а П. Эрдеш и А. Мозер (1964) установили наличие верхней оценки вида $p(n) \leq \frac{Cn}{\ln n}$, где $C = \text{const}$.

Кстати, для реального избирателя $y \in Y$ его схема предпочтения одних кандидатур другим далеко не всегда сводится к линейному упорядочению множества X и в общем случае может быть выражена некоторым обыкновенным оргграфом $L_y = (X, U_y)$, который не обязательно будет полным и транзитивным. В случае, когда граф L_y — полный, но не транзитивный, имеет смысл рассмотреть отношение количества ориентированных треугольников (простых орициклов длины 3, считаемых с точностью до выбора начальной вершины) в L_y к наибольшему числу $\vec{c}_3(n)$ ориентированных треугольников, вообще возможных в полном обыкновенном n -вершинном оргграфе \vec{F}_n (см. § 32); это отношение характеризует, очевидно, степень «беспринципности» (или неосведомленности) избирателя y на данных выборах. Аналогичная характеристика применяется в биометрии*, где обыкновенные оргграфы тоже играют важную роль.

*) Один из примеров приведен в книге К. Бержа (2/1958, русск. 1962, глава 14, Задача 1); там же указана литература по относящимся сюда вопросам.

Остановимся подробнее на базах вершин и дуг орграфа (см. § 33 и § 34); оба эти понятия были введены П. Герцем (1922) с целью исследования схем логического построения дедуктивных теорий.

На первый взгляд база вершин (графа Бержа без петель) — это полная независимая система аксиом, если вершинами графа изображать истинные утверждения некоторой теории, а дугой \rightarrow xu — возможность чисто логического вывода утверждения y из x ; тогда построение базы дуг означало бы ликвидацию излишних рассуждений. Однако в действительности дело обстоит сложнее. Так, в одном случае теорема t может быть выведена только из x или только из y , а в другом случае вывод t требует одновременного использования x и y ; возможны и более запутанные ситуации, вроде такой: теорема t выводится или из x , или из y вместе с z . Схема П. Герца не отражает этих возможностей, и поэтому понятия баз вершин и дуг не сыграли до сих пор заметной роли в вопросах аксиоматики; однако следующее обобщение задач о нахождении и обзоре баз, видимо, поможет приблизиться к упомянутым вопросам.

Предположим, что в графе Бержа $L = (X, U)$ без петель все вершины распределены по четырем классам с помощью следующих двух признаков: каждая вершина может быть, во-первых, конъюнктивной или дизъюнктивной, а во-вторых, основной или вспомогательной. Введем операции:

- 1) удаление дуг — с условием, что все дуги, заходящие в конъюнктивную вершину, должны быть сохранены, а из дуг, заходящих в дизъюнктивную вершину, сохранена хотя бы одна;
- 2) удаление вспомогательной вершины, если она — тупиковая.

Всякую часть, полученную из L с помощью операций типа 1) и 2) и такую, что к ней уже ни одна из этих операций неприменима, назовем базой графа L . Проблема состоит в нахождении и полном обзоре всех баз заданного графа с заданной классификацией вершин (более частный вопрос: найти какую-нибудь из баз).

Как понимать решение задачи о полном обзоре? Мы не в силах пока дать точную формулировку, однако трудно не согласиться с тем, что для случая баз вершин теорема 1 в § 33 (глава 4) представляет идеальное решение. К сожалению, уже для баз дуг (§ 34) такого же рода решение невозможно, а именно нельзя указать систему непересекающихся подмножеств дуг, порождающих все базы при всевозможных выборах по одной дуге из каждого подмножества — это сразу следует из того,

что две базы дуг одного графа могут иметь разное число дуг; как показал Х. Ураков (1968), не всегда есть и система пересекающихся подмножеств. Решение задачи о полном обзоре баз дуг способствовало бы решению нашей обобщенной задачи, а последняя уже вполне применима к дедуктивным теориям и некоторым практическим вопросам. Один из таких вопросов (поставленный в Институте кибернетики АН УзССР) состоит в ликвидации излишних каналов информации в учреждениях, без ущерба для самой информации; правда, здесь учитываются и такие факторы, как время прохождения информации, затраты на ее передачу и т. д., но ведь прежде чем сравнивать базы по каким-либо признакам, пусть даже выходящим за рамки чистой теории графов, надо иметь систематический обзор всех баз.

Задачи выявления и ликвидации орциклов в данном графе важны хотя бы уже потому, что в правильно составленной схеме программы, управления, сетевого графика работ и т. п. не должно быть зацикливаний. Вопрос о том, каким способом ликвидировать незаконно появившиеся орциклы: путем удаления или переориентации некоторых дуг, или же более радикальной переделкой графа — зависит от смысла конкретной задачи, однако методы ликвидации (см. § 38) неизбежно связаны с задачей выявления орциклов; добавим еще, что алгоритм Лейфмана для выделения бикомпонент (см. § 32) был найден прежде всего с целью облегчить поиски орциклов и что операция стягивания простого орцикла, примененная М. К. Гольдбергом (1/1965) для вывода верхней оценки мощности базы дуг (см. теорему 4 в § 34), тоже может оказаться полезной при этих поисках.

Группа автоморфизмов графа (см. § 39 в главе 5) выражает в общем виде свойства его симметрии и поэтому играет важную роль в приложениях теории графов к анализу и подсчету различных кристаллических структур, молекул сложных химических соединений, логических схем и т. д. * Напротив, подгруппа эндоморфизмов графа интересна пока главным образом как один из этапов исследования общетеоретического вопроса о взаимосвязи комбинаторных объектов с алгебраическими системами преобразований этих объектов.

Многочисленные применения имеют задачи о нахождении или возможно более точной оценке хроматического числа (см. § 40—42 в главе 6) данного графа, а также о по-

*) В частности, группа автоморфизмов фигурирует в ряде задач на подсчет количества неизоморфных графов того или иного вида, решаемых с помощью теоремы Пойя (см. вторую часть нашей книги).

строении его раскраски вершин, минимальной или не намного отличающейся (по количеству цветов) от минимальной. Остановимся лишь на некоторых примерах.

Пусть составлена программа для вычислительной машины. Вполне может оказаться, что среди ячеек памяти, фигурирующих в этой программе, имеются две, в которых никогда не хранится одновременно разная информация, — тогда, очевидно, такую пару можно заменить одной ячейкой. Обозначим через L обыкновенный граф, вершинами которого служат все первоначально предусмотренные в программе ячейки, причем две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующую пару ячеек нельзя заменить одной. Ясно, что наименьшее количество ячеек, фактически необходимое для осуществления программы на машине, равно хроматическому числу $\chi(L)$. Это приложение указано А. П. Ершовым (1962); сам пример дан нами в несколько упрощенном виде.

В процессе монтажа сложной радиотелефонной аппаратуры часто группу проводников, уже припаянных одним концом к близко расположенным контактам, сплетают в жгут и, чтобы не перепутать места припайки вторых концов, окрашивают проводники в различные цвета. Если L — обыкновенный граф, вершинами которого служат всевозможные проводники схемы, и двум проводникам, где-либо находящимся в одном жгуте, отвечают смежные вершины, то наименьшее необходимое количество цветов равно $\chi(L)$. Именно такого рода задача вызвала к жизни практический способ раскраски (см. конец § 42 в главе 5), который применяют Э. Я. Гринберг и И. Г. Илзиня (1964); заметим, кстати, что упомянутые в § 42 числовые примеры из статьи И. Г. Илзини (1965) относятся не к специально подобранным графам, а к конкретным графам монтажных плат, рассчитываемых по заданию предприятий радиотелефонной аппаратуры.

О больших возможностях применения хроматического числа в социологии достаточно красноречиво говорит сам его смысл: это наименьшее количество групп, в которые можно распределить данное множество лиц, когда известно, какие пары лиц не должны находиться вместе в одной группе.

Задача о раскраске ребер (см. § 44) первоначально возникала для графов частного вида в связи с проблемой четырех красок (см., например, теоремы Тэйта и Петерсена в § 48 главы 6), но затем возродилась, притом в общем виде, и как чисто прикладная. Именно, К. Шеннон (1949) указывает естественное применение — к раскраске проводников электрической схемы наименьшим числом цветов с условием, чтобы никакие

два проводника, припаянные к одному и тому же контакту, не оказались одного и того же цвета. В отличие от рассмотренной выше задачи, где проводники объединялись в жгуты, здесь выгодно вершинами графа считать контакты, а не проводники, поскольку в отношении раскраски ребер известны более эффективные теоретические исследования и практические алгоритмы, чем в отношении раскраски вершин. Особо важная в практике роль оценки $\chi(L) \leq \sigma(L) + 1$ для обыкновенных графов L , данной В. Г. Визингом (1/1964, 2/1964, 3/1964), состоит в том, что если по каким-либо техническим соображениям пара контактов может соединяться более чем одним проводником, то все эти проводники не опасно окрасить в один цвет, т. е. фактически здесь мы имеем дело с раскраской ребер обыкновенного графа. А вот пример другого применения: пусть проводится турнир, в котором не обязательно каждый участник должен сыграть со всеми остальными, и кому с кем надлежит встречаться — задано в виде графа; в какое наименьшее число туров можно провести весь турнир и как составить расписание игр? Ясно также, что раскраска ребер должна играть важную роль при нахождении паросочетаний в заданном графе — об этом мы еще скажем во второй части книги. Наконец, В. Г. Визинг в кандидатской диссертации приводит следующий пример: если граф L изображает сеть линий прямой связи между пунктами и для проверки исправности каждой линии требуется одно и то же время t , причем проверка линии производится сразу из обоих концов, а каждый пункт одновременно может быть занят проверкой не более чем одной линии, то наименьшее время проверки всей сети равно $t \cdot \chi(L)$.

П р е д с т а в л е н и я графов (см. главу 6) в виде тех или иных математических объектов сами по себе можно рассматривать как приложения графов к соответствующим областям математики; мы уже немало говорили на эту тему, поэтому упомянем лишь о нескольких нематематических приложениях, а также об одном неожиданном математическом.

Работа Ц. Леккеркеркера и Й. Боланда (1962), посвященная характеристике графов интервалов (см. § 45), возникла в связи с генетикой, поскольку системы различных признаков организма, передающихся по наследству, определяются генами, а последние расположены в хромосомах линейно. Что касается работ Д. Хайоша (1957), А. Хайнала и Я. Шураньи (1958), И. Уулка (1962) и некоторых других, то там графы интервалов нужны для перевода проблемы Суслина из дескриптивной теории множеств на язык чистой теории графов, правда бесконечных; этот весьма интересный вопрос мы рассмотрим во

второй части книги, где, несмотря на заглавие, собираемся совершить небольшую экскурсию в область бесконечных графов.

Вопрос о возможности плоского представления графов приобрел за последнее время важное практическое значение в связи с техникой печатного монтажа: если проводники схемы представляют собой канавки, вытравленные на плоской панели и затем залитые металлом, то соответствующий граф должен быть плоским, иначе могут возникнуть лишние электрические соединения; в случае неплоского графа либо прибегают к дополнительным проводникам вне плоскости, и тогда надо минимизировать их число (т. е. найти наименьшее количество ребер, удаление которых делает граф плоским), либо располагают схему в нескольких параллельных плоскостях, и в этом случае следует минимизировать число плоскостей, т. е. определить *толщину графа*. Заметим еще, что теория плоских графов играет существенную роль в исследованиях А. В. Кузнецовым (1/1958, 2/1958) возможности реализации булевых функций бесповторными контактными схемами.

Проблема четырех красок (§ 48) сама по себе едва ли имеет какие-либо важные приложения; во всяком случае, вопрос о ее актуальности для раскраски географических карт может вызвать только добродушную улыбку. Однако эта проблема сыграла выдающуюся роль в развитии всей теории графов, попытки ее решения привели, в частности, к продвижению двух направлений: чисто комбинаторной характеристики плоских графов и изучения хроматических свойств графов общего вида, — каждое из которых, как мы уже видели, имеет непосредственные применения и в теоретической математике, и в практике.

Мы уже встречались с примерами *взвешенных графов*, т. е. таких их обобщений, которые, строго говоря, являются уже не графами, а функциями, заданными на элементах графа; таковы, в частности, электрические цепи, логические и транспортные сети, графы с приписанными длинами ребер и т. д. Полное рассмотрение таких обобщенных графов, когда вершинам и ребрам обычного графа могут быть отнесены элементы любой природы, выходит за рамки теории графов как таковой и в объеме одной книги немыслимо*. Однако стоит сказать

*) Две различные попытки начать такое исследование предприняты Ф. Хоном, С. Сешу и Д. Ауфенкампом (1957) и А. А. Зыковым (2/1957).

о некоторых случаях обобщения, когда применимы результаты и методы чистой теории графов.

Неудивительно, что теория транспортных сетей в самой своей сущности имеет много общего с теорией графов: если пропускная способность дуги \overrightarrow{xy} выражена целым неотрицательным числом $c(\overrightarrow{xy})$, то вместо каждой такой взвешенной дуги можно провести из x в y ровно $c(\overrightarrow{xy})$ обычных дуг, а каждый поток по сети рассматривать как совокупность единичных потоков, т. е. путей, попарно без общих дуг, ведущих из входной вершины x_0 в выходную вершину z ; точно так же ребро графа, обладающее целой положительной длиной l , можно заменить цепочкой из l последовательных ребер, уже не взвешенных. И хотя на практике подобные замены не всегда целесообразны, все равно идеи теории графов дают себя знать при рассуждениях с обобщенными графами указанных типов. В качестве примера можно назвать решение Дж. Краскалом (1956) задачи о нахождении каркаса с наименьшей суммой длин ребер в заданном неориентированном графе, ребрам которого приписаны длины*. Отметим также явную идейную близость работ С. Хакими и С. Йоу (1965) и Ж. Симонеса Перейры (1967), посвященных реализации заданной матрицы расстояний, с работами Е. А. Смоленского (1/1962), Э. Д. Стоцкого (1964) и К. А. Зарецкого (1/1965)**.

Одним из важных обобщений взвешенного графа является вероятностная сеть — граф (скажем, обыкновенный), каждому ребру которого отнесена вероятность его фактического наличия в графе. Требуется, например, найти такую цепь между двумя заданными вершинами x и y , вероятность сохранения которой — наибольшая (т. е. которая осуществляет между x и y связь с наименьшей вероятностью выхода из строя); эта задача, значение которой для теории надежности очевидно, в случае неориентированных графов решается О. Уингом (1961), а в случае орграфов — Ю. Фу (1965); укажем еще работу П. Нарахари (2/1962). Для построения сетей передачи информации, оптимальных по надежности, А. К. Кельманс и А. Г. Мамиконов (1964) используют алгоритм нахождения кратчайшей цепи (см. § 11 в главе 2) и кратчайшего пути (см. § 28 в главе 4).

*) См. К. Берж (1/1958, русск. 1962, глава 16); упомянем также работу П. Нарахари (1/1962).

***) Графы (неориентированные и ориентированные) с приписанными длинами ребер рассматриваются также в работах Ф. Я. Ветухновского (1/1964, 2/1964).

К обобщенным графам относятся и обычные графы с заданной раскраской вершин* или ребер, графы с выделенными k вершинами (k -полюсники) или вообще с выделенной системой некоторых своих частей. Мы закончим этот параграф кратким обзором еще более радикальных обобщений.

Пусть в конечном множестве X выделена некоторая система его подмножеств, имеющих одинаковое число k элементов. При $k = 2$ получаем обыкновенный граф, однако и в случае $k > 2$ к указанным обобщенным графам (комплексам) применимы некоторые методы теории графов. Так, Д. Рэй-Чоудхури (1963) вводит для комплексов понятия покрытия, минимального покрытия и др., аналогичные введенным у нас в § 10 (глава 1), и находит минимальные покрытия с помощью алгоритма, близкого к алгоритму выявления наибольшего паросочетания (см. К. Берж, 1/1958, русск. 1962, главы 10 и 18, а также вторую часть нашей книги). Б. Боллобаш (1965) исследует критические (в некотором смысле) комплексы с выделенными системами k -элементных подмножеств. Наконец, можно выделять в X и подмножества с разными количествами элементов — такими обобщениями графов являются, например, топологические комплексы, которые в топологии фигурируют в основном как средство исследования более сложных объектов и поэтому недостаточно изучались сами по себе. Причина близости комбинаторной теории топологических комплексов к теории графов особенно ясна из сказанного в конце § 47, а среди работ, подтверждающих эту близость, отметим исследование плоских и сферических двумерных комплексов, проведенное Р. Галином и Г. Юнгом (2/1964).

Такие обобщения графов, когда ребро не обязательно соединяет какие-то вершины, т. е. когда условие Б в определении графа (см. § 1 в главе 1) заменено более слабым

$$B'. \quad \forall u \in U \forall x, y, x', y' \in X [P(x, u, y) \& \\ \& P(x', u, y') \Rightarrow (x = x' \& y = y') \vee (x = y' \& y = x')],$$

в комбинаторных (а не теоретико-множественных) исследованиях играют весьма незначительную роль. Так, сравнивая доказательства теоремы Лантьери — Трента, приведенные у К. Бержа (1/1958, русск. 1962, глава 16, теорема 6) и у нас (§ 26 в главе 3), читатель может убедиться в том, что отсутствие понятия конфигурации (допускающего ребра без одной или

*) См., например, К. Чулик (1/1957).

