Н. РЫБКИН

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1938

Н. РЫБКИН

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

8—9 ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ

ИЗДАНИЕ
ДВЕНАДЦАТОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Утверждено Коллегией Наркомпроса РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Учебник «Прямолинейная тригонометрия» Н. Рыбкина, издаваемый теперь двенадцатым изданием, всегда пользовался большой популярностью благодаря систематичности изложения, выдержанности плана, краткости и точности языка, строгости и научности содержания. Несмотря на некоторую сухость изложения, этот учебник вполне применим в старших группах советской школы, помогая учащимся закреплять и повторять материал, проработанный с преподавателем.

В этом издании общий характер и система учебника сохранены; внесены только частичные изменения в отдельных местах: исправлено изложение неясных мест; проредактирован текст; некоторые доказательства заменены более простыми; опущены параграфы, не имеющие значения. В согласии с последней программой ФЗС приведены примеры решения треугольников с помощью четырехзначных таблиц. Введен небольшой исторический очерк.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Предмет тригонометрии. Слово т р и г о н о м е т р и я в переводе с греческого языка обозначает и з м е р е н и е треугольников. По своему содержанию тригонометрия тесно примыкает к геометрии и является только ее разросшейся ветвью.

В геометрии стороны и углы треугольника рассматриваются, большей частью, независимо одни от других, без установления точных зависимостей величины сторон от величины углов. Исключения из этого встречаются, но редко (например теорема о том, что катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы). Напротив, в тригонометрии вывод этих зависимостей — главная цель. Теоремы о зависимости сторон от углов приведены в стройную систему, проникнутую единым методом.

Для исследования зависимости линий от углов в тригонометрии употребляются особые вспомогательные величины — тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

Тригонометрия распадается на две части: собственно тригонометрию и гониометрию — учение об углах, где изучаются свойства тригонометрических функций.

Тригонометрия имеет большое применение в практике: при геодезических работах — определение высот и расстояний, съемка планов, триангуляция; в астрономии — определение высот и азимутов светил, склонения и прямого восхождения, вообще небесных координат; а знание небесных координат ведет к вычислению географических координат; в механике — проектирование силы на ось, направление равнодействующей, законы периодического движения; в машиноведении — расчет нарезок, зубчатых колес и т. п.

Возникла тригонометрия в Греции в связи с астрономией; астрономия в свою очередь развивалась под влиянием потребностей мореплавания и земледелия; для безопасности морских путешествий требовалось определять по звездам правильный курс корабля. Для земледелия требовался точный календарь, который могла дать астрономия, основанная на математике и, в частности, на тригонометрии.

Автором первых тригонометрических таблиц считается Гиппарх, живший во II в. до нашей эры. Таблицы Гиппарха содержали длину хорд, соответствующих центральным углам.

За 100 лет до нашей эры ученый Менелай открыл основы сферической тригонометрии. Клавдий Птоломей, знаменитый автор докоперниканской системы мира, в своей книге Syntaxis Mathematica поместил таблицы длины хорд в отношении к радиусу, принятому за единицу. Радиус он делил на 60 частей, каждую из частей — еще раз на 60 частей и еще раз на 60 частей; эти части назывались partes minutae primae и partes minutae secundae, откуда и произошли наши названия: минуты («уменьшенные первые части») и секунды («уменьшенные вторые части»). Таблицы Птоломея содержали величину хорд для центрального угла в 1°, $1^1/_2{}^\circ$, 2°, $2^1/_2{}^\circ$...

В средние века тригонометрия развивалась в Индии. Индусы употребляли половину хорды, т. е. линию синуса; они же ввели косинус. Индусам была известна формула $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (которую, впрочем, не писали буквами, а выражали словами), приведение синуса и косинуса тупого угла и таблицы синусов.

В IX и X вв. арабские ученые ввели тангенс и составили более точные таблицы синусов. Развитие тригонометрии у арабов объясняется тоже потребностями астрономии и мореплавания, так как арабы вели большую торговлю по Средиземноморскому побережью. Из арабских ученых особенно знамениты Аль-Баттани и Абд-уль-Уафа.

В Европе первым писателем по тригонометрии был английский ученый Брадвардин (XIII и XIV вв.). Систематический курс по тригонометрии написал в XV в. немецкий ученый Иоганн Мюллер из Кенигсберга, писавший под именем Региомонтанус (латинское название Кенигсберга). В книге «О треугольниках всех видов» он приводит решение плоских и сферических треугольников. Региомонтанус излагает тригонометрию уже как самостоятельную науку, независимую от астрономии.

С XVI в., после изобретения Виетом буквенного алгебраического счисления, формулы тригонометрии принимают

современный алгебраический характер. Соединение тригонометрии с алгеброй и анализом дало новый толчок к развитию всей математики, неразрывно связанной со всем техническим прогрессом. Из других ученых работали по тригонометрии Виет (изобретатель алгебры), Романус, Непер (изобретатель натуральных логарифмов), Снеллиус (автор триангуляционной съемки), Потентот и гениальный математик Эйлер; последнему принадлежит введение тригонометрических функций с помощью тригонометрического круга.

§ 2. Понятие о функции. Существуют переменные величины, связанные между собою так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой. Таковы, например, переменные величины y и x в следующих равенствах: $y=a+x$; $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$ и т. д.; таковы же: сторона квадрата и его площадь, радиус шара и его объем и т. д.

Переменная величина, значения которой соответствуют значениям другой переменной величины, называется ее функцией. Так, например, можно сказать, что площадь круга есть функция его радиуса: действительно, с изменением длины радиуса изменяется и площадь круга, и при этом каждому значению радиуса соответствует определенное значение площади круга (и наоборот: радиус круга мы назовем функцией его площади, если будем назначать площадь и по ней определять радиус).

Та величина, в зависимости от которой изменяется функция, называется аргументом функции. Так, если равенство $y=x^3$ служит для определения y по данному x, то x есть аргумент, а y — функция; также в равенстве $y=\lg N$ имеем: N есть аргумент, y — значение функции, $\lg$ — обозначение взятой функции. (Вообще: аргумент — независимое переменное, функция — переменное зависимое.)

§ 3. Измерение дуг и углов. Как известно из геометрии, углы определяются с помощью дуг.

Если дуга служит для определения угла, то ее выражают или в частях окружности или в частях радиуса[1]).

Первый способ дает для дуги и угла градусное выражение, известное из геометрии.

Второй способ состоит в том, что дугу выражают отвлеченным числом, показывающим ее отношение к радиусу;

---

[1]) Первый способ нагляднее и применяется в практических измерениях (на угломерных инструментах), второй предпочитают в теоретических вопросах.

если, например, сказано «величина дуги равна 2,43», то это значит, что выпрямленная дуга содержит 2,43 радиуса; полуокружность по этому способу выразится отношением $\pi R : R$, т. е. числом π, а, следовательно, четверть окружности — числом $\frac{\pi}{2}$ и т. п. Такое выражение дуги мы будем называть отвлеченным, или радианным.

Чтобы при этом способе центральный угол выразился тем же числом, что и его дуга, надо, чтобы угловая единица соответствовала дуге длиною в радиус. Такой угол называется радианом. Таким образом мы можем сказать: отвлеченное выражение угла есть его отношение к радиану; например, выражение «угол $\frac{3}{2}\pi$» понимается как «угол $\frac{3}{2}\pi$ радианов».

Так как в длине окружности радиус содержится 2π раз, то градусная величина радиана (и дуги, равной радиусу) есть $\frac{360^\circ}{2\pi}$, что равно $57^\circ 17' 44'',8$ (с точностью до $0,05''$).

Полезно запомнить еще следующее. Отвлеченное выражение всей окружности есть $2\pi R : R$, т. е. число 2π, а ее градусное выражение есть 360°; отсюда получаются следующие соответствия:

360°	180°	90°	270°	60°	45°	30°	18°
2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

Выведем теперь такие формулы для перехода от градусного выражения на радианное и обратно.

Обозначим градусное выражение какой-нибудь дуги или угла через α, а отвлеченное — через a. Так как для полной окружности градусное выражение есть 360°, а отвлеченное — 2π, то получим пропорцию:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{a}{2\pi}, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{a}{\pi};$$

отсюда:

$$a = \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} \tag{1}$$

и

$$\alpha = 180^\circ \cdot \frac{a}{\pi}. \tag{2}$$

Пример. Найти отвлеченное выражение угла $67^\circ 30'$.

По формуле (1), заменяя α через $67^\circ 30'$, найдем:

$$x = \pi \cdot \frac{67^\circ 30'}{180^\circ} = \frac{3}{8}\pi;$$

если же подставить сюда приближенное значение π, то получим $x = 1,17810$ с точностью до половины одной стотысячной.

(Без применения формулы можно получить x постепенно из следующих равенств:

$$360^\circ \ldots 2\pi; \; 1^\circ \ldots \frac{2\pi}{360}; \; 67^\circ 30' = 67\frac{1^\circ}{2} \ldots \frac{2\pi}{360} \cdot 67\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi.)$$

§ 3а. Длина дуги. Если обозначить через r радиус окружности, через l — длину дуги, а через a — радианное измерение соответствующего центрального угла, то согласно определению радианного измерения получим:

$$a = \frac{l}{r},$$

откуда

$$l = ar,$$

т. е. *длина дуги равна радиусу, умноженному на радианное измерение дуги.*

Эта формула часто употребляется в физике и технике.

Для вычислений, связанных с радианной мерой, следует пользоваться таблицами для перевода градусов в радианы и обратно. (В таблицах Брадиса это таблица VII, в таблицах Пржевальского — XI.)

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ.

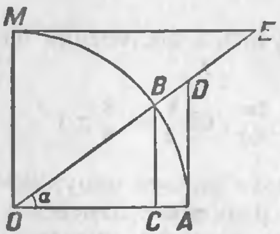
(Гониометрия.)

I. Тригонометрические функции острого угла.

§ 4. Названия и обозначения. Тригонометрические функции угла следующие: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

Они имеют следующие обозначения: sin, cos, tg, ctg, sec, cosec; при этом угол записывается рядом с названием функции, так что, например, синус угла α пишется: $\sin\alpha$.

§ 5. Определение тригонометрических функций острого угла. Возьмем какой-нибудь острый угол α и сделаем его центральным, описав из его вершины дугу произвольным радиусом, длину которого обозначим через R. Чтобы различить между собой радиусы, образующие угол, будем представлять себе, что при изменении угла α (черт. 1) радиус OA сохраняет свое положение, а радиус OB вращается; в этом смысле будем называть радиус OB подвижным радиусом угла, а радиус OA неподвижным. Обращаясь теперь к определениям тригонометрических функций, скажем сначала вообще, что они представляют собою отношения к радиусу особых линий в круге, проводимых для данного угла как для центрального. Для построения этих линий, кроме дуги AB, пользуются еще ее продолжением и радиусом OM, проведенным под прямым углом к OA.



Черт. 1.

Определения отдельных тригонометрических линий и функций для острого угла суть следующие:

1) Перпендикуляр (BC), опущенный из конца подвижного радиуса на неподвижный, называется линией синуса, а отношение этой линии к радиусу есть синус данного угла $\left(\sin\alpha = \frac{BC}{R}\right)$.

2) Расстояние (OC) от центра до линии синуса называется линией косинуса, а отношение этой линии к радиусу есть косинус данного угла $\left(\cos\alpha = \frac{OC}{R}\right)$.

3) Касательная (AD), проведенная из конца неподвижного радиуса до встречи с продолженным подвижным радиусом, называется линией тангенса, а ее отношение к радиусу есть тангенс данного угла $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{R}\right)$.

4) Касательная (ME), проведенная из конца радиуса перпендикулярного к неподвижному до встречи с продолженным подвижным радиусом, называется линией котангенса, а ее отношение к радиусу есть котангенс данного угла $\left(\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ME}{R}\right)$.

5) Расстояние (OD) от центра до конца линии тангенса называется линией секанса, а отношение этой линии к радиусу есть секанс данного угла $\left(\sec\alpha = \frac{OD}{R}\right)$.

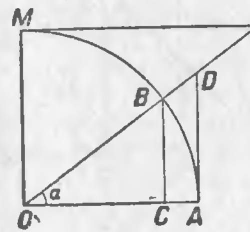
6) Расстояние (OE) от центра до конца линии котангенса называется линией косеканса, а отношение этой линии к радиусу есть косеканс данного угла $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OE}{R}\right)$.

Следствие. Тригонометрические функции, представляя собою величину отношений между линиями, суть отвлеченные числа.

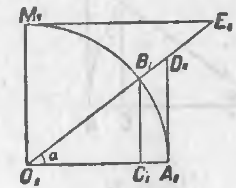
Так, например, если радиус равен 9 *см*, а линия синуса равна 6 *см*, то для синуса получим отвлеченное число $\frac{2}{3}$.

§ 6. ***Теорема.*** *Тригонометрические функции данного угла не зависят от длины радиуса.*

Пусть на чертежах 2 и 3 углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны данному углу α, а радиусы дуг не равны. Значения тригонометрических функций при радиусе R обозначим через sin, cos ..., а при радиусе R_1 через $\sin_1$, $\cos_1$ ...; требуется доказать, что $\sin_1\alpha = \sin\alpha$, $\cos_1\alpha = \cos\alpha$ и т. д.



Черт. 2.



Черт. 3.

Доказательство. Треугольники $O_1B_1C_1$, $O_1D_1A_1$ и $O_1M_1E_1$ соответственно подобны треугольникам OBC, ODA и OME (вообще: чертеж 3 подобен чертежу 2); поэтому:

$$\frac{B_1C_1}{R_1} = \frac{BC}{R}, \quad \frac{O_1C_1}{R_1} = \frac{OC}{R}, \quad \frac{A_1D_1}{R_1} = \frac{AD}{R}$$

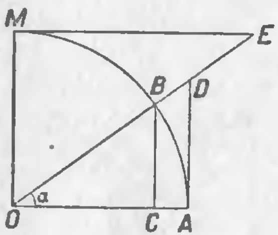
и т. д., т. е. $\sin_1\alpha = \sin\alpha$, $\cos_1\alpha = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}_1\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ и т. д.

Итак, для одного и того же угла тригонометрическая функция при всяком радиусе имеет одно и то же значение.

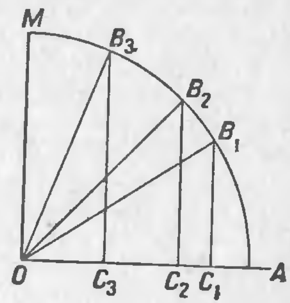
§ 7. В предыдущем параграфе было доказано, что с изменением длины радиуса тригонометрические функции данного угла не меняются; но если мы изменим величину угла, то, как видно по чертежу, каждая из тригонометрических функций изменит свое значение. Отсюда тригонометрические числа и получили свое название тригонометрических функций угла.

§ 8. Так как центральный угол и его дуга выражаются одним и тем же числом, то тригонометрические функции угла суть в то же самое время и тригонометрические функции дуги, понимая под словом д у г а ее градусное или отвлеченное выражение. Ввиду этого мы будем иногда, для удобства, вместо углов пользоваться дугами, иногда же будем рассматривать угол и дугу под общим названием а р г у м е н т.

§ 9. Изменение тригонометрических функций с изменением угла от 0° до 90°. Если на чертеже 4 угол α будет постепенно возрастать, то отношения: $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ и $\frac{OD}{R}$ будут увеличиваться, а отношения: $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ и $\frac{OE}{R}$ будут уменьшаться (черт. 5);



Черт. 4.



Черт. 5.

таким образом, с возрастанием острого угла его синус, тангенс и секанс возрастают, а косинус, котангенс и косеканс убывают. Когда угол α достигает 90°, то $\frac{BC}{R}$ обращается в 1, $\frac{OC}{R}$ — в 0, $\frac{AD}{R}$ — в ∞, $\frac{ME}{R}$ — в 0, $\frac{OD}{R}$ — в ∞ и $\frac{OE}{R}$ — в 1; таким образом: $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90° = \infty$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$, $\sec 90° = \infty$ и $\operatorname{cosec} 90° = 1$.

При обратном переходе $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ и $\frac{OD}{R}$ убывают, а $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ и $\frac{OE}{R}$ возрастают. Если угол α обращается в нуль, то $\frac{BC}{R}$ обращается в 0, $\frac{OC}{R}$ — в 1, $\frac{AD}{R}$ — в 0, $\frac{ME}{R}$ — в ∞, $\frac{OD}{R}$ — в 1 и $\frac{OE}{R}$ — в ∞; таким образом: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0 = \infty$, $\sec 0 = 1$ и $\operatorname{cosec} 0 = \infty$.

Итак, если α возрастает от 0 до 90°, то:

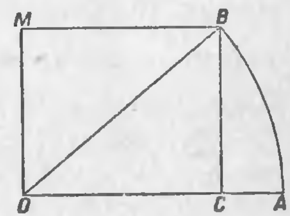
$\sin\alpha$ возрастает от 0 до 1;
$\cos\alpha$ убывает от 1 до 0;
$\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от 0 до ∞;
$\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от ∞ до 0;
$\sec\alpha$ возрастает от 1 до ∞;
$\operatorname{cosec}\alpha$ убывает от ∞ до 1.

Так как 0 и 90° суть к р а й н и е значения острого угла, то полученный вывод показывает также, какие значения вообще способна принимать каждая из тригонометрических функций острого угла; так, например, мы видим, что число 3 может быть тангенсом, котангенсом, секансом и косекансом, но не может быть ни синусом, ни косинусом.

Равенства, содержащие ∞, надо понимать условно: так, выражение $\operatorname{tg} 90° = \infty$ имеет лишь тот смысл, что с приближением угла к 90° его тангенс неограниченно возрастает.

§ 10. Построение острого угла по данной тригонометрической функции. Из § 6 и 9 видно, что каждому значению угла α соответствует свое особое значение каждой из тригонометрических функций. Займемся теперь обратным вопросом, т. е. нахождением угла по данной его функции. Воспользуемся для этого примерами построения.

Пример 1. Построить угол, зная, что его синус равен $\frac{2}{3}$ (черт. 6).

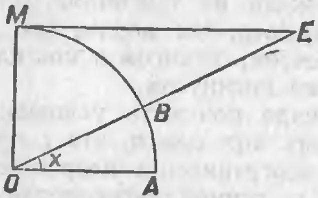


Черт. 6.

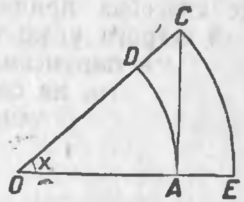
Р е ш е н и е. Проведя произвольную прямую OA, примем точку O за центр дуги, а OA — за неподвижный радиус искомого угла и опишем этим радиусом дугу. Чтобы синус был равен $\frac{2}{3}$, конец дуги должен быть удален от OA на расстояние, которое относилось бы к радиусу, как $2:3$. Поэтому поступаем так: восставив перпендикуляр OM, равный $\frac{2}{3}$ OA, проведем из точки M параллель к OA, и в точку ее пересечения с дугой проведем радиус; угол AOB есть искомый, т. е. $\sin AOB = \frac{2}{3}$. Заметим, что этот угол не зависит от длины радиуса, так как при всяком другом радиусе мы получим треугольник, подобный треугольнику OBC и, следовательно, с углами такой же величины.

Пример 2. Построить угол, если известно, что его котангенс равен 2 (черт. 7).

Решение. Возьмем центральный прямой угол AOM, из точки M проведем касательную ME, равную двум радиусам, и точку E соединим с центром; угол AOB есть искомый, так как $\operatorname{ctg} AOB = \frac{ME}{R} = \frac{2R}{R} = 2$. Изменив длину радиуса, мы получим треугольник, подобный треугольнику MOE, поэтому угол MEO, а следовательно, и угол AOB сохранят свою величину.



Черт. 7.



Черт. 8.

Пример 3. Построить угол, секанс которого равен $\frac{4}{3}$.

Решение. Опишем какую-нибудь дугу и, приняв один из радиусов (OA) за неподвижный, проведем из его конца касательную. Так как секанс равен $\frac{4}{3}$, то конец касательной должен отстоять от центра на $\frac{4}{3}$ радиуса. Чтобы достигнуть этого, возьмем отрезок OE, равный $\frac{4}{3}\ OA$, и конец его перенесем на касательную; угол AOD будет искомый. Как и в двух предыдущих примерах, результат не зависит от длины радиуса (черт. 8).

Предлагаем теперь самому учащемуся сделать построение в остальных случаях, пользуясь, например, следующими числами: $\cos x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{4}{7}$ и $\operatorname{cosec} x = 2$.

§ 11. Итак, для каждого значения тригонометрической функции получается определенный острый угол, независимо от длины радиуса; а раньше мы видели, что каждому углу соответствует определенное значение тригонометрической функции, также независимо от длины радиуса; таким образом можно сказать, что *острый угол и тригонометрическая функция вполне определяют друг друга.*

§ 12. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Между тригонометрическими функциями одного и того же угла легко обнаружить весьма простую зависимость (черт. 9).

1) Из прямоугольного треугольника OBC имеем $BC^2 + OC^2 = OB^2$. Разделив здесь обе части на R^2, получим:

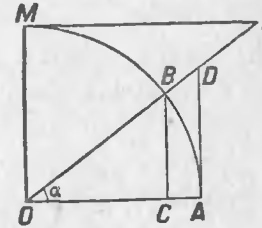
$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2,$$

или

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \text{(I)}$$

2) Из подобия треугольников ODA и OBC имеем: $\frac{AD}{OA} = \frac{BC}{OC}$; отсюда, заменяя OA через R и разделив на R оба члена второго отношения, найдем $\frac{AD}{R} = \frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$, или

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad \text{(II)}$$



Черт. 9.

3) Из подобия треугольников EOM и OBC находим: $\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}$, откуда $\frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$, или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \text{(III)}$$

4) Из подобия треугольников ODA и OBC находим: $\frac{OD}{OA} = \frac{OB}{OC}$; отсюда $\frac{OD}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$, или $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, откуда

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1. \qquad \text{(IV)}$$

5) Из подобия треугольников EOM и OBC имеем $\frac{OE}{OM} = \frac{OB}{BC}$; отсюда $\frac{OE}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$, или $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, откуда

$$\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sin\alpha = 1. \qquad \text{(V)}$$

§ 13. Между тригонометрическими функциями одного угла существует только пять различных соотношений. Чтобы убедиться в этом, начнем с построения.

Действительно, достаточно одной функции, чтобы построить угол (§ 10); а полученный угол определит собой остальные пять функций; таким образом, если известна одна функция, то по ней можно найти остальные пять. Но для определения пяти неизвестных мы должны иметь и пять уравнений, независимых друг от друга. Если бы таких уравнений было шесть, то для всех шести функций получились бы определенные значения, между тем как они изменяются вместе с углом.

§ 14. Кроме пяти основных формул, полученных в § 12, полезно запомнить еще следующие три, которые можно уже вывести из основных.

1) Перемножая соответственные части равенств II и III, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \qquad \text{(VI)}$$

2) Деля равенство I на $\cos^2\alpha$ и применяя формулы II и IV, получим (если переставим слагаемые первой части):

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha. \qquad \text{(VII)}$$

3) Деля равенство I на $\sin^2\alpha$ и применяя формулы III и V, найдем:

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha. \qquad \text{(VIII)}$$

Замечание 1. Самостоятельно формула VI получается из подобия треугольников, а формулы VII и VIII—при помощи теоремы Пифагора.

Замечание 2. Заметим для памяти, что в обычном ряде функции sin, cos, tg, ctg, sec, cosec, равно удаленные от концов, дают в произведении единицу (см. формулы IV, V и VI).

Основными функциями мы будем считать sin, cos и tg (из них простейшие — sin и cos), а остальные три суть количества, обратные к ним: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$.

§ 15. С помощью формул, полученных в § 12 и 14, легко по одной функции найти все остальные. Так, например, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, то будем иметь последовательно:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3};$$

$$\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha;\quad \sec^2\alpha=\frac{25}{16};\quad \sec\alpha=\frac{5}{4};$$

$$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1;\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha};\quad \cos\alpha=\frac{4}{5};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;\quad \sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \sin\alpha=\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin\alpha=1;\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{5}{3}.$$

Еще пример. Выражая все функции через $\sin\alpha$, получим:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

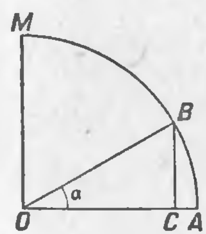
$$\sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

§ 16. Из подобия треугольников *OBC*, *ODA* и *EOM* (черт. 9) видно, между прочим, что шесть тригонометрических функций острого угла представляют собою не что иное как шесть различных отношений, возможных между сторонами одного прямоугольного треугольника, взятыми попарно.

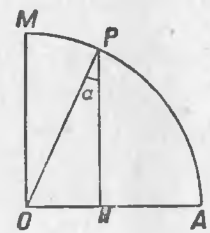
Действительно, из сторон треугольника *OBC* можно составить следующие шесть отношений: $\frac{BC}{OB}$, $\frac{OC}{OB}$, $\frac{BC}{OC}$, $\frac{OC}{BC}$, $\frac{OB}{OC}$ и $\frac{OB}{BC}$. Но, описав дугу *ABM* и построив треугольники *ODA* и *EOM*, мы заменяем указанный ряд отношений следующим: $\frac{BC}{R}$, $\frac{OC}{R}$, $\frac{AD}{R}$, $\frac{ME}{R}$, $\frac{OD}{R}$ и $\frac{OE}{R}$. Такая замена представляет значительные преимущества, одно из которых состоит, например, в том, что отношения принимают при этом вид дробей, приведенных к общему знаменателю, чем облегчается их сравнение между собой.

§ 17. Зависимость между тригонометрическими функциями дополнительных углов. Дополнительными углами мы будем называть такие углы, сумма которых равна прямому углу.

Например: α и $90°-\alpha$; α и $\frac{\pi}{2}-\alpha$; 26° и 64°.



Черт. 10.



Черт. 11.

