

А.А.ХАРКЕВИЧ



НЕЛИНЕЙНЫЕ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ
ЯВЛЕНИЯ
В РАДИОТЕХНИКЕ

А. А. ХАРКЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РАДИОТЕХНИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

Книга является кратким и доступным теоретическим введением в «нелинейную» радиотехнику, к которой относятся такие важнейшие радиотехнические процессы, как генерирование электрических колебаний, умножение и деление частоты, выпрямление и детектирование, модуляция и преобразование частоты.

Книга может служить пособием для студентов, изучающих теоретические основы радиотехники. Она может быть полезной также и для радиоинженеров.

Харкевич Александр Александрович

Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике

Редактор *А. И. Костиенко*

Техн. редактор *Н. А. Туиаркина*. Корректор *И. Л. Едская*.

Сдано в набор 6/VII 1956 г. Подписано к печати 9/X 1956 г.
Бумага 84×108/₃₂. Физ. печ. л. 5,75. Условн. печ. л. 9,43. Уч.-изд. л. 9,04.
Тираж 20 000 экз. Т-08762. Цена книги 6 р. Заказ 1308.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград. Измайловский пр., 29.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
§ 1. Характеристика предмета	5
§ 2. Обзор методов нелинейной теории	7
Глава I. Нелинейные цепи и основные нелинейные процессы	12
§ 3. Нелинейная цепь	12
§ 4. Стабилизация тока и напряжения	17
§ 5. Преобразование спектра в нелинейной цепи	19
§ 6. Умножение частоты	21
§ 7. Линеаризация и нелинейные искажения	23
§ 8. Выпрямление	28
§ 9. Детектирование	32
§ 10. Детектирование ЧМ и ИМ	44
§ 11. Модуляция	47
§ 12. Нелинейный способ получения АМ	51
§ 13. Практические схемы модуляции	55
§ 14. Преобразование частоты	61
Глава II. Генерирование колебаний	64
§ 15. Автоколебания	64
§ 16. Энергетика автоколебаний; динамическая устойчивость	66
§ 17. Условие самовозбуждения генератора	69
§ 18. Комплексная обратная связь	71
§ 19. Инженерные критерии устойчивости	73
§ 20. Установившийся режим генератора	82
§ 21. Установление колебаний в генераторе	89
§ 22. Инерционная нелинейность	94
§ 23. Фазовая плоскость	97
§ 24. Фазовые портреты генераторов	101
§ 25. Графические методы	104
§ 26. Некоторые схемы генераторов	109
§ 27. RC-генераторы синусоидальных колебаний	113
§ 28. Генераторы сверхвысоких частот	116
§ 29. Релаксационные автоколебания	121
§ 30. Релаксационные генераторы	125

Глава III. Нелинейные системы под внешним воздействием	130
§ 31. Работа выпрямителя	130
§ 32. Резонанс в нелинейной цепи	134
§ 33. Автоколебательная система под внешним воздействием	138
§ 34. Захватывание	144
§ 35. Регенеративный приемник	147
§ 36. Импульсная синхронизация	149
§ 37. Синхронизация релаксационного генератора	152
Глава IV. Параметрические явления	157
§ 38. Синхронное детектирование	157
§ 39. Фазовое детектирование и разделение	162
§ 40. Краткие сведения об уравнении Матъё	166
§ 41. Параметрическое возбуждение	169
§ 42. Деление частоты	176
§ 43. Регенеративное деление частоты	180

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Характеристика предмета

Эта книга посвящена нелинейным и параметрическим явлениям, используемым в радиотехнике.

Такая терминология относится к физическим особенностям изучаемых явлений, особенностям, находящим отражение в математических уравнениях, которыми мы описываем поведение тех или иных радиотехнических устройств.

Явления, с которыми нам приходится иметь дело в радиотехнике, описываются математическими уравнениями следующих трех видов:

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами,
2. Линейные уравнения с переменными коэффициентами,
3. Нелинейные уравнения.

Свойства и способы решения этих трех видов уравнений существенно различны; этим и обусловлено традиционное деление курса радиотехники на «линейную» и «нелинейную» части.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами — самый простой тип уравнений, теория которых детально разработана и для решения которых существуют мощные общие методы (например, методы интегралов Фурье и Дюамеля). Эти общие методы основаны на применении принципа наложения (суперпозиции). Нужно заметить, что применимость принципа наложения служит *определением* линейной системы, т. е. системы, описываемой линейным уравнением как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Общий вид однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами таков:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — постоянные величины, откуда и название этого типа уравнений.

Линейные уравнения с переменными коэффициентами характеризуются тем, что коэффициенты уравнения *зависят от аргумента t* , т. е. являются заданными функциями времени. Теория этих уравнений более сложна и менее разработана. Этим главным образом оправдывается отнесение явлений, описываемых уравнениями с переменными коэффициентами, к «нелинейной» радиотехнике. С физической точки зрения уравнения с переменными коэффициентами описывают поведение систем, *параметры* которых так или иначе изменяются во времени; такие системы и происходящие в них явления будем кратко называть *параметрическими*. Примеры уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ty = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a + 2q \cos 2t)y = 0.$$

Последнее уравнение носит название уравнения Матьё; оно играет большую роль в теоретической радиотехнике.

Наконец, нелинейные уравнения отличаются тем, что их коэффициенты *зависят от функции* или ее производных. Это наиболее трудный для решения тип уравнений; некоторые общие приемы будут рассмотрены ниже применительно к тем или иным радиотехническим проблемам.

Примеры нелинейных уравнений:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay^3 = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f\left(\frac{dy}{dt}\right) + y = 0.$$

Последнее уравнение имеет довольно общий характер; оно встретится нам в теории лампового генератора.

Математическая сторона дела интересует нас потому, что при помощи математического анализа мы можем провести количественное исследование различных радиотехнических

устройств, и, в конечном счете, построить систему *расчета* этих устройств. Что же касается физической и технической стороны дела, то нужно сказать, что к нелинейным и параметрическим явлениям относятся важнейшие для радиотехники явления и процессы. Вот краткий перечень этих процессов: генерирование электрических колебаний, умножение и деление частоты, выпрямление и детектирование, модуляция и преобразование частоты.

Итак, многие важные радиотехнические процессы относятся к нелинейным и параметрическим явлениям. Они описываются нелинейными уравнениями или уравнениями с переменными коэффициентами. Эти уравнения и составляют математический аппарат «нелинейной» радиотехники.

§ 2. Обзор методов нелинейной теории

Как указывалось в предыдущем параграфе, принцип наложения, составляющий основу линейной теории, неприменим для исследования явлений в нелинейных системах. Поясним коротко это положение.

Начнем со случаев линейной системы, описываемой линейным алгебраическим уравнением

$$y = ax.$$

Здесь x и y — функции времени; x означает воздействие на систему, а y — ее отклик. Принцип наложения состоит в том, что если на систему оказывается воздействие

$$x = x_1 + x_2,$$

то отклик системы будет

$$y = ax = a(x_1 + x_2) = y_1 + y_2,$$

т. е. действия обоих слагаемых x_1 и x_2 независимы. Это можно выразить краткой формулой: действие суммы причин равно сумме действий каждой причины, отдельно взятой. Так, например, ток в линейной цепи при действии нескольких э. д. с. определяется суммой токов, порождаемых каждой из э. д. с. в отсутствие других.

Принцип наложения лежит в основе общих методов решения многочисленных задач линейной теории. Мы настолько привыкаем к постоянному применению этого принципа, что,

переходя к исследованию нелинейных проблем, нужно специально напомнить о неприменимости принципа наложения к нелинейным явлениям. Упустив это обстоятельство из вида, можно наделать грубых ошибок.

Поясним это на простом примере. Пусть дана нелинейная, а именно квадратичная зависимость

$$y = ax^2.$$

Пусть, далее,

$$x = x_1 + x_2.$$

Тогда

$$y_1 = ax_1^2, \quad y_2 = ax_2^2.$$

Но

$$y = a(x_1 + x_2)^2 = ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2 \neq y_1 + y_2,$$

т. е. квадрат суммы не равен сумме квадратов. Поэтому, например, при действии в нелинейной цепи суммы нескольких э. д. с. мы уже не можем свести решение задачи к суммированию токов, порождаемых каждой э. д. с. в отдельности; приходится учитывать сразу все составляющие э. д. с.

Понятно, что положение еще более усложнится, когда мы перейдем от нелинейных алгебраических соотношений к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Вынужденный отказ от принципа наложения наносит тяжелый урон возможностям исследования. К сожалению, таких мощных и универсальных методов исследования, какими располагает линейная теория, нелинейная теория пока не знает. Арсенал орудий исследования нелинейных проблем составляет из ряда специализированных приемов и методов, имеющих различную силу и область применения. Ниже дана краткая предварительная характеристика этих методов; в дальнейшем нам предстоит познакомиться с ними в их действии применительно к различным радиотехническим проблемам.

1. Алгебраическая задача нахождения $y(t)$ по заданному $x(t)$ и по заданной нелинейной характеристике

$$y = f(x)$$

может быть всегда решена с любой степенью точности путем графического построения.

2. Та же задача может быть решена и аналитически, т. е. может быть найдена функция

$$y(t) = f[x(t)],$$

если дано аналитическое выражение характеристики системы

$$y = f(x).$$

При этих условиях возможно (но далеко не всегда) решение и дифференциального уравнения.

3. Нужно заметить, что очень часто характеристика системы известна нам из опыта, т. е. задана нам графиком или табличными данными. Нахождение аналитического выражения, достаточно точно представляющего действительную зависимость, является, таким образом, очень важной операцией в нелинейной теории. Эту операцию называют *аппроксимацией* нелинейной характеристики.

Аппроксимация должна по возможности удовлетворять следующим требованиям: а) аналитическое выражение должно представлять аппроксимируемую зависимость с достаточной точностью, б) оно должно допускать выполнение над ним требуемых математических операций и в) оно должно быть как можно более кратким. Существующие методы аппроксимации всем этим пожеланиям одинаково хорошо, к сожалению, не отвечают. Применяются следующие главнейшие методы: а) аппроксимация степенным многочленом, б) аппроксимация ломаной линией, в) аппроксимация трансцендентными функциями.

Первый метод состоит в том, что функция

$$y = f(x)$$

представляется в виде

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k.$$

Число членов степенного многочлена определяется требуемой точностью. Во всяком случае, приближение должно быть достаточным, чтобы правильно отобразить хотя бы основные качественные черты явления. Это замечание относится, конечно, ко всякой аппроксимации.

Аппроксимация ломаной линией, называемая также кусочно-линейной аппроксимацией, состоит в том, что график действительной зависимости заменяется ломаной, тем лучше

представляющей характеристику, чем больше берется точек излома. Аппроксимация ломаной особенно удобна для представления характеристик выпрямителей, работы лампы «с отсечкой» и т. п. Этот вид аппроксимации интересен тем, что позволяет воспользоваться специальным методом решения нелинейного дифференциального уравнения — так называемым «методом сшивания». Сущность этого метода состоит в том, что поведение нелинейной системы представляется различными *линейными* уравнениями для различных интервалов значений переменной величины, в пределах которых нелинейная характеристика представлена отрезком прямой. Решения линейных уравнений нужно затем «сшить» на границах интервалов, т. е. приравнять конечные значения для одного интервала начальным значениям для другого.

Что касается аппроксимации трансцендентными функциями, — например, экспоненциальными или гиперболическими, то этот метод позволяет получить очень компактные и в то же время дающие очень хорошее приближение аппроксимирующие выражения, но, к сожалению, дальнейшая аналитическая обработка этих выражений сильно затруднена.

4. Большую роль в нелинейной радиотехнике играют так называемые «квазилинейные» методы. Сущность этих методов сводится, вкратце, к тому, что уравнение нелинейной системы заменяется линейным по форме уравнением; однако в качестве коэффициентов этого уравнения вводятся некоторые *средние* параметры, определенные с учетом имеющейся в действительности нелинейности. Поэтому средние значения параметров оказываются зависящими от величин, характеризующих режим системы. Квазилинейные методы особенно удобны для исследования *установившихся режимов* нелинейных систем, когда мы имеем дело с колебаниями, близкими к синусоидальным.

5. При исследовании *режимов установления* хорошую службу служит также относящийся к квазилинейным *метод медленно меняющихся амплитуд*. Общая идея этого метода состоит в том, что, исследуя вопросы установления колебаний в том или ином радиотехническом устройстве, мы интересуемся законом изменения амплитуды и частоты, предполагая, что эти величины изменяются медленно. Это обстоятельство позволяет нам заметно упростить задачу. При известных предположениях (подробнее об этом говорится ниже) мы получаем обычно уравнение порядка на единицу ниже исходного. Метод

медленно-меняющихся амплитуд применяется главным образом в случаях, когда наперед известно, что форма колебаний близка к синусоидальной.

6. Наиболее общим методом является, пожалуй, графический метод построения интегральных кривых данного нелинейного дифференциального уравнения. Этот метод известен под названием *метода построения поля направлений*. Сущность и техника применения этого метода будут изложены ниже; пока заметим лишь, что метод позволяет решать нелинейные задачи наиболее общего характера; он годится как для установившихся, так и для неустойчивых режимов, как для синусоидальных, так и для резко несинусоидальных — так называемых релаксационных — колебаний. Удобный вариант метода, сводящий нахождение наклона интегральной кривой к чисто геометрическому построению, известен под названием *построения Льенара*.

7. Наконец, общим методом, позволяющим (иногда с исключительной простотой) сделать важные заключения общезначимого характера, является *энергетический метод*. Сущность этого метода состоит в рассмотрении энергетического баланса нелинейной системы, т. е. в прямом применении закона сохранения энергии. Этот метод не всегда позволяет разъяснить детали, но дает нам надежные общие соотношения, относящиеся к существу явления.

Таков, вкратце, перечень орудий исследования, которыми нам предстоит воспользоваться в дальнейшем.

ГЛАВА I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ И ОСНОВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В этой главе рассматриваются те вопросы нелинейной теории, математическое описание которых может быть (хотя бы в первом приближении) сведено к недифференциальным (т. е. алгебраическим и трансцендентным) нелинейным уравнениям. Вопросы же, для рассмотрения которых требуется решение нелинейных *дифференциальных* уравнений и являющиеся, очевидно, более сложными, разбираются в последующих главах.

§ 3. Нелинейная цепь

Простейшая нелинейная цепь содержит, кроме источника э. д. с., нелинейное сопротивление, т. е. элемент, сопротивление которого не является постоянной величиной, а зависит от тока. Предполагается, что реактивных элементов, т. е. емкостей и индуктивностей, в цепи нет. Поэтому уравнение такой нелинейной цепи будет уравнением алгебраическим (а не дифференциальным).

Свойства нелинейного сопротивления выражаются непосредственно зависимостью тока I , протекающего через сопротивление, от напряжения U на его концах. Эта зависимость носит название вольтамперной характеристики и может быть записана как

$$I = f(U).$$

Задавшись напряжением в функции времени, можем найти ток также как функцию времени. Это делается или графически, или аналитически. Графическое построение показано на рис. 1. В левой части рисунка изображены: сверху — характеристика нелинейного сопротивления $I = f(U)$, снизу —

$U = U(t)$ (выбрано синусоидальное напряжение). График $I = I(t)$ получается построением, аналогичным построению третьей проекции по двум данным (на рис. 1 — справа). Построение ясно из чертежа. Заметим сразу, что форма кривой тока отличается от формы кривой напряжения. Это типично для нелинейной цепи и имеет очень большое значение. Формы кривых напряжения и тока были бы подобны только в случае линейной цепи; в этом случае вольтамперная характеристика представлялась бы прямой линией.

На рис. 1 на синусоидальное напряжение наложено еще постоянное напряжение U_0 . Оно определяет постоянную составляющую тока I_0 в отсутствие колебаний. Точка на характеристике с координатами (U_0, I_0) называется

рабочей точкой. Изменяя U_0 , можно перемещать рабочую точку по характеристике. Выбор рабочей точки определяется желаемым результатом, как будет видно из дальнейшего. Отметим, что постоянная составляющая тока при колебаниях (I' на рис. 1) отличается от тока покоя I_0 . Это также типично для нелинейной цепи.

Легко решается графически вопрос о распределении напряжений в цепи, в которой последовательно включены обычное (линейное, т. е. постоянное) сопротивление R и нелинейное сопротивление, определенное своей вольтамперной характеристикой. Соответствующее построение показано на рис. 2.

Вольтамперная характеристика нелинейного сопротивления построена, как обычно, в координатах (I, U) . Из точки на оси абсцисс, соответствующей приложенному к цепи напряжению, проведена прямая под углом α к вертикальной оси. Эта прямая изображает вольтамперную характеристику линейного

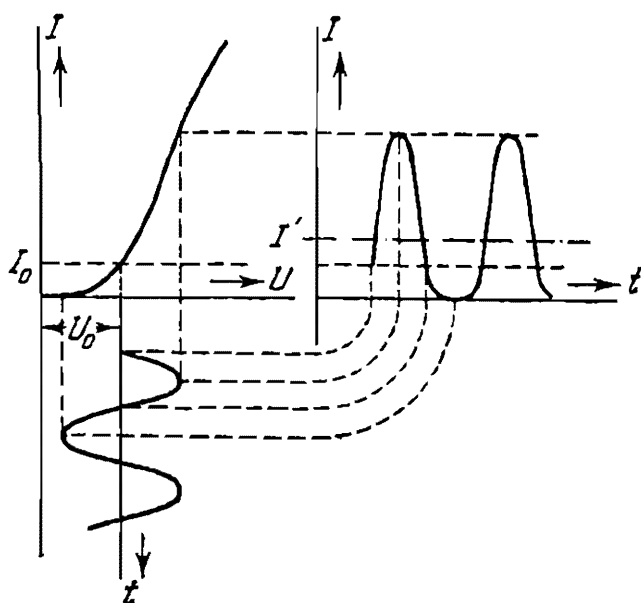


Рис. 1.

сопротивления R ; ее наклон ($\operatorname{tg} \alpha$) непосредственно выражает величину сопротивления и численно равен R .

Координаты точек пересечения прямой с вольтамперной характеристикой определяют, во-первых, ток в цепи, а во-вторых,

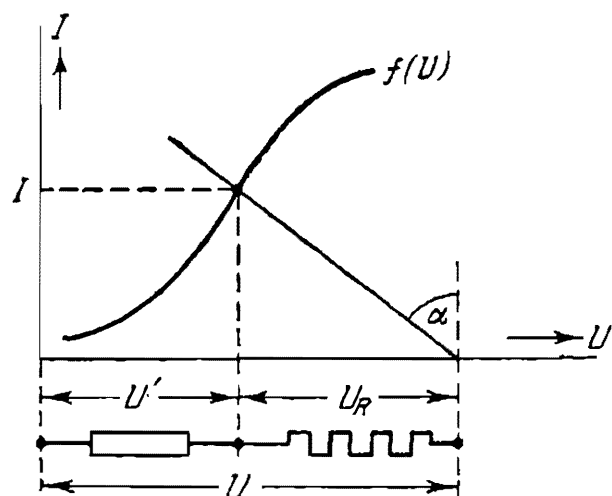


Рис. 2.

распределение напряжений на элементах цепи, как показано на рис. 2. (U_R означает падение напряжения на линейном сопротивлении, а U' — на нелинейном).

Аналогично решается задача о распределении напряжений в случае соединения двух нелинейных сопротивлений.

Если число нелинейных сопротивлений, включенных в цепь, больше

двух, то построение целесообразно изменить. На рис. 3 показаны три вольтамперные характеристики. Если нелинейные сопротивления включены параллельно, то вольтамперная характеристика результирующего сопротивления получается координатным сложением характеристик. Если же сопротивления включены последовательно, то результирующая характеристика получается поабсциссным сложением всех характеристик.

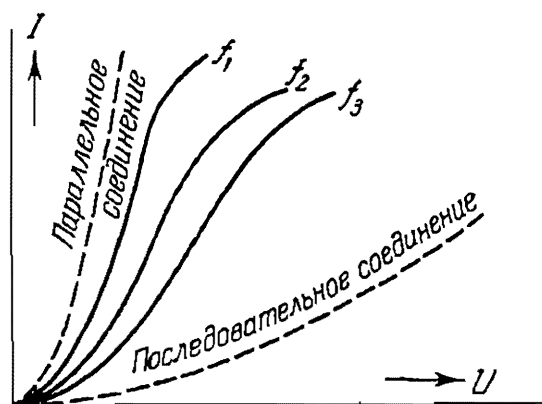


Рис. 3.

Теперь нам нужно заняться вопросом об определении нелинейного сопротивления. Простое линейное сопротивление определяется как отношение падения напряжения на нем к протекающему через него току, т. е.

$$R = \frac{U}{I}.$$

Это — постоянная величина, и определение не требует никаких дополнений. Но нелинейное сопротивление — величина переменная, и ее можно определить по-разному. На рис. 4 изображена вольтамперная характеристика нелинейного сопротивления. Если подать на сопротивление постоянное напряжение U_0 , то получим постоянный ток I_0 ; отношение этих величин можно назвать *сопротивлением постоянному току*:

$$R_{\sim} = \frac{U_0}{I_0} (= \operatorname{tg} \alpha).$$

Графически $R_{\sim}$ определяется наклоном секущей; ясно, что эта величина зависит от приложенного напряжения U_0 .

Положим теперь, что на постоянное напряжение наложено небольшое переменное напряжение ΔU . Приращение напряжения ΔU вызывает приращение тока ΔI . Вводят определение *сопротивления переменному току*, как предела

$$R_{\sim} = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{f'(U)} (= \operatorname{tg} \beta).$$

Определенную таким образом величину называют также дифференциальным сопротивлением. Графически сопротивление переменному току выражается наклоном касательной к вольт-амперной характеристике в рабочей точке, как показано на рис. 4. Ясно, что сопротивления постоянному и переменному току не равны (они равны только для линейного сопротивления). Более того: сопротивление постоянному току всегда конечно и положительно, тогда как сопротивление перемен-

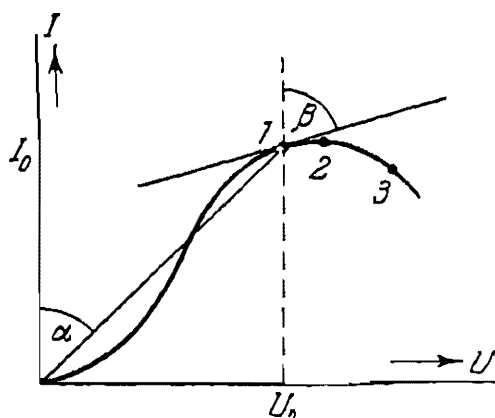


Рис. 4.

ному току может быть равно нулю, бесконечности (точка 2 на рис. 4, в которой касательная к кривой $f(U)$ горизонтальна, т. е. конечному приращению напряжения соответствует нулевое приращение тока) и даже становиться отрицательным (точка 3 на рис. 4, в которой положительному приращению напряжения соответствует отрицательное приращение тока). Понятие отрицательного сопротивления играет в радиотехнике очень большую роль. Как мы увидим дальше,

отрицательное сопротивление может рассматриваться как источник энергии, тогда как положительное сопротивление является ее потребителем.

Кроме названных сопротивлений постоянному и переменному току, вводится еще одно важное определение, а именно определение *среднего сопротивления*. Это определение учитывает нелинейность особым образом. Положим, что через нелинейное сопротивление протекает синусоидальный ток.

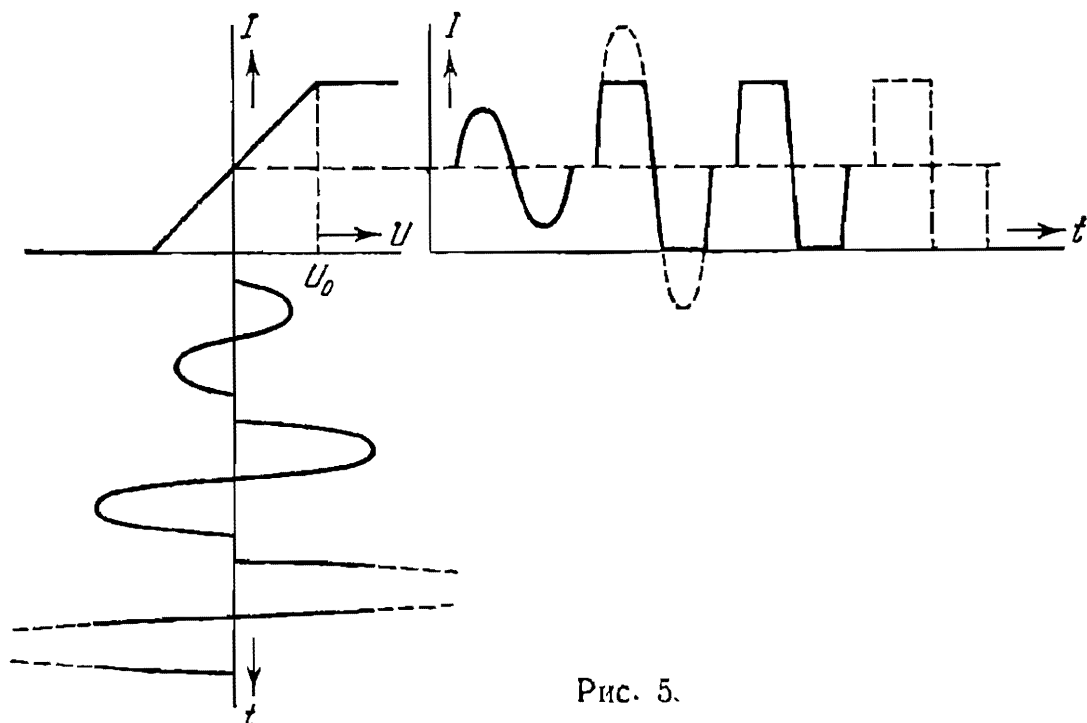


Рис. 5.

Вследствие нелинейности напряжение на сопротивлении будет несинусоидально. Однако напряжение будет периодическим, и основная частота его будет равна частоте тока. Если взять теперь амплитуду первой гармоники напряжения и отнести ее к амплитуде тока, то это отношение и определит то, что мы называем средним сопротивлением. Таким образом, определение среднего сопротивления связано с нахождением первой гармоники периодического отклика нелинейной системы на синусоидальное воздействие. К сожалению, среднее сопротивление не может быть определено графически по вольт-амперной характеристике. Его находят чаще всего аналитически, располагая аппроксимирующим характеристику выражением.

Все три приведенные выше определения могут применяться не только к сопротивлению, но и к другим параметрам, постоянным в линейной системе и переменным в не-

линейной. Так, например, можно говорить о проводимости для постоянного тока, проводимости для переменного тока и средней проводимости. В радиотехнике широко применяется понятие *средней крутизны* электронной лампы. Эта величина определяется как отношение амплитуды первой гармоники анодного тока к амплитуде синусоидального напряжения на управляющей сетке. Чтобы составить себе представление о зависимости средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения, рассмотрим рис. 5. На этом рисунке представлена характеристика триода, аппроксимированная ломаной линией. Рабочая точка выбрана посередине наклонного участка. При увеличении амплитуды управляющего напряжения крутизна остается постоянной, пока сеточное напряжение не выходит за пределы прямолинейного участка характеристики. При этом анодный ток (переменная составляющая) синусоидален. При дальнейшем увеличении амплитуды напряжения на сетке синусоида анодного тока усекается сверху и снизу. В пределе мы получим в анодной цепи импульсы прямоугольной формы: амплитуда первой гармоники анодного тока остается неизменной при неограниченном росте амплитуды напряжения на сетке U_{gm} . Значит, средняя крутизна S_{cp} стремится к нулю, как показано на рис. 6. В действительности характеристика лампы представляется кривой линией, а потому средняя крутизна изменяется плавно. В дальнейшем нам предстоит вычислить среднюю крутизну при степенной аппроксимации характеристики триода.

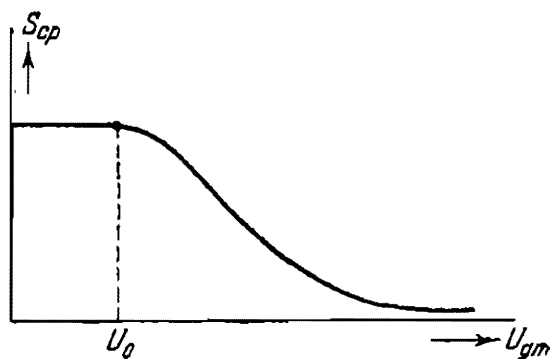


Рис. 6.

§ 4. Стабилизация тока и напряжения

Простейшим применением нелинейных сопротивлений является стабилизация тока и напряжения, широко применяемая в источниках питания радиотехнических устройств.

Задача стабилизации состоит в уменьшении колебаний тока и напряжения в условиях изменяющейся нагрузки или непостоянства напряжения сети. Если бы все сопротивления

в цепи были линейны, то относительные изменения тока и напряжения были бы пропорциональны друг другу. Нарушить эту пропорциональность — в чем и состоит задача — можно только путем применения нелинейных элементов.

Положим, что мы желаем стабилизировать ток накала лампы, т. е. поддержать по возможности его постоянство при изменениях напряжения источника. Для этого нужно последовательно с нитью лампы включить нелинейное сопротивление, величина которого резко возрастает с увеличением тока и напряжения. При таких условиях избыток напряжения будет почти полностью падать на нелинейном сопротивлении, а напряжение на нити, т. е. напряжение накала, а, значит, и

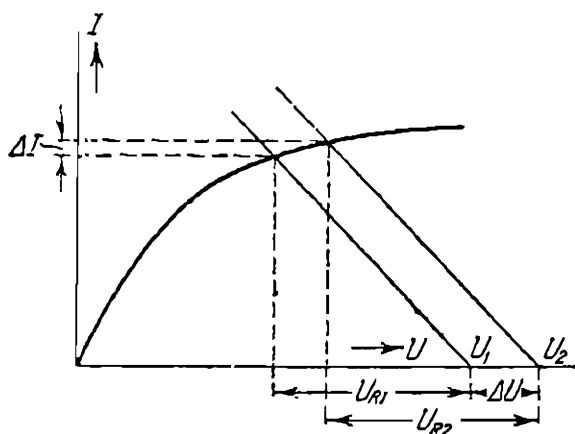


Рис. 7.

ток накала, будут изменяться незначительно. Вольтамперная характеристика стабилизатора должна, очевидно, иметь вид, показанный на рис. 7. Применяя построение рис. 2, можно проследить, как изменяется напряжение накала U_R при изменении питающего напряжения. Как видим, для стабилизации требуется, чтобы проводимость для переменного тока

(т. е. отношение $\Delta I / \Delta U$) была по возможности малой, т. е. сопротивление переменному току должно быть по возможности велико. Сопротивление переменному току должно быть во всяком случае велико по сравнению с последовательно включенным линейным сопротивлением; в противном случае стабилизатор не окажет действия. Примером стабилизатора может служить *барретор*, представляющий собою железную нить, помещенную в наполненный водородом баллон. Требуемый вид вольтамперной характеристики получается в барреторе за счет того, что сопротивление металлов растет с повышением температуры, которая в свою очередь зависит от тока. Железо выбрано потому, что оно обладает относительно большим температурным коэффициентом сопротивления. В качестве стабилизатора небольших токов можно с успехом применять диод в режиме, близком к насыщению.

Стабилизатор напряжения должен, очевидно, обладать обратными свойствами. Его назначение состоит в поддержании постоянства напряжения при изменениях тока. Значит, отношение $\Delta U/\Delta I$, т. е. сопротивление переменному току должно быть по возможности малым. Желательная характеристика стабилизатора показана на рис. 8. На этом же рисунке дано построение, показывающее, что большим изменениям тока соответствуют малые изменения напряжения на нагрузке, включенной последовательно со стабилизатором.

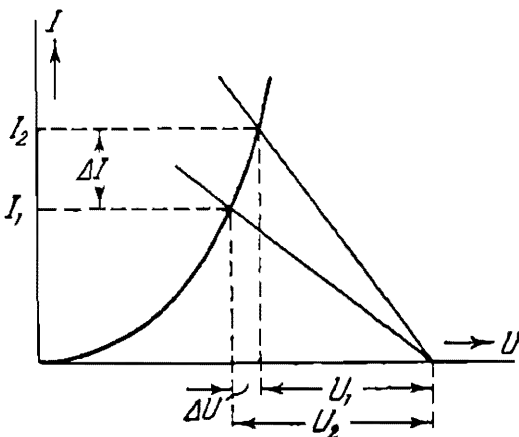


Рис. 8.

Для стабилизации напряжения применяются главным образом газоразрядные лампы. Применяются также электронные схемы стабилизации.

§ 5. Преобразование спектра в нелинейной цепи

В § 3 уже отмечалось, что синусоидальное напряжение вызывает в нелинейной цепи несинусоидальный ток. Вообще, форма тока отличается от формы напряжения. Обратно, если задан синусоидальный ток, то получается несинусоидальное напряжение.

Если рассмотреть вопрос со спектральной точки зрения, то оказывается, что спектр отклика нелинейной системы всегда отличается по составу от спектра воздействия; обычно спектр отклика богаче. Это общее положение, широко используемое в радиотехнике, мы выясним на нескольких простых примерах.

Пусть на нелинейное сопротивление с характеристикой

$$I = f(U)$$

действует синусоидальное напряжение

$$U = U_m \sin \omega t.$$

Найдем ток, для чего развернем характеристику в степенной ряд

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} a_k U^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_m^k \sin^k \omega t.$$

При возведении синуса в k -ю степень мы получаем ряд колебаний кратных частот, причем наивысшая кратность равна k . Так, квадрат синуса дает постоянную составляющую (нулевую частоту) и вторую гармонику; куб дает первую и третью гармоники, и так далее. Приводим для справок табличку степеней синуса и косинуса, которая нам пригодится и в дальнейшем:

Т а б л и ц а 1

$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x),$	$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x),$
$\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x),$	$\cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x),$
$\sin^4 x = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x),$	$\cos^4 x = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x),$
$\sin^5 x = \frac{1}{16} (10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x).$	$\cos^5 x = \frac{1}{16} (10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x),$

Из сказанного следует, что при воздействии синусоидального напряжения на нелинейное сопротивление мы получаем *в общем случае* ток с бесконечным спектром, содержащим все гармоники. В частном случае характеристика может представляться не бесконечным рядом, а конечным степенным многочленом. В этом случае и ток будет иметь ограниченный спектр, причем номер наивысшей гармоники будет определяться степенью многочлена. Так, например, при квадратичной характеристике вида

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2$$

в составе тока не будет гармоник выше второй.

Рассмотрим теперь случай, когда на нелинейное сопротивление действуют два напряжения с разными частотами, т. е. пусть

$$U = U_1 + U_2 = U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t.$$

Подставляя это выражение в формулу характеристики, получим для тока

$$I = f(U_1 + U_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t)^k.$$

Возводя двучлен в скобках в k -ю степень и группируя затем члены суммы, можно убедиться, что в составе тока образуются частоты, выражаемые общим соотношением

$$n\omega_1 \pm m\omega_2,$$

где m и n — любые целые числа, не исключая нуля. При $m = 0$ мы получаем последовательность гармоник $n\omega_1$; при $n = 0$ — гармоник $m\omega_2$. Частоты, отвечающие неравным нулю значениям m и n , называются *комбинационными частотами*. Они могут, очевидно, быть как выше, так и ниже исходных частот ω_1 и ω_2 .

§ 6. Умножение частоты

Примером использования обогащения спектра нелинейной системой может служить умножение частоты. Задача умножения частоты состоит в получении частоты, кратной исходной. Умножение частоты применяется в тех случаях, когда непосредственное генерирование требуемой частоты почему-либо неудобно.

Идея умножения крайне проста; она заключается в том, что напряжение исходной частоты действует в нелинейной цепи, в которой получается богатый гармониками ток. Гармоника желаемой кратности выделяется фильтром.

Возможная схема умножения показана на рис. 9. Синусоидальное напряжение с частотой ω приложено к сетке триода; контур в анодной цепи настроен

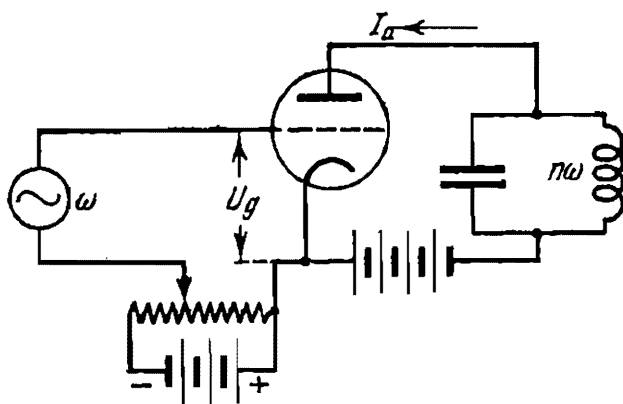


Рис. 9.

на n -ю гармонику, которая и выделяется на контуре; остальные гармоники отфильтровываются, так как контур представляет для них малое сопротивление. На сетку триода

подается регулируемое отрицательное смещение, достаточное, чтобы запереть триод. В результате этого происходит так называемая «работа с отсечкой».

Аппроксимируем характеристику триода ломаной линией, как показано на рис. 10; для наших целей это достаточное

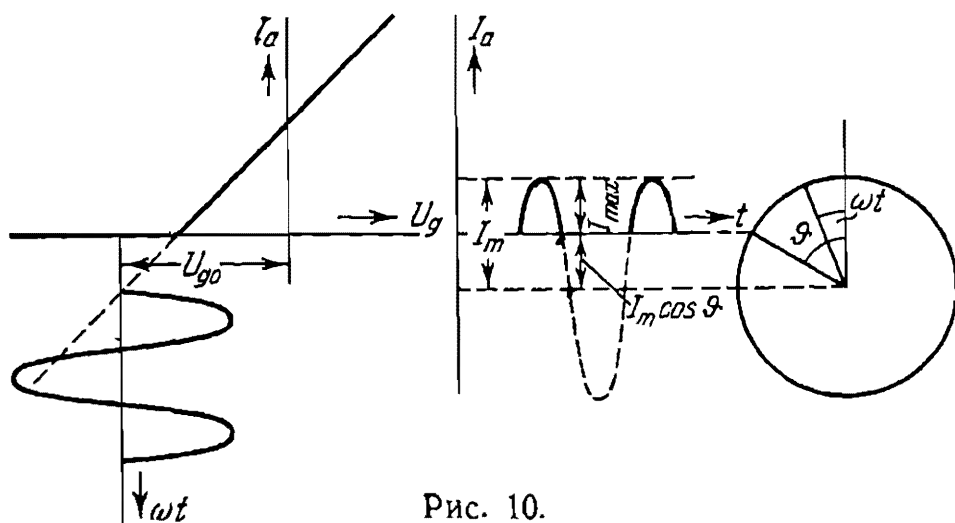


Рис. 10.

приближение. Выберем рабочую точку левее излома характеристики. При таком положении рабочей точки и синусоидальном напряжении на сетке в анодной цепи будут проходить лишь короткие импульсы тока. Остальная часть синусоиды (намеченная пунктиром) будет отсечена — отсюда и название этого режима. Режим вполне характеризуется *углом отсечки*, т. е. тем значением аргумента ωt (отсчитанным от момента, когда анодный ток имеет максимальное значение), при котором ток обращается в нуль. Зная угол отсечки, можно разложить выражение для анодного тока в ряд Фурье. Анодный ток как функцию времени можно представить в виде

$$I_a = I_m (\cos \omega t - \cos \vartheta) \quad [I_a > 0]$$

(обозначения указаны на рис. 10). Для амплитуды n -й гармоники имеем по известной формуле

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_a(\omega t) \cos n\omega t \, d\omega t = \\ &= \frac{2}{\pi} I_m \int_0^{\vartheta} \cos nx (\cos x - \cos \vartheta) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} I_m \left[\frac{\sin (n+1) \vartheta}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \vartheta}{n-1} - \frac{2 \cos \vartheta \sin n\vartheta}{n} \right] = I_m F_n(\vartheta). \end{aligned}$$

Практически может быть задано не I_m (определяемое амплитудой напряжения на сетке), а $I_{\max}$ — пиковое значение анодного тока. Между этими величинами существует очевидная связь (см. рис. 10)

$$I_{\max} = I_m (1 - \cos \vartheta).$$

Выражая теперь амплитуду n -й гармоники анодного тока через пиковое значение анодного тока, имеем

$$I_n = I_{\max} \frac{F_n(\vartheta)}{1 - \cos \vartheta} = I_{\max} f_n(\vartheta).$$

Функции угла отсечки для различных n представлены графиками рис. 11. Эти графики показывают, как следует

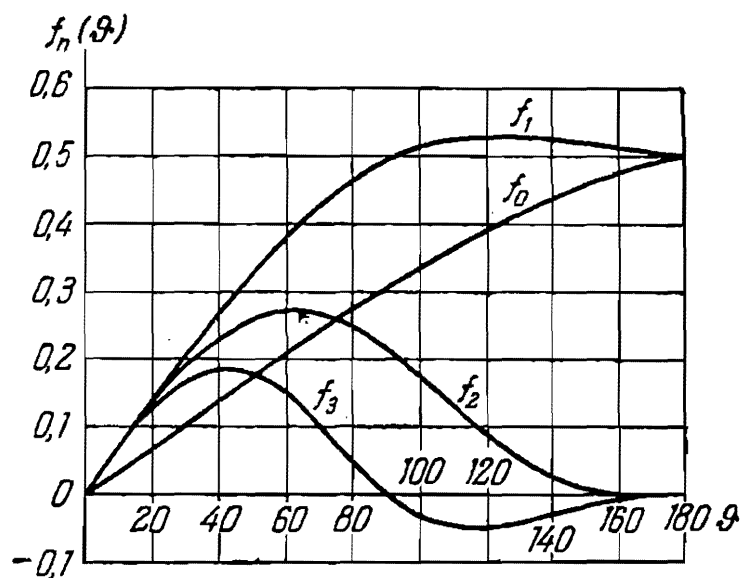


Рис. 11.

выбирать угол отсечки для получения наибольшей амплитуды желаемой гармоники. Так, например, при утроении частоты следует брать $\vartheta = 40^\circ$, при учетверении — 30° и так далее.

§ 7. Линеаризация и нелинейные искажения

Нелинейные зависимости играют в радиотехнике двойную роль. В целом ряде случаев нелинейность определяет самое существо процессов и используется для получения желаемого результата. Так обстоит дело, например, при умножении частоты, при детектировании и во многих других важных

для радиотехники случаях. Но иногда нелинейность не только не требуется для осуществления того или иного процесса, но является вредной и нежелательной. Так обстоит, например, дело при усилении.

Типичное для нелинейной системы искажение формы и, следовательно, обогащение спектра колебаний необходимо для умножения частоты. Но при усилении задача состоит как раз в обратном — в сохранении по возможности исходной формы колебания. Всякие изменения формы колебания, происходящие вследствие нелинейности тех или иных элементов схемы, называются *нелинейными искажениями*. Необходимо стремиться к их уменьшению, т. е. к устранению влияния нелинейности.

Строго линейных систем не существует; всякая реальная система нелинейна. Таким образом, линейными мы называем системы, нелинейностью которых можно при данных обстоятельствах пренебречь. Возможность пренебречь нелинейностью зависит не только от характеристики системы, но и от режима работы. Так, например, при усилении стремятся расположить рабочую точку посередине прямолинейного участка характеристики лампы, а амплитуду управляющего напряжения ограничивают так, чтобы не выходить за пределы прямолинейного участка. В действительности характеристика всегда кривая; говоря о прямолинейном участке, мы подразумеваем участок с достаточно малой кривизной.

Замена нелинейной зависимости приближенной линейной, а также и меры, направленные к улучшению приближения, — называют вообще *линеаризацией*.

Понятие о линеаризации мы поясним сперва на частном примере. Пусть дана квадратичная характеристика

$$I = aU^2.$$

Эта нелинейная зависимость никак не может быть представлена приближенной линейной. Но положим, что напряжение U состоит из постоянной слагающей U_0 и переменной слагающей ΔU , которая нас и будет интересовать. Тогда

$$I = aU^2 = a(U_0 + \Delta U)^2 = a(U_0^2 + 2U_0\Delta U + \Delta U^2).$$

Как видим, ток имеет три слагающие:

постоянную составляющую

$$I_0 = aU_0^2.$$

линейную составляющую

$$I_1 = 2aU_0\Delta U$$

и квадратичную составляющую

$$I_2 = a\Delta U^2.$$

Постоянная составляющая нас обычно не интересует. Приращение тока запишем в виде

$$\Delta I = I_1 + I_2 = 2aU_0\Delta U + a\Delta U^2 = 2aU_0\Delta U \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta U}{U_0}\right).$$

Мы вправе отбросить второе слагаемое при условии

$$\frac{\Delta U}{U_0} \ll 1,$$

т. е. линеаризация возможна с тем лучшим приближением, чем меньше ΔU и чем больше U_0 . Этот результат поясняется графиком рис. 12, из которого видно, что увеличение U_0 переводит рабочую точку на участок параболы с меньшей кривизной. Одновременно возрастает крутизна.

Уменьшение ΔU позволяет линеаризовать любую нелинейную зависимость *). Чтобы показать это, положим, что задана нелинейная характеристика общего вида

$$I = f(U).$$

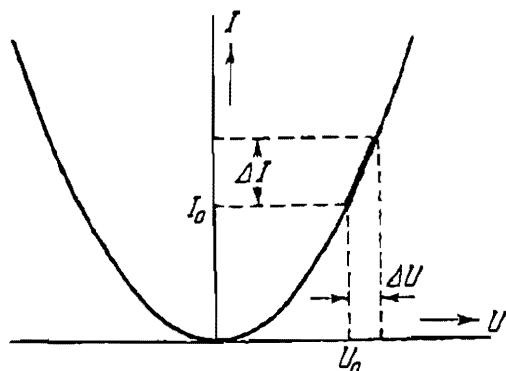


Рис. 12.

Разложим выражение для тока в ряд Тейлора около точки U_0 :

$$I = f(U_0) + f'(U_0)\Delta U + f''(U_0)\frac{\Delta U^2}{2} + f'''(U_0)\frac{\Delta U^3}{6} + \dots$$

Если ΔU — достаточно малая величина, то членами высших порядков можно пренебречь и записать линеаризованное выражение для тока в виде

$$I \cong f(U_0) + f'(U_0)\Delta U.$$

*) Однако существуют *системы*, линеаризованное описание явлений в которых лишено смысла. Эти исключительные случаи нам не встретятся.

Постоянная составляющая определяется ординатой характеристики в рабочей точке, а крутизна — производной, т. е. наклоном касательной к характеристике в той же точке.

Может оказаться, что для данной характеристики $f(U)$ касательная к характеристике в рабочей точке горизонтальна, т. е. $f'(U_0) = 0$. В таком случае нужно сместить рабочую точку, изменив U_0 . Так, например, в только что рассмотренном случае квадратичной зависимости мы имели

$$f(U) = aU^2, \quad f'(U_0) = 2aU_0$$

и если бы мы взяли $U_0 = 0$, то получили бы $f'(0) = 0$.

Нелинейные искажения в почти линейной системе нужно каким-то образом оценивать и измерять. Для этого существует несколько методов; все они основаны на том, что нелинейность вызывает обогащение спектра, которое не происходит в строго линейной системе.

Первый метод состоит в том, что на вход системы задается синусоидальное воздействие, а на выходе системы определяется действующее значение всех гармоник, кроме первой. Отношение этой величины к действующему значению первой гармоники (основной частоты) называется коэффициентом гармоник

$$k = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1},$$

где через I_k обозначены амплитуды гармоник. Считают, что нелинейные искажения практически не ощущаются, если коэффициент гармоник не превосходит 1%. Техническими условиями на аппаратуру задается обычно коэффициент гармоник не выше 5%.

Другой метод состоит в подаче на вход системы одновременно двух синусоидальных напряжений с различными частотами. При этом, как было показано в § 5, образуется богатый спектр комбинационных частот. Коэффициент, характеризующий нелинейные искажения, определяется так же, как и коэффициент гармоник.

В недавнее время предложен новый способ определения нелинейных искажений. Он основан на измерении суммарной мощности в некоторой полосе частот при подаче на вход воздействия со сплошным спектром, из которого предварительно вырезана фильтром та же самая полоса частот. Если бы

система была линейна, то частоты, вырезанные на входе, отсутствовали бы и на выходе. В результате же нелинейности в пределах вырезанной полосы появляются комбинационные частоты и гармоники — так называемый продукт нелинейности. Этот продукт и измеряется. Новый метод ближе соответствует действительным условиям работы аппаратуры и дает более правильную оценку нелинейных искажений.

Следует еще указать, что нелинейные искажения можно *корректировать* аналогично тому, как корректируются частотные искажения. Положим, что имеется нелинейный четырехполюсник с характеристикой

$$U_2 = f_1(U_1).$$

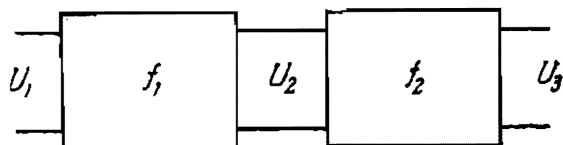


Рис. 13.