без обеих концевых вершин) не делает наше доказательство более сложным.

Вообще, всякую систему, состоящую из каких-то объектов и каких-то их взаимосвязей, при желании можно считать обобщенным графом; некоторым системам такого рода, встречающимся в практике и исследуемым с помощью графов, посвящена работа Н. Линда (1962).

§ 50. Дальнейшие перспективы

Познакомившись на протяжении 49 параграфов с классическими результатами, полученными в основном при помощи сочетания скучных переборов с остроумными догадками, посмотрим теперь бегло, чего следует ожидать от дальнейшего развития теории графов, уже в духе современной математики, и какие методы и направления представляются наиболее перспективными. Для этого надо будет напомнить основные черты логического понятия алгоритма.

Пусть $\mathfrak{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ — ряд целых неотрицательных чисел, который мы для краткости будем называть *числовым рядом**; ограничимся здесь рассмотрением таких функций $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, которые определены на любых системах значений аргументов из \mathfrak{N} и принимают значения также в \mathfrak{N} . Интуитивное понятие вычислимой функции f состоит в следующем: можно построить такую машину дискретного действия (или написать соответствующую систему правил), которая для любой системы чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 \in \mathfrak{N}$ через конечное число тактов работы (применений правил) выдает значение $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$; при этом конструкция машины (система правил) зависит только от вида функции f , но не от задаваемых значений аргументов. Говоря о возможности построить машину, мы здесь, конечно, отвлекаемся от таких технических препятствий, как ограничение объема памяти или продолжительности вычислений; более того, заранее не предполагается, что для заданной системы $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$ можно указать хотя бы грубую верхнюю оценку числа шагов вычисления $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$. Математическим понятием, адекватным интуитивному понятию вычислимости, служит рекурсивность; строго формальное определение *рекурсивной функции***

*) В математической логике принято называть \mathfrak{N} натуральным рядом, причисляя таким образом число 0 к натуральным числам.

**) См., например, А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции (М., «Наука», 1965) или С. Клини, Введение в метаматематику (М., ИЛ, 1957).

не требуется на нашем уровне описания алгоритма, и можно довольствоваться приведенным выше содержательным толкованием.

Проблема отыскания алгоритма ставится для массовых проблем, которые можно представить в виде бесконечной (счетной) последовательности вопросов, допускающих ответы только «да» или «нет». Так, гипотеза четырех красок, проблемы Ферма и Римана и т. п. не являются алгоритмическими; напротив, проблемы нахождения общего способа, позволяющего для любых двух графов узнавать, изоморфны ли они (§ 3), или узнавать, являются ли они комбинаторно гомеоморфными как многомерные топологические комплексы (см. конец § 47), суть алгоритмические проблемы. Простейшая массовая проблема состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ — некоторое подмножество числового ряда, являющееся множеством всех значений какой-то рекурсивной функции $y = f(x)$ — такие множества называются *рекурсивно перечислимыми*; требуется дать общий способ, позволяющий для любого $y \in \mathfrak{N}$ выяснить, имеет ли место $y \in \mathfrak{M}$. Говорят, что *алгоритм проверки истинности высказывания $y \in \mathfrak{M}$ существует в том и только том случае, когда рекурсивно перечислимым является не только само множество \mathfrak{M} , но и его дополнение $\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{M}$* . Нижеследующие соображения покажут, сколь естественно такое определение.

Допустим сначала, что множество $\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{M}$ не является множеством значений никакой рекурсивной функции. Тогда, желая для конкретного числа $y_0 \in \mathfrak{N}$ узнать, принадлежит ли оно множеству \mathfrak{M} , мы вынуждены поступать следующим образом: задавая последовательные значения $x = 0, 1, 2, \dots$ и вычисляя соответствующие значения $f(0), f(1), f(2), \dots$, сравниваем каждое из этих последних с y_0 . Если $y_0 \in \mathfrak{M}$, то при каком-то x_0 мы получим $f(x_0) = y_0$, т. е. факт принадлежности y_0 к \mathfrak{M} выяснится через конечное число шагов; но если $y_0 \notin \mathfrak{M}$, то процесс будет продолжаться без конца, и ни на каком этапе не станет ясным, действительно ли $y_0 \notin \mathfrak{M}$ или же все-таки $y_0 \in \mathfrak{M}$, но мы просто не успели еще дойти до соответствующего значения аргумента функции f . Теперь рассмотрим случай, когда, наряду с f , существует рекурсивная функция φ , множеством значений которой служит $\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{M}$; образуя последовательно числа $f(0), \varphi(0), f(1), \varphi(1), f(2), \varphi(2), \dots$ и сравнивая их каждый раз с y_0 , мы рано или поздно (т. е. через конечное число шагов, хотя и неизвестно заранее, какое именно) получим либо равенство вида $f(x_0) = y_0$, либо равенство вида $\varphi(x'_0) = y_0$ и в соответствии с этим сделаем одно из двух заключений $y_0 \in \mathfrak{M}$ или $y_0 \notin \mathfrak{M}$. Очевидно, следует считать, что для массовой проб-

лемы $y_0 \in \mathfrak{M}$ алгоритм не существует в первом случае и существует во втором (существует, разумеется, теоретически, поскольку практически он может оказаться неэффективным, если число шагов, необходимое для получения какого-либо из равенств $f(x_0) = y_0$, $\varphi(x'_0) = y_0$, слишком велико, — тем более что это число не предполагается известным).

Чтобы применять понятие алгоритма не только к числам, но и к объектам другой природы, таким как системы чисел, формулы, графы и т. д., можно воспользоваться нумерациями гёделевского типа *. Считая, что для исследуемого класса объектов дан эффективный способ нахождения номера (элемента \mathfrak{M}) любого объекта и, наоборот, нахождения объекта (или установления его несуществования) по данному номеру, мы можем употреблять термины «рекурсивно перечислимое множество» и «алгоритм» по отношению к самим объектам, а не только их номерам.

При размышлении об общих методах в теории графов невольно возникает вопрос: нельзя ли в один прекрасный момент лишить графы раз и навсегда их теоретического интереса, построив такой мощный алгоритм, который позволял бы устанавливать истинность или ложность любого высказывания о графах? Отрицательный ответ, интуитивно довольно-таки очевидный, строго вытекает из следующего результата И. А. Лаврова (1963): если к узкому исчислению предикатов добавить индивидуальный предикат $J(x, y)$, подчиненный аксиомам рефлексивности и симметрии (т. е. отношение смежности вершин обыкновенного графа), то в полученной теории множество \mathfrak{A} всех истинных формул рекурсивно неотделимо от множества \mathfrak{F} всех конечно опровержимых формул, т. е. не существует такого рекурсивно перечислимого множества формул \mathfrak{F} с рекурсивно перечислимым дополнением $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{C}$ до множества \mathfrak{B} всех формул рассматриваемой теории, чтобы было $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{C}$. Разумеется, теория, состоящая из формул \mathfrak{C} , далеко не охватывает всей теории графов: так, с помощью формул \mathfrak{F} нельзя записать утверждения более чем об одном графе, а в случае одного графа с неизвестным количеством вершин нельзя записать, например, высказывания о наличии цепи, соединяющей две данные вершины, ибо, не зная заранее верхней оценки длины этой цепи, мы вынуждены были бы употребить бесконечное множество предметных переменных и кванторов. Но рассуждениями, относя-

*) См., например, упомянутые выше книги А. И. Мальцева и С. Клини.

щимися к теории моделей, можно показать, что если столь бедная часть теории графов, как только что рассмотренная, и то уже алгоритмически неразрешима, то это тем более имеет место и для всей теории графов в полном объеме.

Несуществование единого алгоритма для всей теории графов делает особо важной проблему поиска таких алгоритмов для возможно более широких частных классов графов, а также поиска алгоритмов, призванных решать в отношении графов не любые, но лишь некоторые вопросы. Кроме теории алгоритмов, графы нуждаются в помощи со стороны другого направления математической логики, именно теории доказательств. анализ исследований по проблеме четырех красок и другим особо трудным единичным проблемам говорит о желательности создания некой метатеории конечных графов*, которая изучала бы ее основания, аксиоматику и подходила с позиций математической логики к выяснению причин трудностей. Как нам кажется, проблема Келли (см. § 8 в главе 1 и § 12 в главе 2) не лишена философского интереса, поскольку ее отрицательное решение означало бы, что граф в некотором смысле является неделимой структурой, не определяемой полностью структурами всех своих правильных частей, иначе говоря, что при переходе от $(n - 1)$ -вершинных графов к n -вершинному происходит своего рода качественный скачок в степени сложности этой структуры; вообще, в логико-философском плане должны рассматриваться причины того, что все время оканчиваются неудачей попытки найти хотя бы для класса всех обыкновенных графов такую конечную систему операций над графами, заданными с точностью до изоморфизма, чтобы с помощью этих операций можно было получить все обыкновенные графы из некоторого фиксированного «хорошо обозримого» множества базисных графов. Во второй части книги будет изучен целый ряд важных операций над графами, однако вдаваться в метаматематические исследования мы и там не сможем.

Но вернемся к алгоритмам, теперь уже с сугубо практической стороны. Для графа или одновременно нескольких графов, у которых суммарное количество вершин ограничено сверху известным конкретным числом, любой вопрос принципиально может быть решен конечным числом испытаний; однако в ряде случаев это число N неимоверно велико (см. хотя бы пример

*) О метатеории бесконечных графов мы пока даже не помышляем, поскольку такая метатеория должна, в частности, охватывать всю теорию бесконечных множеств.

С. Ангера, § 3 в главе 1). Поэтому даже сугубо конечные алгоритмы, требующие перебора всех или почти всех N возможностей при очень больших N , являются практически неэффективными, и возникает проблема поиска для тех или иных массовых задач таких алгоритмов, которые требовали бы перебора существенно меньшего числа вариантов. Даже без точной постановки этой проблемы мы можем указать примеры ее бесспорного решения в конкретных случаях. Так, если задачу о назначениях (см. § 49) решать пересмотром всевозможных суграфов данного графа Кёнига, то уже при наличии нескольких десятков ребер нельзя воспользоваться даже машинным способом, не говоря о ручном; в то же время с помощью венгерского алгоритма такую задачу для графа с числом ребер порядка нескольких тысяч можно решить вручную за несколько часов! Столь же эффективен алгоритм Форда — Фалкерсона для транспортной задачи (см. вторую часть нашей книги). Практически эффективны алгоритмы нахождения кратчайшей цепи и выявления компонент графа с помощью разметки вершин (см. § 11 и § 12 в главе 2), алгоритм Гилмёра — Гофмана для транзитивной ориентации (§ 31 в главе 4), алгоритм раскраски ребер посредством перекрасок двуцветных цепей (§ 44 в главе 5) и многие другие. Диаметрально противоположным примером может служить процесс отождествления пар соцветных вершин для нахождения хроматического числа и минимальной раскраски вершин (см. § 42 в главе 5). Промежуточное положение занимают, например, алгоритмы, основанные на вычислении последовательных степеней матрицы и нахождении установившейся степени (см. § 12 в главе 2, § 31 в главе 4 и т. п.); эффективность их значительно повысилась благодаря работе В. В. Мартынюка (1962), который путем исключения повторяющейся информации на промежуточных этапах дал способ нахождения установившейся матрицы, примерно равносильный по трудоемкости одному возведению исходной матрицы в квадрат. Тоже к промежуточным случаям, но в несколько ином смысле, относится алгоритм Магу — Уэйсмана для нахождения максимальных пустых (или полных) подграфов в заданном графе (см. § 9 в главе 1); мы воспользуемся этим примером для разъяснения сущности статистического подхода к понятию практической эффективности (другой пример такого же рода представляет алгоритм Уракова для выявления баз дуг — см. § 33 в главе 4).

Граф L , изображенный на рис. 30 (§ 9), был, видимо, выбран Дж. Уэйсманом в некотором смысле случайно; по крайней мере, то обстоятельство, что L — плоский граф, может способствовать скорее увеличению, чем уменьшению числа его мак-

симальных пустых подграфов. И вот в этом, можно сказать первом попавшемся среди девятивершинных, нетривиальном по своей структуре графе, с первой попавшейся нумерацией вершин, все максимальные пустые подграфы удается найти очень быстро исключительно благодаря своевременному применению закона поглощения по мере раскрытия скобок (иначе, как мы видели, пришлось бы обрабатывать логическую сумму 2^{14} слагаемых). Теперь допустим, что из некоторого теоретического отдела или с народнохозяйственного предприятия в вычислительный центр непрерывно поступают конкретные задачи, сводящиеся к выявлению максимальных пустых подграфов в предлагаемых графах. Если бы мы сумели хотя бы грубо прикинуть, какова вероятность решения одной задачи на машине не более чем, скажем, за 5 минут, и если бы эта вероятность оказалась, например, близка к $\frac{1}{2}$, то имело бы смысл пускать весь этот поток задач на машину, с тем ограничением, что если в течение 5 мин ответ на задачу не получен, то она возвращается заказчику нерешенной; при такой постановке дела быстро решалось бы около половины поступающих задач, а в отношении другой половины положение было бы во всяком случае не хуже, чем при полном отсутствии быстродействующих вычислительных устройств. Нам кажется, что в очень многих практически важных случаях вероятность решения подобных задач значительно выше $\frac{1}{2}$ — она, конечно, зависит от того распределения характеристик графа (влияющих на скорость решения задачи), которое обусловлено спецификой конкретной области, поставляющей эти задачи.

Другим примером, где эффективность в статистическом смысле имеет место (как подсказывает интуиция и подтверждает практика), может служить алгоритм Лейфмана для выявления бикомпонент орграфа (см. § 32 в главе 4). Отметим еще процесс раскраски плоской триангуляции (см. § 48 в главе 6), который, даже не будучи настоящим алгоритмом, может тем не менее дать в отношении практической эффективности сто очков вперед многим алгоритмам в полном смысле слова. Наконец, надо обратить внимание на то, что, как показывают исследования С. В. Яблонского (1959), Ю. И. Журавлева (1/1964, 2/1965) и других авторов, среди дискретных экстремальных задач существуют такие, для которых вообще невозможен алгоритм принципиально более простой, чем полный перебор всех N случаев (в частности, у Ю. И. Журавлева есть примеры, непосредственно относящиеся к графам); поскольку жизнь требует решения и

этих задач, то здесь, видимо, основные надежды следует возлагать на статистически эффективные алгоритмы.

Переходим к краткому обзору общих методов и направлений теоретического исследования, которые уже развиваются или наметились в современной теории графов и подробному рассмотрению которых посвящена вторая часть нашей книги. Начнем с операций над графами; эти операции можно грубо расклассифицировать на три типа: композиции, разборки и преобразования.

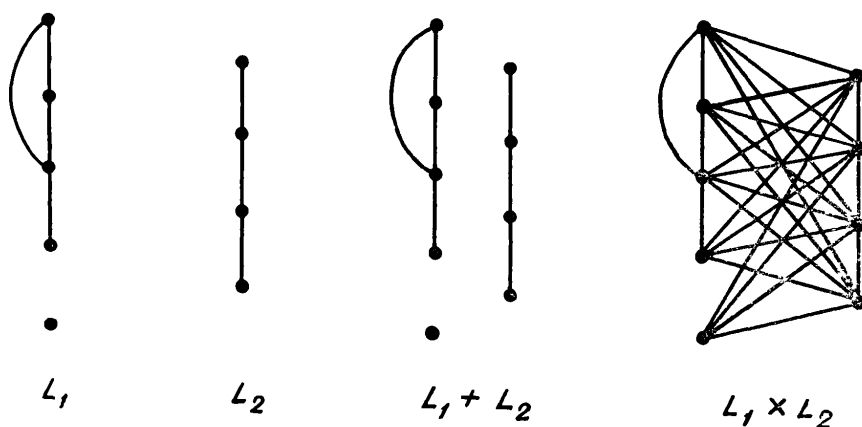


Рис. 227.

