MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

REIHE I

Herausgegeben von Prof. Dr. W. Lietzmann

2/3

DER PYTHAGOREISCHE LEHRSATZ

MIT EINEM AUSBLICK AUF DAS FERMATSCHE PROBLEM

von Prof. Dr. W. Lietzmann, Universität Göttingen

Sechste, überarbeitete Auflage mit 73 Figuren

B. G. TEUBNER

VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG

1951

В. ЛИТЦМАН

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Перевод с немецкого
В. С. БЕРМАНА
под редакцией
И. М. ЯГЛОМА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

ОТ РЕДАКТОРА

Эта небольшая книжка, написанная известным немецким популяризатором математики, недавно скончавшимся профессором Геттингенского университета Вальтером Литцманом, посвящена не только геометрии, как можно было бы подумать по ее названию. Автор собрал в ней довольно разнообразный материал, относящийся и к геометрии, и к алгебре, и к арифметике. Весь этот материал группируется вокруг знаменитой ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА, одной из замечательнейших теорем школьного курса математики. При этом автор, естественно, не касается серьезных научных проблем, связанных с этой теоремой; почти не затрагивает он и чисто методических вопросов, лишь слегка критикуя традиционное доказательство теоремы Пифагора, приводимое почти во всех школьных учебниках. Однако и ограничив таким образом рамки своей книги, Литцман сумел найти достаточно занимательного материала, способного заинтересовать начинающего математика.

Отдельные главы книги довольно мало зависят одна от другой; здесь мы имеем не связный рассказ об одном предмете, а скорее непринужденную беседу на заданную тему. В этом отношении книжка близка к другой брошюре того же автора — «Старое и новое о круге», также подготовляемой к печати Издательством. В изложение вкраплено большое число упражнений, позволяющих читателю проверить степень своего овладения материалом; мы очень советуем читателю не пренебрегать этой возможностью. Книга рассчитана в первую очередь на учащихся старших классов средней школы; интересна и полезна она будет также и учителю, который найдет здесь много материала, который можно использовать на уроке или в математическом кружке.

Эта книга уже выдержала два издания на русском языке; последнее русское издание вышло в свет в 1935 г. и давно стало библиографической редкостью. Настоящее третье издание переведено с 6-го немецкого издания, переработанного и значительно дополненного автором. В русском переводе добавлены немногочисленные примечания редактора (они отмечены звездочкой в отличие от нумерованных подстрочных сносок автора); в них указаны, в частности, некоторые русские научно-популярные книги, дополняющие изложение автора. Эти ссылки призваны заменить исключенный при переводе библиографический указатель, отсылающий читателя исключительно к немецким книгам и журналам, недоступным нашему читателю. Кроме того, редактору принадлежат небольшие вставки, отмеченные угловыми скобками.

И. М. Яглом

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий томик «Математической библиотеки» не преследует цели — дать возможно более полное собрание разных доказательств теоремы Пифагора или к числу известных доказательств добавить новые. Мы хотели лишь показать здесь на простом примере, впрочем имеющем выдающееся значение как с точки зрения истории математики, так и ее преподавания, как разнообразно могут соприкасаться разные области математики, как тесно бывают сплетены математические факты, образуя не цепь, но сеть. И прежде всего автор старался побудить читателя к самостоятельным математическим размышлениям, насколько это ему позволяли тесные рамки маленькой книжки. Эта основная цель подчеркивается и большим числом различных вопросов, лишь слегка затронутых в изложении.

Сентябрь 1911 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени появления первого издания этой небольшой книжки прошло почти 40 лет. Пятое издание, из-за значительного увеличения его объема, пришлось разделить на два отдельных выпуска. В настоящем шестом издании эти выпуски снова объединены вместе; кроме того, сюда включен некоторый дополнительный материал, как нам кажется, также представляющий интерес.

Лето 1951 г.

§ 1. ИЗ ИСТОРИИ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

1. «Так как ныне необходимо рассмотреть также начала искусств и наук настоящего периода, то мы сообщаем, что, по мнению большинства, первыми открыли геометрию египтяне, которые пришли к ней от измерения земельных участков. И нет ничего удивительного в том, что изобретение этой науки, как и других, произошло от нужды, ибо все возникающее движется вперед от несовершенного к совершенному. Существует естественный переход от чувственного восприятия к размышлению, а от последнего — к разумному познанию».

Этими словами начинается древнегреческий «Перечень математиков», приписываемый Евдему; далее идет перечисление отдельных греческих математиков, начинающееся с Фалеса Милетского, причем заслуги каждого характеризуются немногими, но большей частью чрезвычайно меткими словами. В этом «Перечне» о Пифагоре сказано так:

«Как передают, Пифагор превратил занятие этой отраслью знания (геометрией) в настоящую науку, рассматривая ее основы с высшей точки зрения и исследуя ее теории менее материальным и более умственным образом».

Время жизни Пифагора Самосского точно неизвестно; одни сообщают, что он родился в 569 г. до нашей эры и умер в 470 г., другие же сдвигают его рождение к 580 г., а смерть относят приблизительно к 500 г. Из жизнеописания Пифагора для нас важно, что он, по-видимому, долгое время провел в Египте, а возможно и в Вавилонии, и что пребывание в этих странах оказало на него большое влияние.

Из-за скудности этих сведений бывает трудно отличить в приписываемых Пифагору открытиях его собственные достижения от того, чему обязаны, с одной стороны, его предшественникам, а с другой — ученикам. То же самое можно сказать и по поводу теоремы, почти всюду называемой именем Пифагора (во Франции, а также в некоторых областях Германии ее называют также иногда «мостом ослов»: *les pont aux ânes*, *die Eselbrücke*):

Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.

В настоящее время все согласны с тем, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, другие же отказывают ему и в этой заслуге. Было бы затруднительно ответить на вопрос, в чем состояло это доказательство. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид (живший около 300 г. до н. э. в Александрии) приводит в первой книге своих «Начал»; с другой стороны, Прокл, который жил от 410 или 412 г. до 485 в Византии и Афинах, утверждает, что доказательство в «Началах» принадлежит самому Евклиду.

Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Многие знают сонет Шамиссо:

Пребудет вечной истина, как скоро
Ее познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далекий век.

Обильно было жертвоприношенье
Богам от Пифагора. Сто быков
Он отдал на закланье и сожженье
За света луч, пришедший с облаков.

Поэтому всегда с тех самых пор,
Чуть истина рождается на свет,
Быки ревут, ее почуя, вслед.

Они не в силах свету помешать,
А могут лишь закрыв глаза дрожать
От страха, что вселил в них Пифагор.

Этот рассказ о жертвоприношении, сообщаемый Диогеном, Лаэртом и Плутархом, конечно вымышлен. А поэтому, увы, лишено основания и то насмешливое замечание о переселении душ, которое встречается у Генриха Гейне:

«Кто знает! Кто знает! Возможно, душа Пифагора переселилась в беднягу кандидата, который не смог доказать теорему Пифагора и провалился из-за этого на экзаменах, тогда как в его экзаменаторах обитают души тех быков, которых Пифагор, обрадованный открытием своей теоремы, принес в жертву бессмертным богам».

В конце прошлого века начали высказываться самые разнообразные предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку; это явилось следствием открытий Скиапарелли*) и других астрономов. Естественно, что вопрос о том, можно ли, применяя световые сигналы, объясняться с этими гипотетическими существами, вызвал оживленную дискуссию. Парижской академией наук была даже установлена премия в 100 000 франков тому, кто первым установит связь с каким-нибудь обитателем другого небесного тела (здесь, впрочем, случай Марса, как слишком легкий, исключался!); эта премия все еще ждет счастливца. В шутку, хотя и не совсем безосновательно, было предложено передать обитателям Марса или иной планеты световой сигнал в виде чертежа теоремы Пифагора. Неизвестно, как это сделать; но мы на земном шаре твердо верим, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора, имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.

2. Исторический обзор мы начнем с китайцев. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чу-пей. В ее первой части рассказывается о беседе двух лиц, живших около 1100 г. до н. э., но вряд ли отсюда можно заключить, что излагаемые факты были уже известны в то время, как это утверждается в предисловии, написанном в 1213 г. нашей эры. Возможно, что интере-

*) Итальянский астроном Скиапарелли открыл на Марсе каналы, которые долгое время предполагались искусственными.

сующая нас часть книги была написана лишь в начале нашей эры.

В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5:

«*Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет* 5, *когда основание есть* 3, *а высота* 4».

Здесь же приложен рисунок (рис. 1), который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Б а с х а р ы; к этому вопросу мы еще вернемся в § 2, п. 14.

3. К а н т о р*) считает, что равенство

$$3^2+4^2=5^2,$$

— другими словами, прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — было

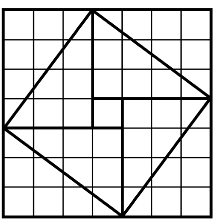

Рис. 1.

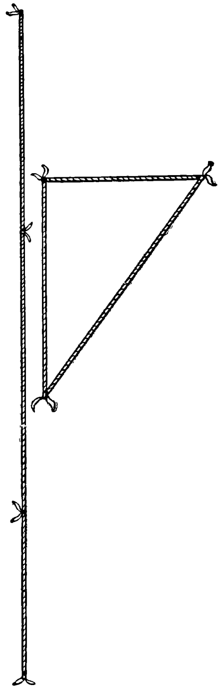

Рис. 2.

известно уже е г и п т я н а м еще около 2300 г. до н. э., во времена царя Аменемхета I (согласно папирусу 6619 Берлинского музея). По мнению Кантора, *гарпедонапты*, или «натягиватели веревок», строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4

*) М. К а н т о р — крупнейший немецкий историк математики.

и 5. Мы очень легко можем воспроизвести их способ построения.

Возьмем веревку длиною в 12 *м* и привяжем к ней по цветной полоске на расстояниях 3 *м* от одного конца и 4 *м* от другого (см. рис. 2). Теперь натянем веревку так, как это указано на рисунке. Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиною в 3 и в 4 метра.

Гарпедонаптам можно было бы возразить, что их способ построения становится излишним, если воспользоваться, например, деревянным угольником, применяемым всеми плотниками. И действительно, известны египетские рисунки, на которых встречается такой инструмент, например рисунки, изображающие столярную мастерскую. Однако нужно было еще уметь изготовлять эти прямые углы и знать способ проверки их точности. Таким способом могло быть простое перевертывание (рис. 3 и 4).

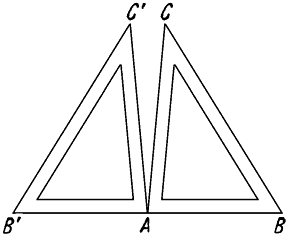

Рис. 3.

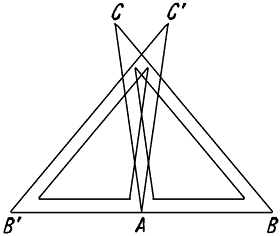

Рис. 4.

[К сожалению, я не располагаю письменными документами, на которых основывал Кантор свое предположение, а дошедшие до нас рисунки, изображающие торжества, сопровождающие закладку храма, мало подтверждают его утверждение.]

Несколько больше нам известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника; отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками по крайней мере в некоторых случаях.

Нейгебауэр*) по различным мотивам тоже считает достоверным, что в Вавилонии знали теорему Пифагора и умели ею пользоваться. В свете этих позднейших исследований о догреческой математике приходится отказаться от многих прежних утверждений о приоритете греков.

Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне наших знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой — на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден*) сделал недавно следующий вывод: «*Заслугой первых греческих математиков, таких, как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку*».

4. Геометрия у индусов, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около VIII века до н. э.

«Индийское богослужение не может обойтись без геометрических правил, так как оно связано чрезвычайно точными предписаниями. Если в алтаре есть малейшее отклонение от предписанной формы, если одно его ребро не образует с другим точно прямого угла, если произошла ничтожная ошибка в ориентации алтаря относительно четырех сторон горизонта — божество не примет приносимой ему жертвы» (Кантор).

Наряду с чисто ритуальными предписаниями, содержащимися в так называемых *Кальпасутрах*, существуют и сочинения геометрически-теологического характера, так называемые *Сульвасутры*. В этих сочинениях, относя-

---

*) О. Нейгебауэр — известный немецкий историк математики, специалист по вавилонской математике; ныне живет и работает в Америке. Книга Нейгебауэра «Лекции по истории античных математических наук» (т. I — Догреческая математика) переведена на русский язык (М.— Л., ОНТИ, 1937).

*) Б. Л. Ван-дер-Варден — известный голландский математик, последнее время много занимался историей математики. См. его книгу «Пробуждающаяся наука (математика Древнего Египта, Вавилона и Греции)», М., Физматгиз, 1959.

щихся к IV или V веку до н. э., мы встречаемся с построением прямого угла при помощи треугольника со сторонами 15, 36 и 39 (ср. § 7). Кантор описывает способ построения следующим образом. В направлении точно с востока на запад отмечают с помощью кольев расстояние в 36 *падас* (падас — мера длины), называемое «*праци*». На кольях закрепляют концы веревки длиною в 54 падас с узлом, заранее завязанным на расстоянии в 15 падас от одного из концов. Затем веревку натягивают при помощи кола, продетого сквозь узел, и получают на одном из концов «праци» прямой угол.

Для извлечения квадратного корня геометрическим способом даются следующие правила, основанные на теореме Пифагора:

1. Веревка, натянутая наискось по равностороннему прямоугольнику, производит квадрат, имеющий удвоенную площадь *).

2. Веревка, натянутая наискось по прямоугольнику, производит две площади, которые производятся веревками, натянутыми вдоль большей и меньшей стороны.

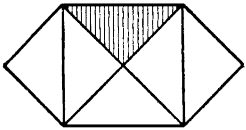

Рис. 5.

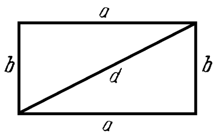

Рис. 6.

Второй случай можно проверить на треугольниках, стороны которых равны 3 и 4 единицам длины, или 12 и 5, или 15 и 8, или 7 и 24, или 12 и 35, или 15 и 36.

Первое правило выражает теорему Пифагора для равнобедренных прямоугольных треугольников. В справедливости ее для этого случая можно непосредственно убедиться из рис. 5. Второе правило выводится из чер-

*) То есть веревка, совпадающая с диагональю квадрата, является стороной квадрата, площадь которого в два раза больше площади исходного квадрата.

тежа, который приблизительно соответствует чертежу, с которым мы еще встретимся в дальнейшем (см. рис. 28 на стр. 31). Нетрудно понять, что здесь действительно мы имеем дело с извлечением квадратного корня геометрическим способом, так как если a и b — стороны прямоугольника, то диагональ его (рис. 6) выражается формулой

$$d=\sqrt{a^2+b^2}.$$

5. В дальнейшем распространении математических знаний индусы играли небольшую роль, а китайцы — и того меньшую, и лишь в новейшее время мир ознакомился с обширными математическими познаниями этих народов. Путь от древности к средним векам шел от греков через арабов.

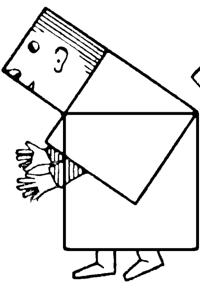

Рис. 7.

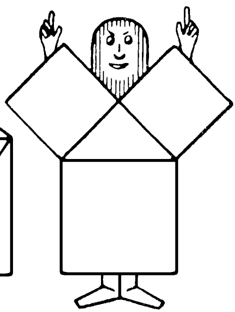

Рис. 8.

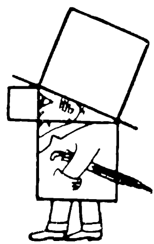

Рис. 9.

В средние века теорема Пифагора, *magister matheseos*, определяла границу если не наибольших возможных, то по крайней мере хороших математических знаний. Характерный чертеж теоремы Пифагора, который ныне иногда превращается школьниками, например, в облеченного в мантию профессора (рис. 7, 8) или в человечка в цилиндре (рис. 9) и т. п., в те времена всеобщей страсти к символам нередко употреблялся как символ математики. Столь же часто мы встречаемся с «Пифагором» в средневековой живописи, мозаике, геральдике.

6. В заключение этой вводной главы мы приведем различные формулировки теоремы Пифагора на греческом, латинском, немецком ⟨и русском⟩ языках.

У Евклида эта теорема гласит:

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

В дословном переводе это означает: «*В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол*».

Латинский перевод арабского текста Аннаирици (около 900 г. н. э.), сделанный Герхардом Кремонским (начало 12 в.), гласит:

Omnis trianguli orthogonii quadratum factum ex latere subtenso angulo recto equale est coniunctioni duorum quadratorum, qui ftunt ex duobus lateribus, qui continent angulum rectum.

В переводе: «*Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол*».

В Geometria Culmonensis (около 1400 г.) теорема читается так:

Alzo wirt daß vierkante veld, gemeſſen vz der langen want, alzo groß alz dy beyde vierkante, dy do werden kemeſſen von den czwen wenden deß geren, dy do czuſamene treten in dem rechten wynkel.

В переводе это означает: «*Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу*».

⟨В первом русском переводе евклидовых «Начал», сделанном с греческого Ф. И. Петрушевским («Евклидовых начал восемь книг, содержащие в себе основание геометрии», Санкт-Петербург, 1819), теорема Пифагора изложена так: «*В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол*».⟩

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ

1. Начертим квадрат $ABCD$ со стороной длины 7 *см* (на рис. 10 уменьшен). Отложим от его вершины A на сторонах AB и AD отрезки $AE=AF=3$ *см* и через полученные точки E и F проведем прямые, параллельные сторонам квадрата. Обозначим точку пересечения одной из них со стороной DC через G, точку пересечения второй с BC через H и, наконец, точку пересечения прямых EG и FH через J. Теперь исходный квадрат со стороною 7 *см* распался на следующие четыре части: квадрат со стороной 3 *см*, квадрат со стороной 4 *см* и два равных прямоугольника, смежные стороны которых равны 3 и 4 *см*.

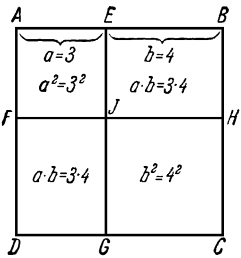

Рис. 10.

Чтобы найти площадь квадрата в квадратных сантиметрах, нужно, как известно, умножить число, выражающее длину стороны в сантиметрах, само на себя. Площадь прямоугольника равна произведению чисел, выражающих длины двух смежных сторон.

Рассматривая описанную выше фигуру, мы можем считать ее геометрическим изображением соотношения

$$7^2=3^2+4^2+2\cdot3\cdot4,$$

или (если число 7 заменить суммой 3+4) соотношения

$$(3+4)^2=3^2+4^2+2\cdot3\cdot4.$$

Действительно, в результате вычислений в обеих частях равенств получаем 49.

В нашем примере мы брали числа 3, 4, 7, однако этот выбор был совершенно случайным. Мы получили бы тот же самый результат, взяв какие угодно числа a, b и их сумму $a+b$. Наше рассуждение представляет собой не что иное, как геометрическое доказательство хорошо известной формулы

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Геометрическая фигура, которой мы здесь воспользовались для изображения формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, была известна еще Евклиду, а также индусам до начала нашей эры. «Общее правило для увеличения заданного квадрата» выражалось ими не совсем ясно в следующих словах: «Прибавь к двум сторонам то, что охватывается при каждом удлинении, а у вершины — квадрат, который производится соответствующим удлинением».

2. Начертим еще раз квадрат со стороной 7 *см*, но теперь разобьем его иначе. Отложим от вершины квадрата на каждой стороне по 3 *см* в таком порядке, как показано на рис. 11. Полученные точки E, F, G, H соединим последовательно друг с другом. При этом получится четырехугольник $EFGH$ и четыре прямоугольных треугольника, вершины прямых углов которых совпадают с вершинами исходного квадрата. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу, заключенному между ними (первый признак равенства треугольников). Таким образом, гипотенузы всех этих треугольников равны, и четырехугольник $EFGH$ — ромб. Читатель, вероятно, уже заметил, что на самом деле этот четырехугольник не только ромб, но и квадрат. Действительно, обозначим угол AEH через α; тогда угол AHE оказывается равным $90°-\alpha$ (в силу теоремы, утверждающей, что сумма углов треугольника равна $180°$). Вследствие равенства всех четырех треугольников угол BEF равен углу AHE; а тогда угол HEF должен быть равен $90°$, так как три угла с общей вершиной E образуют развернутый угол, равный $180°$. Такое же рассуждение можно было бы провести и для остальных углов F, G и H ромба, но и приведенного доказательства уже вполне достаточно, так как равносторонний четырехугольник (ромб), имеющий один прямой угол, должен иметь только прямые углы.

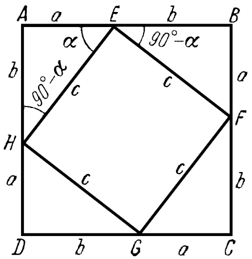

Рис. 11.

Возьмем теперь, вместо частных значений 3 и 4, какие угодно числа a и b, а гипотенузу полученного прямоугольного треугольника обозначим через c. Тогда разбиение квадрата, представленное на рис. 11, выражается следующей формулой:

$$(a+b)^2=c^2+4\,\frac{ab}{2}.$$

В самом деле, площадь внутреннего квадрата со стороной c есть c^2, а площадь каждого из четырех прямоугольных треугольников равна $\frac{ab}{2}$.

Последнее равенство можно переписать так:

$$(a+b)^2=c^2+2ab.$$

Пользуясь этим соотношением, можно вычислить гипотенузу c прямоугольного треугольника, зная численные значения a и b его катетов. Пусть, например, как выше, $a=3$, $b=4$, тогда из последнего равенства имеем:

$$49=c^2+2\cdot 3\cdot 4,$$

откуда $c^2=25$, а $c=5$.

3. Свяжем воедино то, что мы узнали в двух последних пунктах. Ограничимся сначала арифметической стороной дела. В п. **1** мы получили формулу

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab, \tag{1}$$

а в п. **2** —

$$(a+b)^2=c^2+2ab. \tag{2}$$

Отсюда следует равенство

$$a^2+b^2+2ab=c^2+2ab;$$

опуская в обеих его частях слагаемое $2ab$, получим

$$a^2+b^2=c^2. \tag{3}$$

В последнем равенстве a и b суть длины катетов, а c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, т. е. это не что иное, как *теорема Пифагора*.

К этому «арифметическому» выводу равенства (3) присоединим еще следующее замечание. Формулу (1) знает каждый учащийся, так как это одно из первых равенств, с которыми он встречается в алгебре. Равенство (1) является тождеством, т. е. имеет место при любых значениях a и b. Равенство (2), напротив, не является тождеством, так как оно не будет справедливым при произвольных значениях a, b и c; оно представляет собою соотношение, позволяющее, скажем, вычислить c по известным значениям a и b, как это было сделано нами выше.

4. Многим математикам может не понравиться данный нами в п. **3** вывод теоремы Пифагора, поскольку часто избегают смешения геометрических и арифметических методов в одном и том же доказательстве, и теоремы явно геометрического характера стремятся доказывать чисто геометрическим путем *). В элементарной математике это стремление особенно явственно сказывается как раз в учении о площадях. Площадь рассматривается здесь чисто геометрически, в отрыве от конкретных численных данных. Доказывается, например, что:

Два параллелограмма с равными основаниями и равными высотами равновелики;

Два треугольника с равными основаниями и равными высотами равновелики.

Подобному «геометрическому» подходу к теории измерения площадей, при котором в основу кладется сравнение площадей двух фигур, противостоит «арифметический» подход, при котором измерение площади рассматривается, по сути дела, как вычислительная операция. Указанным выше двум предложениям здесь будут соответствовать родственные им «арифметические» теоремы:

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту;

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Теорему Пифагора также можно сформулировать двояко. «Геометрически» ее можно выразить так:

---

*) Нам кажется, однако, что подобную тенденцию к резкому разграничению отдельных математических дисциплин, препятствующую созданию правильной перспективы математики в целом, вряд ли стоит приветствовать.

Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.

«Арифметически» она гласит:

Если a и b суть числа, выражающие длины катетов, измеренные в одних и тех же единицах длины, а c — число, выражающее длину гипотенузы, измеренной в тех же единицах, то числа a, b и c связаны соотношением

$$a^2+b^2=c^2.$$

Наряду с «арифметизованным» доказательством теоремы Пифагора, составляющим содержание п. **3**, нетрудно дать и «чисто геометрическое» доказательство ее, также

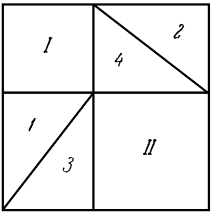

Рис. 12.

