Л. Я. ГИРШВАЛЬД

ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ЛОГАРИФМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО

Л. Я. ГИРШВАЛЬД

ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ЛОГАРИФМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1952

Отв. редактор проф. *Г. И. Дринфельд*

Корректор *З. В. Пухкаленко*

Подписано к печати 23/IV 1952 г. Печатных листов — 1,64. Учетно-издат. листов — 1,7. Формат бумаги 84 x 108 см. $^1/_{32}$. БЦ 10021. Зак. 2512. Тираж 30000.

Отпечатано в типографии Изд-ва Харьковского Государственного Университета им. А. М. Горького Харьков. Университетская, 16.

Известно, какую неоценимую услугу оказывают таблицы логарифмов инженеру и технику любой специальности, штурману, артиллеристу и особенно астроному, вообще каждому, кому приходится вести большие вычисления. Математик Лаплас выразился, что «изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь».

Располагая таблицей логарифмов, мы всякое (положительное) число представляем степенью числа десять. Например, $47{,}60 = 10^{1{,}6776}$; $2{,}230 = 10^{0{,}3483}$.

Показатели степеней (1,6776 и 0,3483), которые называются десятичными логарифмами взятых чисел (47,60 и 2,230), мы и находим в таблицах. Правда, в таблицах указаны лишь дробные части (мантиссы) логарифмов, целые же части (характеристики) легко подыскиваются в уме. Для этого достаточно сообразить, что, например, 47,60 заключено по величине между 10 и 100, а 2,230 — между 1 и 10, так что $10^1 < 47{,}60 < < 10^2$; $10^0 < 2{,}230 < 10^1$. Так как показатели степени растут вместе с самой степенью, то отсюда и видно, что логарифм числа 47,60 заключен между 1 и 2, а логарифм числа 2,230 между 0 и 1. Теперь, пользуясь полученным представлением

$$47{,}60 = 10^{1{,}6776}$$
$$2{,}230 = 10^{0{,}3483}$$

можно заменить умножение этих чисел сложением их логарифмов.

В самом деле, формула умножения степеней $a^m a^n = = a^{m+n}$, очевидная при целых показателях m и n, остается справедливой и при любых их значениях. Поэтому $47{,}60 \cdot 2{,}230 = 10^{1{,}6776} \cdot 10^{0{,}3483} = 10^{1{,}6776 + 0{,}3483} = 10^{2{,}0259}$.

Снова обращаясь к таблицам, найдем:
$10^{2{,}0259} = 106{,}1$. Итак, $47{,}60 \cdot 2{,}230 = 106{,}1$.

Подобным образом деление чисел сводится к вычитанию их логарифмов. Например:

$$47{,}60:2{,}230=10^{1{,}6776}:10^{0{,}3483}=10^{0{,}6776-0{,}3483}=$$
$$=10^{1{,}3293}=21{,}35,$$

а возведение в степень—к умножению:

$$47{,}60^{2{,}5}=(10^{1{,}6776})^{2{,}5}=10^{1{,}6776\cdot 2{,}5}=10^{4{,}1940}=1563.$$

Приведенные примеры показывают, насколько упрощаются вычисления при пользовании логарифмами. Это упрощение становится еще более заметным, когда приходится производить много действий с большими числами, а также делать вычисления, связанные с тригонометрическими функциями.

Мы предполагаем, что читатель умеет пользоваться таблицами логарифмов, и не будем останавливаться на технике вычислений. Мы имеем в виду изложить, как возникла идея логарифмов, как были впервые составлены логарифмические таблицы, и к каким новым математическим понятиям и методам привели поиски этих способов, упрощающих вычисления.

Изучая ту или иную науку, мы познаем ее глубже и полнее, если знакомимся с ее историей. Важно не только усвоить готовые положения науки, а и знать, как и почему возникли ее основные идеи, какие условия вызывали развитие тех или иных ее отраслей, какие заблуждения и ложные представления приходилось преодолевать, какие открытия прокладывали новые широкие пути для дальнейших исследований. Подобно этому биолог, изучая какое-либо растение или животное, должен знакомиться не только с его строением, но и с историей развития вида и влиянием окружающей среды (почвы, климата, ухода). Лишь такое полное изучение позволяет сознательно влиять на изменение свойств растения или животного в сторону, полезную для человека.

Обратимся же к истории логарифмов. Основная их идея возникла еще в глубокой древности. Так, в сочинении «Псаммит» древнегреческого математика Архимеда (287—212 гг. до нашей эры) мы читаем: «Если будет дан ряд чисел в непрерывной пропорции, начиная от 1, и если два его члена перемножить, то произведение будет членом того же ряда, настолько удаленным от большего множителя, насколько меньший удален от единицы, и одним членом меньше против того, насколько удалены оба множителя вместе».

Здесь под «непрерывной пропорцией» Архимед разумеет геометрическую прогрессию, которую мы записали бы так:

$$1,\ a,\ a^2,\ \dots$$

В этих обозначениях правило, формулированное Архимедом, будет выражено формулой

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Отсюда мы видим, что Архимед вполне ясно владел понятием степени с целым показателем и той связью, какая имеется между действиями со степенями и действиями с показателями. Однако от установления этой связи до использования ее в логарифмических вычислениях было еще очень далеко. Во времена Архимеда алгебраическая символика совершенно отсутствовала. Это препятствовало обобщению понятия степени на случай нецелых показателей. Кроме того, греческая нумерация была настолько примитивна, что письменный счет в ней был невозможен. Не было и речи и о каких-либо вычислительных таблицах. Но и достигнутое античной наукой было надолго похоронено под развалинами Римской империи.

Натуральное хозяйство и господство религиозной догмы, характерные для эпохи раннего средневековья (V—XI вв.), привели к глубокому застою в развитии науки, и в частности, математики. Потребности даже в элементарном счете были весьма ограниченны. Лишь развитие средиземноморской торговли, начиная с XII—XIII столетия, усилило в итальянских торговых республиках интерес к вопросам счета. В это время европейцы узнали от арабов индусскую цифровую систему. Европейцам становятся известными и успехи арабских астрономов.

XV век отмечен значительным расцветом науки и искусства в городах Италии, а затем Германии и Франции. Но эта новая наука развивалась не в университетах, которые оставались оплотом богословия, а в частных кружках передовых, образованных людей, в мастерских художников и ремесленников. В сочинениях по арифметике того времени мы встречаем такое же сопоставление арифметической и геометрической прогрессий, какое видели у Архимеда. Немецкий математик Михаил Стифель (1486—1567) в своей «Всеобщей арифметике» пользуется уже степенями с отрицательными и дробными показателями, хотя и в очень неудобных обозначениях.