Добавим к этому четырехполюснику второй, служащий в качестве корректора (рис. 13). Его характеристика

$$U_3 = f_2(U_2)$$

должна быть подобрана так, чтобы нелинейные искажения были устранены, т. е. чтобы было

$$U_3 = AU_1.$$

Это условие дает

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \frac{U_2}{U_1} = \frac{f_2[f_1(U_1)]}{U_1} = A$$

или

$$f_2[f_1(U_1)] = AU_1,$$

т. е. функция f_2 должна быть обратной *) функции f_1 . Например, если

$$f_1(U_1) = aU_1^2,$$

*) Напомним определение обратной функции. Если

$$y = f(x),$$

то, решая это уравнение относительно x , получим

$$x = \varphi(y).$$

Функция φ обратна функции f . При этом

$$\frac{\varphi[f(x)]}{x} = \frac{f[\varphi(y)]}{y} = 1.$$

то должно быть

$$f_2(U_2) = b \sqrt{U_2}.$$

При таких соотношениях мы получим

$$U_2 = b \sqrt{U_2} = b \sqrt{a} U_1 = A U_1.$$

§ 8. Выпрямление

Объектом выпрямления является переменный ток; цель выпрямления состоит в получении постоянного тока (например, для питания радиотехнических устройств).

Простейшая схема выпрямления показана на рис. 14. В схему включен нелинейный элемент, относительно кото-

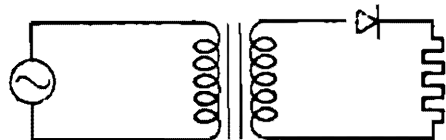


Рис. 14.

рого предполагается, что он обладает конечной проводимостью в одном направлении и нулевой (или очень малой) проводимостью в другом. Направление, в котором выпрямитель пропускает ток, называется прямым, противоположное — обратным. Соответственно обозначаются и проводимости или сопротивления. Отношение прямой проводимости к обратной называется коэффициентом выпрямления.

Соответственно обозначаются и проводимости или сопротивления. Отношение прямой проводимости к обратной называется коэффициентом выпрямления.

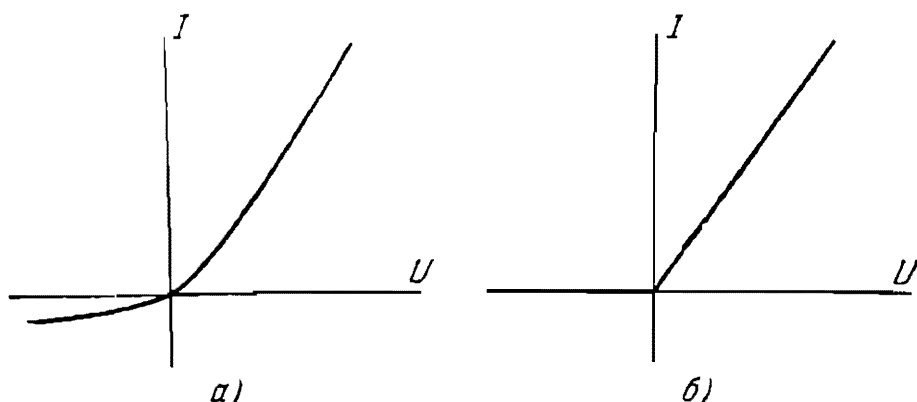


Рис. 15.

Реальная и идеализированная характеристики выпрямителя показаны на рис. 15, а и б. Если в схеме рис. 14 при характеристике рис. 15, б действует синусоидальное напряжение, то в цепи протекают импульсы тока, отвечающие

положительным полупериодам напряжения (рис. 16). Это есть так называемое однополупериодное или однопериодное выпрямление. В цепи протекает пульсирующий, т. е. не ме-

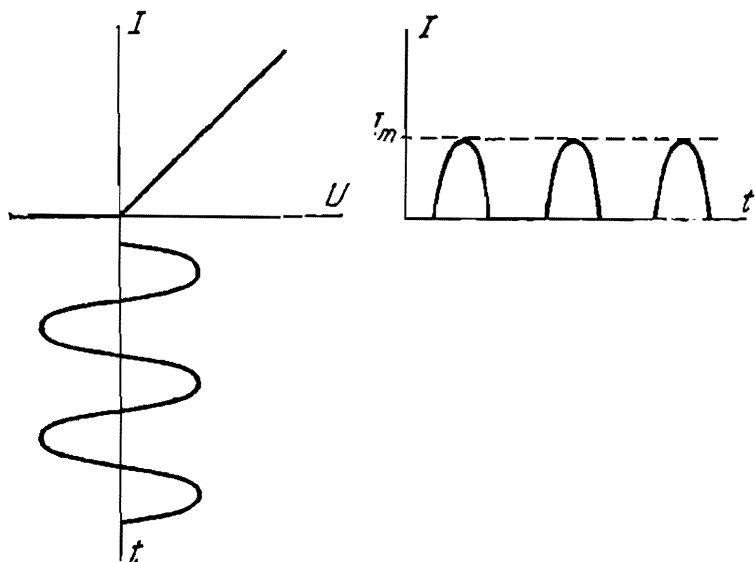


Рис. 16.

няющий направления, но изменяющийся по величине ток. Он содержит требуемую постоянную составляющую, но, кроме

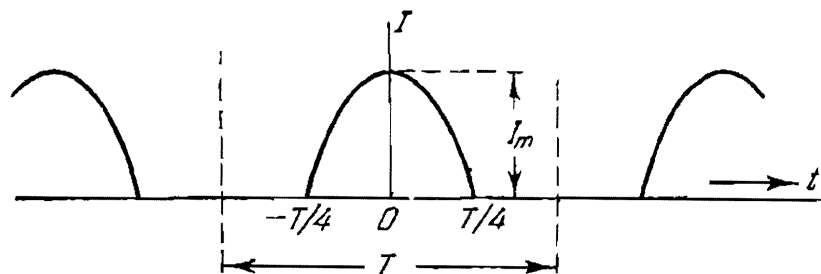


Рис. 17.

того, также и переменную составляющую со сложным спектром. Постоянная составляющая равна

$$I_0 = \frac{1}{\pi} I_m.$$

Спектр переменной составляющей определим, разложив в ряд Фурье выражение для тока. Выражение для тока имеет вид:

$$I = I_m \cos \omega t \quad \left[-\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4}, \text{ или } -\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2} \right].$$

На протяжении остальной доли периода ток равен нулю (рис. 17).

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{1}{\pi} I_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} I_m \left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} I_m & \text{при } n = 1, \\ \frac{2}{\pi} I_m \frac{1}{n^2 - 1} & \text{при } n \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Итак, в составе выпрямленного тока имеется первая гармоника с амплитудой

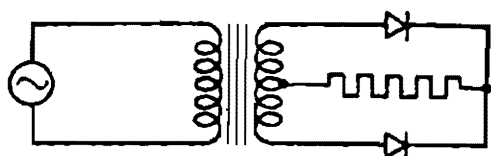


Рис. 18.

$$I_1 = \frac{1}{2} I_m,$$

а кроме того, все чётные гармоники, амплитуды которых равны

$$I_2 = \frac{2}{3\pi} I_m, I_4 = \frac{2}{15\pi} I_m, \dots$$

Гораздо чаще применяется двухполупериодное (двухтактное) выпрямление. Оно производится схемой рис. 18. Действие выпрямителей в обеих ветвях схемы таково, что результирующую характеристику можно представить, как показано на рис. 19. Постоянная составляющая при двухполупериодном выпрямлении, очевидно, вдвое больше, чем при однополупериодном; в этом состоит одно из

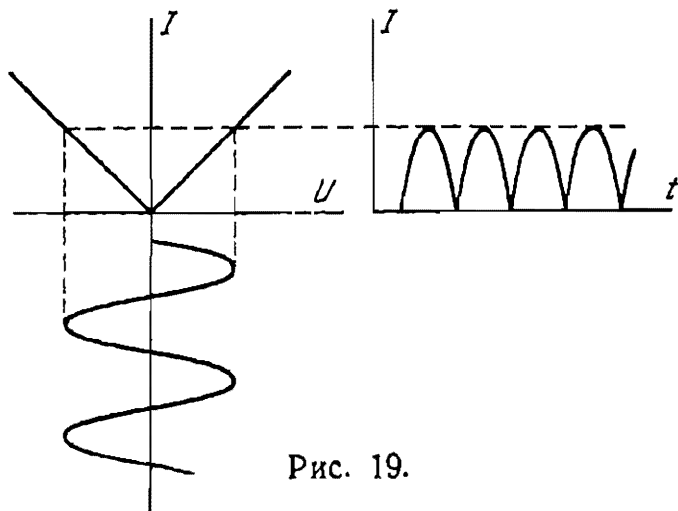


Рис. 19.

преимуществ двухполупериодного выпрямления. Что касается спектра тока, то первая гармоника в нем отсутствует. Это

и понятно, так как основная частота выпрямленного тока (при условии симметрии обеих ветвей схемы) вдвое больше частоты питающего напряжения, и, следовательно, наименьшая частота в составе тока отвечает второй гармонике напряжения. Спектральный состав выпрямленного тока таков:

$$I_0 = \frac{2}{\pi} I_m, \quad I_2 = \frac{4}{3\pi} I_m, \quad I_4 = \frac{4}{15\pi} I_m.$$

Для очистки выпрямленного тока от переменной составляющей применяются обычные фильтры нижних частот. Типичная схема выпрямителя с двойным диодом изображена на рис. 20. Здесь выясняется еще одно преимущество двух-

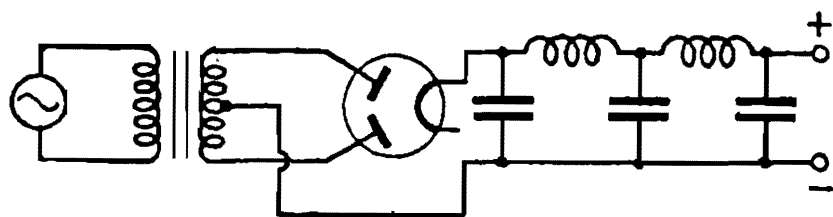


Рис. 20.

полупериодного выпрямления. Дело в том, что основная частота переменной составляющей при двухполупериодном выпрямлении вдвое выше, чем при однополупериодном. Это позволяет соответственно повысить граничную частоту фильтра, а следовательно, облегчить его конструкцию, вдвое уменьшив как индуктивности, так и емкости. Фильтрация выпрямленного тока еще более облегчается при выпрямлении многофазного тока (трех- или шестифазного), так как при этом уменьшается величина пульсаций и возрастает их частота. Пульсации тем меньше, чем больше число фаз. Нужно пояснить, что мы не рассматриваем в этом параграфе работу выпрямителя в целом, включая фильтр. Дело в том, что схема выпрямителя с фильтром описывается нелинейным дифференциальным уравнением, решение которого представляет более сложную задачу. Мы вернемся к этому вопросу в § 31.

Следует еще добавить, что выпрямление часто применяется для измерения переменных напряжений и токов посредством электроизмерительных приборов постоянного тока (магнитоэлектрической системы). Все современные многошкальные универсальные приборы постоянного и переменного

тока являются детекторными приборами, т. е. снабжены выпрямительными элементами, что и позволяет пользоваться одним и тем же прибором для измерений как на постоянном, так и на переменном токе. Ламповый вольтметр — основной радиоизмерительный прибор — также представляет собою магнитоэлектрический прибор в комбинации с ламповой выпрямительной схемой. Однако требования к выпрямителю для измерительных целей несколько иные, чем требования к выпрямителю для целей питания. Дело в том, что измерительные приборы переменного тока должны измерять действующие значения измеряемых напряжений или токов, которые могут быть и несинусоидальными. А это условие выполняется лишь в том случае, если характеристика выпрямителя квадратична. За дальнейшими подробностями следует обратиться к курсу радиоизмерений.

§ 9. Детектирование

Объектом детектирования является модулированное колебание; цель детектирования состоит в извлечении из модулированного колебания сигнала, т. е. колебания низкой модулирующей частоты. В этом параграфе мы рассмотрим только детектирование колебаний, модулированных по амплитуде.

Процесс детектирования амплитудно-модулированных (АМ) колебаний имеет много общего с процессом выпрямления; различие состоит главным образом в объектах и желаемых результатах. Простейшая схема детектора содержит нелинейный элемент с такой же характеристикой, как и характеристика выпрямителя на рис. 15. Разберем сначала качественную картину явлений при детектировании. Пусть амплитудно-модулированное напряжение действует в цепи с нелинейным элементом — детектором, — обладающим ломаной характеристикой (рис. 21). Ток в цепи детектора представляет собою импульсы высокой частоты с огибающей, воспроизводящей форму огибающей модулированного колебания. В составе тока получается несущая частота и ее гармоники. Кроме того, имеется постоянная составляющая, которая нас обычно не интересует. И, наконец, в составе тока появляется низкочастотная составляющая, которую мы стремимся выделить.

Нужно всячески подчеркнуть, что в составе модулированного колебания низкочастотной составляющей нет; как

известно, например, при синусоидальной модуляции модулированное колебание состоит из трех синусоидальных колебаний: колебания несущей частоты и двух спутников, имеющих также высокие частоты.

Для выделения низкочастотной составляющей, появляю-

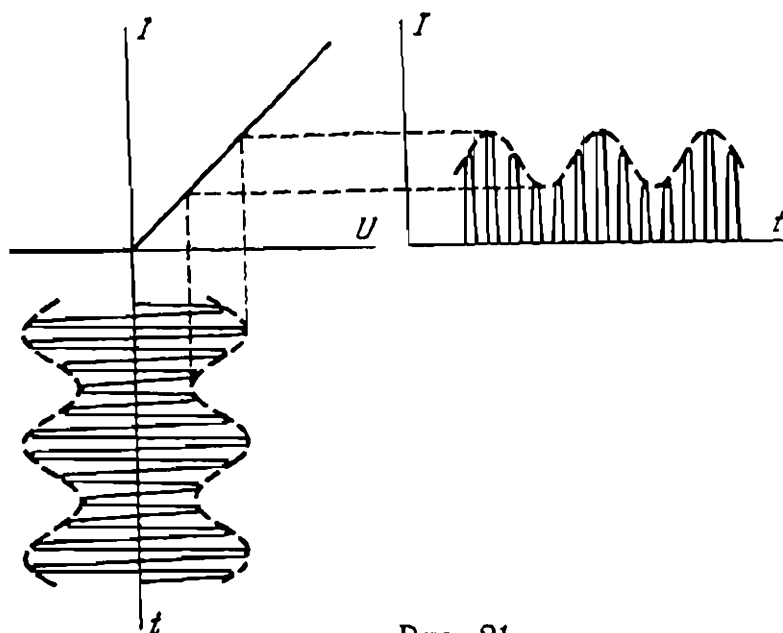


Рис. 21.

щейся в результате детектирования, нужно отфильтровать высокие частоты и постоянную составляющую. Последняя устраняется обычно сама собою, так как не проходит через усилительный тракт, содержащий трансформаторы и переходные емкости. Что касается высоких частот, то они могут быть отфильтрованы простейшим звеном, состоящим из емкости и сопротивления. Схема детектора принимает вид, показанный на рис. 22. Она мало чем отличается — по виду — от схемы

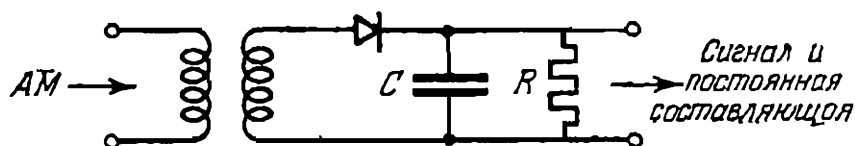


Рис. 22.

выпрямителя на рис. 20. Но схема рис. 22 выполняет другую задачу: она должна выделить низкую частоту сигнала, тогда как схема выпрямителя предназначена для устранения переменной составляющей и получения постоянного тока. Это

различие определяет и различие в требованиях к фильтрам. Фильтрующее звено в схеме детектора на рис. 22 должно устранить высокую частоту, но сохранить низкую частоту. Для этого необходимо, чтобы сопротивление R было много больше емкостного сопротивления при высокой (несущей) частоте ω_0 и много меньше емкостного сопротивления при низкой частоте сигнала Ω . Это условие можно записать в виде неравенств

$$\frac{1}{\omega_0 C} \ll R \ll \frac{1}{\Omega C}.$$

К тому же заключению можно прийти и иным путем. Можно рассматривать звено RC как интегрирующую схему, назначение которой состоит в *усреднении* тока. Однако схема должна усреднить ток по высокой частоте, но не по низкой, так как полное усреднение дало бы на выходе лишь постоянный ток. Эффект интегрирования или усреднения определяется постоянной времени звена, точнее соотношением между постоянной времени

$$\tau = RC$$

и периодом тока. Усреднение происходит тогда, когда постоянная времени значительно превосходит период. Если же, напротив, постоянная времени значительно меньше периода, то усреднения не происходит, и напряжение на выходе звена следует за напряжением на входе. Исходя из этих соображений, можно записать условие правильной работы звена RC в следующей форме:

$$T_0 \ll \tau \ll T_1,$$

где T_0 и T_1 — соответственно периоды несущей частоты и частоты сигнала. Но это неравенство совпадает с предыдущим, если принять во внимание, что

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Часто применяется двухтактное детектирование. При этом несущая частота подвергается двухполупериодному выпрямлению, частота удваивается, и ее легче отделить.

Рассмотрим теперь процесс детектирования аналитически. Положим, что детектирование двухтактное и что характеристика детектора может быть записана в виде $I = k|U|$

(рис. 23). Возьмем случай синусоидальной модуляции частотой Ω несущей частоты ω_0 . Мы имеем следующее выражение для модулированного напряжения:

$$U = U_m (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Для нахождения тока в цепи детектора мы должны взять модуль (абсолютное значение) этого выражения. Для этого нужно найти модуль каждого из сомножителей, так как модуль произведения равен произведению модулей сомножителей. Заметим, что коэффициент модуляции m есть положительная величина, не превосходящая единицы. Поэтому множитель $(1 + m \sin \Omega t)$ не может быть меньше нуля, а стало быть, остается найти только модуль последнего множителя. Таким образом,

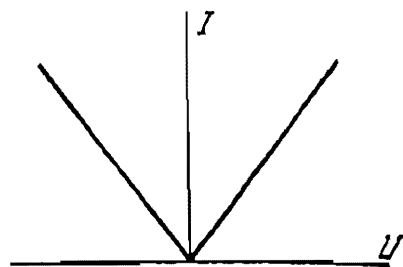


Рис. 23.

$$I = kU_m (1 + m \sin \Omega t) |\sin \omega_0 t|.$$

Но $|\sin \omega_0 t|$ — это не что иное, как выпрямленная синусоида при двухполупериодном выпрямлении. Разложение этой функции в ряд Фурье известно:

$$|\sin \omega_0 t| = \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega_0 t}{4k^2 - 1} \right).$$

Итак,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi} kU_m (1 + m \sin \Omega t) \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega_0 t}{4k^2 - 1} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} kU_m \left[(1 + m \sin \Omega t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega_0 t}{4k^2 - 1} - \right. \\ &\quad \left. - 2m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega t \cos 2k\omega_0 t}{4k^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Как видим, цель детектирования достигнута: мы получили в составе тока слагаемое $(1 + m \sin \Omega t)$, т. е. модулирующий сигнал. Кроме того, в составе тока имеется ряд высоких частот: четные гармоники несущей частоты с частотами $2k\omega_0$

(первая сумма) и спутники с частотами $2k\omega_0 \pm \Omega$ — (вторая сумма). Спектры модулированного колебания до и после детектирования изображены на рис. 24.

Мы рассматривали до сих пор детектирование при характеристике детектора в виде ломаной линии (рис. 21 или 23).

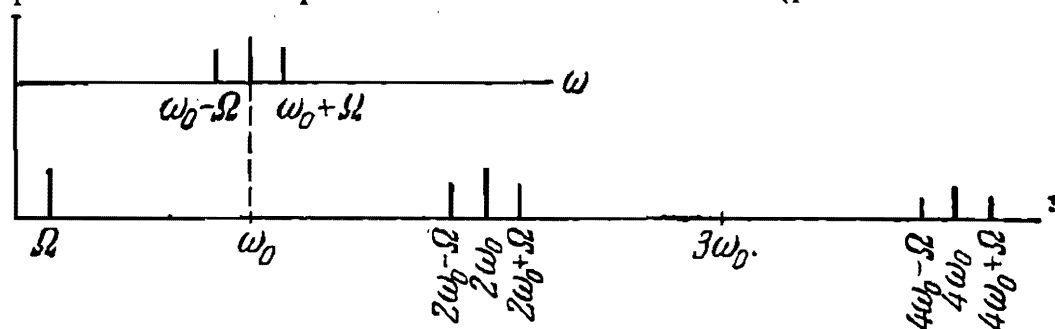


Рис. 24.

Детектор с такого рода характеристикой называется «линейным». Само собой разумеется, что термин «линейный» имеет в виду не характеристику детектора в целом, а лишь форму ветвей характеристики по одну сторону (рис. 21), или по обе стороны (рис. 23) точки излома.

Рассматривая рис. 21, легко понять, что только «линейный» детектор не искажает формы огибающей. Для того чтобы показать, как влияет форма характеристики детектора на результат детектирования, рассмотрим в качестве примера детектирование амплитудно-модулированного колебания квадратичным детектором.

Пусть характеристика детектора дана соотношением

$$I = kU^2.$$

Подставляя в эту формулу выражение синусоидально модулированного по амплитуде колебания, находим

$$\begin{aligned} I &= kU_m^2 (1 + m \sin \Omega t)^2 \sin^2 \omega_0 t = \\ &= \frac{k}{2} U_m^2 \left[1 + \frac{m^2}{2} + 2m \sin \Omega t - \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) \cos 2\omega_0 t - m \sin (2\omega_0 - \Omega) t + \right. \\ &\quad \left. + m \sin (2\omega_0 + \Omega) t + m^2 \cos 2(\omega_0 - \Omega) t + m^2 \cos 2(\omega_0 + \Omega) t \right]. \end{aligned}$$

Как видим, спектр получается ограниченным; он содержит только пять высоких частот, а именно

$$2\omega_0, 2\omega_0 \pm \Omega, 2(\omega_0 \pm \Omega).$$

Но сигнал оказывается искаженным: кроме частоты Ω в спектре детектированного колебания появляется также частота 2Ω , т. е. вторая гармоника сигнала, что означает искажение формы сигнала. Спектры модулированного колебания до и после квадратичного детектирования показаны на рис. 25.

Таким образом оказывается, как и следовало ожидать, что детектор с квадратичной характеристикой не пригоден для детектирования амплитудно - модулированных колебаний. Тем не менее квадратичное детектирование

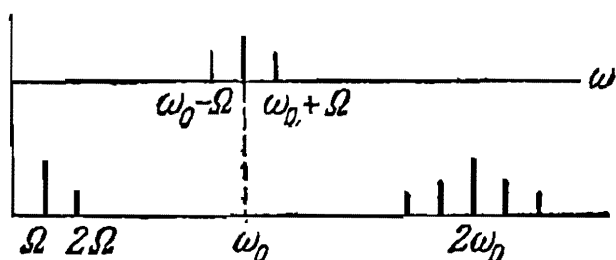


Рис. 25.

играет в радиотехнике большую роль. Оно применяется, например, для детектирования биений, когда желательно получить в результате детектирования чисто синусоидальное колебание разностной частоты. Именно так обстоит дело в гетеродинных генераторах звуковой частоты. Принцип действия этих генераторов состоит в том, что колебания двух генераторов высокой частоты складываются, образуя биения. Биения детектируются и получается колебание низкой частоты, равной разности двух высоких частот. Если сделать один из генераторов высокой частоты перестраивающимся, то можно получить плавно изменяющуюся в широких пределах низкую частоту. Так, например, чтобы получить низкую частоту, изменяющуюся в интервале 0—10 кГц, можно взять два генератора высокой частоты: один, скажем, с частотой 100 кГц, а другой — перестраивающийся от 100 до 110 кГц, т. е. всего на 10%.

Очевидным преимуществом гетеродинных генераторов звуковой частоты является простота управления: весь диапазон перекрывается поворотом одной ручки, управляющей небольшим конденсатором переменной емкости в контуре одного из генераторов высокой частоты.

Разберем вопрос о детектировании биений. Для начала положим, что амплитуды обоих колебаний высокой частоты

равны, т. е.

$$U = U_m (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned} U &= 2U_m \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \\ &= 2U_m \sin \omega_0 t \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \cos \Omega t)}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Omega = \omega_1 - \omega_2,$$

т. е. через ω_0 обозначена средняя высокая частота, а через Ω — низкая частота биений. Форма подводимого к де-

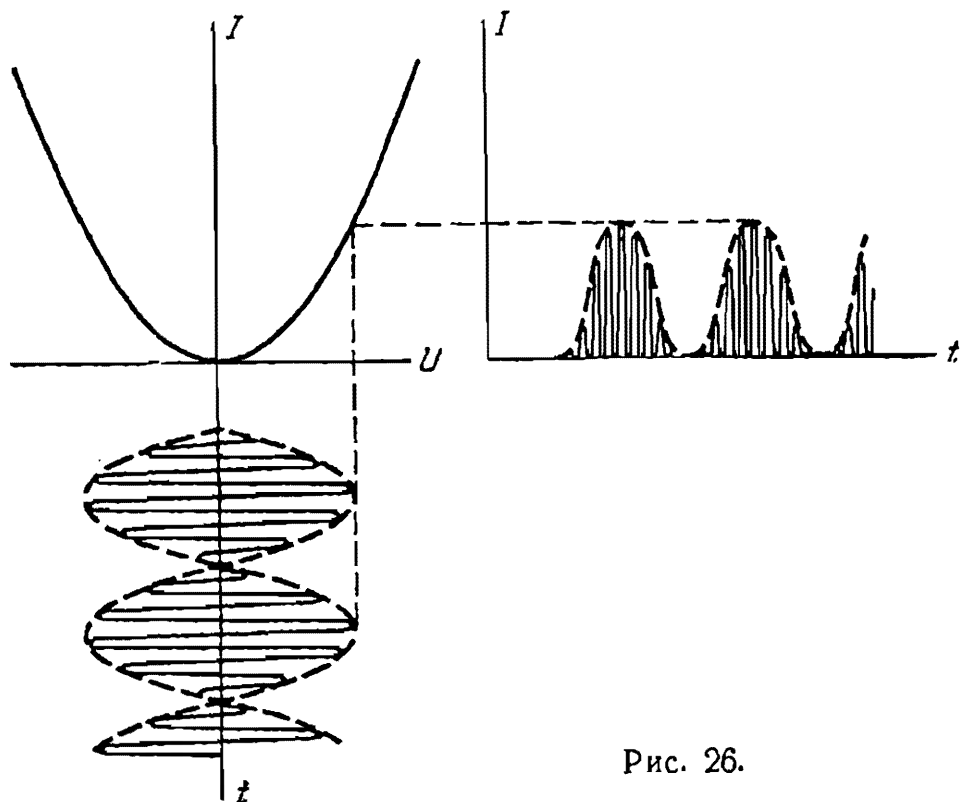


Рис. 26.

тектору напряжения показана на рис. 26.

Следует заметить, что биения можно рассматривать, как колебания высокой частоты ω_0 , модулированные частотой биений. Но, что существенно, модуляция несинусоидальна, модулирующий множитель имеет вид

$$\sqrt{\frac{1}{2} (1 + \cos \Omega t)}.$$

Если теперь применить квадратичное детектирование, то получится

$$\begin{aligned}
 I &= kU^2 = 2kU_m^2 (1 + \cos \Omega t) \sin^2 \omega_0 t = \\
 &= kU_m^2 (1 + \cos \Omega t) (1 - \cos 2\omega_0 t) = \\
 &= kU_m^2 \left[1 + \cos \Omega t - \frac{1}{2} \cos 2\omega_1 t - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos 2\omega_2 t - \cos (\omega_1 + \omega_2) t \right],
 \end{aligned}$$

т. е. чисто синусоидальное колебание разностной частоты Ω , удвоенные исходные высокие частоты и их сумма. Спектр биений до и после квадратичного детектирования показан на рис. 27. Наше заключение о целесообразности квадратичного детектирования биений остается в силе и в том более общем случае, когда амплитуды обоих колебаний высокой частоты оказываются не равными. Пусть будет

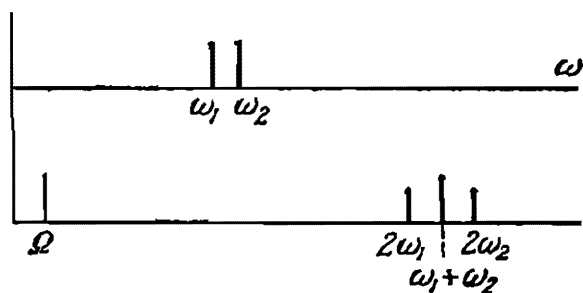


Рис. 27.

$$U = U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin \omega_2 t.$$

На рис. 28 представлена векторная диаграмма, поясняющая сложение двух напряжений с неравными частотами. Мы имеем для амплитуды результирующего напряжения

$$U_m^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1 U_2 \cos \alpha.$$

Но, как видно из чертежа,

$$\alpha = \pi - \Omega t$$

и, следовательно,

$$-\cos \alpha = \cos \Omega t.$$

Таким образом,

$$U_m = U_1 \sqrt{1 + \frac{U_2^2}{U_1^2} + 2 \frac{U_2}{U_1} \cos \Omega t}.$$

Эта формула представляет собою выражение для изменяющейся амплитуды, т. е. для огибающей биений при

неравных амплитудах составляющих колебаний. При квадратичном детектировании, в результате возведения в квадрат,

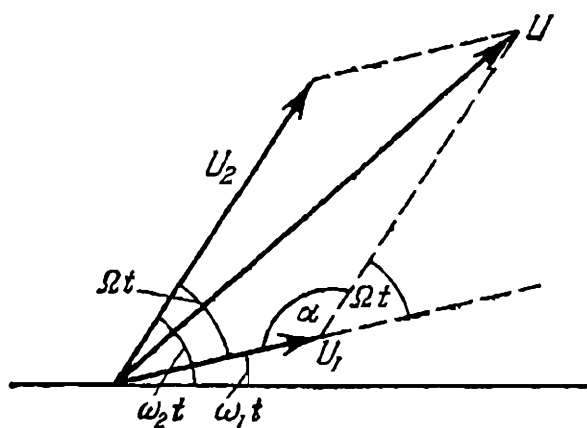


Рис. 28.

радикал пропадет, и мы получим и в этом случае чисто синусоидальное колебание разностной частоты Ω .

Следует заметить, что если амплитуды обоих напряжений сильно различаются, т. е.

$$U_2 \ll U_1$$

или

$$U_2 \gg U_1,$$

то синусоидальное напряжение низкой частоты может быть получено и при линейном детектировании. Это следует из того, что, например, при $U_2 \ll U_1$

$$\begin{aligned} U_m &= U_1 \sqrt{1 + \frac{U_2^2}{U_1^2} + 2 \frac{U_2}{U_1} \cos \Omega t} \cong \\ &\cong U_1 \left(1 + 2 \frac{U_2}{U_1} \cos \Omega t\right)^{\frac{1}{2}} \cong U_1 \left(1 + \frac{U_2}{U_1} \cos \Omega t\right). \end{aligned}$$

К вопросу о квадратичном детектировании нужно еще добавить, что этот вид детектирования играет большую роль в схемах модуляции и преобразования частоты, о чем речь будет ниже.

Теперь мы должны обратиться к общим соображениям о свойствах характеристик детекторов. Характеристика детектора должна быть нелинейной — это очевидно. Но этого мало. Если мы выбрали бы нелинейную характеристику вида

$$I = kU^3,$$

то никакого детектирования не получили бы, так как колебание, как показано на рис. 29, изменив свою форму, осталось симметричным относительно оси времен. Для детектирования годятся только такие нелинейные зависимости, которые несимметричны относительно оси U и которые, вследствие этого, дают постоянную составляющую тока при приложении

переменного напряжения. Зависимости такого рода должны содержать четную часть.

Напомним определения.

Четной функцией называется функция, удовлетворяющая условию

$$f(x) = f(-x).$$

Нечетная функция удовлетворяет условию

$$f(x) = -f(-x).$$

Примеры четных функций: x^2 , x^4 , $\cos x$ и т. п.

Примеры нечетных функций: x , x^3 , $\sin x$ и т. п.

Степенная функция x^n четна или нечетна в зависимости от того, четен или нечетен показатель степени n .

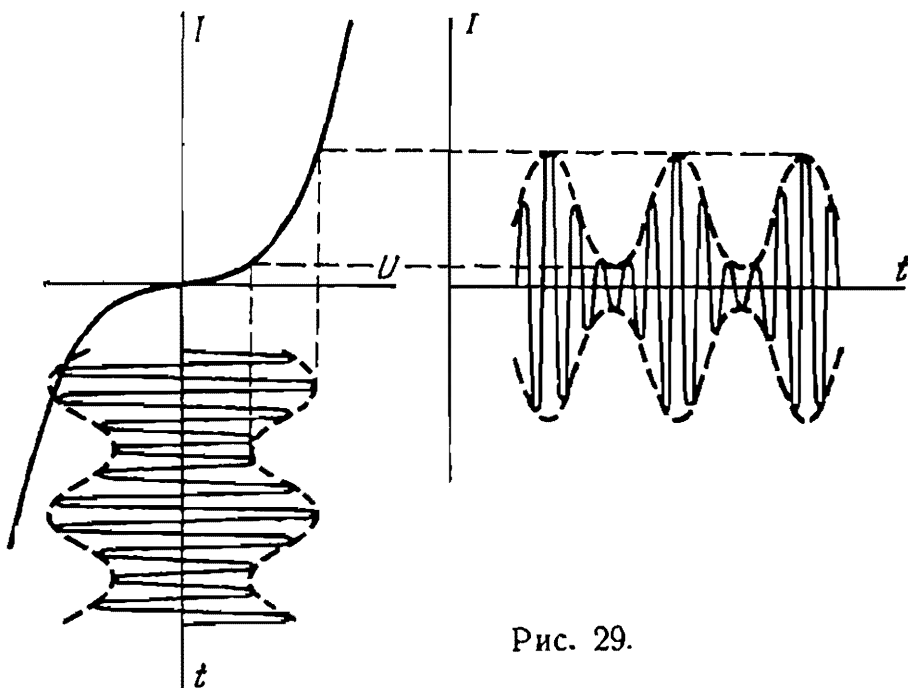


Рис. 29.

Детектор детектирует, а выпрямитель выпрямляет лишь поскольку его характеристика содержит четную часть. Любая функция может быть разложена на четную и нечетную части. Пусть

$$f(x) = f_{\text{ч}}(x) + f_{\text{н}}(x),$$

где $f_{\text{ч}}$ — четная часть, $f_{\text{н}}$ — нечетная. Изменим знак аргумента. Тогда по определению получим

$$f(-x) = f_{\text{ч}}(x) - f_{\text{н}}(x).$$

Складывая и вычитая, найдем

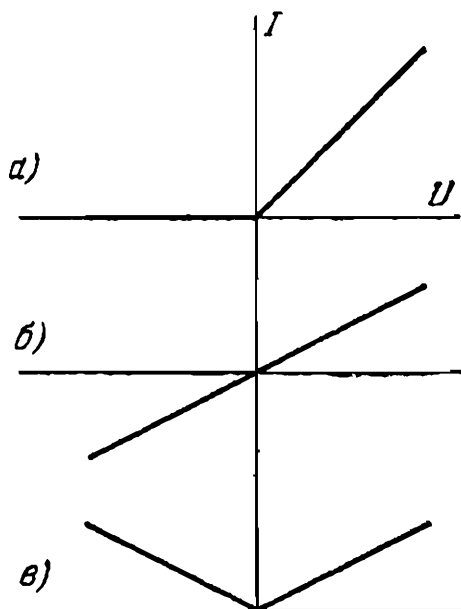
$$f_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)],$$

$$f_{\text{н}}(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

В качестве примера приведем разложение на четную и нечетную части ломаной характеристики рис. 30, а. Ана-

литически эту характеристику можно записать в виде

$$I = \begin{cases} kU & U > 0, \\ 0 & U < 0. \end{cases}$$



Четная часть характеристики будет

$$I_{\text{ч}} = \frac{k}{2} |U|,$$

а нечетная

$$I_{\text{н}} = \frac{k}{2} U$$

Рис. 30.

(рис. 30, б и в). Нетрудно видеть, что, сложив (б) и (в), мы получим (а). Таким образом, анали-

тически ломаную характеристику на рис. 30, а можно представить формулой

$$I = \frac{1}{2} k (|U| + U),$$

которая годится для всех значений U как положительных, так и отрицательных.

Нечетная часть в характеристике детектора или выпрямителя может содержаться — она не производит действия. Естественно, однако, пользоваться выпрямителями и детекторами с чисто четными характеристиками. Такими характеристиками обладают все симметричные двухтактные схемы — нечетные члены характеристики устраняются в этих схемах в результате того, что на обе ветви схемы выпрямляемое или детектируемое напряжение подается с противоположными

знаками (в противофазе), а токи обеих ветвей складываются. В этом смысле схема выпрямителя или детектора обладает свойствами, противоположными свойствам схемы двухтактного усилителя. В последнем напряжение также подается в обе ветви в противофазе, но снимаемое напряжение пропорционально не сумме, а разности токов. Таким образом, двух-

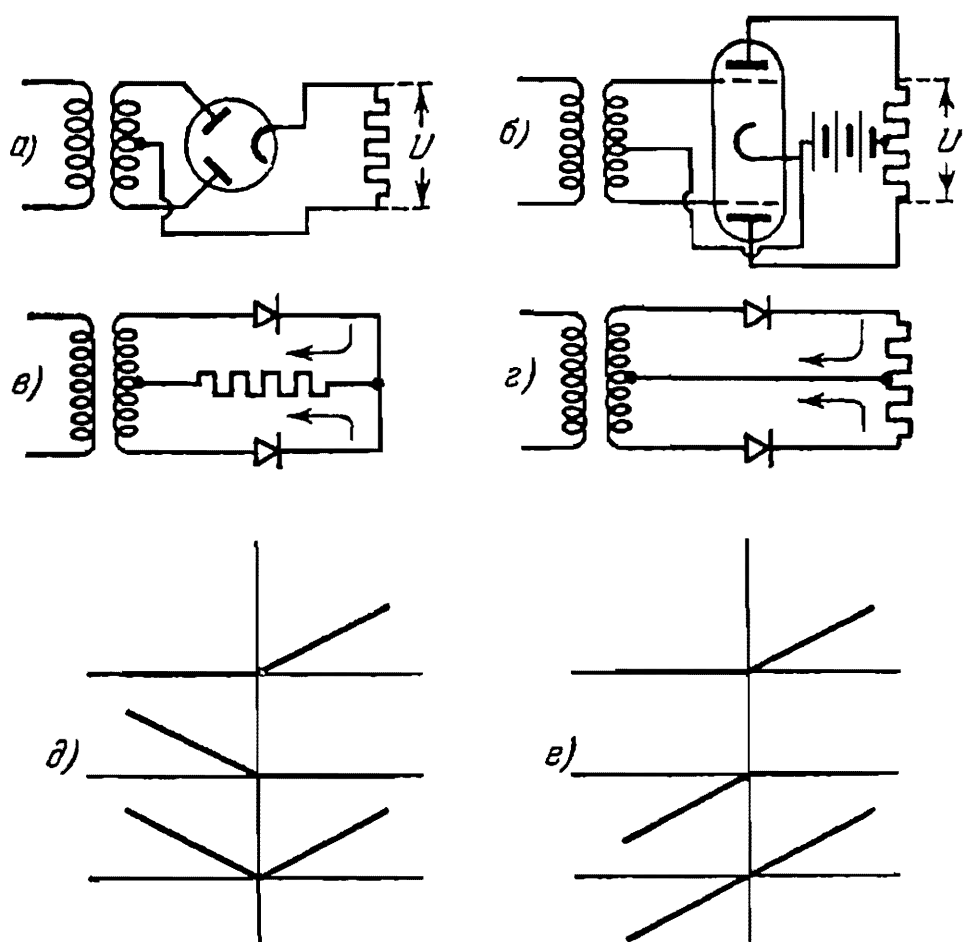


Рис. 31.

тактная схема выпрямителя использует только четную часть характеристики нелинейного элемента, а двухтактная схема усилителя использует только нечетную часть характеристики нелинейного элемента. Вот почему в двухтактной схеме усилителя выпадают все четные гармоники. Само собою разумеется, что из нечетных гармоник в случае усиления стремятся сохранить только первую — это соответствует неискаженному усилению, когда результирующая характеристика — прямая. В пояснение этих соображений на рис. 31, а и б показаны схемы двухтактного выпрямителя на двойном диоде

и двухтактного усилителя на двойном триоде. На рис. 31, в и г даны те же схемы в обобщенном виде. Наконец, рис. 31, д и е показывают построение результирующих характеристик в предположении, что характеристика отдельного элемента — ломаная.

§ 10. Детектирование ЧМ и ИМ

В этом параграфе кратко излагаются общие принципы детектирования, применяемые при других (кроме АМ) видах модуляции, в частности, при частотной модуляции (ЧМ) и некоторых видах импульсной модуляции (ИМ).

Обычный прием детектирования частотно-модулированных колебаний состоит в том, что ЧМ колебание сперва преобразовывается в АМ колебание, которое затем уже детекти-

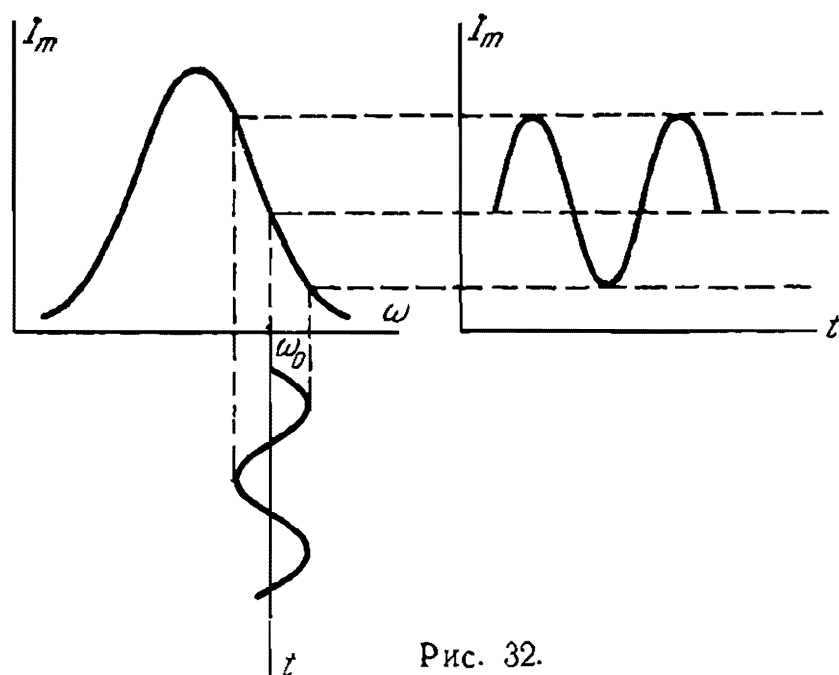


Рис. 32.

руется, как описано в § 9. Операцию преобразования ЧМ в АМ выполняет так называемый частотный детектор. В качестве простейшего частотного детектора может служить расстроенный относительно несущей частоты контур. При отсутствии модуляции, т. е. при $\omega = \omega_0$, рабочая точка располагается на скате резонансной кривой контура, как показано на рис. 32. В нижней части этого рисунка изображен закон изменения частоты во времени. При изменении частоты изменяется амплитуда тока I_m высокой частоты в контуре,

как показано в правой части рисунка. Но изменение амплитуды — это и есть амплитудная модуляция. Таким образом, сняв с контура напряжение, остается продетектировать и отфильтровать его обычным образом. Принципиальная схема детектирования ЧМ принимает вид, показанный на рис. 33.

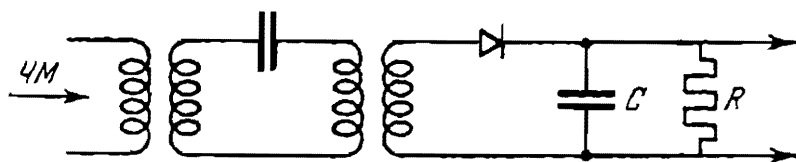


Рис. 33.

В современной технике применяются более совершенные схемы частотных детекторов. Дело в том, что во избежание нелинейных искажений характеристика частотного детектора должна быть прямолинейной. Другими словами, крутизна частотного детектора, выражаемая производной $\frac{dI_m}{d\omega}$ должна быть постоянной в пределах рабочего участка. При широкополосной ЧМ удовлетворить этому требованию при помощи простого контура затруднительно. Поэтому и применяются симметричные схемы, обладающие более благоприятными характеристиками.

Пример такой схемы приведен на рис. 34. Здесь имеются два контура 1 и 2, настраиваемых обычно на крайние зна-

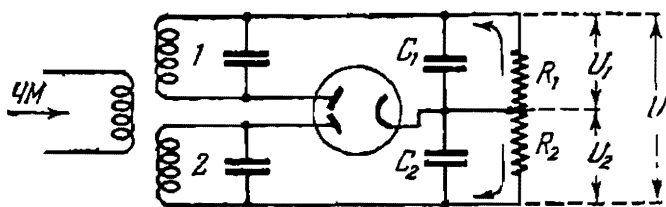


Рис. 34.

чения частоты, т. е. на $\omega_0 + \Delta\omega$ и $\omega_0 - \Delta\omega$. Каждый из контуров преобразует ЧМ в АМ, как описано выше. АМ колебания детектируются соответствующими половинами двойного диода. Комбинации RC служат фильтрами. Низкочастотные напряжения U_1 и U_2 возникают на сопротивлениях R_1 и R_2 . Эти напряжения пропорциональны ординатам резонансных кривых соответственно контуров 1 и 2. Но так как эти напряжения на R_1 и R_2 противоположны по знаку (см. стрелки

на схеме, указывающие направления токов), то с выхода схемы снимается *разность* напряжений U_1 и U_2 . Характеристика частотного детектора, т. е. зависимость выходного напряжения U от частоты ЧМ колебания на входе, получается путем вычитания двух резонансных кривых, как показано на рис. 35. Частотные детекторы описанного типа

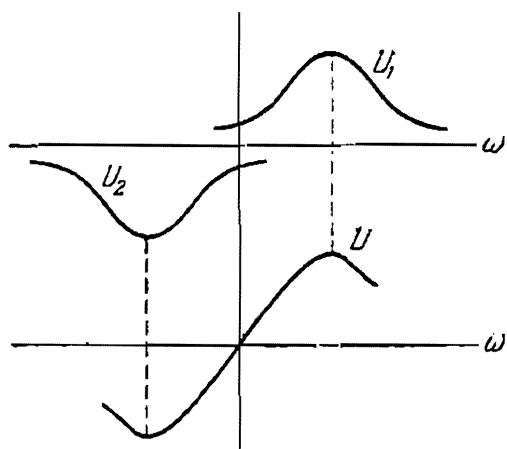


Рис. 35.

относятся к числу так называемых дискриминаторов (различителей).

Перейдем к импульсной модуляции. Основные виды импульсной модуляции следующие: 1) модуляция импульсов по высоте (по «амплитуде») — АИМ, 2) модуляция импульсов по частоте следования — ЧИМ, 3) модуляция импульсов по длительности — ДИМ и 4) модуляция импульсов по фазе — ФИМ.

Детектирование АИМ сигнала ничем по существу не отличается от детектирования обычного амплитудно-модулированного колебания. Различие состоит лишь в составе высокочастотной части спектра, которая все равно должна быть отфильтрована.

То же относится и к ДИМ, хотя это на первый взгляд неочевидно. Но нужно учесть, что составляющая низкой частоты после обычного детектирования ИМ сигнала пропорциональна *площади* импульса. Следовательно, безразлично, что именно будет изменяться в огибающей импульса при модуляции — высота или длительность. Таким образом, для детектирования как АИМ, так и ДИМ пригодна обычная схема детектора, как, например, на рис. 22.

Иначе обстоит дело с фазово-импульсной модуляцией. При ФИМ, как известно, площадь импульса остается неизменной. Модуляция состоит лишь в смещении импульса относительно тактовой точки. Поэтому для детектирования ФИМ нужно прибегнуть к предварительному преобразованию ФИМ в АИМ или ДИМ, или вообще в такую форму, в которой изменяется площадь импульса. Для преобразования ФИМ в ДИМ может быть, например, применена схема, содержащая электронное реле, включаемое тактовыми импульсами и

выключаемое фазово-модулированными импульсами (или наоборот), как показано на рис. 36, на котором означают: *а* — включающие тактовые импульсы, *б* — выключающие импульсы ФИМ, *в* — импульсы на выходе электронного реле.

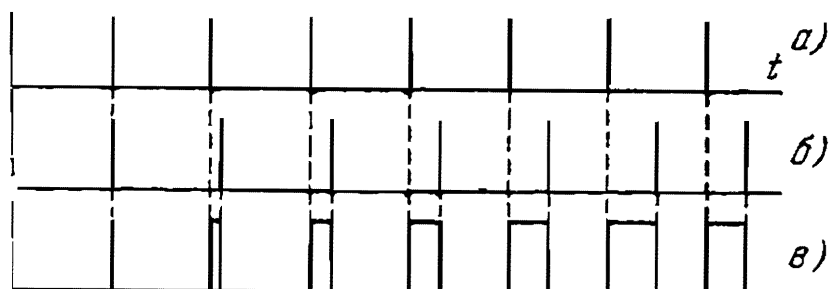


Рис. 36.

Вопросы, связанные с детектированием при импульсно-кодовой модуляции, как более специальные, здесь не рассматриваются.

§ 11. Модуляция

Модуляция есть процесс, имеющий целью перенос спектра передаваемого (низкочастотного) сигнала в область высоких частот для того, чтобы сигнал мог быть передан радиотехническими средствами, т. е. посредством излучения электромагнитных волн. Такое преобразование необходимо потому, что эффективное излучение может быть получено только при высоких радиочастотах.