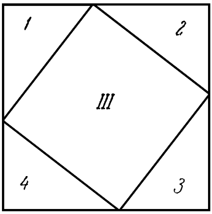

Рис. 13.

опирающееся на построения пп. **1** и **2**. Если в обоих прямоугольниках рис. 10 провести по одной диагонали, то мы получим фигуру, изображенную на рис. 12. Вследствие равенства треугольников, фигурирующих на рис. 12 и 13, *сумма площадей квадратов I и II должна быть равна площади квадрата III*. Это и есть теорема Пифагора.

5. Существует целый ряд доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и на гипотенузе, разрезаются так, что каждой части квадрата, построенного на гипотенузе, соответствует часть одного из двух квадратов, построенных на катетах. Во всех этих случаях для понимания доказательства достаточно одного взгляда на чертеж; рассуждение здесь может быть ограничено единственным словом: «смотри!», как это делалось в сочинениях древних индусских математиков. Следует, однако, заметить, что на самом деле доказательство нельзя считать полным, пока мы не доказали равенства всех соответствующих друг другу частей. Это почти всегда довольно нетрудно сделать, однако может (особенно при большом числе частей) потребовать довольно продолжительной работы.

Мы начнем со сравнительно нового доказательства Эпштейна; его преимуществом является то, что здесь в качестве составных частей разложения фигурируют исключительно треугольники. Чтобы разобраться в чертеже (рис. 14), заметим, что прямая CD проведена перпендикулярно прямой EF.

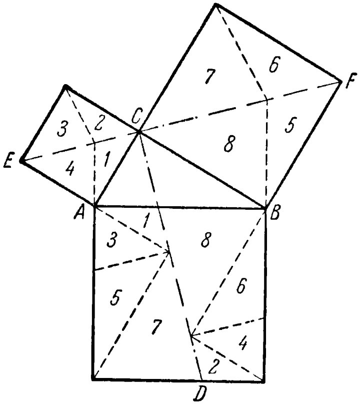

Рис. 14.

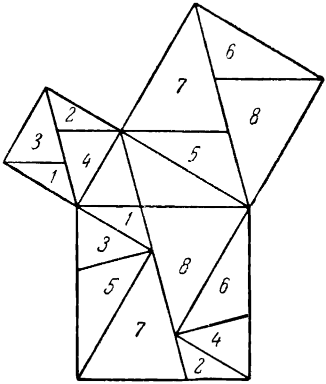

Рис. 15.

Упражнение 1. Докажите, что EF проходит через C.

Упражнение 2. Какой вид примет рис. 14, если прямоугольный треугольник ABC будет равнобедренным?

Разложение на треугольники можно сделать более наглядным, чем на рис. 14. На рис. 15 вспомогательные линии изменены по предложению Нильсена. На рис. 16 — 17 дано весьма наглядное разложение Бётхера.

Упражнение 3. Проведите полное доказательство теоремы Пифагора методом, указанным на рис. 14 (или на рис. 15, или на рис. 16—17), включающее доказательство равенства всех соответствующих друг другу частей.

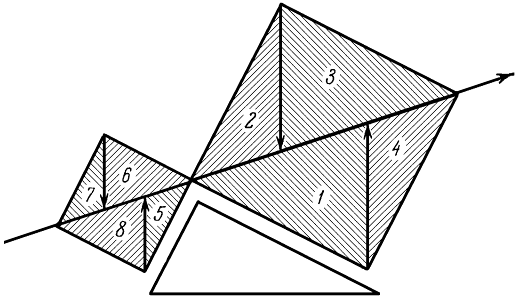

Рис. 16. Переставьте большие и маленькие части квадратов, расположенные над стрелкой...

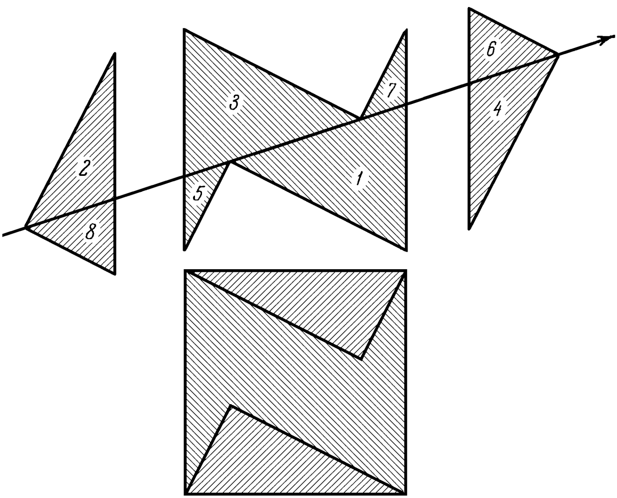

Рис. 17. ... и все остальное получится само собой!

6. В учебниках нередко встречается разложение, указанное на рис. 18[1]). Через центр O квадрата, построенного на большем катете, проводим прямые, параллельную и и перпендикулярную гипотенузе. Соответствие частей фигуры хорошо видно из чертежа.

⟨Рис. 18 обладает любопытным свойством: здесь соответствующие друг другу части фигуры не только равны, но и «параллельно расположены», т. е. получаются одна из другой при помощи параллельного перенесения. Возможность такого разложения является счастливой случайностью. В последнее время было, однако, доказано (швейцарскими геометрами Хадвигером и Глюром), что *каждые два равновеликих многоугольника можно разбить на части так, чтобы отвечающие друг другу* (треугольные или многоугольные!) *части в разбиении обеих фигур были равны, и их соответствующие стороны были параллельны* (т. е. эти части получались одна из другой параллельным переносом или симметрией относительно точки) *).

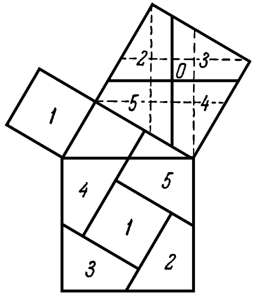

Рис. 18.

Упражнение 4. Какие еще из перечисленных ниже разложений, построенных на сторонах прямоугольного треугольника квадратов, удовлетворяют условию Хадвигера — Глюра?⟩

Упражнение 5. Докажите, что линии, которыми разделен квадрат, построенный на гипотенузе, параллельны катетам (рис. 18).

Упражнение 6. Вычислите длины сторон четырехугольников, на которые распался квадрат, построенный на большем катете.

Заметим, что линии, разбивающие квадрат, построенный на большем катете, совсем не обязательно проводить так, чтобы точкой их пересечения являлся центр квад-

[1]) Так называемое «колесо с лопастями». Это доказательство нашел Перигаль.

*) См. по этому поводу брошюру В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (Гостехиздат, М., 1956), интересно дополняющую содержание этого параграфа.

рата. Проведем через вершины квадрата прямые, параллельные и перпендикулярные гипотенузе, как показано пунктиром на рис. 18; при этом внутри образуется меньший квадрат, любую точку которого (включая точки, лежащие на его сторонах) можно принять за точку O. Далее доказательство идет точно так же, как и ранее. Конечно, построенные теперь четырехугольники не будут равны между собой, как это было в том случае, когда точкой пересечения вспомогательных линий служил центр квадрата.

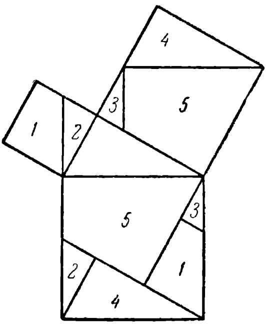

Рис. 19.

Упражнение 7. Сделайте точный чертеж, отвечающий какому-либо выбору точки O, и, разрезав его на части, убедитесь в правильности такого доказательства.

Упражнение 8. Исследуйте, какой вид примет разложение в случае равнобедренного прямоугольного треугольника.

7. Рассмотрим еще один способ разложения, в котором, как и раньше, удается ограничиться всего 5 частями. Он встречается уже в арабском комментарии к Евклиду, составленном Аннаирици около 900 г. н. э. В немного измененном виде это доказательство снова появляется у Гёпеля в 1824 г.

Способ разбиения квадратов, построенных на катетах, ясен из рис. 19, в котором учтено предложение Нильсена, касающееся этого доказательства. Что касается разбиения квадрата, построенного на гипотенузе, то нужно лишь иметь в виду, что часть *3* получается следующим образом: на стороне квадрата, построенного на гипотенузе, откладывается гипотенуза прямоугольного треугольника *3*, фигурирующего в разбиении квадрата, построенного на большом катете. Можно вместо этого отложить катет треугольника *3* на продолжении стороны квадрата, построенного на большем катете.

Естественность такого разложения очевидна, если сравнить рис. 19 с рис. 7, на котором квадрат, построенный на большем катете, повернут на 180° вокруг этого катета *).

Упражнение 9. Докажите равенство частей 1—5 квадратов, построенных на катетах, соответствующим частям квадрата, построенного на гипотенузе.

Упражнение 10. Выразите стороны фигур 1—5 (рис. 19) через катеты a и b и гипотенузу c исходного треугольника.

Упражнение 11. Сделайте чертеж, отвечающий случаю прямоугольного равнобедренного треугольника.

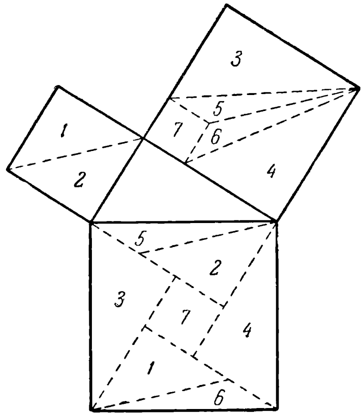

Рис. 20.

8. Изображенное на рис.20 разложение принадлежит Гутхейлю; для него характерно наглядное расположение отдельных частей, что позволяет сразу видеть, какие упрощения повлечет за собой случай равнобедренного прямоугольного треугольника.

9. Помимо четырех указанных нами способов разложения существует еще много других (см., например, рис. 21 и 22). Мы ограничимся лишь перечисленными доказательствами. Остановимся теперь на вопросе о том, какое из всех возможных доказательств с помощью разложения является простейшим. Если при этом не руководствоваться исключительно личным вкусом, то необходимо дать математическое определение понятия «простоты» доказательства; более того, так как мы собираемся эту простоту оценивать, то необходимо будет условиться о «мере» простоты. При этом надо иметь в виду, что и выбор подобной «меры» опять-таки будет субъективен. «Мерой простоты» может служить, например, число использованных при доказательстве вспомогательных линий, или число частей разбиения, или оба эти числа одновременно. Можно условиться «мерой простоты» доказа-

*) Другими словами — симметрично отражен от катета.

тельства считать число применений теоремы о равенстве треугольников, предполагая при этом, что доказательство проведено полностью, без всяких ссылок на очевидность. С этой последней точки зрения вопрос по предложению Бернштейна был изучен Брандесом. Найти простейшее доказательство в смысле этого последнего

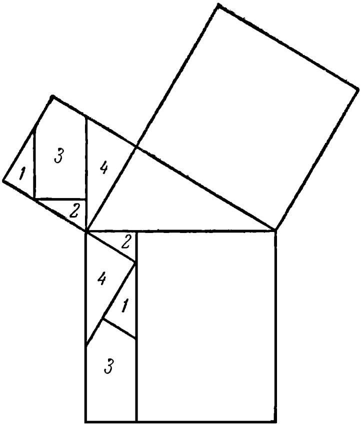

Рис. 21.

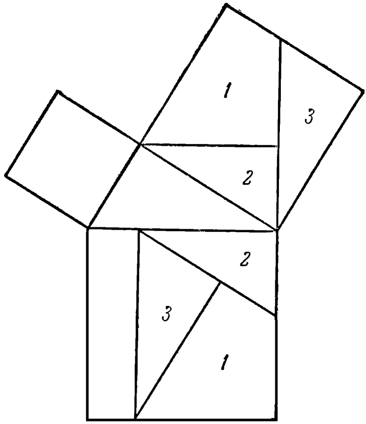

Рис. 22.

определения означает установить наименьшее число треугольников, на которые можно разложить квадрат, построенный на гипотенузе, так, чтобы каждому из них соответствовал равный ему треугольник в разбиении квадратов, построенных на катетах. В доказательстве Эпштейна, например, таких треугольников 8; в доказательстве, изложенном в п. **6**, 5 четырехугольников, следовательно, 10 треугольников; в доказательстве Аннаирици мерой простоты нужно считать число 7.

Каково же наименьшее число треугольников, получающихся при таких разложениях? Возможны ли разложения, в которых оно меньше семи? Брандес доказал, что число 7 в самом деле есть наименьшее, поэтому доказательство Аннаирици следует считать простейшим из всех, выполненных методом разложения. Более сложными являются доказательства Эпштейна и Гутхейля; еще более сложно доказательство п. **6**.

Упражнение 12. Выясните, не может ли быть уменьшено число 7 при рассмотрении отдельных частных типов прямоугольных треугольников.

Возможно, что если бы мы судили о простоте доказательства, руководствуясь исключительно интуицией, то мы разместили бы четыре упомянутые доказательства как раз в обратном порядке. «Математически» это оправдывается так: определяя выше «меру простоты» доказательства, мы совершенно игнорировали вопрос о симметричности полученных чертежей. Рассмотрим во всех четырех доказательствах только квадрат, построенный на гипотенузе; тогда в доказательстве Аннаирици фигура оказывается совсем не симметричной; в разложениях Эпштейна и Гутхейля фигура «частично симметрична»; наконец, «наибольшей симметричностью,» если можно так выразиться, обладает фигура в последнем доказательстве. Действительно, вообразим, что мы начертили на прозрачной бумаге квадрат, построенный на гипотенузе, разбили его на части, как на рис. 14—15, 18, 19 или 20, наложили на соответствующий рисунок и начали вращать прозрачный чертеж вокруг центра квадрата. Тогда для полного совмещения верхнего рисунка с нижним в разложении Аннаирици потребуется поворот на 360°; в разложениях Эпштейна и Гутхейля — на 180°; в разложении же, изображенном на рис. 18, — на 90°.

10. До сих пор мы изучали только такие доказательства, в которых квадрат, построенный на гипотенузе, с одной стороны, и квадраты, построенные на катетах, с другой, складывались из равных частей. Такие доказательства называются *доказательствами при помощи сложения* («аддитивными доказательствами») или, чаще, *доказательствами методом разложения*. До сих пор мы исходили из обычного расположения квадратов, построенных на соответствующих сторонах треугольника, т. е. вне треугольника. Однако во многих случаях более выгодно другое расположение квадратов. На рис. 23 квадраты, построенные на катетах, размещены ступенями один рядом с другим. Эту фигуру, которая встречается в доказательствах, датируемых заведомо не позднее, чем IX столетием н. э., индусы называли «стулом невесты». Способ построения квадрата со стороной, равной гипотенузе, ясен из чертежа. Общая часть двух квадратов, построенных на катетах, и квадрата, построенного на гипотенузе, — неправильный заштрихованный пятиугольник *5*. Присоединив к нему треугольники *1* и *2*, мы получим оба квадрата, построенные на катетах; если же заменить треугольники *1* и *2* равными им треугольниками *3* и *4*, то получим квадрат, построенный на гипотенузе.

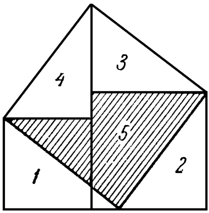

Рис. 23.

Упражнение 13. Исследуйте, как изменится рис. 23 при замене всех квадратов подобными между собой ромбами.

Упражнение 14. На рис. 24 и 25 изображены два различных расположения квадратов, близких к тому, которое дается на рис. 23. (В частности, на рис. 24 мы снова имеем «стул невесты».) Проведите доказательство теоремы Пифагора методом разложения, пользуясь этими чертежами.

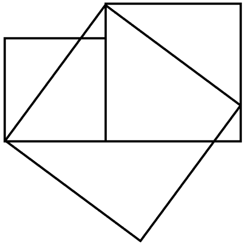
Рис. 24.

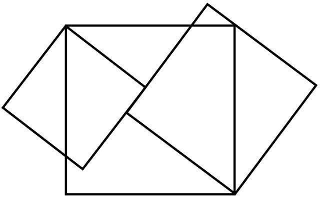
Рис. 25.

Исследуя это доказательство с точки зрения простоты, мы получим в качестве «меры» простоты число 5, т. е. меньше, чем прежде. Это объясняется особым расположением квадратов, построенных на катетах. Если их начертить раздельно, то потребуется еще несколько вспомогательных линий, но в этом случае мы снова возвратимся к такой же фигуре, как в доказательстве Аннаирици. Иначе говоря, перед нами совсем не новое доказательство, а лишь некоторое видоизменение уже известного.

11. Наряду с доказательствами методом сложения можно привести примеры *доказательств при помощи вычитания*, называемых также *доказательствами методом дополнения*. Общая идея всех таких доказательств заключается в следующем. От двух равных площадей нужно отнять равновеликие части так, чтобы в одном случае остались два квадрата, построенные на катетах, а в другом — квадрат, построенный на гипотенузе*). Ведь если в равенствах

$$A - B = C \quad \text{и} \quad A' - B' = C'$$

часть A равновелика A', а часть B равновелика B', то части C и C' также равновелики!

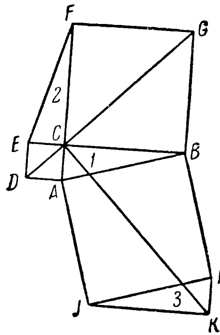

Рис. 26.

Мы сейчас поясним этот метод на примере. На рис. 26 к обычной пифагоровой фигуре приставлены сверху и снизу треугольники *2* и *3*, равные исходному треугольнику *1*. Прямая DG обязательно пройдет через C — этот факт мы уже использовали (см. п. 5). Заметим теперь (далее мы это докажем), что шестиугольники $DABGFE$ и $CAJKHB$ равновелики. Если мы от первого из них отнимем треугольники *1* и *2*, то останутся квадраты, построенные на катетах, а если от второго шестиугольника отнимем равные треугольники *1* и *3*, то останется квадрат, построенный на гипотенузе. Отсюда и вытекает, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Остается доказать, что наши шестиугольники равновелики. Прежде всего заметим, что прямая DG делит верхний шестиугольник на равновеликие части; то же можно сказать о прямой CK и нижнем шестиугольнике. Повернем четырехугольник $DABG$, составляющий половину шестиугольника $DABGFE$, вокруг точки A по часовой стрелке, на угол $90°$; тогда он совпадает с четырехуголь-

*) Другими словами — дополнить две интересующие нас фигуры (два квадрата, построенные на катетах, и квадрат, построенный на гипотенузе) равными фигурами так, чтобы в результате этого дополнения получились равные фигуры.

ником $CAJK$, составляющим половину шестиугольника $CAJKHB$. Поэтому шестиугольники $DABGFE$ и $CAJKHB$ равновелики. Можно изготовить соответствующие фигуры из картона и непосредственным наложением убедиться в том, что они равновелики.

Упражнение 15. Укажите связь этого доказательства, проведенного методом дополнения, с доказательством Эпштейна.

12. В первом доказательстве методом дополнения нам пришлось немного повозиться с доказательством равновеликости исходных фигур; вычитаемые же части были весьма просты. Иными будут доказательства, с которыми мы сейчас познакомимся. Здесь за исходные фигуры, из которых путем вычитания равных частей хотят получить искомые квадраты, мы будем брать не две различные фигуры, а одну и ту же.

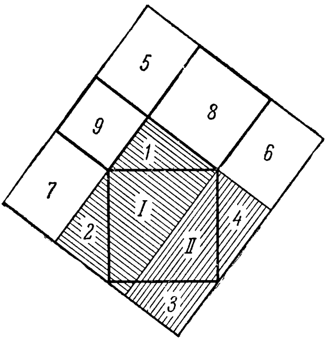

Рис. 27.

Знакомый нам чертеж теоремы Пифагора заключим в прямоугольную рамку, направления сторон которой совпадают с направлениями катетов треугольника (рис. 27). Продолжим некоторые из отрезков фигуры так, как указано на рис. 27, при этом прямоугольник распадется на несколько треугольников, прямоугольников и квадратов.

Выбросим сначала из прямоугольника несколько частей так, чтобы остался лишь квадрат, построенный на гипотенузе.

Эти части следующие:

1) треугольники *1*, *2*, *3*, *4*;
2) прямоугольник *5*;
3) прямоугольник *6* и квадрат *8*;
4) прямоугольник *7* и квадрат *9*.

Затем выбросим из прямоугольника части так, чтобы остались только квадраты, построенные на катетах.

Этими частями будут:

1) прямоугольники *6* и *7*;

2) прямоугольник *5*;

3) прямоугольник *I* (заштрихован);

4) прямоугольник *II* (тоже заштрихован).

Нам осталось лишь показать, что отнятые части равновелики. Это легко видеть в силу расположения фигур. Действительно, из рис. 27 ясно, что:

1. Четыре треугольника *1*, *2*, *3*, *4* равновелики двум прямоугольникам *6* и *7*.

2. Прямоугольник *5* равновелик самому себе.

3. Прямоугольник *6* и квадрат *8*, взятые вместе, равновелики прямоугольнику *I*.

4. Прямоугольник *7* вместе с квадратом *9* равновелики прямоугольнику *II*.

Доказательство закончено.

Упражнение 16. Проведите доказательство заново, заменив площади фигур их численными значениями, выраженными через a, b и c.

Упражнение 17. Если исходить не из прямоугольника, охватывающего всю пифагорову фигуру, а из его части, и немного изменить разбиение, то доказательство несколько упрощается. Соответствующий чертеж изображен на рис. 28. Покажите, что рис. 28 есть не что иное, как комбинация рис. 10 и рис. 11.

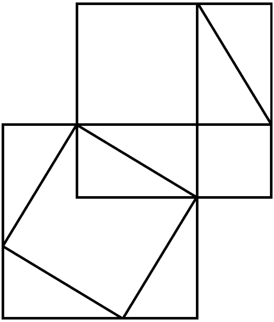

Рис. 28.

13. Можно было бы привести целый ряд доказательств, подобных разобранному в п. **12**; наметим лишь их план.

Предположим, что каждый из трех квадратов, которые мы строили на сторонах прямоугольного треугольника, можно поворачивать вокруг соответствующих сторон треугольника. «Основное» расположение квадратов, из которого мы исходили в предыдущем пункте,— это такое, где все квадраты обращены наружу. Но можно также повернуть тот или иной квадрат. При этом возможны следующие случаи:

1°. Все квадраты обращены наружу.

2°. Все квадраты обращены внутрь.

3°. Квадраты, построенные на катетах, обращены наружу, а третий квадрат — внутрь.

4°. Квадрат, построенный на гипотенузе, обращен наружу, а два остальных — внутрь.

5°. Один из квадратов, построенных на катетах, обращен внутрь, а два других квадрата — наружу.

6°. Один из квадратов, построенных на катетах, обращен наружу, а два других квадрата — внутрь.

Последние два случая допускают еще варианты, поскольку обращенным внутрь (соответственно, наружу) может оказаться как меньший, так и больший из квадратов, построенных на катетах.

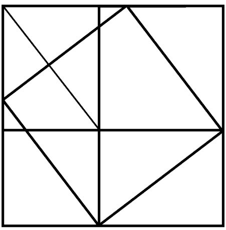

Рис. 29.

Во всех случаях доказательство проводится по образцу, намеченному в п. **12**.

Упражнение 18. Сделайте чертеж, отвечающий одному из случаев 2°—6°, и с его помощью докажите теорему Пифагора.

Здесь мы наметим только простое доказательство, относящееся к случаю 3°. Впрочем, оно по существу совпадает с доказательством Аннаирици (ср. также рис. 28). Начертим снова охватывающий фигуру прямоугольник, который в данном случае превращается в квадрат (рис. 29). После того, как мы проведем еще одну вспомогательную диагональ, на чертеже можно будет насчитать 7 треугольников, равных первоначальному. Отнимая от охватывающего квадрата по четыре треугольника, мы в первом случае получим квадраты катетов, во втором — квадрат гипотенузы.

Упражнение 19. На рис. 29 диагональ проведена из вершины прямого угла основного треугольника; докажите, что эта диагональ перпендикулярна к гипотенузе основного треугольника. [Как указывает Аннаирици, этот факт был известен еще Герону.] Как будет обстоять дело, когда квадрат гипотенузы обращен наружу?

