

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ



А. Г. БУТКОВОКИЙ

ТЕОРИЯ
ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ
СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ





**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965



Scan AAW

А. Г. БУТКОВСКИЙ

**ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

6П2.15

Б93

УДК 62-50

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
В в е д е н и е. Примеры и основные отличительные особенности систем оптимального управления объектами с распределенными параметрами	11
Г л а в а I. Общая теория оптимального управления системами с распределенными параметрами	46
§ 1. Задачи оптимального управления для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных	46
§ 2. Принцип максимума в оптимальных системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных	49
§ 3. Достаточные условия оптимальности для систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных	63
§ 4. Одна задача оптимального управления химическим реактором	74
§ 5. Общая задача на условный минимум функционала при дополнительных ограничениях	78
§ 6. Задача оптимального управления для систем, описываемых интегральными уравнениями	88
§ 7. Достаточные условия оптимальности для задачи на условный минимум	96
§ 8. Необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче на условный минимум для однородного функционала и оператора	98

§ 9. Основные интегральные уравнения для оптимальных управлений в одном классе систем с распределенными параметрами	99
§ 10. Оптимальный нагрев материала в проходных агрегатах	129
§ 11. Задача оптимального управления системами с распределенными параметрами в функциональном «фазовом» пространстве	144
§ 12. Задача синтеза оптимальных систем с распределенными параметрами	150
§ 13. Применение метода динамического программирования Р. Беллмана к оптимизации систем с распределенными параметрами	152
§ 14. Управляемость, наблюдаемость, инвариантность в системах с распределенными параметрами	155
Г л а в а II. Оптимизация систем, описываемых рекуррентными соотношениями.	172
§ 1. Необходимое условие оптимальности для систем, описываемых рекуррентными соотношениями	172
§ 2. Пример задачи оптимального управления, где не выполняется аналог принцип максимума	181
§ 3. Достаточные условия оптимальности	185
§ 4. Оптимальное распределение температуры по зонам проходной нагревательной печи	189
Г л а в а III. Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами	202
§ 1. Постановка задачи	202
§ 2. Теория l -проблемы моментов	212
§ 3. Применение метода моментов для синтеза оптимальных систем	247
§ 4. Оптимальное управление непрерывно распределенной колебательной системой	261
§ 5. О наилучшем приближении функции многих переменных суммой произведений функций одной переменной	288

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV. Приближенные и вычислительные методы решения задач оптимального управления	301
§ 1. Метод последовательных приближений, основанный на результатах решения l -проблемы моментов	301
§ 2. Применение разностных методов для приближенного решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами	306
§ 3. Метод гармоник в задаче оптимального управления одним типом систем с распределенными параметрами	330
§ 4. О соотношении метода гармоник и метода прямых .	337
§ 5. Применение метода гармоник к задаче оптимального управления нагревом тела сферической формы . . .	345
§ 6. Применение метода гармоник к задаче оптимального управления нагревом цилиндра	349
§ 7. Определение оптимального управляющего воздействия с помощью параболической аппроксимации . . .	351
§ 8. Метод последовательных приближений для определения оптимального управления системой, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных	359
§ 9. Приближенный метод решения интегральных уравнений для оптимальных управляющих воздействий . . .	363
Глава V. Оптимальный нагрев массивных тел	366
§ 1. Решение уравнения теплопроводности	367
§ 2. Применение метода моментов к решению задачи быстродействия	374
§ 3. Реализация алгоритмов решения проблемы моментов 2-го и 3-го порядка на цифровой вычислительной машине	382
§ 4. Задача J -оптимального управления нагревом массивного тела	396
§ 5. Оптимальный по быстродействию нагрев массивного тела с учетом ограничений на термонапряжения . . .	405
§ 6. Пример расчета оптимального режима нагрева . . .	414
Глава VI. Оптимальное управление проходными печами .	423
§ 1. Моделирование некоторых классов объектов с распределенными параметрами	424

§ 2. Моделирование процессов нагрева металла в методической печи	431
§ 3. Система оптимального управления нагревом металла в методической печи	449
§ 4. Перспективы применения управляющих машин для оптимизации совместной работы печей и стана . . .	455
Приложение I	459
Приложение II	463
Приложение III	465
Литература	467

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во многих технических и научных приложениях возникает необходимость оптимального, т. е. наилучшего в каком-то определенном смысле, управления сложными системами, состояние которых характеризуется одним или несколькими параметрами, которые распределены в пространстве. К такому классу систем относятся многие производственные процессы, например, нагрев металла под прокатку или термообработку как в обычных проходных печах, так и печах скоростного нагрева, сушка и обжиг сыпучих материалов во вращающихся печах, агломерация, дистилляция, получение монокристаллов, индукционный нагрев и т. д.

Для этих объектов характерным является то, что обработка материала происходит в процессе их пространственного продвижения через зоны обработки, во время которого на материал оказывается распределенное не только во времени, но и в пространстве воздействие различного рода полей: тепловых, электрических, химических и т. д. В некоторых случаях сталкиваются с задачей получения распределения некоторых полей физических величин, например, температурных, электрических, магнитных и т. д., близких к некоторым заранее заданным распределениям.

Многие задачи проектирования также сводятся к выбору некоторого оптимального распределения какой-либо пространственной величины. Например, выбор оптимальной формы крыла самолета или ракеты, очертания контура здания или плотины, оптимальное размещение скважин в нефтеносном поле.

Книга содержит изложение получившей в последнее время развитие теории построения оптимальных в каком-

либо определенном смысле систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами. В работе формулируются точные математические постановки задач оптимального уравнения подобного рода объектами. На основе применения функционального анализа выводится целый ряд необходимых и достаточных условий оптимальности процесса. Приводятся приближенные методы решения полученных уравнений, приспособленные для решения на аналоговых и цифровых вычислительных машинах. В книге уделено большое внимание приложению результатов теории, в частности, к оптимизации тепловых процессов, и рассмотрен вопрос о моделировании одного широкого класса систем с распределенными параметрами.

Книга будет полезна широкому кругу специалистов, интересующихся теорией оптимального управления и ее применениями к различным областям техники.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Фельдбауму, чьи советы и постоянное внимание стимулировали эту работу.

А. Г. Бутковский

**ПРИМЕРЫ И ОСНОВНЫЕ ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ
ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В последние годы высокими темпами развивается теория оптимальных систем, основывающаяся на новейших достижениях математики и техники. С развитием техники и экономики к системам автоматического управления предъявляются все более разнообразные и жесткие технико-экономические требования. Круг объектов, работающих в режиме автоматического управления, быстро расширяется. В различных производственных процессах автоматические системы должны обеспечивать наивысшую производительность при заданном расходе сырья, топлива или энергии. Во многих процессах требуется обеспечить высокую точность работы системы или агрегата, высокое быстродействие; требуется наилучшим образом приближаться к некоторому заданному режиму или состоянию при минимальном расходе имеющихся в распоряжении средств.

Многие производственные и энергетические системы работают в режимах, при которых недоиспользуются значительные возможности, заложенные в агрегате, и не достигаются показатели, которые могли бы быть достигнуты. Поэтому возникает необходимость создания таких методов управления и проектирования, которые позволили бы максимально использовать все потенциальные возможности систем и создать оптимальную систему в каком-либо заранее заданном смысле.

Исторически постановка задач оптимального управления родилась из стремления учесть различного рода ограничивающие условия, наложенные на управляющие воздействия и координаты заданной части системы, движение которой в общем случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений конечного порядка [65—68, 114—119].

Основой для решения этого класса задач является целый ряд новых результатов, полученных математиками специально для таких задач — в первую очередь принцип максимума Л. С. Понтрягина [91] и метод динамического программирования Р. Беллмана [9].

Однако на практике в большинстве технических приложений приходится иметь дело с системами, имеющими распределенные в пространстве параметры. Движение таких систем описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными уравнениями, интегро-дифференциальными, а подчас более общими и более сложными функциональными соотношениями. Некоторые сложные системы с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями высокого порядка, что сильно затрудняет их исследование и возможность построения оптимального управляющего устройства. Но при определенных условиях такие системы высокого порядка с сосредоточенными параметрами можно аппроксимировать системой с распределенными параметрами. Например, уравнение системы, состоящей из большого числа последовательно включенных апериодических звеньев, можно приближенно заменить уравнением теплопроводности.

Задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами ставились в работах [13, 22—23, 69]. В этих и в ряде последующих работ были развиты методы, дающие решение ряда конкретных практических задач.

Трудность, возникающая при постановках этих задач, состоит в том, что при общетеоретических исследованиях постановка задачи не должна быть слишком широкой, с тем чтобы можно было как-то начать искать пути ее решения; с другой стороны, эти постановки не должны быть слишком узкими, чтобы не была потеряна общность проблемы и можно было перейти к единым методам и приемам решения таких задач.

Разработка теории и техники оптимальных систем с распределенными параметрами является гораздо более трудной проблемой, нежели аналогичная проблема для систем с сосредоточенными параметрами. Это связано с тем, что движение систем с распределенными параметрами опи-

сывается сложными функциональными уравнениями, например, уравнениями в частных производных при наличии сложных граничных и начальных условий. К тому же для таких систем сильно усложняется характер дополнительных ограничений, сопутствующих требованиям практической постановки задачи.

Вариационные задачи для распределенных систем до сих пор рассматривались лишь в связи с прямыми методами вариационного исчисления, которые применялись для решения некоторых уравнений математической физики, а также для решения простейших задач на определение функции нескольких независимых переменных, минимизирующей кратный интеграл, зависящий от этой функции и ее частных производных первого порядка [34].

Несмотря на довольно хорошо развитую теорию оптимальных систем с сосредоточенными параметрами и наличие мощных средств по реализации таких систем, имеется относительно мало примеров их практического внедрения. Это положение отчасти можно объяснить тем, что реальные объекты, требующие создания оптимальных управляющих устройств, являются сложными агрегатами, описание которых не может быть втиснуто в рамки обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, возникла необходимость дальнейшего развития теории оптимальных систем и ее обобщения на случай систем с распределенными параметрами. Это направление обобщения теории оптимальных систем является одним из главнейших, так как оно находит практическое применение во многих технических приложениях.

Перейдем теперь к рассмотрению ряда основных и широко распространенных производственных объектов, для которых при создании систем управления необходимо учитывать распределенность параметров объекта в пространстве.

На рис. 1 изображена схема проходной нагревательной печи [79, 107—108]. Опишем процесс теплообмена между неподвижной греющей средой, характеризуемой функцией распределения температуры

$$u = u(y, t), 0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

и материалом, движущимся в положительном направлении

оси y со скоростью v , зависящей от времени t , $v(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$. Состояние нагреваемого материала характеризуется функцией распределения его температуры по

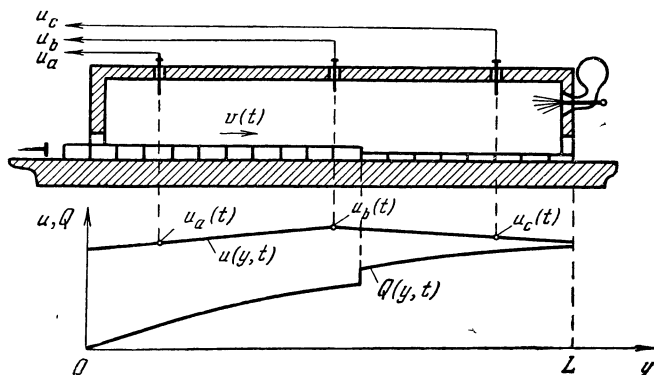


Рис. 1.

толщине материала, по длине печи и во времени:

$$Q = Q(x, y, t), 0 \leq x \leq S, 0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Теплофизические параметры материала определяются заданием функции

$$b = b(y, t) > 0, 0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T.$$

Процесс внутреннего теплообмена описывается уравнениями

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - bv \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (3)$$

где a — коэффициент температуропроводности.

Граничные условия имеют вид

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha [u(y, t) - Q(S, y, t)], \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент теплообмена.

При этом материал входит в греющую зону с условием

$$Q(x, 0, t) = Q_r(x, t), 0 \leq x \leq S, 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где $Q_r(x, t)$ — заданная функция.

Если нагреваемый материал можно считать в теплотехническом отношении «тонким» телом *), то распределение температуры материала будет описываться функцией

$$Q(y, t), 0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T,$$

уравнения теплообмена (3) — (5) значительно упростятся и примут вид

$$b \frac{\partial Q}{\partial t} + bv \frac{\partial Q}{\partial y} + Q = u(y, t) \quad (7)$$

с граничным условием при входе в греющую зону

$$Q(0, t) = Q_r(t), \quad (8)$$

где $Q_r(t)$ — также известная функция, характеризующая изменение во времени температуры входящего в зону обработки материала.

Продвигаясь через зону обработки, материал нагревается. Если функции $b(y, t)$ и $v(t)$ известны, то каждой конкретной функции $u(y, t)$ при данном начальном условии

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y)$$

соответствует определенная функция распределения температуры материала $Q(x, y, t)$. При этом, очевидно, температура материала на выходе из печи в точке $y = L$ зависит от характера изменения распределения температуры в печи за время пребывания данного элемента материала в печи. Кроме того, температура материала на выходе из печи зависит от характера изменения скорости $v(t)$ за тот же интервал времени. Эта температура также зависит от толщины слоя материала S и его теплофизических свойств, таких, как теплопроводность, теплоемкость, удельный вес и т. д. Таким образом, температура материала на выходе из печи зависит от всей «истории» нагрева от момента входа до момента выхода данного сечения материала из печи. Задача управления таким объектом состоит в том, чтобы

*) «Тонкие» тела характеризуются тем, что для них критерий Био $Bi = \alpha S / \lambda \leq 0,25$.

стабилизировать температуру материала на выходе из печи. Это требуется, например, при прокатке, когда в печи нагреваются металлические заготовки (слябы, блюмы и т. д.). При этом обычными возмущающими факторами являются изменение скорости продвижения металла в печи, связанное с изменением темпа работы прокатного стана, и изменение толщины заготовок и марок стали. В этом случае управляющее воздействие, которым является распределение температуры вдоль рабочего пространства печи $u(y, t)$, должно зависеть от характера распределения температуры металла $Q(x, y, t)$. Задача состоит в том, чтобы создать такую систему управления заданием регуляторов температур зон печи, чтобы отклонение средней температуры заготовки, выходящей из печи:

$$\bar{Q}(y, t) = \frac{1}{S} \int_0^S Q(x, y, t) dx, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

при $y = L$, от температуры, заданной технологической инструкцией, было наименьшим в каком-то определенном смысле. Например, часто требуется, чтобы функционал

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - \bar{Q}(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (10)$$

где $Q^*(t)$ — заданная программа температуры выходящего из печи металла, достигал своего минимального значения. Заметим тут же, что при $\gamma \rightarrow \infty$ мы получим минимаксную оценку отклонения, т. е.

$$J = \max_{[0, T]} |Q^*(t) - \bar{Q}(L, t)|. \quad (11)$$

В дальнейших главах работы будет показано, что оптимальное изменение распределения температуры печи $u(y, t)$ определяется в каждый момент времени t уже не конечным набором числовых величин, как это имеет место в системах с сосредоточенными параметрами, а совокупным распределением температуры металла в пространстве и во времени. Таким образом, в системах с распределенными параметрами управляющие воздействия связаны с распре-

делениями, характеризующими состояние управляемого объекта, посредством функциональных соотношений.

В рассматриваемом процессе нагрева заготовок задача управления может осложняться тем обстоятельством, что проходная печь может, вообще говоря, иметь несколько зон подогрева металла. Это имеет место, например, в методических нагревательных печах и в печах скоростного нагрева. Температура в каждой зоне печи стабилизируется с помощью своего регулятора. На управляющие воздействия, которыми в данном случае являются температуры отдельных зон печи, обычно накладываются ограничивающие условия, вытекающие из технических требований. Температуры в печи не должны или не могут выходить за определенные допустимые пределы, обусловленные стойкостью огнеупорной футеровки $A_1 \leq u(y, t) \leq A_2$. Часто соседние зоны печи оказывают сильное влияние друг на друга. Это означает, что перепад температур по длине печи не может превышать некоторое определенное значение, т. е. $|du/dy| \leq A_3$. Далее, могут быть наложены ограничивающие условия на температуру в разных точках нагреваемой заготовки металла. Например, чтобы избежать оплавления поверхности, излишнего окалинообразования или обезуглероживания, нельзя превышать температуру поверхности заготовки сверх определенного значения, т. е. $Q(x, y, t) \leq A_4$. Кроме того, бывают недопустимы большие градиенты температурного поля внутри самой заготовки $|\partial Q/\partial x| \leq A_5$, что диктуется требованиями термообработки. Наличие внутренних термонапряжений, которые связаны с температурным полем через соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных, также накладывает определенные ограничения на допустимые управляющие воздействия. Более точно аналогичная задача будет сформулирована ниже, когда будет рассматриваться постановка задачи оптимального нагрева массивных тел.

Все эти ограничения сильно затрудняют решения задачи оптимального управления, делают математическую постановку задачи неклассической.

К числу объектов, задача управления которыми аналогична описанной выше, относятся также проходные многозонные печи скоростного нагрева, проходные многозонные (в том числе и вращающиеся) печи для сушки и обжига

сыпучих материалов, разного рода теплообменные аппараты, агломерационные ленты, установки для нанесения покрытий и многие другие промышленные объекты.

Например, важнейшей задачей повышения пропускной способности сушильных агрегатов является интенсификация процессов сушки. Опыт передовых предприятий и ряд исследований показали, что наиболее эффективными мероприятиями в этом направлении являются: перевод сушильных камер на скоростную циркуляцию сушильного агента и автоматизации регулирования параметров сушки. Техничко-экономические расчеты показывают, что интенсификация процессов сушки действующих сушильных агрегатов обходится в несколько раз дешевле строительства новых сушильных цехов при прочих равных условиях [38]. В работе [8] указывается, что выбор оптимального графика изменения температуры греющей среды и обдува воздухом может дать значительное увеличение производительности сушильного агрегата.

Процесс сушки влажного материала с характеристическим размером S , $0 \leq x \leq S$, в проходном сушильном агрегате длины L , $0 \leq y \leq L$, описывается системой дифференциальных уравнений процесса тепло- и массообмена следующего вида:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} + b_1 v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial Q_2}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} + b_2 v \frac{\partial Q_2}{\partial y}. \quad (13)$$

Состояние объекта в этом случае характеризуется двумя функциями, определенными при $0 \leq x \leq S$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$. Функция $Q_1(x, y, t)$ характеризует распределение температуры в материале, а функция $Q_2(x, y, t)$ характеризует его влагосодержание.

Эти уравнения дополняются системой краевых условий

$$Q_1(x, 0, t) = Q_{r1}(x, t), \quad (14)$$

$$Q_2(x, 0, t) = Q_{r2}(x, t), \quad (15)$$

$$\lambda \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha [u(y, t) - Q_1(S, y, t)], \quad (16)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (17)$$

а также

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Big|_{x=S}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (19)$$

Начальные условия имеют вид

$$Q_1(x, y, 0) = Q_{01}(x, y), \quad (20)$$

$$Q_2(x, y, 0) = Q_{02}(x, y). \quad (21)$$

В этих уравнениях $v(t) \geq 0$ есть скорость (вообще говоря, зависящая от времени) продвижения материалов в положительном направлении оси y . Функции $b_1 = b_1(y, t)$ и $b_2 = b_2(y, t)$, а также постоянные коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \alpha, \alpha_1, \beta$ характеризуют параметры тепло- и массообмена данного материала. Функции

$$Q_{r1}(x, t), Q_{r2}(x, t), Q_{01}(x, y), Q_{02}(x, y)$$

считаются известными.

Задача оптимизации в этом случае состоит в том, чтобы, используя управляющее воздействие $u(y, t)$, т. е. температуру в рабочем пространстве сушила, наилучшим образом, в каком-то заданном смысле, компенсировать различного рода возмущающие воздействия в виде изменения начального влагосодержания и пористости материала, толщины слоя, скорости продвижения материала через сушило и т. д.

Если обозначить через $\bar{Q}_2(y, t)$ среднюю по сечению влажность материала:

$$\bar{Q}_2(y, t) = \frac{1}{S} \int_0^S Q_2(x, y, t) dx, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (22)$$

то критерий оптимальности, который нужно минимизировать, можно представить в следующем виде:

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - \bar{Q}_2(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (23)$$

где $Q^*(t)$ есть заданная программа средней влажности материала на выходе из сушила при $y = L$.

На управляющее воздействие $u(y, t)$ накладываются условия

$$A_1 \leq u(y, t) \leq A_2 \text{ и } \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq A_3, \quad (24)$$

где A_1, A_2, A_3 — заданные константы. Если температура внутри материала не должна превышать некоторого значения A_4 , то получим новое условие $Q_1(x, y, t) \leq A_4$.

Многие химико-технологические процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. К объектам подобного рода относится широкий класс трубчатых химических реакторов с неподвижным (стационарным) слоем катализатора, скорость падения активности которого зависит от физико-химических параметров внутри реакторов (температуры, концентрации реагирующих компонентов и т. д.).

Задача оптимального управления реакторами данного типа состоит в том, чтобы получить на выходе из реактора наибольшее общее количество какой-либо одной компоненты при наличии ограничений на количества других компонент, а также при ограничении на ряд других параметров объекта. Если мы будем пытаться получить максимум выхода нужной компоненты в каждый момент времени, то одновременно будет возрастать скорость падения активности катализатора, и в результате полученное за определенный конечный промежуток времени общее количество интересующего нас продукта не будет максимальным. Поэтому естественно возникает задача найти такие изменения управляющих воздействий, оказываемых на реактор, чтобы получить максимум продукции за кампанию реактора. Это так называемая квазистатическая оптимизация контактных аппаратов [100]. В качестве управляющих воздействий здесь служат некоторые из начальных значений параметров на входе в реактор (начальные концентрации некоторых веществ, начальные температуры и т. д.).

Рассмотрим, например, циклический реактор с неподвижным слоем катализатора [132]. В поступающем сырье идет реакция под действием катализатора. Скорость реакции зависит от температуры, а сама реакция идет с поглощением тепла так, что по мере развития реакции охлаж-

дается слой катализатора и поэтому снижается скорость реакции. Когда температура достигает определенного нижнего уровня, работа прекращается, слой подогревается и процесс повторяется. Температура, до которой нагревается слой катализатора, ограничивается стойкостью катализатора и наличием нежелательных реакций при достаточно высоких температурах. Во время работы на температуру слоя катализатора можно влиять только посредством температуры сырья на входе в реактор.

Рассмотрим случай, когда скорость реакции зависит только от температуры Q_1 и не зависит от концентрации Q_2 , т. е. в любой фиксированной точке x имеем:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = \exp\left(\alpha_0 - \frac{\beta_0}{Q_1}\right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (25)$$

где $Q_1 = Q_1(x, t)$ — температура в точке x в момент времени t . При малых отклонениях параметров от их средних значений уравнение (25) можно представить в виде

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = \exp(\alpha + \beta Q_1). \quad (26)$$

Предполагая, что коэффициент теплопередачи между слоем катализатора и веществом столь велик, что оба реагента находятся при одной температуре, и что теплопередача через слой в основном конвективная, процесс теплообмена в реакторе можно описать уравнением в частных производных

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + v \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -h \exp(\alpha + \beta Q_1), \quad (27)$$

где h — теплота реакции, v — величина, зависящая от скорости продвижения материала через реактор и отношения теплоемкости материала к теплоемкости слоя катализатора.

Необходимо так управлять температурой материала $Q_1(t, 0)$ на входе в реактор, чтобы максимизировать степень превращения продукта, которая определяется выражением

$$\int_0^L \exp(\alpha + \beta Q_1(t, x)) dx. \quad (28)$$

Однако во многих случаях критерий оптимальности должен иметь экономический характер. Если обозначить через $R(Q_1(t, 0))$ функцию стоимости получения температуры $Q_1(t, 0)$, которая является управляющим воздействием, то критерий оптимальности, который нужно максимизировать, можно записать в виде

$$\int_0^T \left[\int_0^L \exp(\alpha + \beta Q_1(t, x)) dx - R(Q_1(t, 0)) \right] dt. \quad (29)$$

При этом $R(Q)$ является возрастающей функцией аргумента Q .

Другим важным классом объектов физико-химической технологии являются установки для разделения смесей, как жидких, так и газовых, например, на основе явления сорбции и десорбции. Построенные на этом принципе установки для разделения смесей, как правило, представляют собой длинные реакторы, вдоль которых распределены все основные физико-химические параметры процесса (температура, концентрации, активность катализатора и т. д.).

Эффективность разделения смесей, так же как и соответствующая задача оптимизации, может характеризоваться различными способами: 1) при заданном расходе продукта на выходе путем управления подачей греющего агента (например, пара) получить максимальный коэффициент разделения, т. е. получить наибольшую концентрацию заданного вещества в выходном продукте, 2) при заданной концентрации интересующего нас вещества в выходном продукте так управлять подачей греющего агента, чтобы получить наибольший выход готового продукта или, наконец, 3) при заданной концентрации интересующего нас вещества в выходном продукте и заданном его расходе на выходе из агрегата минимизировать расходы на обогрев.

Для описанных выше поточных производственных процессов характерным является направленное продвижение потока обрабатываемых материалов через ряд последовательно распределенных в пространстве зон обработки. Управляющие воздействия (например, температуры различных зон проходных нагревательных печей) также распределены в пространстве, и воздействие на обрабатываемые

мый материал производится сразу по всей длине зоны обработки.

В отличие от периодических процессов, где задача управления состоит в выработке и реализации требуемой программы изменения во времени воздействия на обрабатываемый материал, при поточном методе производства основная задача управления состоит в выборе и поддержании такой формы распределенного в пространстве воздействия на движущийся поток материала, при котором обеспечивается требуемое изменение его состояния.

Необходимость управления в этом случае обуславливается тем, что имеются различного рода возмущающие воздействия: изменение производительности агрегата, изменение скорости продвижения материалов через зоны обработки, изменение начальных значений некоторых важных параметров на входе в зону обработки, наконец, изменение требуемого состояния на выходе из зоны обработки. Для проходных нагревательных и методических печей примерами такого рода возмущающих воздействий могут служить изменение начальной температуры входящей в печь заготовки металла, изменение ее размеров или марки стали, для сушильных агрегатов возмущениями могут являться изменение начальной влажности, пористости материала и т. д.

По отношению к подобным объектам задача оптимального управления состоит в определении таких управляющих воздействий, совместимых с наложенными на них ограничениями, при которых отклонение интересующего нас параметра на выходе из заданной зоны обработки (или в другой заданной точке) от желаемого значения в каком-либо определенном смысле было бы минимальным. Если имеются дополнительные условия, наложенные на параметры обрабатываемого материала, то и они должны выполняться.

Рациональное управление такими важными агрегатами металлургической и химической промышленности, как доменные и мартеновские печи, коксовые батареи, агломерационные ленты, дистилляционные колонны, установки для разделения смесей и др., должно производиться с учетом распределения температур и концентраций соответствующих материалов в пространстве. Управляющие воздействия

в этом случае также представляют собой определенные пространственные распределения, изменяющиеся со временем.

В металлургическом производстве большое значение придается быстрому и качественному нагреву металла в колодцах и камерных печах. Особенно часто встречаются следующие две ситуации, в которых возникает необходимость решения задач оптимального управления нагревом металла.

1. Работа прокатного стана или другого оборудования, предназначенного для горячей обработки металла давлением (например, прессы, кузнечные молоты), целиком зависит от темпа работы нагревательного отделения. В этом случае требуется так *оптимально* управлять нагревом, чтобы получить заданное распределение температуры по всему объему металла за минимальное время. Задачи такого рода можно назвать задачами оптимального по быстродействию нагрева металла.

2. Если время ведения процесса нагрева является фиксированным (например, когда темп работы печи определяется темпом работы прокатного стана), то требуется организовать такое *оптимальное* управление нагревом, чтобы за заданное время получить наилучшее качество нагрева. Решению этой задачи посвящена одна из глав этой книги. Здесь рассмотрим один пример постановки задачи такого рода. Пусть распределение температуры $Q = Q(x, t)$ по толщине тела x ($-S \leq x \leq S$) и во времени t ($0 \leq t \leq T$) подчиняется дифференциальному уравнению в частных производных 2-го порядка (уравнение теплопроводности Фурье)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (30)$$

где a — коэффициент температуропроводности. Краевые и начальные условия имеют вид

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha_1 [u_1(t) - Q(S, t)], \quad (31)$$

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=-S} = \alpha_2 [u_2(t) - Q(-S, t)], \quad (32)$$

$$Q(x, 0) = Q_0(x). \quad (33)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности; α_1 и α_2 — коэф-

фициенты теплообмена между греющей средой и металлом; $Q_0(x)$ — заданная функция начального распределения температуры тела по толщине.

На управляющие функции, характеризующие температуры греющих сред $u_1(t)$, $u_2(t)$ на отрезке времени t , $0 \leq t \leq T$, накладываются в общем случае дополнительные ограничения

$$A_1 \leq u_1(t) \leq A_2, \quad (34)$$

$$A_3 \leq u_2(t) \leq A_4. \quad (35)$$

При недопустимости резких перепадов температур внутри нагреваемого тела вводится ограничение на градиент температурного поля внутри тела

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \leq A_5. \quad (36)$$

В процессе нагрева заготовки существенным также является ограничение времени прогрева тела. Это условие можно записать следующим образом:

$$T \leq A_6, \quad (37)$$

где A_6 — наибольшая допустимая продолжительность прогрева тела. Во всех условиях (34) — (37) величины A_1, \dots, A_6 являются заданными и постоянными.

Задачу оптимального нагрева слитков в этом случае можно сформулировать следующим образом: найти такой закон изменения температуры греющей среды (например, нагревательного колодца или печи) во времени, чтобы за фиксированное время обеспечить минимальное отклонение в каком-либо определенном смысле распределения температуры заготовки от заданного распределения.

Для описанного выше процесса теплообмена требуется определить функции управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, таким образом, чтобы при выполнении условий (34) — (37) функционал

$$J = \int_{-S}^S |Q^*(x) - Q(x, T)|^\gamma dx, \quad \gamma \geq 1, \quad (38)$$

характеризующий отклонение истинного распределения температуры $Q(x, T)$ по всей толщине тела — $S \leq x \leq S$

в момент времени $t = T$ от заданного распределения $Q^*(x)$ был минимальным.

Иногда задача может ставиться несколько иным образом: найти такой закон изменения температуры греющей среды во времени, чтобы за минимальное время получить отклонение распределения температуры заготовки от некоторого заданного распределения, не превышающее допустимого значения. При этом часто требуется, чтобы были приняты во внимание дополнительные факторы: ограниченность температуры печи и ограниченность скорости ее изменения во времени, а также ограниченность допустимой температуры поверхности слитка и количества окалины, перепадов температур внутри слитка и связанных с ними температурных напряжений.

Рассмотрим теперь задачу нагрева массивного тела в том случае, когда нагрев происходит с одной стороны, по закону лучистого теплообмена [104]. Тогда краевые условия (31) и (32) заменяются условиями

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = c \{ [u(t)]^4 - [Q(S, t)]^4 \}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=-S} = 0. \quad (40)$$

Распределение температуры внутри тела может быть описано через температуру его поверхности $Q(S, t)$ с помощью соотношения

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) Q(S, \tau) d\tau, \quad (41)$$

где $K(x, t, \tau)$ — известная функция своих аргументов $-S \leq x \leq S$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$, называемая *функцией влияния*, или *функцией Грина*.

Дифференцируя соотношение (41) по x и подставляя значение $x = S$, в силу краевого условия (39) получим нелинейное интегральное уравнение относительно функции $Q(S, t)$:

$$\lambda \int_0^t K_x'(x, t, \tau) \Big|_{x=S} Q(S, \tau) d\tau = c \{ [u(t)]^4 - [Q(S, t)]^4 \}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (42)$$

Если функция управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, задана, то из интегрального уравнения (42) можно найти функцию $Q(S, t)$, а затем, пользуясь соотношением (41), определить $Q(x, t)$.

Здесь также можно поставить задачу определения такого оптимального управляющего воздействия $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющего условиям типа (34) — (37), чтобы функционал (38) достиг своего минимума.

Рассмотрим теперь более общую формулировку задачи оптимального управления нагревом массивных тел.

Пусть происходит нагрев тела, заполняющего некоторую пространственную область D , ограниченную поверхностью G . Будем считать, что температура греющей среды, которую обозначим через $u(t)$, не зависит от пространственных координат x, y, z .

Обозначая температурное распределение в теле через $Q(x, y, z, t)$, можем записать следующее уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a\Delta Q, \quad (43)$$

с начальным условием

$$Q(x, y, z, 0) = Q_0(x, y, z), \quad (44)$$

где a — коэффициент теплопроводности и Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничное условие III-го рода, характеризующее условия лучистого и конвективного теплообмена между поверхностью тела и греющей средой, будет иметь вид

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{n}} \Big|_G = \alpha_1 \{ [u^*(t)]^4 - [Q]^4 \} + \alpha_2 \{ u(t) - Q \} \Big|_G, \quad (45)$$

где \bar{n} — вектор нормали к поверхности G в точке этой поверхности; α_1, α_2 — коэффициенты соответственно лучистого и конвективного теплообмена.

Управление процессом нагрева осуществляется обычным путем — изменением положения регулирующего органа. Будем описывать положение регулирующего органа

функцией времени $\omega(t)$, и подчиним эту функцию следующему ограничению:

$$A_3 \leq \omega(t) \leq A_4, \quad (46)$$

где константы A_3 и A_4 соответствуют крайним положениям регулирующего органа.

Теперь необходимо задать связь между $u(t)$ и $\omega(t)$. В терминах теории автоматического регулирования требуется определить передаточную функцию системы, входом которой служит положение регулирующего органа $\omega(t)$, а выходом — температура греющей среды $u(t)$. Возможны, по крайней мере, два способа описания этой передаточной функции. Простейший из них состоит в следующем. Будем считать, что между входом и выходом системы имеются лишь два элементарных звена: звено запаздывания, учитывающее задержку из-за конечной скорости подачи газа и конечной длины трубопровода между управляющей заслонкой и рабочим пространством печи, и инерционное звено, учитывающее постепенность нарастания температуры в печи при скачкообразном увеличении подачи топлива. При этом связь между $u(t)$ и $\omega(t)$ может быть выражена следующим дифференциальным уравнением:

$$B \frac{du}{dt} + u = k\omega(t - \tau), \quad (47)$$

где τ — время запаздывания, B — постоянная времени инерционного звена, k — статический коэффициент передачи.

Более точное описание связи между функциями $u(t)$ и $\omega(t)$ может быть получено, если произвести полный расчет теплового баланса печи, решая совместно с уравнением теплопроводности (43) — (45) аналогичные уравнения теплопроводности, описывающие теплообмен в системе «футеровка — греющая среда — нагреваемое тело».

При формулировке оптимальных задач нагрева следует принять в рассмотрение ряд ограничений, важнейшими из которых являются ограничения на величину температуры поверхности и величину внутренних напряжений в теле.

Если первое ограничение можно записать в довольно простом виде

$$Q(x, y, z, t)|_G \leq A_5, \quad (48)$$

то ограничение второго типа выглядит сложнее. Действительно, как известно [88], функция термоупругого потенциала $Q_1(x, y, z)$ в так называемом квазистатическом случае (когда можно пренебречь влиянием ускорений перемещений в рассматриваемом теле) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\Delta Q_1 = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha Q, \quad (49)$$

где $Q(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, μ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент теплового расширения.

Используя закон Гука, можно от потенциала перейти непосредственно к напряжениям

$$\sigma_{ik}(x, y, z, t) = 2g \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial i \partial k} - \delta_{ik} \Delta Q_1 \right), \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases} \quad (50)$$

где $i, k = x, y, z$ и g — модуль сдвига.

В соответствии с теорией прочности ограничивающие условия накладываются на некоторую функцию f от тензора σ_{ik} , т. е.

$$f(\sigma_{ik}(x, y, z, t)) \leq f_0, \quad (51)$$

где f_0 — некоторая фиксированная константа.

Если за критерий качества нагрева выбрать следующий функционал:

$$J = \iiint_D [Q^*(x, y, z) - Q(x, y, z, T)]^2 dx dy dz, \quad (52)$$

где $Q^*(x, y, z)$ — требуемое распределение, то можно сформулировать следующие задачи оптимального управления нагревом.

1. Для уравнения теплопроводности (43) — (45) и уравнения связи (47) требуется подобрать такое управление $\omega(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющее условию (46), чтобы функционал (52) удовлетворил условию $J \leq \delta$ (где δ — некоторое положительное фиксированное число, характеризующее точность приближения к желаемому распределению) за минимально возможное время T , причем

в любой момент времени t , $0 \leq t \leq T$, должны быть выполнены ограничения (48) и (51).

2. Для уравнения теплопроводности (43) — (45), уравнения связи (47) и заданного времени нагрева T требуется найти такую функцию $\omega(t)$, $0 \leq t \leq T$, стесненную условием (46), чтобы функционал (52) достигал своего минимально возможного значения в момент $t = T$, и в течение всего процесса нагрева выполнялись ограничения (48) и (51).

С аналогичными задачами сталкиваются при создании системы управления тепловым режимом электропечей для вытягивания монокристаллов германия и кремния из расплава при производстве особо чистых полупроводниковых материалов [25].

Качество кристаллов и выход годного материала можно значительно повысить, обеспечивая форму фронта кристаллизации, приближающуюся к некоторой заданной форме.

Задача оптимального управления этими процессами состоит в выборе такого режима секций электрических нагревателей печи, чтобы форма изотермической поверхности фронта кристаллизации была близка к заданной. Иными словами, необходимо минимизировать определенную меру отклонения изотермической поверхности от некоторой заданной поверхности.

При более общей постановке задачи оптимального управления процессом вытягивания преследуется цель получения заданного распределения плотности дислокаций в объеме выращиваемого монокристалла. Поскольку плотность дислокаций определяется распределением температурных градиентов в объеме кристалла и во времени, минимизируемый функционал можно представить в следующем виде:

$$J = \int_0^T \int_D F(T, \text{grad } Q) \, d\rho \, dt, \quad (53)$$

где T — некоторое фиксированное время, D — объем монокристалла, F — некоторая функция и Q — функция распределения температуры в монокристалле в зависимости от времени t и пространственных переменных.

С задачей наилучшего управления пространственными полями мы сталкиваемся в машиностроении в таком важном технологическом процессе как индукционная закалка, которая служит для получения новых более прочных структур в поверхностном слое. Теория и практика термообработки показали, что для получения соответствующего распределения структуры по сечению детали требуется определенное распределение теплового поля как во времени, так и в пространстве. Для достижения высокого качества индукционной заправки и стабильности ее результатов (глубины слоя, его структуры и твердости) большое значение имеет характер режима нагрева (так называемое дозирование нагрева).

Процесс одномерного индукционного нагрева описывается неоднородным уравнением теплопроводности с наличием члена, учитывающего внутренние источники тепла [60], [85]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + f(x, t, u(t)). \quad (54)$$

Здесь функция $f(x, t, u(t))$ имеет вид

$$f(x, t, u(t)) = u(t) \exp(-sx), \quad (55)$$

где s — показатель затухания, который обратно пропорционален глубине проникновения электромагнитной волны в нагреваемый материал, x — расстояние от поверхности детали до рассматриваемой точки, а $u(t)$ — величина, пропорциональная изменению во времени напряжения на индукторе установки. Эту величину можно рассматривать в простейшем случае как управляющее воздействие, на нее могут накладываться различного рода дополнительные ограничения, например, в виде неравенств

$$A_1 \leq u(t) \leq A_2. \quad (56)$$

Задача оптимального управления индукционным нагревом состоит в том, чтобы найти такой закон изменения управляющих параметров, при котором получающееся температурное поле было бы как можно ближе к требуемому распределению, определяемому технологическим режимом нагрева детали.

При создании систем автоматического управления крупными гидротурбинными установками возникает необходимость учета распределенности параметров трубопровода, по которому вода подводится к колесу турбины. Регулирование скорости вращения колеса турбины осуществляется путем изменения степени закрытия заслонки, находящейся на конце трубопровода. Чтобы минимизировать приращение кинетической энергии вращения ротора турбины при сбросе нагрузки, нужно быстро закрыть заслонку. Однако быстрое закрытие заслонки вызывает резкое и быстрое повышение давления в подводящем трубопроводе, что может привести к разрушению стенок трубопровода. Оптимальное управление заслонкой должно быть таким, чтобы при сбросе нагрузки за заданное время минимизировать приращение кинетической энергии ротора турбины при условии, что давление в трубопроводе не превысит допустимой величины. Приращение кинетической энергии ротора во время переходного процесса, происходящего после сброса нагрузки, можно выразить формулой

$$J = \int_0^T [Q_1(L, t)]^{3/2} Q_2(L, t) dt. \quad (57)$$

В других случаях оптимальное управление состоит в том, чтобы перевести гидротурбину из одного стационарного состояния в другое стационарное состояние за минимальное время при условии, что ни одна из заданных величин (например, давление в подводящем трубопроводе) не должна выйти за допустимые пределы.

В выражении (57) функции $Q_1(y, t)$ и $Q_2(y, t)$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$, описывают соответственно распределение давления и скорости движущейся жидкой среды в подводящем трубопроводе длины L . Эти функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial y} = c_1 \frac{\partial Q_2}{\partial t}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial y} = c_2 \frac{\partial Q_1}{\partial t}, \quad (59)$$

где c_1 и c_2 — заданные коэффициенты.

Начальные условия имеют вид

$$Q_1(y, 0) = Q_{01}(y), \quad (60)$$

$$Q_2(y, 0) = Q_{02}(y). \quad (61)$$

Краевые условия имеют вид

$$Q_1(0, t) = Q_{r1}(t), \quad (62)$$

$$Q_2(L, t) = u(t). \quad (63)$$

Здесь функции $Q_{r1}(t)$, $Q_{01}(y)$, $Q_{02}(y)$ и управляющая функция $u(t)$ считаются заданными функциями. Управляющая функция $u(t)$ имеет смысл скорости движения жидкости, которая регулируется с помощью заслонки, находящейся непосредственно перед ротором турбины.

Задача оптимизации состоит в том, чтобы определить управление $u(t)$, $A_1 \leq u(t) \leq A_2$, минимизирующее функционал (57) при условии, что давление в подводящем трубопроводе не должно превышать определенного значения A_3 , т. е. $Q_1(y, t) \leq A_3$.

С задачей наилучшего управления при необходимости учета волновых явлений также сталкиваются при бурении скважин, где на поступательное движение турбобура сильное влияние оказывают волновые процессы, связанные с упругостью передающего вала. Оптимальное управление в этом случае состоит в том, чтобы подобрать соответствующую скорость вращения вала и осевое усилие на его верхнем конце с целью обеспечения максимальной скорости проходки. Причем ясно, что здесь также должны выполняться некоторые ограничения, связанные, например, с прочностью металлических конструкций.

В радиолокации и в радиосистемах, работающих на сверхвысоких частотах, чрезвычайно актуальным является вопрос о разработке эффективного способа генерации электромагнитной энергии в направленных волноводах и осуществление излучения этой энергии с целью получения строго определенных результатов. Это направление является одним из интереснейших в теории колебаний сверхвысоких частот.

В связи с большой программой строительства крупных магистральных газопроводов протяженностью в сотни километров, большое народнохозяйственное значение имеет

автоматизация газокompрессорных станций с целью поддержания заданного графика расхода газа и давления на стороне потребителя. Выбор оптимальной системы управления должен основываться на исследовании переходных процессов в магистральных газопроводах [49], [89]. Существенным является то, что газокompрессорные станции находятся на большом расстоянии от потребителя. Таким образом, управление газокompрессорными установками должно вестись с учетом распределенности регулируемых параметров в длинном трубопроводе.

Задача заключается в том, чтобы так изменять режим работы газокompрессорных установок, чтобы колебания давления на стороне потребителя были минимальными.

Процесс передачи газа по длинному газопроводу длины L , $0 \leq y \leq L$, также может быть описан уравнениями типа (58) и (59) с теми же начальными условиями (60), (61), но характер граничных условий будет при этом несколько иной. Если газокompрессорная станция имеет координату $y = 0$, а потребитель имеет координату $y = L$, то краевые условия примут вид

$$Q_1(0, t) = u(t), \quad (64)$$

$$Q_2(L, t) = Q_{r_2}(t), \quad (65)$$

где $Q_{r_2}(t)$ — заданная функция расхода газа во времени, которая характеризует нагрузку со стороны потребителя. Управляющим воздействием $u(t)$ здесь является давление, поддерживаемое в начале газопровода с помощью турбокompрессорных установок.

В этом случае также нужно определить управляющее воздействие $u(t)$, $A_1 \leq u(t) \leq A_2$, такое, чтобы функционал

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - Q_1(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (66)$$

достиг своего наименьшего возможного значения.

Аналогичные задачи оптимизации имеют место в системах гидротранспорта и вибротранспорта [113]. Например, интерес представляет задача перекачки пульпы (смеси твердого и жидкого: уголь, торф, порода с водой и т. д.)

по длинным трубопроводам. Особенность таких систем состоит в том, что в них также надо учитывать явления удара и осаждения взвешенных частиц. В вибротранспорте также весьма существенно наличие пространственной распределенности линии транспорта. Применение методов оптимизации могло бы сильно повысить экономичность работы этих систем.

В работе [58] рассматривается одна из важнейших задач автоматического управления процессом вытягивания волокон в ткацком производстве. Автор выводит основное интегральное уравнение автоматического регулирования процесса, которое определяет вид так называемой кривой утонения $Q(x, t)$, характеризующей число волокон в каждой точке x вытяжного поля в данный момент времени t . Задача оптимального управления этим процессом состоит в том, чтобы определить такой режим вытягивания, т. е. подобрать такие переменные скорости питающей и вытягивающей пар, чтобы при заданной производительности отклонение числа волокон в поперечном сечении на выходе при $x = L$ (L — координаты вытягивающей пары) от заданного значения Q^* было минимальным в каком-либо определенном смысле, например, чтобы

$$\int_0^T |Q^* - Q(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (67)$$

где T — фиксированное время, достиг минимума.

В практике капитального строительства широко применяется процесс электроуплотнения водонасыщенного рыхлого грунта путем пропускания через него постоянного электрического тока. Основным параметром данного процесса является функция $H(x, t)$, характеризующая напор поровой воды уплотняемого грунта. Закон изменения этой величины в пространстве и во времени подчиняется дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка типа уравнения консолидации [63]. Удалось выявить вид зависимости функции $H(x, t)$ от параметров процесса, входящих в основном в граничные условия [86]. Полученные зависимости могут служить основой для расчета оптимального режима работы установки (оптимальные плотности тока на аноде, оптимальные расстояния между

электродами) для получения наибольшего уплотнения за данный промежуток времени.

Наиболее общие исследования следящих систем, включая линейные и нелинейные системы, могут быть проведены с использованием интегральных соотношений между входными и выходными параметрами системы. Широкий класс нелинейных следящих систем описывается интегральным соотношением

$$Q(t) = \int_0^t K(t, \tau) F(u(\tau)) d\tau, \quad (68)$$

где $K(t, \tau)$ — импульсная переходная функция, $F(u)$ — нелинейная функция и $Q(t)$ — выходной сигнал.

Задача оптимизации такой следящей системы состоит в создании такого управляющего устройства, чтобы выходной сигнал $Q(t)$ в определенном смысле наилучшим образом отслеживал задающий сигнал $Q^*(t)$, т. е., например, функционал

$$\int_0^T |Q^*(t) - Q(t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (69)$$

достиг минимума.

Таким образом, и в этом случае мы приходим к задаче оптимизации некоторого распределения, подчиненного интегральному уравнению типа (68).

Рациональная разработка нефтяных месторождений также является проблемой оптимального «управления» объектом с распределенными параметрами [30]. Действительно, нефть, залегающая глубоко под поверхностными слоями земли, находится в пористой среде под давлением вышележащих слоев. Рациональная разработка месторождения подразумевает, что по данным о некоторых параметрах, размерах и форме месторождения нужно определить оптимальный вариант эксплуатации месторождения, т. е. определить число, координаты расположения на нефтеносном поле и временной график работы эксплуатационных и нагнетательных скважин.

Более точно эту задачу можно сформулировать следующим образом [31]. Имеется нефтеносный слой (рис. 2),

ограниченный контуром нефтеносности 3 и контуром питания 4, т. е. линией, за которой или кончается пласт (в случае сброса), или начинается вода.

Предполагается, что известны определенные георазведкой все необходимые данные пласта: его протяженность, мощность (толщина) s , проницаемость пласта k , вязкость нефтесодержащей среды μ , коэффициент пьезопроводности или упругости пласта h . Требуется определить дебит каждой скважины. Сам дебит определяется через давление p с помощью закона Дарси. Поэтому необходимо найти функцию распределения давления p в пласте, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

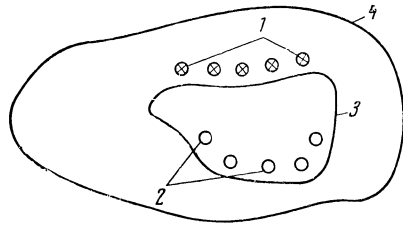


Рис. 2.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) + F,$$

где $F(x, y, z)$ — функция, равная нулю всюду, кроме мест, где размещены скважины; и a_i ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты, вообще говоря, зависящие от координат x, y, z и параметров μ, h и k . Граничные условия для этого уравнения задаются в виде условий первого или второго рода, в зависимости от конкретных условий.

Задача оптимизации состоит в том, чтобы найти наиболее рациональный метод разработки нефтеносного пласта, т. е. получить максимальное количество нефти при данных затратах на ее добычу или добиться минимальных затрат на данное количество добытой нефти.

Для этого приходится решать задачу о наилучшем размещении нефтяных скважин так, чтобы с заданного числа скважин получить максимальный дебит нефти.

Существенным здесь является и тот факт, что по мере эксплуатации пласта происходит падение напорного давления, вызванное постепенным истощением залежи и сокращением контура нефтеносности. При этом добыча нефти

с периферийных скважин прекращается, так как к ним подходит вода. Эти нагнетательные или инъекционные скважины 1 (рис. 2) можно использовать для управления эксплуатацией пласта, нагнетая в них принудительно воду и создавая тем самым в пласте добавочное давление. Это давление увеличивает дебит оставшихся эксплуатационных скважин 2 (рис. 2) и позволяет управлять продвижением контура нефтеносности, направляя нефть к скважинам так, чтобы как можно большее количество нефти оказалось извлеченным наружу и как можно меньшее ее количество осталось в недрах.

Целый ряд задач физики сводится к решению краевых задач (внешних и внутренних) для уравнения Лапласа как однородного, так и неоднородного [110].

Неоднородное уравнение Лапласа в области D с границей G имеет вид

$$\Delta Q + Q + u = 0, \quad (70)$$

где ΔQ — оператор Лапласа, примененный к функции $Q = Q(P)$, определенной в области D , $P \in D$.

Широкое распространение имеют внешние и внутренние краевые задачи для однородного уравнения

$$\Delta Q = 0. \quad (71)$$

В общем случае краевое условие имеет вид

$$\alpha \frac{\partial Q}{\partial n} \Big|_G + \beta Q \Big|_G = v(S), \quad S \in G. \quad (72)$$

(Если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, получаем третью краевую задачу; при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ получаем вторую краевую задачу и если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, получаем первую краевую задачу.)

Если выбор функций $u(P)$ и $v(S)$ соответственно в уравнениях (70) и (72) находится в нашем распоряжении (при наличии лишь некоторых дополнительных ограничений, например, $A_1 \leq u(P) \leq A_2$, $A_3 \leq v(S) \leq A_4$), то имеет смысл следующая вариационная задача: так определить функции $u(P)$ или $v(S)$ соответственно при соблюдении наложенных на них ограничений, чтобы функция $Q(P)$ в области D наилучшим образом аппроксимировала заданную в той же области функцию $Q^*(P)$ в известном заранее

смысле. Например, чтобы функционал

$$\int_D |Q^*(P) - Q(P)|^\gamma dP, \quad \gamma \geq 1,$$

достиг своего наименьшего значения.

При решении подобного рода задач можно воспользоваться тем, что решение уравнения (70) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$Q(P) + \int_G \frac{\partial \Gamma(P, S)}{\partial n} Q(S) dS - \int_D \Gamma(P, S) u(S) dS = 0, \quad (73)$$

где $\Gamma(P, S)$ — функция источника (функция Грина), соответствующая однородной задаче, а $\partial \Gamma / \partial n$ — производная по нормали в точках границы G .

Решение задачи (71), (72) также представляется в некотором интегральном виде, как это показано в [110], например, через потенциал двойного слоя.

Интересным примером оптимального управления, где приходится сталкиваться с процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных, является задача о взаимодействии некоторой непрерывно движущейся среды (например, потока жидкости) с броуновской частицей, помещенной в эту движущуюся среду. Как известно, движение броуновской частицы описывается вероятностным распределением, подчиняющимся уравнению Колмогорова в частных производных. Движение потока некоторой сплошной среды также описывается уравнениями в частных производных.

Представим себе, что броуновская частица A , исходя из некоторой начальной точки a , начинает случайное блуждание в движущейся среде в пределах, вообще говоря, многомерной области D (рис. 3). Пусть частица A при соприкосновении с границей области D погибает (поглощается этой границей). Пусть каким-то образом мы можем распоряжаться конфигурацией потока внутри области D , меняя его направление и скорость, например, открывая или закрывая некоторые источники и стоки жидкости, а также меняя интенсивность источника и стока в некоторых допустимых пределах. Задача оптимального управления состоит в изменении характера потока во времени таким образом

(используя имеющиеся управляющие воздействия в пределах их допустимости), чтобы частица A как можно дольше жила, т. е. как можно дольше находилась внутри области D , ни разу не коснувшись границы области D или,

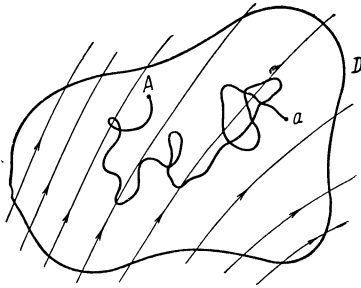


Рис. 3.

наоборот, чтобы частица A как можно скорее погибла, коснувшись границы области D . Эта задача может принять и игровой характер, если частица A также обладает некоторыми управляющими воздействиями, например, может изменять коэффициент своей диффузии или управлять направлением и величиной постоянной составляющей

вектора своей скорости (частица A с «моторчиком»). Имеющимися у частицы A управляющими воздействиями можно распорядиться так, чтобы противодействовать стремлению потока прибить ее к берегу или наоборот, унести внутрь области D . Здесь, конечно, не исключена также и такая постановка задачи, когда цель потока и цель частицы совпадают [36], [37], [128].

Подобные управляемые процессы могут представлять интерес при расчете кинетики физико-химических воздействий и в ряде других случаев.

Развитие атомной и ядерной энергетики ставит задачи оптимального управления тепловыми и электромагнитными полями в электрических генераторах нового типа [83], в атомных реакторах, ускорителях заряженных частиц, установках для изучения и управления поведением ядерной плазмы [92] и т. д.

Научные основы рационального проектирования и конструирования также должны опираться на теорию оптимальных процессов в системах с распределенными параметрами. Задача проектирования статических сооружений, таких, как плотины, шлюзы, крупные здания и т. д., по существу является задачей определения «управляющих» функций, не зависящих от времени и зависящих только от пространственных переменных. Здесь требуется выбрать

наилучшую форму и параметры, которыми располагает конструктор. Например, проблема экономичного полета на сверхзвуковых скоростях есть проблема уменьшения до минимума суммы сопротивлений трения, волнового сопротивления, индуктивного сопротивления и сопротивления интерференции [35]. Минимальное сопротивление получается путем подбора наивыгоднейшего распределения полной подъемной силы по поверхности крыла летательного аппарата. С вариационными проблемами сталкиваются при рассмотрении взаимодействия твердых тел со сверхзвуковым потоком [101].

Научный подход к интересной и трудной проблеме управления погодой также должен основываться на методах теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами.

Остановимся теперь на основных особенностях и трудностях, возникающих при рассмотрении вопросов управления системами с распределенными параметрами. Как мы уже видели, основное отличие систем с распределенными параметрами от систем с сосредоточенными параметрами состоит в том, что состояние объектов с распределенными параметрами характеризуется не конечным набором величин, координат объекта, изменяющихся только во времени, а в общем случае набором функций, показывающих зависимость параметров от временных и пространственных переменных или от любой их комбинации. Функции распределения, в зависимости от природы рассматриваемого объекта, могут быть определены на множествах самого разнообразного вида. Эти множества могут быть односвязными, многосвязными, несвязными областями, замкнутыми, ограниченными и неограниченными. Они могут иметь различную размерность, т. е. быть линиями, поверхностями, объемами и т. д. То же самое относится и к управляющим воздействиям.

Необходимость управления обусловливается наличием возмущающих воздействий, которые нужно компенсировать, а также наличием определенных требований, предъявляемых к системе управления, которые нужно выполнять. В большинстве случаев идеальное управление, при котором нет рассогласований между действительным состоянием и требуемым, осуществить невозможно из-за наличия

дополнительных ограничений, наложенных на функции состояния и управляющие воздействия. В системах с распределенными параметрами эти ограничения еще более разнообразны, нежели в системах с сосредоточенными параметрами. Это связано с наличием пространственных переменных, от которых зависят функции состояния и управления. Например, в задаче нагрева заготовок в проходных печах, кроме ограничения на величину температуры в печи, существенным может оказаться то, что абсолютная величина градиента поля температур в печи и внутри слитка не должна превышать определенной величины.

Невозможность идеального процесса управления ставит задачу построения оптимального процесса по определенному, заранее заданному критерию. В качестве критерия может выбираться функционал, зависящий от функций состояния объекта и управляющих воздействий. Выбор такого функционала и оптимизация по нему может также составить значительные трудности, так как в общем случае этот функционал может быть определен на произвольном многообразии в области определения функций состояния и управляющих воздействий.

Рассмотрение задач управления системами с распределенными параметрами естественным образом приводит к необходимости использовать мощный аппарат функционального анализа. Оптимальные процессы управления в этом случае получают наглядную геометрическую интерпретацию в функциональном фазовом пространстве системы. При этом изменение состояния управляемой системы, если оно происходит во времени, характеризуется определенной точкой в функциональном пространстве системы, а переход системы из одного состояния в другое, т. е. эволюция во времени, характеризуется траекторией в этом функциональном пространстве. Таким образом, вместо обычного конечномерного фазового пространства системы мы уже должны пользоваться бесконечномерным функциональным фазовым пространством.

Применение методов функционального анализа позволяет обобщить важные необходимые, а также достаточные условия оптимальности на системы, имеющие распределенные в пространстве параметры. На некоторые типы систем подобного рода произведено обобщение принципа макси-

му Л. С. Понрягина, впервые найденного для систем с сосредоточенными параметрами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Во многих случаях подход к решению задач оптимального управления системами с распределенными параметрами на основе принципа максимума оказывается относительно простым и естественным.

Мощный метод динамического программирования Р. Беллмана, к сожалению, пока еще не получил должного применения к решению задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. В дальнейшем в этой книге будут рассмотрены задачи, где используется метод динамического программирования для оптимизации пространственного распределения. Применение идей динамического программирования Р. Беллмана к решению задач оптимизации распределенных систем безусловно перспективно.

Широкий подход к математическому описанию задач оптимального управления, не стесненный никакими пред-
рассудками, дает преимущество, позволяя каждый раз выбирать конкретное математическое описание, обеспечивающее наиболее удобную и точную фиксацию особенностей данной задачи.

Для систем с распределенными параметрами оптимальные управляющие воздействия являются уже не функциями конечного числа координат как для систем с сосредоточенными параметрами, а результатом действия некоторых операторов над функциями распределения, характеризующими состояние управляемого объекта.

Однако непосредственное получение функции распределения состояний с управляемого объекта путем непосредственных измерений, как правило, является чрезвычайно трудной, а иногда и вовсе неразрешимой задачей. В лучшем случае, достаточно точное измерение возможно лишь в отдельных фиксированных точках объекта. Поэтому возникает необходимость иметь надежные, точные и достаточно простые модели управляемых объектов с распределенными параметрами, с которых можно было бы легко получать информацию о состоянии управляемого объекта и использовать ее для целей оптимального управления. Таким образом, назначение модели состоит в том, чтобы в каждый

фиксированный момент времени снабжать оптимальное управляющее устройство информацией о функциях распределения состояния управляемого объекта в зависимости от пространственных координат.

Во многих случаях известна общая структура уравнений, описывающих процессы в распределенной системе. Знание формы уравнений позволяет создать модель процессов. Однако в этих случаях, как правило, ряд констант, характеризующих процесс, все же остается неизвестным, и они не могут быть получены с достаточной точностью путем соответствующих измерений. Указанные трудности приводят к необходимости создания *самонастраивающихся* моделей объектов с распределенными параметрами [118]. По имеющимся сведениям о процессе и форме уравнений создается математическая или физическая модель процесса, в которой предусматривается возможность изменения тех постоянных коэффициентов модели, которые соответствуют неизвестным или известным, но с недостаточной точностью параметрам уравнений процесса. Кроме того, учитывается возможность медленного дрейфа этих величин. При этом необходимо также вводить в модель все возмущающие воздействия, которые оказывают влияние на процесс и поддаются измерению.

Определение неизвестных коэффициентов модели может производиться путем организованного поиска, например, с помощью многоканального автоматического оптимизатора, а также на вычислительных машинах с использованием методов нелинейного программирования [118]. При этом предусматривается возможность точного измерения значений функций распределения состояния объекта в отдельных фиксированных точках пространства. Таких точек может быть одна или несколько. Критерием качества и точности работы модели может служить величина некоторой меры отклонения измеренных значений функций распределения в определенных точках пространства от вычисленных на модели значений функций распределения в тех же точках.

За меру такого отклонения, например, можно принять сумму квадратов разностей вычисленных и измеренных значений функций распределения по всем точкам измерения. В некоторых случаях, особенно при наличии достаточно вы-

сокого уровня помех, величину этого критерия приходится еще усреднять по некоторому фиксированному интервалу времени или по ряду последовательных циклов измерений.

Оптимизатор автоматически производит поиск таких значений неизвестных параметров модели, при которых критерий, характеризующий точность работы модели, достигает своего экстремального значения. Если после окончания процессов поиска обеспечивается хорошее совпадение вычисленных на модели и измеренных значений распределений, то это с большой достоверностью позволяет сделать вывод о том, что модель хорошо отражает процессы, происходящие в реальном объекте.

Таким образом, потребность в решении рассмотренного выше большого круга проблем привела к необходимости дальнейшего развития и обобщения на более широкий класс объектов теории оптимальных систем управления, а также использования более сильных и гибких технических средств, с помощью которых можно создавать системы управления сложными объектами.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 1. Задачи оптимального управления для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных

Широкий класс объектов управления может быть описан системой дифференциальных уравнений в частных производных [22—25]

$$f_i \left(x, t, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}, u, v, \omega \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (1.1.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$ — точка, принадлежащая некоторой области D евклидова m -мерного пространства; t — время, $t_0 \leq t \leq t_1$; $Q(x, t) = (Q_1(x, t), \dots, Q_n(x, t))$ — вектор-функция аргументов x и t , характеризующая состояние управляемого объекта; $\partial Q/\partial x$ и $\partial Q/\partial t$ означают совокупность частных производных функций $Q_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, по аргументам x_1, \dots, x_m и t соответственно. Заметим, кстати, что в общем случае число уравнений p не равно числу n функций $Q_i(x, t)$, характеризующих состояние управляемого объекта. Вектор-функции $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, $v = v(x) = (v_1(x), \dots, v_k(x))$, $\omega = \omega(x, t) = (\omega_1(x, t), \dots, \omega_s(x, t))$ характеризуют управляющие воздействия, зависящие соответственно от времени t или от пространственной координаты x , или от совокупности пространственной и временной координат (x, t) .

Следует подчеркнуть, что существенным здесь может оказаться тот факт, что на функции состояния и на управляющие воздействия могут быть наложены разного рода дополнительные ограничения. Например, значения вектор-функции $z = z(x, t) = (u(t), v(x), \omega(x, t))$ должны принадлежать некоторой замкнутой области $(r + k + s)$ -мерного евклидова пространства. На управляющие функции

могут быть наложены условия следующего вида:

$$\left| \frac{d^\alpha u_i(t)}{dt^\alpha} \right| \leq A_{i\alpha}, \quad \left| \frac{d^\beta v_j(x)}{dx^\beta} \right| \leq A_{j\beta}, \quad \left| \frac{\partial^{\gamma+\delta} \omega_l(x, t)}{\partial x^\gamma \partial t^\delta} \right| \leq A_{l\gamma\delta}, \quad (1.1.2)$$

где $A_{i\alpha}$, $A_{j\beta}$, $A_{l\gamma\delta}$ — некоторые фиксированные константы, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, k$; $l = 1, \dots, s$, а индексы α , β , γ и δ принимают столько значений, сколько производных ограничено.

Аналогичные ограничения могут быть наложены и на функции $Q_i(x, t)$, характеризующие состояние управляемого объекта. Например, значение вектор-функции $Q(x, t)$ также должно принадлежать некоторой замкнутой области n -мерного евклидова пространства. Простейшим из ограничений такого рода является ограничение следующего вида:

$$|Q_i(x, t)| \leq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.3)$$

где A_i — фиксированные константы.

Кроме управляющих воздействий $u(t)$, $v(t)$ и $\omega(x, t)$, входящих непосредственно в уравнения (1.1.1), которые справедливы внутри области D , управляющие воздействия могут входить в граничные условия задачи. Например, в качестве управляющей функции могут фигурировать граничные значения какой-либо совокупности функций $Q_i(x, t)$ или комбинации граничных значений функций со значениями производных этих функций на границе области D .

Все изложенное до сих пор в этом параграфе относится к описанию динамики системы, т. е. к описанию возможностей системы и ограничений, наложенных на нее. Таким образом, можно сформулировать задачу оптимального управления описанными объектами: найти такие управляющие воздействия, т. е. определить такую вектор-функцию $z = z(x, t)$, чтобы при выполнении всех наложенных на систему дополнительных ограничений, а также граничных и начальных условий, заданный функционал

$$J = J\left(x, t, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}, z\right) \quad (1.1.4)$$

достиг минимального значения.

Сформулированная выше задача оптимального управления является аналогом так называемой задачи «со свободным правым концом», так как в этом случае на функции $Q_i(x, t)$ не накладывается никаких ограничений при $t = t_1$. Однако в некоторых случаях имеет смысл потребовать, чтобы функции состояния $Q_i(x, t)$ удовлетворяли при $t = t_1$ некоторым краевым условиям, т. е. чтобы выполнялись некоторые равенства

$$F_j(Q(x, t_1)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \leq n. \quad (1.1.5)$$

В частности, можно потребовать, чтобы

$$Q(x, t_1) = Q^*(x), \quad x \in D, \quad (1.1.6)$$

где $Q^*(x)$ — некоторое желаемое состояние, в которое следует перевести управляемую систему.

Однако в некоторых случаях удовлетворить условиям (1.1.5) или (1.1.6) невозможно. Тогда имеет смысл потребовать выполнения этих условий с точностью до некоторой достаточно малой заданной величины $\varepsilon > 0$, например, потребовать, чтобы для некоторой меры уклонения вектор-функции $Q^*(x, t_1)$ от функции $Q^*(x)$ было выполнено условие

$$\|Q^*(x) - Q(x, t_1)\| \leq \varepsilon. \quad (1.1.7)$$

За меру такого уклонения можно, например, взять величину

$$\max_{x \in D} |Q^*(x) - Q(x, t)| \quad (1.1.8)$$

или

$$\int_D |Q^*(x) - Q(x, t)|^\gamma dx, \quad \gamma \geq 1. \quad (1.1.9)$$

В связи с этим может быть поставлена другая задача оптимального управления: определить такое управляющее воздействие $z = z(x, t)$, чтобы при выполнении всех дополнительных ограничений и условий уклонение вектор-функции $Q(x, t_1)$ от заданной функции $Q^*(x)$ было наименьшим, т. е. чтобы функционал

$$J = \|Q^*(x) - Q(x, t_1)\| \quad (1.1.10)$$

достиг минимального значения.

Отметим, что последняя задача также допускает обобщение в том смысле, что время t может быть не фиксировано заранее (т. е. t не обязательно равно заданному t_1), а точка x при вычислении функционала (1.1.10) может пробегать не всю область D , а лишь некоторое ее подмножество. Примеры постановок задач, указанных в этом параграфе, приведены во введении. В последующих параграфах будут разработаны методы решения некоторых конкретных задач оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных.

§ 2. Принцип максимума в оптимальных системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных

В этом параграфе мы рассмотрим вывод условий оптимальности для управляемых систем, движение которых описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных.

Первые исследования в этом направлении проведены А. И. Егоровым [42, 43] и Т. К. Сиразетдиновым [99].

Здесь мы изложим основные результаты работ этих авторов по решению указанных задач.

Пусть управляемый процесс в области D ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) описывается уравнениями следующего вида:

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial x \partial y} = f_i \left(x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u \right), \quad (1.2.1)$$

где $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}, \frac{\partial Q_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial Q_n}{\partial x} \right)$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}, \frac{\partial Q_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial Q_n}{\partial y} \right)$; $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ — r -мерный управляющий вектор. Управление $u(x, y)$ может быть кусочно-непрерывной и ограниченной функцией, определенной в области D , со значениями в некоторой выпуклой замкнутой области ω , расположенной в r -мерном евклидовом пространстве. Такое управление будем называть допустимым.

Граничные условия для функции $Q = Q(x, y)$ имеют вид

$$Q_i(0, y) = \varphi_i(y); \quad Q_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.2)$$

При этом выполняются условия сопряжения

$$Q_i(0, 0) = \varphi_i(0) = \psi_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, если задано допустимое управление, то уравнения (1.2.1), (1.2.2) однозначно определяют решение $Q(x, y)$.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое допустимое управление $u(x, y)$, при котором определяемое уравнениями (1.2.1), (1.2.2) решение $Q(x, y)$ таково, что функционал

$$J = \sum_{i=1}^n c_i Q_i(a, b), \quad (1.2.3)$$

где c_i — заданные постоянные числа, достигает своего максимального значения.

Легко видеть, что к максимизации функционала типа (1.2.3) сводится задача максимизации функционалов различных типов.

Пусть требуется максимизировать функционал

$$J_1 = \iint_D f_0\left(x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u\right) dx dy.$$

Если ввести новую функцию $Q_0(x, y)$, определяемую условиями

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x \partial y} = f_0\left(x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u\right),$$

$$Q_0(0, y) = Q_0(x, 0) = 0,$$

то задача максимизации функционала J сводится к максимизации функционала типа (1.2.3)

$$J_2 = Q_0(a, b)$$

при

$$c_1 = -1, \quad c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0.$$

Далее, пусть требуется максимизировать функционал

$$J_3 = \Phi(Q(a, b)), \quad (1.2.4)$$

где функция Φ имеет непрерывные вторые частные производные по Q_1, \dots, Q_n . Тогда, введя новую функцию

$$Q_0(x, y) = \Phi(Q(x, y)),$$

определяемую уравнениями

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x \partial y} = \sum_{i,j}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Q_i \partial Q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial x} \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} f_i \quad (1.2.5)$$

с дополнительными условиями

$$Q_0(0, y) = \Phi(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)), \quad (1.2.6)$$

$$Q_0(x, 0) = \Phi(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)), \quad (1.2.7)$$

$$\Phi(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) = \Phi(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0)), \quad (1.2.8)$$

сводим задачу максимизации функционала (1.2.4) к максимизации функционала типа (1.2.3)

$$J_4 = Q_0(a, b),$$

определенного на функциях Q_0, Q_1, \dots, Q_n , заданных уравнениями (1.2.1), (1.2.5) с дополнительными условиями (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8).

Наконец, пусть требуется максимизировать функционал

$$J_5 = \int_0^a F\left(x, Q(x, b), \frac{\partial Q(x, b)}{\partial x}\right) dx.$$

Если ввести новую функцию $Q_0(x, y)$, определяемую равенством

$$Q_0(x, y) = \int_0^x F\left(x, Q(x, y), \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right) dx,$$

то ее можно определить также и с помощью уравнения

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Q_{ix}} f_i \right),$$

где $Q_{ix} = \partial Q_i / \partial x$, и дополнительных условий

$$Q_0(0, y) = 0,$$

$$Q_0(x, 0) = \int_0^x F[x, \psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \psi'_1(x), \dots, \psi'_n(x)] dx.$$

Следовательно, задача сводится к максимизации функционала типа (1.2.3)

$$J_6 = Q_0(a, b).$$

Для формулировки главного результата, дающего основные условия для определения оптимального управления, введем функцию

$$H(N, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u) = \sum_{i=1}^n N_i f_i(x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u),$$

где n вспомогательных функций $N_1(x, y), \dots, N_n(x, y)$; $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$, определяются при помощи уравнений

$$\frac{\partial N_i}{\partial x \partial y} = \frac{\partial H}{\partial Q_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial Q_{ix}} - \frac{d}{dy} \frac{\partial H}{\partial Q_{iy}} \quad (1.2.9)$$

и дополнительных условий

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = - \frac{\partial H}{\partial Q_{iy}} \quad \text{при } y = b, \quad (1.2.10)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = - \frac{\partial H}{\partial Q_{ix}} \quad \text{при } x = a, \quad (1.2.11)$$

$$N_i(a, b) = -c_i. \quad (1.2.12)$$

Легко видеть, что равенства (1.2.10) — (1.2.12) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с конечными условиями. Вместе с уравнениями (1.2.9) и исходными уравнениями (1.2.1) получается система, которая при заданном $u^0(x, y)$ определяет решение $Q(x, y)$ и $N(x, y)$.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 1 (принцип максимума). Если $u^0(x, y)$ — оптимальное управление и $Q^0(x, y)$ и $N^0(x, y)$ — соответствующие этому управлению функции, удовлетворяющие уравнениям (1.2.1), (1.2.9) — (1.2.12), то функция $H(N^0(x, y), Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u)$ как функция от аргумента u достигает максимума в области ω при $u = u^0(x, y)$ (условие максимума), т. е. почти для всех точек

$(x, y) \in D$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \max_{u \in \omega} H \left(N^0(x, y), Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u \right) = \\ = H \left(N^0(x, y), Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u^0(x, y) \right). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

В случае, когда система (1.2.1) является линейной системой вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x \partial y} = \sum_{k=1}^n \left[m_{ik}(x, y) \frac{\partial Q_k}{\partial x} + \right. \\ \left. + p_{ik}(x, y) \frac{\partial Q_k}{\partial y} + q_{ik}(x, y) Q_k \right] + f_i(u), \end{aligned}$$

имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для оптимальности управления $u(x, y)$ в линейном случае необходимо и достаточно, чтобы выполнялся принцип максимума.

Основная идея доказательства этих теорем аналогична идее доказательства принципа максимума для обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенной Л. И. Розоноэром в работе [95].

Действительно, рассмотрим функционал

$$S = S(P, u) = \iint_D \left[\sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x \partial y} - H(P, u) \right] dx dy, \quad (1.2.14)$$

где

$$P = P(x, y) = \left(N, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y} \right).$$

Тогда нетрудно показать, что приращение этого функционала равно нулю:

$$\Delta S = S(P + \Delta P, u + \Delta u) - S(P, u) = 0, \quad (1.2.15)$$

где u и $u + \Delta u$ — допустимые управления, а P и $P + \Delta P$ — два соответствующие им решения приведенных выше уравнений.

Далее, используя формулу Грина для вычисления двойного интеграла через контурный и формулу Тейлора для

представления приращения функции $\Delta H = H(P + \Delta P, u + \Delta u) - H(P, u)$, равенство (1.2.15) преобразуем к виду

$$\Delta S = - \sum_{i=1}^n c_i \Delta Q_i(a, b) - \iint_D [H(P, u + \Delta u) - H(P, u)] dx dy + \eta = 0. \quad (1.2.16)$$

Если зафиксировать произвольную точку (x, y) области D и считать, что управление $u + \Delta u$ отличается от управления u лишь в шаре D_ε радиуса ε с центром в точке (x, y) , т. е. считать, что

$$u + \Delta u = \begin{cases} u(x, y) & \text{при } (x, y) \in D/D_\varepsilon, \\ \tilde{u} & \text{при } (x, y) \in D_\varepsilon \end{cases}$$

(где \tilde{u} — произвольная точка допустимого множества ω , а D/D_ε означает теоретико-множественную разность множеств D и D_ε), то для величины η можно дать следующую оценку:

$$|\eta| \leq \varepsilon A \iint_{D_\varepsilon} \left[\sum_{k=1}^r |\Delta u_k(x, y)| \right]^2 dx dy, \quad (1.2.17)$$

где A — положительная постоянная.

Здесь нам понадобится следующее важное свойство измеримых функций. Пусть $h(\omega)$ — непрерывная функция и $\omega = \omega(x, y)$ — некоторая измеримая функция. Если для точки (x, y) в области D_ε справедливо соотношение

$$\iint_{D_\varepsilon} h(\omega(x, y)) dx dy = \varepsilon h(\omega(x, y)) + \dots, \quad (1.2.18)$$

где точками обозначены величины более высокого порядка, чем ε , то такая точка (x, y) называется правильной точкой функции $\omega(x, y)$. Для измеримых функций правильные точки имеют полную меру, т. е. почти все точки области D являются правильными.

Таким образом, используя формулу (1.2.15) и оценку (1.2.17) для η , получаем:

$$\Delta J = \iint_{D_\varepsilon} [H(P, \tilde{u}) - H(P, u)] dx dy - \eta. \quad (1.2.19)$$

Предполагая, что точка (x, y) является правильной точкой управления $u(x, y)$, и учитывая ограниченность функции $u(x, y)$ и положительность ΔJ , получаем:

$$-\varepsilon [H(P, \tilde{u}) - H(P, u)] - B\varepsilon^2 \leq 0, \quad (1.2.20)$$

где B — положительная константа.

Так как $H(P, \tilde{u}) - H(P, u) \neq 0$, то из (1.2.20) следует, что

$$H(P, \tilde{u}) - H(P, u) \leq 0,$$

или

$$H(P, \tilde{u}) \leq H(P, u). \quad (1.2.21)$$

Отсюда видно, что наибольшее значение функция $H(P, \tilde{u})$ достигает лишь при $\tilde{u} = u$, т. е. на оптимальном управлении, что и требовалось доказать.

В качестве примера применения сформулированных выше результатов рассмотрим управляемый объект, описываемый следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = -2Q + u, \quad (1.2.22)$$

с граничными условиями

$$Q(x, 0) = Q(0, t) = 0. \quad (1.2.23)$$

На управляющий параметр $u(x, t)$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq t \leq T$ накладывается ограничение $|u| \leq 1$.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $u(x, t)$, $|u| \leq 1$, которое бы в силу уравнений (1.2.22), (1.2.23) минимизировало функционал

$$J = \int_0^T \int_0^2 (x-1) Q(x, t) dx dt.$$

В соответствии с условиями оптимальности составляем функцию

$$H = N(-2Q + u),$$

где функция $N(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = -2N - (x-1)$$

с граничными условиями $N(x, T) = N(2, t) = 0$.

Решая последние уравнения для функции $N(x, t)$, находим:

$$N(x, t) = \frac{1}{2} (2e^{x-2} - x) (1 - e^{2(t-T)}).$$

Тогда, согласно принципу максимума, оптимальное управление имеет вид

$$u(x, t) = \text{sign} \frac{1}{2} (2e^{x-2} - x) (1 - e^{2(t-T)}).$$

Но так как $1 - e^{2(t-T)} \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$, то окончательно оптимальное управление имеет вид:

$$u(x, t) = \text{sign} (2e^{x-2} - x).$$

Рассмотрим теперь процесс, который описывается квазилинейным уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = F \left(x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1(x), u_2(x, y) \right), \quad (1.2.24)$$

где

$$F \left(x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1, u_2 \right) = F_0(x, y, Q, u_1, u_2) + F_1(x, y, Q, u_1, u_2) \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (1.2.25)$$

Функция $Q = Q(x, y)$ характеризует состояние управляемого объекта, определенного в области D на плоскости (x, y) .

Кроме того, на части Γ_1 границы Γ области D заданы граничные условия для функции $Q(x, t)$.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x, y)$ играют роль управлений. Причем первая функция $u_1(x)$ зависит лишь от одной независимой переменной x . Тогда, если можно найти такое y , что $(x, y) \in D$, то вторая функция $u_2(x, y)$ зависит от двух переменных $(x, y) \in D$.

На эти функции наложены дополнительные ограничения в том смысле, что вектор (u_1, u_2) принимает свои значения из некоторого заданного допустимого множества ω , определяемого неравенством

$$\varphi(u_1, u_2) \leq 0. \quad (1.2.26)$$

Для уравнений в частных производных типа (1.2.24) краевые условия задаются на части Γ_1 границы Γ области D . Если еще заданы управляющие функции $u_1(x)$ и $u_2(x, y)$, то решение $Q(x, y)$ определяется однозначно.

Задача состоит в том, чтобы найти такие кусочно-непрерывные функции $u_1(x)$, $u_2(x, y)$, удовлетворяющие условию (1.2.26) (такие функции $u_1(x)$ и $u_2(x, y)$ будем называть допустимыми), чтобы функционал

$$J = \iint_D G dx dy, \quad (1.2.27)$$

где

$$G = G_0(x, y, Q, u_1, u_2) + G_1(x, y, Q, u_1, u_2) \frac{\partial Q}{\partial x} + G_2(x, y, Q, u_1, u_2) \frac{\partial Q}{\partial y},$$

достиг минимального значения.