Модуляция состоит в том, что в результате определенного воздействия сигнала на колебание высокой частоты сигнал оказывается запечатленным в изменениях тех или иных параметров колебания высокой частоты. Высокая частота как бы *несет* в себе сигнал, сохраняя все его свойства, так что сигнал может быть снова выделен на приемном конце. Отсюда и выразительное название *несущая* частота. Процесс выделения сигнала называется детектированием; он рассмотрен в предыдущих параграфах.

Модуляция в своей основе есть *линейный* процесс, осуществляемый в линейной системе с переменными параметрами.

Для начала мы поясним механизм амплитудной модуляции на примере крайне простой схемы, применявшейся в свое время в маломощных телефонных передатчиках. Схема

представлена на рис. 37. Генератор высокой частоты связан индуктивно с антенной. В антенну последовательно включен обычный угольный микрофон. Его действие состоит, как известно, в том, что под воздействием звуковых колебаний мембрана микрофона колеблется, и, надавливая на заключенный в микрофоне угольный порошок, изменяет его проводимость.

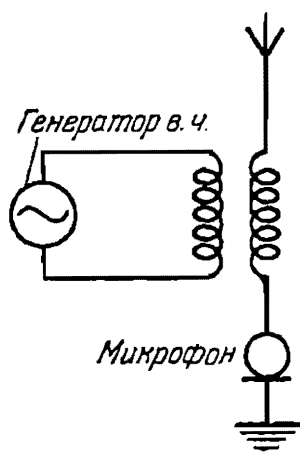


Рис. 37.

Предположим, что микрофон строго линеен, т. е., что его проводимость есть линейная функция звукового давления. Тогда для проводимости цепи антенны имеем

$$Y = Y_0 + kP.$$

Пусть звуковое давление синусоидально

$$P = P_m \sin \Omega t.$$

Тогда для проводимости можем записать

$$Y = Y_0 + kP_m \sin \Omega t = Y_0 + Y_1 \sin \Omega t = Y_0 (1 + m \sin \Omega t),$$

где $m = \frac{Y_1}{Y_0}$ — коэффициент модуляции проводимости. Пусть, далее, электродвижущая сила, наводимая генератором в антенне, есть

$$E = E_m \sin \omega_0 t,$$

где ω_0 — высокая (несущая) частота. Ток в антенне равен произведению из э. д. с. на проводимость

$$I = EY = E_m Y_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Мы получили обычное выражение амплитудно-модулированного колебания для случая синусоидальной модуляции частотой Ω .

Рассмотренная схема есть *линейная схема с переменным параметром*. Переменным параметром является проводимость.

Возвращаясь к выражению для амплитудно-модулированного колебания, перепишем его в более общем виде.

$$I = I_m [1 + mf(t)] \sin \omega_0 t, \quad (1)$$

где $f(t)$ — произвольный передаваемый сигнал (предполагается лишь, что $|f(t)| < 1$). Как видим, процесс модуля-

ции состоит в *перемножении* двух функций времени: $1 + mf(t)$ и $I_m \sin \omega_0 t$. Следовательно, модулятор в принципе должен представлять собою перемножающее устройство, т. е. устройство с двумя входами и одним выходом, действие которого состоит в том, что при подаче на два входа двух функций $x(t)$ и $X_0(t)$, на выходе получается

$$y(t) = x(t) X_0(t).$$

Операция умножения на заданную функцию $X_0(t)$ линейна, как это видно из следующего соотношения:

$$\begin{aligned} y(t) &= [x_1(t) + x_2(t)] X_0(t) = \\ &= x_1(t) X_0(t) + x_2(t) X_0(t) = y_1(t) + y_2(t). \end{aligned}$$

Устройства, назначение которых состоит в перемножении двух функций времени, применяемые для модуляции и преобразования частоты, называются обычно смесителями. Термин этот нехорош, так как не выражает существа дела. Мы будем кратко называть устройство для перемножения двух функций *перемножителем*.

Итак, для получения обычной АМ нужно взять перемножитель и подать на его входы $x(t) = 1 + mf(t)$ и $X_0(t) = I_m \sin \omega_0 t$. В результате перемножения получится модулированное колебание (1).

Заметим, что выражение (1) можно переписать в виде

$$I = I_m \sin \omega_0 t + m I_m f(t) \sin \omega_0 t. \quad (2)$$

Первый член есть колебание несущей частоты, разложение второго члена дает боковые полосы модуляционного спектра. Наряду с обычной АМ применяется также передача без несущей частоты, получаемая при помощи так называемой *балансной* модуляции. Для получения АМ колебания без несущей частоты при помощи перемножителя достаточно устранить постоянную составляющую модулирующей функции, т. е. взять просто $x(t) = f(t)$. При этом на выходе перемножителя получим

$$y(t) = x(t) X_0(t) = I_m f(t) \sin \omega_0 t. \quad (3)$$

В спектре этого колебания несущая частота отсутствует; спектр состоит только из двух боковых полос.

Линейный перемножитель может быть построен на основе любого четырехполюсника с управляемым коэффициентом передачи. Так, если имеем вообще

$$y(t) = kx(t)$$

и если мы можем изменять коэффициент передачи k по произвольно заданному закону $k = k(t)$, то и получаем перемножитель, действие которого описывается соотношением

$$y(t) = k(t)x(t).$$

Для примера рассмотрим работу в качестве перемножителя многосеточной лампы (в частности, гептода). В такой лампе, как известно, крутизна по третьей (так называемой «сигнальной») сетке зависит от напряжения на первой («гетеродинной») сетке. В идеальном случае зависимость крутизны от напряжения на первой сетке была бы линейной, т. е.

$$S_3 = b_0 + b_1 U_1. \quad (4)$$

Подавая на первую и третью сетки два перемножаемых напряжения $U_1(t)$ и $U_3(t)$, мы получили бы в анодной цепи ток

$$I_a = U_3 S_3 = U_3 (b_0 + b_1 U_1) = b_0 U_3 + b_1 U_1 U_3.$$

Как видим, чистого перемножения у нас не получилось бы из-за влияния постоянной составляющей крутизны в выражении (4). Но влияние этой составляющей можно устранить, собрав симметричную (балансную) схему с двумя лампами, вроде показанной на рис. 38 (включение вспомогательных сеток не показано, чтобы не затемнять схемы). Напряжение U_3 подается на третьей сетки обеих ламп с одинаковыми знаками (т. е. в фазе), а напряжение U_1 подается на первые сетки с противоположными знаками (т. е. в противофазе). Выходное напряжение U в силу встречного включения катушек в анодных цепях пропорционально разности анодных токов, т. е. пропорционально величине

$$(b_0 U_3 + b_1 U_1 U_3) - (b_0 U_3 - b_1 U_1 U_3) = 2b_1 U_1 U_3.$$

Таким образом, при условии линейной зависимости крутизны от напряжения схема рис. 38 работает как идеальный

линейный перемножитель. В действительности (4) выполняется лишь приближенно, да и то в небольшом интервале напря-

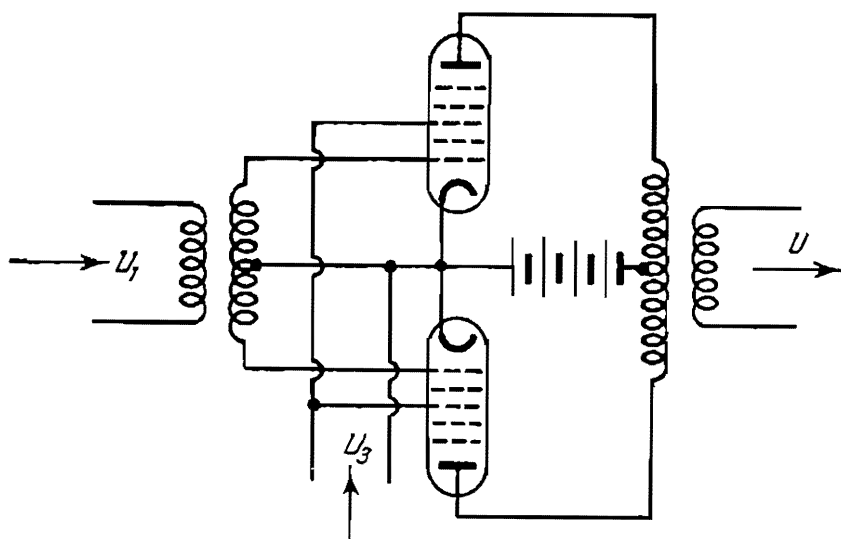


Рис. 38.

жений. Тем не менее и при этих условиях балансная схема рис. 38 дает лучший результат, нежели простая (одноламповая) схема.

§ 12. Нелинейный способ получения АМ

Как показано в предыдущем параграфе, модуляция есть по существу линейная операция, выполняемая в линейной системе с переменным параметром. Операция модуляции есть не что иное, как операция *перемножения*.

Но большинство практических схем АМ работает по другому принципу. Дело в том, что построение правильно действующего линейного перемножителя затруднительно. Поэтому прибегают к косвенному способу перемножения, сущность которого состоит в том, что *сумму* двух перемножаемых напряжений заставляют действовать в нелинейной цепи. При этом в составе тока получается составляющая, пропорциональная произведению обоих напряжений. Прежде всего покажем качественно, что получение таким путем АМ колебания возможно. Возьмем два напряжения: напряжение несущей частоты $U_1 = U_m \sin \omega_0 t$ и модулирующее напряжение $U_2 = (1 + m \sin \Omega t)$. Включим источники обоих напряжений последовательно в цепь с нелинейным элементом. Пусть

характеристика этого элемента представлена ломаной линией. Форма тока в цепи может быть получена обычным построением, показанным на рис. 39. Нетрудно видеть, что в составе тока получается АМ колебание. Кроме него получают

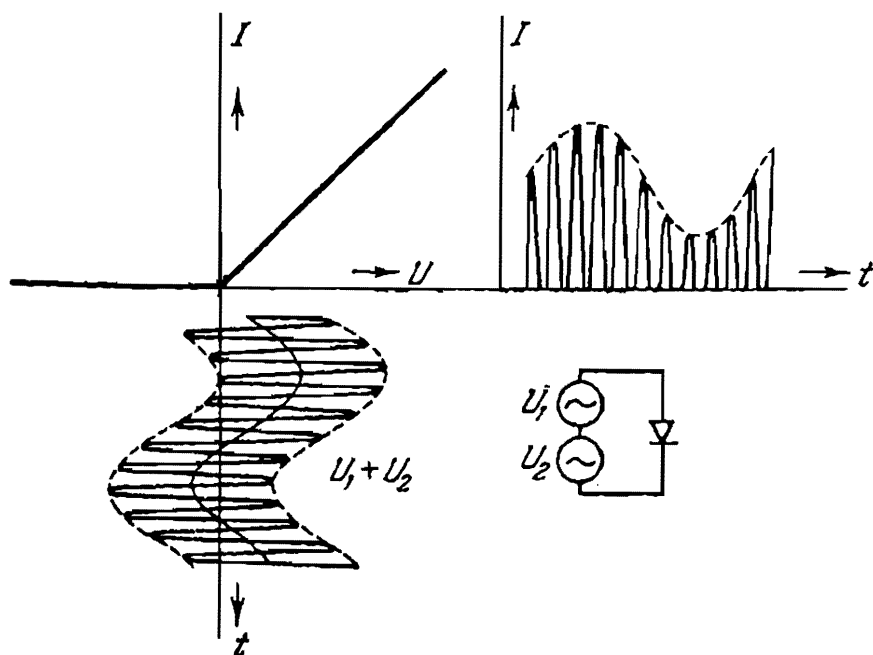


Рис. 39.

еще постоянная составляющая, составляющая низкой частоты и ряд высокочастотных составляющих. Все эти лишние составляющие должны быть отфильтрованы.

Разберем теперь подробнее механизм нелинейного перемножения. Пусть характеристика нелинейного элемента представлена степенным рядом

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 + a_4 U^4 + \dots$$

В нашем случае

$$U = U_1 + U_2,$$

так что

$$\begin{aligned} I = & a_0 + a_1(U_1 + U_2) + a_2(U_1 + U_2)^2 + a_3(U_1 + U_2)^3 + \\ & + a_4(U_1 + U_2)^4 + \dots = a_0 + a_1 U_1 + a_1 U_2 + a_2 U_1^2 + a_2 U_2^2 + \\ & + \overline{2a_2 U_1 U_2} + a_3 U_1^3 + a_3 U_2^3 + 3a_3 U_1^2 U_2 + 3a_3 U_1 U_2^2 + \\ & + a_4 U_1^4 + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Мы видим, что нужный нам член, содержащий произведение $U_1 U_2$, получается в составе тока *только* за счет квад-

ратичного члена вольтамперной характеристики нелинейного элемента. Все остальные члены дают лишние составляющие, так что мы имеем нечистое перемножение, и получаемый ток требует последующей очистки, хотя бы путем фильтрации.

Однако возможно путем последовательного усложнения схемы добиться исключения ряда лишних членов и получить, таким образом, более совершенное перемножение.

Обратимся к рис. 40. Исходная схема с двумя напряжениями U_1 и U_2 , действующими в нелинейной цепи, показана на рис. 40, а. Совместим две такие схемы, как показано на рис. 40, б, так, чтобы они имели общую ветвь, в которую включено напряжение U_1 . Напряжение, снимаемое со схемы, равно

$$U = R(I_1 - I_2).$$

Заметим, что напряжение U_2 подано в схему дважды и притом так, что в верхней половине действует суммарное напряжение $U_1 + U_2$ (мгновенные направления напряжений обозначены стрелками), а в нижней половине — разностное $U_1 - U_2$. Для токов получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= a_0 + a_1(U_1 + U_2) + a_2(U_1 + U_2)^2 + \\ &\quad + a_3(U_1 + U_2)^3 + a_4(U_1 + U_2)^4 + \dots \\ I_2 &= a_0 + a_1(U_1 - U_2) + a_2(U_1 - U_2)^2 + \\ &\quad + a_3(U_1 - U_2)^3 + a_4(U_1 - U_2)^4 + \dots \end{aligned}$$

Составляя разность токов, получим

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 2a_1U_2 + 4a_2U_1U_2 + 6a_3U_1^2U_2 + \\ &\quad + 2a_3U_2^3 + 8a_4U_1^3U_2 + 8a_4U_1U_2^3 + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

(Предполагается, что схема симметрична, т. е. что коэффициенты a_k в разложениях токов I_1 и I_2 одинаковы.) Как видим, в результате вычитания целый ряд членов выпал. Сохранились только члены, содержащие нечетные степени U_2 . Если бы характеристика нелинейного элемента была строго квадратичной, т. е.

$$I = kU^2,$$

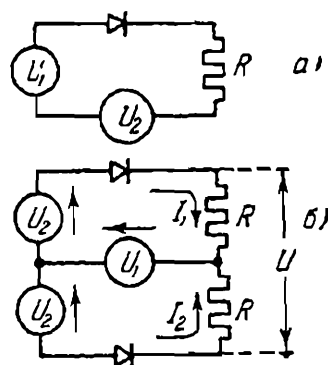


Рис. 40.

то мы получили бы чистое перемножение по формуле

$$k(U_1 + U_2)^2 - k(U_1 - U_2)^2 = 4kU_1U_2.$$

Схемы типа рис. 40, б называются *балансными*. Они применяются, в частности, для получения модулированного колебания, не содержащего несущей частоты. Действительно, если U_1 есть напряжение несущей частоты, то из (2), как видим, оно выпадает. Такого рода модуляция называется балансной модуляцией.

Идея усовершенствования схемы рис. 40, а, приводящая к балансной схеме рис. 40, б, сводится к тому, что, изменяя знак одного из напряжений и производя вычитание токов, мы избавляемся от целого ряда излишних членов. По этому пути можно идти и далее. Возьмем теперь две одинаковые балансные схемы, изменим в одной из них знаки *обоих* напряжений U_1 и U_2 на обратные и образуем напряжение, равное сумме напряжений, получаемых на каждой из схем в отдельности. Такой результат достигается в схеме рис. 41, а,

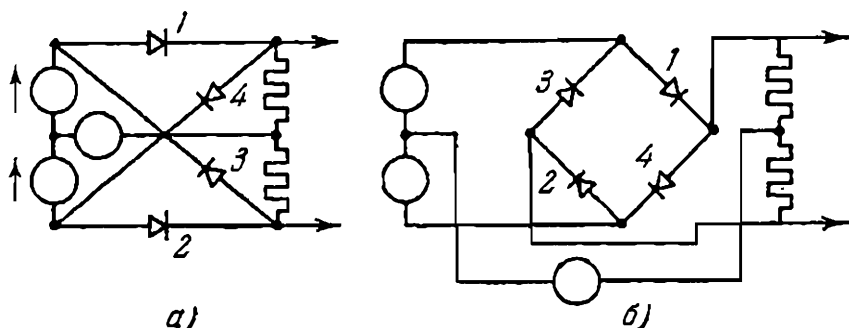


Рис. 41.

представляющей собою совмещение двух балансных схем. Снимаемое с этой схемы напряжение можно представить в виде

$$U = U' + U'',$$

где U' и U'' — напряжения, развиваемые каждой из совмещенных балансных схем в отдельности. Для этих двух напряжений мы можем записать (см. (2)):

$$\begin{aligned} U' &= R(I'_1 - I'_2) = 2R[a_1U_2 + 2a_2U_1U_2 + \\ &\quad + 3a_3U_1^2U_2 + a_3U_2^3 + 4a_4U_1^3U_2 + 4a_4U_1U_2^3 + \dots], \\ U'' &= R(I''_1 - I''_2) = 2R[-a_1U_2 + 2a_2U_1U_2 - \\ &\quad - 3a_3U_1^2U_2 - a_3U_2^3 + 4a_4U_1^3U_2 + 4a_4U_1U_2^3 + \dots]. \end{aligned}$$

Выражение для U'' отличается от выражения для U' тем, что знаки обоих напряжений U_1 и U_2 заменены на обратные. В результате сложения получаем

$$U = U' + U'' = 4R[a_2 U_1 U_2 + 2a_4 U_1^3 U_2 + 2a_4 U_1 U_2^3 + \dots]. \quad (3)$$

Это выражение показывает, что достигнуто дальнейшее устранение лишних членов. В частности, если характеристика нелинейного элемента выражается многочленом степени не выше третьей, т. е.

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3,$$

то схема рис. 41, а (при условии полной ее симметрии) дает идеальное перемножение. Можно перерисовать эту схему в виде рис. 41, б, как ее чаще всего изображают. Получается как бы замкнутое кольцо из четырех нелинейных элементов. Поэтому схему рис. 41 называют *кольцевым модулятором*. Эта схема имеет широкое применение в качестве модулятора и преобразователя частоты.

Следует заметить, что дальнейшее улучшение схемы тем же способом, последовательное применение которого привело нас сперва к балансной, а затем к кольцевой схеме, невозможно. В самом деле, рассмотрение формулы (3) показывает, что в составе напряжения, снимаемого с кольцевой схемы, сохраняются только члены, содержащие произведения нечетных степеней U_1 и U_2 . Следовательно, при изменении знака одного или обоих напряжений *все* члены выражения (3) сохраняют одинаковый знак и ни один из этих членов не может быть устранен в отдельности сложением или вычитанием. Поэтому построение более сложной схемы путем совмещения двух кольцевых схем ничего не дает.

§ 13. Практические схемы модуляции

Рассмотрим простейшие и наиболее употребительные принципиальные схемы модуляторов.

А. Амплитудная модуляция

Для обычной амплитудной модуляции применяются главным образом две схемы: схема сеточной модуляции и схема анодной модуляции. Схема сеточной модуляции показана на рис. 42. Напряжение несущей частоты U_1 и модулирующее

напряжение U_2 подаются на сетку триода. Блокировочная емкость C_1 обеспечивает прохождение высокой частоты в обход обмотки низкочастотного трансформатора. Модуляция получается за счет нелинейности характеристики триода $I_a = f(U_g)$. В составе анодного тока получают лишние составляющие.

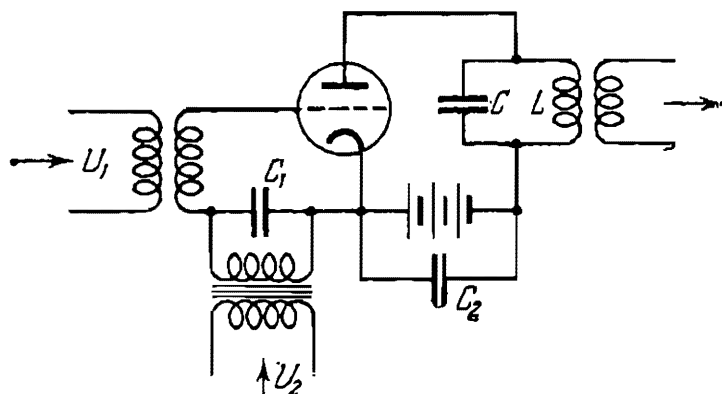


Рис. 42.

Их отфильтровывает контур LC , настроенный на несущую частоту. Ширина полосы пропускания контура берется немного больше ширины модуляционного спектра, т. е. двойной ширины спектра сигнала. При таком условии контур отфильтровывает как постоянную составляющую и низкую частоту, так и высокочастотные составляющие, засоряющие модуляционный спектр.

Схема анодной модуляции показана на рис. 43. Ее отличие от схемы сеточной модуляции состоит в том, что напря-

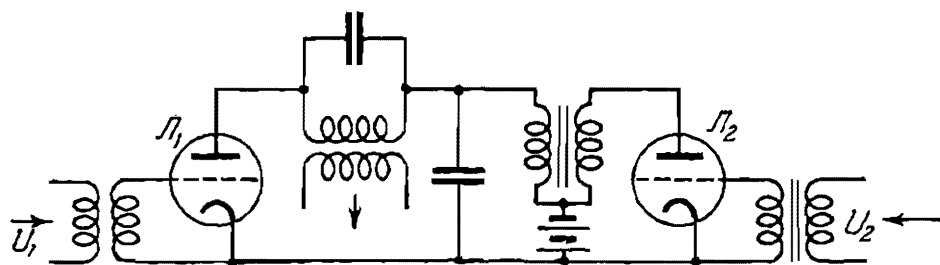


Рис. 43.

жение несущей частоты U_1 и модулирующее напряжение U_2 действуют в разных цепях лампы L_1 ; напряжение U_1 приложено непосредственно к сетке, а напряжение U_2 подается в анодную цепь. Так как действие напряжения в анодной цепи, грубо говоря, в μ раз слабее действия такого же напряжения в цепи сетки, то модулирующее напряжение предварительно усиливается вспомогательной лампой L_2 . С прин-

ципиальной точки зрения действие схем рис. 42 и 43 одинаково, но схема анодной модуляции рис. 43 имеет чисто технические преимущества, обсуждаемые в курсе передатчиков.

Б. Частотная модуляция

Для получения частотной модуляции необходимо изменять частоту задающего генератора, что проще всего сделать, изменяя настройку контура задающего генератора. В простейшей схеме радиотелефонной модуляции это достигается включением конденсаторного микрофона непосредственно в контур задающего генератора. В современной технике используется главным образом схема, действие которой основано на применении так называемой *реактивной лампы*. Реактивная лампа представляет собою устройство, входное сопротивление которого практически чисто реактивно, и изменяет свою величину в соответствии с изменениями подводимого модулирующего напряжения. Теория реактивной лампы в основе своей крайне проста и сводится к следующему. Составим схему рис. 44 и запишем выражение для тока I :

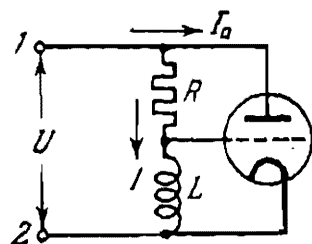


Рис. 44.

$$I = \frac{U}{R + j\omega L}.$$

Если выбрать параметры R и L так, чтобы было

$$R \gg \omega L,$$

то

$$I \cong \frac{U}{R}.$$

Напряжение на сетке

$$U_g = j\omega LI \cong j\omega \frac{L}{R} U.$$

Анодный ток (если пренебречь реакцией анода) равен

$$I_a = S U_g = j\omega \frac{LS}{R} U.$$

Положим теперь, что параметры подобраны так, что

$$I \ll I_a.$$

т. е. что входной ток полностью определяется анодным током I_a (а составляющей I пренебрегается). Тогда мы можем найти проводимость схемы между точками 1 и 2, разделив входной ток на приложенное напряжение

$$Y = \frac{I_a}{U} \cong j\omega \frac{LS}{R} = j\omega C_3,$$

где эквивалентная емкость

$$C_3 = \frac{LS}{R}.$$

Таким образом, оказывается, что при сделанных допущениях входная проводимость схемы имеет чисто емкостный характер, или, короче, что схема ведет себя, как емкость *).

Теперь остается сделать емкость управляемой. Это легко сделать, так как емкость зависит от крутизны. Выбрав рабочую точку на квадратичном участке характеристики триода,

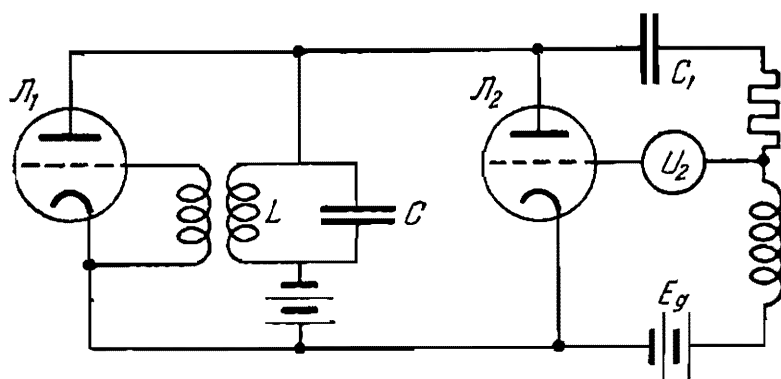


Рис. 45.

мы получим изменение крутизны, а следовательно, и эквивалентной емкости, пропорциональное изменению напряжения на сетке. В самом деле, если

$$I_a = a_0 + a_1 U + a_2 U^2,$$

то

$$S = \frac{dI_a}{dU} = a_1 + 2a_2 U.$$

Принципиальная схема модулятора ЧМ с реактивной лампой показана на рис. 45. На этой схеме $\mathcal{L}_1$ — генераторная

*) Изменив схему фазовращателя RL , можно получить индуктивную, а также любую комплексную входную проводимость.

лампа, LC — задающий контур, L_2 — подключенная параллельно контуру реактивная лампа, U_2 — модулирующее напряжение, подаваемое на сетку реактивной лампы, C_1 — емкость, защищающая сетку реактивной лампы от анодного напряжения, E_g — напряжение смещения для установки рабочей точки.

В. Импульсная модуляция

Мы не будем останавливаться на АИМ *), так как, во-первых, для этого вида модуляции пригодны те же способы, что и для обычной АМ, а во-вторых, АИМ мало употребительна в настоящее время вследствие своей малой помехоустойчивости. Наибольшее применение имеют ДИМ и ФИМ, механизм которых мы и рассмотрим. Простейший и наиболее распространенный способ получения последовательности импульсов, модулированных по фазе или по длительности, основан на наложении модулирующего напряжения на периодическое напряжение треугольной формы с основной частотой, равной частоте следования немодулированной последовательности импульсов. Полученная сумма напряжений подвергается дальнейшей обработке: ограничению, дифференцированию и т. п. Начнем с модуляции по длительности. На рис. 46, а изображено модулирующее напряжение, на рис. 46, б — треугольное напряжение, на рис. 46, в — результат сложения обоих напряжений. Если теперь ограничить

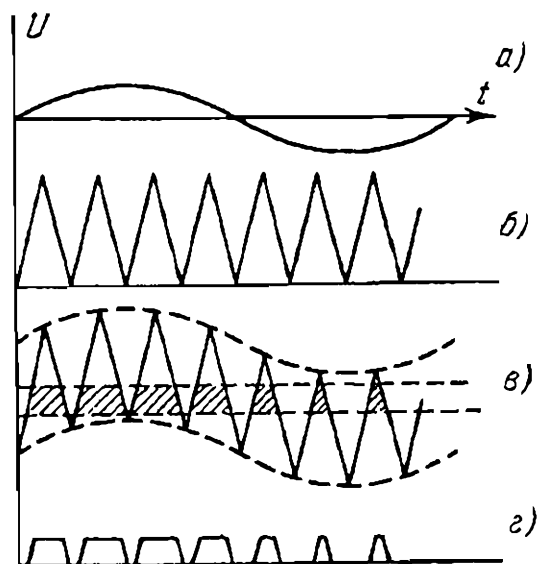


Рис. 46.

результатирующее напряжение сверху и снизу, как показано пунктирными линиями на рис. 46, в, то получатся трапециoidalные импульсы, модулированные по длительности. Крутизной скатов легко управлять, изменяя соотношение между размахом треугольного напряжения и полосой ограничения. Таким

*) См. стр. 46.

образом, скелетная схема ДИМ состоит из генератора треугольного напряжения (Г. т. н. на рис. 47), источника модулирующего напряжения (И. м. н.) и ограничителя (О). Схемы

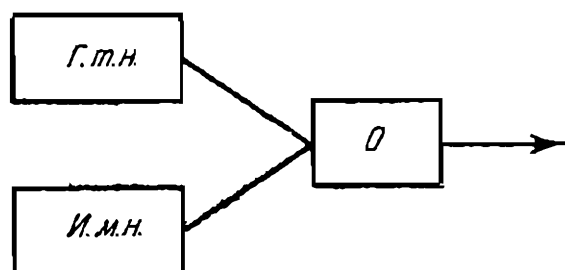


Рис. 47.

названных элементов никаких принципиальных особенностей не содержат, и мы ограничиваемся скелетной схемой. Для получения ФИМ можно использовать ДИМ как промежуточный продукт. Возьмем последовательность импульсов, модулированных

по длительности, в том виде, в каком эта последовательность нами получена вышеописанным способом, и продифференцируем ее (рис. 48, б). Получим прямоугольные импульсы противоположной полярности; положительные импульсы соответствуют переднему скату дифференцируемых тра-

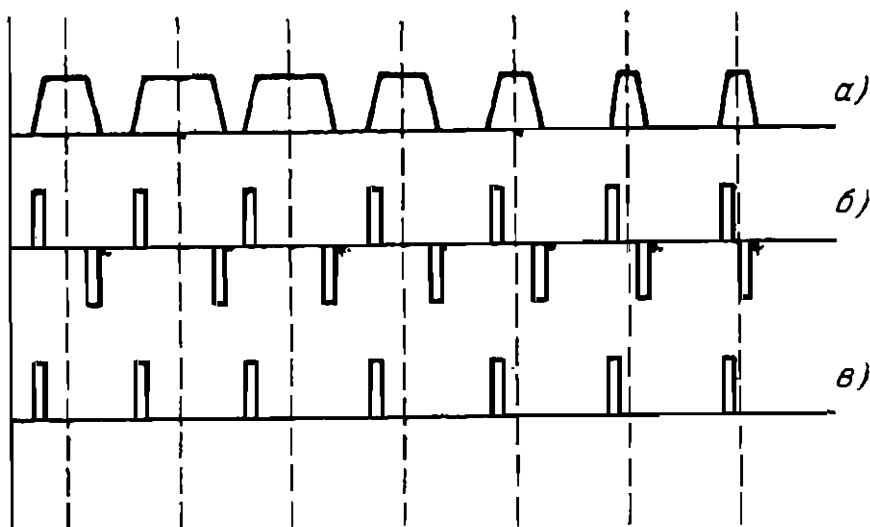


Рис. 48.

пециальных импульсов, отрицательные — заднему скату. Если теперь пропустить полученную последовательность через детектор, который отсекает отрицательные импульсы, то получится (рис. 48, в) последовательность прямоугольных *) им-

*) Практически импульсы не могут быть прямоугольными. Их форма также приближается к трапециевидной, т. е. скаты импульсов имеют конечную крутизну, определяемую шириной полосы пропускания всей схемы модулятора.

пульсов, модулированных по фазе, т. е. смещенных относительно тактовых точек, отмеченных на рис. 48 вертикальными линиями. Таким образом, скелетная схема ФИМ отличается от схемы ДИМ тем, что к ней добавляется дифференцирующее звено (Д) и детектор (Дет. на рис. 49). Варианты и подробности схем импульсной модуляции рассматриваются в соответствующих специальных курсах.

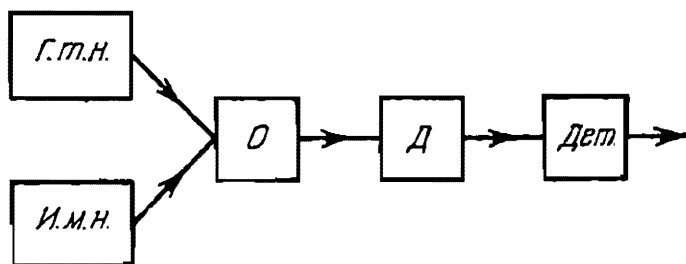


Рис. 49.

§ 14. Преобразование частоты

Рассмотренное выше преобразование спектра при АМ состоит в том, что низкочастотный спектр сигнала смещается по шкале частот в область радиочастот. Такое смещение может рассматриваться как частный случай более общей линейной операции, называемой в радиотехнике преобразованием частоты.

Под преобразованием частоты подразумевается вообще смещение спектра по шкале частот в ту или другую сторону, т. е. в область как более высоких, так и более низких частот. Предполагается, что при таком смещении или переносе спектра он не подвергается искажению.

Для преобразования частоты применяется общий прием, состоящий в том, что данное колебание (подлежащее преобразованию) умножается на синусоидальное колебание, доставляемое отдельным генератором — гетеродином. Этот прием называют часто гетеродинированием.

Сущность преобразования состоит в том, что при перемножении тригонометрических функций разных аргументов получаются два члена, один из которых зависит от суммы, другой — от разности аргументов, например

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)].$$

Рассмотрим для примера преобразование, состоящее в смещении модуляционного спектра из области радиочастот в область

так называемых промежуточных частот (порядка сотен килогерц). На рис. 50, а изображен исходный спектр, имеющий несущую частоту ω_0 и две сплошные боковые полосы. Рис. 50, б изображает спектр колебания гетеродина — одну спектральную линию с частотой ω_1 . На рис. 50, в представлен

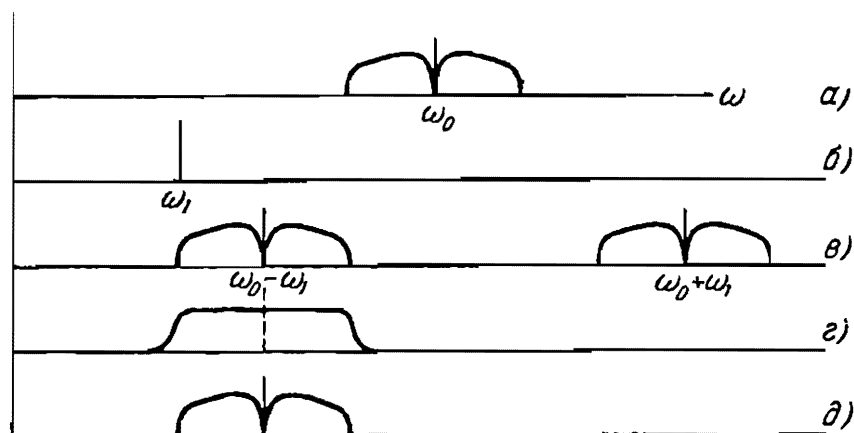


Рис. 50.

спектр на выходе перемножителя; он состоит из двух модуляционных спектров, имеющих несущие частоты $\omega_0 - \omega_1$ и $\omega_0 + \omega_1$. На рис. 50, г изображена частотная характеристика полосового фильтра промежуточной частоты (ф. п. ч.) и, наконец, на рис. 50, д — спектр на выходе фильтра; на рис. 51

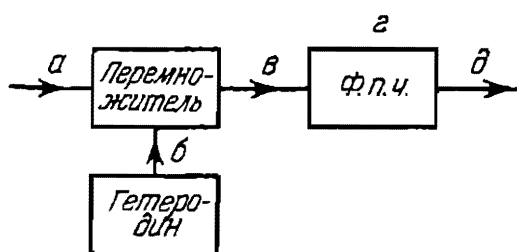


Рис. 51.

изображена скелетная схема устройства, выполняющего все описанные действия, в результате которых спектр исходного сигнала оказывается перемещенным с частоты ω_0 на частоту $\omega_0 - \omega_1$. Буквы на рис. 51 соответствуют рис. 50.

Заметим теперь, что если мы будем плавно изменять частоту гетеродина ω_1 , то преобразованный спектр будет плавно же перемещаться по шкале частот, так как средняя частота спектра

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_0 - \omega_1.$$

На возможности такого перемещения основан принцип действия супергетеродинного приемника. Принцип этот состоит в том, что на входе стоит перемножитель с гетеродином по схеме рис. 51; настройка осуществляется изменением частоты гетеродина. Усиление производится на промежуточной частоте,

причем усилитель промежуточной частоты (у. п. ч.) имеет большое число ступеней, снабженных фильтрами промежуточной частоты. Самое главное в этой схеме это то, что фильтры настроены раз навсегда на одну определенную полосу. В супергетеродинном приемнике не фильтры (или контуры) настраиваются на частоту принимаемого сигнала, а, наоборот, принимаемый сигнал настраивается на частоту у. п. ч. путем вышеописанного перемещения спектра сигнала по шкале частот. Это дает неоценимые преимущества. Во-первых, настройка приемника производится одной ручкой (управляющей частотой гетеродина), независимо от числа ступеней усиления. Во-вторых, фильтры ступеней у. п. ч., не подвергающиеся перестройке, могут быть сделаны по сложной схеме, обеспечивающей минимальные искажения при максимальной избирательности. Нужно, впрочем, заметить, что схема супергетеродинного приемника обычно усложняется введением у. в. ч. — усиления высокой частоты (до перемножителя), однако и в таком виде эта схема является наилучшей схемой приемника. Она показана в скелетной форме на

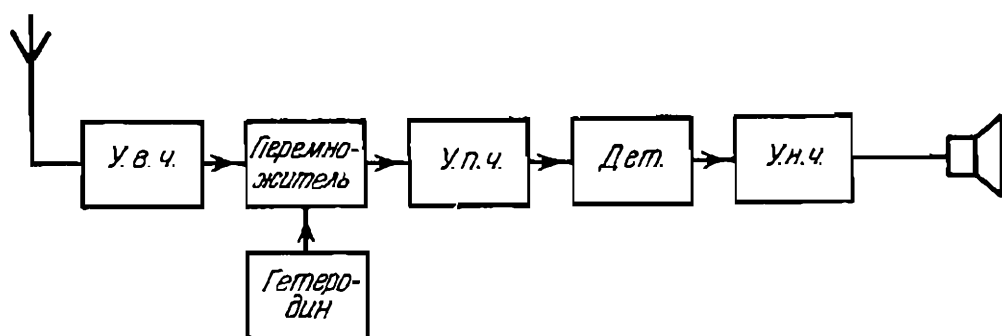


Рис. 52.

рис. 52. Кроме уже упомянутых элементов, на ней указаны детектор (Дет.) и усилитель низкой частоты (у. н. ч.).

Во многих радиотехнических устройствах как на передающем, так и на приемном конце системы радиосвязи прибегают к многократному преобразованию частоты.

В заключение заметим еще, что возможен специальный случай преобразования частоты, когда гетеродин настраивается в точности на частоту ω_0 . При этом модуляционный спектр смещается в область низких частот ($\omega_{\text{пр}} = 0$). Это есть случай так называемого синхронного детектирования, о котором речь будет позднее (§ 38).

ГЛАВА II

ГЕНЕРИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ

§ 15. Автоколебания

Всякое радиотехническое устройство представляет собою длинную цепь, составленную из линейных и нелинейных звеньев. Вдоль этой цепи проходят электрические колебания, передаваемые от звена к звену в усиленном или так или иначе преобразованном виде, в зависимости от назначения данного звена. Существенно, что в большинстве звеньев колебания возникают лишь под воздействием колебаний в предшествующем звене. Так, например, на выходе данной ступени усилителя колебания возникают лишь при подаче на вход данной ступени изменяющегося напряжения с выхода предшествующей ступени. При таких обстоятельствах мы называем колебания *вынужденными*.

Но если следовать от конца к началу сложной радиотехнической цепи, мы всегда дойдем до звена, в котором колебания не являются вынужденными, в котором они впервые зарождаются. Такого рода самостоятельно возникающие колебания носят название *автоколебаний*. Звено, в котором возникают автоколебания, называется по физической терминологии *автоколебательной системой*. С точки зрения техники это есть *генератор* колебаний. Автоколебательная система подчинена, разумеется, закону сохранения энергии; всякий электрический генератор можно рассматривать как преобразователь энергии источника постоянного тока в энергию электрических колебаний.

Рассмотрим типичный механизм автоколебаний; основные черты этого механизма мы найдем во многих конкретных схемах генераторов. Начнем со свободных колебаний в простейшем контуре. Если бы контур был без потерь, то в нем

происходили бы незатухающие колебания. Но во всяком реальном контуре имеются потери; кроме того, мы рассматриваем генератор как источник колебательной энергии, и, следовательно, некоторое количество энергии отбирается во внешние цепи, в нагрузку генератора. Поэтому простой контур не может служить генератором; запас энергии, который был ему первоначально сообщен, быстро исчерпается, и колебания затухнут. Следовательно, для получения незатухающих колебаний необходимо все время пополнять запас энергии в контуре, по мере ее расходования.

Итак, в состав генератора, кроме колебательного контура, должен входить *источник энергии*. Этим источником является батарея или выпрямитель — вообще источник постоянного напряжения. Для того чтобы поддержать колебания в контуре, необходимо, чтобы энергия подавалась в контур периодически, отдельными порциями, в такт с уже происходящими колебаниями; поток энергии должен быть пульсирующим. Орган, управляющий поступлением энергии в контур, мы назовем *клапаном*. Для того чтобы работа клапана была согласована с колебаниями в контуре, нужно, чтобы работа клапана

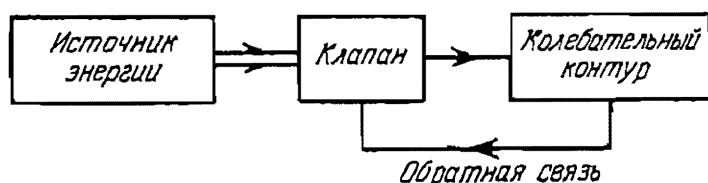


Рис. 53.

в свою очередь управлялась самим контуром. Механизм управления клапаном со стороны контура называется *обратной связью*. Таким образом, получается замкнутая цепь взаимодействия, которая и необходима для получения автоколебаний. Скелетная схема автоколебательной системы показана на рис. 53.

Покажем практическое осуществление этой схемы на примере простейшего лампового генератора, схема которого представлена на рис. 54. Потери энергии в контуре LC , обусловленные наличием сопротивления R , восполняются за счет импульсов анодного тока. Источником энергий служит анодная батарея. Роль клапана играет сетка триода, напряжение на сетке управляет анодным током. В свою очередь

напряжение на сетке определяется колебаниями в контуре. Цепь взаимодействия замыкается через катушку L_1 в анодной цепи триода, индуктивно связанную с катушкой контура L ; коэффициент взаимоиндукции обозначен через M . Таким образом, все перечисленные выше элементы автоколебатель-

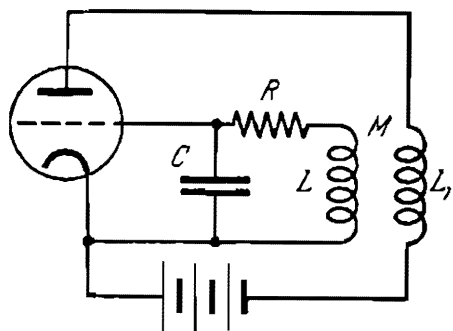


Рис. 54.

ной системы в схеме рис. 54 налицо. Однако нужно заметить, что хотя эта схема *может* генерировать колебания, но не обязательно *будет* их генерировать, если не выполнить некоторые обязательные условия. В дальнейшем нам предстоит сделать подробный анализ работы генератора. Нам нужно будет получить ответ на ряд основных вопросов, как, на-

пример: 1) при каких условиях возникнут автоколебания? 2) какова будет амплитуда установившихся автоколебаний?

На второй вопрос нельзя ответить, не разобравшись в той роли, которую играет нелинейность автоколебательной системы.

Предварительные соображения по этому поводу даны в следующем параграфе.

§ 16. Энергетика автоколебаний; динамическая устойчивость

Мощность, *теряемая* в сопротивлении R (рис. 54), равна

$$P_- = \frac{d^2}{2} \frac{U_m^2}{R},$$

т. е. пропорциональна квадрату амплитуды напряжения на контуре. Обозначим мощность, *поступающую* в контур за счет источника энергии, через P_+ . Если бы вся схема генератора, включая работу клапана и действие обратной связи, была линейна, то и мощность P_+ росла бы с квадратом амплитуды. Изобразим графически зависимости теряемой и получаемой контуром мощностей от амплитуды, выбрав для амплитуд квадратичный масштаб. В таком масштабе оба графика будут представлены для линейной системы прямыми линиями, проходящими через начало координат (рис. 55).

Если, как показано на рисунке, прямая P_+ лежит выше прямой P_- , то это означает, что контур получает больше энергии, чем теряет, т. е. что запас энергии в контуре возрастает, а это в свою очередь означает рост амплитуды колебания. Если же, наоборот, прямая P_+ лежала бы ниже P_- , то это означало бы, что расход энергии превосходит приход, и при таком условии в контуре были бы возможны только затухающие колебания.

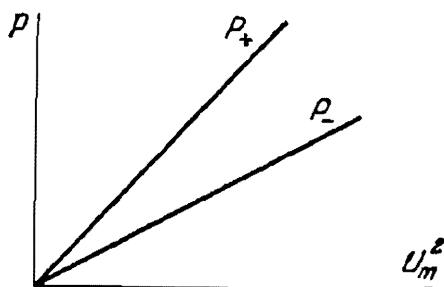


Рис. 55.

В условиях рис. 55 амплитуда росла бы неограниченно. Практически этого не может быть: всякая реальная схема нелинейна. В рассматриваемом случае нелинейность может быть обусловлена, например, насыщением триода или влиянием сеточного тока.

Благодаря влиянию нелинейности получаемая мощность P_+ растет медленнее, чем с квадратом амплитуды, график искривляется и принимает вид рис. 56. При некотором значении амплитуды графики P_+ и P_- пересекаются. Точка пересечения отвечает балансу энергии, т. е. точному равенству теряемой и получаемой энергии. Очевидно, что только при условии баланса энергии запас энергии в контуре остается неизменным, а, следовательно, амплитуда колебаний — постоянной. Таким образом, абсцисса точки пересечения на рис. 56 непосредственно определяет установившуюся амплитуду колебания U_0 .

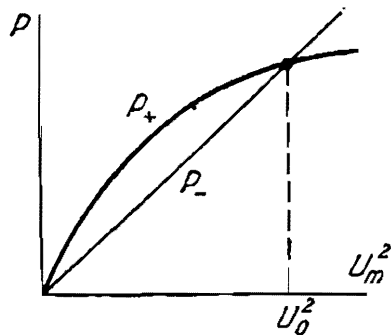


Рис. 56.

Итак, наличие нелинейности есть обязательное свойство автоколебательной системы, способной генерировать колебания с неизменной (установившейся) амплитудой.

Баланс энергии может достигаться и не при одном значении амплитуды. Рассмотрим рис. 57. Здесь имеются две точки пересечения, — спрашивается, которая из них определяет установившуюся амплитуду колебания? Нам придется ввести понятие об *устойчивости* колебательного движения, которую будем называть *динамической устойчивостью* (в отличие от статической устойчивости, которая характеризует не движение, а состояние равновесия). Мы будем

называть колебательное движение устойчивым, если имеется тенденция к сохранению установившейся амплитуды колебания. Пусть некоторое внешнее воздействие изменило амплитуду колебания, а затем это воздействие было прекращено, и система была предоставлена самой себе. Если теперь в системе восстановится первоначальное значение амплитуды, то мы скажем, что система динамически устойчива. Если же, напротив, амплитуда будет и далее изменяться в том же направлении уже без внешнего воздействия, то система динамически

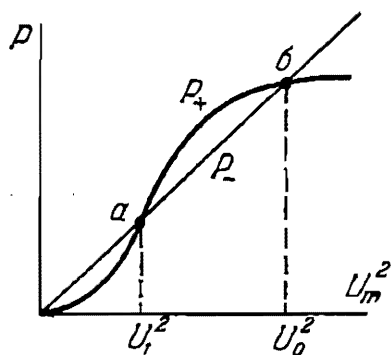


Рис. 57.

неустойчива. Легко видеть, что понятия динамической и статической устойчивости во многом сходны. Из приведенного определения сразу вытекает и способ испытания на устойчивость: достаточно вывести систему из данного состояния и посмотреть, как она будет себя вести в дальнейшем.

Применим этот способ к исследованию системы, соотношения в которой характеризуются графиками рис. 57.

Вопрос сводится теперь к тому, устойчивы или неустойчивы режимы, определяемые точками пересечения a и b . Начнем с точки a и предположим, что по какой-либо причине амплитуда стала меньше U_1 . В этой области прямая P_- лежит выше кривой P_+ , что означает, что система теряет энергии больше, чем получает. Поэтому амплитуда будет убывать и далее, пока колебания совсем не затухнут. Если же взять амплитуду больше чем U_1 , то будем иметь $P_+ > P_-$, и амплитуда будет возрастать. Отсюда следует, что точка a хотя и отвечает условию баланса энергии, но не является устойчивой: при малейшем изменении амплитуды появится тенденция к дальнейшему ее изменению в ту же сторону. Если амплитуда станет больше U_1 , то она будет затем нарастать и далее, пока не достигнет значения U_0 . Дальнейший рост амплитуды на этом прекратится, так как при $U_m > U_0$ мы имеем снова $P_- > P_+$. Таким образом, точка b является устойчивой точкой, и ее абсцисса определяет установившуюся амплитуду U_0 .

