

Г. ДЁЧ

**РУКОВОДСТВО
К ПРАКТИЧЕСКОМУ
ПРИМЕНЕНИЮ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ЛАПЛАСА**

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ТАБЛИЦ,
СОСТАВЛЕННЫХ Р. ГЕРШЕЛЕМ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Г. А. ВОЛЬПЕРТА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958



11-5-2

ANLEITUNG
ZUM PRAKTISCHEN GEBRAUCH
DER LAPLACE-TRANSFORMATION

VON
GUSTAV DOETSCH
ord. Professor an der Universität Freiburg i. B.

MIT EINEM TABELLENANHANG VON
RUDOLF HERSCHEL
Diplom-mathematiker in Ulm

R. OLDENBOURG, MÜNCHEN, 1956

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Определение и общие свойства преобразования Лапласа	9
§ 1. Физический смысл преобразования Лапласа	9
§ 2. Интеграл Лапласа как преобразование или отображение	13
§ 3. Некоторые примеры	16
Глава 2. Правила выполнения операций при преобразовании Лапласа	19
§ 4. Отображение операций	19
§ 5. Линейные подстановки	20
§ 6. Дифференцирование	22
§ 7. Интегрирование	25
§ 8. Умножение и свертка	26
Глава 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения	29
§ 9. Дифференциальное уравнение первого порядка	29
§ 10. Дифференциальное уравнение второго порядка	33
§ 11. Дифференциальное уравнение n -го порядка	39
§ 12. Импульсная функция в качестве входной функции	53
§ 13. Системы дифференциальных уравнений	58
Глава 4. Разностные уравнения	76
§ 14. Разностные уравнения с непрерывным аргументом	76
§ 15. Разностные уравнения с дискретным аргументом	82
Глава 5. Уравнения в частных производных	89
§ 16. Общие указания о применении преобразования Лапласа к уравнениям в частных производных	89
§ 17. Уравнение теплопроводности или диффузии	94
§ 18. Телеграфное уравнение	99
Глава 6. Интегральные уравнения и интегральные соотношения	104
§ 19. Интегральные уравнения типа свертки	104
§ 20. Интегральные соотношения	108

Глава 7. Вычисление оригинала по изображению	111
§ 21. Комплексный интеграл, осуществляющий обратное преобразование Лапласа	111
§ 22. Разложение в ряды	115
Глава 8. Асимптотическое поведение функций и исследование устойчивости	125
§ 23. Некоторые теоремы о предельных значениях	125
§ 24. Общие понятия об асимптотическом представлении и асимптотическом разложении функций	127
§ 25. Асимптотическое разложение изображения	130
§ 26. Асимптотическое разложение оригинала	132
§ 27. Исследование устойчивости	137
Приложение: Таблицы для преобразования Лапласа	141
Предварительные замечания	141
I. Операции	143
II. Соответствия	147
1. Дробно-рациональные функции	147
2. Некоторые иррациональные и трансцендентные функции	159
3. Оригиналы, по-разному определенные в отдельных интервалах	163
4. Решения дифференциальных уравнений	185

ОБОЗНАЧЕНИЯ

j — мнимая единица,
 Re — вещественная часть } комплексного числа,
 Im — мнимая часть



— знак предостережения.

Единичная функция Хевисайда в литературе часто называется также функцией толчка. В то же время некоторые авторы отождествляют функцию толчка с импульсной функцией (называемой также функцией Дирака или игольчатой функцией). Поэтому во избежание недоразумений в настоящей книге вместо термина функция толчка применяется термин *функция скачка*.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В октябре 1954 г. в Эссене специальный комитет Общества прикладной математики и механики, занимающийся математическими вопросами теории регулирования, организовал семинар, на котором были заслушаны доклады о применении преобразования Лапласа в задачах регулирования и проведены соответствующие упражнения (прочитанные доклады опубликованы в книге «Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik», выпущенной издательством R. Oldenbourg в 1955 г.). На этом семинаре выявилась необходимость создания такой книги по преобразованию Лапласа, которая содержала бы в сжатом виде и, по возможности, без теоретических выводов и доказательств только то, что действительно необходимо инженеру при практическом применении преобразования Лапласа и, в частности, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. В связи с этим доктор Р. Ольденбург предложил мне написать для его издательства практическое руководство, составленное примерно в таком же духе, как и руководство, помещенное мною в справочных таблицах по преобразованию Лапласа, выпущенных в 1947 г. издательством Springer и давно распроданных. В предлагаемом новом «Руководстве» осталось от старого только общая направленность изложения, фактическое же содержание очень сильно изменено и, в соответствии с расширением области применения преобразования Лапласа, увеличено.

При составлении настоящей книги мною учтен опыт упомянутого выше эссенского семинара, а также пожелания, высказанные мне многими инженерами при личных встречах и в переписке. В частности, особое внимание обращено на те особенности преобразования Лапласа, которые часто служат источником ошибок при его практическом применении. Там, где это необходимо, такого рода «ловушки» отмечены специальным предупреждением, как это, впрочем, было сделано и в прежнем руководстве. Такой способ фиксации внимания встретил в инженерных кругах очень теплый прием. Это побудило меня в настоящем издании заменить словесные предупреждения значительно более выразительным способом, а именно знаком предостережения, принятым на транспортных магистралях (восклицательный знак на треугольной доске),

При подборе материала мною были учтены пожелания практиков и в связи с этим введены небольшие главы, посвященные разностным уравнениям (как с аргументом, изменяющимся непрерывно, так и с аргументом, принимающим только дискретные значения), уравнениям в частных производных и интегральным уравнениям. Разностные уравнения с аргументом, принимающим только дискретные значения, в настоящее время играют важную роль в теории цепочных схем, шаговых регуляторов, импульсных цепей и т. д. Правда, для решения таких уравнений, называемых иначе рекуррентными уравнениями, можно использовать также преобразование посредством степенных рядов, как это делал уже 150 лет тому назад Лаплас. В недавнее время этот метод разработал особенно тщательно проф. Я. З. Цыпкин в своей книге «Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях» (Я. З. Цыпкин называет это преобразование дискретным преобразованием Лапласа). Но при таком способе решения необходимо создание для указанного преобразования специального нового алгоритма и новой таблицы соответствий, между тем как при применении обыкновенного преобразования Лапласа этого не требуется.

Как известно, обратное преобразование Лапласа значительно труднее прямого, поэтому оно изложено в настоящей книге довольно подробно. То же самое сделано и в отношении асимптотического разложения функций, во-первых, вследствие того, что такое разложение часто является единственным способом для получения хотя бы некоторого представления об искомой функции, а во-вторых, потому, что оно служит основой для исследования устойчивости, играющего в технике регулирования особенно важную роль, но в то же время выполняемого часто без достаточного математического обоснования.

Для того чтобы читатель практически усвоил все приемы преобразования Лапласа, в книге приводится некоторое число тщательно разобранных примеров. Все эти примеры взяты из технической практики. Так, например, системе дифференциальных уравнений, рассмотренной в § 13, соответствует схема регулирования, обсуждавшаяся на эссенском семинаре в докладах д-ра Оппельта и д-ра Ольденбурга. От приведения в примерах самих схем регулирования и других технических подробностей я намеренно отказался, во-первых, потому, что такого рода примеры представляли бы интерес для менее широкого круга читателей, а во-вторых, с целью сосредоточить все внимание читателя на самих приемах преобразования Лапласа, а не на технических объектах и их особенностях. Это тем более оправдано, что во всех случаях, когда техническая проблема сформулирована в одном или нескольких дифференциальных уравнениях, преобразование Лапласа приводит к решению автоматически и притом без всякой необходимости обращения к физической интерпретации. Правда, примеры, облеченные в чисто математическую форму, иногда могут показаться нежизненными.

Во избежание этого я обычно указываю, из какой технической области взят приводимый пример.

В соответствии с указанной в начале предисловия целью книги я по возможности избегал выводов и доказательств и давал их только там, где они безусловно необходимы для понимания. Читателя, желающего узнать о преобразовании Лапласа больше, чем изложено в настоящем руководстве, или интересующегося теми или иными деталями, я отсылаю к своим ранее изданным подробным книгам:

1. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, издательство J. Springer, Berlin, 1937, 436 страниц;

2. Handbuch der Laplace-Transformation, издательство Birkhäuser, Basel,

том I: Theorie der Laplace-Transformation, 1950, 581 страница;

том II: Anwendungen der Laplace-Transformation, первый раздел, 1955, 346 страниц,

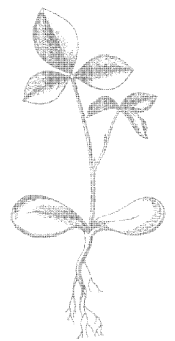
том III: Anwendungen der Laplace-Transformation, второй раздел, 1956, 300 страниц.

Практическое применение преобразования Лапласа невозможно без таблиц соответствий между функциями. Такие таблицы даны в виде приложения в конце книги. Они составлены Р. Гершелем (фирма Telefunken), обладающим большим опытом применения преобразования Лапласа. Эти таблицы облегчат работу всем, кому приходится тратить много времени на решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Использование предлагаемого руководства на практике должно показать, в какой мере оно действительно удовлетворяет своему назначению. За советы и критические замечания я всегда буду благодарен.

Густав Дёч

Фрейбург в области Брайс,
сентябрь 1956 г.



Scan AAW

Г Л А В А 1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Физический смысл преобразования Лапласа

У каждого инженера или физика, впервые вставшего перед необходимостью применить преобразование Лапласа, прежде всего возникнет, очевидно, следующий вопрос: можно ли связать преобразование Лапласа с каким-либо наглядным понятием. Покажем путем простых рассуждений, что такая возможность существует.

Начнем с рассмотрения хорошо известного разложения функции $F(x)$, определенной в конечном интервале $-\pi \leq x \leq +\pi$, в ряд Фурье, который представим, имея в виду дальнейшее и, как это часто принято в физике, в комплексной форме

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega x}. \quad (1.1)$$

Коэффициенты c_n этого ряда, называемые *коэффициентами Фурье*, определяются, как известно, формулой

$$c_n = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) e^{-jn\omega x} dx. \quad (1.2)$$

Если функция $F(x)$ удовлетворяет некоторым весьма общим условиям, например, если она распадается на конечное число непрерывных и монотонных кусков, то ряд (1.1) сходится и, следовательно, действительно представляет собой функцию $F(x)$ ¹⁾.

Формулу (1.1) можно наглядно толковать как разложение функции $F(x)$ на сумму гармонических колебаний с целочисленными угловыми частотами $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Коэффициенты c_n определяют *амплитуду* и *сдвиг фазы* отдельных колебаний. В самом

¹⁾ В точках разрыва, где предельные значения функции слева и справа не совпадают между собой, ряд Фурье дает среднее из этих предельных значений. Например, если при $x < 2$ функция равна 0, а при $x > 2$ равна единице, то в точке разрыва $x = 2$ ряд сходится к $1/2$, т. е. к среднему от 0 и 1.

деле, представим коэффициент c_n , являющийся в общем случае комплексной величиной, в следующем виде:

$$c_n = r_n e^{-jn\varphi_n} \quad (r_n \geq 0).$$

Тогда n -й член в ряде (1.1) будет равен

$$r_n e^{jn(x-\varphi_n)},$$

следовательно, ему действительно соответствует колебание с амплитудой r_n и сдвигом фазы φ_n .

Совокупность всех коэффициентов c_n определяет собой *спектр* функции $F(x)$, т. е. показывает, какие гармонические колебания действительно входят в функцию $F(x)$ и каковы амплитуды и сдвиги фазы этих колебаний [если $c_n = 0$, то это означает, что колебание с угловой частотой n не входит в функцию $F(x)$].

Сформулируем сказанное выше следующим образом.

Спектральная последовательность c_n функции $F(x)$ определяется интегралом (1.2). Знание коэффициентов c_n полностью заменяет знание функции $F(x)$, так как последняя может быть построена при известных c_n посредством формулы (1.1).

Фундаментальной переменной в физике является время t . Соответственно своей природе оно изменяется не в конечном интервале, а в *бесконечном*. Как известно, в этом случае ряд Фурье заменяется *интегралом Фурье*

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{jyt} dy \quad (1.3)$$

(вместо переменной x мы ввели теперь t). Функция $f(y)$, входящая под знак интеграла, определяется через $F(t)$ следующим образом:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-jyt} dt. \quad (1.4)$$

Формулы (1.3) и (1.4) по своей структуре сходны с формулами (1.1) и (1.2), только теперь вместо индекса n , пробегающего лишь целочисленные значения, имеется непрерывно изменяющаяся переменная y [именно поэтому сумма (1.1) заменяется интегралом (1.3)]. Это означает, что функцию $F(t)$ уже нельзя построить из гармонических колебаний только с целочисленными угловыми частотами; теперь для ее построения необходимы гармонические колебания *всех частот*. Спектр функции $F(t)$, т. е. совокупность амплитуд и сдвигов фазы каждого колебания, определяется формулой (1.4), поэтому функция $f(y)$ называется *спектральной функцией* для $F(t)$. Подобно тому как раньше спектральная последовательность c_n полностью определяла функцию $F(x)$, так теперь спектральная функция $f(y)$

полностью определяет функцию $F(t)$, так как последняя может быть построена из функции $f(y)$ посредством формулы (1.3).

Однако за этой столь удовлетворительной формальной аналогией между разложениями функции в конечном и бесконечном интервалах скрывается значительная трудность. А именно, в то время, как интеграл (1.2), определяющий спектральную последовательность, всегда существует [конечно, при условии, что функция $F(x)$ интегрируемая], интеграл (1.4), определяющий спектральную функцию, имеет смысл только в том случае, если функция $F(t)$ ведет себя в бесконечности так, что интеграл сходится¹⁾. К сожалению, такая сходимостъ не имеет места для многих и притом даже для простейших и наиболее часто встречающихся функций, как, например, для $F(t) = \text{const}$ или $F(t) = e^{j\omega t}$.

Однако это затруднение можно обойти. Выше мы молча предположили, что время t изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, между тем как в практических условиях вряд ли приходится иметь дело с процессами, длющимися от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Обычно какой-либо процесс начинается в определенный момент времени, например $t = 0$, а затем продолжается в течение длительного промежутка времени, теоретически до $t = \infty$. Следовательно, в практических условиях приходится иметь дело с интервалом времени $0 \leq t < \infty$, т. е. только с *односторонне бесконечным* интервалом. Но такой случай мы можем включить в случай двусторонне бесконечного интервала, произвольно положив функцию $F(t)$ равной нулю для всех $t < 0$. Тогда нижним пределом интеграла (1.4) надо будет взять нуль, и мы получим:

$$f(y) = \int_0^{\infty} e^{-jyt} F(t) dt, \quad (1.5)$$

причем интеграл Фурье будет теперь равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jyt} f(y) dy = \begin{cases} F(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

1) Условие о поведении функции $F(t)$ в бесконечности должно быть введено не только для обеспечения сходимости интеграла (1.4), но и для обеспечения того, чтобы интеграл (1.3) действительно представлял собой

функцию $F(t)$. Чаще всего вводится условие, что сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt$.

Далее, необходимо ввести, как и в случае ряда Фурье, условие о поведении функции $F(t)$ в конечной области, например условие, что $F(t)$ в любом конечном интервале распадается на конечное число непрерывных монотонных кусков. В точках разрыва интеграл (1.3) дает, как и ряд Фурье, среднее значение функции $F(t)$.

2) Согласно сказанному в конце предыдущей сноски интеграл (1.6) при $t = 0$ равен среднему от предельных значений 0 и $F(+0)$ слева и справа, т. е. $F(+0)/2$.

Введя это условие, мы можем обойти указанную выше трудность. В самом деле, рассмотрим наряду с функцией времени $F(t)$ функцию $e^{-xt}F(t)$ со значением параметра $x > 0$ и составим для последней спектральную функцию, которая, конечно, теперь будет зависеть от x . Обозначив ее поэтому через $f_x(y)$, мы будем иметь:

$$f_x(y) = \int_0^{\infty} e^{-jyt} [e^{-xt}F(t)] dt. \quad (1.7)$$

Очевидно, что вследствие очень быстрого уменьшения множителя e^{-xt} при $t \rightarrow +\infty$, интеграл (1.7) сходится для всех ограниченных функций $F(t)$, даже для таких, которые возрастают в бесконечности так же, как показательная функция $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$), если только выбрать $x > \alpha$ ¹⁾. Следовательно, вводя вместо функции $F(t)$ функцию $e^{-xt}F(t)$, мы устраняем расходимость интеграла (1.4) для всех практически встречающихся функций.

Вместо формулы (1.6) мы получим теперь следующую:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jyt} f_x(y) dy = \begin{cases} e^{-xt}F(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Перепишем формулы (1.7) и (1.8) в несколько ином виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+jy)t} F(t) dt = f_x(y), \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+jy)t} f_x(y) dy = \begin{cases} F(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Мы видим, что в эти формулы переменные x и y входят только в комбинации $x + jy$. Следовательно, сама собой появилась *комплексная переменная*. Обозначив ее через s , мы будем иметь:

$$s = x + jy.$$

Очевидно, что функция $f_x(y)$ зависит от этой комплексной переменной, поэтому целесообразно ввести обозначение

$$f_x(y) = f(x + jy) = f(s).$$

Конечно, переменную s следует ввести вместо y не только в формулу (1.9), но и в формулу (1.10) в качестве переменной, по которой производится интегрирование. Так как в формуле (1.10)

¹⁾ Умножение функции $F(t)$ на e^{-xt} в случае первоначального интервала $-\infty < t < +\infty$ не привело бы к желательной цели, так как e^{-xt} при $t \rightarrow -\infty$ сильно возрастает и поэтому даже ухудшает сходимость интеграла при $t = -\infty$.

u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то $s = x + jy$ будет изменяться от $x - j\infty$ до $x + j\infty$. Поскольку параметр x мы должны считать в каждом отдельном случае неизменным, указанному изменению переменной s соответствует в комплексной плоскости перемещение вдоль вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 1).

Имея в виду, что $ds = jdy$, мы можем переписать формулы (1.9) и (1.10) в следующем окончательном виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s), \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{ts} f(s) ds = \begin{cases} F(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

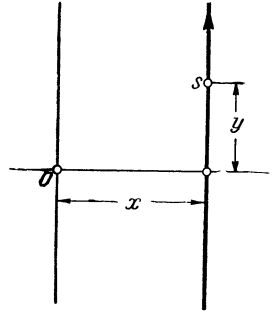


Рис. 1.

Интеграл в формуле (1.11) представляет собой не что иное, как *интеграл Лапласа*. Именно им мы и будем в дальнейшем заниматься. Из сказанного выше вытекает его физический смысл:

Если в функции $f(s)$, определяемой интегралом Лапласа (1.11), рассматривать величину s как комплексную переменную ($s = x + jy$), то $f(x + jy)$ будет спектральной функцией по отношению к затухающей функции времени $e^{-xt} F(t)$, для которой частотой является переменная y ¹⁾.

Функцию времени $F(t)$ можно построить по спектральной функции $f(s)$ посредством формулы (1.12). Однако если иметь в виду разложение функции $F(t)$ на колебания, то следует пользоваться формулой (1.8). Именно в наличии демпфирующего множителя e^{-xt} и в свободе выбора параметра x и состоит преимущество интеграла Лапласа по сравнению с интегралом Фурье, при пользовании которым рассматривается только *одна* функция $F(t)$ вместе с ее спектральной функцией.

§ 2. Интеграл Лапласа как преобразование или отображение

Так как переменная s в интеграле Лапласа рассматривается как комплексная величина, то прежде всего возникает вопрос, в какой

1) В технической литературе иногда называют переменную s комплексной частотой, что с физической точки зрения не имеет никакого смысла. В самом деле, в действительности во всех случаях может идти речь только о тех частотах, которые определяются значениями переменной y . Но, с другой стороны, необходимо иметь в виду, что функцией, разлагаемой на колебания с частотами y , является не $F(t)$, а функция $e^{-xt} F(t)$, сделанная затухающей умножением на e^{-xt} . Следовательно, функция $f(s)$ охватывает собой, вообще говоря, бесконечно большое число спектральных функций, отличающихся друг от друга параметром x .

области комплексной плоскости функция $f(s)$ является определенной т. е. в какой области интеграл Лапласа сходится. Можно доказать, что такой областью является всегда правая полуплоскость $\operatorname{Re} s > \beta$, так называемая *полуплоскость сходимости*. Далее, весьма существенно, что в этой полуплоскости спектральная функция $f(s)$ является *аналитической функцией*. Это обстоятельство позволяет применить к исследованию $f(s)$ мощные методы теории функций комплексного переменного¹⁾. Наоборот, функция времени $F(t)$ представляет собой вещественную и почти совершенно произвольную функцию, и для ее исследования не существует общих методов.

Можно сказать, что между функцией времени $F(t)$, с одной стороны, и спектральной функцией $f(s)$, с другой стороны, существует *соответствие*. Иначе соответствие между функциями называют *преобразованием* или *отображением*²⁾. Такую терминологию переносят и на наш случай и говорят о преобразовании F в функцию f посредством интеграла Лапласа (1.11), называя это преобразование *преобразованием Лапласа*. С целью оттенить особенность преобразования как отображения называют функцию F *оригиналом*, а функцию f — *изображением*³⁾. (Само преобразование можно представить себе как фотографическую камеру, посредством которой с оригинала F получается изображение f .) Совокупность всех оригиналов F называется *пространством оригиналов*, а совокупность всех изображений f — *пространством изображений*.

В дальнейшем мы будем обозначать оригиналы всегда большими буквами, а отвечающие им изображения — соответствующими малыми буквами, например $Y(t)$ и $y(s)$. В литературе часто применяются также следующие обозначения: $u(t)$ и $\bar{u}(s)$ или $u(t)$ и $\tilde{u}(s)$.

Подобно тому, как для обозначения обычной функции применяют не слова « w есть функция z », а символ функции, например, $w = \varphi(z)$, так и для обозначения связи, устанавливаемой преобразованием Лапласа, вводят символ \mathcal{L} и пишут

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}.$$

¹⁾ Именно на этом основано существенное преимущество спектральной функции (1.11) интеграла Лапласа перед спектральной функцией (1.4) интеграла Фурье; последняя, будучи функцией вещественного переменного, в общем случае не является аналитической.

²⁾ Например, аналитическая функция $\varphi(z) = w$ прежде всего устанавливает соответствие между значениями z и w . Но можно также сказать, что она осуществляет преобразование плоскости z в плоскость w или отображает плоскость z на плоскость w .

³⁾ Термины «функция времени» и «спектральная функция» мы использовали выше для придания связи между F и f физической наглядности. Для «техники» преобразования Лапласа эти термины непригодны, во-первых, потому, что аргументом функции F может быть не только время, но и координата места или какая-либо другая физическая величина, и, во-вторых, вследствие того, что в тех случаях, когда преобразование рассматривается как отображение, представление о спектральном разложении функции F обычно полностью отходит на задний план.

Читается эта запись так: $f(s)$ есть функция, полученная из $F(t)$ посредством преобразования Лапласа [или, короче, $f(s)$ есть \mathcal{L} -изображение функции $F(t)$]. На символ \mathcal{L} следует смотреть не только как на замену явной записи интеграла Лапласа (неудобной при частом применении), но и как на подчеркивание того обстоятельства, что связь между функциями F и f носит характер отображения. Для того чтобы полностью овладеть техникой преобразования Лапласа, весьма важно с самого начала приучить себя рассматривать это преобразование именно как отображение, а не как операцию вычисления интеграла ¹⁾.

Формулу (1.12), позволяющую вычислить F по известному f , целесообразно рассматривать тоже как преобразование. Такое преобразование, переводящее f в F , называется *обращением* преобразования Лапласа, или *обратным преобразованием Лапласа*, и обозначается символом \mathcal{L}^{-1} :

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}.$$

Связь между F и f называется также *соответствием* и обозначается посредством знака соответствия $\circ \bullet$ следующим образом:

$$F \circ \bullet f \text{ или } f \bullet \circ F.$$

Совершенно очевидно, что каждому оригиналу F соответствует единственное изображение f . Напротив, каждому изображению f соответствует бесконечно большое число оригиналов F . В самом деле, если оригинал F определить в какой-либо точке, например t_0 , по-иному, то изображение f от этого, очевидно, не изменится. Однако все эти оригиналы F отличаются друг от друга на так называемые *нулевые функции* $N(t)$, т. е. на функции, обладающие свойством

$$\int_0^t N(\tau) d\tau \equiv 0 \text{ при всех } t \geq 0.$$

Если среди всех оригиналов $F(t)$, соответствующих заданному изображению $f(s)$, имеется один, являющийся непрерывной функцией, то все остальные оригиналы представляют собой обязательно разрывные функции. Так как в приложениях оригиналы обычно

¹⁾ При применении обычных функций специального вида, например $w = \ln z$, мы также имеем в виду не численное определение этой функции, например, посредством интеграла

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

а ту характерную связь между значениями z и w , которая выражается свойством $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$.

предполагаются дифференцируемыми, т. е. с самого начала считаются непрерывными функциями, то только что указанное свойство оригиналов позволяет определить оригинал по заданному изображению в большей части случаев *однозначно*.

§ 3. Некоторые примеры

Для лучшего усвоения абстрактных понятий, рассмотренных в предыдущем параграфе, вычислим изображения некоторых функций.

1. Пусть оригиналом является постоянная, равная единице, или, точнее (в смысле, разъясненном в § 1), функция

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Вопрос об определении этой функции в точке разрыва $t=0$ мы оставляем открытым, поскольку мы знаем, что в этой точке интеграл (1.12) равен среднему от своих предельных значений слева и справа, т. е. половине, совершенно независимо от того, как мы определяем $U(t)$ в точке $t=0$. Функция $U(t)$ называется в электротехнике *единичным скачком* или *единичной функцией Хевисайда*.

Изображение функции $U(t)$ вычисляется очень просто. Оно равно

$$u(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

тогда и только тогда, когда e^{-st} стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. если $\operatorname{Re} s > 0$. Следовательно, мы получили подтверждение сказанному в начале § 2, а именно, что областью сходимости интеграла Лапласа является правая полуплоскость (к такому же результату мы придем и в следующих примерах).

Таким образом, мы имеем:

$$\mathfrak{L}\{U(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \quad (3.1)$$

Выполнив обращение сделанного преобразования, мы получим:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{ts} \frac{1}{s} ds = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \quad (x > 0), \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

С точки зрения сказанного в § 1 по поводу физического смысла интеграла Лапласа изображение

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{x+jy}$$

представляет собой спектральную функцию для функции $e^{-xt}U(t)$. Если комплексное число $x + jy$ записать в полярных координатах r и φ , то спектральную функцию можно представить в виде $r^{-1}e^{-j\varphi}$. Следовательно, функция $U(t)$ распадается на гармонические колебания

$$\frac{1}{x + jy} e^{jyt} = r^{-1} e^{jy(t - \frac{\varphi}{y})},$$

где y означает угловую частоту. Мы видим, что эти гармонические колебания имеют амплитуду $r^{-1} = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ и сдвиг фазы φ/y . При возрастании частоты y величина r стремится к ∞ , а величина φ стремится к $\pm \pi/2$, следовательно, и амплитуда, и сдвиг фазы гармонических колебаний стремятся к нулю.

Особо подчеркнем, что *сам* единичный скачок $U(t)$ не имеет *никакого* изображения. В самом деле, если мы подставим в выражение

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{ts} \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+jy)t} \frac{1}{x+jy} dy$$

$x = 0$, то получим интеграл

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jyt} \frac{1}{y} dy,$$

который расходится, так как функция $1/y$ при $y = 0$ неинтегрируема. Следовательно, при выборе пути интегрирования вдоль мнимой оси необходимо обойти нулевую точку справа по полуокружности (рис. 2). Но на этой полуокружности e^{ts} уже не представляет собой гармонического колебания e^{jyt} , и поэтому здесь спектральный характер представления заданной функции нарушается¹⁾.

2. Пусть единичный скачок происходит не в момент времени $t = 0$, а в момент $t = a > 0$. В таком случае вместо функции $U(t)$ мы будем иметь функцию $U(t - a)$, изображением которой будет

$$\mathfrak{L}\{U(t - a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \quad (3.3)$$

3. Пусть оригиналом будет функция e^{at} (a — произвольное комплексное число) или, точнее говоря, функция, равная e^{at} при $t > 0$

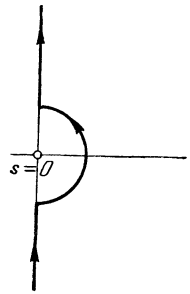


Рис. 2.

1) На этом примере мы видим, что даже в случае самых простых функций разложение, осуществляемое интегралом Фурье, может не приводить к результату, и поэтому неизбежно приходится обращаться к интегралу Лапласа. Это обстоятельство следует особо подчеркнуть, так как некоторые практики даже в настоящее время думают, что интеграл Фурье позволяет получать такие же результаты, как и интеграл Лапласа.

и нулю — при $t < 0$. Для того чтобы исключить возможность какого бы то ни было недоразумения, можно было бы представить эту функцию в виде $U(t)e^{at}$. Однако, поскольку мы знаем, что в теории преобразования Лапласа все оригиналы при $t < 0$ раз навсегда принимаются равными нулю, мы не будем прибегать к такому более сложному обозначению ни здесь, ни дальше. Изображением рассматриваемой функции будет

$$\mathfrak{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \quad (3.4)$$

Мы видим, что в то время как оригинал представляет собой трансцендентную функцию, изображением является рациональная, т. е. совсем элементарная функция.

4. Пусть оригиналом будет функция $\cos kt$. Применяв для вычисления изображения формулу (3.4), мы получим:

$$\mathfrak{L}\{\cos kt\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{jkt} + e^{-jkt})\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-jk} + \frac{1}{s+jk}\right) = \frac{s}{s^2+k^2}, \quad (3.5)$$

причем, конечно, должно быть

$$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(jk) = -\operatorname{Im} k \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(-jk) = \operatorname{Im} k,$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} k|.$$

5. Пусть оригиналом является функция $\sin kt$. Таким же способом, как и в предыдущем примере, мы получим:

$$\mathfrak{L}\{\sin kt\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-jk} - \frac{1}{s+jk}\right) = \frac{k}{s^2+k^2} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} k|. \quad (3.6)$$

6. Для существования интеграла Лапласа от оригинала t^α (α — вещественное число) при $t=0$ необходимо, чтобы было $\alpha > -1$. Для вещественного положительного s мы будем иметь:

$$\mathfrak{L}\{t^\alpha\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^\alpha dt = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{s}\right)^\alpha \frac{d\tau}{s} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \quad (3.7)$$

Для целочисленных показателей $\alpha = n \geq 0$ формула (3.7) принимает вид

$$\mathfrak{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (3.8)$$

ГЛАВА 2

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

§ 4. Отображение операций

При практическом применении преобразования Лапласа вычисления ведутся не над заданными функциями, а над их изображениями, подобно тому, как при умножении вычисления ведутся обычно не над самими числами, а над их логарифмами, что приводит к замене умножения более простой операцией — сложением. Весь процесс преобразования Лапласа можно представить себе как перевод с одного языка на другой. При таком переводе каждому слову одного языка соответствует определенное слово другого языка. Совершенно так же при преобразовании Лапласа каждой функции пространства оригиналов соответствует определенная функция в пространстве изображений. Роль словаря, необходимого для перевода с одного языка на другой, при преобразовании Лапласа играет *таблица соответствий между оригиналами и изображениями*. Несколько самых необходимых соответствий мы привели в § 3, в значительно большем количестве они даны в приложении, помещенном в конце книги. Но для того чтобы перевести с одного языка на другой целое предложение, т. е. некоторую последовательность связанных между собой слов, недостаточно знать перевод отдельных слов; необходимо еще знать, как *грамматические образования* одного языка (например, изменение отдельных слов или связывание нескольких в одно более сложное понятие) передаются на другом языке. В применении к случаю преобразования Лапласа это означает следующее: если над функцией, например, в пространстве оригиналов производится какая-либо операция, например дифференцирование или интегрирование, то в пространстве изображений этой операции должна отвечать вполне определенная другая операция. Аналогичным образом, если в пространстве оригиналов несколько функций комбинируются друг с другом, например перемножаются, то в пространстве изображений такой комбинации должна отвечать вполне определенная другая комбинация.

Таким образом, необходимо знать не только отображение (или перевод) отдельных функций, но и правила отображения операций. Именно в этом смысле и следует понимать приводимые ниже «грамматические правила» преобразования Лапласа ¹⁾. Как эти правила используются для решения некоторых математических задач, будет показано в главах 3—6.

§ 5. Линейные подстановки

В этом параграфе мы рассмотрим операции, представляющие собой линейные преобразования аргумента в оригинале или в изображении.

Правило I (теорема подобия)

$$\text{или} \quad \boxed{\begin{array}{l} F(at) \circ \bullet \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0) \\ f(bs) \bullet \circ \frac{1}{b} F\left(\frac{t}{b}\right) \quad (b > 0). \end{array}}$$

Следовательно, умножение аргумента оригинала (изображения) на некоторое число приводит к делению аргумента изображения (оригинала) и одновременно самого изображения (оригинала) на то же число, т. е. к подобному изменению изображения (оригинала).

Правило II (первая теорема сдвига)

$$\boxed{F(t-a) \circ \bullet e^{-as} f(s)} \quad (a > 0).$$

Соглашение о равенстве $F(t)$ нулю для всех отрицательных t , принятое в § 1 и во многих случаях играющее второстепенную роль, здесь особенно важно. При $t < a$ аргумент $t-a$ отрицателен, по-

¹⁾ Мы рекомендуем читателю для лучшего понимания механизма этих правил вывести самостоятельно некоторые из них. Для примера приведем вывод первого правила:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{F(at)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt = \int_0^{\infty} e^{-s\frac{\tau}{a}} F(\tau) \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} F(\tau) d\tau = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

Кроме того, читателю, желающему усвоить исключительно «технику» преобразования Лапласа, мы рекомендуем при первом чтении ограничиться только запоминанием формул, выражающих правила (эти формулы заключены в рамки), к чтению же пояснительного текста вернуться лишь после того, как он встретится с применением правил на примерах в главах 3—6.

этому $F(t-a) = 0$. Следовательно, график функции $F(t-a)$ получается из графика функции $F(t)$ смещением последнего вправо на расстояние a и одновременным дополнением его в интервале между 0 и a осью t (рис. 3, а).

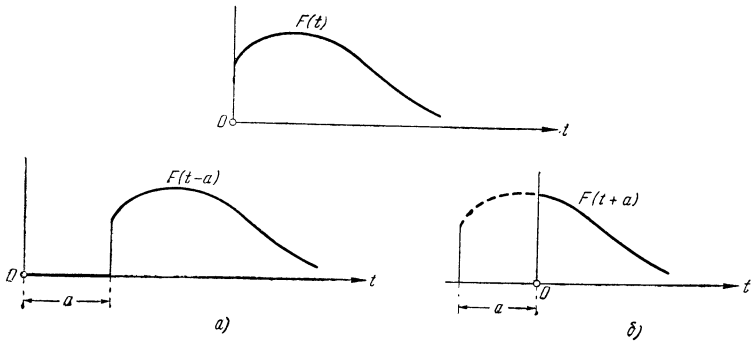


Рис. 3.

Правило II играет особую роль для процессов, происходящих с отставанием (например, при регулировании с запаздыванием).

Если правило II читать справа налево, т. е. переходить от изображения к оригиналу, то не следует забывать, что оригинал $F(t-a)$ при $t < a$ должен быть равен нулю. Так, например, если в результате вычислений получилось изображение

$$e^{-s} \frac{1}{s^2 + 1},$$

то при $t \geq 1$ оригиналом будет $\sin(t-1)$, а при $0 \leq t < 1$ — нуль.

Правило III (вторая теорема смещения)

$$F(t+a) \leftrightarrow e^{as} \left(f(s) - \int_0^a e^{-st} F(t) dt \right) \quad (a > 0).$$

Это правило противоположно правилу II в том смысле, что теперь график функции $F(t)$ смещается на отрезок a не вправо, а влево (рис. 3, б). Такое смещение приводит к тому, что начальный кусок графика, соответствующий участку оси t от 0 до a , пропадает, так как новая функция по-прежнему может рассматриваться только при значениях $t \geq 0$. Очевидно, что изображение $f(s)$ не может быть связано непосредственно с новой, усеченной функцией $F(t+a)$. Именно поэтому и появляется в правой части соответствия «конечный» интеграл Лапласа, содержащий значения функции $F(t)$ при значениях аргумента $0 \leq t < a$.

1. «Начальные значения» обозначены в формулах (6.1) не через $F(0)$, $F'(0)$, ..., а соответственно через $F(+0)$, $F'(+0)$, ... Это сделано с целью подчеркнуть, что имеются в виду не значения, которые функции F , F' , ... имеют при $t=0$, а *предельные значения*, к которым стремятся F , F' , ..., когда t стремится к нулю справа. Можно сказать и наоборот, а именно, что имеются в виду значения, от которых функции F , F' , ... начинают свое непрерывное изменение вправо. Так, например, рассмотренная в примере 1 § 3 функция $U(t)$, т. е. единичный скачок, может иметь при $t=0$, смотря по обстоятельствам, вообще любое значение $U(0)$. Иногда его принимают равным нулю, если посредством функции $U(t)$ желают описать процесс, который при $t=0$ претерпевает скачкообразное изменение от нуля до единицы; в § 3 было целесообразно принять $U(0)=1/2$, так как именно это значение дает используемая там формула (3.2). Но предельное значение $U(+0)$ совершенно однозначно равно единице. Так как при $t > 0$ производная $U'(t)=0$, то $\mathfrak{L}\{U'\}=0$, и так как $\mathfrak{L}\{U\}=1/s$, то формула (6.1) дает

$$0 = s \frac{1}{s} - U(+0).$$

Это равенство в действительности соблюдается только для значения $U(+0)=1$. Для других значений $U(0)$ вместо $U(+0)$ оно было бы неправильным.

Разница между «значением функции в точке» и «предельным значением при приближении к этой точке» играет особо важную роль при решении уравнений в частных производных (см. по этому поводу стр. 92 и 97).

2. Правило V предполагает, что $F'(t)$ или соответственно $F''(t)$ и т. д. существует в каждой точке ¹⁾, следовательно, функция $F(t)$

¹⁾ При $t=0$ производная необязательно должна существовать. Такой случай встречается довольно часто. Примером может служить функция

$$F(t) = t^{\frac{1}{2}} \text{ с производной } F'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Для этой функции мы имеем:

$$\mathfrak{L}\{F\} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{3/2}}, \quad \mathfrak{L}\{F'\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}}, \quad F(+0) = 0.$$

Формула (6.1) приводит к правильному результату

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}} = s \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{3/2}},$$

так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

не должна иметь справа от нуля точек разрыва, угловых точек и т. п. Покажем на примере, что если не учитывать этого обстоятельства, то применение правила V может привести к неверному результату. Для единичного скачка $U(t-a)$, рассмотренного в примере 2 § 3 и происходящего в момент времени $t=a > 0$, мы имеем:

$$\mathfrak{L}\{U(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Предельное значение функции $U(t-a)$ при t , стремящемся к нулю справа, равно нулю. Применив неосторожно правило V, мы получим:

$$\mathfrak{L}\{U'(t-a)\} = e^{-as}. \quad (6.2)$$

Если же мы вычислим это изображение, т. е. $\mathfrak{L}\{U'(t-a)\}$, прямым путем, т. е. составим сначала производную $U'(t-a)$ и только затем выполним преобразование Лапласа, то получим совсем другой результат. В самом деле, мы имеем:

$$U'(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq a, \\ \text{не определяется} & \text{при } t = a, \end{cases} \quad (6.3)$$

следовательно,

$$\mathfrak{L}\{U'(t-a)\} = 0, \quad (6.4)$$

так как очевидно, что интегрирование функции, равной нулю всюду, за исключением одной единственной точки, дает такой же результат, как и интегрирование функции, равной нулю всюду.

Несовпадение результатов, даваемых формулами (6.2) и (6.4), объясняется тем, что функция $U(t-a)$ дифференцируема не при всех t , а именно в точке $t=a$ она не только не имеет производной, но даже не непрерывна. Следовательно, к такой функции правило V применять нельзя.

О другой интерпретации формулы (6.3) и другом смысле формулы (6.2) см. на стр. 54 и 55.

Правило VI (теорема дифференцирования для изображения)

В § 2 мы упомянули, что изображение является всегда аналитической функцией, следовательно, обладает всеми производными. Эти производные легко получить путем дифференцирования под знаком интеграла, что приводит к следующему правилу:

$\begin{aligned} -tF(t) &\circ\rightarrow f'(s) \\ t^2F(t) &\circ\rightarrow f''(s) \\ \dots &\dots \\ (-1)^n t^n F(t) &\circ\rightarrow f^{(n)}(s) \end{aligned}$
--

Мы видим, что, как и в случае дифференцирования оригинала, сложная операция дифференцирования изображения заменяется в пространстве оригиналов совсем тривиальной операцией — умножением оригинала на независимую переменную, взятую с отрицательным знаком.

§ 7. Интегрирование

Правило VII (теорема интегрирования для оригинала)

Дифференцированию оригинала соответствует в пространстве изображений, если не считать прибавления постоянной, умножение изображения на s . Интегрированию оригинала от нуля до переменной точки t соответствует в пространстве изображений деление изображения на s :

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \circlearrowleft \frac{1}{s} f(s)$$

В основе этого правила лежит предположение, что функция $F(t)$ обладает изображением. При таком предположении автоматически обладает изображением и интеграл от функции $F(t)$.

Правило VIII (теорема интегрирования для изображения)

Как мы видели в предыдущем параграфе, дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $-t$. Интегрированию изображения соответствует обратное действие — деление оригинала на $-t$. При этом в качестве постоянной начальной точки интегрирования следует взять точку $s = \infty$. Заменяв \int_{∞}^s на $-\int_s^{\infty}$, мы получим:

$$\frac{F(t)}{t} \circlearrowleft \int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma$$

Это правило основано на предположении, что функция $F(t)/t$ обладает изображением, следовательно, функция $F(t)$ и подавно имеет изображение. В качестве пути интегрирования в интеграле \int_s^{∞} можно взять любой исходящий из точки s луч, образующий с вещественной осью острый угол.

Правило VIII, в противоположность остальным правилам, применяется крайне редко и приводится здесь только ради полноты.

§ 8. Умножение и свертка

До сих пор мы занимались операциями, производимыми над *одной* функцией. Теперь рассмотрим операции над комбинациями нескольких функций.

Сумме конечного числа оригиналов отвечает сумма соответствующих изображений. Этот факт настолько очевиден, что мы не будем формулировать его в виде особого правила ¹⁾. Следующей наиболее простой комбинацией является произведение. Начнем с произведения изображений.

Правило IX (теорема свертывания)

Произведению изображений $f_1(s) \cdot f_2(s)$ соответствует своеобразная интегральная комбинация функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$, часто встречающаяся в физике ²⁾, а именно

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau. \quad (8.1)$$

Эта интегральная комбинация называется *сверткой* и символически обозначается через $F_1 * F_2$ (читается: функция F_1 , свернутая с функцией F_2). Таким образом,

$$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau.$$

Указанный символ свертки, напоминающий символ произведения, практически удобен потому, что свертка ведет себя так же, как и произведение. А именно: она обладает *свойством коммутативности*, т. е.

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1,$$

или

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t F_2(\tau) F_1(t - \tau) d\tau, \quad (8.2)$$

¹⁾ Конечно, для бесконечно большого числа слагаемых такое соответствие имеет место не всегда. См. по этому поводу § 22.

²⁾ Если, например, в течение времени, длящегося от $\tau = 0$ до $\tau = t$, действуют некоторые факторы $F_1(t)$, то их суммарный эффект в простейшем случае равен $\int_0^t F_1(\tau) d\tau$. Но если каждому фактору приписать коэффициент затухания F_2 , зависящий от промежутка времени, прошедшего между моментом τ возникновения фактора и моментом t наблюдения, следовательно, от $t - \tau$, то суммарный эффект всех факторов будет определяться интегралом (8.1).

и свойством ассоциативности, т. е.

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3). \quad (8.3)$$

Следовательно, свертка нескольких функций

$$F_1 * F_2 * \dots * F_n$$

всегда дает одинаковый результат независимо от того, в каком порядке выполняется свертывание.

Итак, мы имеем следующее правило, устанавливающее соответствие между сверткой оригиналов и произведением изображений:

$$\boxed{F_1 * F_2 \circ \bullet f_1 \cdot f_2} \quad (8.4)$$

Это правило основано на предположении, что существуют интегралы Лапласа от функций F_1 и F_2 и что по крайней мере один из них абсолютно сходится. В таком случае интеграл Лапласа от свертки $F_1 * F_2$ сходится автоматически.

Правило IX является после правила V важнейшим для приложений.

Правило X (теорема комплексного свертывания)

Произведению двух оригиналов соответствует свертка изображений, которая, однако, имеет более сложный вид, чем свертка в правиле IX. Правило для перехода от операции умножения в пространстве оригиналов к операции свертки в пространстве изображений применяется на практике значительно реже, чем правило IX, но мы его приводим не только ради полноты изложения, но также потому, что в последнее время оно нашло применение в технике регулирования (при так называемой квадратичной оценке). Умножение оригиналов и свертка изображений связаны между собой следующим соответствием:

$$\boxed{F_1(t) \cdot F_2(t) \circ \bullet \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \int_{x_1 - j\infty}^{x_1 + j\infty} f_1(\sigma) f_2(s - \sigma) d\sigma \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{x_2 - j\infty}^{x_2 + j\infty} f_1(s - \sigma) f_2(\sigma) d\sigma \end{cases}} \quad (8.5)$$

Комплексные интегралы в правой части этих соотношений распространяются вдоль вертикальных прямых в комплексной плоскости. При этом в первом интеграле точку x_1 на вещественной оси и комплексную точку s следует взять настолько далеко вправо, чтобы для точки σ , перемещающейся вдоль вертикальной прямой, соединяющей точки $x_1 - j\infty$ и $x_1 + j\infty$, соблюдались два условия:

во-первых, чтобы σ оставалось в полуплоскости сходимости изображения $\mathfrak{L}\{F_1\}$, и, во-вторых, чтобы $s - \sigma$ оставалось в полуплоскости сходимости изображения $\mathfrak{L}\{F_2\}$. То же самое должно иметь место и для второго интеграла. Мы не останавливаемся на точных условиях применимости правила X, так как они очень далеко выходят за пределы области интересов практиков. Правило X применяется главным образом в тех случаях, когда имеется возможность вычислить комплексные интегралы, определяющие свертку изображений, посредством применения теоремы вычетов.

Если функции f_1 и f_2 таковы, что можно положить $s = 0$ и $x_1 = 0$, то правило X приводит к равенству

$$\int_0^{\infty} F_1(t) F_2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} f_1(\sigma) f_2(-\sigma) d\sigma. \quad (8.6)$$

Если, в частности, $F_1 = F_2 = F$, то

$$\int_0^{\infty} F^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} f(\sigma) f(-\sigma) d\sigma. \quad (8.7)$$

В следующих главах мы покажем, как преобразование Лапласа позволяет очень удобно решать некоторые типы функциональных уравнений.