Еще более крупные успехи в развитии счета мы видим несколькими десятилетиями позже в Нидерландах, освободившихся уже от испанского владычества и выходивших тогда на историческую арену. Ученый инженер Симон Стевин (1548—1620) издал таблицу сложных процентов, т. е. значений чисел $(1+r)^n$ при различных r: $r=0{,}05$, $r=0{,}04$, ...

При этом следует отметить, что все вычисления он производил в десятичных дробях, им же открытых. Уже тогда он высказал мысль и о создании десятичной системы мер.

Заметим кстати, что десятичные дроби были открыты еще за 150 лет до Стевина узбекским математиком по имени Гияс-ад-Дин Джемшид ибн-Масуд, одним из сотрудников знаменитого астронома Улугбека, но это открытие тогда не дошло до Европы.

Сам Стевин имел в виду применение составленных им таблиц лишь в торгово-финансовых расчетах. Но, повидимому, знакомство с этими таблицами привело современника Стевина швейцарца Иоста Бюрги (1552—1632) к составлению таблиц, которые были пригодны для облегчения всевозможных вычислений. Бюрги пришлось заниматься большой вычислительной работой, так как он, состоя в должности придворного часовщика и мастера по астрономическим инструментам, работал в Праге одновременно со знаменитым астрономом Иоганном Кеплером и помогал ему в астрономических наблюдениях и вычислениях.

Бюрги подобно Стевину составил таблицу степеней $1+r)^n$. Составление такой таблицы принципиально нетрудно. Полагая, например, $r=0{,}01$, мы должны будем последовательно придавать к каждому уже полученному числу таблицы его сотую часть. Так:

$$1{,}01 = 1{,}01$$
$$1{,}01^2 = 1{,}01 + 0{,}0101 = 1{,}0201$$
$$1{,}01^3 = 1{,}0201 + 0{,}10201 = 1{,}030301$$
$$1{,}01^4 = 1{,}030301 + 0{,}01030301 = 1{,}04060401 \text{ и т. д.}$$

Но при составлении таких таблиц возникает следующая трудность. Если при последовательном умножении сохранять все знаки, то их число неимоверно возрастет. Получаемые числа необходимо округлять, но округление это следует вести осторожно, чтобы при дальнейших вычислениях не накопилась погрешность в оставляемых цифрах. Кроме того, чтобы такие таблицы были практически применимы, надо число r взять очень малым. В самом деле, при $r = 0{,}01$ разница между двумя последовательными числами таблицы будет равна 0,01 предыдущего числа. Например, $1{,}01^{65} = 1{,}909$ (округленно), а $1{,}01^{66} = 1{,}909 + 0{,}01 \cdot 1{,}909 = 1{,}909 + 0{,}019 = 1{,}928$.

Разница между этими числами составляет 0,019. Эта разница будет еще значительней при более высоких степенях n—таблица становится все «реже». Пусть теперь надо умножить 5,19 на 1,87. Этих чисел в таблице степеней числа 1,01 нет; тогда придется брать вместо этих чисел ближайшие: для 5,19—5,165 или 5,216, а для 1,87—1,872. Найденным числам соответствуют показатели 165 или 166 и 63. Тогда произведение

$$5{,}19 \cdot 1{,}87$$

заменим таким:

$$5{,}165 \cdot 1{,}872 = 1{,}01^{165} \cdot 1{,}01^{63} = 1{,}01^{228}$$

или

$$5{,}216 \cdot 1{,}872 = 1{,}01^{166} \cdot 1{,}01^{63} = 1{,}01^{229}.$$

По показателям 228 и 229 в таблицах найдем два числа — $1{,}01^{228} = 9{,}668$ и $1{,}01^{229} = 9{,}765$, между которыми должно заключаться искомое произведение. Действительно, перемножив, непосредственно получим:

$$5{,}19 \cdot 1{,}87 = 9{,}7053.$$

Можно было бы получить это произведение точнее, взяв полусумму найденных по таблицам границ $\frac{9{,}668 + 9{,}765}{2} = 9{,}716$. Но и то мы получим расхождение уже в сотых. Погрешность вычисления станет меньше, если таблицы сделать «гуще».

Для этого следует взять основание $1+r$ возможно ближе к 1. Бюрги взял $r = \frac{1}{10^4}$ и составил таблицу чисел $10^8 \cdot (1{,}0001)^n$, придавая показателю n последовательно значения 10, 20, 30,...

Показатели он называл «красными» числами, а степени «черными»; при издании таблиц эти числа и были отпечатаны соответствующей краской. «Черные» числа вычислены с 9 знаками и доведены до $10^9 = 1\,000\,000\,000$. Это число Бюрги называет «полным» черным числом. Ему отвечает «полное» красное число 230 270 022, так как $1{,}0001^{230\,270\,022} \cdot 10^8 = 10^9$.

Итак, Бюрги пришлось произвести свыше 230 миллионов последовательных умножений на 1,0001, следя при этом за возможным накоплением погрешностей округления. Его труд не мог быть облегчен инструментами, так как приборов, подобных современному арифмометру, тогда не было. Поэтому неудивительно, что Бюрги потратил на составление своих таблиц 8 лет жизни (1603—1611). По обычаю того времени автор дал своему труду выразительное, но несколько длинное название: «Таблицы арифметической и геометрической прогрессии с обстоятельным наставлением, как пользоваться ими при всякого рода вычислениях».

Труд Бюрги был издан в Праге лишь в 1620 г. Своим появлением в свет он обязан настояниям Кеплера, оценившего значение этих таблиц для астрономических вычислений. Оригинал рукописи Бюрги хранился в Пулковской обсерватории.

Таблицы Бюрги сыграли известную роль в развитии вычислительных средств, но пользование ими осложнялось тем, что они являлись лишь таблицами антилогарифмов. Если «черные» числа Бюрги разделить на 10^8, то получим антилогарифмы «красных» чисел по основанию 1,0001.