О п е р а ц и я к о м п о з и ц и и состоит в том, что из одного или нескольких графов образуется (быть может, неоднозначно, но конечным числом способов) новый граф, в каком-то смысле более сложный, чем каждый из исходных. Такими операциями являются, например, известные в литературе декартово умножение (частный случай которого фигурирует в теореме Плесневича, см. § 42 главы 5), кронекерово умножение, подстановка графа в граф и др., а также следующие две простые операции, которые мы определим здесь для обыкновенных графов $L_1 = (X_1, U_1)$ и $L_2 = (X_2, U_2)$ с $X_1 \cap X_2 = \emptyset$: сумма $L_1 + L_2 \doteq (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2)$ и произведение $L_1 \times L_2 \doteq (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2 \cup \{\widehat{xy}/x \in X \ \& \ y \in Y\})$ (рис. 227). Легко понять, что граф, разложимый в сумму (т. е. несвязный), неразложим в произведение, а граф, разложимый в произведение (и потому связный), неразложим в сумму и что полное разложение любого графа однозначно с точностью до перестановки сомножителей и перестановки слагаемых. Например, для графов $L_1, L_2, L_1 + L_2$ и $L_1 \times L_2$ на рис. 227 полными разложениями будут:

$$L_1 = E_1 + E_1 \times (E_1 + E_1 \times E_1),$$

$$L_2 = L_2 \text{ (неразложимый граф)},$$

$$L_1 + L_2 = E_1 + E_1 \times (E_1 + E_1 \times E_1) + L_2,$$

$$L_1 \times L_2 = [E_1 + E_1 \times (E_1 + E_1 \times E_1)] \times L_2.$$

К сожалению, класс всех неразложимых графов столь же необозрим, как и класс всех вообще графов (обыкновенных), так что превращение множества графов в алгебраическую систему с операциями «+» и «×» не решает проблемы «хорошего» обзора всех обыкновенных графов (впрочем, не удастся добиться этого и с другими операциями). В отдельных же вопросах эти операции весьма полезны — например, при построении некоторых графов с заданными свойствами. Важное направление состоит в изучении таких характеристик графа, которые однозначно определяются для результирующего графа, если они известны для всех исходных. Так, плотность φ и неплотность ε (см. § 10 в главе 1), хроматическое число γ и число Хадвигера η (см. § 40 в главе 5) ведут себя по отношению к сложению и умножению графов следующим образом:

$$\varphi(L_1 + L_2) = \max\{\varphi(L_1), \varphi(L_2)\}, \quad \varphi(L_1 \times L_2) = \varphi(L_1) + \varphi(L_2),$$

$$\varepsilon(L_1 + L_2) = \varepsilon(L_1) + \varepsilon(L_2), \quad \varepsilon(L_1 \times L_2) = \max\{\varepsilon(L_1), \varepsilon(L_2)\},$$

$$\gamma(L_1 + L_2) = \max\{\gamma(L_1), \gamma(L_2)\}, \quad \gamma(L_1 \times L_2) = \gamma(L_1) + \gamma(L_2),$$

$$\eta(L_1 + L_2) = \max\{\eta(L_1), \eta(L_2)\}$$

(величина же $\eta(L_1 \times L_2)$ зависит не только от величин $\eta(L_1)$ и $\eta(L_2)$, как показывает хотя бы пример произведений $E_1 \times E_3$ и $E_2 \times E_2$, именно: $\eta(E_1 \times E_3) = 2$, $\eta(E_2 \times E_2) = 3$, в то время как $\eta(E_1) = \eta(E_2) = \eta(E_3) = 1$); более того, зная все числа $f_i(L_1)$ и $f_i(L_2)$ или все числа $e_i(L_1)$ и $e_i(L_2)$ (см. § 9 в главе 1), можно определить числа $f_i(L_1 + L_2)$ и $f_i(L_1 \times L_2)$, соответственно числа $e_i(L_1 + L_2)$ и $e_i(L_1 \times L_2)$. Важным примером неоднозначной операции композиции служит сшивание графов по полному подграфу: если L_3 — результат сшивания обыкновенных графов L_1 и L_2 по подграфу F_h (рис. 228), то

$$\gamma(L_3) = \max\{\gamma(L_1), \gamma(L_2)\}, \quad \eta(L_3) = \max\{\eta(L_1), \eta(L_2)\}.$$

Подлежат общему исследованию и более сложные случаи, когда задание тех или иных характеристик исходных графов однозначно определяет некоторую, вообще говоря другую, характеристику результирующего графа. Одна из операций композиции

над полными графами Бержа, у которых все ребра взвешены элементами некоторой полугруппы, рассматривается А. А. Зыковым (2/1957).

Операция разборки состоит в том, что данный граф превращается в конечную упорядоченную совокупность графов, каждый из которых проще исходного; смысл отношения «проще» уточняется в каждом конкретном случае по-своему, но всегда так, чтобы выполнялось условие: применяя раз-

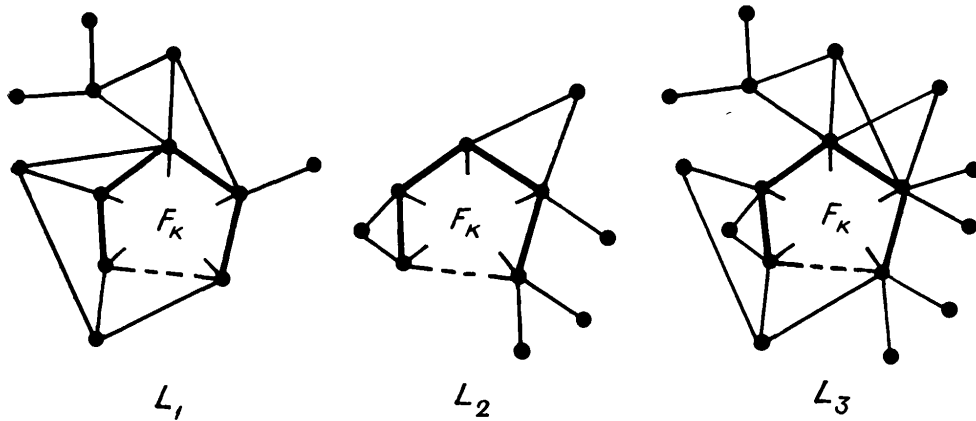


Рис. 228.

борку к исходному графу, затем к каждому из полученных и т. д., мы через конечное число шагов дойдем до графов, к которым данная операция разборки более не применима. Операции указанного типа можно использовать для вычисления и исследования ряда характеристик графа. Например, пусть L — обыкновенный граф с упорядоченным (линейно) множеством вершин, а операция разборки

$$L \rightarrow \{L_r, L_p\}$$

относит графу L такую пару, в которой L_r означает подграф, полученный из L удалением первой вершины, а L_p — подграф, остающийся после удаления из L первой вершины и всех не смежных с ней, причем порядок вершин в L_r и L_p индуцируется порядком в L . Тогда, очевидно, имеет место рекуррентное соотношение

$$f_i(L) = f_i(L_r) + f_{i-1}(L_p)$$

($i \geq 1$; $f_0(L) \doteq 1$); так как удаление вершин в конце концов превращает граф в пустое множество, то начальное условие будет

$$f_i(\emptyset) = 0 \quad (i \geq 1), \quad f_0(\emptyset) = 1.$$

Пользуясь рекуррентным соотношением и начальным условием, можно найти систему чисел $f_i(L)$ для любого обыкновенного графа L . Меняя операцию разборки, можно рекуррентно вычислять количества $e_i(L)$, числа способов раскраски всех вершин графа L данными количествами цветов, числа способов стягивания графа на полные графы с заданными количествами вершин, и т. п. Этот метод применим и к более сложным комбинаторным объектам: например, в электротехнике хорошо известен способ холостого хода и короткого замыкания, основанный на рекуррентном соотношении, которое выражает полное сопротивление между двумя полюсами исходной цепи через сопротивления трех более простых цепей. М. М. Шульц (1966) применяет разборку типа $L \rightarrow \{L_r, L_p\}$ к взвешенным графам при решении одной комбинаторной задачи, связанной с выбором системы представителей. Сейчас для некоторых классов графов и некоторых конкретных операций разборки

$$L \rightarrow \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$$

удается решать общие проблемы, например, такого типа: какую информацию о графе L может нести функция $\Phi(L)$, определяемая соотношением

$$\Phi(L) = f(\Phi(L_1), \Phi(L_2), \dots, \Phi(L_k))$$

(независимо от вида функции f и природы множества значений функции Φ) и инвариантная относительно изменения порядка разборки (что в случае разборки $L \rightarrow \{L_r, L_p\}$ означает независимость $\Phi(L)$ от порядка вершин графа L) — см. А. А. Зыков (3/1959, 1960, 1960, а также обзоры 4/1963 и 5/1964).

Операция преобразования, грубо говоря, не усложняет и не упрощает граф; рассмотрим пример. Пусть в обыкновенном графе $L = (X, U)$ четыре вершины x, y, z, t таковы, что $\widetilde{xz}, \widetilde{yt} \in U$, а $\widetilde{xt}, \widetilde{yz} \notin U$, и пусть $L' \doteq (X, U')$, где $U' \doteq (U \setminus \{\widetilde{xz}, \widetilde{yt}\}) \cup \{\widetilde{xt}, \widetilde{yz}\}$ (рис. 229). Операция $L \rightarrow L'$, очевидно, сохраняет степень каждой вершины графа; оказывается, справедливо и обратное: два обыкновенных графа с общим множеством вершин и одинаковыми степенями каждой из вершин всегда можно преобразовать друг в друга конечным числом операций указанного типа. Многочисленные видоизменения и обобщения этого результата применительно к различным классам графов вполне подготовили, на наш взгляд, почву для решения общей проблемы: найти критерий существования и дать

полный обзор (например, посредством операций преобразования) всех графов с заданной локальной характеристикой (см. § 8 в главе 1), а также дать общий способ решения аналогичных вопросов для возможно более широкого класса случаев, когда

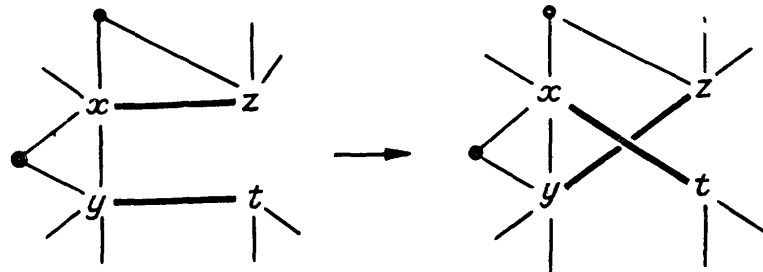


Рис. 229.

локальная характеристика известна не полностью. К обобщениям операции $L \rightarrow L'$ можно причислить и те манипуляции с чередующимися цепями, которые мы применяли в § 6 главы 1 и в § 49 и которые лежат в основе весьма эффективного венгерского метода, позволяющего решать многие комбинаторные задачи, в том числе из теории графов. Вообще, по отношению к любой системе операций преобразования естественно возникает классическая проблема выявления инвариантных свойств графа.

Одним из методов получения точных верхней и нижней оценок некоторой характеристики графа через другие его характеристики является построение соответствующих экстремальных или критических графов. Пусть какую-то характеристику $\mu \doteq \mu(L)$ требуется оценить, скажем, сверху через количества вершин $n \doteq n(L)$ и ребер $m \doteq m(L)$ обыкновенного графа L и пусть L — класс графов L с заданными n , m и наибольшим возможным μ . Для ряда характеристик μ (плотности, неплотности, хроматического числа, числа Хадвигера и др.) класс L сводится к единственному (с точностью до изоморфизма) графу и искомая точная верхняя оценка получается подсчетом величины μ для этого экстремального графа. При других характеристиках μ или других системах величин (вместо n и m), через которые производится оценка, соответствующие классы далеко не всегда столь узки, однако все-таки часто бывают достаточно просты в том смысле, что все графы класса можно получить из хорошо обозримого базисного множества посредством удобной системы операций композиции, или в том смысле, что все графы класса получаются друг из друга несложными операциями пре-

образования. Наконец, для нахождения оценок можно использовать рекуррентные равенства и неравенства относительно той или иной подходяще выбранной операции разборки. Отличие критических графов от экстремальных поясним на частном

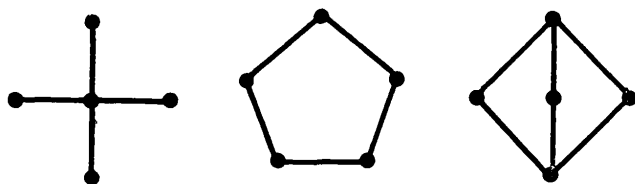


Рис. 230.

примере, где роль μ играет число ребер m , оцениваемое через число вершин n и плотность φ : максимальный граф обладает наибольшим числом m при заданных n и φ , а критический граф L с $n(L) = n$

и $\varphi(L) = \varphi$ характеризуется тем свойством, что добавление к L любого ребра (без добавления вершин) приводит к увеличению плотности; для случая $n = 5$, $\varphi = 2$ из трех критических графов, изображенных на рис. 230, только последний является экстремальным (именно, максимальным).

Линейную алгебру, как и булеву, в целом нельзя, конечно, считать специфическим аппаратом теории графов, однако и в чистой линейной алгебре можно выделить задачи явно комбинаторной природы. Пусть A — матрица над произвольным полем, имеющая n строк и m столбцов; требуется для каждой пары чисел $i = 0, 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$ найти количество тех подматриц, образованных j столбцами и всеми строками A , ранг которых равен i . Простой перебор всех $2^m - 1$ подматриц и вычисление ранга каждой из них, с последующей сортировкой, не является, очевидно, практически эффективным процессом, но другие алгоритмы пока не найдены. Задача остается нетривиальной даже если окончательно порвать с алгеброй и вместо ранга подматрицы говорить о количестве ее ненулевых строк. В то же время к этим задачам можно свести многие задачи на графы, например нахождение хроматического числа $\chi(L)$, количества $f_i(L)$ и $e_i(L)$ и др.; в качестве A берется то матрица инциденций, то цикломатическая, то еще какая-нибудь матрица данного графа L . Интересно, по крайней мере теоретически, по возможности расширить класс задач на графы, сводимых к указанным комбинаторным матричным проблемам.

Вообще, систематические способы эффективного извлечения информации о графе из различных его матриц должны быть предметом общего изучения. Отметим еще, что в случае квадратных матриц (смежности, соседства вершин, соседства ребер, S в теореме Лантьери — Трента из § 26 главы 3 и т. п.) иногда удается расшифровать смысл коэффициентов соответствующего

характеристического многочлена (см., например, работы Л. М. Лихтенбаума 4/1958, 5/1959, 6/1962).

Транспортные сети и линейное программирование не только дают эффективные алгоритмы, но также позволяют получать теоретические результаты относительно графов. Систематическое исследование возможностей использования этих и других математических аппаратов для теории графов тоже является важным направлением.

Остановимся вкратце на взаимосвязи между теорией графов и теорией вероятностей. Кроме статистической оценки алгоритмов, о которой мы уже говорили, здесь можно выделить две категории проблем.

1. **Задачи вероятностного содержания.** Пусть n -вершинный обыкновенный граф L является случайным в том смысле, что любая пара его различных вершин с вероятностью $\frac{1}{2}$ может оказаться смежной; какова вероятность $p(n)$ того, что L связан? Можно задавать случайные графы и иначе, например так: обыкновенный граф L с n вершинами и m ребрами получен из E_n последовательным добавлением ребер по такому закону, что когда k ребер уже проведено ($0 \leq k < m$), следующее, $(k + 1)$ -е ребро с одинаковой вероятностью может соединить любую пару различных не смежных еще вершин; и здесь можно искать вероятность $p(n, m)$ того, что L связан. Исследуются и другие законы образования случайных графов, а также другие их характеристики (вместо связности); чаще всего ищется вероятность наличия части заданного типа в случайном графе (например, вероятность наличия цепи между двумя выделенными вершинами вероятностной сети).

2. **Задачи, решаемые с помощью вероятностных соображений.** В статье П. Эрдеша (5/1964) приводится ряд примеров того, как благодаря использованию вероятностей удается решить задачу на графы, не являющуюся вероятностной по своей постановке, но не поддававшуюся обычным приемам теории графов. При этом в ряде случаев доказывается абсолютная точность той или иной оценки, а не только выполнение ее с вероятностью 1; кажущаяся парадоксальность этого факта сразу исчезнет, если привести следующий тривиальный пример, даже не из области графов. Пусть в урне лежат белые и черные шары, всего 10 штук, но неизвестно, сколько из них белых, и пусть на основании какой-то довольно сложной информации об истории заполнения урны удалось подсчитать, что вероятность вынуть белый шар (при одном испытании)

равна $\frac{1}{5} \pm 0,01$. Тогда, очевидно, можно категорически утверждать, что в урне ровно 2 белых и 8 черных шаров.

В задачах обоих типов естественно ожидать применения метода Пойя и других методов подсчета количеств графов, поскольку вероятность наличия свойства P у графа L есть отношение числа графов, обладающих этим свойством, к числу всех вообще графов рассматриваемого класса.

Различные задачи и проблемы по теории графов читатель сможет найти в книгах К. Бержа (1/1958, русск. 1962, Дополнение IV), С. Сешу и М. Рида (1961), О. Оре (4/1962, русск. 1968), в статье М. Стояковича (1963) и, конечно, во многих из цитированных нами работ. В № 6 журнала „Успехи математических наук“ за 1968 г. напечатана обзорная статья В. Г. Визинга, содержащая около 80 нерешенных проблем теории графов (предупреждаем читателя, что там имеется опечатка при определении графа: в конце строк 19 и 20 снизу на стр. 118 надо поменять местами X и U).

Л И Т Е Р А Т У Р А

Кроме выходных данных каждой работы, указывается также место реферата на нее в Реферативном журнале «Математика» (РЖМат), а в случае отсутствия там реферата дается ссылка (как правило) на Mathematical Review (MR) или Zentralblatt für Mathematik (Zbl); в правой колонке перечислены номера тех параграфов нашей книги (часть 1), где упоминается эта работа. Названия непериодических сборников взяты в кавычки.