Для формулировки необходимого условия, которому должны удовлетворять оптимальные управляющие воздействия u_1 , u_2 , введем следующие соотношения. Обозначим

$$H = H\left(N, x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1, u_2\right) = -G + NF. \quad (1.2.28)$$

Для определения новой функции $N(x, y)$ будем использовать уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial Q_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial Q_y} \right), \quad (1.2.29)$$

где

$$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Краевое условие для $N(x, y)$ имеет вид

$$N(x, y)|_{\Gamma/\Gamma_1} = 0. \quad (1.2.30)$$

Так как имеются функции управления двух видов (функция u_1 зависит лишь от одной переменной, а функция u_2 зависит от двух переменных), то условие, аналогичное условию максимума (1.2.13), в данном случае заменится двумя условиями, которые мы будем называть условиями максимумов.

Пусть $u_1^0(x)$ и $u_2^0(x, y)$ — некоторые допустимые управления и $Q^0(x, y)$ и $N^0(x, y)$ — соответствующие им решения уравнений (1.2.24), (1.2.29), (1.2.30).

Будем говорить, что функции $u_1^0(x)$, $u_2^0(x, y)$ удовлетворяют условию максимумов, если имеют место два равенства:

$$1) H\left(N^0(x, y), x, y, Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u_1^0(x), u_2^0(x, y)\right) = \max_{u_2} H\left(N^0(x, y), x, y, Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u_1^0(x), u_2\right) \quad (1.2.31)$$

при $\varphi(u_1^0(x), u_2) \leq 0$ и для почти всех $(x, y) \in D$, и

$$2) H_1 = \int_{D(x)} H\left(N^0(x, y), x, y, Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u_1^0(x), u_2^0(x, y)\right) dy = \max_{u_1} \int_{D(x)} H\left(N^0(x, y), x, y, Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u_1, u_2^0(x, y)\right) dy, \quad (1.2.32)$$

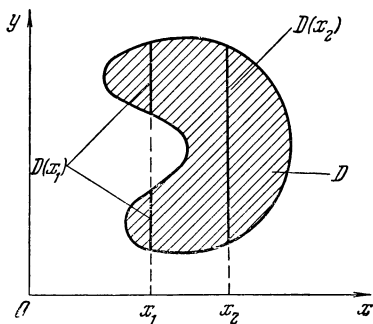


Рис. 4.

при $\varphi(u_1, u_2^0(x, y)) \leq 0$ для почти всех x таких, что существует y , при котором $(x, y) \in D$, где $D(x)$ — множество точек прямой $x = \text{const}$, принадлежащих области D (рис. 4).

Теперь можно сформулировать условие оптимальности.

Теорема 3. Если $u_1(x)$ и $u_2(x, y)$ — оптимальные управляющие функции, то эти функции удовлетворяют условиям максимумов.

На доказательстве этой теоремы мы остановимся ниже.

Рассмотрим еще одну задачу оптимального управления, в которой имеется лишь управляющее воздействие $u_1(x)$ и отсутствует управление $u_2(x, y)$, зависящее от двух аргументов. При этом область D представляет собой прямоугольник $0 \leq x \leq T$, $0 \leq y \leq L$ и требуется минимизировать функционал

$$J_1 = \int_0^T G_1(x, Q(x, L), u_1(x)) dx, \quad (1.2.33)$$

где $G_1(x, Q, u)$ — функция трех аргументов x , Q и u . При этом краевые условия для определения функции $N(x, y)$ будут иметь вид

$$N(x, y)|_{x=T} = -\frac{\partial G}{\partial Q}, \quad N(x, y)|_{y=L} = 0. \quad (1.2.34)$$

Тогда необходимое условие оптимальности для этой последней задачи можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а 4. *Если $u_1(x)$ — оптимальное управление, то оно удовлетворяет условию максимума*

$$H_2(x, u_1^0(x)) = \max_{u_1 \in \omega} H_2(x, u_1) \quad (1.2.35)$$

почти для всех $x \in [0, T]$, где

$$H_2 = -G_1(x, Q^0(x, L), u_1) + \int_0^L N^0(x, y) F\left(x, y, Q^0(x, y), \frac{\partial Q^0(x, y)}{\partial y}, u_1\right) dy. \quad (1.2.36)$$

Наконец, отметим еще один важный случай, когда основное уравнение движения (1.2.24) является линейным уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = a_0(x, y) Q + a_1(x, y) \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (1.2.37)$$

Пусть, далее, подынтегральная функция в (1.2.27) имеет вид

$$G = b_0(x, y) + b_1(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (1.2.38)$$

а функция в (1.2.33) имеет вид

$$G = b_0(x) Q + b_1(x). \quad (1.2.39)$$

В этом линейном случае справедливо утверждение.

Теорема 5. *Для линейного случая условия максимумов являются необходимым и достаточным условиями оптимальности управляющих воздействий.*

Доказательство этих теорем вполне аналогично доказательству двух первых теорем этого параграфа. Для вывода формулы (1.2.31) варьируется лишь управление $u_2(x, y)$. Управление $u_1(x)$ при этом не варьируется. Далее выводится формула для приращения функционала (например, для J)

$$\Delta J = \iint_D \Delta H \, dx \, dy + \eta, \quad (1.2.40)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta H = & H\left(N, x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1, u_2 + \Delta u_2\right) - \\ & - H\left(N, x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1, u_2\right), \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

а η — остаточный член. Если варьируемое управление $u_2(x, y) + \Delta u_2(x, y)$ отличается от неварьированного управления $u_2(x, y)$ лишь в круге площади ε вокруг произвольной фиксированной точки (x, y) , то можно показать, что величина $|\eta|$ имеет порядок малости ε^2 . С другой стороны, если функция $u_2(x, y)$ не варьируется, а меняется лишь функция $u_1(x)$, то формула для приращения функционала ΔJ имеет вид

$$\Delta J = - \int_0^T \Delta H_1(x) \, dx + \eta, \quad (1.2.42)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta H_1 = & \int_{D(x)} H\left(N, x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1 + \Delta u_1, u_2\right) \, dy - \\ & - \int_{D(x)} H\left(N, x, y, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, u_1, u_2\right) \, dy \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

(а в случае теоремы 4 $H_2 = -G + \int_0^L NF dy$), а η — остаточный член, для которого величина $|\eta|$ имеет порядок малости ε^2 , где ε — длина интервала с центром в произвольной точке $x \in [0, T]$, на котором $u_1 + \Delta u_1$ отлично от u_1 .

Дальнейшее доказательство равенств (1.2.31), (1.2.32) и (1.2.35) аналогично доказательству теоремы 1.

Достаточность условий принципа максимума в линейном случае также доказывается аналогично доказательству теоремы 2, так как в этом случае величина остаточного члена η в формулах (1.2.40) и (1.2.42) тождественно равна нулю.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации нагрева металла в методической печи, о которой говорилось во введении. Если в нем нагреваются «тонкие» тела, то уравнение нагрева металла, продвигающегося через печь со скоростью $v > 0$, имеет вид

$$b \frac{\partial Q}{\partial t} + l \frac{\partial Q}{\partial x} + Q = u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L,$$

где b — постоянная времени нагрева, $l = bv$ — постоянная длины нагрева и u — управляющее воздействие. Функция $Q = Q(x, t)$ характеризует распределение температуры материала в печи.

Краевые (начальные и граничные) условия имеют вид

$$Q(0, t) = Q_0(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$Q(0, x) = Q_1(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Задача состоит в определении такого управляющего воздействия $u(t)$, зависящего от одного переменного t и удовлетворяющего условиям $A_1 \leq u(t) \leq A_2$, чтобы функционал

$$J = \int_0^T [Q^*(t) - Q(L, t)]^2 dt \quad (1.2.44)$$

достигал своего минимального значения.

Составим функцию

$$H = -G + NF = -[Q^*(t) - Q(L, t)]^2 + + N \left(\frac{u}{b} - \frac{l}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{b} \right). \quad (1.2.45)$$

Тогда

$$H_2 = - [Q^*(t) - Q(L, t)]^2 + \int_0^L N \left(\frac{u}{b} - \frac{l}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{b} \right) dx, \quad (1.2.46)$$

где функция $N(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \frac{l}{b} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{N}{b}.$$

Так как управляющая функция $u(t)$ зависит в данном случае лишь от времени t , то нужно пользоваться условием (1.2.35).

В выражении (1.2.46) для функции H_2 от аргумента u зависит лишь один член

$$\int_0^L \frac{Nu}{b} dx.$$

Поэтому максимум функции H_2 достигается при

$$u(t) = \begin{cases} A_2, & \text{если } \int_0^L \frac{N}{b} dx > 0; \\ A_1, & \text{если } \int_0^L \frac{N}{b} dx < 0. \end{cases}$$

Таким образом, принцип максимума показывает, что если $\int_0^L \frac{N}{b} dx \neq 0$, то оптимальное управление должно поддерживаться на одном из своих предельных значений, т. е.

$$u(t) = \frac{A_1 - A_2}{2} - \frac{A_1 - A_2}{2} \operatorname{sign} \int_0^L \frac{N}{b} dx.$$

Однако принцип максимума не дает определенного вида оптимального управления $u(t)$ в случае, когда

$$\int_0^L \frac{N}{b} dx \equiv 0.$$

Если функционал J имеет вид

$$J = \int_0^T \{ [Q^*(t) - Q(L, t)]^2 + u^2(t) \} dt,$$

а на управление $u(t)$ не накладывать никаких других ограничений, то максимум функции

$$H_2 = - [Q^*(t) - Q(L, t)]^2 - u^2 + \\ + \int_0^L N \left(\frac{u}{b} - \frac{l}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{b} \right) dx$$

по аргументу u достигается при условии

$$u(t) = - \int_0^L \frac{N(x, t)}{b} dx.$$

§ 3. Достаточные условия оптимальности для систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных

В работе [62] В. Ф. Кротов дал чрезвычайно простые достаточные условия оптимальности для управляемых объектов, движение которых описывается весьма общей системой дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_j} = f_j^i(Q, U, x), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3.1)$$

где функции $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ и $U = (U_1, U_2, \dots, U_r)$ зависят от аргумента $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, меняющегося в фиксированной области D с гладкой границей Γ . Функция $Q(x)$ описывает состояние управляемого объекта, а функция $U(x)$ задает управляющие воздействия на объект. Функции $f_j^i(Q, U, x)$, $i = 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ считаются непрерывными по совокупности трех аргументов Q, U, x . Кроме уравнений (1.3.1), на функцию

$Q(x)$ могут быть еще наложены граничные условия при $x \in \Gamma$.

На функции $Q(x)$ и $U(x)$ наложены дополнительные условия: функция $Q(x)$ ограничена, т. е. может принимать свои значения из некоторой допустимой замкнутой области Ω n -мерного евклидова пространства, а функция $U(x)$ может принимать значения из допустимой замкнутой области ω r -мерного евклидова пространства. Обозначим декартово произведение Ω и ω через $b = \Omega \times \omega$. Тогда вектор $(Q(x), U(x))$, который мы также будем обозначать через $W(x) = (Q(x), U(x))$, может принимать свои значения из допустимой области b , т. е. $W(x) \in b$.

Введем в рассмотрение множество A функций $Q(x)$, $U(x)$, заданных в области D , таких, что при всех $x \in D$ имеем $W(x) = (Q(x), U(x)) \in b$ и функции $Q(x)$ и $U(x)$ связаны уравнением (1.3.1) и удовлетворяют граничным условиям при $x \in \Gamma$ (если они имеются). Функции $Q_i(x)$ непрерывны и в силу уравнений (1.3.1) кусочно-дифференцируемы. Предполагается, что множество A непустое.

При $m = 1$, т. е. если (1.3.1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, число этих уравнений равно числу фазовых координат. Поэтому управление $U(x)$ можно рассматривать как «свободную» вектор-функцию, которую можно выбирать произвольно из допустимого множества.

При $m > 1$ число уравнений (1.3.1) больше n и функция $U(x)$ уже не полностью свободна, так как на систему уравнений (1.3.1) могут накладываться условия интегрируемости.

Пусть на множестве A задан функционал

$$J(Q(x), U(x)) = \int_D f^0(x, Q(x), U(x)) dx + F[Q_\Gamma(x)], \quad (1.3.2)$$

где функция $f^0(x, Q, U)$ задана и непрерывна по совокупности аргументам x, Q, U и $F[Q_\Gamma(x)]$ — функционал, зависящий от значений $Q_\Gamma(x)$ функции $Q(x)$ на поверхности Γ :

$$Q_\Gamma(x) = Q(x) \text{ при } x \in \Gamma. \quad (1.3.3)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такую пару $(Q(x), U(x))$, принадлежащую множеству A , которая минимизирует функционал (1.3.2). Такую пару будем называть минималью.

Для формулировки достаточных условий оптимальности нам нужно ввести m функций $\varphi^j(x, Q)$, $j = 1, 2, \dots, m$, непрерывных и кусочно-дифференцируемых на $B = \Omega \times D$ и при каждом фиксированном $x \in D$ дифференцируемых всюду на Ω по Q . Определим функции

$$\left. \begin{aligned} R(x, Q, U) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{Q_i}^j f_i^j(x, Q, U) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \varphi_{x_j}^j(x, Q) - f^0(x, Q, U), \\ \mu(x) &= \max_{(Q, U) \in b} R(x, Q, U), \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

где $\varphi_{x_i}^j = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i}$.

Будем говорить, что пара $(Q(x), U(x)) \in b$ удовлетворяет расширенному принципу максимума, если почти для всех $x \in D$ выполняются равенства

$$\mu(x) = R(x, Q(x), U(x)) = \max_{(Q, U) \in b} R(x, Q, U). \quad (1.3.5)$$

Введем обозначение

$$\Phi(Q_\Gamma(x)) = F(Q_\Gamma(x)) + \int_\Gamma \sum_{j=1}^m \varphi^j \cos(\bar{n}, x_j) d\Gamma, \quad (1.3.6)$$

где \bar{n} — внешняя нормаль к поверхности Γ , $d\Gamma$ — элемент площади поверхности Γ .

Следующая теорема дает достаточное условие абсолютного минимума функционала (1.3.2).

Теорема 1. *Если существуют такие функции $\varphi^j(x, Q)$, $j = 1, 2, \dots, m$, что пара $(Q^0(x), U^0(x))$, принадлежащая множеству A , удовлетворяет расширенному принципу максимума, то эта пара является минималью функционала (1.3.2) при условии, что граничные значения $Q_\Gamma^0(x)$ минимизируют функционал $\Phi [Q_\Gamma(x)]$.*

Доказательство. Вывод утверждений теоремы чрезвычайно прост. Пусть $(Q(x), U(x))$ — произвольная пара из множества A . Надо доказать, что

$$J(Q^0(x), U^0(x)) \leq J(Q(x), U(x)). \quad (1.3.7)$$

Так как по условию теоремы пара $(Q^0(x), U^0(x)) \in A$ удовлетворяет расширенному принципу максимума, то

$$R(x, Q(x), U(x)) \leq R(x, Q^0(x), U^0(x)). \quad (1.3.8)$$

Отсюда с учетом перемены знака получим:

$$\begin{aligned} f^0(x, Q(x), U(x)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Phi_{Q_i}^j(x, Q(x)) f_j^i(x, Q(x), U(x)) - \\ - \sum_{j=1}^m \Phi_{x_j}^j(x, Q(x)) \geq f^0(x, Q^0(x), U^0(x)) - \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Phi_{Q_i}^j(x, Q^0(x)) f_j^i(x, Q^0(x), U^0(x)) - \\ - \sum_{j=1}^m \Phi_{x_j}^j(x, Q^0(x)). \end{aligned}$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по области D (неравенство сохраняется, так как интегрирование ведется по положительной мере — объему) с учетом исходных уравнений (1.3.1), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_D f^0(x, Q(x), U(x)) dx - \int_D \sum_{j=1}^m \Phi_{x_j}^j(x, Q(x)) dx \geq \\ \geq \int_D f^0(x, Q^0(x), U^0(x)) dx - \int_D \sum_{j=1}^m \Phi_{x_j}^j(x, Q^0(x)) dx. \quad (1.3.9) \end{aligned}$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского

$$\int_D \sum_{j=1}^m \Phi_{x_j}^j(x, Q(x)) dx = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \Phi^j(x, Q_{\Gamma}(x)) \cos(\bar{n}, x_j) d\Gamma,$$

последнее неравенство можно записать в виде

$$\int_D f^0(x, Q(x), U(x)) dx - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \varphi^j(x, Q_{\Gamma}(x)) \cos(\bar{n}, x_j) d\Gamma \geq \\ \geq \int_D f^0(x, Q^0(x), U^0(x)) dx - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \varphi^j(x, Q_{\Gamma}^0(x)) \cos(\bar{n}, x_j) d\Gamma.$$

По условию теоремы также имеем, что

$$\Phi(Q_{\Gamma}(x)) \geq \Phi(Q_{\Gamma}^0(x)). \quad (1.3.10)$$

Складывая почленно два последних неравенства с учетом соотношений (1.3.6) и (1.3.2), получим неравенство (1.3.7), что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще один практически важный случай, когда функционал (1.3.2) имеет вид

$$J(Q(x), U(x)) = \int_D f^0(x, Q(x), U(x)) dx + \int_{\Gamma} f_{\Gamma}(x, Q_{\Gamma}(x)) dx,$$

где функция $f_{\Gamma}(x, Q)$ непрерывна по совокупности аргументов x, Q . Тогда достаточные условия оптимальности можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2. Если существуют такие функции $\varphi^j(x, Q)$, $j = 1, 2, \dots, m$, что пара $(Q^0(x), U^0(x)) \in A$ удовлетворяет двум условиям:

1) выполняется расширенный принцип максимума $R(x, Q^0(x), U^0(x)) = \mu(x)$ почти для всех $x \in D$;

$$2) R_{\Gamma}(x, Q_{\Gamma}^0(x)) \equiv f_{\Gamma}(x, Q_{\Gamma}^0(x)) + \\ + \sum_{j=1}^m \varphi^j(x, Q_{\Gamma}^0(x)) \cos(\bar{n}, x^j) = \min_{Q \in \Omega} f_{\Gamma}(x, Q) + \\ + \sum_{j=1}^m \varphi^j(x, Q) \cos(\bar{n}, x^j),$$

то эта пара $(Q^0(x), U^0(x))$ является абсолютной минималью функционала $J(Q(x), U(x))$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы. Легко видеть, что

неравенство, аналогичное (1.3.10), получается путем интегрирования по поверхности Γ обеих частей неравенства

$$R_{\Gamma}(x, Q_{\Gamma}(x)) \geq R_{\Gamma}(x, Q_{\Gamma}^0(x)).$$

Из сформулированных теорем можно вывести очевидное следствие.

С л е д с т в и е. Если граничные значения $Q_{\Gamma}^0(x)$ при $x \in \Gamma$ функции $Q^0(x)$ фиксированы, то для оптимальности пары $(Q^0(x), U^0(x))$ достаточно существование таких функций $\varphi^j(x, Q)$, $j = 1, \dots, m$, что выполняется расширенный принцип максимума.

Рассмотрим теперь один важный прием решения поставленной задачи оптимизации, который позволяет определить градиенты функций $\varphi^j(x, Q)$, $j = 1, 2, \dots, m$, на оптимальной $Q^0(x)$.

Для простоты предположим, что область Ω допустимых значений функций $Q(x)$ является открытой.

Задача состоит в выводе уравнений для компонент градиентов функций $\varphi^j(x, Q)$ на оптимальной $Q^0(x)$:

$$\Psi_i^j(x) = \varphi_{Q_i}^j(x, Q^0(x)) \equiv \varphi_{Q_i}^j(x, Q) \Big|_{Q=Q^0(x)}, \quad (1.3.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Предположим также, что все функции $f_{\lambda}^i(x, Q, U)$ дифференцируемы по аргументу Q .

Кроме того, будем считать, что функция $Q_{\Gamma}(x)$ фиксирована. Поэтому для оптимальности пары $(Q^0(x), U^0(x))$ достаточно существования таких функций $\varphi^j(x, Q)$, $j = 1, \dots, m$, чтобы выполнялся расширенный принцип максимума (1.3.4). Так как функция $R(x, Q, U)$ имеет, следовательно, максимум по Q при $Q = Q^0(x)$ (при фиксированном $U = U^0(x)$), то в силу того, что область Ω открыта, для выполнения расширенного принципа максимума необходимо, чтобы почти для всех $x \in D$ выполнялись следующие два условия:

$$1) \quad R_{Q_i}(x, Q^0(x), U^0(x)) \equiv \frac{\partial R(x, Q, U)}{\partial Q_i} \Big|_{\substack{Q=Q^0(x) \\ U=U^0(x)}}, \quad (1.3.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$$2) R(x, Q^0(x), U^0(x)) = \max_{U \in \omega} R(x, Q^0(x), U). \quad (1.3.13)$$

Но так как слагаемое $\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^j(x, Q)$ в формуле (1.3.4) не зависит от U , то равенство (1.3.13) эквивалентно равенству

$$H(x, \psi(x), Q^0(x), U^0(x)) = \max_{U \in \omega} H(x, \psi(x), Q^0(x), U), \quad (1.3.14)$$

где

$$H(x, \psi, Q, U) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \psi_i^j(x) f_j^i(x, Q, U) - f^0(x, Q, U). \quad (1.3.15)$$

Эти условия дают r соотношений для определения функций $U_k^0(x)$, $k = 1, \dots, n$, в зависимости от $\psi(x)$ и $Q^0(x)$.

Легко проверить, что равенства (1.3.12) с учетом (1.3.1), (1.3.4), (1.3.11) и (1.3.15) сводятся к уравнениям

$$R_{Q_i}(x, Q^0(x), U^0(x)) \equiv \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_i^j}{\partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.16)$$

Для $m = 1$ последняя система совпадает с системой для сопряженной функции в принципе максимума Л. С. Понтрягина для обыкновенных дифференциальных уравнений [91].

Таким образом, условия (1.3.1), (1.3.16) и (1.3.14) совместно с краевыми условиями дают $mn + n + r$ уравнений для определения $mn + n + r$ искоемых компонент функций $Q^0(x)$, $U^0(x)$ и $\psi(x)$.

Получив искомые градиенты $\psi(x)$ функций $\varphi^j(x, Q)$, можно найти и сами функции $\varphi^j(x, Q)$. Найдя эти функции, можно проверить на основании достаточных условий, являются ли полученные решения $Q^0(x)$, $U^0(x)$ действительно оптималами.

Рассмотрим теперь один важный частный случай, когда все функции $f_j^i(x, Q, U)$ и функция $f^0(x, Q, U)$ линейны

по компонентам Q , т. е. имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f_j^i(x, Q, U) &= \sum_{k=1}^n a_{kj}^i(x) Q_k + c_j^i(x, U), \\ i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \\ f^0(x, Q, U) &= \sum_{k=1}^n a_k^0(x) Q_k + c^0(x, U). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.17)$$

Будем также считать, что область Ω открыта, а граничное значение $Q_{\Gamma}(x)$ фиксировано.

Пусть функции $\psi^0(x)$, $Q^0(x)$, $U^0(x)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, представляют собой решение системы (1.3.1), (1.3.16), (1.3.14).

Тогда легко показать, что пара $(Q^0(x), U^0(x))$ является оптималью, так как она удовлетворяет расширенному принципу максимума, если положить

$$\Phi^j(x, y) = \sum_{i=1}^n \psi_i^j(x) Q_i. \quad (1.3.18)$$

Действительно, для рассматриваемой линейной системы уравнение (1.3.16) и условие (1.3.14) будут соответственно иметь вид

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_j^i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{jk}^i \psi_j^i - a_k^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3.19)$$

$$H(x, \psi^0(x), Q^0(x), U^0(x)) = \max_{U \in \omega} [\psi_j^i(x) c_j^i(x, U) - c^0(x, U)]. \quad (1.3.20)$$

Легко видеть, что при $\psi(x) = \psi^0(x)$ функция

$$\begin{aligned} R(x, Q, U) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_k^{0j}}{\partial x_j} + \sum \sum a_{jk}^i \psi_j^{0j} - a_k^0 \right) Q_k + \\ &+ H(x, \psi^0(x), Q, U) \end{aligned}$$

в силу (1.3.19) и (1.3.20) вообще не зависит от компонент Q_k , $k = 1, 2, \dots, n$, функции Q .

Поэтому опять в силу (1.3.20)

$$\begin{aligned} \max_{(Q, U) \in b} R(x, Q, U) &= \max_{(Q, U) \in b} H(x, \psi, Q, U) = \\ &= H(x, \psi^0(x), Q^0(x), U^0(x)) = \mu(x) \end{aligned}$$

и, следовательно, пара $(Q^0(x), U^0(x))$ является оптималью, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, приведенные в [62].

Пример 1. Найти минималь $Q^0(x)$ функционала

$$J = \iint_D Q dx_1 dx_2,$$

где область D есть квадрат на плоскости

$$(-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1).$$

Управляемая система (1.3.1) описывается уравнениями

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = U_1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} = U_2, \quad (1.3.21)$$

с граничными условиями

$$Q(x_1, x_2) = 0 \text{ при } (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (1.3.22)$$

где Γ — граница области D . На управляющие функции $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ наложены ограничения

$$|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1. \quad (1.3.23)$$

Составим функцию

$$H(x, \psi(Q), U) = \psi^1(x) U_1 + \psi^2(x) U_2 - Q,$$

где $x = (x_1, x_2) \in D$.

Из условия (1.3.14) следует, что экстремаль может состоять из кусков поверхностей следующих типов:

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\psi^1 \neq 0, \psi^2 \equiv 0, U_1 = \text{sign } \psi^1(x), u_2 < 1;$ 2. $\psi^1 \equiv 0, \psi^2 \neq 0, U_1 < 1, U_2 = \text{sign } \psi^2(x);$ 3. $\psi^1 \neq 0, \psi^2 \neq 0, U_1 = \text{sign } \psi^1(x), U_2 = \text{sign } \psi^2(x);$ 4. $\psi^1(x) \equiv \psi^2(x) \equiv 0, U_1 < 1, U_2 < 1.$ | } |
| (1.3.24) | |

Однако сразу видно, что решение типа 3 несовместно с системой (1.3.21) и (1.3.22), вместе с (1.3.23) оно накладывает четыре условия на три неизвестные функции $Q(x)$, $U_1(x)$ и $U_2(x)$.

Уравнение (1.3.16) в данном случае имеет вид

$$\psi_{x_1}^1 + \psi_{x_2}^2 \equiv 1. \quad (1.3.25)$$

Отсюда сразу видно, что условие 4 в (1.3.24) не совместно с последним равенством. Будем составлять экстремаль $Q(x)$ из кусков поверхностей типа 1 и 2 в (1.3.24). Уравнение поверхности типа 1 в силу (1.3.23) и последнего равенства имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \text{sign } \psi^1,$$

$$\psi^1 = x_1 + f^1(x_2), \psi^2(x) \equiv 0,$$

где $f^1(x_2)$ — произвольная функция.

Аналогично, экстремали типа 2 имеют вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} = \text{sign } \psi^2,$$

$$\psi^2 = x_2 + f^2(x_1), \psi^1(x) \equiv 0.$$

Теперь задача состоит в подборе таких функций f^1 и f^2 , чтобы удовлетворить граничным условиям (1.3.22).

Зададим произвольные функции $f^1(x_2)$ и $f^2(x_1)$ следующим образом:

$$f^1(x_2) = -|x_2| \text{sign } x_1, f^2(x_1) = -|x_1| \text{sign } x_2.$$

Тогда в соответствии с (1.3.25) получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi^1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } |x_2| \geq |x_1|; \\ x_1 - |x_2| \text{sign } x_1 & \text{при } |x_2| < |x_1|, \end{cases} \\ \psi^2(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } |x_2| \leq |x_1|; \\ x_2 - |x_1| \text{sign } x_2 & \text{при } |x_2| \geq |x_1|. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.26)$$

Функции $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ непрерывны всюду в области $|x_1| \leq 1$, $|x_2| < 1$ и дифференцируемы всюду, кроме прямых $x_1 \pm x_2 = 0$. Тем самым задается конструкция экстремали из двух кусков типа 1 при $|x_2| < |x_1|$ и из двух кусков

типа 2 при $|x_2| > |x_1|$. Из (1.3.25) и (1.3.26) найдем иско-
мую оптимальную функцию:

$$Q^0(x) = \begin{cases} |x_1| - 1 & \text{при } |x_2| \leq |x_1|; \\ |x_2| - 1 & \text{при } |x_1| \leq |x_2|. \end{cases}$$

Так как данная задача является линейной, то найден-
ная экстремаль является абсолютной минималью.

Пример 2. Пусть требуется найти кусочно-гладкую
функцию $Q(x)$, минимизирующую функционал

$$\iint_D f^0(x, Q, \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}) dx_1 dx_2,$$

где D — некоторая область в плоскости (x_1, x_2) . Пусть
 $n = 1$, $m = 2$ и уравнения (1.3.1) имеют тот же вид, что
и в предыдущем примере.

Введем обозначения

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = U_1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} = U_2, \quad (1.3.27)$$

где U_1 и U_2 — кусочно-непрерывные функции от (x_1, x_2) .
Таким образом, задача сводится к рассмотренной, где урав-
нения (1.3.27) играют роль системы (1.3.1), и требуется ми-
нимизировать функционал

$$\iint_D f^0(x, Q, U_1, U_2) dx_1 dx_2,$$

причем область ω — открыта.

Рассмотрим функции

$$\left. \begin{aligned} H(x, Q, U) &= \psi^1(x) U_1 + \psi^2(x) U_2 - f^0(x, Q, U_1, U_2), \\ R_Q &= \psi_{x_1}^1 + \psi_{x_2}^2 - f_Q^0(x, Q, U_1, U_2) = 0, \\ H_{U_1} &\equiv \psi^1 - f_{U_1}^0 = 0, \quad H_{U_2} = \psi^2 - f_{U_2}^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.28)$$

Исключая из (1.3.28) величины ψ^1 и ψ^2 , получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_{U_1}^0(x, Q(x), U(x)) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_{U_2}^0(x, Q(x), U(x)) - f_Q^0 = 0, \quad (1.3.29)$$

т. е. из системы (1.3.28) следуют уравнения Эйлера — Остроградского для рассматриваемой задачи [34]. Это значит, что необходимые условия (1.3.28) максимума функции R являются одновременно и необходимыми условиями минимума функционала.

§ 4. Одна задача оптимального управления химическим реактором

В этом параграфе рассматриваются методы расчета оптимальных режимов одного класса химико-технологических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Задачи подобного рода решались Ю. М. Волиным и Г. М. Островским [28].

Пусть распределение концентраций $Q_i(x, t)$, $i = 1, \dots, \dots, n$, реагирующих веществ по длине реактора x , $0 \leq x \leq L$, в каждый момент времени t , $0 \leq t \leq T$, описывается системой «статических» (не содержащих частные производные по времени) уравнений

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x} = F_i(Q, P, U), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4.1)$$

которые можно записать также в векторной форме

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = F(Q, P, U). \quad (1.4.2)$$

В эти уравнения входят величины $P = (P_1, P_2, \dots, P_p)$ и $U = (U_1, U_2, \dots, U_r)$, также зависящие от двух независимых переменных (x, t) , меняющихся в прямоугольной области D ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$).

Величины P_j , $j = 1, 2, \dots, p$, характеризуют активность катализатора в каждой точке области D . Существенным для процесса является то, что происходит падение активности катализатора во времени, которое описывается следующей системой «динамических» (содержащих частные производные во времени) уравнений

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} = G_j(P, U), \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.4.3)$$

Последнее уравнение также можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = G(P, U). \quad (1.4.4)$$

Функция $U(x, t) = (U_1(x, t), \dots, U_r(x, t))$, фигурирующая в уравнениях (1.4.1) — (1.4.4), является управляющим воздействием, оказываемым на химический реактор. Распределение температуры подогрева может служить примером такого рода управляющего воздействия. Кроме этого, управляющими воздействиями могут быть концентрации некоторых веществ, распределениями которых можно управлять.

До сих пор мы рассматривали задачи, где управление $U(x, t)$ ограничивалось тем, что его значения не могли выходить за пределы некоторой фиксированной замкнутой области ω . Для решения соответствующих задач оптимизации был разработан аппарат принципа максимума.

Однако в случае, когда на значение U не накладывается никаких ограничений, или когда мы уверены, что в оптимальном процессе $U(x, t)$ принимает свои значения в открытой части области ω (т. е. $U(x, t)$ не принимает граничных значений), то можно применить классические методы вывода условий оптимальности с использованием классических вариаций.

Итак, используя то, что переходные процессы по изменению концентраций $Q(x, t)$ происходят гораздо быстрее процессов изменения активности катализаторов, мы будем рассматривать управляемую систему дифференциальных уравнений (1.4.2), (1.4.4) с начальными условиями

$$Q(0, t) = Q_0(t), \quad (1.4.5)$$

$$P(x, 0) = P_0(t). \quad (1.4.6)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $U(x, t)$, которое в силу уравнений (1.4.2), (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) обеспечивало бы максимальную стоимость всех получающихся на выходе из реактора продуктов за некоторый фиксированный промежуток времени T . Иными словами, требуется максимизировать функционал

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^n c_i Q_i(L, t) dt. \quad (1.4.7)$$

Здесь c_i , $i = 1, \dots, n$, — стоимость единицы веса или объема соответственно i -го вещества.

Подынтегральное выражение в (1.4.7) можно представить в векторной форме

$$J = \int_0^T cQ(L, t), \quad (1.4.8)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Для вывода необходимых условий оптимальности управления $U(x, t)$, следуя методу Лагранжа, на основании соотношений (1.4.2), (1.4.4) и (1.4.8) составим функцию (функционал)

$$\begin{aligned} \Phi = \int_0^T cQ(L, t) dt + \iint_D [f(x, t) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - F \right) + \\ + g(x, t) \left(\frac{\partial P}{\partial t} - G \right)] dx dt, \quad (1.4.9) \end{aligned}$$

где функции $f(x, t) = (f_1(x, t), \dots, f_n(x, t))$ и $g(x, t) = (g_1(x, t), \dots, g_p(x, t))$ играют роль множителей Лагранжа.

Функционал Φ зависит от 4-х функций: $Q(L, t)$, $Q(x, t)$, $P(x, t)$ и $U(x, t)$. При оптимальных функциях $Q^0(L, t)$, $Q^0(x, t)$, $P^0(x, t)$ и $U^0(x, t)$ функционал Φ принимает стационарное значение, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Phi(Q^0(L, t) + \varepsilon \delta Q(L, t), Q^0(x, t) + \varepsilon \delta Q(x, t), \\ P^0 + \varepsilon \delta P, U^0 + \varepsilon \delta U) |_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.4.10) \end{aligned}$$

при произвольных функциях

$$\delta Q(L, t), \delta Q(x, t), \delta P(x, t), \delta U(x, t).$$

Вычислим левую часть равенства (1.4.10) и в соответствии с тем же равенством приравняем ее нулю.

Перед тем как производить это вычисление, условимся о следующем обозначении. Если имеется m произвольных функций $R_i(y_1, y_2, \dots, y_k)$ от k переменных y_1, y_2, \dots, y_k , то через $\partial R / \partial y$ будем обозначать матрицу

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \left\| \frac{\partial R_i}{\partial y_j} \right\|, \quad (1.4.11)$$

где i означает номер строки, а j — номер столбца. Тогда в соответствии с (1.4.10) получим:

$$\int_0^T c \delta Q(L, t) dt + \iint_D \left[f(x, t) \left(\frac{\partial \delta Q}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial Q} \delta Q - \frac{\partial F}{\partial P} \delta P - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial F}{\partial U} \delta U \right) + g(x, t) \left(\frac{\partial \delta P}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial Q} \delta Q - \frac{\partial G}{\partial U} \delta U \right) \right] dx dt = 0. \quad (1.4.12)$$

Проинтегрируем равенство (1.4.12) по частям. Будем иметь:

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial F}{\partial Q} f + \frac{\partial G}{\partial Q} g + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta Q + \left(\frac{\partial F}{\partial P} f + \frac{\partial g}{\partial t} \right) \delta P + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial U} f + \frac{\partial G}{\partial U} g \right) \delta U \right] dx dt + \int_0^T [c - f(L, t)] \delta Q(L, t) dt - \\ - \int_0^L g(x, T) \delta P(x, T) dx = 0. \quad (1.4.13)$$

Так как в последнем равенстве левая его часть должна быть равна нулю при любых гладких функциях $\delta Q(L, t)$, $\delta Q(x, t)$, $\delta P(x, t)$ и $\delta U(x, t)$, то это ведет к тому, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial Q} f - \frac{\partial G}{\partial Q} g, \quad (1.4.14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial P} f, \quad (1.4.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial U} f + \frac{\partial G}{\partial U} g = 0, \quad (1.4.16)$$

$$f(L, t) = c, \quad (1.4.17)$$

$$g(x, T) = 0. \quad (1.4.18)$$

Эти уравнения вместе с двумя уравнениями (1.4.2) и (1.4.4) дают полную систему уравнений для определения неизвестных функций $Q^0(x, t)$, $P^0(x, t)$, $U^0(x, t)$, $f^0(x, t)$ и $g^0(x, t)$, которые являются решением задачи оптимального управления реактором. Уравнения (1.4.14), (1.4.15) играют роль сопряженной системы к уравнениям (1.4.2), (1.4.4)

Уравнения (1.4.17), (1.4.18) задают краевые условия. Уравнение (1.4.16) представляет собой уравнение Эйлера рассматриваемой задачи оптимального управления.

Заметим еще, что если ввести функцию

$$H(f, g, Q, P, U) = fF(Q, P, U) + gG(P, U),$$

то условия (1.4.2), (1.4.4) и (1.4.14) — (1.4.16) можно записать в следующем симметричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial H}{\partial f}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial g}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{\partial H}{\partial Q}; \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial P}, \\ \frac{\partial H}{\partial U} &= 0. \end{aligned}$$

§ 5. Общая задача на условный минимум функционала при дополнительных ограничениях

В этом параграфе мы сформулируем задачу на условный минимум в функциональном пространстве. К этой задаче, как увидим в дальнейшем, могут быть сведены многие из сформулированных выше задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Пусть B и B_1 — два банаховых пространства, т. е. линейные, нормированные и полные в смысле сходимости по норме [76].

Далее, пусть

$$\Phi^0 = \Phi^0(W) \quad (1.5.1)$$

— функционал, определенный на элементах W пространства B , $W \in B$, и

$$\Phi = \Phi(W) \quad (1.5.2)$$

— функция (оператор), определенная на элементах W того же пространства B и принимающая свои значения в пространстве B_1 , $\Phi \in B_1$.

Пусть в пространстве B задано выпуклое множество, имеющее внутренние точки, $M \subset B$. Точку $W \in M$ будем называть *допустимой* точкой.

Рассмотрим далее множество точек $W \in B$, удовлетворяющее следующему условию:

$$\Phi(W) = 0, \quad (1.5.3)$$

где 0 — нулевой элемент пространства B_1 .

Задачу на абсолютный условный минимум функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$ можно сформулировать следующим образом: найти допустимую точку $W_0 \in B$, удовлетворяющую условию (1.5.3), такую, что для всех допустимых точек $W \in B$, также удовлетворяющих равенству (1.5.3), выполнено условие

$$\Phi^0(W_0) \leq \Phi^0(W). \quad (1.5.4)$$

Точку W_0 , дающую решение поставленной выше задачи, будем называть точкой абсолютного условного минимума.

Если же условие (1.5.4) выполняется лишь для некоторой окрестности точки W_0 , то точку W_0 будем называть точкой относительного условного минимума функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$.

Множество допустимых точек $W \in B$ можно задавать также с помощью следующего условия:

$$F(W) \leq 0, \quad (1.5.5)$$

где $F(W)$ — некоторый функционал, определенный на элементах пространства B . Итак, пусть точка $W_0 \in B$ является допустимой точкой условного минимума функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$.

Предположим, что $\Phi^0(W)$ и $\Phi(W)$ имеют в точке W_0 непрерывные сильные производные. Если точка W_0 удовлетворяет равенству $F(W_0) = 0$, то также будем считать, что в точке W_0 существует непрерывная сильная производная $F'(W_0)$.

Точка W_0 называется *обыкновенной* точкой многообразия $\Phi(W) = 0$, если линейный оператор $\Phi'(W_0)$ отображает пространство B на все пространство B_1 .

Следовательно, в этом случае уравнение

$$V = \Phi'(W_0)W \quad (1.5.6)$$

имеет решение $W \in B$ при любом $V \in B_1$.

Иными словами, оператор $\Phi' (W_0)$ имеет обратный оператор $[\Phi' (W_0)]^{-1}$, являющийся линейным оператором. Таким образом,

$$W = [\Phi' (W_0)]^{-1}V. \quad (1.5.7)$$

Рассмотрим семейство допустимых точек $W(\varepsilon) \in B$, зависящее от ε , где $\varepsilon \geq 0$ — действительный неотрицательный малый числовой параметр. Будем предполагать, что семейство $W(\varepsilon)$ непрерывно справа при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле сходимости по норме в пространстве B и точка условного минимума W_0 включена в это семейство при $\varepsilon = 0$, т. е. $W(0) = W_0$.

Напомним, что сильной производной (производной Фреше) функции (оператора) $\Phi(W)$ в точке W_0 называется линейный оператор $\Phi'(W_0)$ (вообще зависящий от W_0), такой, что для любой точки $W \in B$ выполнено равенство

$$\Phi(W_0 + W) - \Phi(W_0) = \Phi'(W_0)W + o(W, W_0),$$

где

$$\frac{\|o(W, W_0)\|}{\|W_0\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|W\| \rightarrow 0.$$

Величина $\Phi'(W_0)W$ называется сильным дифференциалом (дифференциалом Фреше) функции $\Phi(W)$ в точке W_0 и обозначается $d\Phi(W, W_0)$. Если оператор $\Phi'(W_0)$ непрерывен по норме в зависимости от W_0 , то функция $\Phi(W)$ обладает непрерывной производной.

Далее предположим, что существуют первые производные при $\varepsilon = 0$ следующих числовых функций аргумента ε : $\Phi^0(W(\varepsilon))$, $\|\Phi(W(\varepsilon))\|$ и $\Lambda\Phi(W(\varepsilon))$, где Λ — произвольный линейный функционал из сопряженного к B_1 пространства B_1^* . Если точка W_0 удовлетворяет условию $F(W_0) = 0$, то будем считать, что в точке $\varepsilon = 0$ существуют непрерывные первые производные функций $F(W(\varepsilon))$ и $\|F(W(\varepsilon))\|$.

Описанное выше семейство $W(\varepsilon)$ будем называть допустимым семейством.

Отсутствие требования дифференцируемости допустимого семейства $W(\varepsilon)$ по ε при $\varepsilon = 0$ является существенным для доказательства принципа максимума, так как это дает нам возможность использовать семейства, которые недиф-

ференцируемы по ε . Здесь используются так называемые игольчатые вариации, определенные в дальнейшем равенством (1.6.30).

Обозначим через T_0 совокупность элементов $h \in B$, для которых выполнено условие

$$\Phi'(W_0)h = 0. \tag{1.5.8}$$

Здесь T_0 есть подпространство пространства B . Предположим, что пространство B можно представить как прямое произведение подпространства T_0 и некоторого подпространства T_1 так, что каждый элемент $W \in B$ имеет вид

$$W = (h, z), \quad h \in T_0, z \in T_1. \tag{1.5.9}$$

Сформулируем теперь теорему, которая дает основное необходимое условие для определения точки W_0 условного минимума.

Теорема 1. Пусть пространство B есть прямое произведение подпространств T_0 и T_1 . Точка $W_0 \in B$ условного минимума функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$ включена в допустимое семейство $W(\varepsilon)$. Если точка W_0 удовлетворяет условию $F(W_0) < 0$ и является обыкновенной точкой многообразия $\Phi(W_0) = 0$ или если точка W_0 удовлетворяет условию $F(W_0) = 0$ и является обыкновенной точкой многообразия $\Phi(W) = 0, F(W) = 0$, то существует такой линейный функционал $\Lambda \in B_1^*$, определенный на пространстве B_1 , что для функционала

$$G(W) = \Phi^0(W) - \Lambda\Phi(W) \tag{1.5.10}$$

выполнено условие

$$G'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} \geq 0, \tag{1.5.11}$$

где $G'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0}$ — правая производная функции $G(W(\varepsilon))$ по ε в точке $\varepsilon = 0$.

Для приложений важен случай, когда множество M допустимых точек $W \in B$ есть выпуклое множество в пространстве B , обладающее внутренними точками. В этом случае имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. Пусть пространство B есть прямое произведение подпространств T_0 и T_1 . Точка $W_0 \in B$

условного минимума функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$ включена в допустимое семейство $W(\varepsilon) \in M$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Если точка W_0 является внутренней точкой выпуклого множества M и обыкновенной точкой многообразия $\Phi(W) = 0$ или если W_0 является не внутренней точкой множества M и обыкновенной точкой многообразия $\Phi(W) = 0$, $\lambda(W) = 0$ ($\lambda(W)$ — линейный функционал из B_1^* такой, что $\lambda(W) = 0$ — уравнение опорной гиперплоскости к множеству M в точке W_0), то существует такой линейный функционал $\Lambda \in B_1^*$, определенный на пространстве B_1 , что для функционала (1.5.10) выполнено условие (1.5.11).

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть функции $\omega = W_0(P)$, $P \in D$, $W_0 \in B$, представляют собой решение задачи на условный минимум.

Рассмотрим случай, когда W_0 удовлетворяет условию $F(W_0) < 0$. Тогда существует окрестность O точки W_0 , все точки которой обладают свойством $F(W) < 0$. Так как W_0 является обыкновенной точкой многообразия $\Phi(W) = 0$, то по теореме Лагранжа существует такой линейный функционал $\Lambda \in B_1^*$, что для любой точки $W(h, z)$, $h \in T_0$, $z \in T_1$, выполнены условия

$$G'(W_0)W = [\Phi^{0'}(W_0) - \Lambda\Phi'(W_0)]W = 0, \quad (1.5.12)$$

$$[\Phi_h^{0'}(W_0) - \Lambda\Phi'_h(W_0)]h = 0, \quad (1.5.13)$$

$$[\Phi_z^{0'}(W_0) - \Lambda\Phi'_z(W_0)]z = 0. \quad (1.5.14)$$

В окрестности O функционал $\Phi^0(W)$, в силу его дифференцируемости, можно представить в виде

$$\Phi^0(W) = Ah + Bz + \varphi^0(W), \quad (1.5.15)$$

где A и B_1 — линейные функционалы, зависящие только от W_0 и $\varphi_h^{0'}(W_0) = \varphi_z^{0'}(W_0) = 0$. Здесь без ограничения общности принято, что $\Phi^0(W_0) = 0$.

Воспользовавшись условием (1.5.8), в силу дифференцируемости оператора $\Phi(W)$ можно представить его в окрестности O в виде

$$\Phi(W) = Cz + \varphi(W), \quad (1.5.16)$$

где C — линейный оператор, зависящий только от W_0 и $\frac{\|\varphi(W)\|}{\|W - W_0\|} \rightarrow 0$ при $\|W - W_0\| \rightarrow 0$.

Продифференцировав равенства (1.5.15) и (1.5.16) по h и по z , подставив значения соответствующих производных в равенства (1.5.13) и (1.5.14), получим соотношения:

$$Ah = 0, \quad (1.5.17)$$

$$(B - \Lambda C)z = 0. \quad (1.5.18)$$

Из (1.5.17) и (1.5.18) следует, что $A = 0$ и $B - \Lambda C = 0$. В силу существования обратного оператора $[\Phi'(W_0)]^{-1}$, оператор C^{-1} существует и, следовательно,

$$\Lambda = BC^{-1}. \quad (1.5.19)$$

Так как $A = 0$, то равенство (1.5.15) дает условие

$$\Phi^0(W) = Bz + \varphi^0(W). \quad (1.5.20)$$

Вместо переменной $W = (h, z)$ можно ввести новую переменную $y = (h, v)$ (оставим неизменной переменную h), где

$$v = \Phi(h, z) = Cz + \varphi(h, z), \quad v_0 = \Phi(W_0) = 0. \quad (1.5.21)$$

При этом $W_n = (h_0, z_0) = y_0 = (h_0, 0)$.

В новых переменных с учетом (1.5.19) имеем:

$$\Phi^0(y) = \Phi^0(h, v) = \Lambda v + \kappa(h, v), \quad (1.5.22)$$

где

$$\kappa'_h|_{y=y_0} = \kappa'_v|_{y=y_0} = 0.$$

В силу существования правых производных по ε от функций $\Phi^0(W(\varepsilon))$ и $\Lambda\Phi(W(\varepsilon))$ при $\varepsilon = 0$, существует правая производная $[\Lambda v(\varepsilon)]'_\varepsilon$ и, следовательно, существует

$$\kappa'_\varepsilon = \Phi^0_\varepsilon - [\Lambda v(\varepsilon)]'_\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon = 0. \quad (1.5.23)$$

Используя равенства (1.5.22) и (1.5.23), легко доказать существование $G'_\varepsilon = \kappa'_\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$.

Из (1.5.22) получим:

$$\Phi^0(h, v)|_{v=0} = \Phi^0(h, 0) = \kappa(h, 0). \quad (1.5.24)$$

Но при $\Phi = 0$, т. е. при $v = 0$, функционал Φ^0 имеет минимум. Следовательно, в силу последнего равенства (1.5.24) функционал $\kappa(h, 0)$ имеет минимум по h при $h = h_0$, т. е. $\kappa(h_0, 0)$ — минимальное значение этого функционала при $v = 0$. Поэтому если правая производная $\kappa'_\varepsilon(h_\varepsilon, 0)|_{\varepsilon=0}$ существует, то она неотрицательна.

Для доказательства теоремы осталось показать, что $\kappa'_\varepsilon(h_\varepsilon, 0)|_{\varepsilon=0}$ существует.

В силу дифференцируемости $\kappa(h, v)$ по v (что верно по предположению теоремы о непрерывной дифференцируемости функционала Φ^0 в точке условного минимума) имеем

$$\kappa(h, v) = \kappa(h, 0) + \omega(h, \xi v) v, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (1.5.25)$$

где линейный функционал $\omega(h, v)$ непрерывен в окрестности точки y_0 , соответствующей окрестности O точки W_0 .

Продифференцируем обе части равенства (1.5.25) по v справа

$$\kappa'_\varepsilon(h_\varepsilon, v_\varepsilon) = \kappa'_\varepsilon(h_\varepsilon, 0) + (\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon) v_\varepsilon)'_\varepsilon. \quad (1.5.26)$$

Отсюда получим:

$$\kappa'_\varepsilon(h_\varepsilon, 0) = \kappa'_\varepsilon(h_\varepsilon, v_\varepsilon) - (\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon) v_\varepsilon)'_\varepsilon. \quad (1.5.27)$$

Остается показать существование второго слагаемого при $\varepsilon \rightarrow 0$ справа. Имеем, учитывая $v_0 = 0$,

$$\begin{aligned} (\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon) v_\varepsilon)'_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon) v_\varepsilon - \omega(h_0, v_0) v_0}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon) v_\varepsilon}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.5.28)$$

Но легко видеть, что

$$\left\| \frac{\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon) v_\varepsilon}{\varepsilon} \right\| \leq \|\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon)\| \frac{\|v_\varepsilon\|}{\varepsilon}. \quad (1.5.29)$$

Так как $\|v_\varepsilon\| = \|\Phi(W(\varepsilon))\|$ по предположению дифференцируемо по ε , то $\|v_\varepsilon\|/\varepsilon$ ограничено при $\varepsilon \rightarrow 0$, а так как $\|\omega(h_\varepsilon, \xi v_\varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то предел (1.5.28) существует и равен нулю.

Следовательно, существование второго слагаемого при $\varepsilon \rightarrow 0$ справа в формуле (1.5.27) доказано, и следовательно, первая часть теоремы в предположении, что $F(W_0) < 0$, полностью доказана.

Теперь рассмотрим случай $F(W_0) = 0$. Но он сводится к только что рассмотренному случаю, если считать, что ищется точка W_0 условного минимума функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$ и $F(W) = 0$.

В силу указанных выше предположений относительно функционала $F(W)$ можно применить первую часть только что доказанной теоремы, которая в этом случае гласит, что существуют такой линейный функционал $\Lambda \in B_1^*$ и действительное число l , что для функционала

$$J(W) = \Phi^0(W) - \Lambda\Phi(W) - lF(W) \tag{1.5.30}$$

выполнено условие

$$J'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} \geq 0. \tag{1.5.31}$$

В силу (1.5.31) имеем:

$$\Phi'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} - [\Lambda\Phi(W(\varepsilon))]'_{\varepsilon=0} \geq lF'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0}. \tag{1.5.32}$$

Остается показать, что для любого допустимого семейства выполняется неравенство

$$lF'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} \geq 0. \tag{1.5.33}$$

Действительно, производная $F'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0}$ неположительна и не зависит от вида допустимого семейства $W(\varepsilon)$, ибо $F(W_0) = 0$, и для любого семейства $F(W(\varepsilon)) \leq 0$. Так как $\varepsilon \rightarrow 0$ справа, то

$$F'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(W(\varepsilon)) - F(W_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(W(\varepsilon))}{\varepsilon} \leq 0. \tag{1.5.34}$$

Рассмотрим семейство $W(\varepsilon) = W_0 + \varepsilon h$, где $h \in B$. В силу произвольности $h \in B$ условие (1.5.31) дает

$$\Phi^{0'}(W_0)h - \Lambda\Phi'(W_0)h - lF'(W_0)h = 0. \tag{1.5.35}$$

Будем считать теперь, что $h \in T_0$, тогда второй член в (1.5.35) в силу (1.5.8) обращается в нуль, и мы получаем:

$$\Phi^{0'}(W_0)h = lF'(W_0)h. \tag{1.5.36}$$

Покажем теперь, что $\Phi^{0'}(W_0)h \geq 0$, если $h \in T_0$ и является в то же время допустимым элементом, т. е. $F(h) \leq 0$.

Рассмотрим две окрестности точки W_0 : окрестность O_1 , лежащую в многообразии $F(W) = 0$, и окрестность O_2 , лежащую в многообразии T_0 . Известно (см. [76], теорема 1, стр. 330), что между точками $W \in O_1$ и точками $h \in T_0$ можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. В силу того, что точка W_0 является обыкновенной точкой многообразия $\Phi(W) = 0$, $F(W) = 0$, то существует допустимая $W \in O_1$ и взаимно соответствующая ей допустимая $h \in O_2$.

Предположим теперь противное, т. е. что для допустимой $h \in O_2$ выполнено неравенство $\Phi^{0'}(W_0)h < 0$.

Функционал $\Phi^0(W)$ в окрестности O_1 можно представить в виде

$$\Phi^0(W) = \Phi^0(W_0) + \Delta\Phi^0(W_0, W), \quad (1.5.37)$$

где допустимая $W \in O_1$ (следовательно, $\Phi(W) = 0$),

$$\Delta\Phi^0(W_0, W) = \Phi^{0'}(W_0)h + \varphi^0(W_0, W),$$

$$\frac{\|\Phi(W_0, W)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0$$

и допустимая $h \in O_2$.

При достаточно малой окрестности O_2 и соответствующей ей окрестности O_1 знак приращения $\Delta\Phi(W, W_0)$ совпадает со знаком $\Phi^{0'}(W_0)h$ (если $\Phi^{0'}(W_0)h \neq 0$).

Но в силу предположения $\Phi^{0'}(W_0)h < 0$ и, следовательно, для соответствующей допустимой $W \in O_1$ ($\Phi(W) = 0$) получим $\Phi^0(W) < \Phi^0(W_0)$. Итак, существует допустимая точка W , не совпадающая с W_0 , которая при условии $\Phi(W) = 0$ дает меньшее значение функционалу $\Phi^0(W)$. Но это противоречит предположению, что W_0 есть допустимая точка условного минимума функционала $\Phi^0(W)$ при условии $\Phi(W) = 0$. Поэтому $\Phi^{0'}(W_0)h > 0$ и, следовательно, в силу (1.5.36) $lF'(W_0)h \geq 0$ для любой допустимой $h \in B$. Таким образом, используя (1.5.34), получаем, что $lF'_\varepsilon(W(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} > 0$ для любого допустимого семейства $W(\varepsilon)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Проведем через точку W_0 опорную гиперплоскость Γ к множеству M

так, чтобы для точек множества t , принадлежащих пересечению Γ и T_0 , выполнялось условие

$$\Phi^{0'}(W_0)W = 0, W \in t = \Gamma T_0. \quad (1.5.38)$$

Пусть уравнение гиперплоскости Γ имеет вид $\lambda(W) = 0$, причем $\lambda(W_0) = 0$ и $\lambda(W) \leq 0$, если $W \in M$. Так как точка W_0 есть обыкновенная точка многообразия $\Phi(W) = 0$, $\lambda(W) = 0$, линейное многообразие T_0 не содержится целиком в гиперплоскости Γ .

Из (1.5.38) следует, что если W_1 и W_2 принадлежат одному и тому же классу смежности $T \in B/t$, то $\Phi^{0'}(W_0)W_1 = \Phi^{0'}(W_0)W_2$.

Введем функционал $\rho(T) = \Phi^{0'}(W_0)W$, где W — любой элемент из T . Имеем:

$$|\rho(T)| = |\Phi^{0'}(W_0)W| \leq \|\Phi^{0'}(W)\| \cdot \|W\|,$$

откуда, переходя в правой части последнего равенства к нижней границе по $W \in T$, получим:

$$|\rho(T)| \leq \|\Phi^{0'}(W_0)\| \|T\|.$$

Следовательно, $\rho(T)$ — линейный функционал, определенный на B/t . С другой стороны, имеем [76], что $T = AZ$, где A — линейный оператор и Z — элемент из $B \times R$ (R — пространство действительных чисел) такой, что вектор $[\Phi'(W_0)W, \lambda(W)] = Z$ для любого $W \in T$. Следовательно,

$$\Phi^{0'}(W_0)W = \rho(T) = \rho(AZ) = \tilde{\Lambda}(Z) = \tilde{\Lambda}[\Phi'(W_0)W,$$

$$\lambda(W)] = \Lambda\Phi'(W_0)W - \nu\lambda(W),$$

где $\tilde{\Lambda} \in (B \times R)^*$, $\Lambda \in B^*$ и ν — действительное число. Отсюда имеем $\Phi^{0'}(W_0)W - \Lambda\Phi'(W_0)W = \nu\lambda(W)$, $W \in B$.

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1 для случая, когда W_0 удовлетворяет условию $F(W_0) = 0$, доказывается, что $\Phi^{0'}(W_0)W - \Lambda\Phi'(W_0)W \geq 0$ для $W \in M$.

Последнее неравенство можно принять за расширенный аналог равенства (1.5.12) и окончание доказательства провести аналогично первой части доказательства теоремы 1.

§ 6. Задача оптимального управления для систем, описываемых интегральными уравнениями

Обозначим через D некоторую область в m -мерном евклидовом пространстве. Будем рассматривать вектор-функцию $\omega = W(P)$, определенную в области D , $P \in D$, и принимающую свои значения на некотором множестве b n -мерного евклидова пространства E_n такого, что множество функций $\omega = W(P)$, $P \in D$, $\omega \in b$, образует выпуклое множество с внутренними точками в некотором банаховом пространстве [21].

Пусть также задана функция $K(P, S, \omega)$, определенная на прямом произведении $D \times D \times E_n$, $P \in D$, $S \in D$, $\omega \in E_n$ и принимающая свои значения в n_1 -мерном евклидовом пространстве E_{n_1} .

Мы будем рассматривать интегралы от функции $K(P, S, W(S))$ по аргументу S , изменяющемуся в области D или в некоторой ее подобласти $D_1 \in D$:

$$\int_{D_1} K(P, S, W(S)) dS. \quad (1.6.1)$$

Пусть задан функционал

$$\Phi^0 = \Phi^0(y), \quad (1.6.2)$$

определенный на элементах евклидова пространства E_{n_1} , и оператор (функция)

$$\Phi = \Phi(\omega, y), \quad (1.6.3)$$

отображающий прямое произведение пространств $E_n \times E_{n_1}$ пар (ω, y) , $\omega \in E_n$, $y \in E_{n_1}$, в евклидово пространство E_{n_2} размерности n_2 .

Положим

$$\omega = W(P), \quad y = Y(P) = \int_D K(P, S, W(S)) dS. \quad (1.6.4)$$

Пусть, далее, P_1 — некоторая фиксированная точка области D . Тогда можно рассмотреть функционал

$$\Phi^0 = \Phi^0\left(\int_D K(P_1, S, W(S)) dS\right), \quad (1.6.5)$$

определенный на функциях $\omega = W(P)$, $\omega \in b$, $P \in D$.

При переменной точке $P \in D$ оператор

$$\Phi = \Phi(W(P), \int_D K(P, S, W(S)) dS) \quad (1.6.6)$$

можно рассматривать как оператор, определенный на функциях $w = W(P)$, $w \in b$, $P \in D$, и действующий в пространстве функций, определенных в области D и принимающих свои значения из евклидова пространства E_{n_2} .

Рассмотрим множество \bar{M} , элементами которого являются функции $w = W(P)$, $P \in D$, $w \in b$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\Phi(W(P), \int_D K(P, S, W(S)) dS) = 0, \quad (1.6.7)$$

где 0 — нулевой элемент пространства E_{n_2} . Уравнение (1.6.7) в данном случае представляет собой некоторую систему интегральных уравнений, которой должна удовлетворять вектор-функция $W(P)$. Если размерность $n_2 < n$, то, вообще говоря, уравнение (1.6.7) разрешимо неоднозначно и, следовательно, остается некоторый произвол в выборе функции $W(P)$, т. е. множество \bar{M} состоит более чем из одной точки.

Таким образом, можно сформулировать следующую вариационную задачу.

Определить такой элемент W_0 множества \bar{M} , $W_0 \in \bar{M}$, чтобы функционал (1.6.5) на этом элементе достиг своего минимального значения. Иными словами, требуется определить такую функцию $w = W_0(P)$, $P \in D$, $w \in b$, удовлетворяющую условию (1.6.7), чтобы функционал (1.6.5) на этой функции достиг своего минимума.

Сформулированная задача допускает обобщение на тот случай, когда пространства E_n , E_{n_1} , E_{n_2} заменяются на соответствующие банаховы пространства.

Перейдем теперь к выводу необходимых условий оптимальности для сформулированной выше задачи.

Будем предполагать, что оператор $\Phi(w, y)$, определенный равенством (1.6.3), имеет непрерывную производную по аргументу $y \in E_{n_1}$, а функция $K(P, S, w)$ равномерно непрерывна по аргументу $w \in E_n$ при $P \in D$. Допустимые

функции $\omega = W(P)$, $P \in D$, будем считать измеримыми. Тогда основное необходимое условие для решения рассматриваемой задачи при этих предположениях можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. (Расширенный принцип максимума с дополнительным условием.) Пусть $\omega = W_0(P)$, $P \in D$, $\omega \in b$ — допустимая функция, удовлетворяющая условию (1.6.7), и функционал (1.6.5) достигает на этой функции своего минимума. Тогда существует линейный функционал Λ , определенный на функциях $v = V(P)$, $P \in D$, $v \in E_{n_2}$, такой, что функция

$$\begin{aligned} \Pi(R, \omega) = & - \Phi'_y \left(\int_D K(P_1, S, W_0(S)) dS \right) K(P_1, R, \omega) + \\ & + \Lambda \Phi'_y \left(W_0(P), \int_D K(P, S, W_0(S)) dS \right) K(P, R, \omega) \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

переменной $\omega \in b$ при условии

$$\Phi \left(\omega, \int_D K(R, S, W_0(S)) dS \right) = 0 \quad (1.6.9)$$

достигает максимума в точках $\omega = W_0(R)$ почти для всех $R \in D$.

Иными словами, выполняется равенство

$$\max_{\omega \in b} \Pi(R, \omega) (=) \Pi(R, W_0(R)), \quad R \in D, \quad (1.6.10)$$

при условии (1.6.9).

Таким образом, значения функции $\omega = W_0(R)$ почти при каждом фиксированном $R \in D$ дают функции $\Pi(R, \omega)$ условный максимум при дополнительном условии (1.6.9).

Будем говорить, что функция $\omega = W(R)$, $R \in D$, $\omega \in b$, удовлетворяет расширенному принципу максимума с дополнительным условием, если значения этой функции $\omega = W(R)$ почти для всех фиксированных $R \in D$ дают функции $\Pi(R, \omega)$ условный максимум, равный $\Pi(R, W(R))$, при выполнении дополнительного условия (1.6.9).

Если же окажется при этом, что условный максимум функции $\Pi(R, \omega)$ на данной функции $\omega = W(R)$, $R \in D$, $\omega \in b$ совпадает с безусловным максимумом, то будем гово-

ритель, что функция $\omega = W(R)$ удовлетворяет расширенному принципу максимума.

Доказательство теоремы. Пусть $W_0(P)$, $P \in D$ является допустимой функцией, реализующей условный минимум функционала $\Phi^0 \left(\int_D K(P, S, W(S)) dS \right)$ при условии

$$\Phi \left(W(P), \int_D K(P, S, W(S)) dS \right) = 0. \quad (1.6.11)$$

Зафиксируем некоторую точку $R \in D$ и возьмем область $\delta_\varepsilon \in D$, объем которой равен ε , $\varepsilon \geq 0$. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ область δ_ε стягивается к точке R , которая принадлежит δ_ε при любом $\varepsilon \geq 0$.

Определим семейство функций $W_\varepsilon(P)$, $P \in D$, зависящее от введенного выше параметра ε , следующим образом:

$$W_\varepsilon(P) = \begin{cases} W_0(P) & \text{при } P \in D/\delta_\varepsilon; \\ \tilde{\omega} & \text{при } P \in \delta_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.6.12)$$

где D/δ_ε — разность множеств D и δ_ε и $\tilde{\omega}$ — произвольная точка допустимого множества b значений функции $\omega = W(P)$, удовлетворяющая единственному условию (1.6.9).

В дальнейшем будет использовано следующее важное свойство измеримых функций. Пусть $h(\omega)$ есть непрерывная функция и $\omega = W(P)$ — некоторая измеримая функция. Если точка $R \in D$ является правильной точкой функции $W(P)$, то в определенной выше области δ_ε справедливо следующее соотношение:

$$\int_{\delta_\varepsilon} h(W(P)) dP = \varepsilon h(W(R)) + \dots, \quad (1.6.13)$$

где точками обозначена величина более высокого порядка, чем ε .

В дальнейшем будем предполагать, что точка R , с которой связана область δ_ε , фигурирующая в формуле (1.6.12), является правильной точкой функции $W(P)$. Полученное семейство $W_\varepsilon(P)$, определенное формулой (1.6.12), есть допустимое семейство. Это следует из того, что 1) при $\varepsilon = 0$ это семейство содержит функцию $W_0(P)$, 2) каждая функция $W_\varepsilon(P)$ при фиксированном ε допустима, 3) применяя

равенство (1.6.13) и учитывая дифференцируемость функционала (функции) $\Phi^0(y)$ и функции $\Phi(w, y)$ по аргументу y , можно показать непрерывность этого семейства по ε в норме пространства функций $W(P)$ и непрерывную дифференцируемость по ε числовых функций

$$\Phi^0\left(\int_D K(P_1, S, W_\varepsilon(S)) dS\right),$$

$$\left\| \Phi\left(W_\varepsilon(P), \int_D K(P, S, W_\varepsilon(P)) dS\right) \right\|,$$

$$\Lambda\Phi\left(W_\varepsilon(P), \int_D K(P, S, W_\varepsilon(S)) dS\right),$$

где Λ — любой функционал, определенный на том пространстве, где действует оператор Φ в равенстве (1.6.11).

По теореме 2 предыдущего параграфа существует такой линейный функционал Λ , что для функционала

$$G(W) = \Phi^0\left(\int_D K(P_1, S, W(S)) dS\right) -$$

$$- \Lambda\Phi\left(W(P), \int_D K(P, S, W(S)) dS\right) \quad (1.6.14)$$

выполнено условие

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(W_\varepsilon(P))|_{\varepsilon=0} \geq 0. \quad (1.6.15)$$

Вычислим приращение

$$\Delta G = G(W_\varepsilon(P)) - G(W_0(P)) = \Delta\Phi^0 - \Lambda\Delta\Phi, \quad (1.6.16)$$

где

$$\Delta\Phi^0 = \Phi^0\left(\int_D K(P_1, S, W_\varepsilon(S)) dS\right) -$$

$$- \Phi^0\left(\int_D K(P_1, S, W_0(S)) dS\right), \quad (1.6.17)$$

$$\Delta\Phi = \Phi\left(W_\varepsilon(P), \int_D K(P, S, W_\varepsilon(S)) dS\right) -$$

$$- \Phi\left(W_0(P), \int_D K(P, S, W_0(S)) dS\right). \quad (1.6.18)$$

Пользуясь свойством (1.6.13), найдем, что

$$\Delta\Phi^0 = \varepsilon\Phi_y^0 \left(\int_D K(P_1, S, W_0(S)) dS \right) [K(P_1, R, \tilde{w}) - K(P_1, R, W_0(R))] + v(\varepsilon), \quad (1.6.19)$$

где $\frac{v(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вновь пользуясь свойством (1.6.13) и условием (1.6.9), определим, что

$$\Delta\Phi = \varepsilon\Phi_y' \left(W_0(P), \int_D K(P, S, W_0(S)) dS \right) [K(P, S, \tilde{w}) - K(P, R, W_0(R))] + v_1(P, \varepsilon), \quad (1.6.20)$$

где $\frac{v_1(P, \varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $P \in D$.

Введем функцию $\Pi(R, w)$, определяемую равенством (1.6.8). Тогда приращение ΔG в формуле (1.6.16) можно записать следующим образом:

$$\Delta G = \varepsilon [\Pi(R, \tilde{w}) - \Pi(R, W_0(R))] + v_2(\varepsilon), \quad (1.6.21)$$

где $\frac{v_2(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Деля обе части на $\varepsilon > 0$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим с учетом условия (1.6.15), что

$$\Pi(R, \tilde{w}) \leq \Pi(R, W_0(R)). \quad (1.6.22)$$

При этом равенство в последней формуле достигается на оптимальной функции при $\tilde{w} = W_0(R)$. Так как $R \in D$ — произвольная правильная точка функции $W_0(R)$, то условие (1.6.22) означает, что функция $\Pi(R, w)$ почти для всех $R \in D$ достигает максимума по переменной $w \in b$ в точках $w = W_0(R)$. Таким образом, равенство (1.6.22) при условии (1.6.9), а вместе с ним и сформулированная в этом параграфе теорема доказаны.

Рассмотрим теперь один важный для приложений частный случай решаемой здесь задачи. А именно, предположим, что функция $w = W(P)$ представима в следующей форме:

$$\begin{aligned} w = W(P) &= (q, u) = (Q(P), U(P)), \\ q &= Q(P), u = U(P), P \in D, \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

где функция $q = Q(P)$, принимающая свои значения из открытого множества k -мерного евклидова пространства E_k , характеризует состояние управляемого объекта с распределенными параметрами.

Функция $u = U(P)$ характеризует управляющее воздействие, оказываемое на объект. Она принимает свои значения из некоторого допустимого множества ω из r -мерного евклидова пространства.

Пусть равенство (1.6.7) имеет вид

$$\Phi \left(Q(P), \int_D K(P, S, Q(S), U(S)) dS \right) = 0. \quad (1.6.24)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое допустимое управление $u = U_0(P)$, $u \in \omega$, и соответствующее ему в силу условия (1.6.24) состояние $q = Q_0(P)$, что на них функционал

$$\Phi^0 = \Phi^0 \left(\int_D K(P_1, S, Q(S), U(S)) dS \right) \quad (1.6.25)$$

достигает минимального значения. Функции $u = U_0(P)$, $u \in \omega$, $q = Q(P)$ будем называть оптимальным управлением и оптимальным состоянием соответственно.

Сделаем некоторые новые предположения по сравнению с предыдущим параграфом.

Предположим, что функция $\Phi(q, y)$ имеет непрерывные частные производные Φ'_q и Φ'_y «вдоль» оптимального состояния $Q_0(P)$ и управления $U_0(P)$. Относительно функции $K(P, S, q, u)$ будем предполагать также, что она равномерно непрерывна по аргументам S, q, u при $P \in D$ вдоль оптимальной пары $Q_0(P), U_0(P)$. Кроме того, частная производная $K'_q(P, S, q, u)$ вдоль оптимальной пары $q = Q_0(P), u = U_0(P)$ существует, непрерывна и интегрируема с квадратом по P и S .

Будем также предполагать, что линейный функционал Λ на пространстве функции $V(P)$, $P \in D$ имеет вид

$$\int_D N(S) V(S) dS = (N(S), V(S)), \quad (1.6.26)$$

где $N(S)$, $S \in D$ — некоторая измеримая функция.

При этих предположениях имеет место следующая
 Теорема 2. (Принцип максимума.) Пусть $u = U_0(P)$, $P \in D$, $u \in \omega$, есть допустимое оптимальное управление и $q = Q_0(P)$, $P \in D$ — соответствующее ему в силу условия (1.6.24) оптимальное состояние. Тогда существует такая измеримая функция $N(P)$, $P \in D$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned}
 & - \Phi_y^{\theta'} \left(\int_D K(P_1, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) K'_q(P_1, R, Q_0(R), \\
 & U_0(R)) + \Phi'_y \left(Q_0(R), \int_D K(R, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) N(R) + \\
 & + \int_D \Phi'_y \left(Q_0(P), \int_D K(P, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) \times \\
 & \times K'_q(P, R, Q_0(R), U_0(R)) N(P) dP = 0, \quad (1.6.27)
 \end{aligned}$$

что функция

$$\begin{aligned}
 \Pi(R, u) = & - \Phi_y^{\theta'} \left(\int_D K(P_1, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) \times \\
 & \times K(P_1, R, Q_0(R), u) + \int_D \Phi'_y \left(Q_0(P), \int_D K(P, S, Q_0(S), \right. \\
 & \left. U_0(S)) dS \right) K(P, R, Q_0(R), u) N(P) dP \quad (1.6.28)
 \end{aligned}$$

переменной $u \in \omega$ достигает максимума в точках $u = U_0(R)$ почти для всех $R \in D$.

Иными словами, на D выполняется равенство

$$\max_{u \in \omega} \Pi(R, u) (=) \Pi(R, U_0(R)), \quad R \in D. \quad (1.6.29)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (1.6.29) достаточно проварьировать функцию $u = U_0(P)$, $P \in D$, $u \in \omega$, следующим образом:

$$U_\epsilon(P) = \begin{cases} U(P) & \text{при } P \in D/\delta_\epsilon, \\ \tilde{u} & \text{при } P \in \delta_\epsilon. \end{cases} \quad (1.6.30)$$

При этом функцию $q = Q_0(P)$ варьировать не будем.

Тогда, принимая во внимание формулу (1.6.26) для линейного функционала Λ , получим, что функция $\Pi(R, u)$, определенная равенством (1.6.28), достигает максимума по аргументу $u \in \omega$ на оптимальном управлении $u = U_0(P)$ почти для всех $R \in D$.

Для доказательства того, что функция $N(P)$, $P \in D$, удовлетворяет уравнению (1.6.27), проварьировем функцию $q = Q_0(P)$, $P \in D$, следующим образом:

$$Q_\varepsilon(P) = Q_0(P) + \varepsilon Q(P), \quad (1.6.31)$$

где $Q(P)$ — произвольная измеримая функция и $\varepsilon \geq 0$. В этом случае с учетом (1.6.26) имеем

$$\begin{aligned} & \int_D \Phi_y^{\sigma'} \left(\int_D K(P_1, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) \times \\ & \quad \times K'_q(P_1, R, Q_0(R), U_0(R)) Q(R) dR - \\ & - \int_D N(R) \Phi'_q \left(Q_0(R), \int_D K(R, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) Q(R) dR - \\ & - \int_D N(R) \Phi'_y \left(Q_0(R), \int_D K(R, S, Q_0(S), U_0(S)) dS \right) \times \\ & \quad \times \int_D K'_q(R, S, Q_0(S), U_0(S)) Q(S) dS dR = 0. \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Меняя порядок интегрирования в последнем члене предыдущего равенства, а также изменяя знак на противоположный перед всеми его членами и учитывая, что функция $Q(P)$ произвольна, получим уравнение (1.6.27). Таким образом, теорема доказана.

§ 7. Достаточные условия оптимальности для задачи на условный минимум

Предположим, что оператор Φ , фигурирующий в равенстве (1.6.3), можно представить в виде

$$\Phi(\omega, y) = \varphi(\omega) + L(y), \quad (1.7.1)$$

где φ — нелинейная и L — линейная функции, определенные соответственно на пространствах E_n и E_{n_1} [21].

Предположим также, что функционал Φ^0 имеет вид

$$\Phi^0(y) = L^0(y), \quad (1.7.2)$$

где L^0 — линейная функция, определенная на пространстве E_{n_1} .

При этих условиях можно сформулировать теорему, дающую достаточные условия для решения следующей задачи: найти такую допустимую функцию $\omega = W(P)$, $P \in D$, $\omega \in b$, где b — произвольное множество пространства E_n , чтобы при условии

$$\varphi(W(P)) + L \left(\int_D K(P, S, W(S)) dS \right) = 0 \quad (1.7.3)$$

функционал

$$\Phi^0 = L^0 \left(\int_D K(P_1, S, W(S)) dS \right) \quad (1.7.4)$$

принял свое минимальное значение.

Т е о р е м а (достаточные условия оптимальности).

Пусть допустимая функция $\omega = W_0(P)$, $P \in D$, $\omega \in b$, удовлетворяет условию (1.7.3). Тогда, для того чтобы эта функция давала минимум функционалу (1.7.4) при условии (1.7.3), достаточно существование такой функции $N(P)$, $P \in D$, определяющей линейный функционал Λ , что функция

$$T(R, \omega) = -L^0(K(P_1, R, \omega) + \int_D L(K(P, R, \omega) N(P)) dP + \varphi(\omega) N(R)) \quad (1.7.5)$$

при $\omega = W_0(P)$, $P \in D$, $\omega \in b$, достигает максимума по аргументу $\omega \in b$ почти для всех $R \in D$.

Как видно из формулы (1.7.5), функция $T(R, \omega)$ отличается от функции $\Pi(R, u)$, определенной равенством (1.6.28), лишь последним членом $\varphi(\omega) N(R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную допустимую функцию $\omega = W(P)$, $P \in D$, $\omega \in b$, удовлетворяющую условию (1.7.3). По условию теоремы имеем:

$$T(R, W(R)) \leq T(R, W_0(R))$$

почти для всех $R \in D$. Интегрируя обе части последнего неравенства по области D (неравенство сохранится после интегрирования в силу положительности меры интегрирования), меняя порядок интегрирования во втором члене, а также учитывая формулу (1.7.5) и условие (1.7.3), получим следующее неравенство:

$$L^0 \left(\int_D K(P_1, R, W(R)) dR \right) \geq L^0 \left(\int_D K(P_1, R, W_0(R)) dR \right),$$

которое доказывает данную теорему.

§ 8. Необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче на условный минимум для однородного функционала и оператора

В этом параграфе даются некоторые дополнительные условия, при которых расширенный принцип максимума, доказанный в § 6 этой главы, является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Действительно, пусть функции $\Phi^0(y)$ и $\Phi(\omega, y)$ являются однородными функциями по аргументу y , и

$$\omega = W_0(P),$$

$P \in D, \omega \in b$ — допустимая функция, удовлетворяющая условию (1.5.12). Тогда имеет место следующее утверждение [21].

Теорема. Для того чтобы функция $\omega = W_0(P)$ давала минимум функционалу (1.6.5), необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный функционал, определенный в пространстве значений оператора (1.6.6), такой, что функция $\Pi(R, \omega)$, определенная равенством (1.6.8), достигала максимума по переменной $\omega \in b$ при условии (1.6.9) в точках $\omega = W_0(R)$ почти для всех $R \in D$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы § 7 настоящей главы. Для доказательства достаточности воспользуемся известным свойством однородных функций [120]

$$xf'_x(x) = f(x), \quad (1.8.1)$$

где x — векторный аргумент.

Возьмем произвольную допустимую функцию $w = W(P)$, $P \in D$, $w \in b$, удовлетворяющую условию (1.6.7). По условию теоремы имеем

$$\Pi(R, W(R)) \leq \Pi(R, W_0(R)) \quad (1.8.2)$$

почти для всех $R \in D$. Интегрируя обе части последнего равенства по области D , меняя местами линейный функционал Λ и оператор интегрирования, в силу свойства (1.8.1) и условия (1.6.7), а также положительности меры интегрирования, получим:

$$\Phi^0 \left(\int_D K(P_1, S, W(S)) dS \right) \geq \Phi^0 \left(\int_D K(P_1, S, W_0(S)) dS \right).$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 9. Основные интегральные уравнения для оптимальных управлений в одном классе систем с распределенными параметрами

В этом параграфе приведен вывод принципа максимума без непосредственной ссылки на теорему 1 § 5 данной главы для одного важного практического случая оптимизации с нелинейным функционалом, характеризующим критерий качества работы системы, и нелинейным управляемым объектом.

Пусть D_1 и D_2 — две области соответственно в p - и s -мерных евклидовых пространствах. Состояние системы описывается функцией $q = Q(P)$, $P \in D_1$. Под действием управления $u = U(S)$, $S \in D_2$, принимающего свое значение из замкнутого множества ω , состояние системы меняется по закону, который имеет вид

$$Q(P) = \int_{D_2} K(P, S, U(S)) dS, \quad (1.9.1)$$

где функция $K(P, S, u)$ непрерывна по $S \in D_2$ и $u \in \omega$ равномерно по $P \in D_1$.

Требуется найти такое управление $u = U(P)$, $P \in D_2$, $u \in \omega$, которое в силу равенства (1.9.1) минимизирует

следующий функционал:

$$J = \int_{D_1} K^0(S, Q(S)) dS, \quad (1.9.2)$$

где $K^0(S, q)$ имеет непрерывную частную производную по q .

Пусть $u = U(S)$, $S \in D_2$, $u \in \omega$ — оптимальное управление, а $q = Q(P)$, $P \in D_1$ — соответствующее ему в силу формулы (1.9.1) оптимальное состояние, минимизирующее функционал (1.9.2).