ГЛАВА 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 9. Дифференциальное уравнение первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, но с произвольной *возмущающей*, или *возбуждающей функцией* $F(t)$:

$$Y' + c_0 Y = F(t). \quad (9.1)$$

Обозначая отдельные члены этого уравнения большими буквами, мы подчеркиваем, согласно сделанному ранее условию, что уравнение задано в пространстве оригиналов. До сих пор мы применяли преобразование Лапласа только к функциям. Применим его теперь непосредственно к уравнению (9.1) и будем говорить, что для заданного *исходного уравнения* мы ищем *изображающее уравнение*. Очевидно, что для этого прежде всего следует умножить обе части исходного уравнения на e^{-st} и проинтегрировать от 0 до ∞ . Однако для более быстрого приобретения навыка в выполнении преобразования Лапласа следует вместо явного введения интеграла Лапласа пользоваться только его символом \mathfrak{L} ; тогда мы будем иметь:

$$\mathfrak{L}\{Y'\} + c_0 \mathfrak{L}\{Y\} = \mathfrak{L}\{F\}. \quad (9.2)$$

Второй и важнейший шаг преобразования состоит в том, что применяется правило V, и $\mathfrak{L}\{Y'\}$ выражается через $\mathfrak{L}\{Y\}$, причем одновременно вводятся вместо больших букв малые. В результате мы получаем:

$$sY(s) - Y(+0) + c_0 Y(s) = f(s). \quad (9.3)$$

Конечно, после некоторых упражнений можно не прибегать к $\bar{\mathfrak{L}}$ записи уравнения (9.2) и вместо этого переходить от уравнения (9.1) непосредственно к уравнению (9.3), говоря при этом: «Я преобразую исходное уравнение в изображающее уравнение» или «я отображаю исходное уравнение в пространство изображений».

В изображающем уравнении (9.3) бросаются в глаза две его особенности: во-первых, оно является линейным *алгебраическим уравнением* относительно $Y(s)$, т. е. представляет собой в математическом

отношении нечто несравненно более простое, чем первоначальное дифференциальное уравнение; во-вторых, оно содержит в себе значение $Y(+0)$. Последняя особенность, как мы сейчас увидим, для нас особенно выгодна. В самом деле, для того чтобы из бесконечно большого числа решений дифференциального уравнения отобрать вполне определенное решение, необходимо задать значение функции $Y(t)$ в какой-либо точке. В приложениях это делается обычно для *начальной точки* $t=0$, и поэтому соответствующее значение $Y(+0)$ функции $Y(t)$ называется *начальным значением*. При этом имеется в виду, что переход от начального значения к соседним значениям функции $Y(t)$ совершается непрерывно или, наоборот, что это начальное значение является предельным значением, к которому неограниченно приближается функция $Y(t)$, когда в решении переменная t стремится к нулю справа. Следовательно, мы имеем здесь дело именно со значением $Y(+0)$, т. е. с тем начальным значением, которое входит в правило V (см. в связи с этим знак предостережения на стр. 23 наверху). Возвращаясь к уравнению (9.3) мы видим, что начальное значение, необходимое для придания определенности решению дифференциального уравнения, вошло в изображающее уравнение само собой и поэтому учитывается в дальнейшем автоматически. Это обстоятельство придает методу решения дифференциальных уравнений посредством преобразования Лапласа значительное преимущество перед классическим методом, при использовании которого сначала отыскивается так называемое общее решение, зависящее от произвольной постоянной, а затем эта постоянная определяется так, чтобы функция $Y(t)$ при $t \rightarrow 0$ приняла предписанное значение. [Конечно, можно сказать, что при применении преобразования Лапласа также появляется постоянная; однако эта постоянная уже заранее определенным образом связана с решением, а именно, она равна $Y(+0)$.]

Решение изображающего уравнения (9.3) получается сразу и имеет вид

$$y(s) = f(s) \frac{1}{s+c_0} + Y(+0) \frac{1}{s+c_0}. \quad (9.4)$$

Таким образом, изображение $y(s)$ искомой функции $Y(t)$ найдено, и остается только найти *соответствующий этому изображению оригинал*. Для этой цели можно было бы воспользоваться формулой обращения, т. е. комплексным интегралом (1.12). Однако такого способа определения оригинала следует по возможности избегать и вместо этого поступать так же, как это делается при необходимости вычислить какой-либо интеграл. Известно, что в таких случаях не производят вычисления интеграла на основании его определения, как предела суммы. Вместо этого обращаются к таблице заранее вычисленных интегралов и если это сразу не ведет к цели, то пытаются так разложить или преобразовать подынтегральное

выражение, чтобы можно было свести вычисление к известным интегралам. Совершенно аналогично поступают и в нашем случае: обращаются к *таблице соответствий* между изображениями и оригиналами (см. приложение II в конце книги) и отыскивают в ней для найденного изображения соответствующий оригинал. Если же в таблице найденное изображение отсутствует, то делают попытку построить оригинал из имеющихся в таблице функций путем использования «грамматических правил» преобразования Лапласа.

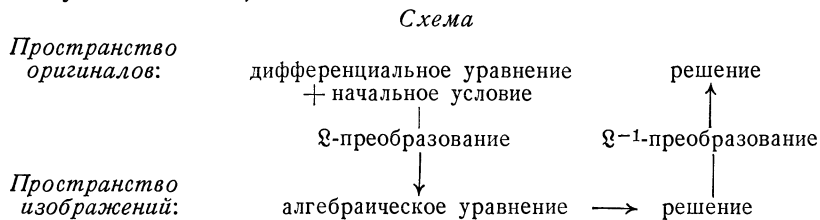
В случае изображения (9.4) оригинал отыскивается очень просто. А именно, изображение $1/(s+c_0)$ имеется в таблице II, 1 под № 2 и ему соответствует оригинал $e^{-c_0 t}$. Таким образом, для второго слагаемого решения $y(s)$ оригинал находится сразу. Что касается первого слагаемого, то оно представляет собой произведение двух изображений, поэтому ему соответствует, согласно правилу IX, свертка оригиналов. Обоим слагаемым вместе соответствует оригинал

$$\begin{aligned} Y(t) &= F(t) * e^{-c_0 t} + Y(+0) e^{-c_0 t} = \\ &= e^{-c_0 t} \int_0^t F(\tau) e^{c_0 \tau} d\tau + Y(+0) e^{-c_0 t}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

что и представляет собой решение дифференциального уравнения (9.1) при заданном начальном значении функции $Y(t)$.

Подчеркнем, что мы сразу нашли решение неоднородного уравнения (с возмущающим членом F), в то время как при пользовании классическим методом сначала решается однородное уравнение (с $F \equiv 0$) и только затем, путем вариации постоянных, отыскивается решение неоднородного уравнения.

Рассмотренный метод решения можно наглядно изобразить в виде следующей схемы¹⁾:



Эта схема показывает, что непосредственное решение дифференциального уравнения, заданного вместе с начальным условием в пространстве оригиналов, заменяется косвенным решением в пространстве изображений, а именно: сначала от заданного дифференциального уравнения мы переходим посредством прямого преобразования

¹⁾ Решение путем преобразования Лапласа других функциональных уравнений изображается такой же схемой.

Лапласа к изображающему уравнению, которое является алгебраическим уравнением, а затем, решив изображающее уравнение, переходим посредством обратного преобразования Лапласа назад в пространство оригиналов и получаем при этом решение первоначальной задачи.

Из формулы (9.5) мы видим, что изображение $f(s)$ возмущающей функции $F(t)$ понадобилось нам только для вывода результата, сам же результат, т. е. решение $Y(t)$ получается без предварительного нахождения изображения $f(s)$. Тем не менее во многих случаях практически выгоднее, вместо вычисления свертки, т. е. интеграла в формуле (9.5), найти изображение $f(s)$, а затем, рассматривая выражение $f(s)/(s+c_0)$ как *единое изображение*, перейти от него посредством обратного преобразования Лапласа назад в пространство оригиналов. Пусть, например, $F(t) \equiv U(t)$, следовательно,

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

и

$$\frac{f(s)}{s+c_0} = \frac{1}{s(s+c_0)}.$$

Это изображение имеется в таблице II, 1 под № 7, и ему соответствует оригинал

$$\frac{1}{c_0} (1 - e^{-c_0 t}).$$

Результат получается так же просто и в тех случаях, когда $F(t)$ представляет собой степенную или показательную функцию. Остановимся подробнее на случае, когда возмущающей функцией $F(t)$ является *синусоидальное колебание* $e^{j\omega t}$. На основании примера 3, рассмотренного в § 3, мы имеем:

$$\frac{f(s)}{s+c_0} = \frac{1}{(s-j\omega)(s+c_0)}.$$

Это изображение значится в таблице II, 1 под № 11, и ему соответствует оригинал

$$\frac{1}{c_0 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-c_0 t}).$$

Представим это выражение в виде

$$\frac{c_0 - j\omega}{c_0^2 + \omega^2} (\cos \omega t + j \sin \omega t - e^{-c_0 t})$$

и разложим его на вещественную и мнимую части; мы получим:

$$\text{вещественная часть} = \frac{1}{c_0^2 + \omega^2} [\omega \sin \omega t + c_0 (\cos \omega t - e^{-c_0 t})],$$

$$\text{мнимая часть} = \frac{1}{c_0^2 + \omega^2} [c_0 \sin \omega t - \omega (\cos \omega t - e^{-c_0 t})].$$

Колебания, происходящие в действительности, определяются только вещественной частью комплексного решения. Для получения полного решения к найденной вещественной части необходимо добавить член $Y(+0)e^{-c.t}$. При положительном c_0 члены полного решения, содержащие $e^{-c.t}$, с увеличением t затухают до нуля, и остается только гармоническое колебание с такой же угловой частотой, как у возмущающего колебания, но с другими амплитудой и фазой.

§ 10. Дифференциальное уравнение второго порядка

В практических расчетах дифференциальное уравнение второго порядка часто записывается в виде

$$Y'' + 2D\omega Y' + \omega^2 Y = F(t),$$

в связи с чем в таблице II, 4, приложенной в конце книги, этому виду записи уделено особое внимание. Однако сейчас, имея в виду дальнейший переход к решению дифференциальных уравнений высших порядков, воспользуемся записью

$$Y'' + c_1 Y' + c_0 Y = F(t). \quad (10.1)$$

Изображающим уравнением согласно правилу V будет

$$[s^2 y - Y(+0)s - Y'(+0)] + c_1 [s y - Y(+0)] + c_0 y = f(s).$$

В него входят *два начальных значения*, а именно начальное значение самой функции Y и начальное значение ее первой производной Y' . Именно столько значений и должно быть задано для того, чтобы решение дифференциального уравнения второго порядка было однозначно определено. Изображающее уравнение опять является линейным алгебраическим уравнением. Его решение получается сразу и имеет вид

$$y(s) = f(s) \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0} + Y(+0) \frac{s + c_1}{s^2 + c_1 s + c_0} + Y'(+0) \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0}. \quad (10.2)$$

Хотя оригиналы, соответствующие отдельным слагаемым этого решения, можно взять прямо из таблицы II, 1, мы все же покажем, как их можно вычислить. Для этой цели следует выполнить разложение отдельных слагаемых изображения (10.2) на простейшие дроби совершенно так же, как это делается в интегральном исчислении при интегрировании дробно-рациональных функций. Дроби, входящие в формулу (10.2), суть рациональные функции, в которых степень числителя ниже степени знаменателя. Такие функции могут быть разложены на простейшие дроби следующим образом. Найдем нули α_1 и α_2 многочлена, входящего в знаменатель функций, т. е. представим этот многочлен в виде произведения двух множителей:

$$s^2 + c_1 s + c_0 = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2).$$

Если α_1 и α_2 различны, что мы сначала и предположим, то дробно-рациональная функция с знаменателем $s^2 + c_1s + c_0$ может быть представлена в виде суммы двух дробей

$$\frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2}.$$

Применим такое разложение сначала к первой дробно-рациональной функции из формулы (10.2) и напомним:

$$\frac{1}{s^2 + c_1s + c_0} = \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2}. \quad (10.3)$$

Для примитивного определения пока неизвестных коэффициентов d_1 и d_2 сложим обе дроби в правой части равенства ¹⁾:

$$\frac{1}{s^2 + c_1s + c_0} = \frac{(d_1 + d_2)s - (d_1\alpha_2 + d_2\alpha_1)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}.$$

Приравняв множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, мы получим для определения коэффициентов d_1 и d_2 уравнения

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 0, \\ \alpha_2 d_1 + \alpha_1 d_2 &= -1, \end{aligned}$$

из которых найдем:

$$d_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad d_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Так как для каждой из полученных простейших дробей оригиналы известны, то оригиналом всей дробно-рациональной функции (10.3) будет:

$$\frac{1}{s^2 + c_1s + c_0} \bullet \circ \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}), \quad (10.4)$$

причем

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{c_1}{2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}.$$

Если $c_1^2/4 - c_0 < 0$, то α_1 и α_2 суть комплексно сопряженные величины и поэтому, используя соответствие (10.4), мы получим оригинал сначала в комплексной форме. Для придания ему вещественной формы следует заменить показательные функции тригонометрическими. Однако можно получить оригинал сразу в вещественной форме, если учесть, что

$$\frac{1}{s^2 + c_1s + c_0} = \frac{1}{\left(s + \frac{c_1}{2}\right)^2 + \left(c_0 - \frac{c_1^2}{4}\right)}$$

¹⁾ На стр. 40 мы познакомимся с более изящным способом определения этих коэффициентов.

и затем воспользоваться соответствием

$$\frac{1}{s^2 + k^2} \bullet \circ \frac{1}{k} \sin kt,$$

найденным в примере 5 § 3 (см. также соответствие № 5 в таблице II, 1). Применив это соответствие к нашему случаю, мы сначала получим:

$$\frac{1}{s^2 + \left(c_0 - \frac{c_1^2}{4}\right)} \bullet \circ \frac{1}{\sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}}} \sin \sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}} t,$$

а затем на основании правила IV (теорема затухания) найдем (см. также соответствие № 13 в таблице II, 1):

$$\frac{1}{\left(s + \frac{c_1}{2}\right)^2 + \left(c_0 - \frac{c_1^2}{4}\right)} \bullet \circ \frac{1}{\sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}}} e^{-\frac{c_1}{2} t} \sin \sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}} t. \quad (10.5)$$

При выводе формул (10.4) и (10.5) мы предполагали, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Если же $\alpha_1 = \alpha_2$, т. е. $(c_1^2/4) - c_0 = 0$, то обратное преобразование выполняется совсем просто. В самом деле, так как теперь

$$\frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0} = \frac{1}{(s - \alpha_1)^2},$$

то мы можем воспользоваться соответствием

$$\frac{1}{s^2} \bullet \circ t,$$

выведенным в примере 6 § 3. Применив к нему опять правило IV (см. также соответствие № 9 в таблице II, 1), мы получим:

$$\frac{1}{(s - \alpha_1)^2} \bullet \circ t e^{\alpha_1 t}. \quad (10.6)$$

Таким образом, мы нашли оригинал для дробно-рациональной функции $1/(s^2 + c_1 s + c_0)$, входящей в изображение (10.2), для всех возможных случаев.

Перейдем к отысканию оригинала для второй дробно-рациональной функции из изображения (10.2). Представив ее в виде суммы простейших дробей, мы получим:

$$\frac{s + c_1}{s^2 + c_1 s + c_0} = \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2} = \frac{(d_1 + d_2)s - (d_1\alpha_2 + d_2\alpha_1)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)},$$

следовательно, для определения коэффициентов d_1 и d_2 будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 1, \\ \alpha_2 d_1 + \alpha_1 d_2 &= -c_1, \end{aligned}$$

откуда, имея в виду, что $-c_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, найдем:

$$d_1 = \frac{-\alpha_1 - c_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad d_2 = \frac{\alpha_2 + c_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Определение оригинала производится так же, как и в предыдущем случае. Так, например, если $(c_1^2/4) - c_0 > 0$, то

$$\frac{s + c_1}{s^2 + c_1s + c_0} \circ \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}). \quad (10.7)$$

Обозначим оригиналы в правых частях формул (10.4) и (10.7) для сокращения записи через $Q(t)$ и $Q_1(t)$; тогда, перейдя от изображения (10.2) к оригиналу и применив при этом правило IX (теорема свертывания), мы получим:

$$Y(t) = F(t) * Q(t) + Y(+0)Q_1(t) + Y'(+0)Q(t). \quad (10.8)$$

В практических расчетах выведенные здесь общие формулы не должны применяться; вместо этого следует каждый раз вновь выполнять указанные выше отдельные шаги решения.

Численный пример

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Y'' + 10Y' + 74Y = 28 \sin 4t$$

с начальными условиями

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 2.$$

Изображающим уравнением будет

$$s^2 y - 2 + 10sy + 74y = \frac{112}{s^2 + 16}$$

[в рассматриваемом случае целесообразно использовать изображение возмущающей функции $F(t)$ в явном виде]. Решив это уравнение, мы получим:

$$y = \frac{112}{(s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74)} + \frac{2}{s^2 + 10s + 74}.$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое и найдем корни уравнения

$$s^2 + 10s + 74 = 0.$$

Они равны

$$\alpha_1 = -5 + 7j, \quad \alpha_2 = -5 - 7j,$$

следовательно, мы должны принять, что

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 74} = \frac{d_1}{s + 5 - 7j} + \frac{d_2}{s + 5 + 7j}.$$

Приравняв множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, мы получим уравнения для определения коэффициентов d_1 и d_2 :

$$d_1 + d_2 = 0,$$

$$(5 + 7j) d_1 + (5 - 7j) d_2 = 1,$$

из которых найдем:

$$d_1 = \frac{1}{14j}, \quad d_2 = -\frac{1}{14j}.$$

Изображению

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 74} = \frac{1}{s + 5 - 7j} - \frac{1}{s + 5 + 7j}$$

соответствует оригинал

$$Q(t) = \frac{1}{14j} [e^{(-5+7j)t} - e^{(-5-7j)t}] = \frac{1}{7} e^{-5t} \sin 7t.$$

При достаточном навыке в вычислениях к этому результату можно прийти, минуя комплексные величины. В самом деле, нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 74} = \frac{1}{7} \frac{7}{(s+5)^2 + 49}.$$

На основании примера 5 § 3 мы имеем:

$$\frac{7}{s^2 + 49} \bullet \circ \sin 7t.$$

Применив теперь теорему затухания, мы сразу получим функцию $Q(t)$.

Оригинал, соответствующий первому слагаемому изображения u , можно было бы вычислить на основании теоремы свертывания. Однако поскольку это слагаемое, включающее в себя в явном виде изображение $f(s)$ возмущающей функции $F(t)$, представляет собой дробно-рациональную функцию, целесообразно воспользоваться опять разложением на простейшие дроби. Знаменатель имеет четыре различных нуля

$$4j, \quad -4j, \quad -5 + 7j, \quad -5 - 7j,$$

поэтому разложение на простейшие дроби должно иметь вид

$$\frac{112}{(s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74)} = \frac{d_1}{s - 4j} + \frac{d_2}{s + 4j} + \frac{d_3}{s + 5 - 7j} + \frac{d_4}{s + 5 + 7j},$$

Приведя к общему знаменателю правую часть этого равенства, мы получим в числителе:

$$\begin{aligned} & d_1(s+4j)(s^2+10s+74) + d_2(s-4j)(s^2+10s+74) + \\ & \quad + d_3(s^2+16)(s+5+7j) + d_4(s^2+16)(s+5-7j) = \\ & = s^3(d_1+d_2+d_3+d_4) + \\ & \quad + s^2[(10+4j)d_1 + (10-4j)d_2 + (5+7j)d_3 + (5-7j)d_4] + \\ & \quad + s[(74+40j)d_1 + (74-40j)d_2 + 16d_3 + 16d_4] + \\ & \quad + [296jd_1 - 296jd_2 + (80+112j)d_3 + (80-112j)d_4], \end{aligned}$$

следовательно, d_1 , d_2 , d_3 и d_4 должны удовлетворять линейным уравнениям

$$\begin{aligned} & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0, \\ & (10+4j)d_1 + (10-4j)d_2 + (5+7j)d_3 + (5-7j)d_4 = 0, \\ & (74+40j)d_1 + (74-40j)d_2 + 16d_3 + 16d_4 = 0, \\ & 296jd_1 - 296jd_2 + (80+112j)d_3 + (80-112j)d_4 = 112. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, мы найдем:

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{7}{1241}(20+29j), & d_2 &= -\frac{7}{1241}(20-29j), \\ d_3 &= \frac{4}{1241}(35+4j), & d_4 &= \frac{4}{1241}(35-4j). \end{aligned}$$

Таким образом, первому слагаемому изображения u соответствует оригинал

$$\begin{aligned} & -\frac{7}{1241}(20+29j)e^{4jt} - \frac{7}{1241}(20-29j)e^{-4jt} + \\ & \quad + \frac{4}{1241}(35+4j)e^{(-5+7j)t} + \frac{4}{1241}(35-4j)e^{(-5-7j)t} = \\ & = -\frac{7}{1241}[20(e^{4jt} + e^{-4jt}) + 29j(e^{4jt} - e^{-4jt})] + \\ & \quad + \frac{4}{1241}e^{-5t}[35(e^{7jt} + e^{-7jt}) + 4j(e^{7jt} - e^{-7jt})] = \\ & = -\frac{14}{1241}(20\cos 4t - 29\sin 4t) + \frac{8}{1241}e^{-5t}(35\cos 7t - 4\sin 7t). \end{aligned}$$

Выполняя в рассмотренных примерах разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби, мы применяли каждый раз примитивный способ: складывали дроби и, приравнивая затем множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, получали систему линейных уравнений для определения коэффициентов d_1, d_2, \dots . Решение такой системы уравнений при большом числе неизвестных требует много времени и весьма утомительно;

поэтому в следующем параграфе мы покажем на примере дифференциального уравнения любого порядка, как можно выполнять разложение на простейшие дроби значительно более простым способом.

§ 11. Дифференциальное уравнение n -го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка

$$Y^{(n)} + c_{n-1}Y^{(n-1)} + \dots + c_1Y' + c_0Y = F(t) \quad (11.1)$$

[как и в ранее рассмотренных примерах мы принимаем, для упрощения последующих общих формул, что коэффициент при высшей производной $Y^{(n)}$ равен единице; если бы он не был равен единице, то, разделив на него все члены уравнения, мы привели бы последнее опять к виду (11.1)]. Предположим сперва, что *все начальные значения равны нулю*, т. е.

$$Y(+0) = Y'(+0) = \dots = Y^{(n-1)}(+0) = 0, \quad (11.2)$$

Тогда изображающим уравнением, на основании правила V, будет

$$s^ny + c_{n-1}s^{n-1}y + \dots + c_1sy + c_0y = f(s).$$

Его решение, если ввести для сокращения записи обозначение

$$s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0 = p(s),$$

имеет вид

$$y(s) = \frac{1}{p(s)} f(s).$$

Найдя теперь оригинал для изображения

$$\frac{1}{p(s)} = q(s)$$

и применив затем теорему свертывания, мы сразу получим искомое решение $Y(t)$ заданного дифференциального уравнения.

Отыскание оригинала для изображения $q(s)$ выполняется по-прежнему посредством разложения $q(s)$ на простейшие дроби. Для этого прежде всего определим нули $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ многочлена $p(s)$, т. е. представим $p(s)$ в виде произведения линейных множителей¹⁾

$$p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n). \quad (11.3)$$

В § 10 при решении дифференциального уравнения второго порядка ($n=2$) мы уже видели, что наличие одинаковых нулей требует особого подхода; поэтому и здесь мы рассмотрим случай одинаковых нулей отдельно,

¹⁾ Определение нулей является первым шагом также в классическом методе решения дифференциального уравнения (11.1). Уравнение $p(s) = 0$, получающееся при пользовании этим методом, называется характеристическим уравнением,

Первый случай: все нули α_v различны.

При неравных α_v разложение функции $q(s)$ на простейшие дроби имеет вид

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{d_n}{s - \alpha_n}.$$

Оно показывает, что функция $q(s)$ имеет простые полюсы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Коэффициенты d_1, d_2, \dots, d_n могут быть определены значительно проще, чем это было сделано в § 10, следующим образом. Умножим последнее равенство на $s - \alpha_1$; тогда первое слагаемое в правой части будет состоять только из коэффициента d_1 , в то время как остальные слагаемые будут содержать множитель $s - \alpha_1$. Если мы будем приближать s к α_1 , то все слагаемые в правой части, кроме первого, исчезнут, т. е. в правой части останется только коэффициент d_1 без всякого множителя. Найдем теперь предел, к которому стремится левая часть при $s \rightarrow \alpha_1$. Имея в виду, что $p(\alpha_1) = 0$, мы получим:

$$\lim_{s \rightarrow \alpha_1} \frac{s - \alpha_1}{p(s)} = \lim_{s \rightarrow \alpha_1} \frac{1}{\frac{p(s) - p(\alpha_1)}{s - \alpha_1}} = \frac{1}{p'(\alpha_1)},$$

следовательно,

$$d_1 = \frac{1}{p'(\alpha_1)}.$$

Аналогичным образом мы найдем остальные коэффициенты d_2, \dots, d_n :

$$d_2 = \frac{1}{p'(\alpha_2)}, \dots, d_n = \frac{1}{p'(\alpha_n)},$$

и разложение функции $q(s)$ на простейшие дроби будет иметь вид

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_v)} \frac{1}{s - \alpha_v}. \quad (11.4)$$

Таким образом, для разложения функции $q(s)$ на простейшие дроби следует составить производную многочлена $p(s)$ и вычислить значения $p'(\alpha_v)$, что гораздо проще решения системы линейных уравнений, определяющих коэффициенты d_1, \dots, d_n .

Для практических вычислений иногда удобно использовать следующие формулы. Согласно правилу дифференцирования произведения мы имеем:

$$p'(s) = (s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n) + (s - \alpha_1)(s - \alpha_3) \dots (s - \alpha_n) + \dots,$$

следовательно,

$$p'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_1 - \alpha_n),$$

$$p'(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_n) \text{ и т. д.}$$

Применим эти формулы к численному примеру, рассмотренному в § 10. Мы имели там

$$p(s) = (s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74),$$

поэтому

$$p'(\alpha_1) = 8j(5 - 3j)(5 + 11j) = -320 + 464j,$$

$$\frac{1}{p'(\alpha_1)} = \frac{1}{-320 + 464j} = \frac{-320 - 464j}{320^2 + 464^2} = \frac{-20 - 29j}{19\,856}.$$

Так как в том примере при функции $1/p(s)$ был еще множитель 112, то только что вычисленный коэффициент необходимо умножить на 112, после чего мы получим то же значение для d_1 , что и на стр. 38, но со значительно меньшей затратой времени на вычисления.

Вернемся к формуле (11.4). Изображению $q(s)$ соответствует оригинал

$$Q(t) = \sum_{v=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_v)} e^{\alpha_v t} \quad (11.5)$$

следовательно, решением дифференциального уравнения (11.1) при начальных условиях (11.2) будет функция

$$Y(t) = Q(t) * F(t). \quad (11.6)$$

Мы видим, что и теперь для получения решения не нужно вычислять изображение возмущающей функции. Но если это изображение представляет собой дробно-рациональную функцию, то все же целесообразно, как об этом уже было сказано на стр. 37, вычислить его и затем, рассматривая произведение

$$\frac{1}{p(s)} f(s)$$

как единое изображение, разложить последнее на простейшие дроби. Наконец, перейдя от этого единого изображения к оригиналу, мы получим решение дифференциального уравнения без вычисления свертки в формуле (11.6).

Именно так следует поступить, например, в том случае, когда возмущающая функция представляет собой *единичный скачок* $U(t)$. Этот специальный вид возмущающей функции является практически наиболее важным. Соответствующее решение $Y_U(t)$ называется *переходной функцией* системы, описываемой рассматриваемым дифференциальным уравнением. Так как

$$\mathfrak{L}\{U\} = \frac{1}{s},$$

то изображением решения будет

$$y_U(s) = \frac{1}{sp(s)},$$

Мы видим, что теперь в знаменателе к нулям α_ν многочлена $p(s)$ добавляется еще нуль $s=0$. В связи с этим напомним, что при выводе разложения (11.4) на простейшие дроби было сделано предположение, что все нули в знаменателе различны. Поэтому сейчас мы должны ввести дополнительное условие, а именно, считать, что ни один из нулей α_ν функции $p(s)$ численно не равен нулю. Повторив предыдущие вычисления на этот раз для изображения $sp(s)$ вместо $p(s)$, мы получим его разложение на простейшие дроби в следующем виде:

$$y_U(s) = \frac{1}{sp(s)} = \frac{1}{p(0)} \frac{1}{s} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu p'(\alpha_\nu)} \frac{1}{s - \alpha_\nu}.$$

Перейдя к оригиналу, мы найдем передаточную функцию

$$Y_U(t) = \frac{1}{p(0)} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu p'(\alpha_\nu)} e^{\alpha_\nu t} \quad (11.7)$$

В электротехнике эта формула известна под названием *разложения Хевисайда*.



Не следует забывать, что полученное решение основано на начальных условиях (11.2), а также на предположении, что все α_ν различны и при этом ни одно из них не равно нулю.

Важное значение переходной функции состоит в том, что с ее помощью можно найти решение дифференциального уравнения для любой возмущающей функции. В самом деле, преобразуем изображение $y(s)$ следующим образом:

$$y(s) = \frac{1}{p(s)} f(s) = s \frac{1}{sp(s)} f(s) = s [y_U(s) f(s)].$$

Применив правила V и IX, перейдем от этого изображения к оригиналу, т. е. к искомому решению $Y(t)$; мы получим:

$$Y(t) = \frac{d}{dt} [Y_U * F] \quad (11.8)$$

или, если ввести операцию дифференцирования под знак интеграла,

$$Y(t) = Y'_U * F \quad (11.9)$$

Равенство (11.9) называется *формулой Дюамеля*.



Если мы применим решение (11.6), в котором функция $Q(t)$ определяется равенством (11.5), или решение (11.7) по ошибке к случаю, когда не все нули различны, то это сразу же обнаружится, так

как формулы (11.5) или (11.7) потеряют смысл. В самом деле, пусть, например, α есть двукратный нуль многочлена $p(s)$, т. е.

$$p(s) = (s - \alpha)^2 p_1(s).$$

Тогда мы будем иметь:

$$p'(s) = 2(s - \alpha)p_1(s) + (s - \alpha)^2 p_1'(s),$$

следовательно,

$$p'(\alpha) = 0.$$

Внося это значение в формулу (11.5) или (11.7), мы увидим, что в знаменателе появится нуль, т. е. каждая из формул потеряет смысл.

Численный пример

Рассмотрим вновь дифференциальное уравнение, приведенное на стр. 36, но теперь с правой частью, равной $U(t)$, и с нулевыми начальными значениями. Следовательно, будем искать переходную функцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$Y'' + 10Y' + 74Y = U(t)$$

с начальными условиями

$$Y(0) = Y'(0) = 0.$$

Мы имеем:

$$p(s) = s^2 + 10s + 74, \quad p'(s) = 2s + 10,$$

$$\alpha_1 = -5 + 7j, \quad \alpha_2 = -5 - 7j,$$

поэтому

$$p(0) = 74, \quad p'(\alpha_1) = 14j, \quad p'(\alpha_2) = -14j.$$

Согласно формуле (11.7) переходной функцией будет:

$$Y_U(t) = \frac{1}{74} + \frac{1}{(-5 + 7j)14j} e^{(-5+7j)t} + \frac{1}{(-5 - 7j)(-14j)} e^{(-5-7j)t}.$$

Второе и третье слагаемые суть комплексно сопряженные величины, следовательно, их сумма равна удвоенной вещественной части:

$$2 \operatorname{Re} \frac{1}{(-5 + 7j)14j} e^{(-5+7j)t} = \frac{2}{14} e^{-5t} \operatorname{Re} \frac{(-5 - 7j)(-j)}{25 + 49} e^{7jt} =$$

$$= \frac{1}{7 \cdot 74} e^{-5t} \operatorname{Re}(-7 + 5j)(\cos 7t + j \sin 7t) =$$

$$= -\frac{1}{74 \cdot 7} e^{-5t} (7 \cos 7t + 5 \sin 7t),$$

Окончательно мы получаем:

$$Y_U(t) = \frac{1}{74} \left[1 - \frac{1}{7} e^{-5t} (7 \cos 7t + 5 \sin 7t) \right].$$

Производные переходной функции равны

$$Y_U'(t) = \frac{1}{7} e^{-5t} \sin 7t, \quad Y_U''(t) = \frac{1}{7} e^{-5t} (7 \cos 7t - 5 \sin 7t).$$

Подставив найденные $Y_U(t)$, $Y_U'(t)$ и $Y_U''(t)$ в заданное дифференциальное уравнение, мы увидим, что оно действительно удовлетворяется переходной функцией $Y_U(t)$ и при этом $Y_U(0) = Y_U'(0) = 0$.

При $t \rightarrow \infty$ производные Y_U' и Y_U'' стремятся к нулю, а сама функция Y_U — к значению $1/74$, как это и должно быть на основании заданного дифференциального уравнения.

* * *

Наряду с единичным скачком особый интерес представляет возмущающая функция

$$F(t) = e^{j\omega t}.$$

Этой функцией пользуются в тех случаях, когда нужно выяснить, как рассматриваемая физическая система реагирует на возбуждающие колебания *различной угловой частоты* ω . Не будем пока учитывать начальные условия и предположим, что никакого переходного процесса, вызванного включением возмущения и начинающегося в момент времени $t=0$, не происходит, т. е. будем считать, что рассматриваемая физическая система находится все время, от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, в установившемся состоянии. В таком случае можно допустить, что решение дифференциального уравнения с возмущающей функцией $e^{j\omega t}$ в правой части представляет собой периодическую функцию с такой же угловой частотой, как и у возмущающей функции, но с другими амплитудой и фазой. Следовательно, решение надо искать в виде

$$Y(t) = G(\omega) e^{j\omega t},$$

где $G(\omega)$ есть комплексная величина, зависящая от ω . Подставив это выражение $Y(t)$ в дифференциальное уравнение (11.1) с правой частью $F(t) = e^{j\omega t}$, мы получим:

$$G(\omega)(j\omega)^n e^{j\omega t} + c_{n-1}G(\omega)(j\omega)^{n-1} e^{j\omega t} + \dots \\ \dots + c_1 G(\omega)(j\omega) e^{j\omega t} + c_0 G(\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t},$$

или, в сокращенной записи,

$$G(\omega) e^{j\omega t} p(j\omega) = e^{j\omega t},$$

откуда найдем;

$$G(\omega) = \frac{1}{p(j\omega)} = q(j\omega),$$

Таким образом, решением рассматриваемого дифференциального уравнения будет

$$Y(t) = q(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (11.10)$$

Функция $G(\omega) = q(j\omega)$, представляющая собой отношение

$$\frac{Y(t)}{e^{j\omega t}},$$

т. е. отношение исследуемой функции $Y(t)$ к возмущающей функции $e^{j\omega t}$, называется *частотной характеристикой* системы. Мы видим, что $G(\omega)$ совпадает с той функцией $q(s)$, которую мы нашли раньше, при применении преобразования Лапласа к решению дифференциального уравнения, но теперь эта функция рассматривается специально вдоль мнимой оси. Следовательно, применение преобразования Лапласа к решению дифференциального уравнения дает вместе с решением уравнения также частотную характеристику системы.

Однако для нас представляет интерес не установившееся состояние (11.10), а переходный процесс, вызванный включением возмущения $F(t) = e^{j\omega t}$ при вполне определенных начальных условиях, например при условиях (11.2). В этом случае решением дифференциального уравнения в соответствии с формулой (11.6) будет:

$$Y(t) = Q(t) * e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \int_0^t e^{-j\omega\tau} Q(\tau) d\tau. \quad (11.11)$$

Это решение не совпадает с решением (11.10), но при некоторых условиях оно все же может быть пригодным. В самом деле, если функция $q(s) = \mathfrak{L}\{Q\}$ сходится также на мнимой оси, что имеет место в том случае, когда полюсы α , функции $q(s)$ лежат влево от мнимой оси, то интеграл

$$q(j\omega) = \mathfrak{L}(Q)_{s=j\omega} = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} Q(\tau) d\tau$$

существует, и поэтому равенству (11.11) можно придать вид

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{j\omega t} \left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} Q(\tau) d\tau - \int_t^{\infty} e^{-j\omega\tau} Q(\tau) d\tau \right] = \\ &= q(j\omega) e^{j\omega t} - e^{j\omega t} \int_t^{\infty} e^{-j\omega\tau} Q(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Второе слагаемое при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, и остается только первое слагаемое, тождественно совпадающее с решением (11.10). Этому слагаемому соответствует то состояние системы, к которому она приходит через достаточно большой промежуток времени после включения возмущения. Следовательно, на практике решение (11.10)

вполне достаточно, за исключением тех случаев, когда требуется знать значения функции $Y(t)$ при малых t , т. е. когда необходимо исследовать колебания в течение переходного процесса.

Мы видим, что полученный результат дает возможность *определять установившееся состояние непосредственно по изображению* $q(s)$, не прибегая к отысканию оригинала этого изображения. В этом состоит особая ценность формулы (11.12), так как иногда точное определение оригинала по формуле (11.11) весьма затруднительно.



Не следует забывать, что возможность использовать решение (11.10) вместо решения (11.11) допустима только в том случае, когда нули α_v функции $p(s)$, т. е. полюсы функции $q(s)$ имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что собственные колебания $e^{\alpha_v t}$ системы при возрастании t затухают, т. е. система является «пассивной» (не обладает внутренними источниками энергии) и сама собой не может начать раскачиваться.

Второй случай: среди нулей α_v имеются одинаковые.

Если среди нулей имеются одинаковые, т. е. кратные, то разложение многочлена $p(s)$ на множители будет иметь вид

$$p(s) = (s - \alpha_1)^{k_1} (s - \alpha_2)^{k_2} \dots,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ суть численно различные нули. В этом случае при разложении многочлена $p(s)$ на простейшие дроби нулю α_1 будет соответствовать не одна-единственная дробь со знаменателем $s - \alpha_1$, а k_1 дробей со знаменателями $s - \alpha_1, (s - \alpha_1)^2, \dots, (s - \alpha_1)^{k_1}$; аналогично и для других нулей, и в результате мы будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(s)} = & \frac{g_1}{s - \alpha_1} + \frac{g_2}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{g_{k_1}}{(s - \alpha_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{h_1}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{h_{k_2}}{(s - \alpha_2)^{k_2}} + \dots \quad (11.13) \end{aligned}$$

Коэффициенты g, h, \dots могут быть выражены через первые, вторые и следующие производные от функции $p(s)$ для значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, однако общие формулы получаются столь сложными, что практически проще выполнять вычисления постепенно, пользуясь схемой приводимого ниже численного примера.

Численный пример

Пусть определение нулей привело к следующему разложению многочлена $p(s)$ на множители:

$$p(s) = (s - 2)^3 (s + 5) (s + 7).$$

Функция $p(s)$ и ее производные для значений α_1, α_2 и α_3 равны

$$\begin{aligned} p(2) = p'(2) = p''(2) = 0, \quad p'''(2) \neq 0, \\ p(-5) = 0, \quad p'(-5) \neq 0, \\ p(-7) = 0, \quad p'(-7) \neq 0. \end{aligned}$$

Разложение на простейшие дроби должно иметь вид

$$\frac{1}{(s-2)^3(s+5)(s+7)} = \frac{g_3}{(s-2)^3} + \frac{g_2}{(s-2)^2} + \frac{g_1}{s-2} + \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

Для того чтобы определить коэффициент g_3 , умножим обе части этого равенства на $(s-2)^3$; мы получим:

$$\frac{1}{(s+5)(s+7)} = g_3 + g_2(s-2) + g_1(s-2)^2 + \frac{h(s-2)^3}{s+5} + \frac{k(s-2)^3}{s+7}.$$

Положив здесь $s=2$, найдем:

$$\frac{1}{7 \cdot 9} = g_3.$$

Перенеся теперь известный член $g_3/(s-2)^3$ в левую часть разложения, придадим ей следующий вид:

$$\frac{1}{(s-2)^3(s+5)(s+7)} - \frac{1}{63(s-2)^3} = \frac{63 - (s+5)(s+7)}{63(s-2)^3(s+5)(s+7)}.$$

Числитель полученной дроби равен

$$-s^2 - 12s + 28 = -(s-2)(s+14),$$

т. е. он содержит множитель $(s-2)$, на который можно сократить дробь, после чего последняя приобретает вид

$$\frac{-(s+14)}{63(s-2)^2(s+5)(s+7)}.$$

Приравняв эту дробь оставшейся правой части разложения $p(s)$, будем иметь:

$$\frac{-(s+14)}{63(s-2)^2(s+5)(s+7)} = \frac{g_2}{(s-2)^2} + \frac{g_1}{s-2} + \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

(Из этого равенства ясно, почему числитель в левой части должен был содержать до сокращения множитель $s-2$; в самом деле, в знаменатель правой части последнего равенства множитель $s-2$ входит в степени не выше второй, следовательно, то же самое должно иметь место и для левой части; но исчезновение в знаменателе левой части одного из множителей $s-2$ могло произойти только вследствие наличия такого же множителя в числителе.)

Теперь, умножив числитель в последнем равенстве на $(s-2)^2$, мы выделим коэффициент g_2 :

$$\frac{-(s+14)}{63(s+5)(s+7)} = g_2 + g_1(s-2) + \frac{h(s-2)^2}{s+5} + \frac{k(s-2)^2}{s+7}.$$

Положив $s=2$, получим:

$$-\frac{16}{63 \cdot 7 \cdot 9} = g_2.$$

Перенеся член $g_2/(s-2)^2$ в левую часть, мы придадим ей вид

$$\frac{-(s+14)}{63(s-2)^2(s+5)(s+7)} + \frac{16}{63^2(s-2)^2} = \frac{-63(s+14) + 16(s+5)(s+7)}{63^2(s-2)^2(s+5)(s+7)}.$$

Числитель этой дроби равен

$$16s^2 + 129s - 322 = (s-2)(16s + 161),$$

поэтому ее можно сократить на $s-2$. Приписав опять правую часть, получим:

$$\frac{16s + 161}{63^2(s-2)(s+5)(s+7)} = \frac{g_1}{s-2} + \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

Умножив это равенство на $s-2$ и положив $s=2$, найдем коэффициент g_1 :

$$\frac{193}{63^2 \cdot 7 \cdot 9} = g_1.$$

Перенеся член $g_1/(s-2)$ в левую часть, будем иметь:

$$\frac{16s + 161}{63^2(s-2)(s+5)(s+7)} - \frac{193}{63^2(s-2)} = \frac{63(16s + 161) - 193(s+5)(s+7)}{63^3(s-2)(s+5)(s+7)}.$$

Числитель этой дроби равен

$$-193s^2 - 1308s + 3388 = -(s-2)(193s + 1694),$$

следовательно, ее можно сократить на $s-2$, после чего мы получим:

$$-\frac{193s + 1694}{63^3(s+5)(s+7)} = \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

Умножив на $s+5$ и положив $s=-5$, мы найдем коэффициент h :

$$-\frac{1}{7^3 \cdot 2} = h.$$

Подставив это значение в предыдущее равенство, получим:

$$-\frac{193s + 1694}{63^3(s+5)(s+7)} = -\frac{729}{63^3 \cdot 2(s+5)} + \frac{k}{s+7}.$$

Наконец, положив $s=0$, найдем коэффициент k :

$$\frac{1}{9^3 \cdot 2} = k.$$

Итак, разложение функции $1/p(s)$ на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{1}{(s-2)^3(s+5)(s+7)} = \frac{1}{7 \cdot 9(s-2)^3} - \frac{16}{7^2 \cdot 9^2(s-2)^2} - \frac{193}{7^3 \cdot 9^3(s-2)} - \frac{1}{7^3 \cdot 2(s+5)} + \frac{1}{9^3 \cdot 2(s+7)}.$$

Перейдя от изображения (11.13) в пространство оригиналов, мы получим показательные функции, умноженные на степени (см. соответствия № 2, 9, 43 в таблице II, 1):

$$Q(t) = e^{\alpha_1 t} \left(g_1 + g_2 \frac{t}{1!} + \dots + g_{k_1} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \right) + e^{\alpha_2 t} \left(h_1 + h_2 \frac{t}{1!} + \dots \right) + \dots \quad (11.14)$$

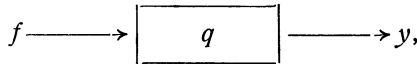
Внеся это значение $Q(t)$ в формулу (11.6), мы найдем решение заданного дифференциального уравнения.

* * *

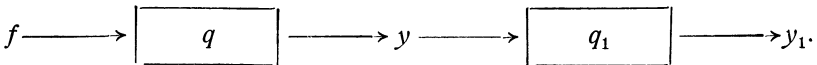
Особенности некоторых физических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, дают основание называть возмущающую функцию $F(t)$ также *входной функцией* системы, а решение $Y(t)$ дифференциального уравнения — *выходной функцией* системы. Эти названия переносятся также на изображения $f(s)$ и $y(s)$. В пространстве изображений связь между входной и выходной функциями имеет особенно простой вид:

$$y(s) = q(s)f(s). \quad (11.15)$$

Функция $q(s)$, зависящая от постоянных c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 , т. е. от внутренней структуры системы, называется *передаточной функцией*. Соотношение, связывающее f , y и q , можно изобразить посредством схемы



которая наглядно показывает, что функция f входит в блок q , а функция y выходит из блока. Такой символ блока особенно удобен в случае нескольких систем, соединенных между собой так, что выходная функция одной системы служит входной функцией следующей системы:



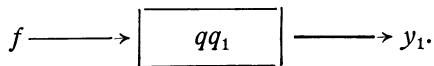
В этом случае

$$y = qf, \quad y_1 = q_1 y,$$

следовательно,

$$y_1 = qq_1 f,$$

и поэтому рассматриваемая система может быть заменена одной системой с передаточной функцией qq_1 и изображена посредством блока



Применение таких схем в пространстве изображений приводит к очень наглядным соотношениям, особенно в тех случаях, когда в системе имеются обратные связи.

* * *

Нам остается рассмотреть случай, когда *не все начальные значения равны нулю*. Для большей наглядности возьмем дифференциальное уравнение не любого порядка, а третьего. Итак, пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$Y''' + c_2 Y'' + c_1 Y' + c_0 Y = F(t)$$

с заданными начальными условиями

$$Y(+0), \quad Y'(+0), \quad Y''(+0).$$

Согласно правилу V изображающим уравнением будет:

$$\begin{aligned} s^3 y - Y(+0)s^2 - Y'(+0)s - Y''(+0) + \\ + c_2 [s^2 y - Y(+0)s - Y'(+0)s] + \\ + c_1 [s y - Y(+0)] + \\ + c_0 y \end{aligned} = f(s).$$

Решив его, мы получим:

$$\begin{aligned} y(s) = \frac{f(s)}{p(s)} + Y(+0) \frac{s^2 + c_2 s + c_1}{p(s)} + \\ + Y'(+0) \frac{s + c_2}{p(s)} + \\ + Y''(+0) \frac{1}{p(s)}, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где

$$p(s) = s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0.$$

Мы видим, что теперь к ранее рассмотренному выражению $f(s)/p(s)$ добавляются дробно-рациональные функции, в которых степени числителей меньше степеней знаменателей. Следовательно, их можно разложить на простейшие дроби совершенно так же, как и раньше, и затем перейти в пространство оригиналов. Для дифференциальных уравнений до третьего порядка включительно необходимые соответствия между изображениями и оригиналами имеются в таблице II, 4.