- | | | |
|--|--|-----------------|
| <p>А а р т с, д е Г р о о т (Aarts J. M., de Groot J.)</p> | | |
| <p>1. A case of colouration in the four colour problem. Rapp. Math. centrum, 1962, № 12, 13 pp. Nieuw. arch. wiskunde, 11 (1963), № 1, 10—18. РЖМат, 1964, 1А 325.</p> | | 48 |
| <p>А в о н д о - Б о д и н о (Avondo-Bodino G.)</p> | | |
| <p>1. Applicazioni economiche della teoria dei grafici. Pavia, Prem. Tip. Successori Frat. Fusi, 1960, 86pp. Economic applications of the theory of graphs. New York, Gordon & Breach, 1962, vii + 111pp. РЖМат, 1964, 4В341К. Применение в экономике теории графов. М., Прогресс, 1966.</p> | | Введение,
49 |
| <p>А д а м (Ádám A.)</p> | | |
| <p>1. On graphs in which two vertices are distinguished. Acta Math. Acad. sci. Hung., 12 (1961), № 3—4, 377 — 397. РЖМат, 1962, 10В219.</p> | | 14 |
| <p>2. The quasi-series decomposition of two-terminal graphs. Publ. Math. Debrecen, 10 (1963), № 3—4, 96—107. РЖМат, 1966, 5А288.</p> | | 14 |
| <p>3. Bemerkungen zum graphentheoretischen Satze von I. Fidrich. Acta Math. Acad. sci. Hung., 16 (1965), № 1—2, 9—11. РЖМат, 1966, 1А430.</p> | | 38 |
| <p>А д а м, Ч у л и к, П о л л а к (Ádám A., Čulik K., Pollák G.)</p> | | |
| <p>1. Ein Satz über teilweise gerichtete Graphen. Чехослов. матем. ж., 13 (1963), № 4, 619—620. РЖМат, 1964, 6А284.</p> | | 39 |
| <p>А л ь в а р е с (Alvarez L. R.)</p> | | |
| <p>1. Undirected graphs realizable as graphs of modular lattices. Canad. J. Math., 17 (1965), № 6, 923—932. РЖМат, 1966, 7А337.</p> | | 45 |

- А н г е р** (Unger S. H.) 3
1. GIT — a heuristic program for testing pairs of directed line graphs for isomorphism. *Comm. Ass. Comput. Mach.*, 7 (1964), № 1, 26—34. *РЖМат*, 1964, 10B383.
- А н д р е а т т а** (Andreatta A.) 47
1. Alcuni sviluppi sulla teoria relativa dei singrammi finiti. *Ann. mat. pura ed appl.*, 65 (1964), 1—25. *РЖМат*, 1966, 7A338.
 2. Sui singrammi finiti tracciabili sul toro. *Rend. Ist. Lombardo sci. e lettere. Sci. mat., fis., chim. e geol.*, 98 (1964), № 1, 181—191. *РЖМат*, 1967, 12B272.
- А у с л а н д е р, Б р а у н, Ю н г с** (Auslander L., Brown T. A., Youngs J. W. T.) 47
1. The imbedding of graphs in manifolds. *J. Math. and Mech.*, 12 (1963), № 4, 629—634. *РЖМат*, 1966, 2A359.
- А у с л а н д е р, П а р т е р** (Auslander L., Parter S. V.) 47
1. On imbedding graphs in the sphere. *J. Math. and Mech.*, 10 (1961), № 3, 517—523. *РЖМат*, 1963, 12A306.
- А у с л а н д е р, Т р е н т** (Auslander L., Trent H. M.) 27
1. Incidence matrices and linear graphs. *J. Math. and Mech.*, 8 (1959), № 5, 827—835. *РЖМат*, 1961, 7A330.
 2. On the realization of a linear graph given its algebraic specification. *J. Acoust. Soc. America.*, 33 (1961), № 9, 1183—1192. *РЖМат*, 1962, 7B208.
- Б а д е р** (Bader W.) 47
1. Das topologische Problem des gedruckten Schaltung und seine Losung. *Arch. Elektrotech.*, 49 (1964), № 1, 2—12. *РЖМат*, 1965, 11B150.
- Б а й н е к е, Х а р а р и** (Beineke L. W., Harary F.) 47
1. On the thickness of the complete graph. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), № 4, 618—620. *РЖМат*, 1965, 5A255.
 2. Inequalities involving the genus of a graph and its thicknesses. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7 (1965), № 1, 19—21. *РЖМат*, 1966, 1A433.
 3. The genus of the n-cube. *Canad. J. Math.*, 17 (1965), № 3, 494—496. *РЖМат*, 1966, 1A434.
 4. The thickness of the complete graph. *Canad. J. Math.*, 17 (1965), № 6, 850—859. *РЖМат*, 1966, 6A257.
 5. The maximum number of strongly connected subtournaments. *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965), № 4, 491—498. *РЖМат*, 1966, 6A260.
- Б а й н е к е, Х а р а р и, М у н** (Beineke L. W., Harary F., Moon J. W.) 47
1. On the thickness of the complete bipartite graph. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60 (1964), № 1, 1—5. *РЖМат*, 1964, 10A251.
- Б а р з д ы н ь Я. М.** 33,34
1. Проблема базиса направленных графов. *Уч. зап. Латв. ун-та*, 28 (1959), 33—44. *РЖМат*, 1962, 5A293.
- Б е к и ш е в Г. А.** 37,49
1. Решение одной задачи теории графов. *Сб. «Вычислительные системы»*, 6, Новосибирск, 1963, 57—62. *РЖМат*, 1964, 6A283.

- Б е н е ш** (Beneš V. E.)
1. Algebraic and topological properties of connecting networks. Bell System Techn. J., 41 (1962), № 4, 1249—1274. РЖМат, 1964, 7В317. MR, 27, 4719. 49
- Б е р ж** (Berge C.)
1. Théorie des graphes et ses applications. Paris, Dunod, 1958; РЖМат, 1962, 8А299К. 2-nd ed.: Paris, 1963, viii + 269pp. Теория конечных графов и ее применения, М., ИЛ, 1962; The theory of graphs and its applications, N. Y., John Wiley, 1962; London, Methuen, 1962. Введение, 1.10, 11, 22, 14, 17, 37, 38, 42, 47, 48, 49, 41
2. Les problèmes de coloration en théorie des graphes. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 9 (1960), № 2, 123—160. РЖМат, 1962, 10А199.
- Б е с с о н о в** Л. А.
1. Основы теории графов. Учебное пособие. Всесоюз. заочный энергетический ин-т. М., 1964, 50 стр. РЖМат, 1965, 9В161К. 49
- Б и л и н с к и й** (Bilinski S.)
1. Über die Ordnungszahl der Klassen Eulerischen Polyeder. Arch. Math., 10 (1959), № 2—3, 180—186. РЖМат, 1960, 6, 6268. 47
- Б и р к г о ф** (Birkhoff G. D.)
1. The reducibility of maps. Amer. J. Math. 35 (1913), № 1, 115—128. 48
- Б о л а н д** (Boland J. Ch.)
1. Embedding of graphs in the projective plane. Fundam. math., 57 (1965), № 2, 195—203. РЖМат, 1967, 12В265. 47
- Б о л л о б а ш** (Bollobás B.)
1. On generalized graphs. Acta Math. Acad. sci. Hung., 16 (1965), № 3—4, 447—452. РЖМат, 1966, 5А284. 49
- Б о р щ е в** В. Б., **Р о х л и н** Ф. З.
1. Запись графа в памяти вычислительной машины для алгоритма поиска частичного подграфа в графе. Сб. «Информационные системы», М., 1964, 55—64. РЖМат, 1965, 10В331. 3, 49
- Б о с а к** (Bosák J.)
1. The graphs of semigroups. Сб. «Theory of Graphs and its Applications» (Proc. Sympos. Smolenice 1963), Prague, 1964, 119—125. РЖМат, 1967, 7В202. 45
- Б о т т**, **М е й б е р р и** (Bott R., Mayberry J. P.)
1. Matrices and trees. Сб. «Economic activity analysis», N. Y., Wiley, 1954, 391—400; London, Chapman and Hall, Ltd. РЖМат, 1958, 3, 1930К. 36
- Б р а у н** Т. (Brown T. A.)
1. Simple paths on convex polyhedra. Pacif. J. Math., 11 (1961), № 4, 1211—1214. РЖМат, 1962, 12А195. 47
- Б р а у н** В. (Brown W. G.)
1. A new proof of a theorem of Dirac. Canad. Math. Bull., 8 (1965), № 4, 459—463. РЖМат, 1966, 7А332. 14
- Б р у к с** (Brooks R. L.)
1. On colouring the nodes of a network. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 (1941), 194—197. MR, 6, 281. 41

- Б р э т т о н (Bratton D.)
1. Efficient communication networks. Cowles Comm. Disc. Paper, 1955, p. 2119. 37
- Б э б л е р (Bäbler F.)
1. Über eine spezielle Klasse Euler'schen Graphen. Comment. Math. Helv., 27 (1953), № 2, 81—100. РЖМат, 1956, 3, 2042. 18
- Б э т л, Х а р а р и, К о д а м а (Battle J., Harary F., Kodama Yu.)
1. Every planar graph with nine points has a nonplanar complement. Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), № 6, 569—571. РЖМат, 1964, 6A281. 47
- Б э т л, Х а р а р и, К о д а м а, Ю н г с (Battle J., Harary F., Kodama Yu., Youngs J. W. T.)
1. Additivity of the genus of a graph. Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), № 6, 565—568. РЖМат, 1964, 1A327. 47
- В а г н е р (Wagner K.)
1. Zwei Bemerkungen über Komplexe. Math. Ann., 112 (1936), № 2, 316—321. 48
2. Ein Satz über Komplexe. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 46 (1936), № 1—4, 21—22. 48
3. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 46 (1936), № 1—4, 26—32. 48
4. Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski. Deutsche Mathematik, 2 (1937), № 2, 280—285. 47
5. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann., 114 (1937), № 4, 570—590. 48
6. Faktorklassen in Graphen. Math. Ann., 141 (1960), № 1, 49—67. РЖМат, 1962, 4A276. 1
7. Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung. Math. Ann., 141 (1960), № 5, 433—451. РЖМат, 1963, 1A280. 40
8. Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung. Math. Ann., 153 (1964), № 2, 139—141. РЖМат, 1964, 8A274. 40
- В а г н е р, Г а л и н (Wagner K., Halin R.)
1. Homomorphiebases von Graphenmengen. Math. Ann., 147 (1962), № 2, 126—142. РЖМат, 1963, 1A281. 40
- В е т у х н о в с к и й Ф. Я.
1. О покрытиях графа системой окрестностей его вершин. Докл. АН СССР, 158 (1964), № 1, 21—24. РЖМат, 1964, 12A271. 37,49
2. Покрытия и минимальные покрытия графа системой окрестностей его вершин. Сб. «Дискретный анализ», 3, Новосибирск, 1964, 3—24. РЖМат, 1967, 12B276. 37,49
- В и з и н г В. Г.
1. О хроматическом классе мультиграфа. Сб. «Докл. 3-й Сибирской конф. по математике и механике», Томский ун-т, 1964. 44,49
2. Об оценке хроматического класса p -графа. Сб. «Дискретный анализ», 3, Новосибирск, 1964, 25—30. РЖМат, 1965, 11A285. 44,49
3. Хроматический класс мультиграфа. Кибернетика, 1965, № 3, 29—39. РЖМат, 1966, 2A355. 44,49

4. Критические графы с данным хроматическим классом. Сб. «Дискретный анализ», 5, Новосибирск, 1965, 9—17. РЖМат, 1967, 8В201. 44,48
5. Оценка числа внешней устойчивости графа. Докл. АН СССР, 164 (1965), № 4, 729—731. РЖМат, 1966, 2А356. 10
6. О числе ребер в графе с данным радиусом. Докл. АН СССР, 173 (1967), № 6, 1245—1246. РЖМат, 1967, 10В218. 17
- Визинг В. Г., Плесневич Г. С.**
1. К проблеме минимальной раскраски вершин графа. Сиб. матем. ж., 6 (1965), № 1, 234—236. РЖМат, 1966, 1А422. 42,49
- Витавер Л. М.**
1. Нахождение минимальных раскрасок вершин графа с помощью булевых степеней матрицы смежности. Докл. АН СССР, 147 (1962), № 4, 758—759. РЖМат, 1963, 8А230. 42
- Гавел (Havel I.)**
1. On the completeness-number of a finite graph. Časop. pěstov. mat., 90 (1965), № 2, 191—193. РЖМат, 1966, 3А268. 46
- Галин (Halin R.)**
1. Bemerkungen über ebene Graphen. Math. Ann., 153 (1964), № 1, 38—46. РЖМат, 1966, 1А418. 47
2. Über einen Satz von K. Wagner zum Vierfarbenproblem. Math. Ann., 153 (1964), № 1, 47—62. РЖМат, 1967, 8В199. 40
3. Über trennende Eckmengen in Graphen und den Mengerschen Satz. Math. Ann., 157 (1964), № 1, 34—41. РЖМат, 1965, 12А342. 13
- Галин, Юнг (Halin R., Jung H. A.)**
1. Über Minimalstrukturen von Graphen, insbesondere von n -fach zusammenhängenden Graphen. Math. Ann., 152 (1963), № 1, 75—94. РЖМат, 1964, 8А275. 14
2. Charakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre. Archiv der Math., 15 (1964), № 6, 466—469. РЖМат, 1966, 2А361. 49
- Галлаи (Gallai T.)**
1. См. Грюнвальд (Grünwald T.)
2. Über extreme Punkt- und Kantenmengen. Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1959, № 2, 133—138. РЖМат, 1961, 7А326. 10
3. Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 7, ser. A (1962), № 1—2, 3—36. РЖМат, 1963, 6А263. 41
4. Elementare Relationen bezüglich der Glieder und trennenden Punkte von Graphen. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 9 (1964), № 1—2, 235—236. РЖМат, 1966, 3А279. 15
5. Maximale Systeme unabhängiger Kanten. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 9 (1964—1965), № 3, 401—413. РЖМат, 1966, 5А287. 10
- Галлаи, Милгрэм (Gallai T., Milgram A. N.)**
1. Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei. Acta sci. math. Szeged, 21 (1960), № 3—4, 181—186. РЖМат, 1961, 7А327. 32

- Г е д р л и н, П у л ь т р (Hedrlin Z., Pultr A.)
1. Relations (graphs) with given finitely generated semi-groups. *Monatsh. Math.* 68 (1964), № 3, 213—217. *РЖМат*, 1965, 4A185. 39
 2. On rigid undirected graphs. *Canad. J. Math.*, 18 (1966), № 6. 1237—1242. 39
- Г е р ц (Hertz P.)
1. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. *Math. Ann.*, 87 (1922), № 3—4. 246—269. 32, 34, 49
- Г и л м о р, Г о ф м а н (Gilmore P. C., Hoffman A. J.)
1. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canad. J. Math.*, 16 (1964), № 3, 539—548. *РЖМат*, 1966, 1A421. 31, 45
- Г и р л я н д а (Ghirlanda A. M.)
1. Sui grafi finiti autocommutabili. *Boll. Unione mat. ital.*, 18 (1963), № 3, 281—284. *РЖМат*, 1965, 5A254. 46
- Г л у с к и н Л. М.
1. Полугруппы изотонных преобразований. *Усп. матем. наук*, 16 (1961), № 5, 157—162. *РЖМат*, 1962, 4A218. 39
- Г о л ь д б е р г М. К.
1. Некоторые применения операции стягивания к сильно связным графам. *Усп. матем. наук*, 22 (1965), № 5, 203—205. *РЖМат*, 1966, 6A261. 34, 37, 49
 2. О диаметре сильно связного графа. *Докл. АН СССР*, 170 (1966), № 4, 767—769. *РЖМат*, 1967, 4B184. 37
- Г о л ь д б е р г М. К., Л и в ш и ц. Э. М.
1. О минимальных универсальных деревьях. *Матем. заметки*, 4 (1968), № 3, 371—379. *РЖМат*, 1969, 1B262. 36
- Г о у л д (Gould R.)
1. Graphs and vector spaces. *J. Math. and Phys.*, 37 (1958), № 3, 193—214. *РЖМат*, 1961, 6A337. 27
 2. The application of graph theory to the synthesis of contact networks. *Ann. Comput. Lab. Harvard. Univ.*, 29 (1959), 244 — 292. *РЖМат*, 1962, 3B263. 27, 49
- Г о ф м а н (Hoffman A. J.)
1. On the line graph of the complete bipartite graph. *Ann. Math. Statistics*, 35 (1964), № 2, 883—885. *РЖМат*, 1965, 6A242. 46
- Г р ё ц ш (Grötzsch H.)
1. Zur Theorie der diskreten Gebilde. *Mitteilungen 1—16. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math-naturwiss. Reihe*, 5 (1956), № 4—11 (1962), № 6. *РЖМат*, 1961, 1A295 — 1964, 10A258. 48
- Г р и н б е р г Э. Я., Д а м б и т Я. Я.
1. Некоторые свойства графов, содержащих контуры. *Латв. матем. ежегодник 2. Рига*, 1966, 65—69. *РЖМат*, 1967, 10B221. 38
- Г р и н б е р г Э. Я., И л з и н я И. Г.,
1. О раскраске вершин неориентированных графов. *Сб. «Автоматика и вычислительная техника»*, 7. Рига, Зинатне, 1964, 143—153. *РЖМат*, 1966, 8A304. 42, 49
- Г р ю н б а у м (Grünbaum V.)
1. Grötzsch's theorem on 3-colorings. *Michigan Math. J.*, 10 (1963), № 3, 303—310. *РЖМат*, 1964, 9A266. 48