14. Все эти доказательства можно совсем просто представить в «арифметической» форме. Мы здесь приведем одно подобное «арифметическое» доказательство, чрезвычайно простое и представляющее к тому же исторический интерес. Его можно найти у индусов,— со стереотипным «смотри» — в геометрии Басхары (род. в 1114 г. н. э.), а также у китайцев, которые знали это доказательство, возможно, за 1000 лет до н. э. (ср. п. 2 § 1 и рис. 1). Относящийся к этому доказательству рис. 30 похож (по крайней мере, построением) на уже встречавшийся нам рис. 20. Исходный прямоугольный треугольник вкладывается здесь четырежды в квадрат, построенный на гипотенузе, причем в остатке остается еще малый квадрат, сторона которого равна $a-b$, где a — длина большего катета, а b — меньшего. Таким образом, площадь квадрата, построенного на гипотенузе, выражается так:

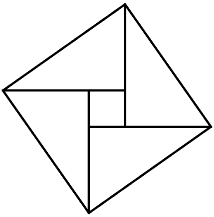

Рис. 30.

$$c^2=4\frac{ab}{2}+(a-b)^2.$$

Раскрыв скобки, сразу же получим:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Упражнение 20. Чтобы провести «геометрическое» доказательство, базируясь на этом разложении, достаточно из 5 частей, на которые распался квадрат, построенный на гипотенузе, составить два других квадрата, сложенные в виде «стула невесты». Вырежьте эти части и постарайтесь сложить их требуемым образом.

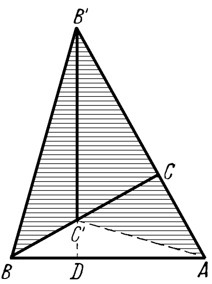

Рис. 31.

15. В заключение этого параграфа мы приведем еще три доказательства, которые также имеют вычислительный характер, однако сильно отличаются от всех предыдущих. Первое из них опубликовано англичанином Хоукинсом в 1909 г.; было ли оно известно до этого — трудно сказать.

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на $90°$ так, чтобы он занял положение $C'CB'$ (рис. 31). Продолжим гипотенузу $B'C'$ за точку C' до пересечения с линией AB в точке D. Отрезок $B'D$ будет высотой треугольника $B'AB$. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник $C'AB'B$. Его можно разложить на два равнобедренных треугольника CAC' и CBB' (или на два треугольника $C'B'A$ и $C'B'B$). Площадь треугольника CAC' равна $\frac{b^2}{2}$, а площадь треугольника CBB' — $\frac{a^2}{2}$; таким образом, площадь четырехугольника $C'AB'B$ равна

$$S=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Треугольники $C'B'A$ и $C'B'B$ имеют общее основание c и высоты DA и DB; поэтому площадь четырехугольника $C'AB'B$ можно также выразить в виде:

$$S=\frac{c\cdot DA}{2}+\frac{c\cdot DB}{2}=\frac{c}{2}(DA+DB)=\frac{c^2}{2}.$$

Сравнивая два полученных выражения для площади S, получим:

$$a^2+b^2=c^2.$$

16. Происхождение рис. 32 совершенно ясно: это нижняя половина рис. 11. Площадь s изображенной на рис. 32 фигуры можно найти, если рассматривать ее как сумму площадей трех треугольников:

$$s=2\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}.$$

С другой стороны, рассматривая эту фигуру как трапецию, получаем

$$s=2\frac{a+b}{2}(a+b).$$

Приравнивая найденные выражения, получим:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Это доказательство было опубликовано в 1882 г. Гэрфилдом.

Упражнение 21. Воспользуйтесь разложением, которое получится, если дополнить рис. 32, симметрично отразив его от прямой PQ.

Упражнение 22. Используйте рис. 33 для доказательства, основанного на вычислении площадей двумя способами (Вальдхейм).

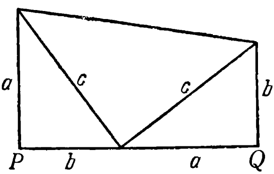

Рис. 32.

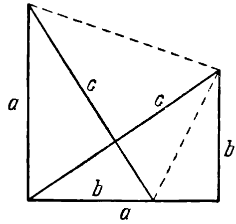

Рис. 33.

17. Как указали Бернштейн и Шорер, если рассматривать задачу о покрытии плоскости равными многоугольниками («паркетом»), то станет ясной связь

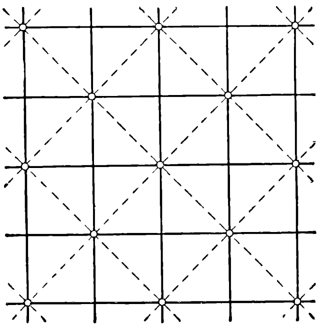

Рис. 34.

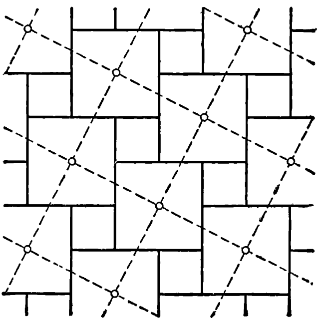

Рис. 35.

между некоторыми из изложенных доказательств. В случае равнобедренного прямоугольного треугольника, когда разложение имеет вид, изображенный на рис. 5, весьма легко установить связь этого доказательства с возможностью двоякой укладки паркета в виде сети квадратов. Одного взгляда на рис. 34 достаточно, чтобы это стало ясно.

Более поразительным кажется тот факт, что для укладки паркета можно применять даже «стулья невесты».

Это означает, что, прикладывая друг к другу такие фигуры, можно заполнить ими сплошь всю плоскость без пробелов и двойных покрытий. На рис. 35—37 за основу взят именно этот способ укладки паркета; на этих же рисунках пунктиром изображено покрытие равными квадратами. Различаются эти рисунки не величиной квадратов, а только их расположением: в одном случае вершины пунктирных квадратов находятся в центрах бóльших квадратов; в другом — в одинаково расположенных смежных вершинах малого и большого катетов; в третьем лежат вблизи центров больших квадратов. Не исключена возможность также другого расположения вершин пунктирных квадратов.

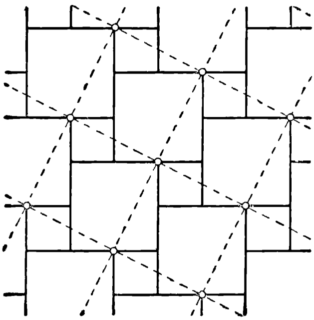

Рис. 36.

Во всех случаях плоскость полностью покрывается сначала сетью квадратов, затем — сетью «стульев невесты»; отсюда следует, что площадь квадрата должна быть равна площади «стула невесты». Разумеется, для того чтобы это рассуждение было вполне строгим, необходимо устранить еще одно возражение. Дело в том, что пока рассматривается только конечная часть плоскости, ее граница не может служить одновременно границей как области, покрытой некоторым числом равных квадратов, так и области, покрытой тем же числом «стульев невесты».

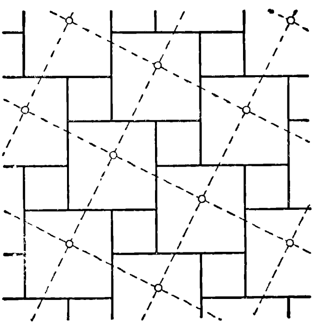

Рис. 37.

Если же считать плоскость неограниченной, то возникают трудности, связанные с применением понятия «бесконечного». Мы не будем вдаваться в подробности, связанные с этим вопросом, тем более, что некоторые читатели, возможно, сразу и не почувствуют нужды в этом. Заметим лишь, что чем большая область покрывается квадратами и «стульями невесты», тем меньшую роль будет играть ошибка при сравнении покрытых площадей, происходящая от того, что по существу здесь сравниваются площади разных областей, имеющих близкие, но не совпадающие границы.

Рассмотрим теперь рис. 35—37 подробнее. На первом из них изображено разложение квадрата, построенного на гипотенузе. Оно известно из доказательства с помощью «колеса с лопастями» (рис. 18). Рис. 37 показывает, как будет выглядеть это разложение, если линии, разделяющие на части больший из построенных на катетах квадратов, будут пересекаться не в центре квадрата; наконец, рис. 36 тесно связан с доказательством Аннаирици (ср. рис. 23). Ш о р е р, занимаясь «узорами обоев», т. е. задачей покрытия плоскости равными многоугольниками, установил связь этой задачи с иными доказательствами теоремы Пифагора методом разложения.

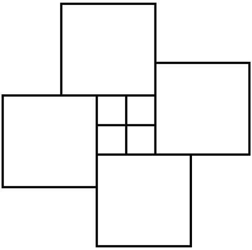

Рис. 38.

У п р а ж н е н и е 23. На рис. 38 изображены четыре «стула невесты», образующие одну симметричную фигуру. Воспользуйтесь этой фигурой как элементом для покрытия плоскости и выведите отсюда теорему Пифагора.

§ 3. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА В СИСТЕМЕ ЕВКЛИДА

1. То доказательство теоремы Пифагора, без которого не обходится ни один учебник элементарной геометрии, было приведено Евклидом в его «Началах»; по свидетельству П р о к л а (Византия), оно придумано самим Евклидом. Вот в чем оно заключается.

Пусть $ABDE$ — квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC, а $ACFG$ и $BCHI$ — квадраты, построенные на его катетах (рис. 39). Опустим из вершины C прямого угла перпендикуляр CP на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной DE

квадрата $ABDE$ в точке Q; соединим точки C и E, B и G. Очевидно, $\angle CAE = \angle GAB\ (= \angle A + 90°)$; отсюда следует, что треугольники ACE и AGB (заштрихованные на рис. 39) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключенному между ними). Сравним далее треугольник ACE и прямоугольник $PQEA$; они имеют общее основание AE и равные высоты, опущенные на это основание (ибо $CQ \| AE$), следовательно

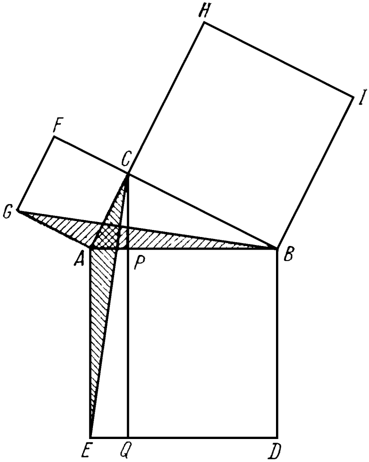

Рис. 39.

$$S_{PQEA} = 2S_{ACE}.$$

Точно так же квадрат $FCAG$ и треугольник BAG имеют общее основание GA и равные высоты, опущенные на это основание (так как $BF \| AG$); значит,

$$S_{FCAG} = 2S_{GAB}.$$

Отсюда и из равенства треугольников ACE и GBA вытекает равновеликость прямоугольника $QPAE$ и квадрата $CFGA$; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника $QPBD$ и квадрата $CHIB$. А отсюда, наконец, следует, что квадрат $ABDE$ равновелик сумме квадратов $ACFG$ и $BCHI$, т. е. теорема Пифагора.⟩

Против этого «доказательства-мышеловки», как его называл Шопенгауэр, высказывались энергичные возражения и еще теперь многие цитируют сказанные Шопенгауэром слова:

«Ходульное, надуманное доказательство Евклида заставляет спросить, „а почему так?“, тогда как один взгляд на хорошо известный простой чертеж[1]) гораздо лучше, чем всякое доказательство, позволяет вникнуть в суть дела, убедиться в необходимости доказываемого свойства и в связи его с наличием у треугольника прямого угла.

---

[1]) Чертеж, о котором говорит здесь Шопенгауэр, изображен на нашем рис. 5. Он, безусловно, был известен также Евклиду.

И для случая неравных катетов, как и вообще для всякой геометрической истины, должно существовать подобное наглядное доказательство — хотя бы потому, что открытие истины всегда имело в своей основе созерцаемую необходимость, а доказательство придумывалось только потом».

После того как мы ознакомились с целым рядом доказательств, восполняющих указанный Шопенгауэром пробел, мы не можем не упрекнуть его в поверхностном отношении к вопросу; при желании он мог бы узнать эти доказательства, а не ограничиться лишь утверждением, что они «должны существовать».

Однако и теперь нередко можно слышать от математиков, что простейшим доказательством теоремы Пифагора является не какое-либо из доказательств методом разложения, а именно евклидово. Как объяснить это разногласие?

Обращаясь к изложению Евклида, которое почти без изменения перенесено во многие учебники *), обратим внимание прежде всего на его форму. Во всех своих доказательствах и построениях Евклид ограничивается стадией «синтеза», т. е. он совершенно не указывает, какие соображения привели его к тому или иному выводу, и почему он так, а не иначе проводит вспомогательные линии, или использует эту, а не другую из ранее доказанных теорем; только в конце читатель замечает, что все это делалось с заранее обдуманными намерениями и что желаемая цель достигнута. Тому, кто шаг за шагом слепо следует за Евклидом, не размышляя при этом сам, это доказательство, конечно, должно представляться похожим на мышеловку. Тому же, кто, напротив, встречался с подобными вещами, например, при обучении в школе, дело покажется совсем иным. Прежде всего, изучающий не нуждается в ссылках «на предложение x» или «на построение y», которыми его так заботливо окружает Евклид, так как держит в голове весь запас предложений, которыми пользуется автор. Важнее, однако, что изучающий, пользуясь имеющимся уже у него запасом знаний, может сам подойти к теореме и пытаться без учебника (но, может быть, с помощью учителя) найти путь к ее

*) Включая сюда и учебник А. П. Киселева.

доказательству. Он будет пробовать, как пробовал и Евклид, хотя в «Началах» и не видно следов этого. Вообще при доказательстве теоремы Пифагора, так же как и всех других предложений элементарной математики, нужно стараться не только дать требуемое доказательство, но и *научиться доказывать*.

Оставим теперь эту сторону вопроса. В чем же заключается преимущество евклидового доказательства? Прежде всего мы замечаем, что у Евклида теорема Пифагора не представляет собой математического факта, стоящего в центре всего изложения, как в этой маленькой книжке, а является лишь одним звеном в длинной цепи предложений, отдельным фактом в обширной системе математических теорем. И эта цепь такова, что каждое ее звено должно выводиться из предыдущих исключительно путем логических умозаключений. Каждое доказательство должно быть основано на ранее доказанных предложениях. Так как при этом методе где-нибудь должно быть начало, то за основу берут небольшое число недоказываемых предложений — так называемых *аксиом*, и хотя с точки зрения современной науки в этой цепи и обнаруживаются некоторые слабые места, это ничуть не порочит самой идеи *).

Прежде всего, система Евклида — это логическая система; наглядность, являющаяся основным достоинством доказательств методом разложения, не стоит здесь на первом плане — ей явно отводится второстепенная роль.

В системе Евклида теорема Пифагора занимает довольно скромное место, как одно из предложений учения о площадях. Начав с простейших многоугольных фигур — треугольника и параллелограмма, — Евклид переходит затем к нашей теореме. Простейшим доказательством для него является то, в котором предыдущие теоремы приходится применять наименьшее число раз. Правда, при этом он имел в своем распоряжении гораздо больший

*) По поводу кратко очерченного здесь *дедуктивного метода* построения геометрии см., например, статью П. К. *Рашевского* «Геометрия и ее аксиоматика», сборник «Математическое просвещение», вып. 5, М., 1960 г.

запас предложений, чем тот, которым обладали мы, когда рассматривали в § 2 вопрос о простоте доказательства: там, кроме понятия равносоставленности, мы могли пользоваться лишь признаками равенства треугольников; Евклид же мог опираться еще и на ряд теорем из теории измерения площадей.

Установим, сколько раз в доказательстве теоремы Пифагора Евклиду приходится ссылаться на предыдущие предложения. Мы ограничимся при этом доказательством того, что квадрат, построенный на каком-нибудь катете, равновелик соответствующему прямоугольнику (эту часть теоремы Пифагора называют также теоремой Евклида).

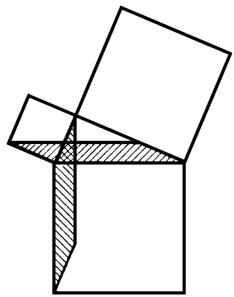

Рис. 40.

Обратимся снова к рис. 39. Прежде всего заметим, что для доказательства равновеликости квадрата $CFGA$ прямоугольнику $APQE$ нужно провести всего три вспомогательные линии: CQ, BG и CE. Теоремы нам потребуются лишь следующие: один раз первый признак равенства треугольников и дважды — теорема о том, что если параллелограмм и треугольник имеют одинаковые основание и высоту, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника.

Теперь нам ясно, что если доказательство Евклида рассматривать в рамках всей построенной в «Началах» системы, то его нужно признать чрезвычайно простым.

2. Для евклидового доказательства характерны два обстоятельства: 1) квадрат, построенный на гипотенузе, разбивается на два прямоугольника, равновеликих квадратам, построенным на катетах; 2) при доказательстве равновеликости прямоугольника и квадрата пользуются вспомогательной фигурой — специально выбранным треугольником, рассматриваемым в двух положениях, одно из которых получается из другого поворотом на 90°.

Заметим, что треугольники можно заменить параллелограммами — чтобы понять это, достаточно взглянуть на прилагаемый рис. 40.

Упражнение 24. Докажите, что бо́льшие стороны заштрихованных на рис. 39 треугольников взаимно перпендикулярны. (Этот факт был известен уже арабским математикам.)

Упражнение 25. На рис. 39 заштрихуйте также вспомогательные треугольники, используемые для доказательства равновеликости квадрата $BCHI$ и прямоугольника $BDQP$. Что можно сказать о точке пересечения прямых BG и AI?

Упражнение 26. Проведите строго в евклидовом духе доказательство, в котором в качестве вспомогательной фигуры берутся не треугольники, а параллелограммы. Изобразите также аналогичные параллелограммы для квадрата, построенного на большем катете.

3. В п. 13 § 2 мы перечислили шесть различных положений трех квадратов, построенных на сторонах исходного треугольника. Как в доказательствах методом разложения, так и при доказательстве евклидового типа можно исходить из любого расположения квадратов. Иногда при этом удается достигнуть кое-каких упрощений — правда, несущественных. Мы рассмотрим здесь один случай, а читателю предоставим поупражняться в доказательстве других.

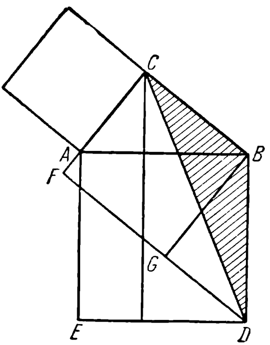

Рис. 41.

Пусть квадрат, построенный на одном из катетов (на рис. 41 это квадрат, построенный на большем катете), расположен с той же стороны катета, что и сам треугольник. Тогда продолжение противоположной катету стороны этого квадрата проходит через вершину квадрата, построенного на гипотенузе. Доказательство в этом случае оказывается совсем простым, так как здесь достаточно сравнить площади интересующих нас фигур с площадью одного треугольника (на рис. 41 он заштрихован) — площадь этого треугольника равна половине площади квадрата и одновременно половине площади прямоугольника.

Упражнение 27. Докажите строго, что продолжение отрезка FG проходит через точку D.

4. Остановимся коротко на предложениях, которые в евклидовой системе следуют за теоремой Пифагора.

Мы ограничимся их перечислением; читатель же может обдумать эти доказательства, заимствовав их из какого-нибудь учебника геометрии. Прежде всего важно отметить, что теорема Пифагора обратима. Часто этот факт считают само собою разумеющимся, хотя на самом деле он не так очевиден: ведь из того, что каждый берлинец — немец, совсем еще не следует, что каждый немец обязательно будет берлинцем. Таким образом, нужно доказать такую теорему:

Если квадрат, построенный на одной из сторон треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на двух других его сторонах, то треугольник прямоугольный, причем прямому углу противолежит та сторона его, которая соответствует самому большому квадрату (ср. п. **8**, § 4).

Доказательство этой теоремы сразу вытекает из следующего *обобщения теоремы Пифагора*:

Во всяком треугольнике квадрат, построенный на какой-либо из сторон, равен сумме квадратов, построенных на двух других сторонах, уменьшенной или увеличенной на удвоенную площадь прямоугольника, образованного из одной из этих сторон и проекции другой стороны на нее, причем удвоенная площадь этого треугольника вычитается из суммы площадей квадратов, если первая сторона треугольника лежит против острого угла и прибавляется к сумме площадей квадратов, если эта сторона лежит против тупого угла (ср. п. **9**, § 4).

Упражнение 28. Докажите это предложение путем вычисления с применением теоремы Пифагора, используя высоту треугольника для нахождения проекции стороны, а затем исключая ее.

5. Сейчас мы докажем так называемую теорему Паппа, которой еще нет у Евклида и которая впервые встречается у Паппа Александрийского (III в. н. э.), именем которого она и названа:

Во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной из его сторон внутрь треугольника, причем так, что две его вершины лежат вне треугольника, равновелик сумме таких параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника, что стороны их, проти-

воположные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма.

Если исходный треугольник прямоугольный, а в качестве параллелограмма, построенного на гипотенузе, взят квадрат, то мы имеем теорему Пифагора, которая, таким образом, является частным случаем теоремы Паппа.

Упражнение 29. Сделайте чертеж, относящийся к этому случаю; разберите, какое расположение квадратов здесь имеется в виду и какое доказательство скорее всего приведет нас к цели.

Для доказательства теоремы Паппа рассмотрим рис. 42, на котором изображены параллелограммы $ADEC$ и $BFGC$. Мы продолжим их наружные стороны до пересечения в точке C' и соединим точку C' с вершиной C треугольника. Можно представить себе, что треугольник $A'B'C'$ получен параллельным переносом треугольника ABC. Поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ равны. Параллелограммы $AA'C'C$ и $BB'C'C$ будут равновелики параллелограммам $ADEC$ и $BFGC$, так как у них равны основания и высоты. Если теперь от заштрихованной фигуры $AA'C'B'B$ отнять треугольник $A'B'C'$, то останется параллелограмм $AA'B'B$. Если же отнять треугольник ABC, равновеликий треугольнику $A'B'C'$, то останется сумма параллелограммов $AA'C'C$ и $BB'C'C$, которую можно заменить суммой равновеликих им параллелограммов $ADEC$ и $BFGC$.

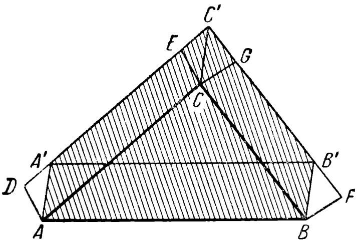

Рис. 42.

Теорема доказана.

Упражнение 30. Если сдвинуть прямоугольный треугольник в направлении одного из катетов за вершину прямого угла на расстояние, равное другому катету, то мы придем к чертежу, позволяющему использовать теорему Паппа для доказательства предложения, относящегося к построенному на катете квадрату. Если же сдвинуть треугольник так, чтобы гипотенуза, пройдя через вершину прямого угла, описала квадрат, то мы придем к уже известному нам доказательству теоремы Пифагора. Проверьте это.

6. Естественно возникает вопрос, существует ли стереометрический аналог теоремы Пифагора. Оказывается, да. Впервые его нашел, по-видимому, в 1622 г. Иоганн Ф у л ь г а б е р из Ульма.

Построим трехгранный угол, все двугранные и все плоские углы которого прямые (рис. 43). В каждой комнате восемь таких углов. На каждом ребре возьмем по произвольной точке A, B и C. Если площадь треугольника ABC обозначить для краткости через $\overline{ABC}$, то «теорему Пифагора для пространства» можно записать так:

$$\overline{ABC}^2=\overline{OAB}^2+\overline{OAC}^2+\overline{OBC}^2.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы, сводящемся к простому вычислению (оно намечено в упражнении 31).

У п р а ж н е н и е 31. Докажите справедливость равенства, выражающего «теорему Пифагора для пространства», выразив площади всех треугольников через длины ребер $OA=k_a$, $OB=k_b$, $OC=k_c$. Для прямоугольных треугольников OAB,... это сделать совсем просто. В треугольнике же ABC нужно сначала вычислить длины сторон, пользуясь теоремой Пифагора, а затем подставить найденные величины в формулу Герона для площади треугольника:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

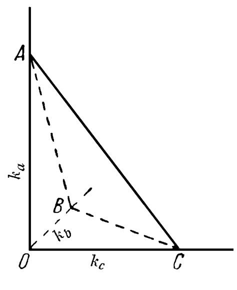

Рис. 43.