В тех случаях, когда таблица не содержит дробно-рациональных функций, получившихся при решении изображающего уравнения и имеющих своими коэффициентами числа $Y(+0)$, $Y'(+0)$, ..., необходимо прибегнуть к вычислению соответствующих оригиналов. Однако при этом *можно избежать разложения всех дробно-рациональных функций на простейшие дроби, кроме одной*. В самом деле, для получения оригинала, соответствующего члену $f(s)/p(s)$, необходимо выполнить разложение на простейшие дроби по крайней мере функции $q(s) = 1/p(s)$ и затем найти отвечающий этой функции оригинал $Q(t)$. Но функция $Q(t)$ обладает следующим свойством¹⁾:

$$Q(+0) = Q'(+0) = \dots = Q^{(n-2)}(+0) = 0, \quad Q^{(n-1)}(+0) = 1. \quad (11.17)$$

Поэтому на основании правила V мы имеем:

$$\frac{s}{p(s)} \bullet \circ Q'(t), \quad \frac{s^2}{p(s)} \bullet \circ Q''(t), \quad \dots, \quad \frac{s^{n-1}}{p(s)} \bullet \circ Q^{(n-1)}(t). \quad (11.18)$$

Отсюда следует, что оригиналы, соответствующие дробно-рациональным функциям с множителями $Y(+0)$, $Y'(+0)$ и т. д., могут быть составлены из производных уже вычисленной функции $Q(t)$. Для только что рассмотренного дифференциального уравнения третьего порядка мы получим:

$$\frac{s^2 + c_2 s + c_1}{p(s)} \bullet \circ Q''(t) + c_2 Q'(t) + c_1 Q(t),$$

$$\frac{s + c_2}{p(s)} \bullet \circ Q'(t) + c_2 Q(t).$$

Численный пример

На стр. 36 и 41 мы рассмотрели случай, когда

$$p(s) = (s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74) = s^4 + 10s^3 + 90s^2 + 160s + 1184.$$

Такая функция $p(s)$ соответствует дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$Y^{IV} + 10Y''' + 90Y'' + 160Y' + 1184Y = F(t).$$

На стр. 38 мы нашли, что

$$Q(t) = -\frac{1}{9928}(20 \cos 4t - 29 \sin 4t) + \frac{1}{17374} e^{-5t}(35 \cos 7t - 4 \sin 7t)$$

¹⁾ Мы видим, что значение производной $Q^{(n-1)}(+0)$ не совпадает со значениями $Q(+0)$, ..., $Q^{(n-2)}(+0)$. Здесь это обстоятельство не используется но в дальнейшем оно играет важную роль.

(напомним, что там у функции $1/p(s)$ был множитель 112, который здесь отсутствует). Следовательно,

$$Q'(t) = \frac{1}{2482}(20 \sin 4t + 29 \cos 4t) - \frac{1}{17374} e^{-5t}(203 \cos 7t + 225 \sin 7t),$$

$$Q''(t) = \frac{1}{1241}(40 \cos 4t - 58 \sin 4t) - \frac{1}{8687} e^{-5t}(280 \cos 7t - 1273 \sin 7t),$$

$$Q'''(t) = -\frac{1}{1241}(160 \sin 4t + 232 \cos 4t) + \\ + \frac{1}{8687} e^{-5t}(10311 \cos 7t - 4405 \sin 7t).$$

Из этих функций можно составить оригиналы дробно-рациональных функций, входящих в решение изображающего уравнения и имеющих в качестве множителей начальные значения $Y(+0)$, $Y'(+0)$, $Y''(+0)$ и $Y'''(+0)$. Не выполняя вычислений, напомним эти оригиналы:

$$\text{при } Y(+0): \quad Q'''(t) + c_3 Q''(t) + c_2 Q'(t) = Q'''(t) + 10Q''(t) + \\ + 90Q'(t) + 160Q(t),$$

$$\text{при } Y'(+0): \quad Q''(t) + c_3 Q'(t) + c_2 Q(t) = Q''(t) + 10Q'(t) + 90Q(t),$$

$$\text{при } Y''(+0): \quad Q'(t) + c_3 Q(t) = Q'(t) + 10Q(t),$$

$$\text{при } Y'''(+0): \quad Q(t) = Q(t).$$

Предлагаем читателю убедиться на этом примере, что действительно имеют место равенства $Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0$ и $Q'''(0) = 1$.



В связи с некоторыми неясностями, встречающимися в литературе по преобразованию Лапласа, еще раз напомним, что *начальными значениями*, входящими в изображающее уравнение, являются числа $Y(+0)$, $Y'(+0)$, ... Иначе и не может быть, так как мы рассматриваем дифференциальное уравнение только для $t \geq 0$, и поэтому непрерывное изменение функции $Y(t)$ и ее производных начинается от начальных значений в *правую* сторону от последних. Как эти начальные значения практически возникают, это уже вопрос другого порядка. Естественно, что в физических системах они возникают из *прошедшего* системы (так, например, положение и скорость линейного осциллятора в момент времени $t=0$ являются неизбежным следствием его движения в предшествующее время). Физическая система подходит к нулевому моменту времени слева с некоторыми значениями $Y(-0)$, $Y'(-0)$, ..., и единственное требование заключается в том, чтобы с этими же значениями система вступила в интервал времени $t \geq 0$. Это требование всегда может быть выполнено, так как полученное выше решение $Y(t)$, как нетрудно убедиться путем проверки, всегда удовлетворяет предписанным начальным значениям, совершенно независимо от того, как они заданы и какой вид имеет возмущающая функция (последняя

может не иметь ничего общего с возмущающей функцией, существовавшей до момента времени $t=0$). С иным положением вещей мы встретимся при решении систем дифференциальных уравнений; там начальные значения не всегда могут быть заданы произвольно (см. стр. 73).

Еще раз сформулируем

преимущества метода преобразования Лапласа

1. При решении дифференциального уравнения классическим методом сначала находится общее решение, а затем его постоянные определяются так, чтобы найденное решение удовлетворяло начальным условиям. Определение постоянных требует дополнительного решения системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, что для случая $n \geq 3$ представляет собой громоздкую задачу. При решении же дифференциального уравнения посредством преобразования Лапласа начальные условия учитываются с самого начала и вводятся в решение автоматически. Это обстоятельство выгодно также потому, что позволяет ясно видеть влияние начальных условий заранее, т. е. до нахождения решения. Наиболее частый на практике случай нулевых начальных условий при классическом методе решения не приводит к какому-либо облегчению вычислений. Наоборот, при применении преобразования Лапласа нулевые начальные значения обеспечивают исключительно простой ход вычислений.

2. В то время как при классическом методе сначала решается однородное уравнение и только затем, путем вариации постоянных, — неоднородное уравнение, применение преобразования Лапласа позволяет сразу решить неоднородное уравнение.

§ 12. Импульсная функция в качестве входной функции

На стр. 41 и 44 мы отметили, что на практике основной интерес представляют главным образом два вида возбуждающей, или входной, функции, а именно: единичный скачок $U(t)$ и длительное синусоидальное колебание $e^{j\omega t}$. Имеется еще и третий вид возмущающей функции, очень удобный для наглядных физических соображений, но представляющий некоторые трудности для математического исследования. В случае механической системы эта входная функция соответствует внешней силе, приложенной в виде удара. Вообразим силу $S(t)$, действующую, начиная с момента времени $t=0$, в течение очень короткого промежутка ϵ , но при этом настолько большую, что интеграл

$$\int_0^{\epsilon} S(\tau) d\tau$$

имеет постоянное конечное значение, равное, например, единице [если бы сила $F(t)$ имела конечное значение, то интеграл имел бы значение, пропорциональное ε]. Начиная с момента времени $t > \varepsilon$, сила больше не действует, следовательно, $S(t) = 0$, и поэтому

$$\int_0^t S(\tau) d\tau = 1 \quad \text{при } t \geq \varepsilon.$$

Положив

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } t > \varepsilon, \end{cases}$$

мы удовлетворим поставленному требованию. Представлению об ударе соответствует мгновенное действие силы, т. е. действие в течение промежутка времени $\varepsilon = 0$; следовательно, в этот момент времени силе необходимо приписать величину $1/\varepsilon = \infty$, а во все остальные моменты считать ее равной нулю. Очевидно, что для описания такого рода ударной силы обычные функции непригодны, но это можно сделать посредством псевдофункции $\delta(t)$, называемой *импульсной функцией*, или *функцией Дирака*. Для того чтобы применение функции $\delta(t)$ не приводило к противоречию, необходимо иметь в виду следующие условия. Функция $\delta(t)$ считается определенной для $-\infty < t < +\infty$, и если $F(t)$ представляет собой обычную функцию, то должны иметь место равенства

$$\int_a^b F(t) \delta(t) dt = \begin{cases} F(0), & \text{если интервал } a \leq t < b \\ & \text{содержит нулевую точку,} \\ 0 & \text{в любом другом случае.} \end{cases} \quad (12.1)$$

Таким образом, импульсная функция выводит значение $F(0)$ из-под знака интеграла, если это значение здесь встречается, и аннулирует все другие значения.

Если переместить импульс из нулевой точки в какую-либо другую точку t_0 , т. е. если взять импульсную функцию $\delta(t - t_0)$, то мы будем иметь:

$$\int_a^b F(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} F(t_0) & \text{при } a \leq t_0 < b, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (12.2)$$

следовательно, теперь из-под знака интеграла выводится значение $F(t_0)$.

Если мы примем, что $F(t) = e^{-st}$, то получим:

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = 1, \quad (12.3)$$

$$\mathfrak{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-t_0 s} \quad \text{при } t_0 \geq 0. \quad (12.4)$$

Импульсная функция $\delta(t)$ связана с функцией единичного скачка

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

а именно: функцию $\delta(t)$ можно рассматривать как производную от функции $U(t)$:

$$U'(t) = \delta(t). \quad (12.5)$$

В самом деле, производная $U'(t)$ для $t \neq 0$ равна нулю, а для $t = 0$ она хотя и не определена в собственном смысле, тем не менее формально можно принять, что

$$U'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - U(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{t} = \infty.$$

Особо подчеркнем, что, полагая $U'(t) = \delta(t)$ или $U'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$, мы не имеем права пользоваться правилом V (теоремой дифференцирования) в его прежнем виде. В самом деле, как было разъяснено на стр. 23—24, оно дало бы значения

$$\mathfrak{L}\{U'(t)\} = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}\{U'(t - t_0)\} = 0$$

вместо значений (12.3) и (12.4). Для того чтобы можно было применять это правило также к псевдофункциям, необходимо ввести в него в порядке исключения вместо значения $F(+0)$ значение $F(0)$, т. е. заменить предельное значение функции $F(t)$ для $t \rightarrow 0$ значением функции $F(t)$ в точке $t = 0$. Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{\delta\} &= \mathfrak{L}\{U'(t)\} = s \mathfrak{L}\{U\} - U(0) = s \frac{1}{s} - 0 = 1, \\ \mathfrak{L}\{\delta(t - t_0)\} &= \mathfrak{L}\{U'(t - t_0)\} = s \mathfrak{L}\{U(t - t_0)\} - U(-t_0) = \\ &= s \frac{e^{-t_0 s}}{s} - 0 = e^{-t_0 s}, \end{aligned}$$

что совпадает со значениями (12.3) и (12.4). Мы видим отсюда, что псевдофункция $\delta(t)$ ведет себя совсем иначе, чем обычные функции, и что при применении к псевдофункции правил преобразования Лапласа необходимо соблюдать большую осторожность (см. в связи с этим пример на стр. 64).

После этих предварительных замечаний рассмотрим случай, когда дифференциальное уравнение, описывающее физическую систему, содержит в качестве *возбуждающей*, или *входной*, функции импульсную функцию $\delta(t)$:

$$Y^{(n)} + c_{n-1}Y^{(n-1)} + \dots + c_1Y' + c_0Y = \delta(t). \quad (12.6)$$

Это означает, что возбуждение системы происходит мгновенно, в виде удара. Предположим, что до возбуждения система была в покое, т. е. примем, что

$$Y(+0) = Y'(+0) = \dots = Y^{(n-1)}(+0) = 0, \quad (12.7)$$

Тогда, выполнив преобразование Лапласа и учтя равенство (12.3), мы получим изображающее уравнение

$$s^n y(s) + c_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + c_1 s y(s) + c_0 y(s) = 1,$$

откуда

$$y(s) = \frac{1}{s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_0} = \frac{1}{p(s)} = q(s).$$

Следовательно, решением дифференциального уравнения (12.6) будет:

$$Y(t) = Q(t).$$

Мы пришли бы к этому же результату, если бы воспользовались выведенной в § 11 общей формулой (11.6) для решения дифференциального уравнения n -го порядка. В самом деле, подставив в эту формулу $F(t) = \delta(t)$ и учтя равенство (12.1), мы получим:

$$Q(t) * \delta(t) = \int_0^t Q(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = Q(t).$$

Следовательно, функцию $Q(t)$, входящую в формулу (11.6), можно рассматривать как переходную функцию, соответствующую импульсной функции $\delta(t)$.



Разобранный пример представляет особый интерес, так как он очень убедительно показывает, что *нельзя во всех случаях ограничиваться только формальным получением результата, забывая о необходимости тщательного критического анализа*. Подозрительность полученного результата следует уже из того, что левая часть уравнения (12.6) после внесения в нее вместо $Y(t)$ обычной функции $Q(t)$ безусловно должна представлять собой также обычную функцию, между тем как в правой части этого уравнения мы имеем псевдофункцию $\delta(t)$. Так как подобного рода равенство невозможно, то очевидно, что в полученном результате имеется какая-то ошибка. В самом деле, функция $Q(t)$ не удовлетворяет ни дифференциальному уравнению (12.6), ни начальным условиям (12.7), но зато она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Y^{(n)} + c_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + c_1 Y' + c_0 Y = 0 \quad (12.8)$$

и начальным условиям

$$Y(+0) = Y'(+0) = \dots = Y^{(n-2)}(+0) = 0, \quad Y^{(n-1)}(+0) = 1, \quad (12.9)$$

как это сразу видно из формулы (11.17). В этом можно убедиться также путем отображения уравнения (12.8) при начальных условиях (12.9) в пространство изображений. Применив правило V, мы получим изображающее уравнение

$$s^n y(s) - 1 + c_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + c_1 s y(s) + c_0 y(s) = 0,$$

следовательно,

$$y(s) = \frac{1}{s^n + \dots + c_1 s + c_0} = \frac{1}{p(s)} = q(s).$$

Итак, мы опять имеем:

$$Y(t) = Q(t),$$

что теперь безусловно правильно, так как при выводе этого результата мы не выходили за законные рамки операций с обычными функциями.

Однако противоречие будет устранено, если умело внести в решение $Y(t) = Q(t)$ некоторое изменение, благодаря чему оно будет удовлетворять и дифференциальному уравнению (12.6), и начальным условиям (12.7). Примем, что производная $Q^{(n-1)}(t)$ в точке $t=0$ равна нулю, т. е. припишем ей здесь значение, не совпадающее с предельным значением $Q^{(n-1)}(+0) = 1$. Тогда эта производная будет иметь в нулевой точке такой же разрыв, как и функция скачка $U(t)$, и поэтому для производной $Y^{(n-1)}(t)$ мы должны взять выражение

$$Y^{(n-1)}(t) = Q^{(n-1)}(t) U(t).$$

Следовательно, производная от этой функции, т. е. n -я производная от $Q(t)$, не будет обычной функцией, так как она будет содержать в себе в качестве дополнительного слагаемого импульсную функцию:

$$Y^{(n)}(t) = Q^{(n)}(t) U(t) + \delta(t).$$

Благодаря этому левая часть уравнения (12.6) после подстановки в нее $Y(t) = Q(t)$ будет равна не нулю, а $\delta(t)$. Кроме того, теперь последнее начальное условие $Y^{(n-1)}(+0) = 0$ должно быть заменено на $Y^{(n-1)}(0) = 0$. Это означает, что в противоположность функциям $Y, Y', \dots, Y^{(n-2)}$, которые начинают изменяться от своих начальных значений $0, 0, \dots, 0$, определяемых прошедшим (см. стр. 52), *непрерывно*, функция $Y^{(n-1)}$ вследствие воздействия импульсной функции *скачкообразно* переходит от нуля сразу к единице. Для пояснения сказанного напомним хотя бы о механическом линейном осцилляторе (например, о маятнике на длинной нити). Если такой осциллятор, находящийся в покое, получает сильный удар, то скорость (первая производная) скачкообразно возрастает от нуля до некоторого положительного значения, в то время как координата, определяющая положение осциллятора (сама функция), изменяется непрерывно.

§ 13. Системы дифференциальных уравнений

Как мы знаем, в общее решение дифференциального уравнения, получаемое посредством классического метода, входят постоянные, которые должны удовлетворять начальным условиям. Для определения этих постоянных необходимо дополнительно решить систему линейных алгебраических уравнений. Если число таких уравнений (равное порядку дифференциального уравнения) превышает три, то решение системы этих уравнений довольно громоздко и отнимает много времени. При применении преобразования Лапласа не требуется определения постоянных, следовательно, не требуется и решения системы алгебраических уравнений, что приводит, начиная с дифференциальных уравнений четвертого порядка, к значительной экономии в вычислениях по сравнению с классическим методом. Однако в полной мере преимущества преобразования Лапласа перед классическим методом проявляются только при решении систем дифференциальных уравнений. Здесь применение преобразования Лапласа приводит не только к весьма значительному сокращению вычислительной работы, но одновременно дает значительно большую обзорность решения.

Начнем с рассмотрения специального примера, взятого из практики расчета системы регулирования определенного вида, а именно: возьмем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} Y_1 & \quad - 8Y_3 & = F_1, \\ - Y_2 & \quad + 2Y_3 + 10Y_3' & = F_2, \\ Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 + Y_2' & & = F_3. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

С целью возможно большего приближения к действительным условиям мы подобрали случай, когда одно из уравнений системы является не дифференциальным, а алгебраическим (в технических задачах такие случаи встречаются часто). Неизвестными являются три функции Y_1 , Y_2 , Y_3 , из которых Y_1 представляет собой регулируемую величину, Y_2 — регулируемую величину, а Y_3 — ток возбуждения генератора. Функции F_1 , F_2 , F_3 , входящие в правые части уравнений, представляют собой известные возмущающие и задающие величины. Основным интересом представляет функция Y_1 (регулируемая величина). Мы видим, что производная от этой функции совсем не входит в уравнения (13.1).

При решении такой системы уравнений обычным методом следует попытаться путем исключения функций Y_2 и Y_3 получить одно-единственное дифференциальное уравнение для Y_1 . В нашем случае это выполняется очень просто, так как первое уравнение не содержит производной от функции Y_3 , а второе — производной от функции Y_2

(в общем случае такое исключение функций является очень трудной задачей). Из первого уравнения мы имеем:

$$Y_3 = \frac{1}{8}(Y_1 - F_1).$$

Подставив это значение Y_3 во второе уравнение, мы найдем Y_2 :

$$Y_2 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{5}{4}Y_1' - \frac{1}{4}F_1 - \frac{5}{4}F_1' - F_2.$$

Наконец, вычислив Y_2' и внося Y_2 и Y_2' в третье уравнение, мы получим для определения функции Y_1 дифференциальное уравнение

$$\frac{5}{4}Y_1'' + \frac{7}{8}Y_1' + \frac{9}{8}Y_1 = \frac{1}{8}F_1 + \frac{7}{8}F_1' + \frac{5}{4}F_1'' + \frac{1}{2}F_2 + F_2' + F_3. \quad (13.2)$$

Если начальные значения $Y_1(+0)$ и $Y_1'(+0)$ известны, то уравнение (13.2) может быть однозначно решено.

В рассматриваемом случае сразу видно, что *эти начальные значения не могут быть заданы произвольно*. Казалось бы, поскольку функция Y_1 входит в первоначальные уравнения без своих производных, не может даже возникнуть вопроса о задании ее начальных значений. В действительности же эти значения определяются заданием начальных значений $Y_2(+0)$ и $Y_3(+0)$ функций Y_2 и Y_3 (обе эти функции входят в рассматриваемую систему вместе со своими первыми производными). В самом деле, из первого уравнения мы получаем начальное значение самой функции Y_1 :

$$Y_1(+0) = 8Y_3(+0) + F_1(+0). \quad (13.3)$$

Продифференцировав первое уравнение, мы найдем начальное значение производной Y_1' :

$$Y_1'(+0) = 8Y_3'(+0) + F_1'(+0).$$

Заменяв здесь $Y_3'(+0)$ его значением

$$Y_3'(+0) = \frac{1}{10}Y_2(+0) - \frac{1}{5}Y_3(+0) + \frac{1}{10}F_2(+0),$$

получаемым из третьего уравнения, мы найдем окончательно¹⁾:

$$Y_1'(+0) = \frac{4}{5}Y_2(+0) - \frac{8}{5}Y_3(+0) + \frac{4}{5}F_2(+0) + F_1'(+0). \quad (13.4)$$

Оценивая намеченный ход решения, необходимо иметь в виду следующее: 1. В общем случае приведение системы дифференциальных уравнений к одному-единственному дифференциальному уравнению

¹⁾ Конечно, можно поступить и наоборот: принять, что $Y_1(+0)$ и $Y_1'(+0)$ заданы, и затем вычислить $Y_2(+0)$ и $Y_3(+0)$ из уравнений (13.3) и (13.4).

(более высокого порядка), содержащему только одну неизвестную функцию, выполняется совсем не так просто, как в рассмотренном частном случае, когда в каждое из заданных уравнений входят только две неизвестные функции. 2. В общем случае далеко не просто выяснить, какие начальные значения могут быть предписаны. 3. Операции, необходимые для замены системы дифференциальных уравнений одним-единственным уравнением, основаны на допущении, что все возмущающие функции дифференцируемы и имеют вместе с несколькими своими производными предельные значения при $t \rightarrow +0$. Но именно это допущение на практике часто не оправдывается, например, когда F_1 представляет собой функцию скачка $U(t-1)$ (при $t=1$ она не имеет производной) или когда $F_1 = t^{1/2}$ (производная $F_1' = t^{-1/2}/2$ не имеет предельного значения при $t \rightarrow +0$). Обстоятельство, отмеченное в последнем пункте, является самым затруднительным при классическом методе решения системы дифференциальных уравнений.

Все перечисленные трудности отпадают при применении преобразования Лапласа, позволяющем, *не прибегая к исключению функций, сразу составить изображающие уравнения* для всех заданных уравнений. В нашем случае мы получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_1 & - 8y_3 & & = f_1, \\ - y_2 & + 2y_3 + 10[sy_3 - Y_3(+0)] & & = f_2, \\ y_1 + \frac{1}{2}y_2 + [sy_2 - Y_2(+0)] & & & = f_3. \end{aligned} \right\} (13.5)$$

Эти уравнения составляются без каких бы то ни было допущений о дифференцируемости возмущающих функций, а начальные значения, необходимые для получения однозначного решения, выявляются сами собой.

Неизвестные y_1 , y_2 , y_3 можно вычислить либо на основании правила Крамера посредством определителей, либо путем исключения. В рассматриваемом случае последний способ удобнее. Исключение следует производить в той же последовательности, как и выше, — при исключении функций Y_2 и Y_3 из дифференциальных уравнений (13.1). Но теперь это выполняется значительно проще, так как в уравнения (13.5) входят действительно только три неизвестных величины, в то время как в уравнения (13.1) вместе с неизвестными функциями входят также их производные (следовательно, даже в самых сложных случаях не приходится задумываться, как надо производить исключение, чтобы осталась только одна неизвестная). Из первого уравнения мы имеем:

$$y_3 = \frac{1}{8}(y_1 - f_1).$$

Подставив это значение во второе уравнение, найдем:

$$y_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}s\right)y_1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}s\right)f_1 - f_2 - 10Y_3(+0).$$

Наконец, внося y_2 в третье уравнение, получим уравнение для определения y_1 :

$$\left(\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}\right)y_1 = \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{8}s + \frac{5}{4}s^2\right)f_1 + \left(\frac{1}{2} + s\right)f_2 + f_3 + \\ + Y_2(+0) + 5Y_3(+0)(2s + 1). \quad (13.6)$$

Если, как это часто бывает, возмущающими функциями являются единичные скачки $U(t)$, то $f_1 = f_2 = f_3 = 1/s$, и для y_1 получается сумма дробно-рациональных функций, в которых степень числителя (самое большее 2) меньше степени знаменателя, равной 3. Такие функции разлагаются способами, указанными в § 10 и 11, на простейшие дроби и затем легко переводятся назад в пространство оригиналов. Однако мы рассмотрим здесь общий случай, когда по крайней мере одна из возмущающих функций, например F_1 , является произвольной. Исследование этого случая даст нам возможность узнать кое-что новое.

При делении правой части уравнения (13.6) на коэффициент при y_1 получается в качестве первого члена выражение

$$\frac{\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}} f_1.$$

Если первый множитель в этом выражении представлял бы собой функцию, полученную в результате преобразования Лапласа, то для перехода к пространству оригиналов можно было бы применить теорему свертывания. Однако этот множитель безусловно не представляет собой такой функции, так как при возрастании s он стремится к единице, между тем как любая функция, полученная в результате преобразования Лапласа, при возрастании s должна стремиться к нулю (см. теорему 1 в § 23). Но дробно-рациональную функцию, в которой числитель и знаменатель имеют одинаковые степени, можно представить в виде суммы постоянной величины и другой дробно-рациональной функции, в которой числитель имеет меньшую степень, чем знаменатель. Применяя, как и прежде (стр. 34), способ неопределенных коэффициентов, мы получим:

$$\frac{\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}} = 1 - \frac{1}{\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}}.$$

После умножения этой разности на f_1 первый член будет содержать только f_1 , а второй — произведение f_1 на функцию, безусловно являющуюся результатом преобразования Лапласа; следовательно, для этого произведения можно будет найти соответствующую функцию в пространстве оригиналов. Изображению

$$\frac{1}{\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}} = \frac{\frac{4}{5}}{s^2 + \frac{7}{10}s + \frac{9}{10}} = \frac{0,8}{(s + 0,35)^2 + (0,882)^2}$$

отвечает на основании соответствия № 5 в таблице II, 1 и правила IV оригинал

$$e^{-0,35t} \frac{0,8}{0,882} \sin 0,882t.$$

Таким образом, для первого члена решения y_1 оригиналом будет:

$$F_1(t) = \frac{0,8}{0,882} (e^{-0,35t} \sin 0,882t) * F_1(t).$$

Отыскание оригиналов для остальных членов решения y_1 не требует каких-либо новых приемов и поэтому может быть выполнено читателем самостоятельно.



Система дифференциальных уравнений всегда представляется чем-то более сложным по сравнению с отдельным дифференциальным уравнением; поэтому не исключена возможность, что некоторым читателям покажется более целесообразным при решении системы дифференциальных уравнений привести ее сначала к одному-единственному уравнению [в рассмотренном выше примере — к уравнению (13.2) для Y_1], особенно, если это выполняется так просто, как на стр. 59, и только затем совершить преобразование Лапласа для полученного уравнения. Если возмущающими функциями являются функции скачка, то при операциях дифференцирования, необходимых для составления уравнения (13.2), получается псевдофункция $\delta(t)$ и даже ее производные. Для того чтобы показать, как следует поступать в таком случае, вернемся к рассмотренному выше примеру и примем, что

$$F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = U(t),$$

следовательно,

$$f_1(s) = f_2(s) = f_3(s) = \frac{1}{s}.$$

Выполнив преобразование Лапласа для всех уравнений системы (13.1) и вычислив $y_1(s)$, мы получим теперь вместо уравнения (13.6) уравнение

$$\left(\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}\right)y_1 = \left(\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{7}{8} + \frac{5}{4}s\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{s} + 1\right) + \frac{1}{s} + \\ + Y_2(+0) + 5Y_3(+0)(2s + 1). \quad (13.7)$$

Если же сначала мы приведем систему дифференциальных уравнений к одному-единственному уравнению и только затем применим к последнему преобразование Лапласа, то получим следующее изображающее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{4} [s^2 y_1 - Y_1(+0)s - Y_1'(+0)] + \frac{7}{8} [s y_1 - Y_1(+0)] + \frac{9}{8} y_1 =, \\ & = \frac{1}{8} \mathfrak{L}\{F_1\} + \frac{7}{8} \mathfrak{L}\{F_1'\} + \frac{5}{4} \mathfrak{L}\{F_1''\} + \frac{1}{2} \mathfrak{L}\{F_2\} + \mathfrak{L}\{F_2'\} + \mathfrak{L}\{F_3\}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4} s^2 + \frac{7}{8} s + \frac{9}{8}\right) y_1 = & \frac{1}{8} \mathfrak{L}\{F_1\} + \frac{7}{8} \mathfrak{L}\{F_1'\} + \frac{5}{4} \mathfrak{L}\{F_1''\} + \frac{1}{2} \mathfrak{L}\{F_2\} + \\ & + \mathfrak{L}\{F_2'\} + \mathfrak{L}\{F_3\} + Y_1(+0) \left(\frac{5}{4} s + \frac{7}{8}\right) + \frac{5}{4} Y_1'(+0). \quad (13.8) \end{aligned}$$

Для преобразования этого уравнения к виду (13.7) имеются две возможности.

1. Воспользовавшись равенствами (13.3) и (13.4), выразим значения $Y_1(+0)$ и $Y_1'(+0)$ через значения $Y_2(+0)$ и $Y_3(+0)$. Далее, применив правило V так, как было разъяснено на стр. 24, составим производные F_1' , F_1'' , F_2' в смысле обыкновенного анализа; мы получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{F_1'\} &= s f_1 - F_1(+0), \\ \mathfrak{L}\{F_1''\} &= s^2 f_1 - F_1(+0)s - F_1'(+0), \\ \mathfrak{L}\{F_2'\} &= s f_2 - F_2(+0). \end{aligned}$$

Уравнение (13.8) примет теперь вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4} s^2 + \frac{7}{8} s + \frac{9}{8}\right) y_1 = & \frac{1}{8} f_1 + \frac{7}{8} [s f_1 - F_1(+0)] + \\ & + \frac{5}{4} [s^2 f_1 - F_1(+0)s - F_1'(+0)] + \frac{1}{2} f_2 + \\ & + [s f_2 - F_2(+0)] + f_3 + [8 Y_3(+0) + F_1(+0)] \left(\frac{5}{4} s + \frac{7}{8}\right) + \\ & + \frac{5}{4} \left[\frac{4}{5} Y_2(+0) - \frac{8}{5} Y_3(+0) + \frac{4}{5} F_2(+0) + F_1'(+0)\right]. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок члены, содержащие $F_1(+0)$, $F_1'(+0)$ и $F_2(+0)$, взаимно уничтожатся и останется уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4} s^2 + \frac{7}{8} s + \frac{9}{8}\right) y_1 = & \left(\frac{1}{8} f_1 + \frac{7}{8} s f_1 + \frac{5}{4} s^2 f_1\right) + \left(\frac{1}{2} f_2 + s f_2\right) + f_3 + \\ & + Y_2(+0) + 5 Y_3(+0) (2s + 1). \end{aligned}$$

Положив здесь $f_1 = f_2 = f_3 = 1/s$, мы получим уравнение (13.7).

2. Можно положить в смысле, разъясненном на стр. 55, $F_1'(t) = F_2'(t) = \delta(t)$, $F_1''(t) = \delta'(t)$. Тогда, как было там показано,

$$\mathfrak{L}\{F_1'\} = \mathfrak{L}\{F_2'\} = \mathfrak{L}\{\delta\} = 1.$$

Добавим теперь, что должны иметь место также равенства

$$\mathfrak{L}\{\delta'\} = s \text{ и вообще } \mathfrak{L}\{\delta^{(n)}\} = s^n *).$$

Далее, граничные значения $F_1(+0)$, ... должны быть заменены значениями в точке $t=0$, т. е. нулями. Наконец, вычислив из равенств (13.3) и (13.4) [после замены в них $F_1(+0)$, ... нулями] значения $Y_1(+0)$ и $Y_1'(+0)$, мы получим опять уравнение (13.7).

Из этого примера видно, что приведение системы дифференциальных уравнений к одному уравнению с последующим применением преобразования Лапласа только к последнему уравнению значительно кропотливее непосредственного преобразования Лапласа всех уравнений системы. Самое же главное, такой способ в тех случаях, когда появляется импульсная функция $\delta(t)$, менее надежен.

Эта ненадежность станет еще более ясной, если мы возьмем такую возмущающую функцию, которая имеет скачок не в точке $t=0$, а в точке $t_0 > 0$, следовательно, является не дифференцируемой при $t > 0$. Для большей наглядности примем, что

$$F_1(t) \equiv 0, \quad F_3(t) \equiv 0, \quad Y_2(+0) = 0, \quad Y_3(+0) = 0.$$

Далее, примем, что возмущающая функция в интервале от $t=0$ до $t=3$ постоянна и равна единице, а при $t=3$ претерпевает разрыв, изменяясь сразу от 1 до 0,3 (подобного рода случаи часто встречаются на практике, например в шаговых регуляторах, осуществляющих в некоторых интервалах скачкообразное изменение управляющей величины). Такую возмущающую функцию можно представить в виде

$$F_2(t) = U(t) - 0,7U(t-3).$$

Ее изображением согласно формуле (3.3) будет

$$f_2(s) = \frac{1}{s} - 0,7 \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Если мы применим преобразование Лапласа непосредственно к системе (13.1) для рассматриваемого частного случая и затем вычислим y_1 ,

*) Поскольку $\delta(t)$ представляет собой не обычную функцию, а псевдофункцию, то производные ее тем более не могут быть обычными функциями. Так как функция $\delta(t)$ физически может быть истолкована как удар, то производная $\delta'(t)$ соответствует физическому диполю, а производные более высокого порядка — многократным полюсам.

то вместо уравнения (13.6) получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{4}s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}\right)y_1 &= \left(\frac{1}{2} + s\right)f_2(s) = \left(\frac{1}{2} + s\right)\left(\frac{1}{s} - 0,7\frac{e^{-3s}}{s}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - 0,7\frac{e^{-3s}}{s}\right) + (1 - 0,7e^{-3s}). \end{aligned}$$

Если же мы сначала исключим из системы (13.1) функции Y_2 и Y_3 , то уравнение (13.2) для определения Y_1 примет вид

$$\frac{5}{4}Y_1'' + \frac{7}{8}Y_1' + \frac{9}{8}Y_1 = \frac{1}{2}F_2 + F_2',$$

причем начальными условиями согласно равенствам (13.3) и (13.4) будут:

$$Y_1(+0) = 0, \quad Y_1'(+0) = \frac{4}{5}F_2(+0).$$

Выполнив преобразование Лапласа для последнего уравнения, мы будем иметь:

$$\frac{5}{4}\left(s^2 + \frac{7}{8}s + \frac{9}{8}\right)y_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\{F_2\} + \mathfrak{L}\{F_2'\} + F_2(+0).$$

Если мы перепишем члены $\mathfrak{L}\{F_2\}$ и $\mathfrak{L}\{F_2'\}$ в развернутом виде, пользуясь правилом V и не вводя явного выражения для возмущающей функции $F_2(t)$, то для дифференцируемой функции $F_2(t)$ (т. е. подчиняющейся правилу V) мы получим верный результат:

$$\frac{1}{2}f_2 + [sf_2 - F_2(+0)] + F_2(+0) = \left(\frac{1}{2} + s\right)f_2.$$

Если же мы сразу введем в дифференциальное уравнение для Y_1 явные выражения функций F_2 и F_2' , т. е.

$$F_2(t) = U(t) - 0,7U(t-3), \quad F_2'(t) = \delta(t) - 0,7\delta(t-3),$$

и только затем выполним преобразование Лапласа, то мы получим правильный результат лишь в том случае, если заменим $F_2(+0) = 1$ на $F_2(0) = 0$, так как согласно формулам (12.3) и (12.4)

$$\mathfrak{L}\{F_2\} = \frac{1}{s} - 0,7\frac{e^{-3s}}{s}, \quad \mathfrak{L}\{F_2'\} = 1 - 0,7e^{-3s}.$$

Можно было предполагать, что для получения правильного результата необходимо будет отнестись с осторожностью к значению функции $F_2(t)$ также в точке $t=3$. Мы видим, однако, что это значение никакой роли не играет.

Таким образом, вследствие ненадежности, возникающей при дифференцировании функций, которые иногда могут оказаться недифференцируемыми, *всегда следует выполнять преобразование Лапласа непосредственно для заданной системы уравнений и только потом приступать к вычислению отдельных неизвестных.*



Разобранный частный пример достаточно ясно раскрывает сущность способа решения систем дифференциальных уравнений посредством преобразования Лапласа. Для получения еще более ясного представления о формальной стороне этого способа рассмотрим теперь *систему уравнений более общего вида*. Остановимся на системе трех дифференциальных уравнений первого порядка, так как иначе выкладки будут плохо обозримыми. Во всех уравнениях выпишем все теоретически возможные члены, хотя в практических условиях часть этих членов обычно отсутствует, следовательно, коэффициенты при них должны приниматься равными нулю. Итак, рассмотрим систему

$$(a_{11}Y_1' + b_{11}Y_1) + (a_{12}Y_2' + b_{12}Y_2) + (a_{13}Y_3' + b_{13}Y_3) = F_1(t),$$

$$(a_{21}Y_1' + b_{21}Y_1) + (a_{22}Y_2' + b_{22}Y_2) + (a_{23}Y_3' + b_{23}Y_3) = F_2(t),$$

$$(a_{31}Y_1' + b_{31}Y_1) + (a_{32}Y_2' + b_{32}Y_2) + (a_{33}Y_3' + b_{33}Y_3) = F_3(t).$$

Выполнив преобразование Лапласа, мы получим изображающие уравнения

$$a_{11}[sy_1 - Y_1(+0)] + b_{11}y_1 + a_{12}[sy_2 - Y_2(+0)] + b_{12}y_2 + \\ + a_{13}[sy_3 - Y_3(+0)] + b_{13}y_3 = f_1(s),$$

$$a_{21}[sy_1 - Y_1(+0)] + b_{21}y_1 + a_{22}[sy_2 - Y_2(+0)] + b_{22}y_2 + \\ + a_{23}[sy_3 - Y_3(+0)] + b_{23}y_3 = f_2(s),$$

$$a_{31}[sy_1 - Y_1(+0)] + b_{31}y_1 + a_{32}[sy_2 - Y_2(+0)] + b_{32}y_2 + \\ + a_{33}[sy_3 - Y_3(+0)] + b_{33}y_3 = f_3(s).$$

Введя для сокращения записи обозначения

$$a_{ik}s + b_{ik} = p_{ik}(s),$$

мы сумеем переписать изображающие уравнения в следующем более обозримом виде:

$$p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + p_{13}y_3 = f_1 + a_{11}Y_1(+0) + a_{12}Y_2(+0) + a_{13}Y_3(+0),$$

$$p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + p_{23}y_3 = f_2 + a_{21}Y_1(+0) + a_{22}Y_2(+0) + a_{23}Y_3(+0),$$

$$p_{31}y_1 + p_{32}y_2 + p_{33}y_3 = f_3 + a_{31}Y_1(+0) + a_{32}Y_2(+0) + a_{33}Y_3(+0).$$

Если были бы заданы дифференциальные уравнения не первого, а второго порядка, то вместо линейных многочленов $p_{ik}(s)$ получились бы квадратичные, а правые части изображающих уравнений содержали бы, кроме начальных значений $Y_1(+0), \dots$, также начальные значения $Y_1'(+0), \dots$. Но принципиально изображающие уравнения для системы дифференциальных уравнений любого порядка имеют один и тот же вид: они образуют *систему линейных алгебраических уравнений* для неизвестных y_1, y_2, y_3 . Подобного рода

системы теоретически решаются изящнее всего по правилу Крамера посредством определителей; практически же предпочтительнее прибегать к последовательному исключению неизвестных или, при большом количестве уравнений, к одному из многочисленных известных способов решения систем линейных уравнений.

Поскольку сейчас нас интересует формальная сторона метода, воспользуемся решением посредством определителей. В правой части каждого изображающего уравнения имеется изображение $f_i(s)$ возмущающей функции и численная постоянная, зависящая от начальных значений. Для сокращения записи введем для этих постоянных обозначения

$$a_{i1}Y_1(+0) + a_{i2}Y_2(+0) + a_{i3}Y_3(+0) = r_i,$$

а для определителя системы, составленного из коэффициентов $p_{ik}(s)$ и представляющего собой в раскрытом виде многочлен третьей степени относительно s , — обозначение $D(s)$. Применяя правило Крамера, мы найдем:

$$y_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f_1 + r_1 & p_{12} & p_{13} \\ f_2 + r_2 & p_{22} & p_{23} \\ f_3 + r_3 & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}, \quad y_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} p_{11} & f_1 + r_1 & p_{13} \\ p_{21} & f_2 + r_2 & p_{23} \\ p_{31} & f_3 + r_3 & p_{33} \end{vmatrix}, \quad y_3 = \dots$$

Для того чтобы яснее показать, как решения y_1, y_2, y_3 зависят от возмущающих функций и начальных значений, заменим r_i их явными выражениями и разложим каждый определитель по элементам того столбца, в который входят возмущающие функции; для y_1 мы получим:

$$\begin{aligned} Dy_1 &= \begin{vmatrix} f_1 + a_{11}Y_1(+0) + a_{12}Y_2(+0) + a_{13}Y_3(+0) & p_{12} & p_{13} \\ f_2 + a_{21}Y_1(+0) + a_{22}Y_2(+0) + a_{23}Y_3(+0) & p_{22} & p_{23} \\ f_3 + a_{31}Y_1(+0) + a_{32}Y_2(+0) + a_{33}Y_3(+0) & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} f_1 & p_{12} & p_{13} \\ f_2 & p_{22} & p_{23} \\ f_3 & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + Y_1(+0) \begin{vmatrix} a_{11} & p_{12} & p_{13} \\ a_{21} & p_{22} & p_{23} \\ a_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \\ &\quad + Y_2(+0) \begin{vmatrix} a_{12} & p_{12} & p_{13} \\ a_{22} & p_{22} & p_{23} \\ a_{32} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + Y_3(+0) \begin{vmatrix} a_{13} & p_{12} & p_{13} \\ a_{23} & p_{22} & p_{23} \\ a_{33} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Элементы первых столбцов второго, третьего и четвертого определителей представляют собой постоянные числа, а элементы второго и третьего столбцов — многочлены первой степени, следовательно, все эти определители в раскрытом виде дают многочлены второй степени. После деления на $D(s)$ получаются дробно-рациональные функции, в которых числители имеют меньшие степени, чем

знаменатели. Разложив эти функции одним из указанных ранее способов на простейшие дроби, мы сумеем отобразить их назад в пространство оригиналов. Определитель, содержащий в себе изображения f_i , может быть представлен в виде

$$\begin{vmatrix} f_1 & p_{12} & p_{13} \\ f_2 & p_{22} & p_{23} \\ f_3 & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = f_1 \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{22} & p_{23} \end{vmatrix}.$$

Определители второго порядка после деления на $D(s)$ опять дают дробно-рациональные функции. Применив к произведению этих функций на множители f_i теорему свертывания, мы перейдем назад в пространство оригиналов.

Из сказанного вытекают следующие

преимущества метода преобразования Лапласа

1. Для решения системы дифференциальных уравнений методом преобразования Лапласа требуется решить только *одну-единственную* систему алгебраических уравнений, а именно систему, определяющую изображения y_i искомого функций.

2. *Начальные значения* входят в эту систему с самого начала и поэтому учитываются автоматически, в то время как при применении классического метода предварительно необходимо найти общие решения и затем подобрать постоянные интегрирования так, чтобы были удовлетворены начальные условия, что приводит к необходимости решения еще одной системы линейных уравнений. Наиболее часто встречающийся на практике случай нулевых начальных значений приводит к особенно простым вычислениям, между тем как при применении классического метода он не дает никакого облегчения.

3. Наконец, важное преимущество заключается в том, что каждая неизвестная функция может быть вычислена сама по себе, независимо от вычисления остальных неизвестных функций. Это преимущество особенно ценно в тех случаях, когда практический интерес представляет определение только одной-единственной неизвестной, вычисление же остальных неизвестных не обязательно. С такими случаями часто приходится иметь дело в технике регулирования и всегда в теории цепочных схем, для которых, как правило, требуется вычисление тока только в последней ячейке.

**Системы дифференциальных уравнений со структурой,
различной в отдельных интервалах.**

Как мы неоднократно видели, одним из преимуществ преобразования Лапласа по сравнению с классическим методом решения дифференциальных уравнений является автоматический учет начальных значений. Это преимущество особенно выгодно в тех случаях,

когда *постоянные системы и возмущающие функции не универсальны, т. е. не остаются неизменными для всех $t > 0$* , а скачкообразно изменяются, как только одна из неизвестных становится больше или меньше некоторых определенных значений. Так происходит, например, в случае системы регулирования, обладающей зоной нечувствительности, внутри которой регулируемая величина может изменяться, не вызывая включения регулятора. Интегрирование уравнений, описывающих такую систему, следует выполнять только до того состояния, при котором соответствующая неизвестная достигает своего критического значения; затем, определив здесь значения неизвестных и приняв их за новые начальные значения, надо продолжить интегрирование до следующего критического состояния и т. д.

Проиллюстрируем этот способ на примере, взятом из практики расчета системы регулирования с зоной нечувствительности. Пусть исследуемая система описывается двумя дифференциальными уравнениями с двумя неизвестными $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$:

$$Y_1' + 2\delta Y_1 - (\delta^2 + \omega^2)Y_2 = cU(t),$$

$$Y_2' = \begin{cases} 0 & \text{при } |Y_1| \leq \eta, \\ -Y_1 + (\text{sign } Y_1)\eta & \text{при } |Y_1| > \eta. \end{cases}$$

Начальные значения пусть равны

$$Y_1(+0) = 0, \quad Y_2(+0) = 0.$$

Первое уравнение имеет обычный вид и содержит в правой части возмущающую функцию, равную кратному от единичного скачка. Второе же уравнение иного рода: оно предписывает, чтобы производная Y_2' была равна нулю до тех пор, пока функция $Y_1(t)$ изменяется в промежутке от $-\eta$ до $+\eta$, и становилась равной $-Y_1(t) \pm \eta$, как только $Y_1(t)$ выходит из границ указанного промежутка, причем знак перед величиной η должен совпасть со знаком величины $Y_1(t)$.