В области D_2 выберем точку R и возьмем область $\delta_\varepsilon \subset D_2$, $R \in \delta_\varepsilon$, объем которой равен $\varepsilon \geq 0$. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ область δ_ε стягивается к точке R , которая принадлежит δ_ε при любом $\varepsilon \geq 0$. Также, как и в § 5, определим семейство функций, зависящее от параметра ε :

$$U_\varepsilon(P) = \begin{cases} U(P) & \text{при } P \in D/\delta_\varepsilon, \\ \tilde{u} & \text{при } P \in \delta_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.9.3)$$

где \tilde{u} — произвольная точка множества ω . Пусть также R является правильной точкой области D_2 , т. е. для нее выполняется условие (1.6.13).

Тогда под действием нового проварьированного управления (1.9.3) функция $Q(P)$ получит приращение $\Delta Q(P)$, определяемое формулой

$$\begin{aligned} \Delta Q(P) &= \int_{D_2} K(P, S, U_\varepsilon(P)) dP - \int_{D_2} K(P, S, U(P)) dP = \\ &= \int_{D_2} [K(P, S, U_\varepsilon(P)) - K(P, S, U(S))] dS = \\ &= \varepsilon [K(P, S, \tilde{u}) - K(P, R, U(R))] + \sigma(\varepsilon), \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

где $\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $P \in D_1$.

Так как при $u = U(S)$ и $q = Q(P)$ функционал (1.9.2) достигает минимума, то можно написать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\int_{D_1} K^0(S, Q(S) + \Delta Q(S)) dS - \int_{D_1} K^0(S, Q(S)) dS = \\ &= \int_{D_1} [K^0(S, Q(S) + \Delta Q(S)) - K^0(S, Q(S))] dS \geq 0. \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

Подставляя в формулу (1.9.5) значение $\Delta Q(S)$, определяемое формулой (1.9.4), и разлагая в ряд по параметру $\varepsilon > 0$, получим:

$$\varepsilon \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} [K(S, R, \tilde{u}) - K(S, R, U(R))] + \sigma_1(\varepsilon) \geq 0, \quad (1.9.6)$$

где в силу условия (1.9.4)

$$\frac{\sigma_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Предположим, что интеграл

$$\int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, u) dS \quad (1.9.7)$$

почти для всех $R \in D_2$ не равен нулю (необходимым условием для этого является неравенство нулю $K_q^0(S, Q(S))$ при оптимальной функции $q = Q(S)$, разделим на $\varepsilon \geq 0$ и, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} [K(S, R, \tilde{u}) - K(S, R, U(R))] dS \geq 0, \quad (1.9.8)$$

откуда имеем:

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, \tilde{u}) dS &\geq \\ &\geq \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, U(R)) dS. \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

Последнее неравенство означает, что функция

$$\Pi(R, u) = - \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, u) dS \quad (1.9.10)$$

на оптимальном управлении $u = U(P)$, $P \in D_2$, $u \in \omega$, при $q = Q(S)$, $S \in D_1$, достигает максимума по переменной u , меняющейся на множестве ω , почти для всех $R \in D_2$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы функционал (1.9.2) достигал минимума при управлении $u = U(P)$, $P \in D_2$, $u \in \omega$, и соответствующем ему в силу формулы (1.9.1) состоянию $q = Q(P)$, $P \in D_1$, необходимо, чтобы при $u = U(P)$ функция $\Pi(R, u)$, определенная равенством (1.9.10), достигала максимума по аргументу u , меняющемуся на множестве ω , почти для всех $R \in D_2$.

Совершенно аналогично можно доказать справедливость этой теоремы в случае, когда состояние управляемой системы есть вектор $Q(P) = (Q_1(P), \dots, Q_n(P))$ и управление также есть вектор $U(P) = (U_1(P), \dots, U_r(P))$, принимающий свои значения из некоторого замкнутого множества ω r -мерного евклидова пространства E_r .

В этом случае $K(P, S, u)$ является n -мерным вектором

$$K(P, S, u) = (K_1(P, S, u), \dots, K_n(P, S, u)).$$

Перейдем теперь к выводу интегральных уравнений, определяющих оптимальное управление, для одной важной конкретной задачи оптимизации [15].

Рассмотрим управляемую систему, состояние которой в каждый момент времени t , $0 \leq t \leq T$, описывается функцией распределения $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq S$. Под действием управляющего воздействия $u = u(t)$, на которое наложены дополнительные условия $A_1 \leq u \leq A_2$, состояние управляемой системы меняется по закону

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (1.9.11)$$

где $K(x, t, \tau)$ — заданная функция, $0 \leq x \leq S$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Широкий класс объектов с распределенными параметрами может быть описан посредством соотношения (1.9.11). Функция $K(x, t, \tau)$ имеет смысл функции влияния, импульсной переходной функции или функции Грина.

Для системы (1.9.11) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления.

Пусть задана еще одна функция $Q^*(x)$, $0 \leq x \leq S$, которая характеризует желаемое или требуемое состояние, и время T также фиксировано. Нужно найти такое допустимое управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (т. е. $A_1 \leq u(t) \leq A_2$

во все время переходного процесса), чтобы в момент времени T отклонение функции $Q(x, T)$ от функции $Q^*(x)$ было наименьшим. За меру такого отклонения примем интеграл

$$J = \int_0^S |Q^*(x) - Q(x, T)|^\gamma dx, \quad \gamma \geq 1. \quad (1.9.12)$$

Предположим, что функция $Q^*(x)$ и время T таковы, что ни при каком допустимом управлении $u = u(t)$, $0 \leq t \leq T$, $A_1 \leq u \leq A_2$ невозможно выполнение равенства

$$Q^*(x) \equiv Q(x, t), \quad 0 \leq x \leq S, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.9.13)$$

Функция (1.9.10) в этом случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi(t, u) = & - \int_0^S \gamma |Q^*(x) - Q(x, T)|^{\gamma-1} \operatorname{sign}(Q^*(x) - \\ & - Q(x, T)) K(x, T, t) u dx. \end{aligned} \quad (1.9.14)$$

Отсюда видно, что аргумент u входит в определение функции $\Pi(t, u)$ линейным образом.

Предположим, что подынтегральное выражение в равенстве (1.9.14) на оптимальном состоянии $Q(x, T)$ обращается в нуль только лишь на множестве значений времени t , $0 \leq t \leq T$, меры нуль. Тогда максимум функции (1.9.14) при фиксированном t , $0 \leq t \leq T$, достигается при условии

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \times \\ & \times \operatorname{sign} \left[\int_0^S |Q^*(x) - Q(x, T)|^{\gamma-1} \operatorname{sign}(Q^*(x) - Q(x, T)) \times \right. \\ & \left. \times K(x, T, t) dx \right], \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.9.15)$$

Таким образом, если в полученное нами уравнение (1.9.15) подставить вместо функции $Q(x, T)$ ее выражение через управление $u(t)$ по формуле (1.9.11), то получится интегральное уравнение, которому удовлетворяет оптимальное

управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, $A_1 \leq u \leq A_2$:

$$u(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \operatorname{sign} \left[\int_0^S \left| Q^*(x) - \int_k^T K(x, T, \tau) u(\tau) d\tau \right|^{r-1} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sign} \left(Q^*(x) - \int_0^T K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau \right) K(x, T, t) dx \right], \\ 0 \leq t \leq T. \quad (1.9.16)$$

Задачи подобного рода можно сформулировать, например, для следующих двух процессов.

1. Пусть функция $Q = Q(x, t)$ описывает распределение температуры в массивном теле в зависимости от пространственной координаты x , $0 \leq x \leq S$, и времени t , $0 \leq t \leq T$, а уравнения нагрева имеют вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1.9.17)$$

для внутреннего теплообмена и теплообмена на границе

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.9.18)$$

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha [u(t) - Q(S, t)] \quad (1.9.19)$$

при нулевом начальном условии (без ограничения общности)

$$Q(x, 0) = 0. \quad (1.9.20)$$

Здесь функция $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, имеет смысл температуры среды, которая обогревает тело с двух сторон при условии $A_1 \leq u \leq A_2$, и a, λ, α — коэффициенты теплопроводности, теплопроводности и теплообмена соответственно.

Тогда, как известно [2, 75], функцию распределения температуры тела $Q(x, t)$ можно выразить через функцию температуры печи $u(t)$ посредством соотношения (1.9.11). Если под функцией $Q^*(x)$, $0 \leq x \leq S$, понимать заданное распределение температуры тела, то задачу наилучшего

приближения в смысле минимума функционала (1.9.12) можно поставить, например, для процесса нагрева слитков под прокатку в нагревательных колодцах.

2. Рассмотрим еще один процесс, для которого также важна постановка задачи оптимального управления. Пусть функция $Q(x, y, t)$, $0 \leq x \leq S$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$, описывает распределение температуры в полосе слябов, движущейся в печи со скоростью $v(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, в положительном направлении оси y . Уравнения внутреннего теплообмена имеют вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - v \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (1.9.21)$$

Теплообмен на границе описывается уравнениями

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha [u(t) - Q(0, y, t)], \quad (1.9.22)$$

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha [u(t) - Q(S, y, t)], \quad (1.9.23)$$

$$Q(x, 0, t) = 0. \quad (1.9.24)$$

Пусть начальное условие имеет вид

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y). \quad (1.9.25)$$

Здесь a, λ, α — соответственно коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и теплообмена, которые могут зависеть от аргумента

$$\eta = y - \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (1.9.26)$$

Задача оптимального управления в этом случае состоит в определении такой функции $u = u(t)$ ($A_1 \leq u \leq A_2$), характеризующей температуру греющей среды печи, чтобы в точке $y = L$ (на выходе из печи) за время T уклонение средней по сечению x температуры заготовки

$$\bar{Q}(y, t) = \frac{1}{S} \int_0^S Q(x, y, t) dx \quad (1.9.27)$$

от заданной температурной программы нагрева выходящих из печи слябов $Q^*(t)$, $0 \leq t \leq T$, достигало минимума. За меру такого уклонения можно также принять интеграл

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - \bar{Q}(L, t)|^\gamma dt \quad \gamma \geq 1. \quad (1.9.28)$$

Невырожденной заменой переменных

$$\xi = x, \quad \eta = y - \int_0^t v(s) ds, \quad \tau = t, \quad (1.9.29)$$

уравнение (1.9.21) можно свести к одномерному уравнению теплопроводности. Воспользовавшись существованием весовой функции системы и возвращаясь обратно к старым переменным, получим, что решение $Q(x, y, t)$ задачи (1.9.21) — (1.9.25) можно представить в виде

$$Q(x, y, t) = \int_0^t K(x, y, t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1.9.30)$$

Усредняя по x в пределах от 0 до S , получим:

$$\bar{Q}(y, t) = \int_0^t k(y, t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (1.9.31)$$

где $k(y, t, \tau)$ — усредненная по x функция $K(x, y, t, \tau)$, т. е.

$$k(y, t, \tau) = \frac{1}{S} \int_0^S K(x, y, t, \tau) dx. \quad (1.9.32)$$

Таким образом, из условия минимума функционала (1.9.28) получается формула (1.9.31), вполне аналогичная соотношению (1.9.11).

Следовательно, и в этой задаче оптимальное управление $u(t)$ должно удовлетворять интегральному уравнению типа (1.9.16), где вместо функции $K(x, t, \tau)$ должна фигурировать функция $k(y, t, \tau)$.

Способы решения этого основного интегрального уравнения будут изложены в главе IV.

Займемся теперь более подробно задачей минимизации функционала J , определенного равенством (1.9.12) при $\gamma = 2$.

Итак, пусть в области D ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$) функция $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.9.17) с граничными и начальными условиями (1.9.18) — (1.9.20), где управление $u(t)$ — измеримая функция, почти всюду на $[0, T]$ не превосходящая по абсолютной величине единицы. Такое управление будем называть допустимым. Задача состоит в выборе такого управления, для которого функционал

$$J(u) = \int_0^1 [Q^*(x) - Q(x, T)]^2 dx, \quad (1.9.33)$$

где $Q^*(x)$ — заданная функция из $L_2(0, S)$, принимал бы наименьшее возможное значение.

Ю. В. Егоровым в работе [46] для этой задачи доказана важная теорема.

Теорема 2. *Существует допустимое управление $u(t)$ и соответствующее ему решение $Q(x, t)$ системы (1.9.18) — (1.9.20), минимизирующее функционал (1.9.33).*

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении последовательности бесконечно дифференцируемых функций $u_k(t)$, $0 \leq t \leq T$, $|u_k(t)| \leq 1$, обращающихся в нуль в некоторой (своей для каждой функции $u_k(t)$) окрестности точки t , причем $J(u_k) \rightarrow J = \inf J(u)$, где нижняя грань берется по всем допустимым функциям. Из этой последовательности $u_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, выбирается подпоследовательность $u_{k_i}(t)$, которая в пространстве $L_2(0, T)$ слабо сходится к функции $u(t)$, $|u(t)| \leq 1$. Можно также показать, что решения $Q_{k_i}(x, t)$ системы (1.9.18) — (1.9.20), соответствующие этой подпоследовательности управления, сходятся в области D к некоторой функции $Q(x, t)$, которая является решением указанной системы для функции $u(t)$.

Однако вопрос о единственности оптимального управления оказывается гораздо более сложным и вместе с тем более интересным.

В этой же работе [46] показано, что если в качестве функции $Q^*(x)$ взято какое-то решение $Q(x, t)$, например,

решение системы (1.9.18) — (1.9.20) при $t = T$ и некотором управлении $u(t)$, то легко показать, что наряду с функцией $u(t)$ ($u(t)$ — оптимальна, очевидно, по условию) существует еще бесконечное множество оптимальных управлений.

Выберем это управление $u(t)$ так, что $|u(t)| < 1 - \delta$, $\delta > 0$, например, при $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 < T$, где t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$) — некоторые фиксированные моменты времени.

Далее, пусть $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая ненулевая положительная функция, тождественно равная нулю при $t \leq 0$ и $t \geq 1$ (так называемая финитная функция), причем n -я производная $f^{(n)}(t)$ этой функции удовлетворяет условию

$$|f^{(n)}(t)| \leq A^n \Gamma\left(\frac{3n}{2}\right), \quad (1.9.34)$$

где A — положительная постоянная и $\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)$ — гамма-функция полуцелого аргумента.

Можно проверить, что функция (при $S = 1, \lambda = 1$)

$$Q_0(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} f\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (1.9.35)$$

является решением системы (1.9.18) — (1.9.20) при

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Q_0(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} + Q_0(x, t) \Big|_{x=1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} f\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) \left[\frac{1}{\alpha (2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right]; \quad Q_0(x, T) = 0. \end{aligned} \quad (1.9.36)$$

Отсюда видно, что всякое управление

$$u_1(t) = u(t) + p u_0(t)$$

является оптимальным, так как, выбрав величину p достаточно малой, можно удовлетворить условию $|u_1(t)| \leq 1$.

Из только что приведенных рассуждений следует, что в случае, когда оптимальное управление единственно, оно обязательно должно быть по модулю тождественно равным единице, $|u(t)| \equiv 1$, так как в противном случае легко построить вообще бесконечное множество оптимальных управлений.

В общем случае условие $|u(t)| \equiv 1$ также не гарантирует оптимальность управления $u(t)$. Однако можно показать [46], если оптимальное управление кусочно-постоянно и $|u(t)| \equiv 1$, то оно единственно.

Вообще, если управление $|u(t)| \equiv 1$, то это управление будет неединственным только в том случае, если существует другое управление $v(t) \equiv 0$ такое, что $v(t)u(t) \geq 0$ и $v(t)$ дает решение бесконечномерной проблеме моментов

$$\int_0^T e^{\mu_k^2 t} v(t) dt,$$

где μ_k — собственные числа системы (1.9.18) — (1.9.20).

Ю. В. Егоровым в [46] впервые также установлен интересный факт, что с помощью ограниченного управления $|u(t)| \leq 1$ можно в точности «попасть» в постоянное распределение, т. е. при ненулевом начальном условии осуществить за конечное время T равенство

$$Q(x, T) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.9.37)$$

Этот факт ранее был не столь очевиден. Для доказательства этого утверждения возьмем в качестве управления $u(t)$ функцию

$$u(t) = p \int_0^t f(\xi) d\xi + p \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n-1)}(t) \left[\frac{1}{\alpha (2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!} \right], \quad (1.9.38)$$

где $f(t)$ та же, что и в (1.9.34), а p таково, что $|u(t)| < 1$. Этому управлению отвечает решение задачи (1.9.18) — (1.9.20)

$$Q(x, t) = p \int_0^t f(\xi) d\xi + p \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n-1)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (1.9.39)$$

и

$$Q(x, 1) = p \int_0^1 f(\xi) d\xi = \text{const.} \quad (1.9.40)$$

Если попытаться строить управляющее воздействие $u(t)$, определяемое формулой (1.9.38), с помощью которого можно получить условие (1.9.37), то мы увидим, что функция $u(t)$ имеет бесконечное, но счетное число изолированных друг от друга моментов переключения t_1, t_2, \dots , в которых она меняет свое значение с $+1$ на -1 или наоборот. При этом точки t_1, t_2, \dots накапливаются к правому концу интервала, после которого $u(t) \equiv 0$.

Выясним, какого вида функции $f(t)$ могли бы служить для построения ограниченного управления $u(t)$, с помощью которого из равномерного нулевого начального распределения температуры можно получить равномерное ненулевое распределение за конечное время, например, от 0 до 1.

Для простоты рассмотрим случай, когда $\alpha = \infty$, т. е. управляющим воздействием служит температура поверхности тела $Q(t, 0) = u(t)$. Тогда искомое управление будет иметь вид

$$u(t) = p \int_0^t f(\xi) d\xi + p \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n-1)}(t) \frac{1}{(2n)!}. \quad (1.9.41)$$

Мак-Косленд в своей диссертации [135] показал, что в качестве $f(t)$ можно взять следующую функцию:

$$f_1(t) = e^{-\frac{1}{t^2(1-t^2)}}.$$

Так как производные этой функции в общем виде вычислить трудно, то численным способом им было определено несколько первых производных этой функции, а также численно определен интеграл, фигурирующий в выражении для $u(t)$. Полученные данные послужили для построения соответствующих графиков [135].

Так как функция $f_1(t)$ принимает очень маленькие значения, то величину p можно взять равной $e^{16/3}$. При этом максимальное значение функции $pf_1(t)$ равно единице при $t = 0,5$.

На рис. 5 показаны графики следующих функций:

$$\begin{aligned} (a) \quad & p \int_0^t f_1(\xi) d\xi, & (b) \quad & pf_1(t)/2!, \\ (c) \quad & pf_1'(t)/4!, & (d) \quad & pf_1''(t)/6!. \end{aligned}$$

Используя графики этих функций, можно графически построить соответствующие приближения для управления $u(t)$. Эти последовательные приближения показаны на

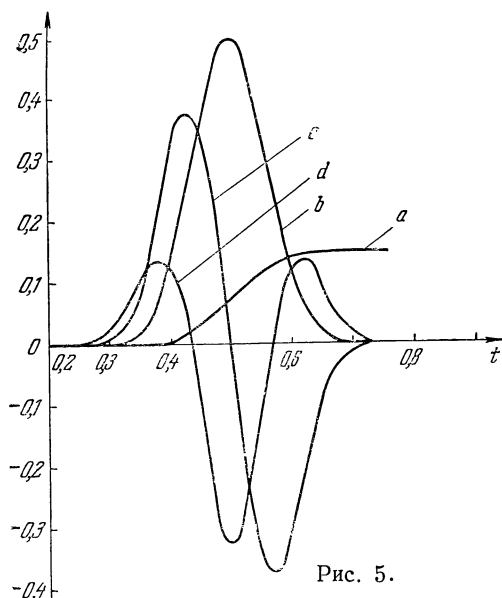


Рис. 5.

рис. 6. Из рассмотрения этих графиков можно заключить, что прибавление каждого нового члена к сумме предыдущих приводит к увеличению на единицу числа колебаний функции $u(t)$ около предельного уровня, равного $p \int_0^1 f_1(t) dt$.

Поэтому можно ожидать, что функция $u(t)$, определяемая бесконечным рядом, будет иметь бесконечное число колебаний возле предельного уровня. Производя непосредственное вычисление получающегося распределения под действием приведенных управлений, можно убедиться, что распределение температур будет действительно близко к равномерному распределению, соответствующему температуре $p \int_0^1 f_1(t) dt$.

В качестве другой функции $f(t)$ можно рассмотреть функцию следующего вида [135]:

$$f_2(t) = e^{-\frac{1}{t(1-t)}}.$$

На рис. 7 построен график соответствующего управления

$$u(t) = p \int_0^t f(\xi) d\xi + p \sum_{n=1}^3 f^{(n-1)}(t) \frac{1}{(2n)!}.$$

Полученная функция $u(t)$ обладает преимуществом перед ранее рассмотренной функцией в том смысле, что у нее

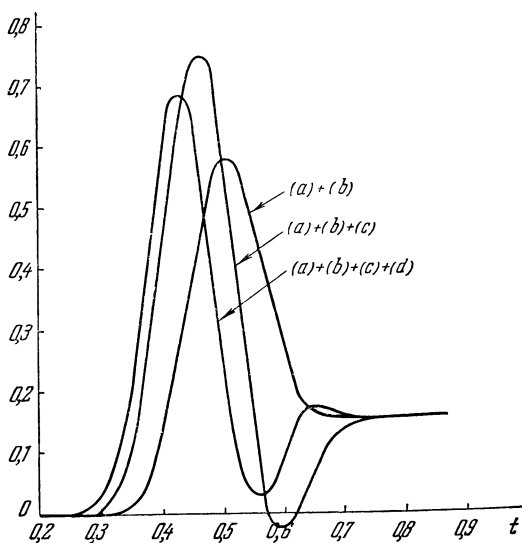


Рис. 6.

гораздо меньше отношение максимального значения к величине установившегося значения температуры.

Хотя эти последние замечания основываются на приближенных вычислениях, они дают указание на характер управляющих функций, с помощью которых можно получить равномерное распределение за конечное время.

Заметим, что все, сказанное выше, остается в силе, если функционал $J(u)$ заменить функционалом вида

$$\|Q(x, T) - Q^*(x)\|_B,$$

где B — пространство вида $C^{(k)}(0, 1)$, $L_p(0, 1)$, $W_p^{(l)}(0, 1)$ и т. д. $k = 0, 1, \dots$; $l = 1, 2, \dots$; $p \geq 1$. При этом в пространствах с равномерной выпуклой сферой значения $Q(x, T)$ для оптимального управления определяются однозначно.

Ю. В. Егоров в той же работе [46] рассмотрел задачу оптимального управления системой (1.9.17), (1.9.19), в которой вместо минимизации функционала (1.9.33) требуется минимизировать функционал, зависящий не только от распределения $Q(x, t)$, но и от управления $u(t)$

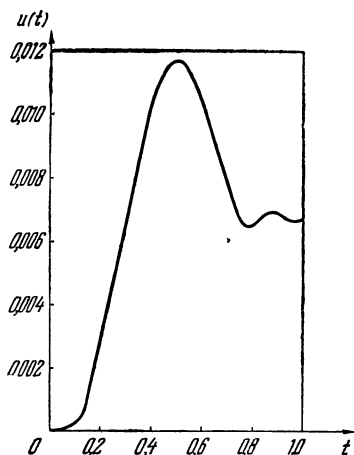


Рис. 7.

$$J = \int_0^1 [Q^*(x) - Q(x, T)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt. \quad (1.9.42)$$

Для этой задачи существует единственное оптимальное управление $u(t)$.

Доказательство существования оптимального управления $u(t)$ вполне аналогично доказательству существования оптимального управления в предыдущей задаче.

Единственность оптимального управления следует из равенства

$$J(u_1) + J(u_2) = 2J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^1 [Q_1(T, x) - Q_2(T, x)]^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^T [u_1(t) - u_2(t)]^2 dt. \quad (1.9.43)$$

В самом деле, если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — оптимальные управления, т. е.

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{|u| \leq 1} J(u),$$

то из $u_1(t) \neq u_2(t)$ следовало бы

$$J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < J(u_1), \quad (1.9.44)$$

что невозможно.

Перейдем теперь к выводу принципа максимума для случая более сложного управляемого объекта, чем объект, описываемый уравнением (1.9.11).

Будем рассматривать объект управления, состояние которого характеризуется вектор-функцией

$$Q = Q(P) = \begin{pmatrix} Q_1(P) \\ \vdots \\ Q_n(P) \end{pmatrix}, \quad (1.9.45)$$

где P — точка некоторой m -мерной области D евклидова пространства (y_1, \dots, y_m) [15].

Управляющие воздействия описываются вектор-функцией

$$U = U(P), \quad (1.9.46)$$

где точка $P \in D$.

Будем считать, что компоненты $U(P)$ — функции $U_i(P)$, $i = 1, \dots, r$, являются измеримыми, ограниченными и интегрируемыми с квадратом функции от P и принимают свои значения из некоторого допустимого множества ω . В частности, важен случай, когда ω является замкнутой областью некоторого r -мерного евклидова пространства.

Каждую такую вектор-функцию $U = U(P)$, принимающую значения в пространстве ω , назовем управлением.

Широкий класс управляемых объектов может быть описан нелинейными интегральными уравнениями следующего вида:

$$Q(P) = \int_D K(P, S, Q(S), U(S)) dS, \quad (1.9.47)$$

где $Q(P)$ и $U(P)$ определяются равенствами (1.9.45), (1.9.46), а $K(P, S, Q, U)$ есть вектор-функция четырех векторных переменных:

$$K(P, S, Q, U) = \begin{pmatrix} K_1(P, S, Q, U) \\ \vdots \\ K_n(P, S, Q, U) \end{pmatrix}. \quad (1.9.48)$$

Функции $K_i(P, S, Q, U)$, $i = 1, 2, \dots, n$, принадлежат классу L_2 по области изменения всех своих переменных и имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial K_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial K_i(P, S, Q, U)}{\partial Q_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.9.49)$$

Введем квадратную матрицу

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \left\| \frac{\partial K_i(P, S, Q, U)}{\partial Q_j} \right\|. \quad (1.9.50)$$

Индекс i здесь и в дальнейшем в этом параграфе указывает номер строки, а j — номер столбца матрицы.

Теперь задачу оптимального управления системой с распределенными параметрами можно сформулировать следующим образом.

Пусть на множестве состояний $Q = Q(P)$ и управлений $U = U(P)$, связанных интегральным уравнением (1.9.47), определен функционал

$$J = \Phi(z), \quad (1.9.51)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D F_1(S, Q(S), U(S)) dS \\ \vdots \\ \int_D F_k(S, Q(S), U(S)) dS \end{pmatrix} = \int_D F(S, Q(S), U(S)) dS. \quad (1.9.52)$$

Функции $\Phi(z)$ и $F_s(S, Q, U)$, $s = 1, \dots, k$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по аргументам z и Q соответственно.

Требуется найти в классе допустимых управлений такое управление $U = U(P)$, $P \in D$, $U \in \omega$, при котором функционал J принимает наименьшее возможное значение.

Решение сформулированной задачи может основываться на следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $U = U(P)$, $U \in \omega$ — такое допустимое управление, что в силу уравнения (1.9.47) матричная функция $M(P, R) = \|M_{ij}(P, R)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяет интегральному уравнению (линейному по $M(P, R)$)

$$\begin{aligned} M(P, R) + \frac{\partial K(P, R, Q(R), U(R))}{\partial Q} = \\ = \int_D M(P, S) \frac{\partial K(S, R, Q(R), U(R))}{\partial Q} dS = \\ = \int_D \frac{\partial K(P, S, Q(S), U(S))}{\partial Q} M(S, R) dS. \quad (1.9.53) \end{aligned}$$

Тогда для оптимальности этого управления $U = U(S)$ необходимо, чтобы для всех фиксированных значений аргумента $S \in D$ функция $\Pi(S, U)$ при $U \in \omega$

$$\begin{aligned} \Pi(S, U) = - \frac{\partial \Phi \left(\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} F(S, Q(S), U) - \\ - \frac{\partial \Phi \left(\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \\ \times \left[K(P, S, Q(S), U) - \int_D M(P, R) K(R, S, Q(S), U) dR \right] dP \quad (1.9.54) \end{aligned}$$

достигала максимума, т. е. почти для всех $S \in D$ выполнялось равенство

$$\sup_{U \in \omega} \Pi(S, U) = \Pi(S, U(S)) = H(S), \quad (1.9.55)$$

т. е. функция $H(S)$ определяется как верхняя грань значений функции $\Pi(S, U)$ по $U \in \omega$ при фиксированном

значении S , а так как функция $\Pi(S, U)$ непрерывна по U , то

$$H(S) = \max_{U \in \omega} \Pi(S, U). \quad (1.9.56)$$

Полученная теорема дает возможность составлять систему уравнений, которым удовлетворяет оптимальное управление.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует такое оптимальное управление $U = U(S)$, $S \in D$, $U \in \omega$ и оптимальное состояние $Q = Q(S)$, что в силу уравнения (1.9.47) функционал J достигает своего минимального значения.

Зафиксируем произвольную точку P' , которая является правильной для управления $U = U(P')$, и окружим эту точку некоторой областью Δ , объем которой стремится к нулю, когда диаметр этой области δ стремится к нулю.

Определим теперь управление $\tilde{U} = \tilde{U}(S)$, получающееся варьированием оптимального управления $U = U(S)$:

$$\tilde{U}(S) = \begin{cases} U(S) & \text{при } S \in D / \Delta, \\ V & \text{при } S \in \Delta, \end{cases} \quad (1.9.57)$$

где V — произвольная точка области управления ω .

Вычислим значение функционала J от варьированного управления (1.9.57) с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка по ε , где $\varepsilon > 0$ есть некоторый параметр, который стремится к нулю одновременно с диаметром δ области Δ

$$\begin{aligned} J(\tilde{U}(S)) &= \Phi \left(\int_D F(S, Q(S) + \Delta Q(S), \tilde{U}(S)) dS \right) = \\ &= \Phi \left(\int_D F(S, Q(S), U(S)) dS + \int_D \frac{\partial F(S, Q(S), U(S))}{\partial Q} \times \right. \\ &\times \Delta Q(S) dS + \varepsilon (F(P', Q(P'), V) - F(P', Q(P'), U(P'))) \left. \right). \end{aligned} \quad (1.9.58)$$

Здесь приращение $\Delta Q(S)$, полученное от варьирования оптимального управления $U(S)$ в уравнении (1.9.47) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка от ε , удовлетворяет линейному по $\Delta Q(S)$ неоднородному

интегральному уравнению Фредгольма

$$\Delta Q(P) = \varepsilon (K(P, P', Q(P'), V) - K(P, P', Q(P'), U(P'))) + \\ + \int_D \frac{\partial K(P, S, Q(S), U(S))}{\partial Q} \Delta Q(S) dS. \quad (1.9.59)$$

Как известно [112], решение этого уравнения относительно $\Delta Q(P)$ определяется выражением

$$\Delta Q(P) = \varepsilon \left\{ K(P, P', Q(P'), V) - K(P, P', Q(P'), U(P')) - \right. \\ \left. - \int_D M(P, S) [K(S, P', Q(P'), V) - K(S, P', Q(P'), U(P'))] dS \right\}, \quad (1.9.60)$$

где матричная функция $M(P, S)$ удовлетворяет уравнению (1.9.53).

Подставляя значение $\Delta Q(P)$ из формулы (1.9.60) в выражение (1.9.58) и разлагая функцию Φ в ряд по ε , получим:

$$J(\tilde{U}(S)) = \Phi \left(\int_D K(S, Q(S), U(S)) dS \right) + \\ + \varepsilon \frac{\partial \Phi \left(\int_D K(S, Q(S), U(S)) dS \right)}{\partial z} \left\{ \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \right. \\ \times \left[K(P, P', Q(P'), V) - K(P, P', Q(P'), U(P')) - \right. \\ \left. - \int_D M(P, S) (K(S, P', Q(P'), V) - K(S, P', Q(P'), U(P'))) dS \right] dP + F(P', Q(P'), V) - F(P', Q(P'), U(P')) \left. \right\}. \quad (1.9.61)$$

Так как функционал J принимает наименьшее значение, то главная часть приращения этого функционала при вариации управления $\tilde{U} = U(P)$ будет всегда неотрицательной, т. е.

$$\Delta J = J(\tilde{U}(P)) - J(U(P)) \geq 0. \quad (1.9.62)$$

Подставляя в (1.9.62) вместо $J(\tilde{U}(P))$ выражение (1.9.61) и учитывая (1.9.54), получим, что главная часть

приращения функционала может быть представлена как

$$\Delta J = \varepsilon [\Pi (P', V) - \Pi (P', U (P'))] \geq 0. \quad (1.9.63)$$

Умножая обе части неравенства на -1 и сокращая на $\varepsilon > 0$, получим:

$$\Pi (P', V) \leq \Pi (P', U (P')). \quad (1.9.64)$$

Так как неравенство (1.9.64) справедливо для любой точки $V \in \omega$, то функция $\Pi (P', V)$, определенная равенством (1.9.54), достигает максимума по аргументу V при фиксированном P' , т. е. для почти всех $P' \in D$ выполнено равенство

$$\Pi (P', U (P')) = H (P'), \quad (1.9.65)$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что теореме 4 можно придать вид, в точности совпадающий с теоремой, выражающей принцип максимума в более общем случае (§ 6 настоящей главы).

В самом деле, для этого надо преобразовать функцию $\Pi (S, U)$, определяемую формулой (1.9.54), и уравнение (1.9.53).

С этой целью введем функцию $N (S)$, которую определим следующим образом:

$$N (S) = \frac{\partial \Phi \left(\int_D F (P, Q (P), U (P)) dP \right)}{\partial z} \left[\int_D \frac{\partial F (P, Q (P), U (P))}{\partial Q} \times \right. \\ \left. \times M (P, S) dP - \frac{\partial F (S, Q (S), U (S))}{\partial Q} \right]. \quad (1.9.66)$$

Меняя порядок интегрирования в выражении (1.9.54) для функции $\Pi (S, U)$, легко видеть, что в этих обозначениях функция $\Pi (S, U)$ примет вид

$$\Pi (S, U) = - \frac{\partial \Phi \int_D F (P, Q (P), U (P)) dP}{\partial z} F (S, Q (S), U) + \\ + \int_D N (P) K (P, S, Q (S), U) dP. \quad (1.9.67)$$

Преобразование второго слагаемого в (1.9.54) дает

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Phi \left(\int_D K(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \\
 & \quad \times \left[K(P, P', Q(P'), U) - \right. \\
 & \quad \left. - \int_D M(P, R) K(R, P', Q(P'), U) dR \right] dP = \\
 & = \frac{\partial \Phi \left(\int_D K(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \left\{ \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \right. \\
 & \quad \times K(P, P', Q(P'), U) dP - \int_D \left[\int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \right. \\
 & \quad \left. \left. \times M(P, R) dP \right] K(R, P', Q(P'), U) dR \right\} = \\
 & = \int_D \frac{\partial \Phi \left(\int_D K(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \left[\frac{\partial F(R, Q(R), U(R))}{\partial Q} - \right. \\
 & \quad \left. - \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} M(P, R) dP \right] \times \\
 & \quad \times K(R, P', Q(P'), U) dP = \int_D N(R) K(R, P', Q(P'), U) dR.
 \end{aligned}$$

Покажем, что функция $N(S)$, определенная равенством (1.9.66), должна удовлетворять интегральному уравнению, аналогичному уравнению (1.6.27).

Умножим обе части первого равенства (1.9.53) на $\frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q}$ и проинтегрируем в области D по переменной P , меняя порядок интегрирования в правой части.

$$\begin{aligned}
 & \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} M(P, S) dP + \\
 & \quad + \int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \frac{\partial K(P, S, Q(S), U(S))}{\partial Q} dP = \\
 & = \int_D \left[\int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} M(P, R) dP \right] \frac{\partial K(R, S, Q(S), U(S))}{\partial Q} dR.
 \end{aligned}$$

Перенесем второе слагаемое из левой части последнего равенства в правую и разность интегралов представим как интеграл разности. После этого в левой части полученного равенства прибавим и вычтем величину $\frac{\partial F(S, Q(S), U(S))}{\partial Q}$, и затем обе части этого равенства умно-

$$\begin{aligned} & \text{жим на } \frac{\partial \Phi \left(\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial Q}. \text{ В итоге получим:} \\ & \frac{\partial \Phi \left(\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \left[\int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \right. \\ & \quad \left. \times M(P, S) dP - \frac{\partial F(S, Q(S), U(S))}{\partial Q} \right] + \\ & \quad + \frac{\partial \Phi \left(\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \frac{\partial F(S, Q(S), U(S))}{\partial Q} = \\ & = \int_D \frac{\partial \Phi \left(\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \left[\int_D \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \times \right. \\ & \quad \left. \times M(P, R) dP - \frac{\partial F(P, Q(P), U(P))}{\partial Q} \right] \frac{\partial K(R, S, Q(S), U(S))}{\partial Q} dR. \end{aligned} \quad (1.9.68)$$

Теперь, пользуясь определением функции $N(S)$ (1.9.66), равенство (1.9.68) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} N(S) + \frac{\partial \Phi \left(\int_D K(P, Q(P), U(P)) dP \right)}{\partial z} \frac{\partial F(S, Q(S), U(S))}{\partial Q} = \\ = \int_D N(R) \frac{\partial K(R, S, Q(S), U(S))}{\partial Q} dR, \end{aligned} \quad (1.9.69)$$

что в точности совпадает с интегральным уравнением (1.6.27), если его написать для рассматриваемой задачи.

Итак, теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. Пусть $U = U(S)$, $U \in \omega$, $S \in D$, есть такое допустимое управление, что в силу уравнения (1.9.47) функция $N(S)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.9.69).

Тогда для оптимальности управления $U = U(S)$ необходимо, чтобы почти для всех фиксированных значений аргумента $S \in D$ функция

$$\Pi(S, U) = - \frac{\int_D F(P, Q(P), U(P)) dP}{\partial z} F(S, Q(S), U) + \int_D N(P) K(P, S, Q(S), U) dS \quad (1.9.70)$$

переменного $U \in \omega$ достигала максимума.

Легко видеть, что задача, рассмотренная в начале этого параграфа, является частным случаем только что рассмотренной. Этот частный случай имеет место тогда, когда функция $K(P, S, U)$, фигурирующая в (1.9.1), не зависит от переменной Q . В этом случае единственной матричной функцией, удовлетворяющей уравнению (1.9.53), будет функция

$$M(P, R) = 0 \text{ для любых } P \in D, R \in D.$$

Применяя сформулированную выше теорему 4, получим, что почти для всех фиксированных значений аргумента R функция $\Pi(R, u)$, определенная равенством (1.9.10), достигает максимума по переменной $U \in \omega$.

Покажем теперь, как применить теорему 4 для вывода условий принципа максимума для обыкновенных дифференциальных уравнений со свободным правым концом.

Постановка задачи оптимального управления состоит в следующем.

Требуется найти минимум функционала

$$J(q, u) = \int_{t_0}^{t_1} F^0(q, u) dt$$

при выполнении следующих условий:

а) $q(t)$ и $u(t)$ связаны системой уравнений

$$\frac{dq}{dt} = f(q, u); \quad (1.9.71)$$

б) $q(t_0) = q_0$, где q_0 — фиксированный вектор из E_n ;

в) значения $u(t)$ принадлежат некоторому фиксированному множеству $D \subseteq E_r$;

г) для определенности рассматриваем задачу с фиксированным временем, т. е. считаем, что t_0 и t_1 заданы.

Мы предполагаем, что $f(q, u)$ — непрерывно дифференцируемая по q и непрерывная по u вектор-функция. $F^0(q, u)$ непрерывно дифференцируема по обоим переменным. Докажем вначале следующую лемму.

Лемма. Пусть матричные функции $\mu(t, \tau)$ и $\nu(t, \tau)$, t и $\tau \in [t_0, t_1]$ связаны соотношением (см. уравнение (1.9.53))

$$\mu(t, \tau) + \nu(t, \tau) = \int_{\tau}^{t_1} \mu(t, \theta) \nu(\theta, \tau) d\theta.$$

Если функция $\nu(t, \tau)$ определяется равенством

$$\nu(t, \tau) = \begin{cases} \bar{\nu}(\tau) & \text{при } t_1 \geq t \geq \tau \geq t_0; \\ 0 & \text{при } t_1 \geq \tau > t \geq t_0, \end{cases} \quad (1.9.72)$$

где $\bar{\nu}(\tau)$ интегрируема с квадратом на $[t_0, t_1]$, то функция $\mu(t, \tau)$ при $t_1 \geq t \geq \tau \geq t_0$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(t, \tau) + \bar{\nu}(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \mu(t, \theta) d\theta \bar{\nu}(\tau) \quad (1.9.73)$$

и при $t_1 \geq \tau \geq t \geq t_0$

$$\mu(t, \tau) \equiv 0. \quad (1.9.74)$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $t_1 \geq t \geq \tau \geq t_0$. Тогда функция $\mu(t, \tau)$, очевидно, должна удовлетворять уравнению

$$\mu(t, \tau) + \bar{\nu}(\tau) = \int_{\tau}^{t_1} \mu(t, \theta) d\theta \bar{\nu}(\tau).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $t_1 \geq \tau > t \geq t_0$. Получаем:

$$\mu(t, \tau) = \int_{\tau}^{t_1} \bar{\nu}(\tau) \mu(t, \theta) d\theta. \quad (1.9.75)$$

При каждом фиксированном t это уравнение есть интегральное уравнение Вольтерра. В силу предположения леммы об интегрируемости с квадратом функции $\bar{v}(\tau)$ на $[t_0, t_1]$ и, следовательно, единственности решения уравнения (1.9.75), получим:

$$\mu(t, \tau) \equiv 0 \text{ при } t_1 \geq \tau > t \geq t_0. \quad (1.9.76)$$

Перейдем теперь к выводу условий максимума для задачи (1.9.71) со свободным правым концом.

Область D представляет собой отрезок $[t_0, t_1]$, и точки P и S будем обозначать соответственно через t и τ .

Дифференциальное уравнение (1.9.71) перепишем в виде интегрального уравнения, для простоты считая, что имеют место нулевые начальные условия, $q(t_0) = 0$, получим:

$$q(t) = \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau, q(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1.9.77)$$

где

$$K(t, \tau, q, u) = \begin{cases} f(q, u) & \text{при } t_1 \geq t \geq \tau \geq t_0; \\ 0 & \text{при } t_1 \geq \tau > t \geq t_0. \end{cases}$$

Функция $\Phi(z)$ в этой задаче тождественно равна z_1 , и z_1 следует положить равным следующей величине:

$$z_1 = \int_{t_0}^{t_1} F^0(q(\tau), u(\tau)) d\tau.$$

Поэтому $\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \overbrace{(1, 0, \dots, 0)}^{k_{шт}}$ и

$$F = \left\| \begin{array}{c} F^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\|,$$

где $F^0(q, u)$ — скалярная функция. Функция $\Pi(S, U)$, определенная формулой (1.9.70), имеет вид

$$\Pi(t, u) = -F^0(q(t), u) + \int_{t_0}^{t_1} N(\tau) K(\tau, t, q(t), u) d\tau, \quad (1.9.78)$$

где вектор-функция $N(\tau)$ в силу (1.9.69) удовлетворяет уравнению

$$N(t) + \frac{\partial F^0(q(t), u(t))}{\partial q} = \int_{t_0}^{t_1} N(\tau) \frac{\partial K(\tau, t, q(t), u(t))}{\partial q} d\tau. \quad (1.9.79)$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (1.9.77), получим:

$$P(t, u) = -F^0(q(t), u) + \int_{t_0}^{t_1} N(\tau) d\tau f(q(t), u),$$

или

$$P(t, u) = -F^0(q(t), u) + \psi(t) f(q(t), u), \quad (1.9.80)$$

где

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t_1} N(\tau) d\tau. \quad (1.9.81)$$

Остается только показать, что вектор-функция $\psi(t)$ почти повсюду на отрезке $[t_0, t_1]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\dot{\psi} = \bar{\psi} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial F^0}{\partial q} \quad (1.9.82)$$

с конечным условием $\psi(t_1) = 0$. Последнее условие очевидным образом получается из (1.9.81).

Вычислим производную функцию $\psi(t)$, пользуясь формулой (1.9.81).

$$\dot{\psi}(t) = -N(t). \quad (1.9.83)$$

С другой стороны, из уравнения (1.10.79) согласно (1.9.77) можно получить:

$$N(t) + \frac{\partial F^0(q(t), u(t))}{\partial q} = \int_{t_0}^{t_1} N(\tau) d\tau \frac{\partial f(q(t), u(t))}{\partial q}. \quad (1.9.84)$$

Подставляя в последнюю формулу (1.9.84) выражение для $N(t)$ по формуле (1.9.83) и используя формулу (1.9.81), мы приходим к уравнению (1.9.82).

Итак, принцип максимума для задачи (1.9.71) со свободным правым концом траектории полностью доказан. Аналогично рассматриваем случай, когда правый конец траектории полностью или частично закреплен или удовлетворяет дополнительным ограничениям (например, лежит на некоторой задающей поверхности в фазовом пространстве). Но для этого требуется применение, вообще говоря, уже более сильных теорем, например, первой теоремы § 6 этой главы.

Рассмотрим задачу о быстрейшем нагреве пластины (1.9.17) — (1.9.20). С помощью управления, сосредоточенного на границе, требуется получить заданное распределение температуры точно или с указанной точностью за минимальное время [22].

В работе [46] приведено подробное исследование этой практически важной задачи. В частности, справедлива следующая

Теорема 5. Пусть существует какое-либо допустимое управление $u(t)$ ($u(t)$ измеримо и $|u(t)| \leq 1$), такое, что соответствующее ему в силу системы (1.9.17) — (1.9.20) распределение $Q(x, t)$ лежит в ε -окрестности заданного распределения $Q^(x) \in L_2(0, 1)$, т. е.*

$$\int_0^1 [Q^*(x) - Q(x, T)]^2 dx \leq \varepsilon^2.$$

Тогда существует единственное оптимальное управление $u^0(t)$, такое, что $|u^0(t)| \equiv 1$ и соответствующее ему в силу системы (1.9.17) — (1.9.20) распределение $Q^0(x, T)$ принадлежит ε -окрестности распределения $Q^(x)$, причем время T минимально.*

Доказательство существования указанного оптимального управления проводится совершенно аналогично доказательству существования оптимального управления в теореме о минимизации квадратичного отклонения распределения $Q(x, T)$ от заданного $Q^*(x)$. Оно основано на рассмотрении минимизирующей последовательности управлений и соответствующих им распределений. Это же относится и к следующей теореме о точном попадании в заданное распределение $Q^*(x)$.

Мы не будем останавливаться на доказательстве того факта, что $|u^0(t)| \equiv 1$ почти всюду на отрезке $[0, T]$. Укажем только, что оптимальное управление имеет вид

$$u^0(t) = \text{sign} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{\mu_k^2(t-T)},$$

где ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, — некоторая числовая последовательность, μ_k — собственные числа системы (1.9.17) — (1.9.20) и T — время оптимального регулирования. Можно показать, что функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{\mu_k^2(t-T)}$$

является аналитической функцией аргумента t при $0 \leq t < T$ и не равна тождественно нулю на этом множестве t .

Зная, что оптимальное управление таково, что $|u^0(t)| \equiv 1$ почти всюду на $(0, T)$, легко доказать его единственность. Действительно, предположим противное, что имеется два существенно различных (т. е. не совпадающих на множестве точек t , принадлежащих $(0, T)$, мера которого больше нуля) оптимальных управления $u_1^0(t)$, $|u_1^0(t)| \equiv 1$ и $u_2^0(t)$, $|u_2^0(t)| \equiv 1$. Так как ε -окрестность функции $Q^*(x)$ выпукла, то распределение $\frac{1}{2} [Q_1^0(x, T) + Q_2^0(x, T)]$ также принадлежит ε -окрестности $Q^*(x)$ и управление $\frac{1}{2} [u_1^0(t) + u_2^0(t)]$ оптимально. Поэтому $\left| \frac{1}{2} [u_1^0(t) + u_2^0(t)] \right| \equiv 1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2} |u_1^0(t) + u_2^0(t)| \equiv |u_1^0(t)| \equiv |u_2^0(t)| \equiv 1.$$

Отсюда получаем, что $u_1^0(t) \equiv u_2^0(t)$, и теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу о точном «попадании» в заданное распределение $Q^*(x)$ за минимальное время T . В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть существует какое-либо допустимое управление $u(t)$, для которого в силу системы (1.9.17) —

(1.9.20) *распределение $Q(x, T)$ совпадает с $Q^*(x)$. Тогда, если выполняются условия*

$$\left| \int_0^1 Q^*(x) \cos \mu_k x dx \right| < C_1 e^{C_1 \mu_k^{1+2\varepsilon}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.9.85)$$

для некоторых положительных постоянных C, C_1 и $\varepsilon < 1$, то существует единственное оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующее ему распределение $Q^0(x, t)$ такое, что $|u^0(t)| \equiv 1$, и время T минимально.

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей теореме, за исключением того факта, что $|u^0(t)| \equiv 1$ на $(0, T)$ почти всюду. На его доказательстве мы останавливаться не будем. Заметим только, что оптимальное управление имеет вид

$$u^0(t) = \text{sign} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e^{\mu_k^2(t-T)}, \quad (1.9.86)$$

где $\eta_k, k = 1, 2, \dots$ — последовательность чисел, μ_k — собственные значения системы (1.9.17) — (1.9.20). Функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e^{\mu_k^2(t-T)}, \quad (1.9.87)$$

является аналитической функцией при всех $t, 0 \leq t < T$, не равной нулю тождественно на отрезке $(0, T)$.

В формуле (1.9.86) для оптимального управления $u^0(t)$ бесконечное число параметров $\eta_k, k = 1, 2, \dots$, выбираются из условия точного выполнения равенства

$$Q^*(x) = Q(x, T), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Так как аналитическая функция (1.9.87) на конечном отрезке $[0, T]$ не может иметь бесконечно много нулей, то из этого следует, что на любом отрезке $[0, T - \delta], \delta > 0$, оптимальное управление имеет лишь конечное число перемен знака.

Так как для равномерного заданного распределения $Q^*(x) = Q^* = \text{const}$ условия (1.9.85), как легко видеть, выполняются, то из доказанной теоремы следует, что существует оптимальное управление вида (1.9.86), с помощью

которого можно перейти к равномерному распределению Q за минимальное время T . Это оптимальное управление имеет конечное число точек перемен знака на любом отрезке $[0, T - \delta]$, $\delta > 0$. Однако точки переключения накапливаются к правому концу отрезка $[0, T]$ так, что на всем отрезке имеется бесконечное (счетное) число переключений оптимального управления $u^0(t)$ (см. главу 5).

§ 10. Оптимальный нагрев материала в проходных агрегатах

В этом параграфе мы рассмотрим применение принципа максимума к решению задач оптимального управления для одного важного класса объектов с распределенными параметрами.

К объектам этого рода относится целый ряд типовых промышленных агрегатов: теплообменники, проходные нагревательные агрегаты для тепловой обработки материала и др.

Во многих случаях динамика процессов, протекающих в этих объектах, может быть описана линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка.

Мы начнем с рассмотрения именно некоторой динамической задачи оптимизации.

Затем мы рассмотрим одну задачу определения оптимального стационарного распределения управляющего воздействия. Идея решения динамической задачи оптимального управления для такого рода систем основана на известном методе характеристик, который позволяет дифференциальные уравнения в частных производных сводить к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям иногда может быть сделан путем подходящей замены переменных, которая как раз определяется характеристиками данного дифференциального уравнения в частных производных.

Итак, рассмотрим задачу о минимизации среднего уклона температуры «тонкой» металлической заготовки от заданной температуры на выходе из проходной печи.

Распределение температуры материала $Q(y, t)$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$, определяется следующим уравнением:

$$b \frac{\partial Q}{\partial t} + bv \frac{\partial Q}{\partial y} + Q = u(y, t) \quad (1.10.1)$$

с граничным условием

$$Q(0, t) = Q_{\Gamma}(t), \quad (1.10.2)$$

где функция $Q_{\Gamma}(t)$ характеризует температуру заготовок, входящих в печь. Функция $u(y, t)$ характеризует изменение температуры греющей среды в пространстве и времени.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы минимизировать интеграл

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - Q(L, t)|^{\gamma} dt. \quad (1.10.3)$$

Сделаем дополнительные предположения о процессе. Будем считать, что управляющее воздействие зависит только от времени t и не зависит от y :

$$u = u(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.10.4)$$

На управляющее воздействие наложено единственное ограничение

$$A_1 \leq u(t) \leq A_2, \quad (1.10.5)$$

где A_1 , A_2 — заданные постоянные.

Функция $b(y, t)$ в уравнении процесса зависит лишь от положения точки, неподвижной относительно движущихся заготовок, и называется постоянной времени нагрева. Поэтому функция $b(y, t)$ есть функция от переменной

$$\eta = y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma,$$

т. е.

$$b = b(y, t) = b(\eta) = b\left(y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma\right).$$

Коэффициент b выражается через теплофизические постоянные следующей формулой:

$$b = \frac{c\rho S}{\alpha},$$

где c — теплоемкость нагреваемого металла, ρ — удельный вес, S — толщина заготовки, α — коэффициент теплопередачи от печи к металлу.

Произведем в уравнении (1.10.1) невырожденную замену переменных по формулам

$$y = \eta + \int_0^{\tau} v(\sigma) d\sigma, \quad (1.10.6)$$

$$t = \tau. \quad (1.10.7)$$

Якобиан этого преобразования отличен от нуля:

$$\frac{D(y, t)}{D(\eta, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v(\tau) & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (1.10.8)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\eta = y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma, \quad (1.10.9)$$

$$\tau = t. \quad (1.10.10)$$

После замены переменных по формулам (1.10.6), (1.10.7) уравнение (1.10.1) примет следующую форму:

$$b(\eta) \frac{\partial Q}{\partial \tau} + Q = u(\tau), \quad (1.10.11)$$

где

$$Q = Q(\eta, \tau). \quad (1.10.12)$$

Удачно подобранная замена переменных привела к тому, что член преобразованного уравнения с частной производной по переменной η обратился в нуль. Поэтому при каждом фиксированном значении η уравнение (1.10.11) можно

рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной τ .

Решая уравнение (1.10.11) при фиксированном η , переходя затем к старым переменным по формулам (1.10.9), (1.10.10), а также используя начальное условие, получим решение исходного уравнения

$$Q(y, t) = e^{-\frac{t}{b}} \left[Q_0 \left(y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \right) + \frac{1}{b} \int_0^t u(\sigma) e^{\frac{\sigma}{b}} d\sigma \right],$$

$$0 \leq y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \leq L. \quad (1.10.13)$$

Здесь коэффициент b также зависит от разности

$$\eta = y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma. \quad (1.10.14)$$

Полагая в формуле (1.10.13) $y = L$ и подставляя $Q(L, t)$ в формулу для функционала (1.10.3), получим:

$$J = \int_0^T \left[Q^*(t) - e^{-\frac{t}{b}} Q_0 \left(L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{b} e^{-\frac{t}{b}} \int_0^t u(\sigma) e^{\frac{\sigma}{b}} d\sigma \right]^{\gamma} dt. \quad (1.10.15)$$

При этом также будем считать, что время T удовлетворяет условию

$$\frac{L}{2} \leq L - \int_0^T v(\sigma) d\sigma \leq L. \quad (1.10.16)$$

Это условие на величину T не является слишком жестким, так как обработка возмущений, при которых подынтегральное выражение в (1.10.15) отлично от нуля, происходит за гораздо меньшее время, чем максимальное значение T , удовлетворяющее условию (1.10.16).

Обозначим

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(t) = Q^*(t) - e^{-\frac{t}{b}} Q_0 \left(L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \right), \\ \Delta &= \Delta(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{t}{b}} \int_0^t u(\sigma) e^{\frac{\sigma}{b}} d\sigma. \end{aligned} \quad (1.10.17)$$

Тогда выражение (1.10.15) примет вид

$$J = \int_0^t |\theta(t) - \Delta(t)|^\gamma dt. \quad (1.10.18)$$

Заметим, что если считать функцию $b \left(L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \right)$ кусочно-постоянной функцией времени t , то функция $\Delta(t)$ представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$b \frac{d\Delta(t)}{dt} + \Delta(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.10.19)$$

с начальным условием

$$\Delta(0) = 0. \quad (1.10.20)$$

Таким образом, задача свелась к минимизации функционала (1.10.18) при условии (1.10.19), (1.10.20).

Теперь оптимальное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, при ограничении (1.10.5) может быть определено с помощью принципа максимума для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оптимальное управление определяется из условия максимума функции

$$H = \psi_0 [\theta(t) - \Delta(t)]^\gamma - \frac{1}{b} \psi_1 \Delta(t) + \frac{1}{b} \psi_1 u \quad (1.10.21)$$

и, следовательно, равно

$$u(t) = \begin{cases} A_2 & \text{при } \psi_1 > 0; \\ A_1 & \text{при } \psi_1 < 0. \end{cases} \quad (1.10.22)$$

Функция $\psi_1(t)$ в равенстве (1.10.21) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \gamma [\theta(t) - \Delta(t)]^{\gamma-1} \psi_0 \operatorname{sign} [\theta(t) - \Delta(t)] + \frac{1}{b} \psi_1, \quad (1.10.23)$$

$$\psi_0 = \operatorname{const} \leq 0. \quad (1.10.24)$$

Из уравнений (1.10.23) и (1.10.24) определяем

$$\psi_1(t) = e^{\frac{t}{b}} \left\{ c + \int_0^t [\theta(\sigma) - \Delta(\sigma)]^{\gamma-1} \operatorname{sign} (\theta - \Delta) e^{-\frac{\sigma}{b}} d\sigma \right\}, \quad (1.10.25)$$

где c — произвольная постоянная, определяемая начальным условием.

Однако на основании принципа максимума нельзя определить оптимальное управление на тех участках отрезка $0 \leq t \leq T$, где функция $\psi_1(t) \equiv 0$. Это так называемые «особые участки» оптимальной траектории [95]. На них функция H не зависит от управления u . На особых участках подынтегральное выражение в формуле (1.10.18)

$$\theta(t) - \Delta(t) \equiv 0. \quad (1.10.26)$$

Условие (1.10.26) позволяет однозначно определить оптимальное управление на особых участках траектории.

Подставляя в (1.10.26) формулы (1.10.17), умножая обе части полученного равенства на $be^{t/b}$ и дифференцируя по t , получим новое уравнение, из которого выразим искомое управление $u(t)$ через известные функции.

Рассмотрим наиболее типичный случай возмущения процесса нагрева металла в печи, когда имеется один скачкообразный разрыв коэффициента:

$$b = b(\eta) = \begin{cases} B_1 & \text{при } L \geq \eta \geq \frac{1}{2}L; \\ B_2 & \text{при } 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}L, \end{cases} \quad (1.10.27)$$

где B_1 и B_2 — известные постоянные и

$$\eta = L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma. \quad (1.10.28)$$

Этот случай соответствует нагреву в печи двух партий заготовок с разными теплофизическими свойствами или размерами.

При однократном возмущении по коэффициенту b оптимальный процесс состоит из двух особых участков: $0 \leq t \leq t_1$ и $t_2 \leq t \leq T$ и одного неособого участка $t_1 \leq t \leq t_2$.

На особых участках выполнено условие (1.10.26) и, следовательно, температура металла на выходе точно равна заданной температуре Q^* . Это означает, что достаточно малые возмущения по скорости можно «отработать» идеально с нулевой разностью между заданной и действительной температурой металла на выходе из печи при выполнении условия (1.10.5). Особые траектории оптимального процесса соответствуют наличию возмущений только по скорости v продвижения металла в печи.

Если предположить, что задание и коэффициент b постоянны:

$$Q^* = Q^*(t) = \text{const}, b = \text{const}, 0 \leq t \leq T, \quad (1.10.29)$$

то оптимальное управление на особых участках будет иметь вид

$$u(t) = Q^* + bv(t) Q_0' \left(L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \right) e^{-\frac{t}{\sigma}}. \quad (1.10.30)$$

Однако скачкообразные возмущения по коэффициенту в силу наличия распределенных параметров процесса идеально скомпенсировать нельзя. Для идеальной компенсации такого рода возмущений нужно было бы располагать возможностью создавать скачки температур греющей среды в печи по длине, т. е. функция $u(y, t)$ в уравнении (1.10.1) должна допускать разрывы не только по времени, но и по пространственной переменной y . Этот скачок, распространяясь «синхронно» со скачком распределения температуры заготовок по длине y , мог бы идеально скомпенсировать это возмущение, сохраняя равенство (1.10.26), как это показано на рис. 8. Наличие разрыва в функции $u(y, t)$ по y , $0 \leq y \leq L$, означает допустимость бесконечных (или очень больших) градиентов температур в рабочем пространстве печей, что не соответствует реальным

возможностям. Поэтому считаем управление $u(t)$ не зависящим от y в пределах каждой зоны.

Неособый участок оптимальной траектории $t_1 \leq t \leq t_2$ соответствует оптимальной отработке такого возмущения.

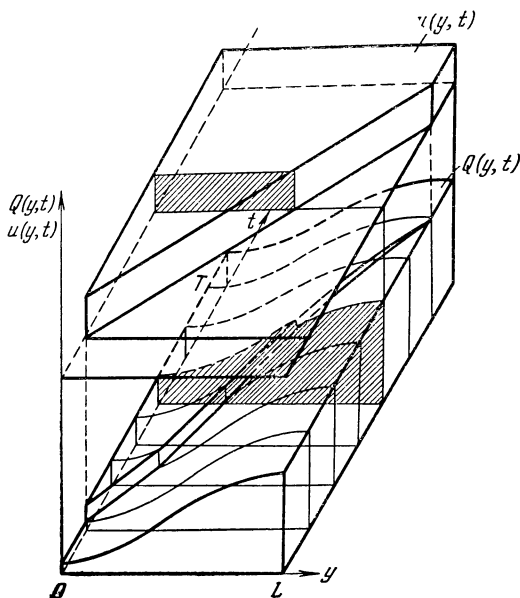


Рис. 8.

На неособом участке функция $\psi_1(t)$ не равна тождественно нулю ни на каком интервале, принадлежащем отрезку $[t_1, t_2]$.

В этом случае функция $\theta(t)$, определенная первым из равенств (1.10.17), имеет разрыв, соответствующий разрыву функции $b(L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma)$ по аргументу t .

При наличии одной точки разрыва функции b , т. е. при наличии одного скачкообразного возмущения, оптимальный процесс на неособом участке $[t_1, t_2]$ согласно формуле (1.10.22) состоит из одного интервала (t_1, t_2) , в течение ко-

того управляющее воздействие поддерживается на одном из своих предельных значений A_1 или A_2 в зависимости от того, вверх или вниз произошел скачок функции b .

В силу непрерывности функции $\psi_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, на концах отрезка $[t_1, t_2]$ будем иметь:

$$\psi_1(t_1) = 0, \quad \psi_1(t_2) = 0. \quad (1.10.31)$$

Пользуясь формулой (1.10.25), получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\theta(\sigma) - \Delta(\sigma)]^{\gamma-1} \operatorname{sign}(\theta(\sigma) - \Delta(\sigma)) e^{-\frac{\sigma}{b}} d\sigma = 0. \quad (1.10.32)$$

Последнее условие можно использовать для определения момента начала t_1 и конца t_2 неособого участка оптимальной траектории.

Рассмотренный случай оптимального переходного процесса иллюстрируется на рис. 9. Момент времени t' на графике есть момент выхода из печи первой заготовки новой партии металла с коэффициентом $b = B_2$. Момент t' , $t_1 < t' < t_2$ определяется из условия

$$\frac{1}{2} L - \int_0^{t'} v(\sigma) d\sigma = 0. \quad (1.10.33)$$

Рассмотрим теперь задачу об определении оптимального стационарного режима в проходной нагревательной печи с точки зрения минимального расхода топлива.

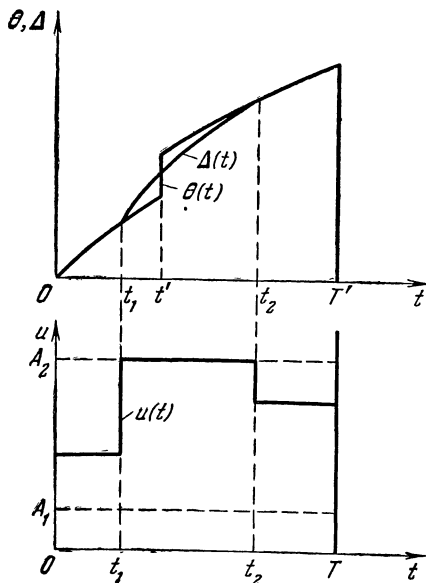


Рис. 9.

Дадим точную постановку задачи. Для дискретного случая эта задача рассматривалась Э. М. Гольдфарбом и Э. С. Гескиным.

Пусть в уравнении (1.10.1) управляющее воздействие является стационарным, т. е. зависит только от пространственной переменной y :

$$u = u(y), \quad 0 \leq y \leq L.$$

Тогда стационарное распределение температуры нагреваемого материала будет описываться функцией одной переменной

$$Q = Q(y), \quad 0 \leq y \leq L,$$

которая связана с распределением с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

$$l \frac{dQ}{dy} + Q = u(y), \quad 0 \leq y \leq L, \quad (1.10.34)$$

где l — постоянная длины нагрева материала, связанная с постоянной времени нагрева b соотношением $l = bv$.

Считаем, что скорость продвижения материала в печи v постоянна.

Заданы также начальная и конечная температуры нагреваемого материала

$$Q(0) = Q_0, \quad (1.10.35)$$

$$Q(L) = Q_L. \quad (1.10.36)$$

Приращение теплосодержания материала равно

$$dB(y) = cdQ(y) = \eta(y) RdG(y), \quad (1.10.37)$$

где $B(y)$ — теплосодержание единицы материала в точке y , R — калорийность топлива, c — теплоемкость материала и $G(y)$ — расход топлива в печи на участке длины от 0 до y .

Величина

$$\eta(y) = \kappa \left[1 - \frac{u(y)}{u^*} \right], \quad (1.10.38)$$

где u^* — характеристическая температура (постоянная положительная величина, не зависящая от y) и κ — коэффициент полезного использования топлива.

Так как $0 \leq \eta(y) \leq 1$, то из (1.10.38) получаем, что температура греющей среды $u(y)$ должна подчиняться ограничению

$$0 \leq u(y) \leq u^*. \quad (1.10.39)$$

Из (1.10.37) получаем, что полный расход топлива в печи равен

$$G = \int_{Q_0}^{Q_L} \frac{cdQ(y)}{R \left[1 - \frac{u(y)}{u^*}\right]}. \quad (1.10.40)$$

Теперь можно сформулировать задачу оптимального управления. Требуется найти распределение $u(y)$, $0 \leq y \leq L$, подчиненное условию (1.10.39), чтобы выполнялись условия (1.10.34) — (1.10.36), а интеграл (1.10.40) достигал своего минимального значения. Распределение $u(y)$ будем также называть управлением.

Преобразуем сначала интеграл (1.10.40), используя уравнение (1.10.34). Получим:

$$G = \int_0^L \frac{\sigma [u(y) - Q(y)] dy}{u^* - u(y)}, \quad (1.10.41)$$

где

$$\sigma = \frac{u^*c}{\kappa R}. \quad (1.10.42)$$

Введем новые функции по формулам

$$v(y) = u^* - u(y), \quad (1.10.43)$$

$$z(y) = u^* - Q(y). \quad (1.10.44)$$

В этих переменных интеграл (1.10.41), уравнение (1.10.34), условия (1.10.35), (1.10.36) и ограничение (1.10.39) можно записать в виде

$$G = \int_0^L \frac{\sigma [z(y) - v(y)]}{v(y)} dy = \int_0^L \left[\frac{\sigma z(y)}{v(y)} - \sigma \right] dy, \quad (1.10.45)$$

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{1}{l(y)} [v(y) - z(y)], \quad (1.10.46)$$

$$z(0) = u^* - Q_0 = z_0, \quad (1.10.47)$$

а также

$$z(L) = u^* - Q_L = z_L, \quad (1.10.48)$$

$$0 \leq v(y) \leq u^*. \quad (1.10.49)$$

Заметим еще, что в интеграле (1.10.45) можно выделить постоянную часть, не зависящую от управления $v(y)$ и координаты $z(y)$, и вместо интеграла (1.10.45) минимизировать следующий интеграл:

$$G = \int_0^L \frac{\sigma z(y) dy}{v(y)}. \quad (1.10.50)$$

Таким образом, задача оптимального управления в новых переменных формулируется следующим образом. Найти функцию $v(y)$, $0 \leq y \leq L$, стесненную условиями (1.10.49), такую, что в силу уравнений (1.10.46) — (1.10.48) интеграл (1.10.50) достигает своего минимального значения. Эту задачу решим методом принципа максимума [91].

Следуя принципу максимума, составим функцию

$$H(y, \psi(y), z(y), u) = -\frac{\sigma z(y)}{v} + \frac{\psi(y)[v - z(y)]}{l}, \quad (1.10.51)$$

где функция $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = -\frac{\partial H(y, \psi(y), z(y), v(y))}{\partial z} = \frac{\sigma}{u(y)} + \frac{\psi(y)}{l}. \quad (1.10.52)$$

По принципу максимума функция H по аргументу u достигает максимального значения. Поэтому

$$\frac{\partial H(y, \psi(y), x(y), v)}{\partial v} = \frac{\sigma z(y)}{v^2} + \frac{\psi(y)}{l} = 0. \quad (1.10.53)$$

Отсюда находим, что оптимальное управление имеет вид

$$v = v(y) = \sqrt{-\frac{\sigma l z(y)}{\psi(y)}}. \quad (1.10.54)$$

Заметим, что так как произведение σl — положительная величина, то для того, чтобы подкоренное выражение в (1.10.54) было положительным, необходимо и достаточно, чтобы функции $z(y)$ и $\psi(y)$ при одном и том же y ,

$0 \leq y \leq L$, имели разные знаки. В силу условия (1.10.49) в (1.10.54) мы должны отбросить знак минус. Вычислим

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = - \frac{2\sigma z(y)}{v^3}.$$

Величины σ , z и v по смыслу задачи положительны. Поэтому функция H на найденном управлении (1.10.54) имеет локальный максимум.

Так как функция H по аргументу v непрерывна и всюду дифференцируема внутри отрезка $[0, u^*]$, то на управлении (1.10.54) функция H по аргументу v достигает абсолютного максимума.

Следовательно, управление $v = v(y)$, определяемое формулой (1.10.54) при наличии соответствующей функции $\psi(y)$, является оптимальным.

Подставляя в этом случае (1.10.54) в (1.10.46) и (1.10.52), получим систему двух уравнений первого порядка для двух неизвестных функций $z(y)$ и $\psi(y)$:

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{z}{l} + \sqrt{- \frac{\sigma z}{l\psi}}, \quad (1.10.55)$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{\psi}{l} + \sqrt{- \frac{\sigma z}{ly}}. \quad (1.10.56)$$

Умножая (1.10.55) на ψ и (1.10.56) на z , а затем складывая оба уравнения почленно, получим (с учетом того, что ψ и z имеют разные знаки):

$$\psi \frac{dz}{dy} + z \frac{d\psi}{dy} = 0. \quad (1.10.57)$$

Отсюда находим первый интеграл системы (1.10.55), (1.10.56)

$$\psi z = C < 0, \quad (1.10.58)$$

где константа C , по сделанному выше замечанию, должна быть отрицательной.

С помощью (1.10.58) уравнение (1.10.55) сводится к одному уравнению с одной неизвестной функцией

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{z}{l} + \sqrt{- \frac{\sigma}{lC}} z. \quad (1.10.59)$$

Так как по смыслу задачи $u^* - Q(y) > 0$, то $z(y) > 0$ и, следовательно, в уравнении (1.10.59) выбирается положительное значение корня.

В последнем уравнении можно разделить переменные и легко получить решение

$$z(y) = C_1 \exp \int_0^y \left(-\frac{1}{l} + C_2 \sqrt{\frac{\sigma}{l}} \right) dy, \quad (1.10.60)$$

где обозначено $\exp \omega = e^\omega$.

Константы C_1 и C_2 подбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.10.47), (1.10.48). Константа C_1 находится просто: $C_1 = z(0) = z_0$. Константа C_2 определяется из уравнения

$$\frac{z_L}{z_0} = \exp \left(-\int_0^L \frac{dy}{l} \right) \exp \left(C_2 \int_0^L \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy \right).$$

Логарифмируя, находим:

$$\ln \frac{z_L}{z_0} = -\int_0^L \frac{dy}{l} + C_2 \int_0^L \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{\int_0^L \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy} \left[\ln \frac{z_L}{z_0} + \int_0^L \frac{dy}{l} \right].$$

Подставляя полученные значения констант C_1 и C_2 в (1.10.60), получим формулу для оптимального распределения

$$z(y) = z_0 \left(\frac{z_L}{z_0} \right)^{\alpha(y)} \beta(y), \quad (1.10.61)$$

где

$$\alpha(y) = \frac{1}{\int_0^L \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy} \int_0^y \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy,$$

$$\beta(y) = \exp \left[\frac{1}{\int_0^L \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy} \left(\int_0^L \frac{dy}{l} \int_0^y \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy - \int_0^L \sqrt{\frac{\sigma}{l}} dy \int_0^y \frac{dy}{l} \right) \right].$$

Легко видеть, что в случае, когда параметры процесса нагрева l и σ не зависят от y , а являются постоянными величинами, формула (1.10.61) для оптимального распределения $z(y)$ примет простой вид

$$z(y) = z_0 \left(\frac{z_L}{z_0} \right)^{\frac{y}{L}}, \quad 0 \leq y \leq L, \quad (1.10.62)$$

т. е. оптимальное распределение температуры материала в таком случае вообще не зависит от параметров нагрева.

Возвращаясь на основании (1.10.43) и (1.10.44) к исходным переменным, получим, что оптимальное распределение температуры материала в печи имеет вид

$$Q(y) = u^* - (u^* - Q_0) \left(\frac{u^* - Q_L}{u^* - Q_0} \right)^{\alpha(y)} \beta(y), \quad 0 \leq y \leq L. \quad (1.10.63)$$

В случае постоянных параметров получим:

$$Q(y) = u^* - (u^* - Q_0) \left(\frac{u^* - Q_L}{u^* - Q_0} \right)^{\frac{y}{L}}, \quad 0 \leq y \leq L. \quad (1.10.64)$$

Оптимальное распределение температуры греющей среды уже без труда вычисляется из (1.10.63) или (1.10.64) по формуле (1.10.34). Если это распределение удовлетворяет условию (1.10.39), то в силу замечаний, сделанных после формулы (1.10.54), это управление оптимально.

Вычислим теперь максимальное значение расхода топлива в случае постоянных параметров системы. С помощью (1.10.54), (1.10.58) вычислим сначала отношение

$$\begin{aligned} \frac{z(y)}{v(y)} &= \sqrt{-\frac{\Psi(y)z(y)}{\sigma l}} = \sqrt{-\frac{C}{\sigma l}} = \\ &= \frac{1}{C_2 \sqrt{\sigma l}} = \frac{L}{l} \left[\ln \frac{z_L}{z_0} + \frac{L}{l} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

По формуле (1.10.45) имеем:

$$G_{\min} = \frac{-\sigma L \ln \frac{z_L}{z_0}}{\ln \frac{z_L}{z_0} + \frac{L}{l}}.$$

Отсюда с учетом (1.10.44), (1.10.40) и (1.10.41) окончательно получим:

$$G_{\min} = \frac{\sigma \ln \left(\frac{u^* - Q_0}{u^* - Q_L} \right)}{1 - r \ln \left(\frac{u^* - Q_0}{u^* - Q_L} \right)}, \quad (1.10.65)$$

где

$$\sigma = \frac{u^* c}{\kappa R} \text{ и } r = \frac{l}{L}.$$

§ 11. Задача оптимального управления системами с распределенными параметрами в функциональном «фазовом» пространстве

В большинстве задач оптимального управления системами с распределенными параметрами временная координата t , изменяющаяся на отрезке $[t_0, t_1]$, играет особую роль. Задачам оптимального управления в бесконечномерном функциональном пространстве можно дать геометрическую интерпретацию.

Состояние объекта будем обозначать следующим образом:

$$Q = Q(P) = Q(R, t) = \bar{Q}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (1.11.1)$$

Здесь точка R имеет лишь пространственные координаты.

При каждом фиксированном значении параметра t , $t_0 \leq t \leq t_1$, функцию Q от точки R будем рассматривать как точку $\bar{Q}(t)$ функционального пространства, которое в данном случае играет роль фазового пространства. Это пространство будем считать банаховым пространством B_1 . Множество точек $\bar{Q}(t)$ при разных t , $t_0 \leq t \leq t_1$, назовем траекторией.

Точку $\bar{Q}(t)$ при фиксированном t , $t_0 \leq t \leq t_1$, назовем изображающей точкой системы.

Далее предположим, что управление зависит лишь от параметра t :

$$U = U(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1.11.2)$$

т. е. будем считать, что эта функция измерима и определена на числовом отрезке $[t_0, t_1]$ и принимает свои значения из области допустимых значений ω .

Движение изображающей точки $\bar{Q}(t)$ в функциональном фазовом пространстве может быть описано дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} \bar{Q}(t) = f(\bar{Q}(t), U(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (1.11.3)$$

Таким образом, каждой паре $Q \in B_1, U \in \omega$ соответствует элемент $f(Q, U)$, который также принадлежит функциональному банахову пространству B_2 , причем $B_2 \supset B_1$.

Начальное и конечное условия имеют вид

$$\bar{Q}(t_0) = a, \quad (1.11.4)$$

$$\bar{Q}(t_1) = b. \quad (1.11.5)$$

В более общем случае конечное условие (1.10.5) может быть записано в виде

$$F(\bar{Q}(t_1)) = \theta, \quad (1.11.6)$$

где F — оператор, действующий в функциональном фазовом пространстве, и θ — нулевой элемент того пространства, в котором действует оператор F .

Производная в уравнении (1.11.3) понимается в том смысле, что при $\Delta t \rightarrow 0$ норма

$$\left\| \frac{\bar{Q}(t + \Delta t) - \bar{Q}(t)}{\Delta t} - f(\bar{Q}(t), U(t)) \right\| \rightarrow 0 \quad (1.11.7)$$

равномерно по t , $t_0 \leq t \leq t_1$. Здесь оператор $f(\bar{Q}(t), U(t))$ при фиксированном t , $t_0 \leq t \leq t_1$, определен на всех функциях состояния $\bar{Q}(t)$, удовлетворяющих граничным условиям (если таковые имеют место), и на всех управлениях $U(t)$, принимающих свои значения из области допустимых значений ω .

На траекторию $Q(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, может быть наложено ограничение, состоящее в том, что она целиком должна

принадлежать некоторой фиксированной области Γ , заданной условием

$$\varphi(Q) \in \Delta, \quad (1.11.8)$$

где φ — оператор, действующий в функциональном фазовом пространстве, и Δ — заданное множество элементов того пространства, в котором действует оператор φ .

В этом параграфе сформулируем следующую задачу оптимального управления: определить такое допустимое управление $U(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $U \in \omega$, чтобы изображающая точка $\bar{Q}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, системы перешла из начального состояния (1.11.4) в конечное состояние (1.11.5) или (1.11.6), двигаясь по допустимой траектории, принадлежащей области Γ . При этом заданный функционал $J(Q(P))$ должен достичь своего минимального значения. Ряд интересных результатов для этой задачи получен Ю. В. Егоровым [45, 48]. Им рассматривалась следующая задача. Пусть управляемый процесс описывается дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве (1.11.3).

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы выбрать такую допустимую функцию управления $U = U(t)$ (т. е. $U \in \omega$), чтобы соответствующая ей функция $Q(t)$ получающаяся как решение уравнения (1.11.3), удовлетворяла условиям (1.11.4) и (1.11.5), а функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(Q(t), U(t)) dt \quad (1.11.9)$$

достиг своего минимального значения. Момент времени t_1 будем считать не фиксированным заранее.

Особенность рассматриваемой задачи оптимального управления в бесконечномерном функциональном пространстве состоит в том, что для нее не выполняется принцип максимума Л. С. Понтрягина, справедливый в случае конечномерных пространств B_1 и B_2 [91]. Действительно, в [45] приводится следующий простой пример задачи оптимального управления, где с очевидностью не выполняется принцип максимума.

В качестве пространства B_1 возьмем пространство l_2 бесконечных последовательностей $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots)$

с нормой

$$\|Q\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} Q_k^2} < \infty.$$

Пусть уравнение (1.11.3), описывающее управляемую систему, имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = U.$$

Начальное и конечное условия записываются следующим образом:

$$Q(t_0) = (0, 0, \dots, 0, \dots) = a,$$

$$Q(t_1) = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) = b.$$

Область ω допустимых значений управления $U = U(t) = (U_1(t), \dots, U_n(t), \dots)$ задается условиями

$$|U_k| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы изображающую точку $Q(t)$ в фазовом пространстве B_1 перевести из начальной точки $Q(t_0) = a$ в заданную конечную точку $Q(t_1) = b$ за минимальное время $T = t_1 - t_0$. В этом случае функцию $f^0(Q, U)$ следует положить тождественно равной единице.

Легко видеть, что управление

$$U^0(t) = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \quad (1.11.10)$$

осуществляет оптимальный процесс за время

$$T = t_1 - t_0 = 1.$$

При этом минимально возможное время T_n , за которое каждая n -я координата $Q_n(t)$ переходит из $Q_n(t_0) = 0$ в $Q_n(t_1) = \frac{1}{n}$, можно найти из условия

$$Q_n(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) dt = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда получаем, что

$$T_n = \frac{n}{n+1}.$$

Так как в пределе при $n \rightarrow \infty$

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

то невозможно осуществить оптимальный переходный процесс за время, меньшее единицы. Таким образом, управление $U^0(t)$, определяемое формулой (1.11.10), является оптимальным.