Неудобство таблиц Бюрги состояло в том, что при пользовании ими приходилось прибегать к интерполяции, подобной той, какую мы показали выше на примере. Однако уже эти таблицы давали значительное преимущество перед тем способом, каким пользовались до того при умножении и делении больших чисел. Этот способ назывался «простаферезис» (сложения и вычитания). Он основан на следующих формулах тригонометрии:

$$\sin\alpha\ \sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

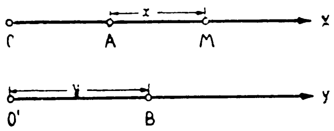
Для тригонометрических функций тогда уже были составлены подробные таблицы, находившие широкое применение в астрономии. Синусы и косинусы выражались целыми числами, так как синус 90°, называемый «полный синус», принимался равным какому-либо большому числу, например, 10^8. Тогда два заданных множителя можно было найти в таблицах среди значений синуса или косинуса. По ним определялись соответственные углы α и β. Беря разность $\alpha-\beta$ и сумму $\alpha+\beta$ этих углов, снова с помощью таблиц находили косинусы этих углов. Полуразность или полусумма найденных значений тригонометрических функций и давали искомое произведение. До составления своих таблиц Бюрги сам широко пользовался и пропагандировал этот метод.

Однако изобретению Бюрги не пришлось получить широкого распространения, так как за несколько лет до выхода в свет его таблиц в Англии в 1614 г. были опубликованы значительно более совершенные таблицы. Их автором был шотландец Джон Непер (1550—1617). Он тоже не был математиком по профессии. Получив хорошее образование у себя на родине и в Голландии, он занимался астрономией и математикой как любитель, добившись некоторых важных результатов. И теперь еще его именем называют ряд формул и правил сферической тригонометрии.

В предисловии к своему сочинению Джон Непер говорит: «Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обыкновенно отпугивает многих от изучения математики». Задача, поставленная Непером, была чрезвычайно своевременна и в Англии. Годы жизни Непера относятся к той эпохе, когда Англия захватывала пути заокеанской морской торговли. Английские мореплаватели предъявляли большой спрос на астрономические таблицы, составление которых требовало сложных вычислений.

К решению поставленной задачи Непер подошел очень глубоко и оригинально. При описании таблиц Бюрги мы видели, что, приближая к единице знаменатель геометрической прогрессии, можно сгустить составляющие ее числа, но все же остаются промежуточные числа, которые не войдут в прогрессию и для которых мы не сможем непосредственно указать логарифма.

Хотя во времена Непера математики еще не владели методами изучения непрерывных процессов, он совершенно правильно дал идею построения непрерывной шкалы логарифмов, при помощи которой для каждого положительного числа мог быть вычислен его логарифм. Свою идею Непер представил в следующей образной форме:



Чертеж 1

По двум осям OX и $OУ$ движутся точки A и B. Из начальных пунктов O и O′ своего пути они выходят с одинаковой скоростью v . Точка B сохраняет эту скорость v все время, т. е. движение ее равномерно. Движение же точки A замедленно: ее скорость непрерывно убывает пропорционально расстоянию $x=AM$, какое ей еще осталось пройти до некоторой точки M, фиксированной на оси $O'X$. Характеризуя этим числом $x = AM$ положение точки A в некоторый момент времени и обозначая через y расстояние OB, пройденное к этому времени точкой B, найдем связь между этими числами. Именно покажем, что при одинаковой разности двух значений величины y будет одинаково отношение соответствующих значений величины x. Соответствующими значениями величин x и y, понятно, мы называем те значения, которые определяют положение точек A и B в один и тот же момент времени.

Указанную связь Непер и имел в виду, назвав числа y логарифмами чисел x. Слово логарифм состоит из двух греческих слов: «логос» — отношение, «аритмос» — число, так что буквальный смысл названия указывает на то, что логарифмы являются как бы вспомогательными числами, измеряющими отношения тех чисел, к каким

Джон Непер (1550—1617) — изобретатель и составитель первых таблиц логарифмов.

они относятся. При установлении связи между числами x и y затруднение заключается в том, что скорость точки A, т. е. скорость, с какой уменьшается расстояние x, убывает непрерывно одновременно с убыванием самого расстояния.

Для облегчения рассуждений заменим движение, определенное Непером, движением, в котором скорость точки A изменяется не непрерывно, а скачками через малые промежутки времени, оставаясь постоянной в течение этих промежутков. Для наглядности будем вести рассуждение на примерных числовых данных. Примем прежде всего расстояние $OM = a$ численно равным скорости v точки B, а скорость точки A, равной расстоянию до точки M. Пусть скорость v и расстояние a выражаются каким-либо большим числом, например, 10^8. Для этого можно принять за единицу длины, например, 1 миллиметр. Время будем измерять в часах.

Назовем «мгновением» тот весьма малый промежуток времени (равный $\frac{1}{v}$, т. е. одной стомиллионной доле часа), за который точка B продвинется по оси OY на 1 *мм*. Тогда за некоторое число k «мгновений» точка B удалится от начального положения на $y_k = k$. Каково же будет в это время положение точки A? В течение первого «мгновения» ее скорость будет такая же, как и у точки B, т. е. $v = 10^8$ *мм/час*. Поэтому за это «мгновение» она пройдет тоже 1 *мм*, и ее расстояние от точки M сократится на 1 *мм*, т. е. станет равным

$$x_1 = 10^8 - 1 = v - 1 = v\left(1 - \frac{1}{v}\right).$$

Тогда, по предположению, этим же числом $v\left(1 - \frac{1}{v}\right)$ будет выражаться скорость точки A в течение второго «мгновения», длительность которого равна $\frac{1}{v}$. Поэтому за второе «мгновение» точка A пройдет расстояние $v\left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdot \frac{1}{v} = 1 - \frac{1}{v}$. Вычитая это расстояние из

x_1, получим расстояние x_2, на котором находилась точка A по истечении двух «мгновений»:

$$x_2 = x_1 - \left(1 - \frac{1}{v}\right) = v\left(1 - \frac{1}{v}\right) - \left(1 - \frac{1}{v}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{v}\right)(v - 1) = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^2.$$

Вообще расстояние x_κ, на котором находилась точка A по истечении κ «мгновений» с начала движения, численно равно скорости движения в течение следующего $\kappa + 1$-го «мгновения». Поэтому за $\kappa + 1$-ое «мгновение» точка A приблизится к M на расстояние, равное произведению $x_\kappa \cdot \frac{1}{v} = x_\kappa \cdot 10^{-8}$ скорости x_κ *мм/час.* на время — 10^{-8} часа. Таким образом, расстояние $x_{\kappa+1}$ точки A от M через $\kappa+1$ „мгновение“ с начала движения станет равным $x_{\kappa+1} = x_\kappa - x_\kappa \cdot 10^{-8} = x_\kappa\,(1 - 10^{-8})$.