Так как $Y_1(+0) = 0$, то вначале безусловно будет $|Y_1| \leq \eta$, следовательно, $Y_2'(t) = 0$, а потому на основании условия $Y_2(+0) = 0$ функция $Y_2(t)$ в течение некоторого промежутка времени равна нулю. Таким образом, первое уравнение для некоторого промежутка времени справа от $t = 0$ приводится к уравнению

$$Y_1' + 2\delta Y_1 = cU(t).$$

Предположим, что это уравнение имеет место для всех $t > 0$, и применим преобразование Лапласа, что не помешает нам затем использовать полученное решение только до определенного

значения $t = T_1$. Изображающее уравнение, вследствие условия $Y_1(+0)$, имеет вид

$$s y_1 + 2\delta Y_1 = \frac{c}{s}.$$

Его решению

$$y_1 = \frac{c}{s(s+2\delta)} = \frac{c}{2\delta} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2\delta} \right)$$

соответствует оригинал

$$Y_1(t) = \frac{c}{2\delta} (1 - e^{-2\delta t}).$$

Для $\delta > 0$ эта функция возрастает монотонно от нуля до значения $c/2\delta$. Если

$$\eta \geq \frac{c}{2\delta},$$

то всегда будет $Y_1(t) < \eta$, и во втором дифференциальном уравнении всегда надо брать для правой части первую строку. Это означает, что функция $Y_1(t)$ имеет только что найденное выражение, а функция $Y_2(t) = 0$ при всех $t > 0$. Если же

$$\eta < \frac{c}{2\delta},$$

то имеется такое значение $t = T_1$, при котором функция $Y_1(T_1)$ становится равной η . Это значение T_1 определяется уравнением

$$\frac{c}{2\delta} (1 - e^{-2\delta T_1}) = \eta,$$

откуда имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2\delta} \ln \frac{c}{c - 2\delta\eta}.$$

Выберем теперь момент времени T_1 за начальную точку новой шкалы времени, положив для этого $t = t_1 + T_1$. Штрихи, отмечающие дифференцирование, будут теперь означать дифференцирование по t_1 . Так как, начиная с момента времени T_1 , функция $Y_1 \geq \eta$, то теперь во втором дифференциальном уравнении следует взять для правой части вторую строку, и система примет вид

$$\begin{aligned} Y_1' + 2\delta Y_1 - (\delta^2 + \omega^2) Y_2 &= cU(t_1), \\ Y_1 &+ Y_2 = \eta, \end{aligned}$$

причем начальными условиями будут

$$Y_1(T_1 + 0) = \eta, \quad Y_2(T_1 + 0) = 0$$

(так как до момента времени T_1 функция Y_2 все время была равна нулю). Опять предположим, что эта система имеет место для всех

моментов времени $t_1 > 0$, и выполним преобразование Лапласа; мы получим изображающие уравнения

$$\begin{aligned} sy_1 - \eta + 2\delta y_1 - (\delta^2 + \omega^2)y_2 &= \frac{c}{s}, \\ y_1 + sy_2 &= \frac{\eta}{s}, \end{aligned}$$

из которых найдем:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{s + \frac{c}{\eta} + (\delta^2 + \omega^2) \frac{1}{s}}{s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2}, \\ y_2 &= \frac{2\delta\eta - c}{s(s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Для обратного перехода в пространство оригиналов воспользуемся соответствиями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s + \delta)^2 + \omega^2} &\bullet \circ \frac{1}{\omega} e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1, \\ \frac{s}{(s + \delta)^2 + \omega^2} &\bullet \circ \frac{d}{dt_1} \left(\frac{1}{\omega} e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1 \right) = \frac{1}{\omega} e^{-\delta t_1} (-\delta \sin \omega t_1 + \omega \cos \omega t_1), \\ \frac{\delta^2 + \omega^2}{s[(s + \delta)^2 + \omega^2]} &= \frac{1}{s} - \frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2} - \frac{\delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \bullet \circ \\ &\bullet \circ 1 - e^{-\delta t_1} \cos \omega t_1 - \frac{\delta}{\omega} e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1. \end{aligned}$$

Выполнив вычисления, мы получим:

$$\begin{aligned} Y_1(t_1 + T_1) &= \eta \left[1 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{c}{\eta} - 2\delta \right) e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1 \right], \\ Y_2(t_1 + T_1) &= \frac{2\delta\eta - c}{\delta^2 + \omega^2} \left[1 - e^{-\delta t_1} \left(\frac{\delta}{\omega} \sin \omega t_1 + \cos \omega t_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Мы видим, что функция Y_1 , имея в момент времени $t_1 = 0$ значение η , в дальнейшем изменяется, как затухающая синусоида, следовательно, сначала возрастает, а затем уменьшается, вновь достигая значения η в некоторый момент времени $t_1 = T_2$ (рис. 4). Этот момент времени, определяемый из уравнения $\sin \omega T_2 = 0$ и равный

$$T_2 = \frac{\pi}{\omega},$$

мы опять примем за начальную точку новой шкалы времени t_2 . Начиная с момента времени $t_1 = T_2$, т. е. с $t_2 = 0$, во втором дифференциальном уравнении следует взять для правой части опять

первую строку, так как теперь $Y_1 < \eta$. Новыми начальными значениями будут:

$$Y_1(T_1 + T_2 + 0) = \eta, \quad Y_2(T_1 + T_2 + 0) = \frac{2\delta\eta - c}{\delta^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{\delta}{\omega} e^{-\delta \frac{\pi}{\omega}} \right].$$

Так как Y_2' , начиная с момента времени $t_2 = 0$, равно нулю, то Y_2

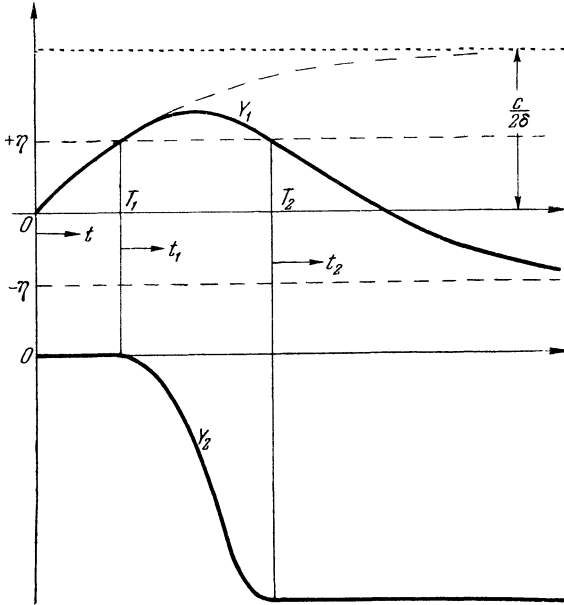


Рис. 4.

сохраняет при $t_2 > 0$ найденное постоянное значение, а функция Y_1 определяется из уравнения

$$Y_1' + 2\delta Y_1 - (\delta^2 + \omega^2) Y_2(T_1 + T_2) = cU(t_2).$$

Из предыдущего ясно, как этот процесс должен быть продолжен дальше.

Начальные значения для систем дифференциальных уравнений

Если мы проинтегрируем посредством преобразования Лапласа одно-единственное дифференциальное уравнение n -го порядка, для которого заданы n начальных значений, то путем последующей проверки мы сумеем убедиться, что полученное решение действительно удовлетворяет начальным значениям совершенно независимо от того, как эти значения были предписаны (см. стр. 52; об исключении, возникающем в случае, когда возмущающей функцией

является импульсная функция, см. стр. 56). Однако если вместо одного-единственного уравнения имеется система дифференциальных уравнений, то обстоятельства могут оказаться совсем иными. А именно, как мы видели в примере, рассмотренном на стр. 58, может случиться, что уже сами дифференциальные уравнения *устанавливают некоторые соотношения между начальными значениями решений и начальными значениями возмущающих функций*. Если начальные значения решений заданы так, что такие соотношения нарушаются, то система не может иметь решений с этими начальными значениями, или, иными словами, найденные решения должны иметь начальные значения, не совпадающие с заданными. Читатель, часто занимавшийся интегрированием систем дифференциальных уравнений, вероятно, не раз с удивлением замечал, что найденные решения иногда не удовлетворяют заданным начальным условиям. Возникает вопрос, как же следует поступать в таких случаях с найденными решениями. Практик, безусловно, встанет на точку зрения, что физический процесс, для которого составлены дифференциальные уравнения, в любом случае должен допускать математическое описание. Поэтому речь может идти лишь о том, какой смысл следует придать найденным функциям для того, чтобы они могли рассматриваться как решения, несмотря на то, что они не удовлетворяют начальным условиям.

Прежде всего выясним, когда указанное обстоятельство *не может возникнуть*, т. е. установим, при каких условиях найденные решения обязательно удовлетворяют заданным начальным условиям. Если какую-либо систему дифференциальных уравнений называют системой второго порядка, то под этим подразумевают, что самая старшая из производных, входящих в уравнения, имеет второй порядок. Однако это не исключает возможности того, что какая-либо из неизвестных функций входит в уравнения только своей первой производной или даже совсем без производной [см. систему уравнений (13.1)]. В таком случае мы все же включим в уравнения все функции вместе с их вторыми и первыми производными, но зато припишем тем производным, которые в действительности не входят в уравнения, коэффициенты, равные нулю. Следовательно, система будет иметь вид

$$(a_{11}Y_1'' + b_{11}Y_1' + c_{11}Y_1) + (a_{12}Y_2'' + b_{12}Y_2' + c_{12}Y_2) + \dots = F_1(t),$$

$$(a_{21}Y_1'' + b_{21}Y_1' + c_{21}Y_1) + (a_{22}Y_2'' + b_{22}Y_2' + c_{22}Y_2) + \dots = F_2(t),$$

.....

Можно доказать, что начальные значения $Y_1(+0)$, $Y_1'(+0)$; $Y_2(+0)$, $Y_2'(+0)$, ... для системы дифференциальных уравнений могут быть заданы произвольно тогда и только тогда, когда

определитель, составленный из коэффициентов при самых старших производных, не равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \neq 0.$$

При соблюдении этого условия решения обязательно будут удовлетворять заданным начальным значениям.

Указанный критерий, весьма удобный для практического использования, сразу позволяет выяснить, будут ли решения системы содержать в себе заданные начальные значения. Однако и в том случае, когда определитель равен нулю, все же при соблюдении некоторых других условий решения будут удовлетворять заданным начальным значениям. Существует способ отыскания этих условий, однако для практика возможность такого отыскания не представляет особого интереса, так как практик должен не разыскивать начальные значения, а брать их в том виде, в каком они диктуются положением вещей.

Как же следует понимать тот случай, когда *заданные начальные значения не совпадают с действительно получающимися начальными значениями*? Для ответа на этот вопрос вернемся к сказанному на стр. 52 по поводу отдельного дифференциального уравнения. Заданные начальные значения обуславливаются *прошедшим состоянием* физической системы, описываемой рассматриваемыми дифференциальными уравнениями; они представляют собой те значения, с которыми физическая система подходит к нулевой точке шкалы t от отрицательных значений t , т. е. значения $Y_1(-0)$, $Y_1'(-0)$, \dots ; $Y_2(-0)$, $Y_2'(-0)$, \dots . Эти начальные значения, обусловленные прошедшим, не всегда совпадают с начальными значениями $Y_1(+0)$, $Y_1'(+0)$, \dots , определяемыми полученным решением. Иными словами, не всегда можно с этими начальными значениями перейти из области $t < 0$ в область $t \geq 0$ и тем самым осуществить в момент времени $t = 0$ непрерывный переход от прошедшего к будущему. Однако причина этого несовпадения лежит не в самих начальных значениях — они целиком зависят от особенностей физической системы и от тех возмущающих функций, которые действовали в прошедшем, — а в возмущающих функциях, действующих при $t \geq 0$. В самом деле, мы выбираем эти функции для какого-либо процесса включения произвольно, без учета предыдущего состояния системы. Если новые возмущающие функции (при $t > 0$) не «подходят» к старым возмущающим функциям (при $t < 0$), следовательно, если в момент времени $t = 0$ происходят скачки возмущающих функций, то не должно быть ничего удивительного в том, что величины $Y_1, Y_1', \dots, Y_2, Y_2', \dots$, определяю-

щие физическую систему, также претерпевают разрывные изменения, т. е.

$$Y_1(-0) \neq Y_1(+0), Y_1' \neq Y_1'(+0), \dots; Y_2(-0) \neq Y_2(+0), \dots$$

Можно математически точно доказать, что скачки, которые возникают в таких случаях, определяются именно теми решениями, которые получаются в результате применения общего метода, следовательно, эти решения являются «физически правильными». Таким образом, методом преобразования Лапласа можно пользоваться всегда без всяких сомнений, независимо от того, как заданы начальные значения.

Г Л А В А 4
РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 14. Разностные уравнения с непрерывным аргументом ¹⁾

Разностью первого порядка функции $F(t)$ для приращения независимой переменной, равного ω , называется выражение

$$F(t + \omega) - F(t) = \Delta F(t).$$

Эта разность, как и сама функция $F(t)$, также зависит от t . Аналогичным образом мы можем составить разности второго, третьего и следующего порядков. Для разности второго порядка мы получим выражение

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta F(t)) &= \Delta^2 F(t) = \Delta F(t + \omega) - \Delta F(t) = \\ &= F(t + 2\omega) - 2F(t + \omega) + F(t). \end{aligned}$$

В разность n -го порядка, обозначаемую через $\Delta^n F(t)$, войдут, очевидно, значения $F(t)$, $F(t + \omega)$, \dots , $F(t + n\omega)$.

Составим, аналогично дифференциальному уравнению, линейное разностное уравнение n -го порядка

$$a_n \Delta^n Y + a_{n-1} \Delta^{n-1} Y + \dots + a_1 \Delta Y + a_0 Y = G(t).$$

Легко видеть, что этому уравнению можно придать более наглядный вид

$$c_0 Y(t) + c_1 Y(t + \omega) + \dots + c_n Y(t + n\omega) = G(t).$$

Такое уравнение также называется *разностным уравнением n -го порядка*.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $\omega = 1$, так как в любом другом случае этого можно достичь посредством подстановки $t = \omega t$.

Для того чтобы решение дифференциального уравнения n -го порядка было вполне определенным, необходимо задать n началь-

¹⁾ На практике чаще всего встречаются разностные уравнения с независимой переменной, принимающей лишь дискретные значения. Читатель, интересующийся только такими уравнениями, может пропустить настоящий параграф и начать чтение прямо со стр. 84.

ных значений $Y(+0)$, $Y'(+0)$, ..., $Y^{(n-1)}(+0)$. В случае разностного уравнения этому условию соответствует задание функции в n начальных интервалах, каждый длиной $\omega = 1$, т. е. на участке $0 \leq t < n$. Тогда посредством уравнения

$$Y(t+n) = \frac{1}{c_n} [G(t) - c_0 Y(t) - c_1 Y(t+1) - \dots - c_{n-1} Y(t+n-1)]$$

мы сумеем вычислить функцию Y сначала в интервале $n \leq t < n+1$, выбрав для этого $0 \leq t < 1$. Затем, имея значения функции Y в интервале $1 \leq t < n+1$, найдем ее значение в интервале $n+1 \leq t < n+2$, выбрав для этого $1 \leq t < 2$, и т. д. Вместо такого последовательного вычисления значений Y можно сразу найти явное выражение для функции $Y(t)$ посредством преобразования Лапласа.

Покажем это на примере разностного уравнения второго порядка ¹⁾

$$c_0 Y(t) + c_1 Y(t+1) + Y(t+2) = G(t), \quad (14.1)$$

для которого значения функции $Y(t)$ заданы в интервале $0 \leq t < 2$. На основании второй теоремы смещения (правило III) разностному уравнению (14.1) соответствует изображающее уравнение

$$c_0 y(s) + c_1 e^s \left[y(s) - \int_0^1 e^{-st} Y(t) dt \right] + e^{2s} \left[y(s) - \int_0^2 e^{-st} Y(t) dt \right] = g(s).$$

Мы видим, что для составления этого уравнения используются именно те значения функции $Y(t)$, которые заданы в интервале $0 \leq t < 2$. Перенеся все члены, не содержащие $y(s)$, в правую часть, мы получим:

$$y(s) (c_0 + c_1 e^s + e^{2s}) = g(s) + c_1 e^s \int_0^1 e^{-st} Y(t) dt + e^{2s} \int_0^2 e^{-st} Y(t) dt. \quad (14.2)$$

Рассмотрим сначала случай, когда «начальные значения» функции $Y(t)$ в интервале $0 \leq t < 2$ равны нулю, т. е. учтем в правой части уравнения (14.2) только первое слагаемое. Тогда решением изображающего уравнения (14.2) будет

$$y(s) = \frac{1}{e^{2s} + c_1 e^s + c_0} g(s). \quad (14.3)$$

И здесь для обратного перехода в пространство оригиналов удобно прибегнуть к разложению на простейшие дроби. Введя обозначение

¹⁾ При решении разностных уравнений целесообразно, так же как и при решении дифференциальных уравнений, разделить все члены на самый старший коэффициент $c_n = c_n$, вследствие чего коэффициент при члене $Y(t+n) = Y(t+2)$ станет равным единице.

ние $e^s = z$, представим знаменатель в выражении (14.3) в виде

$$p(z) = z^2 + c_1 z + c_0 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2).$$

Если нули α_1 и α_2 многочлена $p(z)$ неодинаковы, то согласно формуле (11.4)

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha_1)} \frac{1}{z - \alpha_1} + \frac{1}{p'(\alpha_2)} \frac{1}{z - \alpha_2},$$

следовательно,

$$\frac{1}{e^{2s} + c_1 e^s + c_0} = \frac{1}{p(e^s)} = \frac{1}{p'(\alpha_1)} \frac{1}{e^s - \alpha_1} + \frac{1}{p'(\alpha_2)} \frac{1}{e^s - \alpha_2} \dots \quad (14.4)$$

Таким образом, для определения оригинала, соответствующего изображению (14.3), необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа для членов, которые все имеют вид

$$\frac{g(s)}{e^s - \alpha}.$$

Однако непосредственное применение для этой цели теоремы свертывания невозможно, так как функция $1/(e^s - \alpha)$ не является результатом преобразования Лапласа, а потому ей не соответствует никакой оригинал. Но если мы разложим член $g(s)/(e^s - \alpha)$ в ряд

$$\frac{g(s)}{e^s - \alpha} = g(s) e^{-s} \frac{1}{1 - \alpha e^{-s}} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha^{l-1} g(s) e^{-ls},$$

то, применив к отдельным членам этого ряда первую теорему сдвига (правило II), сразу получим соответствующий оригинал¹⁾

$$\sum_{l=1}^{\infty} \alpha^{l-1} G(t-l),$$

¹⁾ При таком разложении в ряд предполагается, что бесконечное суммирование и преобразование Лапласа можно менять местами. Однако легко убедиться, что полученный результат правилен независимо от этого предположения. Можно также, воспользовавшись тождеством

$$\frac{g(s)}{e^s - \alpha} = [sg(s) - G(+0)] \frac{1}{s(e^s - \alpha)} + \frac{G(+0)}{s(e^s - \alpha)}$$

и соответствием

$$\frac{1}{s(e^s - \alpha)} \bullet \circ \frac{\alpha^{[t]} - 1}{\alpha - 1}$$

(№ 52 в таблице II,3), представить оригинал в виде

$$G'(t) * \frac{\alpha^{[t]} - 1}{\alpha - 1} + G(+0) \frac{\alpha^{[t]} - 1}{\alpha - 1}.$$

После довольно сложного вычисления свертки, входящей в это выражение, мы получим прежний результат.

причем следует положить $G(t) = 0$ при $t < 0$, и поэтому $G(t-l) = 0$ при $l > t$. Следовательно, в действительности в этом ряде имеется только конечное число членов, для которых $l \leq t$. Применяв принятый в математике символ $[t]$ для обозначения наибольшего целого числа, меньшего или равного t , мы сумеем заменить предыдущий ряд следующим:

$$\sum_{l=1}^{[t]} \alpha^{l-1} G(t-l).$$

До тех пор, пока $0 \leq t < 1$, разность $t-l$ будет всегда меньше нуля ($l=1, 2, \dots$), и поэтому указанная сумма будет равна нулю.

Таким образом, приняв во внимание равенство (14.4), мы получим для решения $y(s)$ изображающего уравнения (14.3) оригинал

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{p'(\alpha_1)} \sum_{l=1}^{[t]} \alpha_1^{l-1} G(t-l) + \frac{1}{p'(\alpha_2)} \sum_{l=1}^{[t]} \alpha_2^{l-1} G(t-l) & \text{при } t \geq 1. \end{cases} \quad (14.5)$$

Вторую строку правой части формулы (14.5) можно представить также в виде

$$\sum_{l=1}^{[t]} G(t-l) \left[\frac{\alpha_1^{l-1}}{p'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^{l-1}}{p'(\alpha_2)} \right], \quad (14.6)$$

откуда сразу видно, что *решением разностного уравнения n -го порядка*

$$c_0 Y(t) + c_1 Y(t+1) + \dots + c_n Y(t+n-1) + Y(t+n) = G(t)$$

будет:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ \sum_{l=1}^{[t]} G(t-l) \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu^{l-1}}{p'(\alpha_\mu)} & \text{при } t \geq 1, \end{cases} \quad (14.7)$$

где $p(z)$ есть многочлен

$$p(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n),$$

нули которого $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ предполагаются неодинаковыми.

Так как «начальные значения» мы приняли равными нулю, то $Y(t)$ должно быть равно нулю не только при $0 \leq t < 1$, но и при $0 \leq t < n$, что нетрудно доказать. Далее, полученному решению можно придать формально еще более простой вид, если ввести функцию $Q(t)$, полученную нами в § 11 при решении

дифференциального уравнения n -го порядка в качестве оригинала для изображения $q(s) = 1/p(s)$. Согласно формуле (11.5) имеем:

$$Q(t) = \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_{\mu})} e^{\alpha_{\mu} t}. \quad (14.8)$$

Если воспользоваться этой функцией, то, как можно доказать, решением неоднородного разностного уравнения n -го порядка при нулевых начальных значениях будет:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < n, \\ \sum_{l=n}^{|t|} G(t-l) Q^{(l-1)}(0) & \text{при } t \geq n. \end{cases} \quad (14.9)$$

В этом виде решение остается правильным и для случая, когда среди нулей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеются одинаковые, если только под $Q(t)$ понимать оригинал, соответствующий изображению $q(s) = 1/p(s)$. Для получения решения прежде всего необходимо выполнить разложение функции $1/p(s)$ на простейшие дроби способом, указанным на стр. 46, и затем осуществить переход в пространство оригиналов.

Для облегчения практического применения полученного результата сформулируем его еще раз:

Решение разностного уравнения

$$c_0 Y(t) + c_1 Y(t+1) + \dots + c_{n-1} Y(t+n-1) + Y(t+n) = G(t)$$

с «начальными условиями»

$$Y(t) = 0 \quad \text{при } 0 \leq t < n$$

определяется формулой (14.9), в которой под $Q(t)$ следует понимать оригинал, соответствующий изображению $q(s) = 1/p(s)$, где $p(s)$ есть многочлен

$$p(s) = s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0 = (s - \alpha_1) \dots (s - \alpha_n).$$

Если все нули $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ различны, то $Q(t)$ определяется формулой (14.8).

Подчеркнем, что полученный результат относится к случаю, когда коэффициент при члене $Y(t+n)$ разностного уравнения равен единице. В противном случае все члены уравнения необходимо разделить перед решением на этот коэффициент.

Вернемся к общему решению изображающего уравнения (14.2). До сих пор мы учитывали только первое слагаемое $g(s)$ правой части, иными словами, мы рассматривали неоднородное разностное уравнение $[G(t) \neq 0]$ при нулевых начальных значениях. Теперь поступим наоборот, а именно сохраним в правой части только второе и третье слагаемые, т. е. будем рассматривать однородное

разностное уравнение $[G(t) \equiv 0]$ с произвольными начальными значениями. В целях сокращения дальнейших записей введем еще один символ. Раньше мы обозначили наибольшее целое число, содержащееся в t , через $[t]$. Обозначим теперь превышение числа t над наибольшим содержащимся в нем целым числом через $\{t\}$; тогда мы будем иметь:

$$t = [t] + \{t\}.$$

Так, например, $\{3,5\} = 0,5$; $\{3\} = 0$. Воспользовавшись этим сокращенным обозначением, сформулируем без доказательства следующий результат: *решение однородного разностного уравнения второго порядка с произвольными начальными значениями при условии, что нули α_1 и α_2 многочлена $p(z)$ различны, имеет вид*

$$Y(t) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} [-c_0 Y(\{t\}) (\alpha_1^{[t]-1} - \alpha_2^{[t]-1}) + \\ + Y(\{t\} + 1) (\alpha_1^{[t]} - \alpha_2^{[t]})] \text{ при } t \geq 2. \quad (14.10)$$

Эту запись надо понимать так: если t есть число, большее или равное двум, то $\{t\}$ лежит в интервале $(0, 1)$, а $\{t\} + 1$ — в интервале $(1, 2)$; следовательно, значения $Y(\{t\})$ и $Y(\{t\} + 1)$, входящие в правую часть формулы (14.10), представляют собой не что иное, как заданные начальные значения.

Таким образом, мы полностью решили разностное уравнение второго порядка. В самом деле, общее решение [для произвольной правой части $G(t)$ и произвольных начальных значений] получается сложением решений (14.9) и (14.10).

Ради полноты приведем еще следующий результат: *решением однородного разностного уравнения n -го порядка при произвольных начальных значениях будет*

$$Y(t) = \sum_{\mu=1}^n Y(\{t\} + \mu - 1) \sum_{k=0}^{n-\mu} c_{\mu+k} Q^{(\{t\}+k)}(0), \quad (14.11)$$

где $Q(t)$ имеет тот же смысл, что и выше. Решение (14.11) применимо и в том случае, когда среди нулей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеются одинаковые.

В практических задачах часто бывает, что для разностного уравнения второго порядка задаются не «начальные значения» в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$, а «граничные значения» в интервале $(0, 1)$ и $(N-1, N)$, где N есть целое число, большее или равное трем. В таком случае задача состоит в отыскании значений функции $Y(t)$ в интервале от $t=1$ до $t=N-1$. Если нули α_1 и α_2 много-

члена $p(z)$ различны, то решением такой граничной задачи будет:

$$\begin{aligned}
 Y(t) = & \frac{1}{\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-2}} [Y(\{t\}) (\alpha_1^{N-1} \alpha_2^{\{t\}} - \alpha_1^{\{t\}} \alpha_2^{N-1}) + \\
 & + Y(\{t\} + N - 1) (\alpha_1^{\{t\}} - \alpha_2^{\{t\}}) + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sum_{l=2}^{\{t\}} G(t-l) (\alpha_1^{l-1} - \alpha_2^{l-1}) - \\
 & - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_1^{\{t\}} - \alpha_2^{\{t\}}}{\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}} \sum_{l=2}^{N-1} G(\{t\} + N - 1 - l) (\alpha_1^{l-1} - \alpha_2^{l-1}). \quad (14.12)
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое при $0 \leq t < 2$ равно нулю.

Для вывода формулы (14.12) следует воспользоваться формулой, полученной для решения разностного уравнения при заданных начальных значениях, а именно, вычислить из нее значения $Y(t)$ при $N-1 \leq t < N$, приравнять их заданным граничным значениям и посредством найденных соотношений исключить значения $Y(t)$ в интервале $1 \leq t < 2$.

§ 15. Разностные уравнения с дискретным аргументом

Независимую переменную t разностного уравнения можно мыслить, в отличие от независимой переменной дифференциального уравнения, *целочисленной*, следовательно, в этом случае и искомые, и заданные функции могут иметь лишь значения, соответствующие целочисленным аргументам. Функции, определенные только для целочисленных значений аргумента, называются *последовательностями*. Для такого рода функций принято обозначать независимую переменную не через t , а через ν , и притом помещать ее в виде индекса при букве, обозначающей функцию. Поэтому вместо $Y(t)$ и $G(t)$ мы будем писать Y_ν и G_ν . При таких обозначениях разностное уравнение n -го порядка будет иметь вид

$$c_0 Y_\nu + c_1 Y_{\nu+1} + \dots + c_{n-1} Y_{\nu+n-1} + c_n Y_{\nu+n} = G_\nu. \quad (15.1)$$

Как и в § 14, примем, что $c_n = 1$. Уравнения вида (15.1) называются также *рекуррентными* по той причине, что, имея «начальные значения»

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \quad (15.2)$$

мы можем выразить через них значения Y_n, Y_{n+1} и т. д. В самом деле, положив в уравнении (15.1) $\nu = 0$, мы определим значение Y_n , затем, положив $\nu = 1$, найдем Y_{n+1} и т. д.

Покажем, как решаются рекуррентные уравнения при заданных начальных условиях посредством преобразования Лапласа. Очевидно, что рекуррентные уравнения можно рассматривать как частный случай разностных уравнений общего вида, способ решения которых был изложен в § 14. Для этого необходимо в последних

уравнениях считать функции $Y(t)$ и $G(t)$ в интервалах $(0, 1)$, $(1, 2)$ и т. д. каждый раз постоянными, т. е. принять, что

$$Y(t) = Y_\nu \quad \text{при } \nu \leq t < \nu + 1 \quad (\nu = 0, 1, \dots),$$

и затем использовать решения, указанные в § 14, только для значений $t = \nu$. Следовательно, в полученные там формулы надо подставить $t = [t] = \nu$, $\{t\} = 0$. Приведем для читателя, уже знакомого с разностными уравнениями общего вида, сначала готовые формулы для решения рекуррентных уравнений, а затем перейдем к непосредственному решению этих уравнений.

Решение неоднородного разностного уравнения n -го порядка с начальными значениями $Y_0 = Y_1 = \dots = Y_{n-1} = 0$.

На основании формулы (14.9) мы имеем:

$$Y_\nu = \sum_{l=n}^{\nu} G_{\nu-l} Q^{(l-1)}(0) \quad \text{при } \nu \geq n, \quad (15.3)$$

причем $Q(t) \circ \rightarrow q(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0}$.

Решение однородного разностного уравнения n -го порядка с произвольными начальными значениями Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} .

На основании формулы (14.11) мы имеем:

$$Y_\nu = \sum_{\mu=1}^n Y_{\mu-1} \sum_{k=0}^{n-\mu} c_{\mu+k} Q^{(\nu+k)}(0) \quad \text{при } \nu \geq n. \quad (15.4)$$

В случае уравнения второго порядка с различными нулями α_1, α_2 многочлена $p(s) = s^2 + c_1s + c_0$ следует воспользоваться формулой (14.10); мы получим:

$$Y_\nu = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} [-c_0 Y_0 (\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) + Y_1 (\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu)] \quad \text{при } \nu \geq 2. \quad (15.5)$$

Решение неоднородного разностного уравнения второго порядка с заданными граничными значениями Y_0 и Y_{N-1} .

Согласно формуле (14.2) для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ мы имеем:

$$\begin{aligned} Y_\nu = & \frac{1}{\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}} [Y_0 (\alpha_1^{N-1} \alpha_2^\nu - \alpha_1^\nu \alpha_2^{N-1}) + Y_{N-1} (\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu)] + \\ & + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sum_{l=2}^{\nu} G(\nu - l) (\alpha_1^{l-1} - \alpha_2^{l-1}) - \\ & - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu}{\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}} \sum_{l=2}^{N-1} G(N - 1 - l) (\alpha_1^{l-1} - \alpha_2^{l-2}) \end{aligned} \quad (15.6)$$

при $1 \leq \nu \leq N - 2$. При $\nu = 1$ второе слагаемое следует положить равным нулю.

Рассмотрим теперь *разностное уравнение* (15.1) с заданными начальными значениями (15.2) независимо от теории, изложенной в § 14. Пусть функция $Y(t)$ [а также $G(t)$] определена только при целочисленных $t = \nu$. Дополним функцию $Y(t)$ до ступенчатой функции, положив для этого

$$Y(t) = Y_\nu \text{ при } \nu \leq t < \nu + 1. \tag{15.7}$$

Полученная таким способом функция будет удовлетворять при всех $t \geq 0$ разностному уравнению

$$c_0 Y(t) + c_1 Y(t + 1) + \dots + c_n Y(t + n - 1) + Y(t + n) = G(t) \tag{15.8}$$

при начальных условиях

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= Y_0 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ Y(t) &= Y_1 & \text{при } 1 \leq t < 2, \\ \dots & \dots & \dots \\ Y(t) &= Y_{n-1} & \text{при } n-1 \leq t < n. \end{aligned} \right\} \tag{15.9}$$

Остановимся сначала на *частном случае* $n = 2$ и применим к уравнению (15.8) преобразование Лапласа. На основании правила III мы получим:

$$c_0 y(s) + c_1 e^s \left[y(s) - \int_0^1 e^{-st} Y(t) dt \right] + e^{2s} \left[y(s) - \int_0^2 e^{-st} Y(t) dt \right] = g(s),$$

или

$$y(s) (e^{2s} + c_1 e^s + c_0) = g(s) + (e^{2s} + c_1 e^s) \int_0^1 e^{-st} Y(t) dt + e^{2s} \int_1^2 e^{-st} Y(t) dt.$$

В интервале $(0, 1)$ мы имеем $Y(t) = Y_0$, а в интервале $(1, 2)$ $Y(t) = Y_1$, следовательно,

$$\int_0^1 e^{-st} Y(t) dt = Y_0 \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad \int_1^2 e^{-st} Y(t) dt = Y_1 \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s},$$

а потому

$$y(s) (e^{2s} + c_1 e^s + c_0) = g(s) + \frac{e^s - 1}{s} [Y_0 (e^s + c_1) + Y_1].$$

Заменяв e^s на z и разложив многочлен $z^2 + c_1 z + c_0$ на множители, мы будем иметь:

$$p(z) = z^2 + c_1 z + c_0 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2),$$

поэтому

$$e^{2s} + c_1 e^s + c_0 = (e^s - \alpha_1)(e^s - \alpha_2).$$

Таким образом, решение $y(s)$ изображающего уравнения складывается из трех членов:

$$\begin{aligned} & \frac{g(s)}{(e^s - \alpha_1)(e^s - \alpha_2)}, \\ Y_1 & \frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - \alpha_1)(e^s - \alpha_2)}, \\ Y_0 & \frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - (\alpha_1 + \alpha_2)}{(e^s - \alpha_1)(e^s - \alpha_2)} \end{aligned}$$

[в последнем из этих членов мы заменили коэффициент c_1 на $-(\alpha_1 + \alpha_2)$]. Все эти изображения следует перевести посредством обратного преобразования Лапласа назад в пространство оригиналов. При этом необходимо различать два следующих случая.

а) Нули α_1 и α_2 различны.

Основным соответствием для изображений указанного вида является

$$\alpha^{|t|} \circ \bullet \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)}, \quad (15.10)$$

в правильности которого можно убедиться путем простых вычислений. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha^{|t|} dt &= \int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^2 e^{-st} \alpha dt + \int_2^3 e^{-st} \alpha^2 dt + \dots = \\ &= \frac{1}{s} [(1 - e^{-s}) + \alpha(e^{-s} - e^{-2s}) + \alpha^2(e^{-2s} - e^{-3s}) + \dots] = \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} (1 + \alpha e^{-s} + \alpha^2 e^{-2s} + \dots) = \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{1 - \alpha e^{-s}} = \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} \quad \text{при } |\alpha e^{-s}| < 1. \end{aligned}$$

Из соответствия (15.10), как нетрудно видеть (см. также соответствия № 56 и 57 в таблице II,3), следует, что второму и третьему из указанных выше членов изображения $y(s)$ отвечают оригиналы

$$\begin{aligned} Y_1 & \frac{\alpha_1^{|t|} - \alpha_2^{|t|}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ -Y_0 & \alpha_1 \alpha_2 \frac{\alpha_1^{|t|-1} - \alpha_2^{|t|-1}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \end{aligned}$$

во втором из которых можно заменить $\alpha_1 \alpha_2$ на c_0 .

Оригинал для первого члена мы уже вычислили на стр. 78, поэтому прямо воспользуемся формулой (14.6), но учтем, что согласно формуле (14.9) суммирование начинается в действитель-

ности не с $l=1$, а только с $l=2$. Таким образом, первому члену решения $y(s)$ соответствует оригинал

$$\sum_{l=2}^t G(t-l) \left[\frac{\alpha_1^{l-1}}{p'(a_1)} + \frac{\alpha_2^{l-1}}{p'(a_2)} \right].$$

Если мы учтем теперь, что нас интересуют только целочисленные значения ν переменной t , для которых $t = [t] = \nu$, то в качестве полного решения разностного уравнения второго порядка будем иметь:

$$Y(\nu) = \sum_{l=2}^{\nu} G(\nu-l) \left[\frac{\alpha_1^{l-1}}{2a_1+c_1} + \frac{\alpha_2^{l-1}}{2a_2+c_1} \right] - \\ - Y_0 c_0 \frac{\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + Y_1 \frac{\alpha_1^{\nu} - \alpha_2^{\nu}}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{при } \nu \geq 2. \quad (15.11)$$

б) Нули α_1 и α_2 одинаковы: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

В этом случае решение $y(s)$ изображающего уравнения складывается из следующих трех членов:

$$\frac{g(s)}{(e^s - \alpha)^2}, \\ Y_1 \frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - \alpha)^2}, \\ Y_0 \frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - 2\alpha}{(e^s - \alpha)^2}.$$

Оригиналы для второго и третьего членов имеются в таблице II,3 под № 54 и 58:

$$Y_1 [t] \alpha^{[t]} - 1, \\ - Y_0 ([t] - 1) \alpha^{[t]}.$$

Воспользовавшись рядом

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} l z^{l-1},$$

придадим первому члену изображения вид

$$\frac{g(s)}{(e^s - \alpha)^2} = g(s) e^{-2s} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-s})^2} = \\ = g(s) e^{-2s} \sum_{l=1}^{\infty} l \alpha^{l-1} e^{-(l-1)s} = \sum_{l=1}^{\infty} l \alpha^{l-1} g(s) e^{-(l+1)s}.$$

Этому изображению, согласно правилу II, соответствует оригинал

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \alpha^{l-1} G(t-l-1),$$

в котором функцию $G(t)$ для отрицательных значений аргумента

следует положить равной нулю; поэтому в действительности мы будем иметь вместо бесконечной суммы конечную сумму

$$\sum_{l=1}^{[t]-1} l\alpha^{l-1}G(t-l-1) = \sum_{l=2}^{[t]} (l-1)\alpha^{l-2}G(t-l).$$

И здесь нас интересуют только целочисленные значения $t = \nu$, следовательно, искомым решением разностного уравнения второго порядка будет:

$$Y(\nu) = \sum_{l=2}^{\nu} (l-1)\alpha^{l-2}G(\nu-l) - Y_0(\nu-1)\alpha^{\nu} + Y_1\nu\alpha^{\nu-1} \text{ при } \nu \geq 2. \quad (15.12)$$

Таким образом, мы полностью закончили решение разностного уравнения второго порядка с аргументом, принимающим только дискретные значения, при заданных начальных значениях Y_0 и Y_1 . Из хода решения легко видеть, как следует поступить в случае разностного уравнения более высокого порядка. Так, например, для разностного уравнения третьего порядка правая часть изображающего уравнения будет содержать, кроме $g(s)$, следующие члены:

$$\begin{aligned} & c_1 e^s \int_0^1 e^{-st} Y(t) dt + c_2 e^{2s} \int_0^2 e^{-st} Y(t) dt + e^{3s} \int_0^3 e^{-st} Y(t) dt = \\ & = (e^{3s} + c_2 e^{2s} + c_1 e^s) \int_0^1 e^{-st} Y(t) dt + (e^{3s} + c_2 e^{2s}) \int_1^2 e^{-st} Y(t) dt + \\ & \quad + e^{3s} \int_2^3 e^{-st} Y(t) dt = \\ & = e^s (e^{2s} + c_2 e^s + c_1) Y_0 \frac{1 - e^{-s}}{s} + \\ & \quad + e^{2s} (e^s + c_2) Y_1 \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} + e^{3s} \frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s} = \\ & = \frac{e^s - 1}{s} [Y_0 (e^{2s} + c_2 e^s + c_1) + Y_1 (e^s + c_2) + Y_2]. \end{aligned}$$

Для определения $u(s)$ необходимо разделить это выражение на

$$e^{3s} + c_2 e^{2s} + c_1 e^s + c_0.$$

Следовательно, задача сводится к отысканию оригиналов для изображений

$$\begin{aligned} & \frac{e^s - 1}{s} \frac{e^{2s} + c_2 e^s + c_1}{e^{3s} + c_2 e^{2s} + c_1 e^s + c_0}, \\ & \frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s + c_2}{e^{3s} + c_2 e^{2s} + c_1 e^s + c_0}, \\ & \frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{e^{3s} + c_2 e^{2s} + c_1 e^s + c_0}. \end{aligned}$$

Вторые множители каждого из этих изображений, если заменить e^s на z , принимают вид дробно-рациональных функций

$$\frac{z^2 + c_2 z + c_1}{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}, \quad \frac{z + c_2}{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}, \quad \frac{1}{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}.$$

Эти функции можно разложить одним из способов, указанных в главе 3, на простейшие дроби, которые, если нули знаменателя неодинаковы, все имеют вид $d/(z - \alpha)$. Таким образом, все три указанные изображения будут складываться только из членов вида

$$\frac{e^s - 1}{s} \frac{d}{e^s - \alpha},$$

которым соответствует оригинал $d\alpha^{t|}$. Если знаменатель изображений имеет кратные нули, то при разложении на простейшие дроби появятся также члены вида

$$\frac{e^s - 1}{s} \frac{d}{(e^s - \alpha)^2} \quad \text{или} \quad \frac{e^s - 1}{s} \frac{d}{(e^s - \alpha)^3},$$

оригиналы для которых можно найти в таблице соответствий. [Эти оригиналы легко получить также путем непосредственного вычисления, если продифференцировать соответствие для $\alpha^{t|}$ по α .]

При решении конкретных разностных уравнений, так же, как и при решении конкретных дифференциальных уравнений, не следует пользоваться выведенными выше общими формулами; вместо этого, как правило, целесообразнее вести все выкладки с самого начала, так как при этом обычно возникают упрощения.

ГЛАВА 5

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 16. Общие указания о применении преобразования Лапласа к уравнениям в частных производных ¹⁾

В уравнении в частных производных неизвестной является функция нескольких независимых переменных. Мы рассмотрим здесь только случай двух независимых переменных, которые обозначим через x и t ; неизвестную функцию обозначим через $U(x, t)$. Для уравнения в частных производных всегда необходимо заранее указать область определения функции $U(x, t)$, т. е. ту область плоскости xt , внутри которой должна быть определена неизвестная функция. Для уравнений, которые мы будем рассматривать в этой главе, введем

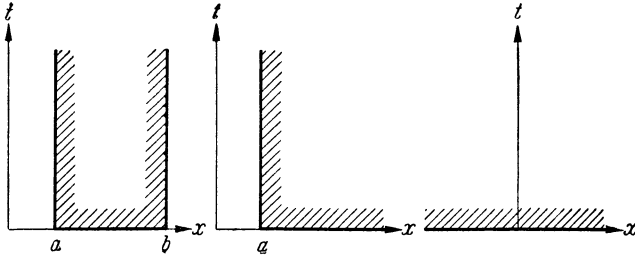


Рис. 5.

следующее принципиальное условие: примем, что переменная t изменяется на полупрямой $0 \leq t < \infty$, а переменная x — в конечном или бесконечном интервале. Следовательно, в зависимости от того, изменяется ли x в конечном интервале, полупрямой или на всей прямой, областью определения функции $U(x, t)$ в плоскости xt будет либо полуполоса, либо четверть плоскости, либо полуплоскость (рис. 5).

¹⁾ Читателю, совершенно не знакомому с материалом настоящей главы, рекомендуется прочитать § 16 сначала только бегло, затем разобрать пример, решенный в § 17, и только потом вновь вернуться к § 16 для его тщательного изучения.

Для того чтобы из бесконечно большого числа функций, удовлетворяющих уравнению в частных производных, выбрать вполне определенную, необходимо задать на *границах* области определения искомой функции некоторые *условия*. На практике встречаются условия двух родов: либо задаются значения самой функции или некоторых ее частных производных, либо задаются некоторые соотношения, связывающие между собой эти величины. Сказать что-либо общее о числе и виде этих условий заранее нельзя. Однако для уравнений в частных производных, встречающихся на практике, всегда можно указать, исходя из физических особенностей рассматриваемой задачи, какие условия могут и должны быть предписаны для того, чтобы существовало однозначное решение.

Если переменной t является время, то условия, существующие на горизонтальной границе $t=0$ области определения (т. е. вдоль интервала на оси x), называются *начальными условиями*, а условия на вертикальных границах (если таковые существуют) — *граничными условиями*.

Если мы хотим применить к уравнению в частных производных преобразование Лапласа, то мы должны выполнить его для всех входящих в уравнение производных и прежде всего для самой функции $U(x, t)$. Преобразование Лапласа представляет собой интегрирование по одной *единственной* переменной; поэтому, применяя это преобразование к функции $U(x, t)$, следует выполнить его только для одной независимой переменной, оставляя другую независимую переменную неизменной. Выберем в качестве переменной, относительно которой производится преобразование Лапласа, переменную t ; именно поэтому мы с самого начала предположили, что она изменяется от 0 до ∞ , т. е. в том интервале, в котором берется интеграл Лапласа. Переменную x будем считать при выполнении преобразования неизменной. Это означает, что каждому определенному значению x соответствует свое изображение функции $U(x, t)$. Следовательно, это изображение зависит не только от s , как было раньше, но также от x , т. е. оно является функцией от s и от x :

$$\mathfrak{L}\{U(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} U(x, t) dt = u(x, s).$$

Подвергая преобразованию Лапласа *частные производные по t* , мы можем применять правило V, но при этом должны каждый раз оставлять переменной x неизменной. Таким путем мы получим:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}\right\} = s \mathfrak{L}\{U(x, t)\} - U(x, +0),$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}\right\} = s^2 \mathfrak{L}\{U(x, t)\} - U(x, +0)s - U_t(x, +0),$$

где $U_t = \partial U / \partial t$. Что касается *частных производных по x* , то для возможности применения к решению уравнения преобразования Лапласа необходимо принять, что операция составления таких производных и операция составления интеграла Лапласа могут меняться местами. Так, например, необходимо принять, что

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L} \{ U(x, t) \} = \frac{\partial u(x, s)}{\partial x},$$

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x \partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L} \left\{ \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} [su(x, s) - U(x, +0)].$$

Мы видим, что при преобразовании частных производных появляются значения $U(x, +0)$, $U_t(x, +0)$, ... Следовательно, необходимое количество этих «начальных значений» должно быть задано в качестве *начальных условий*. Здесь мы опять встречаемся с тем же преимуществом, с которым уже встречались при решении обыкновенных дифференциальных уравнений: начальные значения входят в изображающее уравнение сами собой и поэтому учитываются автоматически.

Так как в результате преобразования Лапласа частные производные по t устраняются, то в изображающем уравнении остаются только частные производные по x . Это означает, что *изображающее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение*. Решение такого уравнения является несравненно более простой задачей, чем решение уравнения в частных производных. Следовательно, применение преобразования Лапласа к уравнению в частных производных чрезвычайно упрощает задачу интегрирования. Отсюда становится ясным, что посредством преобразования Лапласа можно решить много задач, которые при применении других методов либо совсем не могут быть решены, либо могут быть решены только с очень большим трудом.

Остается сказать несколько слов о *граничных условиях* на вертикальных границах области определения искомой функции (если только эти границы имеются). Пусть, например, $x = a$ есть левая граница интервала изменения x и пусть на этой границе задано значение функции $U(x, t)$, т. е. $U(a, t)$. По этому поводу необходимо сразу же оговорить, что такое граничное значение следует понимать в точности так же, как мы в свое время понимали начальные значения для обыкновенного дифференциального уравнения, т. е. рассматривать его в смысле предельного значения. Иными словами, это означает следующее: если обозначить функцию, заданную на границе $x = a$ и зависящую здесь только от t , через $A(t)$, то должно быть

$$\lim_{x \rightarrow a+0} U(x, t) = A(t),$$

или, короче,

$$U(a+0, t) = A(t),$$

Для уравнений в частных производных такое понимание граничных значений еще важнее, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. В самом деле, для $x = a$ решение, как правило, вообще не имеет смысла, поэтому значение $U(a, t)$ даже и нельзя определить. Единственное требование, которое может быть реализовано, заключается в том, чтобы предельное значение для $x \rightarrow a$ (и притом справа, поэтому мы пишем $x \rightarrow a + 0$) существовало и имело заданное значение.

Примем теперь, что операция предельного перехода $x \rightarrow a + 0$ и операция составления интеграла Лапласа могут меняться местами.