Итак, различие между системами, свойства которых отображены графиками рис. 56 и 57, состоит в том, что первая

самостоятельно раскачивается до установившейся амплитуды U_1 , вторая же нуждается в первоначальном толчке, который создал бы амплитуду, превосходящую U_1 , после чего дальнейшее нарастание амплитуды до U_0 произойдет уже автоматически. Первая система называется системой с *мягким самовозбуждением* или просто мягкой системой; вторая — системой с *жестким самовозбуждением*, или жесткой системой. Следует еще заметить, что различие между мягкой и жесткой системой сводится к тому, устойчива или неустойчива система в состоянии покоя (т. е. когда амплитуда равна нулю). Рассуждая, как выше, относительно начала координат (которое, ведь, также является точкой баланса), легко установить, что жесткая система имеет устойчивое состояние покоя, а мягкая — неустойчивое.

§ 17. Условие самовозбуждения генератора

Если не задаваться вопросом о величине установившейся амплитуды, а интересоваться лишь тем, возбуждятся в данной системе автоколебания или нет, то такая постановка вопроса приведет нас к линейной задаче. Действительно, мы интересуемся при этом лишь начальной стадией явления, когда колебания в генераторе только что возникли, т. е. когда амплитуды еще очень малы, тогда как нелинейность проявляется лишь при значительных амплитудах. Поэтому математическая формулировка задачи о самовозбуждении приведет нас к *линейному* дифференциальному уравнению. Составим такое уравнение для генератора по схеме рис. 58. Если обозначить: I — ток в контуре, I_a — переменная составляющая анодного тока, $U = U_g$ — напряжение на контуре, равное напряжению на сетке, то будем иметь уравнение напряжений в контуре

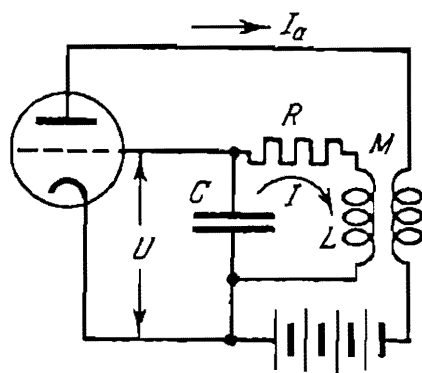


Рис. 58.

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (1)$$

Здесь в правой части стоит э. д. с., наводимая в контуре

катушкой связи. С другой стороны,

$$I_a = S_0 U, \quad U = \frac{1}{C} \int I dt,$$

где S_0 — крутизна триода. Учитывая эти соотношения, получаем из (1)

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = MS_0 \frac{dU}{dt}$$

или

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + (2\alpha - \omega_0^2 MS_0) \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0, \quad (2)$$

где, как обычно,

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

соответственно означают показатель затухания и резонансную частоту. Мы видим, что при наличии обратной связи показатель затухания изменяется: он убывает, так как величина $\omega_0^2 MS_0$ положительна. Показатель α характеризует скорость затухания колебаний, т. е. скорость расходования запаса энергии в контуре. Увеличивая обратную связь, можно достичь равенства

$$2\alpha - \omega_0^2 MS_0 = 0.$$

При этом результирующий (т. е. с учетом действия обратной связи) показатель затухания обратится в нуль. Это означает, что колебания уже не будут затухать. Отрицательный же показатель затухания означает, что колебания будут нарастать по экспоненциальному закону. Итак, условие

$$2\alpha - \omega_0^2 MS_0 \leq 0 \quad (3)$$

есть условие возникновения колебаний, т. е. *условие самовозбуждения* (система предполагается мягкой). Вводя затухание d контура, можно переписать это условие в виде

$$M \geq \frac{d}{\omega_0 S_0}. \quad (4)$$

Таким образом, чтобы генератор возбудился при данных затухании и настройке контура и при данном триоде, нужно увеличивать обратную связь (т. е. коэффициент взаимоиנדук-

ции M между контурной катушкой и катушкой обратной связи).

Условие самовозбуждения можно истолковать еще несколько иначе. Перепишем уравнение (2) в виде

$$L \frac{d^2 U}{dt^2} + \left(R - \frac{MS_0}{C} \right) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{C} U = 0.$$

Теперь можно представить дело так, что обратная связь вносит в контур *отрицательное сопротивление*

$$R' = -\frac{MS_0}{C} \quad (5)$$

и условие самовозбуждения с этой точки зрения состоит в том, что результирующее сопротивление становится отрицательным, т. е.

$$R + R' = R - \frac{MS_0}{C} \leq 0. \quad (6)$$

Такая трактовка вопроса очень распространена в радиотехнике.

§ 18. Комплексная обратная связь

Обратная связь в генераторе вносит в контур отрицательное активное сопротивление. Такого рода обратную связь называют *положительной* в отличие от *отрицательной обратной связи*, широко применяемой в усилителях и других радиотехнических устройствах для исправления характеристик и уменьшения искажений. Но обратная связь может рассматриваться и в более общем виде. Возьмем к примеру схему рис. 59. Здесь имеется контур LCR . Усиленное напряжение снимается с сопротивления в анодной цепи триода и через *фазовращатель* Φ вводится обратно в контур; обусловленное обратной связью дополнительное напряжение U' может иметь произвольную фазу и произвольную амплитуду. Это и есть наиболее общий случай обратной связи. На рис. 60, а

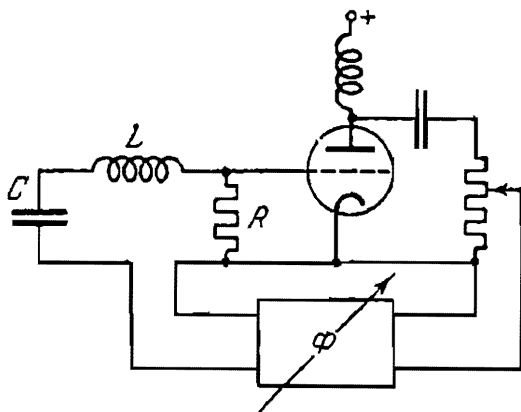


Рис. 59.

показана векторная диаграмма напряжений в контуре. Если разделить все напряжения на общий ток, то можно перейти от диаграммы напряжений к совершенно подобной ей диаграмме сопротивлений, как это делается в теории переменных токов. Диаграмма сопротивлений изображена на рис. 60, б. Она соответствует эквивалентной схеме рис. 61, на которой

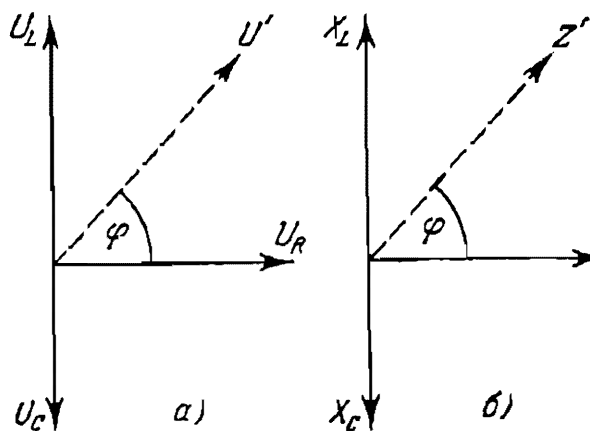


Рис. 60.

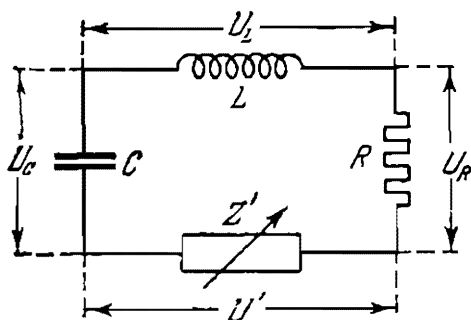


Рис. 61.

обозначены также все напряжения. Теперь мы видим, что действие обратной связи в общем случае может быть истолковано как внесение в схему *произвольного* комплексного сопротивления. Характер этого сопротивления зависит от фазы обратной связи. При $\varphi = 0$ мы имеем $Z' = R'$, результирующее активное сопротивление возрастает; это есть отрицательная обратная связь. При $\varphi = \pi$ получаем $Z' = -R'$, т. е. обратная связь вносит отрицательное активное сопротивление; это есть положительная обратная связь. Если при этом R' по абсолютному значению больше R , то результирующее сопротивление отрицательно, и в системе возникают автоколебания. Таким образом, при положительной обратной связи условие

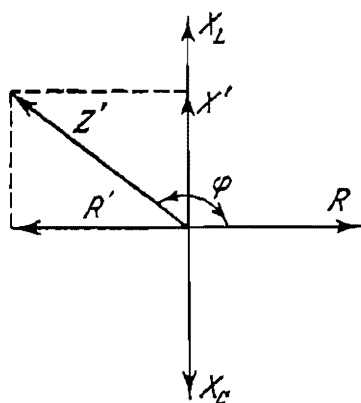


Рис. 62.

$$|R'| > R$$

есть условие самовозбуждения.

Рассмотрим теперь случай произвольного угла φ . Пусть значение φ заключено между $\pi/2$ и π (рис. 62). Тогда вно-

симое обратной связью сопротивление Z' комплексно и может быть выражено как

$$Z' = R' + jX',$$

что с геометрической точки зрения означает построение двух проекций вектора Z' , как показано на рисунке. Если $|R'| > R$, то система самовозбудится. Что же касается X' , то, как видно из диаграммы, наличие X' равносильно увеличению индуктивного сопротивления X_L (или, что то же самое, уменьшению емкостного сопротивления X_C). Иначе говоря, при описываемых условиях обратная связь как бы увеличивает индуктивность или емкость. Следствием этого является изменение *настройки* контура и при возбуждении в системе колебаний они будут иметь меньшую частоту, чем резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

самого контура. Если $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, то обратная связь будет повышать частоту колебаний. Отсюда следует, что во избежание влияния обратной связи на частоту нужно позаботиться, чтобы в генераторе фаза обратной связи была точно равна π ($\varphi = 180^\circ$; «чистая» положительная обратная связь)*). С другой же стороны, все описанные соотношения можно использовать для построения схемы частотной модуляции. Если фаза лежит в пределах $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то влияние обратной связи на настройку сохраняется, но автоколебания уже невозможны, так как составляющая R' дает отрицательную обратную связь, т. е. увеличивает результирующее сопротивление контура.

§ 19. Инженерные критерии устойчивости

Вопрос о возможности возникновения автоколебаний в некоторой схеме интересует нас в радиотехнике не только с точки зрения построения генераторов. Генератор есть

*) В генераторе по схеме рис. 54 это условие выполнено. Если схема не генерирует, то первое, что нужно сделать, — это поменять концы у одной из катушек (не меняя ее положения), так как возможно, что катушка включена неправильно, и вместо положительной обратной связи получается отрицательная.

источник колебаний; автоколебания являются основной его функцией. Другие же звенья радиотехнических устройств, как, например, усилители, преобразователи частоты, детекторы и т. п. работают в режиме вынужденных колебаний, и возникновение в этих звеньях автоколебаний в большинстве случаев не только не желательно, но совершенно недопустимо. Поэтому вопрос о возможности возникновения автоколебаний в данной схеме имеет в радиотехнике довольно широкое значение. Вопрос этот ставится как вопрос об устойчивости в том смысле, что схема устойчива, если в нормальном для нее режиме автоколебания в ней не возникают, и наоборот. Таким образом, всякий генератор*) принципиально должен быть неустойчивым, а все остальные схемы, назначением которых не является генерирование колебаний, должны быть устойчивыми. Следует пояснить, что речь идет здесь об устойчивости начального состояния системы, а не об устойчивости уже существующих автоколебаний — см. по этому поводу § 16.

Общий вопрос об устойчивости, т. е. о том, могут или нет в данной системе возбудиться автоколебания, решается на основании некоторых общих признаков, выражаемых с помощью так называемых *критериев устойчивости*. Существует несколько критериев устойчивости, по-разному отображающих единые свойства системы. В основе всех известных критериев лежит исследование корней характеристического уравнения системы.

Дело в том, что решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = 0$$

имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\gamma_k t},$$

где A_k — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, а γ_k — корни характеристического уравне-

*) В этом параграфе здесь и дальше имеется в виду генератор с мягким возбуждением.

ния. Система будет устойчивой, если вещественные части всех корней отрицательны. Физически это означает, что все колебания, возникшие в системе по тем или иным причинам, будут затухающими. Возможно, не решая характеристического уравнения, т. е. не находя корней, установить, выполняется ли вышеуказанное требование. Это можно сделать при помощи критерия Рауса-Гурвица, основанного на свойствах определителей, составленных из коэффициентов a_k .

Критерий Рауса-Гурвица имеет чисто аналитический характер. Существуют и другие критерии, которым придана форма графических построений, что делает их более пригодными для инженерной практики. Мы приведем здесь без доказательства описание двух наиболее известных и распространенных критериев устойчивости, а именно критерия Найквиста и критерия Михайлова.

Начнем с некоторых предварительных соображений. Положим, что имеется некоторая схема, например усилитель, изображенный на рис. 63, а в виде четырехполюсника, и

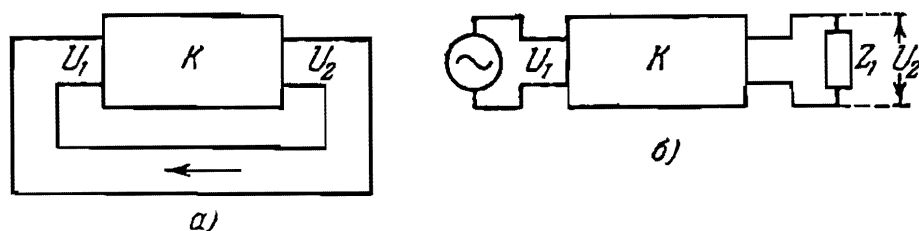


Рис. 63.

пусть вход и выход усилителя соединены между собою накоротко, как показано на рисунке, так что имеется обратная связь с выхода на вход. При таких условиях вполне возможно, что усилитель загенерирует, т. е. что возбудятся автоколебания. Заметим, что если в замкнутой схеме рис. 63, а действительно существуют установившиеся автоколебания, то переменное напряжение на выходе в точности равно переменному напряжению на входе по той простой причине, что вход и выход непосредственно соединены между собою. Если схема генерирует синусоидальные колебания, то равенство напряжений означает равенство комплексных амплитуд. Иначе говоря, амплитуды напряжений равны, а фазовый сдвиг равен нулю. Это условие известно под названием условия *баланса фаз и амплитуд*.

Разорвем теперь цепь обратной связи и попытаемся воспроизвести в разомкнутой схеме такой же режим, который имелся в замкнутой схеме. Для этого нужно подать на вход переменное напряжение от независимого генератора. На выходном же конце нужно нагрузить четырехполюсник сопротивлением, равным входному сопротивлению четырехполюсника. Если теперь подать от генератора напряжение той же частоты, которую схема генерировала при наличии обратной связи, то прежние условия работы будут полностью сохранены и окажется, что $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ ($\dot{U}$ означает комплексную амплитуду напряжения). Теперь предположим, что частота генератора в схеме рис. 63, б плавно изменяется от 0 до ∞ . Для каждого значения частоты можно определить комплексное отношение

$$K(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}.$$

Это отношение в случае усилителя выражает не что иное, как коэффициент усиления (по напряжению); в случае же произвольного четырехполюсника величину K называют коэффициентом передачи. Коэффициент передачи, представляющий собою отношение комплексных амплитуд, есть комплексная величина, которую можно записать в виде

$$K(\omega) = k e^{j\varphi},$$

где k — вещественное отношение амплитуд, а φ — фазовый сдвиг между напряжениями на входе и на выходе. Условие баланса фаз и амплитуд выражается через эти две величины двумя равенствами:

$$k = 1, \quad \varphi = 0.$$

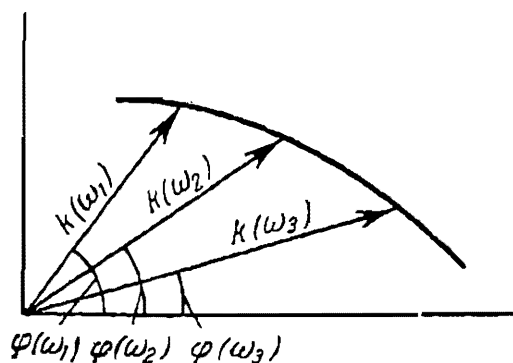


Рис. 64.

Важно заметить, что, во-первых, эти равенства являются *точными*, а во-вторых, в установившемся режиме *оба* равенства обязательно выполняются.

Будем теперь строить K как вектор на комплексной плоскости и следить за траекторией конца этого вектора при изменении частоты. Эту траекторию называют амплитудно-фазовой характеристикой. Построение показано на рис. 64.

Во многих случаях коэффициент передачи при $\omega = 0$ и при $\omega = \infty$ равен нулю. В этих случаях амплитудно-фазовая характеристика образует замкнутый контур; точки начала и конца обхода контура совпадают с началом координат. Каждая точка амплитудно-фазовой (а.-ф.) характеристики отвечает определенному значению частоты.

Если *установившиеся* автоколебания возможны, то а.-ф. характеристика проходит через точку с полярными координатами $k = 1$, $\varphi = 0$ — так называемая «точка (1, 0)», отвечающая условию баланса фаз и амплитуд. При этом будут генерироваться колебания с частотой, отвечающей положению вектора k вдоль вещественной оси ($\varphi = 0$).

Если при $\varphi = 0$ $k < 1$, то это означает, что колебания в системе могут быть только затухающими. Если же $k > 1$, то это значит, что колебания не только возникнут, но будут нарастать. Отсюда и следует критерий Найквиста:

Замкнутая система будет неустойчивой, т. е. в ней возникнут автоколебания, если а.-ф. характеристика разомкнутой системы охватывает точку (1, 0).

На рис. 65 показаны примеры а.-ф. характеристик для устойчивой и неустойчивой систем.

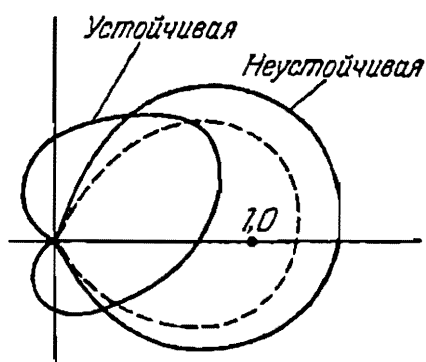


Рис. 65.

Амплитудно-фазовая характеристика может быть снята экспериментально по схеме рис. 63, а либо вычислена, если схема и параметры четырехполюсника известны.

Амплитудно-фазовые характеристики не только могут дать ответ на вопрос об устойчивости системы, но позволяют также определить частоту и амплитуду установившихся колебаний. Мы не затрагивали до сих пор вопроса о том, при каких амплитудах входного напряжения снимается а.-ф. характеристика. Если бы исследуемый четырехполюсник был линейным, то коэффициент передачи K не зависел бы от амплитуды. При таких условиях $k > 1$ при $\varphi = 0$ означало бы неограниченное нарастание амплитуды автоколебаний, так как *установившийся* режим с неизменной амплитудой может быть только при $k = 1$. В действительности всякая система

нелинейна, а потому по мере увеличения амплитуды коэффициент передачи убывает. Контур а.-ф. характеристики при этом *стягивается* (пунктир на рис. 65) и если первоначально точка (1, 0) была охвачена этим контуром ($k > 1$), то рано или поздно контур пройдет через точку (1, 0). Амплитуда, при которой это случится, и есть установившееся значение амплитуды. Одновременно определится и значение частоты, генерируемой системой в установившемся режиме. Теперь мы можем уточнить вышеприведенную формулировку критерия Найквиста в том смысле, что если речь идет об устойчивости системы в состоянии покоя (т. е. когда колебаний еще нет), то а.-ф. характеристика должна сниматься при самых малых амплитудах входного напряжения.

В качестве примера выведем с помощью критерия Найквиста условие самовозбуждения для генератора с контуром в цепи сетки, уже рассмотренного выше (см. § 15). На рис. 66, а дана замкнутая схема генератора, на рис. 66, б —

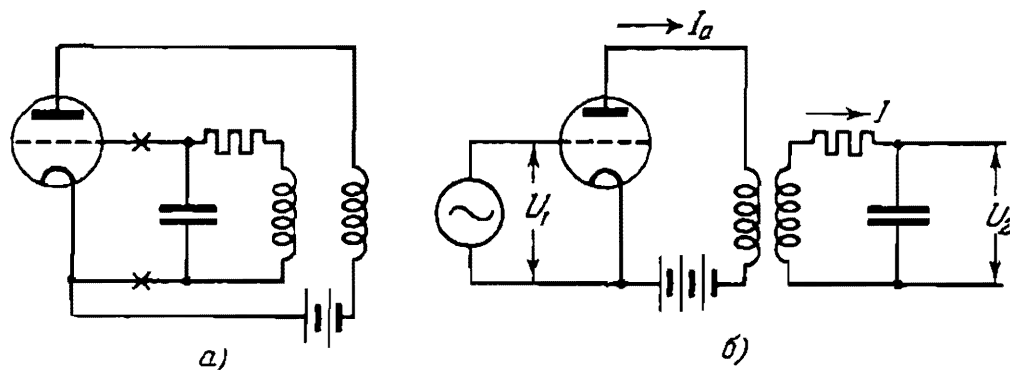


Рис. 66.

та же схема в разомкнутом виде (цепь обратной связи разорвана в точках, отмеченных на рис. 66, а крестиками). Найдем коэффициент передачи для схемы рис. 66, б. Мы имеем $I_a = SU_1$, $e = j\omega MI_a$,

$$I = \frac{e}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \quad U_2 = \frac{I}{j\omega C},$$

откуда

$$K = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{MS}{C} \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (1)$$

Найдем модуль и аргумент этого выражения

$$k = |K| = \frac{MS}{C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (2)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}. \quad (3)$$

Уравнение а.-ф. характеристики в полярных координатах имеет вид

$$k = \frac{MS}{RC} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{MS}{RC} \cos \varphi. \quad (4)$$

Таким образом, график а.-ф. характеристики в рассматриваемом случае имеет вид окружности, проходящей через начало координат и расположенной симметрично относительно вещественной оси (рис. 67). Диаметр окружности равен

$$k_0 = \frac{MS}{RC}.$$

Легко видеть, что условие охвата точки (1, 0) выполняется при

$$k_0 = \frac{MS}{RC} \geq 1, \quad (5)$$

а это и есть условие самовозбуждения, полученное другим путем в § 17.

Что касается генерируемой частоты,

то для ее определения нужно приравнять φ нулю. Это дает (см. (3))

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

В более общем случае мы будем иметь нелинейное выражение, в котором k будет функцией как частоты, так и амплитуды. В этом случае, составляя два уравнения, выражающие условие баланса фаз и амплитуд, т. е.

$$k = 1, \quad \varphi = 0,$$

мы найдем из них две искомые величины: амплитуду и частоту установившихся колебаний.

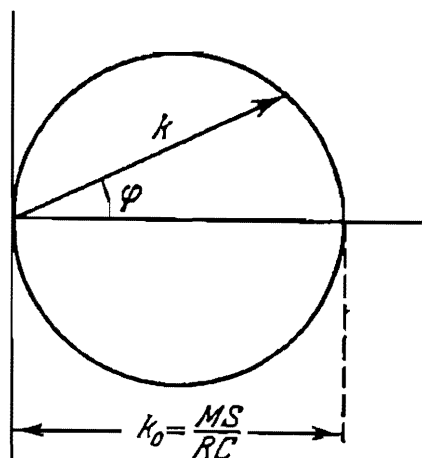


Рис. 67.

Перейдем к критерию Михайлова. Его отличие от критерия Найквиста состоит прежде всего в том, что он приспособлен для исследования устойчивости замкнутых систем. Составляется уравнение данной системы с учетом обратной связи в операторной форме и приводится к виду

$$D(p)x = 0,$$

где x — колебательная величина (ток, напряжение), относи-

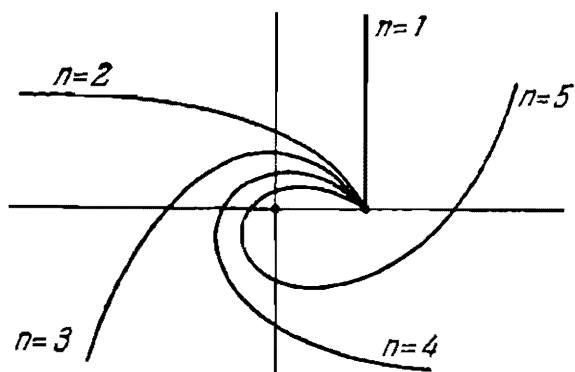


Рис. 68.

тельно которой составлено уравнение. Затем подстановкой $p = j\omega$ образуется комплексная величина $D(j\omega)$. Эта величина представляется вектором на комплексной плоскости. Частоте при- даются все значения от 0 до ∞ . При этом конец век- тора D описывает траекто- рию, называемую годогра- фом Михайлова. Вид этого

годографа и определяет устойчивость системы на основании следующего правила:

Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до ∞ вектор D , беря начало на положительной вещественной полуоси, вращался только против часовой стрелки, нигде не обращаясь в нуль. При этом для системы, описываемой уравнением n -го порядка, вектор поворачивается при изменении частоты в указанном интервале на угол $n \frac{\pi}{2}$.

Это правило и есть формулировка критерия Михайлова.

На рис. 68 изображены годографы для устойчивых систем различных порядков.

Покажем применение критерия Михайлова на примере, в качестве которого возьмем все тот же генератор по схеме рис. 66, а. Для этого генератора в § 17 было выведено следующее уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(R - \frac{MS_0}{C} \right) \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0,$$

или в операторной форме

$$(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)U = D(p)U = 0,$$

где для сокращения обозначено

$$2\beta = \frac{1}{L} \left(R - \frac{MS_0}{C} \right).$$

По физическому смыслу β есть результирующий (т. е. с учетом действия обратной связи) показатель затухания. Заменяя p на $j\omega$, получим

$$D(j\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + j2\omega\beta = u + jv.$$

Уравнение годографа удобнее в данном случае выразить в прямоугольных координатах u и v . Мы имеем

$$u = \omega_0^2 - \omega^2, \quad v = 2\beta\omega.$$

Исключая ω , получим

$$u = \omega_0^2 - \frac{v^2}{4\beta^2}.$$

Это есть уравнение параболы. Мы рассматриваем только одну ветвь параболы, отвечающую положительным значениям ω . Учитывая это, получим для различных значений

семейство кривых, представленное на рис. 69. Кривые, лежащие выше вещественной оси, удовлетворяют условию устойчивости; они соответствуют положительным значениям β . Система теряет устойчивость при $\beta = 0$, т. е. при

$$R = \frac{MS_0}{C}.$$

Кривые, лежащие ниже оси, соответствуют уже отрицательным значениям β ; применяя к ним вышеуказанное правило, видим, что эти кривые выражают неустойчивые состояния системы, так как вектор D поворачивается (при следовании его конца по кривой) по часовой стрелке.

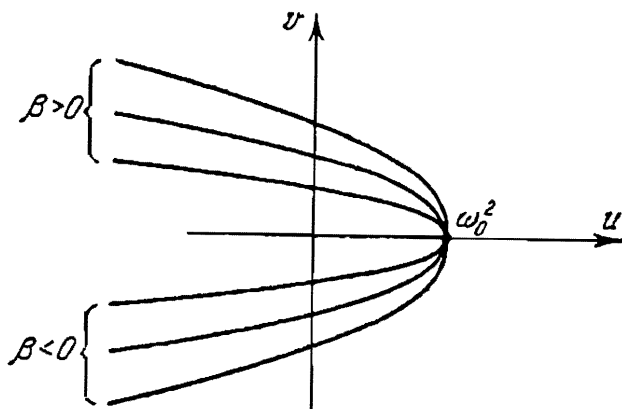


Рис. 69.

§ 20. Установившийся режим генератора

В этом параграфе мы будем исследовать установившийся режим лампового генератора, пользуясь элементарной квазилинейной теорией.

Сущность квазилинейной теории генератора состоит в том, что нелинейность, ограничивающая амплитуду автоколебаний, учитывается в уравнении генератора особым образом, а именно: в качестве одного из параметров в уравнение вводится *средняя крутизна* триода, которая есть не постоянная величина, а функция *амплитуды* колебаний. Однако для неизменной амплитуды, т. е. для незатухающих и не нарастающих колебаний средняя крутизна также остается неизменной. Отсюда следует, что в *установившемся* режиме со средней крутизной можно обращаться как с постоянной величиной, а стало быть, уравнение генератора принимает форму линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Отсюда и названия «квазилинейная (как бы линейная) теория», «квазилинейное уравнение». Из сказанного следует, что квазилинейная теория приспособлена в первую очередь для исследования установившихся режимов. Впрочем, с ее помощью можно разрешать и более сложные вопросы.

Мы будем вычислять методами квазилинейной теории установившуюся амплитуду колебаний в ламповом генераторе. Объектом исследования послужит опять генератор с контуром в цепи сетки. Составим уравнение напряжений для контура

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (1)$$

Предположим, что напряжение и ток в контуре синусоидальны. Это — обычное для квазилинейной теории предположение. Оно означает, что мы пренебрегаем влиянием гармоник наводимой в контуре э. д. с., т. е. влиянием гармоник анодного тока. Практически это предположение оправдывается тем, что контур генератора, обладая большой добротностью, а следовательно, высокой избирательностью, отфильтровывает гармоники. Таким образом, мы можем в правой части заменить анодный ток его первой гармоникой. После этого возможен переход к комплексной форме уравнения (1) (путем

замены дифференцирования по времени умножением на $j\omega$:

$$\left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}\right)i = j\omega M i_{a_1},$$

или, вводя

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} i,$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L}\right)\dot{U} = j\omega M i_{a_1} \frac{1}{LC}. \quad (2)$$

Здесь i_{a_1} — амплитуда первой гармоники анодного тока. Воспользуемся определением средней крутизны

$$S_c = \left| \frac{i_{a_1}}{\dot{U}} \right| = \frac{i_{a_1}}{\dot{U}}$$

и получим

$$\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{1}{L} \left(R - \frac{MS_0}{C}\right) = 0.$$

Это равенство может рассматриваться как уравнение частоты. Разрешая его относительно частоты, найдем, что частота комплексна. Известно, что это значит: комплексное значение частоты выражает нарастающие или затухающие по экспоненциальному закону колебания. Но мы рассматриваем установившийся режим, при котором амплитуда колебаний неизменна. В таком режиме частота может иметь только вещественное значение. Значит, мнимый член в выражении (2) должен равняться нулю. Отсюда сразу находим частоту установившихся колебаний:

$$\omega = \omega_0$$

при условии

$$R - \frac{MS_0}{C} = 0. \quad (3)$$

Это последнее соотношение очень похоже по внешнему виду на формулу (6) § 17, но имеет совершенно другой смысл. *Неравенство*

$$R - \frac{MS_0}{C} \leq 0,$$

выведенное в § 17, выражает условие самовозбуждения. Входящая в него величина S_0 есть *начальная крутизна*,

или крутизна в рабочей точке, определяемая как

$$S_0 = \left(\frac{dI_a}{dU} \right)_{U=E_0},$$

где E_0 — абсцисса рабочей точки на характеристике лампы. Выражение же (3) представляет собою *равенство*, обязательно выполняемое при установившихся колебаниях с конечной амплитудой. Входящая в (3) величина S_0 есть *средняя крутизна*, зависящая не только от выбора рабочей точки, но и от амплитуды. Но если S_0 есть функция амплитуды, то (3) может рассматриваться как уравнение, решая которое мы можем найти установившуюся амплитуду. Именно это мы сейчас и сделаем.

Первый шаг состоит в том, что мы выбираем подходящую аппроксимацию характеристики лампы. Для наших целей достаточно представить характеристику многочленом пятой степени

$$I_a = a_0 + a_1 U + a_3 U^3 + a_5 U^5. \quad (4)$$

Для получения дифференциальной крутизны

$$S = \frac{dI_a}{dU}$$

достаточно было бы продифференцировать (4) по U . Но нам нужно найти среднюю крутизну. Положим для этого

$$U = U_m \cos \omega t.$$

Тогда

$$I_a = a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_3 U_m^3 \cos^3 \omega t + a_5 U_m^5 \cos^5 \omega t.$$

Пользуясь таблицей 1 степеней тригонометрических функций (стр. 20), получим

$$\begin{aligned} I_a = & a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + \frac{1}{4} a_3 U_m^3 (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t) + \\ & + \frac{1}{16} a_5 U_m^5 (10 \cos \omega t + 5 \cos 3\omega t + \cos 5\omega t). \end{aligned}$$

Отсюда амплитуда первой гармоники (т. е. коэффициент при $\cos \omega t$)

$$I_{a_1} = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5.$$

Средняя крутизна по определению

$$S_c = \frac{I_{a_1}}{U_m} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U_m^2 + \frac{5}{8} a_5 U_m^4. \quad (5)$$

Итак, мы получили выражение для средней крутизны как функции амплитуды. Из (3) получаем

$$S_c - \frac{RC}{M} = 0, \quad (6)$$

или

$$\frac{5}{8} a_5 U_m^4 + \frac{3}{4} a_3 U_m^2 + a_1 - \frac{RC}{M} = 0. \quad (7)$$

Это есть биквадратное уравнение, легко разрешаемое относительно интересующей нас амплитуды U_m .

Не останавливаясь на этом, представим уравнение (6) в графической форме. Будем откладывать оба члена левой части (6), т. е. величины S_c и $\frac{RC}{M}$ по оси ординат, а амплитуду напряжения U_m — по оси абсцисс. $\frac{RC}{M}$ не зависит от U_m , это — постоянная величина, график которой есть горизонтальная прямая. Прямую эту мы будем называть прямой обратной связи, так как ее расположение зависит от глубины обратной связи, выражаемой через коэффициент взаимоиндукции M . Средняя крутизна зависит от амплитуды, и график этой зависимости будет выражаться некоторой кривой, форма которой зависит от знаков и величин коэффициентов a_k . Положим для начала, что оба коэффициента a_3 и a_5 отрицательны. Тогда средняя крутизна, имеющая при $U_m = 0$ значение

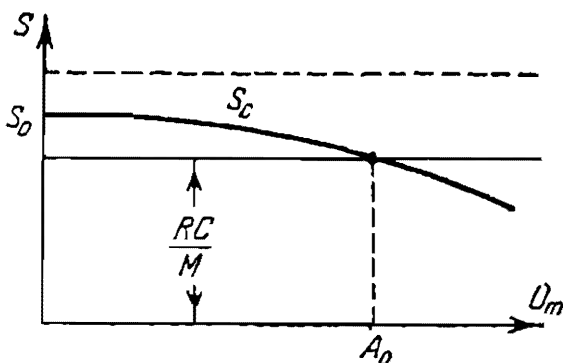


Рис. 70.

$$S_0 = a_1 = S_0,$$

с увеличением U_m монотонно убывает. График для этого случая показан на рис. 70. Если прямая обратной связи лежит выше кривой S_c (пунктир на рис. 70), то равенство (6) не выполняется ни при каких значениях амплитуды, и авто-

колебания вообще невозможны. Если же увеличить обратную связь, то прямая обратной связи опустится и будет пересекаться с кривой S_0 в некоторой точке, как показано на рис. 70. Точка пересечения отвечает равенству (6); абсцисса этой точки непосредственно дает установившуюся амплитуду A_0 . Если обратная связь будет увеличена, то прямая обратной связи опустится еще ниже, точка пересечения сдвинется вправо. Это означает, что амплитуда установившихся колебаний увеличится. Если же мы будем уменьшать обратную связь, то точка пересечения будет двигаться влево, пока не дойдет до оси ординат. При этом $S_c = S_0$, и это положение соответствует границе области самовозбуждения; амплитуда при этом обращается в нуль; при дальнейшем уменьшении обратной связи условие самовозбуждения не будет уже выполнено и автоколебания не возникнут.

Вся описанная картина относится к *мягкой* системе. В самом деле, так как

$$S_c < S_0,$$

то, если выполнено условие самовозбуждения

$$\frac{RC}{M} - S_0 \leq 0,$$

обязательно возникают автоколебания с вполне определенной установившейся амплитудой.

Рассмотрим теперь другой случай: пусть $a_3 > 0$, $a_5 < 0$. При малых амплитудах квадратичный член (см. формулу (5))

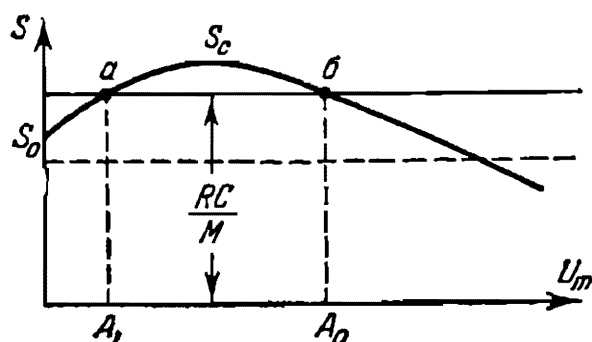


Рис. 71.

преобладает, а потому вначале S_c *растет* с увеличением амплитуды. В дальнейшем же член, содержащий четвертую степень амплитуды, а потому растущий быстрее квадратичного, оказывает решающее влияние, и средняя крутизна, достигнув максимума, начинает убывать. Кривая средней

крутизны для рассматриваемого случая показана на рис. 71. Пусть прямая обратной связи занимает положение, показан-

ное на рисунке сплошной прямой. Условие самовозбуждения

$$S_0 > \frac{RC}{M}$$

при этом не выполнено, и автоколебания не возникнут. Однако имеются две точки пересечения кривой S_0 с прямой обратной связи. Для обсуждения состояния системы в этих точках введем термины *избыток* и *недостаток крутизны*, относящиеся к неравенствам

$$S_c \geq \frac{RC}{M}.$$

Эти термины имеют прямую связь с энергетическими соотношениями: избыток крутизны ($S_c > \frac{RC}{M}$) означает, что система получает энергии больше, чем теряет, а недостаток крутизны ($S_c < \frac{RC}{M}$) — что, наоборот, расход энергии больше прихода.

Рассмотрим состояние системы в точке *a*. Если амплитуда по какой-либо причине больше U_1 , то будем иметь избыток крутизны, и амплитуда будет возрастать и далее. Если же амплитуда станет меньше U_1 , то вследствие недостатка крутизны она будет убывать и далее, пока колебания не затухнут. Таким образом, точка *a* есть неустойчивая точка. В точке же *b* увеличение амплитуды вызывает недостаток крутизны, а уменьшение амплитуды — избыток крутизны. Таким образом, точка *b* есть устойчивая точка; абсцисса этой точки определяет установившуюся амплитуду. Графики рис. 70 изображают свойства жесткой системы: для того чтобы получить установившиеся колебания, нужно дать системе такой начальный толчок, чтобы возникли колебания с амплитудой, большей U_1 . Дальнейшее увеличение амплитуды вплоть до установившегося значения U_0 произойдет автоматически. Графики рис. 70 и 71 изображают по существу те же энергетические соотношения, что и графики рис. 56 и 57. Если увеличить обратную связь настолько, что будет выполнено условие самовозбуждения (пунктирная прямая на рис. 71), то система делается мягкой, независимо от формы кривой средней крутизны.

Можно получить как мягкий, так и жесткий режим при одном и том же триоде, путем соответствующего выбора

рабочей точки. Если рабочая точка выбрана в точке перегиба характеристики

$$I_a = f(U_g),$$

то средняя крутизна будет монотонно убывать с увеличением амплитуды (рис. 70). Если же взять рабочую точку на загибе характеристики, то средняя крутизна будет сначала возрастать, а затем убывать. Аналитически условие получения того или иного режима выражается знаком коэффициента при

члене третьей степени в разложении характеристики в степенной ряд. Если обозначить напряжение смещения через E_0 (абсцисса рабочей точки), то имеем по формуле Тейлора

$$I = f(E_0 + U) = f(E_0) + f'(E_0) \frac{U}{1!} + f''(E_0) \frac{U^2}{2!} + f'''(E_0) \frac{U^3}{3!} + \dots$$

Таким образом,

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(E_0),$$

Рис. 72.

т. е. коэффициент a_3 (см. (4)), знак которого опреде-

ляет мягкость или жесткость системы, пропорционален третьей производной функции $f(U)$ в рабочей точке $U = E_0$.

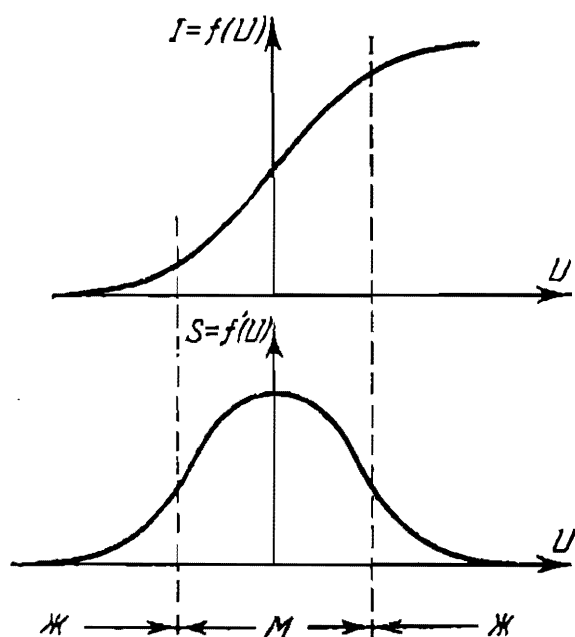
Равенство

$$f'''(E_0) = 0$$

определяет границу между мягким и жестким режимом. Но при $f''' = 0$ имеем максимум или минимум f'' , что соответствует точке перегиба f' . С другой же стороны, $f'(U_g)$ есть не что иное, как дифференциальная крутизна. Итак, границы между мягким и жестким режимом проходят через точки перегиба характеристики крутизны

$$S = f'(U_g) = \frac{dI_a}{dU_g},$$

как показано на рис. 72 вертикальными прямыми,



§ 21. Установление колебаний в генераторе

После рассмотрения установившегося режима генератора переходим к процессу установления: мы должны проследить развитие колебательного явления от момента включения схемы и до того времени, когда амплитуда и частота практически уже не будут меняться, т. е. когда можно считать колебание уже установившимся.

Задача сводится к тому, чтобы проследить изменение во времени величин, характеризующих колебание, т. е. в первую очередь амплитуды, а затем и частоты. Форму колебаний мы будем полагать близкой к синусоидальной.

Задача будет решаться методом, известным под названием *метода медленно меняющихся амплитуд*. По существу своему этот метод относится к квазилинейным; возможность его применения к данной задаче основана на том, что амплитуда, хотя и не постоянная, как при установившемся режиме, предполагается *медленно* изменяющейся. Критерий «медленности» будет дан ниже.

Запишем уравнение генератора в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (1)$$

Этим уравнением мы уже пользовались в §§ 17 и 20. Но в § 17 мы полагали $I_a = S_0 U$ и свели, таким образом, уравнение (1) к линейному уравнению, имея в виду найти условие самовозбуждения. В § 20 мы составили уравнение для первой гармоники в комплексной форме, введя в уравнение среднюю крутизну; наша задача состояла в исследовании установившегося режима. Теперь же мы придадим уравнению (1) общую нелинейную форму.

Зависимость анодного тока от напряжения на сетке представляется нелинейной функцией

$$I_a = f(U).$$

Запишем правую часть (1) в виде

$$M \frac{dI_a}{dt} = M \frac{dI_a}{dU} \frac{dU}{dt}.$$

Но

$$\frac{dI_a}{dU} = \frac{df(U)}{dU} = S(U)$$

есть дифференциальная крутизна, выражаемая графически наклоном касательной к характеристике триода в данной точке (т. е. в точке с абсциссой U). Вводя, как и прежде,

$$U = \frac{1}{C} \int I dt,$$

получим вместо (1) исходное уравнение генератора в виде

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{L} \left[R - \frac{M}{C} S(U) \right] \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \quad (2)$$

Положим, что рассматривается мягкая система. В этом случае нелинейная характеристика может аппроксимироваться степенным многочленом третьей степени:

$$I_a = a_0 + a_1 U + a_3 U^3.$$

Дифференцируя, находим выражение для крутизны

$$S = \frac{dI_a}{dU} = a_1 + 3a_3 U^2.$$

Подставляя это в (1), получаем нелинейное уравнение мягкой системы в виде

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + (2\beta_0 + \gamma U^2) \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\beta_0 = \alpha - \frac{1}{2} \omega_0^2 M S_0$$

— начальный показатель затухания (с учетом действия обратной связи), γ — просто сокращенное обозначение

$$\gamma = 3\omega_0^2 M a_3.$$

Способ решения уравнения (3) состоит в том, что мы предполагаем решение в виде

$$U = A(t) \sin \omega t. \quad (4)$$

Величина A есть переменная «амплитуда» колебания; функция $A(t)$ выражает то, что в радиотехнике называется

огибающей. Что касается неизвестной пока частоты ω , то мы будем считать ее постоянной *).

Продифференцируем предполагаемое решение (3) дважды:

$$U' = A' \sin \omega t + A \omega \cos \omega t,$$

$$U'' = A'' \sin \omega t + 2A' \omega \cos \omega t - A \omega^2 \sin \omega t$$

и подставим значения U и его производных в (2):

$$A'' \sin \omega t + 2A' \omega \cos \omega t - A \omega^2 \sin \omega t + \\ + (2\beta_0 + \gamma A^2 \sin^2 \omega t) (A' \sin \omega t + A \omega \cos \omega t) + \omega_0^2 A \sin \omega t = 0.$$

Производя тригонометрические преобразования и приравнявая порознь нулю коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} A'' + \left(2\beta_0 + \frac{3}{4} \gamma A^2\right) A' + (\omega_0^2 - \omega^2) A &= 0, \\ 2A' + \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) A &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При этом члены, содержащие тройной аргумент ($3\omega t$), отброшены в силу исходного предположения о синусоидальности колебания (см. формулу (4)).

Уравнения (5) могут быть еще упрощены. Дело в том, что члены этих уравнений имеют различный порядок малости. Мы предполагаем, что функция $A(t)$, выражающая изменение амплитуды, есть *медленная* функция. Это значит, что изменения амплитуды совершаются значительно медленнее, чем само колебательное изменение напряжения. Функция $f_1(t)$ считается медленной по сравнению с какой-либо другой функцией $f_2(t)$, если ее производная $f_1'(t)$ много меньше производной $f_2'(t)$ (для сравнения нужно предварительно нормировать производные, например, разделив их на среднеквадратичные значения самих функций).

Производная функции, выражающей колебание, т. е. $U = A \sin \omega t$, не превосходит по абсолютной величине ωA .

*) Это лишь первое приближение. В действительности в процессе установления меняется как амплитуда, так и частота колебаний. Но изменения частоты обычно невелики; учтя эти изменения, мы получим во втором приближении лишь незначительную поправку на закон изменения амплитуды.

Производная же огибающей $A(t)$ обозначена A' , и условие медленности $A(t)$ может быть записано в виде

$$|A'| \ll \omega A.$$

Другими словами, A' есть величина первого порядка малости по сравнению с ωA . Но если так, то вторая производная функции $A(t)$ будет уже величиной второго порядка малости по сравнению со второй производной U , имеющей порядок $\omega^2 A$.

На основании этих соображений можно вычеркнуть из первого уравнения (5) член A'' , как имеющий второй порядок малости по сравнению с последним членом.

В результате получим вместо (5)

$$\left. \begin{aligned} (2\beta_0 + \frac{3}{4}\gamma A^2) A' + (\omega_0^2 - \omega^2) A &= 0, \\ 2A' + (2\beta_0 + \frac{1}{4}\gamma A^2) A &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения, получаемые путем вычеркивания членов высших порядков малости, называются *укороченными* уравнениями. Укорачивание уравнений является общим приемом метода медленно меняющихся амплитуд. Он позволяет понизить порядок уравнений и упростить их строение. Впрочем, в рассматриваемом случае эти преимущества останутся неиспользованными, так как мы воспользуемся ниже только вторым из двух уравнений (6), не подвергшимся укорочению.

Уравнения (6) являются нелинейными, так как коэффициенты зависят от амплитуды. Найдем из этих уравнений прежде всего установившиеся амплитуду и частоту.

В установившемся режиме $A' = 0$, $A = A_0$. Первое уравнение дает сразу

$$\omega = \omega_0,$$

а из второго находим

$$A_0 = \sqrt{-\frac{8\beta_0}{\gamma}} \quad (7)$$

или, выражая β_0 и γ через исходные параметры,

$$A_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{a_1}{a_3} - \frac{2x}{\omega_0^2 M a_3}} = \frac{2}{\sqrt{3} a_3} \sqrt{S_0 - \frac{RC}{M}}. \quad (8)$$

Это то же значение, которое мы нашли бы из уравнения (7) § 20, положив $a_5 = 0$. Как видим, амплитуда колебаний определяется нелинейностью, выражаемой в нашем случае коэффициентом a_3 ; амплитуда зависит также от собственного затухания контура, начальной крутизны и глубины обратной связи.