2. Unambiguous polyhedral graphs. Israel J. Math., 1 (1963), № 4, 235—238. РЖМат, 1966, 1A425. 47
- Г р ю н б а у м, М о ц к и н (Grünbaum V., Motzkin T. S.)
1. Longest simple paths in polyhedral graphs. J. London Math. Soc., 37 (1962), № 2, 152—160. РЖМат, 1963, 3A260. 47
- Г р ю н в а л ь д (Grünwald T.)
1. Ein neuer Beweis eines mengerschen Satzes. J. London Math. Soc., 13 (1938), pt 2 (№ 49), 188—192. Zbl, 19, 237. 1,13
- Г у й я - У р и (Ghouila-Houri A.)
1. Un résultat relatif à la notion de diamètre. C. r. Acad. sci. Paris, 250 (1960), № 26, 4254—4256. РЖМат, 1961, 3A323. 37
2. Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien. C. r. Acad. sci. Paris, 251 (1960), № 4, 495—497. РЖМат, 1961, 5A310. 32
3. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre. C. r. Acad. sci. Paris, 254 (1962), № 8, 1370—1371. РЖМат, 1962, 10A202. 31
- Д а в ы д о в Э. Г.
1. Об автоморфизмах конечных графов. Депонированная рукопись. М., ВИНТИ, 1965, 33 стр. РЖМат, 1965, 7A245ДЕП. 39
2. О конечных графах и их автоморфизмах. Сб. «Проблемы кибернетики», 17, М., «Наука», 1966, 27—39. 39
- Д а м б и т Я. Я.
1. Существование усиленной базы направленного графа и некоторая задача программирования. Сб. «Автоматика и вычислительная техника», 4. Рига, Зинатне, 1963, 69—79. РЖМат, 1964, 1B525. 33,49
2. О деревьях связанных графов. Латв. матем. ежегодник, 1, Рига, 1966, 337—345. РЖМат, 1966, 12A149. 38
- Д е к а р т (Descartes B.)
1. Solution to advanced problem № 4526. Amer. Math. Monthly, 61 (1954), № 5, 352. 41
- Д е м у к р о н, М а л ь г р а н ж, П е р т ю и з е (Démoucron G., Malgrange Y., Pertuiset R.)
1. Graphes planaires: reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques. Rev. franç. rech. opérat., 8 (1964), № 30, 33—47. РЖМат, 1966, 2B262. 47
- Д и р а к (Dirac G. A.)
1. Map-colour theorems. Canad. J. Math., 4 (1952), 480—490. MR, 14, 394. 40
2. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London Math. Soc., 27 (1952), pt. 2 (№ 105), 85—92. MR, 13, 572. 40,48
3. Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc., (3) 2 (1952), № 5, 69—81. MR, 13, 856. 14
4. The structure of k -chromatic graphs. Fund. Math., 40 (1953), 42—45. РЖМат, 1954, 10, 5081. 14,48

5. A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger. Proc. London Math. Soc., 7 (1957), № 26, 161—195. *РЖМат*, 1960, 6, 6270. 40
6. Paths and circuits in graphs: Extreme cases. Acta Math. Acad. sci. Hung., 10 (1959), № 3—4, 357—361. *РЖМат*, 1961, 1A309. 18
7. Trennende Knotenpunkt mengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendungen auf das Vierfarbenproblem. J. reine und angew. Math., 204 (1960), № 1—4, 116—131. *РЖМат*, 1961, 11A253. 48
8. Connectedness and structure in graphs. Rend. Circolo mat. Palermo, 2 (1960), № 9, 114—124. *РЖМат*, 1962, 9A172. 14
9. Généralisation du théorème de Menger. C. r. Acad. sci. Paris, 250 (1960), № 26, 4252—4253. *РЖМат*, 1962, 3A277. 13
10. A contraction theorem for abstract graphs. Math. Ann., 144 (1961), № 1, 93—96. *РЖМат*, 1962, 9A171. 40
11. On rigid circuit graphs. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, 25 (1962), № 1—2, 71—76. *РЖМат*, 1962, 9A173. 45
12. Note on the structure of graphs. Canad. Math. Bull., 5 (1962), № 3, 221—227. MR, 26, 753. 15
13. Extensions of Menger's theorem. J. London Math. Soc., 38 (1963), № 2, 148—161. *РЖМат*, 1964, 3A247. 35
14. On the four-colour conjecture. Proc. London Math. Soc., 13 (1963), № 50, 193—218. *РЖМат*, 1964, 9A265. 48
15. Some results concerning the structure of graphs. Canad. Math. Bull., 6 (1963), № 2, 183—210. *РЖМат*, 1966, 2A360. 14
16. Valency-variety and chromatic number of abstract graphs. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 13 (1964), № 1, 59—63. *РЖМат*, 1965, 3A375. 41
- Д и р а к, Ш у с т е р (Dirac G. A., Schuster S.)**
1. A theorem of Kuratowski. Proc. Koninkl. Akad. wetensch., A57 (1954), № 3, 343—348; Indagationes math., 16 (1954), № 3, 343—348. *РЖМат*, 1955, 6, 2595. 47
- Д о л е ж а л, П р о к о п, В о р е л (Doležal V., Prokop J., Vorel Z.)**
1. Úhola teorie grafů při řešení elektrických sítí. Aplikace mat., 7 (1962), № 5, 331—343. *РЖМат*, 1963, 4B301. 49
- Д ь ю г и д (Duguid A. M.)**
1. Feasible flows and possible connections. Pacif. J. Math., 11 (1961), № 2, 483—488. *РЖМат*, 1962, 6A245. 35
- Д ь ю к (Duke R. A.)**
1. The genus, regional number, and Betti number of a graph. Canad. J. Math. 18 (1966), № 4, 817—822. *РЖМат*, 1967, 9B185. 47
- Е р ш о в А. П.**
1. Сведение задачи распределения памяти при составлении программы к задаче раскраски вершин графов. Докл. АН СССР, 142 (1962), № 4, 785—787. *РЖМат*, 1962, 11B249. 49

- Ершов А. П., Кожухин Г. И.**
 1. Об оценках хроматического числа связных графов. Докл. АН СССР, 142 (1962), № 2, 270—273. РЖМат, 1962, 9A167. 41,42
- Журавлев Ю. И.**
 1. Оценка сложности локальных алгоритмов для некоторых экстремальных задач на конечных множествах. Докл. АН СССР, 158 (1964), № 5, 1018—1021. РЖМат, 1965, 2A123. 3,50
 2. Локальные алгоритмы решения дискретных экстремальных задач. Автореф. докт. дисс. Новосибирск, 1965, 14 стр. 3,50
- Закс (Sachs H.)**
 1. Über selbstkomplementäre Graphen. Publs math. Debrecen, 9 (1962), № 3—4, 270—288. РЖМат, 1965, 5A259. 9
 2. Abzählung von Wäldern eines gegebenen Typs in regulären und biregulären Graphen. I, II. Publs math. Debrecen, 11 (1964), № 1—4, 74—84; 12 (1965), № 1—4, 6—24. РЖМат, 1966, 6A269; 1968, 1B260. 26
 3. Bemerkung zur Konstruktion zyklischer selbstkomplementärer gerichteter Graphen. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 11 (1965), № 3, 161—162. РЖМат, 1968, 2B248. 9
- Зарецкий К. А.**
 1. Построение дерева по набору расстояний между всякими вершинами. Усп. матем. наук, 20 (1965), № 6, 94—96. РЖМат, 1966, 6A267. 21,49
 2. О гамильтоновом цикле и гамильтоновой цепи в декартовом произведении двух графов. Кибернетика, 1966, № 5, 4—11. РЖМат, 1967, 6B203. 10
- Зелинка (Zelinka B.)**
 1. Průměr grafu systému vlastních podpologrup komutativní pologrupy. Mat.-fyz. časop., 15 (1965), № 2, 143—145. РЖМат, 1965, 12A257. 45
 2. Rozklad grafu na isomorfní podgrafy. 1—3. Časop. pěstov. mat., 90 (1965), № 2, 147—152. РЖМат, 1965, 12A340. 9
 3. Graf systému tétiv dané kružnice. Mat.-fyz. časop., 15 (1965), № 4, 273—279. РЖМат, 1966, 5A290. 45
- Зиман Ю. Л.**
 1. О графах специального типа. Докл. АН СССР, 162 (1965), № 4, 747—750. РЖМат, 1965, 11A288. 47
- Зыков А. А. (Zykov A. A.)**
 1. О некоторых свойствах линейных комплексов. Матем. сборник, 24 (1949), № 2, 163—188. Amer. Math. Soc. Transl. 1959, № 79. MR, 11, 733. 9,41, 48,50
 2. Алгебры комплексов. Матем. сборник, 41 (1957), № 2, 159—176. РЖМат, 1960, 9, 10084. Amer. Math. Soc. Transl., 1960, № 15 (Series II). 49,50
 3. Функции от графов, определяемые линейными уравнениями. Сообщ. 1, 2, 3. Известия Сиб. отд. АН СССР, 1959, № 5, 3—19; 1960, № 9, 17—33; 1960, № 12, 13—27. РЖМат, 1962, 3A270—272. 9,50
 4. Теория графов (реферативный обзор). Сб. «Итоги науки. Алгебра. Топология». М., ВИНТИ, 1963. 188—223. РЖМат, 1965, 2A387. 50

5. Recursively calculable functions of graphs. Сб. «Theory of Graphs and its Applications» (Proc. Sympos. Smolenice 1963), Prague, 1964, 99—105. РЖМат, 1966, 11А246. 50
- И з б и ц к и й (Izbicki H.)
1. Reguläre Graphen 3, 4 und 5 Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen. Monatsh. Math., 61 (1957), № 1, 42—50. РЖМат, 1958, 10, 8652. 39
2. Reguläre Graphen beliebigen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften. Monatsh. Math., 64 (1960), № 1, 15—21. РЖМат, 1961, 3А318. 39
3. Über die explizite Automorphismengruppe von speziellen Graphen. J. reine und angew. Math., 203 (1960), № 1—2, 35—39. РЖМат, 1961, 3А319. 39
4. Graphentransformationen. Monatsh. Math., 64 (1960), № 2, 135—175. РЖМат, 1962, 5А291. 1
- И л з и н я И. Г.
1. О проблеме выбора расцветки проводов. Сб. «Автоматика и вычислительная техника», 9, Рига, Зинатне, 1965, 161—163. РЖМат, 1966, 3А278. 49
2. О нахождении наибольших полных подграфов данного графа. Сб. «Автоматика и вычислительная техника», 11, Рига, Зинатне, 1965, 43—48. РЖМат, 1966, 11В217. 9
- Й о у (Yau S. S.)
1. A generalization of the cut-set. J. Franklin Inst., 273 (1962), № 1, 31—48. РЖМат, 1964, 5В277. 13
- К а б у л о в В. К.
1. О графах Мура и Мили. Изв. АН УзССР, серия техн. наук, 1965, № 5, 17—22. РЖМат, 1966, 3В193. 49
- К а л м а н (Kalman R. E.)
1. Realization of a graph from a cut-set matrix. «Theorie des Graphes» (Journées Int. Études ICC, Rome 1966), Résumé. 27
- К а л м а н о в и ч А. М.
1. Підгрупи часткових ендоморфізмів графа. Доповіді АН УРСР, 1965, № 2, 147—150. РЖМат, 1965, 8А185. 39
- К а м ь о н (Camion P.)
1. Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. C. r. Acad. sci. Paris, 249 (1959), № 21, 2151—2152. РЖМат, 1962, 10А204 (реф. 1961, 7А328 ошибочен!) 32
2. Quelques propriétés des chemins et circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes. Cahiers Centre Etudes Rech. Opér., 1960, № 2, 5—36. MR, 22, 774. 32
- К а н ь о (Kagno I. N.)
1. Linear graphs of degree ≤ 6 and their groups. Amer. J. Math., 68 (1946), 505—520; corrections: 69 (1947), 872; 77 (1955), 392. MR, 8, 46; 9, 366; 16, 733. 39
- К а р п (Karp R. M.)
1. A note on the application of graph theory to digital computer programming. Inf. and Control, 3 (1960), № 2, 179—190; Заметка о приложении теории графов к про- 49

- граммированию для цифровых вычислительных машин. «Кибернетический сборник», 4. М., ИЛ, 1962, 123—134.
- К а с а х а р а, Т е з у к а, Л и н г Ш у н Т о н г, К и т а х а ш и (Kasahara Y., Tezuka K., Ling Shun Tong, Kitahashi T.)
1. Topological evaluation of system determinants. Technol. Repts. Osaka Univ., 12 (1962), Okt., 239—248. РЖМат, 1963, 11A231. 26
- К а с т е л е н (Kasteleyn P. W.)
1. Graph theory and crystal physics. Proc 1964 NATO Summer School on Graph theory and theoretical physics. 49
- К е л л и П. (Kelly P. J.)
1. A congruence theorem for trees. Pacif. J. Math., 7 (1957), № 1, 961—968. РЖМат, 1958, 2, 1063. 8,21, 50
- К е л л и Дж., К е л л и Л. (Kelly J. B., Kelly L. M.)
1. Paths and circuits in critical graphs. Amer. J. Math., 76 (1954), № 4, 786—792. РЖМат, 1955, 9, 4308. 41,48
- К е л ь м а н с А. К.
1. О числе деревьев графа. 1. Автоматика и телемеханика, 26 (1965), № 12, 2194—2204. РЖМат, 1966, 7A330. 49
- К е л ь м а н с А. К., М а м и к о н о в А. Г.
1. О построении структур передачи информации, оптимальных по надежности. Автоматика и телемеханика, 25 (1964), № 2, 207—212. РЖМат, 1965, 3B258. 49
- К е м п е (Kempe A. B.)
1. On the geographical problem of the four colours. Amer. J. Math., 2 (1879), 193—201. 48
 2. How to colour a map with four colours. Nature, 21 (1880), 399—400. 48
- К е н д а л л, Б а б и н г т о н С м и т (Kendall M. G., Babbington Smith B.)
1. On the method of paired comparisons. Biometrika, 31 (1940), 324—345. 32
- К ö н и г (König D.)
1. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, Akad. Verlag M. B. H., 1936, 258SS; N. Y., Chelsea, 1950. Zbl, 15, 375. Введение, 6,10,12 13,14 32,34 47,48
- К л и (Klee V.)
1. Diameters of polyhedral graphs. Math. Res. Lab. Boeing Scient. Res. Labs Math. Note № 307 (Clearinghouse Feder. Scient. and Techn. Inform., № AD — 411312). S. 1, 1963, 25 pp., ill. РЖМат, 1966, 4A218K. 47
 2. A property of d-polyhedral graphs. J. Math. and Mech., 13 (1964), № 6, 1039—1042. РЖМат, 1966, 1A424. 47
 3. Diameters of polyhedral graphs. Canad. J. Math., 16 (1964), № 3, 602—614. РЖМат, 1966, 4A217. 47
 4. On the number of vertices of a convex polytope. Canad. J. Math., 16 (1964), № 4, 701—720. РЖМат, 1966, 4A219. 47

- Кокстер** (Coxeter H. S. M.)
1. Map-coloring problems. Scripta Math., 23 (1958), № 1—4, 11—25. РЖМат, 1959, 9,8917. 48
 2. The four-color map problem, 1840—1890. Math. Teacher, 52 (1959), № 4, 283—289. РЖМат, 1960, 5, 5002. 48
- Колombo** (Colombo U.)
1. Sui circuiti nei grafi completi. Boll. Unione mat. ital., 19 (1964), № 2, 153—170. РЖМат, 1965, 5A257. 32
- Константинеску, Лулэа, Никулеску** (Constantinescu P., Lulea C., Niculescu S.)
1. Algoritm pentru determinarea nucleului grafului asociat jocului Nim. Studii si cercetari matematice, 15 (1964), № 1, 77—81. 33,49
- Кофман** (Kaufmann A.)
1. Quelques applications de la théorie des graphes. Rev. mécanogr., 17 (1963): № 184, 120—124, РЖМат, 1964, 1B382; № 188, 454—468 (четные страницы), РЖМат, 1964, 5A127; № 191, 663—668, РЖМат, 1964, 9B149; № 192, 726—730, РЖМат, 1964, 9B150. 49
- Кофман, Дебазейль** (Kaufmann A., Desbazeill G.)
1. La méthode du chemin critique. Paris, Dunod, 1964, 170 pp. РЖМат, 1966, 7B313K. 49
- Кофман, Мальгранж** (Kaufmann A., Malgrange Y.)
1. Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe. Rev. franç. rech. opérat., 7 (1963), № 26, 61—73. РЖМат, 1964, 2B254. 11
- Котциг** (Kotzig A.)
1. Príspevok k teórii eulerowských polyédrov. Mat.-fyz. časop., 5 (1955), № 2, 101—113. РЖМат, 1957, 1, 253. 47
 2. Súvislost' a pravidelná súvislost' konečných grafov. Bratislava, september 1956. 16,22, 35
 3. Význam kostry grafu pre konštrukciu kompozičných báz istých čiastočných grafov. Mat.-fyz. časop., 6 (1956), № 2, 68—77. РЖМат, 1959, 2, 1306. 24
 4. O rovnovážne orientovaných konečných grafoch. Časop. pěstov. mat., 84 (1959), № 1, 31—44. РЖМат, 1961, 12A381. 35
 5. Об основах графов порядка выше первого. Časop. pěstov. mat., 86 (1961), № 3, 288—307. РЖМат, 1962, 2A301. 16
 6. Beitrag zur Theorie der endlichen gerichteten Graphen. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-naturwiss. Reihe, 10 (1961), № 1, 118—125. РЖМат, 1964, 6A272, п. 9 и 1965, 2A391. 16,35
 7. Paare hajóssche Graphen. Časop. pěstov. mat., 2 (1963), № 88, 236—240. РЖМат, 1963, 12A309. 45
- Коэн, Харари, Кодэма** (Kohen D. E., Harary F., Kodama Y.)
1. On the embedding of complete graphs in orientable surfaces. Mathematica, 10 (1963), № 19, 79—83. РЖМат, 1966, 3A272. 47