Итак $x_{\kappa+1} = x_\kappa \cdot q$, где q равно числу $1 - 10^{-8} = 1 - \frac{1}{v}$, чуть меньшему единицы. Полученное равенство показывает, что расстояние точки A от M с каждым «мгновением» убывает в геометрической прогрессии со знаменателем q. Так как начальное расстояние OM мы приняли равным $x_0 = v = 10^8$, то для любого κ-го „мгновения“ будем иметь $x_\kappa = x_0\, q^\kappa = 10^8\left(1 - \frac{1}{10^8}\right)^\kappa$ или $x_\kappa = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^\kappa$. Теперь легко найти отношение $\frac{x_{\kappa+n}}{x_\kappa}$ расстояний точки A от M через $\kappa + n$ и κ „мгновений“ с начала движения. Очевидно,

$$\frac{x_{\kappa+n}}{x_\kappa} = \frac{x_0\, q^{\kappa+n}}{x_0\, q^\kappa} = q^n = \left(1 - \frac{1}{v}\right)^n.$$

Таким образом, это отношение определяется разностью n чисел $\kappa + n$ и κ и не зависит от значений самих чисел x_κ и $x_{\kappa+n}$. Но в принятых нами единицах измерения числа κ и $\kappa + n$ как раз являются ло-


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIƆ. DC. XIV.

Титульный лист сочинения Непера „Описание чудесных таблиц логарифмов", изданного в Эдинбурге в 1614 г. (с экземпляра, хранящегося в Центральной научной библиотеке Харьковского университета).

гарифмами $y_к$ и $y_{к+n}$ чисел $x_к$ и $x_{к+n}$. Поэтому окончательно

$$\frac{x_{к+n}}{x_к} = \left(1 - \frac{1}{v}\right)^{y_{n+к} - y_к}.$$

Итак, высказанное ранее утверждение доказано. Сделанное нами упрощающее предположение о скачкообразном изменении скорости движения точки A лишь незна-

MIRIFICI
Logarithmorum canonis descriptio, eiusque usus in utrâque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio.

LIBER I.

CAPVT. I.
De Definitionibus.

1 Def. Linea æqualiter crescere dicitur, quum punctus eam describens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.

Sit punctus A, à quo ducenda sit linea fluxu alterius puncti qui sit B. fluat ergo primo momento B ab A in C. Secun.

Первая страница сочинения Непера „Описание чудесных таблиц логарифмов“.

чительно искажает картину, ввиду произвольной малости тех интервалов времени («мгновений»), в течение которых мы считали скорость точки A неизменной. Формула $x_к = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^n$, определяющая связь между числами $x_к$ и их логарифмами $к$, как их определил Непер, показывает, что связь между числом и его логарифмом Непер попрежнему рассматривал как связь между арифметической и геометрической прогрессией. Для него логарифмы, так же как сами числа, были целыми числами.

Употреблению в качестве показателей любых вещественных чисел, возможно, препятствовало и то обстоятельство, что во времена Непера десятичные дроби еще не получили достаточно широкого распространения.

Доказанное нами свойство логарифмов Непера позволяет вывести правила «логарифмирования», которые будут незначительно отличаться от употребляемых нами. В самом деле, пусть $c = ab$. Это равенство можно переписать в виде пропорции:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{1}.$$

По доказанному, если отношения двух чисел равны отношению двух других, то разность логарифмов первых двух чисел равна разности логарифмов двух других. Поэтому из полученной пропорции имеем

$$\mathrm{L}c - \mathrm{L}a = \mathrm{L}b - \mathrm{L}1.$$

Откуда

$$\mathrm{L}c = \mathrm{L}a + \mathrm{L}b - \mathrm{L}1,$$

т. е. логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов сомножителей, уменьшенной на логарифм единицы. Отсюда же получаем

$$\mathrm{L}b = \mathrm{L}c - \mathrm{L}a + \mathrm{L}1,$$

т. е. логарифм частного $b = \frac{c}{a}$ равен разности логарифмов делимого и делителя, увеличенной на логарифм единицы. Входящий в эти формулы логарифм единицы $\mathrm{L}1$ не может быть опущен, так как по Неперу нулю равен не логарифм 1, а логарифм числа $v = 10^8$; между тем логарифм единицы $\mathrm{L}1 = y$ может быть приближенно определен из равенства:

$$1 = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^y.$$

То, что у Непера $\mathrm{L}1 \neq 0$ создавало, как видим, излишние осложнения при пользовании таблицами. Другим еще более серьезным неудобством таблиц Непера было то, что $\mathrm{L}10 \neq 1$, и потому при перемещении запятой изменялась не только целая, но и дробная часть логарифма. Правда, последний недостаток мог не казаться Неперу особенно существенным, так как он составлял свои таблицы для тригонометрических величин.

Вычислив сперва значения чисел $x_к = v\ (1 - v)^к$ при $v = 10^7$ и последовательных целых значениях $к$, Непер затем составил таблицы логарифмов синусов углов от 0° до 90°. Таблицы Непера имели следующий вид.

Gr. 18

18 min	Sinus.	Logarithmi	+ | — Differentia	logarithmi	Sinus	
30	3173047	11478926	10948332	530594	9483237	30
31	3175805	11470237	10938669	531568	9482314	29
32	3178563	11461556	10929013	532543	9481390	28
33	3181321	11452883	10919364	533519	9480465	27
34	3184079	11444219	10909723	534496	9479539	26
35	3186837	11435563	10900090	535473	9478612	25
36	3189594	11426915	10890464	536451	9477685	24
37	3192351	11418275	10880845	537430	9476757	23
38	3195108	11409644	10871234	538410	9475828	22
39	3197864	11401021	10861630	539391	9474898	21
40	3200620	11392406	10852033	540373	9473967	20
41	3203375	11383800	10842444	541356	9473035	19
42	3206130	11375202	10832862	542340	9472103	18
43	3208885	11366612	10823287	543325	9471170	17
44	3211640	11358030	10813719	544311	9470236	16
45	3214395	11349456	10804158	545298	9469301	15
46	3217150	11340891	10794605	546286	9468366	14
47	3219904	11332334	10785059	547275	9467430	13
48	3222658	11323785	10775520	548265	9466493	12
49	3225412	11315244	10765988	549256	9465555	11
50	3228165	11306711	10756462	550249	9464616	10
51	3230918	11298186	10746944	551242	9463677	9
52	3233671	11289670	10737434	552236	9462737	8
53	3230423	11281162	10727931	553231	9461796	7
54	3239175	11272662	10718436	554226	9460854	6
55	3241927	11264170	10708948	555222	9459911	5
56	3244679	11255686	10699467	556219	9458968	4
57	3247430	11247210	10689993	557217	9458024	3
58	3250181	11238742	10680526	558216	9457079	2
59	3252932	11230282	10671066	559216	9456133	1
60	3255682	11221830	10661613	560217	9455186	0
						min
						Gr.
				71		71