Но если бы принцип максимума Л. С. Понтрягина был справедлив в данном случае, то существовал бы такой ненулевой постоянный бесконечномерный вектор $N = (N_0, N_1, \dots, N_n, \dots)$ (уравнение для вектора N имеет вид $\dot{N} = 0$), что функция

$$H(N(t), Q(t), U) = N_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N_k U_k \quad (1.11.11)$$

достигла бы максимума при $U_k(t) \equiv \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, с другой стороны, если при некотором $k \geq 1$ величина $N_k \neq 0$, то максимум функции (1.11.11) по $U \in \omega$ достигается при

$$U_k = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) \text{sign } N_k,$$

но эта функция не обеспечивает минимального времени процесса, равного $T = 1$.

Таким образом, приведенный пример показывает, что принцип максимума, справедливый для конечномерных систем, не может быть безоговорочно перенесен на бесконечномерные управляемые системы.

Наиболее существенной причиной, по которой оказался не справедлив принцип максимума в рассматриваемом примере, является то, что множество ω допустимых значений управления U не имеет внутренних точек.

Сформулированная ниже теорема, доказательство которой аналогично доказательству соответствующей теоремы

в [91], как раз включает в себя предположения, которые обеспечивают справедливость принципа максимума в случае банаховых пространств B_1 и B_2 .

Теорема (принцип максимума). Пусть существует непрерывная по (Q, U) производная Фреше $\frac{\partial f(Q, U)}{\partial Q}$ и оператор $f(Q, U)$ также непрерывен по (Q, U) и ограничен в пространстве B_2 . Пусть также множество $\sum_{U \in \omega} f(Q, U)$ содержит внутреннюю точку в пространстве B_2 .

Тогда, если $U^0(t)$ — оптимальное управление и $Q^0(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория, то существует такая функция $N^0(t) = (N_0(t), N_1(t), \dots, N_n(t), \dots)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dN^0(t)}{dt} = - \left(\frac{\partial \bar{f}(Q^0(t), U^0(t))}{\partial Q} \right)^* N^0(t), \quad (1.11.12)$$

где $\bar{f} = (f^0, f)$, что выполняется условие максимума, т. е. почти для всех $t \in [t_0, t_1]$ функция

$$H(N^0(t), Q^0(t), U) = (N^0(t), \bar{f}(Q^0(t), U)) \quad (1.11.13)$$

на оптимальной траектории $U^0 = U^0(t)$ достигает максимума по $U \in \omega$; иными словами, выполняется равенство

$$\max_{U \in \omega} H(N^0(t), Q^0(t), U) = H(N^0(t), Q^0(t), U^0(t)), \quad (1.11.14)$$

при этом выполняются еще условия

$$H(N^0(t), Q^0(t), U^0(t)) = 0 \text{ и } N_0^0(t) = \text{const} \leq 0. \quad (1.11.15)$$

В качестве примера управляемой системы рассмотрим управляемую линейную систему

$$\frac{dQ(t)}{dt} = A(t)Q(t) + U(t), \quad (1.11.16)$$

где $A(t)$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$ является непрерывной функцией.

Здесь $B_1 = B_2 = B$.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $U(t)$, ограниченное по норме

$\|U\| \leq 1$, которое переводит изображающую точку системы из начального положения $Q(t_0) = a$ в заданное конечное $Q(t_1) = b$ за минимальное время $T = t_1 - t_0$.

Выполнение условия теоремы о принципе максимума здесь очевидно. Функция $(N(t), U)$ должна достигать максимума по U на оптимальном управлении $U^0(t)$. Так как функция H в данном случае линейна по аргументу U , то $\|U^0(t)\| = 1$ почти для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Будем еще предполагать, что шар в пространстве B является строго выпуклым, т. е. если $U_1 \neq U_2$ и $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, то величина $\left\| \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \right\|$ строго меньше единицы.

Тогда, если $U_1^0(t)$ и $U_2^0(t)$ — два оптимальных управления, то управление

$$U(t) = \frac{1}{2} [U_1^0(t) + U_2^0(t)]$$

также будет оптимальным и, следовательно,

$$\|U_1^0(t)\| = \|U_2^0(t)\| = \left\| \frac{1}{2} [U_1^0(t) + U_2^0(t)] \right\| = 1,$$

что противоречит условию строгой выпуклости шара в пространстве B . Таким образом, оптимальное управление $U^0(t)$ для рассматриваемого линейного случая будет единственным.

§ 12. Задачи синтеза оптимальных систем с распределенными параметрами

При рассмотрении задачи управления системой с распределенными параметрами в функциональном фазовом пространстве было установлено, что каждому начальному состоянию изображающей точки $\bar{Q}(t_0)$ соответствует определенное допустимое управление $U(t)$, переводящее изображающую точку в конечное заданное положение $\bar{Q}(t)$, например, в соответствии с уравнением (1.11.3). При изменении начального состояния $\bar{Q}(t_0)$ необходимо заново отыскивать управление $U(t)$, соответствующее новому начальному состоянию.

Так как в автоматических управляющих системах предполагается многократная «отработка» произвольных допустимых начальных условий $\bar{Q}(t_0)$, то возникает трудная задача определения допустимого оптимального управления $U(t)$ в каждый момент времени t , $t_0 \leq t \leq t_1$, в зависимости от состояния $\bar{Q}(t)$, в котором находится объект управления в тот же момент времени.

Таким образом, нужно определить оператор R

$$U(t) = R(\bar{Q}(t)), \quad (1.12.1)$$

который при каждом фиксированном значении t , $t_0 \leq t \leq t_1$, каждому состоянию $\bar{Q}(t)$, т. е. каждому положению изображающей точки, ставит в соответствие значение управления $U(t)$ в тот же момент t .

Эту задачу будем называть задачей синтеза системы оптимального управления с распределенными параметрами. В отличие от задачи синтеза систем оптимального управления с сосредоточенными параметрами, значение управления определяется не функцией от конечного числа переменных, соответствующего порядку системы, а определяется оператором (в частном случае функционалом), определенным на множестве функций состояния. Следовательно, для практической реализации систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами нужно иметь данные о функциях распределения, характеризующих состояние управляемого объекта.

Пример синтеза оптимальной системы с распределенными параметрами был ранее нами рассмотрен в § 10 настоящей главы.

Действительно, для вычисления оптимального управляющего воздействия $U(t)$ в случае оптимальной «отработки» возмущений процесса по скорости продвижения материала в печи $v(t)$ нами была выведена формула (1.10.30). Из этой формулы видно, что для определения оптимального управления $U(t)$, строго говоря, надо знать всю функцию распределения температуры материала $Q_0(x)$ в начальный момент времени.

Таким образом, зависимость (1.10.30) фактически реализует искомый синтезирующий оператор R , определенный равенством (1.12.1).

§ 13. Применение метода динамического программирования Р. Беллмана к оптимизации систем с распределенными параметрами

В этом параграфе мы рассмотрим пример использования метода динамического программирования [9], вернее принципа оптимальности, при составлении функциональных уравнений, выражающих условия оптимальности в задачах управления.

Рассмотрим управляемую систему с распределенными параметрами, состояние которой в каждый фиксированный момент времени t , $t_0 \leq t \leq t_1$, описывается заданием функции

$$Q = Q(x, t), \quad (1.13.1)$$

где пространственная переменная x , скажем, принадлежит отрезку $[0, 1]$. Для конкретности, например, будем считать, что функция $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1.13.2)$$

с граничными условиями

$$Q(0, t) = Q(1, t) = U(t), \quad (1.13.3)$$

где $U(t)$ — некоторая скалярная управляющая функция, допустимые значения которой принадлежат замкнутому множеству ω на вещественной оси, например ограничены по модулю

$$|U(t)| \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (1.13.4)$$

Здесь $\omega = [-1, 1]$.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти допустимое управляющее воздействие, удовлетворяющее условию (1.13.4), при котором функционал

$$J^* = \int_0^1 F(x, Q(x, t_1)) dx \quad (1.13.5)$$

достигает своего минимального значения. Начальное распределение считается заданным

$$Q(x, t_0) = Q_0(x). \quad (1.13.6)$$

Обозначим оптимальное управление через $U^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, а соответствующее ему минимальное значение функционала J^* через J , т. е.

$$J = \min J^* \text{ при } U(t) \in \omega, t_0 \leq t \leq t_1. \quad (1.13.7)$$

Тогда значение J будет зависеть от начального условия $Q_0(x)$ при $t = t_0$, т. е. J будет функционалом от $Q_0(x)$

$$J = J(Q_0(x)). \quad (1.13.8)$$

Воспользуемся теперь принципом оптимальности, который состоит в следующем.

Оптимальное управление $U(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, обладает тем свойством, что, каково бы ни было начальное состояние $Q_0(x)$ и управление $U(t)$ на участке $t_0 \leq t \leq t'$, где $t' \leq t_1$, управление $U(t)$ на участке $t' \leq t \leq t_1$ должно быть оптимальным относительно состояния $Q(x, t')$, получающегося в результате управления на первом участке $t_0 \leq t \leq t'$.

Следовательно, на основании этого принципа можно записать

$$J(Q_0(x)) = J(Q(x, t')). \quad (1.13.9)$$

Возьмем момент t' , $t' > t_0$, и рассмотрим оптимальное управление $U^*(t)$ на отрезке $[t_0, t']$. Тогда для оптимальности управления $U(t)$ необходимо, чтобы состояние $Q(x, t')$ сообщало функционалу $J^*(Q(x, t'))$ наименьшее значение по сравнению со всеми другими значениями, которые получаются при всех других состояниях, достижимых из начального состояния $Q_0(x)$ в момент времени t' при помощи допустимых управлений $U(t)$. Это условие с учетом (1.13.9) можно записать следующим образом:

$$J(Q_0(x)) = \min J(Q(x, t')) \text{ при } U(t) \in \omega, t_0 \leq t \leq t', \quad (1.13.10)$$

имея при этом в виду, что $Q(x, t')$ зависит от управления $U(t)$ на отрезке $[t_0, t']$ и, кроме того, зависит еще от $Q_0(x)$.

Положим теперь $t' = t_0 + \tau$, где τ будем считать достаточно малым. Тогда, имея в виду, что $Q(x, t)$ есть оптимальная функция распределения во времени и

пространстве, можно записать:

$$\begin{aligned} Q(x, t') &= Q(x, t_0) + \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_0} \tau + \varepsilon(x, \tau) = \\ &= Q_0(x) + \frac{\partial Q(x, t_0)}{\partial t} \tau + \varepsilon(x, \tau), \end{aligned} \quad (1.13.11)$$

где $\frac{\partial Q(x, t_0)}{\partial t} = \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_0}$ по определению и $\max_{[0, 1]} |\varepsilon(x, \tau)|$ — величина более высокого порядка малости, чем τ .

Предполагая существование и непрерывность сильной производной от функционала $J^*(Q(x, t))$, можно записать:

$$\begin{aligned} J(Q_0(x)) &= \\ &= \min_{U(t) \in \omega, t_0 \leq t \leq t'} \left[J(Q_0(x)) + \text{grad } J(Q_0(x)) \frac{\partial Q(x, t_0)}{\partial t} \tau + \gamma \right], \end{aligned} \quad (1.13.12)$$

где величина γ имеет порядок малости более высокий, чем τ . Член $J(Q_0(x))$ от управления $U(t)$ не зависит, и поэтому его можно вынести за знак \min и взаимно уничтожить с таким же членом в левой части равенства (1.13.12).

Деля на τ обе части последнего равенства, получим:

$$\min_{U(t) \in \omega, t_0 \leq t \leq t'} \left[\text{grad } J(Q_0(x)) \frac{\partial Q(x, t_0)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\tau} \right] = 0. \quad (1.13.13)$$

Полученное равенство, так же как и равенство (1.13.10), определяет выбор управления $U(t)$ на отрезке $[t_0, t']$.

Устремляя τ к нулю, мы тем самым сведем к нулю и отрезок $[t_0, t_0 + \tau]$ и, следовательно, получим уравнение, определяющее выбор управления $U(t)$ в одной точке $t = t_0$. Поэтому, обозначая $U(t_0) = U_0$ и переходя в равенстве (1.13.13) к пределу, получим окончательно

$$\min_{U_0 \in \omega} \left(\text{grad } J(Q_0(x)) \frac{\partial Q(x, t_0)}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.13.14)$$

Так как последнее равенство справедливо для произвольных начальных условий $Q_0(x)$, можно записать окончательно при любом t , $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$\min_{U \in \omega} \left(\text{grad } J(Q(x, t)) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.13.15)$$

Это и есть окончательное функциональное соотношение (уравнение Беллмана), которое совместно с исходными управлениями (1.13.2), (1.13.3) дает полную систему для определения значения минимизируемого функционала $J(Q(x, t))$ в функции от данного начального состояния $Q(x, t)$. Оно дает возможность определить оптимальную функцию $Q(x, t)$ и оптимальное управляющее воздействие $U(Q(x, t))$ как функцию от состояния системы $Q(x, t)$ в данный момент времени. Последнее как раз и является решением задачи синтеза оптимального управления.

§ 14. Управляемость, наблюдаемость, инвариантность в системах с распределенными параметрами

Понятие управляемости — одно из важнейших понятий теории управляемых динамических систем. Термин управляемость был введен сравнительно недавно Калманом применительно к управляемым системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями [51].

Поясним это понятие сначала на этих системах. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \dots, y_n, t, U(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.14.1)$$

где $U(t)$ — некоторое управляющее или возмущающее воздействие (вообще говоря, векторное) из определенного класса допустимых управлений. В фазовом пространстве $Y = (y_1, \dots, y_n)$ задано также два множества Γ_1 и Γ_2 . Система (1.14.1) называется *управляемой относительно множеств Γ_1 и Γ_2* , если существует такое допустимое управление $U(t)$, которое в конечное время переводит изображающую точку y системы (1.14.1) из множества Γ_1 в множество Γ_2 . В частности, множество Γ_1 может совпадать со всем фазовым пространством системы (1.14.1), а множество Γ_2 — вырождаться в одну точку, например начало координат. В случае, когда f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, являются не зависящими от времени и линейными по y и U функциями, а корни характеристического уравнения неположительны, управляемость системы типа (1.14.1) доказана в [91].

Для многих систем, однако, не всегда возможно перевести изображающую точку из любой наперед заданной точки множества Γ_1 в любую заданную точку множества Γ_2 . Поэтому естественно выделить класс систем, для которых с помощью допустимого управления можно перевести систему из произвольной заданной точки множества Γ_1 в любую заданную точку множества Γ_2 . Такую систему будем называть *полностью управляемой системой относительно множеств Γ_1 и Γ_2* .

Совершенно аналогично можно дать определение понятию управляемости для систем с распределенными параметрами, в которых является существенной координата времени t . Однако в этом случае заданные множества Γ_1 и Γ_2 фиксируются уже в соответствующем функциональном фазовом пространстве Λ , точки которого характеризуют состояние управляемой системы с распределенными параметрами. Проблема управляемости и наблюдаемости таких систем рассмотрена Вангом и Тунгом [139].

Рассмотрим, например, систему управления распределением температуры по сечению пластины

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad Q = Q(x, t), \quad 0 \leq x \leq S, \quad t_0 \leq t, \quad (1.14.2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha [U(t) - Q(0, t)], \quad (1.14.3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = 0. \quad (1.14.4)$$

Управление производится с помощью функции $U(t)$, ограниченной по модулю $|U(t)| \leq l$ и характеризующей температуру внешней среды.

Функциональным пространством Λ состояний этой системы является пространство функций $Q_0(x)$, $0 \leq x \leq S$, всевозможных начальных состояний системы

$$Q(t_0, x) = Q_0(x).$$

Если пространство Λ отождествлять с пространством $L^2[0, S]$ измеримых функций, интегрируемых с квадратом на $[0, S]$, то уже из физических соображений будет ясно, что система (1.14.2) — (1.14.4) будет управляемой относительно всего пространства $\Lambda = L^2[0, S]$ и окрестности

нулевого элемента $A \subset L^2$, т. е. A — множество тех функций $Q_0(x)$, для которых выполнено неравенство

$$\int_0^S |Q_0(x)|^2 dx \leq \delta^2, \quad (1.14.5)$$

где δ^2 — произвольно малое положительное число.

Такую управляемость будем называть δ -управляемостью в пространстве Λ . Очевидно, что δ -управляемость будет осуществлять допустимое управление $U \equiv 0$, $t_0 \leq t$.

Однако в случае множеств $\Lambda \in L^2$ и A система не будет полностью управляемой, так как, очевидно, в рассматриваемой системе нельзя получить некоторые определенные типы распределений температур $Q(x, t)$, принадлежащих множеству A . Например, в данной системе невозможно получить распределение, имеющее разрыв или даже непрерывное распределение с изломом во внутренней точке отрезка $[0, S]$. Заметим, что если система асимптотически устойчива в смысле Ляпунова относительно нулевого распределения для всех начальных состояний Γ_1 , то система является управляемой системой относительно Γ_1 и Γ_2 , где Γ_2 — малая окрестность нулевого распределения.

Из результатов § 9 настоящей главы следует, что если за функциональное пространство Λ принять пространство R постоянных функций на отрезке $[0, S]$, т. е.

$$Q_0(x, t_0) \equiv c = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq S, \quad (1.14.6)$$

а за множество Γ_2 принять нулевую точку O этого пространства, соответствующую функции $Q_0(x) \equiv 0$, то система (1.14.2) — (1.14.4) будет полностью управляемой относительно R и O (см. § 9 главы I). Такую полностью управляемую систему иногда называют *полностью нуль-управляемой системой в пространстве R* .

Заметим, что понятие управляемости заданной системы существенно зависит от вида класса допустимых управляющих воздействий, т. е. от характера ограничений, наложенных на управляющие воздействия.

Рассмотрим уравнение теплопроводности следующего вида:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + w(x, t), \quad (1.14.7)$$

определенное при $t \geq t_0$ и $0 \leq x \leq 1$. Здесь $Q(x, t)$ — управляемое распределение, а $w(x, t)$ — распределенное управляющее воздействие (распределенный управляемый источник тепла), которое подчинено следующему ограничению:

$$|w(x, t)| \leq c(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.14.8)$$

где $c(x)$ — некоторая заданная функция, и $w(x, t)$ при каждом фиксированном t принадлежит пространству $L^2(0, 1)$. Краевые условия имеют вид

$$Q(t, 0) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (1.14.9)$$

$$Q(t, 1) = U(t),$$

где $U(t)$ — управляющее воздействие (температура поверхности тела) и

$$|U(t)| \leq l. \quad (1.14.10)$$

Начальное распределение также задано:

$$Q(0, x) = Q_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.14.11)$$

Функция $Q_0(x)$ также принадлежит $L_2(0, 1)$.

Во многих случаях решение задачи математической физики может быть представлено в виде бесконечного ряда произведений двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая — от пространственной переменной (метод Фурье, метод разделения переменных):

$$Q_i(t, x, Q(t_0, x), t_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} g_{kj}(t, h_{ij}(t_0), t_0) h_k(x), \quad (1.14.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь функции $Q_i(t, x, Q(t_0, x), t_0)$ характеризуют распределение i -го параметра во времени и пространстве, если в начальный момент времени при $t = t_0$ совокупность распределения задавалась вектор-функцией

$$Q_0(t_0, x) = (Q_1(t_0, x), \dots, Q_n(t_0, x));$$

функции g_{ij} , h_{ij} и h_k определяются условиями задачи. Такое представление решения уравнения можно проиллю-

стрировать на приведенной выше задаче (1.14.7) — (1.14.11). В этом случае $n = 1$ и решение задачи можно представить в следующем виде:

$$Q(x, t) = \int_0^1 K_1(x, t, \xi) Q_0(\xi) dx + \\ + \int_0^1 K_2(x, t, \xi, \tau) \omega(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ + \int_0^t K_3(x, t, \tau) U(\tau) d\tau, \quad (1.14.13)$$

где K_1 , K_2 и K_3 — соответствующие функции Грина, которые для данной задачи имеют вид

$$K_1(x, t, \xi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \sin k\pi \xi, \quad (1.14.14)$$

$$K_2(x, t, \xi, \tau) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(t-\tau)} \sin k\pi x \sin k\pi \xi, \quad (1.14.15)$$

$$K_3(x, t, \tau) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k e^{-k^2\pi^2(t-\tau)} \sin k\pi x. \quad (1.14.16)$$

Используя конкретный вид функций Грина, легко видеть, что если обозначить

$$g_k(0) = 2 \int_0^1 Q_0(\xi) \sin k\pi \xi dx, \quad (1.14.17)$$

$$b_k(t) = 2 \int_0^1 \omega(\xi, t) \sin k\pi \xi dx, \quad (1.14.18)$$

$$h_k(x) = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.14.19)$$

то решение $Q(x, t)$ при отсутствии одного из управлений (т. е. или $\omega(x, t) \equiv 0$, или $U(t) \equiv 0$) можно представить

в виде

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) h_k(x), \quad (1.14.20)$$

где $g_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dg_k(t)}{dt} = -k^2\pi^2 g_k(t) + b_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.14.21)$$

при

$$U(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \quad (\omega(x, t) \neq 0),$$

и системе

$$\frac{dg_k(t)}{dt} = -k^2\pi^2 g_k(t) + 2\pi k (-1)^{k+1} U(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.14.22)$$

при

$$\omega(x, t) \equiv 0 \quad (U(t) \neq 0),$$

причем начальным условием для обеих систем служат равенства (1.14.17). Так как начальное распределение $Q_0(x)$ и распределенное управляющее воздействие $\omega(x, t)$ при каждом фиксированном $t \geq 0$ принадлежат $L_2(0, 1)$, то соответствующие им последовательности коэффициентов Фурье $g_k(0)$ и $b_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, принадлежат пространству l_2 . На рис. 10 и 11 приведены блок-схемы, соответствующие двум типам управляющих воздействий.

Ванг и Тунг в [139] показали, что системы (1.14.21) и (1.14.22) являются полностью управляемыми системами относительно пространства l_2 и окрестности нуля. Справедливость этого утверждения, как легко видеть, следует непосредственно из асимптотической устойчивости по Ляпунову относительно начала координат для всех начальных состояний из $L_2(0, 1)$ при отсутствии управляющих воздействий. Из рассмотрения систем (1.14.21) и (1.14.22) видно, что каждая координата $g_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующих однородных систем стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, так как каждое уравнение независимо от остальных уравнений системы и корень его характеристического уравнения действителен и отрицателен.

Несколько сложнее будет доказательство другого утверждения: система (1.14.21) полностью управляема от-

носителем пространства l_2 и начала координат. Это утверждение соответствует полной управляемости исходной системы (1.14.7) относительно пространства $L_2(0,1)$ и нулевого распределения.

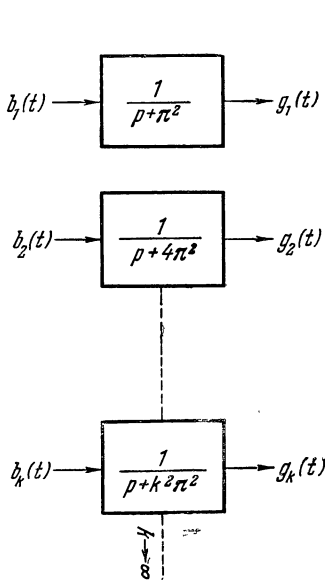


Рис. 10.

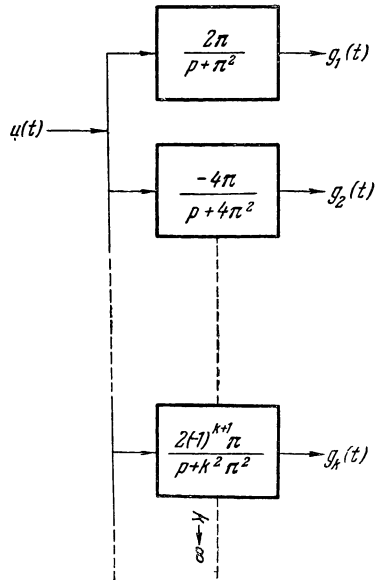


Рис. 11.

Таким образом, для доказательства высказанного утверждения необходимо показать, что существует допустимое распределенное управляющее воздействие $\omega(x, t)$, которое переводит систему (1.14.7) из произвольного начального состояния $Q_0(x) \in L_2(0, 1)$ в нулевое состояние за конечное время. Это эквивалентно тому, что в соответствии с (1.14.21) существует решение следующей системы интегральных уравнений (проблема моментов):

$$-g_k(0) = \int_0^T e^{k^2 \pi^2 t} b_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.14.23)$$

где $g_k(0)$, $k = 1, 2, \dots$, — произвольная последовательность

ность, принадлежащая l_2 , и $b_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, в соответствии с (1.14.8) удовлетворяет почти всюду на $[0, 1] \times [0, T]$ неравенству

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin k\pi x \right| \leq c(x). \quad (1.14.24)$$

Легко видеть, что система будет полностью управляемой в данном случае, если начальное распределение $Q_0(x)$ содержит лишь конечное число N гармоник, а для всех $k > N$ выполнено условие $a_k(t) \equiv 0$. Действительно, в этом случае всегда можно найти последовательность констант b_k таких, что

$$b_k = -a_k(0) k^2 \pi^2 [e^{k^2 \pi^2 T} - 1]^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.14.25)$$

Выберем T достаточно большим, чтобы $|b_k| \leq C_k$, и

$$\min_{x \in [0, 1]} c(x) \geq \sum_{k=1}^N C_k \geq \sum_{k=1}^N |b_k| \geq \max_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{k=1}^N b_k \sin k\pi x \right|. \quad (1.14.26)$$

Заметим, что последовательность $g_k(0)$, $k = 1, 2, \dots$, имеет порядок $\frac{1}{k}$, т. е. $g_k(0) = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Поэтому последовательность b_k , $k = 1, 2, \dots$, определенная равенством (1.14.25), стремится к нулю быстрее, чем $g_k(0)$, и, более того, принадлежит пространству l_2 . Таким образом, снова выбирая T достаточно большим, можно обеспечить выполнение неравенства (1.14.26) при любом сколь угодно большом N и, следовательно, перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, утверждение доказано.

Управляемость системы (1.14.22) относительно l_2 и начала координат будет рассмотрена в другом месте, а именно при решении задачи оптимального по быстродействию управления распределением температуры в теле.

Совершенно аналогично можно рассмотреть дискретные по времени управляемые системы, соответствующие исходной системе (1.14.7)—(1.14.9).

Легко доказывается полная управляемость таких дискретных систем относительно всего пространства начальных

состояний и некоторой малой окрестности начала координат. При наличии распределенного управляющего воздействия дискретная система, как легко показать, полностью управляема также и относительно начала координат.

Однако при наличии лишь одного сосредоточенного на границе управляющего воздействия $U(t)$ соответствующая дискретная по времени система уже не будет полностью управляемой относительно начала координат. Докажем это [139].

В этом случае дискретный по времени аналог будет иметь вид

$$g(k+1) = Ag(k) + Bu(k), \quad (1.14.27)$$

где

$$g(k+1) = \begin{pmatrix} g_1(k+1) \\ \vdots \\ g_i(k+1) \\ \vdots \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi^2 \Delta t}) \\ \vdots \\ \frac{2(-1)^{i+1}}{i\pi} (1 - e^{-i^2 \pi^2 \Delta T}) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (1.14.28)$$

и матрица A имеет элементы

$$a_{ij} = \begin{cases} e^{-i^2 \pi^2 \Delta T} & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (1.14.29)$$

Тогда состояние в k -й момент времени с начальным условием $g(0)$ будет иметь вид

$$g(k) = A^k g(0) + \sum_{m=1}^k A^{k-m} Bu(m). \quad (1.14.30)$$

Можно доказать следующее утверждение. Для того чтобы система (1.14.30) была управляема относительно нуля,

необходимо (и достаточно), чтобы для любого начального состояния $g(0) \in l_2$ существовала последовательность допустимых управляющих воздействий $u(1), \dots, u(k)$, которая переводит эту систему из начального состояния $g(0)$ в начало координат за конечное число шагов. Иными словами, должна удовлетворяться следующая система уравнений:

$$-g(0) = \sum_{m=1}^k A^{-m} B u(m). \quad (1.14.31)$$

Это эквивалентно системе

$$-g(0) = FD, \quad (1.14.32)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(k) \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} f_1 & a_{11}^{-2} f_1 \dots a_{11}^{-k} f_1 \\ a_{22}^{-1} f_2 & a_{22}^{-2} f_2 \dots a_{22}^{-k} f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{kk}^{-1} f_k & a_{kk}^{-2} f_k \dots a_{kk}^{-k} f_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Так как матрица F имеет конечный ранг, а размерность вектора $g(0)$ бесконечна, то, вообще говоря, система (1.14.32) неразрешима, и высказанное утверждение доказано.

В определенном смысле противоположным к понятию управляемости является понятие инвариантности. Инвариантность означает независимость некоторых комбинаций (функций) выходных величин системы от различного рода возмущающих воздействий. Поясним смысл этого понятия на примере обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть кроме системы (1.14.1) задано еще несколько функций

$$z_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (1.14.33)$$

которые задают некоторые комбинации переменных состояния управляемой системы. Эти комбинации (1.14.33) или функции φ_k называются инвариантными, если для любых начальных значений системы (1.14.1), взятых из некоторой

фиксированной области Δ фазового пространства (область Δ , в частности, может совпадать со всем фазовым пространством) и любой допустимой функции $U(t)$ функции $z_k(t) = \varphi_k(y_1(t), \dots, y_n(t))$, $k = 1, 2, \dots, s$, при $t_0 \leq t \leq T$ являются константами, т. е.

$$z_k(t) \equiv C_k = \text{const}, t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1.14.34)$$

где t_1 — некоторая фиксированная величина (t_1 может быть равно и бесконечности) и C_k — константы, не зависящие от функции $U(t)$. Такую инвариантность, когда соотношения (1.14.34) выполняются на целом интервале (t_0, t_1) , называют сильной инвариантностью.

Если же соотношения (1.14.34) выполняются лишь только в какой-либо один фиксированный момент времени T , $t_0 < T \leq t_1$, то это является инвариантностью в данный момент времени T или слабой инвариантностью [96].

Простейшим примером задания соотношений (1.14.34) является функция

$$z = y_1, \quad (1.14.35)$$

т. е. требуется выполнить инвариантность лишь одной координаты системы.

В теории инвариантности различают еще понятие ε -инвариантности. В этом случае не требуется точного выполнения соотношения (1.14.34): нужно, чтобы функции $z_k(t)$, $k = 1, \dots, s$, по модулю не превосходили некоторого заданного числа $\varepsilon > 0$. Основная задача теории инвариантности состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия, которые должны быть наложены на правые части системы (или вообще на вид уравнения), чтобы выполнялся тот или иной вид инвариантности (т. е. сильной, слабой или ε -инвариантности).

Оказывается, что эти условия до некоторой степени противоположны условиям управляемости системы. В самом деле, пусть для управляемой системы существует какая-нибудь инвариантная комбинация вида (1.14.33). Тогда, взяв в качестве Γ_2 множество, которое не включает в себя точки, удовлетворяющие соотношениям (1.14.34), получим, что система (1.14.1) не будет управляемой относительно этого множества Γ_2 . И наоборот, если система (1.14.1) является управляемой относительно множеств Γ_1 и Γ_2 , то уже

наверняка она не будет содержать инвариантных комбинаций вида (1.14.33), определяющих такие точки, которые не принадлежат множествам Γ_1 и Γ_2 .

Аналогичные понятия инвариантности можно ввести и для системы с распределенными параметрами, состояние которой может описываться, например, вектором

$$q = Q(x, t) = (Q_1(x, t), \dots, Q_n(x, t)), \quad x \in D, \\ t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1.14.36)$$

где x — пространственная переменная, принадлежащая некоторой многомерной области D евклидова пространства, и t — время.

В этом случае проблема состоит в том, чтобы указать необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на вид уравнений системы, чтобы некоторые функции от состояния управляемой распределенной системы

$$z_k = \varphi_k(Q_1(x, t), \dots, Q_n(x, t)) = \varphi_k(Q(x, t)), \\ k = 1, 2, \dots, s$$

в области $D \times [t_0, t_1]$ не зависели от определенной совокупности переменных x, t . В частности, можно потребовать, чтобы функции $z_k, k = 1, 2, \dots, s$, были тождественными константами или же зависели от x и не зависели от t и т. д.

Например, можно потребовать, чтобы z_k не зависели от времени вдоль некоторой кривой, лежащей в области D .

Совершенно аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений можно ввести понятия сильной и слабой инвариантности, ε -инвариантности и т. д.

Перейдем теперь к рассмотрению другого важного понятия — наблюдаемости. Впервые это понятие было четко определено также для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.14.1) [51]. В этом случае проблема состоит в том, чтобы, наблюдая некоторое линейное преобразование $z(t) = Ay(t)$ выходного вектора $y(t)$ на некотором подмножестве ω конечного отрезка времени $[t_0, t_1]$, определить состояние системы (1.14.1) (т. е. вектор $y(t)$) на каком-либо другом подмножестве отрезка $[t_0, t_1]$.

Знание вектора состояния в какой-либо произвольный момент времени t , очевидно, эквивалентно знанию всего

решения при $t \geq t_0$ и, следовательно, знанию начального условия $y(t_0)$. Пусть множество начальных условий составляет некоторое подмножество точек Γ_0 фазового пространства системы. Интерес, конечно, представляет тот случай, когда преобразование A не имеет однозначного обратного преобразования.

В простейшем случае преобразование A может иметь вид матрицы-строки $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Тогда

$$z(t) = Ay(t) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t).$$

Таким образом, наблюдается только движение $z(t)$ проекции точки $y(t)$ на некоторую известную прямую, параллельную вектору (a_1, \dots, a_n) . Зная лишь функцию $z(t)$ (вообще говоря, даже не на всем множестве $[t_0, t_1]$), нужно определить начальное состояние исходной системы.

Если известны движения двух проекций $z_1(t)$ и $z_2(t)$ соответственно на прямые $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ и $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$, то матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

и

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^n a_{1i} y_i(t),$$

$$z_2(t) = \sum_{i=1}^n a_{2i} y_i(t).$$

Дадим определение наблюдаемости. Мы будем говорить, что система полностью наблюдаема (при данном преобразовании A), если существует преобразование (правило, алгоритм, закон), по которому наблюдаемой на интервале $[t_0, t_1]$ траектории $z(t)$ ставится во взаимно однозначное соответствие точка $y(t_0) \in \Gamma_0$.

Определение и исследование необходимых и достаточных условий, которые нужно наложить на преобразование A , отрезок $[t_0, t_1]$ и множество начальных состояний Γ_0 , чтобы, наблюдая $z(t)$ на $[t_0, t_1]$, можно было определить $y(t_0) \in \Gamma_0$, составляет содержание проблемы наблюдаемости системы.

Аналогичное определение можно ввести и для систем с распределенными параметрами. Это понятие было исследовано Вангом и Тунгом в [139]. Аналогом линейного преобразования A при этом является некоторое линейное интегральное преобразование с ядром $A(x)$, которое распределение $Q(x, t)$ переводит в некоторое другое наблюдаемое распределение $P(x, t)$ по формуле

$$P(x, t) = \int_{\bar{D}} A(x, \xi) Q(\xi, t) d\xi, \quad \bar{D} \subset D, x \in D_1, t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1.14.37)$$

где \bar{D} — некоторое подмножество D , D_1 — некоторая область (вообще говоря, не совпадающая с областью D даже по размерности).

В этом случае проблема наблюдаемости состоит в том, чтобы, наблюдая распределение $P(x, t)$, $x \in D_1$ и $t \in [t_0, t_1]$, восстановить функцию $Q(x, t)$, $x \in D$ и $t \in [t_0, t_1]$ и, следовательно, найти $Q_0(x) = Q(x, t_0) \in \Gamma_0$. Если это возможно, то мы будем говорить, что система (характеризуемая распределением $Q(x, t)$) является полностью управляемой в Γ_0 . Таким образом, задача управляемости сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

Как видно из определения, понятие наблюдаемости тесно связано с возможностью восстанавливать «историю» по известной информации о состоянии в данный момент времени. Точнее говоря, если мы знаем состояние системы в некоторый момент времени t , то спрашивается, можно ли восстановить полностью траекторию движения системы на некотором предыдущем интервале времени, скажем, на $[t - T, t]$, где $T > 0$?

Известно, что для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, на основании теоремы о существовании и единственности решения, это вполне разрешимая

задача для всех неособых точек и конечного T . Достаточно, например, в системе (1.14.1) сделать замену переменной по формуле $\tau = -t$. Однако соответствующее утверждение для систем с распределенными параметрами, вообще говоря, не имеет места.

Такая задача восстановления истории может оказаться некорректно поставленной [102]. Это означает, что как угодно малое отклонение в начальной функции ведет к большим отклонениям в результирующем решении. Однако в некоторых случаях можно указать условия, при которых рассматриваемая задача вполне корректна. Так в [131] показано, что, зная неотрицательное решение уравнения [1.14.7] при $w(x, t) \equiv 0$ и $-\infty < x < \infty$ в момент $t = 0$, можно восстановить решение этого уравнения для $-T < t \leq 0$ и $-\infty < x < \infty$.

В терминах наблюдаемости этот результат можно сформулировать следующим образом: система (1.14.7) при $w(x, t) \equiv 0$, $-\infty < x < \infty$, и тождественном преобразовании (т. е. наблюдается непосредственно функция $Q(x, 0)$ в момент $t = 0$) полностью управляема в Γ_0 , где Γ_0 — множество неотрицательных решений данного уравнения при $-T < t \leq 0$ и $-\infty < x < \infty$.

Можно показать [136], что система (1.14.7) является также полностью наблюдаемой относительно всех начальных состояний, принадлежащих множеству функций $Q_0(x)$, $-\infty < x < \infty$, имеющих ограниченный спектр пространственных частот, т. е. функция $Q_0(x)$ такова, что ее преобразование Фурье

$$\bar{Q}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.14.38)$$

тождественно равно нулю при $|\omega| > C$, где C — некоторая константа. Это множество функций $\bar{Q}_0(\omega)$ является замкнутым подмножеством пространства $L_2(-\infty, \infty)$.

Система, описываемая уравнением теплопроводности (1.14.7) на конечном интервале $0 \leq x \leq 1$ при $w(x, t) \equiv 0$ и $Q(0, t) \equiv Q(1, t) \equiv 0$, будет также полностью наблюдаемой, если априори известно, что начальное распределение $Q_0(x)$ содержит лишь конечное число пространственных гармоник.

Действительно, пусть решение уравнения (1.14.7) представлено в виде конечной суммы N слагаемых, каждое из которых соответствует гармонике, присутствующей в начальной функции

$$Q(x, t) = \sum g_n(0) \sin n\pi x e^{-n^2\pi^2 t}, \quad (1.14.39)$$

где $g_n(0)$ определяется равенством (1.14.17).

Так как функция $Q(x, t)$ полностью известна при $t > 0$ и $0 \leq x \leq 1$, то на отрезке $[0, 1]$ оси x всегда можно выбрать N отдельных точек $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, N$, так, чтобы на основании (1.14.39) неизвестные коэффициенты $g_n(0)$ единственным образом определялись системой линейных алгебраических уравнений

$$Q(x_i, T) = \sum g_n(0) \sin n\pi x_i e^{-n^2\pi^2 T}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.14.40)$$

где T — момент наблюдения распределения $Q(x, T)$. Это и требовалось доказать.

Пусть теперь нам известно некоторое усредняющее по пространственной переменной преобразование исходного распределения $Q(x, t)$. А именно, пусть наблюдается функция

$$P(t) = \int_0^1 A(\xi) Q(\xi, t) d\xi. \quad (1.14.41)$$

Тогда исходная система полностью наблюдаема. В самом деле, так как $Q(x, t)$ содержит конечное число пространственных гармоник, то $P(t)$ можно представить как конечную сумму N слагаемых следующего вида:

$$P(t) = \sum_{n=1}^N g_n(0) C_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

где

$$C_n = \int_0^1 A(\xi) \sin n\pi\xi d\xi \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Так как функция $P(t)$ известна на отрезке $[0, T]$, то всегда можно выбрать N моментов времени $t_i \in [0, T]$.

$i = 1, 2, \dots, N$, таких, что $g_n(0)$ единственным образом определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$P(t_i) = \sum_{n=1}^N g_n(0) C_n e^{-n^2 \pi^2 t_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

По-видимому, подобным же образом можно доказать полную наблюдаемость системы и в случае наличия бесконечного числа гармоник. Правда, при этом придется иметь дело уже с бесконечной системой линейных алгебраических уравнений и подходящим образом подбирать некоторую бесконечную (счетную) систему точек $x_i \in [0, 1]$ и $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, \dots$.

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ РЕКУРРЕНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

Многие задачи оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами, особенно при вычислениях на счетных машинах, приводят к рассмотрению рекуррентных и импульсных систем управления [18].

В этой главе рассматривается задача оптимального управления импульсными системами и выводится основное необходимое условие оптимальности. Приводится пример оптимального процесса, где не выполняется принцип максимума, являющийся аналогом принципа максимума Л. С. Понтрягина для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Формулируется достаточное условие оптимальности в виде расширенного принципа максимума. Для линейных систем это условие является также и необходимым.

§ 1. Необходимое условие оптимальности для систем, описываемых рекуррентными соотношениями

Рассмотрим динамическую систему, которая описывается уравнениями следующего вида:

$$q_i(k+1) = f_i(q_1(k), \dots, q_n(k), u_1(k), \dots, u_r(k)), \quad (2.1.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, N-1.$$

В матричной форме уравнения (2.1.1) примут вид

$$q(k+1) = f(q(k), u(k)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.1.2)$$

где

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Относительно функций $f(q, u)$ будем предполагать, что они имеют непрерывные первые частные производные по q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и непрерывны по u_i , $i = 1, 2, \dots, r$.

Функции $u(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$; $q(k) = 0, 1, \dots, N-1$ могут принимать свои значения соответственно из некоторых допустимых множеств ω и Ω , $u \in \omega$, $q \in \Omega$. Будем считать, что множества ω и Ω суть замкнутые области соответственно в r -мерном и n -мерном евклидовых пространствах U и X соответственно. Функции $u = u(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, и $q = q(k)$, $k = 0, \dots, N$, будем называть допустимым управлением и допустимой траекторией соответственно, если $u(k) \in \omega$ для всех $k = 0, \dots, N-1$ и $q(k) \in \Omega$ для всех $k = 0, \dots, N$.

Пусть задана начальная точка

$$q(0) = a \quad (2.1.4)$$

и постоянная матрица-строка

$$c = (c_1, \dots, c_n). \quad (2.1.5)$$

Задачу оптимального управления для рассматриваемой управляемой системы можно сформулировать следующим образом. Определить такое допустимое управление $u(k)$, $u \in \omega$, чтобы соответствующая ему в силу (2.1.2) траектория также была допустима и функционал

$$J = cq(N), \quad (2.1.6)$$

где $q(N)$ — решение уравнения (2.1.2) при $k = N$ с начальным условием (2.1.4), достиг своего наибольшего значения. Такое управление и соответствующую ему траекторию будем называть оптимальными.

Эта задача была рассмотрена в [127], где автор привел доказательство некоторого необходимого условия, которое не является полным аналогом принципа максимума в континуальном случае. В этом параграфе мы дадим иное доказательство основного необходимого условия оптимальности и покажем, что отсутствие аналога принципа максимума в континуальном случае есть явление закономерное, и в доказательство этого факта в следующем параграфе приведем пример оптимальной системы, где принцип максимума не выполняется.

Введем функцию H от $2n + r$ переменных $q_1, \dots, q_n, \psi_1, \dots, \psi_n, u_1, \dots, u_r$ следующего вида:

$$H(\psi, q, u) = \psi f(q, u), \quad (2.1.7)$$

которая определяется произведением матрицы-строки $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ на матрицу-столбец f .

Будем говорить, что функция H переменной u при фиксированных матрицах q и ψ достигает локального максимума (минимума) в точке $u^* \in \omega$, если

$$H(\psi, q, u^*) \geq H(\psi, q, u), \quad (2.1.8)$$

$$(H(\psi, q, u^*) \leq H(\psi, q, u))$$

для любых $u \in \omega$ из некоторой окрестности точки u^* .

Нам понадобится еще одна величина, которую мы будем называть производной функции $H(\psi, q, u)$ по u в точке u по направлению u_1 и обозначать $\frac{dH(u^*, u_1)}{d\varepsilon}$. Эта величина определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\varepsilon} &= \frac{dH(u^*, u_1)}{d\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{H(\psi, q, \tilde{u}) - H(\psi, q, u^*)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{H(\psi, q, u^* + \varepsilon(u_1 - u^*)) - H(\psi, q, u^*)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

где u_1 — точка пространства управления U , $\tilde{u} = u^* + \varepsilon(u_1 - u^*)$ и число ε стремится к нулю справа, оставаясь положительным. Направление u_1 из точки u^* будем называть допустимым направлением, если при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $\tilde{u} = u^* + \varepsilon(u_1 - u^*) \in \omega$.

Таким образом,

$$H(\psi, q, \tilde{u}) - H(\psi, q, u^*) = \frac{dH(u^*, u_1)}{d\varepsilon} \varepsilon + \sigma(\varepsilon), \quad (2.1.8')$$

где $\sigma(\varepsilon)$ — величина более высокого порядка, чем ε .

Далее будем считать, что матрица-строка ψ зависит от параметра k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, и удовлетворяет уравнению

$$\psi(k - 1) = \psi(k) F(k), \quad (2.1.9)$$

где матрица $F(k)$ определяется следующим образом:

$$F(k) = \left(\frac{\partial f_i(q(k), u(k))}{\partial q_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.10)$$

Здесь индекс i означает номер строки, а индекс j — номер столбца.

Теперь можно сформулировать теорему, дающую основное необходимое условие оптимальности. Здесь будем предполагать, что область Ω открыта.

Т е о р е м а. Пусть существует оптимальное управление $u^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, и соответствующая ему оптимальная траектория $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$, с начальным условием (2.1.4). Пусть также существует производная $\frac{dH(u^*, u_1)}{de}$. Тогда при $u = u^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ и $q = q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$, существует такое решение $\psi^* = \psi^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, уравнения (2.1.9) с конечным условием

$$\psi^*(N-1) = c, \quad (2.1.11)$$

что при фиксированных функциях $q = q^*(k)$ и $\psi = \psi^*(k)$ производная $\frac{dH(u^*, u_1)}{de}$ функции $H(\psi^*(k), q^*(k), u)$ по любому допустимому направлению будет неположительной. Иными словами,

$$\frac{dH(u^*(k), u_1)}{de} \leq 0 \quad (2.1.12)$$

при фиксированном $k = 0, 1, \dots, N-1$, для любого допустимого u_1 .

На последнем шаге при $k = N-1$ функция $H(\psi^*(k), q^*(k), u)$ как функция от u при $u = u^*(N-1)$ достигает абсолютного максимума в области ω , т. е.

$$H(\psi^*(N-1), q^*(N-1), u^*(N-1)) \geq H(\psi^*(N-1), q^*(N-1), u) \quad (2.1.13)$$

для любого $u \in \omega$.

Таким образом, условие (2.1.12) означает, что, выходя из точки оптимума $u^*(k_s)$ по любой допустимой прямой,

мы не получим большего значения функции H , чем в точке оптимума.

Сформулированные необходимые условия позволяют выразить искомое оптимальное управление (возможно и неоднозначным образом) $u(k)$ как функцию от $q(k)$ и $\psi(k)$. После подстановки этих функций в уравнения (2.1.2) и (2.1.9) задача оптимального управления сводится к решению системы порядка $2n$ с заданными начальными (для $q(k)$) и конечными (для $\psi(k)$) условиями.

Заметим, что введенная здесь функция H не является полным аналогом функции Π , фигурирующей в теореме о принципе максимума для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. (1.9.80)).

Доказательство. Докажем сначала неравенство (2.1.13) для $k = N - 1$. Обозначим через J^* значение функционала J , определенного равенством (2.1.6), которое он принимает на оптимальном управлении $u^*(k)$ и оптимальной траектории $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Тогда на основании равенств (2.1.6), (2.1.2), (2.1.11) и (2.1.7) получим:

$$\begin{aligned} J^* &= cq^*(N) = cf(q^*(N-1), u^*(N-1)) = \\ &= \psi^*(N-1) f(q^*(N-1), u^*(N-1)) = \\ &= H(\psi^*(N-1), q^*(N-1), u^*(N-1)). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Из последнего равенства видно, что

$$\begin{aligned} H(\psi^*(N-1), q^*(N-1), u^*(N-1)) &\geq H(\psi^*(N-1), \\ &q^*(N-1), u) \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

для любого $u \in \omega$. В противном случае, как видно из равенства (2.1.14) на последнем шаге при $k = N - 1$ управление $u(N-1)$ можно было бы выбрать так, что функционал J принял бы значение, большее чем J^* , что противоречит оптимальности управления $u^*(k)$ и траектории $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Таким образом, неравенство (2.1.13) для $k = N - 1$ доказано.

Предположим теперь противное, что неравенство (2.1.12) не выполняется для некоторых значений параметра k , равных k_1, \dots, k_s , таких, что $0 \leq k_1 < k_2 < \dots$

$\dots < k_s < N - 1$. Тогда при $k = k_s$ из окрестности $\tilde{O} \subset \omega$ точки $u^*(k_s)$ можно выбрать такую точку $\tilde{u}(k_s) \in O$, что

$$\frac{dH(u^*(k_s), u_1)}{d\varepsilon} > 0 \quad (2.1.16)$$

и, следовательно, с учетом соотношений (2.1.2), (2.1.7), (2.1.9) при $\tilde{u}(k_s) = u^*(k_s) + \varepsilon(u_1 - u^*(k_s))$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta H(k_s) &= H(\psi^*(k_s), q^*(k_s), \tilde{u}(k_s)) - \\ &\quad - H(\psi^*(k_s), q^*(k_s), u^*(k_s)) = \\ &= \psi^*(k_s) [f(q^*(k_s), \tilde{u}(k_s)) - f(q^*(k_s), u^*(k_s))] = \\ &= \psi^*(k_s) [\tilde{q}(k_s + 1) - q^*(k_s + 1)] = \psi^*(k_s) \Delta q(k_s + 1) = \\ &= \psi^*(k_s + 1) F^*(k_s + 1) \Delta q(k_s + 1) > 0, \quad (2.1.17) \end{aligned}$$

где $F^*(k_s + 1)$ — значение матрицы $F(k_s + 1)$, определенной равенством (2.1.10), при $q = q^*(k_s + 1)$, $u = u^*(k_s + 1)$ и $\Delta q(k_s + 1)$ — приращение к значению оптимальной траектории $q^*(k_s + 1)$, полученное от нового управляющего воздействия $\tilde{u}(k_s)$. В (2.1.17) существенно то, что $\Delta H(k_s)$ имеет тот же порядок малости, что и ε . Предполагая существование непрерывных частных производных функций f_i по x_j , $i, j = 1, 2, \dots, n$, вычислим приращение

$$\begin{aligned} \Delta H(k_s + 1) &= H(\psi^*(k_s + 1), \tilde{q}(k_s + 1), u^*(k_s + 1)) - \\ &\quad - H(\psi^*(k_s + 1), q^*(k_s + 1), u^*(k_s + 1)) = \\ &= \psi^*(k_s + 1) [f(\tilde{q}(k_s + 1), u^*(k_s + 1)) - \\ &\quad - f(q^*(k_s + 1), u^*(k_s + 1))] = \\ &= \psi^*(k_s + 1) F^*(k_s + 1) \Delta q(k_s + 1) + \eta = \\ &= \Delta H(k_s) + \eta, \quad (2.1.18) \end{aligned}$$

где $\frac{|\eta|}{|\Delta q(k_s + 1)|} \rightarrow 0$ при $|\Delta q(k_s + 1)| \rightarrow 0$.

Формула (2.1.18) существенным образом основывается на том, что варьированное управление $\tilde{u}(k_s)$ лежит в малой окрестности точки $u^*(k_s)$. Таким образом, приращения оптимального управления $u^*(k_s)$ должны быть малыми. Так как $\Delta H(k_s)$ имеет тот же порядок малости, что и ε ,

и так как $r_1 = O(\varepsilon)$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, т. е. при $\tilde{u}(k_s)$, достаточно близком к $u^*(k_s)$, знак приращения $\Delta H(k_s + 1)$ в формуле (2.1.18) совпадает со знаком первого члена последнего из равенств (2.1.18) и опять порядок малости $\Delta H(k_s + 1)$ равен порядку малости ε . Следовательно, в силу (2.1.17) с учетом (2.1.9) это приращение будет положительным.

Поэтому в силу формулы (2.1.18) с учетом (2.1.2), получим:

$$\psi^*(k_s + 1) \Delta q(k_s + 2) > 0 \quad (2.1.19)$$

при достаточно малом ε , т. е. при $\tilde{u}(k_s)$, достаточно близком к $u^*(k_s)$.

Вычислим теперь новое приращение:

$$\begin{aligned} \Delta H(k_s + 2) &= H(\psi^*(k_s + 2), \tilde{q}(k_s + 2), u^*(k_s + 2)) - \\ &\quad - H(\psi^+(k_s + 2), q^*(k_s + 2), u^*(k_s + 2)) = \\ &= \psi^*(k_s + 2) [f(\tilde{q}(k_s + 2), u^*(k_s + 2)) - \\ &\quad - f(q^*(k_s + 2), u^*(k_s + 2))] = \\ &= \psi^+(k_s + 2) F^*(k_s + 2) \Delta q(k_s + 2) + \eta = \\ &= \Delta H(k_s + 1) + \eta, \quad (2.1.20) \end{aligned}$$

где также $\frac{|\eta|}{|\Delta q(k_s + 2)|} \rightarrow 0$ при $|\Delta q(k_s + 2)| \rightarrow 0$.

Но совершенно аналогично предыдущему в силу (2.1.19) с учетом (2.1.9) при $\tilde{u}(k_s)$, достаточно близком к $u^*(k_s)$, это последнее приращение (2.1.20) функции H также будет положительным и будет иметь одинаковый порядок малости с ε .

Продолжая этот процесс далее, в силу конечности числа шагов, дойдем до $k = N - 1$, и в силу равенства (2.1.14) получим:

$$H^*(\psi^*(N - 1), \tilde{q}(N - 1), u^*(N - 1)) - J^* > 0, \quad (2.1.21)$$

что противоречит оптимальности управления $u^*(k)$ и траектории $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Следовательно, неравенство (2.1.12) должно выполняться при $k = k_s$. Рассуждая аналогичным образом для случая, когда, по предположению, неравенство (2.1.12) не выполняется для $k = k_{s-1}$,

мы также приходим к противоречию. Следовательно, в силу конечности набора значений параметра k (k_1, \dots, k_s) можно заключить, что неравенство (2.1.12) справедливо для любого $k = 0, 1, \dots, N - 1$ и теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Если $H(\psi^*(k), q^*(k), u)$ является дифференцируемой функцией аргумента u в точке $u^*(k)$, лежащей внутри области ω , то на оптимальной траектории функция $H(\psi^*(k), q^*(k), u)$ имеет стационарное значение, т. е.

$$\frac{\partial H(\psi^*(k), q^*(k), u)}{\partial u} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.1.22)$$

Таким образом, в случае дифференцируемости функции $H(\psi, q, u)$ по аргументу u из уравнения (2.1.22) определяются все «подозрительные» точки, которые могут быть значениями оптимального управления $u^*(k)$.

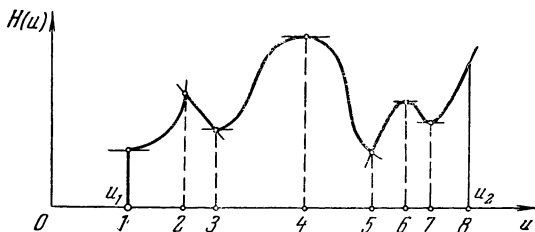


Рис. 12.

На основании теоремы можно утверждать, что такими «подозрительными» точками будут также все те точки, в которых функция $H(\psi, q, u)$ не дифференцируема по u . Однако из этих «подозрительных» точек, где функция H не дифференцируема по u , можно исключить те точки, в которых функция $H(\psi, q, u)$ имеет локальный минимум по аргументу u . Точки, где имеется локальный максимум, остаются «подозрительными».

На рис. 12 изображен пример графика не всюду дифференцируемой функции H от числового аргумента u , допустимая область изменения которого есть отрезок $[u_1, u_2]$. На этом графике цифрами 1, 2, 6, 7 и 8 обозначены все «подозрительные» значения величины u , которые могут яв-

ляться значениями оптимального управления. а также те, в которых функция $H(\psi, q, u)$ не дифференцируема по u . Все остальные значения u из отрезка $[u_1, u_2]$, включая значения, отвечающие точкам 3 и 5, в которых H не дифференцируема, заведомо не могут быть оптимальными.

Доказательство следствия. Если функция $H(\psi^*(k), q^*(k), u)$ дифференцируема по u , то имеем:

$$\frac{dH(u^*, u_1)}{d\varepsilon} = \frac{\partial H(u^*)}{\partial u} (u_1 - u^*),$$

где

$$\frac{\partial H(u^*)}{\partial u} = \left(\frac{\partial H(u^*)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H(u^*)}{\partial u_r} \right)$$

— градиент функции $H(\psi, q, u)$ в точке u^* . Следовательно, в силу (2.1.12), произведение

$$\frac{\partial H(u^*)}{\partial u} (u_1 - u^*) \leq 0. \quad (2.1.23)$$

Но так как по условию следствия точка u^* есть внутренняя точка области ω , то любое направление u_1 из точки u^* является допустимым. Поэтому, подставляя в последней формуле вместо u_1 величину $2u^* - u_1$, получим:

$$\frac{\partial H(u^*)}{\partial u} (2u^* - u_1 - u^*) = - \frac{\partial H(u^*)}{\partial u} (u_1 - u^*) \leq 0. \quad (2.1.24)$$

Сравнивая (2.1.24) с (2.1.23), получаем:

$$\frac{\partial H(u^*)}{\partial u} = 0,$$

что и требовалось доказать.

В заключение этого параграфа сделаем одно полезное замечание, которое мы выскажем без доказательства.

Пусть к условиям сформулированной в этом параграфе задачи оптимального управления добавлено еще одно условие, что часть координат вектора $q(k)$ в момент $k = N$ должна равняться заданным значениям:

$$\left. \begin{aligned} q_1(N) &= q_{1N}, \\ q_2(N) &= q_{2N}, \\ \dots &\dots \dots \\ q_p(N) &= q_{pN}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.25)$$

где $1 \leq p < n$. В этом случае задача оптимального управ-

ления сводится к максимизации функционала

$$J = \sum_{i=p+1}^n c_i q_i(N). \quad (2.1.26)$$

Для этого случая полностью сохраняется формулировка доказанных в этом параграфе теоремы и следствия из нее. Причем условие (2.1.11) заменяется условиями:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{p+1}(N-1) &= c_{p+1}, \\ \psi_{p+2}(N-1) &= c_{p+2}, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \psi_n(N-1) &= c_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.27)$$

§ 2. Пример задачи оптимального управления, где не выполняется аналог принципа максимума

Как уже отмечалось в § 1 этой главы, оставалось невыясненным, действительно ли в случае рассматриваемых импульсных систем отсутствует полный аналог принципа максимума, справедливого в континуальном случае, или же такое отсутствие есть результат неполноты приведенного доказательства. Как будет показано на примере, принцип максимума, вообще говоря, не справедлив.

Рассмотрим управляемую систему с одним управляющим воздействием:

$$\left. \begin{aligned} q_1(k+1) &= \varphi(q_1(k)) + \varphi_1(u(k)), \\ q_2(k+1) &= \varphi(q_2(k)) + \varphi_2(u(k)), \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

где

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} 1 - 2u & \text{при } 0 \leq u \leq 0,5; \\ 0 & \text{при } 0,5 \leq u \leq 1, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq u \leq 0,5; \\ 2 + 4u & \text{при } 0,5 \leq u \leq 1, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$$\varphi(u) = -(u-2)^2 + 4. \quad (2.2.4)$$

Графики этих функций изображены на рис. 13, а, б, в.

На управляющее воздействие $u(k)$, являющееся скалярной функцией дискретного аргумента k , наложено условие

$$0 \leq u \leq 1, \quad (2.2.5)$$

т. е. в данном случае область допустимых значений управления представляет собой отрезок $[0, 1]$.

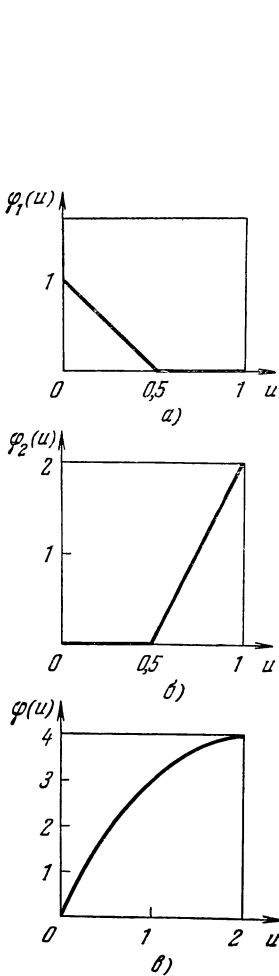


Рис. 13.

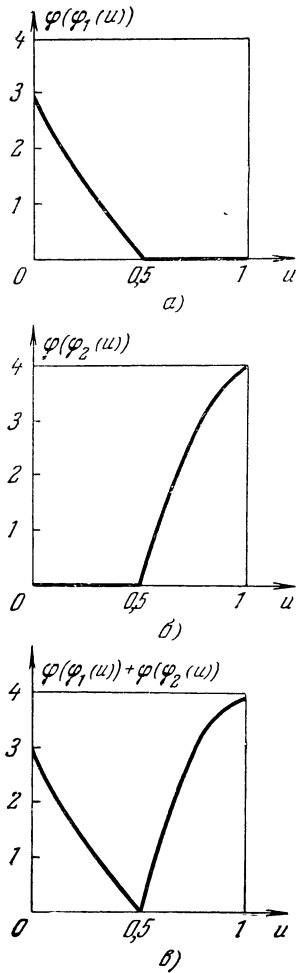


Рис. 14.

Поставим следующую задачу оптимального управления. Найти такое управляющее воздействие $u(k)$, $k = 0, 1$,

$u \in [0, 1]$, чтобы при движении из начального состояния при $k = 0$

$$q_1(0) = q_2(0) = 0, \tag{2.2.6}$$

функционал

$$J(2) = q_1(2) + q_2(2) \tag{2.2.7}$$

достиг максимального значения.

Прежде всего определим значение оптимального управления при $k = 0$, т. е. $u(0)$.

Оптимальное управление при $k = 1$ вычислять не будем, так как в силу доказанной в предыдущем параграфе теоремы на последнем шаге функция H на оптимальной траектории достигает максимума, когда u меняется во всей области $\omega = [0, 1]$.

Вычислим значение функционала J , определяемого формулой (2.2.7). С учетом начального условия (2.2.6) имеем

$$q_1(1) = \varphi_1(u(0)), \quad q_2(1) = \varphi_2(u(0)).$$

Далее,

$$q_1(2) = \varphi(\varphi_1(u(0))) + \varphi_1(u(1)),$$

$$q_2(2) = \varphi(\varphi_2(u(0))) + \varphi_2(u(1)).$$

Поэтому

$$J = \varphi(\varphi_1(u(0))) + \varphi(\varphi_2(u(0))) + \dots,$$

где точками обозначены члены, не зависящие от $u(0)$.

На рис. 14, *a*, *б*, *в* построены графики функций $\varphi(\varphi_1(u))$, $\varphi(\varphi_2(u))$ и суммы $\varphi(\varphi_1(u)) + \varphi(\varphi_2(u))$. Из этого рисунка с очевидностью вытекает, что оптимальное управление $u(0) = 1$.

Теперь перейдем к вычислению $u(0)$ с помощью принципа максимума.

Так как в нашей задаче $c_1 = c_2 = 1$, то

$$\psi_1(1) = \psi_2(1) = 1 \tag{2.2.8}$$

и уравнение (2.1.9) предыдущего параграфа для определения $\psi(k)$ имеет вид

$$\psi_1(k-1) = \psi_1(k) \frac{\partial \varphi(q_1(k))}{\partial q}, \quad \psi_2(k-1) = \psi_2(k) \frac{\partial \varphi(q_2(k))}{\partial q}. \tag{2.2.9}$$

Отсюда с учетом (2.2.8) получим:

$$\psi_1(0) = \frac{\partial \Phi(q_1(1))}{\partial q}, \quad \psi_2(0) = \frac{\partial \Phi(q_2(1))}{\partial q}. \quad (2.2.10)$$

Функция H при $k = 0$ с учетом (2.2.10) принимает вид

$$H(\psi(0), q(0), u) = \dots + \psi_1(0) \varphi_1(u) + \psi_2(0) \varphi_2(u) =$$

$$= \dots + \frac{\partial \Phi(q_1(1))}{\partial q} \varphi_1(u) + \frac{\partial \Phi(q_2(1))}{\partial q} \varphi_2(u), \quad (2.2.11)$$

где точками обозначены члены, не зависящие от u .

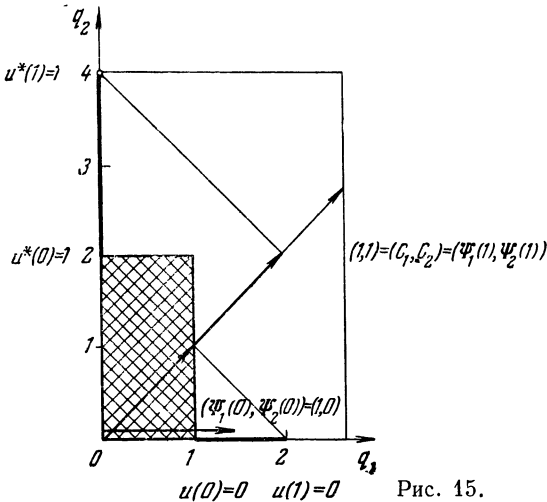


Рис. 15.

Так как оптимальное управление при $k = 0$ по доказанному выше равно $u^*(0) = 1$, то оптимальное $q_1(1) = 0$ и $q_2(1) = 2$. Отсюда получаем, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \Big|_{q_1=0} &= -2(q-2) \Big|_{q_1=0} = 4, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} \Big|_{q_2=2} &= -2(q-2) \Big|_{q_2=2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

С учетом последнего равенства (2.2.12) функция H , определяемая формулой (2.2.11), примет вид

$$H(\psi(0), q(0), u) = \dots + 4\varphi_1(u). \quad (2.2.13)$$

Из этого равенства видно, что максимум H достигается при $u(0) = 0$. Но значение оптимального управления $u(0) = 1$

максимума функции H не дает. Следовательно, принцип максимума как необходимое условие оптимальности в импульсных системах, вообще говоря, не выполняется, что и требовалось показать на приведенном в этом параграфе примере. Однако при значении оптимального управления $u(0) = 1$ функция H имеет стационарное значение.

На рис. 15 изображено фазовое пространство управляемой системы в координатах q_1, q_2 . На этом рисунке изображены области достижимости из начального состояния $q_1 = q_2 = 0$ за один шаг $k = 0$ и за два шага $k = 0, 1$. Множество достижимости за один шаг представляет собой совокупность двух отрезков $[0, 1]$ и $[0, 2]$ на осях q_1 и q_2 соответственно. Множество достижимости за два шага представляет собой заштрихованную область плюс два отрезка $(1, 2)$ и $(2, 4)$ на осях q_1 и q_2 соответственно.

§ 3. Достаточные условия оптимальности

Будем рассматривать задачу оптимального управления, поставленную в § 1 настоящей главы, при дополнительном ограничении, что оптимальная траектория $q(k), k = 0, 1, \dots, N-1$, должна принадлежать некоторой замкнутой области $\Omega, q(k) \in \Omega, k = 0, 1, \dots, N-1$.

При этом области ω и Ω могут зависеть от векторов u и q и параметра $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Докажем теорему, которая дает довольно широкие достаточные условия оптимальности.

Введем функцию $\Pi(k, q, u)$, которую определим следующим образом:

$$\Pi(k, q, u) = \psi(k) f(q, u) - \psi(k-1) q, \quad (2.3.1)$$

где $\psi(k), k = 0, 1, \dots, N-1$, есть некоторая функция дискретного аргумента, причем

$$\psi(-1) = 0, \quad \psi(N-1) = c. \quad (2.3.2)$$

Отметим, что функция $\psi(k)$ может зависеть еще от ряда параметров, которые в свою очередь меняются вдоль траектории, как функции от $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Например, в общем случае функция ψ может зависеть от q и u , т. е.

$$\psi = \psi(k) = \psi(q(k), u(k), k) \quad (2.3.3)$$

с тем же условием, что $\psi(q(-1), u(-1), -1) = 0$ и $\psi(q(N-1), u(N-1), N-1) = c$ по определению.

Будем говорить, что функции $u(k), q(k), k = 0, 1, \dots, \dots, N-1$ удовлетворяют расширенному принципу максимума, если для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$ выполняется равенство

$$\Pi(k, q(k), u(k)) = \max_{\substack{u \in \omega \\ q \in \Omega}} \Pi(k, q, u). \quad (2.3.4)$$

Сформулируем теперь следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы допустимое управление $u^*(k)$ и соответствующая ему траектория $q^*(k), k = 0, 1, \dots, N-1$, были оптимальны, достаточно, чтобы функции $u^*(k), q^*(k)$ удовлетворяли расширенному принципу максимума.*

Доказательство этой теоремы несложно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное допустимое управление $u(k)$ и произвольную допустимую траекторию $q(k), k = 0, 1, \dots, N-1$.

Тогда по условию теоремы имеем:

$$\Pi(k, q^*(k), u^*(k)) \geq \Pi(k, q(k), u(k)) \quad (2.3.5)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Иными словами, существует такая функция $\psi(k), k = 0, 1, \dots, N-1, \psi(-1) = 0, \psi(N-1) = c$, что

$$\begin{aligned} \psi(k) f(q^*(k), u^*(k)) - \psi(k-1) q^*(k) &\geq \\ &\geq \psi(k) f(q(k), u(k)) - \psi(k-1) q(k) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

для любых допустимых функций $u(k)$ и $q(k)$ и всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Просуммируем обе части соотношения (2.3.6) с учетом (2.1.2) и (2.3.2), тогда получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} [\psi(k) f(q^*(k), u^*(k)) - \psi(k-1) q^*(k)] &\geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} [\psi(k) f(q(k), u(k)) - \psi(k-1) q(k)] \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

или

$$cq^*(N) \geq cq(N) \quad (2.3.8)$$

Соотношение (2.3.8) как раз указывает на тот факт, что $u^*(k)$, $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, есть решение задачи оптимального управления. Теорема доказана.

Комбинируя утверждение теоремы, доказанной в § 1 этой главы, с тем, что доказанной теоремой 1, можно сформулировать результат, который выражает необходимые и достаточные условия оптимальности рассматриваемой задачи, если система (2.1.2) является линейной системой следующего вида:

$$q(k+1) = Aq(k) + bu(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.3.9)$$

где матрицы A и b , вообще говоря, могут зависеть и от параметра k .

Здесь мы снова будем предполагать, то область Ω совпадает со всем пространством.

Теорема 2. Пусть $u^*(k)$, $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$; $q^*(0) = a$ — допустимое управление и соответствующая ему траектория линейной системы (2.3.9). Тогда, для того чтобы $u^*(k)$ было оптимальным управлением, а $q^*(k)$ было соответствующей ему оптимальной траекторией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялся принцип максимума, т. е. существовала такая функция $\psi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $\psi(-1) = 0$, $\psi(N-1) = c$, удовлетворяющая соотношению (2.1.9), что

$$\psi^*(k) bu^*(k) = \max_{u \in \omega} \psi^*(k) bu$$

или

$$\psi^*(k) bu^*(k) \geq \psi^*(k) bu(k) \quad (2.3.10)$$

для любого $u \in \omega$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть $u^*(k)$ — допустимое оптимальное управление и $q^*(k)$ — соответствующая ему допустимая оптимальная траектория, причем $q^*(0) = a$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Предположим противное, т. е. что соотношение (2.3.10) не выполняется при некотором $k = 0, 1, \dots, N-1$. Иными словами, существует такое $\tilde{u}(k) \in \omega$, что

$$\psi^*(k) bu^*(k) < \psi^*(k) b\tilde{u}(k). \quad (2.3.11)$$

Если ввести функцию $H(\psi(k), q(k), u)$ для рассматриваемой

мого линейного случая $H(\psi^*(k), q^*(k), u) = \psi^*(k) A q^*(k) + \psi^*(k) b u$, то из (2.3.11) следует аналогично (2.1.17), что

$$\begin{aligned} \Delta H(k) &= H(\psi^*(k), q^*(k), \tilde{u}(k)) - \\ &- H(\psi^*(k), q^*(k), u^*(k)) = \psi^*(k+1) A \Delta q(k+1). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Аналогично (2.1.18) с учетом (2.3.12) найдем, что

$$\begin{aligned} \Delta H(k+1) &= H(\psi^*(k+1), \tilde{q}(k+1), u^*(k+1)) - \\ &- H(\psi^*(k+1), q^*(k+1), u^*(k+1)) = \\ &= \psi^*(k+1) A \Delta q(k+1) = \Delta H(k) > 0, \end{aligned}$$

где $\Delta q(k+1) = \tilde{q}(k+1) - q^*(k+1)$, и $\tilde{q}(k+1)$ — новое значение фазовой координаты в момент времени $k+1$, полученное под действием нового управления $\tilde{u}(k)$.

Точно так же можно показать, что

$$\begin{aligned} \Delta H(k+2) &= H(\psi^*(k+2), \tilde{q}(k+2), u^*(k+2)) - \\ &- H(\psi^*(k+2), q^*(k+2), u^*(k+2)) = \Delta H(k+1) > 0. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\begin{aligned} \Delta H(N-1) &= H(\psi^*(N-1), \\ &\tilde{q}(N-1), u^*(N-1)) - J^* > 0, \end{aligned}$$

где J^* — значение функционала на оптимальном управлении. Последнее равенство противоречит предположению оптимальности управления $u^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, что и доказывает необходимость условия (2.3.10).

Докажем теперь достаточность.

Пусть $u^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ — допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума и, следовательно, удовлетворяющее неравенству (2.3.10) при некотором $\psi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $\psi(-1) = 0$, $\psi(N-1) = c$. Пусть, далее, $q^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $q^*(0) = a$ — соответствующая ему траектория.

Докажем, что $u^*(k)$ и $q^*(k)$ являются тогда соответственно оптимальным управлением и оптимальной траекторией.

Так как по условию теоремы $\psi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, такова, что $\psi(-1) = 0$, $\psi(N-1) = c$ и удовлетворяет соотношению (2.3.9), то, умножая обе части соотношения

(2.3.9) сначала на $q^*(k)$, $q^*(0) = \alpha$, а потом на произвольную функцию $q(k)$, $q(0) = \alpha$, получим:

$$\psi(k) Aq^*(k) - \psi(k-1) q^*(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.3.13)$$

$$\psi(k) Aq(k) - \psi(k-1) q(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.3.14)$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned} \psi(k) Aq^*(k) - \psi(k-1) q^*(k) = \\ = \psi(k) Aq(k) - \psi(k-1) q(k). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Складывая почленно неравенство (2.3.10) с равенством (2.3.15), получим:

$$\begin{aligned} \psi(k) [Aq^*(k) + bu^*(k)] - \psi(k-1) q^*(k) \geq \\ \geq \psi(k) [Aq(k) + bu(k) - \psi(k-1) q(k)]. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Но по теореме 1 этого параграфа последнее равенство (2.3.16) выражает условие, выполнение которого достаточно для того, чтобы управление $u^*(k)$ и траектория $q^*(k)$ были оптимальными (см., например, неравенство (2.3.6)). В этом случае положено

$$f(q(k), u(k)) \equiv Aq(k) + bu(k). \quad (2.3.17)$$

Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что сформулированные в последнем параграфе теоремы 1 и 2 останутся справедливыми, если траектория $q(k)$ имеет не свободный правый конец, а, например, p координат вектора $q(N)$ удовлетворяют соотношениям $1 \leq s \leq p < n$. При этом в формулировках указанных теорем надо добавить, что вектор $q(N)$ должен удовлетворять наложенным условиям (условиям для правого конца траектории).

§ 4. Оптимальное распределение температуры по зонам проходной нагревательной печи

В § 10 главы I рассматривалась задача определения непрерывного стационарного распределения температуры греющей среды проходной нагревательной печи с целью минимизации общего расхода топлива.

Однако часто бывает трудно получить непрерывное распределение температуры греющей среды. В многозонных печах это распределение имеет вид ступенчатой функции; в пределах каждой зоны печи температура греющей среды постоянна.

Дадим точную математическую постановку задачи.

В этом случае подходящим аппаратом для определения оптимального стационарного распределения температуры греющей среды по зонам являются методы, развитые в этой главе.

Будем рассматривать многозонную проходную нагревательную печь, состоящую из N зон. Проходя через эти зоны с постоянной скоростью v , металл нагревается от некоторой начальной температуры t_0 до некоторой конечной температуры t_N , с которой он выходит из печи. Обозначим через τ время пребывания в каждой зоне точки, связанной с движущимся металлом.

Обозначим температуру греющей среды в пределах k -й зоны через $T(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. В пределах рассматриваемой зоны эта температура считается постоянной. Температуру металла, входящего в k -ю зону, обозначим через $t(k)$. Кроме того, будем считать, что температура металла в конце k -й зоны равна начальной температуре при входе металла в $(k + 1)$ -ю зону. Если считать нагреваемое тело тонким и в качестве граничных условий теплообмена между металлом и греющей средой принять граничные условия III рода, то можно записать обыкновенное дифференциальное уравнение изменения во времени температуры $t_k(s)$ металла в k -й зоне под действием постоянной во времени температуры $T(k)$ греющей среды в k -й зоне (см. (1.10.34))

$$b \frac{dt_k(s)}{ds} + t_k(s) = T(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad 0 \leq s \leq \tau.$$

Решение этого уравнения при постоянном b и $T(k)$, как легко видеть, можно записать в следующей форме:

$$t_k(s) = T(k) - e^{-s/b} (T(k) - t(k)), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \\ 0 \leq s \leq \tau,$$

где $t(k)$ — начальная температура металла при входе в k -ю зону.

Отсюда, полагая $s = \tau$ и учитывая, что $t_k(\tau) = t(k+1)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, получим соотношение между температурами материала на входе и выходе k -й зоны и температурой греющей среды в этой зоне:

$$t(k+1) = T(k) - \theta(T(k) - t(k)), \quad (2.4.1)$$

где

$$\theta = e^{-\tau/b}. \quad (2.4.2)$$

Формула (2.4.1) задает рекуррентное соотношение, которое дает возможность вычислить температуру металла в конце k -й зоны, если известна температура металла в начале k -й зоны (конце $(k-1)$ -й зоны) и температура греющей среды в k -й зоне.

Заметим, что так как τ есть положительная величина, то

$$0 < \theta < 1. \quad (2.4.3)$$

Общий расход топлива G по всем зонам печи равен

$$G = \sum_{k=0}^{N-1} G(k), \quad (2.4.4)$$

где $G(k)$ — расход топлива в k -й зоне.

Приращение теплосодержания металла Δi_k после прохождения k -й зоны равно

$$\Delta i(k) = c(t(k+1) - t(k)) = \eta(k) RG(k), \quad (2.4.5)$$

где $\eta(k)$ — коэффициент, показывающий, какая доля теплопроводной способности топлива, расходуемого в k -й зоне в единицу времени, идет на повышение теплосодержания нагреваемого материала, и R — теплотворная способность топлива.

Возможность оптимального управления по минимуму расхода топлива обуславливается тем, что коэффициент $\eta(k)$ можно выразить через характеристическую температуру T^* , которая постоянна и не зависит от номера зоны k , и температуру греющей среды $u(k)$, следующим образом:

$$\eta(k) = \kappa \left(1 - \frac{T(k)}{T^*} \right), \quad (2.4.6)$$

где κ — некоторый постоянный положительный коэффициент, не превосходящий единицы.

Коэффициент $\eta(k)$ по своему физическому смыслу должен удовлетворять неравенствам

$$0 \leq \eta(k) \leq 1.$$

Отсюда получаем, что температура $u(k)$ греющей среды в каждой зоне должна удовлетворять условиям

$$0 \leq T(k) \leq T^*, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.7)$$

Значение температуры $T(k)$ в k -й зоне, удовлетворяющее неравенству (2.4.7), будем называть допустимой температурой в зоне, а все распределение $T(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, где все $T(k)$ подчинены условию (2.4.7), назовем допустимым распределением.

Из соотношений (2.4.5) и (2.4.6) находим:

$$G(k) = \frac{\sigma(t(k+1) - t(k))}{T^* - T(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4.8)$$

где

$$\sigma = \frac{T^*c}{\kappa R}.$$

Следовательно, на основании формулы (2.4.4) получим:

$$G = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sigma(t(k+1) - t(k))}{T^* - T(k)}. \quad (2.4.9)$$

Теперь можно точно сформулировать задачу оптимального распределения температуры по зонам. Пусть заданы начальная и конечная температуры металла:

$$t(0) = t_0, \quad (2.4.10)$$

$$t(N) = t_N. \quad (2.4.11)$$

По смыслу задачи можно считать, что

$$0 < t_0 < t_1 < \dots < t(k) < \dots < t_N < T^*.$$

Требуется определить такое допустимое (см. (2.4.7)) распределение температуры греющей среды по зонам печи

$T(0), T(1), \dots, T(N-1)$, чтобы в силу уравнений (2.4.1) выполнялись условия (2.4.10), (2.4.11), а общий расход топлива G , вычисляемый по формуле (2.4.9), был бы минимальным.

Иными словами, нужно решить следующую краевую задачу. Найти допустимую последовательность $T(0), T(1), \dots, T(N-1)$, чтобы нагреваемый материал в силу уравнений (2.4.1) перешел из начального состояния с температурой $t(0) = t_0$ в конечное состояние с температурой $t(N) = t_N$. Такую последовательность температур $u(0), T(1), \dots, T(N-1)$ будем называть оптимальной.