Тогда равенство

$$\mathfrak{L} \left\{ \lim_{x \rightarrow a+0} U(x, t) \right\} = \mathfrak{L} \{ A(t) \}$$

мы сумеем переписать в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \mathfrak{L} \{ U(x, t) \} = \mathfrak{L} \{ A(t) \},$$

или, если воспользоваться для обозначения изображений малыми буквами, в виде

$$\lim_{x \rightarrow a+0} u(x, s) = a(s).$$

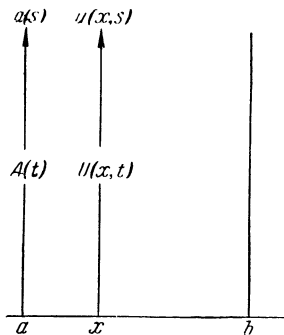


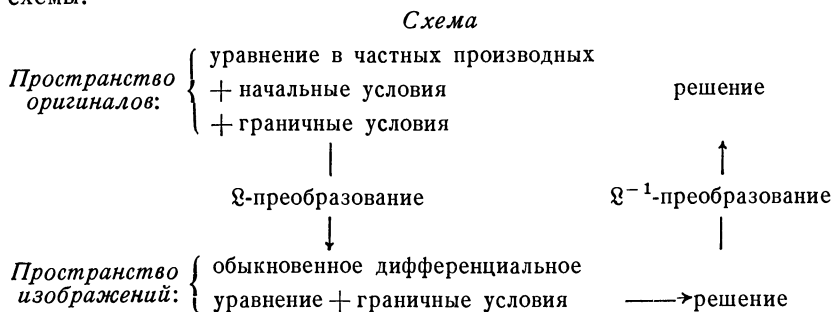
Рис. 6.

Это означает, что в качестве *граничного значения изображения* $u(x, s)$ для $x = a$ следует взять изображение *граничного значения* $A(t)$.

Это можно представить наглядно на рис. 6, из которого видно, что предельный переход от $u(x, s)$ к $a(s)$ можно заменить предельным переходом от $U(x, t)$ к $A(t)$ и последующим преобразованием функции $A(t)$ в ее изображение $a(s)$ (преобразование исходных функций в соответствующие изображения на вертикалях x и $x = a$ совершается одинаково). Если имеется также правая граница $x = b$ интервала изменения x , то все сказанное о граничном значении для левой границы следует отнести и к правой границе. Таким образом граничное значение изображения $u(x, s)$ получается путем преобразования Лапласа граничного значения исходной функции $U(x, t)$.

В том, что применение преобразования Лапласа к решению уравнений в частных производных требует введения некоторых допущений (возможности перемены местами операции преобразования Лапласа, с одной стороны, и операций дифференцирования и предельного перехода $x \rightarrow a + 0$, с другой), нет ничего удивительного. В самом деле, без введения допущений не обходится ни один метод. Правда, очень часто допущения вводятся не явно, а скрыто, например, принимается, что решение должно иметь определенный вид, может быть разложено в ряд и т. д. В связи с этим после выполнения решения всегда следует проверить, действительно ли найденная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, а также граничным и начальным условиям.

Представим намеченный ход решения уравнения в частных производных посредством преобразования Лапласа в виде следующей схемы:



Таким образом, прямое решение уравнения в частных производных при заданных начальных и граничных условиях заменяется косвенным решением: посредством преобразования Лапласа совершается переход из пространства оригиналов в пространство изображений, что приводит к замене уравнения в частных производных обыкновенным дифференциальным уравнением и притом таким, которое уже содержит в себе заданные начальные условия, вследствие чего они учитываются в дальнейшем автоматически; граничные же условия исходного уравнения переходят в граничные условия изображающего уравнения. После решения изображающего уравнения, т. е. обыкновенного дифференциального уравнения, производится обратное преобразование Лапласа, которое и приводит к решению первоначальной задачи.

Если неизвестная функция, определяемая уравнением в частных производных, зависит от *трех переменных*, т. е. если $U = U(x, y, t)$, где t изменяется в интервале $0 \leq t < \infty$, а x и y — в некоторой области плоскости xu , то, применив преобразование Лапласа, мы опять освободимся от частных производных по t , и останутся только частные производные по x и y . Следовательно, мы получим уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными, решение которого представляет собой опять значительно более простую задачу, чем решение уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными.

Наиболее трудным шагом при решении уравнения в частных производных посредством преобразования Лапласа является обычно *определение оригинала* для решения, найденного в пространстве изображений. Если таблицы, приложенные в конце книги, недостаточны для этого определения, то можно воспользоваться способами, указанными в главе 7.

В настоящем кратком руководстве мы имеем возможность рассмотреть только несколько типичных примеров, впрочем, достаточных для пояснения хода решения подобного рода задач.

§ 17. Уравнение теплопроводности или диффузии

Процессы, в которых происходит выравнивание какого-либо физического состояния, например процесс теплопроводности или процесс диффузии, описываются уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (17.1)$$

Покажем, как выполняется решение этого уравнения посредством преобразования Лапласа, причем будем пользоваться языком теории теплопроводности. В таком случае $U(x, t)$ будет температурой линейного проводника тепла (или пространственного, но такого, температура которого зависит только от одной координаты, т. е. остается постоянной на площади каждого отдельного сечения тела). Пусть проводник тепла простирается от $x=0$ до $x=l$. Переменная t означает время, которое изменяется от $t=0$ до $t=\infty$. Следовательно, областью определения искомой функции $U(x, t)$ в плоскости xt является полуполоса, если l конечно, и четверть плоскости, если $l=\infty$ (рис. 7).

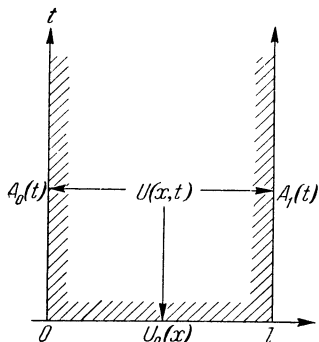


Рис. 7.

Пусть в момент времени $t=0$ проводник имеет определенную температуру, которая может зависеть от x ; обозначим ее через $U_0(x)$. Она представляет собой «начальное значение» функции $U(x, t)$ в смысле, разъясненном в § 16, т. е. функция $U(x, t)$ должна удовлетворять условию

$$U(x, +0) = U_0(x). \quad (17.2)$$

Из физических соображений можно предвидеть — и дальнейший ход решения это подтвердит, — что в рассматриваемой задаче мы можем обойтись одним-единственным начальным значением; следовательно, начальные значения $U_t(x, +0), \dots$ нам не понадобятся. Причина этого заключается, конечно, в том, что уравнение в частных производных (17.1) является уравнением первого порядка относительно t .

Пусть оба конца проводника $x=0$ и $x=l$ соединены с некоторыми источниками тепла, поддерживающими температуру концов на определенных уровнях, которые могут зависеть от времени. Следовательно, должны иметь место условия

$$U(+0, t) = A_0(t), \quad U(l-0, t) = A_1(t), \quad (17.3)$$

которые и представляют собой «граничные условия» в смысле, разъясненном в § 16. Разумеется, эти условия являются не единственно возможными: при других физических допущениях, например,

когда на одном конце проводника тепло излучается в окружающую среду, граничные условия будут иными.

Составим теперь для уравнения (17.1) при начальном условии (17.2) и граничных условиях (17.3) изображающее уравнение. Положив $\mathfrak{L}\{U(x, t)\} = u(x, s)$ и приняв во внимание начальное условие (17.2), мы получим:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = su(x, s) - U(x, +0) = su(x, s) - U_0(x).$$

Далее, поскольку дифференцирование по x и преобразование Лапласа можно менять местами, мы будем иметь:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L}\{U\} = \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2}.$$

Так как после перехода в пространство изображений остается только частная производная по x , то мы можем заменить ее обыкновенной производной, после чего изображающее уравнение примет вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = su - U_0(x). \quad (17.4)$$

В этом уравнении переменная s играет роль параметра, от которого зависит решение u ; именно поэтому мы и ввели для него обозначение $u(x, s)$.

Применим теперь преобразование Лапласа к граничным условиям (17.3). Прежде всего мы имеем:

$$\mathfrak{L}\{U(+0, t)\} = \mathfrak{L}\{A_0(t)\} = a_0(s), \quad \mathfrak{L}\{U(l-0, t)\} = \mathfrak{L}\{A_1(t)\} = a_1(s).$$

Далее, отождествив $\mathfrak{L}\{U(+0, t)\}$ с $u(+0, s)$ и $\mathfrak{L}\{U(l-0, t)\}$ с $u(l-0, s)$ (см. § 16), мы получим искомые граничные условия для изображающего уравнения (17.4):

$$u(+0, s) = a_0(s), \quad u(l-0, s) = a_1(s). \quad (17.5)$$

Заданное начальное условие (17.2) вошло в изображающее уравнение и, следовательно, учитывается в дальнейшем автоматически, что представляет собой важное преимущество рассматриваемого метода решения по сравнению с классическим методом.

Дифференциальное уравнение вида (17.4) при заданных граничных условиях интегрируется обычно следующим образом. Сначала решается однородное уравнение при произвольных граничных значениях; это означает, что член $U_0(x)$, делающий заданное уравнение неоднородным, т. е. начальная температура, предполагается равным нулю. Затем решается неоднородное уравнение для равных нулю граничных значений $a_0(s)$ и $a_1(s)$; это означает, что граничные температуры $A_0(t)$ и $A_1(t)$ принимаются равными нулю. Сумма обоих решений дает, очевидно, решение заданного уравнения.

а) Начальная температура равна нулю, граничные температуры — произвольны.

Решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = su \quad (17.6)$$

выполняется обычным способом: делается подстановка $u = e^{\alpha x}$, которая приводит к характеристическому уравнению $\alpha^2 = s$. Оба решения

$$\alpha = \pm \sqrt{s}$$

этого уравнения дают частные интегралы

$$e^{x\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad e^{-x\sqrt{s}},$$

из которых получается общий интеграл в виде суммы

$$c_1 e^{x\sqrt{s}} + c_2 e^{-x\sqrt{s}}.$$

Постоянные c_1 и c_2 следует определить так, чтобы были удовлетворены граничные условия (17.5). Проще всего сначала составить два частных решения, из которых одно имеет на левой границе значение 1, а на правой — значение 0, второе же решение имеет на левой границе значение 0, а на правой — значение 1. Такими решениями будут:

$$u_0(x, s) = \frac{e^{(l-x)\sqrt{s}} - e^{-(l-x)\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}},$$

$$u_1(x, s) = \frac{e^{x\sqrt{s}} - e^{-x\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}}.$$

Введя эти функции, мы можем придать искомому решению изображающего уравнения следующий вид:

$$u(x, s) = a_0(s) u_0(x, s) + a_1(s) u_1(x, s).$$

Теперь остается определить оригинал, соответствующий изображению $u(x, s)$. Для того чтобы не вводить сложных трансцендентных функций, ограничимся рассмотрением предельного случая $l = \infty$. При $l \rightarrow \infty$ функция $u_1(x, s)$ равна нулю, а для функции $u_0(x, s)$ мы получаем:

$$u_0(x, s) = \frac{e^{-x\sqrt{s}} - e^{-(2l-x)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2l\sqrt{s}}} \rightarrow e^{-x\sqrt{s}}.$$

Следовательно, необходимо произвести обратное преобразование Лапласа для функции

$$u(x, s) = a_0(s) e^{-x\sqrt{s}}. \quad (17.7)$$

Из соответствия

$$e^{-x\sqrt{s}} \circlearrowleft \frac{x}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \psi(x, t) \quad (x > 0)$$

и теоремы свертывания (правило IX) мы имеем:

$$U(x, t) = A_0(t) * \psi(x, t), \quad (17.8)$$

где ψ означает функцию, называемую в теории теплопроводности *двойным источником* (поскольку эта функция издавна обозначается малой буквой, мы в порядке исключения обозначили здесь оригинал малой буквой). Переписав правую часть этого равенства в явном виде, получим:

$$U(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t A_0(t-\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{3/2}} d\tau.$$

Мы видим отсюда, насколько было оправдано формулировать граничное условие в виде предельного соотношения

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, t) = A_0(t),$$

а не в виде $U(0, t) = A_0(t)$. В самом деле, если мы подставим в выражение под знаком интеграла просто $x=0$, то для $\tau=0$ интеграл, вследствие наличия знаменателя $\tau^{3/2}$, будет расходиться. Но и в том случае, если бы он имел вполне определенное значение, то все же вследствие множителя x , он получился бы равным не $A_0(t)$, а нулю. С другой стороны, путем несколько длинных рассуждений можно доказать, что функция (17.8) при $x \rightarrow 0$ имеет предельное значение $A_0(t)$, если только функция A_0 непрерывна в точке t .

В том, что начальное условие $U(x, +0)$ удовлетворяется, мы убеждаемся непосредственно.

б) *Начальная температура произвольна, граничные температуры равны нулю.*

Теперь остается решить неоднородное уравнение (17.4) при граничных условиях

$$u(+0, s) = 0, \quad u(l-0, s) = 0.$$

Если мы с самого начала примем, что $l = \infty$, то решением будет¹⁾:

$$u(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left\{ \int_0^{\infty} U_0(\xi) [e^{-(x-\xi)\sqrt{s}} - e^{-(x+\xi)\sqrt{s}}] d\xi + \right. \\ \left. + \int_x^{\infty} U_0(\xi) [e^{-(\xi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\xi+x)\sqrt{s}}] d\xi \right\} \quad (17.9)$$

[конечно, функция $U_0(x)$ должна вести себя в бесконечности так, чтобы второй интеграл сходился; если, например, функция $U_0(x)$ ограничена, то такая сходимость будет обеспечена]. Для обратного преобразования Лапласа воспользуемся соответствием

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} = \chi(\alpha, t),$$

которое применимо только при условии, что $\alpha \geq 0$. В рассматриваемом случае это условие выполняется, так как всегда $x + \xi \geq 0$ и, кроме того, в первом интеграле $x - \xi \geq 0$, а во втором $\xi - x \geq 0$. Выполнив преобразование под знаками интеграла, мы получим:

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x U_0(\xi) [\chi(x-\xi, t) - \chi(x+\xi, t)] d\xi + \right. \\ \left. + \int_x^{\infty} U_0(\xi) [\chi(\xi-x, t) - \chi(\xi+x, t)] d\xi \right\}.$$

Имея в виду, что $\chi(\xi-x, t) = \chi(x-\xi, t)$, мы можем представить это решение в более простом виде

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} U_0(\xi) [\chi(x-\xi, t) - \chi(x+\xi, t)] d\xi. \quad (17.10)$$

Более точное исследование²⁾ показывает, что эта функция при $t \rightarrow 0$ действительно стремится к $U_0(x)$, если только функция U_0 в точке x непрерывна.

¹⁾ Если у читателя не имеется под руками какой-либо книги по дифференциальным уравнениям, из которой он мог бы узнать, как получается это решение, то для отыскания последнего можно поступить следующим образом. Найдем посредством преобразования Лапласа решение при заданном начальном условии $u(+0, s) = 0$ и при произвольном $u_x(+0, s)$ (вместо t имеем теперь x) и подставим в решение $x = l$; мы получим соотношение между $u_x(+0, s)$ и $u(l, s)$, позволяющее исключить из решения значение $u_x(+0, s)$, взамен которого в него войдет значение $u(l, s) = u(l-0, s)$. Выполнив предельный переход $l \rightarrow \infty$, мы получим равенство (17.9).

Сложив правые части равенств (17.8) и (17.10), мы получим полное решение задачи о распространении тепла в линейном проводнике при $x \geq 0$ и $t \geq 0$.

§ 18. Телеграфное уравнение

Рассмотрим двойной электрический провод, простирающийся от $x=0$ до $x=l$ и имеющий следующие постоянные, отнесенные к единице длины провода: R — сопротивление, L — индуктивность, C — емкость, G — утечка.

Ток в таком проводе, а также напряжение между прямым и обратным проводом, определяются так называемым телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU,$$

где t есть время. Введя для сокращения записи обозначения

$$LC = a, \quad RC + LG = b, \quad RG = c,$$

мы приведем телеграфное уравнение к более простому виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b \frac{\partial U}{\partial t} - cU = 0. \quad (18.1)$$

Постоянные a , b , c по своему физическому смыслу могут быть либо положительными, либо равными нулю. Мы будем предполагать, что $a > 0$, так как для $a = 0$ уравнение (18.1) в основном совпадает с уравнением теплопроводности, рассмотренным в § 17.

Если в момент времени $t=0$ ток и напряжение заданы, то это означает, что заданы значения $U(x, +0)$ и $U_x(x, +0)$. Предположим, что при включении, производимом в момент времени $t=0$, ток и напряжение в проводе отсутствуют¹⁾; в таком случае начальными условиями будут:

$$U(x, +0) = 0, \quad U_x(x, +0) = 0. \quad (18.2)$$

Далее, примем, что закон изменения во времени функции $U(x, t)$, т. е. тока или напряжения в начале и конце провода известен. Это означает, что заданы граничные условия

$$U(+0, t) = A_0(t), \quad U(l-0, t) = A_1(t). \quad (18.3)$$

Выполнив преобразование Лапласа для уравнения (18.1) при начальных условиях (18.2), мы получим изображающее уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - (as^2 + bs + c)u = 0. \quad (18.4)$$

¹⁾ Если в момент времени $t=0$ в проводе имеются некоторые ток и напряжение от прошлого состояния, то необходимо учесть также процесс затухания колебаний. Мы не будем рассматривать такого случая и ограничимся исследованием только возбуждения колебаний.

Граничные условия (18.3) для функции $U(x, t)$ переходят при преобразовании в граничные условия для изображения $u(x, s)$:

$$u(+0, s) = a_0(s), \quad u(l-0, s) = a_1(s). \quad (18.5)$$

Таким образом, задача сводится к такому же уравнению, как и уравнение (17.6), при таких же начальных условиях, как и условия (17.5), но с параметром $as^2 + bs + c$ вместо s . Если, как и в § 17, мы будем устремлять l к ∞ , то та часть решения, которая обуславливается наличием границы $x = l$, исчезнет, и решение изображающего уравнения примет вид

$$u(x, s) = a_0(s) e^{-x\sqrt{as^2 + bs + c}}, \quad (18.6)$$

сходный с решением (17.7).

Теперь от изображения (18.6) следует перейти в пространство оригиналов. Прежде чем это сделать в общем виде, рассмотрим два частных случая.

а) *Провод без потерь*

Если $b = c = 0$, то уравнение (18.1) переходит в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (18.7)$$

В этом случае

$$RC + LG = 0, \quad RG = 0,$$

следовательно,

либо $R = 0$, $G \neq 0$, поэтому $L = 0$;

либо $G = 0$, $R \neq 0$, поэтому $C = 0$;

либо $R = 0$, $G = 0$, поэтому L и C могут быть произвольными.

Так как обязательно должно быть $a = LC \neq 0$, то первые две возможности отпадают. Таким образом, телеграфное уравнение переходит в волновое в том случае, когда $R = G = 0$, т. е. когда в проводе не происходит никаких потерь.

Изображением искомой функции теперь будет:

$$u(x, s) = a_0(s) e^{-x\sqrt{as}}. \quad (18.8)$$

Применив правило II, мы получим оригинал

$$U(x, t) = A_0(t - x\sqrt{a}), \quad (18.9)$$

причем

$$A_0(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Полученный результат показывает, что в проводе происходит распространение возбуждения A_0 , приложенного на левой границе,

вправо со скоростью $1/\sqrt{a}$. В самом деле, определенное граничное значение $A_0(T)$ возникает в точке x в момент времени t , если

$$t - x\sqrt{a} = T,$$

откуда следует, что

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}(t - T), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

б) *Провод без искажений*

Обратный переход от изображения (18.8) в пространство оригиналов выполняется столь просто при $b = c = 0$ потому, что корень из многочлена $as^2 + bs + c$ в общем решении (18.6) сразу извлекается и равен $\sqrt{a}s$. Так же просто решается задача и в том случае, когда многочлен $as^2 + bs + c$ представляет собой квадрат линейного выражения. Очевидно, это будет иметь место тогда и только тогда, когда в тождестве

$$as^2 + bs + c = \frac{1}{a} \left\{ \left(as + \frac{b}{2} \right)^2 + \left[ac - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] \right\}$$

второй член в фигурных скобках равен нулю, т. е. когда

$$ac - \left(\frac{b}{2} \right)^2 = 0. \quad (18.10)$$

Заменив a , b , c их выражениями через постоянные R , L , C и G , мы получим:

$$LCRG - \frac{1}{4}(RC + LG)^2 = -\frac{1}{4}(RC - LG)^2 = 0,$$

следовательно, между этими постоянными должно существовать соотношение

$$RC = LG. \quad (18.11)$$

Если условие (18.10) выполняется, то

$$as^2 + bs + c = \left(\sqrt{a}s + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2,$$

и изображение $u(x, s)$ принимает вид

$$u(x, s) = a_0(s) e^{-x \left(\sqrt{a}s + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)}. \quad (18.12)$$

Соответствующий оригинал равен

$$U(x, t) = e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} A_0(t - x\sqrt{a}),$$

причем

$$A_0(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Следовательно, и в этом случае любое возбуждение, приложенное к левой границе, распространяется вправо, но теперь имеет место пространственное затухание этого возбуждения с логарифмическим декрементом $b/2\sqrt{a}$. Это распространение происходит без искажения постольку, поскольку к каждой определенной точке x в определенный момент времени t подходит одно единственное граничное возмущение, на которое другие граничные возмущения не налагаются [именно по этой причине при соблюдении условия (18.11) говорят о проводе без искажений].

в) *Общий случай*

Если

$$d = ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \neq 0,$$

то для определения оригинала, соответствующего изображению (18.6), необходимо использовать функцию Бесселя

$$J_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}.$$

Тогда мы будем иметь:

$$e^{-x\sqrt{ax^2+bs+c}} = e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} e^{-x\sqrt{as}} - x\sqrt{\frac{d}{a}} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\frac{b}{2a}t} \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}} dt.$$

Эту формулу можно понимать следующим образом. Функция, стоящая в левой части, распадается на два слагаемых, из которых первое имеет такой же вид, как функция (18.12) для провода без искажений, а второе представляет собой результат преобразования Лапласа функции

$$V(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < x\sqrt{a}, \\ -x\sqrt{\frac{d}{a}} e^{-\frac{b}{2a}t} \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}} & \text{при } t \geq x\sqrt{a}. \end{cases}$$

Применив к первому слагаемому правило II, а ко второму — правило IX, мы найдем, что изображению (18.6) соответствует оригинал, равный

$$U(x, t) \equiv 0$$

при $0 \leq t < x\sqrt{a}$ и

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} A_0(t - x\sqrt{a}) + A_0(t) * V(t, x) = \\
 &= e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} A_0(t - x\sqrt{a}) - \\
 &\quad - x\sqrt{\frac{d}{a}} \int_{x\sqrt{a}}^t A_0(t - \tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a} \sqrt{\tau^2 - ax^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - ax^2}} d\tau
 \end{aligned}$$

при $t \geq x\sqrt{a}$. Таким образом, на пространственно затухающее граничное возбуждение $A_0(t - x\sqrt{a})$, подходящее к точке x в момент времени t , налагается сумма всех граничных возбуждений $A_0(t - \tau)$, пришедших в эту точку в предыдущие моменты времени ($0 \leq t - \tau < t - x\sqrt{a}$), что приводит к искажению передачи возбуждения.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
СООТНОШЕНИЯ**

§ 19. Интегральные уравнения типа свертки

В физике часто встречаются интегральные уравнения следующих типов:

$$\int_0^t K(t-\tau) F(\tau) d\tau = G(t), \quad (19.1)$$

$$F(t) = G(t) + \int_0^t K(t-\tau) F(\tau) d\tau, \quad (19.2)$$

где $F(t)$ есть искомая функция, а $K(t)$ и $G(t)$ — заданные функции. Уравнение (19.1) называется *интегральным уравнением первого рода*, а уравнение (19.2) — *интегральным уравнением второго рода*. Так как интегралы, входящие в эти уравнения, представляют собой свертку, то оба уравнения называются интегральными уравнениями типа свертки.

Рассмотрим сначала интегральное уравнение второго рода, так как оно проще с точки зрения возможности решения. Если интеграл $\mathfrak{L}\{K\}$ абсолютно сходится, то преобразование Лапласа переводит свертку $K * F$ на основании теоремы свертывания (правило IX) в алгебраическое произведение изображений, которое мы будем обозначать, как всегда, соответствующими малыми буквами. Следовательно, уравнение (19.2) после преобразования перейдет в изображающее уравнение

$$f(s) = g(s) + k(s)f(s),$$

решением которого будет:

$$f(s) = \frac{g(s)}{1-k(s)}. \quad (19.3)$$

В этом виде функция $f(s)$ не допускает непосредственного применения обратного преобразования Лапласа. Но если мы придадим ей вид

$$f(s) = g(s) + \frac{k(s)}{1-k(s)}g(s), \quad (19.4)$$

то сумеем показать, что функции

$$q(s) = \frac{k(s)}{1 - k(s)}$$

всегда соответствует оригинал $Q(t)$. Следовательно, решение (19.4) легко перевести назад в пространство оригиналов, после чего мы будем иметь:

$$F(t) = G(t) + Q(t) * G(t). \quad (19.5)$$

Перенеся свертку $Q * G$ в другую часть равенства, мы придадим решению (19.5) вид

$$G(t) = F(t) + (-Q) * G,$$

сходный с первоначальным интегральным уравнением, но с переменной ролей функций F и G и с заменой ядра $K(t)$ на взаимное ядро $-Q(t)$.

Для вычисления оригинала $Q(t)$ можно воспользоваться его представлением в виде бесконечного ряда. В самом деле, из

$$q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [k(s)]^n$$

следует, что

$$Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} K(t)^{*n}, \quad (19.6)$$

где $K(t)^{*1} = K(t)$, $K(t)^{*2} = K(t) * K(t)$ и вообще

$$K(t)^{*n} = \underbrace{K * K * \dots * K}_n.$$

Ряд (19.6) называется в общей теории интегральных уравнений *рядом Неймана*.

Иногда удается найти для изображения $q(s)$ соответствующий оригинал непосредственно. Если, например, ядро $K(t)$ представляет собой многочлен

$$K(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r$$

(или аппроксимируется таким многочленом), то

$$k(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{1! a_1}{s^2} + \dots + \frac{r! a_r}{s^{r+1}}$$

и, следовательно,

$$q(s) = \frac{k(s)}{1 - k(s)} = \frac{a_0 s^r + 1! a_1 s^{r-1} + \dots + r! a_r}{s^{r+1} - a_0 s^r - 1! a_1 s^{r-1} - \dots - r! a_r},$$

т. е. изображение $q(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, числитель которой имеет степень, меньшую степени знаменателя. Отыскание для такого изображения соответствующего оригинала производится одним из способов, указанных в главе 3.

Интегральное уравнение первого рода допускает решение только в некоторых специальных случаях. Изображающее уравнение для уравнения (19.1) имеет вид

$$k(s)f(s) = g(s).$$

Его решение

$$f(s) = \frac{g(s)}{k(s)} \quad (19.7)$$

нельзя перевести назад в пространство оригиналов посредством теоремы свертывания, так как функция $1/k(s)$ не является \mathfrak{L} -изображением.

Если функции $K(t)$ и $G(t)$ дифференцируемы и $K(0) \neq 0$, то, продифференцировав уравнение (19.1), мы получим интегральное уравнение второго рода¹⁾

$$K(0)F(t) + \int_0^t K'(t-\tau)F(\tau) d\tau = G'(t),$$

которое можно решить указанным выше способом. Если

$$K(0) = K'(0) = \dots = K^{(n-1)}(0),$$

но

$$K^{(n)}(0) \neq 0,$$

то после $n+1$ -кратного дифференцирования уравнения (19.1) мы будем иметь:

$$K^{(n)}(0)F(t) + \int_0^t K^{(n+1)}(t-\tau)F(\tau) d\tau = G^{(n+1)}(t),$$

т. е. опять интегральное уравнение второго рода.

1) В этой связи напомним следующее правило дифференцирования, часто применяемое при вычислениях с интегралами типа свертки.

Пусть функция $F_1(t)$ при $t > 0$ дифференцируема и при $t = 0$ непрерывна; далее, пусть $F_1'(t)$ и $F_2(t)$ в каждом интервале $0 \leq t \leq T$ абсолютно интегрируемы и в каждом интервале $0 \leq T_1 \leq t \leq T_2$ ограничены. В таком случае в каждой точке $t > 0$, где функция F_2 справа (слева) непрерывна, свертка $F(t) = F_1 * F_2$ справа (слева) дифференцируема, и производная $F_1'(t)$ равна

$$F_1'(t) = F_1(0)F_2(t) + F_1' * F_2.$$

Если $F_1(0) = 0$, то допущение о непрерывности функции F_2 излишне.

В такой весьма общей формулировке приведенное правило используется, например, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений в тех случаях, когда возмущающая функция обладает точками разрыва.

Однако указанный способ решения уравнения (19.1) не дает результата, если ядро $K(t)$ при $t=0$ не имеет производных, например, если

$$K(t) = t^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

В таком случае иногда приводит к цели следующий способ. Положим:

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \Phi(t).$$

Так как согласно правилу VII

$$\mathfrak{L}\{\Phi\} = \varphi(s) = \frac{1}{s} f(s),$$

то решение (19.7) принимает вид

$$\varphi(s) = \frac{1}{sk(s)} g(s).$$

В то время как функция $1/k(s)$ никак не может быть \mathfrak{L} -изображением (см. § 23), функция $1/sk(s)$ может быть таковым и, следовательно, в этом случае допустимо применение теоремы свертывания.

Такой случай имеет место, например, для *интегрального уравнения Абеля*.

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} F(\tau) d\tau = G(t) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (19.8)$$

встречающегося во многих областях физики. Положив

$$F * 1 = \Phi(t)$$

и имея в виду соответствие

$$t^{-\alpha} \circ \bullet \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} = k(s) \quad (\alpha < 1),$$

мы получим для $\varphi(s)$ изображающее уравнение

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{-\alpha}} \varphi(s) = g(s),$$

решением которого будет:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) s^\alpha} g(s).$$

Так как

$$\frac{1}{s^\alpha} \circ \bullet \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (\alpha > 0),$$

то изображению $\varphi(s)$ соответствует оригинал

$$\Phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} * G(t).$$

(Обратим внимание на то, что при прямом преобразовании мы приняли $\alpha < 1$, а при обратном преобразовании, что $\alpha > 0$, следовательно, в целом $0 < \alpha < 1$.)

Так как согласно известной формуле

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi},$$

то явным выражением для функции $\Phi(t)$ будет:

$$\Phi(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^t \tau^{\alpha-1} G(t-\tau) d\tau.$$

Отсюда при условии, что функция $G(t)$ дифференцируема, найдем:

$$F(t) = \Phi'(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[G(0) t^{\alpha-1} + \int_0^t \tau^{\alpha-1} G'(t-\tau) d\tau \right].$$

§ 20. Интегральные соотношения

В § 19 мы исходили из уравнения для неизвестной функции, в состав которого входил интеграл типа свертки, и переводили это уравнение посредством преобразования Лапласа в алгебраическое уравнение. Теперь поступим наоборот: будем исходить из *алгебраического уравнения* для *известных* функций и переведем его посредством обратного преобразования Лапласа в соотношение, содержащее интегралы типа свертки. Такой прием позволяет весьма просто получать некоторые важные *интегральные соотношения* для функций, встречающихся в физике, в то время как вывод таких соотношений прямым путем иногда крайне труден. Приведем несколько примеров.

В теории теплопроводности приходится иметь дело с *функцией двойного источника*

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

[см. формулу (17.8)]. Для нее мы имеем соответствие

$$\psi(x, t) \circ \bullet e^{-x\sqrt{s}} \quad (x > 0).$$

Применив к равенству

$$e^{-x_1\sqrt{s}} \cdot e^{-x_2\sqrt{s}} = e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s}} \quad (x_1 > 0, x_2 > 0),$$

обратное преобразование Лапласа, мы получим для функции ψ интегральное соотношение

$$\psi(x_1, t) * \psi(x_2, t) = \psi(x_1 + x_2, t), \quad (20.1)$$

которое в явной записи имеет довольно сложный вид. Если мы по-

пытаемся получить это соотношение прямым вычислением его левой части, то увидим, что для этого понадобится весьма кропотливая работа.

Соотношение (20.1) имеет в теории теплопроводности наглядный смысл. Если мы возьмем для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (0 \leq x < \infty; \quad 0 \leq t < \infty)$$

в качестве начального условия значение

$$U(x, +0) = 0,$$

а в качестве граничного условия — значение

$$U(+0, t) = 1,$$

то решением уравнения на основании формулы (17.8) будет:

$$U(x, t) = 1 * \psi(x, t).$$

Следовательно, в точке $x = x_1$

$$U(x_1, t) = 1 * \psi(x_1, t).$$

Примем эту точку x_1 за левую границу, тогда граничной функцией будет $U(x_1, t)$. Если мы перейдем теперь от этой точки x_1 вправо в точку x_2 , то на основании формулы (17.8) будем иметь:

$$U(x_1, t) * \psi(x_2, t) = 1 * \psi(x_1, t) * \psi(x_2, t).$$

Но, очевидно, мы придем к такому же результату и в том случае, если в первоначальном решении совершим переход вправо сразу на отрезок $x_1 + x_2$. Тогда мы получим:

$$U(x_1 + x_2, t) = 1 * \psi(x_1 + x_2, t).$$

Следовательно, должно иметь место соотношение

$$1 * \psi(x_1, t) * \psi(x_2, t) = 1 * \psi(x_1 + x_2, t).$$

Если мы продифференцируем обе части этого соотношения по t , то свертка, содержащая единицу и означающая интегрирование по t , отпадет, и останется соотношение (20.1).

Для функции Бесселя

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

часто встречающейся в физике, мы имеем соответствие

$$J_0(t) \circ \bullet \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}}.$$

Разложим изображение на множители следующим образом:

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} = \frac{1}{(s + j)^{1/2}} \frac{1}{(s - j)^{1/2}}.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s+\alpha)^{1/2}} \circlearrowleft t^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} \quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

и применив теорему свертывания, мы будем иметь:

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{\pi} \left(t^{-\frac{1}{2}} e^{-jt}\right) * \left(t^{-\frac{1}{2}} e^{jt}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-j\tau} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{j(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\pi} e^{jt} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-2j\tau} d\tau, \end{aligned}$$

или, после подстановки $\tau = tu$,

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{\pi} e^{jt} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} e^{-2jtu} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{jt(1-2u)} [u(1-u)]^{-\frac{1}{2}} du. \end{aligned}$$

Положив

$$1 - 2u = v,$$

следовательно, приняв

$$u = \frac{1-v}{2}, \quad 1-u = \frac{1+v}{2},$$

мы получим формулу

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} e^{jtv} (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} dv, \quad (20.2)$$

которая после подстановки

$$v = \cos \varphi, \quad 1 - v^2 = \sin^2 \varphi$$

переходит в так называемый интеграл Пуассона

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{jt \cos \varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos \varphi) d\varphi. \quad (20.3)$$

Приведенные примеры достаточно убедительно показывают, что глубоко скрытые свойства некоторых функций часто могут быть очень просто и наглядно обнаружены посредством преобразования Лапласа.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

§ 21. Комплексный интеграл, осуществляющий обратное преобразование Лапласа

Решение функциональных уравнений (дифференциальных, разностных, интегральных) посредством преобразования Лапласа производится всегда таким образом, что заданное уравнение отображается из пространства оригиналов в пространство изображений, а затем решается изображающее уравнение. Последний и обычно самый трудный шаг состоит в вычислении оригинала, соответствующего найденному изображению.

Важнейшим средством для вычисления оригинала по изображению является комплексный интеграл (1.12):

$$F(t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY}^{\alpha + jY} e^{ts} f(s) ds, \quad (21.1)$$

где α есть абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа $\mathfrak{L}\{F\}$. Правда, для непосредственного вычисления функции $F(t)$ формула (1.12) мало пригодна, так как она требует знания функции $f(s)$ для комплексных значений $s = x + jy$ ($-\infty < y < +\infty$). Но поскольку она представляет собой интеграл от *аналитической* функции, взятый по пути интегрирования в комплексной плоскости, ее можно преобразовать, применив для этого методы, известные из теории функций комплексного переменного, например, изменение пути интегрирования, вычисление вычетов и т. п. Такого рода преобразования иногда позволяют вскрыть важные свойства функции, определяемой комплексным интегралом.

Поясним использование формулы (21.1) на следующем примере. Пусть проводник тела, рассмотренный в § 17 и простирающийся от $x = 0$ до $x = \infty$, имеет начальную температуру, равную нулю, и пусть на его конце $x = 0$ граничная температура изменяется по закону $\cos \omega t$. В таком случае формула (17.8) для температуры в сечении x в момент времени t примет вид

$$U(x, t) = \cos \omega t * \psi(x, t).$$

Эта формула внешне очень изящна, однако она не позволяет получить никакого представления о поведении функции $U(x, t)$. Поэтому вернемся к изображению (17.7), которое вследствие соответствия

$$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

принимает вид

$$u(x, s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}}.$$

Подставив это изображение в комплексный интеграл (21.1), мы получим:

$$U(x, t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY}^{\alpha + jY} e^{ts} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} ds. \quad (21.2)$$

Изображение $u(x, s)$ имеет вследствие наличия знаменателя $s^2 + \omega^2$ простые полюсы в точках $s = \pm j\omega$ и, кроме того, вследствие наличия показателя степени \sqrt{s} — точку разветвления в $s = 0$. В качестве абсциссы α можно взять любое вещественное число, большее нуля.

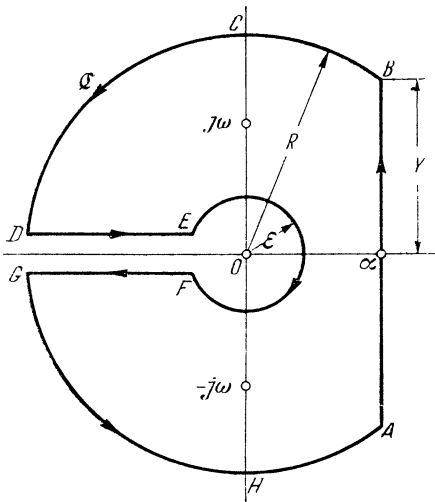


Рис. 8.

Рассмотрим изображенный на рис. 8 замкнутый контур \mathcal{C} , состоящий из вертикальной прямой, проходящей через точку $s = \alpha$, из трех дуг двух окружностей, имеющих радиусы ϵ и R и общий центр в нулевой точке, и из двух горизонтальных отрезков, проходящих выше и ниже отрицательной вещественной оси. Внутри этого контура функция $u(x, s)$ остается однозначной и аналитической всюду, за исключением полюсов

$s = \pm j\omega$; поэтому согласно теореме Коши о вычетах мы имеем:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} e^{ts} u(x, s) ds = \text{сумма вычетов функции в точках } s = \pm j\omega.$$

Вычисление этих вычетов производится на основании следующего правила.

Правило. Пусть функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ в окрестности точки s_0 аналитические и пусть $f_1(s_0) \neq 0$, в то время как $f_2(s)$ имеет

в s_0 простой нуль; тогда вычет функции $f_1(s)/f_2(s)$ в точке s_0 равен

$$\frac{f_1(s_0)}{f_2'(s_0)}.$$

Представив функцию $e^{ts}u(x, s)$ в виде

$$\frac{e^{ts}se^{-xV\bar{s}}}{s^2 + \omega^2} = \frac{f_1(s)}{f_2(s)},$$

мы будем иметь: $f_2'(s) = 2s$, следовательно, ее вычеты будут равны

$$\frac{e^{tj\omega}j\omega e^{-xVj\omega}}{2j\omega} \quad \text{в точке } s_0 = j\omega,$$

$$\frac{e^{-tj\omega}(-j\omega) e^{-xV(-j\omega)}}{-2j\omega} \quad \text{в точке } s_0 = -j\omega.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts}u(x, s) ds = \frac{1}{2} (e^{j\omega t - xVj\omega} + e^{-j\omega t - xV(-j\omega)}).$$

Так как

$$V\bar{j} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}},$$

$$V(-j) = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1-j}{\sqrt{2}},$$

то полученный результат можно представить в более простом виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts}u(x, s) ds &= \frac{1}{2} e^{-xV\omega/2} (e^{j(\omega t - xV\omega/2)} + e^{-j(\omega t - xV\omega/2)}) = \\ &= e^{-xV\omega/2} \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2}}\right). \end{aligned} \quad (21.3)$$

Будем теперь устремлять ε к нулю, а R — к бесконечности. Очевидно, что при этом интеграл (21.3), если его взять только по пути AB , будет стремиться на основании формулы (21.2) к $U(x, t)$. Для того чтобы выяснить поведение этого интеграла на обеих круговых дугах CD и GH , воспользуемся следующей теоремой, очень часто с успехом применяемой при подобного рода исследованиях.

Теорема. Пусть при $r \rightarrow \infty$ функция $f(s) = f(re^{i\varphi})$ стремится в левой полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$ (т. е. при $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$) равномерно относительно φ к нулю. В таком случае, если \mathfrak{C} есть левая полуокружность, имеющая центр в точке 0 и радиус r , то при условии, что $t > 0$,

$$\int_{\mathfrak{C}} e^{ts}f(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

То же самое имеет место и для неполной полуокружности с тем же центральным углом, т. е. полуокружности, где-либо прерывающейся¹⁾.

Если точка s расположена в левой полуплоскости, то точка \sqrt{s} лежит в правой полуплоскости, следовательно, $\operatorname{Re} \sqrt{s} \geq 0$ и

$$|e^{-x\sqrt{s}}| = e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{s}} \leq 1.$$

Далее, для больших $|s|$ мы имеем:

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \sim \frac{1}{s},$$

и поэтому функция $u(x, s)$ в левой полуплоскости при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно стремится к нулю относительно φ . Таким образом, на основании сформулированной теоремы интеграла, взятые вдоль дуг CD и GH , при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, если только $t > 0$, что в нашем случае и имеет место.

На дугах BC и HA функции e^{ts} и $e^{-x\sqrt{s}}$ ограничены, а множитель $s/(s^2 + \omega^2)$ обеспечивает равномерное стремление подынтегрального выражения к нулю. Длина самих дуг BC и HA при $R \rightarrow \infty$ остается ограниченной. Поэтому интеграл (21.3), взятый вдоль каждой из этих дуг, при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

На круговой дуге EF все подынтегральное выражение ограничено, а длина пути интегрирования стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$, следовательно, интеграл (21.3), взятый вдоль дуги EF , также исчезает.

Таким образом, в левой части равенства (21.3) остаются только: интеграл, взятый вдоль проходящей через точку α вертикальной прямой и равный $U(x, t)$, и два интеграла, взятые вдоль горизонтальных лучей. Эти два последних интеграла следует заменить теперь интегралами, взятыми вдоль вещественной оси от $-\infty$ до 0 и от 0 до $-\infty$. Перенеся их в правую часть равенства (21.3), будем иметь:

$$U(x, t) = e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \\ - \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^0 e^{ts} u(x, s) ds - \frac{1}{2\pi j} \int_0^{-\infty} e^{ts} u(x, s) ds.$$

Внеся $s = re^{j\pi}$ в интеграл, взятый от $-\infty$ до 0 вдоль отрицательной части вещественной оси, и $s = re^{-j\pi}$ — в интеграл, взятый от 0

¹⁾ Эта теорема, конечно, не является самоочевидной. В самом деле, хотя при $r \rightarrow \infty$ остается ограниченной в левой полуплоскости при $t > 0$ также и функция e^{ts} и поэтому подынтегральное выражение равномерно стремится к нулю, но зато неограниченно возрастает длина пути интегрирования.

до $-\infty$, мы получим:

$$\int_{-\infty}^0 e^{ts} u(x, s) ds = - \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} e^{-jx\sqrt{r}} dr,$$

$$\int_0^{\infty} e^{ts} u(x, s) ds = \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} e^{+jx\sqrt{r}} dr,$$

и формула (21.3) примет следующий окончательный вид:

$$U(x, t) =$$

$$= e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} \sin x\sqrt{r} dr. \quad (21.4)$$

Эта форма решения, выведенная путем использования комплексного интеграла (21.1), позволяет получить о поведении функции $U(x, t)$ значительно более глубокое представление, чем форма решения, найденная в § 18. Интеграл, входящий в правую часть формулы (21.4), представляет собой интеграл Лапласа, только в нем s заменено на t , а t — на r . При $t \rightarrow \infty$ он стремится к нулю (см. теорему 1 в § 23), следовательно, изображает затухающий с увеличением времени процесс, поведение которого можно описать, как будет показано в § 25, еще более точно посредством асимптотического разложения. Таким образом, функция $U(x, t)$ определяется в основном своим первым членом, который показывает, что температура в точке $x > 0$ колеблется так же, как температура на границе $x = 0$, но со сдвигом фазы $x\sqrt{\omega/2}$ и с амплитудой, затухающей в пространстве по закону $e^{-x\sqrt{\omega/2}}$.

Аналогичным способом можно получить практически удобное выражение для оригинала и во многих других задачах.

§ 22. Разложение в ряды

Другим, очень часто применяемым на практике способом для получения функции $F(t)$ из функции $f(s)$, т. е. для обратного преобразования Лапласа, является разложение функции $f(s)$ в ряд

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s),$$

члены которого $f_n(s)$ представляют собой \mathfrak{L} -изображения, т. е.

$$f_n(s) = \mathfrak{L}\{F_n(t)\},$$

с последующим применением к каждому $f_n(s)$ обратного преобразования Лапласа. Таким путем получается ряд

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

в пространстве оригиналов. Очевидно, что такой способ будет давать правильный результат не всегда. В самом деле, суть этого способа сводится по существу к перемене местами суммирования бесконечного ряда и вычисления интеграла (к тому же несобственного). Однако имеются некоторые виды рядов, для которых почленный переход из пространства изображений в пространство оригиналов может выполняться без всяких опасений.

1. Если изображение $f(s)$ может быть разложено в ряд

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}, \quad (22.1)$$

расположенный по понижающим степеням s ¹⁾ и сходящийся при $|s| > R$, то возможен почленный переход в пространство оригиналов, в результате чего получается ряд

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n, \quad (22.2)$$

сходящийся для всех вещественных и комплексных t .

Разложение изображения в ряд такого вида возможно только для функций очень специального класса. В самом деле, для осуществления разложения (22.1) изображение $f(s)$ должно представлять собой функцию, аналитическую и обращающуюся в нуль для $s = \infty$, а оригинал $F(t)$ — целую функцию экспоненциального типа, т. е. функцию, допускающую оценку вида

$$|F(t)| < C e^{c|t|}.$$

Примером может служить функция Бесселя $J_0(t)$, рассмотренная на стр. 109. Ее изображение можно разложить в ряд

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} = \frac{1}{s} (1 + s^{-2})^{-1/2} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} s^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{s^{2n+1}},$$

следовательно,

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

¹⁾ Обратим внимание на то, что этот ряд начинается с члена, содержащего по крайней мере $1/s$, следовательно, в нем отсутствует член, свободный от $1/s$. Причина этого заключается в том, что любая функция, представляющая собой результат преобразования Лапласа, при $s \rightarrow +\infty$ должна обязательно стремиться к нулю (см. теорему 1 в § 23).

Так как

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)_n &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n! 2^n} = \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{n! 2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! 2^{2n} n!}, \end{aligned}$$

то полученный ряд можно представить в виде

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

II. Предыдущая теорема может быть обобщена на степенные ряды с нецелочисленными показателями.

Если изображение $f(s)$ можно разложить в абсолютно сходящийся при $|s| > R$ ряд

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{\lambda_n}}, \quad (22.3)$$

где λ_n представляют собой любую возрастающую последовательность чисел $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$, то возможен почленный переход от этого ряда к ряду

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{\lambda_n - 1}}{\Gamma(\lambda_n)} \quad (22.4)$$

в пространстве оригиналов.