На чертеже 10 построен $\angle AOB=\alpha$, а также его линии синуса и косинуса, так что $\sin\alpha=\frac{BC}{R}$; $\cos\alpha=\frac{OC}{R}$.

На чертеже 11 построен $\angle AOP=90°-\alpha$ и его линии синуса и косинуса, так что $\sin(90°-\alpha)=\frac{NP}{R}$; $\cos(90°-\alpha)=\frac{ON}{R}$.

Так как треугольники OBC и NOP равны, то $NP=OC$; $ON=BC$; следовательно:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha; \qquad (1)$$

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha. \qquad (2)$$

Для остальных функций, чтобы не осложнять чертежа новыми линиями, мы применим алгебраический способ, т. е. вывод сделаем из равенств (1) и (2) на основании зависимости функции от sin и cos (§ 12); получим:

$$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha; \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\frac{\cos(90°-\alpha)}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha; \qquad (4)$$

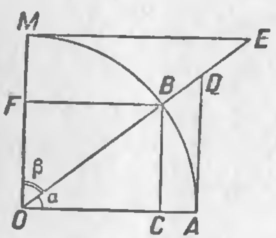
$$\sec(90°-\alpha)=\frac{1}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha; \qquad (5)$$

$$\operatorname{cosec}(90°-\alpha)=\frac{1}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha. \qquad (6)$$

Замечаем следующее: *в дополнительных углах функции одного угла соответственно равны сходным* [1]) *функциям другого.*

Так $\operatorname{tg}63°=\operatorname{ctg}27°$; $\sec\frac{\pi}{6}=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$, т. е. $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$, и т. п.

§ 18. Другой вывод. Отложим (черт. 12) $\angle AOB=\alpha$ и построим все его тригонометрические линии. Тогда для угла $MOB=90°-\alpha$ неподвижным радиусом будет OM, подвижным OB. Применяя теперь определения тригонометрических функций, данных в § 5, найдем:



Черт. 12.

$$\sin\alpha=\frac{BC}{R}=\frac{OF}{R}=\cos(90°-\alpha);$$

$$\cos\alpha=\frac{OC}{R}=\frac{BF}{R}=\sin(90°-\alpha);$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AD}{R}=\operatorname{ctg}(90°-\alpha);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{ME}{R}=\operatorname{tg}(90°-\alpha).$$

§ 19. Примеры вычисления тригонометрических функций по данному углу. Не касаясь общего приема, разберем здесь несколько случаев, легко решаемых с помощью геометрии.

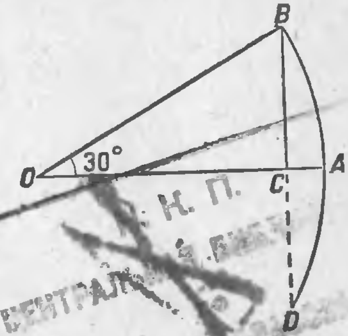
[1]) То-есть сходным по названию.

Дан угол $30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (черт. 13). Дополним линию синуса до хорды; тогда получим сторону правильного вписанного шестиугольника, а она равна радиусу; таким образом $BC=\frac{R}{2}$, и, следовательно, $\sin 30°=\frac{1}{2}$. Остальные пять функций найдем по формулам зависимости:

$$\cos 30°=\sqrt{1-\sin^2 30°}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}30°=\frac{\sin 30°}{\cos 30°}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{ctg}30°=\frac{\cos 30°}{\sin 30°}\left(\text{или } \frac{1}{\operatorname{tg}30°}\right)=\sqrt{3}.$$



Черт. 13.

2) Для угла $60°$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ имеем:

$$\sin 60°=\frac{\frac{1}{2}a_3}{R}=\frac{\frac{1}{2}R\sqrt{3}}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

далее, поступая, как в первом примере, найдем:

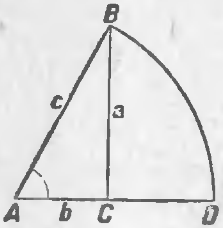
$$\cos 60°=\frac{1}{2},\ \operatorname{tg}60°=\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}60°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Возьмем угол $45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Применяя § 17, будем иметь: $\sin 45°=\cos 45°$, $\operatorname{tg}45°=\operatorname{ctg}45°$. Если $\sin 45°=\cos 45°$, то $\operatorname{tg}45°=1$, а следовательно, и $\operatorname{ctg}45°=1$. Далее получим: $\sin 45°=\frac{1}{\operatorname{cosec}45°}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, а следовательно, $\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Если угол равен $18°$ $\left(\frac{\pi}{10}\right)$, то линия синуса равна половине стороны правильно вписанного десятиугольника, а так как выражение этой стороны в радиусе есть $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, то линия синуса будет равна $\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$, и потому $\sin 18°=$ $=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

§ 20. Зависимость между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Покажем теперь на примере, как посредством тригонометрических функций выражается зависимость между сторонами и углами треугольника. Возьмем для этого прямоугольный треугольник как случай самый простой и основной.

Условимся сначала в обозначениях. Будем обозначать длину сторон треугольника буквами a, b и c, а величину противолежащих им углов соответственно буквами A, B и C; при этом будем предполагать, что все стороны измерены одной и той же единицей. В прямоугольном треугольнике прямой угол будем обозначать буквой C.



Черт. 14.

Обратимся теперь к выводу формул.

I. Описав на чертеже 14 радиусом c дугу BD, будем иметь по § 5:

$$\frac{a}{c} = \sin A \qquad (1)$$

и

$$\frac{b}{c} = \cos A, \qquad (2)$$

т. е. *от деления катета на гипотенузу получается: 1) синус острого угла, если делится противолежащий этому углу катет*, или *2) косинус острого угла, если делится прилежащий катет.*

II. Деля равенство (1) на равенство (2), а затем обратно, найдем:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A \qquad (3)$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A, \qquad (4)$$

т. е. *от деления катета на катет получается: 1) тангенс острого угла, если делится противолежащий катет, или 2) котангенс острого угла, если делится прилежащий катет.*

§ 21. Из равенства (1) § 20 следует: $a = c \cdot \sin A$; но $\sin A$ можно заменить, по § 17, через $\cos B$, так как $A + B = 90°$; тогда будем иметь $a = c \cdot \cos B$.

Таким образом: *катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего катету угла или на косинус прилежащего.*

Из равенства (3) в § 20 следует: $a = b \cdot \operatorname{tg} A$, а заменяя $\operatorname{tg} A$ через $\operatorname{ctg} B$, получим еще $a = b \cdot \operatorname{ctg} B$.

Таким образом: *катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к первому катету.*

С помощью равенств: $\frac{a}{c} = \sin A$ и $\sin A = \cos B$ получим:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B}.$$

Таким образом: *гипотенуза равна катету, разделенному на синус противолежащего ему угла или на косинус прилежащего.*

§ 22. Примеры, поясняющие решение треугольников. Понятие о таблицах. Для решения треугольников, кроме тригонометрических формул, необходимо иметь еще т а б л и ц ы, чтобы по данному углу находить значение тригонометрической функции и, обратно, по данной тригонометрической функции находить угол. Такие таблицы составляют весьма важную практическую принадлежность тригонометрии. Наиболее известны «Четырехзначные математические таблицы» В. Брадиса и пятизначные таблицы Е. Пржевальского.

Пример 1. Положим, что в прямоугольном треугольнике ABC дано: $AB = 5$ *см* и $\angle A = 24°$; требуется решить треугольник, т. е. вычислить BC, AC и $\angle B$.

Р е ш е н и е. Имеем $B = 90° - A = 66°$. Далее находим по § 21: $a = c \cdot \sin A = 5 \cdot \sin 24°$ и $b = c \cdot \cos A = 5 \cdot \cos 24°$; подставляя теперь из таблицы $\sin 24°$ и $\cos 24°$, получим: $a = 5 \cdot 0{,}407 = 2{,}035$ и $b = 5 \cdot 0{,}914 = 4{,}57$. Таким образом $BC = 2{,}035$ *см* и $AC = 4{,}57$ *см*.

Сделаем поверку: $a^2 = 2{,}035^2 = 4{,}1412$; $b^2 = 4{,}57^2 = 20{,}8849$; следовательно, $a^2 + b^2 = 25{,}0261$, а должно быть 25. Это несовпадение объясняется тем, что взятые нами значения функций были только приближенные.

Пример 2. Положим, что в прямоугольном треугольнике даны катеты: $a = 14$ и $b = 15$; требуется определить гипотенузу и углы.

Р е ш е н и е. По § 20 имеем: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{14}{15}$; вычислив это отношение с тремя десятичными знаками, получим $\operatorname{tg} A = 0{,}933$; этому тангенсу в таблице соответствует угол 43°; таким образом $A = 43°$, а следовательно, $B = 90° - A = 47°$. Найдем теперь гипотенузу, причем сделаем это тригонометрическим способом: по § 21 имеем: $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{14}{\sin 43°}$; подставляя из таблицы $\sin 43°$, найдем $c = 14 : 0{,}682 = 20{,}528$.

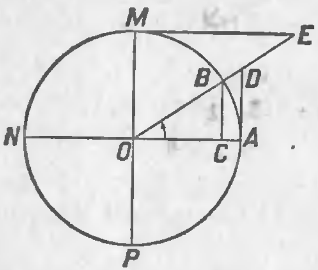
Сделаем поверку: по теореме Пифагора найдем: $C = \sqrt{14^2 + 15^2} = 20{,}518$, а ранее получено 20,528.

Поверка показывает, что произведенные вычисления не имеют значительной точности. Чтобы достигнуть большей точности, надо взять более подробные таблицы и с бо́льшим числом десятичных знаков; но тогда вычисления становятся уже затруднительны, и потому предпочитают производить эти вычисления при помощи логарифмов; а в таком случае и в таблицах выгоднее иметь не самые тригонометрические функции, а их готовые логарифмы; так в практике и поступают, таблицы же *натуральных тригонометрических величин*[1]) употребляются сравнительно редко.

В предыдущих примерах мы вовсе не касались косоугольных треугольников. Их решение легко сводится на решение прямоугольных треугольников, если провести высоту, но, как увидим впоследствии, выгоднее пользоваться для них особыми теоремами.

II. Тригонометрические функции углов от 90° до 360°.

§ 23. Предварительные замечания. Вместо четверти круга, как было раньше (черт. 1, стр. 8), возьмем теперь полный круг (черт. 15), проведем неподвижный радиус OA и перпендикулярный к нему радиус OM и продолжим их за центр. Диаметры AN и MP будем называть для краткости *горизонтальным* и *вертикальным*, а полученные четверти круга (квадранты) будем считать так: AOM—первая четверть, MON—вторая четверть, NOP—третья четверть и POA—четвертая четверть.



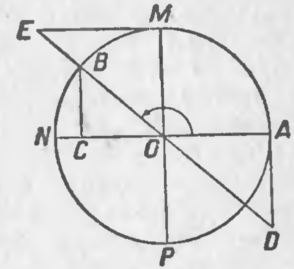
Черт. 15.

Углы и дуги будем отсчитывать так же, как и прежде, т. е. от *общего начала* OA, вверх от него (против стрелки часов).

§ 24. Построение тригонометрических линий. Те определения тригонометрических линий, которые даны в § 5 для острого угла, распространим теперь и на углы, бóльшие прямого.

Возьмем *тупой* угол AOB (черт. 16). Линией синуса для него будет перпендикуляр BC, опущенный из конца подвижного радиуса на *продолжение* неподвижного; линией косинуса будет OC. Линию тангенса получим, если из точки A проведем касательную и продолжим радиус OB так, чтобы они пересеклись; для этого придется касательную направить вниз от точки A, а радиус OB продолжить за центр по OD; линией тангенса будет тогда AD. Для получения линии котангенса надо из точки M провести касательную до пересечения с продолженным радиусом OB; а чтобы это пересечение произошло, касательная должна итти влево от точки M; линией котангенса будет тогда ME. Линиями секанса и косеканса будут OD и OE.

[1]) В отличие от логарифмированных значений функции ее неизмененные значения называются *натуральными*.



Черт. 16.

Точно так же строятся тригонометрические линии и в том случае, когда подвижной радиус находится в III или IV четверти (черт. 17 и 18).

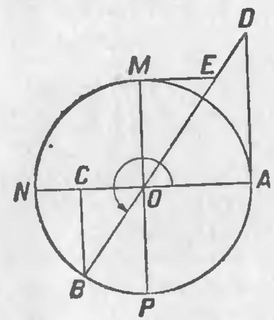
Сравнивая чертеж 15 с тремя другими чертежами, мы замечаем, что однородные тригонометрические линии *расположены* на них не одинаково, а именно:

1) линия синуса (BC) в I и II четвертях лежит выше горизонтального диаметра, а в III и IV—ниже его;

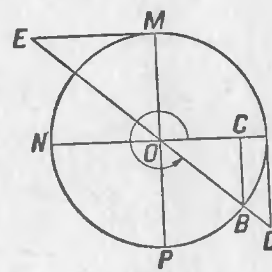
2) линия косинуса (OC) в I и IV четвертях лежит направо от центра, а во II и III—налево от него;

3) линия тангенса (AD) в I и III четвертях направлена от точки касания вверх, а во II и IV—вниз;

4) линия котангенса (ME) в I и III четвертях направлена от точки касания вправо, а во II и IV—влево;



Черт. 17.



Черт. 18.

5) линия секанса (OD) в I и IV четвертях направлена от центра в сторону подвижного радиуса, а во II и III—обратно подвижному радиусу;

6) линия косеканса (OE) в I и II четвертях направлена от центра в сторону подвижного радиуса, а в III и IV—обратно подвижному радиусу.

Таким образом при увеличении угла от 90° до 360° каждая тригонометрическая линия принимает двоякое направление: или такое, как в I четверти, или обратное ему.

§ 25. Составление тригонометрических функций. В предыдущем параграфе было сказано, что каждая тригонометрическая линия может иметь два противоположных направления: прямое, т. е. такое, как в I четверти, и обратное ему. То или другое из них зависит от величины угла, а потому, составляя тригонометрические функции для различных углов от 0° до 360°, мы должны выразить также и направление тригонометрических линий. Для этой цели пользуются знаками плюс и минус, а именно: *если направление тригонометрической линии прямое, то перед ее отношением к радиусу ставят знак +; если же направление обратное, то ставят знак —.*

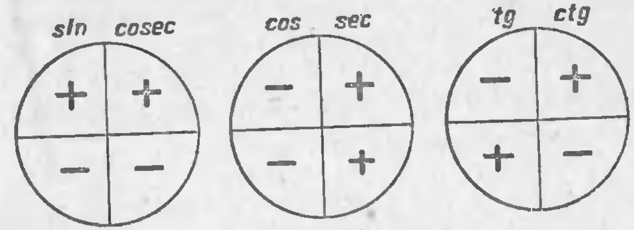
Таким путем получается следующий состав тригонометрических функций для каждой четверти (по чертежам 15—18):

	I	II	III	IV
sin	$+\frac{BC}{R}$	$+\frac{BC}{R}$	$-\frac{BC}{R}$	$-\frac{BC}{R}$
cos	$+\frac{OC}{R}$	$-\frac{OC}{R}$	$-\frac{OC}{R}$	$+\frac{OC}{R}$
tg	$+\frac{AD}{R}$	$-\frac{AD}{R}$	$+\frac{AD}{R}$	$-\frac{AD}{R}$
ctg	$+\frac{ME}{R}$	$-\frac{ME}{R}$	$+\frac{ME}{R}$	$-\frac{ME}{R}$
sec	$+\frac{OD}{R}$	$-\frac{OD}{R}$	$-\frac{OD}{R}$	$+\frac{OD}{R}$
cosec	$+\frac{OE}{R}$	$+\frac{OE}{R}$	$-\frac{OE}{R}$	$-\frac{OE}{R}$

Таким образом тригонометрические функции для углов от 0° до 360° будут состоять уже из двух элементов: знака и абсолютной величины, и, следовательно, это будут уже числа

алгебраические. Так, если на чертеже 17 $\angle AOB = \alpha$, $R = 1{,}2$ *см* и $BC = 0{,}9$ *см*, то $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$.

Наконец, что касается до обобщенного определения тригонометрических функций, то его можно выразить так: *тригонометрические функции суть положительные или отрицательные числа, показывающие отношение тригонометрических линий к радиусу и их прямое или обратное направление.*

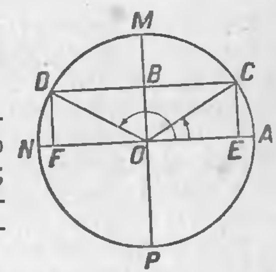


Черт. 19.

На чертеже 19 показаны знаки тригонометрических функций по четвертям.

Независимость тригонометрических функций от длины радиуса (§ 6) существует и теперь: для знаков она очевидна, а для абсолютных величин доказывается как раньше.

§ 26. Построение угла по данной тригонометрической функции. Значение функций теперь можно брать как положительное, так и отрицательное; подробности самого построения и его результат, как увидим, здесь будут уже несколько иные, чем в § 10.



Черт. 20.

Для построения мы будем теперь пользоваться полным кругом (произвольного радиуса) с двумя главными диаметрами; знак функции укажет нам направление тригонометрической линии, а абсолютная величина функции—ее отношение к радиусу.

Обратимся к примерам.

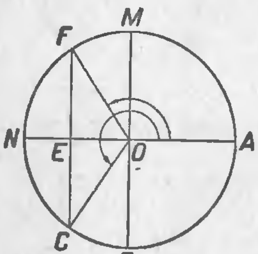
Пример 1. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Так как данный синус положителен, то линия синуса должна быть в верхнем полукруге, а ее длина должна составлять $\frac{1}{2}$ радиуса. Поэтому поступаем так (черт. 20): выше горизонтального диаметра проводим параллель к нему на расстоянии $OB=\frac{1}{2}R$ до пересечения с окружностью; оно будет в двух точках (C и D), которыми и определяются два угла. Получим: $x_1=\angle AOC$ и $x_2=\angle AOD$. Действительно:

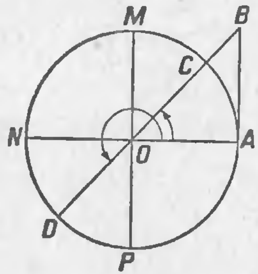
$$\sin AOC=\frac{CE}{R}=\frac{\frac{1}{2}R}{R}=\frac{1}{2};\quad \sin AOD=\frac{DF}{R}=\frac{\frac{1}{2}R}{R}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. $\cos x=-\frac{3}{5}$.

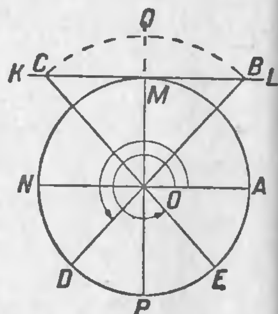
Решение. Значение косинуса дано отрицательное, следовательно, линия косинуса должна быть влево от центра; в ней должно быть три таких части, каких в радиусе пять. Поэтому отложим $OE=\frac{3}{5}R$, после чего через E проведем прямую, перпендикулярную к горизонталь-



Черт. 21.



Черт. 22.



Черт. 23.

ному диаметру (или параллельную MP), до пересечения с окружностью: оно будет в двух точках (F и C). Искомые углы: $x_1=\angle AOF$ и $x_2=\angle AOC$ ($>180°$) (черт. 21).

Пример 3. $\operatorname{tg} x=1$.

Решение. Сначала построим линию тангенса: она должна итти вверх от точки A (так как данный тангенс положителен), а ее длина должна быть равна радиусу; проводим поэтому касательную $AB=R$. Через точку B должно проходить продолжение подвижного радиуса, причем это может быть или продолжение вперед или продолжение назад; проводим поэтому из B через центр секущую $BCOD$ (черт. 22). Получим два угла: $x_1=\angle AOC$ и $x_2=\angle AOD$ ($>180°$).

Пример 4. $\operatorname{cosec} x=-\frac{4}{3}$.

Решение. Линия косеканса должна иметь начало в центре круга, конец—на касательной KL, а ее длина равна $\frac{4}{3}R$; поэтому

из центра O радиусом $OQ=\frac{4}{3}R$ (черт. 23) описываем дугу, которая пересечет KL в точках B и C; OB и OC—два одинаково возможных положения линии косеканса. Так как данный косеканс отрицателен, то надо сделать OB и OC направленными обратно подвижному радиусу, так что искомые положения подвижного радиуса будут OD и OE, а углы: $x_1=\angle AOD$ ($>180°$) и $x_2=AOE$ ($>180°$).

Предоставляем самому учащемуся проделать построение и в остальных случаях (взяв, например, $\sin x=-\frac{3}{5}$; $\cos x=\frac{3}{4}$; $\operatorname{tg} x=-2$; $\operatorname{ctg} x=\frac{7}{4}$; $\operatorname{ctg} x=-3$; $\sec x=2$; $\operatorname{cosec} x=\frac{5}{4}$).

Что касается результатов построения, то важно заметить, что ответов теперь получается не один, а два, что соответствует тому, что в таблице § 25 у каждой функции каждый знак встречается в двух четвертях.

§ 27. Распространение формул § 12. Покажем, что соотношения между функциями одного угла, выведенные нами для I четверти, будут верны и для других четвертей.

Прямоугольность и подобие треугольников OBC, ODA и EOM, которыми мы пользовались в § 12, существуют не только в I четверти, но и в остальных четвертях (черт. 15—18), а потому геометрические соотношения, полученные нами в § 12, останутся в силе и теперь. Таким образом во всех четвертях:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2+\left(\frac{OC}{R}\right)^2=1; \tag{1}$$

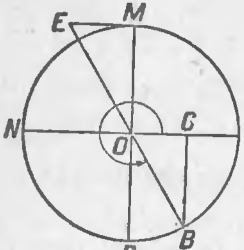
$$\frac{AD}{R}=\frac{BC}{R}:\frac{OC}{R}; \tag{2}$$

$$\frac{ME}{R}=\frac{OC}{R}:\frac{BC}{R}; \tag{3}$$

$$\frac{OD}{R}\cdot\frac{OC}{R}=1; \tag{4}$$

$$\frac{OE}{R}\cdot\frac{BC}{R}=1. \tag{5}$$

Здесь имеются только абсолютные величины функций; для того же, чтобы вошли самые функции, необходимы еще знаки при абсолютных величинах. Но, просматривая таблицу § 25 по отдельным четвертям, мы видим, что от присоединения требуемых знаков равенства (1)—(5) не нарушатся. Действительно: в равенстве (1) можно в скобках приписывать знаки благодаря четности показателей; равенства (2) и (3) не нарушатся вследствие того, что «частное» знаков, недостающих в правой части, всегда одинаково со знаком, недостающим в левой части[1]); равенства (4) и (5) не нарушатся потому, что недостающие знаки всегда одинаковы.



Черт. 24.

Итак, формулы I—V (§ 12) распространяются и на углы, бо́льшие прямого: это будет верно и для формул VI—VIII (§ 14), потому что они получаются из них как их следствие.

Пример. Для наглядности разберем хотя бы один случай более подробно. Выведем, например, формулу $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ для IV четверти.

По чертежу 24: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{ME}{R}$, $\cos\alpha = +\frac{OC}{R}$ и

$$\sin\alpha = -\frac{BC}{R}. \qquad (a)$$

Так как $\triangle OME \sim \triangle OBC$, то $\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}$, а отсюда

$$\frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}. \qquad (b)$$

Припишем здесь нужные нам знаки: они таковы, что равенство от этого не нарушится [см. (a)]; получим:

$$-\frac{ME}{R} = \frac{\left(+\frac{OC}{R}\right)}{\left(-\frac{BC}{R}\right)}, \text{ т. е. } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

§ 28. Применение формул I—VIII. Это применение несколько отличается от сделанного в § 15, как покажут примеры.

Пример 1. Найти $\operatorname{cosec}\alpha$, зная, что α оканчивается в IV четверти[2]) и $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$.

[1]) По таблице § 25 видно: где sin и cos имеют одинаковые знаки (в I и III), там tg и ctg положительны; а где sin и cos имеют разные знаки (во II и IV), там tg и ctg отрицательны.

[2]) Т. е. подвижной радиус угла α находится в IV четверти.

Решение. По формуле VIII имеем: $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}$. Так как косеканс в IV четверти отрицателен, то далее напишем: $\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{\frac{289}{64}} = -\frac{17}{8}$.

Пример 2. Выразить $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$.

Решение. Из формулы I находим $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, и так как косинус вообще может иметь и положительное и отрицательное значение, а данных для выбора знака у нас нет, то принимаем $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Пример 3. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, найти остальные функции.

Решение. Вычисляем по тому же плану, как в § 15, но, определяя $\sec\alpha$, извлекаем теперь корень со знаком и удержим оба знака, потому что при отрицательном тангенсе секанс может быть как положительный (IV четверть), так и отрицательный (II четверть); отсюда уже получим соответственно по два знака и в дальнейшем. Окончательно будем иметь:

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3};\ \sec\alpha = \pm\frac{5}{4};\ \cos\alpha = \pm\frac{4}{5};\ \sin\alpha = \pm\frac{3}{5};\ \operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{5}{3};$$

или, выписывая каждый ответ отдельно:

$$1)\ \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3},\ \sec\alpha = +\frac{5}{4},\ \cos\alpha = +\frac{4}{5},\ \sin\alpha = -\frac{3}{5},\ \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{3};$$

$$2)\ \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3},\ \sec\alpha = -\frac{5}{4},\ \cos\alpha = -\frac{4}{5},\ \sin\alpha = +\frac{3}{5},\ \operatorname{cosec}\alpha = +\frac{5}{3}.$$

(Первый ответ относится к IV четверти, а второй — ко II четверти.)

§ 29. Изменение тригонометрических функций с возрастанием угла от 0° до 360°. Случай изменения угла от 0° до 90° был уже рассмотрен раньше, в § 9. Для изменений угла от 90° до 180°, от 180° до 270° и от 270° до 360° воспользуемся соответственно чертежами 15, 16 и 17 (§ 24), а именно: определив сначала знак функции, будем относительно абсолютной величины соображать так же, как и в § 9. Окончательные результаты представлены в прилагаемой таблице: для каждой четверти в аргументе и функции показаны только крайние значения; между ними функция или только увеличивается или только уменьшается.