Перейдем к решению поставленной задачи. Прежде всего, для упрощения выкладок введем новые переменные

$$q_1(k) = \dot{T} - t(k), \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (2.4.12)$$

$$u(k) = T - T(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.13)$$

Причем в силу условий (2.4.7) на $u(k)$ накладываются ограничения

$$0 \leq u(k) \leq T^*. \quad (2.4.14)$$

Таким образом, область ω в данном случае является отрезком $[0, T^*]$. В этих новых переменных уравнение (2.4.1) примет вид

$$q_1(k+1) = \theta q_1(k) + (1-\theta)u(k). \quad (2.4.15)$$

Заменяя в формуле (2.4.9) величину $t(k+1)$ из уравнения (2.4.1) и переходя к новым переменным по формулам (2.4.12) и (2.4.13), получим, что расход топлива G равен

$$G = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sigma(1-\theta) \frac{q_1(k)}{u(k)} - \sigma(1-\theta) \right]. \quad (2.4.16)$$

Так как член $\sigma(1-\theta)$ входит аддитивно и не зависит от координат системы, то задача сводится к минимизации суммы

$$\bar{G} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sigma(1-\theta) q_1(k)}{u(k)}. \quad (2.4.17)$$

Введем новую координату $q_2(k)$ по формулам

$$q_2(k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \frac{\gamma(1-\theta)q_1(j-1)}{u(j-1)} & \text{при } k = 1, 2, \dots, N; \\ 0 & \text{при } k = 0. \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Тогда соотношения (2.4.18) можно записать как рекуррентные:

$$q_2(k+1) = q_2(k) + \frac{\gamma(1-\theta)q_1(k)}{u(k)}, \quad (2.4.19)$$

причем

$$q_2(0) = 0. \quad (2.4.20)$$

Таким образом, задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом. Дана управляемая система, описываемая двумя разностными соотношениями

$$q_1(k+1) = \theta q_1(k) + (1-\theta)u(k), \quad (2.4.21)$$

$$q_2(k+1) = q_2(k) + \gamma(1-\theta)\frac{q_1(k)}{u(k)}. \quad (2.4.22)$$

Требуется найти такое управление $u(k)$, удовлетворяющее условиям (2.4.14), чтобы система (2.4.21) — (2.4.22) удовлетворяла условиям

$$q_1(0) = q_0 = T^* - t_0, \quad (2.4.23)$$

$$q_2(0) = 0, \quad (2.4.24)$$

$$q_1(N) = q_N = T^* - t_N, \quad (2.4.25)$$

а функционал

$$J = -q_2(N) \quad (2.4.26)$$

достиг своего максимального значения. Заметим, что параметр $c_2 = -1$ (см. (2.1.27)).

Для решения поставленной задачи прежде всего на основании (2.1.9) составим рекуррентные соотношения

$$\psi_1(k-1) = \theta\psi_1(k) + \sigma(1-\theta)\frac{\psi_2(k)}{u(k)}, \quad (2.4.27)$$

$$\psi_2(k-1) = \psi_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.28)$$

Из уравнения (2.4.28) легко получаем, что $\psi_2(k)$ — постоянная величина при $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Используя краевое условие (2.1.27), получаем, что

$$\psi_2(k) = -1, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.4.28')$$

С учетом этого равенства напишем функцию

$$H(\psi, q, u) = \psi_1 [\theta q_1 + (1 - \theta) u] - [q_2 + \sigma (1 - \theta) \frac{q_1}{u}]. \quad (2.4.29)$$

Так как функция $H(\psi, q, u)$ непрерывна и всюду дифференцируема по u внутри допустимого отрезка $[0, T^*]$ при фиксированных ψ_1, q_1 и q_2 , то условие экстремума функции H по u имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial u} = (1 - \theta) \psi_1 + \frac{\sigma(1 - \theta) q_1}{u^2} = 0. \quad (2.4.30)$$

Отсюда с учетом (2.4.14) получаем:

$$u = \sqrt{-\frac{\sigma q_1}{\psi_1}}. \quad (2.4.31)$$

Так как величина q_1 при всех k положительна, то, для того чтобы существовало действительное значение управления, необходимо, чтобы величина ψ_1 при всех k была отрицательна.

Заметим, что функция H в зависимости от u внутри отрезка $[0, T^*]$ имеет единственный экстремум, определяемый формулой (2.4.31). Поэтому, для того чтобы убедиться, что оптимальное управление будет определяться только формулой (2.4.31), нужно проверить, не может ли функция $u(k)$ при каком-либо $k, k = 0, 1, \dots, N - 1$, принять свои предельные значения $u = 0$ или $u = T^*$.

Оказывается, что ни при каком $k = 0, 1, \dots, N - 1$ оптимальное управление не может принять значения $u = 0$ или $u = T^*$.

Действительно, предположим противное, т. е. что при каком-то $k = 0, 1, \dots, N - 1$ имеем $u(k) = 0$.

В силу (2.4.13) это соответствует тому, что $T(k) = -T^* = 0$ или $T = T(k)$, но при этом вследствие (2.4.8) и неравенства $q(k+1) \neq q(k)$ получим, что в k -й зоне

должно расходоваться бесконечно большое количество топлива $\dot{G}_k = \infty$. Таким образом, $T^* \neq u(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

С другой стороны, при $u(k) = T^*$ имеем $T(k) = 0$. Однако при таком значении температуры греющей среды в зоне материал, нагретый в предыдущей $(k - 1)$ -й зоне, будет охлаждаться в k -й зоне. Это также противоречит физическому смыслу задачи, так как требуется производить нагрев материала (а не охлаждение).

Таким образом, ни при каком $k = 0, 1, \dots, N - 1$ оптимальное управление не может принимать значения $u(k) = 0$ или $u(k) = T^*$.

Следовательно, если мы покажем, что существует такая функция $\psi(k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, что при управлении (2.4.31) выполняются краевые условия (2.4.23)–(2.4.25), то это управление будет оптимальным.

Подставляя значение u , определяемое формулой (2.4.31), в (2.4.21) и (2.4.27), получим с учетом (2.4.28) систему рекуррентных соотношений:

$$q_1(k+1) = \theta q_k(k) + (1 - \theta) \sqrt{-\frac{\sigma q_1(k)}{\psi_1(k)}}, \quad (2.4.32)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$\psi_1(k-1) = \theta \psi_1(k) - (1 - \theta) \sqrt{-\frac{\sigma \psi_1(k)}{q_1(k)}},$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.4.33)$$

Помня, что $\psi_1(k) < 0$, умножим обе части уравнения (2.4.32) на $\psi_1(k)$ при $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Далее, умножим обе части уравнения (2.4.33) на $q_1(k)$ при $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Если мы вычтем полученные при этом два уравнения почленно, то получим:

$$\psi_1(k-1) q_1(k) - \psi_1(k) q_1(k+1) = 0, \quad (2.4.34)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Суммируя почленно r равенство (2.4.34), имеем:

$$\psi_1(-1) q_1(0) - \psi_1(r) q_1(r+1) = 0, \quad (2.4.35)$$

$$r = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$\psi_1(k) q_1(k+1) = C, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4.36)$$

где C — константа и $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. При этом по условию

$$C < 0. \quad (2.4.37)$$

Из (2.4.36) находим

$$q_1(k+1) = \frac{C}{\psi_1(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.38)$$

Подставляя (2.4.38) в (2.4.32), найдем с учетом отрицательности ψ_1 , что

$$C = \theta \psi_1(k) q_1(k) - (1-\theta) \sqrt{-\sigma \psi_1(k) q_1(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.39)$$

Это уравнение является квадратным алгебраическим уравнением относительно $\sqrt{-\psi_1(k) q_1(k)}$. Отсюда ясно, что, так как $C < 0$, существует положительное решение этого уравнения. Следовательно,

$$\psi_1(k) q_1(k) = C_1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4.40)$$

где C_1 — отрицательная величина, зависящая от k .

Из (2.4.40) получаем:

$$\psi_1(k) = \frac{C_1}{q_1(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.41)$$

Подставляя (2.4.41) в (2.4.32), будем иметь:

$$q_1(k+1) = \theta q_1(k) + (1-\theta) \sqrt{-\frac{\sigma}{C_1} q_1(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.42)$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$q_1(k+1) = \varphi(k) q_1(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4.43)$$

где

$$\varphi(k) = \theta(k) + (1-\theta(k)) \sqrt{\frac{\sigma}{C_2}} \quad (2.4.44)$$

и C_2 — положительная величина, зависящая от k .

Решая уравнение (2.4.43) с начальным условием (2.4.23), получим:

$$q_1(k) = q_0 \prod_{i=1}^k \varphi(i), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (2.4.45)$$

Величина C_2 , входящая в общее решение (2.4.45) уравнения (2.4.43), определяется из условия выполнения равенства (2.4.25). Однако найти величину C_2 из этого условия для произвольного k весьма сложно. Поэтому мы ограничимся случаем, когда параметры системы θ и σ являются положительными постоянными. В этом случае уравнение (2.4.42) примет вид

$$q_1(k+1) = C_3 q_1(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4.46)$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Общее решение этого уравнения можно записать в следующей явной форме:

$$q_1(k) = C_4 C_3^k, \quad (2.4.47)$$

где C_4 — произвольная постоянная.

Используя начальное и конечное условия (2.4.23) и 2.4.25), получим искомое решение:

$$q_1(k) = q_0 \left(\frac{q_N}{q_0} \right)^{k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.48)$$

Таким образом, доказано существование управления, при котором удовлетворяются краевые условия (2.4.23)—(2.4.25). Следовательно, решение (2.4.48) является оптимальным.

Возвращаясь к исходным переменным на основании (2.4.10)—(2.4.11), получим, что оптимальное распределение температуры материала в печи по зонам зависит только от T^* , t_0 и t_N , не зависит от других теплотехнических параметров задачи и имеет вид

$$t(k) = T^* - (T^* - t_0) \left(\frac{T^* - t_N}{T^* - t_0} \right)^{k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4.49)$$

На основании формул (2.4.1) легко можно получить оптимальное распределение температуры греющей среды по зонам $T(0), T(1), \dots, T(N-1)$.

Вычислим значение минимального расхода топлива при оптимальном управлении. Для этого преобразуем выражение (2.4.16) для расхода топлива, исключив из него $u(k)$ на основании (2.4.21). В результате этого получим:

$$G_{\min} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sigma (1 - \theta)^2 \frac{q_1(k)}{q_1(k+1) - \theta q_1(k)} - \sigma (1 - \theta) \right] = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\sigma (1 - \theta)^2}{\frac{q_1(k+1)}{q_1(k)} - \theta} - \sigma (1 - \theta) \right]. \quad (2.4.50)$$

Но на основании (2.4.48) имеем:

$$\frac{q_1(k+1)}{q_1(k)} = \beta = \left(\frac{q_N}{q_0} \right)^{1/N} = \text{const.} \quad (2.4.51)$$

Поэтому (2.4.50) можно записать в виде

$$G_{\min} = \frac{\sigma (1 - \theta) N (1 - \beta^{1/N})}{\beta^{1/N} - \theta}. \quad (2.4.52)$$

Отсюда значение минимального расхода топлива G_{\min} , выраженное через исходные параметры задачи, равно

$$G_{\min} = \frac{T^* c (1 - \theta) N \left[1 - \left(\frac{T^* - t_N}{T^* - t_0} \right)^{1/N} \right]}{\left[\left(\frac{T^* - t_N}{T^* - t_0} \right)^{1/N} - \theta \right]}. \quad (2.4.53)$$

Сделаем в формулах (2.4.49) и (2.4.53) предельный переход к непрерывному случаю, когда число зон N стремится к бесконечности ($N \rightarrow \infty$), а время нагрева материала в каждой зоне τ стремится к нулю ($\tau \rightarrow 0$) при условии, что общее время нагрева материала во всей печи M является постоянной величиной, равной

$$M = N\tau. \quad (2.4.54)$$

На основании (2.4.2) при бесконечно малом τ величина θ эквивалентна

$$\theta \approx 1 - \frac{\tau}{b}. \quad (2.4.55)$$

С учетом (2.4.54) получим:

$$\theta \approx 1 - \frac{M}{bN} = 1 - \frac{1}{rN}, \quad (2.4.56)$$

где величина

$$r = \frac{b}{M} > 0 \quad (2.4.57)$$

означает отношение постоянной времени нагрева к общему времени нагрева материала в печи. Подставляя (2.4.56) в (2.4.52), получим, что минимальный расход топлива в печи \bar{G}_{\min} в пределе при $N \rightarrow \infty$ равен

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\min} &= \lim_{N \rightarrow \infty} G_{\min} = \\ &= \sigma \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{rN}\right)\right] (1 - \beta^{1/N}) N}{\left[\beta^{1/N} - \left(1 - \frac{1}{rN}\right)\right]} = - \frac{\sigma \ln \beta}{1 + r \ln \beta}. \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим окончательный результат:

$$\bar{G}_{\min} = \frac{T^* c}{\kappa R} \cdot \frac{\ln \left(\frac{T^* - t_0}{T^* - t_N} \right)}{1 - r \ln \left(\frac{T^* - t_0}{T^* - t_N} \right)}. \quad (2.4.59)$$

Предельный переход в формуле (2.4.49) дает

$$t(s) = T^* - (T^* - t_0) \left(\frac{T^* - t_N}{T^* - t_0} \right)^{s/M}, \quad 0 \leq s \leq M, \quad (2.4.60)$$

где $t(s)$ — оптимальное изменение температуры материала во времени.

Если перейти к пространственной переменной y , то при длине печи L и скорости продвижения материала в печи v

можно записать

$$s = \frac{y}{v}, \quad M = \frac{L}{v}. \quad (2.4.61)$$

Поэтому оптимальное непрерывное стационарное распределение температуры материала по длине печи определяется формулой

$$t(y) = T^* - (T^* - t_0) \left(\frac{T^* - T_N}{T^* - t_0} \right)^{y/L}, \quad 0 \leq y \leq L. \quad (2.4.62)$$

Соотношения (2.4.1) в пределе при $\tau \rightarrow 0$, т. е. при непрерывном распределении температуры греющей среды $T(y)$, переходят в дифференциальное уравнение

$$l \frac{dt(y)}{dy} + t(y) = T(y), \quad 0 \leq y \leq L, \quad (2.4.63)$$

с начальным и конечным условиями

$$t(0) = t_0 \quad \text{и} \quad t(L) = t_N, \quad (2.4.64)$$

где $t(y)$ — оптимальное распределение температуры материала по длине печи, l — постоянная длина нагрева, связанная с постоянной времени нагрева соотношением $l = bv$.

Сравнивая формулы (2.4.59) и (2.4.63) с соответствующими формулами (1.10.65) и (1.10.34), мы видим, что они с точностью до обозначений совпадают друг с другом, что и обосновывает сделанный нами предельный переход.

Таким образом, поставленная задача оптимального нагрева полностью решена.

МЕТОД МОМЕНТОВ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 1. Постановка задачи

Мощным аппаратом решения проблем оптимального управления линейными системами является так называемый метод моментов, и, в частности, метод l -проблемы моментов. История применения этого метода довольно хорошо иллюстрирует тот факт, что удачно подобранный математический аппарат позволяет почти до конца решать целый класс проблем автоматического управления. Метод моментов — хорошо разработанный математический аппарат. Для решения задач оптимального управления в их общепринятой постановке наиболее подходящим средством является метод l -проблемы моментов, который позволяет учитывать наличие ограничений, наложенных на управляющие воздействия и на промежуточные координаты объекта. Наложение таких ограничений, как известно, создает наибольшие трудности при создании систем оптимального управления и ограничивает применение классических методов вариационного исчисления.

Методы этой теории позволяют легко определять вид оптимального управляющего воздействия, а также доказывать теоремы существования и единственности. Так как оптимальные управляющие воздействия зависят от ряда параметров (эти параметры эквивалентны, в частности, начальным значениям сопряженного вектора ψ в принципе максимума Л. С. Понтрягина, определяющимся из граничных условий), метод моментов позволяет для нахождения этих параметров организовать определенный сходящийся итерационный процесс.

Этот метод дает единую вычислительную процедуру вне зависимости от сложности и порядка линейного управле-

мого объекта и числа управляющих воздействий. Сложность вычисления не зависит от числа управляющих воздействий. Требуется лишь знание собственных функций управляемой системы. Интересно отметить, что метод пригоден и в том случае, когда ограничения наложены не только на управления, но и на промежуточные (фазовые) координаты системы. Правда, в этом случае вычислительная процедура значительно усложняется.

Наиболее общие результаты в теории l -проблемы моментов были изложены М. Г. Крейном в книге [7], который сформулировал эту проблему в абстрактном линейном нормированном пространстве. Так как эти результаты чрезвычайно важны для рассматриваемых проблем, а указанная книга стала уже библиографической редкостью, в настоящей главе будут приведены некоторые сведения из этой теории.

Впервые на возможность применения l -проблемы моментов и, в частности, интересных результатов М. Г. Крейна обратил внимание Н. Н. Красовский [55—57], который применил полученные в этой теории результаты для решения задачи оптимального управления линейными системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящей главе мы рассмотрим применение результатов, полученных в теории l -проблемы моментов, к задачам оптимального управления линейными системами с распределенными параметрами.

Начнем с простейшей задачи.

Пусть состояние линейной управляемой системы с распределенными параметрами описывается функцией $Q(x, t)$, где x — пространственная переменная, меняющаяся на отрезке $[0, S]$, а t — время, меняющееся на отрезке $[0, T]$. Пусть, далее, система находится под действием распределенного лишь во времени управления, характеризуемого функцией $u = u(t)$. Будем считать, что функция $u(t)$ принадлежит классу M почти везде ограниченных измеримых функций или классу L^p измеримых и интегрируемых по модулю с p -й степенью, причем по норме она не может превосходить некоторое число l , т. е.

$$\|u\| \leq l. \quad (3.1.1)$$

В развернутом виде ограничение (3.1.1) можно записать (для функций из класса L^p) так:

$$\left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq l, \quad \text{или} \quad \int_0^T |u(t)|^p dt \leq l^p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

или (если $u(t)$ принадлежит классу M)

$$\text{vrai} \max_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq l^*.$$

Для кусочно-непрерывных функций $u(t)$ существенный максимум становится просто максимальным значением и второе ограничение принимает вид

$$\max_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq l.$$

Поскольку пространство M состоит из функций, любая степень которых интегрируема на интервале $[0, T]$, пространство L^∞ можно отождествлять с пространством M .

Первое неравенство, например, при $p = 1$ соответствует ограничению общей площади графика функции $u(t)$ (импульса), а при $p = 2$ может соответствовать ограничению энергетических возможностей системы. Второе из двух последних неравенств соответствует тому, что управляющее воздействие в системе не может превосходить по абсолютной величине некоторого значения l . Таким образом, меняя значение параметра p , можно менять характер ограничения на функции $u(t)$.

При нулевом начальном условии, т. е. при $Q(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq S$, состояние управляемой системы будем описывать формулой

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.1.2)$$

где $K(x, t, \tau)$ — импульсная переходная функция системы, которая показывает, как будет меняться величина Q в точ-

*) $\text{vrai} \max x(t)$ (существенный максимум) есть нижняя грань множества чисел A таких, что множество тех t , для которых $x(t) > A$, имеет меру нуль.

ке x , $0 \leq x \leq S$, во времени t , если $u(t)$ примет вид δ -функции, отличной от нуля при $t = \tau$, т. е. $Q(x, t) = K(x, t, \tau)$ при $u(t) = \delta(t - \tau)$.

Предполагается также, что задана еще функция $Q^*(x)$, $0 \leq x < S$, характеризующая некоторое желаемое распределение, к которому должно приближаться управляемое распределение.

Поставим следующую задачу оптимального управления: найти такую функцию $u(t) \in M$ или $u(t) \in L^p$, удовлетворяющую условию (3.1.1), чтобы система (3.1.2) перешла из начального (в данном случае нулевого) состояния в заданное состояние $Q^*(x)$ за минимальное время $T = T^0$. Иными словами, нужно найти такое управление $u(t)$ при условии (3.1.1), чтобы равенство

$$Q^*(x) = \int_0^T K(x, T, t) u(t) dt \quad (3.1.3)$$

выполнялось при минимальном времени $T = T^0$.

Равенство (3.1.3) выражает континуальный аналог l -проблемы моментов, которую можно сформулировать следующим образом. Задана функция $K(x, t, \tau)$. Надо найти необходимые и достаточные условия для функции $Q^*(x)$, не равной тождественно нулю на отрезке $[0, S]$, и числа $l > 0$ такие, чтобы существовала функция $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, принадлежащая классу L^p или M и удовлетворяющая условиям (3.1.1) и (3.1.3).

Так как в формулировку необходимых и достаточных условий войдет в качестве параметра верхний предел T интеграла (3.1.3), то задача оптимального управления сведется к нахождению минимального $T = T^0$, при котором выполняются условия разрешимости l -проблемы моментов.

Дадим теперь несколько иную формулировку l -проблемы моментов для задачи (3.1.3).

Возьмем произвольную полную систему функций

$$\{h_k(x)\}, \quad 0 \leq x \leq S, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и разложим по этой системе функцию $Q^*(x)$ и функцию $K(x, t, \tau)$ при каждом фиксированном t и τ из отрезка $[0, T]$.

Получим:

$$Q^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k(x), \quad 0 \leq x \leq S, \quad (3.1.4)$$

$$K(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, \tau) h_k(x), \quad 0 \leq x \leq S, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T. \quad (3.1.5)$$

Тогда равенство (3.1.3) примет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T g_i(T, t) u(t) dt \cdot h_i(x). \quad (3.1.6)$$

Сравнивая почленно коэффициенты при $h_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ в левой и правой частях равенства (3.1.6), приходим к счетной системе равенств, выполнение которых необходимо и достаточно для справедливости равенства (3.1.3)

$$\alpha_i = \int_0^T g_i(T, t) u(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.1.7)$$

Числа α_i называются моментами функции $u(t)$ относительно последовательности функций $\{g_i(T, t)\}$.

Поэтому l -проблема моментов в нашем случае заключается в том, чтобы указать условия, необходимые и достаточные для существования функции $u(t) \in M$ или L^p , удовлетворяющей условию (3.1.1) и имеющей в качестве своих моментов относительно последовательности функций $\{g_i(T, t)\}$ числа α_i . В дальнейшем будет показано, что эти условия в действительности существуют.

Таким образом, решение l -проблемы моментов полностью отвечает на вопрос: управляема ли данная система или неуправляема? Если l -проблема имеет решение, система является управляемой, в противном случае система является неуправляемой относительно заданных начальных и конечных условий.

Поскольку необходимые и достаточные условия разрешимости l -проблемы, выраженные через числа α_i и функции g_i , будут зависеть от параметра T , то в случае управляе-

мой системы дальнейшая задача заключается в том, чтобы найти минимальное значение параметра $T = T^0$ (играющего роль времени переходного процесса), при котором система еще будет управляемой.

Заметим сразу, что указанное преобразование равенства (3.1.3) в счетную систему равенств (3.1.7) может сразу выявить неразрешимость l -проблемы моментов ни при каких l и T . Действительно, например, если для какого-либо фиксированного j число $\alpha_j \neq 0$, а $g_j(T, t) \equiv 0$ (т. е. в разложении функции $K(x, t, T)$ отсутствует член $g_j(T, t) h_j(x)$, а коэффициент α_j при члене $h_j(x)$ в разложении $Q^*(x)$ не равен нулю), то никаким управлением ни за какое время T нельзя получить в системе желаемое распределение $Q^*(x)$.

Равенство (3.1.2) описывает поведение системы с распределенными параметрами при нулевом начальном условии: $Q(x, 0) = Q_0(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq S$. Однако если начальное условие $Q_0(x) \neq 0$, $0 \leq x \leq S$, то и в этом случае проблема оптимального управления легко сводится к проблеме моментов. Действительно, в этом случае состояние управляемой системы можно описать следующим образом:

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau + \int_0^S K_0(x, t, \xi) Q_0(\xi) d\xi, \quad (3.1.8)$$

где $K(x, t, \tau)$ та же, что и в равенстве (3.1.2), а $K_0(x, t, \xi)$ — функция, показывающая, как будет меняться $Q(x, t)$, если $u(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq T$, а $Q_0(x)$ имеет вид δ -функции, отличной от нуля в точке ξ , $0 \leq \xi \leq S$, т. е. $Q(x, t) = K_0(x, t, \xi)$ при $Q_0(x) = \delta(x - \xi)$.

Задача оптимального управления заключается в том, чтобы найти такое управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющее прежним условиям, чтобы равенство

$$Q^*(x) = \int_0^T K(x, T, \tau) u(\tau) d\tau + \int_0^S K_0(x, T, \xi) Q_0(\xi) d\xi \quad (3.1.9)$$

выполнялось при минимальном времени T . Вводя обозначение

$$\tilde{Q}^*(x, T) = Q^*(x) - \int_0^S K_0(x, T, \xi) Q_0(\xi) d\xi, \quad (3.1.10)$$

получим новое равенство

$$\tilde{Q}^*(x, T) = \int_0^T K(x, T, t) u(t) dt, \quad (3.1.11)$$

аналогичное равенству (3.1.3), в котором роль $Q^*(x)$ играет полностью известная функция $\tilde{Q}^*(x, T)$, определенная равенством (3.1.10), правда, теперь зависящая еще от параметра T . Используя вышеуказанную процедуру, мы и в этом случае придем к некоторой бесконечномерной проблеме моментов (3.1.7), где уже в общем случае числа α_i зависят от параметра T .

Выше был рассмотрен случай простейшей системы с распределенными параметрами (3.1.2), состояния которой характеризуются одной функцией распределения $Q(x, t)$ и имеется одно сосредоточенное управляющее воздействие $u(t)$.

Однако все сказанное выше легко обобщается на случай более сложных систем с распределенными параметрами, состояние которых описывается несколькими функциями распределения

$$Q_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq x \leq S, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Причем система может управляться не только набором r сосредоточенных управляющих воздействий $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, но и, например, распределенными в пространстве управляющими воздействиями $v_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, $0 \leq x \leq S$, $0 \leq t \leq T$ и т. д.

Кроме того, начальные условия в системе могут быть ненулевыми

$$Q_i(x, 0) = Q_{0i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq x \leq S. \quad (3.1.12)$$

Таким образом, состояние такой управляемой системы можно описать следующим выражением:

$$Q_i(x, t) = \int_0^t \sum_{j=1}^r K_{ji}^1(x, t, \tau) u_j(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^S \sum_{j=1}^s K_{ji}^2(x, t, \xi, \tau) v_j(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ + \int_0^S \sum_{j=1}^n K_{ji}^3(x, t, \xi) Q_{0j}(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.13)$$

Заметим, что для большинства линейных систем с распределенными параметрами $(r + s + n)n$ функций $K_{ij}^1(x, t, \tau)$, $i = 1, \dots, r$, $K_{ij}^2(x, t, \xi, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, s$, $K_{ij}^3(x, t, \xi)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и везде $j = 1, 2, \dots, n$ получаются стандартным приемом из функций, число которых гораздо меньше, чем $(r + s + n)n$ [2].

Будем предполагать, что все управляющие воздействия ограничены по норме числом $l > 0$ в соответствующих пространствах.

В более общем случае заданные распределения Q_i^* , $i = 1, \dots, m$, $1 \leq m \leq n$, которые нужно получить за минимальное время, могут также в свою очередь быть не стационарными, а зависеть также еще и от времени t , т. е.

$$Q_i^* = Q_i^*(x, t), \quad 0 \leq x \leq S, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда задачу оптимального управления системой (3.1.13) можно сформулировать следующим образом. Пусть задано m функцией $Q_i^*(x, t)$. Требуется определить такие управляющие воздействия $u_i(t)$, $i = 1, \dots, r$; $v_i(x, t)$, $i = 1, \dots, s$, нормы которых не превосходят числа l , чтобы равенства

$$Q_i^*(x, T) = Q_i(x, T), \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq x \leq S, \quad (3.1.14)$$

где $Q_i(x, t)$ определяются формулой (3.1.13), имели место при минимальном значении $T = T^0$.

Однако задача управления может не ограничиваться точным достижением заданного распределения Q_i^* , $i = 1, \dots, m$,

за минимальное время T^0 . Иногда требуется, начиная с момента T^0 , в течение интервала времени $T^0 \leq t < \infty$ осуществлять «слежение» за заданными распределениями Q_i^* , т. е. необходимо найти такие допустимые управляющие воздействия, чтобы равенства

$$Q_i^*(x, t) = Q_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

выполнялись тождественно при всех $x \in [0, S]$ и при всех $t \in [T^0, \infty]$.

Однако в дальнейшем мы не будем касаться этой задачи «слежения», ограничиваясь лишь задачей точного достижения заданного распределения за минимальный промежуток времени.

Сформулированные выше задачи допускают дальнейшие обобщения, например, на случай, когда переменная x принадлежит некоторой k -мерной области D евклидова пространства. При этом функции, характеризующие состояние системы и управляющие воздействия, могут быть распределены на некоторых многообразиях размерности, меньшей или равной k , например, на линиях, поверхностях и пр.

Теперь обратим внимание на следующий факт.

Если выражение (3.1.7) при фиксированном T рассматривать как некоторый линейный функционал f , определяемый функцией $u(t)$, то равенства (3.1.7) при $i = 1, 2, \dots$ можно интерпретировать как значения этого функционала $f(g)$ на элементах $g_i = g_i(T, t)$. Таким образом, функция $u(t)$, принадлежащая L^p или M , отождествляется с функционалом, норма $\|f\|$ которого равна $\|u\|$, т. е.

$$\|f\| = \|u\| = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

(если $u(t) \in L^p$), или

$$\|f\| = \|u\| = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} |u(t)|$$

(если $u(t) \in M$). Этот функционал является линейным (аддитивным и ограниченным) в пространстве $L^{p'}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (или в пространстве L , если $u(t) \in M$). Функ-

ции $g_i(t, T)$ (при фиксированном T) должны быть элементами этого пространства.

Заметив это, сформулируем l -проблему моментов в более абстрактном и общем виде на языке функционального анализа.

Пусть E — некоторое линейное нормированное пространство и в нем задано n линейно независимых элементов g_1, \dots, g_n . Пусть также имеется линейный функционал f , определенный на E . Числа

$$\alpha_i = f(g_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.15)$$

будем называть моментами функционала f относительно последовательности элементов $\{g_i\}$.

Тогда l -проблема моментов в этом случае заключается в том, чтобы указать условия, необходимые и достаточные для того, чтобы наперед заданная последовательность чисел $\{\alpha_i\}$ явилась последовательностью моментов функционала f относительно последовательности элементов $\{g_i\}$ при условии

$$\|f\| \leq l. \quad (3.1.16)$$

Сформулированная выше задача называется l -проблемой моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве [7].

Если число равенств (3.1.15) бесконечно, то l -проблема называется бесконечномерной. В противном случае имеем дело с конечномерной l -проблемой моментов.

Сделаем еще одно замечание. В ряде случаев задача оптимального управления ставится так, чтобы время T оптимального управления было строго фиксированным, т. е. длительность процесса должна в точности равняться заданному времени T или не превосходить его. При этом может оказаться, что заданное время T настолько мало, что соответствующая проблема моментов не имеет решения за время, меньшее или равное времени T . Таким образом, в этом случае возможность точного достижения заданной функции $Q^*(x)$ исключается. Тогда задачу оптимального управления нужно ставить по-другому, а именно: оптимальным управлением будет называться такое допустимое (совместимое с ограничениями) управление, при котором за время, не превосходящее T , минимизируется некоторая мера

отклонения распределения от заданного распределения $Q^*(x)$, т. е.

$$\| Q^*(x) - Q(x, T) \| = \min.$$

Решение подобного рода задач может осуществляться с помощью принципа максимума, как это показано в главе I.

§ 2. Теория l -проблемы моментов

Начнем опять с решения простейшей задачи.

Пусть задача оптимального управления посредством приема, описанного в § 1 этой главы, сведена к следующей проблеме: найти такую функцию $u(t)$, принадлежащую пространству L^p ($1 \leq p < \infty$) или пространству M , ограниченную по норме числом l ($l > 0$)

$$\| u \| \leq l, \quad (3.2.1)$$

чтобы выполнялась бесконечная система равенств

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t) u(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.2.2)$$

где α_k — заданные числа и $g_k(t)$ — заданные линейно независимые функции, принадлежащие пространству L^p (где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) или же пространству L (если $u(t)$ принадлежит M), причем T должно быть минимально.

Основой для решения сформулированной задачи является следующая теорема, дающая необходимые и достаточные условия решения l -проблемы моментов.

Теорема 1. *Для того чтобы в пространстве L^p ($1 \leq p < \infty$) или M существовала функция $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ с нормой, не превосходящей положительного числа l , и последовательностью моментов $\{\alpha_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех конечных наборов чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ выполнялось неравенство (если $u(t) \in L$)*

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \right| \leq l \left(\int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}, \quad (3.2.3)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, или (если $u(t) \in M$)

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \right| \leq l \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right| dt \quad (p' = 1). \quad (3.2.4)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $u(t) \in L^p$ является решением l -проблемы моментов. Тогда, умножая обе части n первых равенств (3.2.2) на числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ соответственно, складывая их почленно, а затем используя неравенство Гельдера — Рисса [76], с учетом (3.2.1), получим требуемое неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \right| &= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) u(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \\ &= l \left(\int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Для случая, когда $u(t) \in M$, аналогично получим:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \right| &= \left| \int_0^T \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) u(t) dt \right| \leq \\ &\leq \operatorname{vrai} \max_{t \in [0, T]} |u(t)| \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right| dt = \\ &= l \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right| dt. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Достаточность. Предположим теперь, что неравенство (3.2.3) выполняется для всех конечных наборов чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Требуется доказать, что существует такая функция $u(t) \in L^p [0, T]$ или $u(t) \in M [0, T]$, которая дает решение сформулированной выше l -проблемы моментов, т. е.

удовлетворяет бесконечной системе равенств (3.2.2), а ее норма в соответствующем пространстве не превосходит заданного числа l . Зафиксируем n и потребуем, чтобы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ удовлетворяли дополнительному условию

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k = 1. \quad (3.2.7)$$

(Это можно сделать благодаря произвольности ξ_1, \dots, ξ_n .)

Тогда интеграл $\gamma_n = \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt$ имеет конечный минимум по всем ξ_1, \dots, ξ_n , удовлетворяющим условию (3.2.7), так как в силу неравенства (3.2.3) и условия (3.2.7) он не меньше, чем $l^{-p'}$, т. е.

$$l^{-p'} \leq \gamma_n. \quad (3.2.8)$$

Этот минимум можно найти по правилу множителей Лагранжа, положив равными нулю частные производные по $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ от функции

$$s_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_0^T |r_n(t)|^{p'} dt - \beta \varphi_n^{p'}, \quad (3.2.9)$$

где через $r_n(t)$ обозначена сумма $\sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t)$, а β — множитель Лагранжа. Тогда для всех $k = 1, \dots, n$ имеем равенства

$$\frac{\partial s_n}{\partial \xi_k} = \int_0^T |r_n(t)|^{p'-1} \text{sign } r_n(t) g_k(t) dt - \beta \alpha_k \varphi_n^{p'-1} = 0. \quad (3.2.10)$$

Умножим каждое из этих равенств на ξ_k и просуммируем по k от 1 до n . Используя равенство (3.2.7), получим, что в точке экстремума

$$\gamma_n = \int_0^T |r_n(t)|^{p'} dt = \beta, \quad (3.2.11)$$

На основании условия (3.2.7) из равенства (3.2.10) сразу же можно заключить, что если $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ —точка относительного минимума интеграла γ_n при условии (3.2.7), то

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t) \frac{1}{\beta} |r_n^0(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} r_n^0(t) dt, \quad (3.2.12)$$

$$k = 1, \dots, n,$$

где

$$r_n^0(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t).$$

Сравнивая (3.2.2) с (3.2.12), видим, что функция

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{1}{\beta} |r_n^0(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} r_n^0(t) = \\ &= \frac{1}{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t), \quad (3.2.13), \end{aligned}$$

где β определяется равенством (3.2.11) (при $\xi_k = \xi_k^0$), дает решение конечномерной l -проблемы моментов для $k = 1, 2, \dots, n$. Правда, нужно еще показать, что условие (3.2.1) также выполнено.

Используя (3.2.13) и принимая во внимание условие $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, получим:

$$\int_0^T |u_n(t)|^p dt = \frac{1}{\beta^p} \int_0^T |r_n^0(t)|^{p'} dt. \quad (3.2.14)$$

Отсюда, используя равенство (3.2.11) и неравенство (3.2.8), получим:

$$\int_0^T |u_n(t)|^p dt = \frac{1}{\beta^{p-1}} \leq l^{p'(p-1)} = l^p. \quad (3.2.15)$$

Таким образом,

$$\|u_n\| \leq l. \quad (3.2.16)$$

Случай, когда выполнено неравенство (3.2.4), доказывается совершенно аналогично: стоит только в предыдущих

выкладках положить $p' = 1$. При этом получим, что

$$u_n(t) = \frac{1}{\beta} \operatorname{sign} r_n^0(t) = \frac{1}{\beta} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \quad (3.2.17)$$

и

$$\|u_n\| = \max_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \leq l. \quad (3.2.18)$$

Теперь докажем, что при $n \rightarrow \infty$ существует некоторая предельная функция $u(t)$, норма которой не превосходит числа l и которая дает решение бесконечномерной l -проблемы моментов. Действительно, так как числовая последовательность норм $\|u_1\|, \|u_2\|, \dots, \|u_n\|, \dots$ ограничена для всех n числом l , то последовательность функций $u_1(t), \dots, \dots, u_n(t), \dots$ в случае $p' > 1$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, предел которой $u(t)$ обладает свойством $\|u(t)\| \leq l$ и

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t) u(t) dt \quad (3.2.19)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, в предположениях теоремы доказано существование искомой функции $u(t) \in L^p$.

В предельном случае, когда $p' = 1$, существует такая подпоследовательность $u_{n_1}(t), u_{n_2}(t), \dots, u_{n_k}(t), \dots$ последовательности $\{u_n(t)\}$, что числовая последовательность

$$\left\{ \int_0^T g(t) u_{n_k}(t) dt \right\}$$

сходится к пределу $\int_0^T g(t) u(t) dt$ и функция $u(t) \in$

$M[0, T]$ является в этом случае искомой функцией.

Итак, теорема, дающая необходимые и достаточные условия существования решения бесконечномерной l -проблемы моментов, полностью доказана.

Из доказательства этой теоремы выведем теперь еще некоторые утверждения, полезные для решения конечномерной l -проблемы моментов n -го порядка.

Теорема 2. Для того чтобы в пространстве L^p ($1 \leq p < \infty$) или M существовала функция $u(t)$, норма которой не превосходила бы положительного числа l и последовательность n моментов которой относительно функций $g_1(t), \dots, g_n(t)$ была бы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, т. е. чтобы существовало решение конечномерной l -проблемы моментов

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t) u(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.20)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало n чисел ξ_1^0, \dots, ξ_n^0 , дающих решение одной из следующих двух задач:

1) найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_n} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt = \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \right|^{p'} dt \geq l^{-p'} \quad (3.2.21)$$

при условии

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1; \quad (3.2.22)$$

2) найти

$$\max_{\xi_1, \dots, \xi_n} \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k \leq l \quad (3.2.23)$$

при условии

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt = 1; \quad (3.2.24)$$

причем функция $u(t)$, дающая решение этой конечномерной l -проблемы моментов, имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t), \quad (3.2.25)$$

где $\beta \geq l^{-p'}$ определяется (3.2.11), а ξ_1^0, \dots, ξ_n^0 — решение задач (3.2.23) — (3.2.24).

Здесь случай, когда $u(t) \in M[0, T]$, соответствует $\rho' = 1$. Теорема 2, по существу, содержится в доказательстве основной теоремы, и мы не будем останавливаться на ее доказательстве.

Используя теорему 2, теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Для того чтобы существовало решение бесконечномерной l -проблемы моментов, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение любой конечномерной l -проблемы моментов, которая получается из бесконечномерной l -проблемы фиксированием конечного числа моментных равенств.*

Перейдем теперь к решению сформулированной в предыдущем параграфе l -проблемы моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве. Рассмотрим сначала конечномерный случай. Поставим следующую задачу: найти такой элемент $\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n$ пространства E_n , чтобы

$$\inf_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\| = \frac{1}{\lambda_n} \geq \frac{1}{l} \quad (3.2.26)$$

при дополнительном условии

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = 1, \quad (3.2.27)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, а заданные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не все одновременно равны нулю.

В силу линейности левой части выражения (3.2.27) и однородности нормы в (3.2.26) задачу (3.2.26), (3.2.27)

можно записать так: найти элемент $\sum_{k=1}^n \xi_k g_k$, чтобы

$$\max (\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n) = \lambda_n \leq l \quad (3.2.28)$$

при условии

$$\|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\| = 1. \quad (3.2.29)$$

Таким образом, каждое решение задачи (3.2.26), (3.2.27) есть решение задачи (3.2.28), (3.2.29) и наоборот, т. е. эти две задачи эквивалентны.

Число λ_n , определяемое равенствами (3.2.26) и (3.2.27) или (3.2.28) и (3.2.29), зависит от чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, и поэтому будем обозначать его через $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Докажем теперь основную теорему.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы в пространстве E^* (сопряженном с E) существовал линейный функционал f , норма которого не превосходила бы положительного числа l и последовательность моментов которого относительно элементов g_1, g_2, \dots, g_n из нормированного пространства E была бы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq l, \quad (3.2.30)$$

где $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ определяется равенством (3.2.26) или (3.2.28) при дополнительном условии (3.2.27) или (3.2.29) соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем для равенств (3.2.26) и (3.2.27). Прежде всего, заметим, что нижняя грань в равенстве (3.2.26) при условии (3.2.27) достигается. Действительно, пусть $\xi^k, k = 1, 2, \dots$, — минимизирующая последовательность векторов $(\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_n^k)$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_1^k g_1 + \xi_2^k g_2 + \dots + \xi_n^k g_n\| = \frac{1}{\lambda_n}, \quad (3.2.31)$$

причем

$$\alpha_1 \xi_1^k + \dots + \alpha_n \xi_n^k = 1. \quad (3.2.32)$$

Из (3.2.31) следует, что элементы

$$g^k = \xi_1^k g_1 + \xi_2^k g_2 + \dots + \xi_n^k g_n$$

образуют ограниченное множество в E , т. е.

$$\|g^k\| \leq c, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.2.33)$$

где c — некоторая положительная константа. Если рассмотреть n -мерное пространство векторов g , являющееся линейной оболочкой векторов g_1, \dots, g_n (пространство, натянутое на векторы g_1, \dots, g_n) с нормой, определяемой равенством

$$\|g\| = \|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\|,$$

то ограниченное конечномерное множество элементов $g^k, k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию (3.2.33), принадлежит компактному множеству, так как всякая сфера

конечного радиуса конечномерного пространства есть компактное в себе множество. Следовательно, существует такая подпоследовательность ξ^{km} , $m = 1, 2, \dots$, минимизирующей последовательности ξ^k , $k = 1, 2, \dots$, что существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (\xi_1^{km} g_1 + \xi_2^{km} g_2 + \dots + \xi_n^{km} g_n) = \\ = \xi_1^0 g_1 + \xi_2^0 g_2 + \dots + \xi_n^0 g_n. \end{aligned}$$

Но из этого равенства следует (см. доказательство теоремы 1), что

$$\begin{aligned} \|\xi_1^0 g_1 + \xi_2^0 g_2 + \dots + \xi_n^0 g_n\| = \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_1^{km} g_1 + \xi_2^{km} g_2 + \dots + \xi_n^{km} g_n\|, \end{aligned}$$

а также

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_i^{km} = \xi_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 \xi_1^0 + \alpha_2 \xi_2^0 + \dots + \alpha_n \xi_n^0 = 1.$$

Таким образом, доказано, что существует такой вектор ξ^0 , что

$$\min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\| = \|\xi_1^0 g_1 + \dots + \xi_n^0 g_n\| = \frac{1}{\lambda_n}$$

при условии

$$\xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_n \alpha_n = \xi_1^0 \alpha_1 + \dots + \xi_n^0 \alpha_n = 1.$$

Отсюда легко видеть, что

а) $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$,

б) $\lambda_n(a\alpha_1, \dots, a\alpha_n) = |a| \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a — число,

в) $\lambda_n(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \leq$
 $\leq \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \lambda_n(\beta_1, \dots, \beta_n).$

Если ввести в рассмотрение n -мерное пространство E_n векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то в силу свойств а), б), в) функ-

ции $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ можно определить норму $\|\alpha\|$ с помощью равенства

$$\|\alpha\| = \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Но в силу конечномерности пространства E_n найдутся две константы $m > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$m \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} < \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < M \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \quad (3.2.34)$$

и функция $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ будет непрерывной функцией своих аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в точке $\alpha = 0$.

Покажем, что функция $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является непрерывной функцией. Для этого воспользуемся следующим соотношением:

$$\|\|\alpha + \beta\| - \|\alpha\|\| \leq \|\beta\|,$$

которое следует из основного свойства нормы

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

Действительно, доказываемое неравенство эквивалентно двум неравенствам

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

и

$$-\|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\| - \|\alpha\|.$$

Первое из этих неравенств выполняется по определению, а второе неравенство можно переписать в виде

$$\|\alpha\| \leq \|\alpha + \beta\| + \|\beta\|.$$

Но последнее неравенство также непосредственно следует из основного свойства нормы (длина любой стороны треугольника меньше или равна сумме длин двух других сторон).

Теперь непрерывность функции $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ следует из неравенства в произвольной точке $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\begin{aligned} |\lambda_n(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_n + \Delta\alpha_n) - \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| &\leq \\ &\leq |\lambda_n(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_n)|. \end{aligned}$$

так как в силу непрерывности функции $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ при $\alpha = 0$ имеем, что $\lambda_n(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_n) \rightarrow 0$ при $\max_{i=1, \dots, n} |\Delta\alpha_i| \rightarrow 0$.

Наконец, отметим еще одно свойство функции $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \dots, \alpha_n)$. Так как при увеличении размерности пространства E_n минимум в (3.2.26) может только уменьшаться, то

$$\text{г) } \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \lambda_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \text{ при } m > n.$$

| Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. Докажем сначала необходимость. Пусть линейный функционал $f(g)$ является решением l -проблемы моментов. Тогда, умножая k -е равенство (3.1.15) на ξ_k и суммируя почленно, получим:

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k \right| = \left| f \left(\sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right) \right| \leq \|f\| \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\| \leq l \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\|.$$

Отсюда в силу (3.2.27) получим:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\| \geq \frac{1}{l}$$

и, следовательно,

$$\min_{\xi} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\| = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \geq \frac{1}{l},$$

где \min берется по всем ξ , удовлетворяющим условию (3.2.27). Таким образом, необходимость доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что условие (3.2.30) выполнено. Рассмотрим n -мерное линейное пространство E_n , состоящее из элементов вида

$$g = \sum_{k=1}^n \xi_k g_k.$$

Введем в E_n линейный функционал

$$\varphi(g) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$$

с нормой (вспомним (3.2.28))

$$\|\varphi\|_{E_n} = \max_{\|g\|=1} |\varphi(g)| = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Заметим, что максимум в последнем определении нормы в силу вышедоказанного в теореме 4 достигается.

Но согласно теореме Хана — Банаха [76] о продолжении линейного функционала в E_n существует линейный функционал $f_0(g)$ такой, что

$$\|f_0(g)\| = \|\varphi\|_{E_n} = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq l,$$

и $f_0(g) = \varphi(g)$ при $g \in E_n$ и, следовательно,

$$f_0(g_i) = \varphi(g_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, линейный функционал $f_0(g)$ является искомым функционалом, дающим решение n -мерной l -проблемы моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве.

Перейдем теперь к решению бесконечномерной l -проблемы моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве. А именно, докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 5. Пусть линейное нормированное пространство является еще и сепарабельным. Тогда, для того чтобы существовал определенный на этом пространстве линейный функционал, дающий решение бесконечномерной l -проблемы моментов, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение n -мерной l -проблемы для любого $n = 1, 2, \dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $f_n(g)$ — линейный функционал, дающий решение n -мерной l -проблемы, т. е.

$$f_n(g_k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и для любого n норма этого функционала будет ограничена числом l , т. е.

$$\|f_n(g)\| \leq l.$$

Таким образом, нормы линейных функционалов $f_n(g)$ ограничены в совокупности. Поэтому в силу сепарабельности пространства E можно заключить, что последовательность функционалов $f_1(g), f_2(g), \dots$ содержит слабосходящуюся

подпоследовательность, которая сходится к некоторому линейному функционалу $f(g)$, обладающему свойством

$$f(g_k) = \alpha_k$$

для всех k , и $\|f(g)\| \leq l$. Теорема полностью доказана.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно свойство функции $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Предположим, что рассматривается совокупность линейных нормированных пространств E_T , зависящих от некоторого (не обязательно числового) параметра T . (Например, в случае пространства $L[0, T]$ таким параметром может быть правый конец отрезка $[0, T]$.)

Тогда норма в этом пространстве также зависит от этого параметра T . Эту зависимость нормы элементов $g \in E_T$ от параметра T будем обозначать через $\|g\|_T$. При этом условии функция $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ будет зависеть еще и от параметра T . Обозначим

$$\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, T) = \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\|_T \quad (3.2.35)$$

при условии

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n = 1. \quad (3.2.36)$$

Теорема 6. Если норма $\|g\|_T$ и числа $\alpha_1(T), \dots, \alpha_n(T)$ являются непрерывными функциями параметра T , то и $\lambda_n(\alpha_1(T), \dots, \alpha_n(T), T)$ также является непрерывной функцией T .

Доказательство. С одной стороны, при постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеем:

$$\begin{aligned} |\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, T + \Delta T) - \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, T)| &= \\ &= \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\|_{T+\Delta T} - \\ &- \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n\|_T \leq \|\xi_1^0 g_1 + \dots + \xi_n^0 g_n\|_{T+\Delta T} - \\ &- \|\xi_1^0 g_1 + \dots + \xi_n^0 g_n\|_T, \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

где ξ_1^0, \dots, ξ_n^0 есть решение задачи (3.2.26) при условии (3.2.27). Следовательно, при постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ левая часть равенства (3.2.37) стремится к нулю при $\Delta T \rightarrow 0$. С другой стороны, как было показано ранее, решение $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ непрерывно зависит от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

которые по условию теоремы в свою очередь сами непрерывно зависят от параметра T . Таким образом, теорема доказана.

Для определения вида оптимального управляющего воздействия в общем случае необходимо ввести некоторые новые понятия.

Экстремальным элементом данного линейного функционала f будем называть такой ненулевой элемент g , для которого выполняется равенство

$$|f(g)| = \|f\| \cdot \|g\|. \quad (3.2.38)$$

Линейный функционал f , экстремальные элементы которого отличаются друг от друга лишь скалярными множителями, называется *нормальным*. Можно показать, что для каждого элемента g существует линейный функционал $f \in E^*$, имеющий этот элемент в качестве экстремального.

Элемент g называется *нормальным*, если функционал f определяется равенством (3.2.38) с точностью до скалярного множителя.

Смысл экстремального элемента \bar{g} заключается в том, что значение функционала на любом элементе g , принадлежащем сфере

$$\|g\| \leq \|g\|,$$

не превосходит его значения на экстремальном элементе.

Это легко понять, если вспомнить определение нормы линейного функционала.

Теперь можно установить ряд теорем, важных для решения l -проблемы моментов.

Теорема 7. Для того чтобы элемент $g = \sum_{k=1}^n \xi_k g_k$,

где $\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k = 1$, был минимизирующим элементом задач (3.2.26), (3.2.27) или (3.2.28), (3.2.29), необходимо и достаточно, чтобы элемент g был экстремальным элементом какого-либо произвольно выбранного минимального по норме функционала f , дающего решение задачи

$$f(g_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.39)$$

$$\|f\| = \lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (3.2.40)$$

Если, кроме того, для любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ элемент $g = \sum_{k=1}^n \xi_k g_k$ нормален, то система (3.2.39) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Пусть f_0 — некоторое решение системы (3.2.39) и $h = \sum_{k=1}^n \eta_i g_i$ — некоторый минимизирующий элемент задачи (3.2.26), (3.2.27), т. е.

$$\|h\| = \left\| \sum_{k=1}^n \eta_i g_i \right\| = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$$

при условии

$$\sum_{k=1}^n \alpha_i \eta_i = 1,$$

тогда

$$1 = \sum_{k=1}^n \alpha_i \eta_i = f_0(h) = \|f_0\| \|h\|, \quad (3.2.41)$$

так как $\|f_0\| = \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Обратно, пусть $h = \sum_{k=1}^n \eta_i g_i$, где $\sum_{k=1}^n \alpha_i \eta_i = 1$ есть экстремальный элемент функционала f_0 . Тогда выполняется равенство (3.2.41) и, следовательно,

$$\|h\| = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}.$$

Пусть теперь, кроме того, h является нормальным элементом. Тогда согласно определению нормального элемента линейный функционал f , дающий решение системы (3.2.39), определяется с точностью до скалярного множителя. Но так как $f(h) = \sum_{k=1}^n \alpha_i \eta_i = 1$, то этот скалярный множитель определяется однозначно. Теорема доказана.

Отсюда легко получить два следствия.

Теорема 8. Если система (3.2.39) имеет хотя бы одно нормальное решение, то решение $\sum_{k=1}^n \xi_k g_k$ задачи (3.2.26), (3.2.27) определяется однозначно.

Теорема 9. Если задача (3.2.26), (3.2.27) имеет два различных решения, то она имеет по крайней мере континуум различных решений.

Доказательство. Теорема 8 очевидна. Докажем теорему 9. Действительно, пусть

$$h_1 = \sum_{k=1}^n \eta'_k g_k, \quad h_2 = \sum_{k=1}^n \eta''_k g_k$$

— два различных решения упомянутой задачи, т. е. $\|h_1\| = \lambda_n^{-1}$, $\|h_2\| = \lambda_n^{-1}$. Тогда при любых a и b ($a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$) элемент $h = ah_1 + bh_2 = \sum_{k=1}^n \eta_k g_k$ есть также решение этой задачи, ибо

$$\sum_{k=1}^n \eta_k \alpha_k = a \left(\sum_{k=1}^n \eta'_k \alpha_k \right) + b \left(\sum_{k=1}^n \eta''_k \alpha_k \right) = a + b = 1$$

и

$$\begin{aligned} \|h\| &= \|ah_1 + bh_2\| \leq a\|h_1\| + b\|h_2\| = \\ &= a\lambda_n^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + b\lambda_n^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \lambda_n^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Но так как $\|h\|$ не может быть строго меньше λ_n^{-1} (λ_n^{-1} — нижняя грань $\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\|$ при условии $\sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1$) получаем, что $h = \lambda_n^{-1}$, и, следовательно, h есть также решение задачи (3.2.26), (3.2.27).

Аналогичное доказательство можно привести также для системы (3.2.28), (3.2.29), когда эта система имеет два линейно независимых решения f_1 и f_2 .

Наконец, докажем еще одно важное свойство решений рассматриваемой проблемы.

Теорема 10. Для того чтобы любой линейный функционал $f \in E^*$ вовсе не имел экстремальных элементов или чтобы его экстремальные элементы отличались друг от друга лишь скалярными множителями (т. е. чтобы f был нормален), необходимо и достаточно, чтобы пространство E было строго нормированным, т. е. чтобы для любых двух элементов g и h в соотношении (неравенство треугольника)

$$\|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$$

знак равенства имел место тогда и только тогда, когда $g = \lambda h$ или $h = \lambda g$, где $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Действительно, пусть

$$\|g_1 + g_2\| = \|g_1\| + \|g_2\|$$

и элементы g_1 и g_2 линейно независимы. Рассмотрим функционал $f(g)$, имеющий элемент $g = g_1 + g_2$ в качестве экстремального. Тогда для этого функционала имеем:

$$|f(g_1 + g_2)| = \|f\| \|g_1 + g_2\| = \|f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_2\|.$$

Но, с другой стороны, в силу того, что модуль суммы не больше суммы модулей, получим:

$$|f(g_1 + g_2)| \leq |f(g_1)| + |f(g_2)| \leq \|f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_2\|.$$

Сравнивая эти соотношения с предыдущим, получим:

$$|f(g_1)| + |f(g_2)| = \|f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_2\|.$$

Поскольку всегда выполняется

$$|f(g_1)| \leq \|f\| \|g_1\| \text{ и } |f(g_2)| \leq \|f\| \|g_2\|,$$

то предыдущее равенство может выполняться лишь при условиях

$$|f(g_1)| = \|f\| \|g_1\| \text{ и } |f(g_2)| = \|f\| \|g_2\|.$$

Таким образом, условие строгой нормированности пространства E есть необходимое условие отсутствия у любого функционала $f \in E^*$ двух линейно независимых экстремальных элементов. (Напомним, например, что простран-

ство C всех непрерывных функций не является строго нормированным пространством.)

Покажем теперь, что условие строгой нормированности пространства E является также и достаточным.

Действительно, пусть g_1 и g_2 — экстремальные элементы функционала f . Тогда

$$f(g_1) = \|f\| \|g_1\| \quad \text{и} \quad f(g_2) = \|f\| \|g_2\|$$

и, следовательно,

$$\|f\| (\|g_1\| + \|g_2\|) = f(g_1 + g_2) \leq \|f\| \|g_1 + g_2\|.$$

Из этого неравенства и из неравенства треугольника для элементов g_1 и g_2 получаем:

$$\|g_1 + g_2\| \leq \|g_1\| + \|g_2\| \leq \|g_1 + g_2\|,$$

откуда следует, что

$$\|g_1 + g_2\| = \|g_1\| + \|g_2\|.$$

Из условия строгой нормированности заключаем, что g_1 и g_2 линейно зависимы.

Рассмотрим теперь приложение общих результатов l -проблемы моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве к некоторым конкретным функциональным пространствам, встречающимся на практике.

Пусть D — некоторая область m -мерного евклидова пространства и $L_r^{p'}(D)$ — линейное пространство всех измеримых на D вектор-функций $g(t) = (g_1(t), \dots, g_r(t))$ с нормой

$$\|g\| = \left(\int_D \sum_{k=1}^r |g_k(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad p' \geq 1, \quad t \in D.$$

Здесь пространство E совпадает с пространством $L_r^{p'}(D)$. Как известно, всякий линейный функционал

$$f \in E^* = (L_r^{p'}(D))^* = L_r^p(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

имеет следующее аналитическое выражение:

$$f(g) = \int_D \sum_{i=1}^r g_i(t) u_i(t) dt,$$

где $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ — некоторая измеримая вектор-функция, в существенном ограниченная. При этом норма функционала f вычисляется по формуле

$$\|f\| = \left(\int_D \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

В силу (3.2.38) условие экстремальности вектор-функции $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) \in L_r^{p'}(D)$ по отношению к функционалу f запишется в виде

$$\left| \int_D \sum_{k=1}^r g_k(t) u_k(t) dt \right| = \left(\int_D \sum_{k=1}^r |g_k(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \times \\ \times \left(\int_D \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2.42)$$

Но, как было показано ранее, последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$u_i(t) = C |g_i(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} g_i(t), \quad i=1, \dots, r, \quad p' > 1, \quad (3.2.43)$$

$$u_i(t) = C \operatorname{sign} g_i(t), \quad i = 1, \dots, r, \quad p' = 1, \quad t \in D',$$

где D' — множество тех точек $t \in D$, для которых $g_i(t) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, и C — произвольная постоянная величина.

В пространстве $L_r^{p'}(D)$ задачи (3.2.39), (3.2.40) и (3.2.26), (3.2.27) (соответственно А и Б) будут выглядеть следующим образом.

А. Задано n вектор-функций $g_k(t) = (g_{k1}(t), \dots, g_{kr}(t)) \in L_r^{p'}(D)$, $k = 1, \dots, n$. Найти необходимые и до-

статочные условия для чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $l \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 > 0, l > 0 \right)$, чтобы существовала измеримая вектор-функция $u(t) \in L_r^p(D)$, для которой

$$\int_D \sum_{i=1}^n g_{ki}(t) u_i(t) dt = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.44)$$

и

$$\left(\int_D \sum_{k=1}^r |u_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq l, \quad p \geq 1. \quad (3.2.45)$$

Б. Задано n линейно независимых вектор-функций $g_k(t) = (g_{k1}(t), \dots, g_{kr}(t)) \in L_r^{p'}(D)$, $k = 1, 2, \dots, n$, n чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и число

$$l \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 > 0, \quad l > 0 \right).$$

Найти минимум

$$\min_{\xi} \left(\int_D \sum_{k=1}^r \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (3.2.46)$$

при условии

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1. \quad (3.2.47)$$

При $E = L_r(D)$ значительный интерес для практических задач представляет случай, когда никакая из линейных комбинаций

$$\sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t), \quad i = 1, \dots, r$$

(при постоянных ξ_1, \dots, ξ_n и $\sum_{k=1}^n \xi_k^2 > 0$), не обращается

в нуль ни на каком множестве точек, имеющем меру больше нуля. Такую систему вектор-функций $g_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, будем называть вполне независимой.

Докажем следующую теорему.

Теорема 11. Совокупность n вектор-функций $g_k(t) \in L_r(D)$, $k = 1, \dots, n$, вполне независима тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k g_{k1}(t), \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k g_{kr}(t) \right), \quad \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 > 0 \right)$$

является нормальным элементом пространства $L_r(D)$.

Доказательство. Действительно, в этом случае $p' = 1$ и, следовательно,

$$u_i(t) = C \operatorname{sign} g_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.2.48)$$

Поэтому вектор-функция $g(t) = (g_1(t), \dots, g_r(t))$ нормальна тогда и только тогда, когда разность $D \setminus D^0$ есть множество меры нуль, ибо в этом и только в этом случае вектор-функция $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ определяется условием (3.2.42) с точностью до постоянного скалярного множителя, а именно, по формуле (3.2.48).

Заметим тут же, что в случае $p' > 1$ однозначно определяется $u_i(t)$ также и тогда, когда $g_i(t) = 0$ на множестве положительной меры. А именно, в этом случае $u_i(t) = 0$ на этом множестве, т. е. функционал определяется однозначно.

Теперь легко сформулировать теорему, дающую условия разрешимости l -проблемы моментов для рассматриваемого пространства $L_r^{p'}(D)$.

Теорема 12. Пусть задано n линейно независимых вектор-функций $g_k(t) = (g_{k1}(t), \dots, g_{kr}(t)) \in L_r^{p'}(D)$, $k = 1, \dots, n$. Если $p' = 1$, то система $\{g_k(t)\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, является также вполне независимой, т. е. любая

линейная комбинация $\sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t)$ при $\sum_{k=1}^n \xi_k^2 > 0$ дает нормальную функцию. Тогда

а) для того чтобы система

$$\alpha_k = \int_D \sum_{i=1}^r g_{ki}(t) u_i(t) dt, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.2.49)$$

при условии

$$\left(\int_D \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq l, \quad p \geq 1$$

имела хотя бы одно решение $u(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{\xi} \left(\int_D \sum_{i=1}^r \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \leq \frac{1}{l}, \quad (3.2.50)$$

где \min берется по всем ξ_k , удовлетворяющим условию

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1;$$

б) для того чтобы задача А имела одно и только одно решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1. \quad (3.2.51)$$

При выполнении этого последнего условия решение $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ определяется по формуле

$$u_i(t) = l^{p'} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t) \quad (3.2.52)$$

$$i = 1, 2, \dots, r, 1 \leq p' < \infty,$$

где ξ_k есть решение задачи Б.

Доказательство. Утверждение а) следует непосредственно из теоремы 4. Утверждение б) также прямо следует из теоремы 8 и замечания после доказательства теоремы 11.

Полагая в формуле (3.2.43) $g_i(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t)$, получим решение (3.2.52). Теорема доказана.

Пусть область D представляет собой отрезок $[t_0, t_1]$ вещественной оси t (ось времени). Поставим задачу: при фиксированном l найти решение системы (3.2.49), соответствующее минимальному значению t_1 (точка t_0 — фиксирована). При этом допускается, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ также могут быть функциями, зависящими от параметра t_1 . При этих условиях справедлива следующая

Теорема 13. При решении только что поставленной задачи возможна следующая альтернатива: 1) задача не имеет решения ни при каком $t_1 \geq t_0$, 2) существует единственное решение этой задачи, которое дается формулой

$$u_i(t) = l^{p'} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t), \quad (3.2.53)$$

$$t_0 \leq t \leq t_1, i = 1, 2, \dots, r, 1 \leq p' < \infty,$$

где постоянные числа ξ_1, \dots, ξ_n являются решением задачи: найти

$$\min_{\xi} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_{ki}(t) \right|^{p'} dt = \frac{1}{[\lambda_n(\alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1))]^{p_1}} \quad (3.2.54)$$

при условии

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(t_1) \xi_k = 1, \quad (3.2.55)$$

где t_1 — наименьший корень уравнения

$$\lambda_n(\alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1)) = l. \quad (3.2.56)$$

Доказательство. Действительно, пусть существует вектор-функция $u(t) \in L_r^p(D)$, удовлетворяющая системе (3.2.49). Тогда в силу теоремы 4

$$\lambda_n(\alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1)) \leq l. \quad (3.2.57)$$

Но при $t_1 \rightarrow t_0$ в силу (3.2.50) и линейной независимости вектор-функций $g_k(t)$ величина $\lambda_n(\alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1)) \rightarrow \infty$.

Так как норма $\|g\| = \left[\int_{t_0}^{t_1} |g(t)|^p dt \right]^{1/p}$ непрерывно зависит от t_1 , то по теореме 6 $\lambda_n(\alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1))$ также непрерывно зависит от t_1 , откуда следует, что существует минимальный корень t_1 ($t_1 > t_0$) неравенства (3.2.57), совпадающий с минимальным корнем уравнения (3.2.56). Теорема доказана.

Следствие. Если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются константами, не зависящими от t_1 , и система вектор-функций $g_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, вполне независима, то при любом $l > 0$ всегда существует единственное решение $u(t)$ системы (3.2.49), которое дается формулой (3.2.53), где t_1 — минимальный возможный верхний предел интеграла в (3.2.54).

Доказательство. Так как система вектор-функций вполне независима, интеграл в (3.2.54) (при фиксированном n) будет строго возрастающей непрерывной функцией верхнего предела t_1 и $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow \infty$. Так как при $t_1 \rightarrow t_0$ величина $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

непрерывна, то найдется такое единственное наименьшее значение t_1 , при котором $\lambda_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = l$, что и требовалось доказать.

В заключение этого параграфа отметим еще одну особенность рассмотренного метода. На практике встречаются задачи, в которых ограничение, наложенное на управляющее воздействие, имеет несимметричный вид, а именно, например, вместо ограничения на модуль

$$|u(t)| \leq l \quad (3.2.58)$$

ограничение имеет несколько иной вид:

$$l_1 \leq u(t) \leq l_2, \quad l_1 < 0, \quad l_2 > 0. \quad (3.2.59)$$

В этом случае все результаты останутся в силе, если рассматривать линейные пространства с несимметричной нормой, удовлетворяющей следующим требованиям:

- 1) $\|g\| > 0$, если $g \neq 0$,
- 2) $\|\alpha g\| = \alpha \|g\|$ при $\alpha \geq 0$,
- 3) $\|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$.

Отличие от обычного определения симметричной нормы заключается в том, что в этом случае мы требуем, чтобы $\alpha \geq 0$, в то время как ранее α могло быть произвольным действительным числом. Поэтому, вообще говоря, несимметричная норма не обладает свойством симметрии:

$$\| -g \| \neq \| g \|.$$

Например, в случае, когда имеют место ограничения типа (3.2.59), в качестве нормы в пространстве E векторов следует принять величину

$$\|g\| = \int_0^T |g(t)| dt + \kappa \int_0^T g(t) dt,$$

где κ — фиксированное число, удовлетворяющее единственному условию $-1 < \kappa < 1$. При этом на функцию $u(t)$ в соответствии с (3.2.59) накладывается следующее ограничение:

$$(\kappa - 1)l \leq u(t) \leq (1 + \kappa)l,$$

где κ и l определяются равенствами

$$(\kappa - 1) l = l_1,$$

$$(\kappa + 1) l = l_2,$$

из которых получаем:

$$l = \frac{l_2 - l_1}{2}, \quad \kappa = \frac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1}.$$

Это положение мы используем в дальнейшем при расчете оптимальных управляющих воздействий в задаче о нагреве массивных тел в главе V.

Как видно из вышесказанного, несмотря на то, что уравнения (3.2.53) дают наиболее общий вид оптимального управляющего воздействия, все еще остается трудная вычислительная проблема, заключающаяся в том, чтобы найти минимум величины (3.2.54) при условии (3.2.55). Этой вычислительной задаче посвящен § 1 главы IV. Для определенных случаев эту проблему можно свести к хорошо известной и решенной задаче в теории приближенных вычислений. Например, для простоты рассмотрим случай, когда имеется одно скалярное управляющее воздействие $u(t)$. При этом подынтегральное выражение в (3.2.54) имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t).$$

Таким образом, требуется искать минимум

$$\min_{\xi_k} \left(\int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (3.2.60)$$

по всем ξ , удовлетворяющим условию

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i = 1. \quad (3.2.61)$$

Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$ (это можно принять, так как $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 > 0$), тогда из последнего равенства находим:

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha_1} - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \xi_i.$$

Подставляя это значение ξ_1 в (3.2.60), получим, что нужно найти:

$$\min_{\xi_2, \dots, \xi_n} \left(\int_0^T \left| h_1(t) + \sum_{i=2}^n \xi_i h_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (3.2.62)$$

где

$$h_1(t) = \frac{1}{\alpha_1} g_1(t), \quad h_i(t) = g_i(t) - \frac{1}{\alpha_1} g_1(t), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

и на числа $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ уже не наложено никаких дополнительных ограничений.

Отсюда следует, что задача нахождения минимума выражения (3.2.62) эквивалентна задаче аппроксимации известной функции $h_1(t)$ линейной комбинацией

$$\sum_{i=2}^n \xi_i h_i(t),$$

где $h_i(t)$, $i = 2, 3, \dots, n$ — также известные функции. При $p' = 2$ это соответствует хорошо изученной проблеме квадратичного приближения, где особенно полезны полиномы Лежандра, при $p' = 1$ можно использовать полиномы Чебышева.

Как видно из вышесказанного, для того чтобы использовать функциональный подход к проблеме оптимального по быстродействию управления, необходимо изучить методы приближенных вычислений, которые дают ключ к решению проблемы. С другой стороны, можно найти программу для вычислительной машины с целью получения величин ξ_i и, следовательно, оптимального управления $u(t)$. Когда для решения проблемы оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина, возникает также дополнительная математическая проблема, сводящаяся к решению некоторой двуточечной краевой задачи,

которая представляет значительные трудности для решения на вычислительной машине.

Как будет показано в следующем параграфе, в случае линейных уравнений (в том числе линейного функционала и линейных краевых условий) проблема решения возникающей краевой задачи полностью эквивалентна определению параметров ξ_1, \dots, ξ_n в задаче (3.2.54).

Рассмотрим теперь бесконечномерную l -проблему моментов. В связи с этим рассмотрим три задачи.

Задача I. Пусть задана система линейно независимых функций $g_i(t)$, $a \leq t \leq b$, $i = 1, 2, \dots$; $g_i \in L_p$, и числа c_i ; $i = 1, 2, \dots$

Требуется найти функцию $f(t)$ такую, что

$$\int_a^b g_i(t) u(t) dt = c_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0, \quad l > 0,$$

$$\|u(t)\|_{p'} \leq l, \quad u(t) \in L_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p' > 1.$$

Задача II. Задана система линейно независимых функций

$$g_i(t) \in L_p, \quad i = 1, 2, \dots$$

Найти линейный функционал χ^* такой, что

$$\chi(g_i) = c_i, \quad \|\chi\| \leq l, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0, \quad l > 0.$$

Задача III. Задана система линейно независимых функций

$$g_i(t), \quad a \leq t \leq b, \quad i = 1, 2, \dots$$

Найти минимизирующий элемент $\psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i(t)$ такой, что

$$\frac{1}{\lambda} = \|\psi\|_p = \inf_{\xi} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right\|$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0, \quad l > 0.$$

Задача I является частным случаем задачи II. Поэтому дальше будут рассматриваться задачи II и III и их взаимосвязь.

Условие существования решения задачи II гарантируется следующей теоремой.

Теорема 14. *Для того чтобы существовало решение задачи II, необходимо и достаточно выполнение условия $l > \lambda$.*

Доказательство. Определим функционал χ на элементе g_i , $i = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\chi(g_i) = c_i.$$

Таким образом, линейный функционал χ определен на подпространстве, образованном линейными комбинациями g_i .

Функционал χ по теореме Хана — Банаха [76] можно продолжить на все пространство L_p , не увеличивая нормы χ . Итак, необходимым и достаточным условием того, чтобы χ был решением задачи II, есть условие $\|\chi\| \leq l$.

Покажем, что $\|\chi\| = \lambda$. Действительно,

$$\lambda = \frac{1}{\inf_{\xi_i} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right\|} = \sup_{\xi_i} \frac{\chi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right)}{\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right\|},$$

где инфимум и супремум вычисляются при условии

$$\chi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right) = 1.$$

Пусть

$$\sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} = M > 0.$$

Это справедливо для линейного непрерывного функционала. Покажем, что

$$\sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} \geq \sup \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|}. \quad (3.2.63)$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое ψ , что $M - \chi(\psi) < \varepsilon$, $\|\psi\| = 1$, $\chi(\psi) = c > 0$ (c — число).

Рассмотрим $\psi_1 = \frac{\psi}{c}$, $\chi(\psi_1) = 1$, $\|\psi_1\| = \frac{1}{c}$, откуда

$$M - \frac{\chi(\psi_1)}{\|\psi_1\|} < \varepsilon$$

и, следовательно, (3.2.63) доказано. Теперь покажем, что

$$\sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} \geq \sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|}. \quad (3.2.64)$$

Пусть

$$\sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} = M_1 > 0.$$

Величина M_1 может быть как конечным числом, так и ∞ . Ограничимся случаем $M_1 \neq \infty$. Для $\varepsilon > 0$ найдем ψ такое, что $M_1 - \frac{1}{\|\psi\|} < \varepsilon$, $\|\psi\| = c$.

Рассмотрим $\psi_1 = \frac{\psi}{c}$, $\|\psi_1\| = 1$, $\chi(\psi_1) = \frac{1}{c}$, откуда $M_1 - \frac{\chi(\psi_1)}{\|\psi_1\|} = M_1 - \frac{1}{c} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Заметим, что при $1 < p < \infty$ задача III имеет решение. Действительно, имеем

$$\lambda = \sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} = \sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|}.$$

Так как пространство L_p рефлексивно [143] и, следовательно, сфера в этом пространстве слабо компактна, то норма функционала χ реализуется на некотором элементе $\psi \in L_p$. Этого, однако, нельзя утверждать для L_∞ и L_1 . Теорема доказана.

Теорема 15. Для того чтобы элемент $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i$ $\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i = 1 \right)$ был минимизирующим элементом в задаче III,

необходимо и достаточно, чтобы элемент ψ был экстремальным элементом какого-либо решения задачи II:

$$\chi(g_i) = c_i, \|\chi\| = l = \lambda.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть ψ — решение задачи III. Тогда

$$\chi(\psi) = \lambda \|\psi\| = \|\chi\| \|\psi\|$$

и необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть ψ — экстремальный элемент задачи II, т. е.

$$|\chi(\psi)| = \|\chi\| \|\psi\| = 1.$$

Отсюда

$$\|\chi\| = \frac{1}{\|\psi\|},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 16. *Всякий экстремальный элемент ψ , $\psi \in L_p$, $1 < p < \infty$ является нормальным.*

Доказательство. Пусть имеются два функционала χ_1 и χ_2 такие, что

$$|\chi_1(\psi)| = \|\chi_1\| \|\psi\|,$$

$$|\chi_2(\psi)| = \|\chi_2\| \|\psi\|.$$

Рассматривая ψ как элемент пространства L_p , заключаем, что χ_1 и χ_2 являются экстремальными элементами для $\psi \in L_q^*$. Покажем, что $\chi_1 = c\chi_2$.

Отметим, что, в частности, пространство L_p , $1 < p < \infty$ является строго нормированным пространством, т. е. в формуле $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $y = \lambda x$ или $x = \lambda y$, $\lambda \geq 0$. Для строго нормированных пространств имеет место следующий факт: экстремальные элементы любого линейного функционала отличаются друг от друга скалярным множителем. Следовательно, ψ есть нормальный элемент. Теорема доказана.

Используя выше сказанное, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 17. Если ψ_0 — решение задачи III в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, то

$$\chi(\psi) = \frac{1}{\int_a^b |\psi_0(t)|^p dt} \int_a^b \psi(t) |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sign} \psi_0(t) dt$$

есть решение задачи II с учетом того, что

$$\int_a^b |\psi_0(t)|^p dt = \frac{1}{l^p} \quad (3.2.65)$$

— решение задачи I будет иметь следующий вид:

$$u(t) = l^p |\psi_0(t)|^{p/p'} \operatorname{sign} \psi_0(t).$$

Доказательство. Пусть $g_0 \in L_p$, $1 < p < \infty$, есть экстремальный элемент для совокупности линейных непрерывных функционалов χ_α . Возьмем какой-нибудь линейный функционал χ_{α_0} из этой совокупности. Получим:

$$\chi_{\alpha_0} y = \int_a^b \chi_{\alpha_0}^*(t) y(t) dt,$$

где $\chi_{\alpha_0}^* \in L_{p'}$. Тогда

$$|\chi_{\alpha_0}^* g_0| = \left| \int_a^b \chi_{\alpha_0}^*(t) |g_0(t)|^{\frac{1}{p'}} dt \right| \left| \int_a^b |g_0(t)|^p dt \right|^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая

$$|\chi_{\alpha_0}^*|^{p'} = |g_0|^p,$$

получим:

$$\chi_{\alpha_0}(t) = |g_0(t)|^{p/p'} \operatorname{sign} g_0(t).$$

Следовательно,

$$\chi_{\alpha_0}^*(y) = \int_a^b y(t) |g_0(t)|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sign} g_0(t) dt.$$

Отсюда для любого функционала $\chi_\alpha y$ будем иметь:

$$\chi_\alpha(y) = c_\alpha \int_a^b y(t) |g_0(t)|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sign} g_0(t) dt,$$

где c_α — константа.

Пусть теперь ψ_0 есть решение задачи III, тогда по теореме 15 ψ_0 есть экстремальный элемент некоторого решения задачи II. По теореме 16 ψ_0 нормален для χ . Отсюда

$$\chi(\psi) = c \int_a^b \psi(t) |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sign} \psi_0(t) dt.$$

Условие $\|\chi\| = \lambda = l$ определяет константу c однозначно. Отсюда

$$c = \frac{1}{\int_a^b |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} dt}$$

и, следовательно, функционал

$$\chi(\psi) = \frac{1}{\int_a^b |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} dt} \int_a^b \psi(t) |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sign} \psi_0(t) dt$$

есть решение задачи II. Отсюда решение задачи I имеет следующий вид:

$$u(t) = \frac{1}{\int_a^b |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} dt} |\psi_0(t)|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sign} \psi_0(t).$$

Если $p = 1$ и элемент ψ_0 есть решение задачи III, то утверждение, что линейный функционал записывается в виде

$$\chi(\psi) = c \int_a^b \psi(t) \operatorname{sign} \psi_0(t) dt,$$

вообще говоря, неверно. Это можно утверждать в случае, если мера множества нулей функции $\psi_0(t)$ не равна нулю. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одну важную задачу оптимального управления, сводящуюся к некоторой проблеме моментов; а именно, рассмотрим задачу оптимального управления при ограничениях, наложенных на управляющие воздействия и координаты системы.

Пусть управляемая система с распределенными параметрами описывается соотношением

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3.2.66)$$

($0 \leq x \leq S, 0 \leq t \leq T$). Здесь x — пространственная координата (распределенный параметр), а t — время; $u(t)$ — скалярная управляющая функция, удовлетворяющая условию $|u(t)| \leq l, 0 \leq t \leq T$; $K(x, t)$ — заданная функция двух переменных.

Пусть задано еще одно соотношение

$$P(x, t) = \int_0^t F(x, t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.2.67)$$

где $F(x, t, \tau)$ — также заданная функция ($0 \leq x < S, 0 \leq t \leq T$).

Задача оптимального по быстродействию управления при ограничениях на управляющие воздействия вида $|u(t)| \leq l$ и координаты системы $|P(x, t)| \leq l, 0 \leq x \leq S, 0 \leq t \leq T$, формулируется следующим образом.

Пусть задана также функция $Q^*(x), 0 \leq x \leq S$. Требуется найти такое допустимое управляющее воздействие $u(t), |u(t)| \leq l$, чтобы выполнялись условия

$$Q^*(x) = \int_0^T K(x, T, \tau) u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq S, \quad (3.2.68)$$

$$|P(x_1, t)| = \left| \int_0^t F(x_1, t, \tau) u(\tau) d\tau \right| \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2.69)$$

где x_1 — некоторая фиксированная точка отрезка $[0, S]$, причем время T должно быть минимальным. Для дискретных систем с сосредоточенными параметрами сведение подобной задачи к проблеме моментов было выполнено в [33].

Данная задача имеет большое практическое значение, так как во многих реальных управляемых системах имеют место ограничения, наложенные не только на управляющие воздействия, но и на координаты системы. Например, как отмечалось во введении, в задаче о нагреве массивного тела могут быть ограничены величины внутренних напряжений, которые могут быть выражены через управляющие воздействия в форме (3.2.69).

Сформулированную задачу также можно свести к l -проблеме моментов.