В этом виде теорема применима, например, к функции Бесселя $J_\nu(t)$ любого порядка ($\nu > -1/2$). А именно, мы имеем¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{t^\nu J_\nu(t)\} &= \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} \frac{1}{(s^2+1)^{\nu+1/2}} = \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} \frac{1}{s^{2\nu+1}} (1+s^{-2})^{-\nu-1/2} = \\ &= \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\nu-1/2}{n} \frac{1}{s^{2n+2\nu+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда путем почленного перехода в пространство оригиналов мы найдем:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

1) Это выражение для $\mathfrak{L}\{t^\nu J_\nu(t)\}$ получается путем решения известного дифференциального уравнения, определяющего функцию Бесселя, методом преобразования Лапласа.

III. *Разложение в ряд по показательным функциям.* Если изображение $f(s)$ представляет собой *дробно-рациональную функцию*

$$f(s) = \frac{r_1(s)}{r_2(s)},$$

числитель которой $r_1(s)$ имеет степень, *меньшую* степени знаменателя $r_2(s)$, то эту функцию можно разложить на конечное число простейших дробей. Если знаменатель имеет простые нули $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т. е. если

$$r_2(s) = (s - \alpha_1) \dots (s - \alpha_n),$$

то коэффициентами такого разложения будут вычеты функции $f(s)$ в ее полюсах α_v . Согласно правилу, указанному на стр. 113, эти вычеты равны

$$\frac{r_1(\alpha_v)}{r_2'(\alpha_v)}.$$

[Если $r_1(\alpha_v) = 0$, то числитель $r_1(s)$ содержит также множитель $s - \alpha_v$, следовательно, дробь $r_1(s)/r_2(s)$ сокращается на этот множитель; это означает, что точка α_v не является полюсом и поэтому для нее не получается никакого вычета.] Таким образом, изображение $f(s)$ может быть представлено в виде ряда

$$f(s) = \sum_{v=1}^n \frac{r_1(\alpha_v)}{r_2'(\alpha_v)} \frac{1}{s - \alpha_v}. \quad (22.5)$$

Так как этот ряд содержит только конечное число членов, то можно выполнить почленный переход в пространство оригиналов; в результате мы получим в последнем ряд

$$F(t) = \sum_{v=1}^n \frac{r_1(\alpha_v)}{r_2'(\alpha_v)} e^{\alpha_v t}. \quad (22.6)$$

С этим случаем мы неоднократно встречались в главе 3 при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений и проиллюстрировали его на многочисленных примерах.

При решении уравнений в частных производных вместо дробно-рациональных функций часто появляются *мероморфные функции*, которые, подобно дробно-рациональным функциям, являются аналитическими во всей плоскости за исключением изолированных полюсов; число этих полюсов может быть конечным или бесконечным. Так, например, при решении уравнения теплопроводности (стр. 96) мы получили функцию $u_0(x, s)$, которая, если положить $l = \pi$, имеет вид

$$u_0(x, s) = \frac{e^{(\pi-x)V\bar{s}} - e^{-(\pi-x)V\bar{s}}}{e^{\pi V\bar{s}} - e^{-\pi V\bar{s}}}.$$

В окрестности точки $s=0$ эта функция отнюдь не двузначная, как это может показаться на первый взгляд из-за наличия показателя \sqrt{s} в степенях. В самом деле, после одного обхода точки $s=0$, т. е. после замены \sqrt{s} на $-\sqrt{s}$, функция $u_0(x, s)$ становится равной

$$\frac{e^{-(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{(\pi-x)\sqrt{s}}}{e^{-\pi\sqrt{s}} - e^{\pi\sqrt{s}}} = \frac{e^{(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\pi-x)\sqrt{s}}}{e^{\pi\sqrt{s}} - e^{-\pi\sqrt{s}}},$$

т. е. принимает свое первоначальное значение.

Единственными особыми точками являются простые нули знаменателя. Из равенства

$$e^{\pi\sqrt{s}} - e^{-\pi\sqrt{s}} = 0,$$

или

$$e^{2\pi\sqrt{s}} = 1$$

следует, что

$$2\pi\sqrt{s} = \nu \cdot 2\pi j \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

т. е.

$$s = -\nu^2.$$

Так как отрицательные ν дают для s те же значения, что и положительные ν , то первые можно не учитывать. Далее, при $s=0$ обращается в нуль также числитель функции $u_0(x, s)$, следовательно, точка $s=0$ не является особой. Таким образом, мы должны учитывать только полюсы

$$\alpha_\nu = -\nu^2 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Вычет функции $u_0(x, s)$ в точке α_ν , согласно правилу, указанному на стр. 112, равен

$$\begin{aligned} \left. \frac{e^{(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\pi-x)\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}(e^{\pi\sqrt{s}} + e^{-\pi\sqrt{s}})} \right|_{s=\alpha_\nu} &= \frac{e^{(\pi-x)\nu j} - e^{-(\pi-x)\nu j}}{\frac{\pi}{2\nu j}(e^{\pi\nu j} + e^{-\pi\nu j})} = \\ &= \frac{2j \sin(\pi-x)\nu}{\frac{\pi}{\nu j} \cos \pi\nu} = \frac{2}{\pi} \nu \sin \nu x. \end{aligned}$$

Следовательно, так называемой главной частью функции $u_0(x, s)$ в полюсе $\alpha_\nu = -\nu^2$ будет простейшая дробь

$$\frac{2}{\pi} \nu \sin \nu x \frac{1}{s + \nu^2}.$$

При чисто формальном мышлении можно было бы думать, что мероморфная функция $u_0(x, s)$ может быть построена, подобно дробно-рациональной функции, из простейших дробей только что

указанного вида и, следовательно, может быть представлена в виде ряда

$$u_0(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \sin \nu x \frac{1}{s + \nu^2}, \quad (22.7)$$

который после почленного обратного преобразования Лапласа переходит в ряд

$$U_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \sin \nu x e^{-\nu^2 t}, \quad (22.8)$$

определяющий оригинал. Такой способ вычисления оригинала часто встречается в технических публикациях (основанных главным образом на операторном исчислении Хевисайда). Между тем в рассмотренном случае он приводит к правильному результату *случайно*, в других же случаях он может давать неверные результаты. В самом деле, прежде всего является сомнительным само разложение (22.7), относительно которого можно сказать только следующее: если из функции $u_0(x, s)$ вычесть все главные части, то останется функция, не имеющая особых точек, т. е. целая функция. Однако определение этой целой функции, которая в рассмотренном случае случайно равна нулю, обычно представляет собой очень сложную задачу. Сомнительность разложения на простейшие дроби становится особенно очевидной в том случае, когда мероморфная функция имеет только конечное число полюсов, не будучи в то же время рациональной функцией, что, вообще говоря, может иметь место. Если в таком случае просто составить разложение на простейшие дроби, то из этого следовало бы, что рассматриваемая функция представляет собой рациональную функцию. Наконец, сомнительным является, как об этом уже мимоходом было упомянуто, переход от ряда (22.7) к ряду (22.8) путем почленного обратного преобразования Лапласа.

Тем не менее рассмотренный способ можно поставить на твердое основание, если воспользоваться комплексным интегралом, осуществляющим обратное преобразование Лапласа. При этом выясняется, что разложение функции $u_0(x, s)$ на простейшие дроби, понадобившееся выше только как промежуточная стадия, вообще не играет никакой роли, так как сразу получается разложение вида (22.8). Для получения этого разложения надо поступить следующим образом. После того как оригинал $U(x, t)$ представлен в виде

$$U(x, t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY}^{\alpha + jY} e^{ts} u(x, s), \quad (22.9)$$

следует провести слева от вертикали, определяемой абсциссой α , вспомогательные кривые $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots$, начинающиеся в точках $Y_1,$

Y_2, \dots вертикали над вещественной осью и заканчивающиеся в точках — $Y_1, -Y_2, \dots$ вертикали под вещественной осью. Эти кривые необходимо расположить так, чтобы каждая из них отделяла от вертикальной прямой по одному полюсу $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (рис. 9). Тогда мы будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-jY_n}^{\alpha+jY_n} e^{ts} u(x, s) ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathbb{C}_n} e^{ts} u(x, s) ds = \text{сумме вычетов функции } e^{ts} u(x, s) \text{ в полюсах } \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Если функция $u(x, s)$ обладает в α_v простым полюсом, то ее главная часть имеет вид

$$\frac{b_v}{s - \alpha_v},$$

причем b_v зависит от x , а вычет функции $e^{ts} u(x, s)$ равен

$$b_v e^{\alpha_v t}.$$

Если функция $u(x, s)$ обладает в α_v кратным полюсом, например, третьего порядка, то ее главная часть имеет вид

$$\frac{b_v}{s - \alpha_v} + \frac{c_v}{(s - \alpha_v)^2} + \frac{d_v}{(s - \alpha_v)^3},$$

а вычет функции $e^{ts} u(x, s)$ равен

$$\left(b_v + \frac{c_v}{1!} + \frac{d_v}{2!} t^2 \right) e^{\alpha_v t}.$$

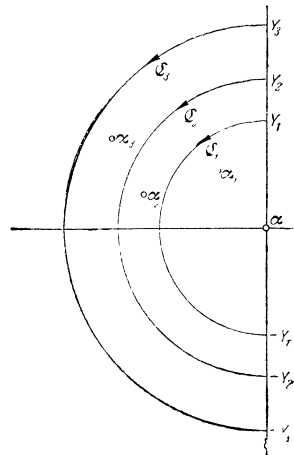


Рис. 9.

Для упрощения последующих записей предположим, что все полюсы функции $u(x, s)$ простые. Тогда мы будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-jY_n}^{\alpha+jY_n} e^{ts} u(x, s) ds = \sum_{v=1}^n b_v(x) e^{\alpha_v t} - \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathbb{C}_n} e^{ts} u(x, s) ds. \quad (22.10)$$

Если при возрастании n будет $Y_n \rightarrow \infty$, а

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\mathbb{C}_n} e^{ts} u(x, s) ds \rightarrow 0, \quad (22.11)$$

то на основании формулы (22.9) мы получим:

$$U(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v(x) e^{\alpha_v t}. \quad (22.12)$$

Итак, мы нашли искомое разложение оригинала. Однако *применять это разложение можно только в том случае, когда выполняется условие (22.11)*. При этом многое зависит от того, как выбраны кривые \mathfrak{C}_n . Они должны соответствовать характеру изменения функции $u(x, s)$ в том смысле, чтобы изменение $u(x, s)$ вдоль выбранных кривых было легко обозримым. Так, например, для разложения (22.8) выполнение условия (22.11) доказывается легче всего, если в качестве кривых \mathfrak{C}_n выбрать параболы. Конечно, не всегда удается доказать, что условие (22.11) выполняется. В этих случаях правильность разложения (22.12) остается под сомнением.

Существует видоизменение рассмотренного способа. Проходящую через точку α прямую, вдоль которой производится интегрирование, последовательно заменяют другой вертикальной прямой с перемещающейся влево абсциссой и притом таким образом, чтобы эти

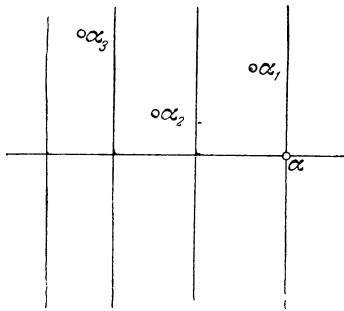


Рис. 10.

прямые проходили между полюсами (рис. 10). Это можно сделать в тех случаях, когда при перемещении s вверх или вниз функция $u(x, s)$ в полосах, заключенных между каждой из вновь проведенных прямых и первоначальной прямой, равномерно стремится к нулю. Тогда в качестве «остаточного члена» получится интеграл, для которого путь интегрирования расположен между n -м и $n + 1$ -м полюсами. Для того чтобы разложение (22.12) было обеспечено, указанный интеграл при $n \rightarrow \infty$ должен стремиться к нулю.

Изложенный способ применим только при условии, что функция $u(x, s)$ *однозначная*, так как иначе нельзя пользоваться теоремой Коши о вычетах. Если среди особых точек функции $u(x, s)$ имеются особые точки неоднозначного характера, то необходимо либо изменить путь интегрирования примерно так, как это было сделано на стр. 112, либо воспользоваться способом, который будет изложен ниже, в § 26.

IV. Рассмотренные выше разложения относятся к функциям специального вида, а именно, к степенным и показательным функциям. Приведем теперь теорему, касающуюся разложения по любым функциям и находящую применение во многих практических случаях.

Теорема. Пусть функцию $f(s)$ можно представить в полуплоскости $\text{Re } s \geq x_0$ в виде бесконечного ряда, членами которого являются \mathcal{L} -изображения

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s), \quad f_n(s) \bullet \circ F_n(t).$$

Конечно, при этом должны существовать все интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F_n(t) dt = f_n(s) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

в общей полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq x_0$. Пусть, далее, выполняются еще два условия:

а) интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-st} |F_n(t)| dt = \varphi_n(s) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

также существуют в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq x_0$;

б) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x_0)$$

сходится.

В таком случае ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

сходится, и притом даже абсолютно, стремясь к $F(t)$ почти для всех $t \geq 0$, причем

$$\mathfrak{L}\{F\} = f(s),$$

т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(s) \bullet \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t).$$

Выражение «почти все t », взятое из теории интеграла Лебега, означает следующее: для всех t , за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль, т. е. множества, точки которого можно покрыть счетной системой интервалов с произвольно малой суммой длин.

Покажем применение этой теоремы не на каком-либо отдельном ряде, а на целом классе рядов.

Важный класс рядов образуют так называемые *факториальные ряды*, имеющие вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s(s+1) \dots (s+n)}. \quad (22.13)$$

С этими рядами часто приходится иметь дело при интегрировании дифференциальных и разностных уравнений. Каждый член факториального ряда может рассматриваться как изображение, полученное в результате преобразования Лапласа. В самом деле,

$$\frac{n!}{s(s+1) \dots (s+n)} \bullet \rightarrow (1 - e^{-t})^n \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0.$$

Так как соответствующий оригинал положителен, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} |F_n(t)| dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} |a_n| (1 - e^{-t})^n dt = \\ &= |a_n| \frac{n!}{s(s+1) \dots (s+n)} = \varphi_n(s) \text{ при } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Условие б) сформулированной выше теоремы требует, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| n!}{x_0(x_0+1) \dots (x_0+n)} \quad (22.14)$$

сходился при некотором значении $x_0 > 0$. Но этот ряд совпадает с рядом (22.13) при $s = x_0 > 0$ после замены в последнем a_n на $|a_n|$. Существует весьма общая теорема, согласно которой факториальный ряд, подобно интегралу Лапласа, всегда сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \lambda$ (если только он вообще имеет точку сходимости) и, более того, сходится абсолютно по крайней мере для $\operatorname{Re} s > \lambda + 1$. Если выбрать значение x_0 так, чтобы оно было не только больше нуля, но и больше $\lambda + 1$, то для ряда (22.14) условие б) будет выполнено. Следовательно, факториальный ряд всегда можно рассматривать как \mathfrak{L} -изображение (если только он где-либо сходится), и соответствующий этому ряду оригинал почти везде равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - e^{-t})^n. \quad (22.15)$$

Но это есть степенной ряд относительно $1 - e^{-t}$. Если какой-либо степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится при $z_0 > 0$, то он подаловно сходится и при $0 \leq z \leq z_0$. Так как

$$0 \leq 1 - e^{-t} \leq 1 - e^{-t_0}$$

при $0 \leq t \leq t_0$, то из сходимости ряда (22.15) при $t_0 > 0$ следует его сходимостью при $0 \leq t \leq t_0$. Таким образом, ряд (22.15) сходится для всех t , а не только для почти всех t .

Всякое \mathfrak{L} -изображение можно разложить при весьма общих допущениях в факториальный ряд. Коэффициенты этого ряда определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} sf(s) &\rightarrow a_0, \quad \frac{1}{1!} s(s+1) \left[f(s) - \frac{a_0}{s} \right] \rightarrow a_1, \\ \frac{1}{2!} s(s+1)(s+2) \left[f(s) - \frac{a_0}{s} - \frac{a_1 \cdot 1!}{s(s+1)} \right] &\rightarrow a_2, \dots \text{ при } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если эти коэффициенты легко вычисляются, то ряд (22.15) дает удобную формулу для определения оригинала.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ
И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 23. Некоторые теоремы о предельных значениях

Часто решение $Y(t)$ дифференциального уравнения в явном виде, т. е. *полная* картина исследуемого процесса, не представляет особого интереса для практика. Вместо такого решения практику достаточно знать только некоторые *свойства* функции $Y(t)$, например ее поведение вблизи $t=0$, т. е. непосредственно после «включения», или вблизи $t=\infty$, т. е. для больших t , когда в особенности важно выяснить, устойчиво или неустойчиво состояние системы. Естественно, что было бы весьма желательно выявлять подобного рода свойства функции $Y(t)$ только на основе рассмотрения ее изображения, т. е. без составления явного выражения функции $Y(t)$. С примером возможности такого определения свойств оригинала мы уже встретились в § 21, когда в результате вычисления комплексного интеграла (21.1) получили формулу (21.4); в состав этой формулы вошел интеграл Лапласа, который позволил получить представление о поведении оригинала при больших значениях аргумента. Наоборот, могут быть и такие случаи, когда желательно установить свойства изображения непосредственно из поведения оригинала.

В переводе на математический язык сказанное выше означает следующее: можно ли на основании свойств некоторой функции судить об *асимптотическом поведении* другой функции, связанной с первой прямыми или обратными преобразованиями Лапласа, при приближении аргумента последней функции к нулю или к бесконечности. Прежде чем заняться этим вопросом, приведем несколько простых теорем, часто очень полезных в практических применениях.

Теорема 1. *Все \mathcal{L} -изображения $f(s)$ обладают следующим общим свойством: они стремятся к нулю, когда переменная s , пробегая вещественные значения, стремится к $+\infty$; это свойство сохраняется даже в том случае, когда s стремится к ∞ вдоль луча комплексной плоскости, образующего с положительной вещественной осью угол, по абсолютной величине меньший $\pi/2$.*

Сформулированная теорема дает необходимое условие, которому должно удовлетворять каждое \mathfrak{L} -изображение; часто она позволяет непосредственно установить, что та или иная функция не может представлять собой результат преобразования Лапласа какой-либо исходной функции. Так, например, сразу можно сказать, что постоянная $c \neq 0$ или степень s^α с положительным α не могут быть \mathfrak{L} -изображениями никаких исходных функций.

Однако условие $f(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$ ни в коем случае *не является достаточным* для того, чтобы функция $f(s)$ представляла собой \mathfrak{L} -изображение. Так, например, функция e^{-s} стремится к нулю на каждом луче, наклоненном к положительной вещественной оси на угол, меньший $\pi/2$, но тем не менее она не является \mathfrak{L} -изображением какой-либо исходной функции.

Теорема 2. Если $\lim_{t \rightarrow 0} Y(t)$ существует, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} Y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s).$$

Эта теорема дает возможность, зная изображение $y(s)$, определить $\lim_{t \rightarrow 0} Y(t) = Y(+0)$, но только в том случае, когда заранее известно, что $Y(+0)$ существует [хотя само значение $Y(+0)$ неизвестно].

Однако возможны случаи, когда существует $\lim_{s \rightarrow \infty} sy(s)$, но не существует $\lim_{t \rightarrow 0} Y(t)$. Например, для

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cos \frac{1}{t}, \quad y(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-V^{2s}} \cos V^{2s}$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) = 0$, но $\lim_{t \rightarrow 0} Y(t)$ не существует.

Теорема 3. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t)$ существует, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s).$$

Эта теорема позволяет, имея изображение $y(s)$, определить $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y(+\infty)$, если только заранее известно, что $Y(+\infty)$ существует.

При пользовании этой теоремой необходимо соблюдать ту же предосторожность, как и при пользовании теоремой 2. Например, для

$$Y(t) = \sin t, \quad y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$\lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = 0$, но $Y(+\infty)$ не существует.

§ 24. Общие понятия об асимптотическом представлении и асимптотическом разложении функций

Если функция $\varphi(z)$ при приближении к точке z_0 (которая может быть также бесконечно удаленной точкой) стремится к предельному значению l , то можно сказать, что она ведет себя вблизи z_0 как постоянная l . Однако часто возникает необходимость еще более точного описания функции $\varphi(z)$. Так, например, $\sin z$ стремится к нулю при $z \rightarrow 0$, но значительно важнее то обстоятельство, что $\sin z$ при $z \rightarrow 0$ изменяется так же, как и z , т. е. что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Иногда функция $\varphi(z)$ вообще не имеет предельного значения при $z \rightarrow z_0$, но, несмотря на это, ее поведение здесь может быть описано другой, более простой функцией. Так, например, функция

$$\frac{2z^3 + 3z + 4}{5z^2 + 6}$$

при $z \rightarrow \infty$ не имеет предельного значения, но она изменяется здесь так же, как функция $2z/5$ (ведет себя при приближении к бесконечности, как $2z/5$), т. е.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 + 3z + 4}{5z^2 + 6} : \frac{2}{5} z = 1.$$

Вообще, говорят, что функция $\varphi(z)$ ведет себя при $z \rightarrow z_0$ так же, как функция сравнения $\psi(z)$, или, иначе, что функция $\varphi(z)$ при $z \rightarrow z_0$ представляется асимптотически функцией $\psi(z)$, если имеет место соотношение

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Записывается это следующим образом:

$$\varphi(z) \sim \psi(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

В некоторых случаях возможно подобрать для функции $\varphi(z)$ не одну функцию сравнения, а последовательность функций сравнения, имеющих вид

$$\psi_0(z), \quad \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z), \dots$$

и представляющих с возрастанием числа членов функцию $\varphi(z)$ все «лучше и лучше». Точнее, это означает следующее. Если составление функций сравнения доведено до n членов, т. е. до

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_{\nu}(z),$$

то разность между $\varphi(z)$ и этой суммой изменяется так же, как ближайший следующий член $\psi_n(z)$ (в смысле определения, сделанного выше), т. е.

$$\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(z) \sim \psi_n(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_0. \quad (24.1)$$

Достигнув определенной степени приближения посредством функции $\sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(z)$ и получив таким путем «остаток», т. е. разность между заданной функцией и функцией сравнения, мы можем искать для остатка свою функцию сравнения, чтобы использовать ее затем для следующего улучшения приближения.

Соотношение (24.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(z)}{\psi_n(z)} \rightarrow 1,$$

или

$$\frac{\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(z)}{\psi_n(z)} - \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(z)} \rightarrow 0,$$

откуда

$$\frac{\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^n \psi_\nu(z)}{\psi_n(z)} \rightarrow 0. \quad (24.2)$$

Пусть отношение $f_1(z)/f_2(z)$ стремится к нулю; запишем это в виде равенства

$$f_1(z) = o(f_2(z)),$$

которое должно означать, что порядок величины функции $f_1(z)$ меньше, чем функции $f_2(z)$. Применяв такую запись для соотношения (24.2), мы получим:

$$\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^n \psi_\nu(z) = o(\psi_n(z)). \quad (24.3)$$

Следовательно, порядок величины «остатка», или «ошибки», возникающей при замене функции $\varphi(z)$ суммой членов $\psi_\nu(z)$, меньше, чем порядок величины последнего использованного члена $\psi_n(z)$.

Если можно найти сколь угодно большое число функций $\psi_\nu(z)$, обладающих свойством (24.1) или (24.3), то говорят, что функция $\varphi(z)$ имеет при $z \rightarrow z_0$ асимптотическое разложение

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(z),$$

что записывается следующим образом:

$$\varphi(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\nu}(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Примерами наиболее часто встречающихся асимптотических разложений могут служить: для *конечного* z_0 — ряды по *возрастающим степеням* $z - z_0$ с любыми, в том числе и не целочисленными показателями:

$$\varphi(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (z - z_0)^{\lambda_{\nu}} \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow +\infty); \quad (24.4)$$

для $z_0 = \infty$ — ряды по *убывающим степеням* z с любыми показателями:

$$\varphi(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{z^{\lambda_{\nu}}} \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty). \quad (24.5)$$

Для таких рядов особенно отчетливо видно, какой смысл имеет асимптотическое разложение. Так, например, в случае разложения (24.5) мы имеем:

$$\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^n \frac{c_{\nu}}{z^{\lambda_{\nu}}} = o\left(\frac{1}{z^{\lambda_n}}\right),$$

или

$$z^{\lambda_n} \left[\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^n \frac{c_{\nu}}{z^{\lambda_{\nu}}} \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение показывает, что ошибка

$$\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^n \frac{c_{\nu}}{z^{\lambda_{\nu}}}$$

не просто стремится к нулю, но стремится столь сильно, что даже ее произведение на z^{λ_n} также стремится к нулю.

Если ряды (24.4) и (24.5) *сходятся* внутри и соответственно вне некоторого круга, то они являются одновременно и асимптотическими разложениями.

К числу основных свойств преобразования Лапласа принадлежат следующие: асимптотическому разложению оригинала при $t = 0$ соответствует некоторое асимптотическое разложение изображения при $s \rightarrow \infty$ и, наоборот, асимптотическому разложению изображения при конечном s_0 соответствует некоторое асимптотическое

разложение оригинала при $t \rightarrow \infty$ *). Рассмотрению этих свойств посвящены два следующих параграфа. В практических применениях обычно бывает так, что исходный ряд дает не только асимптотическое разложение, но, кроме того, является даже сходящимся. В связи с этим при формулировке приводимых в §§ 25 и 26 теорем мы ограничимся только таким случаем.

§ 25. Асимптотическое разложение изображения

Начнем с составления асимптотического разложения для изображения, поскольку такое составление осуществляется особенно просто.

Теорема. Пусть изображение $\mathfrak{L}\{F\} = f(s)$ где-либо сходится; если оригинал $F(t)$ может быть разложен в окрестности точки $t=0$ в сходящийся ряд вида

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}} \quad (-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty),$$

то изображение $f(s)$ имеет при $s \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение

$$f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu} + 1)}{s^{\lambda_{\nu} + 1}}.$$

Ряд для $f(s)$ получается почленным переходом от ряда $F(t)$ путем преобразования Лапласа (см. пример 6 в § 3). В связи с этим возникает вопрос, всегда ли возможен такой почленный переход от ряда в пространстве оригиналов к ряду в пространстве изображений. Если рассматривать ряды только с точки зрения их сходимости, то уже простейшие примеры показывают, что такой почленный переход возможен не всегда. Так, например, для функции $F(t) = e^{-t^2}$ интеграл Лапласа существует во всей плоскости s , и степенной ряд

$$e^{-t^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{2\nu}}{\nu!}$$

сходится при всех t . Однако, если мы применим к этому ряду преобразование Лапласа и выполним его для каждого члена в отдельности, то получим ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} \frac{1}{s^{2\nu+1}},$$

*) Теоремы 2 и 3 в § 23 являются простейшими следствиями этого свойства. В самом деле, обе эти теоремы можно сформулировать в терминах настоящего параграфа следующим образом: из $Y(t) \sim l$ при $t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) вытекает, что $y(s) \sim l/s$ при $s \rightarrow \infty$ ($s \rightarrow 0$).

который не сходится ни для какого s , так как абсолютные значения его членов увеличиваются, начиная с определенного номера, для любого s . Тем не менее полученный ряд не является совсем бессмысленным. В самом деле, на основании сформулированной выше теоремы он представляет собой асимптотическое разложение изображения $f(s)$ при $s \rightarrow \infty$.

Приведем пример, показывающий целесообразность асимптотического разложения изображения. В § 21 мы вычислили комплексный интеграл, осуществляющий обратное преобразование Лапласа, изменив надлежащим образом путь интегрирования, и получили формулу (21.4). Эта формула представляет собой разложение температуры проводника тепла на установившиеся колебания с той же частотой, как у косинусоидального колебания, приложенного к границе проводника, и на затухающие колебания, определяемые интегралом Лапласа и выражаемые посредством формулы

$$f(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t}{t^2 + \omega^2} \sin x \sqrt{t} dt. \quad (25.1)$$

На основании теоремы 1 § 23 мы знаем, что $f(s)$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Если необходимо знать более точно, как сильна сходимость функции $f(s)$ к нулю, то следует воспользоваться теоремой настоящего параграфа. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2 + \omega^2} &= \frac{t}{\omega^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\omega}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{\omega^{2n+2}} = \\ &= \frac{t}{\omega^2} - \frac{t^3}{\omega^4} + \frac{t^5}{\omega^6} - \dots \quad \text{при } |t| < \omega, \\ \sin x \sqrt{t} &= \frac{x}{1!} t^{\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3!} t^{\frac{3}{2}} + \frac{x^5}{5!} t^{\frac{5}{2}} - \dots \quad \text{при всех } t, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2 + \omega^2} \sin x \sqrt{t} &= \frac{x}{\omega^2} t^{\frac{3}{2}} - \\ &- \frac{x^3}{3! \omega^2} t^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{x^5}{5! \omega^2} - \frac{x}{\omega^4} \right) t^{\frac{7}{2}} + \dots \quad \text{при } |t| < \omega. \quad (25.2) \end{aligned}$$

Выполнив необходимые вычисления, мы получим асимптотическое разложение изображения $f(s)$ при $s \rightarrow \infty$ в следующем виде:

$$f(s) \sim -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{\omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{5/2}} - \frac{x^3}{3! \omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{s^{7/2}} + \left(\frac{x^5}{5! \omega^2} - \frac{x}{\omega^4} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{s^{9/2}} + \dots \right\}. \quad (25.3)$$

Это разложение позволяет видеть свойства функции $f(s)$, которые нельзя обнаружить из ее определения (25.1), а именно: функция $f(s)$ стремится к нулю так же, как величина $\text{const}/s^{5/2}$; ошибка, возникающая при замене функции $f(s)$ функцией сравнения, стремится к нулю так же, как величина $\text{const}/s^{7/2}$ и т. д.

§ 26. Асимптотическое разложение оригинала

Необходимость определения оригинала по изображению возникает значительно чаще, чем обратная задача. Объясняется это тем, что при решении всех функциональных уравнений посредством преобразования Лапласа решается всегда сначала изображающее уравнение, а уже затем для полученного изображения отыскивается оригинал. Задачей определения оригинала по изображению мы подробно занимались в главе 7. Если методы, указанные там, не приводят к результату, то не остается ничего другого, как удовлетвориться по крайней мере асимптотическим разложением оригинала. Впрочем, во многих случаях практик даже и не заинтересован в том, чтобы иметь полное решение; вместо этого ему вполне достаточно знать, как ведет себя решение для больших t , например, остается ли оно при таких t ограниченным, т. е. имеет ли место устойчивость. В случае более сложных изображений, получающихся, например, при решении граничных задач для уравнений в частных производных, приводимая ниже теорема, основанная на сравнительно простых допущениях, часто является единственным средством для получения некоторого представления о решении. Этой теоремой следовало бы пользоваться в практических расчетах значительно чаще, чем это делается в современной литературе.

Если желательно получить представление об оригинале $Y(t)$ по изображению $y(s)$, то прежде всего необходимо выразить $Y(t)$ через $y(s)$ посредством формулы обращения

$$Y(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\omega}^{x+j\omega} e^{ts} y(s) ds. \quad (26.1)$$

Пусть это сделано. Функция $y(s)$, как результат преобразования Лапласа, является аналитической функцией в правой полуплоскости, в которой проходит также путь интегрирования. Все особые точки функции $y(s)$ лежат в левой полуплоскости. Пусть из всех особых точек точка α_0 будет расположенной наиболее далеко вправо (сначала мы будем предполагать, что имеется только одна такая точка, т. е. что не существует нескольких особых точек с наибольшей вещественной частью).

Допустим, что можно изменить прямолинейный путь интегрирования, определяемый абсциссой x , угловым путем \mathcal{C} , состоящим

из двух лучей, образующих с положительной вещественной осью углы ϑ ($\pi/2 < \vartheta \leq \pi$), и из круговой дуги, огибающей особую точку α_0 справа (рис. 11). Такую замену безусловно можно сделать, если изображение $y(s)$ в области между старым и новым путями интегрирования равномерно стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. В самом деле, вообразим, что оба пути интегрирования соединены друг с другом двумя большими круговыми дугами сверху и снизу; так как в ограниченной таким образом области функция $e^{ts} y(s)$ аналитическая, то интеграл от нее, взятый по замкнутому контуру, равен нулю. Если мы теперь будем стремить радиус проведенных круговых дуг к бесконечности, то на основании теоремы, приведенной на стр. 113, интегралы, взятые вдоль этих дуг, будут стремиться к нулю. В результате у нас останется только равная нулю сумма интеграла, взятого вдоль старого пути интегрирования снизу вверх, и интеграла, взятого вдоль нового пути интегрирования сверху вниз. Но это означает, что оба эти интеграла, если в каждом из них путь интегрирования пробегается снизу вверх, равны друг другу.

На основании этого результата будем считать, что для определения оригинала $Y(t)$ можно пользоваться вместо формулы (26.1) также формулой

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} e^{ts} y(s) ds. \quad (26.2)$$

В таком случае можно сформулировать следующую теорему:

Теорема. Если изображение $y(s)$ можно разложить в окрестности точки α_0 в степенной ряд

$$y(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (s - \alpha_0)^{\lambda_{\nu}}, \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty) \quad (26.3)$$

с произвольными показателями (не обязательно целочисленными), то оригинал $Y(t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно представить в виде асимптотического разложения

$$Y(t) \sim e^{\alpha_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} t^{-\lambda_{\nu}-1}, \quad (26.4)$$

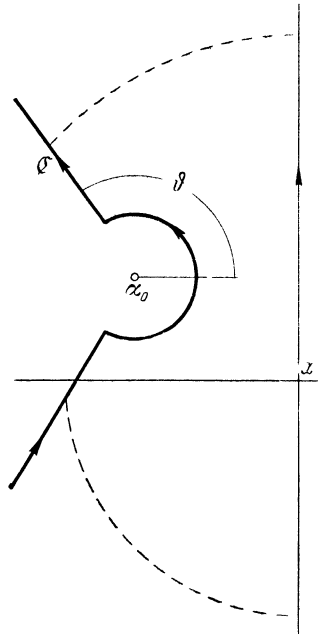


Рис. 11.

в котором необходимо положить

$$\frac{1}{\Gamma(-\lambda_\nu)} = 0,$$

если λ_ν принимает значения $0, 1, 2, \dots$ [как известно, $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \Gamma(-2) = \dots = \infty$].

Следовательно, те члены ряда, представляющего изображение $y(s)$, которые имеют положительные целочисленные показатели, ничего не вносят в асимптотическое разложение оригинала $Y(t)$. Такая роль этих членов объясняется тем, что они в своей совокупности представляют аналитическую функцию, не влияющую как-либо на поведение функции $y(s)$ в окрестности особой точки α_0 [именно эта особенность функции $y(s)$ в точке α_0 и является источником асимптотического поведения функции $Y(t)$].

Первые показатели степени λ_ν могут быть отрицательными. Для них мы имеем соответствие

$$(s - \alpha_0)^{\lambda_\nu} \bullet \rightarrow \frac{t^{-\lambda_\nu - 1}}{\Gamma(-\lambda_\nu)} e^{\alpha_0 t}.$$

Для положительных λ_ν , которые нас главным образом и интересуют, это соответствие не имеет места, так как функция $t^{-\lambda_\nu - 1}$ при $t=0$ неинтегрируема. Если же считать, что указанное соответствие формально применимо и для положительных λ_ν , то тогда на ряд (26.4) можно смотреть как на результат почленного перехода от ряда (26.3) в пространство оригиналов.

В приложениях показатели λ_ν чаще всего равны кратному от $1/2$. В этом случае с целью облегчения вычисления коэффициентов разложения (26.4) можно воспользоваться для $\lambda_\nu = \nu - 1/2$ формулой

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} = \frac{(-1)^\nu}{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{4^{\nu} \nu! \sqrt{\pi}}. \quad (26.5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда *наибольшей вещественной частью обладают несколько особых точек* функции $y(s)$, например, точки $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Прежде всего необходимо выяснить, можно ли заменить в формуле (26.1) прямолинейный путь интегрирования угловым путем, состоящим из двух наклоненных друг к другу лучей и трех небольших круговых дуг, обходящих особые точки справа (рис. 12). Конечно, как и прежде, для возможности такой замены достаточно, чтобы изображение $y(s)$ равномерно стремилось к нулю при $s \rightarrow \infty$ в области между обоими путями интегрирования. Если изображение $y(s)$ можно разложить в окрестности точки α_0 в ряд по степеням $s - \alpha_0$, в окрестности точки α_1 — в ряд по степеням $s - \alpha_1$ и в окрестности точки α_2 — в ряд по степеням $s - \alpha_2$, то для получения асимптотического разложения оригинала $Y(t)$

при $t \rightarrow \infty$ следует к каждому из трех перечисленных рядов применить почленно обратное преобразование Лапласа и затем полученные результаты сложить друг с другом. При этом следует иметь в виду, что показательные множители $e^{\alpha_0 t}$, $e^{\alpha_1 t}$, $e^{\alpha_2 t}$, стоящие перед рядами, хотя и различны, но все имеют одно и тоже абсолютное значение, так как

$$\operatorname{Re} \alpha_0 = \operatorname{Re} \alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha_2.$$

Эти показательные множители при $t \rightarrow +\infty$ возрастают или убывают в зависимости от того, больше или меньше нуля $\operatorname{Re} \alpha_0$, и притом значительно быстрее возрастания или убывания степеней $t^{-\lambda_\nu - 1}$ (возрастание имеет место для $\lambda_\nu < -1$, а убывание — для $\lambda_\nu > -1$). Следовательно, показательные множители $e^{\alpha_0 t}$, $e^{\alpha_1 t}$, $e^{\alpha_2 t}$ оказывают решающее влияние на поведение оригинала $Y(t)$.

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим опять проводник тепла, на краю которого приложена температура $\cos \omega t$. На основании формулы (21.2) температура в точке x в момент времени t равна

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{ts} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} ds \quad (\alpha > 0).$$

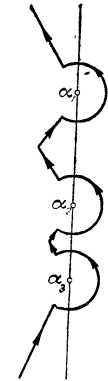


Рис. 12.

Если мы вырежем около отрицательной вещественной оси из плоскости s узкий угол, то функция $e^{-x\sqrt{s}}$ при $x > 0$ во всей остальной плоскости будет равномерно стремиться к нулю при $s \rightarrow \infty$, так как там $\operatorname{Re} s > 0$. Второй множитель $s/(s^2 + \omega^2)$ стремится равномерно к нулю во всей плоскости. Следовательно, можно без всяких сомнений заменить прямолинейный путь интегрирования угловым путем, состоящим из двух наклоненных друг к другу лучей и трех небольших круговых дуг, обходящих справа три особые точки: оба полюса $s = \pm j\omega$ и точку разветвления $s = 0$. Все эти точки имеют одинаковую вещественную часть, равную нулю. В окрестности каждой из этих точек изображение $y(s)$ можно разложить в степенной ряд. Рассмотрим сначала полюс $s = j\omega$ и представим изображение $y(s)$ в виде

$$y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} = \frac{1}{s - j\omega} \frac{s}{s + j\omega} e^{-x\sqrt{s}} = \frac{1}{s - j\omega} z(s).$$

Тогда функция $z(s)$ в окрестности точки $s = j\omega$ будет аналитической и поэтому ее можно разложить здесь в ряд Тэйлора

$$z(s) = z(j\omega) + \frac{z'(j\omega)}{1!} (s - j\omega) + \frac{z''(j\omega)}{2!} (s - j\omega)^2 + \dots$$

После разделения этого ряда на $s - j\omega$ [это необходимо для получения функции $y(s)$] все члены, начиная с третьего, будут иметь

целочисленные показатели, большие нуля, а второй член будет иметь показатель, равный нулю. Все такие члены при переходе к ряду вида (26.4) выпадут, следовательно, необходимо учитывать только первый член, равный

$$\frac{z(j\omega)}{s-j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega+j\omega} e^{-xVj\omega} \frac{1}{s-j\omega} = \frac{e^{-xVj\omega}}{2(s-j\omega)}.$$

Так как для этого члена $\lambda_0 = -1$, то соответствующий оригинал равен

$$\frac{1}{2} e^{-xVj\omega} e^{j\omega t}. \quad (26.6)$$

Аналогичным образом разложение изображения в ряд в окрестности точки $s = -j\omega$ и последующий переход в пространство оригиналов дают

$$\frac{1}{2} e^{-xV-j\omega} e^{-j\omega t}. \quad (26.7)$$

В точке разветвления $s = 0$ мы имеем (ср. стр. 131):

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 + \omega^2} &= \frac{s}{\omega^2} - \frac{s^3}{\omega^4} + \frac{s^5}{\omega^6} - \dots, \\ e^{-xVs} &= 1 - \frac{x}{1!} s^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2!} s - \frac{x^3}{3!} s^{\frac{3}{2}} + \frac{x^4}{4!} s^2 - \dots, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-xVs} &= \frac{1}{\omega^2} s - \frac{x}{1! \omega^2} s^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2! \omega^2} s^2 - \frac{x^3}{3! \omega^2} s^{\frac{5}{2}} + \\ &+ \left(\frac{x^4}{4! \omega^2} - \frac{1}{\omega^4} \right) s^3 + \dots \end{aligned}$$

При почленном переходе в пространство оригиналов выпадают все члены с целыми показателями, и получается асимптотическое разложение

$$-\frac{x}{1! \omega^2} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)} t^{-\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3! \omega^2} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)} t^{-\frac{7}{2}} + \dots,$$

которое, если воспользоваться формулой (26.5), можно представить в виде

$$-\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{\omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{t^{5/2}} - \frac{x^3}{3! \omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{t^{7/2}} + \dots \right\}. \quad (26.8)$$

Сложив друг с другом асимптотические разложения (26.6), (26.7) и (26.8), мы получим полное асимптотическое разложение оригинала $U(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Функции (26.6) и (26.7) можно объеди-

нить так же, как и на стр. 113, в одну функцию вещественного переменного

$$e^{-x} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cos \left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2}} \right).$$

В результате мы получим для решения $U(x, t)$ такую же формулу, как и ранее выведенную формулу (21.4) с заменой в последней интеграла Лапласа его выражением (25.3). Однако теперешний вывод значительно более цельный и более простой.

§ 27. Исследование устойчивости

Если физическая система описывается некоторыми функциональными уравнениями (дифференциальными, разностными или комбинацией таких уравнений), то во многих отраслях знания, например в технике регулирования, на первом плане стоит вопрос: является ли решение уравнений *устойчивым*, т. е. стремится ли оно при возрастании времени t к какому-либо конечному предельному значению, или, по крайней мере, остается ли оно ограниченным. Ответ на этот вопрос дает асимптотическое поведение функции, определяющей решение, при $t \rightarrow \infty$. Если задача решается посредством преобразования Лапласа, то всегда желательно получить представление об асимптотическом поведении оригинала непосредственно по изображению, т. е. не прибегая к явному определению оригинала. Для этой цели весьма полезна теорема, приведенная в предыдущем параграфе. Вообще можно было бы просто сослаться на эту теорему, но поскольку в литературе исследование устойчивости на основе свойств изображения выполняется часто довольно беззаботно, приведем здесь несколько дополнительных соображений.

Если физическая система описывается *обыкновенным* дифференциальным уравнением, то никаких сложностей при исследовании устойчивости вообще не возникает. Примем для большей определенности, что система вначале находится в покое, т. е. что все начальные значения $Y(+0)$, $Y'(+0)$, ..., $Y^{(n-1)}(+0)$ равны нулю. Кроме того, предположим, что возмущающей, или входной функцией является единичный скачок $U(t)$, следовательно, решением будет переходная функция. Согласно сказанному в § 11 решение изображающего уравнения имеет вид

$$y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{p(s)},$$

где $p(s)$ есть характеристический многочлен дифференциального уравнения. Функция $y(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, которую можно разложить на простейшие дроби. Если

все нули многочлена $p(s)$ простые, то таким разложением будет:

$$y(s) = \sum_{\nu} \frac{b_{\nu}}{s - \alpha_{\nu}};$$

если же имеются нули кратности l_{ν} , то мы будем иметь:

$$y(s) = \sum_{\nu} \left(\frac{b_{\nu}^{(1)}}{s - \alpha_{\nu}} + \dots + \frac{b_{\nu}^{(l_{\nu})}}{(s - \alpha_{\nu})^{l_{\nu}}} \right).$$

Представив решение изображающего уравнения в таком виде, мы можем сразу перевести его в пространство оригиналов, где получим:

$$Y(t) = \sum_{\nu} b_{\nu} e^{\alpha_{\nu} t}$$

или соответственно

$$Y(t) = \sum_{\nu} \left(b_{\nu}^{(1)} + \frac{b_{\nu}^{(2)}}{1!} t + \dots + \frac{b_{\nu}^{(l_{\nu})}}{(l_{\nu} - 1)!} t^{l_{\nu} - 1} \right) e^{\alpha_{\nu} t}.$$

Решение $Y(t)$ принято называть *устойчивым*, если оно при $t \rightarrow \infty$ стремится к своему начальному значению, равному нулю (собственная устойчивость), или к какому-либо другому постоянному значению (несобственная устойчивость) или, наконец, если оно колеблется в конечных границах (квазиустойчивость). Решающее влияние на поведение решения $Y(t)$ имеет тот из нулей многочлена $p(s)$, который обладает наибольшей вещественной частью (будем считать, что имеется только один такой нуль α_0). В самом деле,

$$|e^{\alpha_{\nu} t}| = e^{\operatorname{Re} \alpha_{\nu} \cdot t}$$

и

$$|e^{\alpha_{\nu} t}| < |e^{\alpha_0 t}| \quad \text{при } \nu \neq 0.$$

Решение $Y(t)$ будет:

при $\operatorname{Re} \alpha_0 > 0$ *неустойчивым*,

при $\operatorname{Re} \alpha_0 < 0$ *устойчивым*,

при $\operatorname{Re} \alpha_0 = 0$ в случае $\alpha_0 = 0$ *несобственно устойчивым*,
если нуль α_0 простой,
неустойчивым, если нуль
 α_0 кратный;

в случае $\operatorname{Im} \alpha_0 \neq 0$ *квазиустойчивым*, если нуль
 α_0 простой,
неустойчивым, если нуль
 α_0 кратный.

Аналогичным образом определяется поведение решения $Y(t)$ и в том случае, когда несколько нулей многочлена имеют одинаковую наибольшую вещественную часть. А именно, решение $Y(t)$ только тогда будет устойчивым (в указанном выше смысле), когда ни один из нулей знаменателя $p(s)$, т. е. ни один из полюсов функции $y(s)$,

не лежит в правой полуплоскости, а нули, расположенные на мнимой оси, являются простыми.

Для того чтобы обнаружить все эти свойства решения $Y(t)$, совсем не требуется иметь явное выражение функции $Y(t)$; вполне достаточно знать только изображение $u(s)$.

Совершенно так же обстоит дело и в том случае, когда физическое явление описывается *системой* обыкновенных дифференциальных уравнений, так как согласно сказанному в § 13 и здесь решение изображающего уравнения определяется только дробно-рациональными функциями (при условии, что входными функциями являются единичные скачки).