	I $0 \dots 90^\circ$ $(0 \dots \frac{1}{2}\pi)$	II $90^\circ \dots 180^\circ$ $(\frac{1}{2}\pi \dots \pi)$	III $180^\circ \dots 270^\circ$ $(\pi \dots \frac{3}{2}\pi)$	IV $270^\circ \dots 360^\circ$ $(\frac{3}{2}\pi \dots 2\pi)$
sin	$0 \dots +1$	$+1 \dots 0$	$0 \dots -1$	$-1 \dots 0$
cos	$+1 \dots 0$	$0 \dots -1$	$-1 \dots 0$	$0 \dots +1$
tg	$0 \dots +\infty$	$-\infty \dots 0$	$0 \dots +\infty$	$-\infty \dots 0$
ctg	$+\infty \dots 0$	$0 \dots -\infty$	$+\infty \dots 0$	$0 \dots -\infty$
sec	$+1 \dots +\infty$	$-\infty \dots -1$	$-1 \dots -\infty$	$+\infty \dots +1$
cosec	$+\infty \dots +1$	$+1 \dots +\infty$	$-\infty \dots -1$	$-1 \dots -\infty$

Так как тригонометрические функции выражаются теперь количествами алгебраическими, то увеличение и уменьшение функции надо отличать от увеличения и уменьшения ее абсолютной величины; например: с возрастанием аргумента от 90° до 180° абсолютная величина косинуса увеличивается; но сам косинус, будучи здесь числом отрицательным, с увеличением абсолютной величины, наоборот, уменьшается. Точно так же с возрастанием аргумента в алгебраическом смысле тангенс всегда увеличивается, а котангенс уменьшается.

К полученному выше добавим еще несколько указаний.

I. Из таблицы видно, в каких границах изменяется каждая функция; отметим это:

1) синус и косинус изменяются от $+1$ до -1 (так что их абсолютная величина никогда не превышает единицы);

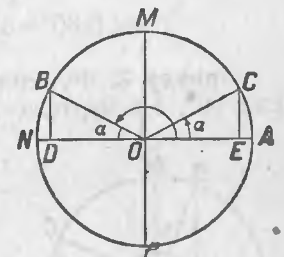
2) тангенс и котангенс изменяются между $+\infty$ и $-\infty$ (поэтому тангенсом и котангенсом может быть всякое число);

3) секанс и косеканс изменяются от $+1$ до $+\infty$ и от -1 до $-\infty$ (следовательно, их абсолютная величина не бывает менее единицы).

II. Обратим внимание на двойственность некоторых результатов. Так, мы видим, что $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$, если 90° получено увеличением острого угла, и $\operatorname{tg} 90^\circ = -\infty$, если 90° получено уменьшением тупого угла; если же происхождение 90° неизвестно, то придется написать $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty$. Подобным же образом мы возьмем: $\cos 270^\circ = -0$ или $\cos 270^\circ = +0$, смотря по тому, к III или IV четверти мы отнесем угол 270°; вообще же, следовательно, $\cos 270^\circ = \pm 0$. Точно так же будем иметь $\operatorname{ctg} 180^\circ = \pm\infty$ и т. п.

Замечание. Освоившись по чертежу с изменениями синуса и косинуса, изменения остальных функций легко проследить и без чертежа — по их зависимости от синуса и косинуса. Так, например, изменения $\operatorname{tg}\alpha$ можно рассмотреть как изменение дроби $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, изменения $\sec\alpha$ как изменение дроби $\frac{1}{\cos\alpha}$, и т. д.

§ 30. Формулы приведения. Тригонометрические функции углов, бо́льших прямого, легко приводятся к функциям острого угла. Для этой цели служат те два острых угла, которые подвижной радиус образует с горизонтальным и вертикальным диаметрами (они дополнительные); так, если на чертеже 16 $\angle AOB = 143^\circ$, то указанные острые углы суть: $\angle NOB = 37^\circ$ и $\angle MOB = 53^\circ$, и можно перейти на любой из них. Как это делается, рассмотрим сначала на примерах.



Черт. 25.

Пример 1. Функции тупого угла привести к его дополнению до 180°. На чертеже 25 для тупого угла AOB дополнением до 180° служит острый угол NOB, величину которого обозначим через α; тогда $\angle AOB = 180^\circ - \alpha$. Чтобы для угла α составить функции, мы должны сперва отложить его от общего начала OA: пусть $\angle AOC = \alpha$. Проведя линии синуса BD и CE, получим:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = +\frac{BD}{R} \text{ и } \sin\alpha = +\frac{CE}{R},$$

так как $BD = CE$, то:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \qquad \text{(a)}$$

Далее:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{OD}{R} \qquad (1)$$

и

$$\cos\alpha = +\frac{OE}{R};\tag{2}$$

здесь вторые части, имея равные абсолютные величины (так как $OD=OE$), различаются знаками; чтобы уравнять их вполне, не изменяя равенства (1), умножим обе части равенства (2) на -1, отчего получим:

$$-\cos\alpha = -\frac{OE}{R}.\tag{3}$$

В равенстве (1) и (3) вторые части равны; следовательно,

$$\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha.\tag{b}$$

С помощью формул (a) и (b) находим для остальных функций (по §§ 28 и 12):

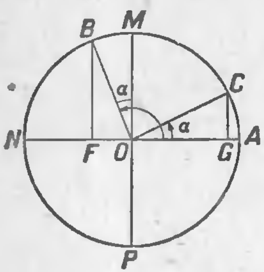
$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = \frac{\cos(180^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(180^\circ-\alpha) = \frac{1}{\cos(180^\circ\ \ \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha} = -\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha) = \frac{1}{\sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Пример 2. Функции тупого угла привести к его избытку над 90°. На чертеже 26 угол AOB можно рассматривать как $90^\circ+\alpha$, обозначая через α величину угла MOB. Отложив от общего начала $\angle AOC=\alpha$ и проведя линии синуса BF и CG, будем иметь:



Черт. 26.

$$\sin(90^\circ+\alpha) = +\frac{BF}{R};\tag{1}$$

$$\cos(90^\circ+\alpha) = -\frac{OF}{R};\tag{2}$$

$$\sin\alpha = +\frac{CG}{R};\tag{3}$$

$$\cos\alpha = +\frac{OG}{R}.\tag{4}$$

Так как $BF=OG$, то

$$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha.\tag{a}$$

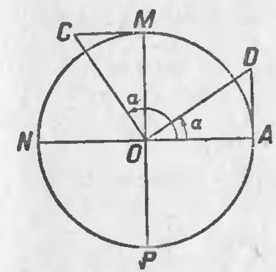
Так как $OF=CG$, то, умножив обе части равенства (3) на -1, увидим, что

$$\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha.\tag{b}$$

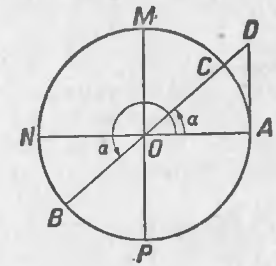
Из равенств (a) и (b) можно сделать вывод для остальных функций тем же путем, как в примере 1; получится:

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sec(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha;\quad \operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha) = \sec\alpha.$$



Черт. 27.



Черт. 28.

Пример 3. Привести $\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)$ к углу α (не сводя ctg на другие функции того же угла) (черт. 27). Проведя для угла AOC линию котангенса MC, получим треугольник MOC, потом отложим угол α от общего начала и составим треугольник, равный полученному; таким будет треугольник AOD. Далее имеем:

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = -\frac{MC}{R};\tag{1}$$

$$MC = AD;\tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = +\frac{AD}{R};\tag{3}$$

$$-\operatorname{tg}\alpha = -\frac{AD}{R}.\tag{4}$$

Из равенств (1), (2) и (4) следует:

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 4. Привести $\sec(180^\circ+\alpha)$ к углу α. По чертежу 28 имеем:

$$\sec(180^\circ+\alpha) = -\frac{OD}{R};\tag{1}$$

$$\sec\alpha = +\frac{OD}{R}; \qquad (2)$$

$$-\sec\alpha = -\frac{OD}{R}. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует:

$$\sec(180°+\alpha) = -\sec\alpha.$$

Правила и примеры. Разбор всех случаев ($90° \mp \alpha$, $180° \mp \alpha$, $270° \mp \alpha$, $360° - \alpha$) дал бы нам 42 формулы приведения[1]), но все они сводятся к следующему простому правилу:

1) если приводимая функция имеет отрицательное значение, то надо функции острого угла умножить на — 1;

2) название приводимой функции сохраняется, если острый угол взят при горизонтальном диаметре, и меняется на сходное, если острый угол взят при вертикальном диаметре.

Приложим это правило к примерам:

1. Привести к острому углу $\operatorname{tg} 130°$. Так как $130° = 180° - 50° = 90° + 40°$, то привести можно к 50° и к 40°. Зная, что $\operatorname{tg} 130°$ отрицателен, и помня, что 50° считаются от горизонтального диаметра, а 40° от вертикального, напишем: $\operatorname{tg} 130° = -\operatorname{tg} 50°$ и $\operatorname{tg} 130° = -\operatorname{ctg} 40°$.

2. Привести $\sec 295°$ к острому углу, не превышающему 45°. Имеем: $295° = 360° - 65° = 270° + 25°$; следовательно, требуемый угол есть 25°. Так как $\sec 295°$ имеет положительное значение и 25° считаются от вертикального диаметра, то по правилу получим: $\sec 295° = \operatorname{cosec} 25°$.

3. Еще примеры:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;

b) $\operatorname{tg} 1{,}2\pi = \operatorname{tg}(\pi + 0{,}2\pi) = \operatorname{tg} 0{,}2\pi$;

c) $\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 31. Другой вывод формул приведения. 1) Предварительно обратим внимание на то, что отношение тригонометрической линии к радиусу представляет собой для I четверти всегда полное значение функции, а для остальных четвертей иногда только абсолютную величину функции[2]). Обратимся теперь к чертежу 29. Сравнивая тригонометрические линии дуг AMC, $AMND$ и $AMNPE$ с тригонометрическими линиями дуги AB, видим, что они или одни и те же или соответственно равны. Отсюда заключаем, что для дуг $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ и $360° - \alpha$ абсолютные величины функций соответственно равны функциям дуги α.

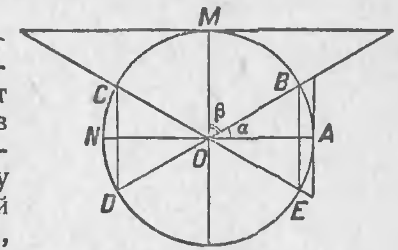
2) Так как выражение: $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ и $360° - \alpha$ можно заменить через: $90° + \beta$, $270° - \beta$, $270° + \beta$, а функции дуги α равны сходным функциям дуги β (как дополнительной), то на основании п. 1 заключаем, что для дуг: $90° + \beta$, $270° - \beta$ и $270° + \beta$ абсолютные величины функций равны сходным функциям дуги β.

3) Из равенств (1) и (2) вместе следует: чтобы составить какую-нибудь формулу приведения, надо приводимую функцию выразить с помощью знака и абсолютной величины, заменяя абсолютную величину функцией острого угла; при этом название приводимой функции следует сохранить, если ее аргумент содержит в своем составе 180° или 360°, и изменить на сходное, если аргумент содержит 90° или 270°. Так, получим: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\cos(270° - \beta) = -\sin\beta$ и т. д.

[1]) Это название прилагается и к формулам § 17.

[2]) Когда эта функция отрицательна.

§ 32. Вычисление угла по данному значению тригонометрической функции (в пределах от 0° до 360°). Мы уже видели в § 26, что при построении угла, соответствующего данному значению тригонометрической функции, получаются два угла, принадлежащие каким-нибудь двум четвертям. Величину этих углов можно определить по формулам приведения, пользуясь этими формулами в обратном смысле.



Черт. 29.

Поясним это на примерах:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; найти угол x. Первый ответ: $x = 30°$; второй угол, имеющий данный синус, это угол II четверти: $180° - 30° = 150°$; ответ: $x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$.

2) $\cos x = 0{,}974$; по натуральным таблицам имеем: $x_1 = 13°$; кроме того, положительное значение косинуса имеется еще в IV четверти: $x_2 = 360° - 13° = 347°$.

3) $\operatorname{tg} x = 1$; соответствующий острый угол есть 45°; $x_1 = 45°$. По черт. 22, стр. 24, видно, что $x_2 = 180° + 45° = 225°$.

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$; найти угол x. Отрицательные значения синуса имеются в III и IV четвертях; зная, что $\sin 30° = +\frac{1}{2}$, заключаем, что искомый угол $x_1 = 180° + 30° = 210°$; $x_2 = 360° - 30° = 330°$.

III. Углы отрицательные. Углы, большие 360°.

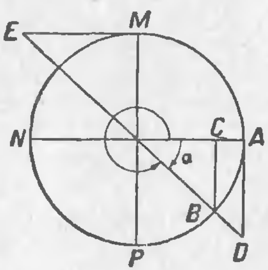
§ 33. Об отрицательных углах. Если рассматривают не только величину угла, но и направление, в котором он отсчитывается, то угол, образуемый вращением, обратным обычному, выражают, по правилу Декарта, отрицательным числом.

На тригонометрическом круге отрицательными будут углы, отложенные вниз от неподвижного радиуса OA (черт. 30).

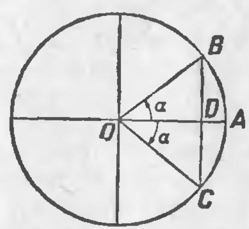
Отрицательным углам будут соответствовать и отрицательные дуги: такими должны считаться дуги, отложенные вниз от общего начала A.

Тригонометрические функции для отрицательного угла составляются так же точно, как для примыкающего к нему положительного угла. Так, по чертежу 30 получится:

$$\sin(-\alpha) = -\frac{BC}{R};\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\frac{ME}{R};\ \sec(-\alpha) = +\frac{OD}{R} \text{ и т. д.}$$



Черт. 30.



Черт. 31.

§ 34. Найдем зависимость между функциями отрицательного угла и такого же по величине положительного.

По чертежу 31 имеем: $\sin(-\alpha) = -\frac{CD}{R}$ и $\sin\alpha = +\frac{BD}{R}$; отсюда, замечая, что $CD = BD$, и умножая обе части второго равенства на -1, получим: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Далее: $\cos(-\alpha) = +\frac{OD}{R}$ и $\cos\alpha = +\frac{OD}{R}$; следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Итак, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Отсюда найдем: $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$; и тем же способом: $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Правило. *В случае косинуса и секанса минус в аргументе можно опустить, а в остальных случаях минус у аргумента можно вынести за знак функции*[1]).

Примеры.

$$\sin(-50°) = -\sin 50°; \quad \cos(-50°) = \cos 50°;$$
$$\operatorname{tg}(-300°) = -\operatorname{tg} 300°; \quad \sec(-300°) = \sec 300°;$$
$$\sin(\alpha - 90°) = \sin[-(90° - \alpha)] = -\sin(90° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

§ 35. Об углах, превышающих 360°. Периодичность тригонометрических функций. В теории тригонометрических функций рассматриваются углы, превышающие 360°.

С введением отрицательных углов и углов, превышающих 360°, угол является уже такой переменной величиной, которая может принимать всевозможные значения, от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$.

В § 29 было показано, как изменяются тригонометрические функции с возрастанием угла от 0° до 360°, т. е. при одном полном обороте подвижного радиуса. При дальнейшем возрастании угла подвижной радиус будет принимать положения, которые уже были пройдены им при первом вращении, а потому тригонометрические функции будут получать свои прежние значения в прежнем порядке.

В случае отрицательных углов при изменении угла от 0° до $-360°$, от $-360°$ до $-720°$ и т. д. подвижной радиус вращается так же, как при уменьшении положительного угла от 360° до 0°, а потому и тригонометрические функции изменяются так же, как для этого перехода.

Таким образом, при изменении угла от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$ тригонометрические функции изменяются периодически, т. е. повторяясь через равные промежутки в аргументе. Наименьшее приращение в аргументе, после которого ход изменения функции повторяется, называется периодом этой функции. Предыдущее рассуждение показывает, что по истечении 360° все тригонометрические функции повторяются; остается только решить, будет ли этот промежуток наименьший. Обращаясь для этого к таблице § 29, видим, что он не будет наименьшим только для тангенса и котангенса, в которых первое повторение наступает по истечении 180°; в остальных же функциях до окончания полного

[1]) По аналогии с возведением отрицательного числа в четную или нечетную степень синус и косеканс называются нечетными функциями, а косинус и секанс — четными.

оборота ход изменения не повторяется. Итак, тригонометрические функции — периодические, причем период синуса, косинуса, секанса и косеканса равен 360°, или 2π, а период тангенса и котангенса равен 180°, или π.

§ 36. Если к аргументу периодической функции мы прибавим период, то, каково бы ни было значение аргумента, значение функции не изменится; и обратно, если для данной функции существует такое постоянное количество, которое можно прибавлять ко всякому аргументу без влияния на функцию, то эта функция есть периодическая. На основании этого периодичность тригонометрических функций можно выразить следующими формулами, в которых α может иметь какое угодно значение, от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\sin(\alpha+360^\circ)=\sin\alpha;\ \cos(\alpha+360^\circ)=\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\sec(\alpha+360^\circ)=\sec\alpha;\ \operatorname{cosec}(\alpha+360^\circ)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

Примеры. 1) Упростить $m=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$. Прибавив к аргументу период тангенса, т. е. π, получим: $m=\operatorname{tg}\alpha$.

2) Упростить $n=\operatorname{ctg}\frac{19}{6}\pi$. Так как π есть период котангенса, то отнимем π от аргумента три раза; тогда $n=\operatorname{ctg}\frac{1}{6}\pi=\sqrt{3}$.

§ 37. Приведение тригонометрических функций всякого угла к простейшему аргументу. Тригонометрические функции всякого угла, каковы бы ни были его знак и абсолютная величина, легко приводятся к функциям положительного угла, не превышающего 45°.

а) Пусть будет дан положительный угол (больший 45°). Если он менее 360°, то применяем § 17 и 30; если же он более 360°, то сначала исключаем из него все полные обороты, заменяя данный угол остатком деления его на 360°.

Например:

1) $\sin 63^\circ=\cos 27^\circ$;
2) $\cos 145^\circ=\cos(180^\circ-35^\circ)=-\cos 35^\circ$;
3) $\operatorname{tg}2085^\circ=\operatorname{tg}(360^\circ\cdot 5+285^\circ)=\operatorname{tg}285^\circ=\operatorname{tg}(270^\circ+15^\circ)=-\operatorname{ctg}15^\circ$.

б) Если дан угол отрицательный, то сначала переходим на такой же по величине положительный угол, с которым и поступаем, как указано выше. Возьмем, например, $\sin(-1596^\circ)$. Применяя формулы § 34, получим $\sin(-1596^\circ)=-\sin 1596^\circ$. Преобразуем теперь $\sin 1596^\circ$: разделив 1596 на 360, получим

в остатке 156, следовательно, $\sin 1596^\circ=\sin 156^\circ$, но $\sin 156^\circ=\sin(180^\circ-24^\circ)=\sin 24^\circ$. Таким образом окончательно: $\sin(-1596^\circ)=-\sin 24^\circ$.

§ 38. Общность формул приведения. В § 17, 30 и 34 было показано, как приводятся к углу α тригонометрические функции следующих аргументов: $-\alpha$; $90^\circ\mp\alpha$; $180^\circ\mp\alpha$; $270^\circ\mp\alpha$ и $360^\circ-\alpha$; при этом предполагалось, что угол α — положительный острый. Покажем теперь, что полученные формулы обладают общностью, т. е. что они верны и в том случае, если под α будем понимать какой угодно угол, от $-\infty$ до $+\infty$. Достаточно обнаружить это для синуса и косинуса, потому что остальное получится как следствие.

При доказательстве мы воспользуемся, между прочим, тем, что линия косинуса есть проекция подвижного радиуса на горизонтальный диаметр, а линия синуса равна его проекции на вертикальный диаметр.

Переходим к самому доказательству.

§ 39. 1. Пусть α означает какой угодно угол; тогда $-\alpha$ будет означать угол с такой же абсолютной величиной, но противоположный по знаку. Легко убедиться, что в таких углах подвижные радиусы лежат по разные стороны горизонтального диаметра в одинаковом отклонении от него; поэтому линии синуса у них равны, но направлены противоположно, а линии косинуса совпадают; отсюда заключаем, что $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

§ 40. 2. а) Представим $90^\circ+\alpha$ в виде $\alpha+90^\circ$. Если к какому-нибудь углу прибавить 90°, то подвижной радиус перейдет в следующую четверть и составит с вертикальным диаметром такой же острый угол, какой раньше составлял с горизонтальным диаметром, и наоборот; поэтому его новая вертикальная проекция будет равна прежней горизонтальной, а новая горизонтальная проекция будет равна прежней вертикальной. Отсюда следует, что $\sin(\alpha+90^\circ)$ и $\cos(\alpha+90^\circ)$ имеют соответственно такую же абсолютную величину, как $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Что же касается знаков, то они будут таковы, в зависимости от четверти, где оканчивается угол α:

$\alpha+90^\circ$	sin	cos	α
II	+	+	I
III	−	−	II
IV	−	−	III
I	+	+	IV

$\alpha+90^\circ$	cos	sin	α
II	−	+	I
III	−	+	II
IV	+	−	III
I	+	−	IV

Видим, что $\sin(\alpha+90^\circ)$ и $\cos\alpha$ имеют всегда одинаковые знаки, а $\cos(\alpha+90^\circ)$ и $\sin\alpha$ — противоположные.

Таким образом:

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha.$$

б) Применяя только что полученные формулы к углу $-\alpha$ и пользуясь § 39, найдем:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

§ 41. 3. а) Представим $180^\circ + \alpha$ в виде $\alpha + 180^\circ$. Если к какому-нибудь углу прибавить 180°, то подвижной радиус перейдет в противоположную четверть и составит одну прямую со своим прежним положением[1]; следовательно, синус и косинус сохранят свою абсолютную величину, а знаки обоих изменятся; поэтому:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha.$$

б) Применяя эти формулы к углу $-\alpha$, получим:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha.$$

§ 42. 4. а) Представим $270^\circ + \alpha$ в виде $\alpha + 270^\circ$. Если к какому-нибудь углу прибавить 270°, то подвижной радиус изменит свое положение так же, как от поворота на -90°. Рассуждая, как в § 40, заключим, что вертикальная и горизонтальная проекции подвижного радиуса обменяются длиной, а потому абсолютные величины $\sin(\alpha + 270^\circ)$ и $\cos(\alpha + 270^\circ)$ соответственно равны абсолютным величинам $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Чтобы сравнить знаки, предположим конец α последовательно в каждой четверти:

$\alpha + 270^\circ$	sin	cos	α
IV	−	+	I
I	+	−	II
II	+	−	III
III	−	+	IV

$\alpha + 270^\circ$	cos	sin	α
IV	+	+	I
I	+	+	II
II	−	−	III
III	−	−	IV

Видим, что $\sin(\alpha + 270^\circ)$ и $\cos\alpha$ имеют всегда противоположные знаки, а $\cos(\alpha + 270^\circ)$ и $\sin\alpha$ одинаковые.

Таким образом:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha.$$

б) Применяя эти формулы к углу $-\alpha$, найдем:

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

§ 43. 5. Представим $360^\circ - \alpha$ в виде $-\alpha + 360^\circ$. Если к какому-нибудь углу прибавить 360°, то окончательное положение подвижного радиуса не изменится; поэтому:

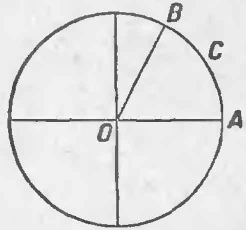
$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

[1]) Или: конец дуги перейдет в точку, диаметрально противоположную.

§ 44. Формулы, полученные в § 39—43, имеют такой же точно состав, как и те, которые содержатся в § 17, 30, 34. Таким образом общность формул приведения доказана.

В задачах, — если требуется только припомнить формулу,—надо представить себе величину α между 0° и 90° и применить правило, данное в § 30.

§ 45. Общий вид дуг, имеющих конец в данной точке окружности. Пусть на чертеже 32 дуга ACB содержит 64°. Очевидно, что все дуги, которые отличаются от 64° на полное число окружностей, оканчиваются также в точке B (предполагая общее начало в точке A). Отсюда найдем, что дуги, имеющие конец в точке B, суть следующие: 64°, 424°, 784°, 1144° и т. д., а также: -296°, -656°, -1016° и т. д. Все эти дуги можно выразить одной и той же формулой $64^\circ + 360^\circ \cdot n$, принимая за n различные целые числа как положительные, так и отрицательные, а также нуль.



Черт. 32.

Вообще, если α есть одна из дуг, имеющих данные начало и конец, то общий вид всех дуг, имеющих те же самые начало и конец, есть $\alpha + 360^\circ \cdot n$ (иначе $\alpha + 2\pi n$).

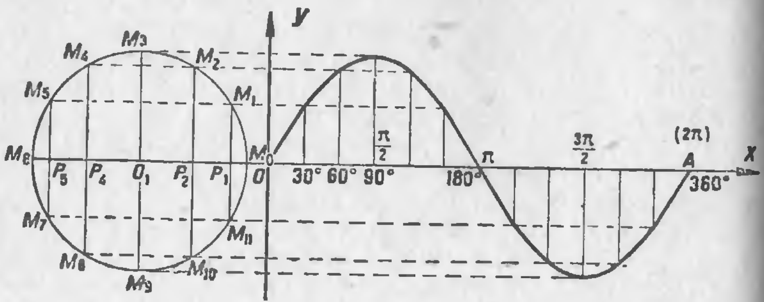
Мы говорили о дугах, но полученные формулы можно отнести и к таким углам, у которых начальный и конечный радиусы одни и те же.