Действительно, рассмотрим следующую задачу. Задано n ($n \leq \infty$) линейно независимых элементов g_1, \dots, g_n из некоторого линейного нормированного пространства E . Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $l \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 > 0, l > 0 \right)$, для того чтобы существовал линейный функционал $\Lambda(g)$, удовлетворяющий соотношениям

$$\Lambda(g_k) = \alpha_k, \quad \|\Lambda\| \leq l, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.70)$$

Как было показано выше, эта задача тесно связана с другой задачей, существование решения которой необходимо и достаточно для существования решения первой задачи. А именно, найти

$$\min_{\xi_k} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\| = \lambda \leq \frac{1}{l} \quad (3.2.71)$$

при дополнительном условии

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1. \quad (3.2.72)$$

Задача оптимального управления без ограничения (3.2.69) сводится к l -проблеме моментов, выражающейся равенствами (3.1.15) и (3.1.16).

В этой задаче линейный функционал имел вид

$$\Lambda(g) = \int_0^T g(T, \tau) u(\tau) d\tau, \quad \|\Lambda\| = \max_{t \in [0, T]} |u(t)|. \quad (3.2.73)$$

Задачу с учетом ограничения (3.2.69) можно свести к рассмотренной выше l -проблеме, если за норму линейного функционала принять число

$$\| \Lambda \| = \max_{t \in [0, T]} \left(u(t), \int_0^t F(x_1, t, \tau) u(\tau) d\tau \right). \quad (3.2.74)$$

Теперь проблема сводится к минимизации выражения (3.2.71). Однако явный вид этого выражения не столь прост, как в случае задачи без ограничений на координаты системы, где норма элемента сопряженного пространства равняется интегралу от модуля некоторой функции.

Можно показать, что норма в E имеет вид

$$\| g \| = \inf_{\psi} \left\{ \int_0^T \left| g(\tau) - \int_{\tau}^T F(x_1, t, \tau) d\psi(t) \right| d\tau + \int_0^T |d\psi(t)| \right\}, \quad (3.2.75)$$

где нижняя грань берется по мере $\psi(t)$.

Ясно, что в этом случае вычислительные трудности, связанные с минимизацией выражения (3.2.75), сильно возрастают, так как приходится искать минимум функции не только по возможным значениям конечного числа параметров, но и по возможным значениям меры $\psi(t)$.

Формула (3.2.75) легко обобщается на случай, когда ограничена не одна, а несколько координат системы.

Таким образом, рассмотренные выше методы дают единую математическую процедуру, позволяющую вычислять оптимальные управляющие воздействия, вне зависимости от их количества и наличия ограничений на промежуточные координаты. Правда, в последнем случае вычисления усложняются. Рассмотренный метод позволяет единообразно подходить к решению задач оптимизации систем как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами. Необходимая информация об управляемой системе в обоих случаях также единообразна и сводится к знанию собственных функций системы.

В заключение отметим, что рассмотренный метод применим в том случае, когда ограничения, наложенные на

управления и координаты имеют более сложный вид, нежели ограничения по модулю. Вообще говоря, вектор управления и координат может принадлежать произвольной замкнутой выпуклой области, имеющей внутренние точки.

§ 3. Применение метода моментов для синтеза оптимальных систем

В этом параграфе мы рассмотрим применение общих положений, изложенных в предыдущем параграфе. Начнем с типовой задачи оптимального управления объектом, движение которого описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) q_j + \sum_{k=1}^r b_{ik}(t) u_k + c_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3.1)$$

где q_1, \dots, q_n — координаты изображающей точки движения управляемого объекта в фазовом пространстве системы (3.3.1), u_1, \dots, u_r — управляющие воздействия, прилагаемые к объекту, $a_{ij}(t), b_{ik}(t), c_i(t)$ — известные непрерывные функции времени, $i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r$.

Если ввести матричные обозначения

$$\left. \begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}, \\ A(t) &= (a_{ij}(t)), \quad B(t) = (b_{ik}(t)), \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2)$$

то систему (3.3.1) можно переписать в виде

$$\dot{q} = A(t) q + B(t) u + C(t), \quad (3.3.3)$$

где $\dot{q} = dq/dt$. Иногда мы будем опускать аргумент t при обозначении матриц $A(t), B(t)$ и других.

Кроме этого, заданы начальное состояние системы (3.3.1) $q_0 = q(t_0)$ и движущаяся в фазовом пространстве точка

$$q^*(t) = \begin{pmatrix} q_1^*(t) \\ \vdots \\ q_n^*(t) \end{pmatrix}.$$

Задача оптимального управления заключается в отыскании такого управления $u(t)$, чтобы изображающая точка системы (3.3.1) попала в точку $q^*(t)$ за наименьшее возможное время $T = t_1 - t_0$, причем должно выполняться ограничение

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq l, \quad (3.3.4)$$

где l — заданное положительное число и $p \geq 1$.

Случай $p = \infty$ соответствует ограничению

$$\max_{[t_0, t_1]} (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_r|) \leq l. \quad (3.3.5)$$

Управление $u(t)$, удовлетворяющее последним неравенствам, будем называть допустимым.

Напомним, что случай $p = 1$ соответствует ограничению общей площади графиков во времени компонент управления (ограничение суммарного импульса), а при $p = 2$ ограничивается общая энергия входного сигнала в течение интервала времени управления. Случаи $p = 1$ и $p = 2$ важны, когда каждое входное воздействие $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, расходует некоторое вещество или соответственно энергию от общего источника, емкость которого ограничена. Например, в случае управления горением в ракетном двигателе управления $u_i(t)$ могут представлять собой расход топлива в различных камерах сгорания ракеты. В этом случае общая площадь графика входного воздействия дает значение общего расхода топлива, что является важной характеристикой работы двигателя.

Как известно, решение дифференциального уравнения (3.3.3) при заданном $u = u(t)$ можно представить в виде

$$q(t) = \Phi(t) q_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Psi(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Psi(\tau) c(\tau) d\tau, \quad (3.3.6)$$

где $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))_1^n$ — матрица фундаментальных решений однородной системы

$$\dot{q} = Aq, \quad (3.3.7)$$

соответствующей системе (3.3.3), а $\Psi(t)$ — матрица, обратная к матрице $\Phi(t)$, т. е.

$$\Psi(t) = \Phi^{-1}(t). \quad (3.3.8)$$

Матрицу $\Psi(t)$ можно также определить как матрицу фундаментальных решений системы линейных дифференциальных уравнений, сопряженной к системе (3.3.7)

$$\dot{q} = -A'q. \quad (3.3.9)$$

Заметим, что из теории систем линейных дифференциальных уравнений следует, что

$$\Psi(t) = \Phi(-t). \quad (3.3.10)$$

Предположим, что в некоторый момент времени $t > t_0$ осуществилось равенство

$$q(t) = q^*(t). \quad (3.3.11)$$

Учитывая, что матрица $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$, обратная матрице фундаментальной системы решений $\Phi(t)$, не обращается в нуль ни в одной точке интервала $[t_0, t]$ (матрица $\Psi(t)$ сама является матрицей фундаментальных решений системы (3.3.9)), умножим слева обе части равенства (3.3.6) на $\Phi^{-1}(t)$ и в силу (3.3.8) получим, что для выполнения равенства (3.3.11) необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t G(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.3.12)$$

где

$$\alpha(t) = \Psi(t) q^*(t) - \int_{t_0}^t \Psi(t) c(t) dt - q_0, \quad (3.3.13)$$

$$G(t) = \Psi(t) B(t).$$

В частности, когда возмущающие воздействия отсутствуют, $c(t) \equiv 0$ и изображающую точку системы надо

привести в начало координат; функция $\alpha(t)$ становится константой:

$$\alpha(t) = -q_0$$

и равенство (3.3.12) принимает вид

$$-q_0 = \int_{t_0}^{t_1} G(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Тогда на основании теоремы 2 § 2 этой главы оптимальное управление $u(t)$ выражается следующей формулой:

$$u(t) = l^{p'} |\xi G(t)|^{p'-1} \text{sign } \xi G(t) \quad (3.3.14)$$

(это равенство надо понимать как векторное), где вектор ξ^0 есть решение следующей задачи:

$$\min_{\xi} \int_0^T |\xi G(t)|^p dt = \frac{1}{l^p}$$

при условии

$$-\xi q_0 = 1. \quad (3.3.15)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров задач оптимального управления, которые решаются с помощью метода моментов.

Пример 1. Пусть управляемая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = u. \quad (3.3.16)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, удовлетворяющее условию

$$-l \leq u(t) \leq l, \quad (3.3.17)$$

чтобы система (3.3.16) из начального состояния при $t_0 = 0$

$$q_1(0) = q_{10}, \quad q_2(0) = q_{20} \quad (3.3.18)$$

перешла в начало координат за минимальное время T .

Пользуясь формулами (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14), сведем решение этой задачи оптимального управления к проблеме моментов.

Матрица фундаментальных решений $\Phi = (\Phi_{ij})$ однородной системы

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = 0,$$

соответствующей системе (3.3.16), и обратная ей матрица $\Phi^{-1} = (\Phi_{ij})^{-1}$ имеют вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Psi(t). \quad (3.3.19)$$

Матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$G(t) = \Psi(t)B = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-t, 1). \quad (3.3.20)$$

Далее, $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ — вектор решения системы (3.3.16), $q_0 = (q_{10}, q_{20})$ — вектор начальных условий.

Так как конечное условие при $t = T$ есть нулевое условие, т. е. $q(T) = 0$, равенство (3.3.12) приводит при $t = T$ к уравнениям, которые выражают проблему моментов. В координатной форме матричное уравнение (3.3.12) выглядит следующим образом:

$$q_{10} = \int_0^T tu(t) dt, \quad (3.3.21)$$

$$-q_{20} = \int_0^T u(t) dt. \quad (3.3.22)$$

Таким образом, нужно найти такое управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, $\max_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq l$, чтобы равенства (3.3.21), (3.3.22) выполнялись при минимальном T .

Как следует из формулы (3.3.14), оптимальное управление для этой задачи имеет вид

$$u(t) = l \operatorname{sign}(\bar{\xi}_1 t + \bar{\xi}_2), \quad (3.3.23)$$

где числа $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ и время T^0 оптимального процесса является решением следующей задачи: найти такое T^0 , чтобы выполнялось равенство

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^{T^0} |\xi_1 t + \xi_2| dt = \int_0^{T^0} |\bar{\xi}_1 t + \bar{\xi}_2| dt = \frac{1}{T} \quad (3.3.24)$$

при условии

$$\xi_1 q_{10} - \xi_2 q_{20} = \bar{\xi}_1 q_{10} - \bar{\xi}_2 q_{20} = 1. \quad (3.3.25)$$

Для решения последней задачи (3.3.24), (3.3.25) решим уравнение (3.3.25) относительно величины ξ_1

$$\xi_1 = \frac{1 + \xi_2 q_{20}}{q_{10}}. \quad (3.3.26)$$

Для простоты положим $q_{20} = 0$ и $q_{10} > 0$. Тогда из условия (3.3.25) получим

$$\xi_1 = \frac{1}{q_{10}}. \quad (3.3.27)$$

Подставив найденное значение ξ_1 в левый интеграл выражения (3.3.24), получим, что он равен

$$a = \int_0^{T^0} \left| \frac{1}{q_{10}} t + \xi_2 \right| dt. \quad (3.3.28)$$

Чтобы вычислить минимум этого интеграла по ξ_2 , найдем сначала точку t_1 пересечения прямой

$$\frac{1}{q_{10}} t + \xi_2 = 0 \quad (3.3.29)$$

с осью t . Легко видеть, что

$$t_1 = -q_{10} \xi_2. \quad (3.3.30)$$

Предположим, далее, что $0 < t_1 < T^0$. Так как по предположению $q_{10} > 0$, то линейная функция, стоящая под знаком модуля в интеграле (3.3.28), отрицательна при $0 \leq t \leq t_1$ и положительна при $t_1 \leq t \leq T$. Поэтому интеграл (3.3.28) можно разбить на два интеграла следующим образом:

$$a = \int_0^{t_1} \left(-\frac{1}{q_{10}} t - \xi_2 \right) dt + \int_{t_1}^T \left(\frac{1}{q_{10}} t + \xi_2 \right) dt. \quad (3.3.31)$$

Вычисляя выражение (3.3.31) с учетом (3.3.30), получим:

$$a = q_{10}\xi_2^2 + T^0\xi_2 + \frac{(T^0)^2}{2q_{10}}. \quad (3.3.32)$$

Приравнявая нулю производную по ξ_2 величины a в (3.3.32), получим уравнение для определения значения $\bar{\xi}_2$, дающего минимум интегралу (3.3.24):

$$2q_{10}\bar{\xi}_2 + T^0 = 0. \quad (3.3.33)$$

Отсюда

$$\bar{\xi}_2 = -\frac{T^0}{2q_{10}}. \quad (3.3.34)$$

Подставляя полученное значение $\bar{\xi}_2$ в формулу (3.3.32), вычислим значение интеграла (3.3.24)

$$q_{10} \frac{(T^0)^2}{4q_{10}^2} - \frac{(T^0)^2}{2q_{10}} + \frac{(T^0)^2}{2q_{10}} = \frac{(T^0)^2}{4q_{10}}. \quad (3.3.35)$$

Как видно из выражения (3.3.24), время T^0 оптимального переходного процесса вычисляется из следующего уравнения:

$$\frac{(T^0)^2}{4q_{10}} = \frac{1}{l}. \quad (3.3.36)$$

Отсюда

$$T^0 = 2\sqrt{\frac{q_{10}}{l}}. \quad (3.3.37)$$

Подставляя полученные значения $\bar{\xi}_2$ и $\bar{\xi}_1$ в формулу (3.3.23), получим функцию оптимального управления:

$$u^0(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{1}{q_{10}} t - \frac{T^0}{2q_{10}} \right), \quad (3.3.38)$$

где T^0 определяется формулой (3.3.37).

Заметим, что в этой формуле (3.3.38) для оптимального управления предположение о том, что $q_{10} > 0$ излишне, так как легко убедиться, что формула сохранит свой вид также при $q_{10} < 0$.

Пример 2. Пусть управляемая система описывается уравнениями (3.3.16) и при $t = 0$ находится в состоянии

$$\left. \begin{aligned} q_1(0) &= q_{10} = 0; \\ q_2(0) &= q_{20} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.39)$$

Требуется за минимальное время T перевести систему из этого начального состояния в новый режим, характеризуемый уравнениями

$$q_1^* = t \text{ и } q_2^* = 1, \quad (3.3.40)$$

причем энергия управляющего воздействия ограничена:

$$\int_0^T u^2(t) dt \leq l^2. \quad (3.3.41)$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы, соответствующей системе (3.3.16), и обратная ей матрица $\Phi^{-1}(t) = \Psi(t)$ имеют вид (3.3.19), а матрица G определяется (3.3.20). Уравнение моментов, соответствующее этой задаче, примет вид

$$T = \int_0^T tu(t) dt, \quad (3.3.42)$$

$$1 = \int_0^T u(t) dt. \quad (3.3.43)$$

Из формулы (3.3.42) получим, что оптимальное управляющее воздействие равно

$$u(t) = l(\xi_1 t + \xi_2), \quad t \in [0, T], \quad (3.3.44)$$

где ξ_1 , ξ_2 и T в соответствии с (3.3.15) дают решение следующей задачи: найти такое T , чтобы

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T (\xi_1 t + \xi_2)^2 dt = l^2 \quad (3.3.45)$$

при условии

$$\xi_1 T + \xi_2 = 1. \quad (3.3.46)$$

Выражая из последнего равенства ξ_2 , подставляя его в (3.3.45), а затем дифференцируя по ξ_1 , получим уравнение для определения ξ_1 :

$$\frac{2}{3} \xi_1 T^3 - \xi_1 T^3 + T^2 - \xi_1 T^3 + 2\xi_1 T^3 - 2T^2 = 0,$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{3}{2T}; \quad \xi_2 = -\frac{1}{2}.$$

Теперь, подставляя эти значения ξ_1 и ξ_2 в (3.3.45), получим:

$$\int_0^T \left(\frac{3}{2T} t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} T = \frac{1}{l^2}.$$

Следовательно, время оптимального управления равно

$$T = \frac{4}{l^2},$$

а оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = l^2 \left(\frac{3}{8} l^2 t - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} l^4 t - \frac{1}{3} l^2.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь более сложный пример оптимального по быстрдействию управления системой третьего порядка с двумя управляющими воздействиями $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Дифференциальные уравнения этой системы в нормальной форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= q_3 + u_1, \\ \dot{q}_3 &= u_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.47)$$

Пусть в начальный момент времени при $t = 0$ состояние системы (3.3.47) задается матрицей

$$q(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти такие управляющие воздействия $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые переводят систему из начального состояния $q(0)$ в начало координат фазового пространства исходной системы за минимальное время, при условии, что норма $\|u(t)\|$ управления

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

ограничена величиной l . Как легко видеть, фундаментальная матрица соответствующей однородной системы и обратная ей матрица имеют вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.48)$$

Матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$G(t) = \Psi(t)B = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & \frac{1}{2} t^2 \\ 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и с учетом (3.3.12) — (3.3.14) приходим к системе

$$\begin{aligned} -1 &= \int_0^T \left[-tu_1(t) + \frac{1}{2} t^2 u_2(t) \right] dt; \\ 0 &= \int_0^T [u_1(t) - tu_2(t)] dt, \\ 0 &= \int_0^T u_2(t) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим ограничения разных типов:

а) ограничение, наложенное на величину энергии входного воздействия, имеет вид

$$\int_0^T [|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2] dt \leq l^2,$$

что соответствует ограничению

$$\|u\| = \left(\int_0^T [|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2] dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq l.$$

Следовательно, на основании (3.3.14) имеем:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= l^2 (-\xi_1 t + \xi_2), \\ u_2(t) &= l^2 \left(\frac{1}{2} \xi_1 t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right), \end{aligned}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяются из уравнения

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T \left[(-\xi_1 t + \xi_2)^2 + \left(\frac{1}{2} \xi_1 t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right)^2 \right] dt = \frac{1}{l^2}, \tag{3.3.49}$$

причем, как легко видеть, условие (3.3.15) в данном случае имеет вид $\xi_1 = 1$.

Следовательно, необходимо найти ξ_2 и ξ_3 , минимизирующие интеграл

$$J(\xi_1, \xi_2) = \int_0^T \left[(-t + \xi_2)^2 + \left(\frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right)^2 \right] dt.$$

Таким образом, ξ_2 и ξ_3 должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_2} = 2 \int_0^T \left[(-t + \xi_2) - \left(\frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right) t \right] dt = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_3} = 2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right) dt = 0.$$

Интегрируя и решая получающуюся при этом систему алгебраических уравнений относительно ξ_2 и ξ_3 , находим:

$$\xi_2 = \frac{T}{2}, \quad \xi_3 = \frac{T^2}{12}.$$

Подставляя эти значения ξ_2 и ξ_3 и $\xi_1 = 1$ в (3.3.49), получим уравнение для определения времени оптимального переходного процесса:

$$\frac{1}{720} T^5 + \frac{1}{12} T^3 = \frac{1}{l^2}.$$

Наименьший положительный корень T_0 этого уравнения и будет временем оптимального переходного процесса. Оптимальные управляющие воздействия в этом случае будут иметь вид

$$u_1(t) = l^2 \left(\frac{T_0^2}{12} - \frac{T_0}{2} t + \frac{t^2}{2} \right),$$

$$u_2(t) = l^2 \left(\frac{T_0}{2} - t \right).$$

б) Пусть теперь ограничена средняя мощность входных воздействий:

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T (|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq l.$$

Этот случай легко сводится к предыдущему, так как норма ограничена числом $l\sqrt{T}$, т. е.

$$\|u\| = \left(\int_0^T (|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq l\sqrt{T}.$$

Оптимальные управляющие воздействия в этом случае также вычисляются по формуле (3.3.14), однако, T_0 является теперь наименьшим корнем уравнения

$$\frac{1}{720} T^6 + \frac{1}{12} T^4 = \frac{1}{l^2}.$$

в) Если входные управляющие воздействия ограничены по модулю:

$$|u_1(t)| \leq l, \quad |u_2(t)| \leq l,$$

то следует положить $p = \infty$ и за норму $u(t)$ следует взять величину

$$\|u\| = \max_{t \in [0, T]} (|u_1(t)|, |u_2(t)|) \leq l.$$

Случай, когда управляющие воздействия $u_1(t)$ и $u_2(t)$ ограничены по модулю разными величинами, например l_1 и l_2 , т. е.

$$|u_1(t)| \leq l_1, \quad |u_2(t)| \leq l_2, \quad l_1 > 0, \quad l_2 < 0,$$

легко приводится к предыдущему, если ввести новые управляющие воздействия $v_1(t)$ и $v_2(t)$ по формулам

$$v_1(t) = \frac{l}{l_1} u_1(t); \quad v_2(t) = \frac{l}{l_2} u_2(t), \quad l > 0.$$

Тогда новые управляющие воздействия по модулю ограничены одним и тем же числом $l > 0$:

$$|v_1(t)| \leq l, \quad |v_2(t)| \leq l.$$

Используя формулу (3.3.14) при $p = \infty$, получим:

$$u_1(t) = l \operatorname{sign}(-\xi_1 t + \xi_2),$$

$$u_2(t) = l \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}\xi_1 t^2 - \xi_2 t + \xi_3\right),$$

где $\xi_1 = 1$, а ξ_2 и ξ_3 есть решение следующего уравнения:

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T \left(|-\xi_1 t + \xi_2| + \left| \frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right| \right) dt = \frac{1}{l}. \tag{3.3.50}$$

Легко видеть, что минимум этого интеграла достигается при

$$\xi_2 = \frac{T}{2} \text{ и } \xi_3 = \frac{3}{32} T^2.$$

Подставляя эти значения ξ_2 , ξ_3 и $\xi_1 = 1$ в (3.3.50), получим уравнение

$$\frac{1}{32} T^3 + \frac{1}{4} T = \frac{1}{l}.$$

Наименьший действительный положительный корень T_0 этого уравнения и будет временем оптимального переходного процесса. При этом оптимальные управляющие воздействия определяются выражениями

$$u_1(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{T_0}{2} - t \right),$$

$$u_2(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{3}{32} T_0^2 - \frac{T_0}{2} t + \frac{1}{2} t^2 \right).$$

Покажем теперь, что решение задачи оптимального управления с помощью принципа максимума для линейных систем с линейным минимизируемым функционалом и линейными краевыми условиями по сути дела сводится к решению некоторой l -проблемы моментов.

Действительно, если применить принцип максимума Л. С. Понтрягина к задаче (3.3.1) — (3.3.4), то сразу же получим, что оптимальное управление $u(t)$ в случае ограничения $|u_k(t)| \leq l$, $k = 1, 2, \dots, r$, будет иметь вид

$$u_k(t) = l \operatorname{sign} \{ \psi(t) B \}_k, \quad (3.3.51)$$

где $\{ \psi(t) B \}_k$ — k -я координата вектора $\psi(t) B$, а матрица строка $\psi(t)$ удовлетворяет сопряженному дифференциальному уравнению, которое для данной задачи имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi A. \quad (3.3.52)$$

Остается неясным, какое именно выбрать решение уравнения (3.3.51), так как дифференциальное уравнение, вообще говоря, имеет много решений в зависимости от начальных условий. Как известно, единственное решение этого уравнения (3.3.51) можно выделить, если задать начальные условия для вектора $\psi(0) = \xi$, т. е. решать задачу Коши. Таким образом, применение принципа максимума выделяет лишь семейство экстремалей, из которых еще предстоит выделить одну единственную. Итак, остается, вообще говоря, трудная краевая задача, которая заключается в том, чтобы подобрать такие начальные значения $\psi(0)$ вектор-функции $\psi(t)$, чтобы под действием управления $u(t)$, определяемого формулой (3.3.51), система (3.3.1) из начального состояния $q(t_0) = q_0$ перешла в заданное состояние

$$q(t_1) = q_1, \quad (3.3.53)$$

т. е. траектория системы (3.3.1) в фазовом пространстве должна пройти через точку q_1 .

Решение сопряженного уравнения (3.3.52) с начальным условием $\psi(0) = \xi$ можно записать в виде

$$\psi(t) = \xi \Psi(t), \quad (3.3.54)$$

где $\Psi(t)$ — матрица фундаментальных решений уравнения (3.3.52).

Подставляя это выражение для $\Psi(t)$ в формулу (3.3.51) для оптимального управления, получим:

$$u_k(t) = l \operatorname{sign} \{ \xi \Psi(t) B \}_k = l \operatorname{sign} \{ \xi \dot{G}(t) \}_k, \quad k=1, 2, \dots, r, \quad (3.3.55)$$

где $G(t) = \Psi(t)B$.

Отсюда видно, что оптимальное управление зависит от n — параметров $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, которые определяются из условия выполнения равенства (3.3.53), что в соответствии с (3.3.12) эквивалентно решению проблемы моментов, т. е. нахождения «нужных» параметров в формуле (3.3.55).

Таким образом, имея в своем распоряжении быстродействующее вычислительное устройство, которое, как только задано состояние управляемой системы, мгновенно вычисляет параметры ξ оптимального управления, мы можем решать задачу синтеза оптимального управления.

§ 4. Оптимальное управление непрерывно распределенной колебательной системой

Покажем теперь, как можно свести задачу оптимального управления колебаниями в некоторой распределенной упругой среде к соответствующей проблеме моментов.

Пусть колебания упругой среды описываются одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (3.4.1)$$

где параметр a равен скорости распространения возбуждения в данной упругой среде, а функция $Q = Q(t, x)$

описывает изменение амплитуд *) колебания этой среды в пространственной точке x во времени t . Будем рассматривать колебания этой среды в пределах ограниченного пространственного отрезка $[0, S]$, $0 \leq x \leq S$.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется некоторое возбужденное состояние данной среды, описываемое начальными условиями следующего вида

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad (3.4.2)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{Q}_0(x). \quad (3.4.3)$$

Пусть управляющее воздействие является вектором $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, компонентами которого являются значения функции Q в точках $x = 0$ и $x = S$, т. е.

$$u_1(t) = Q(0, t), \quad (3.4.4)$$

$$u_2(t) = Q(S, t). \quad (3.4.5)$$

Вектор $u(t)$ ограничен по норме, т. е.

$$\|u(t)\| \leq l, \quad l > 0. \quad (3.4.6)$$

Задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом: пользуясь управлением $u(t)$, удовлетворяющим условию (3.4.6), нужно «успокоить» систему за возможно более короткий промежуток времени T . Иными словами, исходя из начальных распределений (3.4.2) и (3.4.3) амплитуд и скоростей изменения амплитуд колебаний, необходимо получить за минимальное время T нулевое распределение как амплитуд, так и их скоростей изменения. В частности, можно не требовать выполнения последнего условия равенства нулю всего распределения скоростей в колеблющейся среде, а ограничиться лишь получением нулевого или, в общем случае, некоторого заданного распределения амплитуд колебаний на отрезке $[0, S]$. Для простоты мы примем, что $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$ и $\|u\| \leq l$. Поэтому, в силу симметрии, можно требовать идеальной компенсации лишь для таких началь-

*) Амплитудой колебания упругой среды в данной точке x или просто амплитудой мы будем называть отклонение колеблющейся сосредоточенной массы от положения ее равновесия в данный момент времени t .

ных функций $Q_0(x)$ и $\dot{Q}_0(x)$, которые сами симметричны относительно середины отрезка $[0, S]$.

В противном случае задача стабилизации, очевидно, не будет иметь решения.

Представим решение волнового уравнения в виде суперпозиции двух функций

$$Q(x, t) = Q_1(x, t) + Q_2(x, t), \quad (3.4.7)$$

где функция $Q_1(x, t)$ описывает свободные колебания среды при некоторых начальных условиях, а функция $Q_2(x, t)$ описывает вынужденные колебания, определяющиеся возмущающими краевыми условиями (3.4.4), (3.4.5). Следовательно [110],

$$Q_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a}{S} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{S} t \right) \sin \frac{\pi k}{S} x, \quad (3.4.8)$$

где

$$A_k = \frac{2}{S} \int_0^S Q_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \quad (3.4.9)$$

$$B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^S \dot{Q}_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \quad (3.4.10)$$

и

$$Q_2(x, t) = \int_0^t K(x, t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.4.11)$$

где

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k}{S} x \sin \frac{\pi k a}{S} t \quad (3.4.12)$$

и

$$C_k = \frac{2a}{S} [1 - (-1)^k]. \quad (3.4.13)$$

Рассмотрим частный случай, когда начальное распределение амплитуд $Q_0(x) \equiv Q_0$ есть константа и $\dot{Q}_0(x) \equiv 0$.

При этом из формулы (3.4.9) и (3.4.10) следует

$$A_k = \frac{2Q_0}{\pi k} [1 - (-1)^k] \text{ и } B_k = 0, \quad (3.4.14)$$

а функция $Q_1(x, t)$ примет вид

$$Q_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Q_0}{\pi k} [1 - (-1)^k] \cos \frac{\pi k a}{S} t \sin \frac{\pi k}{S} x. \quad (3.4.15)$$

Условие отсутствия колебаний в момент времени T можно записать на основании формулы (3.4.7) в виде

$$Q(x, t) = Q_1(x, T) + Q_2(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq S, \quad (3.4.16)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{\partial Q_1}{\partial t} \Big|_{t=T} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq S. \quad (3.4.17)$$

Посмотрим сначала, к чему приводит условие (3.4.16). С учетом формул (3.4.15), (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13) и (3.4.14) оно примет вид

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Q_0}{\pi k} [1 - (-1)^k] \cos \frac{\pi k a}{S} T \sin \frac{\pi k}{S} x = \\ & = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{S} [1 - (-1)^k] \sin \frac{\pi k}{S} x \sin \left[\frac{\pi k a}{S} (T - \tau) \right] u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Из этого равенства видно, что в разложении в левой части отсутствуют как раз те гармоники (четные), которые отсутствуют в правой части равенства. Если бы в левой части стояло разложение функции, несимметричной относительно точки $x = \frac{S}{2}$, то здесь присутствовали бы четные гармоники и, равенство, очевидно, было бы невозможно.

Меняя в (3.4.18) порядок интегрирования и суммирования и производя почленное сравнение коэффициентов при

независимых функциях $\sin \frac{\pi k}{S} x$, получим систему равенств

$$\frac{Q_0 S}{a \pi k} \cos \frac{\pi k a}{S} T = \int_0^T \sin \frac{\pi k a}{S} (T - t) u(t) dt, \quad (3.4.19)$$

где номер k должен пробегать лишь нечетные целые положительные числа $k = 1, 3, 5, \dots$, так как в обеих частях равенства (3.4.18) стоит множитель $[1 - (-1)^k]$, который обращается в нуль при четных целых $k = 2, 4, 6, \dots$.

Из равенств (3.4.19) сразу же можно получить оптимальное управление $u(t)$, удовлетворяющее условию $\|u\| \leq l$. С помощью этого управления можно получить нулевое распределение амплитуды по всей длине отрезка $[0, S]$ за минимальное время. (Однако при этом распределение скоростей в конце оптимального процесса может быть произвольным.)

Действительно, легко проверить, что время такого оптимального переходного процесса равно

$$T_0 = \frac{S}{2a}, \quad (3.4.20)$$

а оптимальное управление равно

$$u_0(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 = \frac{S}{2a}, \quad (3.4.21)$$

т. е. управляющие амплитуды на концах отрезка $x = 0$ и $x = S$ должно тождественно равняться нулю. При этом минимальное время оказалось равным времени пробега волны (возмущения) в упругой среде половины отрезка $[0, S]$. Из физических соображений ясно, что никакой сигнал, отправляясь из концов отрезка $[0, S]$ не может прийти в его середину быстрее, чем за время $T_0 = S/2a$.

Посмотрим теперь, какую новую систему условий надо добавить к условиям (3.4.19) для того, чтобы не только получить нулевое распределение амплитуды колебаний за некоторый минимальный интервал времени, но и обеспечить одновременно нулевое распределение скоростей точек колеблющейся среды. Ясно, что если мы достигнем нулевого распределения обоих параметров (отклонения и скорости

его изменения) на всем отрезке $[0, S]$ в какой-то момент времени, то полученное состояние равновесия при нулевых граничных условиях будет сохраняться сколь угодно долго.

Итак, преобразуем второе условие равновесия колеблющейся среды, определяемое уравнением (3.4.17). Легко видеть, что для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Q_0 a}{S} [1 - (-1)^k] \sin \frac{\pi k a}{S} T \sin \frac{\pi k}{S} x = \\ = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a^2 \pi k}{S} [1 - (-1)^k] \sin \frac{\pi k}{S} x \cos \frac{\pi k a}{S} (T - \tau) u(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

которое можно получить формально, дифференцируя равенство (3.4.18) по T . Меняя порядок суммирования и интегрирования и производя почленное сравнение обеих частей этого равенства, приходим к следующей системе уравнения для моментов функции $u(t)$:

$$\frac{Q_0 S}{a \pi k} \sin \frac{\pi k a}{S} T = \int_0^T \cos \frac{\pi k a}{S} (T - t) u(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (3.4.23)$$

Итак, проблема оптимального по быстродействию управления, сформулированная выше, свелась к нахождению такого управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющего условию (3.4.6), которое обеспечивает выполнение системы равенств (3.4.19) и (3.4.23) при наименьшем возможном значении параметра T . Покажем, что параметр T , входящий в эти равенства, можно исключить из обеих частей этих равенств, оставив его лишь в верхнем пределе интегрирования.

Для краткости выкладок введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{Q_0 S}{a \pi k}, \quad \alpha = \cos \frac{\pi k a}{S} T, \quad \beta = \sin \frac{a \pi k}{S} T, \\ x &= \int_0^T \cos \frac{a \pi k}{S} t u(t) dt, \quad y = \int_0^T \sin \frac{a \pi k}{S} t u(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.24)$$

Используя известные тригонометрические соотношения, систему (3.4.19), (3.4.23) в этих обозначениях можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} -b\alpha &= \beta x - \alpha y, \\ +b\beta &= \alpha x + \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.25)$$

Полученную систему можно рассматривать как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x и y . Определитель этой системы в силу (3.4.24) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 + \alpha^2 = 1 \neq 0. \quad (3.4.26)$$

Теперь легко найдем:

$$x = \begin{vmatrix} b\alpha & -\alpha \\ -b\beta & \beta \end{vmatrix} = b\alpha\beta - b\alpha\beta = 0,$$

$$y = \begin{vmatrix} \beta & -b\alpha \\ \alpha & b\beta \end{vmatrix} = b\beta^2 + b\alpha^2 = b.$$

Таким образом, проведенные выкладки вполне обратимы, и система равенств (3.4.24), (3.4.23) эквивалентна следующей системе равенств:

$$0 = \int_0^T \cos \frac{a\pi k}{S} tu(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.27)$$

$$\frac{Q_0 S}{a\pi k} = \int_0^T \sin \frac{a\pi k}{S} tu(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (3.4.28)$$

Заметим, однако, что попарной эквивалентности равенств (3.4.19) и (3.4.27), а также равенств (3.4.23) и (3.4.28) уже нет, а есть лишь только эквивалентность системы (3.4.19), (3.4.23) системе (3.4.27), (3.4.28).

Если ввести обозначение $\mu_k = \frac{\pi k}{S}$, система (3.4.27), (3.4.28) примет вид

$$0 = \int_0^T \cos \mu_k t u(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.29)$$

$$\frac{Q_0}{\mu_k} = \int_0^T \sin \mu_k t u(t) dt. \quad (3.4.30)$$

Пусть теперь заданы произвольные, но симметричные относительно точки $x = \frac{S}{2}$ начальные функции $Q_0(x)$ и $\dot{Q}_0(x)$. Тогда согласно формулам (3.4.9) и (3.4.10) все коэффициенты A_k и B_k с четными индексами обратятся в нуль. А равенства (3.4.16) и (3.4.17) приведут нас соответственно к системе

$$\begin{aligned} -\frac{A_k S}{4a} \cos \frac{\pi k a}{S} T - \frac{B_k S}{4a} \sin \frac{\pi k a}{S} T = \\ = \int_0^T \sin \frac{\pi k a}{S} (T - t) u(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

$$\frac{A_k S}{4a} \sin \frac{\pi k a}{S} T - \frac{B_k S}{4a} \cos \frac{\pi k a}{S} T = \int_0^T \cos \frac{\pi k a}{S} (T - t) u(t) dt. \quad (3.4.32)$$

Аналогично рассмотренному раньше частному случаю можно исключить время T , оставив его лишь в качестве верхнего предела интегрирования. Действительно, обозначая для краткости

$$A = \frac{A_k S}{4a} \quad \text{и} \quad B = \frac{B_k S}{4a}$$

и используя, кроме этого, старые обозначения (3.4.24), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -A\alpha - B\beta &= \beta x - \alpha y, \\ A\beta - B\alpha &= \alpha x + \beta y, \end{aligned}$$

определитель которой в силу (3.4.24) равен 1. Отсюда

$$x = \begin{vmatrix} -A\alpha - B\beta & -\alpha \\ A\beta - B\alpha & \beta \end{vmatrix} = -A\alpha\beta - B\beta^2 + A\beta\alpha - B\alpha^2 = \\ = -B,$$

$$y = \begin{vmatrix} \beta & -A\alpha - B\beta \\ \alpha & A\beta - B\alpha \end{vmatrix} = A\beta^2 - B\alpha\beta + A\alpha^2 + B\beta\alpha = A.$$

Таким образом, система (3.4.31), (3.4.32) свелась к эквивалентной системе

$$\frac{B_k S}{4a} = \int_0^T \cos \frac{a\pi k}{S} t u(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (3.4.33)$$

$$\frac{A_k S}{4a} = \int_0^T \sin \frac{a\pi k}{S} t \cdot u(t) dt. \quad (3.4.34)$$

Положим теперь $T = \frac{S}{a}$. Тогда равенства (3.4.33), (3.4.34) примут вид

$$-\frac{B_k S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \cos \frac{a\pi k}{S} t \cdot u(t) dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.35)$$

$$\frac{A_k S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \sin \frac{a\pi k}{S} t \cdot u(t) dt. \quad (3.4.36)$$

Полагая $k = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$, перепишем эту систему в виде

$$-\frac{B_m S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \cos \frac{a(2m-1)\pi}{S} t \cdot u(t) dt, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.4.37)$$

$$-\frac{A_m S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \sin \frac{a(2m-1)\pi}{S} t \cdot u(t) dt. \quad (3.4.38)$$

Поставим теперь следующую задачу: найти на интервале $[0, \frac{S}{a}]$ функцию управления $u(t)$, норма которой была бы наименьшей. Рассмотрим случай, когда в качестве нормы функции $u(t)$ принята квадратичная норма

$$\|u\| = \left(\int_0^{\frac{S}{a}} |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4.39)$$

Для простоты мы будем минимизировать квадрат нормы, т. е.

$$\|u\|^2 = \int_0^{\frac{S}{a}} |u(t)|^2 dt. \quad (3.4.40)$$

Таким образом, мы получаем l -проблему моментов, в чистом виде. На основании теоремы 1 § 2 настоящей главы необходимым и достаточным условием разрешимости этой проблемы является разрешимость всех конечномерных l -проблем, т. е. проблем, в которых индекс m в условиях (3.4.37) и (3.4.38) принимает значения от 1 до n , где n — конечное фиксированное целое положительное число.

На основании теоремы 2 § 2 этой же главы для разрешимости конечномерной l -проблемы моментов необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая задача: найти

$$\min_{\xi_k, \eta_k} \left[\int_0^{\frac{S}{a}} \left[\sum_{m=1}^n \left(\xi_m \sin \frac{a\pi(2m-1)t}{S} + \eta_m \cos \frac{a\pi(2m-1)t}{S} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.4.41)$$

при условии

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{A_m S}{4a} \xi_m - \frac{B_m S}{4a} \eta_m \right) = 1. \quad (3.4.42)$$

При этом минимальная норма управления $u(t)$, определяемая равенством (3.4.41), будет равна λ , а сама

искомая функция будет иметь вид

$$u_n^0(t) = \lambda^2 \sum_{m=1}^n \xi_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t + \eta_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t, \quad (3.4.43)$$

где ξ_m^0 , η_m^0 , $m = 1, 2, \dots, n$, — решение задачи (3.4.41), (3.4.42).

Вычислим теперь ξ_m^0 и η_m^0 , $m = 1, 2, \dots, n$.

По правилу множителей Лагранжа существует такое число μ , при котором частные производные по ξ_m и η_m функции

$$f(\xi, \eta) = \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\sum_{m=1}^n \left(\xi_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t + \eta_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right) \right]^2 dt - \mu \sum_{m=1}^n \left(\frac{A_m S}{4a} \xi_m - \frac{B_m S}{4a} \eta_m \right) \quad (3.4.44)$$

в точке экстремума $\xi = \xi^0$ и $\eta = \eta^0$ обращаются в нуль.

Здесь используются обозначения $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi_p} = 2 \int_0^{\frac{S}{a}} & \left(\sum_{m=1}^n \xi_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t + \right. \\ & \left. + \eta_k \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right) \sin \frac{a\pi(2p-1)}{S} t dt - \\ & - \mu \frac{A_p S}{4a} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta_p} = 2 \int_0^{\frac{S}{a}} & \left[\left(\sum_{m=1}^n \xi_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t + \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_k \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right) \cos \frac{a\pi(2p-1)}{S} t dt + \mu \frac{B_p S}{4a} = 0. \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

Раскрывая скобки в последних равенствах и учитывая, что система

$$\left\{ \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t, \quad \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

ортогональна на $[0, S/a]$, получим:

$$2\xi_p \int_0^{\frac{S}{a}} \sin^2 \frac{a\pi(2p-1)}{S} t dt - \mu \frac{A_p S}{4a} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.47)$$

$$2\eta_p \int_0^{\frac{S}{a}} \cos^2 \frac{a\pi(2p-1)}{S} t dt + \mu \frac{B_p S}{4a} = 0, \quad (3.4.48)$$

откуда легко находим экстремальные значения:

$$\xi_p^0 = \mu \frac{A_p S}{2 \cdot 4a} \frac{2a}{S} = \mu \frac{A_p}{4},$$

$$\eta_p^0 = -\mu \frac{B_p S}{2 \cdot 4a} \frac{2a}{S} = -\mu \frac{B_p}{4}.$$

Подставляя полученные значения ξ^0 и η^0 в условие (3.4.42), получим уравнение для определения параметра μ :

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{A_m^2 S}{16a} \mu + \frac{B_m^2 S}{16a} \mu \right) = 1.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{16a}{S \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2)}, \\ \xi_p^0 &= \frac{8a A_p}{S \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2)}, \\ \eta_p^0 &= -\frac{8a B_p}{S \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.49)$$

Вычислим теперь значение минимума интеграла (3.4.41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} &= \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\sum_{m=1}^n \left(\frac{\mu}{4} A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu}{4} B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right) \right]^2 dt = \\ &= \frac{\mu^2}{16} \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\sum_{m=1}^n \left(A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right) \right]^2 dt. \end{aligned}$$

В силу ортогональности системы функций получим:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu^2 S}{32a} \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2).$$

Отсюда, используя равенство (3.4.49) для μ , имеем:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{8a}{S \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2)}$$

и, следовательно,

$$\lambda^2 = \frac{S}{8a} \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2) \quad \text{и} \quad \lambda^2 \xi_m = \frac{A_m}{2}, \quad \lambda^2 \eta_m = -\frac{B_m}{2}.$$

Таким образом, искомое управление определяется выражением

$$u_n^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \quad (3.4.50)$$

и квадрат его нормы минимален и равен

$$\|u_n^0(t)\|^2 = \frac{S}{8a} \sum_{m=1}^n (A_m^2 + B_m^2). \quad (3.4.51)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что искомое оптимальное (по минимуму квадрата нормы) управление

определяется выражением

$$u^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t,$$

$$0 \leq t \leq \frac{S}{a}, \quad (3.4.52)$$

причем

$$\min \|u(t)\|^2 = \|u^0(t)\|^2 = \frac{S}{8a} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^2 + B_m^2). \quad (3.4.53)$$

Пусть начальная скорость равна нулю, т. е. $\dot{Q}_0(x) \equiv 0$. Из (3.4.9) видно, что коэффициенты A_m , $m = 1, 2, \dots$, являются коэффициентами Фурье в разложении начальной функции $Q_0(x)$ в интервале $[0, S]$ по функциям $\sin \frac{\pi k}{S} x$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому имеет место равенство Парсеваля [54]

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 = \frac{2}{S} \int_0^S [Q_0(x)]^2 dx$$

и, следовательно, в этом случае

$$\int_0^{\frac{S}{a}} u^2(t) dt = \min \|u(t)\|^2 = \|u^0(t)\|^2 = \frac{1}{4a} \int_0^S [Q_0(x)]^2 dx.$$

Таким образом, последняя формула дает минимальное значение энергии управляющего воздействия $u(t)$, при котором за время $T = S/a$ возможно полностью успокоить колеблющуюся систему.

Например, если в рассматриваемой нами колебательной системе до приложения управляющих воздействий присутствовали так называемые стоячие волны, например, одна полуволна, описываемая в момент времени $t = 0$ уравнением

$$Q_0(x) = A \sin \frac{\pi}{S} x,$$

$$0 \leq x \leq S,$$

а скорость была равна нулю $\dot{Q}_0(x) = 0$, то для того, чтобы погасить эту стоячую волну за время S/a с минимальной затратой энергии, требуется управляющее воздействие следующего вида:

$$u^0(t) = \frac{A}{2} \sin \frac{a\pi}{S} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{a}{S},$$

энергия которого равна

$$\int_0^{\frac{S}{a}} u_0^2(t) dt = \frac{1}{4} A^2.$$

Определим теперь, какой вид должно иметь управляющее воздействие $u(t)$ для того, чтобы успокоить колеблющуюся среду, если в начальный момент времени распределение имеет вид

$$Q_0(x) = Q_0 = \text{const.}$$

Тогда в соответствии с формулами (3.4.52) и (3.4.9) получим, что оптимальное управление, успокаивающее систему за время S/a с минимальной затратой энергии, имеет вид

$$u^0(t) = \frac{2Q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t.$$

Сумма ряда в последней формуле равна $\frac{\pi}{4}$ и, следовательно,

$$u^0(t) = \frac{Q_0}{2}, \quad 0 < t < \frac{S}{a}.$$

Последние два примера можно обобщить и вывести явную зависимость оптимального управления от начальных функций $Q_0(x)$ и $\dot{Q}_0(x)$.

Действительно, подставим теперь в формулу (3.4.52) для оптимального управления значения коэффициентов A_m и B_m , определяемых выражениями (3.4.9) и (3.4.10). Учитывая, что функции $Q_0(x)$ и $\dot{Q}_0(x)$ симметричны

относительно середины интервала $[0, S/a]$, получим:

$$u^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{S} \int_0^S Q_0(\xi) \sin \frac{\pi(2m-1)}{S} \xi d\xi \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - \\ - \frac{2}{a\pi(2m-1)} \int_0^S \dot{Q}_0(\xi) \sin \frac{\pi(2m-1)}{S} \xi d\xi \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t]. \quad (3.4.54)$$

С помощью замены переменной $\xi = at$ и интегрирования по частям, получим:

$$- \frac{2}{a\pi(2m-1)} \int_0^S \dot{Q}_0(\xi) \sin \frac{\pi(2m-1)}{S} \xi d\xi = \\ = \frac{2a}{S} \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\int_0^t \dot{Q}_0(a\tau) d\tau \right] \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t dt. \quad (3.4.55)$$

Здесь использовано то, что

$$\sin \frac{\pi a(2m-1)}{S} t \Big|_0^{\frac{S}{a}} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Используя полученное тождество (3.4.55), формулу (3.4.54) для оптимального управления можно записать в виде

$$u^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2a}{S} \int_0^{\frac{S}{a}} Q_0(a\tau) \sin \frac{\pi a(2m-1)}{S} \tau d\tau \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t + \\ + \frac{2a}{S} \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\int_0^{t'} \dot{Q}_0(a\tau) d\tau \right] \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t' dt' \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t, \\ 0 \leq t \leq \frac{S}{a}.$$

Но последнее выражение для оптимального управления по определению разложения в ряд Фурье можно

представить в следующем виде:

$$u^0(t) = \frac{1}{2} \left[Q_0(at) + \int_0^t \dot{Q}_0(a\tau) d\tau \right], \quad 0 < t < \frac{S}{a},$$

$$u^0(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \frac{S}{a} \leq t.$$

Полученная формула имеет простой физический смысл, особенно, если $\dot{Q}_0(x) \equiv 0$. В этом случае, под действием управляющего воздействия с обоих концов колеблющейся одномерной среды навстречу друг другу со скоростью a «бегут» волны, форма которых совпадает с формой начального распределения смещений, причем с каждой стороны «бежит» волна лишь половинной амплитуды.

Перейдем к решению рассматриваемой проблемы на основании теорем 14—17 § 2 главы III, с помощью которых получим более общие результаты.

Будем решать задачу оптимального по быстродействию управления распределенной колебательной системой (3.4.1) с начальными условиями (3.4.2), (3.4.3) при ограничении (3.4.6). Примем, что управляющее воздействие $u(t)$ сосредоточено на одном конце:

$$Q(0, t) = u(t).$$

Другое граничное условие имеет вид

$$Q(S, t) = 0.$$

Управление $u(t)$ ограничено по норме в L_p величиной l ,

$$\|u\|_p \leq l.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a = 1$, $S = \pi$. Тогда система моментных равенств, аналогичная (1.4.37), (1.4.38), будет иметь вид

$$\int_0^T \sin kt \cdot u(t) dt = \frac{\pi A_k}{2} = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.4.56)$$

$$\int_0^T \cos kt u(t) dt = -\frac{\pi B_k}{2k} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4.57)$$

В соответствии с результатами § 2 этой главы будем решать следующую задачу.

Найти функцию

$$\psi_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^0 \sin kt + \eta_k^0 \cos kt)$$

такую, что

$$\|\psi_0\|_p = \frac{1}{\lambda^p} = \rho(T) = \min_{\xi_k, \eta_k} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \sin kt + \eta_k \cos kt) \right|^p dt$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k a_k + \eta_k b_k) = 1,$$

где $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$, заданы.

Сначала исследуем случай $p = 2$. Коэффициенты a_k, b_k можно интерпретировать как коэффициенты Фурье некоторой функции $F(t)$ на $[0, 2\pi]$, т. е.

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kt + b_k \cos kt). \quad (3.4.58)$$

Эта задача аналогична задаче III, рассмотренной в § 2 настоящей главы при решении бесконечномерной l -проблемы моментов.

Теперь решаем эквивалентную задачу.

Найти периодическую с периодом 2π функцию $\psi_0(t)$ такую, что

$$\int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi_0(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(\psi) = \int_0^{2\pi n + \varepsilon} \psi^2(t) dt$$

достигает минимума при

$$\psi(t) = \psi_0(t), \quad T = 2\pi n + \varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots; \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi.$$

Будем давать такие вариации $\delta(t)$ (функции $\delta(t)$ имеют период 2π) функции $\psi_0(t)$, что

$$\int_0^{2\pi} F(t) [\psi_0(t) + \delta(t)] dt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} [\psi_0(t) + \delta(t)] dt = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\int_0^{2\pi} \delta(t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(t) \delta(t) dt = 0.$$

Далее, вычисляем:

$$\begin{aligned} \Phi'(\psi_0) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi n + \varepsilon} [\psi_0(t) + \gamma \delta(t)]^2 dt - \int_0^{2\pi n + \varepsilon} \psi_0^2(t) dt}{\gamma} = \\ &= \int_0^{2\pi n + \varepsilon} 2\psi_0(t) \delta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.4.59)$$

Рассмотрим случай $n \neq 0$, $0 < \varepsilon < 2\pi$. Используя периодичность функций $\psi_0(t)$ и $\delta(t)$, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi n + \varepsilon} \psi_0(t) \delta(t) dt &= \int_0^{\varepsilon} \psi_0(t) \delta(t) dt + \\ &+ n \int_0^{2\pi} \psi_0(t) \delta(t) dt = \int_0^{2\pi} k(t) \delta(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$k(t) = \begin{cases} (n+1)\psi_0(t) & \text{при } t \in [0, \varepsilon]; \\ n\psi_0(t) & \text{при } t \in (\varepsilon, 2\pi], \end{cases}$$

откуда, с учетом (3.4.59), получаем:

$$k(t) = C_1 F(t) + C_2. \quad (3.4.60)$$

Из равенства (3.4.60) следует:

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{n+1} F(t) + \frac{C_2}{n+1} & \text{при } t \in [0, \varepsilon], \\ \frac{C_1}{n} F(t) + \frac{C_2}{n} & \text{при } t \in [\varepsilon, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.4.61)$$

Из условий

$$\int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi_0(t) dt = 0$$

определяем значения C_1 и C_2 :

$$C_1 = \pi \left\{ \frac{1}{n+1} \int_0^\varepsilon F^2(t) dt - \frac{\left[\int_0^\varepsilon F(t) dt \right]^2}{[(n+1)2\pi - \varepsilon] n(n+1)} + \frac{1}{n} \int_\varepsilon^{2\pi} F^2(t) dt \right\}^{-1}, \quad (3.4.62)$$

$$C_2 = \frac{\pi \int_0^\varepsilon F(t) dt}{(n+1)2\pi - \varepsilon} \left\{ \frac{1}{n+1} \int_0^\varepsilon F^2(t) dt - \frac{\left[\int_0^\varepsilon F(t) dt \right]^2}{[(n+1)2\pi - \varepsilon] n(n+1)} + \frac{1}{n} \int_\varepsilon^{2\pi} F^2(t) dt \right\}^{-1}. \quad (3.4.63)$$

Используя периодичность функции $\psi_0(t)$ и (3.4.61), можно вычислить следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_0) &= \int_0^{2\pi+\varepsilon} \psi_0^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{n+1} \left[C_1^2 \int_0^\varepsilon F^2(t) dt + 2C_1C_2 \int_0^\varepsilon F(t) dt + C_2^2 \varepsilon \right] + \\ &+ \frac{1}{n} \left[C_1^2 \int_\varepsilon^{2\pi} F^2(t) dt + 2C_1C_2 \int_\varepsilon^{2\pi} F(t) dt + C_2^2(2\pi - \varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.64)$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\psi_0) = \pi^2 n \left(\int_0^{2\pi} F^2(t) dt \right)^{-1},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 2\pi} \Phi(\psi_0) = (n+1) \pi^2 \left(\int_0^{2\pi} F^2(t) dt \right)^{-1}.$$

Рассмотрим случай $n \neq 0$, $\varepsilon = 0$. Тогда получим:

$$\Phi'(\psi_0) = \int_0^{2\pi n} \psi_0(t) \delta(t) dt = n \int_0^{2\pi} \psi_0(t) \delta(t) dt = 0.$$

Следовательно, $n\psi_0(t) = C_1 F(t) + C_2$. Для нахождения констант C_1 и C_2 используются условия:

$$\int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi_0(t) dt = 0,$$

откуда

$$C_1 = \pi n \left[\int_0^{2\pi} F^2(t) dt \right]^{-1}, \quad C_2 = 0, \quad \Phi(\psi_0) = \pi n \left[\int_0^{2\pi} F^2(t) dt \right]^{-1}.$$

Отсюда следует, что можно использовать формулы, полученные в случае $n \neq 0$, $0 < \varepsilon < 2\pi$, также и при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 2\pi$, используя предельный переход в формулах (3.4.62) — (3.4.64). Таким образом, функция $\rho(T)$ при $2\pi \leq T < \infty$ непрерывна и монотонна.

Рассмотрим случай 1: $n = 0$, $0 \leq \varepsilon < 2\pi$, функция $F(t)$ равна почти всюду постоянной при $t > \varepsilon$, $T = \varepsilon$. Имеем:

$$\Phi'(\psi_0) = \int_0^{\varepsilon} \psi_0(t) \delta(t) dt = 0.$$

Дополнительные условия записываются в виде

$$\int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi_0(t) dt = 0.$$

От второго из этих условий легко избавиться, приведя условие

$$\int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi$$

к другому виду:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt &= \int_0^{\varepsilon} F(t) \psi_0(t) dt + \int_{\varepsilon}^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \\ &= \int_0^{\varepsilon} [F(t) - F(t_0)] \psi_0(t) dt = \pi, \end{aligned}$$

так как

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi} \psi_0(t) dt = - \int_0^{\varepsilon} \psi_0(t) dt,$$

где $F(t_0) = \text{const}$, $\varepsilon < t_0 < 2\pi$.

Очевидно, что и в этом случае $\psi_0(t) = C_1 F(t) + C_2$. Находим C_1 и C_2 . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon} \psi_0(t) \delta(t) dt &= C_1 \int_0^{\varepsilon} F(t) \delta(t) dt + C_2 \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = \\ &= -C_1 \int_{\varepsilon}^{2\pi} F(t_0) \delta(t) dt + C_2 \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = 0, \end{aligned}$$

откуда $C_2 = -C_1 F(t_0)$.

Мы воспользовались тем, что

$$\int_0^{2\pi} F(t) \delta(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \delta(t) dt = 0.$$

Используем второе условие

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt &= \int_0^{\varepsilon} [F(t) - F(t_0)] \psi_0(t) dt = \\ &= C_1 \int_0^{\varepsilon} [F(t) - F(t_0)]^2 dt = \pi, \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 = \pi \left\{ \int_0^{\varepsilon} [F(t) - F(t_0)]^2 dt \right\}^{-1}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_0) &= \int_0^{\varepsilon} \psi_0^2(t) dt = c_1^2 \int_0^{\varepsilon} [F(t) - F(t_0)]^2 dt = \\ &= \pi^2 \left\{ \int_0^{\varepsilon} [F(t) - F(t_0)]^2 dt \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай 2. Функция $F(t)$ не равна почти всюду постоянной при $t > \varepsilon$, $\varepsilon = T$. Покажем, что в этом случае $\rho(T) = 0$. Должны выполняться условия

$$\int_0^{2\pi} \psi_0(t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi.$$

Положим

$$\psi_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, \varepsilon]; \\ \bar{\psi}_0(t) & \text{при } t \in (\varepsilon, 2\pi]. \end{cases}$$

Поскольку в этом случае $\int_0^\varepsilon \psi_0^2(t) dt = 0 = \min$, определенная выше функция $\psi_0(t)$ будет являться решением данной задачи, если удастся определить функцию $\bar{\psi}_0(t)$ так, что будут выполняться условия

$$\int_\varepsilon^{2\pi} \bar{\psi}_0(t) dt = 0, \quad \int_\varepsilon^{2\pi} F(t) \bar{\psi}_0(t) dt = \pi. \quad (3.4.65)$$

Покажем, что это возможно.

Так как $F(t)$ отлична от постоянной при $t > \varepsilon$, то найдутся два числа M_1 и M_2 такие, что

$$|M_1 - M_2| = \varepsilon \neq 0$$

и

$$\text{mes } t_1 > 0, \quad \text{mes } t_2 > 0,$$

где t_1 и t_2 — множества элементов, определяемые следующим образом: $t \in t_1$, если $t > \varepsilon$, $F(t) \geq M_1$; $t \in t_2$, если $t > \varepsilon$, $F(t) \leq M_2$ и меры множеств t_1 и t_2 обозначены соответственно $\text{mes } t_1$ и $\text{mes } t_2$.

Будем искать функцию $\bar{\psi}_0(t)$ в виде линейной комбинации характеристических функций множеств t_1 и t_2 . Условия (3.4.65) будут выглядеть так:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \int_{t_1} F(t) dt + C_2 \int_{t_2} F(t) dt &= \pi, \\ C_1 \int_{t_1} dt + C_2 \int_{t_2} dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.66)$$

Для доказательства существования решения системы (3.4.66) достаточно показать, что ее определитель отличен от нуля.

Предположим, что он равен нулю:

$$\left| \begin{array}{cc} \int_{t_1}^{\cdot} F(t) dt & \int_{t_2}^{\cdot} F(t) dt \\ \text{mes } t_1 & \text{mes } t_2 \end{array} \right| = 0.$$

Отсюда получим:

$$\frac{1}{\text{mes } t_1} \int_{t_1}^{\cdot} F(t) dt = \frac{1}{\text{mes } t_2} \int_{t_2}^{\cdot} F(t) dt. \quad (3.4.67)$$

Если функция $F(t)$ на $(\varepsilon, 2\pi]$ меняет знак на множестве ненулевой меры, то можно считать, что $M_1 > 0$, $M_2 < 0$. Тогда, используя (3.4.67), получим противоречие.

Пусть функция $F(t)$ не меняет знака на $(\varepsilon, 2\pi]$. Без ограничения общности можно считать $F(t) > 0$ при $t \in (\varepsilon, 2\pi]$ и $M_1 > M_2$. Тогда

$$M_1 = \frac{1}{\text{mes } t_1} \int_{t_1}^{\cdot} M_1 dt \leq \frac{1}{\text{mes } t_1} \int_{t_1}^{\cdot} F(t) dt, \quad (3.4.68)$$

$$\frac{1}{\text{mes } t_2} \int_{t_2}^{\cdot} F(t) dt \leq \frac{1}{\text{mes } t_2} \int_{t_2}^{\cdot} M_2 dt = M_2. \quad (3.4.69)$$

Используя равенство (3.4.67) и оценки (3.4.68) и (3.4.69), получим:

$$M_1 \leq M_2,$$

что противоречит условию $M_1 > M_2$. Итак, в этом случае $\rho(T) = 0$. Результаты для $1 < p < \infty$ получаются аналогично случаю $p = 2$.

Выразим функцию $F(t)$, определенную формулой (3.4.58), через $Q_0(t)$ и $\dot{Q}_0(t)$. Посредством элементарных преобразований можно получить:

$$F(t) = f_1(t) - \frac{\pi}{2} \left[\int_0^t \psi(s) ds + C \right], \quad (3.4.70)$$

где C — константа, и

$$\psi(t) = \begin{cases} -\dot{Q}_0(t) & \text{при } t \in [0, \pi]; \\ -[\dot{Q}(t) + 2B_1 \sin t] & \text{при } t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} Q_0(t) & \text{при } t \in [0, \pi]; \\ \frac{\pi}{2} [Q_0(t) + 2A_1 \sin t] & \text{при } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Константа C находится из условия

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^t \psi(s) ds + C \right] dt = 0.$$

Изложим теперь все основные результаты решения задачи при $p = 2$.

Как видно из предыдущего, для решения поставленной задачи оптимизации весьма важна функция $\rho(T)$. Она обладает следующими свойствами:

1.

$$\rho(T) = \begin{cases} 0 & \text{при } T \in [0, \varepsilon_1) \\ \left\{ \pi^2 \int_0^T [F(t) - F(t_0)]^2 dt \right\}^{-1} & \text{при } T \in [\varepsilon_1, 2\pi), \end{cases}$$

где ε_1 таково, что $F(t)$ не равна почти всюду константе при $t > \varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 < t_0 < 2\pi$.

$$2. \rho(T) = \frac{1}{n+1} \left[C_1^2 \int_0^\varepsilon F^2(t) dt + 2C_1 C_2 \int_0^\varepsilon F(t) dt + C_2^2 \varepsilon \right] +$$

$$+ \frac{1}{n} \left[C_1^2 \int_\varepsilon^{2\pi} F^2(t) dt + 2C_1 C_2 \int_\varepsilon^{2\pi} F(t) dt + C_2^2 (2\pi - \varepsilon) \right],$$

при $0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$, $2\pi \leq T = 2\pi n + \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$, где коэффициенты C_1 и C_2 соответственно определяются формулами (3.4.62) и (3.4.63).

3. Функция $\rho(T)$ монотонна и непрерывна при $2\pi \leq T < \infty$. Функция $\rho(T)$ непрерывна справа, т. е.

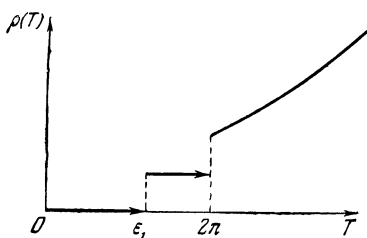


Рис. 16.

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} \rho(t) = \rho(t_0).$$

На рис. 16 изображен примерный график функции $\rho(T)$. Используя периодичность функций $\sin nt$ и $\cos nt$, можно найти функцию $\psi_0(t)$. При

$$2\pi \leq T < \infty,$$

$$T = 2\pi n + \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi,$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

функция $\psi_0(t)$ определяется следующей формулой:

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{n+1} F(t) + \frac{C_2}{n+1} & \text{при } [0, \varepsilon]; \\ \frac{C_1}{n} F(t) + \frac{C_2}{n} & \text{при } (\varepsilon, 2\pi]. \end{cases}$$

При $T \in [\varepsilon_1, 2\pi]$ функция $F(t)$ равна почти всюду постоянной на $[\varepsilon_1, 2\pi]$. При этом

$$\psi_0(t) = C [F(t) - F(t_0)], \quad t_0 \in [\varepsilon_1, 2\pi].$$

Для нахождения константы C используется равенство

$$\int_0^T [F(t) - F(t_0)] \psi_0(t) dt = \pi.$$

При $T < \varepsilon_1$ $\psi_0(t) = 0$.

В общем случае, когда $1 < p < \infty$, получаем аналогично $p = 2$ при $T = 2\pi n + \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \left| \frac{C_1^{(p)}}{n+1} F(t) + \frac{C_2^{(p)}}{n+1} \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sign} \left[\frac{C_1^{(p)}}{n+1} F(t) + \frac{C_2^{(p)}}{n+1} \right] & \text{при } t \in [0, \varepsilon]; \\ \left| \frac{C_1^{(p)}}{n} F(t) + \frac{C_2^{(p)}}{n} \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sign} \left[\frac{C_1^{(p)}}{n} F(t) + \frac{C_2^{(p)}}{n} \right] & \text{при } t \in [0, \varepsilon], \end{cases} \quad (3.4.71)$$

где $C_1^{(p)}$ и $C_2^{(p)}$ — константы. Эти константы $C_1^{(p)}$ и $C_2^{(p)}$ для случая произвольного p ($1 < p < \infty$) находим из условий

$$\int_0^{2\pi} \psi_0(t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(t) \psi_0(t) dt = \pi.$$

При $T \in [\varepsilon_1, 2\pi]$ получим:

$$\psi_0(t) = |C^{(p)} [F(t) - F(t_0)]|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sign} \{C^{(p)} [F(t) - F(t_0)]\}. \quad (3.4.72)$$

Для нахождения константы $C^{(p)}$ используется следующее условие:

$$\int_0^T [F(t) - F(t_0)] \psi_0(t) dt = \pi.$$

При $T < \varepsilon_1$ функция $\psi_0(t) \equiv 0$.

Получим теперь формулы для оптимального управления распределенной колебательной системой.

При $T < \varepsilon_1$ решение задачи не существует, так как в этом случае $\rho(T) \equiv 0$.

При $T \in [\varepsilon_1, 2\pi]$, используя (3.4.37) и (3.4.38), из (3.4.72) и (3.2.65) получим:

$$u^0(t) = \frac{1}{\pi} [F(t) - F(t_0)]. \quad (3.4.73)$$

Для $T \geq 2\pi$, используя (3.4.37) и (3.4.38), из (3.4.71) и (3.2.65) получим:

$$u^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(n+1)} \left[F(t) + \frac{C_2^{(p)}}{C_1^{(p)}} \right] & \text{при } t \in [0, \varepsilon]; \\ \frac{1}{\pi n} \left[F(t) + \frac{C_2^{(p)}}{C_1^{(p)}} \right] & \text{при } (\varepsilon, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.4.74)$$

На интервал, больший $[0, 2\pi]$, функция $u^0(t)$ продолжается периодически с периодом 2π . Так как функция $\rho(T)$ известна, то можно вычислить минимальное время T , для которого будет выполняться условие $|u| \leq l$.

Подставив в (3.4.73) и (3.4.74) выражение для $F(t)$, данное формулой (3.4.70), выразим управление через параметры распределений $Q_0(x)$ и $\dot{Q}_0(x)$ и, таким образом, получим формулы для оптимального управления:

$$u^0(t) = \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{\pi} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \psi(s) ds \quad \text{при } T \in [\varepsilon_1, 2\pi]$$

и при $T \geq 2\pi$:

$$u^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(n+1)} \left\{ f_1(t) - \frac{\pi}{2} \left[\int_0^t \psi(s) ds + C \right] + \frac{C_2^{(p)}}{C_1^{(p)}} \right\} & \text{при } t \in [0, \varepsilon]; \\ \frac{1}{\pi n} \left\{ f_1(t) - \frac{\pi}{2} \left[\int_0^t \psi(s) ds + C \right] + \frac{C_2^{(p)}}{C_1^{(p)}} \right\} & \text{при } t \in (\varepsilon, 2\pi], \end{cases}$$

где $f_1(t)$ и $\psi(t)$ — функции, фигурирующие в (3.4.70). Константа C находится из условия

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^t \psi(s) ds + C \right] dt = 0.$$

Можно доказать (однако мы этого делать здесь не будем), что при $p = 1$ и $p = \infty$ формулы (3.4.73), (3.4.74) остаются верными и величины $C^{(p)}$, $C_1^{(p)}$, $C_2^{(p)}$ стремятся к $C^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ и к $C^{(\infty)}$, $C_1^{(\infty)}$, $C_2^{(\infty)}$ соответственно.

§ 5. О наилучшем приближении функции многих переменных суммой произведений функций одной переменной

При решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами приходится иметь дело с функциями, зависящими от нескольких независимых переменных. Иногда эти функции имеют сложный характер. В этой связи при доказательстве общих теоретических положений, а также в приближенных вычислениях большую помощь может оказать метод аппроксимации

функции многих переменных суммой произведений функций одной независимой переменной.

В вычислительной технике, а также в автоматических системах управления часто требуются устройства, осуществляющие некоторую заранее заданную функциональную зависимость от двух или нескольких переменных величин. Например, при создании оптимальных систем после теоретического синтеза часто приходится вычислять значения функций многих переменных с помощью машин непрерывного или дискретного действия [118].

Известно несколько методов построения функциональных преобразователей и воспроизведения функций многих независимых переменных [116, 118, 122, 123, 137], основанных на аппроксимации функций многих переменных. Особенно привлекателен метод, в котором заданная функция двух переменных аппроксимируется суммой произведений функций одной переменной. Для построения на основе этого метода функционального преобразователя требуются только однотипные множительные и суммирующие устройства. Методы создания функциональных преобразователей с одним входом в настоящее время достаточно хорошо разработаны.

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые особенности, связанные с разложением функций двух и большего числа переменных. Эти особенности имеют значение для практического использования и дальнейшего исследования метода. Перейдем к рассмотрению сущности метода [26].

Пусть в некоторой области, например в единичном квадрате на плоскости (x, y) , задана функция двух переменных $f(x, y)$. Требуется найти наилучшее среднеквадратичное приближение в виде

$$f(x, y) \cong \sum_{k=1}^N a_k g_k(x) h_k(y), \quad (3.5.1)$$

где N — заданное число, $g_k(x)$ и $h_k(y)$ — некоторая система независимых функций, a_k — некоторые числа. Функции $g_k(x)$, $h_k(y)$ и числа a_k выбираются из условия

$$R_N = \int_0^1 \int_0^1 \left[f(x, y) - \sum_{k=1}^N a_k g_k(x) h_k(y) \right]^2 dx dy = \min. \quad (3.5.2)$$

Заметим, что обычный двойной ряд Фурье с заданной биортогональной базисной системой не обладает свойством (3.5.2), так как при фиксированных $g_k(x)$ и $h_k(y)$ можно найти только наилучшие значения a_k . Условие (3.5.2) требует определения не только коэффициентов a_k , но также и наилучшей базисной системы функций одного переменного $g_k(x)$, $h_k(y)$. Таким образом, задачу (3.5.1) можно перефразировать следующим образом: при заданной функции двух переменных $f(x, y)$ требуется найти такую биортогональную базисную систему независимых функций $g_k(x)$ и $h_k(y)$, чтобы ряд Фурье функции $f(x, y)$ по этой системе удовлетворял условию (3.5.2) при любом N . Систему функций, удовлетворяющую этому условию, можно назвать экстремальной биортогональной базисной системой для функции $f(x, y)$. Предположим, что при некоторых a_k и нормированных функциях $g_k(x)$ и $h_k(y)$ условие (3.5.2) удовлетворяется. Проварьируем функции g_k и h_k с помощью $2N$ произвольных вещественных параметров ε_k и η_k и $2N$ функций одного переменного $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(y)$. Подставим $g_k(x) + \varepsilon_k \varphi_k(x)$ и $h_k(y) + \eta_k \psi_k(y)$ в (3.5.2) вместо $g_k(x)$ и $h_k(y)$. Затем, продифференцируем выражение R_N по параметрам ε_k и η_k и приравняем нулю производные. Положив после этого $\varepsilon_k = 0$ и $\eta_k = 0$, получим для функций $g_k(x)$ и $h_k(y)$ следующую систему интегральных уравнений:

$$\int_0^1 \left[f(x, y) - \sum_{k=1}^N a_k g_k(x) h_k(y) \right] h_i(y) dy = 0, \quad (3.5.3)$$

$$\int_0^1 \left[f(x, y) - \sum_{k=1}^N a_k g_k(x) h_k(y) \right] g_i(x) dx = 0, \quad (3.5.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

или

$$\int_0^1 f(x, y) h_i(y) dy = \sum_{k=1}^N a_k b_{ki} g_k(x), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5.5)$$

$$\int_0^1 f(x, y) g_i(x) dx = \sum_{k=1}^N a_k c_{ki} h_k(y), \quad (3.5.6)$$

где

$$b_{ki} = \int_0^1 h_k(y) h_i(y) dy, \quad c_{ki} = \int_0^1 g_k(x) g_i(x) dx. \quad (3.5.7)$$

Легко доказывается следующее утверждение: система уравнений (3.5.5) и (3.5.6) всегда имеет нетривиальные решения. Причем все решения являются собственными функциями однородных интегральных уравнений следующего вида:

$$\lambda g(x) = \int_0^1 K_1(x, s) g(s) ds, \quad \lambda h(y) = \int_0^1 K_2(y, s) h(s) ds, \quad (3.5.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_1(x, s) &= \int_0^1 f(x, y) f(s, y) dy, \\ K_2(y, s) &= \int_0^1 f(x, y) f(x, s) dx \end{aligned} \right\} \quad (3.5.9)$$

-- неотрицательные симметрические ядра уравнений (3.5.8). Оказывается, что оба уравнения (3.5.8) всегда имеют одинаковые собственные значения одной и той же кратности.

Докажем это утверждение. Вводя обозначения

$$g = (g_1, \dots, g_N), \quad h = (h_1, \dots, h_N), \quad (3.5.10)$$

$$Fg = \int_0^1 f(x, y) g(x) dx, \quad (3.5.11)$$

$$F^*h = \int_0^1 f(x, y) h(y) dy, \quad (3.5.12)$$

представим уравнения (3.5.5) и (3.5.6) в операторной форме:

$$Fg = Ah, \quad F^*h = Bg, \quad (3.5.13)$$

где A и B — квадратные матрицы с элементами, равными $a_k b_{ki}$ и $a_k c_{ki}$ соответственно.

Из соотношений (3.5.13) имеем

$$FF^*h = FBg = BAh, \quad F^*Fg = F^*Ah = ABg, \quad (3.5.14)$$

где

$$FF^*h = \int_0^1 K_2(y, s) h(s) ds, \quad F^*Fg = \int_0^1 K_1(x, s) g(s) ds, \quad (3.5.15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1(x, s) &= \int_0^1 f(x, y) f(s, y) dy, \\ K_2(y, s) &= \int_0^1 f(x, y) f(x, s) dx. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.16)$$

Очевидно, что ядра $K_1(x, s)$ и $K_2(y, s)$ — симметричные и неотрицательные, так как

$$(FF^*\varphi, \varphi) = (F^*\varphi, F^*\varphi) \geq 0. \quad (3.5.17)$$

Перестановочность F и B , F^* и A следует из того, что F и F^* — диагональные операторы в пространстве $(n \times n)$ вектор-функций, а диагональные интегральные операторы перестановочны с любым постоянным линейным оператором. Из полученных равенств далее следует, что операторы BA и AB вместе с операторами FF^* и F^*F сами являются диагональными на векторах g и h .

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} BAh &\equiv (\alpha_1 h_1, \dots, \alpha_N h_N), \\ ABg &\equiv (\beta_1 g_1, \dots, \beta_N g_N). \end{aligned} \right\} \quad (3.5.18)$$

И, следовательно,

$$FF^*h_i = \alpha_i h_i, \quad F^*Fg_i = \beta_i g_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.5.19)$$

Поэтому заключаем, что все компоненты векторов g и h решения системы уравнения (3.5.13) являются линейными комбинациями собственных функций операторов FF^* и F^*F .

Докажем, что операторы F^*F и FF^* имеют равные собственные значения одинаковой кратности.

Пусть $\lambda \neq 0$ и является собственным значением оператора FF^* , т. е.

$$FF^*h_i = \lambda h_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.5.20)$$

Докажем, что λ есть также собственное значение оператора F^*F , соответствующее собственной функции F^*h_i .

Действительно,

$$F^*F(F^*h_i) = F^*(FF^*h_i) = \lambda(F^*h_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.5.21)$$

Обратное утверждение также справедливо. А именно, если λ является собственным значением оператора F^*F , то λ будет и собственным значением оператора FF^* .

Докажем, что λ имеет одинаковую кратность как для FF^* , так и для F^*F .

Пусть λ имеет кратность r для F^*F и h_1, \dots, h_r — ортогональные собственные функции, принадлежащие собственному значению λ . Тогда функции F^*h_1, \dots, F^*h_r , как показано выше, будут ортогональными собственными функциями оператора FF^* . Проверим ортогональность:

$$(F^*h_i, F^*h_j) = (FF^*h_i h_j) = \lambda(h_i, h_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j; \\ \lambda & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (3.5.22)$$

Таким образом, утверждение доказано. Отсюда следует, что все решения системы (3.5.5) и (3.5.6) являются ортогональными функциями, следовательно $c_{ki} = b_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Тогда a_k будет собственным значением двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) h_k(y) dy &= a_k g_k(x), \\ \int_0^1 f(x, y) g_k(x) dx &= a_k h_k(y). \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

(Здесь $g_k(x)$ и $h_k(y)$ считаются нормированными.) Отсюда явствует, что $a_k^2 = \lambda_k > 0$.

В силу симметричности ядер K_1 и K_2 число собственных функций g_k и h_k может быть конечным или счетным. Составим бесконечный ряд из собственных функций интегральных уравнений (3.5.8):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} g_k(x) h_k(y). \quad (3.5.24)$$

Тогда можно установить следующее положение: ряд (3.5.24) сходится к функции $f(x, y)$ в среднем и является

экстремальным разложением этой функции, т. е. частичная сумма ряда (3.5.24) при любом фиксированном N дает решение поставленной в начале этого параграфа задачи наилучшего приближения в смысле минимума среднеквадратичного отклонения.

Докажем, что ряд (3.5.24), составленный из собственных элементов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} g_k(x) h_k(y), \quad (3.5.25)$$

сходится в среднем к функции $f(x, y)$.

Вычислим функционал

$$\begin{aligned} R_N &= \int_0^1 \int_0^1 \left[f(x, y) - \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} g_k(x) h_k(y) \right]^2 dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - 2 \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) g_k(x) h_k(y) dx dy + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} h_k(y) g_k(x) \right] \left[\sum_{\alpha=1}^N \sqrt{\lambda_\alpha} h_\alpha(y) g_\alpha(x) \right] dx dy = \\ &= \int_0^1 \left[K_1(x, x) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (g_\alpha(x))^2 \right] dx. \quad (3.5.26) \end{aligned}$$

Здесь были использованы соотношения

$$F^* h_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} g_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5.27)$$

$$\int_0^1 [f(x, y)]^2 dy = K_1(x, x), \quad \int_0^1 h_i(y) h_j(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (3.5.28)$$

По неравенству Буняковского [76] имеем:

$$\begin{aligned} R_N &\leq \int_0^1 \left[K_1(x, x) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (g_\alpha(x))^2 \right] dx \leq \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 \left[K_1(x, x) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (g_\alpha(x))^2 \right]^2 dx}. \quad (3.5.29) \end{aligned}$$

Из теории интегральных уравнений известно, что ряд

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \lambda_{\alpha} (g_{\alpha}(x))^2 \quad (3.5.30)$$

сходится в среднем к $K_1(x, x)$. Отсюда получаем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \left[f(x, y) - \sum_{\alpha=1}^N \sqrt{\lambda_{\alpha}} g_{\alpha}(x) h_{\alpha}(y) \right]^2 dx dy = 0. \quad (3.5.31)$$

Утверждение о сходимости в среднем ряда (3.5.25) доказано.

Осталось доказать, что ряд (3.5.25) есть экстремальный ряд, т. е. надо доказать, что частная сумма ряда (3.5.25) S_N при любом N является наилучшим средним квадратичным приближением к функции $f(x, y)$ в смысле выражения (3.5.2).

Докажем это сначала для случая $N = 1$. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные суммируемые с квадратом функции, тогда

$$\begin{aligned} R_1(\varphi, \psi) &= \int_0^1 \int_0^1 (f - \varphi\psi)^2 dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - 2 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \varphi(x) \psi(y) dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 [\varphi(x)]^2 [\psi(y)]^2 dx dy. \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Введем обозначения

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi^2(x) \psi^2(y) dx dy = a^2,$$

$\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — функции, получающиеся при нормировке φ и ψ . Тогда

$$\begin{aligned} R(\varphi, \psi) &= \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - \\ &\quad - 2a \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \varphi(x) \psi(y) dx dy + a^2. \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}(y) dx dy = \\ = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{\alpha}} g_{\alpha}(x) h_{\alpha}(y) \right] \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}(y) dx dy. \quad (3.5.34)$$

Из теоремы Леви [112] следует, что подынтегральное выражение в (3.5.34) можно почленно интегрировать. Тогда получим:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \tilde{\varphi}(x) \tilde{\psi}(y) dx dy = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \varphi^{\alpha} \psi^{\alpha}, \quad (3.5.35)$$

где

$$\varphi^{\alpha} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(x) g_{\alpha}(x) dx, \quad \psi^{\alpha} = \int_0^1 \tilde{\psi}(y) h_{\alpha}(y) dy. \quad (3.5.36)$$

После подстановки (3.5.35) в (3.5.33) получим:

$$R(\varphi, \psi) = \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - 2a \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \varphi^{\alpha} \psi^{\alpha} + a^2. \quad (3.5.37)$$

Так как

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} (\varphi^{\alpha})^2 \leq 1, \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\psi^{\alpha})^2 \leq 1, \quad \sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_i} \text{ при } i = 2, 3, \dots, \quad (3.5.38)$$

то (3.5.37) достигает минимума только тогда, когда

$$\tilde{\varphi}(x) = g_1(x), \quad \tilde{\psi}(y) = h_1(y). \quad (3.5.39)$$

Таким образом, $R(\varphi, \psi) \geq R(g, h)$ утверждение для случая $N = 1$ доказано.