7. Все предшествующие рассуждения не выходили за рамки так называемой «метрической геометрии», в основе которой лежит понятие равенства. Можно стать и на другую точку зрения и рассматривать ранее изложенные факты, взяв за основу понятие г р у п п ы д в и ж е н и й. Поясним вкратце суть дела. Вместо того, чтобы доказывать равенство площадей двух фигур, можно просто совместить эти фигуры; подобное совмещение достигается с помощью движения. Два последовательных движения можно заменить одним и для всякого движения можно указать обратное ему движение; поэтому движения образуют группу *).

Евклид крайне осторожен в применении движений; там, где можно без них обойтись, он избегает ими пользоваться (правда, ему это не всегда удается). В противоположность Евклиду современная методика преподавания охотно привлекает понятие движения для доказательств и этим усиливает элементы наглядности в геометрических рассуждениях и подчеркивает связь этой науки с опытом.

В нашем изложении мы попутно отмечали встречающиеся нам движения. Это были, прежде всего, некоторые частные типы движений: параллельные переносы, которые явственно усматриваются на рис. 16—17 и 42; вращения, в частности вращения на угол 90°, как на рис. 39 и 40, и на угол 180° (центральная симметрия), как на рис. 26. Центральную симметрию можно найти также и на рис. 18 или 30.

Параллельные переносы и вращения образуют группу, составленную всеми движениями, которые можно осуществить, не выходя за пределы плоскости. В случае же осевой симметрии нам приходится привлекать пространственные соображения — без этого нельзя осуществить совмещение симметричных частей. На наших рисунках мы встречались и с такими движениями; взятые сами по себе (без вращений и параллельных переносов) они не образуют группы.

Читателю можно посоветовать самостоятельно провести другим путем некоторые из встречавшихся ранее доказательств теоремы Пифагора, шире используя движение для сравнения площадей фигур.

8. В заключение этой главы затронем еще один вопрос: как обстоит дело с обоснованием теоремы Пифагора, если ее выделить из всей логической системы математических предложений и рассматривать исключительно как результат физического эксперимента, например, как результат проверки, осуществляемой для всевозможных

*) По поводу затронутых здесь и далее вопросов см., например, И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, II, М., 1955—1956 гг.; см., в частности, Введения к первой, второй и третьей частям этой книги.

прямоугольных треугольников. Проще всего поступить так: начертить возможно точнее несколько прямоугольных треугольников, измерить их стороны со всей доступной нам точностью и убедиться, что $a^2+b^2=c^2$. Если же хотят сравнить самые квадраты, то можно начертить их на бумаге с миллиметровыми делениями (так называемой «миллиметровке») и сосчитать число квадратных миллиметров в каждом из квадратов. Можно также начертить квадраты на плотной, по возможности однородной бумаге, вырезать их, и затем, взвесив эти квадраты на точных весах (например, на таких, на которых взвешивают письма, если не найдется лучших), установить, что квадраты, построенные на катетах, вместе весят ровно столько же, сколько квадрат, построенный на гипотенузе.

Разумеется, все эти измерения никогда не смогут полностью доказать нашу теорему. Кроме того, неудобства, что мы не можем охватить подобными измерениями *все* прямоугольные треугольники, сами измерения связаны с неизбежными ошибками, величина которых зависит от искусства лица, производящего измерения, точности чертежных и измерительных инструментов и т. п. ⟨Лишь дедуктивный вывод теоремы Пифагора вроде доказательства Евклида или доказательства методом разложения убеждает нас, что выражаемое ею соотношение совершенно точно выполняется во всех случаях.⟩

§ 4. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И УЧЕНИЕ О ПОДОБИИ

1. В прямоугольном треугольнике ABC проведем из вершины прямого угла высоту CD; тогда треугольник разобьется на два треугольника, также являющихся прямоугольными (рис. 44). Полученные треугольники будут подобны друг другу и исходному треугольнику. Это легко доказать, пользуясь первым признаком подобия:

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

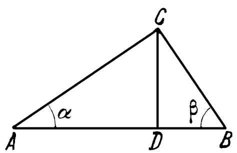

Рис. 44.

В самом деле, сразу видно, что, кроме прямого угла, треугольники ABC и ACD имеют общий угол α, а треугольники CBD и ABC—общий угол β. То, что малые треугольники также подобны друг другу, следует из того, что каждый из них подобен большому треугольнику. Впрочем, это можно установить и непосредственно.

Так как в подобных треугольниках соответственные стороны пропорциональны, то из подобия исходного треугольника и треугольника ACD следует

$$AD:AC=AC:AB,$$

или, что то же,

$$AC^2=AD\cdot AB.$$

Пользуясь терминами теории пропорций, это можно выразить так:

В прямоугольном треугольнике каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.

В терминах теории площадей это равенство выражает факт, который используется в евклидовом доказательстве, а именно:

Квадрат, построенный на катете прямоугольного треугольника, равновелик прямоугольнику, стороны которого равны гипотенузе треугольника и отрезку гипотенузы, прилежащему к рассматриваемому катету.

Аналогичное равенство, относящееся к другому катету, имеет вид

$$BC^2=DB\cdot AB.$$

Сложив оба равенства, получим

$$AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB=AB(AD+BD)=AB^2.$$

Так мы пришли к совсем простому доказательству теоремы Пифагора, основанному на теории подобия. Оно встречается у индуса Басхара (род. в 1114 г. н. э.) и затем у Леонарда Пизанского (в *Practica geometriae*, 1220 г.); позднее оно вновь было независимо найдено английским математиком Валлисом (1616—1703, Оксфорд); ⟨ныне оно также включается почти во все учебники элементарной геометрии⟩.

Упражнение 32. Проведите самостоятельно другое доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C. Из точки A, как из центра, опишем окружность радиуса b; точки ее пересечения с гипотенузой и с продолжением гипотенузы обозначим через D и E (рис. 45). Из подобия треугольников BCD и BCE вытекает:

$$a:(c-b)=(c+b):a,$$

а из нее следует теорема Пифагора. Можно сослаться также на теорему о квадрате касательной, которая сразу дает

$$a^2=(c+b)(c-b).$$

2. Представим себе, что треугольник ACD, изображенный на рис. 44, симметрично отражен от катета AC, треугольник DBC — от катета CB и треугольник CAB — от гипотенузы AB (рис. 46). Фигура, которая образуется при этом, отличается от фигуры, часто встречавшейся в прежних доказательствах, тем, что в ней на сторонах исходного треугольника построены не квадраты, а прямоугольные треугольники, подобные друг другу. Так же как там сумма площадей квадратов, построенных на катетах, была равна площади квадрата, построенного на гипотенузе, так и здесь сумма площадей треугольников, построенных на катетах, равна площади треугольника, построенного на гипотенузе; это сразу вытекает из самого способа получения фигуры (ср. рис. 46 и рис. 44).

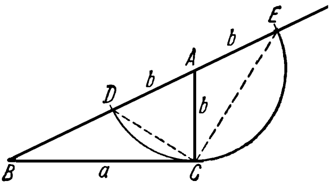

Рис. 45.

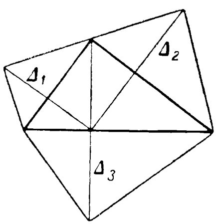

Рис. 46.

Возникает вопрос, можно ли, кроме квадратов и этих специально подобранных прямоугольных треугольников, построить какие-нибудь другие фигуры F_a, F_b и F_c на катетах a и b и на гипотенузе c прямоугольного треугольника так, чтобы площади этих фигур (которые мы обозначим теми же буквами, что и сами фигуры) удовлетворяли соотношению

$$F_a+F_b=F_c.$$

Ясно, что это соотношение не имеет места для совершенно произвольных фигур. Мы докажем, однако, следующее предложение:

Если на катетах и на гипотенузе прямоугольного треугольника построены какие угодно подобные между собой фигуры F_a, F_b и F_c, так, что катеты и гипотенуза являются сходственными отрезками этих фигур, то имеет место равенство

$$F_a+F_b=F_c.$$

Эта теорема встречается уже у Евклида (в 6 книге его «Начал») и, вероятно, открыта им самим. Об этом свидетельствует Прокл, который одновременно указывает, что еще в древности этой форме теоремы Пифагора отдавалось предпочтение перед другими, поскольку она отражает самую суть дела. Прокл говорит: «Я восхищаюсь теми, которые первыми достигли истины в этой проблеме: однако еще выше я ставлю творца «Начал» не только потому, что он снабдил теорему самым сжатым доказательством, но также и потому, что еще более общую проблему, содержащуюся в шестой книге, он установил на неопровержимых основах науки».

3. Для доказательства нашего предложения мы воспользуемся следующей теоремой из теории подобия, встречающейся в каждом учебнике элементарной геометрии:

Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

Если через F_a, F_b, F_c обозначить площади подобных многоугольников, построенных на катетах a и b и гипотенузе c прямоугольного треугольника, то согласно вспомогательной теореме можно написать:

$$F_a:F_b:F_c=a^2:b^2:c^2.$$

Эта пропорция означает, что можно найти число k (называемое коэффициентом пропорциональности) такое, что

$$F_a=ka^2, \qquad F_b=kb^2, \qquad F_c=kc^2.$$

Умножив обе части равенства

$$a^2+b^2=c^2$$

на k и принимая во внимание предыдущие равенства, получим

$$F_a+F_b=F_c.$$

⟨Остановимся здесь немного подробнее на вопросе о связи этого обобщения теоремы Пифагора с самой теоремой. Мы видели, что более общее равенство

$$F_a+F_b=F_c$$

вытекает из равенства Пифагора

$$a^2+b^2=c^2;$$

обратно, ясно, что если при любых подобных между собой многоугольниках F_a, F_b и F_c, построенных на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, справедливо соотношение $F_a+F_b=F_c$, то оно имеет место и для построенных на сторонах треугольника квадратов. Таким образом, общая теорема равносильна своему частному случаю (теореме Пифагора).

Замечательно при этом, что *любой* частный случай этой общей теоремы равносилен самой теореме, а следовательно, и теореме Пифагора. В самом деле, если равенство

$$F_a+F_b=F_c$$

имеет место *хотя бы для одной* тройки подобных между собой многоугольников, построенных на катетах и на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC так, что AC, BC и AB суть сходственные отрезки этих многоугольников, то

$$ka^2+kb^2=kc^2$$

(где k имеет какое-то определенное значение, зависящее от выбора многоугольников,— нам совершенно не важно, какое именно). Но отсюда вытекает, что

$$a^2+b^2=c^2,$$

а это влечет за собой тот факт, что равенство $F_a+F_b=F_c$ выполняется для *любых* построенных на сторонах прямоугольного треугольника подобных многоугольников, в частности, и для квадратов.

Теперь нам остается заметить, что для одной тройки подобных многоугольников, построенных на AC, BC и AB — а именно, для прямоугольных треугольников, подобных треугольнику ABC,— равенство $F_a + F_b = F_c$ заведомо выполняется. Для того чтобы в этом убедиться, нет необходимости обращаться к рис. 46, а можно исходить сразу из рис. 44 (где прямоугольные треугольники построены по ту же сторону от сторон ABC, что и сам исходный треугольник; ср. п. 13, § 2). А отсюда, как мы видели, следует, что это равенство выполняется для любых построенных на сторонах треугольника подобных многоугольников, в частности, для квадратов.

Это красивое доказательство теоремы Пифагора *) (опирающееся, правда, на теорию подобия) является одним из самых простых!⟩

4. Сейчас мы познакомимся с одним интересным приложением рассмотренного в п. 3 обобщения теоремы Пифагора — мы имеем в виду предложение, которое встречается во многих учебниках геометрии под названием теоремы о *гиппократовых луночках*. Гиппократ Хиосский (вторая половина V века до н. э., Афины) занимался квадратурой луночек (по-гречески μηνισκος, по-латыни *lunula*). Он называл луночкой часть плоскости, ограниченную двумя дугами окружностей [1]); квадратура такой фигуры сводится к нахождению равновеликого ей квадрата. Наше предложение в том виде, как оно будет здесь сформулировано, не встречается у самого Гиппократа, который нашел квадратуру только для некоторых луночек. Во всей общности теорему доказал араб Ибн Альхаитам (ум. 1039 г.). Французские математики А. де Лион и Г. Парди высказали ее вновь в 1654 и в 1671 гг.; основывались они при этом на арабских источниках или нет — установить невозможно. Парди в своих *Elemens de Geometrie* говорит об общем случае

*) См. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, М., 1957, стр. 34—37.

[1]) Если точно следовать этому определению, то лунный серп, не может быть назван луночкой, так как он ограничен дугой окружности (периферия Луны) и дугой эллипса ⟨получаемой в результате проекции окружности (периферии тени Земли) на шар (Луну)⟩.

теоремы, как о *Lunes d'Hippocrate de Scio* — луночках Гиппократа Хиосского. В издании «Начал» Евклида 1745 г. Таке-Вистон также ошибочно приписывает Гиппократу общую теорему.

Если на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре описать полуокружность, лежащую с той же стороны гипотенузы, что и сам треугольник, то она пройдет через вершину прямого угла; эту теорему греки приписывали Фалесу Милетскому, но в действительности ее знали еще древние вавилоняне. Опишем две полуокружности на катетах так, как указано на рис. 47, тогда получатся две луночки (заштрихованные).

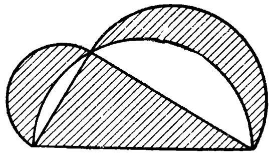

Рис. 47.

Пусть K_a, K_b и K_c — площади полукругов, построенных на катетах и гипотенузе. Согласно теореме, высказанной в предыдущем параграфе, имеем:

$$K_a+K_b=K_c.$$

Упражнение 33. Предложение, на которое мы только что сослались, было доказано лишь для многоугольников. Будет ли оно справедливо также и для полукругов?

Этот же результат можно получить, умножив обе части равенства

$$a^2+b^2=c^2$$

на $\frac{\pi}{8}$. В самом деле, равенство

$$\frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2=\frac{\pi}{8}c^2$$

означает, что площадь полукруга с диаметром c равна сумме площадей двух других полукругов, с диаметрами a и b.

Если мы отнимем одни и те же части (на рис. 47 они не заштрихованы) как от полукруга, построенного на гипотенузе, так и от полукругов, построенных на катетах, то, вследствие только что доказанной теоремы, получим, что *сумма площадей луночек равна площади треугольника*.

5. Возвратимся к нашему прямоугольному треугольнику, который мы разделили на два малых треугольника (рис. 44). Пусть h — высота, опущенная из вершины прямого угла, p и q — отрезки гипотенузы, на которые ее делит высота. Тогда вследствие подобия малых треугольников имеем

$$p:h=h:q \quad \text{или} \quad h^2=pq.$$

Этот факт в теории площадей выражается так: *Квадрат, построенный на высоте прямоугольного треугольника, равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат отрезки гипотенузы.*

Это предложение можно вывести и непосредственно из теоремы Пифагора, не пользуясь теорией подобия. В самом деле, из рассмотрения треугольника ACD имеем

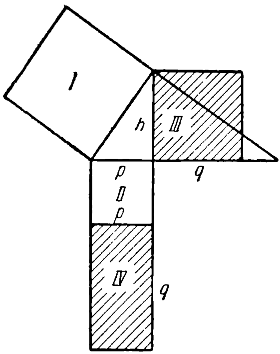

Рис. 48.

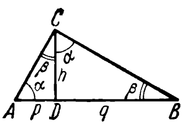

Рис. 49.

$$h^2=b^2-p^2;$$

из рассмотрения треугольника BCD выводим

$$h^2=a^2-q^2.$$

Сложим эти равенства и в полученном равенстве

$$2h^2=a^2+b^2-p^2-q^2$$

заменим сумму квадратов катетов a^2+b^2 квадратом гипотенузы $c^2=(p+q)^2$:

$$2h^2=(p+q)^2-p^2-q^2.$$

Раскрывая скобки, деля на 2 и упрощая, будем иметь

$$h^2=pq.$$

Наглядное доказательство этого равенства следует из рис. 48. По теореме Пифагора квадрат *III*, построенный на высоте, равновелик квадрату *I*, построенному на катете, без квадрата *II*, построенного на отрезке p гипотенузы, или равновелик прямоугольнику *IV*, так как квадрат *I* равновелик прямоугольнику *II*+*IV*. Сторонами же прямоугольника *IV* служат отрезки p и q.

Очень красивое доказательство нашей теоремы о высоте опубликовал К. Мейтцнер. Два малых прямоугольных треугольника (рис. 49), на которые высота делит большой треугольник, составим так, чтобы их гипотенузы служили продолжением одна другой. Это можно сделать двумя способами (рис. 50 и 51). На рис. 50 полу-

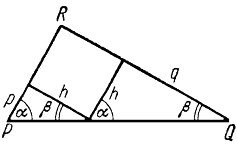

Рис. 50.

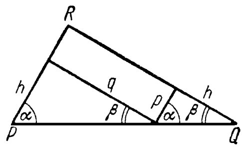

Рис. 51.

ченная фигура дополнена до прямоугольного треугольника квадратом h^2, а на рис. 51 — прямоугольником pq. Но полученные треугольники равны. Отсюда $h^2=pq$.

6. Рассмотрим еще одно предложение, являющееся следствием теоремы о высоте. Разделим отрезок c на части p и q и на каждом из трех отрезков p, q, c, как на диаметре, построим полуокружность (рис. 52). Получающаяся при этом фигура, ограниченная тремя полуокружностями (на рис. 52 она заштрихована), вследствие своего сходства с кривым сапожным ножом получила название арбелона*). Архимед доказал несколько теорем, относящихся к этой фигуре; мы здесь ограничимся рассмотрением одной из них. Впишем в большую полуокружность прямоугольный треугольник, в котором c является гипотенузой, а p и q — ее отрезками. Тогда *круг, построенный на высоте этого треугольника, как на диаметре, равно-*

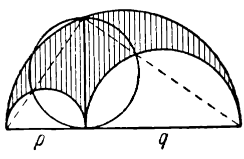

Рис. 52.

*) От греческого слова αρβελωσ — сапожный нож.

велик нашему арбелону. При доказательстве этого удобно исходить из промежуточного равенства, которым мы пользовались в предыдущем пункте:

$$2h^2 = c^2 - p^2 - q^2.$$

Умножая обе его части на $\frac{\pi}{8}$, получим:

$$\frac{\pi h^2}{4} = \frac{\pi c^2}{8} - \frac{\pi p^2}{8} - \frac{\pi q^2}{8},$$

где левая часть выражает площадь круга, диаметр которого равен высоте, а правая — площадь арбелона.

7. Распространим теперь метод, которым мы пользовались в начале этого параграфа, на треугольники произвольного вида (не обязательно прямоугольные!) и таким путем устраним один недочет, допущенный в предыдущем параграфе. Предположим, что в треугольнике ABC угол γ тупой (рис. 53). Построим внутри этого треугольника на сторонах a и b два малых треугольника, подобных исходному. Это можно сделать, откладывая при вершине C от стороны AC угол β, а от стороны BC — угол α; третьими вершинами этих треугольников будут точки пересечения полученных таким образом сторон со стороной AB исходного треугольника; мы обозначим эти вершины через D_1 и D_2. Так как угол γ — тупой, а $\alpha+\beta$ — острый, то в результате построения получится равнобедренный треугольник CD_1D_2, у которого $\angle CD_1D_2 = CD_2D_1 = \alpha+\beta$; высота этого треугольника совпадает с высотой CE исходного треугольника, а по обе стороны от него расположены подобные друг другу и исходному треугольнику треугольники D_1CB и D_2AC. Введя для краткости обозначения:

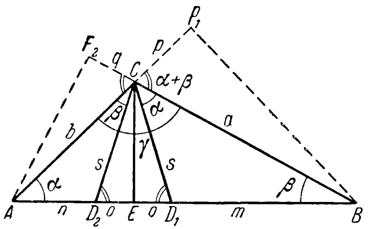

Рис. 53.

$$AD_2 = n, \quad D_2E = ED_1 = o, \quad D_1B = m, \quad CD_1 = CD_2 = s,$$

можно, основываясь на подобии треугольников, записать три пропорции:

$$s:n=m:s, \ (1) \qquad a:m=c:a, \ (2) \qquad b:n=c:b, \qquad (3)$$

или, переходя к произведениям, три равенства:

$$s^2=mn, \ (4) \qquad a^2=mc, \ (5) \qquad b^2=nc. \qquad (6)$$

Мы рекомендуем читателю убедиться в справедливости этих соотношений также геометрическим путем, выполнив действительное построение квадратов и прямоугольников. Тогда еще яснее обнаружится, что здесь мы имеем дело с обобщением теоремы Пифагора.

Из равенств (5) и (6) следует, что

$$a^2+b^2=c\,(m+n).$$

После прибавления и вычитания справа члена $2oc$ — заметьте эту маленькую хитрость — мы будем иметь

$$a^2+b^2=c\,(m+n+2o)-2oc.$$

Член в скобках равен c. Таким образом, можно написать равенство:

$$c^2=a^2+b^2+2oc. \qquad (7)$$

Это — поучительное обобщение теоремы Пифагора. В случае, когда $\gamma=90°$, сразу же замечаем, что $o=0$, и мы возвращаемся к доказательству, с которым познакомились в начале этой главы.

Упражнение 34. Проведите аналогичные рассуждения для случая, когда угол γ — острый.

8. Присоединив к уже известным фактам результат упражнения 34, мы снова получим доказательство предложения, обратного теореме Пифагора (см. п. 4 § 3). В нем утверждается, что если $c^2=a^2+b^2$, то угол γ— прямой. В самом деле, если бы это было не так, то угол γ мог быть тупым или острым. В первом случае было бы справедливо равенство (7), где $o\neq0$, во втором — близкое к этому равенство, вывод которого составляет содержание упражнения 34, где также $o\neq0$. В обоих случаях мы приходим к противоречию со сделанным допущением.

9. Покажем теперь с помощью вспомогательного построения, что равенство (7) есть не что иное, как разновидность обобщения теоремы Пифагора, о котором мы уже упоминали в п. **4** § 3. Опустим, например, из вершины B треугольника ABC перпендикуляр на сторону b (или на ее продолжение, если γ тупой) и обозначим через F_1 основание перпендикуляра. Тогда $\Delta BF_1C \sim \Delta CED_1$, так как в них соответствующие углы при C и D_1 равны. (Такое же построение можно провести, исходя из вершины A; на рисунке это выполнено.) Обозначим проекцию CF_1 стороны a на b через p; в другом треугольнике отрезок $CF_2=q$ есть проекция стороны b на a.

Из подобия треугольников BF_1C и CED_1 получаем

$$o:s=p:a \quad \text{или} \quad o=\frac{sp}{a}.$$

Возвращаясь теперь к трем ранее рассмотренным подобным треугольникам и пользуясь тем, что $\Delta ABC \sim$ $\sim \Delta ACD_2$, получаем еще одну пропорцию

$$s:b=a:c \quad \text{или} \quad \frac{s}{a}=\frac{b}{c}.$$

Таким образом, добавочный член равенства (7) можно представить в виде

$$2oc=2\,\frac{sp}{a}\,c=2\,\frac{b}{c}\,pc=2bp,$$

а само равенство (7) — в виде

$$c^2=a^2+b^2+2bp.$$

Таким же путем, рассматривая второй вспомогательный треугольник, мы пришли бы к равенству

$$c^2=a^2+b^2+2aq.$$

Так выражается обобщенная теорема Пифагора в случае тупого угла γ.

Упражнение 35. Проведите доказательство для случая, когда угол γ острый.

10. Как показал Е. Динтцл, доказательства, связанные с укладкой паркета (т. е. покрытием плоскости многоугольниками), могут применяться и в случае обобщенной теоремы Пифагора.

Мы будем исходить из тупоугольного треугольника ABC (рис. 54) с тупым углом при вершине C и прилегающими к нему сторонами $CA=a$ и $CB=b$. В качестве

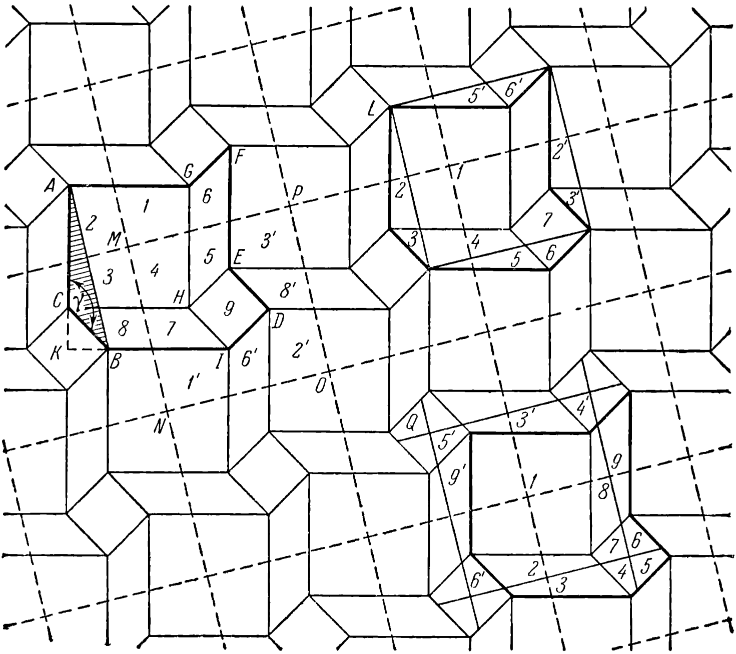

Рис. 54.