Если присмотреться к формуле (8), то видно, что амплитуда тем меньше, чем больше нелинейность (т. е. чем больше коэффициент a_3); амплитуда тем больше, чем с большим запасом выполнено условие самовозбуждения, т. е. условие

$$S_0 > \frac{RC}{M}.$$

Теперь найдем закон установления амплитуды, т. е. функцию $A(t)$, воспользовавшись вторым уравнением (6). Для решения этого уравнения умножим его почленно на A , после чего можно записать

$$\frac{dA^2}{dt} + \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) A^2 = 0.$$

Разделим переменные

$$\frac{dA^2}{\left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) A^2} = -dt.$$

Разложим дробь в левой части на простейшие

$$\frac{dA^2}{A^2} - \frac{d\left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right)}{2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2} = -2\beta_0 dt.$$

Интегрируя, получим

$$\ln A^2 - \ln \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) = -2\beta_0 t + C$$

или

$$\ln \left(\frac{1}{4} \gamma + 2\beta_0 \frac{1}{A^2}\right) = 2\beta_0 t - C.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma}{8\beta_0} + \frac{1}{A^2} = \frac{1}{2\beta_0} e^{-C} e^{2\beta_0 t} = B e^{2\beta_0 t}$$

и, наконец (см. (7)),

$$A(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + D e^{2\beta_0 t}}}.$$

В этом выражении $D = BA_0^2$ есть постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями. В зависимости от значения D амплитуда в первый момент может быть меньше или больше установившегося значения A_0 , или даже в точности равняться ему (при $D = 0$). Величина β_0 есть начальный результирующий показатель затухания. Величина эта во всяком случае отрицательна — в этом состоит условие самовозбуждения. Учитывая это, мы видим, что с течением времени экспоненциальный член под радикалом убывает, и мы получаем в пределе (при $t \rightarrow \infty$) установившееся значение амплитуды, выражаемое формулой (7).

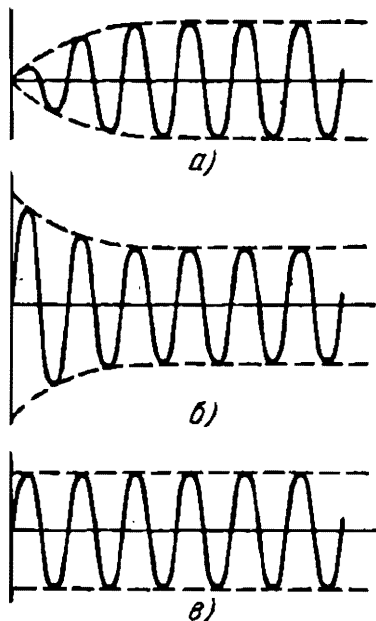


Рис. 73.

На рис. 73 изображен процесс установления колебаний для различных начальных условий. Физический смысл тех или иных начальных условий легче

раскрыть, опираясь на графическое представление процесса установления, как это будет сделано в § 23.

§ 22. Инерционная нелинейность

В генераторе, установившийся режим которого рассмотрен в § 20, рост амплитуды автоколебаний ограничивается нелинейностью характеристики триода $I_a = f(U_g)$. Эта характеристика выражает зависимость между мгновенными значениями анодного тока и напряжения на сетке. Поэтому даже при чисто синусоидальном напряжении на сетке переменная составляющая анодного тока *принципиально* несинусоидальна. Напряжение на контуре (а следовательно, и на сетке) практически синусоидально только за счет фильтрующего действия самого контура. Переход к квазилинейной форме уравнения состоит в том, что мы составляем уравнение для первых гармоник тока и напряжения и вводим среднюю крутизну, определяемую как отношение амплитуд первых гармоник тока и напряжения.

Нелинейность в автоколебательной системе обязательна. Возможно, однако, построить генератор на другой основе.

Возможность эта состоит во введении в состав автоколебательной системы нелинейного параметра, значение которого зависит не от мгновенных, а от действующих (или амплитудных) значений тока или напряжения. Такого рода нелинейность называется *инерционной*.

Примером устройства, обладающего инерционной нелинейностью, может служить *термистор* (термо-сопротивление). Сопротивление термистора зависит от его температуры, а температура определяется балансом мощностей — мощности, выделяемой в термисторе в форме джоулева тепла, и мощности, отдаваемой термистором в окружающую среду через посредство конвекции и излучения. Скорость процесса теплообмена между термистором и окружающей средой характеризуется постоянной времени, которая тем больше, чем больше теплоемкость термистора и чем меньше теплопроводность в окружающую среду. Постоянная времени имеет порядок единиц и даже десятков секунд, т. е. на много порядков превосходит период высокочастотного колебания. Поэтому, если нагрев термистора производится током высокой частоты, то температура термистора на протяжении периода не может следовать за изменениями мгновенной мощности и остается постоянной с высокой степенью точности. Таким образом, можно принять, что сопротивление термистора есть функция *амплитуды* (а не мгновенного значения) тока или напряжения, причем важно, что это предположение может быть выполнено с любой степенью точности (так как технически легко увеличить постоянную времени до весьма значительных величин). А это в свою очередь означает, что получаемые автоколебания синусоидальны со столь же высокой степенью точности. Это является существенной особенностью систем с инерционной нелинейностью.

Рассмотрим теперь генератор, отличающийся от ранее рассмотренного тем, что триод предполагается идеально-линейным, т. е. характеристика его предполагается линейной с постоянной крутизной S_0 . Необходимая для ограничения амплитуды нелинейность вводится в систему путем включения в контур в качестве активного сопротивления термистора с зависящим от температуры (а следовательно, от амплитуды колебания) сопротивлением R_T . Термисторы бывают металлические и полупроводниковые; у первых сопротивление с температурой растет, у вторых — падает; первые

нужно включать в контур последовательно, вторые — параллельно. Будем в обоих случаях считать, что сопротивление R_T выражает эквивалентное последовательное сопротивление контура. В таком случае мы можем воспользоваться комплексной формой квазилинейного уравнения из § 20, перейдя к нему в виде

$$\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{1}{L} \left(R_T - \frac{MS_0}{C} \right) = 0.$$

Для генератора с термистором, описываемого этим соотношением, частота колебаний ω равна ω_0 при любой амплитуде (а следовательно, не меняется в процессе установления колебаний). Условие самовозбуждения запишется в виде

$$R_T(0) < \frac{MS_0}{C},$$

где $R_T(0)$ — сопротивление термистора при отсутствии колебаний, определяемое только температурой окружающей среды.

Амплитуда в установившемся режиме находится из уравнения

$$R_T(U_m) = \frac{MS_0}{C}.$$

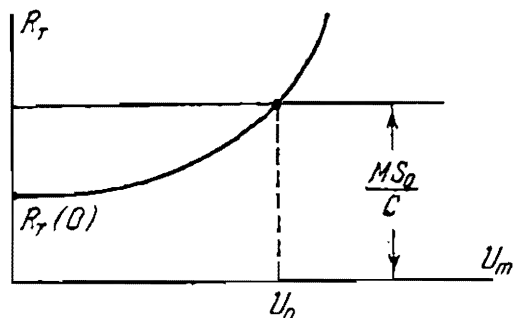


Рис. 74.

Характеристика термистора $R_T(U_m)$ должна, разумеется, быть известна. Уравнение можно решить графически, как показано на рис. 74. Возможность получения с помощью

инерционной нелинейности синусоидальных установившихся автоколебаний имеет большое значение. Во-первых, во многих случаях важно иметь хорошую форму колебаний, свободную от гармоник. Во-вторых, наличие гармоник вызывает смещение частоты. Этот эффект тем заметнее, чем меньше добротность контура: применение инерционной нелинейности позволяет получить синусоидальные колебания и в случае контура с невысокой добротностью. Последнее особенно важно для так называемых RC -генераторов (см. § 27), цепи которых, составленные только из емкостей и сопротивлений, эквивалентны апериодическим контурам.

§ 23. Фазовая плоскость

Обычное графическое представление колебательных явлений в какой-либо системе состоит в том, что все изменяющиеся во времени величины (например, токи, напряжения) выражаются соответствующими функциями времени. Графики этих функций — это осциллограммы.

Но можно поступить и иначе, а именно: взять в качестве прямоугольных координат мгновенные значения переменных величин, совокупность которых полностью определяет состояние системы. Мы получим таким образом некоторое пространство, каждая точка которого представляет состояние системы в данный момент времени. Такое пространство называется *фазовым*.

Число измерений фазового пространства определяется порядком дифференциального уравнения системы. Известно, что для решения уравнения n -го порядка нужно задать в качестве начальных условий значения для начального момента функции и ее производных до $n - 1$ порядка, т. е. всего n независимых величин. Нам придется иметь дело преимущественно с уравнениями второго порядка. В этом случае число измерений фазового пространства равно двум, т. е. фазовое пространство в этом случае есть *фазовая плоскость*. Колебательные явления в системе, описываемой уравнением второго порядка, могут быть представлены диаграммами на фазовой плоскости.

Рассмотрим, к примеру, свободные колебания в линейном контуре без потерь. Дифференциальное уравнение для этого случая имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (2)$$

Решение этого уравнения таково:

$$Q = M \sin \omega_0 t + N \cos \omega_0 t, \quad (3)$$

где M и N — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Для тока имеем

$$I = \frac{dQ}{dt} = M\omega_0 \cos \omega_0 t - N\omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

Возьмем ток и заряд в качестве координат фазовой плоскости и выразим одну величину непосредственно через другую, т. е. исключим *параметр* t . Для этого разделим (4) на ω_0 , возведем в квадрат и сложим с квадратом (3). Это даст уравнение

$$\frac{1}{\omega_0^2} I^2 + Q^2 = M^2 + N^2,$$

которое есть уравнение семейства эллипсов (рис. 75). Заметим, что, изменив масштаб, например, отложив по оси абсцисс $\omega_0 Q$ вместо Q , мы получим семейство окружностей.

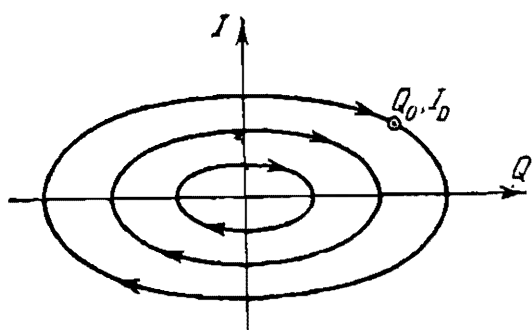


Рис. 75.

Каждая точка на одном из эллипсов изображает состояние системы в данный момент (так как координаты точки суть мгновенные значения тока и напряжения). Поэтому точка на диаграмме называется *изображающей* точкой. С течением времени точка перемещается, описывая линию, называемую *фазовой траекторией*. Если на фазовой плоскости изобра-

жен периодический процесс, то фазовая траектория будет представлять собою замкнутый контур, обегаемый изображающей точкой за время, равное одному периоду. Семейство фазовых траекторий, отображающее возможные в данной системе колебательные явления, называют «фазовым портретом» данной системы. Так, рис. 75 является фазовым портретом линейного контура без потерь.

На рис. 75 выбраны координаты Q и $I = \frac{dQ}{dt}$. При таком выборе координат изображающая точка движется по часовой стрелке, как отмечено на рис. 75.

Мы получили фазовый портрет на рис. 75 аналитическим путем. Покажем, как производится построение фазового портрета по осциллограммам.

На рис. 76, а изображены осциллограммы заряда и тока. Если теперь в моменты, отмеченные и занумерованные на рисунке, взять отсчеты мгновенных значений Q и I (т. е. ординаты соответствующих кривых) и перенести их в каче-

стве координат изображающей точки на рис. 76, б, то можно построить фазовую траекторию. Построение подтверждает, что изображающая точка движется по часовой стрелке.

Поясним теперь роль начальных условий. Начальными условиями для уравнения второго порядка вида (2) являются, как известно, значения функции (Q) и ее первой производной ($I = \frac{dQ}{dt}$) в момент, принимаемый за начало отсчета вре-

мен (в частности, в момент $t = 0$). Следовательно, задание начальных условий определяет исходные координаты изображающей точки. На рис. 75

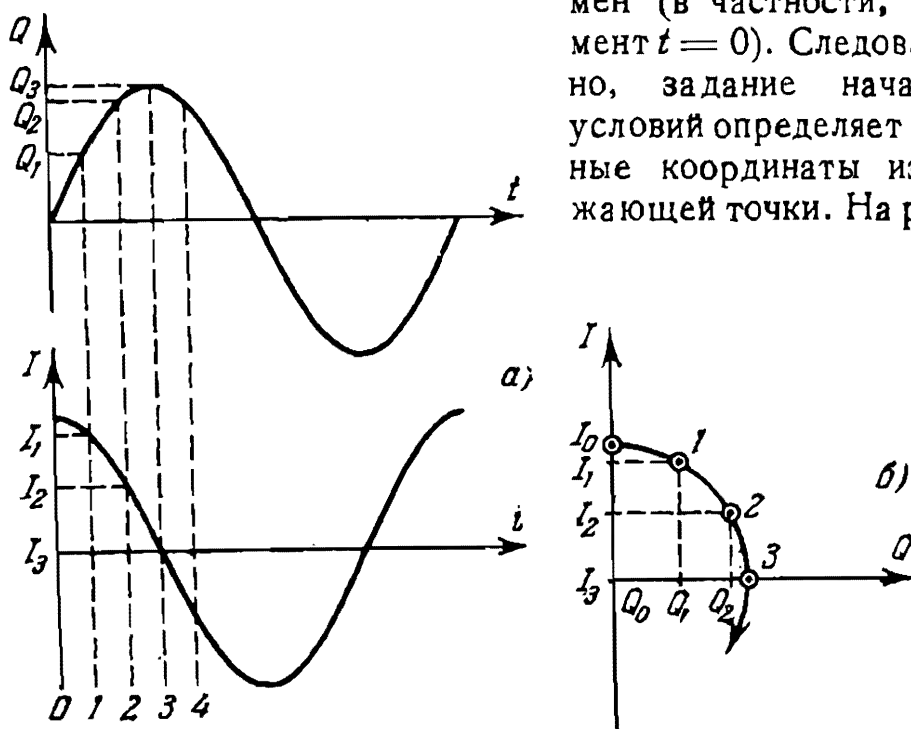


Рис. 76.

свободное колебание представляется эллипсом, проходящим через точку, отображающую своими координатами Q_0 и I_0 начальные условия.

Обратимся к контуру с потерями. Уравнение такого контура имеет вид

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (5)$$

Решение этого уравнения при начальных условиях

$$Q(0) = 0, \quad I(0) = I_0$$

таково:

$$Q = \frac{I_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t, \quad (6)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — собственная частота. Найдем ток

$$I = \frac{I_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} (-\alpha \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t).$$

При малом показателе затухания α можно пренебречь первым членом в скобках и принять

$$I \cong I_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t. \quad (7)$$

Для исключения времени t из (6) и (7) представим зависимость между током и зарядом в полярных координатах. Запишем

$$I = I_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t = \rho \cos \vartheta,$$

$$\omega_1 Q = I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t = \rho \sin \vartheta,$$

т. е. положим

$$\rho = I_0 e^{-\alpha t}, \quad \vartheta = \omega_1 t,$$

откуда

$$\rho = I_0 e^{-\frac{\alpha}{\omega_1} \vartheta}.$$

Это и есть уравнение фазовой траектории в полярных координатах, представляющее свертывающуюся логарифмическую спираль (рис. 77). При других начальных условиях получим другие спирали. Все они будут вложены друг в друга и все будут сходиться в точке $I = Q = 0$. Каждая спираль изображает затухающее колебание. Семейство же спиралей с различными начальными условиями образует фазовый портрет контура с потерями. В заключение данного параграфа рассмотрим еще случай контура, в котором действием обратной связи затухание сделано отрицательным. Подобная система описывается уравнением, отличающимся от (5) только знаком при члене с первой производной заряда по времени. Решение уравнения представится формулами (6) и (7), а уравнение фазовой траектории — формулой (8), причем во всех трех формулах надо лишь заменить

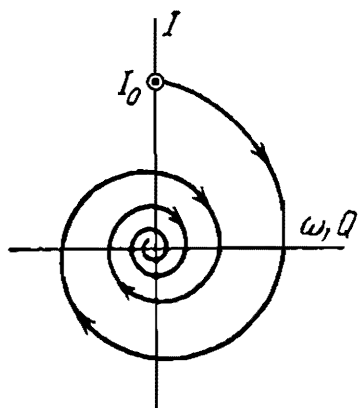


Рис. 77.

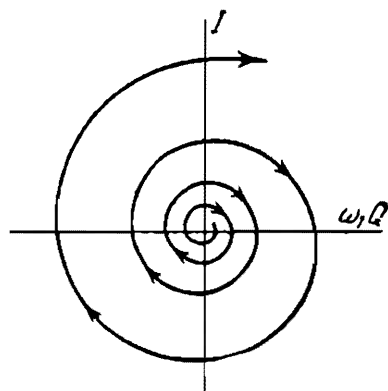


Рис. 78.

знак $(-)$ на $(+)$. Это означает, что мы имеем колебания с экспоненциально нарастающей амплитудой, а фазовая траектория представляет собою раскручивающуюся спираль (рис. 78). Если бы система действительно была линейной, то амплитуда нарастала бы неограниченно; этому соответствует неограниченный рост радиуса спирали.

§ 24. Фазовые портреты генераторов

В предыдущем параграфе рассмотрены в качестве примеров линейные системы. Между тем нас интересуют явления в генераторах, являющихся заведомо нелинейными системами, так как в линейной системе автоколебания с установившейся амплитудой, как нам уже известно, невозможны.

Очередная задача состоит в построении фазовых портретов генераторов. Начнем со случая мягко возбуждающегося генератора, как более простого. Фазовый портрет должен дать полную картину возможных режимов генератора: установившегося режима и процессов установления колебаний при любых начальных условиях.

Мы не будем выводить уравнений фазовых траекторий; ограничимся качественным рассуждением. Для этого нужно прежде всего пояснить, как отображается на фазовых диаграммах то или иное значение затухания.

Мы имеем для простого контура уравнение спирали

$$\rho = I_0 e^{-\frac{\alpha}{\omega_1} \theta}.$$

Возьмем два значения радиуса ρ , соответствующих изменению θ на 2π , т. е. радиусы двух соседних витков спирали (рис. 79)

$$\rho_1 = I_0 e^{-\frac{\alpha}{\omega_1} \theta}, \quad \rho_2 = I_0 e^{-\frac{\alpha}{\omega_1} (\theta + 2\pi)},$$

и составим отношение этих радиусов

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = e^{\frac{\alpha}{\omega_1} 2\pi} = e^{\alpha T} \cong e^{\pi d},$$

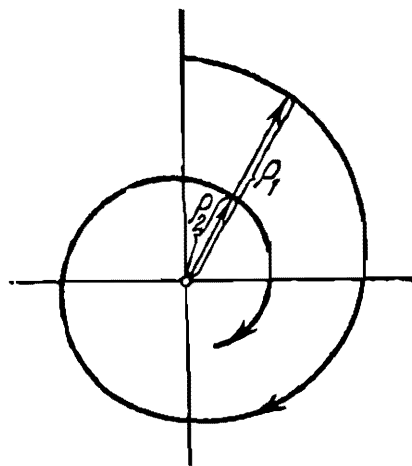


Рис. 79.

где d — затухание контура. Таким образом, радиус спирали изменяется от витка к витку в геометрической прогрессии *), знаменатель которой зависит от затухания. То же относится и к раскручивающейся спирали.

Рассмотрим теперь явления в мягком генераторе. В начальной стадии самовозбуждения, когда колебания еще малы, явления могут с удовлетворительной точностью описываться линейным уравнением (2) § 17. Если условие самовозбуждения выполнено, то показатель затухания отрицателен, и процесс самовозбуждения представляется раскручивающейся спиралью, как на рис. 78. Однако по мере роста амплитуды колебаний начинает сказываться нелинейность. Ее влияние проявляется в том, что затухание становится меньше по абсолютной величине; радиус спирали замедляет свой рост. Наконец, достигается энергетический баланс. При этом затухание становится равным нулю, дальнейший рост амплитуды прекращается. Изображающая точка описывает замкнутый контур в виде эллипса (или окружности при соответствующем выборе масштабов). Это и есть установившийся режим генератора.

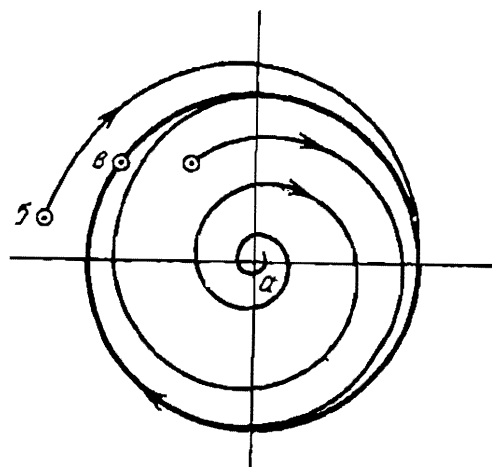


Рис. 80.

Если задать генератору начальные условия, представляемые некоторой точкой *вне* контура, соответствующего установившемуся режиму, то затухание будет положительным, и изображающая точка будет перемещаться по свертывающейся спирали, радиус которой будет убывать все медленнее, пока траектория не вернется на тот же контур установившегося режима. Все это изображено на рис. 80, представляющем собою фазовый портрет генератора с мягким возбуждением. Замкнутый контур, отображающий установившееся периодическое колебание (жирная линия на рис. 80),

*) Свойство логарифмической спирали. Для так называемой архимедовой спирали радиус изменяется по арифметической прогрессии.

называется в теории колебаний *предельным циклом*. Для фазового портрета на рис. 80 характерно, что любая фазовая траектория, где бы она ни начиналась, наворачивается в конце концов на предельный цикл. Это означает, что всякое нарушение установившегося режима выравнивается автоматически после устранения вызвавшей это нарушение причины. При таких условиях предельный цикл называется *устойчивым*. Легко видеть теперь, что три случая установления колебаний, изображенные на рис. 73, соответствуют на рис. 80 положениям исходной точки фазовой траектории: *а* — в начале координат, *в* — на предельном цикле и *б* — вне его.

Обратимся к жесткому генератору. Этот случай отличается от только что рассмотренного тем, что при малых амплитудах затухание положительно, и фазовые траектории сворачиваются к началу координат. Существует значение амплитуды, при котором затухание первый раз обращается в нуль. Этому значению амплитуды соответствует свой предельный цикл. Однако цикл этот неустойчив. Фазовые траектории не наворачиваются на него, а, наоборот, сходя с предельного цикла, либо свертываются во внутрь к началу координат, либо развертываются в области вне неустойчивого предельного цикла. В этой области затухание отрицательно, а амплитуда растет, пока затухание снова не обратится в нуль. Здесь образуется второй предельный цикл, на этот раз уже устойчивый. Отличие устойчивого предельного цикла от неустойчивого с точки зрения фазовых

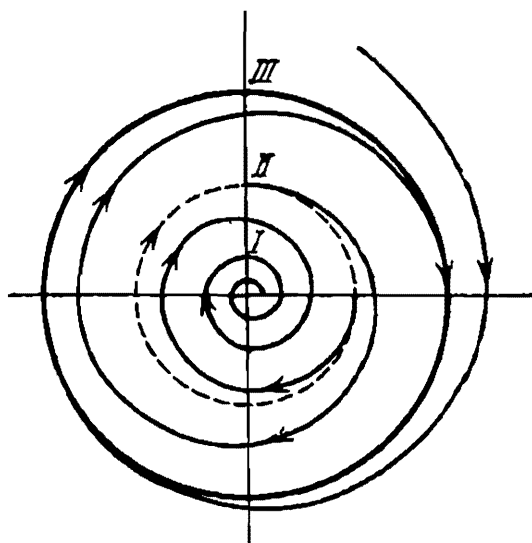


Рис. 81.

диаграмм состоит в том, что фазовые траектории стремятся к устойчивому циклу и сбегает с неустойчивого. Все сказанное поясняется фазовым портретом жесткого генератора, изображенного на рис. 81. Фазовая плоскость может быть разбита на три области: *I* — внутри неустойчивого цикла, *II* — между устойчивым и неустойчивым циклами и *III* — вне устойчивого цикла. Автоколебания не возбуждаются, если начальные

условия изображаются точкой в области *I*, и возбуждятся, если исходная точка лежит в области *II* или *III*. Разница между двумя последними случаями будет состоять в том, что в первом случае амплитуда будет устанавливаться, возрастая до установившегося значения, а во втором, — убывая до того же значения. Различие между мягким и жестким генераторами, представляемое рис. 80 и 81, ранее было пояснено рис. 70 и 71 и рис. 56 и 57. Полезно сравнить между собою все три пары рисунков, так как они по-разному отображают одни и те же соотношения.

§ 25. Графические методы

Фазовые диаграммы позволяют просто и наглядно представить в графической форме различные колебательные явления, а также свойства тех или иных систем (пассивных цепей, автоколебательных систем).

Но роль фазовых диаграмм этим не ограничивается. Построения на фазовой плоскости служат не только в качестве иллюстраций — они составляют также основу графических методов решения нелинейных уравнений. При этом существенно, что графическое решение не требует упрощающих предположений, например предположения малой нелинейности, синусоидального решения и т. п.

Когда говорится о решении нелинейной задачи путем графического построения на фазовой плоскости, то имеется в виду, что решение получается в виде фазового портрета. Фазовый портрет дает нам все необходимые сведения о поведении системы, описываемой данным нелинейным уравнением: на фазовом портрете видны все возможные режимы при любых начальных условиях; в частности, видны предельные циклы, если они существуют; по фазовому портрету можно судить об устойчивости предельных циклов: форма предельных циклов выражает форму колебаний и т. д.

Одним из наиболее универсальных графических методов является метод построения поля направлений. Он позволяет построить фазовый портрет системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка следующего вида:

$$Q'' + \varphi(Q') + \psi(Q) = 0. \quad (1)$$

Введем

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{dI}{dt} + \varphi(I) + \psi(Q) = 0. \quad (2)$$

Разделим (2) на I

$$\frac{dI}{dQ} = - \frac{\varphi(I) + \psi(Q)}{I}. \quad (3)$$

В этом соотношении $\frac{dI}{dQ}$ означает наклон касательной к фазовой траектории в данной точке, т. е. в точке с координатами Q и I . Беря любую точку, мы можем, зная ее координаты, вычислить правую часть (3) и определить таким образом *направление* фазовой траектории в данной точке.

Вычислив значения $\frac{dI}{dQ}$ для многих точек, мы можем построить на фазовой плоскости так называемое *поле направлений*, как показано на рис. 82. Ориентируясь на стрелочки, показывающие направление фазовой траектории в данной точке, можно построить семейство траекторий, т. е. фазовый портрет, с любой желаемой степенью точности, которая, очевидно, повышается с увеличением числа точек. Удобно вести построение, опираясь на линии, вдоль которых направление траекторий (т. е. наклон касательной к траектории) остается неизменным. Эти линии называются *изоклинами* (линиями равных наклонов). Уравнение изоклин имеет вид

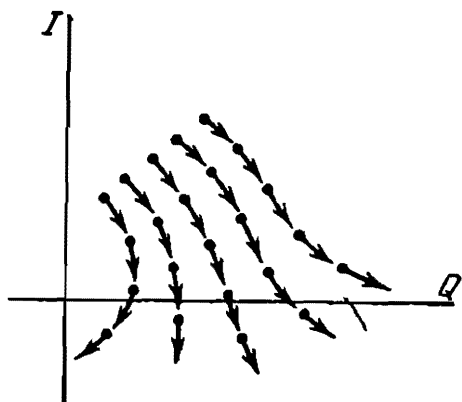


Рис. 82.

$$\frac{\varphi(I) + \psi(Q)}{I} = \text{const.}$$

Поясним это на простейшем примере линейной системы, описываемой уравнением

$$\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 Q = 0.$$

В этом случае

$$\varphi(I) = 0, \quad \psi(Q) = \omega_0^2 Q$$

и уравнение изоклин

$$\frac{Q}{I} = \text{const},$$

что представляет собою уравнение пучка прямых, проходящих через начало координат. Построение соответствующего

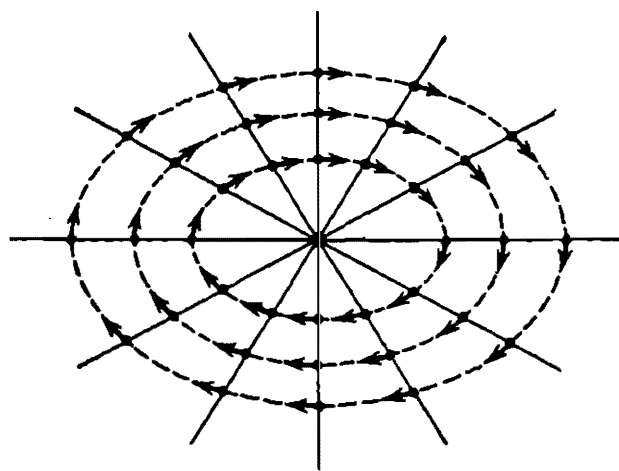


Рис. 83.

фазового портрета показано на рис. 83 — это портрет контура без потерь.

В ряде случаев мы можем ограничиться уравнением менее общего вида, чем (1), а именно уравнением

$$Q'' + \varphi(Q') + Q = 0. \quad (4)$$

Именно к такой форме можно привести урав-

нение большинства генераторов, с которыми мы имеем дело в радиотехнике. Графическое решение уравнения (4) может быть выполнено без вспомогательных вычислений путем чисто графического построения, известного под названием *построения Льенара*. Обоснование этого построения состоит в следующем. Мы имеем вместо (3)

$$\frac{dI}{dQ} = -\frac{\varphi(I) + Q}{I}. \quad (5)$$

Построим на фазовой плоскости кривую

$$Q = -\varphi(I) \quad (6)$$

(рис. 84). Из произвольной точки A с координатами (Q, I) проведем параллельно оси Q прямую до пересечения с кривой (6). Из точки пересечения B опускаем перпендикуляр на ось Q . Основание перпендикуляра обозначено через C . Мы имеем

$$\overline{BA} = Q + \varphi(I), \quad \overline{BC} = I,$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{I}{Q + \varphi(I)}.$$

Но последнее отношение есть не что иное, как $\operatorname{tg} \alpha$ — тангенс угла, образуемого прямой CA с осью Q . Для построения же прямой, тангенс угла наклона которой к оси Q равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dI}{dQ} = - \frac{\varphi(I) + Q}{I} = - \operatorname{ctg} \alpha,$$

нужно построить перпендикуляр к CA в точке A . Этот перпендикуляр и дает направление фазовой траектории в точке A . Итак, построение Льенара сводится к следующему: 1) после приведения уравнения к виду (4) строится характеристическая кривая (6); 2) строится прямоугольный треугольник ABC ; 3) строится перпендикуляр к гипотенузе AC , который и дает искомое направление траектории в точке A .

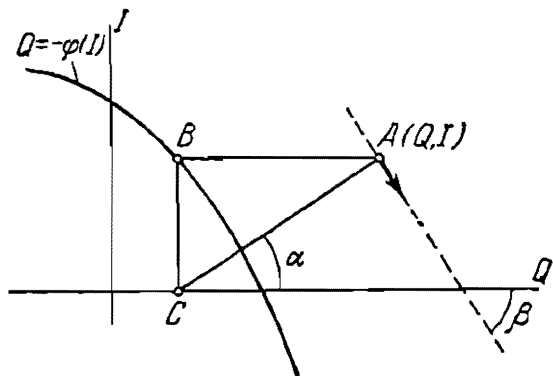


Рис. 84.

Покажем построение Льенара на примере лампового генератора. нелинейное уравнение которого имеет вид (см. § 21)

$$U'' + \frac{1}{L} \left(R - \frac{MS}{C} \right) U' + \omega_0^2 U = 0 \quad (7)$$

или

$$U'' + f(U) U' + \omega_0^2 U = 0 \quad (8)$$

(так как крутизна S зависит от напряжения U). Для приведения (8) к виду (4) введем прежде всего безразмерное («собственное») время

$$\tau = \omega_0 t.$$

Тогда

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \frac{dU}{d\tau}; \quad \frac{d^2U}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2U}{d\tau^2}$$

и мы получим

$$U'' + \frac{1}{\omega_0} f(U) U' + U = 0. \quad (9)$$

Здесь штрихи означают уже дифференцирование по τ . Теперь введем новую переменную

$$x = \int U d\tau \quad (10)$$

и определим некоторую функцию $F(x') = F(U)$ соотношением

$$F(x') = \frac{1}{\omega_0} \int f(U) dU. \quad (11)$$

Проинтегрируем (9) по τ :

$$\begin{aligned} \int U'' d\tau + \frac{1}{\omega_0} \int f(U) U' d\tau + \int U d\tau = \\ = U' + \frac{1}{\omega_0} \int f(U) dU + \int U d\tau. \end{aligned}$$

Заменив теперь U на x на основании (10), получим

$$x'' + F(x') + x = 0, \quad (12)$$

т. е. уравнение, в точности совпадающее с (4). Координатами фазовой плоскости у нас будут теперь служить величины x и $x' = U$, т. е. напряжение и интеграл от напряжения. Нам нужно прежде всего построить характеристическую кривую

$$x = -F(U).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} F(U) = \frac{1}{\omega_0} \int f(U) dU = \frac{1}{\omega_0 L} \int \left(R - \frac{MS}{C} \right) dU = \\ = \frac{1}{\omega_0 L} \left[RU - \frac{M}{C} \int S(U) dU \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим случай мягкого возбуждения, для которого

$$S(U) = a_1 + 3a_3 U^2 = S_0 + 3a_3 U^2 \quad (14)$$

(см. § 21). Подставляя (14) в (13), находим

$$F(U) = \frac{1}{\omega_0 L} \left[\left(R - \frac{MS_0}{C} \right) U - \frac{M}{C} a_3 U^3 \right]. \quad (15)$$

Кривая

$$x = -F(U)$$

есть, таким образом, кубическая парабола, график которой нанесен на рис. 85. Дальнейшее построение производится графическим способом, как показано на том же рисунке. Мы получаем уже известный нам фазовый портрет мягкого генератора. Однако следует заметить, что мы узнали нечто

большее, чем то, что дала нам квазилинейная теория: мы получили *форму* колебания, которая в нелинейной системе

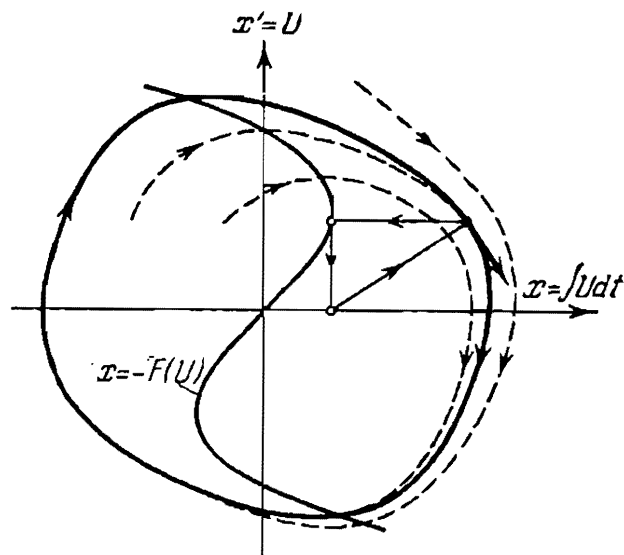


Рис. 85.

должна, конечно, отличаться от синусоидальной. На портрете рис. 85 это находит свое отражение в том, что предельный цикл отличается от эллипса.

§ 26. Некоторые схемы генераторов

Говоря о ламповом генераторе, мы до сих пор пользовались только одной классической схемой с контуром в цепи сетки и с индуктивной обратной связью. Это делалось для того, чтобы продемонстрировать различные подходы и методы на одном и том же объекте исследования.

Рассмотрим теперь некоторые другие схемы генераторов и воспользуемся случаем для разъяснения одного принципиального вопроса, относящегося к обратной связи. Схема генератора с контуром в цепи сетки повторена на рис. 86; на рис. 87 изображена схема генератора с контуром в цепи анода. Не отличается принципиально от обеих этих схем схема с автотрансформаторной связью, показанная на рис. 88; эта схема часто называется трехточечной.

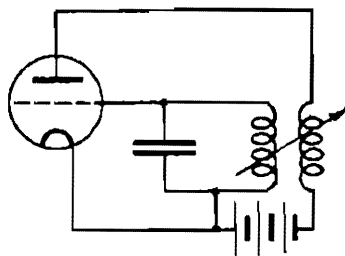


Рис. 86.

Обратная связь может быть не только индуктивной, но и емкостной. Для подачи обратной связи на сетку может использоваться емкость сетка — анод. Если она недостаточна, то между сеткой и анодом подключается дополнительный конденсатор обратной связи, как показано на рис. 89.

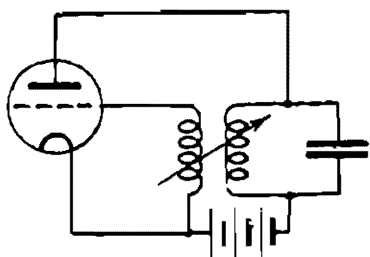


Рис. 87.

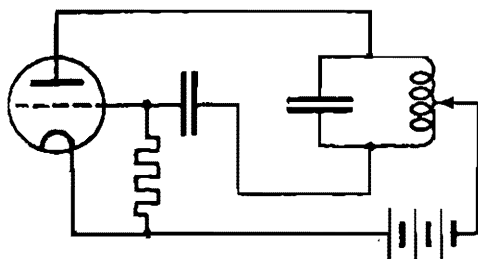


Рис. 88.

Схемы рис. 86—89 обладают тем общим признаком, что в них имеется явная цепь обратной связи, причем глубина обратной связи может регулироваться путем изменения того или иного параметра схемы — коэффициента связи в схемах рис. 86 и 87, коэффициента трансформации в схеме рис. 88, емкости сетка — анод в схеме рис. 89. Но существует ряд генераторов, в которых обратная связь действует по скрытым,

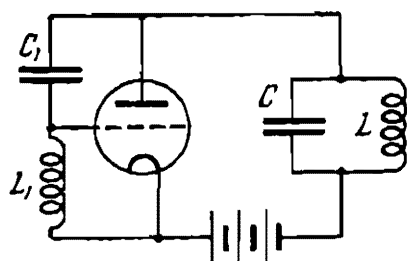


Рис. 89.

неявным каналам, не могущим быть изображенными на схеме в виде отдельной цепи обратной связи. Обратная связь существует и в таких генераторах, потому что, как было показано в § 15, обратная связь является необходимым звеном всякой автоколебательной системы. Для полного понимания действия генераторов с неявной обратной связью ее механизм должен быть раскрыт.

В качестве примеров генераторов с неявной обратной связью рассмотрим вкратце динатронный и транзитронный генераторы.

Действие динатронного генератора основано на так называемом динатронном эффекте, состоящем в том, что при попадании электронов на анод возникает вторичная эмиссия; электрон, прилетающий на анод из катода, выбивает из анода новые электроны. Если на один первичный электрон прихо-

дится несколько вторичных, то составляющая тока, обусловленная вторичными электронами, преобладает над током первичной эмиссии. В результате этого анодный ток не только убывает, но может даже изменить знак. Очевидно, что каждый первичный электрон может выбить тем больше вторичных, чем больше скорость первичного электрона. Скорость же электрона зависит от ускоряющего напряжения. В качестве динатрона может быть использован любой подходящий триод.

Следует заметить, что электрод, называемый в триоде анодом, при использовании триода в качестве динатрона не является уже анодом; назначение этого электрода состоит в испускании вторичных электронов; чтобы подчеркнуть это обстоятельство, анод триода, работающего в динатронном режиме, называют иногда динодом. Что же касается сетки триода, то в динатронном режиме ей задается высокий положительный потенциал, так что в динатроне она является анодом.

Характеристики динатрона, т. е. зависимость тока I_d в цепи динода от напряжения U_d на нем показаны на рис. 90.

Три кривые рис. 90 относятся к разным напряже-

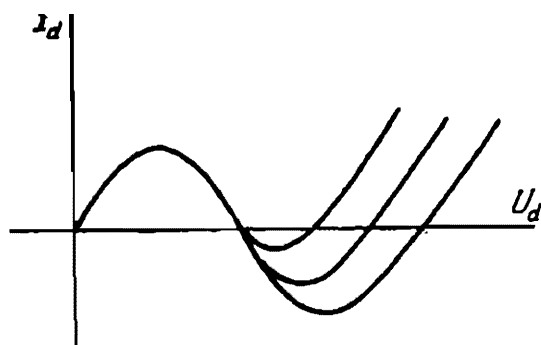


Рис. 90.

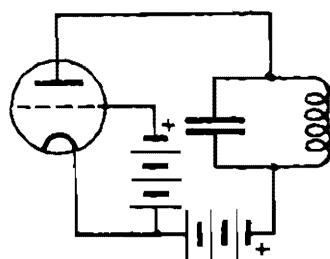


Рис. 91.

ниям на аноде; чем выше анодное напряжение, тем правее располагается характеристика.

Как видим, вольтамперная характеристика динатрона имеет падающий участок, так что динатрон является отрицательным сопротивлением, чем и обусловлена возможность его использования в качестве генератора. Схема динатронного генератора на триоде изображена на рис. 91.

Крутизна падающего участка вольтамперной характеристики, а следовательно, и величина отрицательного сопро-

тивления зависит от тока эмиссии. В триоде ток эмиссии можно менять только путем изменения накала. Поэтому в качестве динатрона предпочитают применять тетрод, в котором током эмиссии можно управлять посредством потенциала на первой сетке.

Механизм обратной связи в динатронном генераторе крайне прост: он состоит в том, что напряжение на контуре, будучи подано непосредственно на динод, управляет током динода. Таким образом, обратная связь действует по той же цепи, по которой осуществляется питание контура. Надлежащие фазовые соотношения обеспечиваются работой на падающем участке характеристики.

Обратимся к транзитронному генератору. Возьмем тетрод с ограниченной полной эмиссией (т. е., например, с вольфрамовым катодом) и включим его по схеме рис. 92. На вторую

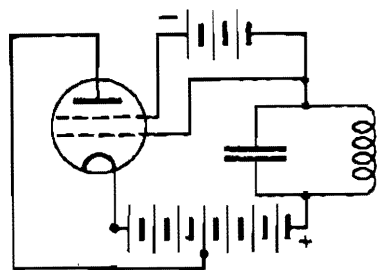


Рис. 92.

сетку подано отрицательное напряжение, и ток в ней отсутствует. Что же касается тока первой сетки I_1 , то в сумме с анодным током I_a он должен равняться току эмиссии. Таким образом, любое изменение тока I_1 может происходить только за счет перераспределения тока эмиссии между первой сеткой и анодом.

При определенных соотношениях увеличение положительного напряжения на первой, и следовательно, и на второй сетках (они соединены между собою через батарею) может вызвать увеличение анодного тока, а следовательно, уменьшение тока I_1 . Таким образом, характеристика зависимости тока первой сетки от напряжения на ней может иметь падающий участок, т. е. между первой сеткой и катодом может получиться отрицательное сопротивление. Обратная связь в транзитронном генераторе состоит в том, что напряжение на контуре управляет перераспределением токов. Обратная связь действует одновременно по двум цепям, а именно, по цепям обеих сеток.

Практические схемы транзитронных генераторов собираются на пентодах или гексодах, в которых первая сетка служит для ограничения полного тока эмиссии. Изменяя напряжение на первой сетке, можно управлять величиной отрицательного сопротивления.

§ 27. RC-генераторы синусоидальных колебаний

В рассмотренных до сих пор генераторах генерируемая частота определяется контуром из LC , представляющим собою колебательную систему в составе генератора. Возникает вопрос о том, при каких условиях возможно получить тот же результат, применяя схемы, составленные только из сопротивлений и емкостей.

Как нам уже известно, уравнение генератора имеет вид уравнения второго порядка, в котором действием обратной связи коэффициент при первой производной обращается в нуль. Следовательно, если мы составим схему из R и C , описываемую таким же уравнением, то это будет означать, что построенная нами схема обладает такими же свойствами, как и схема обычного генератора. (Такое заключение основывается на предположении, что составляемые нами дифференциальные уравнения правильно отображают реальные свойства схемы.)

Следовательно, для построения генератора RC мы должны прежде всего составить такую схему из сопротивлений и емкостей, которая описывалась бы дифференциальным уравнением второго порядка, аналогичным уравнению обычного контура. Но, как известно, простая цепь, содержащая только R и C , описывается уравнением первого порядка. Стало быть, мы должны перейти от простой цепи к сложной, обладающей по меньшей мере двумя степенями свободы *).

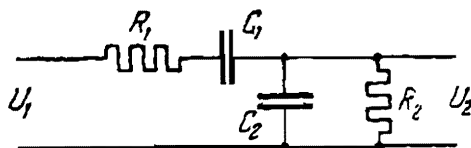


Рис. 93.

Рассмотрим схему рис. 93. Уравнение, связывающее напряжение на входе и на выходе, имеет вид

$$U_2' + 2\alpha U_2 + \omega_0^2 \int U_2 dt = \frac{1}{R_1 C_2} U_1, \quad (1)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}, \quad (2)$$

$$2\alpha = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2}. \quad (3)$$

*) Число степеней свободы в электрической цепи определяется числом независимых токов, которые могут протекать по цепи. Число степеней свободы может также определяться минимальным числом разрывов цепи, прекращающих всякое токопрохождение.

Уравнение (1) совершенно аналогично уравнению цепи из последовательно включенных R , C и L . Если теперь ввести в схему усилитель и дать обратную связь с выхода на вход, то получится схема, способная генерировать синусоидальные (точнее, близкие к синусоидальным) колебания (рис. 94).

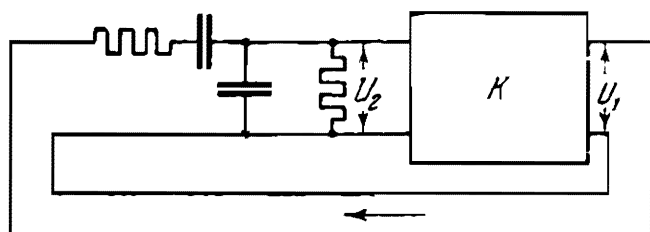


Рис. 94.

Составим уравнение схемы рис. 94. Пусть коэффициент усиления усилителя есть

$$K = \frac{U_1}{U_2} \quad (4)$$

(заметим, что мы сохранили обозначения рис. 93, так что для усилителя U_1 является выходным напряжением, U_2 — входным). Выражая на основании (4) U_1 через U_2 в правой части (1), и перенося все в левую часть, получим

$$U_1'' + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1-K}{R_1 C_2} \right) U_1' + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} U_1 = 0 \quad (5)$$

— обычное уравнение генератора. Условие самовозбуждения получим, подчинив коэффициент при первой производной условию

$$\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1-K}{R_1 C_2} \leq 0. \quad (6)$$

Очевидно, что для выполнения условия самовозбуждения нужно иметь достаточно большой коэффициент усиления K .

По поводу схемы рис. 94 следует еще заметить, что соотношение (4) выполняется только при четном числе ступеней усиления, так как каждая ступень производит обращение фазы на 180° . Поэтому при нечетном числе ступеней мы получим отрицательную обратную связь вместо требуемой положительной. Стало быть, необходимое число ламп в усилителе схемы рис. 94 не менее двух, и эту схему часто называют схемой двухлампового RC -генератора.

К построению схемы RC -генератора можно подойти и иначе. Всякая схема, приводимая к скелетной схеме автоколебательной системы рис. 53, будет генерировать устано-

вившиеся по частоте и амплитуде колебания, если устойчиво выполняется условие баланса амплитуд и фаз. Первое условие определяет амплитуду, второе — частоту установившихся колебаний. Условие баланса амплитуд обеспечивается подбором надлежащего усиления. Для выполнения же условия баланса фаз необходимо, чтобы при *данной* частоте (т. е. при той же частоте, которую генерирует или должен генерировать генератор) получалась положительная обратная связь. Так, схема рис. 95, в которой обратная связь подается

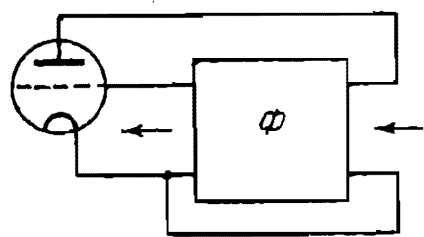


Рис. 95.

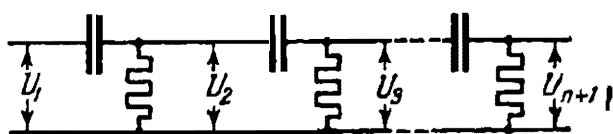


Рис. 96.

может генерировать частоту, для которой фаза напряжения при прохождении через четырехполюсник сдвигается *ровно* на 180° (так как сама лампа осуществляет поворот фазы еще на 180°). Эти соображения указывают путь построения однолампового RC-генератора. В качестве фазовращателя может быть использована лестничного типа схема, состоящая из нескольких звеньев RC, как показано на рис. 96. Фаза поворачивается на некоторый угол при переходе через каждое звено. Однако в каждом звене совершается поворот фазы на угол *меньше* 90° . Таким образом, для получения сдвига ровно на 180° необходима цепочка не менее, чем из трех звеньев. В результате схема однолампового RC-генератора принимает вид рис. 97. Полагая

$$I_a = SU$$

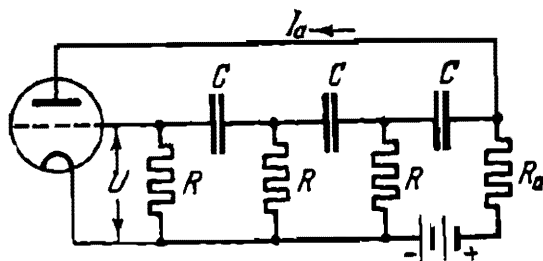


Рис. 97.

и составляя уравнение схемы, можно вывести условие самовозбуждения

$$R_a S \geq 29 + 23 \frac{R_a}{R} + 4 \frac{R_a^2}{R^2}$$

и выражение для частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{R}{6R + 4R_a}}.$$

Следует пояснить, что для схемы с тремя звеньями получается уравнение третьего порядка. Из трех корней характеристического уравнения один отрицателен и действителен, два же остальных комплексны; они и определяют частоту и затухание.