§ 46. Графики тригонометрических функций. Изменения тригонометрических функций с изменением аргумента от 0° до 360° представлены в таблице § 29, но эта таблица содержит только ряд отдельных значений и потому не дает полного представления о ходе непрерывного изменения функций с изменением аргумента. Чтобы получить представление о непрерывном изменении функций, прибегают к графическому изображению их изменения.

С этой целью возьмем две взаимноперпендикулярные прямые линии OX и OY, называемые осями координат (черт. 33). Вдоль оси OX будем откладывать отрезки, изображающие в произвольном масштабе числовые значения аргумента, а вдоль оси OY — отрезки, изображающие в другом произвольном масштабе числовые значения функции. При откладывании отрезков будем соблюдать правило Декарта.

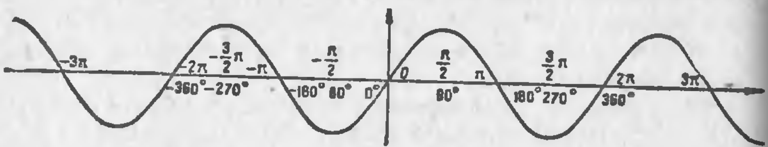
Положительные значения откладываются от начальной точки O вправо и вверх, отрицательные — влево и вниз (положительные направления осей на чертежах отмечены стрелками).

По оси OX отложим 12 равных отрезков, из которых каждый будет изображать угол в 30° $\left(\text{или } \frac{\pi}{6}\right)$; таким образом все 12 отрезков, или расстояние OA, изображают угол в 360°,



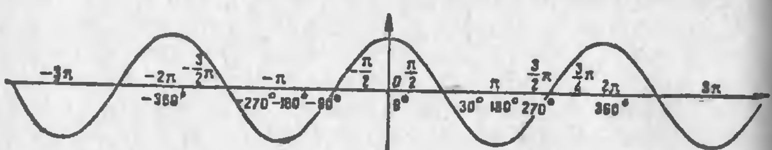
Черт. 33.

или 2π (черт. 33). Чтобы на оси OY отложить числовые значения тригонометрической функции синуса, начертим вспомогательную окружность с центром O_1, лежащим где-нибудь на оси OX. Радиус окружности O_1M_0 будет изображать собою



Черт. 34.

числовое значение функции, равное 1. Начиная от точки M_0, делим окружность на 12 равных частей (по числу делений на оси OX, соответствующих углу в 360°). Для найденных

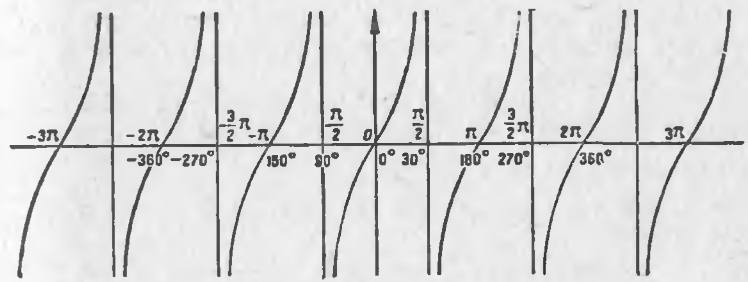


Черт. 35.

точек делений M_0, $M_1 \ldots M_{11}$ строим линии синуса M_1P_1, $M_2P_2 \ldots M_{11}P_{11}$. Так как радиус окружности равен 1, то длины построенных тригонометрических линий будут в

принятом нами масштабе изображать числовые значения синуса. При помощи ряда прямых линий, параллельных оси OX, перенесем значения синуса на ось OY.

В каждой точке деления на оси OX восставим перпендикуляры к оси OX и на этих перпендикулярах отложим отрезки, выражающие соответствующие числовые значения синуса. Когда требуемые длины перпендикуляров будут построены, надо через полученные концы их провести кривую линию. Эта линия, проходящая через концы отрезков, изображающих на чертеже числовые значения синуса, будет изображать изменение функции синуса с изменением аргумента (дуги). Такая линия называется графиком функции. На чертеже 33 представлен график синуса в пределах угла от 0° до 360°.



Черт. 36.

Чем больше точек деления мы возьмем, на чем большее число частей мы разделим отрезок OA и вспомогательную окружность, тем больше точек графика мы получим и тем точнее его построим с помощью лекала.

Значения синуса можно находить не геометрическим построением, а взять из таблицы.

График синуса представляет собой кривую линию, называемую с и н у с о и д о й.

График синуса, построенный для положительных углов в пределах одной окружности, можно распространить на любые значения углов как положительных, так и отрицательных. По образцу графика синуса можно построить график косинуса, тангенса, котангенса.

На чертежах 34, 35, 36 представлены синусоида, косинусоида и тангенсоида в пределах от -3π до $+3\pi$.

§ 47. Общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции. В § 26 было указано, что по данной тригонометрической функции получаются два положения подвижного радиуса; в § 32 мы выражали их положительными углами x_1 и x_2, меньшими 360°. Но с расширением границ аргумента от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$ каждому радиусу, принятому за конечный, будет соответствовать уже не один угол, а *бесконечный ряд* углов, положительных и отрицательных; таким образом теперь данному значению функции будут соответствовать углы, составляющие два бесконечных ряда. Все эти углы можно выразить, по § 45, с помощью x_1 и x_2, а именно: общий вид углов одного ряда с x_1 есть $x_1+360°\cdot n$, а общий вид углов другого ряда: $x_2+360°\cdot n$.

Мы получили *общее* решение вопроса в виде двух формул с двумя основными углами. Сейчас увидим, что они сводятся и к *одному* основному углу, но уже для различных функций различно.

Перейдем к отдельным функциям (для простоты возьмем примеры числовые и без применения таблиц).

1. а) $\sin x = \frac{1}{2}$.

Искомый угол равен или 30° или 150°; следовательно, будем иметь:

$$x_1 = 30° + 360°\cdot n \text{ и } x_2 = 150° + 360°\cdot n.$$

Эти выражения преобразуем так:

$$x_1 = 180°\cdot 2n + 30°;$$
$$x_2 = 180° - 30° + 180°\cdot 2n = 180°(2n+1) - 30°.$$

Здесь знак перед 30° зависит от четности $(2n)$ или нечетности $(2n+1)$ множителя при 180°, а эту зависимость можно выразить с помощью степени отрицательной единицы; тогда вместо двух формул получим одну следующую:

$$x = 180°\cdot m + 30°\cdot(-1)^m,$$

где m означает произвольное целое число, безразлично — четное или нечетное. При m четном эта формула дает x_1, а при m нечетном x_2.

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x_1 = 210° + 360°\cdot n$ и $x_2 = 330° + 360°\cdot n$.

Можно уменьшить абсолютную величину основных углов, взяв для них отрицательные значения; тогда будем иметь:

$$x_1 = -150° + 360°\cdot k \text{ и } x_2 = -30° + 360°\cdot k,$$

или в другом виде:

$$x_1 = -150° + 180°\cdot 2k = -150° + 180° - 180° + 180°\cdot 2k = 30° + 180°(2k-1)$$

и $x_2 = 180°\cdot 2k - 30°$,

а эти две формулы можно соединить в одну следующую:

$$x = 180°\cdot m - 30°\cdot(-1)^m,$$

которая при m четном дает x_2, а при m нечетном x_1.

2. а) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x_1 = 60° + 360°\cdot n$ и $x_2 = 300° + 360°\cdot n$.

Если же воспользуемся в качестве основных также отрицательными углами, то получим:

$$x_1 = 60° + 360°\cdot m \text{ и } x_2 = -60° + 360°\cdot m,$$

что можно написать слитно в виде:

$$x = 360°\cdot m \pm 60°.$$

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x_1 = 120° + 360°\cdot n$ и $x_2 = 240° + 360°\cdot n$.

Можно выразить x_1 и x_2 еще следующими формулами:

$$x_1 = 120° + 360°\cdot m \text{ и } x_2 = -120° + 360°\cdot m,$$

а их можно написать слитно в виде:

$$x = 360°\cdot m \pm 120°.$$

3. а) $\operatorname{tg} x = 1$; $x_1 = 45° + 360°\cdot n$ и $x_2 = 225° + 360°\cdot n$, что можно представить в виде: $x_1 = 45° + 180°\cdot 2n$ и $x_2 = 45° + 180°\cdot(2n+1)$; а последние две формулы можно заменить одной следующей:

$$x = 45° + 180°\cdot m,$$

которая при m четном дает x_1, а при m нечетном x_2.

Формулу $x = 45° + 180°\cdot m$ легко получить еще из следующего: чертеж 22 (стр. 24), в котором точки C и D лежат на одном диаметре, показывает, что в ряде дуг всевозможной величины, от $-\infty$ до $+\infty$, дуги, имеющие один и тот же тангенс, встречаются через каждые 180°; таким образом искомые дуги составят арифметическую прогрессию с разностью 180°; *общим членом* этой прогрессии и будет $x = 45° + 180°\cdot m$.

б) $\operatorname{tg} x = -1$.

Рассуждая так же, как в п. а), получим:

$$x_1 = 135° + 360°\cdot n \text{ и } x_2 = 315° + 360°\cdot n,$$

или:

$$x = 135° + 180°\cdot m,$$

или еще:

$$x = -45° + 180°\cdot k.$$

4. а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Вопрос решается совершенно так же, как в случае тангенса. Получим:

$x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot n$ и $x_2 = 210^\circ + 360^\circ \cdot n$, или: $x = 30^\circ + 180^\circ \cdot m$.

б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Рассуждая, как в случае тангенса, найдем:

$$x_1 = 150^\circ + 360^\circ \cdot n \text{ и } x_2 = 330^\circ + 360^\circ \cdot n;$$

или:

$$x = 150^\circ + 180^\circ \cdot m,$$

а также $x = -30^\circ + 180^\circ \cdot k$.

5 и 6. Если даны секанс и косеканс, то сначала переходим соответственно на косинус или синус.

§ 48. Обратные круговые функции. Если мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными, то из него можно определить любое неизвестное через другое. Например, если имеем: $2x + 3y = 6$, то:

$$\text{a) } y = 2 - \frac{2}{3}x; \quad \text{b) } x = 3 - \frac{3}{2}y.$$

Первая формула дает выражение y в функции x. Вторая, наоборот, дает выражение x в функции y. В общем все три уравнения выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y, но только форма выражения этой зависимости разная; первое уравнение не решено ни относительно x, ни относительно y; в следующем за функцию принято y, за аргумент x; в последнем за функцию принято x, за аргумент y.

Такие две функции, которые выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y, но в одной за функцию принято y, а в другой за функцию принято x, называются в з а и м н о о б р а т н ы м и. Любую из них можно принять за прямую; тогда другая будет обратная.

Примеры взаимнообратных функций:

$$y = 5x + 3; \quad x = \frac{y-3}{5};$$

$$y = 2x; \quad x = \frac{1}{2}y;$$

$$y = x^2; \quad x = \pm\sqrt{y};$$

$$y = \sqrt[3]{x}; \quad x = y^3.$$

Понятие обратности можно применить и к тригонометрическим функциям.

Например, мы употребляем равенство: $y = \sin x$; это значит, что y есть синус дуги x; значит, обратно, x есть дуга,

синус которой y. Точно так же: $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, т. е. половина есть синус дуги в 30°. Наоборот, 30° есть дуга, синус которой равен половине.

Вместо того чтобы объяснять обратную зависимость словами, употребляют особый знак, обозначающий слово дуга: arc (читается «арк»; по-французски обозначает дуга, арка).

Таким образом можно написать:

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ; \qquad 30^\circ = \arcsin \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ; \qquad 60^\circ = \arccos \frac{1}{2};$$

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ; \qquad 45^\circ = \operatorname{arc\,tg} 1;$$

$$\sin 16^\circ = 0{,}276; \qquad 16^\circ = \arcsin 0{,}276;$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 0{,}707; \qquad \frac{\pi}{4} = \arccos 0{,}707;$$

$$1 = \sin 90^\circ; \qquad 90^\circ = \arcsin 1;$$

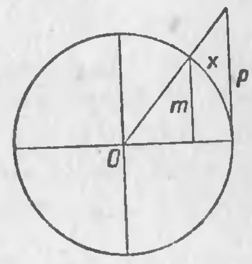
$$1 = \cos 0^\circ; \qquad 0^\circ = \arccos 1;$$

$$-1 = \cos \pi; \qquad \pi = \arccos(-1);$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty; \qquad \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tg} \infty;$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \qquad \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2} = \arccos \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

В первом столбце дуга принята за аргумент, во втором — за функцию. На чертеже 37 уга обозначена через x, ее синус через m, ее тангенс через p. Значит, x есть дуга, синус которой m, а тангенс p; или: $x = \arcsin m$; $x = \operatorname{arc\,tg} p$.



Черт. 37.

Пользуясь тригонометрическими таблицами, мы решаем тоже две обратные задачи и пользуемся как прямыми, так и обратными тригонометрическими функциями. Если дана дуга (или угол), то мы отыскиваем тригонометрическую функцию; наоборот, если дана тригонометрическая функция и мы отыскиваем угол, то мы имеем о б р а т н у ю тригонометрическую функцию.

Из § 47 мы знаем, что одной и той же тригонометрической функции соответствует бесчисленное множество дуг, имеющих одно и то же начало; например, синусу, равному половине, соответствуют дуги: 30°, 150°, 390°, $510^\circ \ldots$; основные из них 30° и 150° имеют синус, равный половине, но если прибавить к каждой по 360°, то и новые дуги будут иметь тот же синус. Следовательно, обратные тригонометрические функции есть функции многозначные.

§ 49. В предыдущих примерах мы ограничивались наименьшей дугой, соответствующей данной тригонометрической функции, но можно было дать и общее выражение всех дуг, имеющих данный синус, косинус, тангенс. Если имеют в виду не наименьшее, а общее выражение всех дуг. имеющих данный синус, то обозначение дуги пишут с большой буквы; например:

$$\arcsin\frac{1}{2} = 30°; \text{ но } \operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2} = 180°\cdot m + (-1)^m 30°,$$

или

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1 = 45°; \text{ но } \operatorname{Arc}\operatorname{tg} 1 = 45° + 180° m.$$

Эти формулы взяты из § 47 (общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции), но там еще не употреблялось обозначение обратной функции.

Если воспользоваться формулами § 47 и обобщить их, заменив числовые значения буквенными, то получим следующую таблицу прямых и обратных тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} &y = \sin x; && \operatorname{Arc}\sin y = m\pi + (-1)^m x; \\ &y = \cos x; && \operatorname{Arc}\cos y = 2m\pi \pm x; \\ &y = \operatorname{tg} x; && \operatorname{Arc}\operatorname{tg} y = m\pi + x; \\ &y = \operatorname{ctg} x; && \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} y = m\pi + x. \end{aligned}$$

Большею частью, однако, по данной тригонометрической функции отыскивают наименьшую дугу (arc). При этом для положительных значений всех тригонометрических функций берут дугу в I четверти $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. Для отрицательных значений синуса, тангенса, котангенса и косеканса берут дугу в I отрицательной четверти $\left(\text{от } 0 \text{ до} -\frac{\pi}{2}\right)$; для отрицательного косинуса и секанса берут дугу во II четверти $\left(\text{от } \frac{\pi}{2} \text{ до } \pi\right)$.

Таким образом для всех возможных значений синуса, тангенса, котангенса и косеканса дугу берут в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а для косинуса и секанса в пределах от 0 до π.

Обратные тригонометрические функции называются также обратными круговыми вследствие их связи с кругом.

IV. Выражения синуса, косинуса и тангенса суммы и разности углов, двойного угла и половины угла.

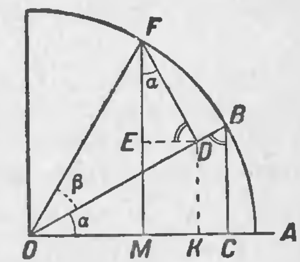
§ 50. Синус и косинус суммы и разности двух углов. Пусть α и β — положительные острые углы, составляющие вместе менее 90°.

Отложим в тригонометрическом круге угол $\alpha + \beta$ (черт. 38).

Построим линии синуса углов α, β и $\alpha + \beta$. Из чертежа видим, что $\sin\alpha = \frac{BC}{R}$; $\cos\alpha = \frac{OC}{R}$; $\sin\beta = \frac{FD}{R}$; $\cos\beta = \frac{OD}{R}$;

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{FM}{R}; \quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{OM}{R}.$$

§ 51. *a) Синус суммы.* Чтобы выразить $\sin(\alpha+\beta)$ через функции углов α и β, построим треугольники, связывающие тригонометрические линии этих углов. Для этого проведем $DE \parallel OA$ и $DK \parallel BC$.



Черт. 38.

Из чертежа получаем, что $FM = EM + EF = KD + EF$.

Чтобы вычислить KD, рассмотрим прямоугольные треугольники ODK и OBC; они подобны, так как имеют общий острый угол α. Выразим пропорциональность сторон:

$$\frac{DK}{BC} = \frac{OD}{OB}; \quad DK = BC\cdot\frac{OD}{OB} = EM.$$

Отрезок EF вычислим из прямоугольных треугольников FED и OBC, которые подобны вследствие перпендикулярности сторон; получим:

$$\frac{EF}{OC} = \frac{FD}{OB}; \quad EF = OC\cdot\frac{FD}{OB}.$$

Складывая результаты, получим:

$$FM = EM + EF = BC\cdot\frac{OD}{OB} + OC\cdot\frac{FD}{OB}.$$

Разделим обе части равенства на радиус, чтобы получить отношение отрезков и перейти к тригонометрическим функциям:

$$\frac{FM}{R} = \frac{BC}{R}\cdot\frac{OD}{OB} + \frac{OC}{R}\cdot\frac{FD}{OB};$$

переходя к тригонометрическим функциям, получим:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

б) Синус разности (предполагая, что $\alpha > \beta$). Чтобы получить синус разности, заменим в предыдущей формуле β на $(-\beta)$; получим:

$$\sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta);$$

учитывая, что $\cos(-\beta) = \cos\beta$; $\sin(-\beta) = \sin\beta$, получим:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

§ 52. *а) Косинус суммы.* Формулу косинуса суммы можно вывести из синуса разности, применяя формулу приведения, а именно:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin[90° - (\alpha + \beta)];$$

раскрывая скобки и группируя, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin[(90° - \alpha) - \beta].$$

Рассматривая выражение в квадратной скобке как разность углов $90° - \alpha$ и β и применяя к правой части формулу синуса разности, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90° - \alpha)\cdot\cos\beta - \cos(90° - \alpha)\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

б) Косинус разности. Применим способ замены β на $-\beta$; из предыдущей формулы:

$$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta);$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

§ 53. Итак, мы получили следующие четыре формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta; \qquad \text{(I)}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta; \qquad \text{(II)}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta; \qquad \text{(III)}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta. \qquad \text{(IV)}$$

При выводе этих формул мы предполагали, что $\alpha > \beta$ и что $\alpha + \beta < 90°$; в следующем параграфе будет доказано, что полученные формулы обладают общностью, т. е. что они справедливы и для каких угодно значений α и β.

§ 54. Доказательство общности формул § 53. Рассмотрим сначала формулы для суммы, а из них уже легко будет получить формулы для разности. При выводе мы будем пользоваться, между прочим, и формулами приведения, но общность их уже доказана (§ 38). Переходим к самому доказательству.

I. а) Оба слагаемые угла положительны.

1) Для $\alpha + \beta < 90°$ формулы доказаны.

2) Пусть $\alpha < 90°$ и $\beta < 90°$, но $\alpha + \beta > 90°$; тогда, полагая $\alpha = 90° - \alpha_1$ и $\beta = 90° - \beta_1$, будем иметь:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[180° - (\alpha_1 + \beta_1)] = \sin(\alpha_1 + \beta_1);$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[180° - (\alpha_1 + \beta_1)] = -\cos(\alpha_1 + \beta_1).$$

Так как $\alpha_1 + \beta_1 < 90°$, то, применяя к этой сумме доказанные формулы и пользуясь свойством дополнительных углов, получим:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha_1\cdot\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cdot\sin\beta_1 = \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1 = -\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Получилось то же самое, что и в § 53.

Из пп. 1) и 2) вместе следует, что формулы I и II верны для всяких острых углов.

3) Докажем теперь, что если формулы I и II справедливы для каких-нибудь двух углов, то они останутся справедливы и тогда, когда к одному из этих углов прибавим 90°. Обозначим через α и β два таких угла, для которых формулы верны, и положим, что $\alpha + 90° = \alpha_1$; тогда:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin[90° + (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + \beta);$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos[90° + (\alpha + \beta)] = -\sin(\alpha + \beta).$$

Разлагая здесь $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$ на основании условия относительно α и β, получим:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta; \qquad (1)$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = -(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta). \qquad (2)$$

Во вторых частях перейдем от α на α_1. Так как $\alpha + 90° = \alpha_1$, то $\alpha = \alpha_1 - 90°$, или $\alpha = -(90° - \alpha_1)$, а отсюда:

$$\sin\alpha = -\sin(90° - \alpha_1) = -\cos\alpha_1;$$
$$\cos\alpha = \cos(90° - \alpha_1) = \sin\alpha_1.$$

Заменяя теперь в равенствах (1) и (2) $\sin\alpha$ через $(-\cos\alpha_1)$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha_1$, получим:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\alpha_1\cdot\cos\beta - (-\cos\alpha_1)\cdot\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha_1\cdot\cos\beta + \cos\alpha_1\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = -[(-\cos\alpha_1)\cdot\cos\beta + \sin\alpha_1\cdot\sin\beta] =$$
$$= \cos\alpha_1\cdot\cos\beta - \sin\alpha_1\cdot\sin\beta.$$

Соотношение осталось то же самое, какое предположено для α.

4) Каждый положительный угол, превышающий 90°, можно получить через последовательное присоединение 90° к острому углу; формулы I и II для острых углов уже доказаны, а присоединение 90° к тому или другому углу не нарушает соотношения, как мы только что видели, поэтому формулы будут верны для положительных углов любой величины.

I. б) Один из слагаемых углов или оба отрицательны.

Отрицательный угол может быть получен через последовательное присоединение $-360°$ к положительному углу; для положительных углов формулы I и II доказаны, а присоединение $-360°$ к α или β или к тому и другому не изменяет ни sin и cos суммы, ни sin и cos отдельных углов, поэтому формулы будут верны и тогда, если один из углов или оба вместе будут отрицательны.

Из пп. I а) и I б) следует, что формулы I и II верны при любом значении α и β.

II. Случай разности двух углов.

Заменяя в формулах суммы β через $-\beta$, найдем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Эти формулы, выведенные теперь без ограничений, одинаковы с формулами III и IV в § 53.

Итак, общность формул I—IV доказана.

§ 55. Тангенс суммы и разности двух углов. 1) Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Чтобы перейти на $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, разделим числителя и знаменателя второй дроби почленно на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(V)}$$

2) Повторяя тот же самый прием, найдем:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(VI)}$$

§ 56. От сложения и вычитания двух углов можно последовательно перейти к сочетанию какого угодно числа слагаемых и вычитаемых углов; например:

$$\sin(\alpha-\beta+\gamma)=\sin[(\alpha-\beta)+\gamma]=$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin\gamma;$$

далее применяем формулы III и IV.

§ 57. Синус, косинус и тангенс двойного угла. В формулах для суммы двух углов полагаем $\beta=\alpha$; получим:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \qquad \text{(VII)}$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad \text{(VIII)}$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad \text{(IX)}$$

§ 58. Чтобы разложить тригонометрические функции углов 3α и 4α, представляем их в виде $2\alpha+\alpha$ и $2(2\alpha)$. Например:

1) $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=$
$=(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$
$=\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$

2) $\sin 4\alpha=\sin 2(2\alpha)=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=$
$=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$

§ 59. Нередко бывает надобно функции данного угла выразить посредством функций его половины; для этого рассматриваем целое как удвоенную половину и применяем § 57. Например:

a) $\sin\alpha=\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$

b) $\cos\alpha=\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$

§ 60. Синус, косинус и тангенс половины угла. По § 12 и 59 имеем следующие равенства:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1;\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

Складывая и вычитая их, найдем:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha \text{ и } 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha,$$

а отсюда:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \text{(X)}$$

и

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad \text{(XI)}$$

Разделив равенство X на XI, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad \text{(XII)}$$

В следующем параграфе будет дана более удобная формула.

Применяя полученные формулы, следует удерживать перед корнем оба знака только тогда, когда нет данных для выбора между ними; в противном случае возьмем один требуемый знак.

Пример. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если α содержится между 270° и 360° и $\cos\alpha=0.6$. Так как $270°<\alpha<360°$, то $135°<\frac{\alpha}{2}<180°$; таким образом угол $\frac{\alpha}{2}$ — тупой, и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ имеет отрицательное значение. Поэтому мы должны взять $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-0,6}{1+0,6}}=-\frac{1}{2}$.

§ 61. О двойных знаках в формулах X и XI. Если дан $\cos\alpha$ и значения α ничем другим не ограничены, то определение функций $\frac{\alpha}{2}$ равносильно их определению для в с е х значений α, соответствующих данному значению косинуса. Пусть будет из них φ наименьшее положительное; тогда $\alpha=\pm\varphi+360°\cdot n$, а следовательно, $\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\varphi}{2}+180\cdot n$. Последнее выражение покажет нам, в каких точках оканчиваются дуги $\frac{\alpha}{2}$. Концы дуг $+\frac{\varphi}{2}$ и $-\frac{\varphi}{2}$ находятся в I и IV четвертях; присоединяя $180°\cdot n$, мы получим при n четном те же самые концы дуг (т. е. в I и IV четвертях), а при n нечетном — диаметрально противоположные им (т. е. в III и II четвертях). Таким образом концы дуг $\frac{\alpha}{2}$ распределятся по всем четырем четвертям, а потому функции $\frac{\alpha}{2}$ будут и с положительными, и с отрицательными значениями.