Случай $N > 1$ доказывается по индукции, так как можно записать, что

$$f(x, y) - S_{N+1} = [f(x, y) - S_N] - \sqrt{\lambda_{N+1}} g_{N+1}(x) h_{N+1}(y). \quad (3.5.40)$$

В силу ортогональности всех членов ряда, доказательство совершенно аналогично доказательству для случая $N = 1$. Вторая половина утверждения доказана.

Полученная система функций $g_k, h_k, k = 1, 2, \dots, N$, может служить наилучшим базисом разложения функции $f(x, y)$ в смысле быстроты сходимости ряда Фурье. Для разложения обычных достаточно «хороших» функций этот метод является удобным и эффективным.

Для оценки степени приближения к функции $f(x, y)$ может служить следующая формула:

$$R_N = \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - \sum_{k=1}^N \lambda_k. \quad (3.5.41)$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} R_N &= [(f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, S_N) = \\ &= (f, f) - \sum_{k=1}^N \lambda_k = \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - \sum_{k=1}^N \lambda_k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

Отсюда

$$R_N = \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy - \sum_{k=1}^N \lambda_k. \quad (3.5.43)$$

Из сходимости в среднем получим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = (f, f) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 0. \quad (3.5.44)$$

Отсюда

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y)]^2 dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k. \quad (3.5.45)$$

Формула (3.5.41) доказана.

Распространим этот метод на функции многих переменных. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l)$. $r + l = n$, задана в единичном кубе n -мерного пространства. Через p_x и p_y обозначим точки в соответствующих пространствах (x_1, \dots, x_r) и (y_1, \dots, y_l) . Функцию $f(p_x, p_y)$ требуется разложить в ряд, частные суммы которого дают наилучшее среднеквадратичное приближение. Такой ряд будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} g_k(p_x) h_k(p_y). \quad (3.5.46)$$

Частная сумма ряда удовлетворяет условию

$$R_N = \iint \left[f(p_x, p_y) - \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} g_k(p_x) h_k(p_y) \right]^2 dp_x dp_y =$$

$$= \min_{a_k, \varphi_k, \psi_k} \iint \left[f(p_x, p_y) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(p_x) \psi_k(p_y) \right]^2 dp_x dp_y. \quad (3.5.47)$$

Здесь интегралы берутся по области изменения соответствующих переменных.

Совершенно аналогично случаю функций двух переменных, получим систему интегральных уравнений для определения функций $g_k(p_x)$, $h_k(p_y)$

$$\int f(p_x, p_y) h(p_y) dp_y = \sqrt{\lambda} g(p_x), \quad \int f_1(p_x, p_y) dp_x = \sqrt{\lambda} h(p_y), \quad (3.5.48)$$

$$\int K_1(p_x, s_x) g(s_x) ds_x = \lambda g(p_x), \quad \int K_2(p_y, s_y) h(s_y) ds_y = \lambda h(p_y). \quad (3.5.49)$$

Эти уравнения являются обобщением уравнений (3.5.8) (3.5.9), (3.5.23). Все вышеприведенные утверждения справедливы и для этого случая.

В свою очередь функции $g_k(p_x)$ и $g_k(p_y)$ можно таким же путем разложить на сумму произведений функций меньшего числа переменных и т. д., в конечном итоге можно получить разложение в виде

$$f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l) =$$

$$= \sum a_{k_1 k_2 \dots k_r, \alpha_1 \dots \alpha_l} g_{k_1}^1(x_1) g_{k_2}^2(x_2) \dots g_{k_r}^r(x_r) h_{\alpha_1}^1(y_1) \dots h_{\alpha_l}^l(y_l). \quad (3.5.50)$$

Можно показать, что этот ряд также сходится к функции $f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l)$ в среднем.

Из самого процесса получения ряда (3.5.50) видно, что хотя каждое отдельное разложение типа (3.5.46) представляет собой наилучшее, однако разложение (3.5.50), вообще говоря, не будет наилучшим. Для построения наилучшего разложения в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \cong \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha h_1^\alpha(x_1) h_2^\alpha(x_2) \dots h_n^\alpha(x_n) \quad (3.5.51)$$

нужно установить новые условия, исходя непосредственно из вида ряда (3.5.51).

Пусть некоторая система функций $h_1^1(x_1) \dots h_n^1(x_n)$ и число λ являются решением задачи

$$R = \int_D [f(x_1, \dots, x_n) - \lambda h_1^1(x_1) \dots h_n^1(x_n)]^2 dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \min_{a, \varphi_i(x_i)} \int_D [f(x_1, \dots, x_n) - \lambda \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)]^2 dx_1 \dots dx_n. \quad (3.5.52)$$

Здесь через D обозначен единичный куб в n -мерном пространстве, на котором определена функция $f(x_1, \dots, x_n)$. Функции $h_i^1(x_i)$ в (3.5.52), очевидно, можно считать нормированными. Варьируя функции $h_i^1(x_i)$, входящие в (3.5.52) из необходимого условия экстремума получим систему интегральных уравнений относительно $h_i^1(x_i)$

$$\lambda h_k^1(x_k) = \int_{D_k} f(x_1, \dots, x_n) h_1^1(x_1) \dots h_{k-1}^1(x_{k-1}) h_{k+1}^1(x_{k+1}) \dots$$

$$\dots h_n^1(x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5.53)$$

Здесь через D_k обозначен единичный куб размерности $n - 1$ без k -й координаты, $k = 1, 2, \dots, n$.

Ясно, что система интегральных уравнений (3.5.53) является нелинейной. Полное исследование задачи наилучшего разложения типа (3.5.51) связано со свойствами решений интегральных уравнений (3.5.53). Поэтому прежде всего нужно установить основные свойства системы (3.5.53).

При исследовании этой проблемы удалось получить следующие результаты: система нелинейных интегральных уравнений (3.5.53) всегда имеет хотя бы одно нетривиальное решение, если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не эквивалентна нулю, т. е. если

$$\int_D [f(x_1, \dots, x_n)]^2 dx_1 \dots dx_n \neq 0. \quad (3.5.54)$$

Более того, решение (3.5.53) соответствующее наибольшему значению λ (по абсолютной величине), является и

решением задачи (3.5.52), и является первым экстремальным элементом разложения (3.5.51).

Итак, наилучшее приближение (3.5.51) при $N = 1$ найдено. Второй член $\lambda_2 h_1^2(x_1) \dots h_n^2(x_n)$ этого разложения можно найти из условия

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_D [f_2(x_1, \dots, x_n) - \lambda_2 h_1^2(x_1) \dots h_n^2(x_n)]^2 dx_1 \dots dx_n = \\ &= \min_{\varphi_i^2(x_i), a_2} \int_D [f_2(x_1, \dots, x_n) - a_2 \varphi_1^2(x_1) \dots \varphi_n^2(x_n)]^2 dx_1 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (3.5.55)$$

где

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda h_1^1(x_1) \dots h_1^1(x_n). \quad (3.5.56)$$

Система интегральных уравнений для определения $h_i^2(x)$ и λ_2 будет иметь вид

$$\begin{aligned} \lambda_2 h_k^2(x_k) &= \int_{D_k} f_2(x_1, \dots, x_n) h_1^2(x_1) \dots h_{k-1}^2(x_{k-1}) h_{k+1}^2(x_{k+1}) \dots \\ &\dots h_n^2(x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} dx_n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

Таким образом можно найти и последующие члены приближения.

Рассмотренное оптимальное приближение ядра выгоднее обычного приближения, например, разложения в двойной ряд Фурье, потому что, вообще говоря, для получения одной и той же точности приближения требуется число членов оптимального разложения меньше числа членов разложения по другим системам функций. Это означает, что соответствующая l -проблема моментов имеет меньший порядок и, следовательно, потребует меньших усилий для ее решения.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Метод последовательных приближений, основанный на результатах решения l -проблемы моментов

В главе III было показано, что широкий класс задач оптимального управления сводится к соответствующей l -проблеме моментов.

При этом задачам оптимального управления системами с распределенными параметрами, вообще говоря, соответствует бесконечное число моментных равенств (3.1.7).

Задача оптимального управления для линейных систем с сосредоточенными параметрами соответствует конечномерной проблеме моментов, т. е. конечному числу равенств типа (3.1.7).

Решение «усеченной» задачи при конечном n в большинстве случаев можно рассматривать как приближенное решение задачи оптимального управления [16, 19, 135].

Как было видно из рассмотрения задач оптимального управления нагревом массивного тела и оптимального управления непрерывной колеблющейся средой (§ 4 главы III), роль функции $h_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, играют тригонометрические функции пространственной переменной: $\sin \mu_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, в задаче теплопроводности и $\sin \frac{\pi k}{S} x$, $\cos \frac{\pi k}{S} x$, $k = 1, 2, \dots$, в задаче о колебании непрерывной распределенной среды. В силу этого решение усеченной задачи при конечном n соответствует «уничтожению» первых n гармоник в разложении начального распределения $Q_0(x)$ по соответствующим гармоникам (см. § 1 главы III). Поэтому метод моментов, когда роль функций $h_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ играют тригонометрические функции, мы иногда будем также называть методом гармоник.

Итак, будем решать следующую задачу: найти такую функцию $u(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, удовлетворяющую условию

$$|u(t)| \leq l, \quad (4.1.1)$$

и такое минимальное число T^0 , для которых выполнялись бы равенства

$$\alpha_k = \int_0^{T^0} g_k(T^0, \tau) u(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.2)$$

где α_k — заданные числа и $g_k(T, \tau)$ — заданные функции.

Опишем метод последовательных приближений, с помощью которого можно решать сформулированную проблему.

Как уже указывалось в теореме 2 § 2 главы III, решение этой задачи сводится к следующему: найти такие числа ξ_1^0, \dots, ξ_n^0 и T^0 , что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n(T)} = \min_{\xi_k} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(T, \tau) \right| d\tau = \\ = \int_0^{T^0} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(T^0, \tau) \right| d\tau = \frac{1}{l} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

при

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^0 \alpha_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1. \quad (4.1.4)$$

Так как при $n \rightarrow \infty$ предельная функция $\lambda(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(T)$

существует и непрерывна и кроме того $\frac{1}{\lambda(T)} \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, то, очевидно, существует решение T^0 уравнения $\lambda(T) = \frac{1}{l}$, дающее время оптимального процесса в распределенной системе.

Как следует из рассмотрения задачи оптимального нагрева массивного тела в § 9 главы I, для этой задачи функция $\frac{1}{\lambda(T)}$ действительно непрерывна и $\frac{1}{\lambda(T)} \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Однако такое положение не всегда имеет место. Действительно, в § 4 главы III мы видели, что в задаче оптимального управления распределенной колеблющейся системой

функция $\frac{1}{\lambda(T)}$ уже не будет непрерывной при всех значениях T , так как в точке $T = S/a$ она имеет разрыв. Обозначим

$$\rho_{\xi}(T) = \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(T, \tau) \right| d\tau, \quad (4.1.5)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (4.1.6)$$

Возьмем произвольное значение вектора $\xi = \xi_0$, удовлетворяющее (4.1.4), и построим график функции $\rho_{\xi_0}(T)$ в зависимости от T (рис.

17). Так как функция $\rho_{\xi_0}(T)$ монотонно возрастает по T от нуля и $\rho_{\xi_0}(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, существует такое T_0 , что $\rho_{\xi_0}(T_0) = 1/l$, т. е. график функции $\rho_{\xi_0}(T)$ пересечет линию уровня $1/l$ в точке с абсциссой $T = T_0$.

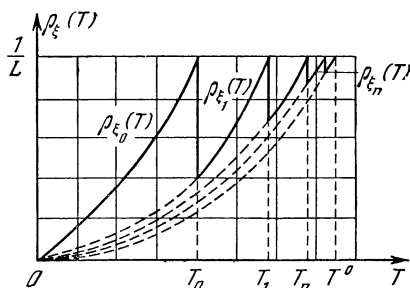


Рис. 17.

При $T = T_0$ $\rho_{\xi}(T_0)$ зависит от вектора ξ . Найдем минимум $\rho_{\xi}(T_0)$

по всем возможным ξ , удовлетворяющим условию (4.1.4). Если этот минимум достигается на векторе нулевого приближения ξ_0 , то задача (4.1.3), (4.1.4) решена. Если же минимум не достигается при ξ_0 , то существует такое ξ_1 , при котором $\rho_{\xi_1}(T_0) = \min_{\xi} \rho_{\xi}(T_0) < 1/l$. График

$\rho_{\xi_1}(T)$ как функции T пересечет уровень $1/l$ в точке $T = T_1$. При $T = T_1$ снова найдем минимум функции $\rho_{\xi}(T_1)$ по всем ξ , удовлетворяющим условию (4.1.4), т. е. найдем такое ξ_2 , удовлетворяющее условию (4.1.4), что

$$\rho_{\xi_2}(T_1) = \min_{\xi} \rho_{\xi}(T_1) \leq \frac{1}{l}. \quad (4.1.7)$$

Если $\rho_{\xi_2}(T_1) = 1/l$, то задача решена, если нет, то процесс нужно продолжать дальше. В результате получится последовательность T_0, T_1, \dots , сходящаяся к T^0 — времени

оптимального переходного процесса, и последовательность ξ_0, ξ_1, \dots , сходящаяся к вектору ξ^0 , определяющему оптимальное управление по формуле

$$u_n(t) = l \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(T^0, t). \quad (4.1.8)$$

Таким образом, процесс определения оптимального управляющего воздействия и времени оптимального процесса

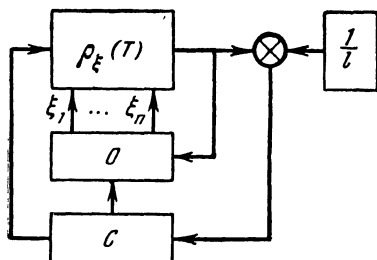


Рис. 18.

сводится к последовательности минимизации и определению точек пересечения монотонной кривой с уровнем $1/l$.

Заметим, что так как $\rho_\xi(T)$ при фиксированном T есть выпуклая функция ξ , а (4.1.4) есть линейное условие, то минимизация функции $\rho_\xi(T)$ по ξ может

производиться любым известным способом (например, методом градиента или наискорейшего спуска и др.), который приведет к нахождению точки абсолютного минимума функции $\rho_\xi(T)$.

Описанный процесс последовательных приближений для нахождения оптимального управления и времени оптимального процесса может быть легко автоматизирован с помощью оптимизатора на несколько переменных и блоков вычислительных устройств [118]. На рис. 18 приведена схема такого вычислительного устройства.

При фиксированном ξ синхронизатор C запускает генератор функции $\rho_\xi(T)$. После того как T достигнет значения, при котором

$$\rho_\xi(T) = \frac{1}{l}, \quad (4.1.9)$$

синхронизатор включает оптимизатор O , который варьированием параметров ξ_1, \dots, ξ_n , удовлетворяющих условию (4.1.4), по определенному принятому алгоритму минимизирует функцию $\rho_\xi(T)$ по ξ при фиксированном T , найден-

ном из условия (4.1.9). После окончания минимизации синхронизатор снова включает генератор функции $\rho_{\xi}(T)$ при фиксированном ξ для определения такого T , при котором выполняется (4.1.9) и т. д.

Критерием окончания этого процесса может служить величина разности двух последовательных значений времени T_k и T_{k+1} . При $|T_k - T_{k+1}| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число, процесс можно остановить.

Из рассмотрения рис. 17 видно, что логику описанного выше процесса последовательных приближений можно несколько упростить. Действительно, задачу (4.1.3), (4.1.4)

можно переформулировать следующим образом: найти такой вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, при котором пересечение графика функции $\rho_{\xi}(T)$ с уровнем $1/l$ происходит при наибольшем T , т. е. надо найти

$$\max_{\xi} T = T^{\circ} \quad (4.1.10)$$

при условии (4.1.9).

На рис. 19 изображена схема вычислительного устройства, реализующего алгоритм решения этой задачи. Синхронизатор запускает генератор функции $\rho_{\xi}(T)$ при фиксированном ξ и одновременно запускает датчик времени T . Когда при некотором значении T удовлетворится условие (4.1.9), это значение поступает в оптимизатор. Оптимизатор так варьирует параметры ξ_1, \dots, ξ_n , удовлетворяющие условию (4.1.4), чтобы максимизировать время T . Момент окончания этого процесса можно определять по тому же критерию, что и в предыдущем случае.

Упомянем еще одну возможность создания вычислительного устройства, основанную на том, что в задаче (4.1.3), (4.1.4) легко вычисляется градиент функции $\rho_{\xi}(T)$:

$$\frac{\partial \rho_{\xi}(T)}{\partial \xi_k} = \int_0^T g_k(T, \tau) \operatorname{sign} \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(T, \tau) d\tau, \quad (4.1.11)$$

$$k = 1, \dots, n.$$

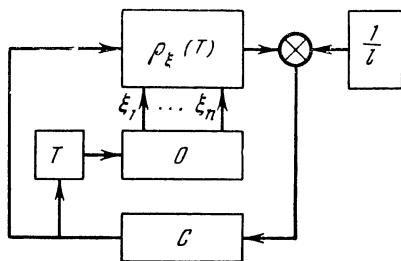


Рис. 19.

Эту формулу можно реализовать с помощью вычислительного устройства и осуществлять спуск (минимизацию) из любой начальной точки при условии (4.1.4). Таким образом, в этом случае можно обойтись без непосредственного применения автоматического оптимизатора с несколькими входами.

§ 2. Применение разностных методов для приближенного решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами

При создании систем оптимального управления объектами с распределенными параметрами возникают сложные задачи определения оптимальных управляющих воздействий. Управляющие воздействия для таких объектов также могут быть распределены в пространстве и во времени. В силу сложности процессов, происходящих в системах с распределенными параметрами, а также в силу еще недостаточного развития теории управления такими системами бывает трудно получить уравнения в достаточно удобном для расчетов виде. В тех случаях, когда не удастся получить аналитические выражения для искомых функций, наряду с прямыми методами решения можно применять метод сведения дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и к уравнениям в конечных разностях (соответственно метод прямых и метод конечных разностей), для которых уже имеется достаточно хорошо разработанная теория оптимальных процессов.

Приближенное описание системы с распределенными параметрами с помощью дискретизации математической модели имеет большое практическое значение также и при определении оптимальных управляющих воздействий с помощью вычислительных устройств. При этом, как правило, требуется соответствующее дискретное представление, в котором, например, производные заменяются конечными разностями, интегралы представляются в виде сумм конечного числа слагаемых и т. д.

На практике распространены следующие виды разностной аппроксимации.

1. **Пространственное квантование.** В этом случае модель процесса описывается конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, где присутствуют непрерывные производные по времени от конечного числа параметров, жестко связанных с соответствующим конечным числом пространственных точек. Этот способ аппроксимации представляет наибольший практический интерес, так как в этом случае для моделирования распределенных систем можно широко использовать электрические и механические аналоговые вычислительные устройства.

2. **Квантование во времени.** Соответствующая модель обычно описывается конечным числом дифференциальных уравнений, где пространственные переменные меняются непрерывно. Эта модель может быть полезна, когда пространственные распределения наблюдаются в отдельные дискретные моменты времени.

3. **Пространственно-временное квантование.** В этом случае аппроксимирующая система состоит из системы конечного числа разностных (алгебраических) уравнений. Задачи оптимизации для подобного рода систем были рассмотрены в главе II. Такая форма представления математической модели объекта требуется при расчетах на цифровых вычислительных машинах.

4. **Усечение пространственных гармоник.** Для многих физических систем, рассматриваемых в ограниченной пространственной области, точное описание их поведения дается бесконечной суммой слагаемых, каждое из которых представляет собой пространственную гармонику (синусоиду, косинусоиду или другую функцию) с амплитудой, зависящей от времени (см., например, формулу (4.3.2)), причем частота этих гармоник растет пропорционально номеру слагаемого, а значение амплитуды с ростом номера и времени, как правило, довольно быстро падает. Вследствие этого, без существенной потери точности решение можно представить лишь конечным и обычно небольшим числом первых слагаемых, а весь бесконечный остаток ряда можно отбросить.

Отметим, что существует громадное число различных способов (схем) пространственного и временного квантования. Однако при этом возникает естественный и весьма существенный вопрос: «Является ли данная конкретная схема

квантования подходящей в том смысле, что решение дискретной системы стремится к решению исходной непрерывной системы, когда соответствующие интервалы квантования стремятся к нулю?» Ответ на этот вопрос требует рассмотрения характера точного решения и соответствующего ему функционального пространства, в котором рассматривается данная распределенная система.

Для широкого класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных произвольного порядка вида

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{k_1, \dots, k_m} A_{(k_1, \dots, k_m)}(t, x) \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} + A(t, x) Q(t, x) + B(t, x) U(t, x), \quad (4.2.1)$$

где

$$Q = Q(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

и

$$A(t, x), \quad B(t, x)$$

— соответствующие матрицы, а $\sum_{j=1}^m k_j = k \geq 1$, задача с начальными условиями (задача Коши) является корректной. В этом случае, для того чтобы соответствующее дискретное приближение сходилось к точному непрерывному решению при стремлении интервала квантования к нулю, необходимо и достаточно, чтобы приближенные уравнения были совместными, а их решения устойчивыми.

Таким образом, для того чтобы установить пригодность данной системы дискретных управлений для аппроксимации точного решения нужно установить совместность и устойчивость этой системы. После этого можно установить интервалы квантования (как пространственные, так и временные), которые обеспечивают сохранение максимального значения ошибки (в смысле определенной нормы) в допустимых пределах.

Не менее трудной является проблема определения приближенного оптимального управления. Здесь также возникает вопрос: «Будет ли оптимальное управление, соответствующее дискретной системе, стремиться в каком-то определенном смысле к оптимальному управлению, соответст-

вующему распределенной системе?» Надо отметить, что этот вопрос еще не подвергался всестороннему математическому изучению и здесь отсутствуют сколько-нибудь общие и строгие результаты. В очень небольшой мере он был изучен для некоторых сосредоточенных систем. Как будет показано ниже, экспериментальные результаты, полученные для некоторых конкретных задач оптимального управления, указывают на то, что можно ожидать положительного решения поставленного выше вопроса в ряде случаев.

На практике всегда желательно установить некоторое соответствие между теми свойствами точного и приближенного решений, которые важны для управления, в частности, между устойчивостью, управляемостью и наблюдаемостью. При этом естественно ограничиться рассмотрением лишь тех приближенных решений, которые сходятся к точному решению. Здесь интересно ответить на такие вопросы: Существуют ли какие-то свойства исходной системы, которые не изменяются (являются инвариантными) при переходе к приближенным уравнениям? Если данная приближенная система обладает некоторым свойством, то насколько эти свойства будут присущи исходной точной системе?

Наличие некоторых свойств исходной системы следует из свойств сходимости приближенного решения к точному при стремлении к нулю интервала квантования.

Так, например, справедливо следующее утверждение: если сходящаяся приближенная система полностью управляема относительно некоторой точки фазового пространства, то соответствующая ей точная система полностью управляема относительно любой сколь угодно малой окрестности соответствующей точки функционального пространства точной системы.

В общем случае вопрос о сходимости приближенного решения к точному чрезвычайно труден. Однако для общей линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка (4.2.1) справедливо следующее утверждение: если приближенная система, аппроксимирующая уравнения (4.2.1), устойчива и полностью управляема относительно некоторой точки фазового пространства и удовлетворяет условию совместности, то соответствующая ей точная система полностью управляема

относительно некоторой сколь угодно малой окрестности соответствующей точки функционального пространства этой системы.

Это следует также непосредственно из двух приведенных ниже в этом параграфе утверждений.

Рассмотрим задачу оптимального управления системой, которая описывается широко распространенным одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad (4.2.2)$$

где a — постоянный коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — удельный вес.

Состояние системы описывается функцией распределения

$$Q = Q(x, t), \quad (4.2.3)$$

где x — пространственная координата, $0 \leq x \leq S$, t — временная координата, $0 \leq t \leq T$.

Заданы краевые и начальные условия

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha [u(t) - Q(0, T)], \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = 0, \quad (4.2.5)$$

$$Q(x, 0) = Q_0(x). \quad (4.2.6)$$

Здесь $Q_0(x)$ — известная функция, α — коэффициент теплообмена.

Задачу оптимального управления в этом случае можно сформулировать следующим образом. Пусть задана еще некоторая функция $Q^*(x)$, $0 \leq x \leq T$, характеризующая требуемое состояние системы. Нужно найти такое допустимое управляющее воздействие $u = u(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющее дополнительному условию $|u| \leq l$, чтобы управляемая система, описываемая уравнениями (4.2.2) — (4.2.5), перешла из начального состояния, описываемого функцией $Q_0(x)$ (см. равенство (4.2.6)), в требуемое состояние $Q^*(x)$ за минимальное время T .

Однако, если время T заранее фиксировано и достаточно мало для того, чтобы не существовало допустимого управ-

ления, переводящего систему из начального состояния в требуемое, то задача в этом случае может ставиться несколько иначе. А именно, найти такое допустимое управляющее воздействие $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, где время T является уже фиксированной константой, при условии $|u(t)| \leq l$, чтобы в конце процесса при $t = T$ отклонение функции распределения $Q(x, t)$ от заданной функции $Q^*(x)$ было минимальным, т. е. чтобы некоторый функционал

$$J = J [Q(x, T), Q^*(x)], \quad (4.2.7)$$

представляющий собой меру указанного отклонения, достиг наименьшего значения.

В качестве такого функционала можно взять, например, следующий интеграл:

$$J = \int_0^S |Q^*(x) - Q(x, T)|^\gamma dx, \quad \gamma \geq 1. \quad (4.2.8)$$

Покажем теперь, как с помощью метода прямых можно приближенно решать сформулированные выше задачи, сводя их, таким образом, к проблеме оптимального управления для систем с сосредоточенными параметрами.

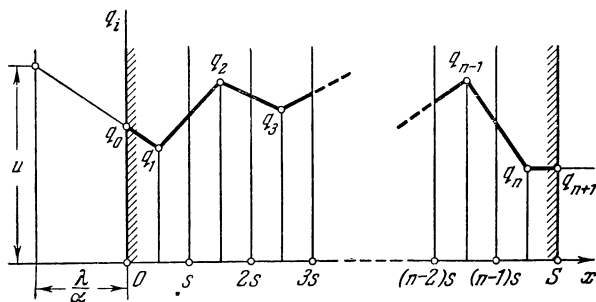


Рис. 20.

Разобьем отрезок $[0, S]$ оси x на n равных интервалов точками $x_0 = 0, x_1 = s, x_2 = 2s, \dots, x_n = S$, где $s = S/n$. Примем, что температура в средней точке каждого интервала определяется величиной $q_i, i = 1, \dots, n$ (рис. 20). Причем температура одной поверхности, с которой происходит нагрев, при $x = 0$ равна q_0 , а температура другой

теплоизолированной поверхности при $x = S$ равна q_{n+1} . Тогда, заменив в уравнении (4.2.4) значение частной производной по x функции $Q(x, t)$ при $x = 0$ первой разностью, получим:

$$-\lambda \frac{q_1 - q_0}{\frac{s}{2}} = \alpha (u - q_0). \quad (4.2.9)$$

Аналогично, заменяя в уравнении (4.2.2) вторую частную производную по x функции $Q(x, t)$ второй разностью, получим следующую дифференциально-разностную систему: для температуры q_1

$$\frac{dq_1}{dt} = a \frac{\frac{q_2 - q_1}{s} - \frac{q_1 - q_0}{\frac{s}{2}}}{s}, \quad (4.2.10)$$

для температур q_2, \dots, q_{n-1}

$$\frac{dq_i}{dt} = a \frac{\frac{q_{i+1} - q_i}{s} - \frac{q_i - q_{i-1}}{s}}{s}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (4.2.11)$$

для температуры q_n

$$\frac{dq_n}{dt} = a \frac{\frac{q_{n+1} - q_n}{\frac{s}{2}} - \frac{q_n - q_{n-1}}{s}}{s}. \quad (4.2.12)$$

Наконец, заменяя в уравнении (4.2.5) значение частной производной по x функции $Q(x, t)$ при $x = S$ соответствующей первой разностью, получим:

$$\frac{q_{n-1} - q_n}{\frac{s}{2}} = 0.$$

Учитывая последнее равенство, из уравнений (4.2.9) — (4.2.12), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, выраженную в безразмерной критериальной форме (с одним не дифференциальным, а

конечным уравнением, соответствующим (4.2.9):

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\beta}{2+\beta} u + \frac{2}{2+\beta} q_1, \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= 2q_0 - 3q_1 + q_2, \\ \frac{dq_i}{d\tau} &= q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{dq_n}{d\tau} &= q_{n-1} - q_n, \end{aligned}$$

где

$$\tau = \frac{at}{s^2} = n^2 \text{Fo}, \quad \beta = \frac{\alpha s}{\lambda} = \frac{1}{n} \text{Bi},$$

причем **Fo** и **Bi** являются критериями Фурье и Био соответственно.

Подставляя q_0 из первого уравнения во второе, дифференциальное, уравнение, мы приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{2\beta}{2+\beta} u - \frac{2+3\beta}{2+\beta} q_1 + q_2, \\ \frac{dq_i}{d\tau} &= q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{dq_n}{d\tau} &= q_{n-1} - q_n. \end{aligned} \right\} (4.2.13)$$

Изменение температуры $Q(x, t)$ аналогично изменению напряжения между проводами длиной линии с распределенными сопротивлением и емкостью и с пренебрежимо малой индуктивностью, как показано на рис. 21.

Распределение электрического напряжения в этой линии описывается уравнением, аналогичным уравнению теплопроводности,

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

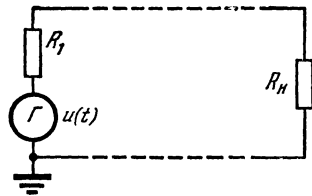


Рис. 21.

где r — активное сопротивление (омическое) единицы длины линии и c — емкость единицы длины линии.

Источник напряжения (генератор Γ) имеет внутреннее сопротивление R_1 , а его э.д.с. равна $u(t)$. Сопротивление

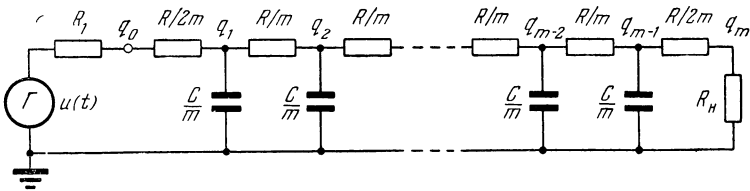


Рис. 22.

нагрузки равно R_n . Общее сопротивление всей распределенной линии равно $rS = R$, а общая емкость равна $cS = C$.

На рис. 22 изображена электрическая цепь, состоящая из последовательности m элементарных T -образных rc -цепочек с сосредоточенными параметрами, которая соответствует системе (4.2.13) и приблизительно моделирует процесс нагрева массивной пластины. Элементарная T -образная rc -цепочка изображена на рис. 23. Эту же цепь можно представить также в виде последовательности m элементарных Π -образных rc -цепочек (рис. 24). Элементарная Π -образная rc -цепочка изображена на рис. 25. При этом, как легко видеть, в обоих случаях параметры этой цепи выбираются из условий (4.2.2) — (4.2.4) в соответствии с задачей теплопроводности, т. е.

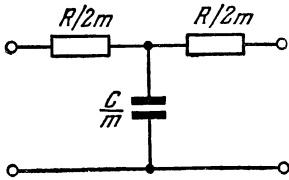


Рис. 23.

$$\frac{R}{R_1} = 2Bi \text{ и } RC = \frac{S^2}{a}. \quad (4.2.14)$$

А в силу (4.2.5) сопротивление нагрузки $R_n = \infty$.

Для полученной управляемой системы можно сформулировать задачи оптимального управления, соответствующие рассмотренным выше задачам для распределенной системы.

Действительно, пусть в начальный момент времени система (4.2.13) находилась в состоянии

$$\left. \begin{aligned} q_0(0) &= Q_0(0), \\ q_i(0) &= Q_0\left(\frac{2i-1}{2}s\right), i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.15)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T_0$, чтобы

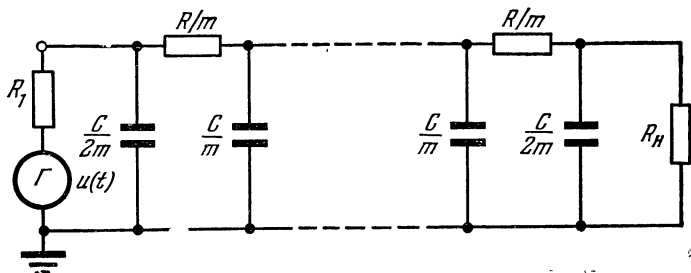


Рис. 24.

система (4.2.13) перешла из начального состояния (4.2.15) в заданное состояние

$$\left. \begin{aligned} q_0(T) &= Q^*(0), \\ q_i(T) &= Q^*\frac{2i-1}{2}s, i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.16)$$

за минимальное время T_0 . Заметим, что здесь не рассматриваются координаты q_0 и q_{n+1} (они являются несущественными, так как q_0 определяется конечным соотношением (4.2.9), а $q_{n+1} \equiv q_n$).

Если время T_0 достаточно мало, то задача ставится следующим образом: найти такое допустимое управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T_0$, чтобы система (4.2.13) под действием этого управления двигалась из начальной точки $q_i(0)$ так, чтобы функционал

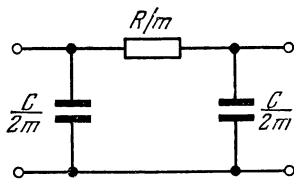


Рис. 25.

$$J = \sum_{i=1}^n q_i^2(T_0) \quad (4.2.17)$$

достиг своего максимального значения.

Обе только что сформулированные задачи могут быть решены с помощью принципа максимума.

Для примера рассмотрим первую из этих задач на минимальное время переходного процесса. В соответствии с принципом максимума для обыкновенных дифференциальных уравнений составим функцию H , которая в данном случае будет иметь вид

$$H = -\psi_0 + \psi_1 \left(\frac{2\beta}{2+\beta} u - \frac{2+3\beta}{2+\beta} q_1 + q_2 \right) + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} \psi_i (q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}) + \psi_n (q_{n-1} - q_n). \quad (4.2.18)$$

Отсюда следует, что функция H достигает своего максимального значения по u при $|u| \leq l$, в том случае, когда

$$u(t) = l \operatorname{sign} \psi_1(t). \quad (4.2.19)$$

Матрица однородной системы, соответствующая уравнениям (4.2.13),

$$\begin{pmatrix} -\frac{2+3\beta}{2+\beta} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2.20)$$

симметрична. Поэтому ее характеристические числа действительны. Можно также показать, что они отрицательны. Для случая $\beta = \infty$ это будет показано непосредственно.

Поэтому решение однородной системы из любого начального состояния стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому можно заключить [91], что существует и притом единственное оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему (4.2.13) из любого начального состояния в начало координат.

Чем больше число n интервалов, на которые разбивается отрезок $[0, S]$, тем точнее приближенное уравнение аппроксимирует точный переходный процесс.

По теореме об n интервалах [118], которая здесь применима в силу действительности и отрицательности характеристических чисел матрицы (4.2.20), оптимальное

управление, описываемое формулой (4.2.19), будет поочередно n раз менять свое значение с l на $-l$ или наоборот.

На рис. 26 приведена осциллограмма оптимального по быстродействию переходного процесса системы (4.2.13) в случае, когда $n = 4$.

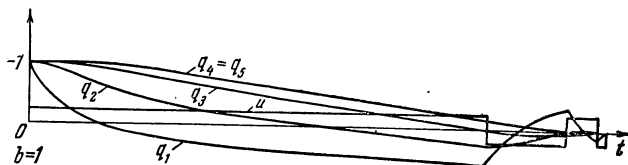


Рис. 26.

За начальное состояние системы было принято

$$q_i(0) = -1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

а конечное состояние соответствовало нулевому распределению

$$q_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.2.21)$$

при ограничении управления

$$|u(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad \text{т. е. } l = 1.$$

Общая блок-схема модели для уравнения (4.2.13) изображена на рис. 27. Эта блок-схема соответствует другой форме записи системы уравнений (4.2.13), которая более удобна для моделирования, а именно:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= k_1 u + k_2 q_1, \\ \theta \frac{dq_i}{d\tau} + q_i &= \frac{1}{2} (q_{i-1} + q_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \theta \frac{dq_n}{d\tau} + q_n &= q_{n-1}, \end{aligned} \right\} (4.2.22)$$

где $k_1 = \frac{\beta}{2+\beta}$, $k_2 = \frac{2}{2+\beta}$ и θ — постоянная времени нагрева одного элементарного слоя, на которые разбито массивное тело.

В некоторых случаях требуется определить оптимальный процесс в системе с распределенными параметрами, где управляющее воздействие само распределено в пространстве

и на него наложены ограничивающие условия не только по временным, но и по пространственным переменным. Например, иногда бывает существенно учитывать недопустимость слишком больших перепадов по пространственным

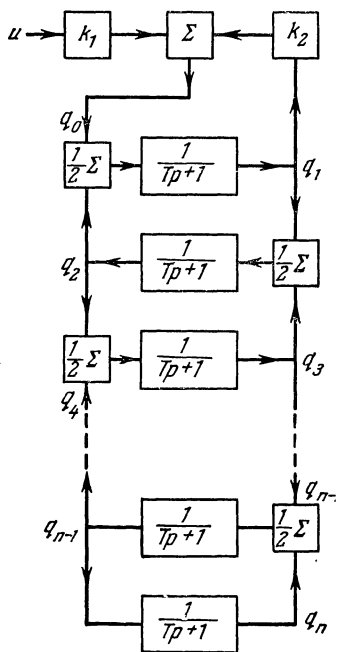


Рис. 27.

переменным некоторых физических величин, таких, как температуры, давления, напряжения электрического поля, и т. д. И в этом случае метод приближенного решения задачи оптимального управления с помощью дифференциально-разностных уравнений также может быть полезен, так как в настоящее время, видимо, не существует других эффективных подходов к решению таких задач. В качестве примера снова рассмотрим уравнение теплообмена

$$b(y, t) \frac{\partial Q}{\partial t} + b(y, t) v(t) \frac{\partial Q}{\partial y} + Q = u(y, t) \quad (4.2.23)$$

между неподвижной греющей средой с температурой $u(y, t)$, $0 \leq y \leq l$, $0 \leq t \leq T$, (y — пространственная, t — временная переменная) и материалом, движущимся со скоростью $v = v(t) \geq 0$ в положительном направлении оси y , который нагревается в процессе движения на участке $0 \leq y \leq L$.

Состояние нагрева этого материала характеризуется функцией распределения температуры

$$Q = Q(y, t). \quad (4.2.24)$$

Будем считать, что начальное распределение температуры в момент времени $t = 0$ задано и равно

$$Q(y, 0) = Q_0(y), \quad (4.2.25)$$

причем материал входит в греющую зону с неизменной температурой

$$Q(0, t) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq T. \quad (4.2.26)$$

Задача оптимального управления греющей зоной состоит в том, чтобы так определить функцию

$$u = u(y, t) \quad (4.2.27)$$

на прямоугольнике ($0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$), чтобы, несмотря на всевозможные возмущения процесса нагрева, вызванные изменением скорости продвижения материала в зоне или изменением теплофизических параметров $b(y, t)$ (например, изменение толщины слоя материала, изменение теплоемкости, теплопроводности и т. д.), отклонение температуры выходящего из зоны материала от некоторой заданной технологической температуры в каком-то определенном смысле было минимальным. Необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - Q(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (4.2.28)$$

где $Q^*(t)$ — заданная функция времени. Функции $v(t) \geq 0$, $b(y, t)$ считаются известными при $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$.

Кроме ограничения по абсолютной величине самого управления

$$A_1 \leq u(y, t) \leq A_2, \quad (4.2.29)$$

накладываются ограничения на частную производную по y функции $u(y, t)$, т. е.

$$A_3 \leq \frac{\partial u}{\partial y} \leq A_4. \quad (4.2.30)$$

Здесь A_1 , A_2 , A_3 и A_4 — заданные постоянные числа.

Физически это соответствует тому факту, что, например, в проходных печах невозможно создать слишком большие перепады температуры по длине печи.

Как видно, здесь мы сталкиваемся с довольно трудной и необычной задачей оптимального управления системой с распределенными параметрами при ограничениях типа (4.2.29) и (4.2.30).

Чтобы свести уравнения в частных производных к дифференциально-разностным, разобьем отрезок $[0, l]$ оси y на n равных частей точками $y_0 = 0, y_1 = s, \dots, y_n = L$, где $s = L/n$. Заменяя в уравнении (4.2.23) частную производную по y функции $Q(y, t)$ первой разностью получим дифференциально-разностную систему n уравнений для функций $q_i(t)$ в виде

$$b_i(t) \dot{q}_i + \frac{b_i(t)v(t)}{s} (q_i - q_{i-1}) + q_i = u_i(t), \quad (4.2.31)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Из граничного условия (4.2.26) получаем:

$$q_0(t) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq T. \quad (4.2.32)$$

Уравнения (4.2.31) можно переписать в виде

$$\dot{q}_i = \beta q_{i-1} + \alpha_i q_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.33)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(t) = -\frac{1}{b_i(t)} - \frac{v(t)}{s}, \quad (4.2.34)$$

$$\beta = \beta(t) = \frac{v(t)}{s}, \quad (4.2.35)$$

$$b_i(t) = b(is, t), \quad (4.2.36)$$

$$u_i = u_i(t) = u(is, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.37)$$

В соответствии с (4.2.37) ограничение (4.2.29) будет иметь вид

$$A_1 \leq u_i(t) \leq A_2, \quad (4.2.38)$$

а ограничение (4.2.30) примет вид

$$A_3 \leq u_{i+1} - u_i \leq A_4, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.2.39)$$

При этом функционал (4.2.28) нужно заменить функционалом

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - q_n(t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1. \quad (4.2.40)$$

Теперь для определения оптимальных управляющих воздействий (4.2.37) при ограничениях (4.2.38) и (4.2.39) можно применить уже принцип максимума.

В соответствии с принципом максимума функция

$$H(\psi, q, u) = \psi_0 [Q^*(t) - q_n]^\gamma + \sum_{i=1}^n \psi_i (\beta q_{i-1} + \alpha_i q_i + u_i) \quad (4.2.41)$$

на оптимальной траектории должна достигать максимума по аргументам u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, при фиксированном значении других аргументов.

Функции $\psi_i = \psi_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, должны удовлетворять линейной однородной системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0 \\ \dot{\psi}_i &= -\alpha_i \psi_i - \beta \psi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{\psi}_n &= -\gamma \psi_0 |Q^* - q_n|^{\gamma-1} \text{sign}(Q^* - q_n) - \alpha_n \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.42)$$

Очевидно, что при фиксированных ψ_i максимум функции H будет достигаться одновременно с достижением максимума функцией

$$F(\psi_i, u_i) = \sum_{i=1}^n \psi_i u_i.$$

Таким образом, необходимо найти максимум по u_i линейной формы F с коэффициентами ψ_i при ограничениях типа (4.2.38) и (4.2.39).

Здесь областью допустимых значений функций u_i является выпуклый многогранник в n -мерном евклидовом пространстве. Нахождение максимума при таких условиях, как известно, является задачей линейного программирования. Например, если $n = 2$, то ограничения (4.2.38) и (4.2.39) будут иметь вид

$$A_1 \leq u_i \leq A_2, \quad i = 1, 2,$$

$$A_3 \leq u_2 - u_1 \leq A_4.$$

Эти уравнения задают на плоскости u_1, u_2 многоугольник $abcdef$, представляющий собой область (рис. 28).

Максимум линейной формы F будет в этом случае достигаться в вершинах этого многоугольника в зависимости от значений переменных во времени коэффициентов ψ_1 и ψ_2 .

Рассмотрим теперь один интересный метод определения собственных значений матриц, соответствующих системам с сосредоточенными параметрами, аппроксимирующим распределенные системы. Этот метод рассматривался Макколлендом [135].

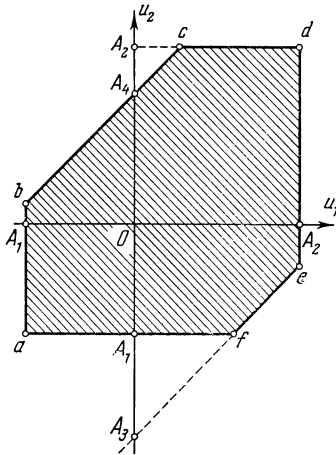


Рис. 28.

Величины этих собственных значений играют весьма существенную роль в построении оптимального процесса.

Начнем с описания свободного движения электрической цепи, замкнутой с обоих концов и состоящей из rc -цепочек П-образного вида изображенных на рис. 29. Для процесса теплопередачи это означает, что обе стенки пластины находятся при постоянной температуре, равной нулю. Очевидно, что емкостями, расположенными по краям этой цепочки, можно пренебречь, ибо они замкорожены

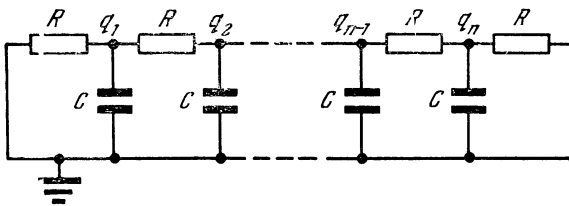


Рис. 29.

нулевым сопротивлением. Поэтому на рис. 29 они отсутствуют.

Если напряжения на n емкостях обозначить через q_1, \dots, \dots, q_n , то изменение этих величин во времени (см. (4.2.14))

описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{1}{RC} (-2q_1 + q_2), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{1}{RC} (q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dq_n}{dt} &= \frac{1}{RC} (q_{n-1} - 2q_n). \end{aligned} \right\} (4.2.43)$$

Матрица этой системы имеет вид

$$A = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.44)$$

Для выделения однозначного решения этой системы надо задать начальные условия (начальные заряды на емкостях)

$$q_i(0) = q_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.45)$$

Легко видеть, что собственные значения этой системы определяются как корни характеристического уравнения

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda RC + 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda RC + 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda RC + 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda RC + 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda RC + 2 \end{vmatrix}$$

Если определитель n -го порядка Δ_n в последнем равенстве разложить по первой строке (или первому столбцу), то можно получить следующее рекуррентное соотношение

$$\Delta_k = (\lambda RC + 2)\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2} \quad (4.2.46)$$

с начальным условием

$$\Delta_1 = \lambda RC + 2. \quad (4.2.47)$$

Как известно, соотношение (4.2.46) с начальным условием (4.2.47) определяет полиномы Чебышева $p_k(x)$, где $x = \frac{1}{2}(\lambda RC + 2)$. Эти полиномы имеют следующее простое выражение [6]:

$$p_k(x) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}, \quad (4.2.48)$$

где $\cos\theta = x$.

Таким образом, нулям этого полинома соответствуют нули функции $\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$, равные

$$\theta_i = \frac{i\pi}{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.2.49)$$

Следовательно, корни полинома Чебышева $p_k(x)$ равны

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (4.2.50)$$

и поэтому (так как $x = \frac{1}{2}(\lambda RC + 2)$)

$$\lambda_i = -\frac{2}{RC} \left(1 - \cos \frac{i\pi}{k+1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.2.51)$$

Отсюда видно, что (так как косинус нигде не превосходит единицы), собственные значения уравнения (4.2.43) отрицательны.

Этот результат можно легко перенести на последовательность rc -цепочек T -образного вида, изображенную на рис. 30 для случая, когда оба ее конца также закорочены. В этом случае также можно пренебречь крайними емкостями, которые будут закорочены нулевым сопротивлением. В силу этого нужно учитывать $(m-1)$ емкость. А так как каждая емкость в этом случае равна C/m и каждое сопротивление равно R/m , собственные значения уравнения этой цепи выразятся следующим образом:

$$\lambda_i = -\frac{2m^2}{RC} \left(1 - \cos \frac{i\pi}{m}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (4.2.52)$$

где R — полное сопротивление (активное) всей распределенной линии, а C — полная ее емкость.

Перейдем теперь к определению собственных векторов матрицы A , определенной формулой (4.2.44), соответствующих собственным значениям (4.2.51).

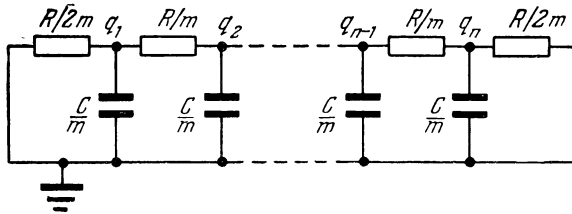


Рис. 30.

Компоненты q_1, \dots, q_n собственных векторов матрицы A удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (\lambda RC + 2) q_1 - q_2 &= 0, \\ -q_{j-1} + (\lambda RC + 2) q_j - q_{j+1} &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ -q_{n-1} + (\lambda RC + 2) q_n &= 0. \end{aligned} \right\} (4.2.53)$$

Эта система имеет n решений, соответствующих n значениям собственных чисел (4.2.51).

Докажем, что компоненты i -го собственного вектора определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} V_1^i &= \sin \frac{i\pi}{n+1}, \\ V_2^i &= \sin \frac{2i\pi}{n+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ V_n^i &= \sin \frac{ni\pi}{n+1}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} (4.2.54)$$

Используя (4.2.51), подставим эти значения компонент

в уравнения (4.2.53). Тогда соответственно получим:

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta \sin \theta - \sin 2\theta &= 0, \\ -\sin(j-1)\theta + 2 \cos \theta \sin j\theta - \sin(j+1)\theta &= 0, \\ j &= 2, 3, \dots, n-1, \\ -\sin(n-1)\theta + 2 \cos \theta \sin n\theta &= 0. \end{aligned}$$

Первые $(n-1)$ уравнений, очевидно, представляют собой просто тождества по θ . Поэтому остается проверить выполнение последнего равенства. Так как для $\theta = \frac{i\pi}{n+1}$ $\sin n\theta = \sin \theta$ и $\sin(n-1)\theta = \sin 2\theta$ и, следовательно, последнее уравнение также справедливо.

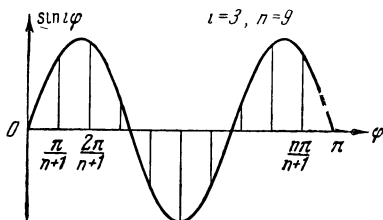


Рис. 31.

Таким образом, уравнения (4.2.53) действительно удовлетворяются при значениях (4.2.54).

Формуле (4.2.54) можно дать простое геометрическое толкование. Чтобы построить все n компонент i -го собственного вектора матрицы A , нужно проделать следующее: начертить синусоиду $\sin i\varphi$ на интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ (на рис. 31 сделано для $i=3$ и $n=9$), разделить отрезок $[0, \pi]$ на $(n+1)$ равных частей точками $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{n+1}$, \dots , $\varphi_{n+1} = \pi$, а затем в n точках $\varphi_1 = \frac{\pi}{n+1}$, \dots , $\varphi_n = \frac{n\pi}{n+1}$ провести n ординат функции $\sin i\varphi$. Эти n ординат и будут компонентами i -го собственного вектора матрицы A . Заметим, что эти n ординат на отрезке $[0, \pi]$ соответствуют точкам последовательности rc -цепочек (рис. 29), в которых сосредоточены емкости и в которых напряжение определяется величинами q_1, \dots, q_n .

Теперь проведем аналогичное исследование движения системы, состоящей из последовательности rc -цепочек T -образного вида, изображенной на рис. 22. Будем также считать, что оба ее конца закорочены (рис. 30). Напряжения на емкостях обозначим через q_1, q_2, \dots, q_n (здесь

$m = n$). Тогда дифференциальные уравнения, описывающие изменение этих напряжений во времени, будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{1}{RC} (-3q_1 + q_2), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{1}{RC} (q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dq_n}{dt} &= \frac{1}{RC} (q_{n-1} - 3q_n). \end{aligned} \right\} (4.2.55)$$

Эта система уравнений отличается от системы (4.2.43) лишь двумя крайними (первым и последним) уравнениями. Начальные условия в этой системе также должны задаваться с помощью равенств (4.2.45). Матрица B , соответствующая этой системе, имеет следующий вид:

$$B = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad (4.2.56)$$

Таким же образом, как и для системы (4.2.43), можно показать, что собственные значения этой матрицы определяются формулами

$$\lambda_i = -\frac{2}{RC} \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.57)$$

Для цепи, изображенной на рис. 22, собственные значения будут иметь вид ($R_1 = R_n = \infty$)

$$\lambda_i = -\frac{2m^2}{RC} \left(1 - \cos \frac{i\pi}{m} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.2.58)$$

Сравнивая (4.2.58) с (4.2.52), мы видим, что $(m - 1)$ первых собственных значений, вычисленных по этим формулам, полностью совпадают.

Также легко показать, что n компонент i -го собственного вектора определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} q_1^i &= \sin \frac{i\pi}{2n}, \\ q_2^i &= \sin \frac{3i\pi}{2n}, \\ &\dots \dots \dots \\ q_n^i &= \sin \frac{(2n-1)i\pi}{2n}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.59)$$

Эти компоненты так же, как и в ранее рассмотренном случае, легко интерпретировать как ординаты, взятые в соответствующих точках отрезка $[0, \pi]$ функции $\sin i\varphi$ (рис. 31).

Покажем теперь, как, используя вычисленные выше собственные векторы и собственные значения, можно представить решение, описывающее напряжения на емкостях линии с сосредоточенными параметрами.

Мы здесь можем применить метод, аналогичный методу тригонометрической интерполяции, описанному Мак-Кослендом в [135].

Итак, предположим, например, что мы имеем $(m-1)$ значений напряжений q_1, \dots, q_{m-1} на всех емкостях величины $\frac{C}{m}$ (см. рис. 22).

Предположим также, что оба конца этой цепочки закорочены нулевыми сопротивлениями (рис. 30). Тогда вектор $q = (q_1, q_2, \dots, q_{m-1})$ можно представить как линейную комбинацию найденных выше собственных векторов

$$q = b_1 q^1 + b_2 q^2 + \dots + b_{m-1} q^{m-1},$$

где q^i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, есть i -й собственный вектор, отвечающий уравнениям (4.2.53) при $n = m-1$, а коэффициенты b_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, даются выражением

$$b_i = \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{m-1} q_j \sin \frac{ij\pi}{m}.$$

Последнее уравнение может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{pmatrix} = \frac{2}{m} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{m} & \sin \frac{2\pi}{m} & \dots & \sin \frac{(m-1)\pi}{m} \\ \sin \frac{2\pi}{m} & \sin \frac{4\pi}{m} & \dots & \sin \frac{2(m-1)\pi}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \frac{(m-1)\pi}{m} & \sin \frac{2(m-1)\pi}{m} & \dots & \sin \frac{(m-1)^2\pi}{m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к непрерывно распределенной системе, мы видим, что в этом случае имеется полунепрерывное матричное уравнение, аналогичное последнему матричному уравнению. Для непрерывного случая i -я строка матрицы заменена непрерывной функцией $\sin ix$, $0 \leq x \leq \pi$, а дискретное распределение напряжения (q_1, \dots, q_{m-1}) заменено непрерывным распределением, описываемым функцией $q(x)$. Кроме того, множитель $2/m$ заменяется на $2/\pi$. Таким образом, в непрерывном случае коэффициенты b_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, даются формулами

$$b_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \sin ix \, dx.$$

Таким образом, коэффициенты b_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, можно интерпретировать как коэффициенты Фурье разложения функции $q(x)$ по системе функций $\sin ix$.

§ 3. Метод гармоник в задаче оптимального управления одним типом систем с распределенными параметрами

Предположим, что мы имеем пластину толщиной S , ограниченную двумя плоскостями $x = 0$ и $x = S$. Пусть управляющим воздействием $u(t)$ служит температура обеих поверхностей пластины, ограниченная по модулю величиной $l > 0$, $|u(t)| \leq l$. Пусть мы желаем изменить начальное равномерное распределение температуры в слябе, равное Q_0 , на другое равномерное распределение, равное нулю. В § 9 главы I и в § 2 настоящей главы мы показали, что для того, чтобы произвести это изменение оптимальным образом, в смысле минимума времени переходного процесса, необходимо прикладывать входное воздействие, равное по модулю l , т. е. $|u(t)| = l$, и меняющее знак на соседних интервалах. Мы будем считать для определенности, что начальное значение $Q_0 > 0$, а поэтому, очевидно, на первом интервале T_1 оптимальное управление будет равно $u(t) = -l$.

Ранее мы считали, что управляющим воздействием служит температура среды, которая передает тепло телу по закону конвективного теплообмена. Случай, когда управляющим воздействием служит температура обеих поверхностей пластины, является частным случаем рассмотренного ранее и сводится к нему, если положить коэффициент теплообмена $\alpha = \infty$, т. е. критерий

$$Bi = \frac{\alpha s}{S} = \infty.$$

Как было показано ранее в § 9 главы I, оптимальное управляющее воздействие $u(t)$ должно иметь на конечном интервале времени бесконечное число переключений, т. е. бесконечное число интервалов знакопостоянства T_1, T_2, \dots , причем

$$T_1 > T_2 > \dots > T_n > \dots > T_{n+1} > \dots$$

Мы поставим задачу найти управление, которое имеет всего два интервала знакопостоянства T_1 и T_2 :

$$u(t) = \begin{cases} -l & \text{при } 0 \leq t < T_1, \\ l & \text{при } T_1 < t \leq T_1 + T_2. \end{cases}$$

Иными словами, мы попытаемся найти T_1 и T_2 из условия, чтобы первые две гармоники в разложении распределения температуры $Q(x)$ по функциям $\sin \frac{(2k-1)\pi x}{S}$, $k = 1, 2, \dots$, под действием этого управления обращались в нуль. При этом мы дадим оценку величины амплитуд оставшихся гармоник более высокого порядка и оценим близость полученного распределения к желаемому. Эта задача решалась Мак-Кослендом в [135].

Сначала попытаемся определить, какова будет величина коэффициента при k -й гармонике в этом разложении в момент $t = T_1 + T_2$.

Начальное распределение температуры $Q(x, 0) = Q_0$ можно представить рядом Фурье

$$Q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4Q_0}{\pi(2k-1)} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{S}. \quad (4.3.1)$$

Отметим, что если температура поверхности делается равной нулю, изменение $Q(x, t)$ можно описать формулой [108, 110]

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4Q_0}{(2k-1)\pi} \exp(2k-1)^2 \theta t \sin \frac{(2k-1)\pi x}{S}, \quad (4.3.2)$$

где $\theta = -\frac{a\pi^2}{S^2}$.

Если к обеим поверхностям пластины в момент $t = 0$ приложить температуру $-l$, то изменение $Q(x, t)$ при нулевом начальном условии будет иметь вид

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{S}. \quad (4.3.3)$$

Здесь коэффициенты $C_k(t)$ при пространственных гармониках, зависящие от времени t , будут стремиться к величинам $-4l/\pi(2k-1)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, как выходы аperiodических звеньев с постоянными времени $\frac{a\pi^2(2k-1)^2}{S^2}$, которые соответствуют равномерному распределению температуры в пластине, равному $-l$ [108, 110]. В любой

момент времени t в течение первого интервала $0 \leq t \leq T_1$ коэффициенты C_k будут равны

$$C_k(t) = -\frac{4l}{(2k-1)\pi} + C \exp[(2k-1)^2 \theta t]. \quad (4.3.4)$$

Константа C определяется из предельного условия:

$$\frac{4Q_0}{\pi(2k-1)} = C_k(0) = \frac{4l}{\pi(2k-1)} + C, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3.5)$$

Таким образом, можно получить, что в момент $t = T_1$

$$C_k(T_1) = \frac{4l}{(2k-1)\pi} \left[-1 + \left(1 + \frac{Q_0}{l}\right) \exp(2k-1)^2 \theta T_1 \right].$$

Используя формулу (4.3.4) и считая, что T_1 есть начальный момент второго интервала T_2 , на котором $u(t) = +l$, легко получить, что

$$C_k(T_1 + T_2) = \frac{4l}{\pi(2k-1)} \left[1 - 2 \exp(2k-1)^2 \theta T_2 + \left(1 + \frac{Q_0}{l}\right) \exp(2k-1)^2 \theta (T_1 + T_2) \right]. \quad (4.3.6)$$

Таким образом, условие равенства нулю коэффициента при k -й гармонике будет иметь вид

$$1 - 2 \exp(2k-1)^2 \theta T_2 + \left(1 + \frac{Q_0}{l}\right) \exp(2k-1)^2 \theta (T_1 + T_2) = 0. \quad (4.3.7)$$

Итак, если фиксированы две первые гармоники, коэффициенты при которых мы хотим обратить в нуль, то искомые величины интервалов T_1 и T_2 определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2 \exp \theta T_2 + \left(1 + \frac{Q_0}{l}\right) \exp \theta (T_1 + T_2) &= 0, \\ 1 - 2 \exp 9\theta T_2 + \left(1 + \frac{Q_0}{l}\right) \exp 9\theta (T_1 + T_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

где θ — собственное значение, соответствующее первой гармонике и равно — $\frac{\alpha\pi^2}{S^2}$.

Решив приведенную выше систему уравнений относительно T_1 и T_2 , мы будем иметь возможность вычислить

(оценить) величины оставшихся гармоник (амплитуды которых не равны нулю) по формуле (4.3.6).

Таким образом, можно оценить, как близко полученное распределение подходит к желаемому распределению. В этом случае очень удобно использовать критерий оценки близости в виде интегрального квадратичного критерия по пространственной переменной. Если желаемое распределение равно нулю, то интегральный квадратичный критерий вычисляется как половина суммы квадратов коэффициентов гармоник.

Если в момент времени $t = T_1 + T_2$ первые два члена в ряде (4.3.1) пропадут, то останутся лишь гармоники более высокого 5, 7... порядков, которые затухают гораздо быстрее, чем третья гармоника.

Очевидно, что периоды времени T_1 и T_2 можно выбрать так, чтобы сделать равными нулю коэффициенты при первой и пятой гармониках, или вообще, при любых двух гармониках.

Ясно, что этот метод можно обобщить на случай, когда нужно подобрать три интервала T_1 , T_2 и T_3 таким образом, чтобы в момент времени $t = T_1 + T_2 + T_3$ обратить в нуль первую, третью и пятую гармоники. Эту процедуру вообще можно продолжить сколь угодно далеко, чтобы сделать конечное распределение температуры сколь угодно близким к нулю.

Рассмотрим теперь в качестве критерия качества работы оптимальной системы интеграл от квадрата отклонения истинного распределения температуры в конце переходного процесса от желаемого равномерного распределения, равного нулю. Примем также, что начальное распределение равномерно и равно $Q_0 > 0$, а температура поверхности устанавливается равной нулю при $0 \leq t < \infty$.

Тогда, если воспользоваться уравнением (4.3.2) для $Q(x, t)$, легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int_0^S Q^2(x, t) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4Q_0}{(2k-1)\pi} \exp\left(-\frac{a\pi^2(2k-1)^2 t}{S^2}\right) \right]^2. \quad (4.3.9)
 \end{aligned}$$

Временной интеграл от этой величины равен

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} I(t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{4Q_0}{(2k-1)\pi} \right]^2 \exp \left[-\frac{2a\pi^2 (2k-1)^2}{S^2} t \right] dt = \\
 &= \frac{8Q_0^2 S^2}{a\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}. \quad (4.3.10)
 \end{aligned}$$

Если мы рассмотрим вклад каждой отдельной гармоники в величину J , то получится следующая картина при $\frac{4Q_0}{\pi} = 1$ [135]:

1-я гармоника	1,00000	
3-я »	0,01235	
5-я »	0,00160	
7-я »	0,00042	
оставшиеся гармоники	0,00033	
	<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"/>	
	1,01470	(4.3.11)

Вычислим вклад каждой гармоники в величину J , определяемую выражением (4.3.10), при условии, что входное воздействие равно -1 в течение периода T_1 , где T_1 — момент обращения в нуль первой гармоники, и равно нулю в последующие моменты времени (рис. 32).

Получим следующий результат (если считать $\frac{4Q_0}{\pi} = 1$) [135]:

1-я гармоника	0,193	
3-я »	0,064	
5-я »	0,022	
7-я »	0,013	
9-я »	0,009	
11-я »	0,006	
оставшиеся гармоники	0,029	
	<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"/>	
	0,336	(4.3.12)

Таким образом, сравнивая эту таблицу с таблицей (4.3.11), мы видим, что величина интеграла $I(t)$ при управлении последнего вида уменьшилась почти в три раза по сравнению с его величиной при управлении $u(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq \infty$.

Остановимся еще на методе оценки остаточных членов в таблицах (4.3.11) и (4.3.12). Из формулы (4.3.6) для ве-

личины коэффициентов Фурье распределения, полученного в конце периода $T_1 + T_2$, легко видеть, что, начиная

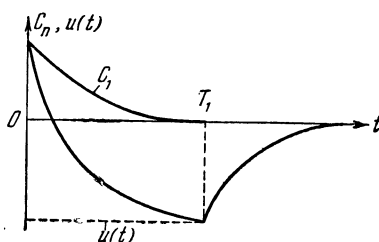


Рис. 32.

с определенного номера p этот коэффициент с очень высокой точностью равен $\frac{4}{\pi(2k-1)}$.

Поэтому довольно легко оценить, каково должно быть количество членов в разложении, обеспечивающее заданную точность.

Остаток ряда Фурье можно оценить по формуле

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p+3)^2} + \frac{1}{(2p+5)^2} + \dots \right]. \quad (4.3.13)$$

Для достаточно большого p величина в квадратных скобках приблизительно равна

$$\frac{1}{2} \int_{2p}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4p}. \quad (4.3.14)$$

Можно легко вычислить ошибку от замены суммы (4.3.13) интегралом (4.3.14), равным $1/4p$. Известно, что

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} = 1,233701 \quad (4.3.15)$$

В таблице 1 [135] даны ошибки в оценке суммы ряда (4.3.15) от замены p -го остатка этого ряда величиной $1/4p$. Здесь S_p — сумма первых p членов ряда (4.3.15).

Например, если мы желаем найти сумму ряда (4.3.15) с точностью до четвертого десятичного знака (т. е. чтобы ошибка не превосходила величины $5 \cdot 10^{-5}$), то вполне достаточно взять первые 8 членов ряда, причем ошибка в соответствии с формулой (4.3.14), составит $1/32$.

Поэтому при вычислениях на цифровой вычислительной машине величины интегрального квадратичного отклонения истинного распределения от желаемого, надо соблюдать следующие условия:

Т а б л и ц а I

p	S_p	$1/4p$	$S_p + 1/4 p$	Ошибка
0	0,000000	∞	∞	∞
1	1,000000	0,250000	1,250000	0,016299
2	1,111111	0,125000	1,236111	0,002410
3	1,151111	0,083333	1,234444	0,000743
4	1,171519	0,062500	1,234019	0,000318
5	1,183865	0,050000	1,233865	0,000164
6	1,192129	0,041667	1,233796	0,000095
7	1,198046	0,035714	1,233760	0,000059
8	1,202490	0,031250	1,233740	0,000039
9	1,205950	0,027778	1,233728	1,000027
10	1,208720	0,025000	1,233720	0,000019

1. Коэффициенты Фурье непрерывного распределения подсчитываются в момент времени, при котором величина

$$r_n = 1 - 2 \exp n^2 \lambda T_2 + 2 \exp n^2 \lambda (T_1 + T_2) \quad (4.3.16)$$

близка к единице.

2. Сумма квадратов коэффициентов должна содержать столько членов, чтобы, сложенная с поправкой, определяемой формулой (4.3.14), обеспечивала достаточную точность.

Возвратимся теперь снова к формуле (4.3.10.). Так как остаток ряда в (4.3.10) чрезвычайно быстро убывает, легко обнаружить, что вклад в эту величину, соответствующий первой (основной) гармонике, будет наибольшим и составлять 98% от всей величины J . Этот факт, очевидно, указывает на то, что желательнее всего как можно быстрее устранить компоненту, соответствующую первой гармонике.

§ 4. О соотношении метода гармоник и метода прямых

Для сравнения метода прямых и метода гармоник вычислим с помощью этих методов два периода T_1 и T_2 оптимального процесса [135].

Возьмем длинную линию (имитирующую также процесс теплопередачи внутри массивного тела) длины $S = 4$ единицы с сопротивлением $R = 1$ ом и емкостью $C = 1$ ф на единицу длины этой линии. Эта длинная линия питается с обеих сторон одним и тем же источником напряжения с внутренним сопротивлением, равным нулю, что соответствует нагреву массивной пластины толщины в 4 единицы, которая с обеих сторон подвергается одному и тому же температурному воздействию, приложенному к обеим поверхностям пластины. При этом

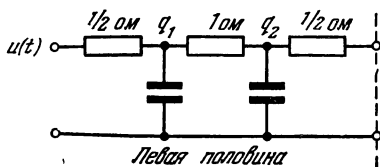


Рис. 33.

коэффициент температуропроводности $\alpha = 1/RC = 1$.

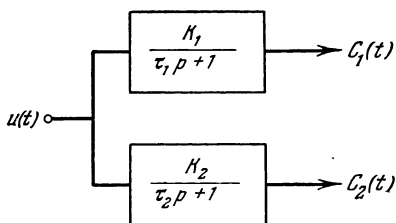


Рис. 34.

Мы рассмотрим левую половину длинной линии, которая представлена сосредоточенными параметрами на основе метода прямых (рис. 33). Правая половина симметрична левой половине относительно вертикальной пунктирной линии. Блок-схема этой цепи представлена на рис. 34.

Собственные значения этой линии равны (см. § 2 этой главы)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -0,5858, \\ \lambda_3 &= -3,4142. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

Второе собственное значение здесь обозначено через λ_3 , поскольку оно соответствует третьей гармонике (т. е. $m = 3$ в формуле (4.2.52)).

Используя цифровую вычислительную машину, можно решить уравнения (4.3.8) и определить из них величины T_1 и T_2 . Здесь Q_0 и l взяты равными единице.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1,4107 \text{ сек.} \\ T_2 &= 0,2006 \text{ сек.} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.2)$$

Для определения таких же интервалов T_1 и T_2 в методе гармоник нужно решить те же самые уравнения, но при

$$\lambda = \theta = -\frac{a\pi^2}{S^2} = -\frac{\pi^2}{16}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1,2588, \\ T_2 &= 0,1247. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

Используя полученные значения T_1 и T_2 для двух методов, мы можем определить теперь истинное температурное распределение в массивной пластине в момент времени $t = T_1 + T_2$ и оценить, насколько полученное распределение близко к желаемому распределению, равному нулю. Для этой цели мы можем использовать формулу (4.3.6) для вычисления коэффициентов Фурье истинного распределения в момент $t = T_1 + T_2$. В рассматриваемом случае при $Q_0 = l = 1$ будем иметь:

$$C_k(T_1 + T_2) = \frac{4}{\pi k} [1 - 2 \exp k^2 \lambda T_2 + 2 \exp k^2 \lambda (T_1 + T_2)].$$

$$k = 1, 3. \quad (4.4.4)$$

Величина в квадратных скобках равна r_k —отношению коэффициента при k -й гармонике к установившемуся значению. Очевидно, что при большом k величина $r_k(T_1 + T_2)$ стремится к единице и коэффициент при k -й гармонике стремится к $4/\pi k$. Значения $r_k(T_1 + T_2)$ и $C_k(T_1 + T_2)$ можно легко вычислить на цифровой вычислительной машине. Результаты этих вычислений, сделанных Мак-Кослендом [135], приведены в следующих таблицах II и III соответственно для метода прямых и метода гармоник.

Для всех гармоник, для которых величина r_k может быть приравнена к единице, величина C_k определяется как $4/\pi k$.

Значения коэффициентов C_k в момент $t = T_1 + T_2$ представлены на рис. 35. Кривая *a* соответствует методу гармоник, кривая *b* — методу прямых.

Из этого графика видно, что кривая *a*, соответствующая методу гармоник, проходит ниже кривой *b*, соответствующей методу прямых. Следовательно, интеграл от квадрата

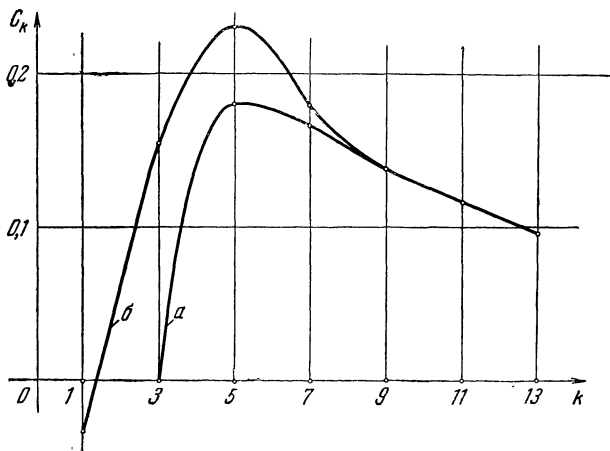


Рис. 35.

ординат кривой *a* будет меньше этого же интеграла для кривой *b*. Так как величина этих интегралов характеризует отклонение полученных распределений от нуля, можно сделать вывод (который мы ниже подкрепим численными расчетами), что метод гармоник дает меньшую интегральную квадратичную ошибку за два интервала $T_1 + T_2$, нежели метод прямых.

С помощью коэффициентов, приведенных в этих таблицах, можно вычислить пространственное распределение температуры по толщине массивной пластины в момент времени $t = T_1 + T_2$. Нужно отметить, что построение этого распределения непосредственно прямым суммированием ряда Фурье с коэффициентами, взятыми из приведенных выше таблиц, довольно затруднительно. Однако это

Таблица II

Метод прямых $T_1 = 1,4107$ сек,
 $T_2 = 0,2006$ сек

Номер гармоники	$r_k (T_1 + T_2)$	$C_k (T_1 + T_2)$
1	-0,0270	-0,0343
3	0,3437	0,4459
5	0,9094	0,2316
7	0,9954	0,1811
9	0,9999	0,1415
11	1,0000	0,1158
13	1,0000	0,0979
15	1,000	0,0849

Таблица III

Метод гармоник $T_1 = 1,2588$ сек,
 $T_2 = 0,1247$ сек

Номер гармоники	$r_k (T_1 + T_2)$	$C_k (T_1 + T_2)$
1	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
5	0,7076	0,1802
7	0,9538	0,1735
9	0,9961	0,1409
11	0,9998	0,1157
13	1,0000	0,0979
15	1,0000	0,0849

распределение можно вычислить гораздо проще, если заметить, что ряд Фурье, для которого $r_k = 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, представляет равномерное распределение, равное единице. Поэтому можно вычислить разность между равномерным единичным распределением и истинным распределением. Такой способ вычисления использует лишь то небольшое число членов ряда, для которых величина r_k отлична от единицы.

На рис. 36 кривая *a* показывает распределение температуры в момент времени $t = T_1 + T_2$, полученное с помощью указанного выше метода гармоник, а кривая *б* показывает аналогичное распределение, полученное методом

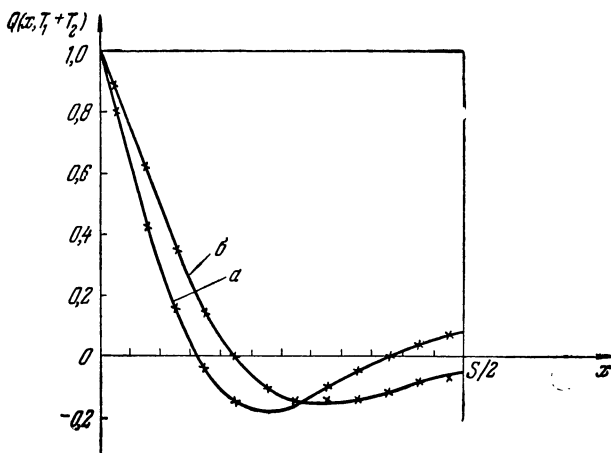


Рис. 36.

прямых. С помощью этих графиков можно увидеть разницу между использованными методами.

Получим теперь некоторые численные оценки близости двух распределений к нулевому распределению. Наиболее легко вычисляется пространственный интеграл от квадрата отклонения истинного распределения от нулевого в момент времени $t = T_1 + T_2$. Действительно, как было показано ранее, эта величина равна половине суммы квадратов коэффициентов Фурье, представляющих полученные распределения. На методе вычисления этой

Таблица IV

	Метод	
	гармоник	прямых
T_1	1,2588	1,4107
T_2	0,1247	0,2006
$T_1 + T_2$	1,3835	1,6113
$I (T_1 + T_2)$	0,0816	0,1048

величины мы уже останавливались. Результаты вычисления представлены в таблице IV [135].

Таким образом, из этой таблицы видно, что метод гармоник позволяет получить меньшую интегральную квадратичную ошибку и, более того, в меньшее время. Однако, как мы видели, это происходит от того, что методу гармоник и методу прямых соответствуют разные первые собственные значения.

Но, как показано выше (формула (4.2.52)), k -е собственное значение системы, разделенной на m слоев (метод прямых), равно

$$\lambda_k = -\frac{2m^2}{RC} \left[1 - \cos \frac{k\pi}{m} \right], \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.4.5)$$

Если число слоев m , на которое мы разбиваем длинную линию (или массивное тело) велико, то собственные значения для m -слойной системы стремятся к соответствующим собственным значениям непрерывно распределенной системы, так как

$$\lambda_k = -\frac{1}{RC} \frac{2 \sin^2 \frac{k\pi}{2m}}{\frac{1}{2m^2}} = \frac{k^2 \pi^2}{RC} \left(\frac{\sin \frac{k\pi}{2m}}{\frac{k\pi}{2m}} \right)^2, \quad (4.4.6)$$

и отсюда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{Rl} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{k\pi}{2m}}{\frac{k\pi}{2m}} \right) = -\frac{k^2 \pi^2}{Rl}, \quad (4.4.7)$$

$k = 1, 2, \dots,$

ибо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким образом, когда система подразделяется на все большее число слоев, ее собственные значения все больше приближаются к соответствующим собственным значениям непрерывно распределенной системы, т. е. к собственным значениям соответствующих гармоник в методе Фурье.

Поэтому можно ожидать, что первые периоды знакопостоянства оптимального управления T_1 , T_2 и т. д. по мере роста числа m будут примерно одинаковыми для двух методов, когда мы будем вычислять все больше и больше интервалов T_1 , T_2 , T_3 и т. д. для обоих методов. Заметим еще, что одно из преимуществ метода гармоник состоит в том, что он позволяет нам оценить, насколько близко полученное распределение подходит к желаемому распределению.

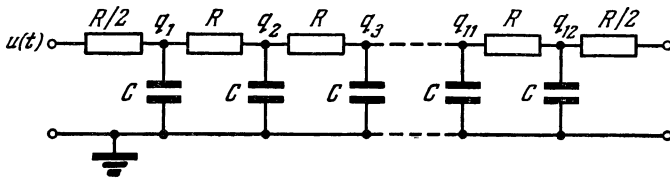


Рис. 37.

Для проверки результатов, полученных на цифровой вычислительной машине, система управления нагревом моделировалась на аналоговой вычислительной машине.

Система с распределенными параметрами была представлена 12-ю секциями с сосредоточенными параметрами, как показано на рис. 37, и эта цепочка была смоделирована на аналоговой вычислительной машине, схема которой соответствует рис. 37 при $RC = 1$. Таким образом, можно считать, что температуропроводность равна $a = 1$, а $S/2 = 12$.

В силу симметрии здесь моделируется лишь половина длины линии (или, что то же самое, толщины массивного тела).

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс в этой системе, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= 2u - 3q_1 + q_2, \\ \frac{dq_i}{dt} &= q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, 11, \\ \frac{dq_{12}}{dt} &= q_{11} - q_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.8)$$

Из этих соотношений видим, что первое собственное значение равно $-\frac{\pi^2}{S^2} = -\frac{\pi^2}{24^2}$. Отсюда находим, что масштаб моделирования таков, что одна секунда в системе, рассмотренной выше, соответствует $\frac{24^2}{16} = 36$ секундам в данной моделируемой системе.

В моделирующей установке начальное напряжение устанавливалось равным 100 в (или -100 в), т. е. $q_1(0) = \dots = q_{12}(0) = 100 \text{ в}$ (что соответствует $Q_0 = 100 \text{ в}$). Входное напряжение на первом интервале, равном $36 T_1$, устанавливалось равным $u(t) = -100 \text{ в}$ (или соответственно $+100 \text{ в}$, если начальное распределение $Q_0 = -100 \text{ в}$). Это соответствует тому, что $l = 100 \text{ в}$. Далее, на втором интервале при $36 T_1 \leq t \leq 36(T_1 + T_2)$ управление $u(t)$ устанавливалось равным $+100 \text{ в}$. Здесь величины T_1 и T_2 определяются с помощью уравнений (4.3.8).

С помощью специального интегратора с нулевым начальным условием моделировалось время процесса. Этот интегратор настраивался таким образом, что когда на его вход подавалось напряжение, равное 1 в , его выход изменялся со скоростью 1 в/сек .

Когда напряжение на интеграторе достигало значения, равного $36 T_1$, специальное реле переключало входное воздействие со 100 в на -100 в .