§ 28. Генераторы сверхвысоких частот

Описанные выше схемы генераторов не пригодны для генерирования колебаний сверхвысокой частоты. Это обусловлено, во-первых, тем, что на сверхвысокой частоте существенное влияние начинают оказывать паразитные параметры схемы и лампы*). Изменяя способ монтажа и конструкцию деталей, в частности, применяя специальные конструкции ламп, сильно отличающиеся от обычных, можно получить при помощи обычных принципиальных схем частоты до порядка $5 \cdot 10^8$ гц. Во-вторых, при сверхвысоких частотах приходится учитывать время пролета электрона в пространстве между электродами лампы, так как это время становится сравнимым с периодом колебания. Это последнее обстоятельство создает для обычного генератора неустранимые затруднения принципиального характера. Но, с другой стороны, это же обстоятельство может быть использовано для построения ряда генераторов, в которых конечность времени пролета электронов лежит в самой основе механизма генерации.

В современной технике с. в. ч. применяются главным образом три вида генераторов: 1) клистронный генератор, 2) магнетронный генератор и 3) генератор на лампе обратной волны.

Мы не будем разбирать теорию этих генераторов. Но для того, чтобы дать понятие о некоторых принципах использования конечной скорости электронов для генерирования колебаний с. в. ч., приведем краткое качественное описание явлений в клистроне.

*) Паразитными называются параметры, не учитываемые принципиальной схемой первого приближения, как-то: емкости проводов и элементов схемы между собою и на землю, индуктивности проводов и т. п.

Основа действия клистрона состоит в *модуляции* электронного потока *по скорости* с последующим автоматическим преобразованием модуляции по скорости в *модуляцию по плотности* электронного потока. Термин модуляция употребляется здесь просто в том смысле, что некоторый параметр изменяется в соответствии с оказываемым на него воздействием.

Рассмотрим рис. 98, на котором изображена пока только часть клистрона. Кроме катода K , имеются еще три электрода в форме сеток. Сетка C_1 играет роль ускоряющего электрода; ей сообщен положительный потенциал относительно катода. Между сетками C_2 и C_3 приложено переменное напряжение. Соответствующая потенциальная диаграмма изображена в нижней части рис. 98. Электроны, выйдя из катода, движутся на участке $K-C_1$ с ускорением и, накопив одинаковую скорость, проходят с этой скоростью участок C_1-C_2 , после чего попадают в промежуток C_2-C_3 . Здесь действует переменное поле, которое либо замедляет, либо ускоряет электроны. Таким образом, по выходе из промежутка C_2-C_3 электронный поток оказывается модулированным по скорости, т. е. электроны движутся с разными скоростями. В результате этого в пространстве правее C_3 более быстрые электроны догоняют более медленные и образуются так называемые электронные сгустки, т. е. области с большой плотностью электронов. Легко сообразить, что сгустки располагаются вдоль оси клистрона периодически, образуя бегущую волну плотности. Длина этой волны, т. е. расстояние между соседними сгустками, равна

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

где v — средняя скорость до модуляции, f — частота модуляции. Процесс образования сгустков называется группированием; комбинация сеток C_2-C_3 — группирователем; пространство, в котором формируются сгустки — пространством группирования или пространством дрейфа. Процесс группирования

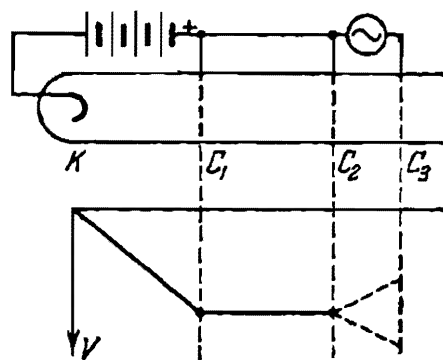


Рис. 98.

поясняется рис. 99, в нижней части которого изображено изменение во времени переменного напряжения на группирователе. В верхней части рисунка графиком в координатах расстояние — время изображено движение электронов. Предполагается для простоты, что электроны выходят из катода через равные промежутки времени. Получив одинаковые скорости после прохождения ускоряющего поля, электроны поступают в группирователь $C_2—C_3$, где скорости электро-

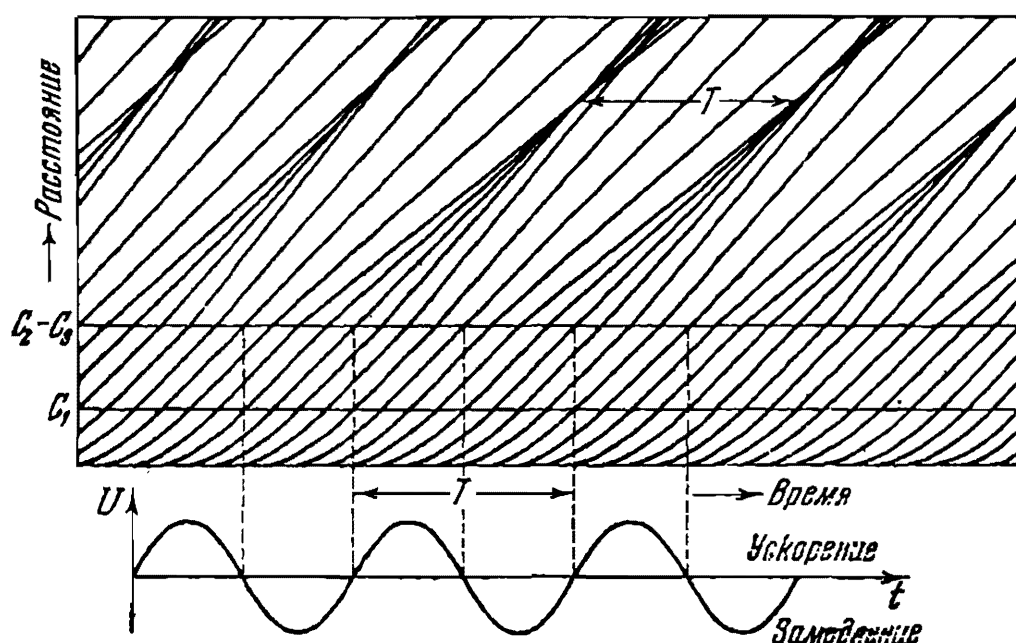


Рис. 99.

нов увеличиваются или уменьшаются в зависимости от знака напряжения на группирователе (см. синусоиду в нижней части рисунка). График движения электронов, выходящих из группирователя, представляется прямыми с разным наклоном: более крутые линии соответствуют более быстрым электронам.

На рисунке видно, что благодаря различному наклону прямые, представляющие движение электронов, образуют сходящиеся пучки, что и является графическим пояснением формирования электронных сгустков.

Образующийся в пространстве группирования электронный поток переменной плотности может быть использован для наведения тока во внешней цепи. Для этого понадобятся еще две сетки C_4 и C_5 , к которым может быть подключен настроен-

ный на соответствующую частоту контур. Если же теперь снять напряжение с контура и подать на группирователь, осуществив таким образом обратную связь, то мы

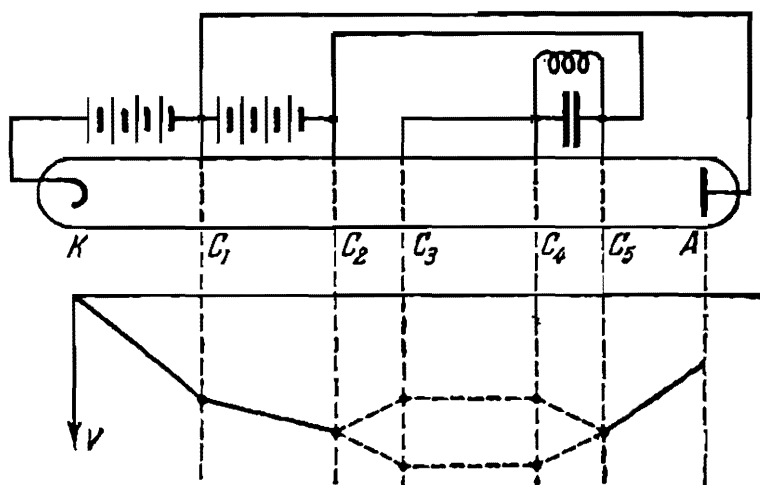


Рис. 100.

получим схему клистронного генератора, изображенную на рис. 100. Отработанные электроны попадают на коллектор А, а с него на катод. Комбинация сеток C_4 и C_5 носит название улавливателя. Для того чтобы система возбудилась, необходима надлежащая фаза обратной связи. При заданной конструкции расстояний между группирователем и улавливателем фазу обратной связи можно регулировать изменением ускоряющих напряжений на C_1 и C_2 .

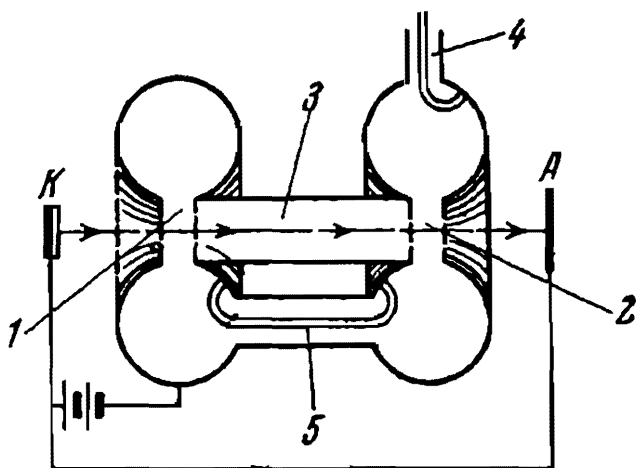


Рис. 101.

Конструктивное оформление клистрона с двумя резонаторами показано на рис. 101, на котором 1 и 2 означают объемные резонаторы тороидальной формы (на рисунке они показаны в разрезе). Группирователь и улавливатель образованы парами перфорированных дисков, входящими в качестве емкостей

в объемные резонаторы. Пространство группирования выполнено в виде трубы 3. Еще одна труба содержит петлю обратной связи 5. Для вывода переменного напряжения служит петля 4.

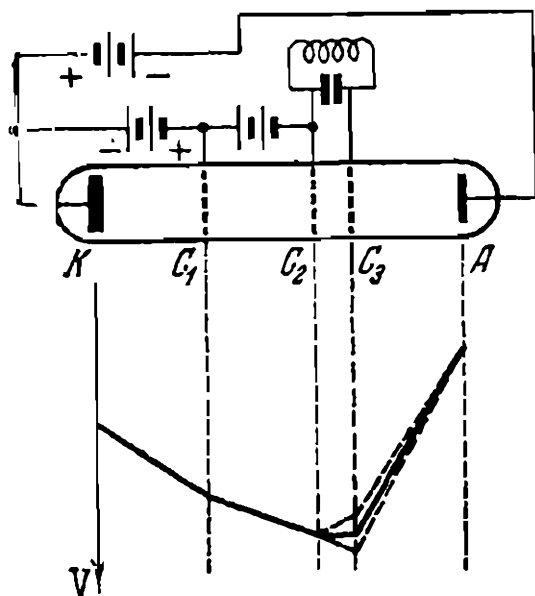


Рис. 102.

Наиболее распространен так называемый *отражательный клистрон*. Его отличие от только что рассмотренной системы состоит в том, что группирователь и улавливатель совмещены. Электронный поток, пройдя через пару сеток, выполняющих роль группирователя, тормозится отрицательным полем и поворачивает обратно, проходя снова через ту же пару сеток, которая на этот раз играет роль улавли-

вателя. Схема отражательного клистрона и соответствующая потенциальная диаграмма даны на рис. 102. Процесс груп-

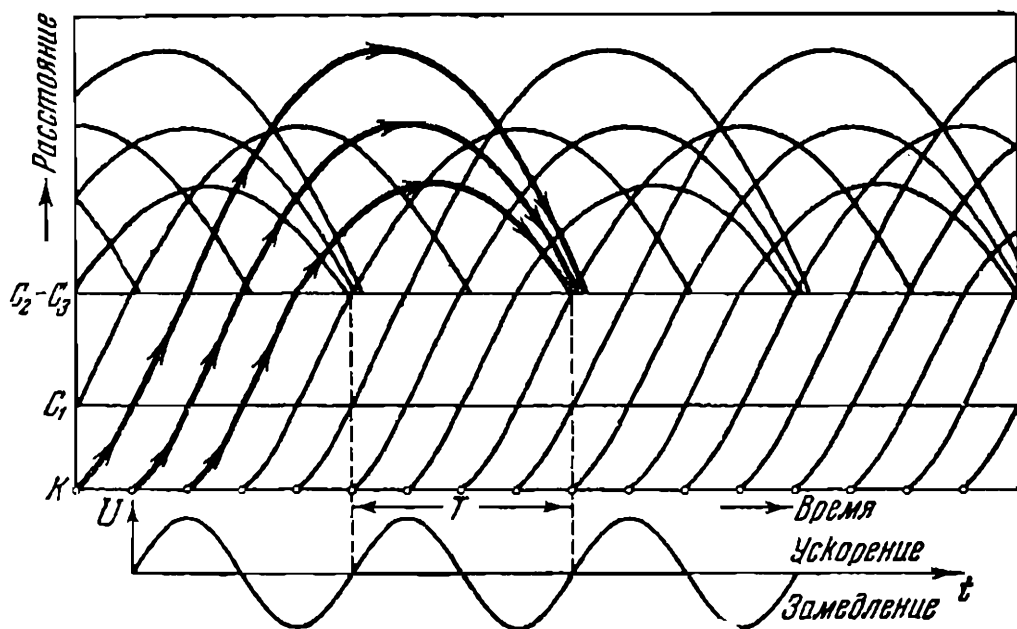


Рис. 103.

пирования в отражательном клистроне поясняется рис. 103. Этот рисунок отличается от рис. 99 тем, что линии, пред-

ставляющие движение электронов по выходе из группирователя, не прямые, а параболы (что соответствует движению в ускоряющем поле обратного направления). Электроны возвращаются к $C_2—C_3$; вследствие различия начальных скоростей образуются сгустки. Необходимо, очевидно, настроить систему так, чтобы сгустки образовались в зоне $C_2—C_3$. Следует заметить, что в отражательном клистроне цепь обратной связи в явном виде отсутствует; обратная связь осуществляется через электронный поток. Настройка отражательного клистрона может производиться не только изменением ускоряющих положительных потенциалов на C_1 и C_2 , но и отрицательным потенциалом на отражательном электроде A .

§ 29. Релаксационные автоколебания

Мы рассматривали до сих пор генераторы колебаний, близких по форме к синусоидальным. Такие автоколебания носят название *почти-гармонических*. Но в радиотехнике применяются также автоколебания, резко отличные по форме от синусоидальных; такие автоколебания, отличающиеся иногда внезапными скачкообразными изменениями тока или напряжения, или скорости изменения этих величин — что изображается графически осциллограммой в виде ломаной линии — называются *релаксационными* автоколебаниями. Существенное различие формы почти-гармонических и релаксационных автоколебаний обусловлено различием в устройстве и действии генераторов этих видов колебаний. В состав генератора почти-гармонических колебаний входит обычно контур, составленный из L и C (или эквивалентная контуру схема из R и C), т. е. колебательная система, содержащая два (по крайней мере) реактивных элемента, способных накапливать энергию. Колебательный процесс в контуре состоит с энергетической точки зрения в том, что запасенная в контуре энергия то сосредоточивается полностью в магнитном поле индуктивности, то переходит в электрическое поле емкости. Такая перекачка энергии происходит периодически; если потери отсутствуют, то колебание совершается по строго синусоидальному закону; при наличии же потерь амплитуда убывает со временем по экспоненциальному закону в связи с тем, что запас энергии все время убывает. Если же потери энергии

восполняются, как во всяком генераторе, за счет энергии источника, то колебания делаются незатухающими, а форма их лишь постольку отличается от синусоидальной, поскольку это зависит от ограничивающей амплитуду нелинейности.

Совершенно иной механизм генератора релаксационных колебаний. Он характеризуется тем, что имеется единственный (в простейшем случае) накопитель энергии. Происходящий в релаксационном генераторе периодический процесс состоит в том, что накопитель энергии набирает возрастающий запас энергии, пока не будет достигнут некоторый определенный высший уровень. Затем некоторый клапан разряжает накопитель на цепь разряда, пока запас энергии не достигнет определенного низшего уровня. Здесь клапан снова срабатывает и включает накопитель на зарядку. Сказанное поясняется

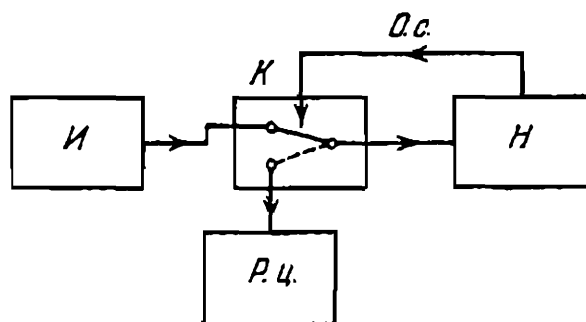


Рис. 104.

блок-схемой рис. 104, на которой означают: $И$ — источник энергии, $Н$ — накопитель, $К$ — клапан, $О.с.$ — обратная

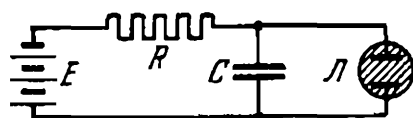


Рис. 105.

связь, $Р.ц.$ — разрядная цепь. Из приведенного общего описания уже следует, что для релаксационного генератора характерно наличие клапана, могущего занимать два фиксированных положения, одно из которых соответствует включению накопителя на зарядку, а второе — на разрядку. Клапан управляется обратной связью с накопителя; действие обратной связи состоит в том, что переключение клапана производится при достижении двух фиксированных уровней энергии — высшего и низшего. Отсюда сразу следует, что размах релаксационных колебаний не зависит от энергетического баланса, а определяется полностью перепадом между указанными двумя уровнями, при которых срабатывает клапан.

Все эти общие свойства релаксационного генератора легко уяснить себе, рассмотрев простейший пример — релаксационный генератор с газоразрядной лампой. Схема генератора изображена на рис. 105. Источник энергии — батарея E —

заряжает через сопротивление R конденсатор C , играющий в этой схеме роль накопителя. В качестве клапана применена газоразрядная лампа L ; она же является цепью, на которую разряжается накопитель. Действие схемы таково: после включения батареи конденсатор начинает заряжаться. Когда напряжение на нем достигнет напряжения U_2 — «напряжения зажигания» лампы L , — в последней произойдет ионизация заполняющего ее газа и сопротивление лампы, которое до этого было весьма большим, резко упадет до малой величины r . Конденсатор начнет быстро разряжаться на это сопротивление. Когда же напряжение упадет до значения U_1 , при котором ионизация прекращается, сопротивление лампы снова резко возрастет, и возобновится процесс зарядки конденсатора. Ход явления представлен осциллограммой рис. 106,

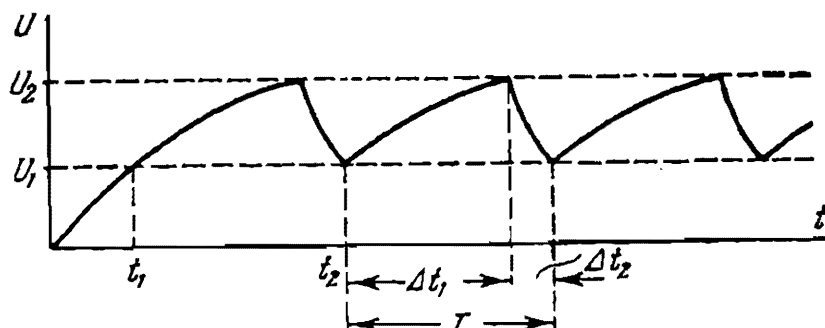


Рис. 106.

изображающей зависимость напряжения на конденсаторе от времени. Размах колебаний зависит только от перепада напряжения, т. е. от разности $U_2 - U_1$. Что же касается частоты, то она зависит от постоянных времени цепей зарядки и разрядки, а также от питающего напряжения. Определим период колебания. Он складывается из двух отрезков Δt_1 и Δt_2 (см. рис. 106), первый из которых определяет время зарядки, второй — разрядки. Мы имеем для процесса зарядки

$$U = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}),$$

где $\tau_1 = RC$ — постоянная времени зарядной цепи. Можем составить два равенства

$$U_1 = E(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}), \quad U_2 = E(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_1}})$$

(см. рис. 106), из которых находим

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{E}{E - U_1}, \quad t_2 = \tau_1 \ln \frac{E}{E - U_2},$$

а отсюда и время зарядки

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = RC \ln \frac{E - U_1}{E - U_2}.$$

Это выражение показывает, что чем больше E при данных U_1 и U_2 , тем меньше отношение под знаком логарифма отличается от единицы, и тем меньше время зарядки. Процесс разрядки выражается формулой

$$U = U_2 e^{-\frac{1}{\tau_2}(t - t_2)},$$

где $\tau_2 = rC$ — постоянная времени разрядной цепи. При $t = t_3$ достигается значение напряжения $U = U_1$. Мы получаем

$$U_1 = U_2 e^{-\frac{1}{\tau_2}(t_3 - t_2)} = U_2 e^{-\frac{\Delta t_2}{\tau_2}},$$

откуда

$$\Delta t_2 = rC \ln \frac{U_2}{U_1}.$$

Теперь мы получим период колебания, складывая Δt_1 и Δt_2 :

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 = C \left(R \ln \frac{E - U_1}{E - U_2} + r \ln \frac{U_2}{U_1} \right).$$

Как видим, период колебания зависит от постоянных времени цепей зарядки и разрядки, т. е. от величин RC и rC , от соотношения напряжений зажигания и потухания U_2 и U_1 и от питающего напряжения E . Если взять E и R достаточно большими, а r и C достаточно малыми, то форма колебания приближается к показанной на рис. 107. Напряжение такой формы называется «пилообразным» и имеет в радиотехнике широкое применение в качестве *развертывающего* напряжения в электронной осциллокопии, в телевидении, радиолокации и др. Развертывающему напряжению предъявляют обычно требования высокой степени линейности на участке прямого хода (п. х. на рис. 107) и минимальной длительности обратного хода (о. х.). Рассмотренная нами простейшая схема рис. 105 плохо удовлетворяет обоим этим требованиям. Линейность прямого хода можно значительно улучшить.

включив вместо сопротивления R ограничитель тока, например диод, работающий в режиме насыщения. Однако для гене-

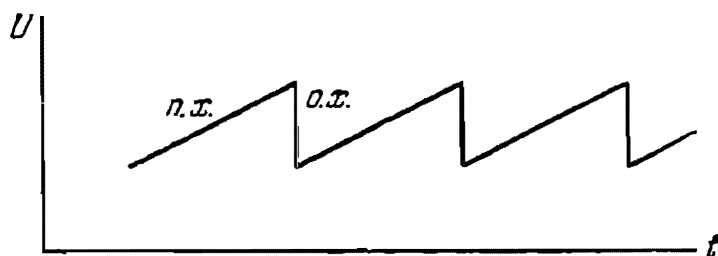


Рис. 107.

рирования пилообразного развертывающего напряжения предпочитают пользоваться специальными, более совершенными релаксационными генераторами.

§ 30. Релаксационные генераторы

Одной из наиболее ранних схем релаксационных генераторов является симметричный *мультивибратор* *), не утративший значения и до наших дней. Схема симметричного мультивибратора показана на рис 108. Обе половины схемы можно рассматривать как два отдельных генератора, связанных между собой так, что один из генераторов выполняет функции клапана, управляющего работой другого.

Переходя к описанию работы схемы, начнем с такого ее состояния, когда токи в анодных цепях обеих ламп в точности равны. Это есть состояние равновесия, однако неустойчивого. В самом деле, пусть ток первой лампы немного возрастет. При этом напряжение на лампе станет меньше

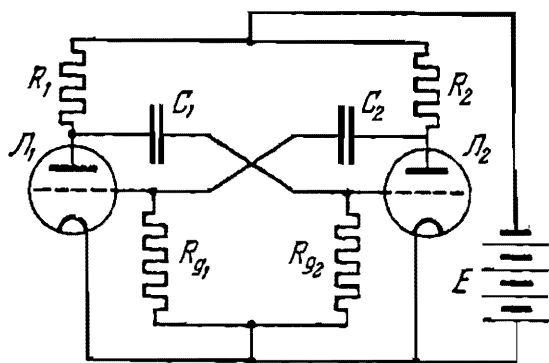


Рис. 108.

*) То есть генератор колебаний со многими частотами (имеется в виду богатство спектра). Мультивибратор применялся в свое время для градуировки волномеров; опорными точками служили частоты многочисленных гармоник.

первоначального, и конденсатор C_1 начнет разряжаться. Разрядный ток, протекая по сопротивлению R_{g2} , создаст отрицательное напряжение на сетке второй лампы. Вследствие этого напряжение на аноде возрастет, а анодный ток уменьшится. Благодаря повышению напряжения на аноде начнется подзарядка конденсатора C_2 . Зарядный ток, протекая по сопротивлению R_{g1} , вызовет положительное напряжение на сетке первой лампы, а следовательно, дальнейшее увеличение тока первой лампы.

Это рассуждение показывает, что рассмотренное нами исходное состояние, характеризующееся равенством токов и напряжений в обеих половинах схемы, действительно неустойчиво.

Рост тока первой лампы и нарастание отрицательного напряжения на сетке второй лампы происходит очень быстро —

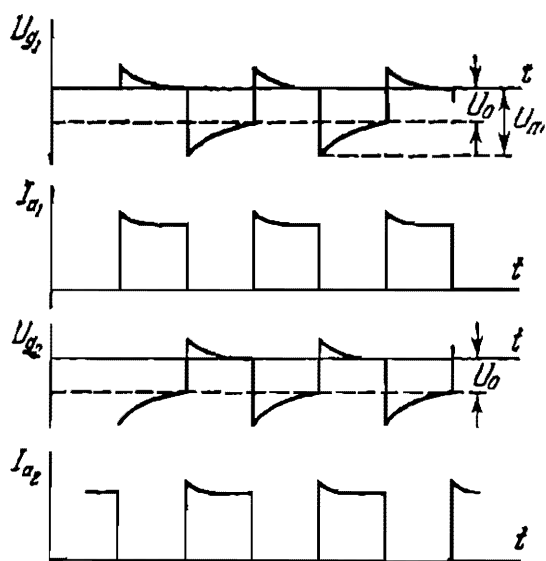


Рис. 109.

скачком. В результате первая лампа окажется насыщенной, а вторая запертой большим отрицательным напряжением. Теперь конденсатор C_1 продолжает разряжаться через L_1 и R_{g2} ; разрядный ток, а с ним и отрицательное напряжение на сетке L_2 убывают, пока лампа L_2 не отойдет. В этот момент напряжение на ней падает, конденсатор C_2 начинает разряжаться, и происходит скачкообразное изменение токов

и напряжений, описанное выше, но с переменной ролей обеих половин схемы. Изменения во времени анодных токов и напряжений на сетках в обеих половинах схемы изображены на рис. 109. Вследствие симметрии схемы длительность импульсов анодного тока в обеих половинах одинакова. Таким образом, форма анодного тока в каждой лампе приближается к прямоугольной. Впрочем, изменив параметры можно получить также форму, приближающуюся к треугольной. Форма колебания зависит от постоянных времени разрядки и зарядки. Из схемы рис. 108 видно, что постоянная

времени разрядки равна

$$\tau_p = C \left(R_g + \frac{R_i R}{R_i + R} \right),$$

а постоянная времени зарядки

$$\tau_z = C \left(R + \frac{R_g r_g}{R_g + r_g} \right),$$

где C — емкость, R — сопротивление в цепи анода, R_i — сопротивление лампы (катод — анод), R_g — сопротивление в цепи сетки, r_g — сопротивление лампы (катод — сетка). Обычно $\tau_p \gg \tau_z$; при этом форма колебаний близка к прямоугольной. Зная постоянную времени, можно найти период колебания. За половину периода напряжение на сетке убывает от наибольшего значения U_m до напряжения запирающего U_0 . Таким образом,

$$U_0 = U_m e^{-\frac{1}{2} \frac{T}{\tau_p}},$$

откуда

$$T = 2\tau_p \ln \frac{U_m}{U_0}.$$

Напряжение запирающего U_0 — это параметр лампы. Что же касается U_m , то в начале разрядки, т. е. непосредственно после скачка тока, оно равно

$$U_m = E \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R} + \frac{R_i}{R_g}}.$$

Итак, период зависит от параметров лампы, от параметров схемы и от питающего напряжения.

В качестве второго примера релаксационного генератора рассмотрим вкратце так называемый блокинг-генератор, применяемый главным образом для получения весьма коротких импульсов (длительностью до долей микросекунды). Схема блокинг-генератора изображена на рис. 110. Она состоит из триода и трансформатора, связывающего цепи анода и сетки. Емкости, образующие с индуктивностями обмоток колебательные контуры, в схеме не предусмотрены; однако необходимо учитывать распределенные емкости, эквиваленты которых намечены на схеме пунктиром. Схему рис. 110

можно рассматривать как вырожденную схему обычного генератора с контурами в цепях анода и сетки; для схемы рис. 110 характерно, что процессы в цепях имеют аperiодический характер и перемежаются резкими скачками (эти скачки, называемые в иностранной литературе «блокинг», и обуславливают наименование рассматриваемого типа генератора).

Действие схемы рассмотрим с момента, когда конденсатор C_0 заряжен, на сетке — отрицательный потенциал относительно катода и лампа заперта. Конденсатор C_0 разряжается через сопротивление R_g ; постоянная времени процесса разрядки равна $R_g C_0$. Когда напряжение достигнет значе-

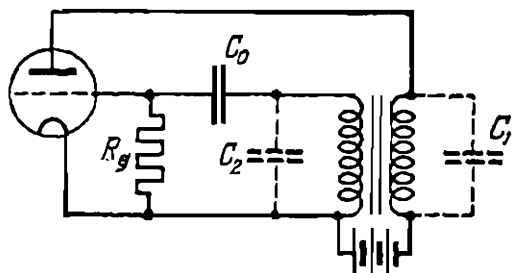


Рис. 110.

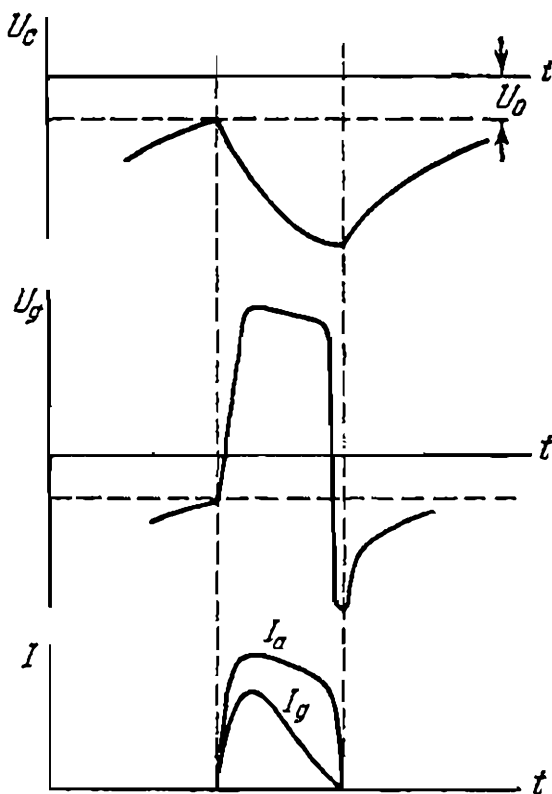


Рис. 111.

ния U_0 , лампа отперется; возникнет анодный ток, а благодаря сильной положительной обратной связи на сетке появится положительное напряжение, обуславливающее дальнейший быстрый рост анодного тока. Этот процесс, протекающий с очень большой скоростью, приводит к тому, что напряжение на аноде падает почти до нуля (это и есть «блокинг»). Когда результирующее напряжение на сетке (равное сумме отрицательного напряжения на C_0 и положительного напряжения, наводимого обратной связью) упадет до нуля, появится сеточный ток, и конденсатор начнет быстро заряжаться через промежуток сетка — катод с постоянной времени $C_0 r_g$. В этой стадии процесса напряжение на сетке положительно и превосходит напряжение на аноде; крутизна лампы при этом мала, и изменения напряжения на сетке не оказывают боль-

шого влияния на анодный ток. Но в дальнейшем, после того, как напряжение на сетке, достигнув наибольшего значения, начинает убывать, крутизна увеличивается. Наконец, достигаются соотношения, благоприятные для очередного скачка: уменьшение напряжения на сетке вызывает уменьшение анодного тока, что вызывает дальнейшее уменьшение сеточного напряжения, и лампа с очень большой скоростью запирается. После этого весь описанный цикл повторяется. На рис. 111 показано изменение во времени напряжения на конденсаторе U_C , на сетке U_g и сеточного и анодного токов I_g и I_a .

Условие самовозбуждения блокинг-генератора может быть записано в виде (при условии, что C_1 и C_2 очень малы по сравнению с C_0):

$$kS_a - \frac{1}{nR_i} - \frac{n}{R_g} - nS_g + \frac{1}{r_g} > 0,$$

где S_a и S_g — соответственно крутизны по аноду и по сетке, R_i и r_g — внутренние сопротивления катод — анод и катод — сетка, n — коэффициент трансформации, k — коэффициент связи (близкий к единице в рассматриваемом случае). Минимальная длительность импульсов зависит от индуктивности рассеяния трансформатора и паразитной емкости C_1 . Период следования импульсов определяется в основном постоянной времени разрядки конденсатора C_0 ; приближенно $T \cong R_g C_0$.

ГЛАВА III

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПОД ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

В главе I рассматривались цепи с нелинейными сопротивлениями и главнейшие радиотехнические процессы, основанные на явлениях в таких цепях. В настоящей главе рассматриваются более сложные явления, происходящие в нелинейных цепях с реактивными сопротивлениями, а также вынужденный режим некоторых автоколебательных и потенциально-автоколебательных систем. Последний термин означает систему, могущую при известных обстоятельствах генерировать колебания, но находящуюся в исходном положении (при отсутствии внешнего воздействия) в устойчивом состоянии («недовозбужденная» система).

§ 31. Работа выпрямителя

Выпрямительная схема всегда содержит того или иного устройства фильтр, служащий для ослабления переменной составляющей выпрямленного напряжения. Таким образом, в реальной выпрямительной схеме должны сохраняться реактивные сопротивления. Простейшая схема представлена на рис. 112. Найдем выходное напряжение U .

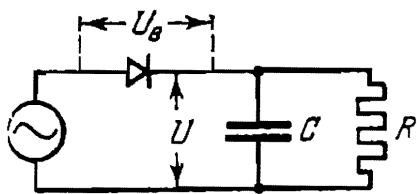


Рис. 112.

Положим для простоты, что характеристика выпрямителя задана в виде следующей зависимости проводимости от напряжения:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } U_b < 0, \\ \infty & \text{при } U_b > 0. \end{cases}$$

(В действительности прямая и обратная проводимости конечны, но различаются в хорошем выпрямителе во много раз.)

Если сопротивление выпрямителя постоянно в некотором интервале напряжений, то это значит, что *в пределах этого интервала* явления описываются линейным уравнением. В соседнем же интервале может действовать тоже линейная, но уже другая зависимость. В нашем случае работа схемы описывается следующими линейными уравнениями:

$$U = E \quad (U_b > 0), \quad (1)$$

$$U + RI = 0 \quad (U_b < 0). \quad (2)$$

Напряжение на выпрямителе равно, очевидно,

$$U_b = E - U.$$

Беря

$$E = E_m \sin \omega t$$

и выражая в (2) ток через напряжение, получим

$$U = E_m \sin \omega t \quad (E > U),$$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC} U = 0 \quad (E < U).$$

Периодическое решение нашей нелинейной задачи мы получим, учитывая, что напряжение U не может измениться скачком; следовательно, мы должны значение напряжения внутри одного интервала (т. е. при $E > U$) приравнять соответствующему значению напряжения внутри другого интервала (т. е. при $E < U$) на общей их границе (т. е. при $E = U$). Это и есть метод сшивания.

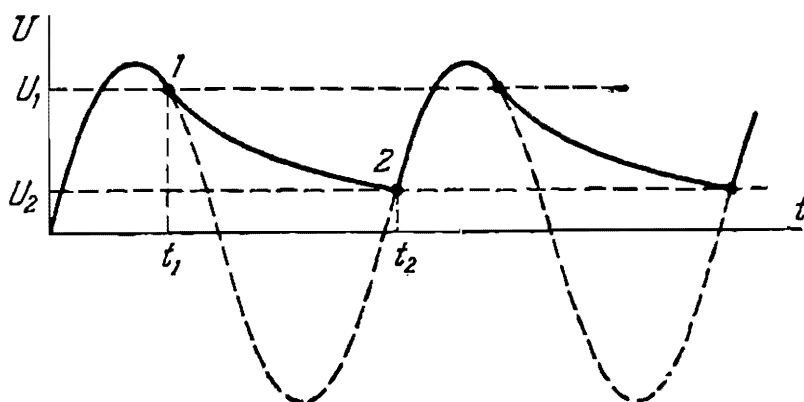


Рис. 113.

Качественная картина явления, совершенно очевидная заранее, представлена на рис. 113. Напряжение изменяется

по синусоидальному закону до $t = t_1$; в этот момент скорость убывания напряжения на конденсаторе становится меньше скорости убывания синусоидального напряжения E . Выпрямитель запирается, и конденсатор разряжается на сопротивление R . Процесс разряда продолжается, пока в момент $t = t_2$ U и E не сравняются. В этот момент выпрямитель отпирается, и дальнейшее изменение напряжения происходит по синусоидальному закону вплоть до $t = t_1 + T$.

Процесс разряда происходит по экспоненциальному закону

$$U = U_1 e^{-\alpha(t-t_1)}, \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{RC}.$$

Неизвестными являются координаты точек 1 и 2, т. е. величины U_1 , U_2 , t_1 и t_2 . Для их определения мы должны располагать четырьмя уравнениями.

Первое уравнение связывает U_1 и t_1 :

$$U_1 = E_m \sin \omega t_1. \quad (4)$$

Второе уравнение получим, приравняв в этой же точке производные экспоненты (3) и синусоиды (2). Это дает

$$-\alpha U_1 = \omega E_m \cos \omega t_1. \quad (5)$$

Далее имеем, с одной стороны,

$$U_2 = E_m \sin \omega t_2, \quad (6)$$

с другой же стороны, должно быть

$$U_2 = U_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)}. \quad (7)$$

Система уравнений (4) — (7) определяет искомые величины. Из (4) и (5) находим

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = -\frac{\omega}{\alpha}.$$

Выражая $\sin$ через tg и подставляя в (4), получаем

$$U_1 = \frac{E_m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}}.$$

Для t_2 , приравняв правые части (6) и (7), получим аналитически неразрешимое трансцендентное уравнение. Но графически это уравнение разрешается очень просто: из точки 1 с уже известными координатами U_1 , t_1 нужно провести экспоненту (3) до пересечения с синусоидой в точке 2. Координаты этой точки и дают искомые значения U_2 и t_2 . В зависимости от значения постоянной времени $\frac{1}{\alpha} = RC$ будем иметь ход напряжения в пределах, указанных на рис. 114.

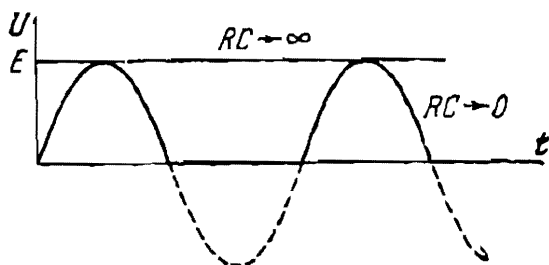


Рис. 114.

Построим диаграмму напряжения в координатах U , U' . Изображением синусоиды на плоскости U , U' является окружность (при согласованных масштабах). Изображение экспоненты мы получим, продифференцировав (3)

$$U' = -\alpha U_1 e^{-\alpha(t-t_1)}. \quad (8)$$

Разделив (8) на (3), найдем

$$\frac{U'}{U} = -\alpha.$$

Таким образом, экспоненциальный закон изменения напряжения в координатах U , U' представляется прямой, проходящей через начало координат с наклоном $-\alpha$.

Диаграмма имеет вид, показанный на рис. 115. Отрезок 1—2 соответствует экспоненте. В точке 2 происходит скачок производной; изображающая точка мгновенно перебрасывается из положения 2 в положение 2'. Далее изображающая точка движется по дуге окружности 2'—1, соответствующей во времени синусоидальному закону изменения напряжения. Предельные случаи, представленные на рис. 114, изобразятся на диаграмме так: при $RC \rightarrow 0$ наклонная прямая займет вертикальное положение и диаграмма выродится в полуокружность; при $RC \rightarrow \infty$ прямая расположится горизонтально,

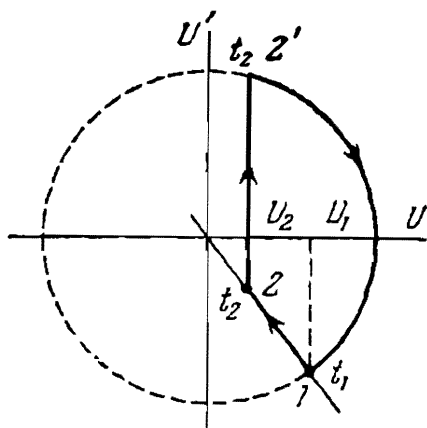


Рис. 115.

и диаграмма стянется в одну точку на оси с координатой $U = E_m$.

Режим $RC \rightarrow \infty$ употребляется, в частности, при построении пик-вольтметров — приборов, измеряющих максимальное значение напряжения.

§ 32. Резонанс в нелинейной цепи

Явление резонанса в цепи, содержащей нелинейные элементы, имеет существенные особенности. Мы рассмотрим резонанс в последовательной цепи, содержащей нелинейную емкость.

Составим уравнение напряжений для последовательной цепи из R , L и C , считая, что R и L — постоянные величины, а C зависит от заряда

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C(Q)} Q = E_m \sin \omega t$$

или

$$Q'' + 2\alpha Q' + F(Q) = B \sin \omega t. \quad (1)$$

Будем считать, что $F(Q)$ — нечетная функция, и положим

$$F(Q) = \omega_0^2 (Q + \lambda Q^3). \quad (2)$$

Таким образом, степень нелинейности во всех последующих соотношениях определяется параметром λ ; при $\lambda \rightarrow 0$ мы возвращаемся к обычным линейным зависимостям.

Будем искать установившееся решение (1) в виде

$$Q = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (3)$$

где a и b — постоянные величины. Амплитуда заряда

$$A = Q_m = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Подставляя решение (3) в (1) и приравнявая порознь коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) a - 2\alpha \omega b + \frac{3}{4} \lambda \omega_0 a A^2 &= B, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) b + 2\alpha \omega a + \frac{3}{4} \lambda \omega_0 b A^2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Умножая поочередно на a и b , складывая и вычитая, получим уравнение, содержащее только $A^2 = a^2 + b^2$:

$$\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 \omega_0^4 A^6 + \frac{3}{2}\lambda \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2) A^4 + \\ + [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2 \omega^2 d^2] A^2 - B^2 = \varphi(A^2, \omega^2) = 0. \quad (4)$$

Решив это уравнение относительно A , мы получили бы амплитуду заряда как функцию амплитуды внешней э. д. с. B и частоты ω , т. е. выражение для резонансной кривой.

Но здесь возникает затруднение, связанное с тем, что уравнение (4) — кубическое относительно A^2 . Поэтому его удобнее решать не относительно A^2 , а относительно ω^2 , так как для ω^2 уравнение (4) является квадратным (а для ω — биквадратным). Переписав (4) в виде

$$\omega^4 - 2\omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4}\lambda A^2 - \frac{1}{2}d^2\right) \omega^2 + \omega_0^4 \left(1 + \frac{3}{4}\lambda A^2\right)^2 - \frac{B^2}{A^2} = 0,$$

найдем решение этого уравнения:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[\left(1 + \frac{3}{4}\lambda A^2 - \frac{1}{2}d^2\right) \pm \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - d^2 \left(1 + \frac{3}{4}\lambda A^2\right) + \frac{1}{4}d^4} \right].$$

То обстоятельство, что мы нашли не амплитуду как функцию частоты, а, наоборот, частоту как функцию амплитуды, не меняет сути дела; такая замена с точки зрения графика сводится лишь к перемене местами осей абсцисс и ординат.

Высокая степень уравнения для A указывает на то, что решение может быть многозначным. Поэтому полезно исследовать зависимость между A^2 и ω^2 путем рассмотрения крайних положений касательных к кривой, выражающей эту зависимость. Производную можно выразить через частные производные неявной функции (4); именно *)

$$\frac{dA^2}{d\omega^2} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \omega^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial A^2}}. \quad (5)$$

*) Рассматривая зависимость между A^2 и ω^2 (вместо зависимости между A и ω) мы не меняем характера особых точек кривой; изменяется лишь масштаб графика, т. е. линейный масштаб заменяется квадратичным.

Касательная горизонтальна, когда производная обращается в нуль, т. е. когда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (6)$$

Это равенство определяет положение максимумов резонансной кривой. Касательная принимает вертикальное положение, когда производная (5) обращается в бесконечность, т. е. при условии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A^2} = 0. \quad (7)$$

Найдем обе частные производные; приравняв их нулю, получим уравнения

$$\omega^2 - \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda A^2 - \frac{1}{2} d^2 \right) = 0, \quad (8)$$

$$3 \left(\frac{3}{4} \lambda \right)^2 \omega_0^4 A^4 + 4 \left(\frac{3}{4} \lambda \right) (\omega_0^2 - \omega^2) A^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + d^2 = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) есть уравнение кривой, на которой располагаются максимумы семейства резонансных кривых. Уравнение (9) есть уравнение кривой, представляющей место точек, где резонансная кривая проходит вертикально.

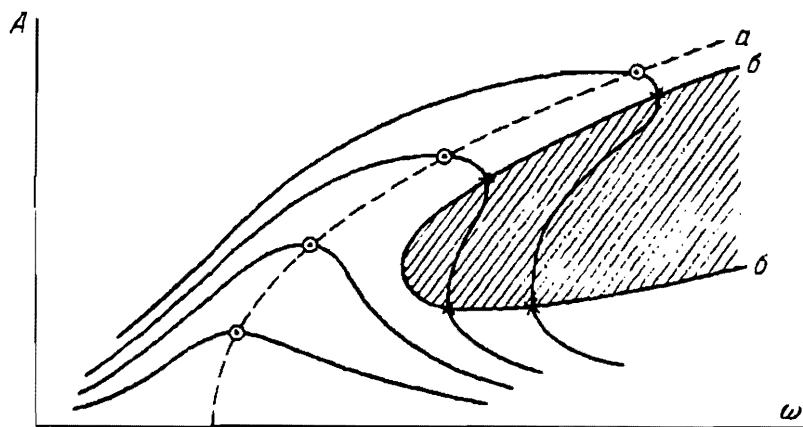


Рис. 116.

Семейство резонансных кривых изображено на рис. 116. Как видим, кривые наклонены вправо, причем наклон тем больше, чем больше максимальная амплитуда, так как при этом сильнее проявляется нелинейность. (Заметим, что при $\lambda < 0$ получился бы наклон влево.) На графике нанесены кривые, уравнения которых выражены формулами (8) (кривая *a*) и (9) (кривая *б*). Максимумы резонансных кривых отмечены

кружками; точки, в которых касательные к резонансным кривым вертикальны, отмечены крестиками.

При экспериментальном снятии нелинейных резонансных кривых типа рис. 116 происходят следующие явления. При повышении частоты амплитуда колебаний нарастает, достигает максимума, затем убывает, пока не будет достигнуто значение, соответствующее точке с вертикальной касательной. Здесь происходит срыв: амплитуда колебания скачком убывает до значения, соответствующего нижней ветви кривой (рис. 117), а в дальнейшем убывает монотонно. Если же снимать кривую путем уменьшения частоты, то сперва амплитуда нарастает монотонно, а затем срывается на верхнюю ветвь кривой, как показано на том же рис. 117. Таким образом, скачок амплитуды происходит при разных значениях частоты в зависимости от того, повышается частота или понижается. Участок резонансной кривой между точками срыва (пунктирная линия

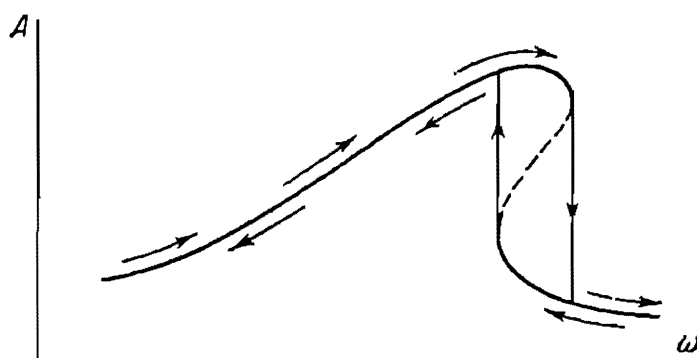


Рис. 117.

на рис. 117) соответствует неустойчивым режимам, не могущим наблюдаться при снятии резонансной кривой. Следовательно, область, ограничиваемая кривой б, есть область неустойчивости; на рис. 116 эта область заштрихована.

Аналогичные явления наблюдаются и при нелинейной индуктивности, например при наличии в цепи катушки индуктивности с ферромагнитным сердечником. Резонансные явления в такой цепи называют обычно феррорезонансом.