§ 62. Выразим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ еще через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Для этого заменим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ и дополним сначала числителя, а потом знаменателя до $\sin\alpha\left(=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$; получим (по § 59 и 60):

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\quad\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\quad\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Пример. Применим формулы a) и b) к примеру из § 60. Имеем: $270°<\alpha<360°$ и $\cos\alpha=0,6$; отсюда: $\sin\alpha=-\sqrt{1-(0,6)^2}=-0,8$. Таким образом:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-0,8}{1+0,6}=\frac{-0,8}{1,6}=-\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-0,6}{-0,8}=\frac{0,4}{-0,8}=-\frac{1}{2}$.

V. Приведение выражений к виду, удобному для логарифмирования.

§ 63. Общее замечание. Чтобы выражение удобно было вычислить с помощью логарифмов, оно не должно содержать ни сумм ни разностей, кроме таких, которые легко найти н е п о с р е д с т в е н н о.

Если это условие не выполнено, то следует данное выражение преобразовать, насколько это возможно и выгодно. Главные из таких преобразований мы и рассмотрим теперь.

§ 64. Преобразование суммы и разности двух синусов или косинусов.

Преобразуем $\sin\alpha+\sin\beta$. Для этого положим:

$$\alpha=x+y \tag{1}$$

и

$$\beta=x-y \tag{2}$$

и применим формулы I и III; будем иметь:

$$\sin\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;$$
$$\sin\beta=\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y;$$

отсюда:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin x\cdot\cos y;$$

но из уравнений (1) и (2) следует:

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{и}\ y=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

таким образом:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{XIII}$$

Применяя тот же самый прием, получим:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{XIV}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{XV}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\text{[1]}. \tag{XVI}$$

[1] $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. Формула читается так: *разность двух косинусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы углов на синус обратной полуразности их.*

Примеры. 1) $\sin 100° - \sin 16° = 2\cos\frac{100°+16°}{2}\cdot\sin\frac{100°-16°}{2} = 2\cos 58°\cdot\sin 42°....$

2) $\cos 12° - \cos 60° = 2\sin 36°\cdot\sin 24°$.

3) $\cos 50° + \sin 70° = \cos 50° + \cos 20° = 2\cos 35°\cdot\cos 15°$.

4) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90° - \alpha) = 2\sin 45°\cdot\cos(\alpha - 45°) = \sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - 45°)$.

§ 65. Преобразуем еще следующие выражения из содержащих синус и косинус.

а) Деля равенство XIII на XIV, получим:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} : \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

следовательно:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

б) По § 60 имеем:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad \text{(XVIII)}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(XIX)}$$

Примеры. 1) $\frac{\sin 35° + \sin 14°}{\sin 35° - \sin 14°} = \frac{\operatorname{tg}\frac{35°+14°}{2}}{\operatorname{tg}\frac{35°-14°}{2}} = \frac{\operatorname{tg} 24°30'}{\operatorname{tg} 10°30'}$;

2) $1 + \cos 10°23' = 2\cos^2 5°11'30''$;

3) $1 - \sin 40° = 1 - \cos 50° = 2\sin^2 25°$.

§ 66. Преобразование суммы и разности двух тангенсов или котангенсов. Чтобы преобразовать выражения: $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$; $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$; $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$, надо сначала перейти на синус и косинус; например:

а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$.

§ 67. Введение вспомогательного угла. Приводя выражение к логарифмическому виду, иногда бывает выгодно некоторые

числа заменить тригонометрическими функциями углов. Вот несколько таких случаев:

1) $\sqrt{\sqrt{5}-1} = \sqrt{4\sin 18°} = 2\sqrt{\sin 18°}$;

2) $1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45°+\alpha)}{\cos 45°\cdot\cos\alpha}$;

3) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos 45° + \cos\alpha\cdot\sin 45°) = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha + 45°)$ [ср. § 64];

4) $1 + 2\sin 50° = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \sin 50°\right) = 2\cdot(\sin 30° + \sin 50°) = 4\sin 40°\cdot\cos 10°$.

§ 68. В § 67 преобразование удавалось с помощью некоторых простейших углов. Рассмотрим теперь о б щ и й случай, а именно: введем вспомогательный угол для $A + B$ и $A - B$, обозначая через A и B какие угодно выражения:

1) Имеем $A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$; здесь принимаем $\frac{B}{A}$ за тангенс некоторого угла, что возможно, так как тангенсом может быть всякое число. Полагая $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$, получим $A + B = A(1 + \operatorname{tg}\varphi)$; но по § 67 $1 + \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(45°+\varphi)}{\cos 45°\cdot\cos\varphi}$; таким образом:

$$A + B = A\cdot\frac{\sin(45°+\varphi)}{\cos 45°\cdot\cos\varphi}.$$

Для вычисления второй части надо, конечно, сначала найти вспомогательный угол φ (с помощью таблиц).

2) Тем же самым способом получим:

$$A - B = A\cdot\frac{\sin(45°-\varphi)}{\cos 45°\cdot\cos\varphi}.$$

3) Еще получим:

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(45° + \varphi).$$

§ 69. Выражения $A + B$ и $A - B$ преобразуются проще, чем в § 68, если известно, что A и B имеют п о л о ж и т е л ь н о е значение.

1) Имеем $A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$; так как $\frac{B}{A}$ положительно, то принимаем $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2\varphi$; тогда:

$$A + B = A(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = A\sec^2\varphi = \frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

2) Для разности $A - B$, если $A > B$, возьмем $A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right)$ и положим $\frac{B}{A} = \sin^2\varphi$; это возможно, так как $\frac{B}{A}$ положительно и менее единицы. Тогда:

$$A - B = A\,(1 - \sin^2\varphi) = A \cdot \cos^2\varphi.$$

Если $A < B$, то берем сначала $A - B = -(B - A)$, после чего $B - A$ преобразуем как раньше.

VI. О тригонометрических уравнениях.

§ 70. Общие замечания. Уравнение называется тригонометрическим, если содержит неизвестное под знаком тригонометрической функции; таковы, например, уравнения: $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; $\sin 5x = \sin 4x$; $\operatorname{tg}(a + x) = m \operatorname{tg} x$ (в первом уравнении неизвестное служит аргументом, во втором — входит в состав аргумента, в третьем — то и другое).

От тригонометрических уравнений следует отличать тригонометрические тождества: так называются те равенства, которые справедливы при всех значениях аргумента. Например, в равенстве $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ первая часть всегда равна второй: оно есть тождество; а равенство $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ верно только для некоторых значений аргумента[1]); оно есть уравнение.

Решить тригонометрическое уравнение — значит определить те углы, которые удовлетворяют ему, т. е. делают обе его части равными (они называются корнями уравнения). Для решения надо сначала определить какую-нибудь функцию неизвестного угла (или аргумента с неизвестным), а по ней определим аргумент (обыкновенно с помощью таблиц). Но из § 47 мы знаем, что данному значению функции соответствует бесконечный ряд углов, таким образом тригонометрическое уравнение (если оно возможно) имеет бесконечное число корней; обыкновенно находят их общий вид. Пусть, например, решая какое-нибудь тригонометрическое уравнение, мы получили $\operatorname{tg} 3x = 1$. Этому значению тангенса соответствует аргумент такого состава: $45° + 180° \cdot n$, где n — произвольное целое число; следовательно, $3x = 45° + 180° \cdot n$, откуда определяем x, деля обе части на 3; получим: $x = 15° + 60° \cdot n$; это и будет общий вид корней данного уравнения.

---

[1]) Например, при $x = 45°$ первая часть не равна второй.

(Примером невозможного уравнения может служить $5\sin x = 7$; из него $\sin x = \frac{7}{5}$, а это невозможно, так как абсолютная величина синуса должна быть не более единицы.)

Если для функции искомого угла получается выражение буквенное (например $\sin x = a \cdot b$), то оно и считается окончательным ответом.

Что касается до самых приемов решения, то большею частью выгодно приводить уравнение к одной функции, преимущественно к синусу или косинусу, и к одному аргументу; тогда, приняв эту функцию за особое неизвестное, решаем уравнение как алгебраическое и отбрасываем те корни его, которые не могут служить значением определяемой функции. Иногда бывает также выгодно приводить вопрос к обращению в нуль произведения или дроби. Все сказанное поясним на примерах.

§ 71. Примеры. I. $2\sin^2 x = 3\sin x$.

Решение. Приведя уравнение к виду $\sin x(2\sin x - 3) = 0$, получим: 1) $\sin x = 0$; 2) $2\sin x - 3 = 0$, откуда $\sin x = \frac{3}{2}$. Второе значение $\sin x$ невозможно (так как превышает единицу), а первому значению соответствует $x = 180° \cdot n$ (или $x = \pi n$).

II. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

Решение. Заменяя $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получим: $2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$ и затем $\cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x - 1 = 0$, откуда $\cos x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = 2$ и $-\frac{1}{2}$. Первое значение для $\cos x$ невозможно, а взяв $\cos x = -\frac{1}{2}$, получим:

$$x = 360° \cdot n \pm 120° \left(\text{или } x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

III. $\operatorname{ctg}(270° - x) = 3\operatorname{ctg} x$.

Решение. Заменяя $\operatorname{ctg}(270° - x)$ и $\operatorname{ctg} x$ соответственно через $\operatorname{tg} x$ и $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, будем иметь $\operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x}$, откуда $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Оба полученные значения для $\operatorname{tg} x$ пригодны: если $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3}$, то $x_1 = 60° + 180° \cdot n$; если $\operatorname{tg} x_2 = -\sqrt{3}$, то $x_2 = -60° + 180° \cdot n$. Таким образом вообще:

$$x = 180° \cdot n \pm 60°, \text{ или } x = \pi n \pm \frac{\pi}{3}.$$

IV. $\operatorname{tg}(\alpha+x) = m \operatorname{tg} x$, где α и m предполаются известными.

Решение. Разложив $\operatorname{tg}(\alpha + x)$, находим последовательно:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} x} = m \operatorname{tg} x;\quad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} x - m \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 x;$$

$$m \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 x - (m-1) \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\alpha = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{m - 1 \pm \sqrt{(m-1)^2 - 4m \operatorname{tg}^2\alpha}}{2m \operatorname{tg}\alpha}.$$

V. $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Решение. Здесь выгодно заменить первую часть произведением (ср. в § 64 пример 4):

$$\sin x - \sin(90° - x) = \sqrt{\frac{1}{2}};\quad 2\cos 45° \cdot \sin(x - 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{2}\sin(x - 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}};\quad \sin(x - 45°) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда: $x - 45° = 30° + 360° \cdot n$ и $150° + 360° \cdot n$, а следовательно, $x = 75° + 360° \cdot n$ и $195° + 360° \cdot n$ (или $x = \frac{5}{12}\pi + 2\pi n$ и $\frac{13}{12}\pi + 2\pi n$).

VI. $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x$.

Решение. Разделив обе части на $\cos^2 x$, получим: $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 3$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и 3; соответственно этим значениям $\operatorname{tg} x$ найдем: $x_1 = 135° + 180° \cdot n$ (или $x_1 = -45° + 180° \cdot m$) и $x_2 = 71°33'54'' + 180° \cdot n$.

VII. $\sin 5x = \sin 4x$.

Решение. $\sin 5x - \sin 4x = 0$; $2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{9x}{2} = 0$; далее: $\sin\frac{x}{2} = 0$, откуда $\frac{x}{2} = 180° \cdot n$ и, следовательно, $x = 360° \cdot n$.

$\cos\frac{9x}{2} = 0$, откуда $\frac{9x}{2} = 90° + 180°.\ n$ и, следовательно, $x = 20° + 40° \cdot n$. Итак, $x = 360° \cdot n$; $20° + 40° \cdot n$.

VIII. $a \cdot \sin x = b \cdot \cos^2\frac{x}{2}$.

Решение. $a \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = b \cdot \cos^2\frac{x}{2}$;

$\cos\frac{x}{2}\left(2a \cdot \sin\frac{x}{2} - b \cdot \cos\frac{x}{2}\right) = 0$, отсюда:

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$; 2) $2a \cdot \sin\frac{x}{2} - b \cdot \cos\frac{x}{2} = 0$, откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$.

IX. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Приведя уравнение к виду $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x = 0$ и применяя § 67, получим: $\frac{\sin(5x - 2x)}{\cos 5x \cdot \cos 2x} = 0$; это дает $\sin 3x = 0$, откуда $3x = 180° \cdot n$ и, следовательно, $x = 60° \cdot n$.

X. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.

Решение. *1-й способ.* Так как $\sin x$ и $\cos x$ выражаются друг через друга иррационально, то, сначала уединив $a \cdot \sin x$ (или $b\cos x$), возводим обе части в квадрат и тогда заменяем уже $\sin^2 x$ (или $\cos^2 x$).

2-й способ. Воспользуемся тем, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а именно:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\text{[1]}.$$

Если сделать такую замену в нашем уравнении, то получим уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, из которого и найдем:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

Отсюда, между прочим, видно, что условие возможности задачи есть: $a^2 + b^2 \geqq c^2$.

3-й способ. При сложных числах предыдущий способ затруднителен, и тогда решают данное уравнение посредством вспомогательного угла следующим образом: разделив обе части уравнения на b и полагая $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$, будем иметь: $\operatorname{tg}\varphi \cdot \sin x + \cos x = \frac{c}{b}$; умножая теперь обе части на $\cos\varphi$, получим $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{b}\cos\varphi$.

---

[1]) Взяв $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, делим вторые части на $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (что равно 1), а затем числителя и знаменателя делим на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

§ 72. Примеры этого параграфа будут касаться вопроса о потере корней в уравнении и о получении посторонних корней, причем предполагается, что общая теория этого вопроса уже известна учащемуся из алгебры.

I. Когда приравнивается нулю один из множителей произведения с целью обратить в нуль и самое произведение, то необходимо следить, не обращается ли при этом другой множитель в ∞.

Возьмем, например, уравнение $\sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$. Приравнивая нулю отдельные множители, получим:

$$1)\ \sin x = 0,\ x = 180^\circ \cdot n;\quad 2)\ \operatorname{ctg} 2x = 0, 2x = 90^\circ + 180^\circ \cdot n,$$

и, следовательно, $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot n$.

Сделаем теперь поверку.

Подставляя в данное уравнение корень $x = 180^\circ \cdot n$, получим в первой части $\sin(180^\circ \cdot n) \cdot \operatorname{ctg}(360^\circ \cdot n)$, что равно $0 \cdot \infty$.

Чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем произведение $\sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x$; при всяком x имеем:

$$\sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x = \sin x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{2 \cos x};$$

подставляя сюда $x = 180^\circ \cdot n$, получим:

$$\frac{\cos(360^\circ \cdot n)}{2\cos(180^\circ \cdot n)} = \frac{1}{2 \cdot (-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n.$$

Таким образом корень $x = 180^\circ \cdot n$ не удовлетворяет данному уравнению, так как обращает первую часть его не в нуль, а в $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

Подставляем в данное уравнение корень $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot n$. Так как $\sin x$ никогда не обращается в ∞, то в произведении получим нуль, и, следовательно, испытуемый корень пригоден.

Итак, после разбора остается только $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot n$.

II. $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

Решение. Освобождаясь от знаменателей, получим $\sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x$, или $\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x = 0$; здесь в первой части мы имеем разложенный синус разности; таким образом получим $\sin x = 0$, откуда $x = 180^\circ \cdot n$. Так как при $\sin x = 0$ общий знаменатель $\sin x \cdot \cos x$ обращается в нуль, то полученный корень сомнительный.

Подставив $x = 180^\circ \cdot n$ в данное уравнение, будем иметь:

$$\frac{\sin(360^\circ \cdot n)}{\sin(180^\circ \cdot n)} = \frac{\cos(360^\circ \cdot n)}{\cos(180^\circ \cdot n)},\ \text{или}\ \frac{0}{0} = \frac{1}{(-1)^n}.$$

Чтобы раскрыть неопределенность в первой части, заметим, что $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ тождественно равно $\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x}$, или $2\cos x$; следовательно, истинное значение первой части есть $2\cos(180^\circ \cdot n)$, или $2 \cdot (-1)^n$.

Таким образом $x = 180^\circ \cdot n$ не удовлетворяет данному уравнению.

Вообще, если в уравнении есть знаменатели, то более надежный прием решения будет следующий: переносим все члены в одну часть и соединяем все в одну дробь; эту дробь сокращаем, если возможно, и затем определяем, какими способами можно обратить ее в нуль.

Поступая так с данным уравнением, мы заменили бы его постепенно следующими:

$$\frac{\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 0;\quad \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = 0;\quad \frac{1}{\cos x} = 0;\quad \sec x = 0.$$

Но секанс никогда не может быть нулем, и потому данное уравнение оказывается невозможным.

III. Если бы в примере I § 72 мы разделили обе части на $\sin x$, то потеряли бы корень $\sin x = 0$.

В примере VI § 71 мы разделили обе части уравнения на $\cos^2 x$; но $\cos x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению; следовательно, потери корней здесь не произошло.

IV. $\sin x + 7\cos x = 5$... (a).

Решение. Взяв $\sin x = 5 - 7\cos x$ ... (b), возвышаем здесь обе части в квадрат, получаем:

$$\sin^2 x = 25 - 70\cos x + 49\cos^2 x.$$

Далее найдем:

$$50\cos^2 x - 70\cos x + 24 = 0;\quad \cos^2 x - \frac{7}{5}\cos x + \frac{12}{25} = 0;$$

$$\cos x = \frac{7}{10} \pm \sqrt{\frac{49}{100} - \frac{12}{25}} = \frac{7}{10} \pm \frac{1}{10}.$$

Таким образом: 1) $\cos x_1 = 0{,}8$, откуда $x_1 = 360^\circ \cdot n \pm 36^\circ 52' 12''$, 2) $\cos x_2 = 0{,}6$, откуда $x_2 = 360^\circ \cdot n \pm 53^\circ 7' 49''$.

Вспомним, что в нашем решении имеется возвышение обеих частей уравнения в квадрат, а от этого могли получиться посторонние корни. Такие корни будут, как известно, принадлежать уравнению, которое отличается от возведенного в квадрат только знаком одной части, т. е. уравнению $\sin x = -(5 - 7\cos x)$; следовательно, у них будет не тот знак синуса, какой требуется. Определим поэтому, какой должен быть знак синуса, чтобы угол удовлетворял данному уравнению. Подстановка значений $\cos x$ в уравнение (b) дает:

$$1)\ \sin x_1 = 5 - 7 \cdot 0{,}8 < 0;\quad 2)\ \sin x_2 = 5 - 7 \cdot 0{,}6 > 0.$$

Таким образом в полученном у нас решении должны быть исключены углы: $x_1 = 360^\circ \cdot n + 36^\circ 52' 12''$ как имеющие положительный синус, и $x_2 = 360^\circ \cdot n - 53^\circ 7' 49''$ как имеющие отрицательный синус.

Итак, окончательное решение уравнения (a) выразится формулами:

$$x_1 = 360^\circ \cdot n - 36^\circ 52' 12''\ \text{и}\ x_2 = 360^\circ \cdot n + 53^\circ 7' 49''.$$

Решая для сравнения данное уравнение еще переходом на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, мы получим:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2};\quad \frac{x}{2} = 26^\circ 33' 54'' + 180^\circ \cdot n;\quad x = 53^\circ 7' 48'' + 360^\circ \cdot n;$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{3};\quad \frac{x}{2} = -18^\circ 26' 6'' + 180^\circ \cdot n;\quad x = -36^\circ 52' 12'' + 360^\circ\, n.$$

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТАБЛИЦАХ.

VII. Понятие о составлении тригонометрических таблиц.

§ **73.** Покажем, как для всякого угла могут быть найдены приближенные значения его тригонометрических функций.

Тригонометрические функции всякого угла приводятся, как мы знаем, к функциям положительного угла, не превышающего 45°; все тригонометрические функции можно вычислить по одной из них, например по синусу; из этого следует, что для нашей цели достаточно указать способ, каким можно было бы вычислить синус каждого из углов, содержащихся между 0 и 45°.

Один из способов основан на том, что при очень малом угле можно без значительной погрешности линию синуса заменить дугой. Пусть, например, на чертеже 39 $\angle AOB = 10'$. По определению синуса должно быть $\sin 10' = \frac{BC}{R}$, а указанный способ состоит в том, что вместо $\frac{BC}{R}$ мы берем $\frac{\smile AB}{R}$. Для вычисления этого отношения мы имеем:

$$\smile AB = \frac{2\pi R \cdot 10}{360 \cdot 60} = \frac{\pi R}{1080},$$

откуда:

$$\frac{\smile AB}{R} = \frac{\pi}{1080};$$

подставляя сюда значение π, получим:

$$\frac{\smile AB}{R} = 0{,}002\,908\,882\ldots$$

Это число и послужит приближенным значением $\sin 10'$.

Так как величина отношения $\frac{\smile AB}{R}$ есть радианное выражение дуги, можно сказать, что синус очень малого угла или дуги мы заменяем радианным выражением самой дуги.

По этому способу мы начнем вычисление с достаточно малой доли данного угла и будем увеличивать угол постепенно, применяя формулы, относящиеся к двойному углу и к сумме углов.

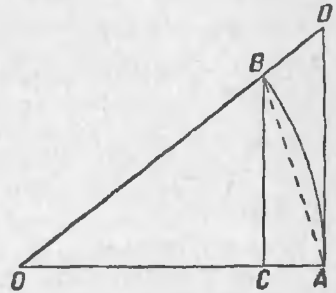
В § 74—76 будут доказаны три теоремы: из них вторая оправдывает замену очень малого синуса дугой (выраженной в радианах), а третья позволяет судить о погрешности при такой замене.

§ **74. Теорема.** *Дуга, меньшая $\frac{1}{2}\pi$, более своего синуса и менее своего тангенса.*

Пусть имеем: $0 < a < \frac{1}{2}\pi$, где a есть радианное выражение дуги; требуется доказать, что $\sin a < a < g\,a$.

Доказательство. По чертежу 39, проведя вспомогательную хорду AB, имеем: площадь $\triangle OBA <$ площади сектора $OAB <$ $<$ площади $\triangle ODA$, или, взяв выражения этих площадей,

$$\frac{1}{2} OA \cdot BC < \frac{1}{2} OA \cdot \smile AB <$$
$$< \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$



Черт. 39.

Отсюда: $BC < \smile AB < AD$, а деля каждую часть на R:

$\frac{BC}{R} < \frac{\smile AB}{R} < \frac{AD}{R}$, т. е. $\sin a < a < \operatorname{tg} a$.

§ **75. Теорема.** *Если дуга стремится к нулю, то отношение синуса к дуге имеет пределом единицу.*

Нам надо доказать, что $\lim\limits_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$, где a есть радианное выражение дуги.

Доказательство. По § 74 имеем:

$$\sin a < a < \operatorname{tg} a. \qquad (1)$$

Разделив $\sin a$ на каждую часть этого неравенства, получим:

$$1 > \frac{\sin a}{a} > \cos a. \qquad (2)$$

Если дуга a стремится к 0, то $\cos a$ стремится к 1; таким образом в неравенстве (2) третья и первая части неограниченно сближаются по величине, а следовательно, неограниченно сближается и вторая часть с первой, т. е. предел отношения $\frac{\sin a}{a}$ есть 1.

§ **76. Теорема.** *Для дуги, меньшей $\frac{1}{2}\pi$, разность между дугой и синусом менее четверти куба дуги.*

Пусть будет a—радианное выражение дуги, причем $0 < a < \frac{1}{2}\pi$; требуется доказать, что $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$.

Доказательство. Начнем с неравенства $\frac{a}{2} < \operatorname{tg}\frac{a}{2}$ (применяя § 74 к дуге $\frac{a}{2}$). Умножив обе части на $2\cos^2\frac{a}{2}$, получим: $a\cdot\cos^2\frac{a}{2} < 2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}$, или, преобразуя, $a\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right) < \sin a$, а отсюда: $a-\sin a < a\cdot\sin^2\frac{a}{2}$. Заменяя теперь $\sin\frac{a}{2}$ большей величиной $\frac{a}{2}$ (§ 74), будем иметь окончательно: $a-\sin a < \frac{a^3}{4}$.

§ 77. Применяя способ, указанный выше (с некоторыми упрощениями), можно составить так называемые таблицы натуральных тригонометрических величин; а взяв логарифмы найденных чисел, получим те логарифмические таблицы, которыми пользуются в тригонометрических вычислениях.

Замечание. В предыдущем доказана только возможность составления тригонометрических таблиц. Что же касается того, как они были составлены на самом деле в первый раз, то заметим лишь, что примененные тогда приемы были весьма сложны.

VIII. Тригонометрические таблицы.

§ 78. Дадим краткое объяснение таблиц тригонометрических функций, приведенных в книге В. Брадис, «Четырехзначные математические таблицы».

Таблица VIII содержит значения синусов и косинусов для всех острых углов, содержащих целое число градусов и минут. Для отыскания синуса надо найти слева данное число градусов, а сверху—данное число минут; на пересечении соответствующей строчки и столбца находится искомый синус.

Примеры. $\sin 20°12' = 0{,}3453$;
$\sin 75°48' = 0{,}9694$.

Обратно, при отыскании угла по синусу нужно найти данное значение синуса и слева взять градусы, а сверху—минуты.

$$\sin x = 0{,}8949; \quad x = 63°30'.$$

При отыскании косинуса надо градусы брать справа, а минуты снизу, например:

$$\cos 35°42' = 0{,}8121.$$

Минуты в этой таблице даны через 6'. Для вычисления функций промежуточных углов надо пользоваться поправками на 1, 2 и 3 минуты в столбике справа. Например:

$$\sin 34°15' = 0{,}5628$$

(к $\sin 34°12'$ прибавлена поправка на 3', равная 7).

Так как при увеличении угла синус увеличивается, а косинус уменьшается, то для синуса поправка прибавляется, а для косинуса—вычитается.