Сверху и снизу страницы указано число градусов, в первой и последней колонке дано число минут. В следующих колонках даны с семью знаками значения синусов, причем синус 90° принят за 10^8. В одной строке стоят синусы дополнительных углов. В столбцах третьем слева и третьем справа даны с восемью знаками логарифмы приведенных значений синусов. Наконец, в средней колонке приведены разности логарифмов, стоящих в одной строке, т. е. разности логарифмов синусов дополнительных углов. Эти разности равны логарифмам тангенсов.

Эти таблицы были изданы Непером в 1614 году под названием «Описание чудесных таблиц логарифмов», а в 1619 г., уже после его смерти, вышло другое сочинение: «Устройство чудесных таблиц логарифмов». В этом посмертном сочинении Непер дает теорию построения созданных им логарифмов. В нем же высказана идея создания десятичных логарифмов. К осуществлению этой идеи Непер приступил совместно со своим другом профессором Лондонского университета Генри Бриггом (1556 — 1630). Уже в год смерти Непера Бригг издал таблицы, содержавшие логарифмы чисел до 1000.

В 1620 г. вышли составленные Бриггом 14-значные таблицы десятичных логарфимов чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Десятичные логарифмы и теперь иногда называют Бригговыми.

Интересен способ, каким Бригг вел вычисления своих логарифмов. Этот способ основан на следующих соображениях. Если из любого числа извлекать корень все более и более высокой степени m, то этот корень будет становиться все ближе и ближе к 1. Если принять, что $m = 2^n$, то извлечение корня степени m сведется к n-кратному последовательному извлечению квадратного корня.
Пусть, например,

$$\sqrt[2^{n+1}]{10} = 1 + \alpha.$$

Тогда, возводя обе части равенства в квадрат, получим:

$$\sqrt[2^n]{10} = 1 + 2\alpha + \alpha^2.$$

При достаточно большом значении n α можно считать столь малым, что его двадратом будем пренебрегать.

Тогда в пределах принятого приближения можно считать, что

$$\sqrt[2^{n+1}]{10}-1\approx\frac{\sqrt[2n]{10}-1}{2}.$$

Умножая обе части этого равенства на 2^{n+1}, получим:

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10}-1\right)\approx 2^{n}\left(\sqrt[2n]{10}-1\right).$$

Это приближенное равенство говорит о том, что при весьма больших значениях показателя n выражение

$$2^{n}\left(\sqrt[2n]{10}-1\right)$$

получает значение, почти не изменяющееся при дальнейшем увеличении n. Если теперь обозначить

$$\sqrt[2^n]{10}=x,$$

то по обычному определению логарифма $\log_{10} x=\frac{1}{2^n}$;

тогда

$$2^{n}\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right)=\frac{x-1}{\log_{10} x}. \qquad (*)$$

С определенной степенью приближения можно считать, что к тому же числу x, весьма близкому к 1, можно прийти, последовательно извлекая достаточное число раз квадратный корень из любого числа; обозначая это число через a, получим:

$$\sqrt[2^m]{a}\approx x;$$

логарифмируя это равенство, выразим $\log_{10}x$ через $\log_{10}a$:

$$\log_{10}x\approx\frac{\log_{10}a}{2^m}.$$

Подставим теперь полученные выражения для x и $\log_{10} x$ в равенство (*). Тогда оно примет вид

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right) \approx \frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{a}-1\right)}{\log_{10} a}.$$

Отсюда

$$\log_{10} a \approx \frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{a}-1\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right)}.$$

Это равенство показывает, что отыскание десятичного логарифма любого числа может быть сведено к многократному последовательному извлечению квадратного корня из данного числа и из 10.

Таков приблизительно был путь, каким Бригг вычислил логарифмы основных чисел. Дальнейшее составление таблицы было произведено, как он выражался, «искусственным путем», объяснение которого было бы довольно сложным. Какие вычислительные трудности пришлось преодолеть Бриггу, можно судить хотя бы по тому, что ему потребовалось 54 раза последовательно извлекать квадратный корень из 10, при этом он получил результат с 33 цифрами:

$$\sqrt[2^{54}]{10} = 1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 127\ 819\ 149\ 320\ 032\ 35.$$

Работа, начатая Бриггом, была закончена голландцем Адрианом Влакком, который в 1628 г. выпустил 10-значные таблицы логарифмов чисел от 1 до 100 000. Тот же Влакк закончил и другую работу, начатую Бриггом,— составление таблицы десятичных логарифмов тригонометрических функций.

Таблицы, изданные Влакком, быстро вошли во всеобщее употребление в Европе. Преимущество десятичных логарифмов при практических вычислениях было столь очевидно, что они сразу вытеснили Неперовы логарифмы. Заметим еще, что теперь под Неперовыми, или натуральными логарифмами, понимают не те логарифмы, которые были вычислены самим Непером. Как мы видели, у Непера логарифмы отличались тем, что в них, во-первых, $L1 \neq 0$, во-вторых, эти логарифмы убывали с возрастанием числа и, в-третьих, Непер выражал логарифмы целыми числами. Теперь же под натуральными логарифмами разумеют логарифмы, в основании которых лежит число e, позже названное Неперовым. Оно может быть приближенно вычислено по формуле $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где число n должно быть весьма велико. Конечно, по идее эти логарифмы весьма близки к Неперовым. Если, как и выше, логарифмы Непера обозначать символом L, а натуральные логарифмы символом ln, то связь между ними выразится формулой

$$Lx \approx 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right).$$

При этом еще следует обратить внимание на то, что у Непера не было идеи основания логарифмов.

Таблицы натуральных логарифмов чисел были вычислены англичанином Джоном Спейделем и изданы им много раз (в 1620, 1621, 1623, 1624, 1627, 1628 гг.).