- Краскал** (Kruskal J. B., Jr)
1. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), № 1, 48—50. РЖМат, 1958, 6, 4580. **49**
- Краснушкин П. Е.**
1. Эволюционные графы и их применение для исследования и решения систем линейных уравнений. Докл. АН СССР, 165 (1965), № 6, 1265 — 1268. РЖМат, 1966, 7A342. **49**
 2. Использование эволюционных графов функциональных сетей при решении краевых задач электродинамики методом сшивания. Докл. АН СССР, 167 (1966), № 1, 65—68. **49**
- Краус** (Krausz J.)
1. Démonstration nouvelle d'une théorème de Whitney sur les réseaux. Mat.-Fiz. Lapok, 50 (1943), 75—85. MR, 8, 284. **46**
- Кристи, Льюис, Мэйси** (Christie L. S., Luce R. D., Masy J.)
1. Communication and learning in a task-oriented group. M. I. T. Res. Lab. Electronica, Techn. Report, 231 (1952), 230—240. **37**
- Кроуэлл** (Crowell R. H.)
1. Graphs of linear transformations over finite fields. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 10 (1962), № 1, 103—112. РЖМат, 1964, 6B304. **45**
- Кудрявцев Л. Д.**
1. О некоторых математических вопросах теории электрических цепей. Усп. матем. наук, 3 (1948), № 4, 80—118. MR, 10, 344. **49**
- Кузнецов А. В.**
1. Об одном свойстве функций, реализуемых неплоскими неповторными схемами. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 51 (1958), 174—185. РЖМат, 1959, 9, 8891. **49**
 2. О неповторных контактных схемах и неповторных суперпозициях функций алгебры логики. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 51 (1958), 186—225. РЖМат, 1959, 9, 8892. **49**
- Куратовский** (Kuratowski G.)
1. Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math., 15 (1930), 271—283. **47**
- Лавров И. А.**
1. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий. Алгебра и логика (труды семинара Института матем. СО АН СССР), 2 (1963), № 1, 5 — 18. РЖМат, 1964, 1A112. **50**
- Лантьери** (Lantieri J.)
1. Méthode de détermination des arbres d'un réseau. Ann. Télécommun., 5 (1950), May, 204—208. **26**
- Лейфман Л. Я.**
1. Эффективный алгоритм разбиения ориентированного графа на бикомпоненты. Кибернетика, 1966, № 5, 19—23. РЖМат, 1967. 7B198. **32, 49, 50**

- Л е к к е р к е р к е р, Б о л а н д (Lekkerkerker C. G., Boland J. Ch.)
1. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundam. Math.*, 51 (1962), № 1, 45—64. *РЖМат*, 1963, 2A258. 45,49
- Л е м п л, Э в е н, С е д е р б а у м (Lempel A., Even S., Cederbaum I.)
1. An algorithm for planarity testing of graph. «Theorie des Graphes» (Actes Journées Int. Etades ICC, Rome 1966). Paris, Dunod, 1967, 215—232. *РЖМат*, 1968, 4B244. 47
- Л е с е р ф (Lecerf Y.)
1. Une représentation algébrique de la structure des phrases dans diverses langues naturelles. *C. r. Acad. sci. Paris*, 252 (1961), № 2, 232—234. *РЖМат*, 1962, 1B425. 49
- Л ё ф г р е н (Löfgren L.)
1. Solution on the realizability problem for irredundant Boolean branch-networks. *J. Franklin Inst.*, 268 (1959), № 5, 352—377. Решение проблемы реализуемости избыточными булевыми схемами. «Кибернетический сборник», 5, М., ИЛ, 1962, 60—101. *РЖМат*, 1960, 12, 13656. 27,49
- Л и н д (Lind N. C.)
1. Analysis of structures by system theory. *J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 88 (1962), № ST2, 1—22. *РЖМат*, 1963, 3B266. 49
- Л и н д с и (Lindsay J. H., Jr.)
1. An elementary treatment of the imbedding of a graph in a surface. *Amer. Math. Monthly*, 66 (1959), № 2, 117—118. *РЖМат*, 1960, 8, 8711. 47
- Л и н ф и л д (Linfield B.)
1. Espaces discrets paramétriques ou non paramétriques. Paris, Gauthier-Villars, 1925. 49
- Л и т л, М ё р т и, С у и н и, К а р е л (Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C.)
1. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operat. Res.*, 11 (1963), № 6, 972—989. *РЖМат*, 1964, 8B321. 49
- Л и х т е н б а у м Л. М.
1. Об одной теореме плоской топологии. *Матем. сборник*, 1 (1936), № 6, 907—916. 49
 2. О некоторых покрытиях двумерного и трехмерного тора. *Матем. сборник*, 22 (1948), № 1, 179—190. *MR*, 9, 523. 49
 3. Об отображениях дискретных пространств Линфилда. *Матем. сборник*, 23 (1948), № 2, 315—328. *MR*, 10, 316. 49
 4. Теорема двойственности для неособенных графов. *Усп. матем. наук*, 13 (1958), № 5, 185—190. *РЖМат*, 1959, 6, 5657. 2
 5. Следы степеней матриц соседства вершин и ребер неособенного графа. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1959, № 5, 154—163. *РЖМат*, 1961, 7A332. 2
 6. Новые теоремы о графах. *Сибирский матем. ж.*, 3 (1962), № 4, 561—568. *РЖМат*, 1963, 5A318. 2

- Л о в а с (Lovász L.)
 1. Független köröket nem tartalmazó gráfokról. *Matem. Lapok*, 16 (1965), № 3—4, 289—299. *РЖМат*, 1966, 12А347. 14
- М а г у (Maghout Kh.)
 1. Sur la détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graph. *C. r. Acad. sci. Paris*, 248 (1959), № 25, 3522—3523. *РЖМат*, 1961. 5А312. 9,42
- М а й е д а (Mayeda W.)
 1. Necessary and sufficient conditions for realizability of cut-set matrices. *IRE Trans. Circuit Theory*, 7 (1960), № 1, 79—81. 27
 2. Properties of the nonsingular matrices which transform cut-set matrices into incidence matrices. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 10 (1963), № 1, 128—130. *РЖМат*, 1964, 2А223. 27
 3. Realizability of fundamental cut-set matrices of oriented graphs. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 10 (1963), № 1, 133—134. *РЖМат*, 1965, 3В142. 38
- М а к - Г а р в е й (McGarvey D. C.)
 1. A theorem on the construction of voting paradoxes. *Econometrica*, 21 (1953), № 4, 608—610. *РЖМат*, 1962, 5В306. 49
- М а к - Л э й н (MacLane S.)
 1. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math.*, 28 (1937), 22—32. *Zbl*, 15, 375. 47
- М а р к о с я н С. Е.
 1. Критерий единственности базы дуг конечных ориентированных графов. *Изв. АН АрмССР, Математика*, 2 (1967), № 6, 399—403. *РЖМат*, 1968, 8В238. 34
- М а р к у с, В а с и л и у (Marcus S., Vasiliu Em.)
 1. Mathématiques et phonologie. La théorie des graphes et le consonantisme de la langue roumaine. I, II. *Rev. math. pures et appl. (RPR)*, 5 (1960), № 2, 319—340; № 3—4, 681—703. *РЖМат*, 1962, 1В426. 49
- М а р т и н о в Н., С е н д о в Бл.
 1. Графы, связанные с теорией механизмов. *Докл. АН Болгарии*, 15 (1962), № 2, 111—113. 49
- М а р т ы н ю к В. В.
 1. Экономное построение транзитивного замыкания бинарного отношения. *Ж. Вычисл. матем. и матем. физики*, 2 (1962), № 4, 723—725. *РЖМат*, 1963, 3В442. 12,32, 50
- М е н г е р (Menger K.)
 1. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.*, 10 (1927), 96—115. 13
 2. *Kurventheorie*. Leipzig, Berlin, 1932. 13,14
- М е н о н (Menon V. V.)
 1. The isomorphism between graphs and their adjoint graphs. *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965), № 1, 7—15. *РЖМат*, 1966, 1А411. 46
- М и д н о р (Milnor J.)
 1. Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. *Ann. Math.*, 74 (1961), № 3, 575—590. *РЖМат*, 1962, 10А232. 47

- Минти** (Minty G. J.)
1. A theorem on n -coloring the points of a linear graph. Amer. Math. Monthly, 69 (1962), № 7, 623—624. РЖМат, 1964, 6A282. 42
 2. A simple algorithm for listing all the trees of a graph. IEEE Trans. Circuit Theory, 12 (1965), № 1, 120. РЖМат, 1966. 6B167. 26
- Мордвинов** Б. С.
1. Исследование геометрических структур с применением методов теории графов. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 111—118. РЖМат, 1966, 11A290. 49
- Мудров** В. И.
1. Один способ решения задачи коммивояжера с помощью целочисленного линейного программирования (Задача нахождения гамильтоновых путей кратчайшей длины в полном графе). Ж. Вычисл. матем. и матем. физики, 3 (1963), № 6, 1137—1139. РЖМат, 1964, 8B323. 49
- Мун** (Moon J. W.)
1. Tournaments with a given automorphism group. Canad. J. Math., 16 (1964), № 3, 485—489. РЖМат, 1965, 11A283. 39
 2. On a problem of Ore. Math. Gaz., 49 (1965), № 367, 40—41. РЖМат, 1966, 4A106. 18
 3. On the diameter of a graph. Mich. Math. J., 12 (1965), № 3, 349—351. РЖМат, 1966, 6A256. 17
- Мун, Мозер** (Moon J. W., Moser L.)
1. On Hamiltonian bipartite graphs. Israel J. Math., 1 (1963), № 3, 163—165. РЖМат, 1964, 10A250. 18
 2. On cliques in graphs. Israel J. Math., 3 (1965), № 1, 23—28. РЖМат, 1966, 6A258. 9
- Мураккени, Гирлянда** (Muracchini L., Ghirlanda A. M.)
1. La teoria dei grafi. Period. mat., 43 (1965), № 4, 265—276. РЖМат, 1966, 6A255. Введение
- Мыцельский** (Mycielski J.)
1. Sur le coloriage des graphs. Colloq. Math., 3 (1953), № 2, 161—162. РЖМат, 1956, 6, 4395. 41
- Нарахари** (Narahari P. S. N.)
1. The shortest-route problem (An addendum). Operat. Res., 9 (1961), № 1, 129—132. РЖМат, 1962, 1B331. 49
 2. Minaddition and an algorithm to find the most reliable path in network. IRE Trans. Circuit Theory, 9 (1962), № 2, 190—191. РЖМат, 1963, 9B238. 49
- Нейман** (Neuman F.)
1. On a certain ordering of the vertices of a tree. Časop. pěstov. mat., 89 (1964), № 3, 323—338. РЖМат, 1965, 7A251. 21
- Нетлтон** (Nettleton R. E.)
1. Some generalized theorems on connectivity. Canad. J. Math., 12 (1960), № 4, 546—554. РЖМат, 1962, 3A274. 41
- Нетлтон, Голдберг, Грин** (Nettleton R. E., Goldberg K., Green M. S.)

1. Dense subgraphs and connectivity. *Canad. J. Math.*, 11 (1959), № 2, 262—268. *РЖМат*, 1961, 9A345. **10**
- Ньюман** (Newman D. J.)
1. A problem in graph theory. *Amer. Math. Monthly*, 65 (1958), № 8, Part 1, 611. *РЖМат*, 1959, 10, 9845. **18**
- Нэш-Вильямс** (Nash-Williams C. St. J. A.)
1. On orientations, connectivity and odd-vertex pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.*, 12 (1960), № 4, 555—567. *РЖМат*, 1962, 2A309. **35**
2. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.*, 36 (1961), pt. 4 (№ 144), 445—450. *РЖМат*, 1962, 12A193. **22**
- Оре** (Ore O.)
1. A problem regarding the tracing of graphs. *Elem. Math.*, 1951, № 6, 49—53. *MR*, 12, 845. **18**
2. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22 (1955), № 4, 625—639. *РЖМат*, 1957, 10, 7229. **6**
3. Arc covering of graphs. *Ann. mat. pura ed appl.*, ser., IV, 55 (1961), 315—322. *РЖМат*, 1962, 11A232. **18**
4. Theory of Graphs. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 38, 1962, X + 270 pp. *РЖМат*, 1964, 5A231K. Теория графов. М., «Наука», 1968. Введение, **1, 17, 18, 37, 46, 49**
5. Hamiltonian connected graphs. *J. math. pures et appl.*, 42 (1963), № 1, 21—27. *РЖМат*, 1964, 1A330. **18**
6. Graphs and their uses. New York, Random House, 1963, 131 pp. *РЖМат*, 1965, 9A48K. Графы и их применение, М., «Мир», 1965. Введение, **32, 48, 49**
- Паалман — де Миранда, Гедрлин** (Paalman de Miranda A., Hedrlin Z.)
1. Graph representation of semigroups. *Rapp. Math. Centrum*, 1962, № 20, 20 pp. *РЖМат*, 1964, 3A186. **45**
- Партер** (Parter S.)
1. On the eigenvalues and eigenvectors of a class of matrices. *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, 8 (1960), № 2, 376—388. *РЖМат*, 1962, 9A140. **49**
2. The use of linear graphs in Gauss elimination. *SIAM Rev.*, 3 (1961), № 2, 119—130. *РЖМат*, 1962, 1B170. **49**
- Партер Сеймур, Юнгс** (Parter S. V., Youngs J. W. T.)
1. The symmetrization of matrices by diagonal matrices. *J. Math. Analysis and Applic.*, 4 (1962), № 1, 102—110. *РЖМат*, 1962, 9A127. **49**
- Пекарский** (Piekarski M.)
1. Listing of all possible trees of linear graph. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 12 (1965), № 1, 124—125. *РЖМат*, 1966, 1A428. **26**
- Петерсен** (Petersen J.)
1. Die Theorie der regulären Graphen. *Acta Math.*, 15 (1891), 193—220. **46, 48**
- Плесневич** Г. С.
1. Расположение графа на плоскости. Сб. «Вычислительные системы», 6, Новосибирск, 1963, 45—53. *РЖМат*, 1964, 10A255. **47**

- П о в а р о в Г. Н.
1. О структурной теории сетей связи. Сб. «Проблемы передачи информации», I, М., АН СССР, 1959, 126—140. РЖМат, 1960, 6, 6258. **28**
- П о й я (Polya Gy.)
1. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math., 68 (1937), 145—253. Zbl, 17, 232. **Введение 49,50**
- П о п о в Б. В.
1. Полугруппы эндотопизмов μ -арных отношений. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 274 (1965), 183—202. РЖМат, 1966, 3A194. **39**
 2. О полугруппах эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений. Резюме докл. 7-й Всесоюз. коллоквиум по общей алгебре. Кишинев, 1965. **39**
 3. Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 302 (1967), 116—123. РЖМат, 1968, 4A157. **39**
 4. Полугруппы преобразований ранга не выше двух. Докл. АН СССР, 161 (1965), № 5, 1019—1022. РЖМат, 1965, 9A218. **39**
- П о п о в а Л. М.
1. Об одной полугруппе частичных эндоморфизмов множества с отношением. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 238 (1962), 49—77. РЖМат, 1963, 5A230. **39**
 2. Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением. Сиб. матем. ж., 4 (1963), № 2, 309—317. РЖМат, 1963, 9A195. **39**
- П о ш а (Pósa L.)
1. A theorem concerning Hamilton lines. Publ. Math. Inst., 7 (1962), A, 225—226. РЖМат, 1963, 6A264. **18**
 2. On the circuits of finite graphs. § 1—4. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 8 (1963—1964), № 3, 355—361. РЖМат, 1965, 2A395. **18**
- Р а д о, Р а й х е л ь д е р ф е р (Radó T., Reichelderfer P.)
1. On cyclic transitivity. Fund. Math., 34 (1947, reprod. 1962), 14—29. РЖМат, 1963, 3A73. **29,45**
- Р е д е и (Rédei L.)
1. Ein Kombinatorischer Satz. Acta Litt. Szeged, 7 (1934), 39—43. **32**
 2. Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen. Acta Math. Acad. sci. Hung., 5 (1954), № 1—2, 1—25. РЖМат, 1955, 6, 2596. **34**
- Р е ш е т н я к Ю. Г.
1. О задаче соединения элементов вычислительной системы. Сб. «Вычислительные системы», 3, Новосибирск, 1962, 17—30. РЖМат, 1964, 7B519. **49**
- Р и г е (Riguet J.)
1. Quelques applications de la théorie des relations binaires. Сб. «Collect. logique math. 1952». Paris, 1954, A5, 141—144. РЖМат, 1957, 8, 6111. **49**