Таблица IX содержит значения тангенсов и котангенсов для углов от 0° до 81°. Пользоваться этой таблицей надо так же, как таблицей VIII.

Таблица X содержит значения тангенсов и котангенсов для углов от 81° до 90° и котангенсов для углов от 0° до 9°; в этих интервалах тангенс и котангенс меняются особенно быстро. В этой таблице углы отличаются на 1'; поправок находить не надо.

§ 79. Таблицы XI, XII, XIII, XIV и XV содержат логарифмы тангенсов котангенсов, синусов и косинусов. Устройство этих таблиц ничем не отличается от описанных натуральных таблиц.

Примеры. $\lg\sin 20°18' = \bar{1},5402$;
$\lg\cos 26°48' = \bar{1},9506$;
$\lg\operatorname{tg} 61°54' = 0{,}2725$;
$\lg\operatorname{ctg} 18°30' = 0{,}4755$.

§ 80. Употребление пятизначных таблиц логарифмов. Опишем устройство таблиц Пржевальского.

В этих таблицах на страницах 62—151 стереотипного издания содержатся логарифмы синуса, косинуса, тангенса, котангенса острых углов, причем углы идут через 1', а логарифмы даны с точностью до $^1/_2$ стотысячной.

Отрицательные характеристики для удобства при печатании увеличены на 10, так что характеристика 9 обозначает $\bar{1}$, характеристика 8 обозначает $\bar{2}$ и т. д.

Числа градусов более 45° напечатаны внизу страницы; когда берутся эти числа, то минуты берутся справа, а названия функций—снизу.

Если угол содержит секунды, то к табличному логарифму делается поправка. Эта поправка вычисляется с помощью пропорции, так как небольшие изменения угла и небольшие изменения логарифма приблизительно пропорциональны.

Пример 1. Найти $\lg \sin 34°16'43''$.

Решение. На странице 130 находим:

$$\lg \sin 34°16' = 1,75054.$$

Выписываем табличную разность $D = 19$. Составляем пропорцию:

$$x : 19 = 43'' : 60'',$$

где x — искомая поправка логарифма, соответствующая 43″. Находим:

$$x = 19 \cdot \frac{43}{60} \approx 14.$$

Итак: $\lg \sin 34°16'43'' = \bar{1},75068$.

Для нахождения поправки можно пользоваться табличками, помещенными сбоку каждой страницы.

В приведенном примере по табличке сначала берем поправку на 40″ (получится 12,7) и потом на 3″ (получится 0,95), всего будет приблизительно 14.

Действие надо располагать так:

$$\begin{array}{lll} \lg \sin 34°16' & = \bar{1},75054 & \qquad D = 19. \\ \qquad\quad +43'' & \qquad +14 & \\ \hline \lg \sin 34°16'43'' & = \bar{1},75068. & \end{array}$$

Пример 2. Найти $\lg \cos 29°45'23''$.

Решение.

$$\begin{array}{lll} \lg \cos 29°45' & = \bar{1},93862 & \qquad D = 7. \\ \qquad\quad +23'' & \qquad -3 & \\ \hline \lg \cos 29°45'23'' & = \bar{1},93859. & \end{array}$$

Поправку вычитаем, так как с увеличением угла косинус уменьшается, его логарифм — также.

Пример 3. Найти $\lg \operatorname{tg} 57°20'30''$.

Решение:

$$\begin{array}{lll} \lg \operatorname{tg} 57°20' & = 0,19303 & \qquad D = 28. \\ \qquad\quad +30'' & \qquad +14 & \\ \hline \lg \operatorname{tg} 57°20'30'' & = 0,19317. & \end{array}$$

Пример 4. Найти угол x, если $\lg \sin x = \bar{1},63623$.

Решение. На странице 113 находим ближайший меньший угол и затем делаем поправку; действие располагаем так:

$$\begin{array}{lll} \bar{1},63610 \ \ldots & 25°38' & \qquad D = 26 \\ \quad +13 \ \ldots\ldots & \qquad 30'' & \\ \hline \bar{1},63623 \ \ldots & 25°38'30'' & \end{array}$$

$$x = 25°38'30''.$$

Поправку проще всего взять из столбика с заголовком 26, где на 3″ приходится 1,3, а 13 придется на 30″.

Пример 5. $\lg \operatorname{tg} \alpha = \bar{2},95696$.

Решение.

$$\begin{array}{lll} \bar{2},95627 \ \ldots & 5°10' & \qquad D = 140. \\ \quad +69 \ \ldots & \qquad 30'' & \\ \hline \bar{2},95696 \ \ldots & 5°10'30'' & \end{array}$$

$$x = 5°10'30''.$$

Пример 6. Дано: $\lg \operatorname{ctg} x = 1,07085$; найти x.

Решение.

$$\begin{array}{lll} 1,06984 \ \ldots & 4°52' & \qquad D = 150 \\ \quad +101 \ \ldots & \quad -40'' & \\ \hline 1,07085 \ \ldots & 4°51'20'' & \end{array}$$

$$x = 4°51'20''.$$

§ 81. Случай очень большой табличной разности. Находя поправку к табличному логарифму или табличному углу, мы принимали, что изменения угла и изменения логарифма пропорциональны, но на самом деле это справедливо только приблизительно: если бы это было верно вполне, то для одной и той же функции все табличные разности были бы равны между собой, чего, однако, нет, хотя вообще они меняются и очень медленно. Но на первых страницах таблиц для синуса, тангенса и котангенса очень малых углов (а, следовательно, для косинуса, котангенса и тангенса углов, близких к 90°) логарифмические разности изменяются очень быстро, а потому в этих случаях предыдущий способ для вычисления поправки ненадежен. Приводим пример.

По обычному способу найдем:

$$\lg \sin 22'48'' = 7,80615 - 10 + 0,01930 \times \frac{8}{10} = 7,82159 - 10,$$

между тем как в более полных таблицах показано: $\lg \sin 22'48'' = 7,82166 - 10$; таким образом обычный способ вычисления поправки здесь оказывается грубым (разница достигает 7 стотысячных).

По указанной причине в случае очень большой табличной разности (например, для синуса и тангенса углов менее 2°) употребляют другой прием, а именно: принимают, что с и н у с ы и т а н г е н с ы о ч е н ь м а л ы х у г л о в п р о п о р ц и о н а л ь н ы с а м и м у г л а м (а остальные случаи сводят на это же).

Покажем этот прием на примерах.

Пример 1. Мы находили $\lg \sin 22'48''$. Применим новый способ. Будем иметь:

$$\frac{\sin 22'48''}{\sin 22'} = \frac{22'48''}{22'}, \text{ или } \frac{\sin 22'48''}{\sin 22'} = \frac{22,8}{22};$$

отсюда:

$$\lg \sin 22'48'' = \lg \sin 22' + (\lg 22,8 - \lg 22) = 7,80615 - 10 + (1,35793 - 1,34242) = 7,82166 - 10,$$

что согласно с более полными таблицами.

Пример 2. Найти $\lg \operatorname{tg} 88°56'20''$.

По обычному способу получается 1,73232, а должно быть (по полным таблицам) 1,73231. Применим теперь новый способ.

Имеем: 1) $\operatorname{tg} 88°56'20'' = \operatorname{ctg} 1°\,3'\,40'' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 1°\,3'40''}$;

$$2)\ \frac{\operatorname{tg} 1°\,3'40''}{\operatorname{tg} 1°3'} = \frac{1°\,3'40''}{1°3'},\ \text{или}\ \frac{\operatorname{tg} 1°\,3'40''}{\operatorname{tg} 1°3'} = \frac{191}{189}.$$

Произведя вычисление, получим:

а) $\lg \operatorname{tg} 1°\,3'40'' = 8{,}26312 - 10 + (2{,}28103 - 2{,}27646) = 8{,}26769 - 10$;

б) $\lg \operatorname{ctg} 1°\,3'40'' = 0 - \lg \operatorname{tg} 1°3'40'' = 1{,}73231$, что и должно быть (по полным таблицам).

Пример 3. Дано: $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 2{,}20443$; требуется найти α.

По обычному способу получим $\alpha = 21'29''$. Применим новый способ.

Берем $\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 1 - \lg \operatorname{ctg} \alpha = 7{,}79557 - 10$; ближайший меньший логарифм в таблице есть 7,78595, и ему соответствует угол $21'$; составим пропорцию:

$$\frac{\alpha}{21'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 21'},$$

полагая теперь $\alpha = x''$, получим:

$$\frac{x}{1260} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 21'},$$

откуда:

$$\lg x = \lg 1260 + (\lg \operatorname{tg} \alpha - \lg \operatorname{tg} 21') = 3{,}10999.$$

Найдя ц е л о е число, наиболее подходящее к этому логарифму, будем иметь $x = 1288$. Итак, $\alpha = 1288'' = 21'28''$. Тот же самый угол получается и по более полным таблицам.

§ 82. Степень точности при определении угла по пятизначным таблицам. Для того чтобы два логарифма какой-нибудь тригонометрической функции различались между собой на 0,00001, надо, чтобы соответствующие им углы отличались один от другого на $\frac{60''}{d}$, где d означает величину табличной разности (в стотысячных долях); если же разность двух углов будет меньше $\frac{60''}{d}$, то соответствующие логарифмы будут различаться менее чем на 0,00001, и следовательно, при ограничении пятью десятичными знаками они окажутся равными. Отсюда следует, что ошибка в определении угла по логарифму может доходить до $\frac{60''}{d}$.

В случае синуса до 12° имеем $d > 60$, а следовательно, величина $\frac{60''}{d}$ менее $1''$; затем она начинает возрастать, при 85° достигает $1'$, а при углах, близких к 90°, один и тот же

логарифм соответствует уже нескольким углам, так что здесь колебание в угле может достигать нескольких минут. Таким образом по синусу, а следовательно, и по косинусу, углы определяются с малой точностью; особенно же неточно определяются: по синусу—углы, близкие к прямому, а следовательно, по косинусу—углы, близкие к нулю.

Логарифмы тангенса и котангенса дают бо́льшую степень точности, потому что с изменением угла тангенс и котангенс изменяются гораздо быстрее, чем синус и косинус, так что табличная разность их логарифмов (общая) всегда более соответствующей разности для синуса или косинуса. В случае тангенса и котангенса всего хуже определяются углы, близкие к 45°, но и там возможная ошибка остается менее $\frac{60''}{25}$, т. е. менее $2'',4$.

О РЕШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

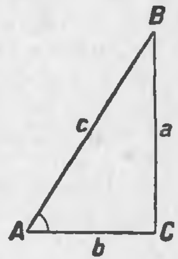
IX. Прямоугольные треугольники.

§ 83. Соотношения между элементами прямоугольного треугольника. В § 20 были выведены тригонометрические соотношения между элементами прямоугольного треугольника; а именно, из определения тригонометрических функций были выведены формулы (черт. 40):

$$\sin A = \frac{a}{c};\ \cos A = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

Определяя из этих формул a, b и c, найдем:

$$1)\ a = c \cdot \sin A;\ 2)\ b = c \cdot \cos A;$$
$$3)\ a = b \cdot \operatorname{tg} A.$$



Черт. 40.

(Словесные формулировки приведены в § 20—21.) К этим формулам надо добавить еще три, известные из геометрии:

$$A + B = 90°;\ c^2 = a^2 + b^2;\ S = \frac{1}{2}ab.$$

§ 84. *Между элементами всякого треугольника существуют только три независимых соотношения.* В состав треугольника входят три стороны и три угла; но из этих шести элементов достаточно иметь три (исключая случай трех углов), чтобы можно было построить треугольник и тем самым получить остальные т р и элемента. Отсюда следует, что и при вычислении в треугольнике можно определить т р и элемента по данным остальным; а для этого число различных уравнений между элементами треугольника должно быть равно также трем. Если уравнений получено более трех, то некоторые из них будут уже следствием других.

В прямоугольном треугольнике основными соотношениями считаются обыкновенно следующие:

$$A + B = 90°;\ a = c \cdot \sin A;\ b = c \cdot \cos A.$$

Остальные можно вывести из них.

§ 85. Решение прямоугольных треугольников. Основными элементами треугольника считаются стороны и углы. Поэтому при решении прямоугольного треугольника в зависимости от данных может представиться 4 случая, разобранные в следующих параграфах. При этом в числе данных непременно должен быть один линейный элемент, так как иначе нельзя узнать размеры треугольника: по трем углам можно построить сколько угодно подобных треугольников.

Решение треугольников (как и решение всяких математических задач) проводится сначала, по возможности, до конца в общем виде; затем подставляются числовые данные и производятся вычисления. Все нижеследующие примеры решены с помощью таблиц Брадиса, сначала по натуральным значениям тригонометрических функций, потом—по логарифмам.

На случай пользования пятизначными таблицами сохранены примеры решения треугольников и по этим таблицам.

§ 86. ***1-й случай.*** Даны гипотенуза и острый угол (c и A). Найти другой острый угол, катеты и площадь (B, a, b, S).

I. Решение в общем виде.

$$B = 90° - A;\ a = c \cdot \sin A;\ b = c \cdot \cos A;$$

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{c^2}{2} \cdot \sin A \cos A = \frac{c^2}{4} \sin 2A.$$

II. Числовой пример: $c = 627;\ A = 23°30'$.

Решение.

$B = 90° - 23°30' = 66°30'$;

$a = 627 \cdot \sin 23°30'$.

По таблице VIII Брадиса находим $\sin 23°\ 30' = 0,3987$; следовательно:

$a = 627 \cdot 0,3987 = 249,9849$;

$a \approx 250$ (лин. единиц);

$b = 627 \cdot \cos 23°30' = 627 \cdot 0,9171 = 575,0117$;

$b \approx 575$ (лин. единиц);

$S = \frac{1}{2} \cdot 249,98 \cdot 575,01 = 71880\ldots$ (кв. единиц).

§ 87. ***2-й случай.*** Даны катет и острый угол (a и A). Найти B, c, b, S.

I. Решение в общем виде.

$$B = 90° - A;\ c = \frac{a}{\sin A};\ b = \frac{a}{\operatorname{tg} A} = a \cdot \operatorname{ctg} A;$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} A.$$

II. Числовой пример: $a = 18;\ A = 47°$.

Решение.

$$B = 90° - 47° = 43°;\ c = \frac{18}{\sin 47°} = \frac{18}{0,7314};$$

$c = 24,62\ldots$ (лин. единиц);

$b = 18 \operatorname{ctg} 47° = 18 \cdot 0,9325$;

$b = 16,79$ (лин. единиц);

$S = \frac{18^2}{2} \cdot 0,9325 = 151,12$ (кв. единиц).

§ 88. ***3-й случай.*** Даны гипотенуза и катет (c и a). Найти A, B, b, S.

I. Решение в общем виде.

$$\sin A = \frac{a}{c};\ \cos B = \frac{a}{c};\ b = \sqrt{c^2 - a^2};\ S = \frac{a}{2}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

II. Числовой пример: $c = 65;\ a = 16$.

Решение.

$\sin A = \frac{16}{65} = 0,2461;\ A = 14°12' + 3' = 14°15'$;

$B = 90° - 14°15' = 75°45'$;

$b = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{(65 + 16)(65 - 16)} = \sqrt{81 \cdot 49} = 9 \cdot 7$;

$b = 63$ (лин. единиц);

$S = \frac{16}{2} \cdot 63 = 504$ (кв. единиц).

§ 89. ***4-й случай.*** Даны оба катета (a и b). Найти A, B, c, S.

I. Решение в общем виде.

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b};\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};\ c = \sqrt{a^2 + b^2};\ S = \frac{ab}{2}.$$

II. Числовой пример: $a = 25;\ b = 40$.

Решение.

$\operatorname{tg} A = \frac{25}{40} = 0,625;\ A = 32°;\ B = 58°$;

$c = \sqrt{25^2 + 40^2} \approx 47,2;\ S = 500\ldots$ (кв. единиц).

Решение прямоугольных треугольников при помощи логарифмических четырехзначных таблиц.

§ 90. *1-й случай.* Даны гипотенуза и острый угол: $c = 287,4$; $A = 42°6'$. Найти B, a, b, S.

Решение.

1) $B = 90° - 42°6' = 47°54'$.

2) $a = c \cdot \sin A$;
$a = 287,4 \cdot \sin 42°6'$.
$\lg a = \lg 287,4 + \lg \sin 42°6'$;

$$+\begin{array}{l} \lg 287,4 = 2,4585 \\ \lg \sin 42°6' = \bar{1},8264 \end{array}$$
$$\lg a = 2,2849;$$
$$a = 192.7.$$

3) $b = c \cdot \cos A$;
$b = 287,4 \cdot \cos 42°6'$;
$\lg b = \lg 287,4 + \lg \cos 42°6'$;

$$+\begin{array}{l} \lg 287,4 = 2,4585 \\ \lg \cos 42°6' = \bar{1},8704 \end{array}$$
$$\lg b = 2,3289;$$
$$b = 213,2.$$

4) $S = \frac{1}{2}ab$;
$S = 0,5 \cdot 192,7 \cdot 213,2$;
$\lg S = \lg 0,5 + \lg 192,7 + \lg 213,2$;

$$+\begin{array}{l} \lg 0,5 = \bar{1},6990 \\ \lg 192,7 = 2,2849 \\ \lg 213,2 = 2,3289 \end{array}$$
$\lg S = 4,3128$; $S = 20\,550$ (кв. единиц).

§ 91. *2-й случай.* Даны катет и острый угол: $a = 797,9$; $A = 66°36'$. Найти B, c, b, S.

Решение.

1) $B = 90° - 66°36' = 23°24'$.

2) $c = \frac{a}{\sin A}$; $c = \frac{797,9}{\sin 66°36'}$;
$\lg c = \lg 797,9 - \lg \sin 66°36'$;

$$-\begin{array}{l} \lg 797,9 = 2.9020 \\ \lg \sin 66°36' = \bar{1},9627 \end{array}$$
$$\lg c = 2.9393;$$
$$c = 869,6.$$

3) $b = a \cdot \operatorname{ctg} A$;
$b = 797.9 \cdot \operatorname{ctg} 66°36'$;
$\lg b = \lg 797,9 + \lg \operatorname{ctg} 66°36'$;

$$+\begin{array}{l} \lg 797,9 = 2,9020 \\ \lg \operatorname{ctg} 66°36' = \bar{1},6362 \end{array}$$
$$\lg b = 2.5382$$
$$b = 345,3.$$

4) $S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2} \cdot 797,9 \cdot 345,3$;
$\lg S = \lg 0,5 + \lg 797,9 + \lg 345,3$;

$$+\begin{array}{l} \lg 0,5 = \bar{1},6990 \\ \lg 797,9 = 2,9020 \\ \lg 345,3 = 2,5332 \end{array}$$
$\lg S = 5.1392$; $S = 137\,800$ (кв. единиц).

§ 92. *3-й случай.* Даны катет и гипотенуза: $a = 35,47$; $c = 45,93$. Найти A, B, b, S.

Решение.

1) $\frac{a}{c} = \sin A$; $\sin A = \frac{35,47}{45,93}$;
$\lg \sin A = \lg 35,47 - \lg 45,93$;

$$-\begin{array}{l} \lg 35,47 = 1,5499 \\ \lg 45,93 = 1,6621 \end{array}$$
$$\lg \sin A = \bar{1},8878;$$
$$A = 50°34'.$$

2) $B = 90° - 50°34' = 39°26'$.

3) $b = a \cdot \operatorname{tg} B$;
$b = 35,47 \cdot \operatorname{ctg} 50°34'$;
$\lg b = \lg 35,47 + \lg \operatorname{ctg} 50°34'$;

$$+\begin{array}{l} \lg 35,47 = 1,5499 \\ \lg \operatorname{ctg} 50°34' = \bar{1},9150 \end{array}$$
$$\lg b = 1,4649;$$
$$b = 29,17.$$

4) $S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2} \cdot 35,47 \cdot 29,17$;
$\lg S = \lg 0,5 + \lg 35,47 + \lg 29,17$;

$$+\begin{array}{l} \lg 0,5 = \bar{1},6990 \\ \lg 35,47 = 1,5499 \\ \lg 29,17 = 1,4649 \end{array}$$
$\lg S = 2,7138$; $S = 517,4...$ (кв. единиц).

§ 93. *4-й случай.* Даны оба катета: $a = 104$; $b = 20,49$. Найти A, B, c, S.

Решение.

1) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} A = \frac{104}{20,49}$;
$\lg \operatorname{tg} A = \lg 104 - \lg 20,49$;

$$-\begin{array}{l} \lg 104 = 2,0170 \\ \lg 20,49 = 1,3115 \end{array}$$
$$\lg \operatorname{tg} A = 0,7055;$$
$$A = 78°51'.$$

2) $B = 90° - 78°51' = 11°09'$.

3) $c = \frac{a}{\sin A}$; $c = \frac{104}{\sin 78°51'}$;
$\lg c = \lg 104 - \lg \sin 78°51'$;

$$-\begin{array}{l} \lg 104 = 2,0170 \\ \lg \sin 78°51' = \bar{1},9917 \end{array}$$
$$\lg c = 2,0253;$$
$$c = 106.$$

4) $S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2} \cdot 104 \cdot 20,49$;
$\lg S = \lg 52 + \lg 20,49$;

$$+\begin{array}{l} \lg 52 = 1,7160 \\ \lg 20,49 = 1,3115 \end{array}$$
$\lg S = 3,0275$; $S = 1065$ (кв. единиц).

Примеры решения прямоугольных треугольников с помощью пятизначных таблиц.

§ 94. *1-й случай.* Даны гипотенуза и острый угол (c и A).
Числовой пример: $c = 457$; $A = 32°40'15''$.
Вычисление: $B = 90° - A = 57°19'45''$.

$$
\begin{array}{rl|rl}
 & a = c \cdot \sin A & & b = c \cdot \sin B \\
+ & \lg c = 2{,}65992 & + & \lg c = 2{,}65992 \\
 & \underline{\lg \sin A = 9{,}73224 - 10} & & \underline{\lg \sin B = 9{,}92520 - 10} \\
 & \lg a = 2{,}39216 & & \lg b = 2{,}58512 \\
 & a = 246{,}69 & & b = 384{,}7
\end{array}
$$

$$
S = 0{,}5 \cdot ab \qquad
\begin{array}{r}
\lg 0{,}5 = 9{,}69897 - 10 \\
+ \lg a = 2{,}39216 \\
\underline{\lg b = 2{,}58512} \\
\lg S = 4{,}67625
\end{array}
$$

$S = 47\,451$ (кв. единиц).

§ 95. *2-й случай.* Даны катет и острый угол (a и A).
Числовой пример: $a = 9{,}82$; $A = 63°21'45''$.
Вычисление: $B = 90° - A = 26°38'15''$.

$$
\begin{array}{rl|rl}
 & c = \frac{a}{\sin A} & & b = \frac{a}{\operatorname{tg} A} \\
- & \lg a = 0{,}99211 & - & \lg a = 0{,}99211 \\
 & \underline{\lg \sin A = 9{,}95127 - 10} & & \underline{\lg \operatorname{tg} A = 0{,}29966} \\
 & \lg c = 1{,}04084 & & \lg b = 0{,}69245 \\
 & c = 10{,}986 & & b = 4{,}9255
\end{array}
$$

Площадь вычислим по формуле $\lg S = \lg 0{,}5 + \lg a + \lg b$; получим $S = 24{,}184$ (кв. единиц).

§ 96. *3-й случай.* Даны гипотенуза и катет (c и a).
Числовой пример: $c = 58{,}5$; $a = 47{,}54$.
Вычисление:

$$
\begin{array}{rl|rl}
 & \sin A = \frac{a}{c} & & b = c \cdot \sin B \\
- & \lg a = 1{,}67706 & + & \lg c = 1{,}76716 \\
 & \underline{\lg c = 1{,}76716} & & \underline{\lg \sin B = 9{,}76548 - 10} \\
 & \lg \sin A = 9{,}90990 - 10 & & \lg b = 1{,}53264 \\
 & A = 54°21'20'' & & b = 34{,}091 \\
 & B = 90° - A = 35°38'40'' & &
\end{array}
$$

Площадь $S = 810{,}34$ (кв. единиц).

4-й случай. Даны оба катета (a и b).
Числовой пример: $a = 23\,214$; $b = 38\,947$.
Вычисление:

$$
\begin{array}{rl|rl}
 & \operatorname{tg} A = \frac{a}{b} & & c = \frac{a}{\sin A} \\
- & \lg a = 4{,}36575 & - & \lg a = 4{,}36575 \\
 & \underline{\lg b = 4{,}59048} & & \underline{\lg \sin A = 9{,}70926 - 10} \\
 & \lg \operatorname{tg} A = 9{,}77527 - 10 & & \lg c = 4{,}65649 \\
 & A = 30°47'47'' & & c = 45341 \\
 & B = 59°12'13'' & &
\end{array}
$$

Для площади получим:

$$S = b \cdot \frac{a}{2} = 38\,947 \cdot 11\,607 = 452\,057\,829 \text{ (кв. единиц).}$$

Замечание. Иногда для вычисления c удобна также и формула $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Пусть, например, $a = 400$ и $b = 503$; тогда легко найти непосредственно: $a^2 = 160\,000$, $b^2 = 253\,009$, и следовательно, $c = \sqrt{413\,009}$. Применяя теперь логарифмы, получим: $\lg c = 2{,}80798$; $c = 642{,}66$.

X. Косоугольные треугольники.

§ 97. Соотношения между элементами косоугольного треугольника. Начнем с геометрического соотношения между углами треугольника:

$$A + B + C = 180°.$$

Заметим некоторые следствия из него.

а) Так как сумма значений A и $B + C$ равна $180°$, то синусы их равны, а косинусы различаются знаками; поэтому: $\sin(B + C) = \sin A$; $\cos(B + C) = -\cos A$; $\cos A = -\cos(B + C)$.