Но, как мы уже сказали, эти натуральные логарифмы быстро уступили место десятичным. В 1620 г. профессор Лондонского университета Эдмунд Гюнтер издал таблицы десятичных логарифмов тригонометрических величин. Гюнтер является изобретателем и логарифмической шкалы, явившейся прообразом современной счетной линейки.

Как видим, открытие Непера быстро получило признание и распространение. Это указывает на то, что потребность в новых вычислительных средствах тогда уже вполне назрела.

Изобретение Непера высоко оценил Кеплер. Он и сам издал в 1624 г. таблицу логарифмов, подобную Неперовой, и широко использовал логарифмы в своих колоссальных астрономических вычислениях. В 1650 году вышел трактат о логарифмах в Китае. Его автором был астроном Ши Фонг-тзу, ученик польского ученого иезуита Яна Смоголенского (1611—1656), жившего и работавшего в Китае.

В России таблицы логарифмов были изданы впервые в 1703 г. и затем переизданы в 1719 г. В основу их были положены таблицы Влакка; изданы они под названием

«Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов тщанием и за освидетельствованием математических и навигацких школ учителей Андрея Фархвардсона, Стефана Гвина и Леонтия Магницкого». Последний из упомянутых составителей этих таблиц — Леонтий Магницкий был автором первой русской «Арифметики», вышедшей в свет в том же 1703 году.

В 1730 году вышла в свет «Книжица о сочинении и описании сектора, скал обыкновенной и гунтерской со употреблением оных инструментов в решении различных математических проблем». Как указывает заглавие, в этой книжице» находится и описание логарифмической шкалы.

Эти первые русские пособия по математике были широко использованы русскими моряками и геодезистами XVIII в. в их замечательных морских экспедициях и сухопутных путешествиях.

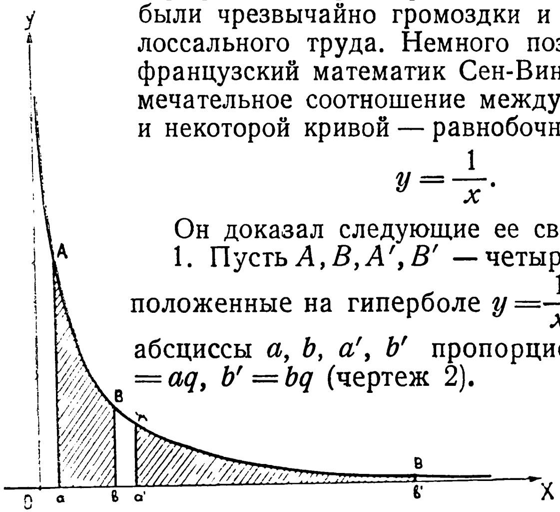
* * *

Нам остается рассказать еще об одном важном в истории логарифмов открытии. Способы вычисления логарифмов, которые применяли Непер и Бюрги, были чрезвычайно громоздки и требовали колоссального труда. Немного позже, в 1647 г. французский математик Сен-Винсен нашел замечательное соотношение между логарифмами и некоторой кривой — равнобочной гиперболой

$$y=\frac{1}{x}.$$

Он доказал следующие ее свойства:

1. Пусть A, B, A', B' — четыре точки, расположенные на гиперболе $y=\frac{1}{x}$ так, что их абсциссы a, b, a', b' пропорциональны: $a'=aq$, $b'=bq$ (чертеж 2).



Чертеж 2

Тогда докажем, что площади S_a^b и $S_{a'}^{b'}$ криволинейных четырехугольников $ABab$ и $A'B'a'b'$ будут равны между собой.

Для доказательства разделим интервалы (a, b) и (a', b') на произвольное число n равных частичных интервалов, вставив между a и b, a' и b' промежуточные числа:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$a' = x_0' < x_1' < x_2' < \ldots < x'_{n-1} < x'_n = b'.$$

Понятно, что вставленные числа x_k и x'_k так же, как и их разности

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

и

$$\Delta x' = x'_k - x'_{k-1} = \frac{b'-a'}{n},$$

относятся как данные числа a, b, a', b':

$$\frac{x_k'}{x_k} = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = q.$$

На каждом из полученных интервалов строим „входящие" и „выходящие" прямоугольники (чертеж 3). Их площади, которые обозначим через σ_k и σ'_k, будут соответственно равны $\sigma_k = \frac{\Delta x}{x}$ и $\sigma'_k = \frac{\Delta x'_k}{x'_k}$. Так как, по предыдущему, числители и знаменатели этих дробей пропорциональны:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x'_k}{x_k} = q,$$

то площади этих прямоугольников соответственно равны: $\sigma_k = \sigma'_k$. Площади S_a^b и $S_{a'}^{b'}$ криволинейных трапеций заключены между суммами $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$, $\underline{S}'_n$ и $\overline{S}'_n$ площадей входящих и выходящих прямоугольников

$$\underline{S}_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n < S_a^b < \sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1} = \overline{S}_n$$

$$\underline{S}'_n = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n < S_{a'}^{b'} < \sigma'_0 + \sigma'_1 + \ldots + \sigma'_{n-1} = \overline{S}'_n$$

Но $\sigma_k' = \sigma_k$ и потому $\underline{S}_n' = \underline{S}_n$ и $\overline{S}_n' = \overline{S}_n$,

т. е. суммы, заключающие площади S_a^b и $S_{a'}^{b'}$, равны между собой. Поэтому эти площади различаются между собой меньше, чем заключающие их суммы входящих и выходящих прямоугольников:

$$\left| S_a^b - S_{a'}^{b'} \right| < \overline{S}_n - \underline{S}_n.$$

Среди выходящих прямоугольников, составляющих сумму $\overline{S}_n$, имеются все, составляющие сумму $\underline{S}_n$, кроме σ_n, но сверх того в $\overline{S}_n$ входит σ_0, которое не входит в $\underline{S}_n$. Поэтому

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sigma_0 - \sigma_n.$$

Вычисляя σ_0 и σ_n, получим:

$$\sigma_0 = \frac{1}{a} \cdot \Delta x = \frac{1}{a} \cdot \frac{b-a}{n},$$

Чертеж 3

$$\sigma_n = \frac{1}{b} \cdot \Delta x = \frac{1}{b} \cdot \frac{b-a}{n},$$

$$\sigma_0 - \sigma_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-a)^2}{abn}.$$

Поэтому

$$\left| S_a^b - S_{a'}^{b'} \right| < \frac{(b-a)^2}{abn}.$$

Так как это неравенство справедливо при любом числе (n) частей, на которые будут разделены интервалы ab и $a'b'$, то

$$S_a^b = S_{a'}^{b'},$$

что и требовалось доказать.