повторяющегося элемента рисунка паркета возьмем восьмиугольник $ACBIDEFG$, составленный из двух квадратов $ACHG$ и $HIDE$ со сторонами, соответственно равными сторонам b и a треугольника, и двух равных параллелограммов $CBIH$ и $HEFG$ с этими же сторонами b и a. Если наложить теперь на наш рисунок квадратную решетку так, чтобы узлы ее совпали с центрами больших квадратов и чтобы прямые MN и AB были параллельны, то можно доказать, что, например, квадрат $MNOP$ и восьмиугольник, взятый за основу рисунка паркета, можно составить из одних и тех же частей *1*, *2*, ..., *9* или равных им частей *1'*, *2'*, *3'*, *4*, *5*, *6'*, *7*, *8'*, *9*.

А так как $AB=MN$, то отсюда следует, что

$$AB^2=AC^2+BC^2+2CH\cdot CK,$$

что и представляет собою обобщенную теорему Пифагора.

Упражнение 36. Этот метод доказательства можно распространить также и на случай остроугольного треугольника ABC, но здесь рисунок усложнится, так как фигуры будут частично перекрываться. Попытайтесь все-таки преодолеть это затруднение!

Упражнение 37. Так же как и в случае простой (не обобщенной) теоремы Пифагора, квадратную решетку здесь можно выбирать произвольным образом, получая при этом различные разложения. На рис. 54 изображены два новых положения решетки. В первом за вершину квадрата принимается точка L, расположенная так же, как и точка A; во втором — центр малого квадрата. Найдите, как в этих случаях выглядит разложение квадрата c^2.

11. Если в наших рассуждениях, кроме теории подобия, использовать еще и выросшую из теории подобия *тригонометрию*, то получим еще одну форму записи обобщенной теоремы Пифагора:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Действительно, проекция стороны треугольника a на сторону b равна $a\cos\gamma$ или $-a\cos\gamma$ в зависимости от того, будет ли угол γ острым или тупым. В обоих случаях предыдущее равенство будет справедливо; в тригонометрии оно известно под названием теоремы косинусов.

С помощью тригонометрии можно легко доказать теорему, которую открыл ⟨впрочем, вряд ли первым!⟩ немецкий школьник И. Клейн. На рис. 55 изображен произвольный треугольник ABC, на сторонах которого a, b и c построены квадраты. Теорема утверждает, что заштрихованные на фигуре треугольники равновелики. Доказательство получается сразу, если воспользоваться формулой для площади треугольника

$$s=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

замечая при этом, что $\sin\gamma=\sin(180^\circ-\gamma)$.

Упражнение 38. Проведите полное доказательство последней теоремы.

12. *Векторами* называют направленные отрезки. Мы будем обозначать их жирными латинскими буквами. Суммой двух векторов называют вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах. Если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$. *Скалярным произведением* двух векторов называют произведение их длин и косинуса угла, заключенного между ними. Таким образом, скалярное произведение, взятое по абсолютной величине, выражает площадь прямоугольника, образованного одним из векторов и проекций другого вектора на него (или на его продолжение). Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол γ, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\cdot b\cos\gamma.$$

Здесь a и b обозначают длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

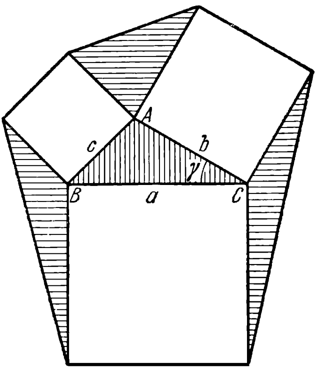

Рис. 55.

Если векторы перпендикулярны друг другу, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

в силу того, что $\cos 90^\circ=0$. Если $\gamma=0$, то $\boldsymbol{ab}=ab$; в частности,

$$\boldsymbol{a}^2=a^2.$$

Для скалярного произведения имеет место закон дистрибутивности:

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{ma}+\boldsymbol{mb}.$$

Пусть ABC — прямоугольный треугольник (рис. 56) с прямым углом при вершине C, построенный на векторах $\boldsymbol{a}=CB$, $\boldsymbol{b}=CA$, $\boldsymbol{c}=AB$. Тогда справедливо векторное равенство

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},$$

откуда имеем

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

Возводя обе части в квадрат, получим

$$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}.$$

Так как $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{ab}=0$, откуда

$$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2 \quad \text{или} \quad c^2=a^2+b^2.$$

Нами снова доказана теорема Пифагора.

⟨Если треугольник ABC — произвольный (не обязательно прямоугольный!), то та же формула

$$\boldsymbol{c}^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}$$

дает

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

т. е. теорему косинусов, обобщающую теорему Пифагора.⟩

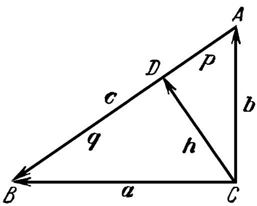

Рис. 56.

Обозначим через $\boldsymbol{h}$ вектор, проведенный из вершины C прямоугольного треугольника перпендикулярно гипотенузе $AB=c$. Будем считать, что конец D вектора $\boldsymbol{h}$ принадлежит стороне AB треугольника и разбивает эту сторону на два отрезка DA и DB; пусть $DA=\boldsymbol{p}$ и $DB=\boldsymbol{q}$. Тогда

$$\boldsymbol{ab}=0, \quad \boldsymbol{ph}=0, \quad \boldsymbol{qh}=0, \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{h}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{ab}=(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{h})(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{h})=\boldsymbol{pq}+\boldsymbol{ph}+\boldsymbol{qh}+\boldsymbol{h}^2,$$

откуда

$$\boldsymbol{pq}+\boldsymbol{h}^2=0.$$

А так как $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ направлены в противоположные стороны, то

$$h^2=p\cdot q,$$

где, как обычно, через p, q, h обозначены длины векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{h}$. Итак, нами снова доказана теорема о квадрате высоты прямоугольного треугольника.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПИФАГОРОВА РАВЕНСТВА

1. При вычислении одних геометрических величин с помощью других на основании равенства Пифагора

$$a^2+b^2=c^2$$

мы сразу же сталкиваемся с квадратными радикалами. Начнем с одного важного замечания, относящегося к этим радикалам. Ясно, что такие выражения, как $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$, не могут быть целыми числами. Но не будут ли они дробными? Чтобы сразу же исключить подобное предположение, рассмотрим, например, $\sqrt{2}$. Предположим, что

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

где дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Возведя обе части равенства в квадрат и освобождаясь от знаменателя, получим

$$2q^2=p^2,$$

откуда следует, что p— четное число. Но тогда p^2 делится на 4. Сократив обе части на 2, замечаем, что q^2, а следовательно, и q также четны. Но это противоречит предположению, что дробь $\frac{p}{q}$ несократима. ⟨Вообще, *если корень квадратный из целого числа не есть целое число, то он не может быть и рациональной дробью.*⟩

Упражнение 39. Докажите, что $\sqrt{3}$ не может равняться дроби $\frac{p}{q}$.

2. Сейчас мы собираемся привести некоторые примеры вычислений с помощью теоремы Пифагора. При этом мы далеки от того, чтобы пытаться составить обстоятельный или в каком-либо смысле полный перечень всех случаев, в которых наше предложение находит практические приложения,— это вообще вряд ли было бы возможно. Если игнорировать тригонометрию, то область применения пифагорова равенства вообще не может быть указана с достаточной полнотой.

Здесь мы не будем решать такие задачи, какие решал некий профессор математики из юмористического журнала. Этому профессору предложили кровать, которая оказалась ему мала. Профессор измерил ее длину a и ширину b, установил при помощи вычисления с точностью до миллиметров, что его собственная длина меньше, чем $\sqrt{a^2+b^2}$, и тогда, убежденный в пользе математики вообще и теоремы Пифагора в частности, лег на свою кровать *по диагонали*.

3. Воспользуемся прежде всего возможностями, которые дает теорема Пифагора для вычисления длин отрезков некоторых известных нам фигур.

Диагональ d квадрата со стороной a можно рассматривать как гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом a. Таким образом, $d^2=2a^2$, откуда:

$$d=\sqrt{2}a.$$

Упражнение 40. В стандартных форматах чертежных листов ширина относится к длине так, как сторона квадрата относится к его диагонали. Ширина листа равна 420 *мм*. Найдите его длину.

Упражнение 41. Из листа данного формата получают 2 листа меньшего формата, деля большую сторону его пополам. Составьте перечень стандартных форматов, исходя из листа размером 841×1188.

Диагональ d прямоугольника со сторонами a и b вычисляется подобно тому, как вычисляется гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b.

Мы имеем

$$d^2=a^2+b^2$$

и, следовательно,

$$d=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Высота h равностороннего треугольника со стороной a может рассматриваться как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого a, а другой катет $\frac{a}{2}$ (понятно, что вместо «высота» в данном случае можно сказать «биссектриса», или «медиана», или «перпендикуляр, восставленный к стороне в ее середине»). Таким образом, имеем

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

или

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

Отсюда вытекает

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a.$$

Еще один последний пример из планиметрии! На рис. 57 изображена трапеция $ABB'A'$ с двумя прямыми углами при вершинах A и B. Пусть $AA'=a$, $BB'=b$, $AB=c$ и $A'B'=c'$. В этом случае иногда говорят, что отрезок AB является **проекцией** отрезка $A'B'$. Напишем два выражения для сторон c и c' через остальные стороны. Прямая $A'C$, проведенная через A' параллельно AB, отсекает прямоугольный треугольник $A'CB'$, гипотенуза которого равна c', а катеты c и $(b-a)$. Таким образом,

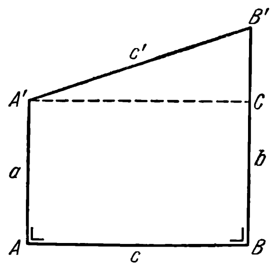

Рис. 57.

$$c' = \sqrt{c^2 + (b-a)^2}$$

и

$$c = \sqrt{c'^2 - (b-a)^2}.$$

Пользуясь этими формулами, можно находить отрезок по его проекции на прямую, и наоборот, если при этом известна разность $b-a$ расстояний концов отрезка от прямой.

4. Возможности применения теоремы Пифагора к вычислениям не ограничиваются планиметрией; мы сейчас перейдем к пространственным телам и рассмотрим некоторые простейшие из них. На рис. 58 изображен *куб*, внутри которого проведена диагональ d, являющаяся одновременно гипотенузой прямоугольного треугольника, заштрихованного на рисунке. Катетами треугольника служат ребро куба и диагональ квадрата, лежащего в основании (как указывалось в предыдущем пункте, длина этой диагонали равна $\sqrt{2}a$). Отсюда имеем

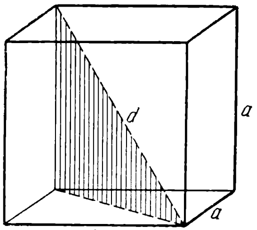

Рис. 58.

$$d^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2,$$
$$d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

и, окончательно,

$$d = \sqrt{3}a.$$

Рассуждение, подобное этому, можно провести и для плиты (*прямоугольного параллелепипеда*) с ребрами a, b и c и получить для диагонали выражение

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Упражнение 42. Докажите последнюю формулу для длины диагонали прямоугольного параллелепипеда.

Исследуем *пирамиду*, например, такую, в основании которой лежит квадрат и высота которой проходит через центр этого квадрата (правильная четырехугольная пирамида). Пусть сторона квадрата a, а высота пирамиды h. Чему равна длина s боковых ребер пирамиды? — Вот наш первый вопрос. Эти ребра (рис. 59) будут гипотенузами прямоугольных треугольников, у которых один из катетов — высота h, а другой — половина диагонали квадрата, т. е. $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$. Вследствие этого имеем:

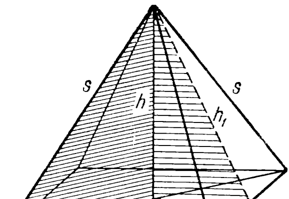

Рис. 59.

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}.$$

Затем мы можем вычислить высоту h_1 боковых граней. В прямоугольном треугольнике, один из катетов которого равен h, а другой $\frac{a}{2}$, высота h_1 будет гипотенузой. Поэтому

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}.$$

Упражнение 43. Вычислите боковую поверхность пирамиды.

5. Возможно, некоторые читатели сочтут наши приложения теоремы Пифагора сугубо теоретическими. Это — большая ошибка! Если, например, рассматривать нашу четырехугольную пирамиду как крышку башни (или палатки), то в первом нашем вопросе речь идет о том, какой длины нужно сделать боковые ребра, чтобы при данной площади чердака была выдержана предписанная высота крыши, а вопрос о величине боковой поверхности должен интересовать, например, кровельщика при подсчете стоимости кровельных работ.

Заметим, что расчет площади кровли можно сильно упростить, если воспользоваться одним очень простым правилом, справедливым во всех случаях, когда все скаты крыши, сколько бы их ни было, имеют одинаковый уклон. Оно гласит: чтобы найти поверхность крыши, все скаты которой имеют равный уклон, нужно умножить перекрываемую площадь на длину какого-либо стропила и разделить полученное произведение на проекцию этого стропила на перекрываемую площадь. А как определит «стропила» геометр?

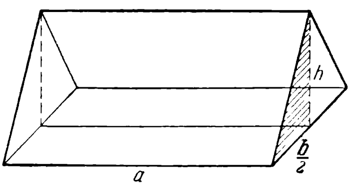

Рис. 60.

Упражнение 44. Проверьте это правило на двухскатной крыше (рис. 60); на пирамидальной (рис. 59); на четырехскатной (рис. 61); на конусообразной.

Упражнение 45. Докажите последнее предложение в общем виде.

Упражнение 46. Как можно сформулировать то же правило, если вместо отношения длины стропила к его проекции ввести уклон крыши?

6. В зданиях готического и романского стиля верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рис. 62 представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его весьма прост: из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны 1) ширине окна b для наружных дуг и 2) половине ширины, т. е. $\frac{b}{2}$ — для внутренних. Остается еще полная окружность, касающаяся четырех

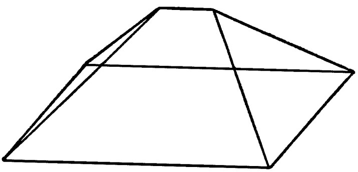

Рис. 61.

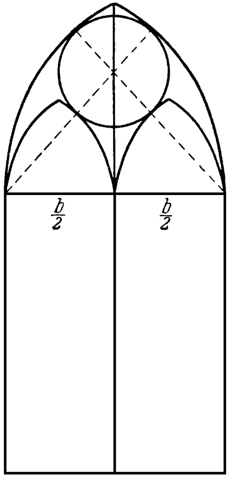

Рис. 62.

дуг. Так как она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е. $\frac{b}{2}$ и, следовательно, радиус равен $\frac{b}{4}$. А тогда становится ясным и положение ее центра.

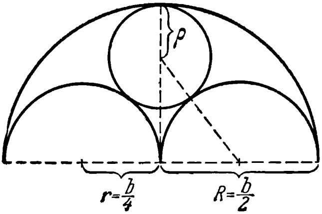

Рис. 63.

Упражнение 47. Циркулем и линейкой начертите окно в масштабе 1 : 50, если ширина окна равна $b=3$ *м*.

7. В рассмотренном примере радиусы находились без всяких затруднений. В других аналогичных примерах могут потребоваться вычисления; покажем, как применяется в таких задачах теорема Пифагора. В романской архитектуре часто встречается мотив, представленный на рис. 63. Если b по-прежнему обозначает ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны $R=\frac{b}{2}$ и $r=\frac{b}{4}$. Радиус ρ внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. 62 пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна $\frac{b}{4}+\rho$, один катет равен $\frac{b}{4}$, а другой $\frac{b}{2}-\rho$. По теореме Пифагора имеем:

$$\left(\frac{b}{4}+\rho\right)^2=\left(\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\rho\right)^2$$

или

$$\frac{b^2}{16}+\frac{b\rho}{2}+\rho^2=\frac{b^2}{16}+\frac{b^2}{4}-b\rho+\rho^2,$$

откуда

$$\frac{b\rho}{2}=\frac{b^2}{4}-b\rho.$$

Разделив на b и приводя подобные члены, получим:

$$\frac{3}{2}\rho=\frac{b}{4}, \qquad \rho=\frac{b}{6}.$$

Упражнение 48. Постройте циркулем и линейкой чертеж, изображенный на рис. 63.

8. В § 3 мы видели, что теорема Пифагора является одним из важных, если не самым важным предложением теории площадей. В этой главе мы рассмотрели ее с другой стороны. Обнаружилось, что эта теорема является основным инструментом при геометрических вычислениях.

Можно считать, что первый кризис в математической науке связан с поразительным открытием, обнаружившим, что в некоторых достаточно простых случаях невозможно обойтись первоначальным понятием о числе, охватывающим целые и дробные числа. Возможно, Пифагор и не открыл первым теорему, названную его именем, но ему и его школе принадлежит та заслуга, что они первыми осознали этот кризис, а может быть, и указали путь к его преодолению.

§ 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

1. Теорема Пифагора устанавливает зависимость между сторонами прямоугольного треугольника; пользуясь ею, можно вычислить по двум известным сторонам неизвестную третью. Иными словами, каждая сторона прямоугольного треугольника есть функция двух других.

Прежде чем заняться этой функцией, мы рассмотрим одну простую задачу, тесно связанную с этой функцией. Пусть одна из сторон имеет постоянное значение (постоянную длину) a; вторая сторона пусть изменяется — ее мы будем считать независимой переменной x; третью сторону — зависимую переменную y — нам надо определить.

Разберем сначала три задачи:

1) Как изменяется гипотенуза, когда один катет изменяется, а другой остается постоянным;

2) Как изменяется катет, когда гипотенуза изменяется, а другой катет остается постоянным;

3) Как изменяется катет, если другой катет изменяется, а гипотенуза остается постоянной?

2. Начнем с первого вопроса. Один из катетов, который принимается за независимое переменное, мы обозначим через x, гипотенузу — через y, другой катет, который считается постоянным, обозначим через a. В нашем примере мы положим эту величину равной четырем каким-либо единицам длины, скажем, 4 *см*.

По теореме Пифагора имеем

$$y^2 = x^2 + a^2,$$

откуда после извлечения корня получим:

$$y = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Отрицательного значения корня мы не принимаем во внимание, так как длина отрезка не может быть отрицательной.

Теперь для каждого x можно вычислить соответствующее значение y.

Мы получим следующую таблицу:

$$x=1, \quad y=\sqrt{17}=4{,}123;$$
$$x=2, \quad y=\sqrt{20}=4{,}472;$$
$$x=3, \quad y=\sqrt{25}=5{,}000;$$
$$x=4, \quad y=\sqrt{32}=5{,}657;$$
$$x=5, \quad y=\sqrt{41}=6{,}403;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

⟨Эти квадратные корни можно вычислить по известным правилам; проще, однако, сразу выписать их из какой-либо таблицы квадратных корней.⟩ Мы здесь ограничились значениями корней с тремя десятичными знаками.

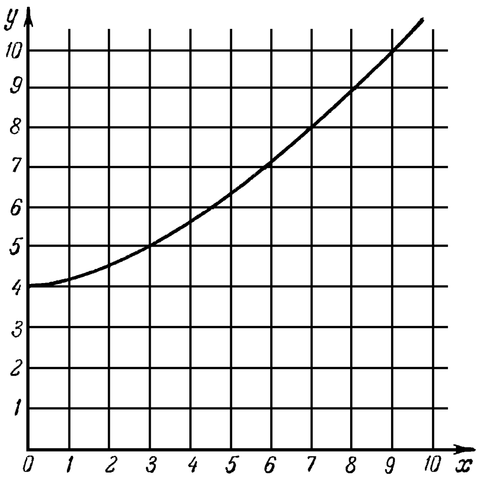

Рис. 64.

Рассматривая найденные значения y, мы уже можем составить понятие о ходе изменения функции. Он станет особенно наглядным, если изобразить эту функцию графически (рис. 64).

Возьмем кусок миллиметровой бумаги или лист бумаги в клетку из школьной тетрадки и проведем две взаимно перпендикулярные линии — оси координат. От точки их пересечения — начала координат — на одной оси вправо, а на другой — вверх отложим единицы масштаба, например сантиметры. Горизонтальную прямую назовем осью x, перпендикулярную к ней прямую — осью y. Далее поступим так. Из точки оси x, которой приписано значение 1, откладываем вверх по вертикали, т. е. параллельно оси y, отрезок $y=4{,}123$, соответствующий значению $x=1$. Так же откладываем значения y, соответствующие другим значениям x. Полученные таким образом точки наглядно представляют зависимость y от x. По ним удобно следить за характером возрастания y; можно, например, заметить, что с возрастанием x возрастание y становится все более быстрым.

До сих пор мы вычисляли нашу функцию, а затем строили ее по точкам, отвечающим лишь целочисленным значениям x. Но можно, конечно, вычислить значения y для дробных x, например, $x=1{,}1$ или $x=1{,}2$ и т. д. Соответствующие точки образуют в своей совокупности линию, которая изображена на рис. 64.

Упражнение 49. Значения y можно найти также при помощи построения. Как проще всего это сделать? Постройте таким способом значения y, отвечающие $x=0{,}5$; $1{,}5$; $2{,}5$ и т. д.

Кривая начинается точкой, отвечающей значению $x=0$. В этом случае нет никакого прямоугольного треугольника и невозможно вычисление гипотенузы по теореме Пифагора. Это значение x можно рассматривать лишь как предельный случай, когда один катет имеет постоянное значение 4, а другой становится все меньше и меньше, и длина гипотенузы все более и более приближается к 4. Таким образом, ясно, почему на нашем графике при $x=0$ мы откладываем значение $y=4$.

Кривая, представляющая графически функцию

$$y=\sqrt{x^2+a^2},$$

является частью *равносторонней гиперболы*.

3. Перейдем к изучению вопроса о том, как изменяется один катет, когда другой остается постоянным, а гипотенуза изменяется. Здесь независимой переменной будет гипотенуза, обозначим ее через x; зависимую же переменную, т. е. катет — через y. Если постоянное значение другого катета обозначить через a, то будем иметь

$$x^2=y^2+a^2$$

или

$$y=\sqrt{x^2-a^2},$$

причем корень опять берется в арифметическом смысле.

Чтобы изобразить ход изменения этой функции, мы снова составим таблицу. В противоположность предыдущему случаю теперь нельзя выбирать x совсем произвольно. Например, взяв $a=4$, как в предыдущем параграфе, мы при $x=2$ натолкнулись бы на значение

$$y=\sqrt{4-16}=\sqrt{-12},$$

т. е. получили бы для y мнимое значение.

Для того чтобы под корнем стояло положительное число, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x>a$; заметим, что при $x=a$ для y получается вещественное значение $y=\sqrt{0}=0$. Неравенство $x>a$ легко объяснить геометрически: ведь x— гипотенуза, а такого прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза меньше катета, не существует; случай же, когда гипотенуза равна одному из катетов ($x=a$), имеет смысл лишь как предельный случай, когда другой катет равен нулю.

Составим теперь таблицу:

$$x=4, \quad y=\sqrt{0}=0{,}000;$$
$$x=5, \quad y=\sqrt{9}=3{,}000;$$
$$x=6, \quad y=\sqrt{20}=4{,}472;$$
$$x=7, \quad y=\sqrt{33}=5{,}745;$$
$$x=8, \quad y=\sqrt{48}=6{,}928;$$
$$x=9, \quad y=\sqrt{65}=8{,}062;$$

. . . .

Графическое изображение этих величин, которые мы можем вычислять с любой точностью и число которых можно увеличивать, вводя промежуточные дробные значения x, дает кривую, изображенную на рис. 65.