Точно так же:

$$\operatorname{tg}(B + C) = -\operatorname{tg} A.$$

б) Так как сумма значений $\frac{A}{2}$ и $\frac{B+C}{2}$ равна $90°$, то сходные функции их соответственно равны (§ 17); например:

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}; \quad \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2} \text{ и т. д.}$$

в) Полезно запомнить еще следующие соотношения между углами треугольника:

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$;

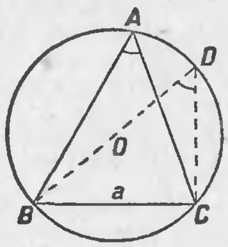
2) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$;

3) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

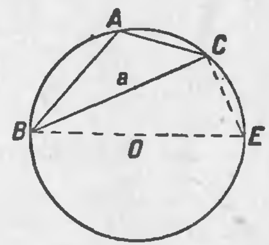
§ 98. ***Лемма.*** *Во всяком треугольнике сторона равна диаметру описанного круга, умноженному на синус противолежащего угла.*

Обозначая радиус описанного круга через R, докажем, например, что $a = 2R \cdot \sin A$, где угол A есть острый или тупой.

Доказательство. 1) Угол A острый (черт. 41). В описанном круге из конца данной стороны проведем диаметр и соединим другие концы этой стороны и диаметра; получим прямоугольный треугольник. На чертеже 41 таким треугольником будет BDC; из него, на основании § 21, находим: $BC = BD \cdot \sin D$, или $a = 2R \cdot \sin D$; но $\angle D = \angle A$[1]); следовательно, $a = 2R \cdot \sin A$.



Черт. 41.



Черт. 42.

2) Угол A тупой. Сделаем такое же вспомогательное построение, как раньше. Из прямоугольного треугольника BCE (черт. 42) найдем: $a = 2R \cdot \sin E$; но $E + A = 180°$, следовательно $\sin E = \sin A$, поэтому $a = 2R \cdot \sin A$.

Итак, вообще: $a = 2R \cdot \sin A$; $b = 2R \cdot \sin B$; $c = 2R \cdot \sin C$.

§ 99. ***Теорема.*** *Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.*

Требуется доказать, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Доказательство. По § 98 для всякого треугольника как остроугольного, так и тупоугольного имеем:

$$a = 2R \cdot \sin A; \; b = 2R \cdot \sin B; \; c = 2R \cdot \sin C.$$

[1]) Тот и другой измеряется половиною дуги BC.

Отсюда находим:

$$2R = \frac{a}{\sin A}; \; 2R = \frac{b}{\sin B}; \; 2R = \frac{c}{\sin C};$$

следовательно:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Таким образом для одного и того же треугольника частное от деления стороны на синус противолежащего угла есть величина постоянная, равная диаметру описанного круга.

Из соотношения $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, переставляя члены пропорции, получим:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

т. е. *во всяком треугольнике стороны относятся между собой, как синусы противолежащих углов.*

Пример. Определить $a : b : c$, если $A : B : C = 3 : 4 : 5$.

Так как $A + B + C = 180°$, то сначала разделим 180° в отношении $3 : 4 : 5$; получим: $A = 45°$, $B = 60°$ и $C = 75°$. Теперь, по доказанному, будем иметь:

$$a : b : c = \sin 45° : \sin 60° : \sin 75°.$$

Подставляя сюда

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin 75° = \cos \frac{30°}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

получим, освободя от знаменателя:

$$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

§ 100. ***Теорема.*** *Сумма двух сторон треугольника так относится к их разности, как тангенс полусуммы противолежащих углов относится к тангенсу полуразности тех же углов.*

Доказательство. По § 98 находим:

$$a + b = 2R(\sin A + \sin B) \text{ и } a - b = 2R(\sin A - \sin B);$$

отсюда:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

Применяя здесь ко второй части формулу XVII (§ 65), получим:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{A + B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A - B}{2},$$

чем и выражается теорема.

§ 101. Формулы Мольвейде. Так называются следующие две пропорции, которые содержат отношения суммы и разности двух сторон треугольника к третьей стороне:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}; \qquad (1)$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \qquad (2)$$

Доказательство. 1) По § 98:

$$a+b=2R(\sin A+\sin B) \text{ и } c=2R\cdot\sin C;$$

отсюда:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}. \qquad (a)$$

Преобразуем вторую часть:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}, \qquad (b)$$

но $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, так как $\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90°$. По сокращении же дроби (b) будет окончательно:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

2) Таким же способом получим:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

§ 102. ***Теорема.*** *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения их на косинус угла между ними.*

Требуется доказать, что $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ (одинаково и в случае острого угла и в случае тупого).

Доказательство. 1) Если угол A острый, то на основании геометрии имеем (черт. 43):

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AD,$$

но из прямоугольного треугольника ABD можно заменить AD через $c\cdot\cos A$; тогда получим: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$.

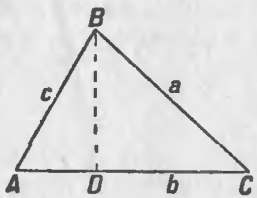
2) Если угол A тупой, то на основании геометрии будем иметь (черт. 44):

$$a^2=b^2+c^2+2b\cdot AE.$$

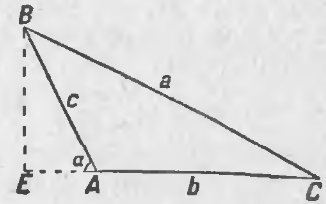
Из треугольника ABE найдем: $AE=c\cdot\cos\alpha$, но $\cos\alpha=-\cos A$[1]); следовательно, $AE=-c\cdot\cos A$. Подставляя это выражение в геометрическую формулу, получим:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A,$$

т. е. то же самое, что и в первом случае.



Черт. 43.



Черт. 44.

§ 103. Формулы для определения углов треугольника по трем сторонам.

1) Из равенства $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ находим:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

но при многозначных числах эта формула неудобна.

2) Следующие преобразования той же формулы приводят к выражениям, пригодным для логарифмирования:

$$1-\cos A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

$$1+\cos A=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

[1]) Так как $\alpha+A=180°$, то $\cos\alpha$ и $\cos A$ по абсолютным величинам равны; но $\cos\alpha$ равен положительному числу, а $\cos A$ — отрицательному числу; поэтому для замены $\cos\alpha$ умножаем $\cos A$ на -1.

Заменяя первые части (по § 60) и полагая $a + b + c = 2p$, получим далее:

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc} \qquad \Bigg| \qquad 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{(XX)} \qquad \Bigg| \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \quad \text{(XXI)}$$

Так как в треугольнике половина угла всегда менее 90°, то $\sin\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$ положительны, что и принято во внимание при извлечении корня. Деля равенство (XX на XXI), найдем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \qquad \text{(XXII)}$$

Формулы для определения углов B и C можно написать по аналогии с выведенными для угла A.

Формуле (XXII) можно придать другой вид, более удобный для вычисления в том случае, когда надо вычислить все *три* угла; а именно: умножая под корнем числителя и знаменателя на $p - a$, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

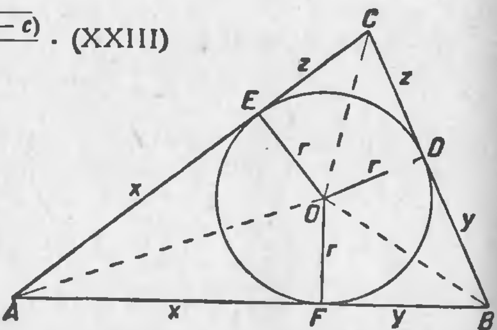
Подкоренное выражение здесь не зависит от того, какой угол определяется, а потому, обозначая величину корня через k, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{k}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{k}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{k}{p-c},$$

где

$$k = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \quad \text{(XXIII)}$$

§ 104. Тангенс половины угла треугольника можно определить также с помощью радиуса вписанного круга.



Черт. 45.

Пусть (черт. 45) будут: O—центр вписанного круга; D, E и F—точки касания; r—длина радиуса. Заметим, что линии OA, OB и OC делят углы треугольника пополам и что отрезки сторон при общей вершине равны (например, $AE = AF$).

Сначала определим эти отрезки. Обозначая их в порядке вершин треугольника через x, y и z, получим: $x + y + z = p$, но $y + z = BC = a$ следовательно, $x = p - a$. Подобным же образом $y = p - b$ и $z = p - c$. Теперь из прямоугольных треугольников найдем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b};\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}. \qquad \text{(XXIV)}$$

Чтобы произвести вычисление по этим формулам, надо сперва определить r (или только $\lg r$); для этого послужат геометрические формулы:

$$S = r\cdot p\text{[1]} \text{ и } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

(Сравнивая последнее выражение с выражением k в § 103, видим, что $k = r$.)

§ 105. О независимых соотношениях между сторонами и углами косоугольного треугольника. Этих соотношений должно быть т р и. Таковы соотношения:

$$A + B + C = 180°\ldots \qquad \text{(a)}$$

и

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\text{[2]}\ldots \qquad \text{(b)}$$

Остальное можно вывести отсюда.

В § 100 и 101 преобразованы пропорции, п р о и з в о д н ы е из (b). В § 102 мы ссылались на г е о м е т р и ч е с к у ю теорему. Теперь выведем то же самое из равенств (a) и (b).

Обозначая в равенстве (b) величину каждой части через m, будем иметь:

$$a = m\cdot\sin A;\ b = m\cdot\sin B;\ c = m\cdot\sin C\ldots \qquad \text{(c)}$$

Возьмем $a = m\cdot\sin A$. Так как, по (a), $A + (B + C) = 180°$, то $\sin A = \sin(B + C)$; таким образом: $a = m\cdot\sin(B + C)$ и, следовательно:

$$a^2 = m^2\cdot\sin^2(B + C)\ldots \qquad \text{(d)}$$

Преобразуем:

$$\sin^2(B+C) = (\sin B\cdot\cos C + \cos B\cdot\sin C)^2 = \sin^2 B(1 - \sin^2 C) + (1 - \sin^2 B)\sin^2 C + 2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos B\cdot\cos C = \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\cdot\sin C(\cos B\cdot\cos C - \sin B\cdot\sin C) = \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(B + C),$$

но $\cos(B + C) = -\cos A$; следовательно:

$$\sin^2(B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A.$$

Подставляя это в равенство (d), получим:

$$a^2 = m^2\cdot\sin^2 B + m^2\cdot\sin^2 C - 2(m\cdot\sin B)(m\cdot\sin C)\cdot\cos A,$$

или, по равенству (c):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A.$$

[1]) $S = AOB + AOC + BOC = \frac{c\cdot r}{2} + \frac{b\cdot r}{2} + \frac{a\cdot r}{2} = r\cdot\frac{c+b+a}{2} = r\cdot p.$

[2]) Тут д в е независимых пропорции: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ и $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.

§ 106. Выражения для площади треугольника. Из геометрии мы имеем следующие формулы:

$$S=\frac{1}{2}bh_b; \qquad (1)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (2)$$

$$S=r\cdot p. \qquad (3)$$

Выведем теперь выражения, содержащие углы.

§ 107. а) Возьмем $S=\frac{1}{2}bh_b$. Для замены h_b обратимся к чертежам 43 и 44: если угол A острый, то $h_b=c\cdot\sin A$; если угол A тупой, то $h_b=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\sin(180°-A)=c\cdot\sin A$. В обоих случаях имеем $h_b=c\cdot\sin A$, т. е. *во всяком треугольнике высота равна боковой стороне, умноженной на синус угла между нею и основанием.*

Подставляя $h_b=c\cdot\sin A$ в формулу $S=\frac{1}{2}bh_b$, получим:

$$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A, \qquad (XXV)$$

т. е. *площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.*

б) Из соотношения $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ находим:

$$b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A} \text{ и } c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A};$$

подставив эти выражения в $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, получим:

$$S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}.$$

Так как $\sin A=\sin(B+C)$, то вместо этой формулы можно взять еще такую:

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B\cdot\sin C}{\sin(B+C)}.$$

§ 108. а) Известное из геометрии выражение площади треугольника по трем сторонам нетрудно получить и с помощью тригонометрии.

Мы имеем $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, но $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, а $\sin\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$ заменим по § 103; получим:

$$S=\frac{bc}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

б) По § 103 имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Перемножая соответственные части этих равенств, получим по сокращении под корнем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}=\frac{S}{p^2};$$

отсюда:

$$S=p^2\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \qquad (XXVI)$$

(Между прочим, эта формула полезна в решении треугольников как к о н т р о л ь н а я.)

§ 109. Выражения для радиуса описанного круга.

1) По § 98 $a=2R\cdot\sin A$; отсюда $R=\frac{a}{2\sin A}$.

2) Возьмем $R=\frac{a}{2\sin A}$. Определяя $\sin A$ из равенства $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, получим $\sin A=\frac{2S}{bc}$, а после подстановки: $R=\frac{abc}{4S}$.

§ 110. Выражения для радиуса вписанного круга.

1) Из формулы $S=r\cdot p$ следует: $r=\frac{S}{p}$.

2) По чертежу 45 получим: $r=x\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, но $x=p-a$; следовательно, $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

3) По чертежу 45 из $\triangle\triangle$ BOD и COD имеем: $y=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ и $z=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$; складывая и заменяя $y+z$ через a, получим: $a=r\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=$

$$=r\cdot\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}=r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}. \text{ Отсюда: } r=\frac{a\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Решение косоугольных треугольников по натуральным таблицам.

§ 111. *1-й случай.* Даны сторона и два угла (a, B, C). Найти A, b, c, S.

I. Решение в общем виде.

1) Для определения угла A возьмем формулу суммы углов треугольника:

$$A + B + C = 180°; \; A = 180° - (B + C).$$

2) Для определения сторон b и c воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}; \quad b = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)};$$

3) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin(B + C)}.$$

4) Площадь определится по формуле:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C; \quad S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin(B + C)}.$$

II. Числовой пример: $a = 37$; $B = 86°3'$; $C = 50°56'$.

1) $A = 180° - (86°3' + 50°56') = 43°01'$;

2) $b = \dfrac{37 \cdot \sin 86°3'}{\sin 43°01'} = \dfrac{37 \cdot 0{,}9976}{0{,}6822}$; $b = 54{,}1$;

3) $c = \dfrac{37 \cdot \sin 50°56'}{0{,}6822} = \dfrac{37 \cdot 0{,}7764}{0{,}6822}$; $c = 42{,}1$;

4) $S = \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 54{,}1 \cdot \sin 50°56'$; $S = \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 54{,}1 \cdot 0{,}7764$;

$S = 777$ (кв. единиц).

2-й случай. Даны две стороны и угол между ними (a, b, C). Найти A, B, c, S.

I. 1) Сторона c найдется по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos C.$$

2) Угол A теперь можно определить, пользуясь теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \; \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c}.$$

3) Подобным образом:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \; \sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

4) Площадь определяется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C.$$

II. Числовой пример. Дано: $a = 110$; $b = 100$; $C = 50°$. Найти c, A, B, S.

1) $c^2 = 110^2 + 100^2 - 2 \cdot 110 \cdot 100 \cdot \cos 50°$;

$c^2 = 12\,100 + 10\,000 - 22\,000 \cdot 0{,}6428$;

$c = 89{,}21$;

2) $\sin A = \dfrac{110 \cdot \sin 50°}{89{,}21}$;

$\sin A = 0{,}9445$; $A = 70°49'$;

3) $\sin B = \dfrac{100 \cdot 0{,}9445}{110}$; $\sin B = 0{,}8586$; $B = 59°10'$.

Проверка. $A + B + C = 70°49' + 59°10' + 50° = 179°59'$.

4) $S = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 100 \cdot \sin 50° = 5500 \cdot 0{,}766 = 4213$ кв. ед.

Задача. Дано: $a = 50$; $c = 30$; $B = 60°$; найти b, A, C.

Отв. $b = 43{,}6$; $A = 83°20'$; $C = 36°40'$.

Задача. Дано: $b = 12$; $c = 10$; $A = 54°$. Найти площадь S.

Отв. 485,4.

Задача. Даны сторона треугольника $a = 10$ *см* и прилежащие углы $B = 50°$ и $C = 70°$. Построить треугольник с помощью линейки и транспортира; построить описанную и вписанную окружности; вычислить A, b, c, R, S, r; проверить ответы измерением по чертежу.

Решение косоугольных треугольников с помощью четырехзначных логарифмических таблиц.

§ 112. *1-й случай.* Даны сторона и два угла (a, B, C). Найти A, b, c, S.

Решение производится по тому же плану, что и при натуральных таблицах, но при окончательном вычислении формула логарифмируется и вычисляется по таблицам логарифмов.

Числовой пример. Дано: $a = 1235$; $B = 37°32'$; $C = 115°18'$.

Решение. 1) $A = 180° - (B + C)$;

$A = 180° - (37°32' + 115°18') = 27°10'$;

2) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$; $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$; $b = \dfrac{1235 \cdot \sin 37°32'}{\sin 27°10'}$;

$$\lg b = \lg 1235 + \lg \sin 37°32' - \lg \sin 27°10';$$

$$\begin{aligned} \lg 1235 &= 3{,}0917 \\ \lg\sin 37^\circ 32' &= \bar{1}{,}7847 \\ -\lg\sin 27^\circ 10' &= 0{,}3406 \\ \hline \lg b &= 3{,}2170 \\ b &= 1648. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\lg\sin 27^\circ 10' = \bar{1}{,}6594; \\ &-\lg\sin 27^\circ 10' = -\bar{1}{,}6594 = 0{,}3406. \end{aligned}$$

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$; $c = \frac{1235 \cdot \sin 115^\circ 18'}{\sin 27^\circ 10'}$;

$$\lg c = \lg 1235 + \lg\sin 115^\circ 18' - \lg\sin 27^\circ 10';$$

$$\begin{aligned} \lg 1235 &= 3{,}0917 \\ \lg\sin 115^\circ 18' &= \bar{1}{,}9562 \\ -\lg\sin 27^\circ 10' &= 0{,}3406 \\ \hline \lg c &= 3{,}3885 \\ c &= 2446. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin 115^\circ 18' &= \sin(180^\circ - 64^\circ 42') = \\ &= \sin 64^\circ 42'; \\ \lg\sin 64^\circ 42' &= \bar{1}{,}9562. \end{aligned}$$

4) $S = \frac{1}{2}ab\sin C$; $\quad S = \frac{1}{2} \cdot 1235 \cdot 1648 \cdot \sin 115^\circ 18'$;

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1235 \cdot 1648 \cdot \sin 64^\circ 42';$$

$$\lg S = \lg 1235 + \lg 824 + \lg\sin 64^\circ 42';$$

$$\begin{aligned} \lg 1235 &= 3{,}0917 \\ \lg\ 824 &= 2{,}9159 \\ \lg\sin 64^\circ 42' &= \bar{1}{,}9562 \\ \hline \lg S &= 5{,}9638; \\ S &= 920\,000 \text{ (кв. единиц).} \end{aligned}$$

§ 113. *2-й случай.* Даны две стороны и угол между ними (a, b, C). Найти A, B, c, S.

Числовой пример: $a = 42{,}53$; $b = 29{,}81$; $C = 47^\circ 14'$.

1) Прежде всего определим углы A и B. Воспользуемся теоремой тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}; \quad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{a+b}.$$

Найдем требуемые величины:

$$a + b = 42{,}53 + 29{,}81 = 72{,}34;$$
$$a - b = 42{,}53 - 29{,}81 = 12{,}72;$$
$$A + B = 180^\circ - 47^\circ 14' = 132^\circ 46';$$

$$\frac{A+B}{2} = 66^\circ 23';$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{12{,}72 \cdot \operatorname{tg} 66^\circ 23'}{72{,}34};$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \lg 12{,}72 + \lg\operatorname{tg} 66^\circ 23' - \lg 72{,}34;$$

$$\begin{aligned} \lg 12{,}72 &= 1{,}1045 \\ \lg\operatorname{tg} 66^\circ 23' &= 0{,}3593 \\ -\lg 72{,}34 &= \bar{2}{,}1407 \\ \hline \lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} &= \bar{1}{,}6045; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\lg 72{,}34 = 1{,}8593; \\ &-\lg 72{,}34 = -1{,}8593 = \bar{2}{,}1407. \end{aligned}$$

Находим угол $\frac{A-B}{2}$ по таблице логарифмов тангенсов:

$$\frac{A-B}{2} = 21^\circ 55'.$$

Теперь мы знаем полуразность углов A и B и их полусумму в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными; складывая и вычитая обе части этих уравнений, находим:

$$\begin{aligned} \frac{A+B}{2} &= 66^\circ 23'; \\ \frac{A-B}{2} &= 21^\circ 55'; \\ \hline A &= 88^\circ 18'; \\ B &= 44^\circ 28'. \end{aligned}$$

2) Для определения стороны c воспользуемся теоремой синусов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad c = \frac{a\sin C}{\sin A}; \quad c = \frac{42{,}53 \cdot \sin 47^\circ 14'}{\sin 88^\circ 18'};$$

$$\lg c = \lg 42{,}53 + \lg\sin 47^\circ 14' - \lg\sin 88^\circ 18';$$

$$\begin{aligned} \lg 42{,}53 &= 1{,}6287 \\ \lg\sin 47^\circ 14' &= \bar{1}{,}8657 \\ -\lg\sin 88^\circ 18' &= 0{,}0002 \\ \hline \lg c &= 1{,}4946; \\ c &= 31{,}23. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\lg\sin 88^\circ 18' = \bar{1}{,}9998; \\ &-\lg\sin 88^\circ 18' = 0{,}0002. \end{aligned}$$

3) $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$; $S = \frac{1}{2} \cdot 42{,}53 \cdot 29{,}81 \cdot \sin 47^\circ 14'$;

$$\lg S = \lg 0{,}5 + \lg 42{,}53 + \lg 29{,}81 + \lg\sin 47^\circ 14';$$

$$\begin{aligned}
\lg 0{,}5 &= 1{,}6990\\
\lg 42{,}53 &= 1{,}6287\\
\lg 29{,}81 &= 1{,}4743\\
\lg \sin 47^\circ 14' &= \bar{1}{,}8657\\
\hline
\lg S &= 2{,}6677;\\
S &= 465{,}2.
\end{aligned}$$

§ 114. *3-й случай.* Даны три стороны (a, b, c). Найти A, B, C и S.

Углы определяются по формулам тангенса половины угла треугольника; площадь — по формуле Герона.

Числовой пример: $a = 15{,}37$; $b = 21{,}42$; $c = 13{,}83$.

1) Пишем формулу для определения угла A:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

определяем p и производим все указанные формулой действия:

$$\begin{aligned}
a &= 15{,}37 & \qquad p - a &= 9{,}94;\\
b &= 21{,}42 & p - b &= 3{,}89;\\
c &= 13{,}83 & p - c &= 11{,}48.\\
\hline
2p &= 50{,}62;\\
p &= 25{,}31.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{3{,}89 \cdot 11{,}48}{25{,}31 \cdot 9{,}94}};$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}89 + \lg 11{,}48 - \lg 25{,}31 - \lg 9{,}94);$$

$$\begin{aligned}
\lg 3{,}89 &= 0{,}5899 & \qquad \lg 25{,}31 &= 1{,}4033\\
\lg 11{,}48 &= 1{,}0599 & -\lg 25{,}31 &= \bar{2}{,}5967\\
-\lg 25{,}31 &= \bar{2}{,}5967 & \lg 9{,}94 &= 0{,}9974\\
-\lg 9{,}94 &= \bar{1}{,}0026 & -\lg 9{,}94 &= \bar{1}{,}0026
\end{aligned}$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\cdot \bar{1}{,}2491; \qquad \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}6246;$$

$$\frac{A}{2} = 22^\circ 51'; \quad A = 45^\circ 42'.$$

2) Определяем угол B:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{9{,}94 \cdot 11{,}48}{25{,}31 \cdot 3{,}89}};$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\lg 9{,}94 + \lg 11{,}48 - \lg 25{,}31 - \lg 3{,}89);$$

$$\begin{aligned}
\lg 9{,}94 &= 0{,}9974 & \qquad \lg 3{,}89 &= 0{,}5899\\
\lg 11{,}48 &= 1{,}0599 & -\lg 3{,}89 &= \bar{1}{,}4101\\
-\lg 25{,}31 &= \bar{2}{,}5967\\
-\lg 3{,}89 &= \bar{1}{,}4101
\end{aligned}$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}0641; \quad \lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0{,}0320; \quad \frac{B}{2} = 47^\circ 6'; \quad B = 94^\circ 12'.$$

3) Определяем угол C:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{9{,}94 \cdot 3{,}89}{25{,}31 \cdot 11{,}48}};$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\lg 9{,}94 + \lg 3{,}89 - \lg 25{,}31 - \lg 11{,}48);$$

$$\begin{aligned}
\lg 9{,}94 &= 0{,}9974\\
\lg 3{,}89 &= 0{,}5899 & \qquad \lg 11{,}48 &= 1{,}0599;\\
-\lg 25{,}31 &= \bar{2}{,}5967 & -\lg 11{,}48 &= -1{,}0599 = \bar{2}{,}9401;\\
-\lg 11{,}48 &= \bar{2}{,}9401
\end{aligned}$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cdot \bar{1}{,}1241; \quad \lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}5621; \quad \frac{C}{2} = 20^\circ 3'; \quad C = 40^\circ 6'.$$

Проверка: $A + B + C = 45^\circ 42' + 94^\circ 12' + 40^\circ 6' = 180^\circ$ (однако небольшая погрешность в сумме углов возможна вследствие приближенности вычислений).

4) Площадь определяем по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\lg S = \frac{1}{2}[\lg p + \lg(p-a) + \lg(p-b) + \lg(p-c)].$$

Подставляя все уже найденные логарифмы и вычисляя, получим:

$$S = 2{,}0252;$$

$$S = 105{,}9 \text{ (кв. единиц)}.$$

§ 115. *4-й случай.* Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них (a, b, A).

Решение. Из пропорции $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$ найдем $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$, с помощью чего определим угол B; далее будем иметь:

$$C = 180^\circ - (A + B); \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}; \quad S = \frac{ab}{2}\sin C.$$

Обратим внимание на вычисление угла B (по $\sin B$). Так как в косоугольном треугольнике вообще угол может быть и острым и тупым, то величину B надо искать между 0 и 180°, а в этих границах одному и тому же синусу соответствуют два угла: острый, находимый из таблиц, и тупой, дополняющий его до 180° (черт. 20). Поэтому возникает сомнение, будут ли для треугольника пригодны оба угла или же только один из них и какой именно. Этот вопрос решается уже сравнением данных сторон, так как в треугольнике тупой угол может быть только против большей стороны.