2. Только что доказанное свойство гиперболы можно выразить в несколько более общей форме.

Возьмем точки оси OX, абсциссы которых x_k составляют геометрическую прогрессию

$$x_0 = 1,\ x_1 = q,\ x_2 = q^2, \ldots,\ x_k = q^k, \ldots$$

Тогда, по только что доказанному, площади

$$S_{x_0}^{x_1},\ S_{x_1}^{x_2}, \ldots,\ S_{x_{k-1}}^{x_k}, \ldots$$

криволинейных трапеций, построенных на образовавшихся отрезках, будут равны между собой. Общее значение этих площадей обозначим через S:

$$S = S_{x_0}^{x_1} = S_{x_1}^{x_2} = \ldots = S_{x_{k-1}}^{x_k} = \ldots$$

Обозначим теперь через S_k площадь криволинейной трапеции, построенной на отрезке $(1,\ x_k)$: $S_k = S_1^{x_k}$. Эта площадь, как видим, состоит из k, равных по площади, полос, и потому

$$S_k = kS.$$

Если, при движении точки по гиперболе, эта точка последовательно занимает положения, абсциссы которых образуют геометрическую прогрессию

$$1,\ q,\ q^2, \ldots,\ q^k, \ldots$$

(с произвольным знаменателем q), то площади S_k криволинейных трапеций, ограниченных гиперболой, осью абсцисс и ординатами движущейся точки в ее начальном и одном из последовательных положений, образуют арифметическую прогрессию

$$0,\ S,\ 2S,\ 3S, \ldots,\ kS, \ldots$$

3. Обозначим теперь через $S(x) = S_1^x$ площадь под гиперболой, построенную на произвольном отрезке $(1,\ x)$, где $x \geqslant 1$.

Обозначим через e такое число, что $S(e) = 1$. Если за знаменатель геометрической прогрессии, рассмотренной в предыдущем пункте, принять число $q = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$, (где n — любое целое положительное число), то по доказанному

$$S(q^n) = nS(q). \tag{*}$$

Но так как $q^n = e$ и $S(q^n) = S(e) = 1$, то написанное равенство примет вид

$$1 = nS\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$$

или

$$S\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}.$$

Полагая теперь в предыдущем равенстве (*) $q = e^{\frac{1}{n}}$ и заменяя число n любым другим натуральным m, получим

$$S\left(e^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}.$$

Это равенство выражает факт фундаментального значения. Замечая, что при $x = e^{\frac{m}{n}}$ дробь $\frac{m}{n}$ является логарифмом числа x по основанию e, т. е. $\frac{m}{n} = \log_e x$, мы можем прочитать доказанное равенство так: площадь $S(x)$ под гиперболой $y = \frac{1}{x}$, над отрезком $(1, x)$ оси абсцисс равна логарифму абсциссы x конца этого отрезка. Основанием логарифмов при этом служит некоторое число e, для которого $S(e) = 1$. Итак,

$$S(x) = \log_e x.$$

Но это равенство пока доказано лишь для случая, когда логарифм числа x является рациональным числом. Нетрудно, однако, освободиться от этого ограничения. Для этого прежде всего надо обратить внимание на то, что следует разуметь под числом e^t, когда t есть любое вещественное, предполагая известным, что при натуральных m и n: $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$. Для числа t можно найти приближенные рациональные значения с любой степенью точности, т. е. при любом натуральном n можно найти такое натуральное m, что

$$\frac{m}{n} \leqslant t < \frac{m+1}{n}.$$

Между значениями, какие принимают $e^{\frac{m}{n}}$ и $e^{\frac{m+1}{n}}$ при всех натуральных n, заключено единственное вещественное число, так как при достаточно больших n $e^{\frac{m+1}{n}}$ и $e^{\frac{m}{n}}$ отличаются произвольно мало. Это число и принимают за e^t. Итак, если

$$\frac{m}{n} \leqslant t < \frac{m+1}{n}, \text{ то и } e^{\frac{m}{n}} \leqslant e^t < e^{\frac{m+1}{n}}.$$

Так как при смещении крайней ординаты вправо площадь под гиперболой возрастает, то при прежних условиях

$$S\left(e^{\frac{m}{n}}\right) \leqslant S(e^t) < S\left(e^{\frac{m+1}{n}}\right).$$

Но по доказанному $S\left(e^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}$ и $S\left(e^{\frac{m+1}{n}}\right) = \frac{m+1}{n}$. Тогда

$$\frac{m}{n} \leqslant S(e^t) < \frac{m+1}{n}.$$

Так как это неравенство справедливо при любом натуральном n, и единственным вещественным числом, заключенным при этом между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, является t, то

$$S(e^t) = t.$$

Обозначая $x = e^t$, а потому $t = \log_e x$, мы и получаем

$$S(x) = \log_e x.$$

4. Теперь нам остается выяснить, что представляет собой число e, для которого $S(e) = 1$.

Для этого подразделим интервал $(1, e)$ на n частей, вставив числа $x_к$

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = e$$

так, чтобы они составили геометрическую прогрессию. Тогда, обозначая знаменатель этой прогрессии через q, получим

$$e = x_n = q^n.$$

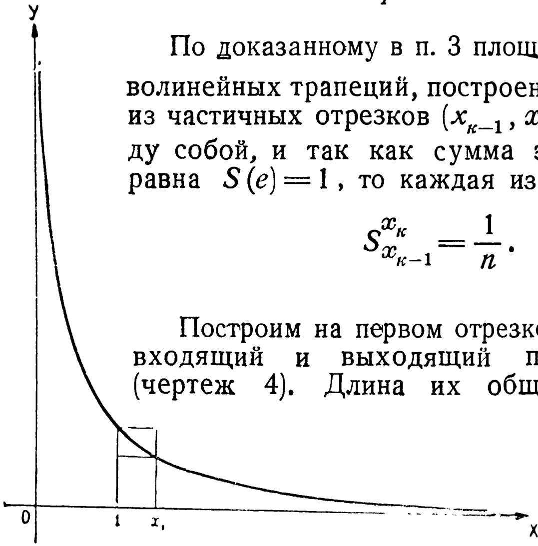
Откуда

$$q = e^{\frac{1}{n}}.$$

По доказанному в п. 3 площади $S_{x_{к-1}}^{x_к}$ криволинейных трапеций, построенных на каждом из частичных отрезков $(x_{к-1}, x_к)$, равны между собой, и так как сумма этих площадей равна $S(e) = 1$, то каждая из них

$$S_{x_{к-1}}^{x_к} = \frac{1}{n}.$$

Построим на первом отрезке $(1, x_1 = 1e^{\frac{1}{n}})$ входящий и выходящий прямоугольники (чертеж 4). Длина их общего основания



Чертеж 4.