Упражнение 50. Из таблицы сразу можно заметить, что функция y при возрастании x замедляет свой рост. Продолжите

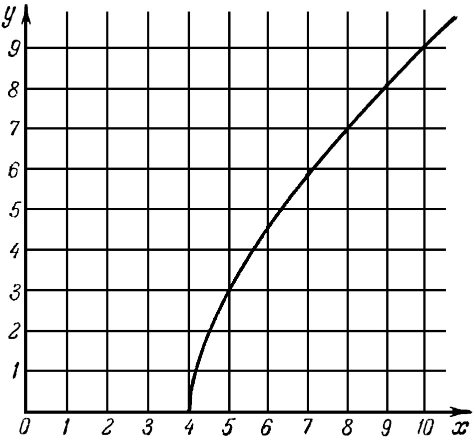

Рис. 65.

таблицу до $x=15$ и составьте разности между каждыми двумя последовательными значениями y (для целых x). Какую роль играют эти разности в графическом изображении функции?

4. Сравнивая только что полученный график с графиком предыдущего пункта, мы можем обнаружить некоторое сходство между ними. Остановимся немного на этом. Прежде всего заметим, что каждая из двух рассматриваемых функций

$$y=\sqrt{x^2+a^2} \quad \text{и} \quad y=\sqrt{x^2-a^2}$$

может быть получена из другой посредством замены x на y и y на x. Если такую замену мы произведем в первом выражении, то получим

$$x=\sqrt{y^2+a^2};$$

решая затем это уравнение относительно y, мы получим вторую функцию. Это должно быть сразу ясно, потому что в первом случае мы обозначили гипотенузу через y, а катет — через x, а во втором случае были приняты обратные обозначения. В таких случаях говорят, что одна из функций обратна другой; мы сначала рассматривали гипотенузу как функцию катета, а потом катет как функцию гипотенузы.

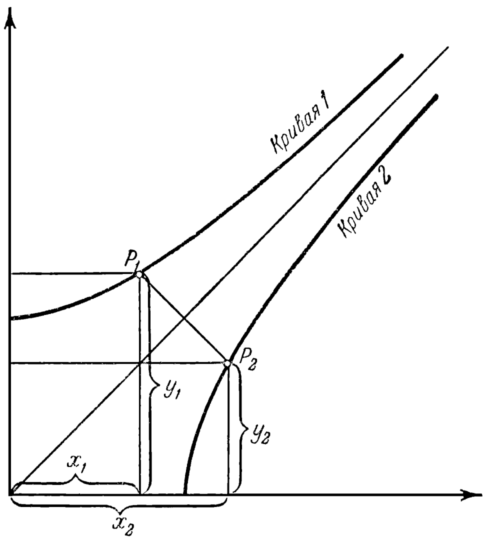

Рис. 66.

В чем, однако, геометрический смысл этого факта? На рис. 66 нанесены обе кривые рис. 64 и 65. На кривой *1* (так мы будем называть первую из рассмотренных кривых) возьмем точку P_1, которая соответствует некоторому значению x_1 и связанному с ним значению y_1. Из точки P_1 опустим перпендикуляр на биссектрису угла между осями и продолжим его за биссектрису на равную ему длину; другими словами, найдем зеркальное отражение точки P_1 от этой биссектрисы. Мы обязательно попадем при этом в некоторую точку второй кривой P_2. Почему?

Из рис. 66 видно сразу, что для этой точки P_2 значения y_2 и x_2 равны соответственно x_1 и y_1. Поскольку точка P_1 лежит на кривой *1*, то

$$y_1=\sqrt{x_1^2+a^2},$$

откуда

$$x_1=\sqrt{y_1^2-a^2}.$$

Заменяя в последнем выражении x_1 на y_2, а y_1 на x_2, мы находим

$$y_2=\sqrt{x_2^2-a^2},$$

а это означает, что точка P_2, которой соответствуют значения x_2, y_2, лежит на кривой *2*. Точка P_1 выбиралась нами произвольно, т. е. доказанное справедливо для всех точек; следовательно, *кривая* 2 *может быть получена из кривой* 1 *зеркальным отображением ее от биссектрисы угла между осями координат.*

5. Нам остается исследовать еще третий случай. Независимой переменной x теперь должен стать катет, зависимой переменной y — другой катет, гипотенуза же сохранит постоянное значение c.

По теореме Пифагора

$$x^2+y^2=c^2,$$

откуда

$$y=\sqrt{c^2-x^2}.$$

И в этом случае мы составим таблицу, приняв, например, $c=5$. Давая x целочисленные значения, мы получим соответствующие значения y:

$$x=0, \quad y=\sqrt{25}=5{,}000;$$
$$x=1, \quad y=\sqrt{24}=4{,}899;$$
$$x=2, \quad y=\sqrt{21}=4{,}583;$$
$$x=3, \quad y=\sqrt{16}=4{,}000;$$
$$x=4, \quad y=\sqrt{9}=3{,}000;$$
$$x=5, \quad y=\sqrt{0}=0{,}000.$$

Значения x, превышающие 5, мы отбрасываем, так как они приводят к отрицательным подкоренным выражениям.

Упражнение 51. Вычислите значения функции y при $x=0,1$; $0,2$; $0,3$, а также при $x=4,9$; $4,8$; $4,7$, и найдите разности полученных значений. Объясните результаты на графике.

Как и ранее, нанесем точки, отвечающие полученным значениям x и y, на миллиметровую бумагу (рис. 67). Если соединить их плавной кривой, то она очень напомнит четверть окружности. Действительно ли это окружность? Если это так, то ее радиус должен быть равен c, т. е. в нашем случае 5. Начертим такую окружность. Мы убедимся, что она проходит через нанесенные нами точки. Но ведь не исключено, что окружность и кривая могут совпадать только в этих точках, а между ними кривая образует, например, волны вверх и вниз. Мы можем легко решить этот вопрос.

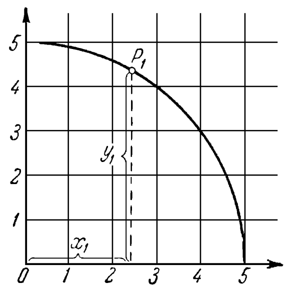

Рис. 67.

Возьмем на окружности произвольную точку P_1 и опустим из нее перпендикуляр на ось x. Обозначим отрезок между точкой P_1 и основанием перпендикуляра через y_1, а отрезок между основанием перпендикуляра и началом координат через x_1. По теореме Пифагора мы будем иметь

$$x_1^2+y_1^2=c^2,$$

откуда

$$y_1=\sqrt{c^2-x_1^2}.$$

Итак, точка P_1 лежит на кривой. Доказанное нами справедливо для любой точки четверти окружности, поэтому кривая и окружность совпадают.

6. Теперь можно поставить вопрос, как один элемент прямоугольного треугольника выражается в виде функции от *двух других*. Возьмем сначала в качестве независимых переменных катеты и обозначим их через x и y; тогда гипотенуза определяется функцией

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Для графического представления на плоскости такой функции двух переменных наши прежние методы непригодны. Чтобы дать геометрический образ зависимости, выражаемый нашей функцией, необходимо использовать пространство.

Рассмотрим плоскость с заданной на ней системой координат. Каждой точке P_1 из квадранта, заключенного между правой полуосью x и верхней полуосью y, соответствует вполне определенная пара значений x_1, y_1, и обратно. Расстояние этой точки P_1 от начала координат равно

$$z_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

Это расстояние мы отложим на перпендикуляре к рассматриваемой плоскости, восставленном в точке P_1; обозначим полученный отрезок через P_1P. Теперь каждой точке нашего квадранта можно поставить в соответствие точку P, являющуюся концом отрезка перпендикуляра, восставленного в этой точке. Совокупность всех таких концов составит поверхность, которая служит геометрическим изображением нашей функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Что же это будет за поверхность?

Когда хотят изобразить какую-нибудь поверхность, скажем, рельеф местности, изобилующей горами и долинами, то чаще всего прибегают к методу построения «кривых равной высоты», т. е. кривых, соединяющих точки с одинаковой высотой, отсчитываемой от какого-нибудь начального положения, например, от уровня моря Эти кривые называются *изогипсами.* На топографических картах изогипсы наносятся в виде ряда кривых, соединяющих точки, расположенные, например, на высоте 100 *м* от уровня моря, 105 *м* и т. д. Как же выглядят изогипсы у нашей поверхности?

Построим изогипсы для высоты 10, измеренной в тех же единицах, что и x и y. Для всех точек этой кривой, вид которой нам пока неизвестен, $z=10$. Таким образом, все точки ее удовлетворяют уравнению

$$10=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad 100=x^2+y^2,$$

откуда

$$y=\sqrt{100-x^2}.$$

Как мы знаем из предыдущего пункта, точки x и y основной плоскости, удовлетворяющие этому уравнению, лежат на окружности (точнее, на четверти окружности) радиуса 10. Если мы из точек окружности восставим перпендикулярные к ее плоскости отрезки длиною 10, то верхние концы этих отрезков образуют также окружность. То, что мы доказали для одной из изогипс, будет справедливо и для остальных: все они — окружности, или, точнее говоря, четверти окружностей. Самая низкая точка нашей поверхности лежит в начале координат, так как при $x=0$ и $y=0$ имеем $z=0$. Если же мы в основной плоскости будем удаляться от начала координат, то и высота точек поверхности над нею будет возрастать. Следовательно, поверхность представляет собою четверть некоторого *кратера*, вырезанную плоскостями zy и zx.

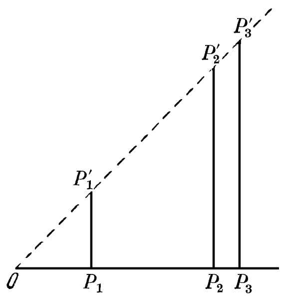

Рис. 68.

Всего того, что мы узнали до сих пор, еще недостаточно для выяснения вида поверхности. Возникает вопрос, каков *скат* этого кратера, меняется ли угол его наклона или остается постоянным? И если он остается постоянным, то какова его величина?

Через точку $O=(0,0)$ основной плоскости проведем луч и отметим на нем ряд точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Восставим над этими точками перпендикуляры к основной плоскости до пересечения в точках $P_1', P_2', P_3', \ldots$ с нашей поверхностью. Проведем через луч перпендикулярно к основной плоскости секущую плоскость, в которой находятся перпендикуляры P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3', ... Линия $OP_1'P_2'P_3'$ пересечения этой плоскости с нашей поверхностью (рис. 68) дает нам представление о скате кратера. Она показывает, что угол наклона остается постоянным, причем в силу того, что треугольники OP_1P_1', OP_2P_2',... прямоугольные и равнобедренные, этот угол равен $45°$. То, что справедливо для одного луча, проходящего через точку O, будет справедливо и для всех остальных лучей нашей основной плоскости, проходящих через точку O. Таким образом, поверхность в каждой своей точке имеет одинаковый скат с углом наклона $45°$.

Какая же это все-таки поверхность? Она нам хорошо известна! Это четвертая часть боковой поверхности обычного конуса. Его осью является ось z; он расположен вершиной вниз и опирается ею на основную плоскость в начале координат; половина угла при вершине равна $45°$. Мы можем себе представить, что он образован вращением биссектрисы угла xOz вокруг оси z (рис. 69).

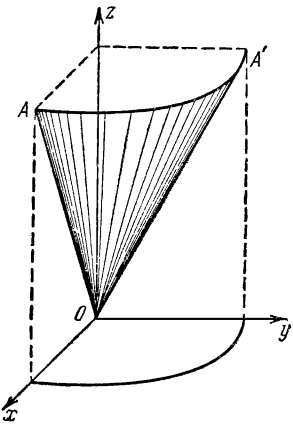

Рис. 69.

7. Подобным же образом можно найти выражение катета z как функции гипотенузы x и катета y в виде

$$z=\sqrt{x^2-y^2}.$$

Теперь нам нужно отыскать поверхность, являющуюся геометрическим образом этой функции. Прежде всего, эта поверхность обладает тем свойством, что при $x=y$, т. е. в точках биссектрисы угла между координатными осями, все значения z равны нулю; следовательно, поверхность пересекает основную плоскость по этой биссектрисе. Над половиной квадранта, заключенной между биссектрисой и осью y, точек нашей поверхности нет вовсе, так как для всех точек этой области $y>x$, и поэтому подкоренное выражение отрицательно.

Мы не будем подробно исследовать эту поверхность, а прямо сообщим результат, предоставляя вывод его читателю. Искомой поверхностью является четвертая часть боковой поверхности конуса, у которого половина угла при вершине равна 45° (как и в предыдущем случае), но осью служит ось x. Проще всего представить себе, что эта поверхность получилась от вращения вокруг оси x биссектрисы угла между осью x и осью y.

Упражнение 52. Исследуйте изогипсы этой поверхности. Какие высоты x соответствуют точкам оси x. Исследуйте значения z, соответствующие какой-либо прямой, перпендикулярной оси x. Каким путем можно узнать, что половина угла при вершине конуса равна 45°?

Если бы через x мы обозначили катет, а не гипотенузу, а через y гипотенузу, а не катет, то получили бы такую же коническую поверхность, как и в предыдущем случае с той лишь разницей, что осью вращения была бы ось y.

Упражнение 53. Перестановке переменных x и y в пространстве соответствует зеркальное отражение от некоторой плоскости. Что это за плоскость?

8. Читатель, знакомый не только с встречавшимися нам окружностью, гиперболами и конусом, а и с другими кривыми и поверхностями, может отметить в качестве недостатка изложения то, что мы всюду рассматривали только части кривых и поверхностей, вместо того, чтобы брать их как целое.

До сих пор мы считали величину отрезка положительной, и поэтому x, y и z могли принимать только положительные значения. Если же рассматривать выражения, которые мы получали из теоремы Пифагора, просто как соотношения между числами (а не длинами), то, например, в равенстве

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

с которым мы встречались в п. **6**, все три переменных величины могут принимать и отрицательные значения, так как их квадраты будут всегда положительны; таким образом, ограничение, накладываемое на знак, можно отбросить. Выполнив соответствующие вычисления и отразив результаты их на графиках, мы дополним кривые до полных окружностей и гипербол, а часть конической поверхности до целой.

Упражнение 54. Дополните до целых кривые в случаях, разобранных в пп. 2, 3 и 5 (для этого надо рассмотреть, кроме положительных значений x и y, также и отрицательные); произведите соответствующие вычисления и отразите их графически.

Упражнение 55. Как будет выглядеть общая поверхность, аналогичная рассмотренной в п. 6, но охватывающая положительные и отрицательные значения переменных x и y?

Подытожить результаты этого параграфа можно так: во всех рассмотренных случаях мы установили, что геометрическим представлением равенства Пифагора, рассматриваемого как функция двух переменных, является прямой круговой конус, угол при вершине которого (угол раскрытия — наибольший угол между двумя какими-либо образующими) — прямой. Если же рассматривать одну из величин как функцию другой при постоянной третьей, то мы получим «коническое сечение», например, изогипсу соответствующего конуса, расположенную в плоскости, высота которой над координатной плоскостью равна заданной постоянной. Такими сечениями могут быть окружность и равносторонняя гипербола.

§ 7. ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА*)

1. Три *целых положительных* числа x, y и z, удовлетворяющие «уравнению Пифагора»

$$x^2+y^2=z^2,$$

называют пифагоровыми числами. С простейшим примером пифагоровых чисел мы уже знакомы: нам встречался треугольник со сторонами 3, 4 и 5. В самом деле,

$$3^2+4^2=5^2.$$

Спрашивается, существуют ли другие тройки пифагоровых чисел и если существуют, то какие именно?

Сразу очевидно, что если 3,4 и 5 — пифагоровы числа, то это же можно сказать о числах $2\cdot3$, $2\cdot4$, $2\cdot5$, затем о числах $3\cdot3$, $3\cdot4$, $3\cdot5$ и т.д. Вообще, если a, b, c — тройка пифагоровых чисел, а m — любое целое положительное

*) См. также книгу В. Серпинского, Пифагоровы треугольники, М., 1959, широко дополняющую содержание этого параграфа.

число, то и числа ma, mb, mc также представляют собою пифагорову тройку. Действительно, если

$$a^2+b^2=c^2$$

и следовательно,

$$m^2(a^2+b^2)=m^2c^2,$$

то и

$$(ma)^2+(mb)^2=(mc)^2.$$

Таким образом, каждая пифагорова тройка дает бесчисленный ряд других; для этого только нужно каждое из чисел тройки умножить на одно и то же целое положительное число. Все эти тройки порождаются одной тройкой, числа которой не имеют общего делителя. Мы назовем такую тройку основной, а все остальные — производными. Так, например, числа 3, 4, 5 служат основной тройкой пифагоровых чисел, а числа 6, 8, 10 — производной тройкой.

Мы только что сказали, что *три* числа основной тройки не имеют общего делителя; однако достаточно знать, что какие-либо *два* числа из этих трех не имеют общего делителя. Действительно, если считать, что два числа a и b из какой-либо пифагоровой тройки имеют общий делитель f, то их можно представить в виде

$$a=fa_1; \qquad b=fb_1,$$

а тогда из равенства

$$a^2+b^2=c^2$$

вытекает, что

$$f^2(a_1^2+b_1^2)=c^2,$$

т. е. число c также имеет f своим делителем.

2. Напишем ряд из квадратов целых чисел и составим разности каждых двух последовательных квадратов; мы получим ряд нечетных чисел:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19. \end{array}$$

В общем виде можно записать

$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1,$$

т. е. разность между «$n+1$»-м и «n»-м квадратом равна нечетному числу $2n+1$. Геометрическое объяснение этому дается на рис. 70: если сторону квадрата, равную n единицам длины, увеличить на одну единицу и на увеличенной стороне построить квадрат, то его площадь, равная $(n+1)^2$ кв. единиц, будет на $2n+1$ кв. единиц больше, чем площадь первоначального квадрата.

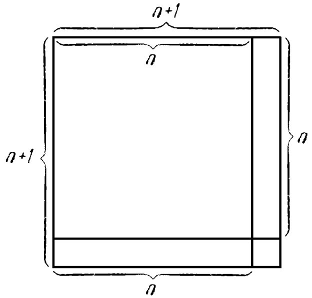

Рис. 70.

Среди нечетных чисел, которые можно, как мы видели выше, рассматривать как разности последовательных квадратов, находятся и все нечетные квадраты, т. е. числа

$$9,\ 25,\ 49,\ 81,\ 121 \text{ и т. д.}$$

Обозначая нечетный квадрат через $2n+1$, мы получаем следующие значения n, отвечающие этому ряду:

$$4,\ 12,\ 24,\ 40,\ 60,\ \ldots$$

Во всех этих случаях числа n и $n+1$, а также число, квадрат которого равен $2n+1$, составляют пифагорову тройку; в самом деле

$$(n+1)^2=n^2+(2n+1),$$

как это вытекает из тождества, написанного выше.

Первые примеры нечетных квадратов дают следующие тройки:

$$\begin{gathered}5^2=4^2+3^2,\\13^2=12^2+5^2,\\25^2=24^2+7^2,\\41^2=40^2+9^2,\\61^2=60^2+11^2.\end{gathered}$$

Первая тройка известна всем. Вторая в виде производной от нее тройки

$$39^2=36^2+15^2$$

встречается уже в IV—V в. до н. э. в одном индусском сочинении; там же приводится и третья. Все тройки пифагоровых чисел, получаемые этим путем, обязательно должны быть основными, так как соседние целые положительные числа n и $n+1$ не могут иметь общего делителя, отличного от единицы.

Поскольку наш ряд можно продолжить, мы тем самым доказали, что существует *бесконечное множество* основных троек пифагоровых чисел.

3. Теперь спрашивается, все ли основные пифагоровы тройки мы получили с помощью этого метода, или имеются еще и другие? Все найденные нами основные тройки имели ту особенность, что они содержали два последовательных числа. Это было связано с тем, что разности квадратов чисел, которые мы подбирали с тем, чтобы получить нечетный квадрат, всегда были разностями между двумя последовательными квадратами.

Сейчас мы будем составлять разности не между двумя последовательными квадратами целых чисел, а между двумя квадратами, следующими друг за другом с пропуском одного полного квадрата. Дополнив исходный ряд квадратов числом $0^2=0$, мы получим такой ряд разностей:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \\ & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & \end{array}$$

Все его члены состоят из чисел, кратных 4. И если это кратное четырем число в свою очередь есть квадрат, то оно порождает пифагорову тройку. Так, например, разности 16 соответствует пифагорова тройка 3, 4, 5; разность 36 порождает тройку 6, 8, 10, являющуюся производной от той же самой основной тройки. Мы видим, что при таком способе составления разностей получаются уже не только основные тройки. Ближайшую основную тройку

$$15,\ 8,\ 17$$

дает разность 64. Это совершенно новая для нас основная пифагорова тройка (впрочем, индусам она была уже известна). Таким путем можно получать все новые и новые основные тройки, но не это составляет нашу цель. Мы хотели лишь установить, что метод, указанный в предыдущем пункте, не позволяет получить в с е основные пифагоровы тройки, т. е. что намеченное там решение задачи о пифагоровых числах не полно. И мы это установили!

Упражнение 56. Продолжите ряд разностей. Найдите в общем виде зависимость между квадратом n^2, квадратом $(n+2)^2$ и их разностью.

Упражнение 57. Найдите с помощью общего правила (см. упражнение 56) ближайшую основную тройку, следующую за 15, 8, 17.

4. Попробуем теперь найти в с е решения уравнения Пифагора. Этого нельзя сделать, пользуясь нашим методом, даже в его расширенном виде; действительно, составляя разности через два, через три и т. д. квадрата, мы будем получать все новые и новые пифагоровы тройки.

Прежде чем приступить к поискам полного решения уравнения

$$x^2+y^2=z^2,$$

мы исследуем вопрос о четности и нечетности отдельных чисел тройки. Так как нас будут интересовать только основные тройки, то мы будем считать эти числа взаимно простыми; в частности, среди чисел x, y и z не может быть двух четных. Оказывается, однако, что числа x и y не могут быть одновременно нечетными. В самом деле, если бы это было так, что z было бы четным числом, скажем

$$z=2z_1.$$

А отсюда вытекало бы, что

$$z^2=4z_1^2,$$

т. е. что z^2 делится на 4 без остатка. То же самое должно относиться к сумме x^2+y^2, так как $x^2+y^2=4z_1^2$. Положим теперь

$$x=2p+1, \qquad y=2q+1,$$

тогда

$$x^2+y^2=4p^2+4p+1+4q^2+4q+1,$$

откуда сразу видно, что эта сумма при делении на 4 дает в остатке 2. Итак, доказано, что числа x и y не могут быть одновременно нечетными.

Мы теперь можем всегда считать, что x — нечетно, y — четно и, следовательно, z нечетно.

Упражнение 58. Может ли, наоборот, x быть четным, а y нечетным? Как мы должны понимать сделанное допущение?

5. Нашему уравнению можно придать и такой вид:

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y).$$

Обозначим $z+y$ через m, а $z-y$ через n, откуда вытекает, что

$$z=\frac{m+n}{2}, \qquad y=\frac{m-n}{2},$$

и поэтому

$$x^2=mn.$$

Заметим прежде всего, что оба числа m и n нечетны; действительно, если считать хотя бы одно из них четным, то x^2, а следовательно и x, также будет четным, а это противоречит сделанному предположению.

Числа m и n должны быть взаимно простыми. В самом деле, если бы у них был общий делитель t (число t не равно 2), то можно было бы положить

$$m=tm_1, \qquad n=tn_1,$$

а тогда вследствие равенств

$$z=\frac{m+n}{2}=t\frac{m_1+n_1}{2}, \qquad y=\frac{m-n}{2}=t\frac{m_1-n_1}{2}$$

и числа z и y также имели бы t своим делителем. Но это невозможно, так как числа y и z, как мы уже знаем, взаимно просты.

6. Покажем, что *если произведение двух взаимно простых целых чисел есть полный квадрат, то и каждое из этих чисел должно быть квадратом.* Так, например, если мы разложим число 36 на взаимно простые сомножители, то каждый из них должен быть квадратом. Действительно, разложение $4 \cdot 9$ именно такого рода и притом оно единственно, если не считать очевидного разложения $1 \cdot 36$.