Ввиду сказанного будет полезно сначала исследовать задачу по сравнительной величине данных сторон. (Предполагается, что a и b различны: при $a = b$ имеем $B = A$.)

Исследование. I. Случай $a > b$. При этом данный угол A, как лежащий против большей из известных сторон, может быть острый и тупой.

В равенстве $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$ рассмотрим правую часть. Если $b < a$, то и подавно $b \cdot \sin A < a$, а потому получится $\sin B < 1$ (или $\lg \sin B < 0$), и, следовательно, задача будет возможна независимо от величины угла A. Определяемый угол B в этом случае может быть только острым (но не тупым), так как сторона против него не есть бо́льшая.

II. Случай $a < b$. При этом данный угол A должен быть острый, так как он лежит против стороны, которая менее другой.

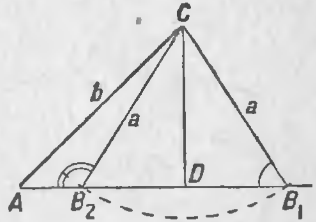
Обращаясь к равенству $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$, заметим, что если $b > a$, то $b \cdot \sin A$ либо более a, либо равно a, либо менее a, в зависимости от величины угла A. Рассмотрим каждое предположение отдельно.

1) $b \cdot \sin A > a$, тогда $\sin B > 1$ (или $\lg \sin B > 0$), и задача будет невозможна.

2) $b \cdot \sin A = a$; тогда $\sin B = 1$ (или $\lg \sin B = 0$), и, следовательно, $B = 90°$, т. е. треугольник оказывается прямоугольным.

3) $b \cdot \sin A < a$; тогда $\sin B < 1$ (или $\lg \sin B < 0$), и вопрос будет (как в п. I) о двух углах, соответствующих такому синусу. Для треугольника в настоящем случае надо принять не только острый угол, но и тупой, потому что сторона b более a, а сторона c не может влиять на выбор угла B, так как сама определяется в зависимости от него. Соответственно двум значениям угла B получим также по два значения для C, c и S.

Итак, на основании сделанного исследования заключаем (относительно случая $\lg \sin B < 0$): если определяемый угол B лежит против меньшей из данных сторон, то надо взять только острый угол; если же он лежит против большей стороны, то задача допускает два решения.



Черт. 46.

Результаты предыдущего исследования вполне совпадают с тем, что дает построение треугольника по тем же самым данным (в этом сравнении $b \cdot \sin A$ будет выражать высоту треугольника относительно стороны c). Чертеж 46 соответствует в § 115 случаю II, 3): искомые треугольники суть $\triangle ACB_1$ и $\triangle ACB_2$, причем $\angle AB_1C + \angle AB_2C = 180°$. Предоставляем самому учащемуся сделать построение в остальных случаях.

Числовой пример. I. Дано: $a = 700$; $b = 650$; $A = 40°25'$.

1) Вычисляем угол B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}; \quad \sin B = \frac{650 \cdot \sin 40°25'}{700};$$

$$\lg \sin B = \lg 650 + \lg \sin 40°25' - \lg 700.$$

$$\begin{array}{rl} \lg 650 = 2{,}8129 & \qquad \lg 700 = 2{,}8451; \\ \lg \sin 40°25' = \bar{1}{,}8118 & \qquad -\lg 700 = \bar{3}{,}1549. \\ -\lg 700 = \bar{3}{,}1549 & \\ \hline \lg \sin B = \bar{1}{,}7796; & \\ B = 37°. & \end{array}$$

2) Вычисляем угол C:

$$C = 180° - (40°25' + 37°) = 102°35'.$$

3) Вычисляем сторону c:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \quad c = \frac{700 \sin 102°35'}{\sin 40°25'};$$

$$\lg c = \lg 700 + \lg \sin 102°35' - \lg \sin 40°25';$$

$$\begin{array}{rl} \lg 700 = 2{,}8451 & \qquad \lg \sin 40°25' = \bar{1}{,}8118; \\ \lg \sin 102°35' = \bar{1}{,}9894 & \qquad -\lg \sin 40°25' = 0{,}1882; \\ -\lg \sin 40°25' = 0{,}1882 & \qquad \sin 102°35' = \sin 77°25'; \\ \hline \lg c = 3{,}0227; & \qquad \lg \sin 77°25' = \bar{1}{,}9894. \\ c = 1054. & \end{array}$$

II. Дано: $a = 4$; $b = 7$; $A = 30°$.

1) Вычисляем угол B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}; \quad \sin B = \frac{7 \sin 30°}{4};$$

$$\lg \sin B = \lg 7 + \lg \sin 30° - \lg 4.$$

$$\begin{array}{rl} \lg 7 = & 0{,}8451 \\ \lg \sin 30° = & \bar{1}{,}6990 \\ -\lg 4 = & \bar{1}{,}3979 \\ \hline \lg \sin B = & \bar{1}{,}9420. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \lg 4 = 0{,}6021; \\ -\lg 4 = -0{,}6021 = \bar{1}{,}3979. \end{array}$$

$$B_1 = 61°3'; \; B_2 = 118°57'.$$

2) Угол C тоже может иметь два значения:

$$C_1 = 180° - A - B_1; \; C_2 = 180° - A - B_2;$$

$$C_1 = 180° - 30° - 61°3' = 88°57'; \; C_2 = 180° - 30° - 118°57' = 31°3'.$$

3) Точно так же сторона c будет иметь два значения:

$$c_1 = 7{,}999; \; c_2 = 4{,}126.$$

Решение косоугольных треугольников с помощью пятизначных таблиц.

§ 116. *1-й случай.* Даны сторона и два угла (a, B, C).

Числовой пример: $a = 253$; $B = 38°50'48''$; $C = 112°34'$.

1) Вычисление A.

$$\begin{array}{rl} B = & 38°50'48'' \\ C = & 112°34' \\ \hline B + C = & 151°24'48'' \\ A = & 28°35'12''. \end{array}$$

2) Вычисление b.

$$\begin{array}{rl} \lg a = & 2{,}40312 \\ - \lg \sin A = & 9{,}67987 - 10 \\ \hline \lg 2R = & 2{,}72325 \\ + \lg \sin B = & 9{,}79743 - 10 \\ \hline \lg b = & 2{,}52068 \\ b = & 331{,}65. \end{array}$$

3) Вычисление c.

$$\begin{array}{rl} \lg 2R = & 2{,}72325 \\ + \lg \sin C = & 9{,}96541 - 10 \\ \hline \lg c = & 2{,}68866 \\ c = & 488{,}27. \end{array}$$

4) Вычисление S.

$$S = 0{,}5 \cdot bc \cdot \sin A$$

$$\begin{array}{rl} \lg 0{,}5 = & 9{,}69897 - 10 \\ \lg b = & 2{,}52068 \\ + \quad \lg c = & 2{,}68866 \\ \lg \sin A = & 9{,}67987 - 10 \\ \hline \lg S = & 4{,}58818 \\ S = & 38742 \text{ (кв. ед.).} \end{array}$$

Контрольное вычисление $\left[a = (c + b) \dfrac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{C - B}{2}} \right]$.

$$\begin{array}{rl} c = & 488{,}27 \\ b = & 331{,}65 \\ \hline c + b = & 819{,}92 \\ C = & 112°34' \\ B = & 38°50'48'' \\ \hline C - B = & 73°43'12'' \\ \frac{C - B}{2} = & 36°51'36'' \\ \frac{A}{2} = & 14°17'36''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lg (c + b) = & 2{,}91377 \\ + \quad \lg \sin \frac{A}{2} = & 9{,}39250 - 10 \\ \hline & 2{,}30627 \\ - \lg \cos \frac{C - B}{2} = & 9{,}90315 - 10 \\ \hline \lg a = & 2{,}40312, \end{array}$$

что совпадает с начальным $\lg a$ (см. вычисление b).

§ 116a. *2-й случай.* Даны две стороны и угол между ними (b, c, A).

Числовой пример: $b = 1123$; $c = 2034$; $A = 72°15'19''$.

1) Вычисление углов B и C.

$$\begin{array}{rl} C + B + A = & 180° \\ A = & 72°15'19'' \\ \hline C + B = & 107°44'41'' \\ \hline \frac{C + B}{2} = & 53°52'21'' \\ \pm \quad \frac{C - B}{2} = & 21°34'13'' \\ \hline C = & 75°26'34'' \\ B = & 32°18'8''. \end{array}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C - B}{2} = \frac{c - b}{c + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{C + B}{2}$$

$$\begin{array}{rl|rl} c = & 2034 & c - b = & 911 \\ b = & 1123 & c + b = & 3157 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lg (c - b) = & 2{,}95952 \\ - \quad \lg (c + b) = & 3{,}49927 \\ \hline & 9{,}46025 - 10 \\ + \quad \lg \operatorname{tg} \frac{C + B}{2} = & 0{,}13671 \\ \hline \lg \operatorname{tg} \frac{C - B}{2} = & 9{,}59696 - 10. \end{array}$$

2) Вычисление a.

$$\begin{array}{rl} \lg b = & 3{,}05038 \\ + \lg \sin A = & 9{,}97883 - 10 \\ \hline & 3{,}02921 \\ - \quad \lg \sin B = & 9{,}72786 - 10 \\ \hline \lg a = & 3{,}30135 \\ a = & 2001{,}5. \end{array}$$

3) Вычисление S.

$$S = (b \cdot \sin A) \cdot \frac{c}{2}$$

$$\begin{array}{rl} \lg (b \cdot \sin A) = & 3{,}02921 \text{ [1]} \\ + \quad \lg \frac{c}{2} = & 3{,}00732 \\ \hline \lg S = & 6{,}03653 \\ S = & 1087750 \text{ (кв. ед.).} \end{array}$$

§ 116b. *3-й случай.* Даны три стороны (a, b, c).

Числовой пример: $a = 215$; $b = 500$; $c = 427$.

---

[1]) Взято из вычисления a.

Числовой пример: $a = 215$; $b = 500$; $c = 427$.

	Вычисление $\lg k$.
$a = 215$	$\lg(p-a) = 2{,}55145$
$b = 500$	$+\lg(p-b) = 1{,}85126$
$c = 427$	$\lg(p-c) = 2{,}15836$
$2p = 1142$	$6{,}56107$
$p = 571$	$-\ \lg p = 2{,}75664$
$p-a = 356$	$3{,}80443$
$p-b = 71$	$\lg k = 1{,}90222.$
$p-c = 144.$	

Вычисление A.	Вычисление B.	Вычисление C.
$\lg k = 1{,}90222$	$\lg k = 1{,}90222$	$\lg k = 1{,}90222$
$-\ \lg(p-a) = 2{,}55145$	$\lg(p-b) = 1{,}85126$	$-\ \lg(p-c) = 2{,}15836$
$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9{,}35077-10$	$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0{,}05096$	$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 9{,}74386-10$
$\frac{A}{2} = 12°38'26''$	$\frac{B}{2} = 48°21'14''$	$\frac{C}{2} = 29°0'22''$
$A = 25°16'52''.$	$B = 96°42'28''.$	$C = 58°0'44''.$

Вычисление S. $S = pr = pk$.

$$\lg S = \lg p + \lg k = 4{,}65886; \quad S = 45589 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} A &= 25°16'52'' \\ +\ B &= 96°42'28'' \\ C &= 58°\ 0'44'' \\ \hline & 180°\ 0'\ 4''. \end{aligned}$$

Лишние $4''$ объясняются приближенностью вычисления.

XI. Об измерениях на местности.

§ 117. Общие замечания. При составлении землемерных планов, а также и в некоторых других случаях приходится определять величину линий и углов, назначаемых на местности. Основные данные находят непосредственным измерением—с помощью особых приборов, остальные—посредством вычисления; в последнем случае требуется применение тригонометрии.

§ 118. Измерение линий. Прямая линия на местности указывается какими-нибудь хорошо заметными предметами, помещенными на ее концах. Если длина измеряемой линии значительна, то ее надо сначала провешить, т. е. поставить ряд вех[1]) по ее направлению.

Для непосредственного измерения линий на местности наиболее употребительны землемерная цепь и мерительная лента.

Цепь, выходящая теперь из употребления, делается из негибкой железной проволоки. Она имеет в длину 20 *м* и состоит из 100 прямых звеньев, соединенных промежуточными кольцами.

Применяемая теперь мерительная лента изготовляется из тонкой стальной полосы. Она имеет длину в 10, 15 или, чаще всего, 20*м* и размечена на десятые доли метра.

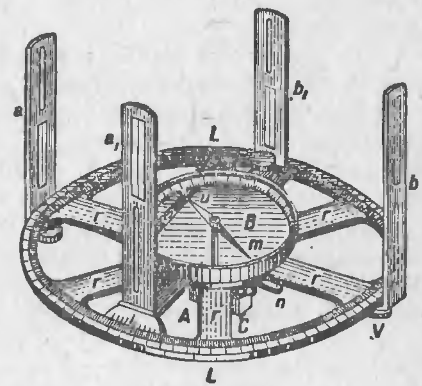
При пользовании мерительной лентой длина линии выражается в метрах и десятичных долях метра.

§ 119. Угломерные инструменты. Инструменты, служащие для определения градусной величины угла, называются угломерными.

Одни из них служат для определения угла только в горизонтальной плоскости, другие же измеряют угол и в горизонтальной и в вертикальной плоскостях. (Углы в наклонной плоскости определяются обыкновенно с помощью вычисления.)

Из угломерных инструментов чаще других употребляются астролябия и теодолит.

§ 120. Астролябия (черт. 47) состоит из лимба, алидады и двух пар диоптров.



Черт. 47.

Лимбом называется круг, разделенный на градусы.

Алидадой называется линейка, которая вращается по лимбу около его центра; при измерении какого-нибудь угла она направляется по его стороне—наводится на какой-либо предмет на этой стороне.

[1]) Веха—длинный кол со значком.

Для наведения алидады—для визирования—служат диоптры: так называются две пластинки, прикрепленные на концах алидады. В них сделаны продольные прорезы—узкие и широкие; против узкого прореза в одном диоптре приходится в другом диоптре широкий прорез с натянутым вдоль него черным конским волосом. Визируя на какую-либо точку, ставят алидаду так, чтобы для глаза, смотрящего в узкий прорез одного диоптра, точка была закрыта волоском другого диоптра.

В астролябии—две пары диоптров: два диоптра прикреплены к самому лимбу и называются неподвижными, другие два помещаются на концах алидады и называются подвижными.

Для ориентирования линий относительно стран света к астролябии присоединяется еще магнитная стрелка.

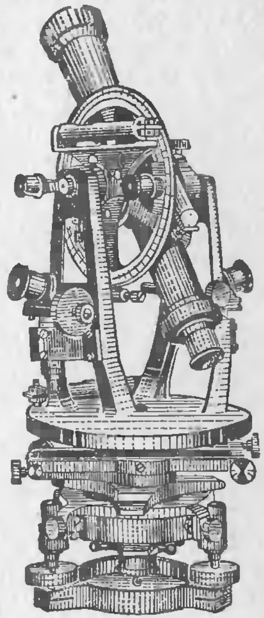
Астролябия помещается обыкновенно на раздвижном треножнике, но между треножником и инструментом вводится еще снаряд, позволяющий склонять плоскость лимба так или иначе. Простейшее из таких приспособлений есть бакса: это—особого рода сферические клещи, охватывающие шар, которым внизу оканчивается ось лимба; таким образом лимб может вращаться около оси, а самая ось может менять свое направление.

Для установки лимба в горизонтальной плоскости служит уровень, а в вертикальной плоскости—отвес.

§ 121. Чтобы измерить горизонтальный угол, сначала устанавливают лимб горизонтально, центром над вершиной угла, что достигается с помощью отвеса с заостренной гирькой; затем, сохраняя горизонтальность лимба, повертывают его около центра, пока сквозь неподвижные диоптры не увидят предмет на одной из сторон угла; не изменяя теперь положения лимба, ставят подвижные диоптры по направлению другой стороны угла; наконец, делают отсчет по лимбу между диоптрами.

§ 122. Чтобы измерить угол между прямой линией AB и горизонтальной плоскостью (угол наклонения линии AB), устанавливают лимб в вертикальной плоскости, проходящей через данную линию так, чтобы его центр находился на данной линии; затем, удерживая лимб в той же плоскости, повертывают его около центра до тех пор, пока диаметр $90°-270°$ не станет по отвесу; тогда плоскость волосков в неподвижных диоптрах будет горизонтальна; теперь, не изменяя положения лимба, направляют алидаду по линии AB и отсчитывают дугу между диоптрами.

Современный угломерный прибор — теодолит (черт. 48). Его главные части—горизонтальный и вертикальный круги с точными делениями и зрительная труба с большим увеличением.



Черт. 48.

§ 123. Применение тригонометрии. Мы рассмотрим здесь только простейшие задачи практической тригонометрии, а именно: 1) определение неприступных расстояний, 2) определение высот и 3) составление триангуляции. При этом мы ограничимся случаем такой местности, которая может считаться горизонтальной плоскостью или, по крайней мере, позволяет проводить по некоторым направлениям горизонтальные линии. Для решения указанных задач необходимо сначала измерить некоторые линии и углы. Непосредственное измерение линий на местности представляет двоякую трудность: 1) затруднителен самый процесс измерения и 2) если взятая линия не есть прямая или если она не горизонтальна, то приходится делать разного рода поправочные измерения и вычисления. Углы же измеряются и легче и несравненно точнее. Поэтому стараются измерение линий заменить, насколько возможно, измерением углов; линии же определяют преимущественно посредством вычисления. Большею частью даже ограничиваются измерением только одной линии; ее называют тогда базисом (основанием).

§ 124. Определение неприступных расстояний. Здесь могут быть три случая: 1) обе конечные точки доступны, 2) доступна только одна из конечных точек и 3) обе конечные точки недоступны.

Рассмотрим каждый случай. Точки, между которыми определяется расстояние, обозначим через A и B.

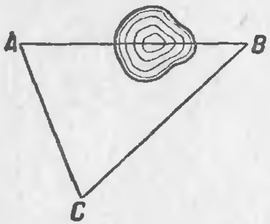
1-й случай. Точки A и B доступны (черт. 49).

Решение. а) Если точки A и B не видны одна из другой, то выбирают такую точку C, из которой были бы видны те две, и измеряют угол ACB и линии CA и CB; по этим данным вычисляют расстояние AB.

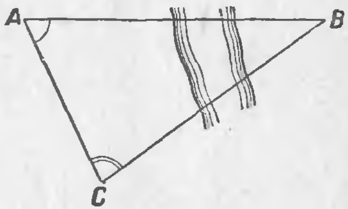
b) Если же точки A и B видны одна из другой, то измеряют линию AC и углы A и C; этих данных достаточно для вычисления AB.

2-й случай. Точка A доступна, а точка B недоступна (т. е. наблюдатель имеет возможность подойти к точке A, а от точки B отделен каким-либо препятствием).

Решение. Взяв точку C (черт. 50) так, чтобы из нее были видны A и B, измеряют углы A и C и базис AC. Линию AB тогда нетрудно вычислить, так как в треугольнике ABC будут известны сторона и два угла.



Черт. 49.



Черт. 50.

3-й случай. Точки A и B недоступны (черт. 51).

Решение. Выбрав в доступной местности точки C и D так, чтобы из них были видны A и B, измеряют базис CD и углы α, β, γ и δ. Из двух треугольников, содержащих CD, вычисляют CA и CB; угол между этими линиями равен $\alpha - \beta$; таким образом можно будет вычислить AB из треугольника ACB.

Можно также начать вычисление с линий DA и DB, заключающих угол $\gamma - \delta$, и определить AB из треугольника ADB. Этот второй способ послужит для первого проверкой, которая особенно полезна в настоящем случае в виду сложности вычисления.

§ 125. Определение высоты. Разберем главные случаи этой задачи.

1-й случай. Основание доступно. Положим, например, что измеряемая высота есть AB (черт. 52), причем точка B доступна.

Решение. Из точки B проводят на местности какую-нибудь горизонтальную линию BC и измеряют ее длину; положим, что эта длина есть a.

После этого при точке C ставят астролябию с вертикальным лимбом так, чтобы центр лимба D был над самой точкой C, и определяют угол наклонения линии DA (§ 122); пусть этот угол будет равен α.

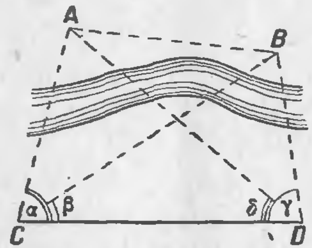
Измеряют еще по отвесу расстояние DC; положим, что получилось $DC = b$.

Зная a, α и b, будем иметь для вычисления высоты:

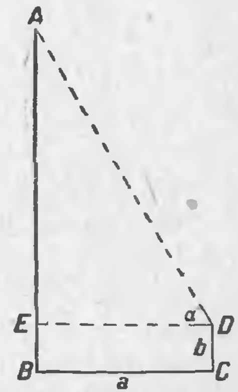
$$AB = AE + EB = a\,\mathrm{tg}\,\alpha + b.$$

2-й случай. Основание недоступно. Пусть на чертеже 53 высота AB представляет пример такого случая. Предположим еще, что окружающая местность горизонтальна.

Решение. Выбирают на местности какую-нибудь достаточно удаленную точку C. Помещают над этой точкой астролябию и, поставив лимб вертикально, измеряют угол наклонения линии EA [1]). Затем, не изменяя положения лимба, с помощью неподвижных диоптров назначают на местности какую-нибудь линию CD по направлению плоскости лимба, а следовательно, в одной плоскости с AB. Эту линию измеряют как базис.



Черт. 51.



Черт. 52.

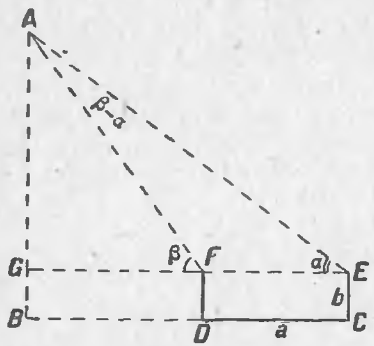
Наконец, переносят в точку D астролябию и, поставив ее на такой же высоте, как в точке C, определяют угол наклонения линии FA.

После сделанных измерений нетрудно вычислить AB; пусть, например, получилось: $CD = a$, $FD = EC = b$, $\angle AEG = \alpha$ и $\angle AFG = \beta$. Тогда $AB = AG + BG = AF \cdot \sin\beta + b$; а из треугольника AFE найдем: $AF = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$; таким образом:

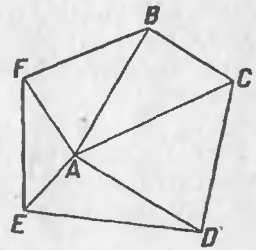
$$AB = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} + b.$$

1) Через E обозначен центр лимба.

§ 126. Триангуляция. Чтобы снять план какого-нибудь значительного участка земной поверхности, сначала выбирают на нем лишь несколько точек, более удобных, распределяя их по всему участку (например, точки $A, B, C, \dots$ на черт. 54). Соединив мысленно эти основные точки прямыми линиями, получают сеть треугольников, которая и называется триангуляцией [1]. В этих треугольниках измеряют возможно точнее все углы и одну из сторон, например AC. Остальные линии сети определяются уже



Черт. 53.



Черт. 54.

посредством тригонометрического решения треугольников, причем начинают с того треугольника, в котором находится базис; от него переходят к смежному, от этого—к новому смежному и т. д. (Получение одной и той же линии двумя различными путями служит проверкой вычисления.)

Каждая из линий главной триангуляции может в свою очередь служить базисом для новой триангуляции, составленной уже из треугольников более мелких, и т. д., чем и определяется на плане положение какой угодно точки участка, т. е. возможность снять весь участок.

Основные тригонометрические формулы.

I. Соотношения между тригонометрическими функциями.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ 2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$ 4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$

[1]) Название триангуляция иногда прилагается к самому способу съемки.

5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha.$ 6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$

7. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}.$ 8. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}.$

II. Формулы суммы и разности углов.

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta.$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta.$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$
5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$
6. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$

III. Функции двойного угла.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$

IV. Функции половинного угла.

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}.$ 2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}.$

3. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

V. Формулы приведения к логарифмическому виду.

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

   $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}.$
5. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$
6. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$
7. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.$
8. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.$

VI. Соотношения в прямоугольном треугольнике.

1. $\frac{a}{c}=\sin A;\quad \frac{b}{c}=\cos A;\quad \frac{a}{b}=\operatorname{tg} A.$
2. $a=c\cdot\sin A;\quad b=c\cdot\cos A;\quad a=b\cdot\operatorname{tg} A.$

VII. Соотношения в косоугольном треугольнике.

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Теорема синусов.
2. $a=2R\cdot\sin A.$
3. $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$ Теорема косинусов.
4. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$. Теорема тангенсов.
5. $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$. 6. $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$. Формулы Мольвейде.
7. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$

$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$

VIII. Площадь треугольника.

1. $S=\frac{1}{2}ah.$ 2. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$
3. $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C.$ 4. $S=rp.$
5. $S=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin(B+C)}.$

Тригонометрические функции основных углов.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

Формулы приведения.

	α	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
sin	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$
cosec	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Ответств. редактор Я. Кеткович. Техн. редактор И. Кутин.

Москва. Уполномоченный Главлита Б—27773. Учгиз № 4760. У—21. Заказ № 372. 50 000 экз. 6¼ печ. л. Кн. сдана в набор 13/III 1933 г. Подписана к печати 15/IV 1933 г. Бум. 82×110 см 1/32. В бум. л. 154112 зн.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Трехпрудный, 9.

Цена 90 коп.
Переплет 65 коп.