- Р и д** (Read R. C.)
1. Maximal circuits in critical graphs. J. London Math. Soc., 32 (1957), № 4, 456—462. *РЖМат*, 1960, 6, 6271. 41
- Р и н г е л ь** (Ringel G.)
1. Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechts $p > 0$. J. reine und angew. Math., 190 (1952), 129—147. *MR*, 15, 143. 48
 2. Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechts $p > 0$. J. reine und angew. Math., 193 (1954), № 1—2, 11—38. *РЖМат*, 1956, 1, 273. 48
 3. Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. VEB Dtsch. Verlag Wiss. Berlin, 1959, 132 pp. *РЖМат*, 1961, 11A303K. 47,48
 4. Das Färbungsproblem auf orientierbaren Flächen. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math-naturwiss. Reihe, 10 (1961), № 1, 118. *РЖМат*, 1965, 2A390 и 1964, 6A272, п. 8. 47,48
 5. Über das Problem der Nachbargebiete auf orientierbaren Flächen. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, 25 (1961), № 1—2, 105—127. *РЖМат*, 1962, 4A279. 47
 6. Selbstkomplementäre Graphen. Arch. Math., 14 (1963), № 4—5, 354—358. *РЖМат*, 1965, 5A258. 9
 7. Die toroidale Dicke des vollständigen Graphen. Math. Z., 87 (1965), № 1, 19—26. *РЖМат*, 1966, 1A412. 47
 8. Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, 28 (1965), № 3—4, 139—150. *РЖМат*, 1966, 7A340. 47
 9. Der vollständige paare Graph auf nichtorientierbaren Flächen. J. reine und angew. Math., 220 (1965), № 1—2, 88—93, *РЖМат*, 1966, 7A341. 47
- Р и ч а р д с о н** (Richardson M.)
1. On weakly ordered systems. Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), № 2, 113—116. *MR*, 7, 235. 33
 2. Solutions of irreflexive relations. Ann. of Math., (2) 58 (1953), № 3, 573—590; errata, 5 (1954), № 4. *РЖМат*, 1955, 11, 5681. 33
 3. Extension theorems for solutions of irreflexive relations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), № 7, 649—655. *РЖМат*, 1955, 11, 5682. 33
- Р о б и ш о, Б у а в е р, Р о б е р** (Robichaud L. P. A., Boisvert M., Robert J.)
1. Graphes de fluence. Applications a l'electrotechnique et a l'electronique. Calculateurs analogiques et digitaux. Presses de l'université Laval (Québec). Canada, 1961. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. М.—Л. «Энергия», 1964, 248 стр. *РЖМат*, 1965, 10B185K. 49
- Р у а** (Roy B.)
1. Sur quelques propriétés des graphes fortement connexes. C. r. Acad. sci. Paris, 247 (1958), № 4, 399—401. *РЖМат*, 1959, 9, 8919. 32
 2. Contribution de la théorie des graphes à l'étude des problèmes d'ordonnancement. Сб. «Problèmes ordonnancement», Paris., 1964, 109—125. *РЖМат*, 1965, 6B234. 49

3. De la théorie des graphes et de ses applications en recherche opérationnelle. *Gestion*, 7 (1964), Mai, 319—341. *РЖМат*, 1965, 11В152. **49**
- Рудяну** (Rudeanu S.)
1. Notes sur l'existence et l'unicité du noyau d'un graphe. *Rev. franç. rech. opérat.*, 8 (1964), № 33, 345—352. *РЖМат*, 1966, 3А267. **33,49**
- Рэй-Чоудхури** (Ray-Chaudhuri D. K.)
1. An algorithm for a minimum cover of an abstract complex. *Canad. J. Math.*, 15 (1963), № 1, 11—24. *РЖМат*, 1966, 2А363. **49**
- Саати** (Saaty Th. L.)
1. The minimum number of intersections in complete graphs. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 52 (1964), № 3, 688—690. *РЖМат*, 1965, 9А297. **47**
- Сабидусси** (Sabidussi G.)
1. Loewy-grouppoids related to linear graphs. *Amer. J. Math.*, 76 (1954), № 3, 477—487. *РЖМат*, 1958, 1, 186. **39**
2. Graphs with given group and given graph-theoretical properties. *Canad. J. Math.*, 9 (1957), № 4, 515—525. *РЖМат*, 1961, 1А305. **39**
3. On a class of fixed-point-free graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), № 5, 800—804. *РЖМат*, 1960, 8, 8712. **39**
4. On the minimum order of graphs with given automorphism group. *Monatsh. Math.*, 63 (1959), № 2, 124—127. *РЖМат*, 1960, 8, 8713. **39**
5. The composition of graphs. *Duke Math. J.*, 26 (1959), № 4, 693—696. *РЖМат*, 1960, 9, 10123. **39**
6. Graphs multiplications. *Math. Z.*, 72 (1960), № 5, 446—457. *РЖМат*, 1960, 8, 8718. **39**
7. Graph derivatives. *Math. Z.*, 76 (1961), № 4, 385—401. *РЖМат*, 1963, 7А216. **46**
8. Vertex-transitive graphs. *Monatsh. Math.*, 68 (1964), № 5, 426—438. *РЖМат*, 1967, 10В219. **39**
- Сальвицкий** (Salwicki A.)
1. On a certain theorem of graph theory and its application to automatic programming. *Algorytmy*, 2 (1965), № 4, 69—83. *РЖМат*, 1966, 8В254. **49**
- Седлачек** (Sedláček J.)
1. O konečných orientovaných grafech. *Časop. pěstov. mat.*, 82 (1957), № 2, 195—215. *РЖМат*, 1959, 1, 186. **32,34**
2. O jednom tyru dobře orientovaných grafů. *Časop. pěstov. mat.*, 84 (1959), № 1, 7—15. *РЖМат*, 1960, 10, 11415. **32**
3. Some properties of interchange graphs. Сб. «Theory of Graphs and its Applications» (Proc. Sympos. Smolenice, 1963), Prague, 1964, 145—150. *РЖМат*, 1966, 11А250. **46,47**
4. Kombinatorika v teorii a praxi. *Nakl. Českoslov. akad. věd, Praha*, 1964, 150 s. *РЖМат*, 1965, 2А232К. **Введение, 50**
5. O kosxtrách konečných grafů. *Časop. pěstov. mat.*, 91 (1966), № 2, 221—227. *РЖМат*, 1967, 2В209. **26**
- Сешу, Рид** (Seshu S., Reed M. B.)
1. Linear graphs and electrical networks. *Addison-Wes-*

- ley Publ. Co., Inc., 1961, X + 315 pp. РЖМат, 1962, 9B216K. **38,49**
- Симонес Перейра** (Simões Pereira J. M. S.)
1. On the tree realization of a distance matrix. «Theorie des Graphes» (Actes Journées Int. Etudes ICC, Rome 1966), Paris, Dunod, 1967, 383—388. **49**
- Смоленский Е. А.**
1. Об одном способе записи графов. Ж. вычисл. мат. и матем. физики, 3 (1962), № 2, 371—372. РЖМат, 1963, 7B290. **21,49**
 2. Применение теории графов к расчету структурно-аддитивных свойств углеводов. Ж. физ. химии, 38 (1964), № 5, 1288—1291. РЖМат, 1965, 4B186. **49**
- Степанец Г. Ф.**
1. Базисные системы вектор-циклов с экстремальными свойствами в графах. Усп. матем. наук, 19 (1964), № 2, 171—175. РЖМат, 1964, 12A267. **23**
- Степанец Г. Ф., Владуц Г. Э.**
1. Один способ алгоритмического описания циклической структуры графа. Ж. вычисл. мат. и матем. физики, 3 (1963), № 3, 583—586. РЖМат, 1964, 6B302. **22**
- Стернс** (Stearns R.)
1. The voting problem. Amer. Math. Monthly, 66 (1959), № 9, 761—763. РЖМат, 1962, 5B307 и 7A224. **49**
- Стоцкий Э. Д.**
1. О вложении конечных метрик в графы. Сиб. матем. ж., 5 (1964), № 5, 1203—1206. РЖМат, 1964, 11A282. **17,21, 49**
- Стоякович** (Stojaković M.)
1. Neki nerešeni problemi teorije grafova. Mat. bibliot., 1963, № 25, 51—62. РЖМат, 1965, 5A252. **50**
- Татт** (Tutte W. T.)
1. On Hamiltonian circuits. J. London Math. Soc., 21 (1946), pt. 1 (№ 81), 98—101. MR, 8, 397. **46,47**
 2. A theorem on planar graphs. Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), № 1, 99—116. РЖМат, 1959, 7, 6704. **47**
 3. Convex representations of graphs. Proc. London Math. Soc., 10 (1960), № 38, 304—320. РЖМат, 1961, 7A329. **47**
 4. An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic. Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), № 6, 905—917. РЖМат, 1961, 7A331. **47**
 5. A non-hamiltonian planar graph. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 11 (1960), № 3—4, 371—375. РЖМат, 1961, 9A349. **47**
 6. A theory of 3-connected graphs. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. A64 (1961), № 4, 441—455; Indagationes math., 23 (1961), № 4, 441—455. РЖМат, 1964, 6A273. **14**
 7. How to draw a graph. Proc. London Math. Soc., 13 (1963), № 52, 743—767. РЖМат, 1966, 1A414. **47**
 8. The thickness of a graph. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A66 (1963), № 4, 567—577; Indagationes math., 25 (1963), № 4, 567—577. РЖМат, 1965, 6A244. **47**
 9. The non-biplanar character of the complete 9-graph. Canad. Math. Bull., 6 (1963), № 3, 319—330. РЖМат, 1964, 6A279. **47**

10. From matrices to graphs. *Canad. J. Math.*, 16 (1964), № 1, 108—127. РЖМат, 1964, 11A234. 27
- Т р а х т е н б р о т Б. А.
1. К теории неповторных контактных схем. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 51 (1958), 226—269. РЖМат, 1959, 11, 10904. 14,49
- Т р е н т (Trent H. M.)
1. A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40 (1954), № 10, 1004—1007. РЖМат, 1955, 11, 5680. 26
2. A decomposition theorem concerning linear graphs. *J. Math. and Mech.*, 13 (1964), № 2, 325—328. РЖМат, 1966, 3A269. 24
3. On the connection between the properties of oriented linear graphs and analyses of lumped physical systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, B 69 (1965), № 1—2, 79—84. РЖМат, 1966, 3B230. 49
- Т ы л к и н М. Е.
1. О геометрии Хэмминга единичных кубов. Докл. АН СССР, 134 (1960), № 5, 1037—1040. РЖМат, 1962, 5B325. 47,49
2. О реализуемости матриц расстояний в единичных кубах. Сб. «Проблемы кибернетики», 7, М., Физматгиз, 1962, 31—42. РЖМат, 1963, 4B280. 47,49
- Т э й т (Tait P. G.)
1. Remarks on the colouring of maps. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 10 (1880), 729. 48
- Т ю р е н к о в В. А.
1. Алгоритм нахождения кратчайшего пути. Сб. «Вычислительные системы», 6, Новосибирск, 1963, 41—44. РЖМат, 1964, 11B260. 11
2. О построении кратчайших соединений. Сб. «Вычислительные системы», 18, Новосибирск, 1965, 92—118. РЖМат, 1966, 3B355. 49
- У и н г (Wing O.)
1. Algorithms to find the most reliable path in a network. *IRE Trans. Circuit Theory*, 8 (1961), № 1, 78—79. РЖМат, 1961, 12A364. 49
- У и н г, К и м (Wing O., Kim W. H.)
1. The paths matrix and its realizability. *IRE Trans. Circuit Theory*, 6(1959), № 3, 267—272. РЖМат, 1960, 12, 13652. 27
2. The paths matrix and switching functions. *J. Franklin Inst.*, 268 (1959), № 4, 251—269. РЖМат, 1960, 12, 13653. 27
- У и н н (Winn C. E.)
1. A case of coloration in the four color problem. *Amer. J. Math.*, 59 (1937), 515—528. 48
2. On the minimum number of polygons in an irreducible map. *Amer. J. Math.*, 62 (1940), 406—416. MR, 1. 316. 48

- У и т н и (Whitney H.)**
1. A theorem on graphs. *Ann. of Math.*, 32 (1931), № 2, 378—390. **47**
 2. Non separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. soc.*, 34 (1932), 339—362. **24,47**
 3. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 54 (1932), № 1, 150—168. **13,40,47**
 4. 2-isomoprhic graphs. *Amer. J. Math.*, 55 (1933), № 2, 245—254. **24,27,47**
 5. Planar graphs. *Fund. Math.*, 21 (1933, reprod. 1962), 73—84. *РЖМат*, 1963, 3A259. **24,47**
 6. A characterization of the closed 2-cell. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 (1933), 261—273. **47**
- У р а к о в Х.**
1. О базах дуг ориентированного графа. *Вопросы кибернетики и вычисл. мат.*, Ташкент, 1968. **34,49,50**
- У у л к (Wolk E. S.)**
1. The comparability graph of a tree. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), № 5, 789—795. *РЖМат*, 1963, 8A232. **31,49**
- В э й н с т е й н (Wienstein J. M.)**
1. On the number of disjoint edges in a graph. *Canad. J. Math.*, 15 (1963), № 1, 106—111. *РЖМат*, 1965, 7A248. **10,41**
- У э й с м а н (Weissman J.)**
1. Boolean algebra, map coloring, and interconnections. *Amer. Math. Monthly*, 69 (1962), № 7, 608—613. *РЖМат*, 1963, 8A82. **9,43,47**
 2. The mathematical basis of the Autonetics etched interconnection design program. 1962 IRE Internat. Convent. Rec., 10 (1962), № 6, 126—133. *РЖМат*, 1963, 9B386. **9**
- Ф а л к е р с о н, Г р о с с (Fulkerson D. R., Gross O. A.)**
1. Incidence matrices and interval graphs. *RAND Corp. Mem.* № RM-3994-PR (Clearinghouse Feder. Scient. and Techn. Inform., № AD-432293). Santa Monica, Calif. 1964, VII + 39 pp., *РЖМат*, 1966, 1A444K. **45**
 2. Incidence matrices and interval graphs. *Pacif. J. Math.*, 15 (1965), № 3, 835—855. *РЖМат*, 1968, 1B274. **45**
- Ф а у л к с (Foulkes J. D.)**
1. Directed graphs and assembly schedules. *Proc. Sympos. Appl. Math.*, 10, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1960, 281—289. *MR*, 22, 9456. **32,49**
- Ф и д л е р, С е д л а ч е к (Fiedler M., Sedláček J.)**
1. О W -базисах ориентованных графов. *Časop pěstov. mat.*, 83 (1958), № 2, 214—225, *РЖМат*, 1959, 3, 2445. **36**
- Ф и д р и х И. (Fidrich I.)**
1. О перенумерации графов. *Acta Math. Acad. sci. Hung.*, 16 (1965), № 1—2, 1—7. *РЖМат*, 1966, 1A429. **38**
- Ф о р д, Ф а л к е р с о н (Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R.)**
1. *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962, 194 pp. *Потоки в сетях*. М., «Мир», 1966, 276 стр. *РЖМат*, 1964, 3B332K. **49**
- Ф р а к т (Frucht R.)**
1. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe. *Compositio math.*, 6 (1938), 139—250. *Zbl.* 20, 78. **39**