В заключение заметим, что резонанс в нелинейной цепи возможен и на дробной частоте, т. е. на частоте, равной некоторой доле частоты внешнего напряжения. Другими словами, резонанс в нелинейной цепи может применяться для деления частоты. Так, например, в технике имеют применение феррорезонансные делители частоты в отношении 1:3.

§ 33. Автоколебательная система под внешним воздействием

В этом параграфе мы выведем некоторые общие соотношения, которые в дальнейшем будут использованы при рассмотрении ряда технических вопросов. Речь пойдет об автоколебательной системе, на которую действует внешняя электродвижущая сила. Всякая автоколебательная система нелинейна; поэтому при воздействии на нее внешней э. д. с. возникает ряд своеобразных нелинейных явлений, используемых в радиотехнике.

Мы составим уравнение для схемы рис. 118, представляющей собою генератор с контуром в цепи сетки. Отличие этой схемы от ранее рассматривавшейся состоит в том, что в контуре действует еще внешняя э. д. с. $E = E_m \cos \omega t$. Обозначив напряжение на сетке через U , получим

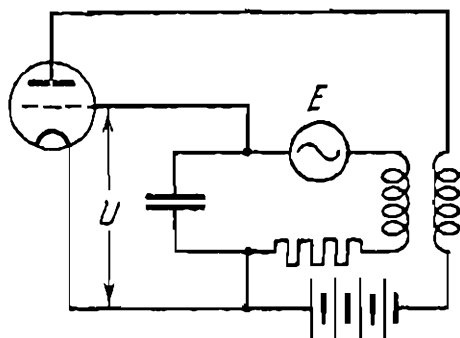


Рис. 118.

$$U'' + 2\beta U' + \omega_0^2 U = \omega_0^2 E_m \cos \omega t, \quad (1)$$

где, как и раньше, обозначено

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\beta = 2\alpha - \omega_0^2 MS.$$

Пусть характеристика лампы аппроксимирована многочленом 3-й степени, тогда

$$S = a_1 + 3a_3 U^2, \quad 2\beta = 2\beta_0 + \gamma U^2,$$

где

$$2\beta_0 = 2\alpha - \omega_0^2 MS_0, \quad \gamma = 3\omega_0^2 Ma_3.$$

Используя эти соотношения и обозначения, перепишем (1) в виде

$$U'' + (2\beta_0 + \gamma U^2) U' + \omega_0^2 U = \omega_0^2 E_m \cos \omega t. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$U = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

где A и φ — неизвестные амплитуда и фаза, являющиеся в общем случае функциями времени, что следует иметь в виду

при дифференцировании. Так, первая производная (3) будет

$$U' = A' \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega + \varphi') \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставим решение (3) в (2); при подстановке $U^2 U'$ отбросим члены, содержащие третью гармонику. Отбросим также член, содержащий A'' (так как A — медленная функция по сравнению с $\sin \omega t$). После этого разложим правую часть (2) по формуле

$$\cos \omega t \equiv \cos \varphi \cos(\omega t + \varphi) + \sin \varphi \sin(\omega t + \varphi)$$

и приравняем порознь коэффициенты при $\sin(\omega t + \varphi)$ и $\cos(\omega t + \varphi)$ в правой и левой частях. Это даст нам два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \left(2\beta_0 + \frac{3}{4} \gamma A^2\right) A' + (\omega_0^2 - \omega_1^2) A &= \omega_0^2 E_m \sin \varphi, \\ 2\omega_1 A' + \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) \omega_1 A &= -\omega_0^2 E_m \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь обозначено

$$\omega_1 = \frac{d}{dt}(\omega t + \varphi) = \omega + \varphi'.$$

Мы будем в дальнейшем заниматься главным образом установившимся режимом, когда

$$A' = \varphi' = 0.$$

При этом условии получаем из (4) уравнения для установившихся амплитуды и фазы

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) A &= \omega_0^2 E_m \sin \varphi, \\ \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) \omega A &= -\omega_0^2 E_m \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При отсутствии внешней э. д. с., т. е. при $E_m = 0$, первое уравнение даст нам частоту автоколебаний

$$\omega = \omega_0,$$

а второе уравнение — уже известное нам (см. § 21) значение установившейся амплитуды автоколебаний мягкого генератора

$$A_0 = \sqrt{-\frac{8\beta_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{a_1 - R \frac{C}{M}}{a_3}}. \quad (6)$$

Возводя уравнения (5) в квадрат и складывая, получим

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2 \right)^2 \right] A^2 = \omega_0^4 E_m^2. \quad (7)$$

Это соотношение позволяет найти амплитуду установившихся колебаний, которая зависит: 1) от амплитуды внешней э. д. с. E_m , 2) от расстройки $\omega_0^2 - \omega^2$, 3) от начального затухания $\beta_0 = \alpha - \frac{1}{2} \omega_0^2 M S_0$ и 4) от нелинейности характеристики, выражаемой коэффициентом $\gamma = 3\omega_0^2 M a_3$. Если найти из (7) амплитуду A как функцию частоты, то получим выражение для своего рода резонансных кривых. Здесь, однако, мы столкнемся с тем же затруднением, что и в предыдущем параграфе при исследовании нелинейного резонанса: относительно A мы получаем уравнение 6-й степени. Это затруднение преодолевается тем же приемом — обращением интересующей нас зависимости.

При некоторых соотношениях решения уравнения (7) неустойчивы. Границу области неустойчивости можно определить как место точек, в которых касательные к резонансным кривым вертикальны, — аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе.

Положим, что расстройка мала, т. е. $\omega \cong \omega_0$ и обозначим

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega.$$

Воспользовавшись, кроме того, соотношением (6), можно преобразовать (7) к виду

$$\left[\frac{\Delta\omega^2}{\beta_0^2} + \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right)^2 \right] \frac{A^2}{A_0^2} = \frac{\omega_0^2 E_m^2}{4\beta_0^2 A_0^2}, \quad (8)$$

или, обозначая для краткости

$$\frac{\Delta\omega}{\beta_0} = x, \quad \frac{A^2}{A_0^2} = y, \quad \frac{\omega_0^2 E_m^2}{4\beta_0^2 A_0^2} = E,$$

к виду

$$y[x^2 + (1 - y)^2] - E = F(x, y) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение резонансных кривых (7) приведено к виду (9); в этой форме уравнение связывает переменные x и y . Первая переменная пропорциональна расстройке, вторая

есть квадрат относительной амплитуды (т. е. амплитуды A при наличии внешней э. д. с., отнесенной к амплитуде A_0 автоколебаний при отсутствии внешней э. д. с.). График u как функции x изображает в известном масштабе резонансные кривые. Уравнение (9) является кубическим относительно u и квадратным относительно x . Поэтому для вычислений удобнее разрешать его относительно x . Геометрический смысл подобного обращения был разъяснен выше.

Исследуем производную

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Уравнение координат максимумов мы получим, приравняв производную нулю, что даст условие $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ux = 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что максимумы располагаются на вертикальной прямой $x = 0$, что соответствует отсутствию расстройки, т. е. $\omega = \omega_0$; ось x , уравнение которой есть $u = 0$, является асимптотой семейства резонансных кривых.

Производная $\frac{dy}{dx}$ обращается в бесконечность (т. е. касательные к резонансным кривым вертикальны) в точках, для которых

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Это равенство является границей области устойчивых решений. Дифференцируя (9) по y , находим

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + (1-y)^2 - 2y(1-y) = x^2 + (1-y)(1-3y) = 0. \quad (11)$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $x = 0$, $y = 2/3$ и с вертикальной полуосью, равной $1/3$. Таким образом, верхняя горизонтальная касательная к эллипсу проходит на высоте $y = 1$. Область внутри эллипса соответствует неустойчивым режимам. Подробное исследование устойчивости

показывает, что кроме уже найденного нами существует еще одно условие устойчивости, а именно:

$$y > \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad A > \frac{1}{\sqrt{2}} A_0.$$

Таким образом, при малых амплитудах «вынужденных» коле-

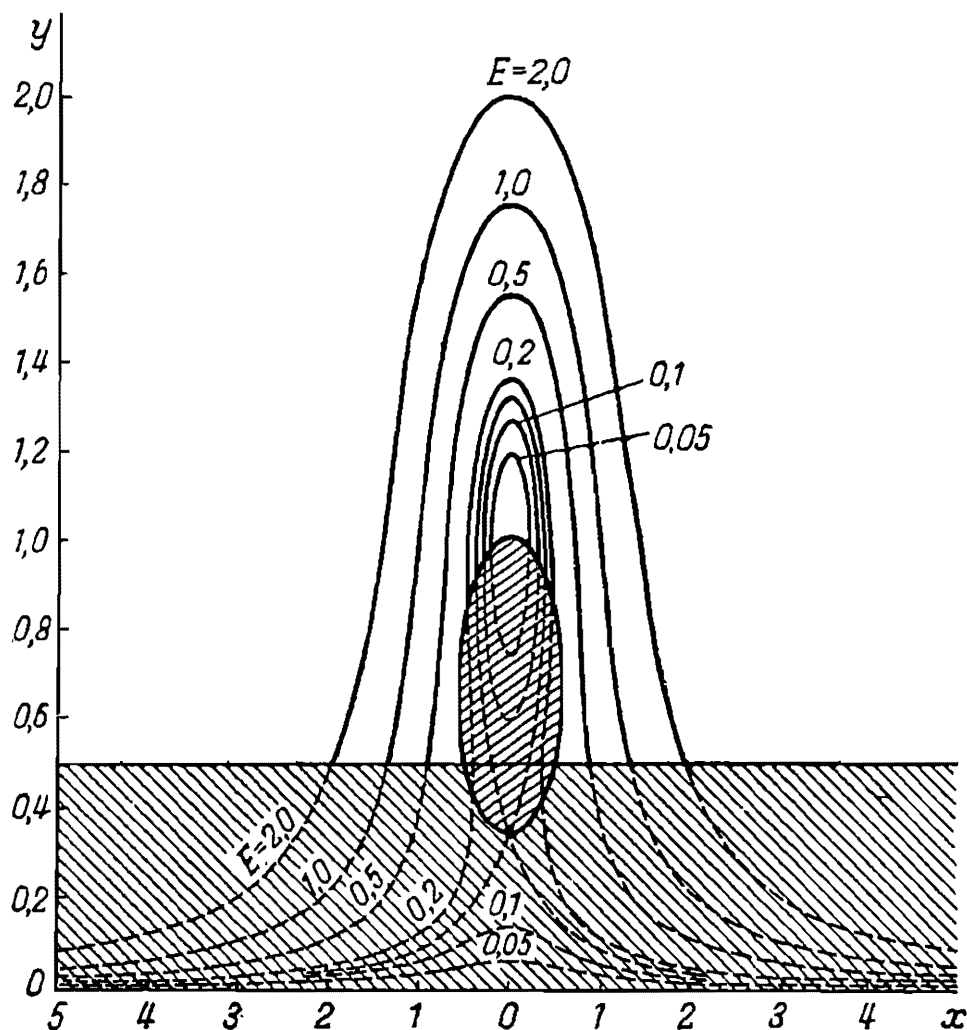


Рис. 119.

баний режим оказывается неустойчивым. Горизонтальная прямая

$$y = \frac{1}{2} \quad (12)$$

является нижней границей области устойчивости.

Графики функции (9) совместно с граничными линиями (11) и (12) представлены на рис. 119. Области неустойчивости заштрихованы.

Нужно заметить, что для пояснения характера зависимости (7) прибегают часто к нестрогому, но зато очень наглядному приему. Прием этот состоит в том, что формула (7) переписывается в виде

$$A = \frac{E_m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(\frac{2\beta_0}{\omega_0} + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\omega_0} A^2\right)^2}}$$

или, полагая расстройку малой,

$$A \cong \frac{E_m}{\sqrt{\epsilon^2 + \left(d_0 + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\omega_0} A^2\right)^2}}, \quad (13)$$

где $\epsilon = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$ — обычное обозначение относительной расстройки,

$d_0 = \frac{2\beta_0}{\omega_0}$ — начальное затухание. Последняя формула рассматривается как выражение для резонансной кривой, отличающееся от обычного тем, что затухание зависит от амплитуды (второй член под корнем).

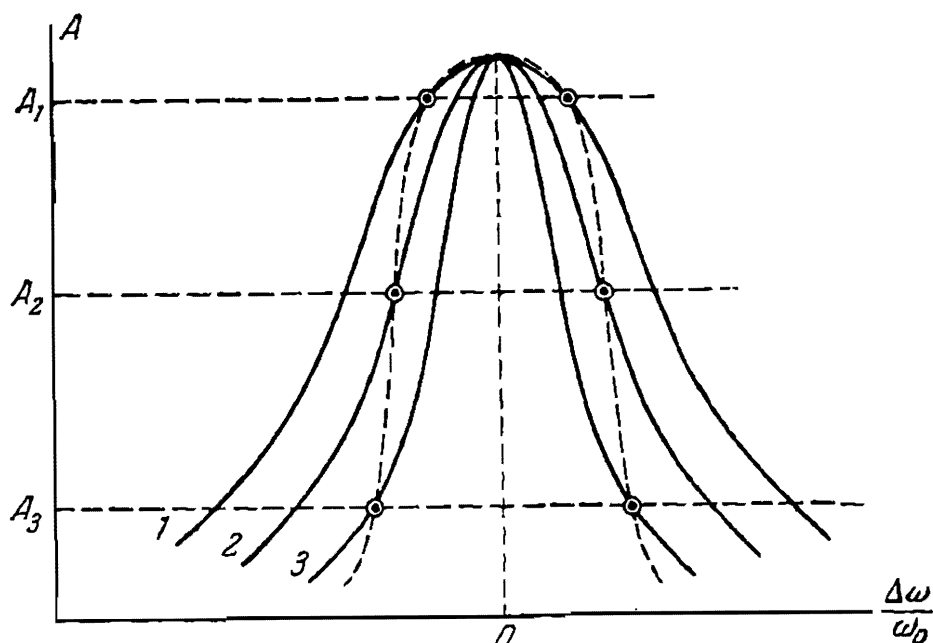


Рис. 120.

При такой трактовке можно подойти к построению зависимости (13), исходя из семейства обычных резонансных кривых при различном затухании. Такое семейство изображено на рис. 120. При больших амплитудах (значение A_1 на рис. 120)

затухание велико; такому значению затухания соответствует резонансная кривая 1. При меньшей амплитуде A_2 затухание соответственно меньше, и мы переходим на более узкую резонансную кривую 2. Еще меньшей амплитуде A_3 и еще меньшему затуханию соответствует резонансная кривая 3. Соединяя отмеченные на рисунке точки пунктирной линией, получаем очертание резонансной кривой.

Заметим в заключение этого параграфа, что условие устойчивости на основании первого уравнения (5) может быть выражено через угол φ (определяющий сдвиг фазы между внешней э. д. с. и свободным автоколебанием) в виде

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

§ 34. Захватывание

Если в линейной системе существуют одновременно два колебания с частотами ω и ω_0 , то эти два колебания интерферируют и образуют биения. Частота биений равна абсолютной разности частот, т. е.

$$\Omega = |\omega - \omega_0|.$$

Если ω_0 — постоянная, то с изменением ω частота биений изменяется по закону, представленному двумя пунктирными прямыми на рис. 121.

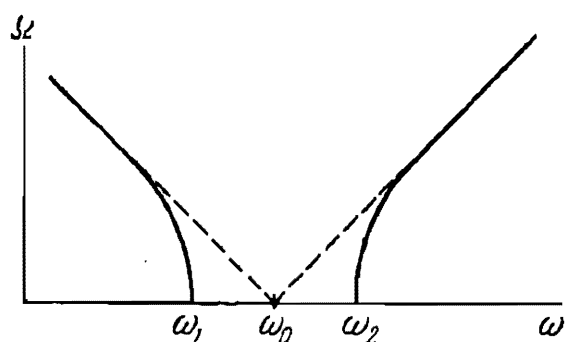


Рис. 121.

В автоколебательной системе, находящейся под воздействием внешней э. д. с., также наблюдаются биения, но при изменении частоты явление протекает иначе. При возрастании ω частота биений сперва убывает (по мере приближения ω к ω_0) по линейному закону. Затем частота биений начинает убывать все быстрее (сплошная линия на рис. 121) и при некотором значении $\omega = \omega_1$ биения срываются; генератор при этом генерирует частоту ω_1 , несмотря на то, что настроен на частоту ω_0 . При дальнейшем повышении частоты до значения $\omega = \omega_2 > \omega_0$ это положение сохраняется: генерируется частота, равная частоте внешней э. д. с.; биения

отсутствуют. Наконец, при $\omega > \omega_2$ снова возникают биения *). Описанное явление, состоящее в том, что внешняя э. д. с. навязывает генератору свою частоту, носит название *захватывания*. Частотный интервал $\omega_2 - \omega_1$, в пределах которого частота генератора следует за частотой внешней э. д. с., называется *полосой захватывания*. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы выяснить, какова ширина этой полосы и от чего она зависит.

Для решения этой задачи обратимся к картине явлений, представленной резонансными кривыми рис. 119. Устойчивый режим, представленный на рис. 119 сплошными линиями, — это и есть режим захватывания, когда происходят вынужденные колебания с частотой внешней э. д. с. Переход в неустойчивую область означает возникновение биений. Таким образом, ширина полосы захватывания (интервал $\omega_2 - \omega_1$ на рис. 121) есть не что иное, как ширина резонансной кривой на границе области неустойчивости. Исходя из этих соображений, мы теперь легко определим ширину полосы захватывания.

Уравнение резонансных кривых рис. 119 есть

$$y[x^2 + (1 - y)^2] - E = 0. \quad (1)$$

При малых значениях внешней э. д. с., т. е. при малых E , кривые опираются на вершину эллипса на высоте $y = 1$. Подставляя это значение в (1), находим

$$x^2 = E$$

или, раскрывая сокращенные обозначения (см. § 33),

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{E_m}{A_0}.$$

*) По этому поводу следует заметить, что самый термин *биения* подразумевает наличие двух отдельных колебаний, результатом сложения которых являются биения. В случае нелинейной автоколебательной системы мы имеем дело с единым нелинейным процессом, характеризующимся вне полосы захватывания периодическим изменением амплитуды. Вдали от полосы захватывания картина явления в самом деле такова, как если бы имелись две составляющие процесса — «автоколебание» с частотой ω_0 и «вынужденное колебание» с частотой ω . Однако такое представление имеет формальный характер, так как эти составляющие, вообще говоря, физически неразделимы. Поэтому термины «биения», «режим биений», хотя и применяются к рассматриваемым явлениям, но имеют здесь условный смысл.

Величина слева — это и есть относительная ширина полосы захватывания. Она равна, оказывается, отношению амплитуды E_m внешней э. д. с. к амплитуде A_0 напряжения автоколебания при отсутствии внешней э. д. с. Считая величину A_0 постоянным параметром рассматриваемой системы, заключаем, что ширина полосы захватывания тем больше, чем сильнее внешнее воздействие.

При больших E_m резонансные кривые опираются уже не на эллипс, а на горизонтальную прямую $y = \frac{1}{2}$. Подставляя это значение в (1), найдем

$$x^2 = 2E - \frac{1}{4}$$

или

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{2 \frac{E_m^2}{A_0^2} - \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2}}.$$

Но второй член под корнем выражает квадрат начального (т. е. с учетом действия обратной связи) затухания системы. Это во всяком случае очень малая величина, так что можно положить в рассматриваемом случае

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \cong \sqrt{2} \frac{E_m}{A_0}.$$

Для промежуточных значений E_m , когда резонансные кривые опираются на скаты эллипса, можно положить

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = k \frac{E_m}{A_0},$$

где, как мы установили,

$$1 < k < \sqrt{2}.$$

Точное значение k может быть найдено, в случае надобности, путем совместного решения уравнений (9) и (11) предыдущего параграфа.

Явление захватывания используется в радиотехнике для синхронизации генератора внешней э. д. с., или для взаимной синхронизации двух генераторов. Если два генератора связаны друг с другом, как показано на схеме рис. 122, то каждый из генераторов наводит в контуре другого э. д. с., являющуюся для этого другого генератора внешней. Работа

схемы описывается системой из двух уравнений типа (1) (§ 33), причем правые части играют роль членов связи. Если оба генератора одинаковы, но настроены на разные частоты, то они могут взаимно синхронизироваться на некоторой промежуточной частоте, имеющей в общем случае два возможных значения. Если же один из генераторов является более мощным, то он может рассматриваться как источник независимой э. д. с. и, следовательно, захватывает менее мощный генератор, заставляя его работать на своей частоте.

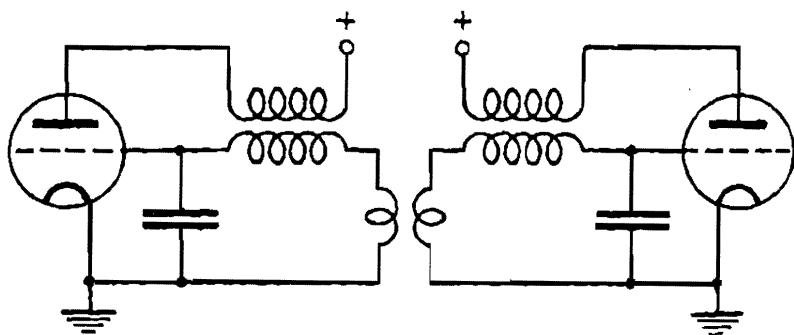


Рис. 122.

жуточной частоте, имеющей в общем случае два возможных значения. Если же один из генераторов является более мощным, то он может рассматриваться как источник независимой э. д. с. и, следовательно, захватывает менее мощный генератор, заставляя его работать на своей частоте.

§ 35. Регенеративный приемник

Схема простейшего регенеративного приемника, изображенная на рис. 123, сводится к схеме рис. 118. Однако в отличие от ранее рассмотренного случая регенеративный приемник характеризуется тем, что он работает в недо-возбужденном режиме, хотя и вблизи порога возбуждения, так как при этом получается наибольшее усиление.

Уравнение регенеративного приемника совпадает с уравнением (7) § 33

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2 \right)^2 \right] A^2 = \omega_0^4 E_m^2. \quad (1)$$

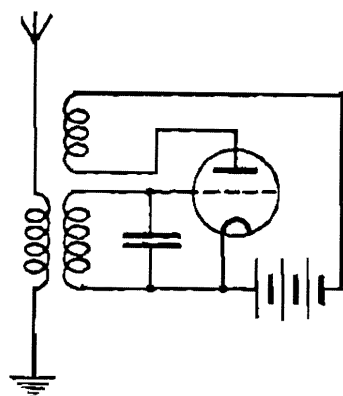


Рис. 123.

Рассмотрим прежде всего вопрос о чувствительности приемника при точной настройке на принимаемую частоту, т. е. при

$\omega_0 = \omega$. При этом условии из (1) получим

$$\left(2\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) A = \omega_0 E_m. \quad (2)$$

Увеличивая обратную связь, можно довести приемник почти до самовозбуждения. При этом начальный показатель затухания $\beta_0 = \alpha - \frac{1}{2} \omega_0^2 MS$ близок к нулю, и мы имеем

$$\frac{1}{4} \gamma A^3 = \omega_0 E_m,$$

откуда

$$A = \left(4 \frac{\omega_0}{\gamma} E_m\right)^{1/3} = k E_m^{1/3}. \quad (3)$$

Найдем чувствительность (или, что то же, усиление) приемника, определив ее как

$$\nu = \frac{dA}{dE_m}.$$

Дифференцируя (3), получаем

$$\nu = k E_m^{-2/3}.$$

Как видим, при E_m , стремящемся к нулю, чувствительность стремится к бесконечности. Таким образом, регенеративный приемник обладает переменной чувствительностью, тем большей, чем слабее принимаемый сигнал. Это является, конечно, выгодным свойством рассматриваемого приемника.

Практически предельно-достижимая чувствительность ограничивается собственным шумом приемника, который вблизи порога самовозбуждения становится очень сильным благодаря большому усилению.

Регенеративный приемник сыграл в свое время большую роль благодаря исключительной простоте и высокой чувствительности. Однако регенеративный приемник обладает и очень существенными недостатками: неустойчивостью, плохой избирательностью. К тому же при работе на самом пороге возбуждения часто возникает генерация, создающая помеху для близко расположенных приемников. Поэтому регенеративный приемник был вытеснен более совершенными приемниками, а регенеративная схема сохранила значение лишь в качестве так называемого регенеративного фильтра.

§ 36. Импульсная синхронизация

В § 33 рассматривалась синхронизация генератора синусоидальным внешним напряжением.

В этом параграфе будет рассмотрена синхронизация периодическими короткими импульсами. Этот случай допускает очень наглядное качественное объяснение процесса синхронизации, и мы воспользуемся этой возможностью; аналитического исследования импульсной синхронизации мы делать не будем.

Мы исходим попрежнему из схемы рис. 118, но предполагаем теперь, что внешняя э. д. с. представляет собою периодическую последовательность коротких импульсов произвольной формы. Для объяснения механизма синхронизации мы представим явление в виде диаграмм на фазовой плоскости. Прежде всего нам нужно дать графическое представление действия импульса напряжения.

Возьмем в качестве переменных, откладываемых по координатным осям, те же величины, что и в примере в конце § 25, а именно:

$$x = \int U dt, \quad x' = U.$$

Пусть импульс характеризуется тем, что напряжение начинает изменяться от некоторого начального значения (в частности, равного нулю), а затем по прошествии небольшого времени снова возвращается к исходному значению. Таким образом, по окончании импульса напряжение $U = x'$ остается неизменным, а интеграл от напряжения получает приращение, определяемое площадью импульса. Эти соотношения поясняются на рис. 124

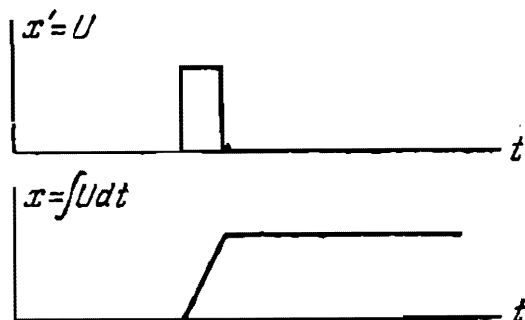


Рис. 124.

для случая прямоугольного импульса. Если теперь представить те же соотношения на фазовой плоскости в координатах x, x' , то изображающая точка, находившаяся первоначально в положении 1, перейдет под действием импульса в новое положение 2, описав при этом намеченную пунк-

тиром траекторию (рис. 125). Время перехода равно длительности импульса. Мы будем считать, что импульс настолько короток, что изображающая точка перебрасывается из 1 в 2 практически мгновенно. Что касается формы траектории, то она зависит, конечно, от формы импульса. Но нас, собственно, не интересует вид траектории; для дальнейшего существенно лишь то, что изображающая точка смещается в конечном счете параллельно оси x (так как напряжение до и после импульса одинаково) на отрезок,

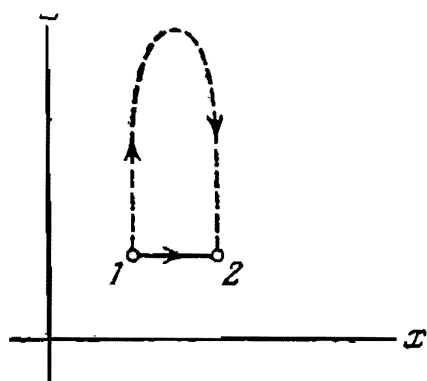


Рис. 125.

пропорциональный площади импульса. Это смещение изображающей точки и выражает действие импульса. Мы обозначим его через h .

Теперь обратимся к действию синхронизирующих импульсов на работающий генератор. При отсутствии импульсов режим генератора выражается устойчивым предельным циклом. При наличии же импульсов должен образоваться замкнутый цикл, включающий в себя скачок, обусловленный действием импульса. Такой цикл может образоваться лишь из отрезка спирали, как показано на рис. 126. По оси абсцисс отложено $\omega_0 x$ вместо x для того, чтобы уравнивать масштабы по обеим осям. При таком согласованном масштабе предельный цикл имеет форму окружности. Будем считать, что изображающая точка движется по спирали с постоянной угловой скоростью и что поворот на 2π соответствует периоду автоколебаний

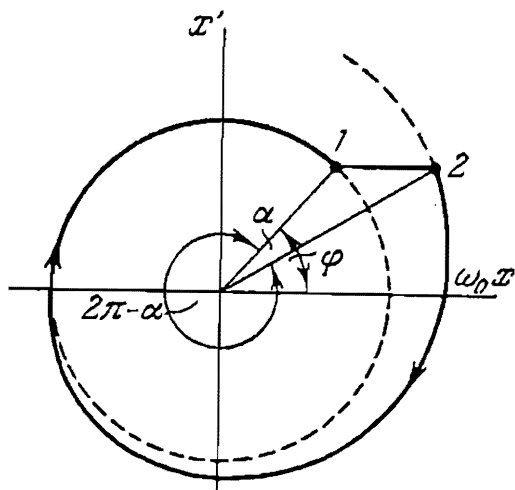


Рис. 126.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Тогда из рис. 126 сразу видно, что изображающая точка

обходит замкнутый цикл, отмеченный на рис. 126 сплошной линией, за время $T < T_0$. Это следует из того, что угловое перемещение точки равно $2\pi - \alpha < 2\pi$, а следовательно, на такое перемещение затрачивается меньшее время. Участок скачка (1—2) проходится, по нашему предположению, мгновенно. Рис. 126 соответствует, стало быть, случаю, когда импульсы синхронизируют генератор на частоте $\omega > \omega_0$. Фазовая диаграмма для случая синхронизации на частоте $\omega < \omega_0$ изображена на рис. 127. Здесь изображающая точка прохо-

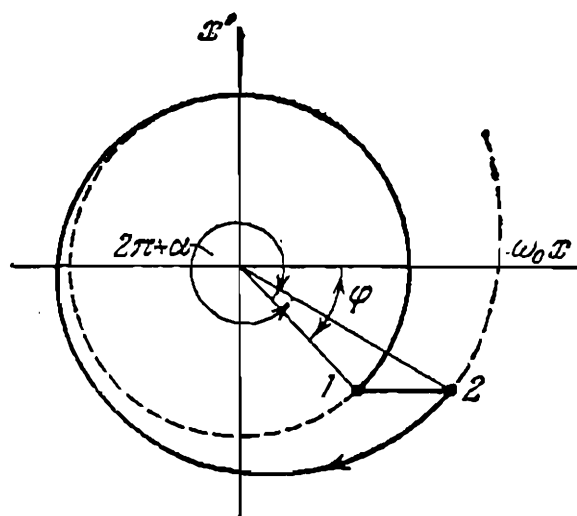


Рис. 127.

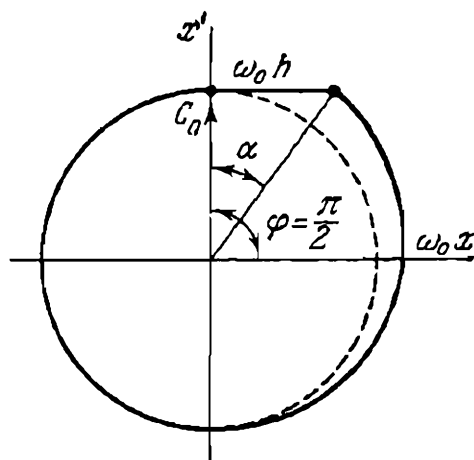


Рис. 128.

дит за цикл по спирали угловой путь $2\pi + \alpha > 2\pi$ и затрачивает на это время $T > T_0$. Подобного рода диаграммы позволяют ответить на вопрос о ширине полосы захватывания. Будем увеличивать угол φ , определяющий фазу синхронизирующего импульса относительно свободного колебания генератора. Наибольшее значение угла α , т. е. наибольшая расстройка $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$, получится, очевидно, при $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$. Соотношения, получаемые при этом условии, поясняются рис. 128. Мы имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_0 h}{C_0},$$

где C_0 — амплитуда автоколебаний, соответствующая предельному циклу. В действительности α малый угол (на наших рисунках быстрота свертывания спирали грубо преувеличена). Поэтому $\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha$. Но α есть мера изменения периода

(против периода автоколебаний, равного 2π в угловой мере). Таким образом,

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{h}{C_0}.$$

Это есть наибольшая относительная расстройка в одну сторону. Полная же относительная ширина полосы захватывания равна

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\omega_0}{\pi} \frac{h}{C_0} \approx \frac{\omega h}{\pi C_0}.$$

Можно еще преобразовать этот результат, учитывая, что $\frac{1}{\pi} \omega h$ есть не что иное, как амплитуда первой гармоники в разложении периодической последовательности коротких импульсов в ряд Фурье. Эта составляющая, имеющая частоту ω , и производит синхронизирующее действие. Обозначая

$$\frac{1}{\pi} \omega h = E_1,$$

получим для полосы захватывания

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{E_1}{C_0},$$

т. е. тот же результат, что и в § 34.

Заметим в заключение, что связь между расстройкой и углом φ , очевидная из рис. 126 и 127, — это та же самая связь, которая указывается уравнениями (5) § 33.

§ 37. Синхронизация релаксационного генератора

Разберем очень простой механизм синхронизации релаксационного генератора внешним синусоидальным напряжением. В качестве генератора выберем схему с тиратроном (рис. 129). Эта схема отличается от схемы релаксационного генератора с двухэлектродной газоразрядной лампой (рис. 105) тем, что напряжение зажигания U_2 зависит от напряжения на сетке тиратрона T , а именно напряжение зажигания тем выше, чем больше отрицательное напряжение на сетке. Напряжение потухания U_1 практически неизменно. Заметим, что в схему

введен ограничитель тока $O. т.$, так что зарядный ток предполагается постоянным, а, следовательно, напряжение на конденсаторе в процессе зарядки нарастает линейно.

При отсутствии внешнего напряжения процесс в генераторе протекает, как было описано в § 29: конденсатор за-

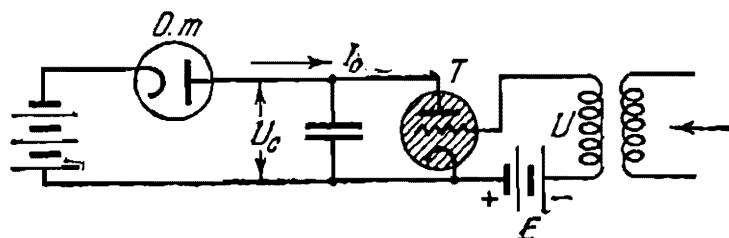


Рис. 129.

ряжается до напряжения зажигания U_2 ; при этом значении напряжения возникает большая ионная проводимость, и конденсатор быстро (практически мгновенно) разряжается до напряжения потухания U_1 ; затем возобновляется зарядка конденсатора.

Включим теперь на сетку внешнее синхронизирующее синусоидальное напряжение

$$U = U_m \sin \omega t.$$

Напряжение зажигания U_2 будет теперь переменной величиной. Положим, что напряжение зажигания изменяется пропорционально напряжению на сетке. Будем иметь

$$U_2(t) = k(E + U_m \sin \omega t) = U_0 + kU_m \sin \omega t,$$

где U_0 — напряжение зажигания при отсутствии переменного внешнего напряжения (т. е. при постоянном напряжении E). Зажигание происходит при

$$U_C = U_2,$$

т. е. когда напряжение на конденсаторе достигнет напряжения зажигания. В этот момент происходит скачок напряжения. Напряжение на конденсаторе растет во время зарядки по линейному закону

$$U_C = U_1 + \frac{I_0}{C} t.$$

На рис. 130 построен график колебания. На рисунке изображен периодический процесс, и мы видим, что период колебания получается равным периоду внешнего напряжения T

и *неравным* периоду свободных колебаний генератора T_0 . Иначе говоря, внешнее напряжение захватывает частоту генератора; происходит синхронизация генератора внешним напряжением.

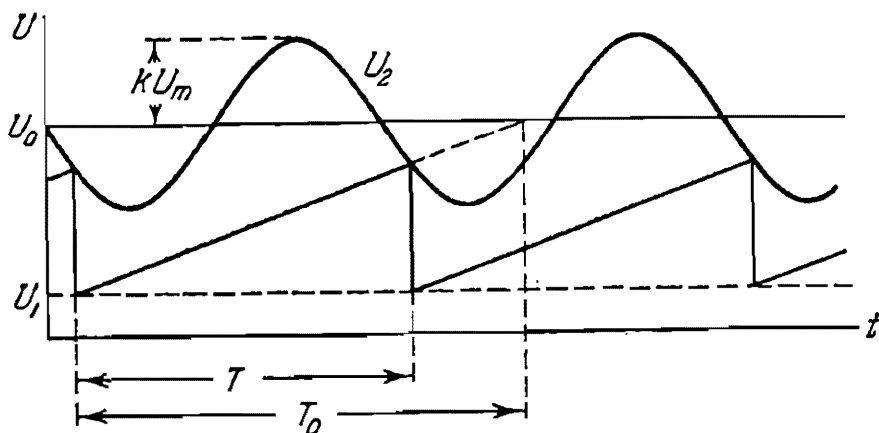


Рис. 130.

Выведем основные соотношения для установившегося синхронизированного колебания. Если вести отсчет времени от скачка напряжения, то напряжение зажигания нужно записать в виде

$$U_2 = U_0 - kU_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Следующий скачок произойдет при

$$U_c = U_0 - kU_m \sin(\omega T + \varphi) = U_0 - kU_m \sin \varphi.$$

Но, с другой стороны, в момент $t = T$

$$U_c = U_1 + \frac{I_0}{C} T = U_1 + \alpha T.$$

Таким образом,

$$U_1 + \alpha T = U_0 - kU_m \sin \varphi.$$

Воспользовавшись соотношением

$$U_1 + \alpha T_0 = U_0,$$

получим

$$\alpha(T_0 - T) = kU_m \sin \varphi$$

или

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{kU_m}{U_0 - U_1} \sin \varphi, \quad (1)$$

или

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{kU_m}{U_0 - U_1} \sin \varphi. \quad (2)$$

При $\sin \varphi < 0$ период получает положительное приращение, т. е. увеличивается. Соответствующий график изображен на рис. 131. Если считать, что относительное изменение периода

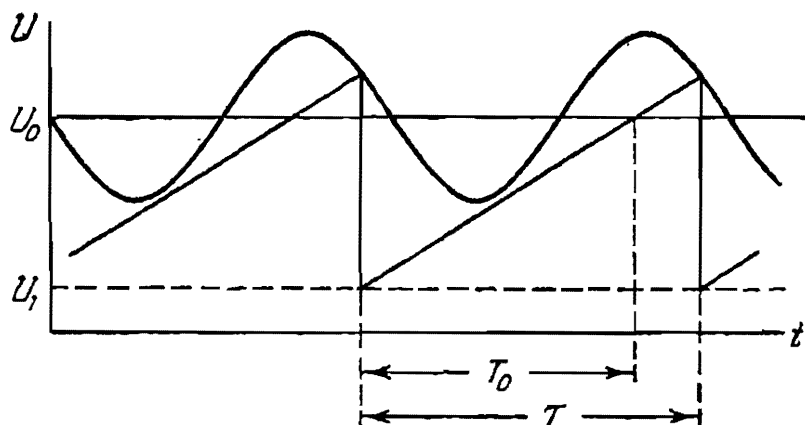


Рис. 131.

невелико, то его можно приравнять относительному изменению частоты, т. е. положить (см. (1))

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \cong \frac{kU_m}{U_0 - U_1} \sin \varphi.$$

Крайние значения $\sin \varphi$ равны ± 1 ; отсюда находим полную ширину полосы захватывания

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \cong \frac{2kU_m}{U_0 - U_1}.$$

Исследование устойчивости синхронизированного режима показывает, что условие устойчивости выражается через фазу синхронизации точно так же, как в § 33, а именно:

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Выведенные соотношения требуют еще уточнения. Во-первых, нужно заметить, что равенство

$$U_C = U_0 - kU_m \sin \varphi,$$

из которого мы определяем момент скачка напряжения, может удовлетворяться не только при $t = T$, но и при $t = nT$, где n — любое целое число. Таким образом, в формулах (1) и (2) следует писать в общем случае

$$T_0 = nT,$$

где T_c — период синхронизированных колебаний. На рис. 132 в пояснение сказанного приведен график синхронизированного

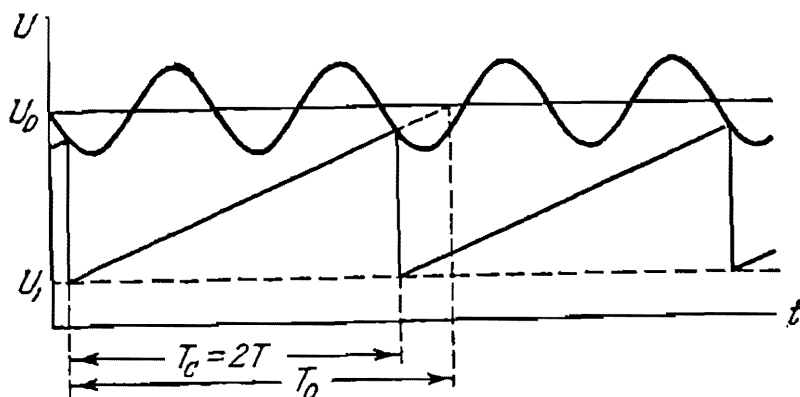


Рис. 132.

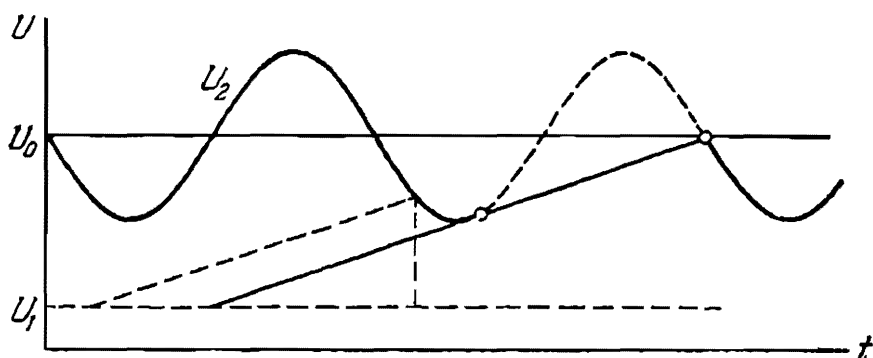


Рис. 133.

колебания при $k=2$. Это называется иногда синхронизацией на субгармонике. Во-вторых, при заданных U_0 , U_1 , α , kU_m

и T некоторые режимы неосуществимы, так как прямая U_c касается синусоиды U_2 и не может попасть на известный участок синусоиды. Это показано на рис. 133, на котором недостижимый участок синусоиды отмечен пунктиром.

Принимая все это во внимание, можно построить график, представляющий области возможных режимов син-

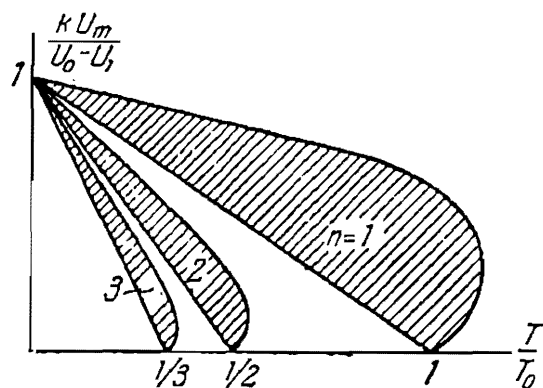


Рис. 134.

хронизации при различных кратностях n (рис. 134); эти области на рисунке заштрихованы.

ГЛАВА IV

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

В этой главе будут рассмотрены некоторые явления и процессы в системах с переменными (зависящими от времени) параметрами, математическое описание которых сводится к линейным уравнениям с переменными коэффициентами. Теория этих уравнений относительно сложна и мало разработана. Имеется лишь достаточно полная теория уравнения Хилла

$$x'' + [a + qf(t)]x = 0,$$

где $f(t)$ — периодическая функция. Частный вид уравнения Хилла

$$x'' + [a + 2q \cos 2t]x = 0$$

называется уравнением Матё. Краткие сведения из теории уравнения Матё будут даны в § 40. В предшествующих же параграфах рассматривались только параметрические явления, описываемые алгебраическими уравнениями.

§ 38. Синхронное детектирование

Исследование синхронного детектирования мы начнем с простейшего примера синхронного выпрямления. Пусть имеется цепь, состоящая из источника переменного напряжения E , сопротивления нагрузки R и синхронного ключа K (рис. 135). Ключ имеет независимое управление, однако синхронное с частотой источника. Действие ключа состоит в том, что он попеременно то замыкает цепь на время, равное половине периода переменного напряжения, то размыкает цепь на такое же время. Таким образом, проводи-

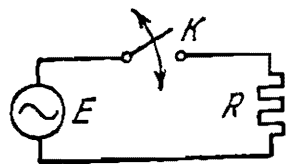


Рис. 135.

мость цепи равна либо нулю, либо $1/R$, в зависимости от того, разомкнут или замкнут ключ. При таких обстоятельствах можно получить в цепи выпрямленный ток. Эта возможность поясняется графиками рис. 136.

Необходимо сразу же подчеркнуть, что такое выпрямление принципиально отличается от обычного. При обычном

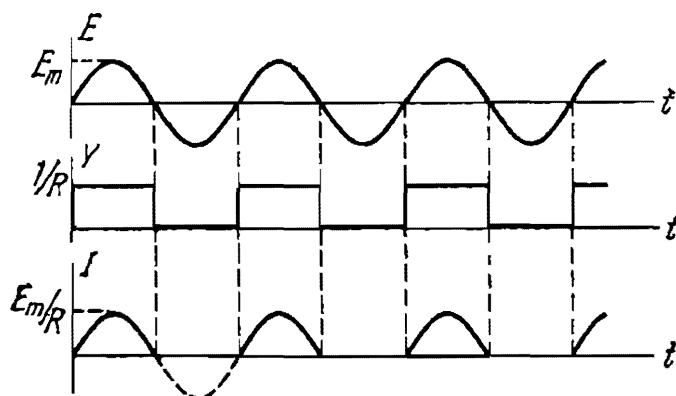


Рис. 136.

выпрямлении проводимость цепи есть также переменная величина, но *проводимость зависит от напряжения* на выпрямителе. Таким образом, схема обычного выпрямителя есть *нелинейная* цепь. В рассмотренном же здесь случае синхронного выпрямителя переменная *проводимость зависит от*

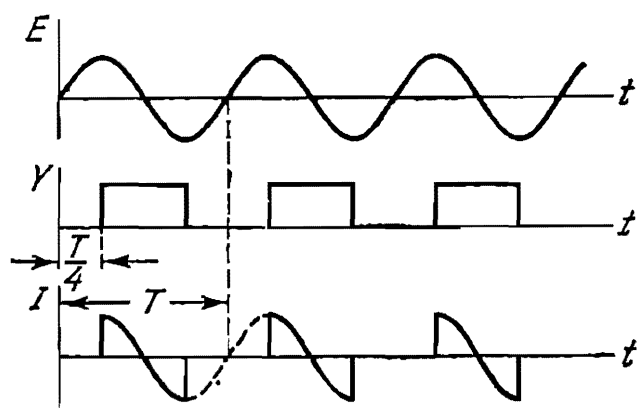


Рис. 137.

времени и, следовательно, мы имеем дело с цепью с переменными параметрами, которая может быть описана *линейным* уравнением с переменными коэффициентами.

Особенности синхронного выпрямления сразу обнаружатся, если мы заметим, что при независимой (хотя и синхронной)

работе ключа фаза коммутации произвольна. Легко представить себе, что если фаза коммутации изменится на 180° , то изменится полярность выпрямленного напряжения на сопротивлении R . Если же сдвинуть фазу на 90° или 270° , то выпрямления вообще не получится. Это пояснено графиками рис. 137. Как видим, при сдвиге на 90° , т. е. во времени

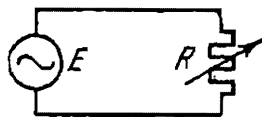
на $T/4$, ток в цепи не имеет постоянной составляющей. Такого рода зависимость выпрямляющего действия от фазы характерна для синхронного выпрямления и для синхронного детектирования. Мы будем еще обсуждать вытекающие из этого свойства следствия.

Обратимся теперь к синхронному детектированию АМ колебания. Задача детектирования состоит в том, чтобы восстановить низкочастотный модулирующий сигнал. Пусть дано модулированное напряжение вида

$$E = E_0 [1 + mf(t)] \sin \omega_0 t. \quad (1)$$

Подадим это напряжение на цепь, в которую включено переменное сопротивление (рис. 138), изменяющееся периодически с той же частотой ω_0 , так что проводимость цепи может быть записана в виде

$$Y = Y_0 (1 + n \sin \omega_0 t), \quad (2) \quad \text{Рис. 138.}$$



т. е. предположим, что проводимость меняется синхронно и синфазно с напряжением несущей частоты. Для тока в цепи получим, перемножив (1) и (2),

$$I = EY = E_0 Y_0 \left\{ [1 + mf(t)] \sin \omega_0 t - \frac{n}{2} [1 + mf(t)] \cos 2\omega_0 t + \frac{n}{2} [1 + mf(t)] \right\}.$$

Первое слагаемое представляет собою исходное модулированное колебание с высокочастотным спектром, расположенным симметрично около частоты ω_0 . Второе слагаемое имеет аналогичный (но в $n/2$ раз меньший по плотности) спектр, расположенный около частоты $2\omega_0$. И, наконец, третье слагаемое является модулирующим низкочастотным сигналом. Высокочастотные слагаемые легко отделяются соответствующими фильтрами, которые должны предусматриваться в схеме любого детектора. Не менее легко освободиться и от постоянной составляющей. После такой очистки мы получим составляющую тока

$$I = \frac{1}{2} nm E_0 Y_0 f(t), \quad (3)$$

что и представляет собою желаемый результат детектирования.