равна $e^{\frac{1}{n}} - 1$, а высоты равны $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{1}{n}}$ и $x_0 = 1$.

Тогда, сравнивая площади этих прямоугольников с площадью под гиперболой, получим:

$$\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)e^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1$$

или

$$1 - e^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Из этих неравенств мы желаем получить границы, в каких заключено число e. Из правого неравенства имеем

$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}},$$

а значит

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)<e,$$

а из левого неравенства:

$$1-\frac{1}{n}<e^{-\frac{1}{n}}$$

или

$$\frac{n-1}{n}<\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}.$$

Переходя к обратным числам, получим:

$$e^{\frac{1}{n}}<\frac{n}{n-1}.$$

Так как n произвольно, то заменим его через $n+1$, тогда

$$e^{\frac{1}{n+1}}<\frac{n+1}{n}$$

или

$$e^{\frac{1}{n+1}}<1+\frac{1}{n},$$

значит,

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Сопоставляя это неравенство с полученным выше, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Разность между крайними частями неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n}e$$

при достаточно большом n может стать произвольно малой. Поэтому каждое из выражений $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ при больших значениях n можно рассматривать как приближенные значения числа e, т. е.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Таким образом мы установили, что число e, при котором площадь под гиперболой $S(e)=1$, является ничем иным, как уже знакомым нам «Неперовым» числом.

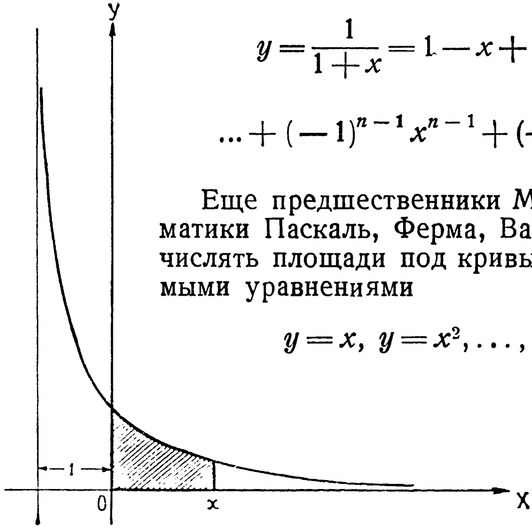
Установленная выше связь между логарифмами по основанию e и площадью под гиперболой дала повод называть эти логарифмы гиперболическими. Их принято обозначать не $\log_e x$, а $\ln x$, имея в виду их обычное название «натуральные» логарифмы.

Открытие Сен-Винсена было использовано Николаем Меркатором (1620 — 1687). Он был голштинец родом, эмигрировавший в Англию, где занимался математикой и был избран в члены Лондонского королевского общества. В 1667 г. Николай Меркатор опубликовал свое сочинение «Логарифмотехника», в котором дал новый, более совершенный способ вычисления логарифмов, основанный на открытиях Сен-Винсена.

Возьмем гиперболу $y=\frac{1}{x}$ и заменим в ее уравнении x через $1+x$, т. е. станем обозначать через x не расстояние точки кривой от ее вертикальной асимптоты, а расстояние от прямой, параллельной прежней, проходящей на 1 правее. Тогда уравнение примет вид $y=\frac{1}{1+x}$. Площадь $S^*(x)$ над отрезком (O, x) (чертеж 5) в новых координатах будет равна.

$$S^*(x)=\ln(1+x).$$

Ординату $y=\frac{1}{1+x}$ можно приближенно представить в виде многочлена, который получим, деля 1 на $1+x$, до некоторой степени x^{n-1}. Полученный при этом остаток $\pm x^n$ будет произвольно мал при достаточно высоких степенях n, если $|x|<1$. Тогда



$$y=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

Еще предшественники Меркатора, математики Паскаль, Ферма, Валлис умели вычислять площади под кривыми, определяемыми уравнениями

$$y=x,\ y=x^2,\ldots,\ y=x^n.$$

Чертеж 5

При помощи этих приемов можно было получить, что площадь под кривой, определяемой уравнением

$$y=1-x+x^2-\ldots\pm x^{n-1}$$

от точки $x=0$ до некоторой точки x будет выражаться формулой

$$S=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^n}{n}.$$

Это выражение при $|x|<1$ и даст приближенное значение площади под гиперболой

$$y=\frac{1}{1+x},\ \text{т. е. для}\ \ln(1+x).$$

Итак,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{x^n}{n}\mp R_n,$$

где остаток R_n при достаточно больших значениях n произвольно мал.

Полученное Меркатором выражение для $\ln(1+x)$ позволяет непосредственно вычислять логарифмы с любой степенью точности *).

Дальнейшее, завершающее развитие теория логарифмов получила в трудах знаменитого петербургского академика Леонарда Эйлера (1707—1783). Ему принадлежит общее определение логарифмической функции, как функции обратной показательной (он ввел обозначение e для Неперова числа) и распространение понятия логарифма на случай логарифмов от комплексных чисел.

Мы проследили за развитием понятия и способов вычисления логарифмов. Мы видели, что это понятие было создано для удовлетворения потребностей вычислительной практики асторонома-наблюдателя. Дальнейшее развитие этого понятия не только дало мощное вычислительное средство, но и само послужило к развитию новых методов математического анализа. История логарифмов служит одним из бесчисленных подтверждений мысли о взаимоотношении теории и практики, блестяще выраженной великим русским математиком П. Л. Чебышевым: «Практика предлагает вопросы существенно новые для науки и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще больше приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике».

---

*) В самом деле: любое положительное число z может быть представлено в виде $z = \frac{1+x}{1-x}$, где $x = \frac{z-1}{z+1}$ является правильной (положительной или отрицательной) дробью. Например, при $z = 1{,}5$ $x=0.2$. Умея вычислить $\ln(1+x)$, а потому и $\ln(1-x)$ при $(x) < 1$, мы вычислим и $\ln z = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.