2. Sobre la construccion de sistemas parcialmente ordenados con grupo de automorphismo dado. Rev. Un. Mat. Argentina, 13 (1948), 12—18. 39
3. On the groups of repeated graphs. Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 418—420. MR, 10, 615. 39
4. Graphs of degree three with a given abstract group. Canad. J. Math., 1(1949), 365—378. MR, 11, 377. 39
5. On the construction of partially ordered systems with a given group of automorphisms. Amer. J. Math., 72 (1950), 195—199. MR, 11, 320. 39
6. Lattices with a given abstract group of automorphisms. Canad. J. Math., 2 (1950), 417—419. MR, 12, 473. 39
- Фу (Fu Yu.)
1. Applications of topological methods to probabilistic communication networks. IEEE Trans. Commun. Technol., 13 (1965), № 3, 301—307. PЖMat, 1966, 7B208. 49
- Хадвигер (Hadwiger H.)
1. Ungelöste Probleme. Elem. Math., 13 (1958), № 26, 127—128. 40
- Хайнал, Шурани (Hajnal A., Surányi J.)
1. Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. Ann. Univ. sci. Budapest, Eötvös, Sec. math., 1 (1958), 113—121. PЖMat, 1959, 11, 10912. 45,49
- Хайош (Hajós Gy.)
1. Zum Mengerschen Graphensatz. Acta Litt. Acad. sci. Math., 7 (1934), 44—47. 13,35
2. Über eine Art von Graphen. Internat. Math. Nachrichten, 11 (1957), Sondernummer 65. 45,49
- Хакими (Hakimi S. L.)
1. On trees of a graph and their generation. J. Franklin Inst., 272 (1961), № 5, 347—359. PЖMat, 1962, 7B207. 26
- Хакими, Йоу (Hakimi S. L., Yau S. S.)
1. Distance matrix of a graph and its realizability. Quart. Appl. Math., 22 (1965), № 4, 305—317. PЖMat, 1966, 7B266. 49
- Халкиас, Ким (Halkias C. C., Kim W. H.)
1. Realization of fundamental circuit and cut-set matrices. IRE Internat. Convent. Res., 10 (1962), № 2, 8—15. PЖMat, 1965, 1B221. 27
- Харари (Harary F.)
1. On arbitrary traceable graphs and directed graphs. Scripta Math., 23 (1957), № 1—4, 37—41. PЖMat, 1959, 8, 7840. 18
2. On the group of the composition of two graphs. Duke Math. J., 26 (1959), № 1, 29—34. PЖMat, 1960, 9, 10122. 39
3. The number of functional digraphs. Math. Ann., 138 (1959), № 3, 203—210. PЖMat, 1961, 7A333. 45
4. Graph theoretic methods in the management sciences. Manag. sci., 5 (1959), № 4, 387—403. PЖMat, 1961, 7B97. 49
5. An elementary theorem on graphs. Amer. Math. Monthly, 66 (1959), № 5, 405—407. PЖMat, 1960, 7, 7344. 15
6. A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues. 49

- J. Math. and Phys., 38 (1959), № 2, 104—111. РЖМат, 1962, 3В196.
7. A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning. Numer. Math., 4 (1962), № 2, 128—135. РЖМат, 1963, 2В35. 49
8. A characterization of block-graphs. Canad. Math. Bull., 6 (1963), № 1, 1—6. РЖМат, 1964, 1А328. 15,46
9. On the reconstruction of a graph from a collection of sub-graphs. Сб. «Theory of Graphs and its Applications» (Proc. Sympos. Smolenice 1963). Prague, 1964, 47—52. РЖМат, 1966, 11А240. 8,12
- Х а р а р и, К о д а м а (Harary F., Kodama Yu.)
1. On the genus of an n -connected graph. Fund. Math., 54 (1963), № 1, 7—13. РЖМат, 1966, 4А216. 47
- Х а р а р и, Н о р м а н (Harary F., Norman R. Z.)
1. Some properties of line digraphs. Rend. Circolo mat. Palermo, 9 (1960), № 2, 161—168. РЖМат, 1962, 2А307. 46
- Х а р а р и, Н о р м а н, К а р т р а й т (Harary F., Norman R. Z., Cartwright D.)
1. Structural models: an introduction to the theory of directed graphs. N. Y. Wiley, 1965. MR, 1966, 32, № 3. 32,49
- Х а р а р и, Н э ш-В и л ь я м с (Harary F., Nash-Williams C. St. J. A.)
1. On Eulerian and Hamiltonian graphs and line graphs. Canad. Math. Bull. 8 (1965), № 6, 701—709. РЖМат, 1966, 12А147. 46
- Х а р а р и, П а л м е р (Harary F., Palmer E.)
1. The reconstruction of a tree from its maximal subtrees. Canad. J. Math., 18 (1966), № 4, 803—810. РЖМат, 1967, 3В222. 21
- Х а р а р и, Р и ч а р д с о н (Harary F., Richardson M.)
1. A matrix algorithm for solutions and r -bases of a finite irreflexive relation. Naval Res. Logist. Quart., 6 (1959), № 4, 307—314. РЖМат, 1962, 5В395. 33
- Х а р а р и, Т а т т (Harary F., Tutte W. T.)
1. A dual form of Kuratowski's theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), № 1, 168. РЖМат, 1966, 1А419. 47
2. A dual form of Kuratowski's theorem. Canad. Math. Bull., 8 (1965), № 1, 17—20. РЖМат, 1966, 1А420. 47
- Х а р а р и, Х и л л (Harary F., Hill A.)
1. On the number of crossings in a complete graph. Proc. Edinburgh Math. Soc., 13 (1963), № 4, 333—338. РЖМат, 1965, 5А261. 47
- Х а р д г р э й в, Н е м х а у з е р (Hardgrave W. W., Nemhauser G. L.)
1. On the relation between the traveling-salesman and the longest-path problems. Operat. Res., 10 (1962), № 5, 647—657. РЖМат, 1963, 5В390. 49
- Х а с и л е в В. Я.
1. Элементы теории гидравлических цепей. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1964, № 1, 69—88. РЖМат, 1965, 3В129. 49
2. Элементы теории гидравлических цепей. Автореф. докт. дисс., Новосибирск, 1966, 100 стр. 49

- Х е ф ф т е р (Heffter L.)
1. Ueber das Problem der Nachbargebiete. Math. Ann., 38 (1891), 477—508. 47
- Х и в у д (Heawood P. J.)
1. Map-colour theorem. Quart. J. Math., 24 (1890), 332—338. 47,48
- Х о а н г Т у и (Hoàng Tuy)
1. Графы и транспортные задачи. Сиб. матем. ж., 2 (1963), № 2, 426—445. РЖМат, 1963, 11В428. 49
2. Đồ thị hữu hạn và các ứng dụng trong vấn đề học. Nhà Xuất Bản Khoa Học, 1964, 142 стр. 18
- Х о м е н к о Э. Я.
1. Об использовании теории линейных графов в решении систем линейных уравнений. Сб. «Вопросы теоретической кибернетики», Киев, «Наукова думка», 1965, 163—171. РЖМат, 1966, 7В378. 49
- Х о н, С е ш у, А у ф е н к а м п (Hohn F. E., Seshu S., Aufenkamp D. D.)
1. The theory of nets. IRE Trans. Electronic Comput. 6 (1957), № 3, 154—161. РЖМат, 1958, 9, 7567. 49
- Х э м м и н г е р (Hemminger R. L.)
1. On the group of directed graph. Canad. J. Math., 18 (1966), № 1, 211—220. РЖМат, 1967, 2В206. 39
- Ц о й С., Р о г о в Е. И., Г о р б е н к о В. Н.
1. Управление и теория графов. Алма-Ата, «Казахстан», 1965, 104 стр. РЖМат, 1966, 6В228К. 49
- Ч а о Ч о н г - ю н (Chao Chong-Yun)
1. On a theorem of Sabidussi. Proc Amer. Math. Soc., 15 (1964), № 2, 291—292. РЖМат, 1964, 12А268. 39
- Ч а р т р э н д (Chartrand G.)
1. The existence of complete cycles in repeated line-graphs. Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), № 4, 668—670. РЖМат, 1966, 11А251. 46
- Ч а с а р (Czászár A.)
1. Sur la représentation topologique des graphes. Fund. Math., 50 (1962), № 3, 249—256. РЖМат, 1962, 12А192. 47
- Ч е н, У и н г (Chen Y. C., Wing O.)
1. Some properties of cycle-free directed graphs and the identification of the longest path. J. Franklin Inst., 281 (1966), № 4, 293—301. РЖМат, 1966, 12А143. 37
- Ч е р е н и н В. П.
1. Символические изображения планетарных и дифференциальных механизмов. Изв. АН СССР. Техн. науки, 1958, № 1, 35—43. 49
- Ч у л и к (Čulik K.)
1. Theorie zobecněných konfigurací. Práce Brněnské základ. ČSAV, 29 (1957), № 5, 225—255. РЖМат, 1960, 7, 7345. 49
2. O cyklech cyklických grafů. Časop. pěst. mat., 83 (1958), № 4, 440—450. РЖМат, 1960, 8, 8716. 29
3. On chromatic decompositions and chromatic number of graphs. Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno, 1959, № 4, 177—185, РЖМат, 1960, 8, 8717. 40
4. Applications of graph theory to mathematical logic and linguistics. Сб. «Theory of Graphs and its Applications» 49

- (Proc. Sympos. Smolenice, 1963) Prague, 1964, 13—20. РЖМат, 1966, 11А237.
5. Использование абстрактной семантики и теории графов в многоязычных переводных словарях. Сб. «Проблемы кибернетики», 13, М., «Наука», 1965, 221—232. РЖМат, 1966, 9В318. **49**
- Шеннон (Shannon C. E.)
1. A theorem on coloring the lines of a network. J. Math. and Phys., 28 (1949), 148—151. Кибернетический сборник, 1. М., ИЛ, 1960, 249—253. К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963, 735—739. РЖМат, 1961, 5А311. **44,49**
- Шерк (Sherk F. A.)
1. A family of regular maps of type {6,6}. Canad. Math. Bull., 5 (1962), № 1, 13—19. РЖМат, 1963, 10А250. **39**
- Шнеперман Л. Б.
1. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 238 (1962), 21—37. РЖМат, 1963, 5А228. **39**
- Шульц М. М.
1. Об одной задаче выбора. Кибернетика, 1966, № 1, 30—33. РЖМат, 1966, 10А92. **50**
- Шурман (Schurman A.)
1. Rozkład konturów w grafie skończonym oraz zastosowanie teorii grafów do automatycznego programowania. Algorytmy, 2 (1965), № 4, 85—100. РЖМат, 1966, 8В255. **49**
- Эгервари (Egérvary E.)
1. Matrixok kombinatorius tulajdonságairól. Math.—Fyz. Lapok, 38 (1931), 16—27. On combinatorial properties of matrices. Office of Naval Research Logistic Project Report, Depart. of Math. Princeton Univ., 1953. **Введение 6,49**
- Эйлер (Euler L.)
1. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Acad. Petropolitanae, 8 (1736), 128—140; Opera omnia, ser. I, vol. 7, 1—10. **18**
- Элайс, Фейнштейн, Шеннон (Elias P., Feinstein A., Shannon C. E.)
1. A note on the maximum flow through a network. IRE Trans. Inform. Theory, 2 (1956), № 4, 117—119; К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике, М., ИЛ, 1963, 729—734. РЖМат, 1958, 3, 1901. **13,16**
- Эрдеш (Erdős P.)
1. Graph theory and probability. Canad. J. Math., 11 (1959), № 1, 34—38. РЖМат, 1960, 10, 11413. **41,50**
2. Remarks on a paper of Pósa. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 7 (1962), series A, № 1—2, 227—229. РЖМат, 1963, 6А265. **18**
3. On the number of complete subgraphs contained in certain graphs. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 7 (1962), series A., № 3, 459—464. РЖМат, 1964, 1А331. **9**
4. On a problem in graph theory. Math. Gaz., 47 (1963), № 361, 220—223. РЖМат, 1964, 10А254. **32**
5. Some applications of probability to graph theory and combinatorial problems. Сб. «Theory of Graphs and **50**

- its Applications» (Proc. Sympos. Smolenice 1963), Prague, 1964, 133—136. РЖМат, 1966, 11A249.
- Эрдеш, Галлаи (Erdős P., Gallai T.)
1. On the minimal number of vertices representing the edges of a graph. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 6 (1961), № 1—2, 89—96. РЖМат, 1962, 5A296. 10
- Эрдеш, Гудман, Поша (Erdős P., Goodman A. W., Rósa L.)
1. The representation of a graph by set intersections. Canad. J. Math., 18 (1966), № 1, 106—112. РЖМат, 1968, 1B258. 45
- Эрдеш, Мозер (Erdős P., Moser L.)
1. On the representation of directed graphs as unions of orderings. Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 9 (1964), № 1—2, 125—132. РЖМат, 1965, 11A280. 49
- Эрдеш, Мун (Erdős P., Moon J. W.)
1. On sets of consistent arcs in a tournament. Canad. Math. Bull., 8 (1965), № 3, 269—271. РЖМат, 1966, 3A150. 32
- Эрдеш, Секереш (Erdős P., Szekeres G.)
1. On a combinatorial problem in geometry. Compositio math., 2 (1935), 463—470. Zbl, 12, 270. 10
- Эрдеш, Харари, Татт (Erdős P., Harary F., Tutte W. T.)
1. On the dimension of graph. Mathematika, 12, pt. 2 (1965), № 24, 118—122. MR, 33, 5537. 47
- Юнг (Jung H. A.)
1. Anwendung einer Methode von K. Wagner bei Färbungsproblemen für Graphen. Math. Ann., 161(1965), № 5, 325—326. РЖМат, 1966, 8A305. 40
 2. Zu einem Isomorphiesatz von H. Whitney für Graphen. Math. Ann., 164 (1966), № 3, 270—271. РЖМат, 1966, 12A144. 40
- Юнгер (Younger D. H.)
1. Minimum feedback arc sets for a directed graph. IEEE Trans. Circuit Theory, 10 (1963), № 2, 238—245. РЖМат, 1964, 7B315. 38
- Юнгс (Youngs J. W. T.)
1. Minimal imbedding and the genus of a graph. J. Math. and Mech., 12 (1963), № 2, 303—315. РЖМат, 1966, 2A358. 47
- Яксо́н Х.
1. О решениях топологической проблемы о двух красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 46 (1957), 43—62, РЖМат, 1958, 5, 3596. 48
 2. О решениях топологической задачи о четырех красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 102 (1961), 263—274. РЖМат, 1962, 6A247. 48
- Яблонский С. В.
1. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных схем. Сб. «Проблемы кибернетики», 2, М., Физматгиз, 1959, 75—121. РЖМат, 1961, 5A209. 3,49, 50
- Ямабе, Поуп (Yamabe H., Pope D.)
1. A computational approach to the four-color problem. Math. Comput., 15 (1961), № 75, 250—253. РЖМат, 1962, 9A177. 48

П Р И М Е Ч А Н И Я *

К стр. 61. В работе

С. Я. А г а к и ш и е в а, О графах с заданными окружениями вершин. Матем. заметки, 3 (1968), № 2, 211—216. РЖМат, 1968, 9В212 сделана попытка решить вопрос о существовании графа L с окружением M , если M — простая цепь или простой цикл. Приведены конструкции графа L в случаях, когда M — простая цепь длины $l = 1, 3, 4, 5, 6, 7$ и когда M — простой цикл длины $l = 3, 4, 5, 6$. Теоремы же о несуществовании искомого L при бóльших значениях l доказаны некорректно (обе опираются на одно неверное вспомогательное утверждение).

К стр. 229. Введя еще один параметр (практически легко вычисляемый), именно длину наибольшего простого пути, от вершин которого в графе нет ответвлений, М. К. Гольдберг улучшил результат для ордианметра; прежняя оценка (**) вытекает из новой. Работа печатается в журнале «Кибернетика».

К стр. 356. Л. С. Мельников и В. Г. Визинг дали весьма простое доказательство теоремы Брукса — см. работу

L. S. M e l n i k o v and V. G. V i z i n g, New Proof of Brooks' Theorem. J. of Combinatorial Theory, 7 (1969), 555—556.

К стр. 461—463. Описание псевдоалгоритма, пригодное для машинной проверки, дано в статье А. А. Зыкова, Д. Я. Кесельмана, Ю. И. Неймарка и В. Н. Подкорытова:

A. A. S y k o w, D. J a. K e s s e l m a n, J u. I. N e i m a r k und W. N. P o d k o r y t o w, Über ein Verfahren zur Färbung ebener Triangulationen. Math. Nachr., 40 (1969), № 1—3, 51—59.

К стр. 475—476. В работе Г. Рингеля и Дж. Юнгса

Gerhard R i n g e l, J. W. T. Y o u n g s, Solution of the Heawood map-coloring problem. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 60 (1968), № 2, 438—445. РЖМат, 1969, 4В247 показано, что $\gamma(S) = \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48v(S)}) \rfloor$ для любой поверхности S с $v(S) > 0$.

К стр. 494—495. Проблема обзора баз дуг орграфа решается в некотором смысле работой

С. Е. М а р к о с я н, Матричный критерий единственности базы дуг и нахождение некоторой базы дуг. Докл. АН АрмССР, 46 (1968), № 2, 60—66. РЖМат, 1968, 11В286.

* Добавлены в корректуре.

Александр Александрович Зыков

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Редактор *И. Н. Резникова*
Художественный редактор *В. Г. Бурькин*
Обложка художника *Ю. В. Гаврилова*
Технический редактор *Т. К. Овчинникова*
Корректоры *В. И. Рахман, А. А. Симонова, В. Г. Прохорова*

Сдано в набор 13 мая 1967 г. Подписано в печать 28 августа 1969 г.
МН 00351. Бумага 60×90/16 34 печ. л.,
31 уч.-изд. л. Тираж 6000 экз.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. Новосибирск, Советская, 18. Зак. № 689
2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10
Цена 2 р. 37 к.