Посмотрим теперь, как повлияет на результат нарушение синфазности. Пусть в отличие от предыдущего

$$Y = Y_0 [1 + n \sin(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (4)$$

Перемножая (1) и (4), найдем

$$I = EY = E_0 Y_0 [1 + mf(t)] [1 + n \sin(\omega_0 t + \varphi)] \sin \omega_0 t.$$

Выполнив действия и отбросив высокочастотные и постоянную составляющие, найдем, что интересующая нас составляющая тока, содержащая сигнал $f(t)$, равна

$$I = \frac{1}{2} nm E_0 Y_0 f(t) \cos \varphi. \quad (5)$$

Как видим, выгоднее всего вести детектирование при $\varphi = 0$ (или π), при этом (5) переходит в (3). Если же $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, то детектирования не получается.

Наконец, нам необходимо выяснить, что получится при нарушении условия синхронности. Здесь обнаружится, что

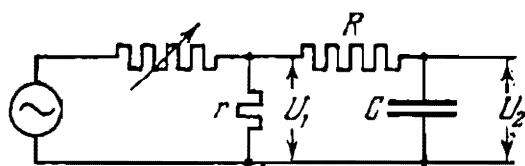


Рис. 139.

синхронный детектор обладает *избирательностью*. Для исследования этого свойства рассмотрим конкретную схему с простейшим фильтром в виде RC — звена (рис. 139). Предполагается, что сопротивление

r , с которого снимается напряжение U_1 , достаточно мало, так что присоединение параллельно ему звена RC не изменяет режима основной схемы синхронного выпрямителя. Мы имеем

$$U_1 = Ir = EYr. \quad (6)$$

Положим, что

$$E = E_0 \sin \omega_0 t, \quad (7)$$

$$Y = Y_0 (1 + n \sin \omega t), \quad (8)$$

где ω — произвольная частота. Для комплексной амплитуды напряжения на выходе при некоторой частоте Ω имеем

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{1}{1 + j\Omega RC}. \quad (9)$$

Найдем U_1 :

$$U_1 = EYr = E_0Y_0r (1 + n \sin \omega t) \sin \omega_0 t = \\ = E_0Y_0r \left[\sin \omega_0 t + \frac{n}{2} \cos (\omega_0 - \omega) t - \frac{n}{2} \cos (\omega_0 + \omega) t \right].$$

Таким образом, на входе звена RC мы имеем три напряжения с частотами ω_0 , $\omega_0 - \omega$ и $\omega_0 + \omega$ и комплексными амплитудами соответственно E_0Y_0r , $j \frac{n}{2} E_0Y_0r$ и $-j \frac{n}{2} E_0Y_0r$. Подставляя эти величины в формулу (9), получим следующие значения комплексных амплитуд выходного напряжения U_2 для трех перечисленных выше составляющих:

$$\frac{E_0Y_0r}{1 + j\omega_0 RC}, \quad \frac{j \frac{n}{2} E_0Y_0r}{1 + j(\omega_0 - \omega) RC}, \quad \frac{-j \frac{n}{2} E_0Y_0r}{1 + j(\omega_0 + \omega) RC}.$$

При небольшой расстройке, т. е. при $\omega \cong \omega_0$ и при большой постоянной времени, т. е. при

$$\omega_0 RC \gg 1,$$

можно пренебречь первой и третьей величинами по сравнению со второй, так что приблизительно

$$|U_2| \cong \frac{E_0Y_0rn}{2RC} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{R^2C^2}}}.$$

Но это выражение совпадает с выражением для обычной резонансной кривой. Особенность рассматриваемого случая состоит в том, что роль затухания играет величина $\frac{1}{RC}$.

Следовательно, чем больше постоянная времени RC , тем острее «резонансная кривая» синхронного детектора. Однако максимум чувствительности получается, когда разностная частота $\omega_0 - \omega$ обращается в нуль, т. е. при синхронном режиме.

Использовать асинхронный режим для приема как угодно модулированных сигналов нельзя. Действительно, пусть вместо синусоидального напряжения (7) имеется амплитудно-модулированное напряжение

$$E = E_0 [1 + mf(t)] \sin \omega_0 t,$$

Составляя произведение

$$U_1 = EYr = E_0 Y_0 r [1 + mf(t)] (1 + n \sin \omega t) \sin \omega_0 t = \\ = E_0 Y_0 r [1 + mf(t)] \left[\sin \omega_0 t + \frac{n}{2} \cos(\omega_0 - \omega) t - \frac{n}{2} \cos(\omega_0 + \omega) t \right],$$

мы видим, что спектр напряжения U_1 воспроизводит спектр E на частотах ω_0 , $\omega_0 - \omega$ и $\omega_0 + \omega$ в качестве несущих, как показано на рис. 140, а. Как видим, при соотношениях

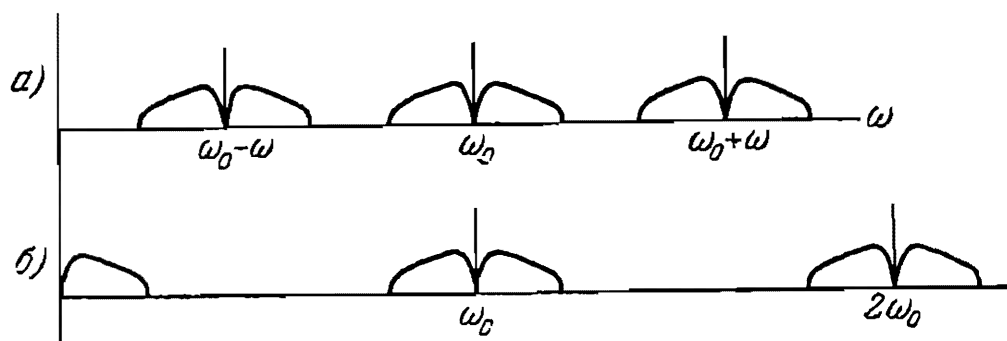


Рис. 140.

рис. 140, а получается не детектирование, а преобразование частоты. При малых расстройках, когда $\omega_0 - \omega$ меньше ширины спектра модулирующей функции, возникают искажения. И лишь при $\omega = \omega_0$, т. е. при синхронном режиме, получается правильное детектирование (рис. 140, б).

В заключение заметим, что если входное напряжение E — периодическое, то, изменяя частоту ω , можно поочередно выделить и измерить гармонические составляющие E . При этом синхронный детектор работает, в сущности, как гармонический анализатор. Разрешающая способность такого анализатора, т. е. способность различить и измерить порознь близко расположенные на шкале частот гармонические составляющие зависит от постоянной времени RC и может быть сделана очень большой.

§ 39. Фазовое детектирование и разделение

Отмечавшаяся в предыдущем параграфе чувствительность синхронного детектора к фазе детектируемого напряжения может иметь технические применения.

Для начала рассмотрим прием радиотелеграфных сигналов при фазовой модуляции. Речь идет о сигнале, в котором

при нажатии и отжатии телеграфного ключа фаза несущей частоты меняется скачком, как показано на рис. 141. График первой строки показывает изменение фазы при передаче буквы «А» кодом Морзе. Во второй строке изображено модулированное напряжение. В третьей строке дан график проводимости — предполагается, что применено простейшее устройство с синхронным ключом рис. 135. В четвертой строке изображен получаемый ток. После усреднения, т. е. фильтрации, мы воспроизведем с тем или иным приближе-

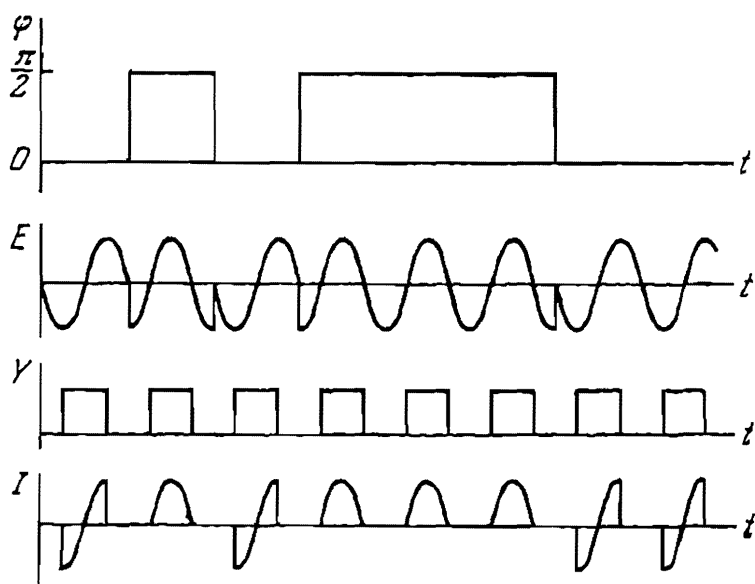


Рис. 141.

нием переданный телеграфный сигнал. Нужно сразу пояснить, что на рисунке на каждую телеграфную точку приходится только один период несущей частоты, что не соответствует действительности (такое соотношение выбрано только для того, чтобы не потерять наглядности рисунка). В действительности несущая частота может быть, скажем, в 10^4 раз больше частоты манипуляции, т. е. на одну точку приходится порядка 10^4 периодов несущей частоты. Если модулировать изменением фазы не на $\pi/2$, а на π , то получится картина, показанная на рис. 142 и не требующая пояснений. Итак, цепь с периодически изменяющейся проводимостью может применяться в качестве фазового детектора.

Обратимся теперь к фазовому разделению. Задача разделения сигналов возникает при многоканальной связи, когда

по одной линии передаются одновременно несколько разных сигналов. На приемном конце многоканальной системы связи необходимо разделить поступающую смесь сигналов и выделить сигнал, принадлежащий каждому данному каналу. При частотной системе многоканальной связи для передачи сигналов, принадлежащих различным каналам, применяют отдельные несущие (или поднесущие) для каждого канала. При этом можно расположить спектры сигнала каждого канала на шкале частот так, что они не будут перекрываться. Разделение на приемном конце производится обыч-

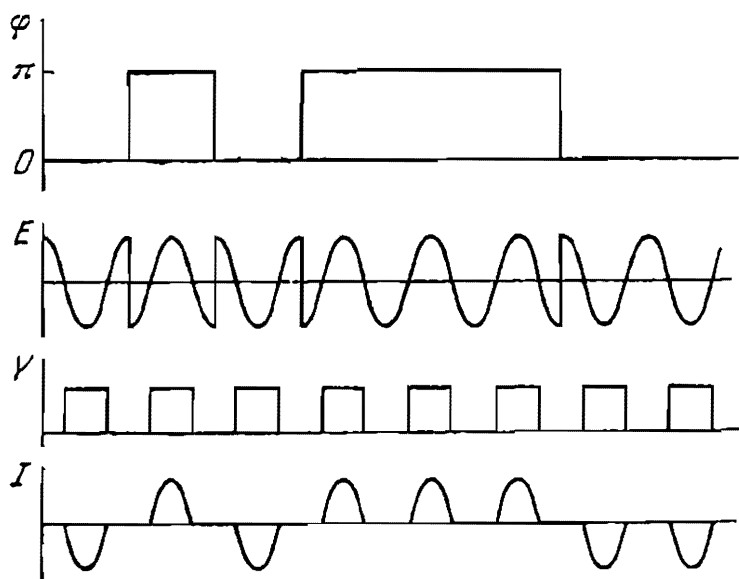


Рис. 142.

ными полосовыми фильтрами (так называемая «расфильтровка»). При фазовом разделении в качестве несущих применяются колебания одинаковой частоты, но сдвинутые по фазе. Рассмотрим вопрос о возможности фазового разделения аналитически.

Пусть сигнал одного канала есть $f_1(t)$, а другого — $f_2(t)$.

Промодулируем одним сигналом напряжение несущей частоты вида

$$E_1 = E_{01} \sin \omega_0 t,$$

а для другого сигнала возьмем несущее напряжение вида

$$E_2 = E_{02} \sin (\omega_0 t + \psi).$$

Тогда на приемном конце получим сложное модулированное напряжение

$$E = E_{01} [1 + m_1 f_1(t)] \sin \omega_0 t + E_{02} [1 + m_2 f_2(t)] \sin (\omega_0 t + \psi) = \\ = a(t) \sin \omega_0 t + b(t) \sin (\omega_0 t + \psi). \quad (1)$$

Подадим это напряжение в цепь, проводимость которой меняется по закону

$$Y = Y_0 (1 + n \sin \omega_0 t). \quad (2)$$

Для нахождения тока перемножим (1) и (2):

$$I = EY = Y_0 (1 + n \sin \omega_0 t) [a(t) \sin \omega_0 t + b(t) \sin (\omega_0 t + \psi)] = \\ = Y_0 \left[a(t) \sin \omega_0 t + b(t) \sin (\omega_0 t + \psi) + \frac{n}{2} a(t) - \right. \\ \left. - \frac{n}{2} a(t) \cos 2\omega_0 t + \frac{n}{2} b(t) \cos \psi - \frac{n}{2} b(t) \cos \psi \cos 2\omega_0 t + \right. \\ \left. + \frac{n}{2} b(t) \sin \psi \sin 2\omega_0 t \right].$$

Как видим, кроме составляющих высоких частот, группирующихся около ω_0 и $2\omega_0$, в составе тока имеются составляющие, пропорциональные $a(t)$ и $b(t)$. Однако нам нужно, чтобы в результате обработки модулированного напряжения приемным устройством сигналы $a(t)$ и $b(t)$ были выделены порознь. Предыдущая формула показывает, что мы достигнем желаемого результата при $\psi = \frac{\pi}{2}$. Тогда после отфильтровки высокочастотных составляющих получим

$$I = \frac{n}{2} Y_0 a(t).$$

Итак, для того чтобы при помощи синхронного детектирования разделить два канала, необходимо взять несущие колебания в виде

$$E_1 = E_{01} \sin \omega_0 t, \quad E_2 = E_{02} \cos \omega_0 t.$$

На приемном конце нужно поставить два синхронных детектора, проводимости которых изменяются также по закону синуса и косинуса. При этих условиях мы получим на выходах фильтров разделенные сигналы $a(t)$ и $b(t)$, как показано

на скелетной схеме рис. 143. Из всего сказанного следует, что описанным путем можно осуществить всего лишь двухканальную систему передачи. Если же изменение фазы используется в дополнение к любому другому способу разделения (например, частотному или временному), то возможное число каналов может быть удвоено.

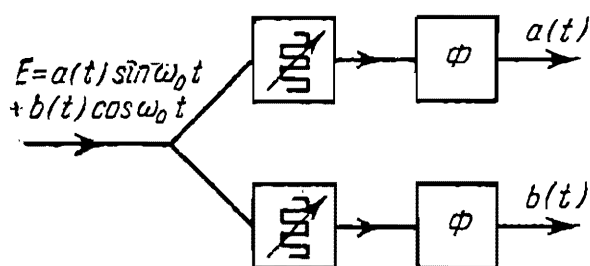


Рис. 143.

Следует заметить в заключение, что осуществление синхронного детектирования и разделения наталкивается на ряд

специфических технических трудностей, которые мы здесь обсуждать не будем.

§ 40. Краткие сведения об уравнении Матъё *)

Общее решение уравнения Матъё

$$x'' + (a + 2q \cos 2\tau) x = 0 \quad (1)$$

складывается из двух независимых решений и может быть записано в виде

$$x = x_1 + x_2 = Ae^{\mu\tau}\Phi_1(\tau) + Be^{-\mu\tau}\Phi_2(\tau). \quad (2)$$

Здесь A и B — произвольные постоянные, Φ_1 и Φ_2 — периодические функции времени периода π или 2π . Эти периодические функции могут быть выражены соответствующими тригонометрическими рядами, но не эта сторона дела будет нас интересовать. С точки зрения наших задач наибольшее значение имеет вопрос об *устойчивости* решений уравнения Матъё. Легко видеть, что если μ — действительное число, не равное нулю, то одно из слагаемых решения (2) неограниченно растет с увеличением τ , а это и означает, что решение неустойчиво. Показатель μ зависит от коэффициентов q и q . Можно показать, что границы областей устойчивости определяются условием $\mu = 0$. Графическое представление

*) Этот параграф имеет чисто справочный характер. Здесь приведены в готовом виде (без выводов) только используемые в дальнейшем данные.

областей устойчивости на плоскости a, q дано на рис. 144. Области неустойчивости (заштрихованные на рисунке) ограничены кривыми, сходящимися на оси a к точкам $a = 1, 4, 9, 16$ и т. д. Картина симметрична относительно оси a .

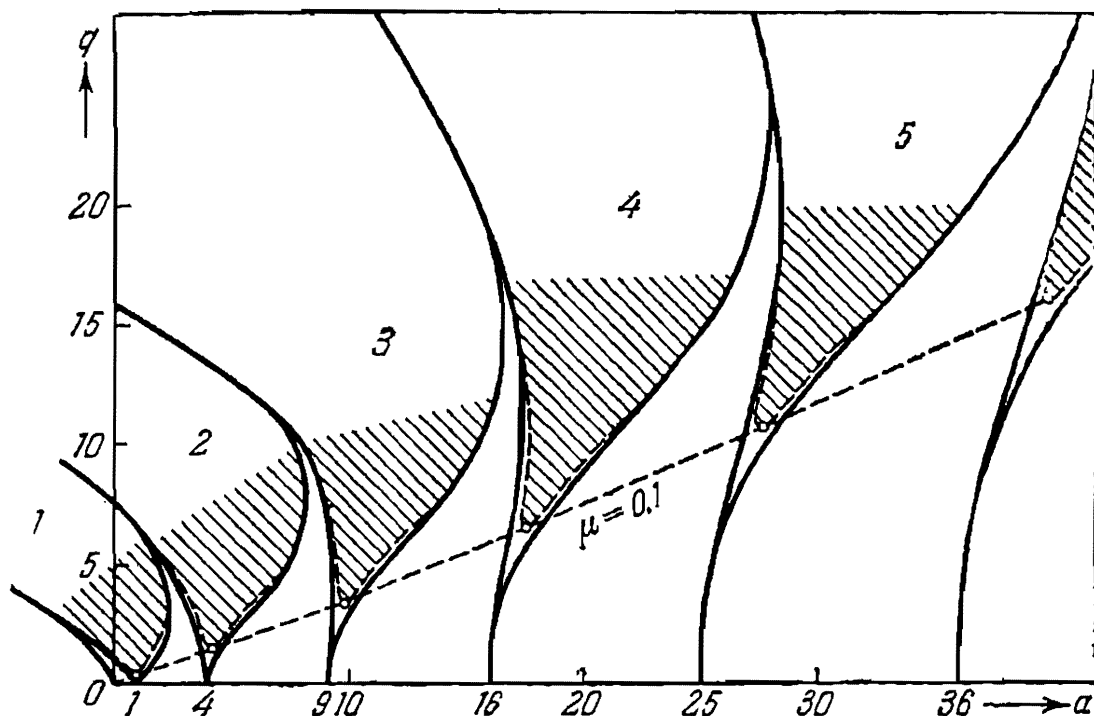


Рис. 144.

К уравнению (1) сводится уравнение контура без потерь с периодически изменяемым параметром, например емкостью. Но уравнение реального контура имеет первоначально вид

$$y'' + 2xy' + (b + 2q \cos 2\tau) y = 0, \quad (3)$$

и задача состоит в том, чтобы свести и это уравнение к стандартной форме (1). Для этого возьмем

$$y = e^{-x\tau} x. \quad (4)$$

В результате такой подстановки мы и получим уравнение (1), в котором нужно положить

$$a = b - x^2. \quad (5)$$

Сопоставляя (2) и (4), мы видим, что решение уравнения (3) имеет вид

$$y = Ae^{(-x+\mu)\tau} \Phi_1(\tau) + Be^{(-x-\mu)\tau} \Phi_2(\tau). \quad (6)$$

Решение будет неустойчивым уже не при $|\mu| > 0$, а при

$$-x + |\mu| > 0, \quad (7)$$

т. е. при

$$|\mu| > x.$$

Следовательно, для уравнения (3) области неустойчивости будут ограничены уже не кривыми $\mu = 0$, а кривыми

$$|\mu| = x.$$

Эти кривые уже не доходят до оси a ; они спускаются к оси a языками, наинизшие точки которых отстоят от оси тем дальше, чем больше μ . На рис. 144 пунктирными линиями отмечены области неустойчивости для уравнения (3) при $x = 0,1$, т. е. когда уравнение граничных линий имеет вид

$$\mu = x = 0,1.$$

Система теряет устойчивость легче всего при наименьших значениях q , т. е. в условиях, соответствующих минимуму граничных кривых. Поэтому нам нужно найти координаты минимумов. Точное решение этой задачи очень громоздко. Но если полагать, что в уравнении (1) $a \gg q$ (это как раз тот случай, который нам встретится в дальнейшем), то можно воспользоваться приближенными соотношениями. Приближение состоит в том, что мы отбрасываем члены с высокими степенями q в степенных рядах, выражающих интересующие нас зависимости; мы полагаем, что точка минимума лежит посередине горизонтального отрезка, соединяющего две кривые $\mu = 0$ в области неустойчивости. Тогда получаются следующие данные (m означает номер области неустойчивости, a_m и q_m — координаты минимума граничной кривой):

Т а б л и ц а 2

m	1	2	3	4	5
a_m	$1 - \mu^2$	$4 + \frac{8}{3}\mu$	$9 + (6\mu)^{2/3}$	$16 + \frac{16}{5}(2\mu)^{1/2}$	$25 + \frac{4}{3}(45\mu)^{2/5}$
q_m	2μ	$4\mu^{1/2}$	$4(6\mu)^{1/3}$	$4(72\mu)^{1/4}$	$8(45\mu)^{1/5}$

Точки с указанными в таблице 2 координатами при $\mu = 0,1$ отмечены на рис. 144. Они лежат на кривой, проходящей через начало и мало отличающейся от прямой.

Это значит, что при данном x для нарушения устойчивости требуется тем большее изменение параметра, чем больше a . Приведенных сведений уже достаточно для рассмотрения параметрического возбуждения.

§ 41. Параметрическое возбуждение

В этом параграфе мы рассмотрим механизм колебаний, могущих возникнуть в контуре, если какой-либо его параметр (например, емкость или индуктивность) периодически изменяется. Нужно сразу подчеркнуть, что мы имеем здесь дело с явлением совершенно особого рода. Обычно колебания в контуре возникают при действии той или иной электродвижущей силы. В рассматриваемом же случае никаких электродвижущих сил нет — схема опыта показана на рис. 145.

Поэтому сразу возникает вопрос о том, откуда берется энергия, необходимая для возбуждения и поддержания колебаний. Общие энергетические рассуждения и в данном случае позволяют раскрыть механизм явления.

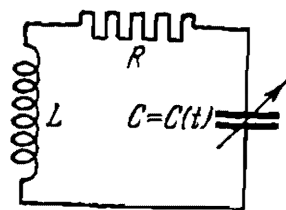


Рис. 145.

Дело заключается в том, что для изменения емкости (мы будем в дальнейшем рассматривать именно этот частный случай) необходимо, вообще говоря, совершить определенную работу против сил притяжения между обкладками. Представим себе, что колебания в контуре уже существуют и что на конденсаторе имеется переменное напряжение. Будем раздвигать обкладки в момент, когда напряжение максимально, и сближать их, когда напряжение равно нулю. Тогда за каждый цикл мы будем совершать определенную работу, т. е. вкладывать в систему некоторую энергию в механической форме. В системе происходит преобразование механической энергии в электрическую, и таким образом и осуществляется приток энергии в систему извне.

Для того чтобы пояснить механизм преобразования механической энергии в электрическую, напомним известные соотношения электростатики. Пусть изолированный конден-

сатор емкостью C заряжен до напряжения U между обкладками. Энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, равна

$$\mathcal{E} = \frac{U^2 C}{2}.$$

При этом механическая сила, с которой обкладки притягиваются друг к другу, равна

$$F = \frac{\mathcal{E}}{2d},$$

где d — расстояние между обкладками. Если раздвинуть обкладки на Δd , то будет совершена механическая работа

$$\Delta A = F \Delta d = \frac{1}{2} \mathcal{E} \frac{\Delta d}{d}.$$

Соответствующее приращение должна получить и потенциальная энергия электрического поля. Перепишем выражение для энергии в виде

$$\mathcal{E} = \frac{Q_0^2}{2C},$$

где $Q_0 = UC$ — начальный заряд, остающийся при описываемом опыте неизменным (так как конденсатор изолирован). Емкость конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon S}{d},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость, S — площадь обкладок. Используя это соотношение, получим

$$\mathcal{E} = \frac{Q_0^2 d}{2\epsilon S}.$$

Если изменится d , то энергия получит приращение

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{Q_0^2}{2\epsilon S} \Delta d = \frac{Q_0^2}{2C} \frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \frac{\Delta d}{d},$$

равное, как видим, совершенной работе ΔA . Увеличение энергии конденсатора выразится в повышении напряжения на нем на величину

$$\Delta U = U \frac{\Delta d}{d}.$$

Таким образом, относительное изменение напряжения равно относительному изменению расстояния между обкладками*). После этих общезначимых рассуждений вернемся к схеме рис. 145. Мы можем составить следующее уравнение напряжений:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C(t)} Q = 0. \quad (1)$$

Если емкость изменяется около среднего значения C_0 по закону

$$C(t) = C_0 + C_1 f(t) = C_0 \left[1 + \frac{C_1}{C_0} f(t) \right] = C_0 [1 + n f(t)],$$

то при $n = \frac{C_1}{C_0} \ll 1$ можем переписать (1) в виде

$$Q'' + 2\alpha Q' + \omega_0^2 [1 - n f(t)] Q = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}.$$

Заменим переменную по формуле

$$Q = ye^{-\alpha t}.$$

Это избавит нас от члена с первой производной:

$$y'' + [\omega_1^2 - \omega_0^2 n f(t)] y = 0,$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

— квадрат частоты свободных колебаний контура с постоянными параметрами L , R и C_0 . Пусть теперь

$$f(t) = \cos \omega t.$$

Обозначая $\omega t = 2\tau$ и заменяя производную по t производной по τ , получим

$$y'' + 4 \left[\frac{\omega_1^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} n \cos 2\tau \right] y = 0; \quad (3)$$

*) Не следует забывать, что все вышеприведенные соотношения получены из линеаризованных соотношений и представляют собой первое приближение, справедливое при

$$\frac{\Delta d}{d} \ll 1.$$

Такой же порядок малости имеют и $\Delta U/U$ и $\Delta \mathcal{E}/\mathcal{E}$.

а это и есть уравнение Матьё. Теперь задача нахождения условий, при которых возможно возбуждение колебаний в контуре, сводится к математической задаче определения соотношений, при которых уравнение Матьё имеет неустойчивые решения. Решение этой задачи известно (см. § 40): неустойчивое решение получается при

$$\kappa = \frac{2\alpha}{\omega} < \mu. \quad (4)$$

Мы имеем следующие значения коэффициентов:

$$q = n \frac{2\omega_0^2}{\omega^2}, \quad a = 4 \frac{\omega_1^2}{\omega^2}$$

или, если затухание невелико и можно пренебречь его влиянием,

$$a \cong 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, коэффициент q выражает относительное изменение параметра, а коэффициент a — отношение частот: частоты колебаний в контуре и частоты модуляции. Возбуждение легче всего возникает в точках минимумов граничных кривых. Для первой области неустойчивости мы имеем (см. § 40)

$$a = 1 - \mu^2, \quad q = 2\mu.$$

Так как $\mu \ll 1$, то можно положить

$$a = 1,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \omega,$$

т. е. колебания легче всего возбуждятся на частоте, равной половине частоты модуляции. Подставляя значение

$$\mu = \frac{1}{2} q$$

в условие возбуждения (4), получим

$$\frac{2\alpha}{\omega} < \frac{1}{2} q = n \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Преобразовывая это неравенство, получим

$$\frac{2\alpha}{\omega} = d \frac{\omega_0}{\omega} < n \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

Но так как у нас $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{2}$, то окончательно условие возбуждения запишется в виде

$$n > 2d. \quad (5)$$

Итак, при данном затухании контура параметрические колебания в нем возникнут при периодическом изменении емкости при условии достаточно большого относительного изменения емкости. Чем меньше затухание, тем меньше необходимое относительное изменение

$$n = \frac{C_1}{C_0}.$$

Мы вывели условие возбуждения для первой области неустойчивости при $\omega_0 \cong \frac{1}{2} \omega$. Возбуждение возможно и для других соотношений частот, т. е. для других областей неустойчивости. Однако при других отношениях частот труднее возбудить колебание, т. е. требуется большая глубина модуляции. Для второй области неустойчивости имеем координаты минимума граничной кривой

$$q = 4\mu^{1/2}, \quad a = 4 + \frac{8}{3} \mu.$$

Положим приближенно

$$a = 4,$$

т. е.

$$\omega_0 = \omega.$$

Подставляя в (4)

$$\mu = \frac{1}{16} q^2 = \frac{1}{4} n^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^4} = \frac{1}{4} n^2,$$

получим

$$d < \frac{1}{4} n^2,$$

т. е.

$$n > \sqrt{2d}.$$

Для третьей области неустойчивости координаты минимума

$$q = 4(6\mu)^{1/3}, \quad a = 9 + (6\mu)^{2/3} \cong 9,$$

откуда

$$\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} = 9, \quad \omega_0 = \frac{3}{2} \omega, \quad \mu = \frac{1}{384} q^3.$$

Подставляя в (4), получим

$$n = \frac{8}{3\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{d} \cong 1,84 \sqrt[3]{d}$$

и так далее.

Простейший результат, выражаемый формулой (5), можно было бы получить, опираясь не на теорию уравнения Матъё, а на энергетические соображения, основа которых у нас уже подготовлена. Мы сделаем сейчас энергетический вывод условия возбуждения, так как этот вывод помогает уяснить физическую картину явлений при параметрическом возбуждении колебаний.

Полная энергия $\mathcal{E}$ в колебательном контуре равна сумме энергий, запасенных в магнитном поле индуктивности, ($\mathcal{E}_L$) и в электрическом поле емкости ($\mathcal{E}_C$). При отсутствии потерь и при отсутствии внешнего воздействия запас энергии остается неизменным; энергия лишь периодически перекачивается из индуктивности в емкость и обратно, в чем, в сущности, и состоит процесс свободных колебаний. При наличии потерь, т. е. с учетом активного сопротивления R , запас энергии убывает. Потеря энергии $\mathcal{E}_-$, отнесенная ко времени и усредненная за период, дает теряемую мощность, равную

$$P_- = \left(\overline{\frac{d\mathcal{E}_-}{dt}} \right) = \frac{1}{2} I_m^2 R,$$

где черта означает усреднение за период, а

$$I_m = \omega_0 Q_m = \omega_0 C U_m$$

— амплитуда тока, которую можно также выразить через амплитуду заряда Q_m и через амплитуду напряжения на конденсаторе U_m . Таким образом,

$$P_- = \frac{1}{2} \omega_0^2 C^2 R U_m^2 = \omega_0^2 R C \mathcal{E} = \omega_0 d \mathcal{E}, \quad (6)$$

где d — затухание контура. Колебания могут быть поддержаны, если теряемая мощность восполняется извне. Это и достигается периодическим изменением емкости. Мы имеем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C.$$

Найдем приращение энергии, обусловленное только изменением емкости

$$d_C \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C} dC,$$

так как $\mathcal{E}_L$ не зависит от C .

$$\mathcal{E}_C = \frac{U^2 C}{2},$$

так что

$$d_C \mathcal{E} = \frac{1}{2} U^2 dC.$$

Разделив обе части на dt , получим

$$\frac{d_C \mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dt}. \quad (7)$$

Мы предполагаем, что у нас имеется синусоидальное колебание, так что

$$U = U_m \cos \omega_0 t.$$

Подставляя это значение в (7), найдем

$$\frac{d_C \mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{4} U_m^2 (1 + \cos 2\omega_0 t) \frac{dC}{dt}. \quad (8)$$

Теперь заметим, что среднее значение $\frac{d_C \mathcal{E}}{dt}$ есть не что иное, как мощность P_+ , поступающая в контур. Для того чтобы эта мощность не была равна нулю, необходимо в формуле

$$C(t) = C_0 + C_1 f(t)$$

положить

$$f(t) = \sin 2\omega_0 t,$$

тогда

$$\frac{dC}{dt} = 2\omega_0 C_1 \cos 2\omega_0 t. \quad (9)$$

Действительно, подставив (9) в (8), получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2} U_m^2 \omega_0 C_1 (\cos 2\omega_0 t + \cos^2 2\omega_0 t),$$

$$P_+ = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) = \frac{1}{4} U_m^2 \omega_0 C_1 = \frac{1}{4} U_m^2 \omega_0 C_0 \frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{2} n \omega_0 \mathcal{E}. \quad (10)$$

Для того чтобы колебания не затухали, необходимо, очевидно, выполнение неравенства

$$P_+ \geq P_-.$$

Отсюда с помощью формул (6) и (10) находим

$$n \geq 2d,$$

что совпадает с (5).

В заключение заметим, что мы рассматривали задачу о параметрическом возбуждении колебаний как линейную задачу; мы нашли приближенное условие самовозбуждения при $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{2}$, но ничего не можем пока сказать об установившейся амплитуде колебаний. Установившийся режим может быть определен только при учете нелинейности. Так как в схеме рис. 145 нелинейных элементов нет, то амплитуда колебаний теоретически может нарастать неограниченно. Практически в такого рода схеме напряжение быстро достигает таких больших значений, что пробиваются конденсаторы. Поэтому в схему приходится вводить нелинейные сопротивления специально для ограничения амплитуды колебаний.

§ 42. Деление частоты

В ряде случаев необходимо, располагая генератором известной частоты, получить колебание более низкой частоты, в частности, в n раз более низкой. Операцию получения частоты в n раз ниже исходной называют делением частоты. Чаще всего встречается деление на два, т. е. получение половинной частоты.

Деление частоты, т. е. возникновение дробных частот — так называемых субгармоник — возможно при нелинейном резонансе и в некоторых других нелинейных схемах. В этом параграфе мы рассмотрим устройство и действие параметрического делителя частоты.

Составим схему из источника синусоидального напряжения

$$E = E_m \cos 2\omega t$$

и переменной проводимости

$$Y = Y_0(1 + m \sin \omega t).$$

Сила тока в такой цепи

$$I = EY = E_m Y_0 \left(\cos 2\omega t + \frac{m}{2} \sin 3\omega t - \frac{m}{2} \sin \omega t \right).$$

Как видно, в составе тока появилась компонента с частотой, равной половине частоты источника. Кроме того, имеются составляющие с частотой источника 2ω и с полуторной частотой 3ω . Если отфильтровать эти составляющие и использовать колебание с частотой ω для управления проводимостью, то получим принципиальную схему делителя, показанную на рис. 146. Таким образом, в схеме делителя должна иметься обратная связь, при помощи которой производится изменение параметра (в частности, проводимости) с дробной частотой.

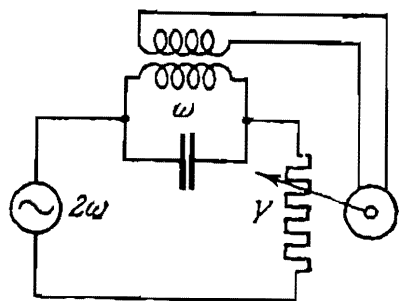


Рис. 146.

В качестве управляемой проводимости можно использовать крутизну триода, зависящую от напряжения на сетке. Если характеристика лампы задана в виде

$$I_a = f(U),$$

то при наличии квадратичного члена в выражении функции f мы получим линейную зависимость крутизны от напряжения на сетке. Пусть

$$f(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2.$$

Тогда

$$S = \frac{dI_a}{dU} = a_1 + 2a_2 U.$$

Простейшая схема с использованием этой возможности изображена на рис. 147. Эта схема отличается от схемы обычного генератора с контуром в цепи анода лишь наличием источника переменного напряжения E в цепи сетки.

Схема рис. 147 в принципе не отличается от схемы регенеративного приемника и вообще от схемы потенциально-автоколебательной системы, находящейся под воздействием внешнего источника. Источник имеет частоту 2ω . Контур настроен на половинную частоту ω . Напряжение на сетке равно сумме напряжения E и напряжения, наводимого в катушке связи. Для того чтобы напряжение половинной частоты действительно могло вырабатываться, необходимо выполнение известных условий, которые мы сейчас в простейшей форме выведем.

Схема рис. 147 может рассматриваться как своего рода генератор половинной частоты. Для выяснения условий воз-

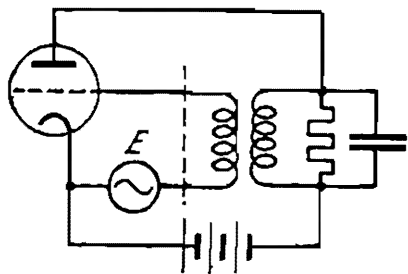


Рис. 147.

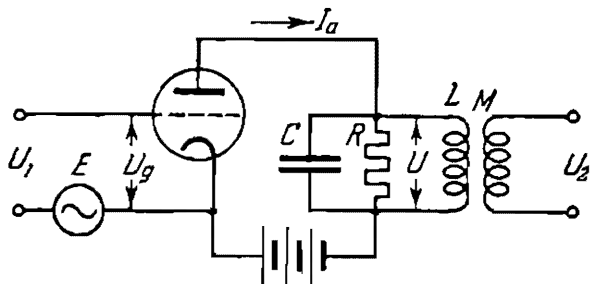


Рис. 148.

буждения этого генератора воспользуемся условием баланса фаз и амплитуд. Разорвем для этого схему рис. 147 по пунктирной линии и представим ее, как показано на рис. 148. Положим, что на вход подано напряжение

$$U_1 = U_m \sin \omega t.$$

На сетке будем иметь

$$U_g = U_1 + E = U_m \sin \omega t + E_m \cos 2\omega t.$$

Ток в анодной цепи будет

$$I_a = f(U_g) = a_0 + a_1 (U_1 + E) + a_2 (U_1 + E)^2.$$

Если контур настроен на частоту ω , то составляющие напряжения с другими частотами будут практически отсутствовать, а для напряжения с частотой ω будем иметь

$$U = I_a R = R (a_1 + E_m a_2) U_1.$$

Выходное напряжение равно

$$U_2 = \frac{M}{L} U = k U,$$

где $k = \frac{M}{L}$ — коэффициент связи. Таким образом,

$$U_2 = kR(a_1 + E_m a_2) U_1.$$

Для того чтобы колебания частоты ω могли поддерживаться в замкнутой цепи (т. е. схеме рис. 147, к которой мы вернемся, соединив накоротко входные и выходные зажимы схемы рис. 148), необходимо выполнение условия

$$U_2 \geq U_1,$$

откуда

$$kR(a_1 + E_m a_2) \geq 1. \quad (1)$$

Это и есть условие возбуждения схемы рис. 147, работающей в качестве делителя. Но по поводу этого условия нужно сразу сделать одно существенное замечание. Дело в том, что, как видно из формулы (1), схема может возбуждаться и при $E = 0$, т. е. при условии

$$kR a_1 \geq 1. \quad (2)$$

Смысл этого соотношения станет совершенно ясным, если взглянуть на схему рис. 147: если устранить источник напряжения E , то мы будем иметь схему самого обыкновенного генератора, способного генерировать колебания с частотой ω (на которую настроен контур). Формула (2) не что иное, как условие самовозбуждения для такого генератора. Следовательно, для того чтобы схема рис. 147 возбуждалась в качестве делителя и *не* возбуждалась в качестве генератора, необходимо одновременное соблюдение двух условий *):

$$\left. \begin{aligned} kR(a_1 + E_m a_2) &\geq 1, \\ kR a_1 &< 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Нужно сделать еще несколько замечаний. Во-первых, условие баланса фаз в нашем анализе выполнено автоматически, так как, с одной стороны, мы выбрали $U_1 = U_m \sin \omega t$, $E = E_m \cos 2\omega t$ (т. е. заранее взяли надлежащие начальные фазы для обоих напряжений), а с другой стороны, предпо-

*) Возможно деление и при возбужденном генераторе. В этом случае механизм явления иной: речь идет уже о захватывании на субгармонике. Этот случай мы разбирать не будем.

ложили, что контур настроен точно в резонанс. Более подробное исследование показывает, что деление возможно в пределах некоторой расстройки. Во-вторых, при нашей постановке задачи мы в состоянии только установить условие возбуждения, но не можем найти установившейся амплитуды. Дело в том, что, учитывая только квадратичный член характеристики (необходимый для получения деления), мы сводим параметрическую задачу к линейной. Установившийся режим возможен, как известно, только в нелинейной системе. Для исследования установившегося режима необходимо учесть по меньшей мере член 3-й степени в выражении для характеристики триода. Такого рода более детальное исследование составляет теорию так называемого «резонанса 2-го рода».

В заключение следует еще заметить, что одновременное выполнение обоих условий (3) практически стеснительно. Возможность самовозбуждения схемы рис. 147 как обычного генератора следует считать ее недостатком. От этого недостатка свободны так называемые регенеративные делители частоты, которым посвящен следующий параграф.

§ 43. Регенеративное деление частоты

Характерной чертой параметрического возбуждения является то, что могут возникать колебания с частотой, неравной частоте изменения параметра. В частности, как мы видели, легче всего возбуждаются колебания с частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\omega,$$

где ω — частота изменения параметра. Это обстоятельство может быть использовано для деления частоты.

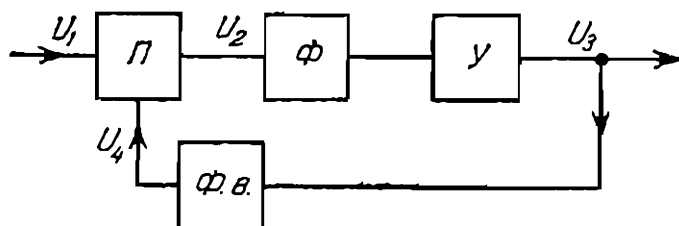


Рис. 149.

Рассмотрим скелетную схему рис. 149. На вход подается напряжение U_1 . Оно поступает на перемножитель Π , к кото-

рому подводится также напряжение U_4 . Действие перемножителя определяется тем, что выходное напряжение U_2 пропорционально произведению двух входных напряжений U_1 и U_4 . Напряжение U_2 фильтруется фильтром Φ , усиливается усилителем $У$ и поступает на выход. Выходное напряжение U_3 через фазовращатель $\Phi. в.$ подается обратно на перемножитель.

Покажем, что в такой схеме возможно деление частоты в отношении 1 : 2. Пусть на вход подано напряжение

$$U_1 = \sin 2 \omega t.$$

Предположим, что деление частоты происходит, так что

$$U_4 = \sin \omega t.$$

Тогда

$$U_2 = U_1 U_4 = \sin \omega t \sin 2 \omega t = \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos 3 \omega t.$$

Фильтр погасит составляющую тройной частоты, так что на выходе фильтра получим напряжение $\frac{1}{2} \cos \omega t$. Пусть усилитель дает усиление по напряжению вдвое. Тогда

$$U_3 = \cos \omega t,$$

т. е. на выходе имеем напряжение половинной частоты по отношению к частоте на входе. Если теперь фазовращатель поворачивает фазу напряжения на 90° , то получим

$$U_4 = \sin \omega t$$

в соответствии с нашим предположением. Схемы типа рис. 149 называются регенеративными делителями частоты. Этот термин указывает на обязательное наличие обратной связи с выхода схемы на ее вход.

Нужно заметить, что приведенное рассуждение показывает лишь, что деление частоты при помощи регенеративного делителя возможно. Но это рассуждение не позволяет найти условия, при которых деление действительно происходит. Оно не позволяет также обнаружить существенные черты явления, одна из которых состоит в том, что деление начинается только при вполне определенном значении входного напряжения U_1 . Для того чтобы разобраться в этих важных подробностях, рассмотрим какую-либо конкретную схему,

например показанную на рис. 150. В этой схеме в качестве перемножителя применен кольцевой модулятор (см. § 12); мы будем полагать, что он производит чистое перемножение

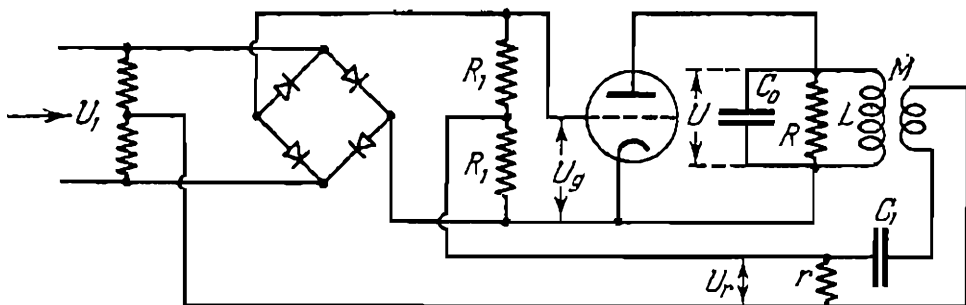


Рис. 150.

поданных на него напряжений. Составим уравнение токов для контура в анодной цепи триода

$$C_0 \frac{dU}{dt} + \frac{1}{R} U + \frac{1}{L} \int U dt = S U_g, \quad (1)$$

где S — крутизна. Э. д. с., наводимая в катушке обратной связи, равна

$$e = M \frac{dI_L}{dt} = \frac{M}{L} U. \quad (2)$$

Эта э. д. с. действует в цепи $C_1 r$; напряжение на r равно

$$U_r \cong r C_1 \frac{de}{dt} \quad (3)$$

(при условии, что напряжение на емкости много больше U_r). Комбинация $r C_1$ выполняет роль фазовращателя. Напряжение U_r подается на перемножитель; это и есть то напряжение, которое в предыдущем было обозначено через U_4 . Далее, напряжение, снимаемое с кольцевого модулятора, равно (см. § 12)

$$U_2 = U_g = 4 R_1 a_2 U_1 U_4. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) получаем

$$U_g = 4 a_2 r R_1 C_1 \frac{M}{L} U_1 \frac{dU}{dt} = k U_1 \frac{dU}{dt}. \quad (5)$$

Подставляя это значение в уравнение (1) и объединяя члены,

содержащие $\frac{dU}{dt}$, получим уравнение с переменным коэффициентом

$$(C_0 - kSU_1)\frac{dU}{dt} + \frac{1}{R}U + \frac{1}{L}\int U dt = 0. \quad (6)$$

Это — уравнение токов в контуре, в котором емкость изменяется в соответствии с входным напряжением. Если входное напряжение изменяется по закону

$$U_1 = U_m \sin 2\omega t,$$

то для действующей емкости имеем

$$C(t) = C_0 - kSU_m \sin 2\omega t = C_0 \left(1 - \frac{kS}{C_0} U_m \sin 2\omega t\right).$$

Теперь становится ясным, что механизм регенеративного деления частоты сводится к параметрическому возбуждению колебаний. Условие возбуждения

$$n > 2d$$

в нашем случае выглядит так

$$\frac{kS}{C_0} U_m > 2d$$

или

$$U_m > \frac{1}{2} \frac{d}{a_2 \omega_0^2 r R_1 C_1 M S}. \quad (7)$$

Напомним смысл входящих в эту формулу величин: ω_0 — резонансная частота контура, равная $(LC_0)^{-1/2}$, d — затухание контура, a_2 — коэффициент при U^2 в выражении для характеристики нелинейного элемента кольцевого модулятора, R_1 — сопротивление нагрузки модулятора (следует напомнить, что при выводе формулы (4) это сопротивление предполагалось малым по сравнению с внутренним сопротивлением самого модулятора), r и C_1 — сопротивление и емкость в цепи обратной связи (напомним, что должно быть $rC_1 \ll \frac{1}{\omega_0}$), M — коэффициент взаимной индукции.

Формула (7) позволяет найти минимальную амплитуду входного напряжения, при которой схема делителя приходит в действие.

В предыдущем анализе мы стремились подобрать наиболее благоприятную фазу обратной связи, для чего в цепь обратной связи был введен соответствующий фазовращатель. Это необязательно; делитель будет работать и при других фазовых соотношениях, хотя для возбуждения потребуется соответственно увеличенное входное напряжение. В практических схемах специальный фазовращатель обычно не ставится.

Возможны многочисленные варианты схем регенеративных делителей. Укажем здесь на существенное видоизменение схемы рис. 149, приводящее к делителю, способному вы-

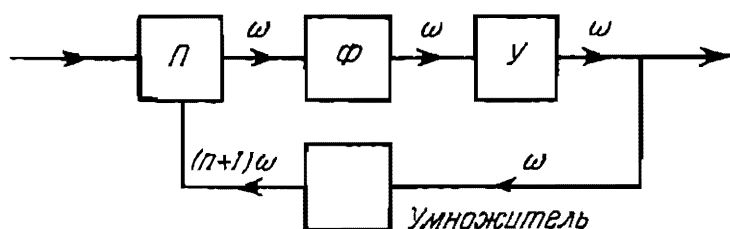


Рис. 151.

полнять деление частоты в любое число раз. Для этого в цепь обратной связи вводится умножитель частоты в $n + 1$ раз (рис. 151). При работе делителя на выходе получается частота ω , если на вход подается частота $n\omega$. На выходе умножителя в цепи обратной связи получается частота $(n + 1)\omega$. Эта частота попадает на вход перемножителя. При перемножении колебаний с частотами $n\omega$ и $(n + 1)\omega$ получаются: суммарная частота $(2n + 1)\omega$ и нужная нам разностная частота $(n + 1)\omega - n\omega = \omega$, которая выделяется фильтром и поступает на выход.

Возможно, конечно, получить деление высокой кратности и другим путем, а именно, включая делители друг за другом степенями. При таком использовании делителей, делящих, например, частоту в отношении $1 : 2$, можно получить деление в отношении $1 : 2^m$, где m — число ступеней.