Однако, кроме указанных простых случаев, встречаются и более сложные, когда решением $u(s)$ изображающего уравнения является не дробно-рациональная, а *мероморфная* функция, а иногда — например, в случае уравнения в частных производных — даже *многозначная* функция (см. примеры, разобранные в главе 5). Впрочем, трансцендентные функции появляются также при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, получается например, для систем регулирования, реагирующих на отклонение не мгновенно, а только по прошествии некоторого промежутка времени. В этих случаях в технической литературе для исследования устойчивости часто применяют тот же критерий, который был применен выше для случая дробно-рациональной функции $u(s)$: определяют особую точку знаменателя $p(s)$, имеющую наибольшую вещественную часть, и по положению этой точки относительно мнимой оси судят об устойчивости оригинала. В основе такого неосторожного приема лежит то же самое наивное представление, о котором мы говорили уже на стр. 119, а именно, предполагается само собой очевидным, что решение $u(s)$ изображающего уравнения можно представить в виде ряда из простейших дробей, позволяющего сразу видеть все полюсы, и затем совершить почленный переход к показательному ряду в пространстве оригиналов. На стр. 120 мы уже подчеркнули, что к ряду из простейших дробей в общем случае может прибавляться еще целая функция. Такая функция является аналитической во всей конечной области, но зато в бесконечности она имеет особую точку (обычно трудно исследуемую), свойства которой могут сильно влиять на асимптотическое поведение решения $Y(t)$.

Для иллюстрации приведем один очень характерный пример. Рассмотрим функцию

$$Y(t) = e^t \sin \pi e^t,$$

безусловно неустойчивую и представляющую собой очень нежелательное колебание. В самом деле, это колебание при возрастании t быстро раскачивается и все чаще меняет свой знак. Можно показать, что такому оригиналу $Y(t)$ соответствует изображение $u(s)$, представляющее собой целую функцию, т. е. функцию, не имеющую

в конечной области никаких особых точек. Следовательно, причиной весьма сложного поведения функции $Y(t)$ может быть только особенность функции $y(s)$ в бесконечности. Очевидно, что для такой функции критерий устойчивости, приведенный на предыдущей странице, становится совершенно сомнительным. Вообразим на минуту, что изображение, найденное при решении какой-нибудь задачи, содержит в качестве слагаемого подобного рода «коварную» целую функцию. Тогда остальные слагаемые, если они будут иметь только полюсы с отрицательной вещественной частью, будут создавать видимость устойчивости, в то время как неустойчивость, вызванная «коварным» слагаемым, останется совершенно незамеченной.

Применение разложения на простейшие дроби особенно опасно в тех случаях, когда для изображения $y(s)$ получается многозначная функция, как это было, в частности, в примере, рассмотренном в § 26. Этот пример отнюдь не является надуманным упражнением, а представляет собой математическую формулировку конкретной физической задачи. В подобного рода задачах нельзя пользоваться разложением изображения $y(s)$ на простейшие дроби и тем более нельзя представлять оригинал в виде показательного ряда.

Во всех случаях, когда изображение не является дробно-рациональной функцией, для уверенного суждения об асимптотическом поведении и об устойчивости оригинала пригодны лишь теоремы такого же рода, как приведенная в § 26 (существуют другие подобные теоремы, относящиеся к более сложным особенностям). Таким образом, устойчивость решения определяется не только поведением изображения $y(s)$ в его особых точках, лежащих в конечной области, но и поведением $y(s)$ в бесконечности, так как именно от последнего поведения зависит, можно или нельзя заменить в формуле обращения прямолинейный путь интегрирования угловым путем, составленным из двух наклоненных друг к другу лучей и круговых дуг.

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Предварительные замечания

Настоящие таблицы составлены специально для целей практического применения преобразования Лапласа. Для того чтобы не допустить чрезмерного увеличения объема таблиц, в них не включены, за немногими исключениями, соответствия, построенные — в пространстве изображений или в пространстве оригиналов — из неэлементарных функций. Это обстоятельство позволило избежать специального указателя функций. Читателя, которому понадобятся более сложные соответствия, мы отсылаем к обширному труду А. Erdélyi, *Tables of integral transforms*, томы I и II (издательство McGraw Hill, New York, 1954)¹). Так как на практике чаще приходится выполнять переход из пространства изображений в пространство оригиналов, то в таблицах в первом столбце указываются не оригиналы, а изображения.

Определенным операциям в пространстве изображений соответствуют вполне определенные операции в пространстве оригиналов. Такое соответствие операций с успехом может быть использовано для обратного преобразования Лапласа. А именно, при некотором опыте часто можно так видоизменить изображение, что появляется простая возможность найти оригинал путем сопоставления видоизмененного изображения с известными соответствиями операций. Такие соответствия собраны в таблице I.

Собственно соответствиям между изображениями и оригиналами посвящена таблица II. В этой таблице сначала приводятся изображения, имеющие вид дробно-рациональных функций, так как такие изображения встречаются на практике чаще всего. Для того чтобы избежать кропотливых перерасчетов и сберечь время, здесь даны наравне с изображениями, например, вида

$$\frac{s}{(1+as)(1+bs)}$$

также изображения вида

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)},$$

поскольку те и другие встречаются на практике одинаково часто. Соответствия этой группы расположены в порядке возрастающих

¹) На русском языке см.: Диткин В. А. и Кузнецов П. И., *Справочник по операционному исчислению (основы теории и таблицы формул)*, Гостехиздат, Москва, 1951.

степеней знаменателя, а для каждой определенной степени знаменателя — в порядке возрастающих степеней числителя.

Во второй части таблицы II даны некоторые самые простые иррациональные и трансцендентные изображения. Именно для этой группы функций количество известных соответствий столь велико, что пришлось ограничиться лишь самым небольшим выбором. Однако значение этих соответствий для практики невелико. И если решение какой-либо задачи действительно приводит к сложному иррациональному или трансцендентному изображению, то обычно такое изображение не удастся найти и в подробных таблицах.

Так как задачи, в которые входят разрывные функции, приобретают все большее и большее практическое значение, то в третьей части таблицы II даны некоторые изображения, соответствующие оригиналам, по-разному определенным в отдельных интервалах.

На практике преобразование Лапласа особенно часто применяется для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этих случаях изображение, соответствующее решению дифференциального уравнения, представляет собой дробно-рациональную функцию. Для такого типа уравнений теория дает возможность отыскивать решение либо посредством общих теорем (о разложении в ряд, о разложении на простейшие дроби и т. д.), либо путем использования немногих простых соответствий и операций из числа приведенных в частях 1 и 2 таблицы II. В целях дальнейшего облегчения труда практиков в части 4 таблицы II даны готовые решения большого числа линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами до третьего порядка включительно. Расположение материала дано здесь прежде всего по порядку уравнений. Затем сначала указаны решения для однородных уравнений с учетом различного распределения корней характеристического уравнения, а потом — решения неоднородных уравнений. Для каждого распределения корней отдельно приводятся решения, соответствующие возмущающим функциям A , Bt , $A + Bt$, $\lambda e^{\mu t}$, $A + \lambda e^{\mu t}$ и $C \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Так как сдвиг фазы играет важную роль, то напомним здесь формулы

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad \sin \tau = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \tau = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

В литературе наряду с формой преобразования Лапласа, использованной в настоящей книге, применяется также другая форма, получающаяся из первой умножением на s . Поэтому особо подчеркнем, что в прилагаемых таблицах связь между оригиналом и изображением определяется формулой

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

I. Операции

№	Изображение $f(s)$	Оригинал $F(t)$
1	$f(s + a)$	$e^{-at} F(t)$
2	$\frac{df(s)}{ds}$	$-tF(t)$
3	$\frac{d^n f(s)}{ds^n}$	$(-t)^n F(t)$
4	$(-1)^m s^n \frac{d^m f(s)}{ds^m}$	$\frac{d^n}{dt^n} [t^m F(t)] \quad (m \geq n)$
5	$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} [s^n f(s)]$	$t^m \frac{d^n F(t)}{dt^n} \quad (m \geq n)$
6	$\left(-\frac{d}{ds} s\right)^n f(s)$, причем $\left(\frac{d}{ds} s\right)^2 f(s) = \frac{d}{ds} \left[s \frac{d}{ds} (sf(s))\right]$ и т. д.	$\left(t \frac{d}{dt}\right)^n F(t)$, причем $\left(t \frac{d}{dt}\right)^2 F(t) = t \frac{d}{dt} \left[t \frac{d}{dt} F(t)\right]$ и т. д.
7	$\left(-s \frac{d}{ds}\right)^n f(s)$	$\left(\frac{d}{dt} t\right)^n F(t)$
8	$\int_s^\infty f(\sigma) d\sigma$	$\frac{F(t)}{t}$
9	$\frac{1}{s} \int_s^\infty f(\sigma) d\sigma$	$\int_0^t \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau$
10	$\frac{1}{s} \int_0^s f(\sigma) d\sigma$	$\int_t^\infty \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau$
11	$\left(\int_s^\infty d\sigma\right)^n f(\sigma)$	$\frac{F(t)}{t^n}$

№	$f(s)$	$F(t)$
12	$\frac{1}{2\pi j} \int_{e-j\infty}^{e+j\infty} f_1(\sigma) f_2(s-\sigma) d\sigma$	$F_1(t) \cdot F_2(t)$
13	$f_1(s) \cdot f_2(s)$	$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau =$ $= \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau$
14	$sf(s) - F(0)$	$\frac{dF(t)}{dt}$
15	$s^n \left[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right]$	$\frac{d^n F(t)}{dt^n}$
16	$\frac{1}{s} f(s)$	$\int_0^t F(\tau) d\tau = F(t) * 1$
17	$\frac{1}{s^n} f(s)$	$\left(\int_0^t d\tau \right)^n F(\tau)$
18	$f(as) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$
19	$f(s-a)$	$e^{at} F(t)$
20	$f(s+a)$	$e^{-at} F(t)$
21	$(s-1) \dots (s-n) f(s-n)$	$\left(e^t \frac{d}{dt} \right)^n F(t)$, причем $\left(e^t \frac{d}{dt} \right)^2 F(t) = e^t \frac{d}{dt} \left[e^t \frac{d}{dt} F(t) \right]$ и т. д., а $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$

№	$f(s)$	$F(t)$
22	$\frac{1}{2j} [f(s - ja) - f(s + ja)]$	$F(t) \sin at$
23	$\frac{1}{2} [f(s - ja) + f(s + ja)]$	$F(t) \cos at$
24	$\frac{1}{2} [f(s - a) - f(s + a)]$	$F(t) \operatorname{sh} at$
25	$\frac{1}{2} [f(s - a) + f(s + a)]$	$F(t) \operatorname{ch} at$
26	$f(as + b) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}} F\left(\frac{t}{a}\right)$
27	$\frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi t}} F(\tau) d\tau$
28	$\frac{1}{\sqrt{-s}} f\left(-\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi t}} F(\tau) d\tau$
29	$\frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau}) F(\tau) d\tau$ (J_0 — функция Бесселя нулевого порядка)
30	$\frac{1}{s\sqrt{s}} f\left(\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}} F(\tau) d\tau$
31	$\frac{1}{s\sqrt{-s}} f\left(-\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}} F(\tau) d\tau$
32	$\frac{1}{s} f\left(s + \frac{1}{s}\right)$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) F(\tau) d\tau$
33	$f(\ln s)$	$\int_0^{\infty} \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} F(\tau) d\tau$ (Γ — гамма-функция)

№	$f(s)$	$F(t)$
34	$\frac{1}{s} f(\ln s)$	$\int_0^{\infty} \frac{t^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)} F(\tau) d\tau$
35	$f(\ln sa)$	$\int_0^{\infty} \frac{t^{a\tau-1}}{\Gamma(a\tau)} F(\tau) d\tau$
36	$e^{-as} f(s)$	$\begin{cases} F(t-a) & \text{при } t > a \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < a \end{cases}$
37	$e^{-as} f_1(s) f_2(s)$	$[F_1(t) * F_2(t)]_{t \rightarrow a}$
38	$\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a, b > 0)$	$\begin{cases} F(at-b) & \text{при } t > \frac{b}{a}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{b}{a} \end{cases}$
39	$eas \left[f(s) - \int_0^a e^{-s\tau} F(\tau) d\tau \right] \quad (a \geq 0)$	$F(t+a)$
40	$\frac{1}{1-e^{-as}} \int_0^a e^{-s\tau} F(\tau) d\tau$	$F(t)$ — периодическая функция с периодом a
41	$\int_0^{\infty} \frac{F(\tau)}{e^{s\tau}-1} d\tau$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F\left(\frac{t}{n}\right)$

II. Соответствия.
1. Дробно-рациональные функции

№	Изображение $f(s)$	Оригинал $F(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
3	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t
5	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
6	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\text{sh } at$
7	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
8	$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$
9	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
10	$\frac{1}{(1+as)^2}$	$\frac{1}{a^2} te^{-\frac{t}{a}}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
12	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$	$e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}}$ $a-b$

№	$f(s)$	$F(t)$
13	$\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$	
	$a_0 - \frac{a_1^2}{4} > 0$	$\frac{1}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}} e^{-\frac{a_1}{2} t} \sin \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t$
	$a_0 - \frac{a_1^2}{4} < 0$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}} e^{-\frac{a_1}{2} t} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} t$
14	$\frac{1}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	
	$D = 0$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
	$D^2 < 1$	$\frac{1}{\omega \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin (\omega \sqrt{1 - D^2} t)$
	$D^2 = 1$	$t e^{-\omega t}$
	$D^2 > 1$	$\frac{1}{\omega \sqrt{D^2 - 1}} e^{-D\omega t} \operatorname{sh} (\omega \sqrt{D^2 - 1} t)$
15	$\frac{a + bs}{s^2}$	$at + b$
16	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
17	$\frac{b + cs}{s^2 + a^2}$	$c \cos at + \frac{b}{a} \sin at$
18	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
19	$\frac{b + cs}{s^2 - a^2}$	$c \operatorname{ch} at + \frac{b}{a} \operatorname{sh} at$

№	$f(s)$	$F(t)$
20	$\frac{b+cs}{s(s-a)}$	$-\frac{b}{a} + \left(c + \frac{b}{a}\right) e^{at}$
21	$\frac{b+cs}{s(1+as)}$	$b + \left(\frac{c}{a} - b\right) e^{-\frac{t}{a}}$
22	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) e^{at}$
23	$\frac{b+cs}{(s-a)^2}$	$[c + (ac+b)t] e^{at}$
24	$\frac{s}{(1+as)^2}$	$\frac{1}{a^3} (a-t) e^{-\frac{t}{a}}$
25	$\frac{b+cs}{(1+as)^2}$	$\frac{1}{a^3} [(ab-c)t + ac] e^{-\frac{t}{a}}$
26	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$
27	$\frac{c+ds}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{(c+da)e^{at} - (c+db)e^{bt}}{a-b}$
28	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{ae^{-\frac{t}{b}} - be^{-\frac{t}{a}}}{ab(a-b)}$
29	$\frac{c+ds}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{ac-d}{a(a-b)} e^{-\frac{t}{a}} - \frac{bc-d}{b(a-b)} e^{-\frac{t}{b}}$
30	$\frac{s}{s^2 + a_1s + a_0}$ $a_0 - \frac{a_1^2}{4} > 0$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_0}}} e^{-\frac{a_1}{2}t} \sin\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} t + \tau\right)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}}{-\frac{a_1}{2}}$

№	$f(s)$	$F(t)$
	$a_0 - \frac{a_1^2}{4} < 0$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0} - 1}} e^{-\frac{a_1}{2} t} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} t + \tau \right)$ $\tau = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}}{-\frac{a_1}{2}}$
31	$\frac{s}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$ <p>$D = 0$</p> <p>$D^2 < 1$</p> <p>$D^2 = 1$</p> <p>$D^2 > 1$</p>	$\cos \omega t$ $\frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin (\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{\omega \sqrt{1 - D^2}}{-D\omega}$ $(1 - \omega t) e^{-\omega t}$ $\frac{1}{\sqrt{D^2 - 1}} e^{-D\omega t} \operatorname{sh} (\omega \sqrt{D^2 - 1} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{Arth} \frac{\omega \sqrt{D^2 - 1}}{-D\omega}$
32	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
33	$\frac{1}{s^2 (s - a)}$	$\frac{1}{a^2} (eat - 1 - at)$
34	$\frac{1}{s^2 (1 + as)}$	$ae^{-\frac{t}{a}} + t - a$
35	$\frac{1}{s (s - a)^2}$	$\frac{1}{a^2} [1 + (at - 1) e^{at}]$
36	$\frac{1}{s (1 + as)^2}$	$1 - \frac{a+t}{a} e^{-\frac{t}{a}}$

№	$f(s)$	$F(t)$
37	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{beat - aebt}{ab(a-b)}$
38	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1 + \frac{ae^{-\frac{t}{a}} - be^{-\frac{t}{b}}}{b-a}$
39	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(c-b)}$
40	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{a(b-c)e^{-\frac{t}{a}} + b(c-a)e^{-\frac{t}{b}} + c(a-b)e^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
41	$\frac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{eat - [1 + (a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
42	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{abe^{-\frac{t}{a}} - [ab + (a-b)t]e^{-\frac{t}{b}}}{b(a-b)^2}$
43	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$
44	$\frac{1}{(1+as)^3}$	$\frac{1}{2a^3} t^2 e^{-\frac{t}{a}}$
45	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
46	$\frac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\frac{1}{a^2} [\operatorname{ch} at - 1]$
47	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a(b-c)e^{at} + b(c-a)e^{bt} + c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
48	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a^2(b-c)e^{at} + b^2(c-a)e^{bt} + c^2(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
49	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{(c-b)e^{-\frac{t}{a}} + (a-c)e^{-\frac{t}{b}} + (b-a)e^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

№	$f(s)$	$F(t)$
50	$\frac{s^2}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{bc(b-c)e^{-\frac{t}{a}} + ac(c-a)e^{-\frac{t}{b}} + ab(a-b)e^{-\frac{t}{c}}}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$
51	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
52	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a^2e^{at} - [2ab - b^2 + b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
53	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{-b^2e^{-\frac{t}{a}} + [b^2 + (a-b)t]e^{-\frac{t}{b}}}{b^2(a-b)^2}$
54	$\frac{s^2}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{b^3e^{-\frac{t}{a}} + [ab(a-2b) - (a-b)at]e^{-\frac{t}{b}}}{ab^3(a-b)^2}$
55	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
56	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(1 + 2at + \frac{1}{2}a^2t^2\right)e^{at}$
57	$\frac{s}{(1+as)^3}$	$\left(\frac{t}{a^3} - \frac{t^2}{2a^4}\right)e^{-\frac{t}{a}}$
58	$\frac{s^2}{(1+as)^3}$	$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{2t}{a^4} + \frac{t^2}{2a^5}\right)e^{-\frac{t}{a}}$
59	$\frac{(s+a)^2}{s(s-a)^2}$	$1 + 4at e^{at}$
60	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\cos^3 at$
61	$\frac{(s+a)^2}{s(s^2 + a^2)}$	$1 + 2 \sin at$

№	$f(s)$	$F(t)$
62	$\frac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$	$\operatorname{ch}^2 at$
63	$\frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\sin^2 at$
64	$\frac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$	$\operatorname{sh}^2 at$
65	$\frac{a^3}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t \sin \frac{a}{\sqrt{2}} t - \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t \cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \right)$
66	$\frac{a^2 s}{s^4 + a^4}$	$\sin \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t$
67	$\frac{as^2}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t + \sin \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t \right)$
68	$\frac{s^3}{s^4 + a^4}$	$\cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t$
69	$\frac{a^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at - \sin at)$
70	$\frac{a^2 s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$
71	$\frac{as^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at + \sin at)$
72	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} at + \cos at)$
73	$\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$	$\sin at \operatorname{sh} at$
74	$\frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \operatorname{sh} at$
75	$\frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$	$\sin at \operatorname{ch} at$

№	$f(s)$	$F(t)$
76	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \operatorname{ch} at$
77	$\frac{a^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at - at \cos at)$
78	$\frac{as}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \sin at$
79	$\frac{as^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at + at \cos at)$
80	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos at - \frac{at}{2} \sin at$
81	$\frac{a^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$
82	$\frac{as}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \operatorname{sh} at$
83	$\frac{as^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at + at \operatorname{ch} at)$
84	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$
85	$\frac{ab}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$
86	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$
87	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$
88	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
89	$\frac{ab}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{b \operatorname{sh} at - a \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$

№	$f(s)$	$F(t)$
90	$\frac{s}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
91	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$
92	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{a^2 \operatorname{ch} at - b^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
93	$\frac{a^2}{s^2 (s^2 + a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$
94	$\frac{a^2}{s^2 (s^2 - a^2)}$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$
95	$\frac{a^4}{s (s^2 + a^2)^2}$	$1 - \cos at - \frac{at}{2} \sin at$
96	$\frac{a^4}{s (s^2 - a^2)^2}$	$1 - \operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$
97	$\frac{a^2 b^2}{s (s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cos at - a^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
98	$\frac{a^2 b^2}{s (s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \operatorname{ch} at - a^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
99	$\frac{a^5}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(3 - a^2 t^2) \sin at - 3 at \cos at]$
100	$\frac{a^3 s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t}{8} (\sin at - at \cos at)$
101	$\frac{a^3 s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at]$
102	$\frac{a^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(3 + a^2 t^2) \operatorname{sh} at - 3 at \operatorname{ch} at]$
103	$\frac{a^3 s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t}{8} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$

№	$f(s)$	$F(t)$
104	$\frac{a^3 s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [at \operatorname{ch} at - (1 - a^2 t^2) \operatorname{sh} at]$
105	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0, \text{ целое}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
106	$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$	$L_n(t)$ (полином Лагерра)
107	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)(s^2 + 2^2 a^2) \dots (s^2 + n^2 a^2)}$	$\frac{4^n \sin^{2n} \frac{a}{2} t}{(2n)! a^{2n}}$
108	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)(s^2 - 2^2 a^2) \dots (s^2 - n^2 a^2)}$	$\frac{4^n \operatorname{sh}^{2n} \frac{a}{2} t}{(2n)! a^{2n}}$
109	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + 3^2 a^2) \dots [s^2 + (2n+1)^2 a^2]}$	$\frac{\sin^{2n+1} at}{(2n+1)! a^{2n+1}}$
110	$\frac{1}{(s^2 - a^2)(s^2 - 3^2 a^2) \dots [s^2 - (2n+1)^2 a^2]}$	$\frac{\operatorname{sh}^{2n+1} at}{(2n+1)! a^{2n+1}}$
111	$\frac{1}{s(s+a)^n}$	$\frac{1}{a^n} \left[1 - \left(1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{-at} \right]$
112	$\frac{1}{s(as+1) \dots (as+n)}$	$\frac{1}{n!} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}} \right)^n$

№	$f(s)$	$F(t)$
113	$\frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{(s+a)^n}$	$\left\{ b_{n-1} + \left[b_{n-2} - \binom{n-1}{1} b_{n-1}a \right] t + \right.$ $+ \left[b_{n-3} - \binom{n-2}{1} b_{n-2}a + \right.$ $+ \left. \binom{n-1}{2} b_{n-1}a^2 \right] \frac{t^2}{2!} +$ $+ \left[b_{n-4} - \binom{n-3}{1} b_{n-3}a + \right.$ $+ \left. \binom{n-2}{2} b_{n-2}a^2 - \right.$ $- \left. \binom{n-1}{3} b_{n-1}a^3 \right] \frac{t^3}{3!} + \dots +$ $+ [b_0 - b_1a + \dots +$ $+ b_{n-1}(-a)^{n-1}] \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Big\} e^{-at}$
114	$\frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\dots(s+\alpha_n)}$	$\frac{b_{n-1}(-\alpha_1)^{n-1} + \dots + b_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\dots(\alpha_n - \alpha_1)} e^{-\alpha_1 t} +$ <p data-bbox="491 1291 977 1372">+ (n-1) аналогичных членов, получаемых путем циклической перестановки корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.</p>

№	$f(s)$	$F(t)$
115	$\frac{g(s)}{h(s)}$ $h(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots$ $\dots (s - \alpha_n),$ <p>все α_k различны, $g(s)$ — полином степени $\leq n - 1$</p>	$\sum_{k=1}^n \frac{g(\alpha_k)}{h'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$
116	$\frac{g(s)}{h(s)}$ $h(s) = (s - \alpha_1)^{m_1} \dots$ $\dots (s - \alpha_n)^{m_n},$ <p>все α_k различны, $g(s)$ — полином степени $\leq m_1 + \dots + m_n - 1$</p>	$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\varphi_{kl}(\alpha_k)}{(m_k - l)! (l - 1)!} t^{m_k - l} e^{\alpha_k t},$ <p>где $\varphi_{kl}(s) = \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} \left[\frac{g(s)}{h_k(s)} \right],$</p> $h_k(s) = \frac{h(s)}{(s - \alpha_k)^{m_k}}$

II. Соответствия.

2. Некоторые иррациональные и трансцендентные функции

№	Изображение $f(s)$	Оригинал $F(t)$
1	$\frac{\ln s}{s}$	$-\ln \gamma t$
2	$-\frac{\ln \gamma s}{s}$ *)	$\ln t$
3	$-\sqrt{\frac{\pi}{s}} \ln 4\gamma s$	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$
4	$\frac{\ln s}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \gamma t \right]$
5	$\frac{1}{s^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \gamma s \right]$	$\frac{t^n}{n!} \ln t$
6	$\frac{(\ln s)^2}{s}$	$[\ln \gamma t]^2 - \frac{\pi^2}{6}$
7	$\frac{(\ln \gamma s)^2}{s}$	$[\ln t]^2 - \frac{\pi^2}{6}$
8	$\frac{1}{\ln s}$	$\int_0^{\infty} \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} d\tau$
9	$\frac{1}{s^a \ln s}$	$\int_a^{\infty} \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} d\tau$
10	$\ln \frac{s-a}{s}$	$\frac{1 - e^{at}}{t}$
11	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$

*) $\gamma = e^C$; постоянная Эйлера $C = 0,577 \dots$

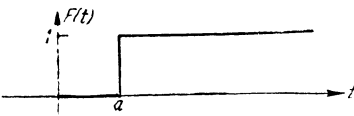
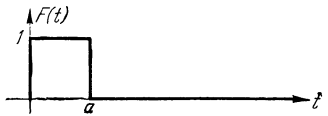
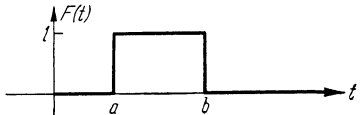
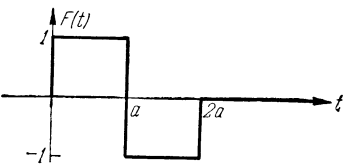
№	$f(s)$	$F(t)$
12	$\ln \frac{s+a}{s-a}$	$\frac{2}{t} \operatorname{sh} at$
13	$\ln \frac{s^2+a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cos at)$
14	$\ln \frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$	$\frac{2}{t} (\cos bt - \cos at)$
15	$s \ln \frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$	$\frac{2}{t^2} (\cos at + at \sin at - \cos bt - \sin bt)$
16	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
17	$\frac{1}{s \sqrt{s}}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
18	$\frac{s+a}{s \sqrt{s}}$	$\frac{1+2at}{\sqrt{\pi t}}$
19	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
20	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2t \sqrt{\pi t}} (e^{bt} - e^{at})$
21	$\sqrt{\sqrt{s^2+a^2}-s}$	$\frac{\sin at}{t \sqrt{2\pi t}}$
22	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}-s}{s^2+a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin at$
23	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{s^2+a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos at$
24	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2-a^2}-s}{s^2-a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sh} at$

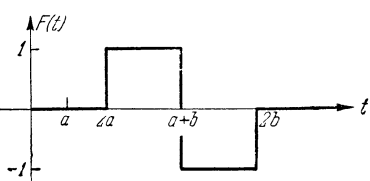
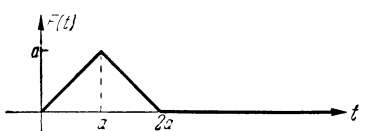
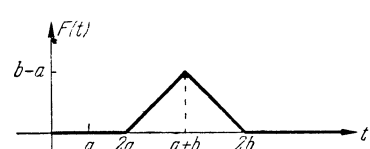
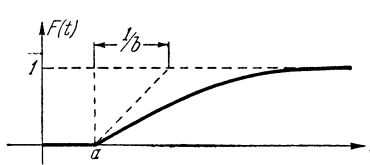
№	$f(s)$	$F(t)$
25	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2 - a^2} + s}{s^2 - a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{ch} at$
26	$\frac{1}{\sqrt{s}} \sin \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{sh} \sqrt{2at} \sin \sqrt{2at}}{\sqrt{\pi t}}$
27	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \sin \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{2at} \sin \sqrt{2at}}{\sqrt{a\pi}}$
28	$\frac{1}{\sqrt{s}} \cos \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{2at} \cos \sqrt{2at}}{\sqrt{\pi t}}$
29	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \cos \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{sh} \sqrt{2at} \cos \sqrt{2at}}{\sqrt{a\pi}}$
30	$\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{sh} \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{ch} 2 \sqrt{at} - \cos 2 \sqrt{at}}{2 \sqrt{\pi t}}$
31	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \operatorname{sh} \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{sh} 2 \sqrt{at} - \sin 2 \sqrt{at}}{2 \sqrt{a\pi}}$
32	$\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{ch} \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{ch} 2 \sqrt{at} + \cos 2 \sqrt{at}}{2 \sqrt{\pi t}}$
33	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \operatorname{ch} \frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{sh} 2 \sqrt{at} + \sin 2 \sqrt{at}}{2 \sqrt{a\pi}}$
34	$\frac{1}{s^\nu} \quad \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$
35	$\frac{1}{(s+a)^\nu}$	$\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-at}$
36	$\frac{1}{s^n \sqrt{s}}$	$\frac{t^n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi t}}$
37	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{\frac{s}{t}}$	$\frac{\operatorname{ch} 2 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$

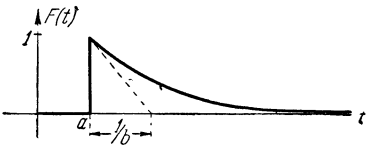
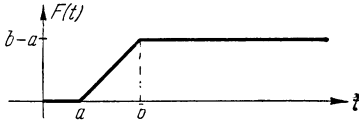
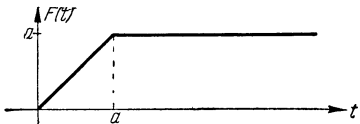
№	$f(s)$	$F(t)$
38	$\frac{1}{s \sqrt{s}}$	$\frac{\text{sh } 2 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
39	$\text{arctg } \frac{a}{s}$	$\frac{\sin at}{t}$
40	$\text{arctg } \frac{2as}{s^2 - a^2 + b^2}$	$\frac{2}{t} \sin at \cos bt$
41	$\text{arctg } \frac{s^2 - as + b}{ab}$	$\frac{e^{at} - 1}{t} \sin bt$
42	$\frac{\sin \left(b + \text{arctg } \frac{a}{s} \right)}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$\sin (at + b)$
43	$\frac{\cos \left(b + \text{arctg } \frac{a}{s} \right)}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$\cos (at + b)$

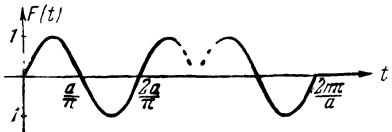
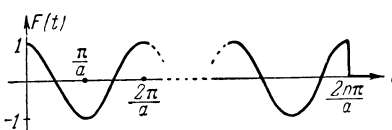
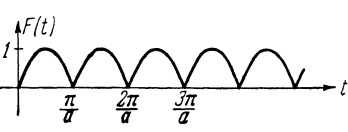
II. Соответствия

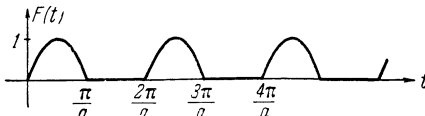
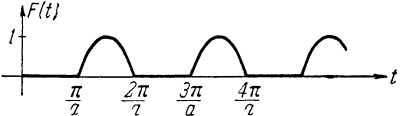

3. Оригиналы, по-разному определенные в отдельных интервалах

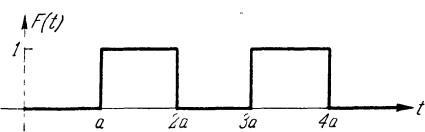
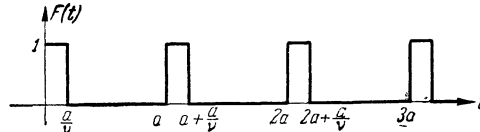
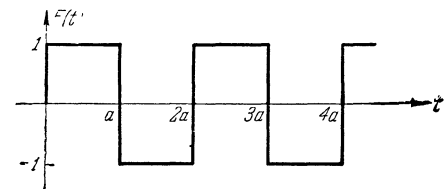
№	Изображение $f(s)$	Оригинал $F(t)$
1	$\frac{e^{-as}}{s}$	 <p style="text-align: center;"> $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ 1 & \text{при } a < t \end{cases}$ </p>
2	$\frac{1 - e^{-as}}{s}$	 <p style="text-align: center;"> $\begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < a, \\ 0 & \text{при } a < t \end{cases}$ </p>
3	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$	 <p style="text-align: center;"> $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ 1 & \text{при } a < t < b, \\ 0 & \text{при } b < t \end{cases}$ </p>
4	$\frac{(1 - e^{-as})^2}{s}$	 <p style="text-align: center;"> $\begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < a, \\ -1 & \text{при } a < t < 2a, \\ 0 & \text{при } 2a < t \end{cases}$ </p>

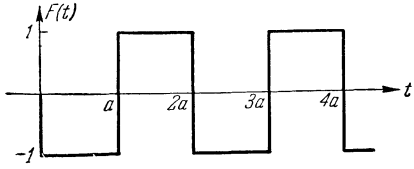
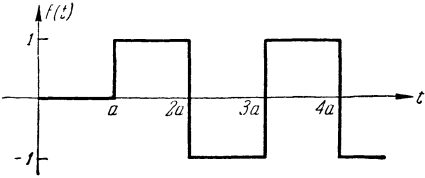
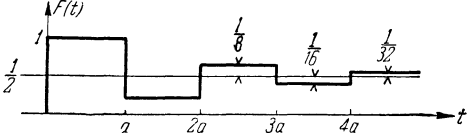
№	$f(s)$	$F(t)$
5	$\frac{(e^{-as} - e^{-bs})^2}{s}$	 <p> $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < 2a, \\ 1 & \text{при } 2a < t < a + b, \\ -1 & \text{при } a + b < t < 2b, \\ 0 & \text{при } 2b < t \end{cases}$ </p>
6	$\frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}$	 <p> $\begin{cases} t & \text{при } 0 < t < a, \\ 2a - t & \text{при } a < t < 2a, \\ 0 & \text{при } 2a < t \end{cases}$ </p>
7	$\frac{(e^{-as} - e^{-bs})^2}{s^2}$	 <p> $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < 2a, \\ t - 2a & \text{при } 2a < t < a + b, \\ 2b - t & \text{при } a + b < t < 2b, \\ 0 & \text{при } 2b < t \end{cases}$ </p>
8	$\frac{be^{-as}}{s(s+b)}$	 <p> $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)} & \text{при } a < t \end{cases}$ </p>

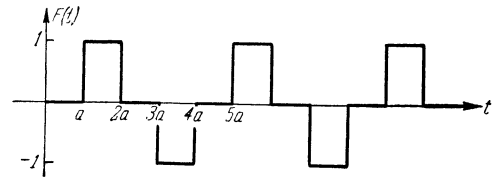
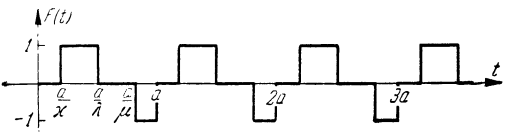
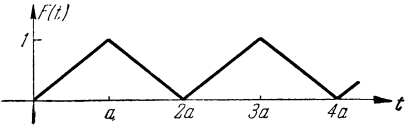
№	$f(s)$	$F(t)$
9	$\frac{e^{-as}}{s+b}$	 $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{при } a < t \end{cases}$
10	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s^2}$	 $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ t - a & \text{при } a < t < b, \\ b - a & \text{при } b < t \end{cases}$
11	$\frac{1 - e^{-as}}{s^2}$	 $\begin{cases} t & \text{при } 0 < t < a, \\ a & \text{при } a < t \end{cases}$
12	$e^{-as} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!} \frac{a^m}{s^{n-m+1}}$	$\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ t^n & \text{при } a < t \end{cases}$
13	$\frac{n!}{s^{n+1}} - e^{-as} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!} \frac{a^m}{s^{n-m+1}}$	$\begin{cases} t^n & \text{при } 0 < t < a, \\ 0 & \text{при } a < t \end{cases}$

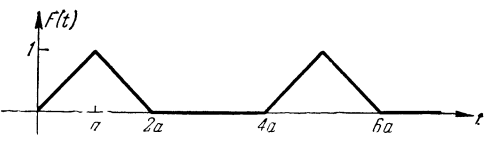
№	$f(s)$	$F(t)$
14	$a \frac{\left(1 - e^{-\frac{2n\pi s}{a}}\right)}{s^2 + a^2}$	 $\begin{cases} \sin at & \text{при } 0 < t < \frac{2n\pi}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t \end{cases}$
15	$s \frac{\left(1 - e^{-\frac{2n\pi s}{a}}\right)}{s^2 + a^2}$	 $\begin{cases} \cos at & \text{при } 0 < t < \frac{2n\pi}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t \end{cases}$
16	$\frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{a}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}}$	 $ \sin at $

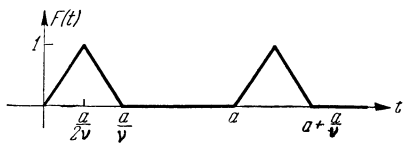
№	$f(s)$	$F(t)$
17	$\frac{a}{s^2 + a^2} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}}$	 $\begin{cases} \sin at & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t < \frac{(2n+1)\pi}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{(2n+1)\pi}{a} < t < \frac{(2n+2)\pi}{a}, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$
18	$\frac{a}{s^2 + a^2} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{a}s} - 1}$	 $\begin{cases} 0 & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t < \frac{(2n+1)\pi}{a}, \\ -\sin at & \text{при } \frac{(2n+1)\pi}{a} < t < \frac{(2n+2)\pi}{a}, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$
19	$\frac{1}{s(1 + e^{-as})}$	 $\begin{cases} 1 & \text{при } 2na < t < (2n+1)a, \\ 0 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$

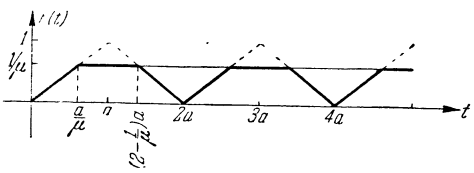
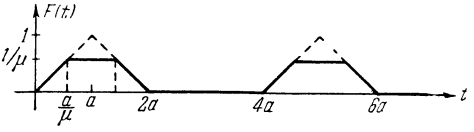
№	$f(s)$	$F(t)$
20	$\frac{1}{s(1+e^{as})}$	 <p> $\begin{cases} 0 & \text{при } 2na < t < (2n+1)a, \\ 1 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ n = 0, 1, \dots \end{cases}$ </p>
21	$\frac{1 - e^{-\frac{a}{v}s}}{s(1 - e^{-as})}$	 <p> $\begin{cases} 1 & \text{при } na < t < \left(n + \frac{1}{v}\right)a, \\ 0 & \text{при } \left(n + \frac{1}{v}\right)a < t < (n+1)a, \\ v > 1; n = 0, 1, \dots \end{cases}$ </p>
22	$\frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{-as})}$	 <p> $\begin{cases} 1 & \text{при } 2na < t < (2n+1)a, \\ -1 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ n = 0, 1, \dots \end{cases}$ </p>

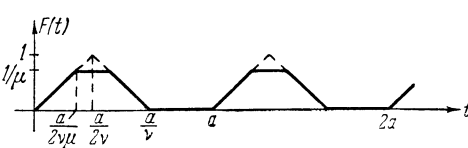
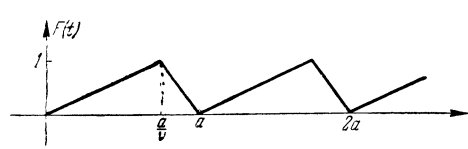
№	$f(s)$	$F(t)$
23	$\frac{e^{-as} - 1}{s(1 + e^{-as})}$	 <p data-bbox="429 500 855 597"> $\begin{cases} -1 & \text{при } 2na < t < (2n+1)a, \\ 1 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ & n = 0, 1, \dots \end{cases}$ </p>
24	$\frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{as})}$	 <p data-bbox="429 898 855 1027"> $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ 1 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ -1 & \text{при } (2n+2)a < t < (2n+3)a, \\ & n = 0, 1, \dots \end{cases}$ </p>
25	$\frac{4 - e^{-as}}{s(4 + 2e^{-as})}$	 <p data-bbox="456 1304 920 1393"> $\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \text{ при } na < t < (n+1)a, \\ n = 0, 1, \dots$ </p>

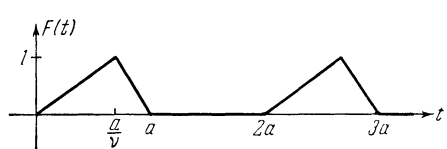
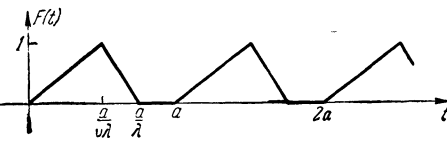
№	$f(s)$	$F(t)$
26	$\frac{1 - e^{-as}}{s(e^{as} + e^{-as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } 2na < t < (2n+1)a, \\ 1 \text{ при } (4n+1)a < t < (4n+2)a, \\ -1 \text{ при } (4n+3)a < t < (4n+4)a, \end{array} \right.$ $n = 0, 1, \dots$
27	$\frac{e^{-\frac{as}{x}} - e^{-\frac{as}{\lambda}} + e^{-as} - e^{-\frac{as}{\mu}}}{s(1 - e^{-as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } na < t < \left(n + \frac{1}{x}\right)a, \\ 1 \text{ при } \left(n + \frac{1}{x}\right)a < t < \left(n + \frac{1}{\lambda}\right)a, \\ 0 \text{ при } \left(n + \frac{1}{\lambda}\right)a < t < \left(n + \frac{1}{\mu}\right)a, \\ -1 \text{ при } \left(n + \frac{1}{\mu}\right)a < t < (n+1)a, \end{array} \right.$ $1 < \mu < \lambda < x; \quad n = 0, 1, \dots$
28	$\frac{1 - e^{-as}}{as^2(1 + e^{-as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{a} - 2n \quad \text{при } 2na < t < (2n+1)a, \\ -\frac{t}{a} + 2(n+1) \quad \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{array} \right.$ $n = 0, 1, \dots$

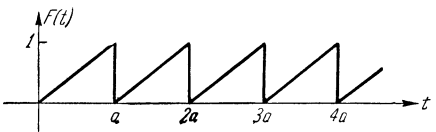
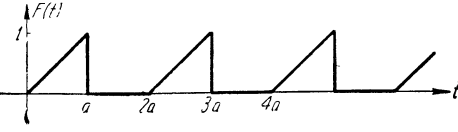
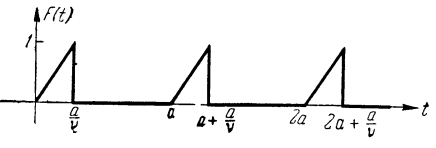
№	$f(s)$	$F(t)$
29	$\frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2(1 - e^{-4as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{a} - 4n \quad \text{при } 4na < t < (4n + 1)a, \\ -\frac{t}{a} + 4n + 2 \quad \text{при } (4n + 1)a < t < (4n + 2)a, \\ 0 \quad \text{при } (4n + 2)a < t < (4n + 4)a, \\ n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$

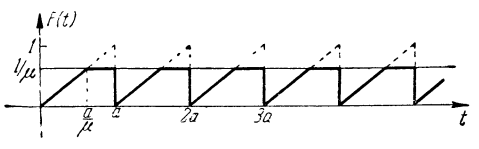
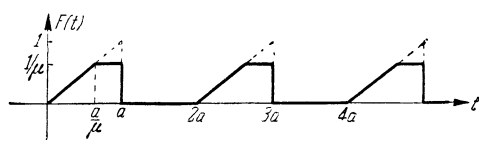
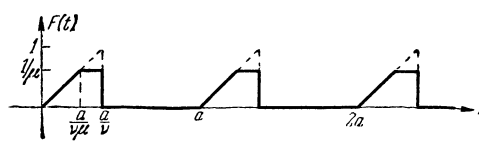
30	$\frac{2\nu \left(1 - e^{-\frac{a\nu}{2\nu}}\right)^2}{as^2(1 - e^{-a\nu})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\nu}{a}t - 2\nu n \\ \quad \text{при } na < t < \left(n + \frac{1}{2\nu}\right)a, \\ -\frac{2\nu}{a}t + 2\nu n + 2 \\ \quad \text{при } \left(n + \frac{1}{2\nu}\right)a < t < \left(n + \frac{1}{\nu}\right)a, \\ 0 \quad \text{при } \left(n + \frac{1}{\nu}\right)a < t < (n + 1)a, \\ \nu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$
----	--	--

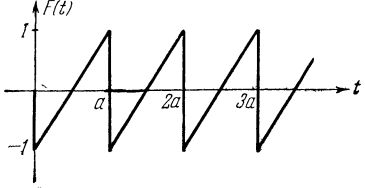
№	$f(s)$	$F(t)$
31	$\frac{\left(1 - e^{-\frac{as}{\mu}}\right) \left(1 - e^{-\left(2 - \frac{1}{\mu}\right) as}\right)}{as^2 (1 - e^{-2as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{a} - 2n \quad \text{при } 2na < t < \left(2n + \frac{1}{\mu}\right) a, \\ \frac{1}{\mu} \quad \text{при } \left(2n + \frac{1}{\mu}\right) a < t < \\ < \left(2n + 2 - \frac{1}{\mu}\right) a, \\ -\frac{t}{a} + 2n + 2 \quad \text{при } \left(2n + 2 - \frac{1}{\mu}\right) a < t < \\ < (2n + 2) a, \\ \mu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$
32	$\frac{\left(1 - e^{-\frac{as}{\mu}}\right) \left(1 - e^{-\left(2 - \frac{1}{\mu}\right) as}\right)}{as^2 (1 - e^{-4as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{a} - 4n \quad \text{при } 4na < t < \left(4n + \frac{1}{\mu}\right) a, \\ \frac{1}{\mu} \quad \text{при } \left(4n + \frac{1}{\mu}\right) a < t < \\ < \left(4n + 2 - \frac{1}{\mu}\right) a, \\ -\frac{t}{a} + 4n + 2 \quad \text{при } \left(4n + 2 - \frac{1}{\mu}\right) a < t < \\ < (4n + 2) a, \\ 0 \quad \text{при } (4n + 2) a < t < (4n + 4) a, \\ \mu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$

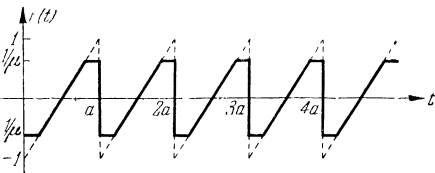
№	$f(s)$	$F(t)$
33	$\frac{2\nu \left(1 - e^{-\frac{as}{2\nu\mu}} - e^{-\frac{(2\mu-1)as}{2\nu\mu}} + e^{-\frac{as}{\nu}} \right)}{as^2(1 - e^{-as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\nu}{a}t - 2\nu n \quad \text{при } na < t < \\ \quad < \left(n + \frac{1}{2\nu\mu} \right) a, \\ \frac{1}{\mu} \quad \text{при } \left(n + \frac{1}{2\nu\mu} \right) a < \\ \quad < t < \left(n + \frac{2\mu-1}{2\nu\mu} \right) a, \\ -\frac{2\nu}{a}t + 2\nu n + 2 \quad \text{при } \left(n + \frac{2\mu-1}{2\nu\mu} \right) a < \\ \quad < t < \left(n + \frac{1}{\nu} \right) a, \\ 0 \quad \text{при } \left(n + \frac{1}{\nu} \right) a < t < \\ \quad < (n+1)a, \\ \nu, \mu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$
34	$\frac{\nu(\nu-1) + \nu e^{-as} - \nu^2 e^{-\frac{as}{\nu}}}{(\nu-1)as^2(1 - e^{-as})}$	 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu t}{a} - n \quad \text{при } na < t < \left(n + \frac{1}{\nu} \right) a, \\ -\frac{\nu}{a(\nu-1)}t + \frac{\nu(n+1)}{\nu-1} \\ \quad \text{при } \left(n + \frac{1}{\nu} \right) a < t < (n+1)a, \\ \nu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$