Этот факт легко доказать в общем виде. В самом деле, квадрат целого числа содержит каждый простой множитель четное число раз; например:

$$30^2=900=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5.$$

Если теперь один из двух сомножителей, на которые мы разлагаем квадратное число, содержит некоторый простой множитель нечетное число раз (например, $18=2\cdot3\cdot3$), то другой сомножитель ($50=2\cdot5\cdot5$) обязательно тоже должен содержать этот простой множитель. Но это означает, что оба числа (в нашем случае — 50 и 18) имеют общий делитель. Обратно, два сомножителя, на которые разлагается полный квадрат, могут быть взаимно простыми лишь в том случае, если простые множители входят в каждый из них четное число раз, т. е. если эти два сомножителя сами являются квадратами.

Возвратимся теперь к нашему уравнению в его последней форме $x^2=mn$. Так как числа m и n взаимно простые, а их произведение есть квадрат, то эти числа m и n также должны быть квадратами; поэтому можно положить:

$$m=u^2,\ n=v^2,$$

где числа u и v нечетны и взаимно просты. Наше последнее равенство, запишется теперь в виде

$$x^2=u^2\cdot v^2,$$

откуда следует, что

$$x=u\cdot v. \tag{I}$$

Мы можем теперь выписать и выражения для y и z, заменив в полученных выше формулах числа m и n квадратами u^2 и v^2. Мы получим:

$$y=\frac{u^2-v^2}{2} \tag{II}$$

$$z=\frac{u^2+v^2}{2}. \tag{III}$$

7. Равенства (I), (II), и (III) дают *полное решение нашей задачи*. Мы пришли к выводу, что эти равенства необходимы для того, чтобы удовлетворялось уравнение

$$x^2+y^2=z^2. \tag{A}$$

Можно утверждать и обратное, т. е. что если u и v — какие угодно нечетные взаимно простые числа, причем $u>v$, то значения x, y и z, соответствующие им по формулам (I), (II) и (III), будут удовлетворять уравнению (А). Действительно,

$$(u\cdot v)^2+\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right)^2=\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2, \qquad \text{(Б)}$$

в чем можно сразу убедиться путем вычисления.

Мы попробуем применить этот способ для отыскивания тройки сравнительно больших пифагоровых чисел. Пусть $u=11$, $v=9$; соответствующие числа будут: $x=99$, $y=20$, $z=101$.

Как видно из уравнения (Б), ему могут удовлетворять и не взаимно простые числа u и v; однако они всегда порождают лишь производную пифагорову тройку.

Упражнение 59. Составьте список пифагоровых чисел, давая u и v все допустимые значения от 1 до 10.

Упражнение 60. Поясните несколькими примерами утверждение относительно производных троек, сделанное нами в конце этого пункта.

⟨Формулы (I), (II) и (III) являются основными в теории пифагоровых чисел. Наличие бесконечного множества пифагоровых троек (даже бесконечного множества основных троек) позволяет ставить задачи об отыскании пифагоровых чисел, удовлетворяющих еще тем или иным дополнительным условиям. Так, например, мы уже видели, что существует бесконечно много таких троек пифагоровых чисел, что в них *два числа из трех являются последовательными*. Можно также доказать, что существует бесконечно много таких троек пифагоровых чисел, что *одно из чисел является полным квадратом* (например, тройки 3, 4, 5; 7, 24, 25; 9, 40, 41;...); однако таких троек пифагоровых чисел, что сразу два из этих чисел являются квадратами, не существует вовсе (по поводу доказательства см. пп. 5—8 § 8). Самой знаменитой из задач такого рода является следующая (очень трудная!) задача Ферма: *найти такие тройки* (x, y, z) *пифагоровых чисел* (*где* $x^2+y^2=z^2$), *что числа* $x+y$ *и* z *являются полными квадратами*. Оказывается, имеется бесконечно много подобных пифагоровых троек, но все они состоят из очень больших чисел;

наименьшая такая тройка имеет вид *):

$$x=4\,565\,486\,027\,761,\qquad y=1\,061\,652\,293\,520,$$
$$z=4\,687\,298\,610\,289$$

(здесь $x+y=(2\,372\,159)^2$ и $z=(2\,165\,017)^2$).

Упражнение 61. Докажите, что если все стороны прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то площадь его делится на 6, а произведение длин всех сторон делится на 60.>

8. Некоторые читатели, возможно, задумаются над тем, как можно наглядно представить себе все множество пифагоровых чисел. Для этого могла бы пригодиться

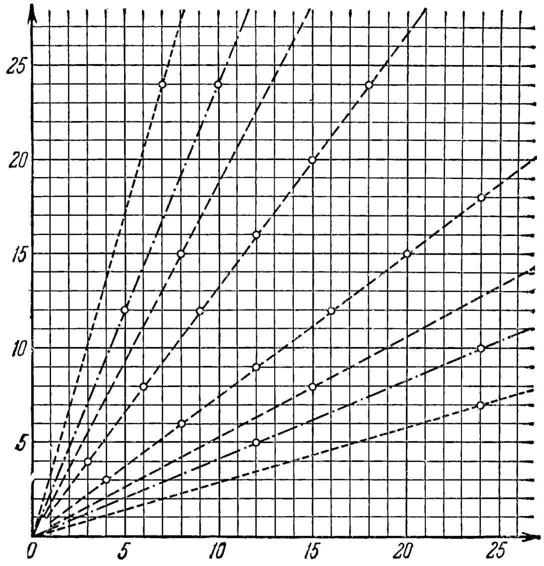

Рис. 71.

таблица, составленная на основании результатов упражнения 59. Можно также создать геометрическую схему распределения этих чисел. Выберем на плоскости систему координат (рис. 71) и на сетке, образуемой прямыми,

*) См., например, книгу В. Серпинского, указанную на стр. 82.

параллельными координатным осям и отвечающим целочисленным значениям x и y, отметим маленькими кружками известные нам решения уравнения

$$x^2+y^2=z^2.$$

При этом основная тройка пифагоровых чисел вместе со всеми полученными из нее производными тройками определит некоторый числовой луч, свой для каждой основной тройки. Чем дальше мы будем расширять наш чертеж (на рис. 71 мы дошли лишь до $x=25$, $y=25$), тем больше мы получим лучей.

Упражнение 62. Докажите, что все производные тройки лежат на том же луче, что и та основная тройка, из которой они получились.

Упражнение 63. Докажите, что чертеж, изображающий пифагоровы числа (рис. 71), симметричен относительно биссектрисы угла между координатными осями.

9. Вопросу о пифагоровых числах можно придать другую форму. Разделим обе части исходного уравнения

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

на z^2; тогда оно примет вид

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1. \tag{2}$$

Пользуясь последним равенством, сформулируем нашу задачу так: требуется найти все такие решения x_1 и y_1 уравнения

$$x_1^2+y_1^2=1, \tag{3}$$

которые можно записать в виде обыкновенных дробей, т. е. которые являются рациональными числами. Если, например, дроби

$$x_1=\frac{x}{z}, \quad y_1=\frac{y}{z}$$

(их, конечно, можно привести к одинаковому знаменателю) являются решением уравнения (3), то при этом удовлетворяются также равенства (2) и (1). Уравнение (3) можно очень просто истолковать геометрически: оно представляет собою не что иное, как уравнение окружности единичного радиуса (ср. § 6, п. 5). Таким образом, задаче о нахождении рациональных решений уравнения (1) геометрически соответствует *задача об отыскании точек окружности с рациональными координатами*. На рис. 72

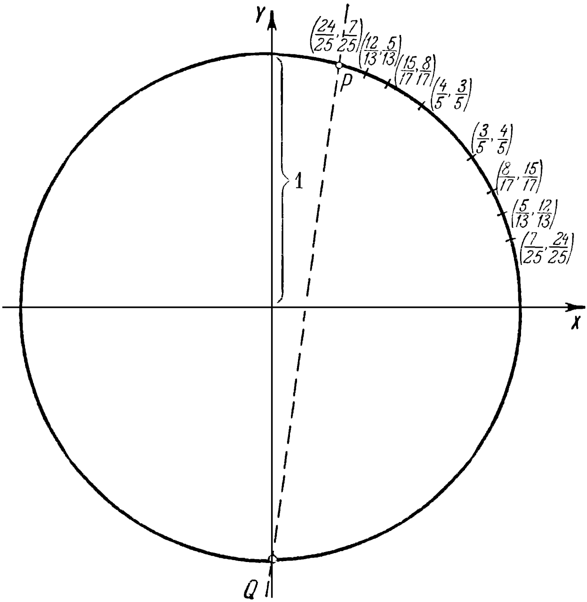

Рис. 72.

нанесен целый ряд таких точек; одна из них — точка P с координатами $\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$. То, что она лежит на единичной окружности, доказывается тождеством

$$\left(\frac{24}{25}\right)^2+\left(\frac{7}{25}\right)^2=1.$$

Упражнение 64. Для нанесения точек на рис. 72 мы использовали рис. 71. Каким путем это было выполнено?

Упражнение 65. Покажите, что как бы ни была мала дуга окружности, на ней найдутся точки с рациональными координатами.

⟨Новая формулировка задачи о пифагоровых числах позволяет также дать очень простой вывод основных формул (I)—(III) п. 6. Нам требуется указать метод, позволяющий находить все рациональные точки окружности $x^2+y^2=1$, т. е. точки окружности, имеющие рациональные координаты. Пусть P — одна такая точка; соединим ее с точкой $Q(0,-1)$ пересечения нашей окружности с осью y (рис. 72). Уравнение каждой прямой, проходящей через начало координат O (кроме оси y) можно записать в виде $y=kx$, где k — некоторое число (угловой коэффициент прямой); уравнение прямой, проходящей через Q, имеет вид

$$y+1=kx, \tag{*}$$

где число k также называется угловым коэффициентом. Заметим теперь, что если наша прямая пересекает окружность в рациональной точке $P(x, y)$, то ее угловой коэффициент k рационален (ибо в этом случае $k=\frac{y+1}{x}$, где x и y — рациональные координаты точки P). Обратно, если k рационально, то наша прямая пересекает окружность в рациональной точке P; это легко доказать непосредственной проверкой. В самом деле, нахождение точки пересечения окружности и прямой сводится к решению системы уравнений

$$x^2+y^2=1, \qquad y+1=kx,$$

которая может быть приведена к одному уравнению

$$\left(\frac{y+1}{k}\right)^2+y^2=1$$

или

$$(1+k^2)\,y^2+2y+1-k^2=0.$$

Отсюда имеем

$$y_1=\frac{k^2-1}{k^2+1}, \qquad y_2=-1$$

и, соответственно,

$$x_1=\frac{y_1+1}{k}=\frac{2k}{k^2+1}, \qquad x_2=\frac{y_2+1}{k}=0.$$

Итак, все рациональные точки окружности можно отыскать как точки пересечения окружности с такими прямыми (*), угловой коэффициент k которых рационален: $k=\frac{u}{v}$, где u и v—целые. Эти точки находятся по формулам

$$x_1=\frac{2k}{k^2+1}=\frac{2uv}{u^2+v^2}, \qquad y_1=\frac{k^2-1}{k^2+1}=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}. \qquad (**)$$

Легко видеть, что формулы (**) — это те же самые формулы (I)—(III), лишь записанные в несколько ином виде!⟩

10. Если два прямоугольных треугольника, стороны которых выражаются целыми числами и которые имеют по равному катету, приложить этими катетами друг к другу, то получится треугольник, все стороны которого выражаются целыми числами, и площадь которого также является целым числом. Например, составляя пифагоровы треугольники со сторонами 9, 12, 15 и 5, 12, 13 катетами 12, получим треугольник со сторонами 13, 14, 15. Стороне 14 отвечает высота 12, и площадь треугольника равна $\frac{12\cdot 14}{2}=84$. Такие треугольники называют *героновыми треугольниками*.

Упражнение 66. Составьте из известных нам пифагоровых треугольников еще несколько героновых треугольников. Для отыскания нужных чисел используйте рис. 71.

Нетрудно найти общее правило, при помощи которого можно составить сколько угодно героновых треугольников. Пусть

$$a_1,\ b_1,\ c_1 \quad \text{и} \quad a_2,\ b_2,\ c_2$$

— длины сторон двух пифагоровых треугольников (последнее из трех чисел всегда будет обозначать гипотенузу). Тогда

$$a_1b_2,\ b_1b_2,\ c_1b_2 \quad \text{и} \quad a_2b_1,\ b_2b_1,\ c_2b_1$$

или

$$a_1a_2,\ b_1a_2,\ c_1a_2 \quad \text{и} \quad a_2a_1,\ b_2a_1,\ c_2a_1$$

также представляют пифагоровы треугольники; действительно — это производные тройки, полученные из предыдущих посредством умножения всех сторон на b_2 и b_1 или соответственно на a_2 и a_1. Эти прямоугольные треугольники имеют равные катеты длины $b_1 b_2$, соответственно $a_1 a_2$. Если теперь приложить их равными катетами друг к другу (общий катет будет при этом высотой), то, например, в первом случае получится геронов треугольник со сторонами $(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, $c_1 b_2$, $c_2 b_1$. Высота этого треугольника будет равна $b_1 b_2$ и, следовательно, площадь его

$$\frac{1}{2} b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Аналогично можно поступить со второй парой треугольников.

11. Изучая дальше вопрос о нахождении всех героновых треугольников, мы будем исходить из общего решения пифагорова уравнения, найденного нами ранее. Прежде всего уясним себе следующее. Исходя из любого геронова треугольника, можно получить сколько угодно новых; для этого только нужно числа, измеряющие длины его сторон, умножить на одно и то же число, подобно тому, как мы делали это для пифагоровых треугольников. Таким образом, мы можем не требовать, чтобы длины сторон выражались *целыми* числами; достаточно, чтобы они были *рациональными* (детали этого рассуждения предоставим читателю). Это же относится к площадям, или, что то же, к высотам треугольника.

Упражнение 67. Почему, если стороны и площадь геронова треугольника выражаются рациональными числами, то это же будет справедливо для всех трех его высот?

Итак, дальше можно рассматривать только отношения сторон треугольника $a:b:c$. Пусть даны два прямоугольных треугольника, стороны которых выражаются пифагоровыми числами, причем стороны первого треугольника

$$a_1 = u_1 v_1, \qquad b_1 = \frac{u_1^2 - v_1^2}{2}, \qquad c_1 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2},$$

а второго

$$a_2 = u_2 v_2, \qquad b_2 = \frac{u_2^2 - v_2^2}{2}, \qquad c_2 = \frac{u_2^2 + v_2^2}{2}$$

(u_1, u_2, v_1, v_2 удовлетворяют еще некоторым дополнительным условиям, подобным тем, с которыми мы встречались в прежних рассуждениях). Образуем только что описанным способом из двух данных треугольников два новых пифагоровых треугольника, у которых один из катетов является общим, а именно

$$a_3 = u_1 v_1 \frac{u_2^2 - v_2^2}{2}, \qquad b_3 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4},$$

$$c_3 = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4},$$

$$a_4 = u_2 v_2 \frac{u_1^2 - v_1^2}{2}, \qquad b_4 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4},$$

$$c_4 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)}{4}.$$

Приставляя теперь оба полученных треугольника друг к другу равными катетами $b_3 = b_4 = h$, получим геронов треугольник со сторонами $a = c_3$, $b = c_4$, $c = a_3 + a_4$ и высотою h.

Выражение для c можно несколько преобразовать, если заметить, что

$$u_1 v_1 (u_2^2 - v_2^2) + u_2 v_2 (u_1^2 - v_1^2) = (u_1 v_2 + v_1 u_2)(u_1 u_2 - v_1 v_2),$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Умножая теперь выражения для $a (= c_3)$, $b (= c_4)$ и $c (= a_3 + a_4)$ на 4, мы получим

$$a : b : c = [(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)] : [(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)] :$$
$$: [2(u_1 v_2 + v_1 u_2)(u_1 u_2 - v_1 v_2)].$$

Не следует, конечно, ожидать, что стоящие справа три числа будут взаимно простыми, даже если u_1 и v_2, а также u_2 и v_2 попарно взаимно просты.

Рассмотрим один простой пример. Пусть

$$u_1 = 3, \quad v_1 = 1, \quad u_2 = 5, \quad v_2 = 1,$$

тогда получим

$$a : b : c = 240 : 208 : 224,$$

или

$$a : b : c = 15 : 13 : 14.$$

Этот геронов треугольник хорошо известен *).

Упражнение 68. Найдите несколько других героновых треугольников.

Эйлер (1707—1783) указал другую систему формул, которая получается, если в качестве совмещаемых катетов треугольников a_1a_2, b_1a_2, c_1a_2 и a_2a_1, b_2a_1, c_2a_1 взять a_1a_2.

Упражнение 69. Покажите, что при этом получатся такие формулы:

$$a=u_2v_2\frac{u_1^2+v_1^2}{2}, \qquad b=u_1v_1\frac{u_2^2+v_2^2}{2}, \qquad c=\frac{(u_1v_2+v_1u_2)(u_1u_2-v_1v_2)}{2}.$$

Разделив эти выражения на $u_1v_1u_2v_2$ и умножив на 2, получим

$$a:b:c=\frac{u_1^2+v_1^2}{u_1v_1}:\frac{u_2^2+v_2^2}{u_2v_2}:\frac{(u_1v_2+v_1u_2)\,(u_1u_2-v_1v_2)}{u_1u_2v_1v_2}.$$

Упражнение 70. Рассчитайте по предыдущим формулам геронов треугольник, исходя из значений $u_1=3$, $v_1=1$, $u_2=5$, $v_2=1$!

Упражнение 71. Найдите в обоих случаях общее выражение для высоты, получившейся от совмещения равных катетов, а также для площади.

Упражнение 72. Брамагупта (род. около 600 г. н. э.) нашел следующие формулы:

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right), \quad q=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right), \quad r=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right).$$

Объясните их происхождение.

12. При дальнейшем изучении героновых треугольников выдвигались дополнительные требования, например, чтобы длины медиан или биссектрис также выражались рациональными числами.

⟨Так, например, Эйлер указал, что у треугольника со сторонами 136, 170, 174 площадь и все медианы имеют

---

*) Для любителей замечательных чисел мы укажем еще несколько героновых треугольников, стороны которых выражаются последовательными целыми числами: 51, 52, 53; 193, 194, 195; 723, 724, 725; 2701, 2702, 2703.

целочисленные значения; доказано, что этот треугольник — наименьший из всех героновых треугольников с целочисленными медианами. Рассматривалась также задача о нахождении всех героновых треугольников, периметр которых равен их площади (простейший из таких треугольников — прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8 и 10) *).

Близки к задаче о пифагоровых числах следующие задачи: найти все треугольники, стороны которых выражаются целыми числами и разность двух углов равна 90° (у прямоугольных треугольников сумма двух острых углов равна 90°!), или стороны выражаются целыми числами, а один из углов равен 60° или 120° (в более сильном варианте: стороны выражаются целыми числами и один из углов измеряется рациональным числом градусов — безразлично каким!), или, наконец, стороны выражаются целыми числами, а один из углов в целое число раз больше другого (например, в 2 раза, или в 7 раз). Решения этих задач даются формулами, сходными с основными формулами (I)—(III) п. 6 (но несколько более сложными)**).〉

Дальнейшие исследования в этом направлении ведут к другим плоским фигурам, стороны которых выражаются рациональными числами: прежде всего к параллелограммам с рациональными сторонами и диагоналями, к произвольным и специальным четырехугольникам (например, вписанным в окружность) с рациональными сторонами и т. д. [1]).

---

*) См. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., 1959, задача 127.

**) См. С. И. Зетель, Задачи о тупоугольном треугольнике *ABC*, у которого разность углов *A* и *B* равна 90°, сборник «Математическое просвещение», вып, 2, 1957, стр. 234 и 246; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., 1959, задачи 128—129.

[1]) Вписанными четырехугольниками, стороны которых выражаются рациональными цифрами, занимался, например, Куммер. Укажем еще статью Хентцшеля: «Задача Ньютона о вписанных четырехугольниках» (Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht 46 (1915, стр. 190). Ссылки на литературу можно найти там же на стр. 390 и след.

Наконец коснемся бегло вопроса о многогранниках с рациональными длинами сторон. Простейшим многогранником, для которого этот вопрос не является тривиальным, будет тетраэдр. Конечно, правильный тетраэдр не будет решением задачи, если помимо рациональности ребер потребовать, скажем, рациональность объема. Сразу не очевидно, существуют ли вообще такие тетраэдры. Этой проблемой занимался Шверинг. Самый изящный пример тетраэдра, удовлетворяющего нашим условиям, таков: объем тетраэдра, ребра которого равны 6, 7, 8, 9, 10 и 11, равен 48[1]). ⟨Другой интересный пример — тетраэдр с ребрами 896, 990, 1073, 1073, 1073 и 1073 (ребра длины 896 и 990 противоположны одно другому). Этот тетраэдр имеет не только целочисленный объем 62 092 800, но и все грани его имеют целочисленные площади 436 800, 436 800, 471 240 и 471 240.⟩

§ 8. ТЕОРЕМА ФЕРМА*)

1. В предыдущем параграфе мы познакомились с бесчисленным множеством решений в целых положительных числах уравнения

$$x^2+y^2=z^2.$$

Естественно возникает вопрос о решении аналогичных уравнений:

$$x^3+y^3=z^3,$$
$$x^4+y^4=z^4,$$
$$\cdots\cdots$$

и вообще уравнения

$$x^n+y^n=z^n.$$

Если мы начнем искать решение какого-нибудь из этих уравнений наудачу, результат будет отрицательным. До

---

[1]) Этот результат и изложение элементарных методов вычисления площади многогранников по длинам их ребер можно найти в книжке Шверинга «100 задач по элементарной геометрии», Фрейбург, 1908. Общее решение вопроса содержится в заметке Шверинга «Тетраэдры с рациональными сторонами» (Journal für reine und angewandte Mathematik **115**, 1895, стр. 301).

*) По поводу содержания этого параграфа см. также: А. Я. Хинчин, Великая теорема Ферма, М.—Л., 1932.

сих пор не известна ни одна тройка целых положительных чисел, удовлетворяющая какому-либо из этих уравнений (с любым сколь угодно высоким показателем степени). Поэтому можно высказать следующее предложение:

Уравнение $x^n+y^n=z^n$, где n — целое число, большее 2, не имеет решений в целых числах.

Это предложение известно под названием «*Великой теоремы Ферма*». Пьер Ферма (1608—1665 гг.) — юрист из Тулузы (Франция) и несомненно один из величайших математиков всех времен — записал это предложение среди многих других в виде замечания на полях своего экземпляра книги греческого математика Диофанта (около 300 г. н. э.). Здесь же Ферма добавил, что у него есть поистине удивительное доказательство этого, однако за недостатком места он не может его изложить.

До сих пор никому еще не удалось полностью доказать эту теорему, поэтому правильнее было бы говорить о проблеме Ферма.

2. Эйлер (1707—1783) доказал теорему для показателя n, равного 3 и 4, а гёттингенский математик Дирихле (1805—1859) — для показателя 5, но только Куммер (1810—1893) при помощи созданных им методов алгебраической теории чисел сумел заметно продвинуть доказательство этой теоремы в общем виде. Нетрудно заметить, что достаточно доказать невозможность только для показателя 4 и для нечетных простых показателей 3, 5, 7, 11,... Действительно, если бы, скажем, уравнение

$$x^6+y^6=z^6$$

имело целочисленное решение a, b и c, то и уравнение

$$x^3+y^3=z^3$$

допускало бы целочисленное решение, а именно $x=a^2$, $y=b^2$ и $z=c^2$. Куммер доказал отсутствие решений в том случае, когда показатель является так называемым «правильным» простым числом. К таким числам, точное определение которых трудно дать в элементарном виде, относятся, например, все простые числа, не превосходящие 100, за исключением лишь трех чисел, а именно 37, 59 и 67. Между прочим, до сих пор неизвестно, существуют ли сколь угодно большие правильные простые числа.

Куммер сумел доказать невозможность решения также для известной группы «неправильных» простых чисел, в которую входят и названные три числа. Так что уже в его время при помощи разработанных им методов теорема была доказана для всех значений показателя, не превосходящих 100.

В рамках этой небольшой книжки невозможно дать понятие о методах алгебраической теории чисел, которую развили К у м м е р, а позднее Г и л ь б е р т, Ф у р т в е н г л е р и в новейшее время целая группа математиков. Но несколько слов сказать нужно: решение проблемы Ферма перенесено в расширенную числовую область и если невозможность решения будет доказана для «целых чисел» этой области, то тем самым будет доказана невозможность ее решения для целых чисел из нашей более узкой области рациональных чисел.