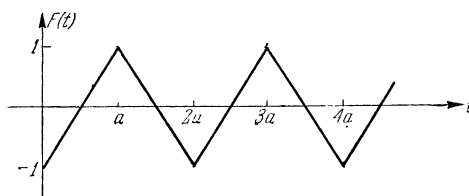
№	$f(s)$	$F(t)$
35	$\frac{\nu(\nu-1) + \nu e^{-as} - \nu^2 e^{-\frac{as}{\nu}}}{(\nu-1)as^2(1-e^{-2as})}$	 $ \begin{cases} \frac{\nu}{a}t - 2n & \text{при } 2na < t < (2n + \frac{1}{\nu})a, \\ -\frac{\nu}{a(\nu-1)}t + \frac{\nu(2n+1)}{\nu-1} & \text{при } (2n + \frac{1}{\nu})a < t < \\ & < (2n+1)a, \\ 0 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ \nu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} $
36	$\frac{\lambda\nu(\nu-1) + \lambda\nu e^{-\frac{as}{\lambda}} - \lambda\nu^2 e^{-\frac{as}{\lambda\nu}}}{as^2(\nu-1)(1-e^{-as})}$	 $ \begin{cases} \frac{\lambda\nu}{a}t - \lambda\nu n & \text{при } na < t < (n + \frac{1}{\lambda\nu})a, \\ -\frac{\lambda\nu}{a(\nu-1)}t + \frac{\nu(n+1)}{\nu-1} & \text{при } (n + \frac{1}{\lambda\nu})a < t < \\ & < (n + \frac{1}{\lambda})a, \\ 0 & \text{при } (n + \frac{1}{\lambda})a < t < (n+1)a, \\ \lambda, \nu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} $

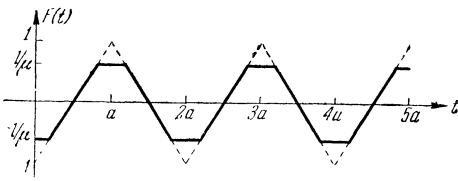
№	$f(s)$	$F(t)$
37	$\frac{as + 1 - e^{as}}{as^2(1 - e^{as})}$	 <p style="text-align: center;"> $\frac{t}{a} - n$ при $na < t < (n+1)a$, $n = 0, 1, \dots$ </p>
38	$\frac{1 - (1 + as)e^{-as}}{as^2(1 - e^{-2as})}$	 <p style="text-align: center;"> $\begin{cases} \frac{t}{a} - 2n & \text{при } 2na < t < (2n+1)a, \\ 0 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$ </p>
39	$\frac{\nu - (\nu + as)e^{-\frac{as}{\nu}}}{as^2(1 - e^{-as})}$	 <p style="text-align: center;"> $\begin{cases} \frac{\nu}{a}t - \nu n & \text{при } na < t < \left(n + \frac{1}{\nu}\right)a, \\ 0 & \text{при } \left(n + \frac{1}{\nu}\right)a < t < (n+1)a, \end{cases}$ $\nu > 1; n = 0, 1, \dots$ </p>

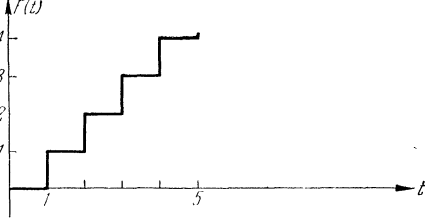
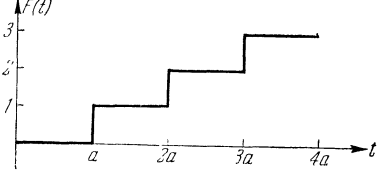
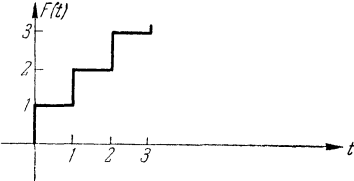
№	$f(s)$	$F(t)$
40	$\frac{\mu - \mu e^{-\frac{as}{\mu}} - ase^{-as}}{a\mu s^2(1 - e^{-as})}$	 $\begin{cases} \frac{t}{a} - n & \text{при } na < t < \left(n + \frac{1}{\mu}\right)a, \\ \frac{1}{\mu} & \text{при } \left(n + \frac{1}{\mu}\right)a < t < (n+1)a, \end{cases}$ <p style="text-align: right;">$\mu > 1; n = 0, 1, \dots$</p>
41	$\frac{\mu - \mu e^{-\frac{as}{\mu}} - ase^{-2as}}{a\mu s^2(1 - e^{-2as})}$	 $\begin{cases} \frac{t}{a} - 2n & \text{при } 2na < t < \left(2n + \frac{1}{\mu}\right)a, \\ \frac{1}{\mu} & \text{при } \left(2n + \frac{1}{\mu}\right)a < t < (2n+1)a, \\ 0 & \text{при } (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases}$ <p style="text-align: right;">$\mu > 1; n = 0, 1, \dots$</p>
42	$\frac{\mu\nu - \mu\nu e^{-\frac{as}{\nu\mu}} - ase^{-\frac{as}{\nu}}}{a\mu s^2(1 - e^{-as})}$	 $\begin{cases} \frac{\nu}{a}t - \nu n & \text{при } na < t < \left(n + \frac{1}{\nu\mu}\right)a, \\ \frac{1}{\mu} & \text{при } \left(n + \frac{1}{\nu\mu}\right)a < t < \left(n + \frac{1}{\nu}\right)a, \\ 0 & \text{при } \left(n + \frac{1}{\nu}\right)a < t < (n+1)a, \end{cases}$ <p style="text-align: right;">$\nu, \mu > 1; n = 0, 1, \dots$</p>

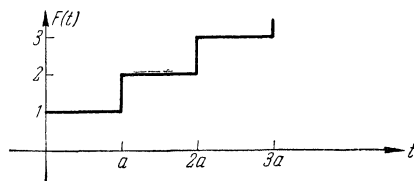
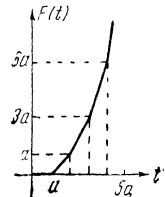
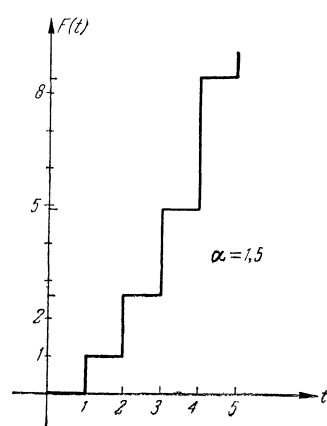
№	$f(s)$	$F(t)$
43	$\frac{2 - as - (2 + as)e^{-as}}{as^2(1 - e^{-as})}$	 $\frac{2t}{a} - (2n + 1)$ <p style="text-align: center;">при $na < t < (n + 1)a$, $n = 0, 1, \dots$</p>

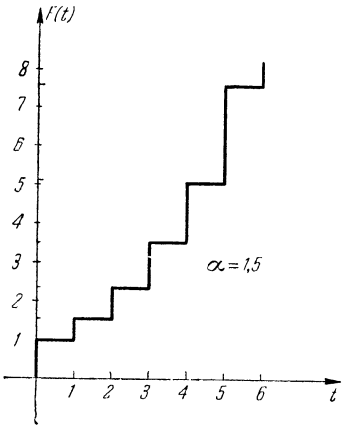
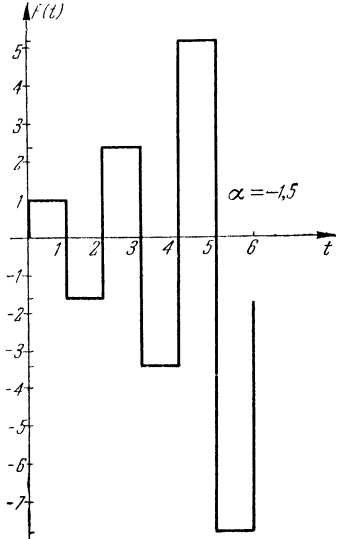
44	$2\mu e^{-\frac{as}{2}} \left(e^{\frac{as}{2\mu}} - e^{-\frac{as}{2\mu}} \right) - as(1 + e^{-as})$ $a\mu s^2(1 - e^{-as})$	 $\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{\mu} \text{ при } na < t < \\ & < \left(n + \frac{\mu - 1}{2\mu} \right) a, \\ & \frac{2t}{a} - (2n + 1) \\ & \text{при } \left(n + \frac{\mu - 1}{2\mu} \right) a < t < \\ & < \left(n + \frac{\mu + 1}{2\mu} \right) a, \\ & -\frac{1}{\mu} \text{ при } \left(n + \frac{\mu + 1}{2\mu} \right) a < t < \\ & < (n + 1)a, \\ & \mu > 1; \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\}$
----	--	--

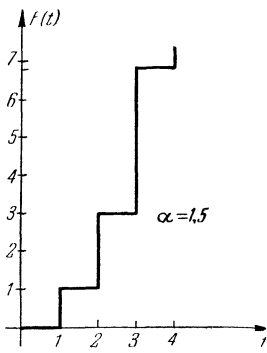
№	$f(s)$	$F(t)$
45	$\frac{2(1 - e^{-as})}{as^2(1 + e^{-as})} - \frac{1}{s}$	<div style="text-align: center;">  </div> $\begin{cases} \frac{2t}{a} - (4n + 1) & \text{при } 2na < t < (2n + 1)a, \\ -\frac{2t}{a} + 4n + 3 & \text{при } (2n + 1)a < t < \\ & < (2n + 2)a, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$

№	$f(s)$	$F(t)$
46	$2 \frac{\left(e^{-\frac{\mu-1}{2\mu}as} - e^{-\frac{\mu+1}{2\mu}as} \right)}{as^2(1+e^{-as})} - \frac{1}{\mu s}$	<div style="display: flex; align-items: center;">  </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="font-size: 3em; margin-right: 10px;">}</div> <div> <p style="margin: 0;"> $-\frac{1}{\mu}$ при $2na < t <$ $< \left(2n + \frac{\mu-1}{2\mu} \right) a,$ </p> <p style="margin: 0;"> $\frac{2t}{a} - (4n+1)$ при $\left(2n + \frac{\mu-1}{2\mu} \right) a < t <$ $< \left(2n + \frac{\mu+1}{2\mu} \right) a,$ </p> <p style="margin: 0;"> $\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n + \frac{\mu+1}{2\mu} \right) a < t <$ $< \left(2n + \frac{3\mu-1}{2\mu} \right) a,$ </p> <p style="margin: 0;"> $-\frac{2t}{a} + 4n + 3$ при $\left(2n + \frac{3\mu-1}{2\mu} \right) a < t <$ $< \left(2n + \frac{3\mu+1}{2\mu} \right) a,$ </p> <p style="margin: 0;"> $-\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n + \frac{3\mu+1}{2\mu} \right) a < t <$ $< (2n+2)a,$ </p> <p style="margin: 0;"> $\mu > 1; n = 0, 1, \dots$ </p> </div> </div>

№	$f(s)$	$F(t)$
47	$\frac{1}{s(e^s - 1)}$	 <p data-bbox="502 527 939 625"> $[t]$ или n при $n \leq t < n + 1$, $n = 0, 1, \dots$ </p>
48	$\frac{1}{s(e^{as} - 1)}$	 <p data-bbox="502 901 939 1023"> $\left[\frac{t}{a}\right]$ или n при $na \leq t < (n + 1)a$, $n = 0, 1, \dots$ </p>
49	$\frac{1}{s(1 - e^{-s})}$	 <p data-bbox="502 1331 939 1429"> $[t] + 1$ или $n + 1$ при $n \leq t < n + 1$, $n = 0, 1, \dots$ </p>

№	$f(s)$	$F(t)$
50	$\frac{1}{s(1 - e^{-as})}$	 <p>$\left[\frac{t}{a} \right] + 1$ или $n + 1$ при $na \leq t < (n + 1)a$, $n = 0, 1, \dots$</p>
51	$\frac{1}{s^2(e^{as} - 1)}$	 <p>$n \left(t - \frac{(n + 1)a}{2} \right)$ при $na \leq t < (n + 1)a$, $n = 0, 1, \dots$</p>
52	$\frac{1}{s(e^s - \alpha)}$ ($\alpha \neq 1$)	 <p>$\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$ или $\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$ при $n \leq t < n + 1$, $n = 0, 1, \dots$</p>

№	$f(s)$	$F(t)$
		
53	$\frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)}$	 <p data-bbox="485 1339 971 1453"> $\alpha^{[t]}$ или α^n при $n \leq t < n + 1,$ $n = 0, 1, \dots$ </p>

№	$f(s)$	$F(t)$
54	$\frac{e^s - 1}{s (e^s - \alpha)^2}$	 <p data-bbox="518 641 960 771"> $[t] \alpha^{[t]-1}$ или $n \alpha^{n-1}$ при $n \leq t < n + 1,$ $n = 0, 1, \dots$ </p>
55	$\frac{e^s - 1}{s (e^s - \alpha)^3}$	<p data-bbox="518 803 960 974"> $\frac{1}{2} [t] ([t] - 1) \alpha^{[t]-2}$ или $\frac{1}{2} n (n - 1) \alpha^{n-2}$ при $n \leq t < n + 1,$ $n = 0, 1, \dots$ </p>
56	$\frac{e^s - 1}{s (e^s - \alpha) (e^s - \beta)}$ $(\alpha \neq \beta)$	<p data-bbox="518 1015 960 1185"> $\frac{\alpha^{[t]} - \beta^{[t]}}{\alpha - \beta}$ или $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ при $n \leq t < n + 1,$ $n = 0, 1, \dots$ </p>
57	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - (\alpha + \beta)}{(e^s - \alpha) (e^s - \beta)}$ $(\alpha \neq \beta)$	<p data-bbox="518 1226 960 1404"> $-\alpha\beta \frac{\alpha^{[t]-1} - \beta^{[t]-1}}{\alpha - \beta}$ или $-\alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$ при $n \leq t < n + 1,$ $n = 0, 1, \dots$ </p>

№	$f(s)$	$F(t)$
58	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - 2\alpha}{(e^s - \alpha)^2}$	$-([t]-1) a^{ t }$ или $-(n-1) a^n$ при $n \leq t < n+1$, $n = 0, 1, \dots$
59	$\frac{1 - e^{-s}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} G_k e^{-ks}$	$G([t])$ или $G(n)$ при $n \leq t < n+1$, $n = 0, 1, \dots$
60	$\frac{e^s + 1}{s(e^s - 1)^2}$	$[t]^2$
61	$\frac{(e^s - 1)(e^s + \alpha)}{s(e^s - \alpha)^3}$	$[t]^2 \alpha^{ t -1}$
62	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{(c-d)e^s - (c\beta - d\alpha)}{(e^s - \alpha)(e^s - \beta)}$	$ca^{ t } - d\beta^{ t }$
63	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{\sin \beta}{e^{2s} - 2e^s \cos \beta + 1}$	$\sin \beta [t]$
64	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - \cos \beta}{e^{2s} - 2e^s \cos \beta + 1}$	$\cos \beta [t]$
65	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{\alpha \sin \beta}{e^{2s} - 2\alpha e^s \cos \beta + \alpha^2}$	$\alpha^{ t } \sin \beta [t]$
66	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - \alpha \cos \beta}{e^{2s} - 2\alpha e^s \cos \beta + \alpha^2}$	$\alpha^{ t } \cos \beta [t]$

II. Соответствия

4. Решения дифференциальных уравнений

Предварительное замечание. Начальные значения дифференциального уравнения

$$Y^{(n)}(t) + c_{n-1}Y^{(n-1)}(t) + \dots + c_1Y'(t) + c_0Y(t) = F(t)$$

обозначены через $Y(+0) = Y_0$, $Y'(+0) = Y'_0$, ..., $Y^{(n-1)}(+0) = Y_0^{(n-1)}$.

Корни характеристического уравнения

$$s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0 = 0$$

обозначены через

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (вещественные корни),

$s^2 + 2D\omega s + \omega^2$ (сопряженные мнимые корни)

№	Изображение $y(s)$	Оригинал $Y(t)$
1. Дифференциальное уравнение первого порядка $Y'(t) + c_0Y(t) = F(t), \quad Y_0 = a$		
	а) однородное: $F(t) \equiv 0$	
1	$\frac{a}{s - \alpha_1}$	$ae^{\alpha_1 t}$
	б) неоднородное:	
	$F(t) = A$	
2	$\frac{a + \frac{A}{s}}{s - \alpha_1}$	$-\frac{A}{\alpha_1} + \left(a + \frac{A}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}$
	$F(t) = \lambda e^{\mu t}$	
3	$\frac{a + \frac{\lambda}{s - \mu}}{s - \alpha_1}$	$-\frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu} e^{\mu t} + \left(a + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}\right) e^{\alpha_1 t}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
4	$\boxed{F(t) = A + \lambda e^{\mu t}}$ $a + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s - \mu}$	$-\frac{A}{\alpha_1} - \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu} e^{\mu t} + \left(a + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu} \right) e^{\alpha_1 t}$
5	$\boxed{F(t) = Bt}$ $a + \frac{B}{s^2}$	$-\frac{B}{\alpha_1^2} - \frac{B}{\alpha_1} t + \left(a + \frac{B}{\alpha_1^2} \right) e^{\alpha_1 t}$
6	$\boxed{F(t) = A + Bt}$ $a + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}$	$-\frac{A}{\alpha_1} - \frac{B}{\alpha_1^2} - \frac{B}{\alpha_1} t + \left(a + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{B}{\alpha_1^2} \right) e^{\alpha_1 t}$
7	$\boxed{F(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)}$ $a + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}$ $L = C\omega_0 \cos \varphi$ $M = C \sin \varphi$	$\left(a + \frac{L + M\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega_0^2} \right) e^{\alpha_1 t} + \frac{C}{\sqrt{\alpha_1^2 + \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \psi)$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{R}{S};$
		$\left. \begin{aligned} R &= -L\omega_0 - M\omega_0\alpha_1 \\ S &= M\omega_0^2 - L\alpha_1 \end{aligned} \right\} \sqrt{R^2 + S^2} =$ $= C\omega_0 \sqrt{\alpha_1^2 + \omega_0^2}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
2. Дифференциальное уравнение второго порядка		
$Y''(t) + c_1 Y'(t) + c_0 Y(t) = F(t); \quad a = Y'_0 + c_1 Y_0; \quad b = Y_0$		
а) однородное: $F(t) \equiv 0$		
8	$\frac{a + bs}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$	$\frac{a + b\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{a + b\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$
9	$\frac{a + bs}{(s - \alpha_1)^2}$	$[b + (a + b\alpha_1)t] e^{\alpha_1 t}$
10	$\frac{a + bs}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	$\frac{\sqrt{R^2 + S^2}}{\omega \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$
		$\tau = \arctg \frac{R}{S}; \quad R = b\omega \sqrt{1 - D^2}$ $S = a - bD\omega$
б) неоднородное:		
$F(t) = A$		
11	$\frac{a + bs + \frac{A}{s}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$	$\frac{A}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{Q_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{Q_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$
		$Q_\nu = a + b\alpha_\nu + \frac{A}{\alpha_\nu} \quad (\nu = 1, 2)$
12	$\frac{a + bs + \frac{A}{s}}{(s - \alpha_1)^2}$	$\frac{A}{\alpha_1^2} + \left(b - \frac{A}{\alpha_1^2} + Q_1 t \right) e^{\alpha_1 t}$
		$Q_1 = a + b\alpha_1 + \frac{A}{\alpha_1}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
13	$\frac{a + bs + \frac{A}{s}}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	$\frac{A}{\omega^2} + \frac{\sqrt{R^2 + S^2}}{\omega^2 \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{R}{S}; \quad R = \sqrt{1 - D^2} (b\omega^2 - A)$ $S = a\omega - bD\omega^2 - AD$
	$F(t) = \lambda e^{\nu t}$	
14	$\frac{a + bs + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$	$\frac{\lambda e^{\nu t}}{(\mu - \alpha_1)(\mu - \alpha_2)} + \frac{Q_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{Q_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + \frac{\lambda}{\alpha_\nu - \mu} \quad (\nu = 1, 2)$
15	$\frac{a + bs + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)^2}$	$\frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^2} e^{\mu t} + \left[b - \frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^2} + Q_1 t \right] e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}$
16	$\frac{a + bs + \frac{\lambda}{s - \mu}}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	$\frac{\lambda e^{\mu t}}{N} - \frac{\sqrt{R^2 + S^2}}{\omega N \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{R}{S}; \quad R = \omega \sqrt{1 - D^2} (\lambda - bN);$ $S = \lambda(\mu + D\omega) - (a - bD\omega)N;$ $N = \mu^2 + 2D\omega\mu + \omega^2$
	$F(t) = A + \lambda e^{\nu t}$	
17	$\frac{a + bs + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$	$\frac{A}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{\lambda e^{\nu t}}{(\mu - \alpha_1)(\mu - \alpha_2)} + \frac{Q_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{Q_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + \frac{A}{\alpha_\nu} + \frac{\lambda}{\alpha_\nu - \mu} \quad (\nu = 1, 2)$

№	$y(s)$	$Y(t)$
18	$\frac{a + bs + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)^2}$	$\frac{A}{\alpha_1^2} + \frac{\lambda e^{\mu t}}{(\alpha_1 - \mu)^2} + \left[b - \frac{A}{\alpha_1^2} - \frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^2} + Q_1 t \right] e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}$
19	$\frac{a + bs + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s - \mu}}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	$\frac{A}{\omega^2} + \frac{\lambda}{N} e^{\mu t} +$ $+ \frac{\sqrt{F^2 + G^2}}{\omega^2 N \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \text{arctg} \frac{F}{G}; \quad N = \mu^2 + 2D\mu\omega + \omega^2$ $R = \sqrt{1 - D^2} (b\omega^2 - A); \quad T = \omega\lambda \sqrt{1 - D^2}$ $S = a\omega - bD\omega^2 - AD; \quad U = \lambda(\mu + D\omega)$ $F = RN - T\omega$ $G = SN - U\omega$
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $F(t) = Bt$ </div>		
20	$\frac{a + bs + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$	$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} B + \frac{B}{\alpha_1 \alpha_2} t + \frac{Q_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{Q_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + \frac{B}{\alpha_\nu^2} \quad (\nu = 1, 2)$
21	$\frac{a + bs + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)^2}$	$\frac{2B}{\alpha_1^3} + \frac{B}{\alpha_1^2} t + \left(b - \frac{2B}{\alpha_1^3} + Q_1 t \right) e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + \frac{B}{\alpha_1^2}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
22	$\frac{a + bs + \frac{B}{s^2}}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $F(t) = A + Bt$ </div>	$-\frac{2BD}{\omega^3} +$ $+ \frac{B}{\omega^2} t + \frac{\sqrt{R^2 + S^2}}{\omega^3 \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{R}{S}; \quad R = \sqrt{1 - D^2} (2BD + b\omega^3)$ $S = B(2D^2 - 1) + \omega^2 (a - bD\omega)$
23	$\frac{a + bs + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$	$\frac{A}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) B}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} +$ $+ \frac{B}{\alpha_1 \alpha_2} t + \frac{Q_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{Q_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + \frac{A}{\alpha_\nu} + \frac{B}{\alpha_\nu^2} \quad (\nu = 1, 2)$
24	$\frac{a + bs + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)^2}$	$\frac{A}{\alpha_1^2} + \frac{2B}{\alpha_1^3} + \frac{B}{\alpha_1^2} t + \left(b - \frac{A}{\alpha_1^2} - \frac{2B}{\alpha_1^3} + Q_1 t \right) e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{B}{\alpha_1^2}$
25	$\frac{a + bs + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	$\frac{A}{\omega^2} - \frac{2BD}{\omega^3} +$ $+ \frac{B}{\omega^2} t + \frac{\sqrt{F^2 + G^2}}{\omega^3 \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{F}{G}$ $R = \sqrt{1 - D^2} (b\omega^2 - A), \quad T = 2BD \sqrt{1 - D^2}$ $S = a\omega - bD\omega^2 - AD, \quad U = B(2D^2 - 1)$ $F = \omega R + T, \quad G = \omega S + U$

№	$y(s)$	$Y(t)$
26	$\boxed{F(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)}$ $\frac{a + bs + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}$ $L = C\omega_0 \cos \varphi;$ $M = C \sin \varphi$	$\frac{C}{P} \sin(\omega_0 t + \psi) + \frac{Q_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{Q_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$ $P = \sqrt{(c_0 - \omega_0^2)^2 + c_1^2 \omega_0^2} = \sqrt{(\alpha_1^2 + \omega_0^2)(\alpha_2^2 + \omega_0^2)}$ $c_0 = \alpha_1 \alpha_2; \quad c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{F}{G}$ $\left. \begin{aligned} F &= (c_0 - \omega_0^2) M \omega_0 - c_1 \omega_0 L \\ G &= (c_0 - \omega_0^2) L + M c_1 \omega_0^2 \end{aligned} \right\} \sqrt{F^2 + G^2} = \omega_0 C P$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + \frac{L + M\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2 + \omega_0^2} \quad (\nu = 1, 2)$
27	$\frac{a + bs + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}}{(s - \alpha_1)^2}$ $L = C\omega_0 \cos \varphi;$ $M = C \sin \varphi$	$\frac{C}{P} \sin(\omega_0 t + \psi) +$ $+ \left(b + \frac{(\omega_0^2 - \alpha_1^2) M - 2L\alpha_1}{(\alpha_1^2 + \omega_0^2)^2} + Q_1 t \right) e^{\alpha_1 t}$ $P = \sqrt{(c_0 - \omega_0^2)^2 + c_1^2 \omega_0^2} = \alpha_1^2 + \omega_0^2$ $c_0 = \alpha_1^2; \quad c_1 = -2\alpha_1$ $\psi = \operatorname{arctg} \frac{F}{G}$ $\left. \begin{aligned} F &= (c_0 - \omega_0^2) M \omega_0 - c_1 \omega_0 L \\ G &= (c_0 - \omega_0^2) L + c_1 \omega_0^2 M \end{aligned} \right\} \sqrt{F^2 + G^2} = \omega_0 C P$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + \frac{L + M\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega_0^2}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
28	$\frac{a + bs + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}}{s^2 + 2D\omega s + \omega^2}$	$\frac{C}{P} \sin(\omega_0 t + \psi) +$ $+ \frac{\sqrt{T^2 + U^2}}{\omega P^2 \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$
	$L = C\omega_0 \cos \varphi;$	$P = \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4D^2\omega^2\omega_0^2}$
	$M = C \sin \varphi$	$\psi = \operatorname{arctg} \frac{F}{G}$
		$\left. \begin{aligned} F &= M\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2) - 2DL\omega\omega_0 \\ G &= L(\omega^2 - \omega_0^2) + 2DM\omega\omega_0^2 \end{aligned} \right\} \sqrt{F^2 + G^2} = \omega_0 CP$
		$\tau = \operatorname{arctg} \frac{T}{U}$
		$T = X + P^2 R$
		$U = Z + P^2 S$
		$X = \omega \sqrt{1 - D^2} [2LD\omega + M(\omega_0^2 - \omega^2)]$
		$Z = L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2D^2\omega^2) - M\omega D(\omega_0^2 + \omega^2)$
		$R = b\omega \sqrt{1 - D^2}$
		$S = a - bD\omega$

№	$y(s)$	$Y(t)$
3. Дифференциальное уравнение третьего порядка		
$Y'''(t) + c_2 Y''(t) + c_1 Y'(t) + c_0 Y(t) = F(t)$		
$a = Y_0'' + c_2 Y_0' + c_1 Y_0; \quad b = Y_0' + c_2 Y_0; \quad c = Y_0$		
а) однородное: $F(t) \equiv 0$		
29	$\frac{a + bs + cs^2}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)}$	$\frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 \quad (\nu = 1, 2, 3)$
30	$\frac{a + bs + cs^2}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)^2}$	$\frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} e^{\alpha_1 t} - \left(\frac{Q_2}{\alpha_1 - \alpha_2} t + \right.$ $\left. + \frac{a + b\alpha_1 - c\alpha_2^2 + 2c\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \right) e^{\alpha_2 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 \quad (\nu = 1, 2)$
31	$\frac{a + bs + cs^2}{(s - \alpha_1)^3}$	$\left[c + (b + 2c\alpha_1)t + \frac{1}{2} Q_1 t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2$

№	$y(s)$	$Y(t)$
32	$\frac{a + bs + cs^2}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$	$\frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{\sqrt{R^2 + S^2}}{\omega \sqrt{1 - D^2} N} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{R}{S}$ $R = \omega \sqrt{1 - D^2} (2cD\alpha_1\omega + c\omega^2 - b\alpha_1 - a)$ $S = \omega D (-2cD\alpha_1\omega - c\omega^2 + b\alpha_1 - a) -$ $- a\alpha_1 + b\omega^2 + c\omega^2\alpha_1$ $N = \alpha_1^2 + 2D\alpha_1\omega + \omega^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2$
	б) неоднородное:	
33	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)}$	$- \frac{A}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{A}{\alpha_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3)$

№	$y(s)$	$Y(t)$
34	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)^2}$	$-\frac{A}{\alpha_1 \alpha_2^2} + \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} e^{\alpha_1 t} - \left(\frac{Q_2}{\alpha_1 - \alpha_2} t + \frac{a + b\alpha_1 - c\alpha_2^2 + 2c\alpha_1 \alpha_2 + \frac{(2\alpha_2 - \alpha_1)A}{\alpha_2^2}}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \right) e^{\alpha_2 t}$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{A}{\alpha_\nu} \quad (\nu = 1, 2)$
35	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s}}{(s - \alpha_1)^3}$	$-\frac{A}{\alpha_1^3} + \left[c + \frac{A}{\alpha_1^3} + \left(b + 2c\alpha_1 - \frac{A}{\alpha_1^2} \right) t + \frac{Q_1}{2} t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{A}{\alpha_1}$
36	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s}}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$	$-\frac{A}{\alpha_1 \omega^2} + \frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} + \frac{\sqrt{(AF + \omega^2 S)^2 + (AG + \omega^2 R)^2}}{\omega^3 N \sqrt{1 - D^2}} \times$ $\times e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $N = \alpha_1^2 + 2D\omega \alpha_1 + \omega^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{A}{\alpha_1}$ $\tau = \text{arctg} \frac{AG + \omega^2 R}{AF + \omega^2 S}$ $F = 2D^2 \omega^2 + D\omega \alpha_1 - \omega^2$ $G = \omega \sqrt{1 - D^2} (2D\omega + \alpha_1)$ $R \text{ и } S \text{ см. № 32}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
37	$\boxed{F(t) = \lambda e^{\mu t}}$ $\frac{a + bs + cs^2 + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)}$	$\frac{\lambda e^{\mu t}}{(\mu - \alpha_1)(\mu - \alpha_2)(\mu - \alpha_3)} +$ $+ \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$ $Q_v = a + b\alpha_v + c\alpha_v^2 + \frac{\lambda}{\alpha_v - \mu} \quad (v = 1, 2, 3)$
38	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)^2}$	$\frac{\lambda}{(\mu - \alpha_1)(\mu - \alpha_2)^2} e^{\mu t} + \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} e^{\alpha_1 t} - \left[\frac{Q_2}{\alpha_1 - \alpha_2} t + \right.$ $\left. + \frac{a + b\alpha_1 - c\alpha_2^2 + 2c\alpha_1\alpha_2 - \frac{(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \mu)}{(\alpha_2 - \mu)^2} \lambda}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \right] e^{\alpha_2 t}$ $Q_v = a + b\alpha_v + c\alpha_v^2 + \frac{\lambda}{\alpha_v - \mu} \quad (v = 1, 2)$

№	$y(s)$	$Y(t)$
39	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)^3}$	$\frac{\lambda}{(\mu - \alpha_1)^3} e^{\mu t} + \left[c + \frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^3} + \right. \\ \left. + \left(b + 2c\alpha_1 - \frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^2} \right) t + \right. \\ \left. + \frac{Q_1}{2} t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}$
40	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$	$\frac{\lambda}{(\mu - \alpha_1)K} e^{\mu t} + \frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{\sqrt{(\lambda F + KS)^2 + (\lambda G + KR)^2}}{\omega KN \sqrt{1 - D^2}} \times$ $\times e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $K = \mu^2 + 2D\omega\mu + \omega^2;$ $N = \alpha_1^2 + 2D\omega\alpha_1 + \omega^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{\lambda G + KR}{\lambda F + KS}$ $F = (D\omega + \mu)(D\omega + \alpha_1) - \omega^2(1 - D^2)$ $G = \omega \sqrt{1 - D^2}(2D\omega + \mu + \alpha_1)$ $R \text{ и } S \text{ см. № 32}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
41	$\boxed{F(t) = A + \lambda e^{\mu t}}$ $\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s-\mu}}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)}$	$-\frac{A}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \frac{\lambda}{(\mu-\alpha_1)(\mu-\alpha_2)(\mu-\alpha_3)} e^{\mu t} +$ $+ \frac{Q_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$
		$Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{A}{\alpha_\nu} + \frac{\lambda}{\alpha_\nu - \mu}$ <p style="text-align: right;">($\nu = 1, 2, 3$)</p>
42	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s-\mu}}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)^2}$	$-\frac{A}{\alpha_1\alpha_2^2} + \frac{\lambda}{(\mu-\alpha_1)(\mu-\alpha_2)^2} e^{\mu t} + \frac{Q_1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} e^{\alpha_1 t} -$ $- \left(\frac{Q_2}{\alpha_1-\alpha_2} t + \frac{a + b\alpha_1 - c\alpha_2^2 + 2c\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)^2} \right) +$ $+ \frac{(2\alpha_2-\alpha_1)A}{\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^2} - \frac{(\alpha_1-2\alpha_2+\mu)\lambda}{(\alpha_2-\mu)^2(\alpha_2-\alpha_1)^2} e^{\alpha_2 t}$
		$Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{A}{\alpha_\nu} + \frac{\lambda}{\alpha_\nu - \mu}$ <p style="text-align: right;">($\nu = 1, 2$)</p>

№	$y(s)$	$Y(t)$
43	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)^3}$	$-\frac{A}{\alpha_1^3} + \frac{\lambda}{(\mu - \alpha_1)^3} e^{\mu t} + \left[c + \frac{A}{\alpha_1^3} + \frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^3} + \right. \\ \left. + \left(b + 2c\alpha_1 - \frac{A}{\alpha_1^2} - \frac{\lambda}{(\alpha_1 - \mu)^2} \right) t + \right. \\ \left. + \frac{Q_1}{2} t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}$
44	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{\lambda}{s - \mu}}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$	$-\frac{A}{\alpha_1 \omega^2} + \frac{\lambda}{(\mu - \alpha_1)K} e^{\mu t} + \frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} + \\ + \frac{\sqrt{T^2 + U^2}}{\omega^3 K N \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $K = \mu^2 + 2D\omega\mu + \omega^2; N = \alpha_1^2 + 2D\omega\alpha_1 + \omega^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 - \mu}$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{T}{U}$ $T = AKG_1 + \omega^2 (\lambda G_2 + KR)$ $U = AKF_1 + \omega^2 (\lambda F_2 + KS)$ $F_1 = 2D^2\omega^2 + 2D\omega\alpha_1 - \omega^2$ $G_1 = \omega \sqrt{1 - D^2} (2D\omega + \alpha_1)$ $F_2 = (D\omega + \mu)(D\omega + \alpha_1) - \omega^2 (1 - D^2)$ $G_2 = \omega \sqrt{1 - D^2} (2D\omega + \mu + \alpha_1)$ <p>R и S см. № 32</p>

№	$y(s)$	$Y(t)$
45	$\boxed{F(t) = Bt}$ $\frac{a + bs + cs^2 + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)}$	$-\frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$ <p> $c_0 = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3; c_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$ </p> $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{B}{\alpha_\nu^2} \quad (\nu = 1, 2, 3)$
46	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)^2}$	$-\frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} e^{\alpha_1 t} - \left(\frac{Q_2}{\alpha_1 - \alpha_2} t + \right.$ $\left. + \frac{a + b\alpha_1 - c\alpha_2^2 + 2c\alpha_1\alpha_2 + \frac{(3\alpha_2 - 2\alpha_1)B}{\alpha_2^3}}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \right) e^{\alpha_2 t}$ <p> $c_0 = -\alpha_1 \alpha_2^2; c_1 = 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2$ </p> $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{B}{\alpha_\nu^2} \quad (\nu = 1, 2)$

№	$y(s)$	$Y(t)$
47	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)^3}$	$-\frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \left[c + \frac{3B}{\alpha_1^4} + \left(b + 2c\alpha_1 - \frac{2B}{\alpha_1^3} \right) t + \right. \\ \left. + \frac{Q_1}{2} t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$ $c_0 = \alpha_1^3; \quad c_1 = 3\alpha_1^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{B}{\alpha_1^2}$
48	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$	$-\frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{\sqrt{X^2 + Z^2}}{\omega^3 N \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $c_0 = -\alpha_1 \omega^2; \quad c_1 = \omega^2 - 2D\omega\alpha_1$ $N = \alpha_1^2 + 2D\omega\alpha_1 + \omega^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{B}{\alpha_1^2}$ $\tau = \text{arctg} \frac{X}{Z}$ $X = BG + \omega^2 R$ $Z = BF + \omega^2 S$ $\left. \begin{aligned} F &= 3D\omega - 4D^3\omega - 2D^2\alpha_1 + \alpha_1 \\ G &= \sqrt{1 - D^2} (\omega - 2D\alpha_1 - 4D^2\omega) \end{aligned} \right\} F^2 + G^2 = N$ $R \text{ и } S \text{ см. № 32}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
49	$\boxed{F(t) = A + Bt}$ $\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)}$	$\frac{A}{c_0} - \frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$ $c_0 = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3; \quad c_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{A}{\alpha_\nu} + \frac{B}{\alpha_\nu^2} \quad (\nu = 1, 2, 3)$
	50	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)^2}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
51	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)^3}$	$\frac{A}{c_0} - \frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \left[c - \frac{A}{c_0} - \frac{c_1 B}{c_0^2} + \right. \\ \left. + \left(b + 2c\alpha_1 - \frac{A}{\alpha_1^2} - \frac{2B}{\alpha_1^3} \right) t + \frac{Q_1}{2} t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$ $c_0 = -\alpha_1^3; \quad c_1 = 3\alpha_1^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{B}{\alpha_1^2}$
52	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$	$\frac{A}{c_0} - \frac{c_1 B}{c_0^2} + \frac{B}{c_0} t + \frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{\sqrt{T^2 + U^2} e^{-D\omega t}}{\omega^3 N \sqrt{1 - D^2}} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ $c_0 = -\alpha_1 \omega^2; \quad c_1 = \omega^2 - 2D\omega \alpha_1$ $N = \alpha_1^2 + 2D\omega \alpha_1 + \omega^2$ $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{B}{\alpha_1^2}$ $\tau = \operatorname{arctg} \frac{T}{U}$ $T = AG_2 + BG_1 + \omega^2 R$ $U = AF_2 + BF_1 + \omega^2 S$ $\left. \begin{aligned} F_1 &= 3D\omega - 4D^3\omega - 2D^2\alpha_1 + \alpha_1 \\ G_1 &= \sqrt{1 - D^2} (\omega - 2D\alpha_1 - 4D^2\omega) \end{aligned} \right\} F_1^2 + G_1^2 = N$ $\left. \begin{aligned} F_2 &= 2D^2\omega^2 + D\omega\alpha_1 - \omega^2 \\ G_2 &= \omega \sqrt{1 - D^2} (2D\omega + \alpha_1) \end{aligned} \right\} F_2^2 + G_2^2 = \omega^2 N$ <p>R и S см. № 32</p>

№	$y(s)$	$Y(t)$
53	$\boxed{F(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)}$ $\frac{a + bs + cs^2 + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)}$ $L = C\omega_0 \cos \varphi;$ $M = C \sin \varphi$	$\frac{C}{\sqrt{F^2 + G^2}} \sin(\omega_0 t + \psi) +$ $+ \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} e^{\alpha_2 t} +$ $+ \frac{Q_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} e^{\alpha_3 t}$ $\psi = \arctg \frac{H}{J}$ $\left. \begin{aligned} H &= MF\omega_0 + GL \\ J &= FL - MG\omega_0 \end{aligned} \right\} \sqrt{H^2 + J^2} = C\omega_0 \sqrt{F^2 + G^2}$ $\left. \begin{aligned} F &= c_0 - c_2\omega_0^2 \\ G &= \omega_0(\omega_0^2 - c_1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F^2 + G^2 &= (\alpha_1^2 + \omega_0^2) \times \\ &\times (\alpha_2^2 + \omega_0^2)(\alpha_3^2 + \omega_0^2) \end{aligned}$ $c_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3;$ $c_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3;$ $c_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{L + M\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2 + \omega_0^2}$

($\nu = 1, 2, 3$)

№	$y(s)$	$Y(t)$
54	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)^2}$	$\frac{C}{\sqrt{F^2 + J^2}} \sin(\omega_0 t + \psi) +$ $+ \frac{Q_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} e^{\alpha_1 t} + \left[\frac{Q_2}{\alpha_2 - \alpha_1} t + \right.$ $b + 2c\alpha_2 + \frac{M(\omega_0^2 - \alpha_2^2) - 2\alpha_2 L}{(\alpha_2^2 + \omega_0^2)^2}$ $+ \frac{\quad}{\alpha_2 - \alpha_1} -$ $\left. - \frac{Q_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \right] e^{\alpha_2 t}$ <p> $\psi = \arctg \frac{H}{J}$ </p> $\left. \begin{aligned} H &= MF\omega_0 + GL \\ J &= FL - MG\omega_0 \end{aligned} \right\} \sqrt{H^2 + J^2} = C\omega_0 \sqrt{F^2 + G^2}$ $\left. \begin{aligned} F &= c_0 - c_2\omega_0^2 \\ G &= \omega_0(\omega_0^2 - c_1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F^2 + G^2 &= \\ &= (\alpha_1^2 + \omega_0^2)(\alpha_2^2 + \omega_0^2)^2 \end{aligned}$ <p> $c_0 = -\alpha_1\alpha_2^2;$ $c_1 = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2;$ $c_2 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ </p> $Q_\nu = a + b\alpha_\nu + c\alpha_\nu^2 + \frac{L + M\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2 + \omega_0^2}$

($\nu = 1, 2$)

№	$y(s)$	$Y(t)$
55	$a + bs + cs^2 + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}$ $\frac{L + Ms}{(s - \alpha_1)^3}$	$\frac{C}{\sqrt{F^2 + G^2}} \sin(\omega_0 t + \psi) +$
	$L = C\omega_0 \cos \varphi;$	$+ \left[c + \frac{L(3\alpha_1^2 - \omega_0^2) + M(\alpha_1^3 - 3\alpha_1\omega_0^2)}{(\alpha_1^2 + \omega_0^2)^3} + \right.$
	$M = C \sin \varphi$	$+ \left(b + 2c\alpha_1 + \frac{M(\omega_0^2 - \alpha_1^2) - 2\alpha_1 L}{(\alpha_1^2 + \omega_0^2)^2} \right) t +$
		$\left. + \frac{Q_1}{2} t^2 \right] e^{\alpha_1 t}$
		$\psi = \operatorname{arctg} \frac{H}{J}$
		$\left. \begin{aligned} H &= MF\omega_0 + GL \\ J &= FL - MG\omega_0 \end{aligned} \right\} \sqrt{H^2 + J^2} = C\omega_0 \sqrt{F^2 + G^2}$
		$\left. \begin{aligned} F &= c_0 - c_2\omega_0^2 \\ G &= \omega_0(\omega_0^2 - c_1) \end{aligned} \right\} F^2 + G^2 = (\alpha_1^2 + \omega_0^2)^3$
		$c_0 = -\alpha_1^3;$
		$c_1 = 3\alpha_1^2;$
		$c_2 = -3\alpha_1$
		$Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_1^2 + \frac{L + Ma_1}{\alpha_1^2 + \omega_0^2}$

№	$y(s)$	$Y(t)$
56	$\frac{a + bs + cs^2 + \frac{L + Ms}{s^2 + \omega_0^2}}{(s - \alpha_1)(s^2 + 2D\omega s + \omega^2)}$ <p>$L = C\omega_0 \cos \varphi;$</p> <p>$M = C \sin \varphi$</p>	$\frac{C}{\sqrt{E^2 + H^2}} \sin(\omega_0 t + \psi) + \frac{Q_1}{N} e^{\alpha_1 t} +$ $+ \frac{\sqrt{T^2 + U^2}}{\omega N(F^2 + G^2) \sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - D^2} t + \tau)$ <p>$\psi = \operatorname{arctg} \frac{I}{J}$</p> $\left. \begin{aligned} I &= HL + ME\omega_0 \\ J &= EL - MH\omega_0 \end{aligned} \right\} \sqrt{T^2 + J^2} = C\omega_0 \sqrt{E^2 + H^2}$ <p>$E = c_0 - c_2 \omega_0^2; H = \omega_0 (\omega_0^2 - c_1)$</p> <p>$c_0 = -\alpha_1 \omega^2; c_1 = \omega^2 - 2D\omega \alpha_1;$</p> <p>$c_2 = 2D\omega - \alpha_1$</p> $Q_1 = a + b\alpha_1 + c\alpha_2 + \frac{L + M\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega_0^2}$ <p>$N = \alpha_1^2 + 2D\omega \alpha_1 + \omega^2$</p> <p>$\tau = \operatorname{arctg} \frac{T}{U}$</p> <p>$T = NX + R(F^2 + G^2); U = NZ + S(F^2 + G^2)$</p> <p>$X = G(L - MD\omega) + FM\omega \sqrt{1 - D^2}$</p> <p>$Z = F(L - MD\omega) - GM\omega \sqrt{1 - D^2}$</p> <p>$F = 3D\omega^3 - 4D^3 \omega^3 - D\omega\omega_0^2 -$</p> <p style="padding-left: 100px;">$- 2D^2 \omega^2 \alpha_1 + \alpha_1 (\omega^2 - \omega_0^2)$</p> <p>$G = \omega \sqrt{1 - D^2} (\omega^2 - \omega_0^2 - 4D^2 \omega^2 - 2D\omega \alpha_1)$</p> <p>$R$ и S см. № 32</p>

Г. Дёч

Руководство к практическому применению
преобразования Лапласа

Редактор *В. С. Виденский*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *О. А. Сигал*

* * *

Сдано в набор 19/XII 1957 г.
Подписано к печати 18/III 1958 г.
Бумага 60×92/16. Физ. печ. л. 13,00.
Условн. печ. л. 13,00. Уч.-изд. л. 12,04.
Тираж 6 000 экз. Т-01588.
Цена книги 5 р. 60 к. Заказ № 2653.

* * *

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

* * *

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29