3. Теорема Ферма не была бы у всех на устах, если бы умерший в Дармштадте математик д-р П. В о л ь ф с к е л ь не завещал — можно добавить: к сожалению,—Гёттингенскому обществу наук капитал в 100 000 марок с условием, чтобы эта сумма была выдана в виде премии тому, кто решит проблему Ферма. Как установило гёттингенское общество наук, решение могло рассматриваться лишь после появления его в газете или книге — проверять рукописи общество отказалось; присуждение премии могло произойти не ранее, чем через 2 года после представления работы. Постановление о премии теряло силу в 2007 г. Проценты на капитал должны были идти на поощрение развития математических наук. Инфляция, явившаяся следствием первой мировой войны, обесценила эту премию; проценты же многократно использовались Гёттингенским обществом. ⟨ На эти деньги, например, неоднократно приглашались в Гёттинген для чтения лекций выдающиеся немецкие и иностранные математики и физики. Рассказывают, что председатель комиссии по присуждению премии за решение задачи Ферма, знаменитый немецкий математик, профессор Гёттингенского университета Д. Г и л ь б е р т, сказал однажды после очередного обсуждения поступивших решений: «К счастью, кажется, кроме меня, у нас нет математика, которому была бы под силу эта задача; я же никогда не решусь зарезать курицу, которая несет нам золотые яйца».⟩ Однажды известная сумма была выдана математику Виферниху, который опубликовал работу, означавшую существенный успех в решении задачи.

Пока мы говорили о самой премии. Но какие ужасающие последствия она вызвала! Раньше каждый более или менее известный математик, а в особенности редакторы математических журналов, время от времени получали «решения» задачи о квадратуре круга или трисекции угла, хотя невозможность решения этих задач с помощью циркуля и линейки давно строго доказана. Теперь место этих задач заняла теорема Ферма, причем здесь служила приманкой не только слава, но и звонкая монета. И удивительнейшим образом — хотя для более внимательного наблюдателя в этом нет ничего удивительного — большинство попыток решения исходит не столько от математиков, сколько от инженеров, священников, учителей, гимназистов, студентов, лиц свободных профессий и т. д., и не только из Германии, а из многих других стран. Как пишет один член Гёттингенского общества наук, все это множество соискателей имеет лишь то общее, что «они совершенно не представляют себе серьезного математического значения задачи». ⟨Известен рассказ о телеграмме, поступившей в Математический институт: «доказал теорему Ферма икс энной плюс игрек энной равно зет энной основная идея перенесем член игрек энной правую часть подробности письмом»; разумеется, письмо с подробностями идет до сих пор. Редко в этих «доказательствах» использовались идеи более глубокие, чем та, которая осенила автора телеграммы!⟩

Еще до того, как Гёттингенское общество опубликовало условия присуждения премии, в ответ на одно только газетное объявление были присланы сотни «доказательств», а вскоре число их перевалило за тысячу. Сколько потерянного времени и напрасного труда! При этом можно с почти абсолютной уверенностью утверждать, что все эти доказательства безосновательны, несмотря на то, что многие соискатели угрожали подачей жалоб о неуплате причитающихся им 100 000 марок. Один математический журнал «Archiv der Mathematik und Physik» завел постоянный раздел, в котором добросовестнейшим образом разоблачались «доказательства» теоремы Ферма; до начала 1911 г. было разобрано 111 доказательств и все они были признаны несостоятельными; со временем журнал прекратил эту ненужную работу, но поток доказательств не иссяк.

Не обошлось, конечно, без забавных случаев. Так, в одном из присланных мне доказательств два факта не были доказаны, а только проиллюстрированы примерами. Один из этих недочетов легко было восполнить, но в другом как раз и была зарыта собака. Об этом я сообщил своему корреспонденту. Ответ пришел с обратной почтой; в нем мне обещалось 10% премии, если я докажу этот второй факт. И я, разобравшись в этом пустяке (равносильном, впрочем, доказательству теоремы Ферма!), мог бы стать обладателем 10 000 марок, но...

В одной ежедневной газете, объявившей о премии, было напечатано не

$$x^n+y^n=z^n \ (n>2), \tag{1}$$

а

$$x^n+y^n=z^n \ (n+2). \tag{2}$$

Кто-то, конечно, тут же усаживается и доказывает, что мнимая «теорема Ферма» (2) совершенно неверна; так, уже при $n=1$ получается много целочисленных решений уравнения $x+y=3z$. И это опровержение он послал Гёттингенскому обществу наук еще до того, как газета успела известить об опечатке. Какого же мнения был этот человек о математиках, предлагавших премию в 100 000 марок за такой пустяк?

Другой претендент пишет коротко и ясно: Как известно, $a^2+b^2=c^2$; если бы было $a^n+b^n=c^n$, то мы имели бы $n=2$, что противоречит условию. Этим невозможность доказана!

Разъяснение неправильности доказательства иногда встречается с иронической насмешкой, а иногда — с глубоким огорчением. Это зависит от характера приславшего неправильное доказательство. Но допустим, что неудачника удалось убедить в ошибке; тогда он вслед за первым ложным доказательством вскоре шлет второе или же дополнительно к первому доказательству присылает первое разъяснение, второе, третье. Гидра «доказательствомании» не была убита! И совсем, совсем редко обмен письмами заканчивается так, как это выражено в присланном мне кем-то стихотворении:

К упрямцам не принадлежу
И не глупец, как сам сужу.
Решал проблему.—Не сумел!
Что ж, есть других немало дел.
А коль докучил Вам слегка,
Уж вы простите... дурака.

Нет, тот кто продвинулся так далеко, уже перестал быть глупцом!

Первое издание этой маленькой книжки, несмотря на все предостережения, также вызвало поток писем с доказательствами теоремы Ферма. Возможно, что единственная выгода, которую мы имели от инфляции в Германии, заключалась в том, что этот поток иссяк. Кто занимался этой задачей из-за денег, тот давно бросил это занятие; тому же, кто начнет заниматься этой проблемой из любви к математике, мы посоветуем направить свои усилия по другому пути, который может дать ему удовлетворение, а возможно и надежду получить собственные результаты. Можно указать целый ряд областей, например, из прикладной математики, где человеку даже без специальной подготовки найдется достаточно тем для самостоятельной работы и где можно познать радость творчества.

4. Переходя в этой маленькой книжке от теоремы Пифагора и пифагоровых чисел к теореме Ферма, мы имели в виду особую цель. Нередко высказывают мнение, что математика — это вполне законченная, застывшая наука. То, что это не так, мы только что видели. Наряду с истинами, известными человечеству две тысячи и более лет, мы встречаемся с тесно с ними связанной нерешенной проблемой, и при этом такой, содержание которой можно объяснить всякому, даже тому, кто не обладает специальными математическими знаниями.

Мы уже сообщали, что доказательство теоремы Ферма для показателей 3, 4, 5 было дано еще до Куммера. Сейчас мы собираемся привести доказательство для одного из этих случаев, а именно, для уравнения

$$x^4+y^4=z^4; \tag{а}$$

оно совсем элементарно и восходит к Эйлеру. Доказав невозможность решения уравнения (а) в целых числах x, y и z, мы тем самым исчерпаем вопрос о решении уравнения

$$x^{4n}+y^{4n}=z^{4n}, \tag{б}$$

где n — любое положительное целое число, большее единицы.

5. Прежде чем приступить к уравнению $x^4+y^4=z^4$, мы докажем неразрешимость (в целых положительных числах) уравнения

$$(x^2)^2+(y^2)^2=z^2. \tag{в}$$

Это уравнение нами написано в таком виде, который прямо указывает на связь с уравнением Пифагора. Вопрос заключается в том, существуют ли среди пифагоровых чисел такие, из которых меньшие два — полные квадраты? До сих пор подобные тройки нам не встречались; но это, конечно, еще не означает, что их вовсе нет. Числа, входящие в такие тройки, могут быть очень велики. Мы с самого начала будем, конечно, предполагать, что ищется основная тройка; производные же нас интересовать не будут — поэтому числа x, y и z можно считать взаимно простыми. Мы покажем, что уравнение (в) не имеет целочисленных решений. Это довольно тонкое доказательство; поясним его сначала одним примером. Не существует наименьшей положительной дроби. Почему? Если бы можно было указать такую дробь $\frac{1}{n}$ $\left(\text{скажем, } \frac{1}{100}\right)$, то всегда можно было бы указать еще меньшую дробь $\frac{1}{n+1}$ $\left(\text{в нашем случае } \frac{1}{101}\right)$.

Мы воспользуемся этой идеей для нашего доказательства. Предположим сначала, что некоторое решение уравнения является наименьшим, затем покажем, как из него можно получить еще меньшее, и тем самым докажем, что наименьшего решения не существует; но мы ведь рассматриваем только целочисленные решения и поэтому среди них какое-то должно быть наименьшим (если только решения вообще существуют!). Единственный выход из этого противоречия заключается в том, чтобы признать, что решений вовсе нет.

Нужно еще уточнить, что мы понимаем под *наименьшим решением* или решением в наименьших целых положительных числах. Это такое решение x_1, y_1, z_1, в котором z_1 имеет наименьшее возможное значение. Если же троек с наименьшим значением z_1 будет несколько, то мы выберем из них ту, в которой x_1 имеет наименьшее значение и именно эту тройку будем считать наименьшей. Из этой наименьшей в указанном смысле тройки мы и будем исходить в наших рассуждениях; конечно, эта тройка будет основной.

6. Если справедливо равенство

$$(x_1^2)^2+(y_1^2)^2=z_1^2,$$

то согласно формулам (I)—(III) п. **6** предыдущей главы числа x_1^2, y_1^2 и z_1 можно следующим образом выразить через нечетные взаимно простые числа u и v (где $u>v$):

$$x_1^2=uv, \tag{Ia}$$

$$y_1^2=\frac{u^2-v^2}{2}, \tag{IIa}$$

$$z_1=\frac{u^2+v^2}{2}. \tag{IIIa}$$

Из равенства (Ia) мы так же, как и в § 7, п. **6**, заключим, что взаимно простые числа u и v должны быть полными квадратами. Пусть, например,

$$u=u_1^2, \qquad v=v_1^2,$$

где u_1 и v_1 опять-таки должны быть нечетными взаимно простыми числами и $u_1>v_1$. Подставим теперь эти новые числа в равенство (IIa); равенством (IIIa) мы пока пользоваться не будем. Получим

$$y_1^2=\frac{u_1^4-v_1^4}{2}=\frac{(u_1^2+v_1^2)(u_1^2-v_1^2)}{2}.$$

Числа u_1 и v_1 заменим новыми числами. Пусть

$$u_1+v_1=2u_2, \qquad u_1-v_1=2v_2;$$

тогда

$$u_1=u_2+v_2, \qquad v_1=u_2-v_2.$$

Заметим, что в первых двух равенствах мы справа приписали множитель 2; мы имели право это сделать, так как и сумма, и разность двух нечетных чисел всегда есть четное число.

Новые числа u_2 и v_2 — снова взаимно простые. В самом деле, если бы у них был общий делитель t, то как u_1, так и v_1 делились бы на t; но этого не может быть, так как u_1 и v_1 по условию взаимно простые.

Добавим тут же, что так как u_2 и v_2 — числа взаимно простые, то выражение $u_2^2+v_2^2$ не может иметь общего делителя с u_2 или с v_2.

Упражнение 73. Докажите это!

Мы выразим теперь y_1^2 через новые числа u_2 и v_2

$$u_1^2-v_1^2=4u_2v_2,$$
$$u_1^2+v_1^2=2(u_2^2+v_2^2),$$

и, следовательно,

$$y_1^2=4u_2v_2(u_2^2+v_2^2).$$

7. Применим к последнему уравнению теорему, которой мы ранее неоднократно пользовались: если произведение взаимно простых чисел есть квадрат, то эти числа также должны быть полными квадратами. Нам неизвестно, будут ли числа u_2 и v_2 взаимно просты с числом 4; поэтому из предосторожности перенесем этот множитель в левую часть и тем самым устраним его. В уравнении

$$\frac{y_1^2}{4}=u_2v_2(u_2^2+v_2^2)$$

слева стоит целое число, так как y_1^2 согласно общему условию (ср. п. 4 § 7) должно быть четным, а всякое четное число, являющееся в то же время полным квадратом, обязательно делится на 4. Но тогда u_2, v_2 и $u_2^2+v_2^2$ согласно нашей теореме должны быть квадратами, например:

$$u_2=x_2^2; \qquad v_2=y_2^2; \qquad u_2^2+v_2^2=z_2^2.$$

Из этих трех уравнений вытекает:

$$x_2^4+y_2^4=z_2^4,$$

т. е. исходя из тройки x_1, y_1, z_1, являющейся решением нашего уравнения, мы получили, хотя и не совсем простым путем, другую такую тройку x_2, y_2, z_2 и, кстати сказать, также основную.

Упражнение 74. В начале этого пункта мы использовали теорему, которая была доказана в п. 6, § 7 лишь для случая двух сомножителей; докажите аналогичную теорему для случая трех сомножителей.

8. Теперь нам осталось только доказать, что число z_2 меньше, чем z_1. Возвращаясь к прежним обозначениям, мы имеем

$$z_2^2=u_2^2+v_2^2=\frac{u_1^2+v_1^2}{2}=\frac{u+v}{2},$$

а

$$z_1=\frac{u^2+v^2}{2}$$

(см. IIIa). Так как сумма двух целых положительных чисел, из которых хотя бы одно больше 1, всегда меньше суммы квадратов этих же чисел, то

$$z_2^2<z_1,$$

а следовательно,

$$z_2<z_1.$$

Мы достигли желаемой цели; предполагая, что z_1 было наименьшим возможным, мы доказали существование еще меньшего числа z_2 и тем самым пришли к противоречию, которое можно объяснить только признанием того, что наименьшего z не существует. Но это означает, что уравнение

$$x^4+y^4=z^2$$

не имеет целочисленных решений.

Упражнение 75. Существует «решение» нашего уравнения $x=1$, $y=0$, $z=1$. Почему наличие этого «решения» никак не сказывается на наших рассуждениях?

9. Мы подходим к концу доказательства теоремы Ферма в случае, когда показатель степени равен 4. Если бы уравнение

$$x^4+y^4=z^4$$

допускало целочисленное решение x_1, y_1, z_1, то тройка чисел x_1, y_1, z_1^2 давала бы целочисленное решение уравнения

$$x^4+y^4=z^2,$$

а такого решения вовсе не существует. Поэтому первое уравнение тоже не может быть решено в целых числах.

10. Ясно, что метод, примененный нами для случая $n=4$, нельзя распространять на показатели, представляющие собою простые числа. Уже в случае $n=3$ необходимы другие средства, изложение которых вывело бы нас за рамки этой книжки *). Но, по крайней мере, мы постараемся дать представление читателю хотя бы о некоторых исследованиях, нацеленных на овладение этой проблемой.

Будем различать 2 типа случаев.

К I типу мы отнесем все такие случаи, что ни одно из трех чисел x, y и z не делится на нечетное простое число p, являющееся показателем степени в нашем уравнении.

К типу II мы отнесем остальные случаи, т. е. такие, где хотя бы одно из трех чисел x, y и z делится на p. Мы могли бы сказать: только одно, так как если бы их было два, то на p делилось бы и третье число, и мы могли бы сократить все три числа на их общий множитель.

11. Мы рассмотрим сейчас немного подробнее случаи I типа. А. Виферих, чье имя уже упоминалось выше,

*) Доказательство теоремы Ферма для случая $n=3$ изложено в указанной на стр. 99 книжке А. Я. Хинчина, а также в книжке Л. Г. Шнирельмана Простые числа, М.—Л., 1940.

показал, что если бы существовало решение уравнения этого типа для простого показателя p, то p должно было быть делителем выражения

$$P(2)=\frac{2^p-2}{p}.$$

⟨То, что число 2^p-2 при всяком простом p делится на p, легко доказать (см. ниже п. **12**). Однако такие числа p, что 2^p-2 делится на p^2 (и следовательно, $P(2)$ делится на p), крайне редки. Известный советский математик Д. А. Граве предполагал даже, что таких чисел вовсе не существует, и на этом основании утверждал в своем курсе теории чисел, что задача Ферма не может иметь решений I типа; основанием для этого послужила выполненная учениками Граве непосредственная проверка того, что для всех простых чисел, меньших 1000, выражение $P(2)$ не делится на p. Позже удалось установить, что⟩ наименьшее простое число p такое, что 2^p-2 делится на p^2, есть 1093. Причем требуется изрядное терпение, чтобы найти это число: здесь приходится иметь дело с настоящими числами-великанами. Исследования วифериха продолжил Мириманов, который показал, что если для простого показателя p решение существует, то также и выражение

$$P(3)=\frac{3^p-3}{p}$$

должно делиться на p. Вандивер распространил (с некоторыми ограничениями) эти результаты, доказав, что на p должно делиться аналогичное выражение $P(5)$, а Фробениус доказал то же самое для выражений $P(11)$, $P(17)$ и некоторых других. Таким образом, круг показателей p, которые могли бы отвечать решениям типа I, еще более сузился.

12. Диксон доказал отсутствие решений I типа для всех простых показателей, меньших 7000.

Мы проиллюстрируем ход его мыслей на одном простом рассуждении. Для этого нам потребуется вспомогательное предложение, играющее большую роль в теории чисел; это предложение также называют теоремой Ферма; иногда — быть может, и не совсем удачно — «малой теоремой Ферма», в противоположность «Великой теореме Ферма», которой мы здесь занимаемся и которая еще ждет полного доказательства.

Пусть некоторое положительное целое число n не делится на простое число p; тогда при делении на p получается остаток, заключенный между 0 и p. Числа $2n$, $3n$, $4n, \ldots, (p-1)n$ также не делятся на p без остатка. Мы утверждаем, что остатки, которые дают эти числа при делении на p, все различны. В самом деле, если бы fn и gn (где, скажем, $f>g$) давали один и тот же остаток, то $fn-gn=(f-g)n$ делилось бы на p без остатка. Но это невозможно, так как ни n, ни $f-g$ не делятся на p, поскольку каждое из чисел f и g меньше, чем p, а разность их и подавно меньше p. Но это означает, что среди остатков от деления чисел n, $2n$, $3n$, $4n, \ldots, (p-1)n$ на p должны встречаться все $p-1$ возможных остатков, т. е. числа $1, 2, \ldots, (p-1)$ (мы записали их в возрастающем порядке). А это, в свою очередь, означает, что произведение

$$n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \ldots (p-1)\, n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-1)\, n^{p-1}$$

и произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-1)$$

дают при делении на p один и тот же остаток. Таким образом, разность их

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-1)\,(n^{p-1}-1)$$

делится на p. И так как

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-1)$$

на p не делится, то должен делиться на p второй множитель

$$n^{p-1}-1.$$

Другими словами: *если n не делится на p, то n^{p-1} при делении на p дает в остатке* 1. Это и есть малая теорема Ферма.

Упражнение 76. Приведите числовые примеры, иллюстрирующие малую теорему Ферма.

13. Предположим теперь, что для некоторых трех чисел a, b и c, не делящихся на p, справедливо равенство Ферма

$$a^p + b^p = c^p.$$

Еще Лежандр выделил те из простых чисел, для которых либо $q_2 = 2p+1$, либо $q_4 = 4p+1$, либо $q_8 = 8p+1$, либо $q_{16} = 16p+1$ снова будут простыми. Мы здесь будем считать, что $q_2 = 2p+1$ — простое число, обозначая его в дальнейшем через q. Тогда $a^{q-1} = a^{2p}$ при делении на q дает в остатке либо 0, либо $+1$. Какой отсюда можно сделать вывод относительно числа a^p? Это число при делении на q тоже даст в остатке либо 0 (другими словами, a^p делится на q), либо $+1$, либо — здесь возможен еще третий случай — a^p даст при делении на q такой остаток, который отличен от $+1$, но квадрат которого равен $+1$. Если допускать и отрицательные остатки, абсолютная величина которых меньше p, то таким остатком может быть -1.

Эти же три остатка могут получиться при делении b^p на q и c^p на q. Выясним теперь, какие могут встретиться комбинации остатков. Всего здесь может быть только 6 случаев (в силу того, что a и b совершенно равноправны):

	Пусть a^p дает остаток:	b^p дает остаток:	тогда c^p дает остаток:
1)	$+1$	$+1$	$+2$
2)	$+1$	-1	0
3)	$+1$	0	$+1$
4)	-1	-1	-2
5)	-1	0	-1
6)	0	0	0

Случаи 1) и 4) отпадают, так как они приводят к таким остаткам от деления c^p на q, которые не могут нам встретиться. Точно так же отпадает случай 6), так как a, b и c предполагаются взаимно простыми. Следовательно, возможны лишь случаи 2), 3) и 5), т. е. *решением уравнения Ферма могут быть только такие три числа, одно из которых делится на* $q = 2p+1$.

Упражнение 77. Выясните, справедливы ли проведенные рассуждения для троек пифагоровых чисел и выведите следствие из этого рассуждения.

Если бы мы попытались распространить этот результат на другие простые числа вида q_{2k}, то, как показывает опыт с числом q_2, количество множителей, на которые должны раскладываться числа x, y, z, стало бы весьма большим. Иными словами (в случае решений типа I), не только показатели, но и основания степени должны быть непомерно большими.

Зачем мы об этом упоминаем? — Для предостережения тех, кто хотел бы ниспровергнуть теорему Ферма чисто вычислительным путем, пробуя найти противоречащий ей пример!

Нужно предостеречь также от ошибочного вывода, который можно сделать из сказанного. Конечно, было бы очень хорошо, если бы удалось доказать, что для каждого простого числа p можно найти б е с к о н е ч н о е м н о ж е с т в о простых чисел вида q_{2k}, на которые делится по крайней мере одно из чисел нашей тройки a, b, c. Тогда хотя бы одно из этих чисел содержало бы бесчисленное множество простых множителей, и не могло бы быть конечным! Но Д и к с о н доказал, что, напротив, каждому простому числу p отвечает только конечное число простых чисел q_{2k}, так что такой путь доказательства отсутствия решений I типа не проходит.

14. Прежде чем расстаться с теоремой Ферма, коснемся немного ее геометрического содержания.

Вернемся к тому, о чем говорилось в § 7, п. **9**. Разделив обе части уравнения Ферма $x^n+y^n=z^n$ на z^n, мы можем придать теореме Ферма следующий вид: *уравнение*

$$X^n+Y^n=1 \tag{α}$$

не имеет решений в (положительных) рациональных числах.

На рис. 73 изображены кривые, представляющие функции

$$Y=\sqrt[n]{1-X^n} \tag{β}$$

при $n=3$ и $n=4$; (при этом мы ограничиваемся лишь частями кривых, расположенными в первом квадранте).

При $n=2$ мы получим просто окружность единичного радиуса (см. п. 9 § 8) при $n=5$, $n=6$ и т. д. кривая будет все более и более «прижиматься» к сторонам единичного квадрата — что означает это выражение, совершенно ясно. Какой же геометрический смысл имеет утверждение,

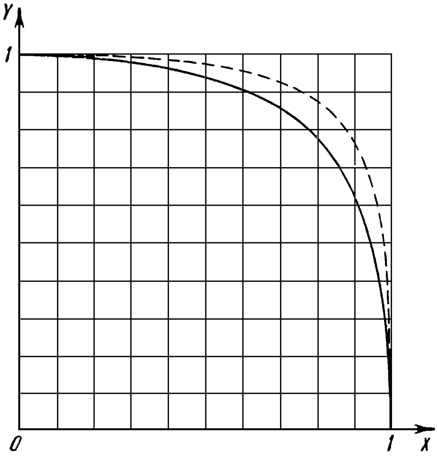

Рис. 73.

что уравнение (α) не имеет рациональных решений? А вот какой: кривые (β) (случай $n=2$ мы здесь исключаем) не проходят н и ч е р е з о д н у точку с рациональными координатами (кроме точек с координатами 1;0 и 0;1); они извиваются, минуя всюду плотное множество точек плоскости с рациональными координатами, не задевая на своем пути ни одной такой точки. Это поистине замечательный факт, вытекающий из великой теоремы Ферма, если только эта теорема верна.

СОДЕРЖАНИЕ

Вальтер Литцман

Теорема Пифагора

Редактор *А. Н. Копылова*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректор *Л. В. Лихачева*

Сдано в набор 2/VII 1960 г. Подписано к печати 5/X 1960 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 3,625. Условн. печ. л. 5,95. Уч.-изд.л.5,43. Тираж 50 000 экз. Т-08949. Заказ № 727. Цена 1 р. 65 к. С 1/I 1961 г. цена 17 к.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского городского совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В. ЛИТЦМАН

ФМ