Второе аналогичное реле срабатывало тогда, когда напряжение на выходе этого интегратора достигало значения $36(T_1 + T_2)$. В этот момент с помощью специального цифрового вольтметра считывались напряжения во всех 12 точках, что соответствовало напряжениям в точках $x = \frac{S}{48}, \frac{3S}{48}, \frac{5S}{48}, \dots, \frac{23S}{48}$. Для рассмотренной задачи $36T_1 = 45,32 \text{ в}$ и $36(T_1 + T_2) = 49,81 \text{ в}$.

Результаты этого моделирования отмечены на рис. 36 крестиками на кривой б. Как видно, они очень хорошо согласуются с результатами расчетов, основанных на коэффициентах Фурье, проведенных на цифровой вычислительной машине.

Аналоговая вычислительная машина использовалась также для прямой проверки правильности вычисленных ранее значений длин интервалов T_1 и T_2 в методе прямых

при делении системы на два слоя. Эта система описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= \frac{1}{36} (2u - 3q_1 + q_2), \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{1}{36} (q_1 - q_2).\end{aligned}$$

Здесь масштаб времени уменьшен в 36 раз, чтобы согласовать его с масштабом цепи (4.4.8) и использовать те же самые переключающие устройства (интегратор с ключами). Начальные условия для этого уравнения имеют вид $q_1(0) = q_2(0) = 100$ в, величина $l = 100$ в. В конце процесса выполнялось условие

$$q_1 = q_2 = 0,$$

что подтверждает правильность ранее выполненных расчетов.

Таким образом, аналоговые вычислительные устройства могут служить хорошим средством для решения подобного рода задач.

§ 5. Применение метода гармоник к задаче оптимального управления нагревом тела сферической формы

До сих пор мы рассматривали задачу оптимального нагрева массивной пластины, ограниченной двумя параллельными бесконечными плоскостями, находящимися друг от друга на некотором конечном расстоянии S . Мак-Косленд в [135], показал, что задачу оптимального нагрева сферы некоторого конечного радиуса R с помощью очень простых преобразований можно свести к соответствующей задаче для пластины, которую можно решить, например, с помощью рассмотренного выше метода гармоник.

Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее процесс теплообмена внутри сферы, когда начальные и граничные условия таковы, что изотермические поверхности представляют собой концентрические сферы,

имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} \right), \quad (4.5.1)$$

где функция $Q = Q(r, t)$ описывает температурное распределение в сфере в зависимости от радиуса r , $0 \leq r \leq R$, и времени t , $0 \leq t \leq T$.

Сделав в уравнении (4.5.1) простейшую замену функции по формуле

$$F(r, t) = rQ(r, t), \quad (4.5.2)$$

получим, что функция $F(r, t)$ должна удовлетворять хорошо нам знакомому уравнению теплопроводности следующего вида:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}. \quad (4.5.3)$$

Таким образом, задача свелась к хорошо изученной нами ранее проблеме. Предположим, например, что начальное условие имеет вид

$$Q(r, 0) = Q_0(r), \quad 0 \leq r \leq R. \quad (4.5.4)$$

Отсюда

$$F(r, 0) = rQ_0(r). \quad (4.5.5)$$

Пусть функция $rQ_0(r)$ представляется своим рядом Фурье

$$rQ_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi nr}{R}. \quad (4.5.6)$$

Если температура поверхности сферы равна нулю при $t \geq 0$, т. е.

$$F(R, t) = 0, \quad (4.5.7)$$

то легко установить, что функция

$$F(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{a\pi^2 n^2 t}{R^2}\right) \sin \frac{\pi nr}{R} \quad (4.5.8)$$

удовлетворяет уравнению (4.5.3), а также начальному и граничному условиям (4.5.5) и (4.5.7).

Интересующую нас температуру $Q(r, t)$ в соответствии с (4.5.2) можно легко получить по формуле

$$Q(r, t) = \frac{F(r, t)}{r}, \quad (4.5.9)$$

где величину $Q(0, t)$ нужно понимать как соответствующий предел

$$Q(0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(r, t)}{r}. \quad (4.5.10)$$

Таким образом, на основании (4.5.8) и (4.5.9) получаем:

$$Q(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} \exp\left(-\frac{\alpha \pi^2 n^2 t}{R^2}\right) \sin \frac{\pi n r}{R}. \quad (4.5.11)$$

Из последней формулы для температурного распределения в сфере в случае «свободного» остывания видно, что для определения периодов переключения T_1 и T_2 здесь также с успехом можно применять метод гармоник, а также методы, изложенные в § 2 настоящей главы.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ сфера имеет равномерное распределение температуры

$$Q(r, 0) = Q_0 = \text{const}, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (4.5.12)$$

Это означает в соответствии с (4.5.5), что начальное распределение для функции $F(r, 0)$ равно

$$F(r, 0) = r Q_0. \quad (4.5.13)$$

Нетрудно видеть, что если температура поверхности будет все время поддерживаться равной l , то

$$F(r, \infty) = r l. \quad (4.5.14)$$

Таким образом, поведение распределения $F(r, t)$ совершенно аналогично поведению соответствующего распределения в пластине толщиной R , одна поверхность которой при $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а другая при $x = R$ — при температуре $-Rl$.

Теперь можно снова использовать метод уничтожения первых гармоник с учетом того, что температура поверхности

сферы является управляющим воздействием, ограниченным по абсолютной величине числом l , т. е.

$$|Q(R, t)| \leq l. \quad (4.5.15)$$

Для того чтобы вычислить периоды T_1 и T_2 знакопостоянства управления $u(t) \equiv Q(R, t)$, можно снова воспользоваться уравнениями (4.3.8) для определения периода T_1 , в течение которого $u(t) = -l$, и периода T_2 , в течение которого $u(t) = l$. При этом надо принять во внимание, что в силу (4.5.13) и (4.5.14) коэффициенты Фурье соответствующих распределений $F(r, 0)$ и $F(r, \infty)$ будут относиться друг к другу как Q_0/l . Кроме того, в формуле (4.3.8) следует положить

$$\theta = -\frac{a\pi^2}{R}.$$

Однако отличие рассматриваемого случая сферы от случая пластины заключается в том, что для сферы уже не будет иметь место симметрия относительно средней точки радиуса сферы, и поэтому необходимо рассматривать все гармоники, соответствующие положительным целым числам n , а не только нечетным. Это означает, что здесь будут устраняться первая и вторая гармоники, а не первая и третья, как в случае пластины.

Вычислим теперь взвешенное квадратичное отклонение температурного распределения в сфере в конце интервала $t = T_1 + T_2$. Его выражение для сферы дается следующей формулой

$$\frac{\int_0^R 4\pi r^2 Q^2 dr}{\int_0^R 4\pi r^2 dr} = \frac{3}{R^3} \int_0^R F^2 dr = \frac{3}{2R^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2, \quad (4.5.16)$$

где A_n — коэффициенты Фурье, $n = 1, 2, \dots$, в разложении функции $F(r, t)$ в момент времени $t = T_1 + T_2$.

Как легко видеть, значение квадратичной ошибки для сферы отличается лишь множителем пропорциональности, который для сферы равен $3/2R^2$ вместо $1/2$ для пластины.

§ 6. Применение метода гармоник к задаче оптимального управления нагревом цилиндра

Рассмотрим процесс нагрева бесконечно длинного цилиндра конечного радиуса. Эта задача решалась в [135]. Предположим, что управление нагревом производится с помощью изменения температуры всей поверхности цилиндра во времени, причем температура ограничена по модулю величиной l . Начальные условия при этом таковы, что изотермические поверхности во все моменты времени представляют собой концентрические (коаксиальные) цилиндрические поверхности, ось которых, естественно, совпадает с осью цилиндра. Итак, предположим, что распределение температуры в цилиндре описывается функцией $Q = Q(r, t)$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq t \leq T$.

Как легко видеть, также и в этом случае задачу управления можно свести к соответствующей задаче оптимального нагрева пластины. Однако в этом случае роль пространственных гармоник (синусоид) играют функции Бесселя.

Пусть функция $Q_0(r)$, $0 \leq r \leq R$, описывает начальное распределение температуры в цилиндре

$$Q(r, 0) = Q_0(r), \quad 0 \leq r \leq R. \quad (4.6.1)$$

Эту функцию можно представить в виде следующего ряда:

$$Q_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r), \quad (4.6.2)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а числа α_n , $n = 1, 2, \dots$, являются корнями следующего уравнения:

$$J(\alpha R) = 0. \quad (4.6.3)$$

Если при заданном начальном распределении $Q_0(r)$, $0 \leq r \leq R$, приложить к поверхности цилиндра температуру, равную нулю, то изменение распределения температуры во времени описывается следующим образом

$$Q(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \exp(-\alpha \alpha_n^2 t). \quad (4.6.4)$$

Так же как и в случае сферы, рассмотренном в предыдущем параграфе, легко можно установить, что отношение n -й гармоники в разложении константы Q_0 к n -й гармонике в разложении константы l в ряд по функциям $J(\alpha_n r)$ типа (4.6.2) будет равно Q_0/l . Таким образом, снова можно использовать уравнение (4.3.8) для определения периодов T_1 и T_2 в оптимальном процессе, который в данном случае заключается в том, что уничтожается n -й член ряда (4.6.2) за минимальное время $T_1 + T_2$. Уравнение для определения T_1 и T_2 , соответствующее n -й гармонике, имеет вид

$$2 \exp[-\alpha_n^2 T_2] + (1 + Q_0/l) \exp[-\alpha_n^2 (T_1 + T_2)] = 0. \tag{4.6.5}$$

Решение уравнений подобного типа требует знания корней α_n уравнения (4.6.3). Уравнение (4.6.3) имеет бесконечное число действительных корней.

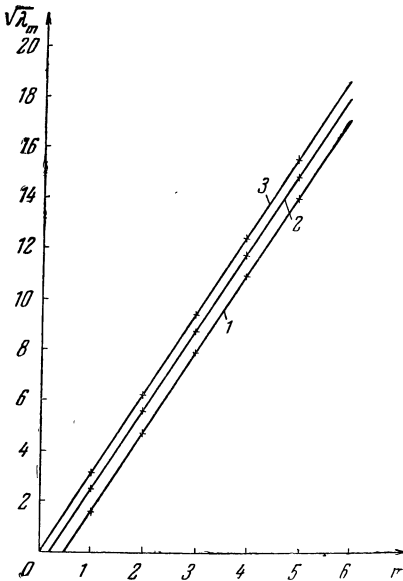


Рис. 38.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим соотношение между собственными значениями уравнения теплопроводности для пластины, сферы и цилиндра. Для сравнения мы рассмотрим три случая.

1. Для пластины толщиной $S = 2$, нагреваемой с обеих сторон,

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 / 4, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

2. Для сферы диаметром $2R = 2$, нагреваемой с поверхности,

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Для цилиндра диаметром $2R = 2$, нагреваемого с поверхности,

$$\lambda_n = \alpha_n^2, \text{ где } J_0(\alpha_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

В качестве иллюстрации служит таблица V, в которой приводятся квадратные корни из собственных значений [135].

На рис. 38 изображен график приведенных в таблице зависимостей: как и следовало ожидать, собственные значения для цилиндра (2) находятся между собственными значениями, соответствующими пластине (1) и сфере (3).

§ 7. Определение оптимального управляющего воздействия с помощью параболической аппроксимации

В этом параграфе мы рассмотрим еще один интересный метод приближенного определения оптимального управляющего воздействия в задаче о нагреве массивного тела. Будем решать следующую задачу. Задано начальное распределение температуры в массивном теле, которое представляет собой равномерное распределение температуры по всему сечению, равное Q_0 . Задано также конечное распределение, которое также является равномерным по всему сечению и равным нулю. Требуется определить такое управляющее воздействие, представляющее собой температуру поверхности данного тела и ограниченное по абсолютному значению величиной l , чтобы начальное распределение температуры перешло в конечное за минимальное время.

Метод, который мы сейчас опишем, основан, как указано в работе [135], на представлении каждого мгновенного

Таблица V

Номер собственного значения	1	2	3	4	5	6
Пластина $\frac{1}{2}(2m-1)\pi$	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
Сфера $m\pi$. .	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496
Цилиндр α_m , где $J_0(\alpha_0) = 0$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

распределения температуры в теле с помощью подходящей параболы. Этот метод был предложен Био [126]. Достоинство его заключается в том, что все мгновенное температурное распределение в массивном теле можно охарактеризовать лишь небольшим числом параметров.

Для примера рассмотрим пластину толщиной S с постоянным коэффициентом теплопроводности λ и постоянной теплоемкостью c . Будем считать, что поверхность при $x = S$ теплоизолирована. Предположим, что в момент времени $t = 0$ на поверхность, соответствующую точке $x = 0$, подается температурный скачок величины u_0 . Тогда можно считать, что распределение температуры в каждый фиксированный момент времени t можно аппроксимировать параболой двух типов: I и II , изображенных на рис. 39. Вместо распределения температур нам будет удобнее рассматривать распределение теплосодержания h . Эта величина отличается от температуры, как известно, только множителем c , т. е.

$$h(x, t) = cQ(x, t). \quad (4.7.1)$$

Кривая I соответствует распределению теплосодержания в самые первые моменты времени после $t = 0$, в то время как кривая II соответствует распределению в более поздний момент времени.

Мы будем считать, что эти кривые являются параболой. Тогда каждая кривая типа I и II будет однозначно характеризоваться всего лишь одним параметром p_1 и соответственно p_2 . Например, парабола типа I описывается следующими уравнениями:

$$h(x, t) = \begin{cases} h_0 \left(1 - \frac{x}{p_1(t)}\right)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq p_1; \\ 0 & \text{при } p_1 \leq x \leq S; \end{cases} \quad (4.7.2)$$

где $h_0 = cQ_0$.

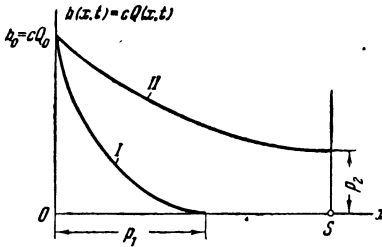


Рис. 39.

Параметр p_1 представляет собой некоторую обобщенную координату, которую в какой-то мере оправданно назвать глубиной проникновения (тепла в тело). Ясно, что такая картина распределения тепла по сечению тела является лишь идеализацией, которая более или менее приблизительно отражает реальность. На самом деле, как известно, скорость распространения тепла в теле теоретически бесконечна. Кривая типа *I* характеризует лишь «заметное» теплосодержание по сечению тела.

Можно показать [126], что хотя данная система теплопроводности является линейной, параметр $p_1(t)$ подчиняется некоторому нелинейному дифференциальному уравнению, которое здесь не приводится. Трудности решения этого уравнения компенсируются простотой описания температурного распределения с помощью одного параметра p_1 . Решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $p_1(0) = 0$ можно записать в виде

$$p_1(t) = 3,36 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{c}\right) t}. \quad (4.7.3)$$

Первая фаза процесса длительности t_1 кончается, когда парабола типа *I* переходит в параболу типа *II*. Это соответствует тому, что $p(t_1) = S$. Отсюда легко получить, что

$$t_1 = 0,0885 \frac{cS^2}{\lambda}. \quad (4.7.4)$$

Во второй фазе процесс описывается параболой типа *II* с параметром p_2 , зависящим от времени t . Уравнение распределения в этом случае имеет следующий вид:

$$h(x, t) = [h_0 - p_2(t)] \left(1 - \frac{x}{S}\right)^2 + p_2(t). \quad (4.7.5)$$

Решение соответствующего дифференциального уравнения для $p_2(t)$ с начальным условием $p_2(t_1) = 0$, где t_1 определяется формулой (4.7.4), можно записать в виде

$$\frac{p_2(t)}{h_0} = 1 - \exp \left[-0,214 \left(\frac{t}{t_1} - 1 \right) \right]. \quad (4.7.6)$$

Покажем теперь, как применить изложенный выше способ описания теплового процесса в массивном теле к задаче

определения двух периодов T_1 и T_2 знакопостоянства управления $u(t)$ в оптимальном процессе для получения достаточно хорошей аппроксимации желаемого равномерного нулевого распределения температуры. Предположим, что начальное распределение положительно. Тогда, очевидно, надо положить

$$\begin{aligned} u(t) &= -l \text{ при } 0 \leq t \leq T_1, \\ u(t) &= l \text{ при } T_1 < t \leq T_1 + T_2, \end{aligned}$$

причем T_1 и T_2 надо подобрать так, чтобы температурное распределение в момент $t = T_1 + T_2$ было приблизительно нулевым. Однако здесь остается неопределенным термин «приблизительно». Для иллюстрации метода сравним его с двумя другими приближенными методами: методом гармоник, рассмотренном в § 3, и методом прямых, рассмотренном в § 2 настоящей главы.

Определим желаемое распределение следующим образом. Рассмотрим метод прямых, разделив отрезок $[0, S]$ точками $x_1 = \frac{S}{4}$ и $x_2 = \frac{3S}{4}$. С точки зрения этого метода всякое распределение, которое обращается в нуль в точках x_1 и x_2 , будет искомым.

В течение периода T_1 секунд будем воздействовать управлением $u(t) = -l$, а в течение периода T_2 — управлением $u(t) = l$.

На основании принципа суперпозиции такое воздействие будет эквивалентно другому воздействию, состоящему в свою очередь из следующих воздействий: воздействия $-l$ от $t = 0$ до $t = T_1 + T_2$ и дополнительного воздействия $2l$ от $t = T_1$ до $t = T_1 + T_2$.

Поскольку начальное распределение равнялось Q_0 , изменение температуры под действием входного управления $-l$ будет таким же, как изменение начального равномерного нулевого распределения температуры под действием управления $-(l + Q_0)$. Поэтому конечное распределение температуры в теле в момент времени $t = T_1 + T_2$ можно рассматривать как состоящее из следующих компонент:

1. Начального равномерного распределения, равного Q_0 град.
2. Изменения температурного распределения под действием управления $-(l + Q_0)$ град в течение времени

$0 \leq t \leq T_1 + T_2$, приложенного к телу с нулевым начальным распределением.

3. Изменения температурного распределения под действием управления $2l \text{ град}$ за время $T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$ с нулевым начальным распределением.

Для удобства выберем коэффициент теплопроводности равным 1 и толщину тела S равной 2 и предположим, кроме того, что $l = Q_0 = 1$.

Если мы в качестве первого приближения предположим, что T_2 настолько мало, что изменения температуры в точке $x_2 = \frac{3}{4}S$ не происходит, то можно найти такой интервал времени $T_1 + T_2$, при котором под действием управления -1 град , мы получим нулевую температуру в точке $x_2 = \frac{3}{4}S$ в момент $t = T_1 + T_2$.

По формуле (4.7.4) можно найти, что в данном случае время $t_1 = 0,3540 \text{ сек}$, и для удовлетворения условия: температура равна нулю в точке $x_2 = \frac{3}{4}S$, требуется время $t = T_1 + T_2 = 1,3939 \text{ сек}$.

Теперь из уравнения (4.7.5) можно найти температуру при $x_1 = \frac{1}{4}S$. Отсюда можно найти также время, необходимое для того, чтобы под действием входного управления $u \equiv 2l$ достигалась нулевая температура в точке $x_1 = \frac{1}{4}S$.

Это время равно $0,0947 \text{ сек}$ настолько мало, что $\frac{p_1}{S} = 0,51695$. Последнее означает, что действие данного управления не влияет на температуру в точке $x_2 = \frac{3}{4}S$. Таким образом, временной интервал $1,3939 \text{ сек}$ можно выбрать в качестве интервала, соответствующего $T_1 + T_2$, а интервал $0,0947 \text{ сек}$ — в качестве интервала, соответствующего T_2 . Очевидно, что T_1 можно получить соответствующим вычитанием. Компоненты полученного температурного распределения соответственно (1), (2) и (3) и суммарное распределение (4) изображены на рис. 40.

Сравнительные результаты трех методов приведены в таблице VI [135]. Из этой таблицы видно, что время полного периода $T_1 + T_2$ в методе парабол меньше, чем это же

Таблица VI

	Метод		
	прямых	гармоник	парабол
T_1	1,4107	1,2588	1,2992
T_2	0,2006	0,1247	0,0947
$T_1 + T_2$	1,6113	1,3835	1,3939
Квадратичная ошибка	0,1048	0,0816	0,0766

время в методе прямых и лишь чуть-чуть (на величину порядка одной сотой) больше соответствующего времени в методе гармоник. Что же касается величины квадратичной

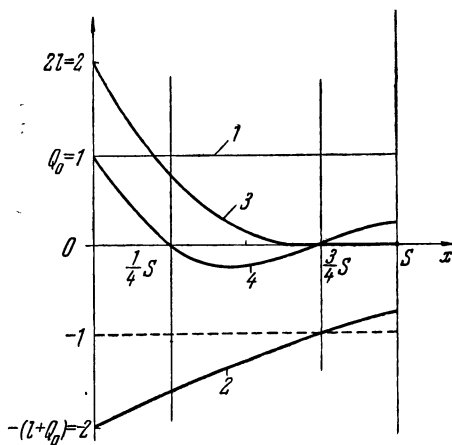


Рис. 40.

ошибки (интеграла от квадрата распределения температуры по всей толщине тела в момент $T_1 + T_2$), то для метода парабол она достигает меньшего значения, чем для метода гармоник и метода прямых.

Вычисления квадратичной ошибки в таблице выполнено путем определения коэффициентов ряда Фурье полученного

распределения в момент времени $T_1 + T_2$ и вычисления полусуммы квадратов этих коэффициентов. Но вычисление квадратичной ошибки можно произвести элементарными алгебраическими средствами на основе использования параболической аппроксимации. Если мы выполним все необходимые операции, то можно найти, что для метода парабол величина квадратичной ошибки равна 0,0793, что на очень малую величину отличается от квадратичной ошибки для этого метода, приведенной в таблице VI. Таким образом, это является хорошей аппроксимацией для действительного значения величины квадратичной ошибки.

Ясно, что метод парабол можно использовать для определения трех и большего числа периодов оптимального процесса, например, когда требуется свести к нулю температуру в точках $x_1 = \frac{1}{6}S$, $x_2 = \frac{1}{2}S$, $x_3 = \frac{5}{6}S$. Если мы будем продолжать этот процесс, увеличивая и в дальнейшем число переключений, то, по-видимому, кривая, соответствующая кривой (2) на рис. 40, будет приближаться к некоторой кривой, правый конец которой при $x = S$ будет соответствовать температуре -1 град . Поскольку эта кривая представляет собой температурное распределение, соответствующее входному воздействию, равному -2 град и действующему на протяжении всего времени оптимального процесса, мы, наверное, можем получить способ оценки общего времени оптимального процесса (при бесконечном числе переключений), основанный на определении времени, которое требуется кривой распределения (2), для того, чтобы достичь значения -1 град в точке $x = S$. Эта величина времени легко определяется из выражения (4.7.6), если положить $p_2/h_0 = 0,5$ и разрешить полученное уравнение относительно t . Легко видеть, что в данном случае $t = 1,5006 \text{ сек}$.

Хотя метод парабол и представляет интерес как еще один метод решения задачи оптимального управления рассматриваемой системой, он все же не имеет решающих преимуществ перед методом гармоник или методом прямых, ибо вычисление значений T_1 и T_2 с помощью этого метода также довольно затруднительно, как и с помощью других упомянутых методов. Вычисление квадратичной ошибки в методе парабол также представляет собой довольно громоздкую

вычислительную процедуру. Зато вычисление коэффициентов ряда Фурье очень хорошо производится на цифровой вычислительной машине. Правда, метод парабол позволяет вычислять температурные распределения даже в случае зависимости параметров процесса (a, λ, c, γ) от температуры, т. е. когда используется нелинейное уравнение теплопроводности. Однако обобщение рассмотренного выше метода парабол на решение задач оптимального управления в

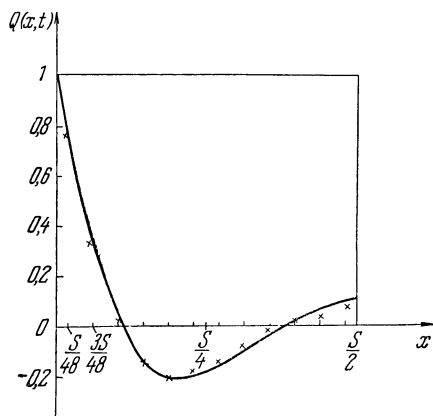


Рис. 41.

этом случае довольно затруднительно, ибо нелинейность самого управляемого объекта делает неприменимым принцип суперпозиции, на котором существенно основывались все наши рассуждения.

С помощью схемы, изображенной на рис. 37, проводилось моделирование описанной выше задачи оптимального управления нагревом массивного тела. На рис. 41 изображена кривая результирующего распределения в момент $T_1 + T_2$, построенная на основе вычисления на цифровой машине коэффициентов Фурье. Крестиками изображены точки, полученные путем моделирования на указанном выше аналоговом вычислительном устройстве, управление в котором определялось с помощью метода парабол, описанного в этом параграфе.

§ 8. Метод последовательных приближений для определения оптимального управления системой, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных

При нахождении оптимальных управлений каким-либо методом последовательных приближений, например, методом Эйлера, минимизируемый функционал J становится функцией конечного числа переменных. В этом случае требуется вычислить градиент этого функционала. Так как вычисление градиента сводится к вычислению частных производных по всем переменным, от которых зависит минимизируемый функционал J , то требуется вычислить столько значений функционала, каково число этих переменных. Эта операция наиболее трудоемка и занимает большую часть времени при расчетах на вычислительных машинах. Ю. М. Волин и Г. М. Островский предложили оригинальный способ вычисления градиента [29], который существенно сокращает объем вычислений. Это сокращение удается произвести за счет использования решения сопряженной системы, или, другими словами, за счет использования условий оптимальности, точнее, условий оптимальности в малом, так как всякая оптимальная траектория в целом оптимальна также и в малом.

Перейдем к изложению сути метода. Пусть задана управляемая система дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial x} &= F_i(Q, P, U), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial P_j}{\partial t} &= G_j(Q, P, U), \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.1)$$

Система несколько менее общего вида рассматривалась нами в § 4 главы I при решении задачи оптимизации работы химического реактора.

Каждому управлению $U(x, t) = (U_1(x, t), \dots, U_r(x, t))$ система (4.8.1) ставит в соответствие решение

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= (Q_1(x, t), \dots, Q_n(x, t)), \\ P(x, t) &= (P_1(x, t), \dots, P_p(x, t)). \end{aligned}$$

Все эти функции определены в области D ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$).

Задача оптимального управления заключается в том, чтобы найти такое управление $U(x, t)$, определенное в области D , при котором функционал

$$J = \int_0^T c Q(L, t) dt, \quad (4.8.2)$$

где T фиксировано, а $c = (c_1, \dots, c_n)$ — заданный постоянный вектор, достигает минимального значения.

Систему (4.8.1) для краткости запишем в векторной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= F(Q, P, U), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= G(Q, P, U). \end{aligned} \right\} \quad (4.8.3)$$

Мы также будем пользоваться обозначениями (1.4.11) и системой уравнений (1.4.14) — (1.4.18).

Приближенное вычисление оптимального управления будем осуществлять следующим образом.

Разобъем отрезок $[0, L]$ на M частей точками $x_0 = 0$, x_1, \dots, x_{M-1} , $x_M = L$, а отрезок $[0, T]$ — на N частей точками $t_0 = 0$, t_1, \dots, t_{N-1} , $t_N = T$.

Если через каждую точку деления отрезков $[0, L]$ и $[0, T]$ провести прямые, параллельные координатным осям, то прямоугольная область D разобьется на MN прямоугольных областей $D_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, M$; $\beta = 1, 2, \dots, N$).

Приближенное решение задачи оптимизации будем искать на множестве функций $U(x, t)$, постоянных в каждой области $D_{\alpha\beta}$. Такие функции будем называть ступенчатыми.

Таким образом, функционал (4.8.2) становится функцией конечного числа переменных, т. е.

$$\begin{aligned} J &= J(U_{\alpha\beta}^k), & (4.8.4) \\ k &= 1, \dots, r; \\ \alpha &= 1, \dots, M; \\ \beta &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если для минимизации функции (4.8.4) применять градиентные методы, то при больших M и N объем вычисления окажется большим, так как на каждом шаге для вычисления одного значения градиента необходимо MNr раз вычислить функцию (4.8.4), т. е. MNr раз решать систему уравнений (4.8.1).

Однако использование условий оптимальности может сильно уменьшить объем вычислений, необходимый для определения производных функций J по переменным $U_{\alpha\beta}^k$.

На основании формулы (1.4.13) с учетом соотношений (сопряженная система) (1.4.14), (1.4.15), а также (1.4.17), (1.4.18), будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^T c \delta Q(L, t) dt = \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial U} f + \frac{\partial G}{\partial U} g \right) \delta U dx dt = \\ &= \iint_D \frac{\partial H}{\partial U} \delta U dx dt, \quad (4.8.5) \end{aligned}$$

где

$$H = H(f, g, Q, P, U) = f \cdot F(Q, P, U) + gG(Q, P, U).$$

Таким образом, мы получили, что если функции $Q(x, t)$, $P(x, t)$ и $f(x, t)$, $g(x, t)$ при произвольном управлении $U(x, t)$ удовлетворяют системе (1.4.2), (1.4.4) и (1.4.14), (1.4.15), (1.4.17), (1.4.18), то приращение функционала J под действием произвольной вариации $\delta U(x, t)$ управления $U(x, t)$ однозначно вычисляется по формуле (4.8.5).

Пусть вариация $\delta U(x, t)$ управления $U(x, t)$ имеет следующий специфический вид:

$$\delta U(x, t) = \begin{cases} \text{const} & \text{при } (x, t) \in D_{\alpha\beta}; \\ 0 & \text{при } (x, t) \notin D_{\alpha\beta}. \end{cases} \quad (4.8.6)$$

Тогда на основании (4.8.5) получаем следующую формулу для градиента функции $J(U_{\alpha\beta}^k)$:

$$\frac{\partial J}{\partial U} = \iint_{D_{\alpha\beta}} \left(\frac{\partial F}{\partial U} f + \frac{\partial G}{\partial U} g \right) dx dt = \iint_{D_{\alpha\beta}} \frac{\partial H}{\partial U} dx dt, \quad (4.8.7)$$

или

$$\frac{\partial J(U_{\alpha\beta}^k)}{\partial U_{\alpha\beta}^k} = \int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} \int_{t_{\beta-1}}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial U} \dot{f}_i + \sum_{j=1}^p \frac{\partial G_j}{\partial U} g_j \right) dx dt, \quad (4.8.8)$$

где производные $\frac{\partial F_i}{\partial U}$, $\frac{\partial G_j}{\partial U}$ вычислены при $Q(x, t)$, $P(x, t)$, $f(x, t)$, $g(x, t)$, полученных от ступенчатой функции уравнения $U(x, t)$, на которой вычисляется градиент

$$\frac{\partial J(U_{\alpha\beta}^k)}{\partial U_{\alpha\beta}^k}.$$

Таким образом, для определения всех MNr производных

$$\frac{\partial J(U_{\alpha\beta}^k)}{\partial U_{\alpha\beta}^k}$$

от ступенчатой функции $U(x, t)$ нужно один раз решить систему (1.4.2), (1.4.4). Затем, получив из этого решения соответствующие $Q(x, t)$, $P(x, t)$, нужно также один раз решить сопряженную систему (1.4.14), (1.4.15) при условиях (1.4.17), (1.4.18). После этого искомые производные легко определяются по формуле (4.8.7) или (4.8.8).

Другими словами, необходимость MNr раз решать систему (1.4.2), (1.4.4) сводится к однократному решению этой системы и однократному решению сопряженной системы (1.4.14), (1.4.15) с граничными условиями (1.4.17), (1.4.18).

Если исходная система уравнений (1.4.2), (1.4.4) устойчива, то сопряженная система (1.4.14), (1.4.15) с граничными условиями (1.4.17), (1.4.18) при интегрировании в отрицательном направлении осей также будет устойчивой, что не вызовет дополнительных трудностей при вычислениях, которые обычно имеют место при интегрировании неустойчивых систем.

Формулы, аналогичные (4.8.7) и (4.8.8), можно получить для управляемых систем, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями.

Заметим теперь, что если время T не фиксировано заранее и функционал J , кроме зависимости от управлений,

зависит еще и от параметра T , который также нужно подобрать наилучшим образом, то необходимо вычислять еще и производную $\partial J/\partial T$. Однако, как легко видеть из формулы (4.8.2), эта производная для функционала J вычисляется непосредственно

$$\frac{\partial J}{\partial T} = cQ(L, T). \quad (4.8.9)$$

Очевидно, что вычисление этой производной не требует дополнительных интегрирований дифференциальных уравнений.

§ 9. Приближенный метод решения интегральных уравнений для оптимальных управляющих воздействий

Как видно из предыдущего, целый ряд задач оптимального управления как для объектов с распределенными, так и для объектов с сосредоточенными параметрами сводится к решению своеобразных нелинейных интегральных уравнений для функций, характеризующих управляющие воздействия и состояние управляемого объекта.

Рассмотрим уравнение (1.9.16) для определения управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Предположим, что существует решение этого уравнения, представляемое на отрезке $[0, T]$ кусочно постоянной функцией $u(t)$, имеющей на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва.

В этом случае можно предложить следующий способ решения рассматриваемого интегрального уравнения. Нужно проверить, не является ли функция $u(t) \equiv 1$ или $u(t) \equiv -1$, $0 \leq t \leq T$, решением этого уравнения. Если нет, то, предполагая, что решение $u = u(t)$ имеет одну переменную знака в точке θ_1 , $0 \leq \theta_1 < T$, вычислить функции $F_1(t, \theta_1)$ и $F_2(t, \theta_1)$, которые определяют значение выражения, стоящего под знаком sign , в зависимости от времени t , $0 \leq t \leq T$, и параметра θ_1 .

При этом $F_1(t, \theta_1)$ вычисляется в предположении, что на первом интервале $u = 1$, а $F_2(t, \theta_1)$ — в предположении, что на первом интервале $u = -1$. Тогда, если существует решение $u = u(t)$ с одной переменной знака, то, по крайней

мере, одно из уравнений $F_1(\theta_1, \theta_1) = F_2(\theta_1, \theta_1) = 0$ должно иметь вещественное решение. Если же такого решения не существует, то нужно искать решения последовательно в классе кусочно-постоянных (равных 1 или -1) функций с двумя переменными знака, далее с тремя и т. д., вычисляя последовательно функции F_1 и F_2 в зависимости от параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и т. д. Наконец, на каком-то m -м шаге, в силу сделанных предположений, должно существовать решение $u = u(t)$ с переменной знака в точках $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, т. е. должно существовать вещественное решение хотя бы одной из двух систем уравнений

$$F_1(\theta_i, \theta_1, \dots, \theta_m) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

или

$$F_2(\theta_i, \theta_1, \dots, \theta_m) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь функция $F_1(t, \theta_1, \dots, \theta_m)$ означает выражение под знаком sign в уравнении (1.9.16) в зависимости от времени t , $0 \leq t \leq T$, в предположении, что в первом интервале $u(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \theta_1$. Функция $F_2(t, \theta_1, \dots, \theta_m)$ означает то же самое в предположении, что на первом интервале $u(t) = -1$ при $0 \leq t \leq \theta_1$.

В главе V этот способ решения применяется к интегральному уравнению, которое получается в задаче оптимального нагрева массивных тел в нагревательных печах камерного типа (колодцах и пр.) в случае, когда $\gamma = 2$.

Рассмотрим еще один чрезвычайно важный и вместе с тем простой итеративный способ нахождения последовательных приближений решения интегральных уравнений рассматриваемого типа. Идея этого метода чрезвычайно проста и применима в данном случае потому, что правая часть основного интегрального уравнения дает по сути дела неявное выражение функций $u(t)$, стоящей в левой части этого уравнения. Таким образом, зная k -е приближение $u_k(t)$ решения $u(t)$ и используя основное уравнение, можно вычислить $(k+1)$ -е приближение из следующего

уравнения:

$$u_{k+1}(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \operatorname{sign} \left[\int_0^S Q^*(x) - \right. \\ \left. - \int_0^T K(x, T, \tau) u_k(\tau) d\tau \right]^{r-1} \operatorname{sign} \left(Q^*(x) - \right. \\ \left. - \int_0^T K(x, t, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) K(x, T, \tau) dx \Big], 0 \leq t \leq T, k = 0, 1, \dots$$

Выбор начальной функции $u_0(t)$ частично определяется соображениями «физического» порядка. Например, ясно, что если заданное состояние $Q^*(x)$ таково, что $Q^*(x) > 0$ при $0 \leq x \leq S$, то оптимальное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, в течение первого интервала знакопостоянства должно быть положительным.

Этот метод последовательных приближений также применяется к расчету управлений в задаче оптимального нагрева массивных тел.

ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ МАССИВНЫХ ТЕЛ

Важной технической проблемой, относящейся к классу задач с распределенными параметрами, является задача оптимального нагрева массивных тел. При нагреве слитков перед прокатом, например, важно греть металл быстро и прогревать достаточно равномерно. При равномерном прогреве слитков прокатный стан дает меньше брака и его валки меньше изнашиваются. При скоростном нагреве металла возрастает производительность печей, кроме того, скоростной нагрев имеет целый ряд других преимуществ перед обычным нескоростным нагревом [79].

При скоростном нагреве стали значительно уменьшается ее окисление и обезуглероживание, улучшаются структура и свойства стали, повышается пластичность и, следовательно, уменьшается расход энергии на деформацию металла при прокате. Часто время нагрева слитков перед прокатом бывает фиксировано (например, время нагрева лимитируется темпом работы прокатного стана), и возникает задача оптимального (в каком-то заранее определенном смысле) нагрева металла за фиксированное время τ_0 .

При решении самых разнообразных практических задач нагрева в теплотехнике широко используются результаты решения уравнения теплопроводности для бесконечной пластины.

В настоящей главе рассмотрены следующие две задачи оптимального нагрева пластины [19].

1. Из начального распределения температуры по толщине пластины $t_0(x)$ требуется за минимальное время τ_0 достичь заданного распределения температуры $t_a(x)$ (задача быстрогодействия).

2. При фиксированном времени нагревания τ_0 минимизировать среднеквадратичное отклонение температуры тела от заданной.

Решение этих задач существенным образом основано на теоретических результатах, полученных в главах I, III и IV, которые мы здесь будем конкретизировать применительно к нашим проблемам.

§ 1. Решение уравнения теплопроводности

Рассматривается задача о нагревании бесконечной пластины толщиной $2S$. Между поверхностью пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона, т. е. количество тепла, передаваемое в единицу времени через единицу поверхности из окружающей среды к телу, прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой.

Обозначим температуру окружающей среды $\tilde{u}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$. Эта функция будет нашим управляющим воздействием. Практический интерес представляет случай ограниченной температуры окружающей среды. Поэтому наложим на $u(\tau)$ следующее ограничение:

$$A_1 \leq \tilde{u}(\tau) \leq A_2, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (5.1.1)$$

где A_2 и A_1 — соответственно максимальная и минимальная возможные температуры нагрева. Далее, будем считать, что в начальный момент времени температура во всех точках пластины одинакова и равна

$$t_0(x, 0) = T_0 = \text{const.}$$

Распределение температур в теле, которое требуется получить в результате нагревания, считаем равным некоторой постоянной температуре $t_a(x) = \text{const}$, т. е. задача заключается в осуществлении перехода температурного распределения внутри тела из константы T_0 в константу S .

Выберем начало координат в середине пластины, так как теплообмен между окружающей средой и каждой из поверхностей происходит одинаково (симметричная задача).

Процесс нагревания пластины будет описываться уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (5.1.2)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$t(x, 0) = T_0, \quad (5.1.3)$$

$$-\lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S} + \alpha [\tilde{u}(\tau) - t(S, \tau)] = 0, \quad (5.1.4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=-S} + \alpha [\tilde{u}(\tau) - t(-S, \tau)] = 0, \quad (5.1.5)$$

$$-S \leq x \leq S, \quad \tau > 0,$$

где $\tilde{u}(\tau)$ — произвольная, кусочно-непрерывная функция времени, удовлетворяющая условию (5.1.1), a — коэффициент температуропроводности $\left[\frac{M^2}{\text{час}} \right]$, λ — коэффициент теплопроводности $\left[\frac{\text{ккал}}{M \cdot \text{час} \cdot \text{град}} \right]$, α — коэффициент теплоотдачи $\left[\frac{\text{ккал}}{M^2 \cdot \text{час} \cdot \text{град}} \right]$. Коэффициенты a и λ связаны соотношением

$$a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

где ρ — плотность $\left[\frac{\text{кг}}{M^3} \right]$; c — теплоемкость $\left[\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right]$.

Температуры A_2 , A_1 , T_0 , c удовлетворяют следующим очевидным неравенствам:

$$A_2 > A_1, \quad C > T_0.$$

Последнее означает, что мы в дальнейшем будем всегда заниматься задачей нагрева. (Очевидно, что полученные результаты легко можно использовать и для решения задачи оптимального охлаждения.) Кроме того, считаем выполненным следующее неравенство:

$$A_1 < C < A_2, \quad (5.1.6)$$

т. е. значение температуры C , до которой должно быть нагрето тело, не выходит за пределы интервала изменения температуры окружающей среды. Запишем уравнения нашей задачи в безразмерных величинах. Для этого произведем в (5.2.1) — (5.2.5) замену переменных, вводя следующие принятые в теплотехнике безразмерные координаты:

$\varphi = \frac{a\tau}{S^2}$ — безразмерное время (критерий Фурье Fo) (в дальнейшем мы будем называть везде φ просто временем),

- $l = \frac{x}{S}$ — безразмерная толщина, $-1 \leq l \leq +1$;
 $b = \frac{\alpha}{\lambda} S$ — критерий Био (Bi),
 $v = \frac{2(C - T_0)}{A_2 - A_1}$ — безразмерная температура (критерий начального условия),
 $\kappa = \frac{A_2 + A_1 - 2C}{A_2 - A_1}$ — безразмерная температура (критерий не-симметрии нагрева).

Из (5.1.6) следует, что $|\kappa| < 1$. Новую безразмерную температуру обозначим через

$$Q(l, \varphi) = \frac{2[t(l, \varphi) - C]}{A_2 - A_1},$$

новое управление — через

$$u(\varphi) = \frac{2[\tilde{u} - C]}{A_2 - A_1}.$$

Перенесем начало координат по оси температур в точку $\frac{2C}{A_2 - A_1}$. В дальнейшем все безразмерные температуры будут отсчитываться от этой точки. Следовательно, целью нагрева будет всегда нулевое распределение температуры в пластине $Q_3(l) = 0$. После вышеупомянутой замены переменных получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 Q(l, \varphi)}{\partial l^2}, \quad (5.1.7)$$

$$Q(l, 0) = -v, \quad (5.1.8)$$

$$\left. \frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=1} = b[u(\varphi) - Q(1, \varphi)], \quad (5.1.9)$$

$$-\left. \frac{\partial Q(l, \varphi)}{\partial l} \right|_{l=-1} = b[u(\varphi) - Q(-1, \varphi)], \quad (5.1.10)$$

где на $u(\varphi)$ положено ограничение

$$-(1 - \kappa) \leq u(\varphi) \leq 1 + \kappa. \quad (5.1.11)$$

Решение уравнения теплопроводности (5.1.7) с граничными условиями (5.1.8) — (5.1.10) при произвольной

кусочно-непрерывной функции времени $u(\varphi)$ имеет вид [75]

$$Q(l, \varphi) = -vE(l, \varphi) + \int_0^{\varphi} K(l, \varphi - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (5.1.12)$$

$$-1 \leq l \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

где

$$E = E(l, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\mu_k^2 \varphi} \cos \mu_k l,$$

$$K = K(l, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 A_k e^{-\mu_k^2 \varphi} \cos \mu_k l,$$

$$A_k = \frac{2 \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а числа μ_k , $k = 1, 2, \dots$, являются (в отличие от главы IV) различными действительными положительными корнями характеристического уравнения

$$\frac{1}{b} \mu = \operatorname{ctg} \mu, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad (5.1.13)$$

Корни этого уравнения определяются графическим путем как точки пересечения котангенсоиды $y_1 = \operatorname{ctg} \mu$ и прямой $y_2 = \frac{1}{b} \mu$ (рис. 42). Легко видеть, что при любом фиксированном b ($b > 0$) с ростом номера k числа μ_k асимптотически стремятся к $(k - 1)\pi$.

Функция $E = E(l, \varphi)$ описывает изменение распределения температуры тела по его сечению и во времени при единичном начальном распределении температуры

$$E(l, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \mu_k l, \quad -1 \leq l \leq 1, \quad (5.1.14)$$

и нулевой температуре окружающей среды $\bar{u}(\varphi) = 0$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.

Функция $K(l, \varphi)$ также имеет ясный физический смысл. Это так называемая импульсная переходная функция данной системы. Она показывает, как изменяется распределение температуры тела по его сечению вдоль координаты

l , $-1 \leq l \leq 1$, и во времени φ , $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, если в нулевой момент времени при $\varphi = 0$ на тело подействовала температура окружающей среды в виде δ -функции при нулевом начальном условии. Иными словами,

$$u(\varphi) = \delta(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

при

$$Q(l, 0) = 0, \quad -1 \leq l \leq 1.$$

Нужно отметить, что формула (5.1.12) носит общий характер. Формулами такого вида описываются все процессы

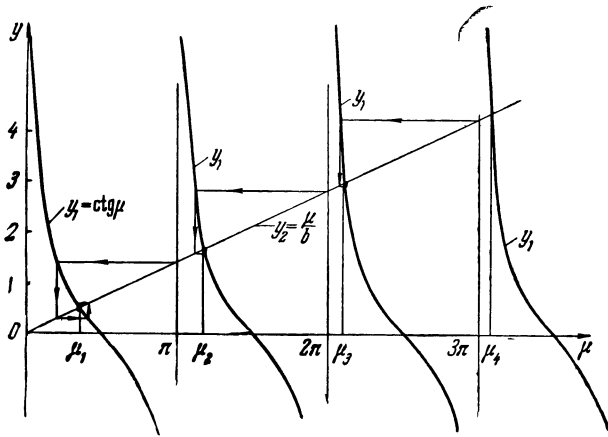


Рис. 42.

в линейных стационарных системах с распределенными параметрами при ненулевых начальных условиях, меняется при этом лишь конкретное выражение функций $E(l, \varphi)$ и $K(l, \varphi)$.

Заметим, кстати, что к рассматриваемой задаче относится случай, когда управляющим воздействием, которое заставляет тело нагреваться, служит не температура окружающей среды $u(\varphi)$, а температура поверхности самого тела $Q(1, \varphi) = Q(-1, \varphi)$. Действительно, этот случай легко сводится к рассмотренному. Для этого достаточно положить $b = \infty$. Равенства (5.1.9), (5.1.10) в этом случае сразу дадут

$$Q(1, \varphi) = Q(-1, \varphi) = u(\varphi).$$

Иными словами, можно сказать, что при бесконечно большом (достаточно большом) значении критерия Био (практически $b > 100$) температура поверхности равна (почти равна) температуре окружающей среды $u(\varphi)$. Поэтому можно считать, что управление процессом происходит путем непосредственного изменения температуры поверхности массивного тела.

В этом случае, как видно из уравнения (5.1.13),

$$\mu_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$A_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и

$$Q(l, \varphi) = \frac{4}{\pi} v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4} \varphi} \cos(2k-1) \frac{\pi}{2} l + \\ + \int_0^{\varphi} K(l, \varphi - \tau) u(\tau) d\tau, \quad -1 \leq l \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

где

$$K(l, \varphi) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (2k-1) e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4} \varphi} \cos(2k-1) \frac{\pi}{2} l.$$

Заметим тут же, что другое крайнее значение критерия $b = 0$ («тонкое» тело в теплотехническом смысле слова) приводит к тривиальному решению задач 1 и 2 оптимального управления. Действительно, если $b = 0$ (критерий \mathbf{B}_i достаточно мал, т. е. практически $b < 0,25$), то распределение температуры по сечению в любой момент времени не зависит от координаты l , $-1 \leq l \leq 1$ (или почти не зависит), т. е. является равномерным распределением для любого момента φ , $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.

Следовательно,

$$Q(l, \varphi) = Q(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad -1 \leq l \leq 1.$$

В этом случае уравнения (5.1.7), (5.1.9) и (5.1.10) вырождаются и процесс нагрева описывается следующим

обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка для функции $Q = Q(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$:

$$m \frac{dQ}{d\varphi} + Q = u(\varphi),$$

где

$$m = \frac{2c\rho S}{\alpha},$$

c — теплоемкость $\left[\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right]$, ρ — удельный вес $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$; в этом случае из принципа максимума следует, что оптимальное управление в задаче о наибоыстрейшем переходе из начального состояния $Q(l, 0) = v$ в конечное состояние $Q(l, \varphi_0) = 0$ за минимальное время φ_0 является постоянным в течение этого времени и равно

$$u(\varphi) = \kappa + 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$$

В этом случае задача 2 также решается тривиально.

Итак, сформулируем обе наши задачи оптимального управления в новых, безразмерных, величинах.

Первая задача. Задано уравнение теплопроводности (5.1.7) с граничными условиями (5.1.8) — (5.1.10). Требуется найти управление, удовлетворяющее условию (5.1.11), которое обеспечило бы за минимальное время φ_0 выполнение равенства

$$Q(l, \varphi_0) \equiv 0, \quad \text{для всех} \quad -1 \leq l \leq +1. \quad (5.1.15)$$

Это задача быстрогодействия.

Вторая задача. Задано уравнение теплопроводности (5.1.7) с граничными условиями (5.1.8) — (5.1.10). Будем оценивать качество нагрева по величине следующего функционала:

$$J = \int_{-1}^{+1} Q^2(l, \varphi) dl. \quad (5.1.16)$$

Для заданного времени φ_0 требуется найти управление $u(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, удовлетворяющее условию (5.1.11), минимизирующее функционал J . Такое управление мы будем называть в дальнейшем J -оптимальным.

§ 2. Применение метода моментов к решению задачи быстрогодействия

Задачу быстрогодействия для уравнения теплопроводности (5.1.7) можно свести к одной математической проблеме функционального анализа, так называемой l -проблеме моментов.

Меняя местами знаки суммирования и интегрирования в выражении (5.1.12), запишем решение уравнения (5.1.7) при граничных условиях (5.1.8) — (5.1.10) в виде

$$Q(l, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n l \left[-ve^{-\mu_n^2 \varphi} + \mu_n^2 \int_0^{\varphi} u(\xi) e^{-\mu_n^2(\varphi-\xi)} d\xi \right]. \quad (5.2.1)$$

Для выполнения тождества $Q(l, \varphi_0) = 0$ при всех $-1 \leq l \leq +1$ необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль все члены ряда (5.2.1), т. е. чтобы выполнялось бесконечное число равенств вида

$$ve^{-\mu_n^2 \varphi_0} = \mu_n^2 \int_0^{\varphi_0} u(\xi) e^{-\mu_n^2(\varphi_0-\xi)} d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.2)$$

Сокращая (5.2.2) на $e^{-\mu_n^2 \varphi_0}$, получим:

$$\frac{v}{\mu_n^2} = \int_0^{\varphi_0} u(\xi) e^{\mu_n^2 \xi} d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.2.3)$$

где $u(\xi)$ удовлетворяет условию (5.1.11).

Задача свелась к следующей проблеме моментов. Для системы чисел $\left\{ \frac{v}{\mu_n^2} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$, и независимых функций

$\{e^{\mu_n^2 \xi}\}$, $0 \leq \xi \leq \varphi_0$, $n = 1, 2, \dots$, найти функцию $u(\xi)$, $0 \leq \xi \leq \varphi_0$, удовлетворяющую условию (5.1.11), такую, чтобы равенство (5.2.3) выполнялось при любом n . При этом время φ_0 должно быть минимально возможным.

В главе III даны необходимые и достаточные условия существования такой функции $u(\xi)$ и показано, что она

является кусочно-постоянной функцией, имеющей счетное число точек переключения на отрезке $[0, \varphi_0]$, причем точка φ_0 является предельной точкой для переключений и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_n - \theta_{n-1}) = 0$, где θ_n и θ_{n-1} — две со-

седние точки переключения функции $u(\xi)$. Ясно, что техническая реализация такого управления невозможна из-за конечной разрешающей способности любого переключательного устройства. Возникает задача отыскания всех точек переключения функции $u(\varphi)$, удовлетворяющих условию $|\theta_n - \theta_{n-1}| \geq \varepsilon$, где ε — разрешающая способность переключательного устройства. Здесь напрашивается мысль об «усечении» самой проблемы моментов, т. е. о решении проблемы моментов для конечного n . Теоретическим обоснованием законности таких действий явилось бы доказательство сходимости последовательности функций $u_n(\varphi)$, дающих решение n -мерной проблемы моментов, к оптимальной функции $u(\varphi)$. В главе III доказано лишь существование сходящейся к $u(\varphi)$ подпоследовательности, которую можно выделить из последовательности $u_n(\varphi)$. Все эти вопросы являются важными при решении методом моментов любой задачи теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

В нашем же конкретном случае дело значительно облегчается следующими обстоятельствами.

Ряд (5.2.1) сходится равномерно в отрезке $-1 \leq l \leq 1$, т. е. по определению равномерной сходимости, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для любого $n \geq N$ для всех l из $[-1, 1]$ выполняется неравенство $|Q(l, \varphi) - Q_n(l, \varphi)| < \varepsilon$, где $Q_n(l, \varphi)$ — частичная сумма ряда (5.2.1). Таким образом, уничтожая первые n членов ряда (5.2.1) или, что то же самое, решая n -мерную проблему моментов, мы получаем решение нашей задачи с любой наперед заданной степенью точности.

Кроме того, если принять, что время нагрева $\varphi_0 > 0,5$ (что выполнено для абсолютного большинства практически интересных случаев), то уже в третьем уравнении вида (5.2.3) показатель экспоненты $\mu^2 \varphi_0 > 19$, а при $n = 4$ уже имеем $\mu_4^2 \varphi_0 > 44$ и т. д. Этот факт обеспечивает быструю сходимость точек переключения функции $u(\varphi)$ и позволяет предположить, что первые 2—3 интервала постоянства

функции $u(\varphi)$ практически займут все время оптимального процесса φ_0 . Из факта резкого возрастания экспонент следует также, что при переходе от решения проблемы моментов n -го порядка к решению проблемы моментов порядка $(n + 1)$ (для $n > 3$) все точки переключения функции $u_n(\varphi)$ будут смещаться на пренебрежимо малую величину. Если первые 2—3 интервала регулирования составляют основную массу времени оптимального процесса, то результатом нагрева за время этих интервалов ввиду конечной скорости распространения тепла в массивном теле должно быть равномерное прогревание тела, за исключением, быть может его поверхности. Действительно, если допустить, что в теле, скажем для $|l| < 0,8$, остались еще значительные отклонения температуры от заданной, то для их устранения, из-за инерционности массивного тела, потребуется время, сравнимое с величиной первых интервалов, а это противоречит виду функции $u(\varphi)$. Чем массивнее тело, т. е. чем больше величина критерия b , тем медленнее распространяется тепло от границы внутрь тела и тем большее число точек переключения функции $u(\varphi)$ является существенным. Учитывая все сказанное, будем заниматься решением конечномерной проблемы моментов (5.2.3). Напомним здесь основную теорему, дающую решение конечномерной l -проблемы моментов.

Пусть m — какое-либо ограниченное измеримое множество вещественной оси ($-\infty < \varphi < +\infty$), например, какой-либо отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$. Через E_m обозначим линейное пространство всех измеримых и суммируемых на m функций $x(\varphi)$ с нормой, определенной следующей формулой:

$$\|x\| = \int_m |x(\varphi)| d\varphi + \kappa \int_m x(\varphi) d\varphi, \quad (5.2.4)$$

где

$$-1 < \kappa < 1,$$

и пусть $u(\varphi)$ — некоторая измеримая на m ограниченная функция, а именно $-(1 - \kappa) L \leq u(\varphi) \leq (1 + \kappa) L$.

Назовем k функций $x_l(\varphi)$ вполне независимыми, если любая их линейная комбинация дает нормальную функцию, т. е. функцию, не обращающуюся в нуль ни на каком

множестве положительной меры. Нам потребуется следующая теорема [7], которую мы приведем без доказательства.

Т е о р е м а 1. Пусть функции $x_i(\varphi)$, $i = 1, 2, \dots, k$, вполне независимы. Для того чтобы система

$$\int_m x_i(\varphi) u(\varphi) d\varphi = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5.2.5)$$

$$-L(1 - \kappa) \leq u(\varphi) \leq L(1 + \kappa)$$

имела континуум существенно различных решений (т. е. решений, различающихся на множестве положительной меры), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{L} < \frac{1}{\lambda} = \min_k \int_m \left| \sum_{i=1}^k \xi_i x_i(\varphi) \right| d\varphi + \kappa \int_m \sum_{i=1}^k \xi_i x_i(\varphi) d\varphi, \quad (5.2.6)$$

$$\sum_1^k c_i \xi_i = 1$$

Для того чтобы система (5.2.5) имела в существенном одно и только одно решение, необходимо и достаточно, чтобы $L = \lambda$, где λ определяется из (5.2.6). При выполнении этого условия решение $u(\varphi)$ определяется по формуле

$$u(\varphi) = L \left\{ \kappa + \text{sign} \left[\sum_{i=1}^k \xi_i x_i(\varphi) \right] \right\} \text{ почти всюду на } m, \quad (5.2.7)$$

где агрегат $\sum_1^k \xi_i x_i(\varphi)$ ($\sum_{i=1}^k \xi_i c_i = 1$) есть какой-либо элемент, на котором достигается минимум в (5.2.6). При $\lambda > L$ система не имеет ни одного решения.

Для нашей конкретной задачи $c_i = \frac{\nu}{\mu_i^2}$, $L = 1$, $x_i(\varphi) = e^{\mu_i^2 \varphi}$. Система функций $\{e^{\mu_i^2 \varphi}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, является вполне независимой, так как любая их линейная комбинация обращается в нуль лишь в конечном числе точек, и, следовательно, является нормальной функцией.

Итак, для того чтобы система

$$\int_0^{\varphi_0} u(\varphi) e^{\mu_i^2 \varphi} d\varphi = \frac{\nu}{\mu_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5.2.8)$$

где

$$-(1 - \kappa) \leq u(\varphi) \leq (1 + \kappa),$$

имела в существенном одно и только одно решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 = \frac{1}{\lambda} \min_{\xi_i} \int_0^{\varphi_0} \left[\left| \sum_{i=1}^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} \right| + \kappa \sum_{i=1}^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} \right] d\varphi, \quad (5.2.9)$$

где

$$\sum_{i=1}^k \xi_i \frac{\nu}{\mu_i^2} = 1.$$

При выполнении этого условия решение $u(\varphi)$ определяется по формуле

$$u(\varphi) = \kappa + \operatorname{sign} \left[\sum_1^k \xi_{i0} e^{\mu_i^2 \varphi} \right], \quad (5.2.10)$$

где агрегат $\sum_{i=1}^k \xi_{i0} e^{\mu_i^2 \varphi}$ есть элемент, на котором достигается минимум в (5.2.9).

Покажем, что время φ_0 , определяемое из условия (5.2.9), является минимальным временем, при котором система (5.2.8) все еще имеет решение.

Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{\lambda(\varphi)} = \min_{\sum_1^k \xi_i \frac{\nu}{\mu_i^2} = 1} \int_0^{\varphi} \left[\left| \sum_1^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} \right| + \kappa \sum_1^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} \right] d\varphi. \quad (5.2.11)$$

Это строго возрастающая функция своего аргумента φ . Если φ_0 — число, удовлетворяющее равенству $\lambda(\varphi_0) = 1$, то для любого $\varphi < \varphi_0$ имеем $\lambda(\varphi) > 1$ и система (5.2.8) не имеет ни одного решения.

При $\varphi > \varphi_0$, $\lambda(\varphi) < 1$, и из теоремы 1 следует, что система (5.2.8) имеет континуум различных решений.

Таким образом, задача свелась к отысканию системы чисел $\{\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{k0}, \varphi_0\}$, удовлетворяющей равенству

(5.2.9). Нетрудно показать, что агрегат $\sum_{i=1}^k \xi_{i0} e^{\mu_i^2 \varphi}$, дающий минимум (5.2.9), имеет $(k - 1)$ нуль на отрезке $[0, \varphi_0]$, т. е. функция $u(\varphi)$, определяемая формулой (5.2.10), $(k - 1)$ раз меняет знак на отрезке $[0, \varphi_0]$ и имеет k интервалов знакопостоянства.

Рассмотрим конкретные алгоритмы отыскания системы чисел $\{\xi_{i0}, \varphi_0\}$, удовлетворяющей (5.2.9). Требуется найти минимум функции

$$F(\{\xi_i\}, \varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \left[\left| \sum_1^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} \right| + \kappa \sum_1^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} \right] d\varphi \quad (5.2.12)$$

при выполнении дополнительного условия $\sum_1^k \xi_i \frac{\nu}{\mu_i^2} = 1$, причем в точке минимума должно выполняться равенство

$$F(\{\xi_{i0}\}, \varphi_0) = 1. \quad (5.2.13)$$

Эта функция аналогична функции $\rho_{\xi}(T)$, определенной равенством (4.1.5).

Будем поступать следующим образом. Зафиксируем произвольную систему чисел $\{\xi_{i1}\}$ и подберем φ_{01} такое, чтобы выполнялось условие (5.2.13). Зафиксировав это значение φ_{01} , проведем минимизацию F по системе чисел $\{\xi_{i1}\}$. Полученную таким образом систему чисел $\{\xi_{i1}^0\}$ фиксируем и увеличиваем значение φ до тех пор, пока равенство (5.2.13) не будет выполняться при $\{\xi_{i1}^0\}$ и некотором φ_{02} . Полученное значение $\varphi_{02} > \varphi_{01}$ опять фиксируем и повторяем весь процесс сначала. В результате мы получим сходящуюся последовательность чисел $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \dots$, причем $\varphi_{01} < \varphi_{02} < \varphi_{03} < \dots$. Минимизация считается законченной, когда разность между полученными друг за другом значениями чисел φ_{0n} и φ_{0n+1} становится меньше какого-либо наперед заданного малого числа ε . Процесс минимизации схематично изображен на рис. 43.

В § 1 главы IV был разобран другой метод отыскания чисел $(\{\xi_{i0}\}, \varphi_0)$, основанный на том предположении, что искомое время является максимальным среди всех чисел φ_0' , удовлетворяющих равенству $F(\{\xi_i\}, \varphi_0') = 1$,

Интегрирование в этом случае всегда ведется до значения φ_0 , удовлетворяющего (5.2.13), а система чисел $\{\xi_i\}$ подбирается таким образом, чтобы время φ_0 было максимальным. Оба алгоритма можно реализовать при помощи оптимизатора с k -входами, при этом функция набирается на моделирующей установке.

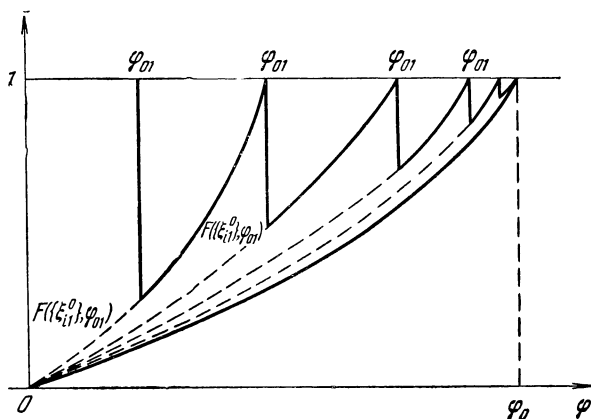


Рис. 43.

Поскольку $F(\{\xi_i\}, \varphi_0)$ является выпуклой функцией $\{\xi_i\}$ при любом фиксированном значении φ_0 , обычные методы минимизации — метод градиента и метод наискорейшего спуска — всегда приведут нас в точку минимума. При этом координаты вектора-градиента функции F вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial F(\{\xi_i\}, \varphi_0)}{\partial \xi_i} = \int_0^{\varphi_0} e^{\mu_i^2 \varphi} \left(\text{sign} \sum_1^k \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} + \kappa \right) d\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (5.2.14)$$

Нетрудно видеть, что в точке минимума функции F градиент не равен нулю и его координаты равны соответственно числам $\left\{ \frac{\nu}{\mu_i^2} \right\}$.

Все описанные алгоритмы можно легко реализовать как на цифровых, так и на аналоговых вычислительных машинах.

В нашем конкретном случае вследствие наличия экспоненциальных функций с различными показателями при решении задачи минимизации возникает проблема перемножения в машине очень больших чисел на очень малые.

Это заставило нас отказаться от реализации описанных выше алгоритмов на аналоговых вычислительных машинах.

Можно рассмотреть другой подход к решению проблемы моментов, основанный на том, что нам заранее известен вид функции управления $u(\varphi)$ и требуется найти лишь k чисел $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}, \varphi_0$, где θ_i — точка переключения $u(\varphi)$.

Так как мы занимаемся задачей оптимального нагрева, функция $u(\varphi)$ должна на отрезке $[0, \theta_1]$ принимать значение $(1 + \kappa)$, следовательно, на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ она имеет значение $-(1 - \kappa)$ и т. д.

Подставляя функцию такого вида в уравнения (5.2.8) и интегрируя на отрезках $[0, \theta_1], [\theta_1, \theta_2], \dots, [\theta_{k-1}, \varphi_0]$, получим следующую систему k трансцендентных уравнений с k неизвестными:

$$(1 - k_0) = 2 \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} e^{\mu_n^2 \theta_i} + [(-1)^{k+1} + \kappa] e^{\mu_n^2 \varphi_0}, \quad (5.2.15)$$

где $n = 1, 2, \dots, k$, $k_0 = -\nu - \kappa$.

Если нам удастся показать, что эта система имеет единственное решение относительно чисел $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}, \varphi_0\}$, то это решение и будет искомым оптимальным управлением.

Для значений $k = 2$ и $k = 3$ система (5.2.15) примет вид

1) при $k = 2$:

$$(1 - k_0) = 2e^{\mu_i^2 \theta} + (-1 + \kappa) e^{\mu_i^2 \varphi_0}, \quad i = 1, 2, \quad (5.2.16)$$

2) при $k = 3$:

$$(1 - k_0) = 2e^{\mu_i^2 \theta_1} - 2e^{\mu_i^2 \theta_2} + (1 + \kappa) e^{\mu_i^2 \varphi_0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В этих двух случаях можно легко доказать единственность решения (см. § 3 настоящей главы).

§ 3. Реализация алгоритмов решения проблемы моментов 2-го и 3-го порядка на цифровой вычислительной машине

В этом параграфе последовательно рассматриваются задачи, которые решались с помощью цифровой вычислительной машины БЭСМ-2. Приводятся блок-схемы программ, по которым велись вычисления.

Будем решать проблему моментов 2-го порядка при $\kappa=0$. Подставим в (5.2.8), (5.2.9) значение $k=2$; получим:

$$\min_{\xi} \int_0^{\varphi_0} |\xi_1 e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_2 e^{\mu_2^2 \varphi}| d\varphi = 1 \quad (5.3.1)$$

при выполнении условия

$$\frac{\nu}{\mu_1^2} \xi_1 + \frac{\nu}{\mu_2^2} \xi_2 = 1. \quad (5.3.2)$$

Если $\{\xi_{10}, \xi_{20}, \varphi_0\}$ — система чисел, удовлетворяющих (5.3.1), (5.3.2), то функция $u(\varphi)$ вычисляется по формуле

$$u(\varphi) = \text{sign}(\xi_{10} e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_{20} e^{\mu_2^2 \varphi}).$$

Задача заключается в отыскании минимума функции одного переменного (одно из чисел ξ_1, ξ_2 , можно исключить постановкой (5.3.2) в (5.3.1)) и подборе такого числа φ_0 , чтобы выполнялось (5.3.1). Воспользуемся первым из описанных в § 2 алгоритмом отыскания чисел $(\xi_{10}, \xi_{20}, \varphi_0)$. Зафиксируем ξ_2 и найдем φ_{01} , удовлетворяющее (5.3.1). При фиксированном φ_{01} ищем минимум по переменной ξ_2 . Затем весь процесс повторяется. Вычислим интеграл в (5.3.1):

$$F = \int_0^{\varphi_0} |\xi_1 e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_2 e^{\mu_2^2 \varphi}| d\varphi =$$

$$= \begin{cases} \left| \frac{\xi_1}{\mu_1^2} (e^{\mu_1^2 \varphi_0} - 1) + \frac{\xi_2}{\mu_2^2} (e^{\mu_2^2 \varphi_0} - 1) \right| & \text{при } \text{sign}(\xi_1 e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_2 e^{\mu_2^2 \varphi}) = \text{const}, \\ \left| \frac{\xi_1}{\mu_1^2} (e^{\mu_1^2 \varphi_0} - 1) + \frac{\xi_2}{\mu_2^2} (e^{\mu_2^2 \varphi_0} - 1) \right| + \left| \frac{\xi_1}{\mu_1^2} (e^{\mu_1^2 \varphi_0} - e^{\mu_1^2 \varphi_0}) + \right. \\ \left. + \frac{\xi_2}{\mu_2^2} (e^{\mu_2^2 \varphi_0} - e^{\mu_2^2 \varphi_0}) \right| & \text{при } \text{sign}(\xi_1 e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_2 e^{\mu_2^2 \varphi}) \neq \text{const}, \end{cases}$$

где число θ вычисляется по формуле

$$\theta = \frac{\ln |\xi_1| - \ln |\xi_2|}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \quad (5.3.3)$$

Стратегия поиска минимума по ξ_2 следующая. Шаг $\Delta \xi_2$ считается хорошим, если $F(\xi_2) > F(\xi_2 + \Delta \xi_2)$, и плохим в противном случае. При «хорошем» шаге осуществляется переход в точку $\xi_2 + \Delta \xi_2$ и делается следующий шаг той же величины и того же знака.

При «плохом» шаге знак этого шага сравнивается со знаком предыдущего и в случае совпадения знаков делается шаг той же величины, но противоположного знака, при несовпадении знаков величина шага уменьшается вдвое, а знак его остается прежним. Минимизация считается законченной при выполнении неравенства $\Delta \xi_2 < \varepsilon$, где ε — заданное малое число. Эта стратегия гарантирует нам точное отыскание минимума и отсутствие в программе циклов. После окончания минимизации число ξ_2^0 фиксируется и подбирается такое φ_0 , чтобы $F(\xi_2^0, \varphi_0) = 1$. Задача считается решенной, когда выполнено неравенство $|\varphi_0 - \varphi_{0 \text{ пр}}| < \varepsilon$. Блок-схема этой программы представлена на рис. 44.

Программа вычисления чисел μ_i сводится к итеративной процедуре, сходимость которой очевидна.

Эта же задача решалась при помощи второго из алгоритмов, описанных в § 2 настоящей главы. В этом случае интеграл вычислялся по приближенной формуле

$$F = \sum_{i=1}^n \left| \xi_{1i} e^{\mu_1^2 \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}} + \xi_{2i} e^{\mu_2^2 \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}} \right| \Delta \varphi_i = 1, \quad (5.3.4)$$

и число n на каждом шаге подбиралось так, чтобы $F = 1$. Искался максимум функции $n(\xi_2)$, определяемой неявным образом равенством (5.3.4). Блок-схема такой программы представлена на рис. 45. Величины ε и $\Delta \varphi_i$ имели соответственно значение 10^{-6} и 10^{-4} . Числа μ_i вычислялись в обеих программах с точностью 10^{-6} . Вычисленные обоими

*) Знак «пр» в дальнейшем всегда будет приписываться значению величины на предыдущем шаге.

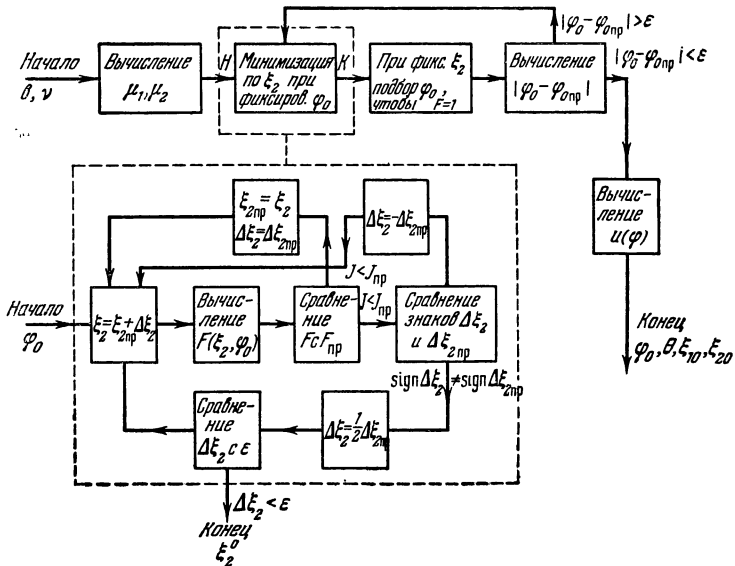


Рис. 44.

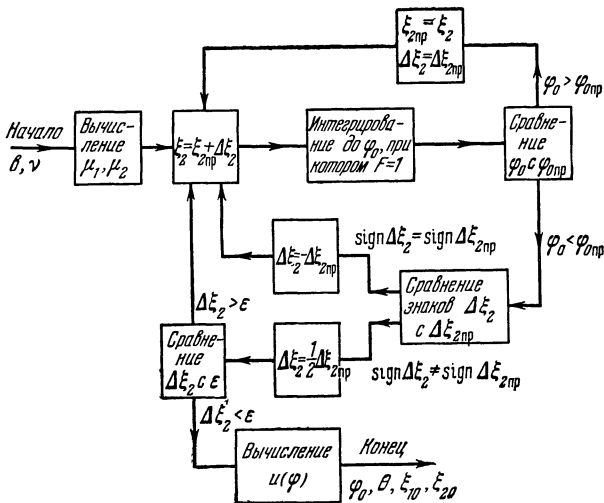


Рис. 45.

методами значения φ_0 , θ , ξ_{10} , ξ_{20} совпали, но II-й метод занял больше машинного времени. Если первая программа работала менее 1 сек, то время работы второй — 5 сек. Это объясняется тем, что интеграл в первом случае вычислялся в явном виде, а при втором методе численно. Нетрудно видеть, что время работы второй программы будет

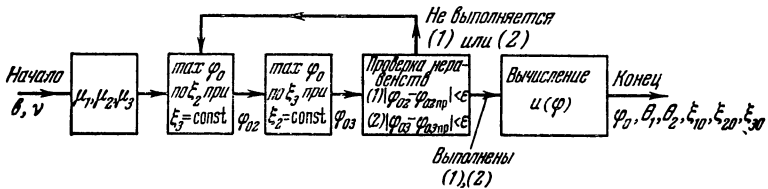


Рис. 46.

возрастать с ростом критерия ν , так как это влечет за собой увеличение времени интегрирования. Для первой программы такой нежелательной зависимости нет.

Перейдем теперь к решению проблемы моментов третьего порядка при $k = 0$. Как и в предыдущей задаче, требуется найти:

$$u(\varphi) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^3 \xi_{i0} e^{\mu_i^2 \varphi} \right); \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0; \quad (5.3.5)$$

где числа ξ_{10} , ξ_{20} , ξ_{30} , φ_0 удовлетворяют уравнению

$$\min_{\xi} \int_0^{\varphi_0} |\xi_1 e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_2 e^{\mu_2^2 \varphi} + \xi_3 e^{\mu_3^2 \varphi}| d\varphi = 1 \quad (5.3.6)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\nu}{\mu_i^2} = 1.$$

Здесь задача заключается в отыскании минимума для функции 2-х переменных. Для того чтобы вычислить интеграл в (5.3.6) в явном виде, требуется программа отыскания корней уравнения $\sum_{i=1}^3 \xi_i e^{\mu_i^2 \varphi} = 0$, составление которой

занимает время, сравнимое со временем, требующимся для непосредственного вычисления интеграла по следующей приближенной формуле:

$$F = \sum_1^n \left| \xi_1 e^{\mu_1^2 \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}} + \xi_2 e^{\mu_2^2 \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}} + \xi_3 e^{\mu_3^2 \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}} \right| \Delta\varphi_i. \quad (5.3.7)$$

Число n выбиралось всегда так, чтобы $F = 1$.

Путем поочередного изменения переменных ξ_2, ξ_3 отыскивалось время φ_0 или, что то же самое, число n , для которого $F = 1$. Если после получения некоторого времени φ_0 две последующие максимизации по ξ_2, ξ_3 дают соответственно числа $\varphi_{02}, \varphi_{03}$ и неравенства $|\varphi_{02} - \varphi_0| < \varepsilon, |\varphi_{03} - \varphi_0| < \varepsilon$ выполняются, то задача считается решенной.

Блок-схема этой программы представлена на рис. 46. Задачей блока «вычисление $u(\varphi)$ » является отыскание двух корней уравнения

$$f(\varphi) = \xi_{10} e^{\mu_1^2 \varphi} + \xi_{20} e^{\mu_2^2 \varphi} + \xi_{30} e^{\mu_3^2 \varphi} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \quad (5.3.8)$$

Очевидно, что $f(\varphi) > 0$ в точках $0, \varphi_0$ и меняет два раза знак при $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Чтобы найти корни θ_1, θ_2 уравнения (5.3.8), достаточно отыскать хотя бы одну точку $\varphi_0^* \in [0, \varphi_0]$, для которой $f(\varphi_0^*) < 0$. В этом случае мы получим два отрезка $[0, \varphi_0^*]$ и $[\varphi_0^*, \varphi_0]$, каждый из которых содержит по одному корню уравнения (5.3.8). Стратегия дальнейшего поиска корней очевидна. Нужно делить каждый из отрезков пополам, выбирая всегда тот, на концах которого функция $f(\varphi)$ имеет разные знаки. Если разбиение настолько мелкое, что $\Delta\varphi$ меньше заданного числа ε , то корни можно считать найденными. Точка φ_0^* ищется простым сканированием отрезка $[0, \varphi_0]$, начиная с шага $\varphi_0/4$. В случае неудачи, т. е. при отсутствии среди этих трех точек точки с отрицательным значением функции $f(\varphi)$, берется шаг $\varphi_0/8$ и т. д.

Перейдем теперь к решению проблемы моментов 3-го порядка методом наискорейшего спуска. За исходную точку принимается точка $\varphi_0 = \varphi_{01}, \xi_2^0 = \xi_3^0 = 0$, где φ_{01} подобрано так, чтобы $F = 1$. Интеграл вычисляется по формуле

(5.3.7). В точке $\xi_2^0, \xi_3^0, \varphi_1$ вычисляется градиент функции F по формулам (5.2.14). Затем отыскивается минимум F в направлении градиента. В точке минимума имеем $\xi_2' = -\alpha \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \xi_3' = -\alpha \frac{\partial F}{\partial \xi_3}$, где α — параметр метода наискорейшего спуска. Затем снова вычисляется градиент в точке $\xi_2', \xi_3', \varphi_0$ и т. д. Поиск минимума считается законченным

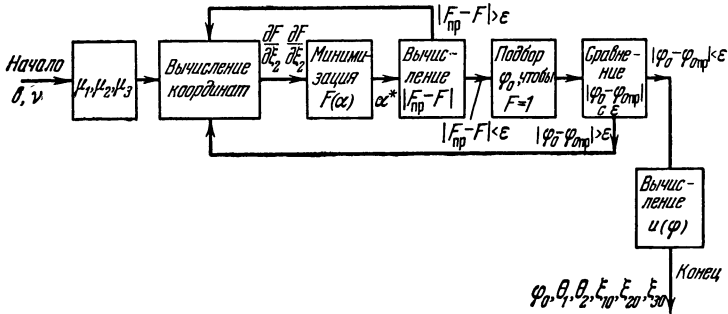


Рис. 47.

при выполнении неравенства $|F - F_{\text{пр}}| < \epsilon$. Затем подбирается φ_{02} такое, чтобы удовлетворялось равенство $F = 1$, и при $|\varphi_{02} - \varphi_{01}| > \epsilon$ вновь проводится минимизация методом наискорейшего спуска. При выполнении неравенства $|\varphi_0 - \varphi_{0 \text{ пр}}| < \epsilon$ задача считается решенной (рис. 47).

Для решения проблемы моментов порядка, большего трех, следует пользоваться минимизацией с помощью метода наискорейшего спуска. Для случаев $\nu = 0, 1; b = 1, 0$ и $10, 0$ были проведены вычисления, результаты которых приведены в таблице VII.

Из таблицы видно предсказанное нами быстрое уменьшение значений чисел ξ_{i0} с ростом порядка решаемой проблемы моментов. Изложенные методы решения проблемы моментов путем непосредственной минимизации выражения (5.2.9) хороши тем, что позволяют сразу получать систему чисел ξ_{i0} , что является важным для некоторых задач.

Так как в работе ставилась задача вычисления оптимальных управлений для широкого диапазона значений

Таблица VII

 $k = 2$

b	φ_0	θ	ξ_{10}	ξ_{20}
1,0	0,238	0,185	7,451	-0,973
10,0	0,109	0,079	21,318	-5,684

 $k = 3$

b	φ_0	θ_1	θ_2	ξ_{10}	ξ_{20}	ξ_{30}
1,0	0,277	0,198	0,261	4,863	-0,832	0,00008
10,0	0,139	0,083	0,128	20,021	-5,934	0,046

критериев b , κ , k_0 и, следовательно, был необходим расчет большого числа вариантов, потребовались программы вычисления функций u (φ), имеющие большее быстродействие, чем описанные выше. Для случаев $k = 2$, $k = 3$, удалось решить системы уравнений (5.2.16) и показать единственность их решения, причем в среднем программа решения этих систем занимала 1—2 секунды машинного времени на БЭСМ-2.

Рассмотрим подробно алгоритмы решения систем (5.2.16). Пусть требуется найти числа θ , φ_0 , удовлетворяющие системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} (1 - k_0) &= 2e^{\mu_1^2 \theta} - (1 - \kappa) e^{\mu_1^2 \varphi_0}, \\ (1 - k_0) &= 2e^{\mu_2^2 \theta} - (1 - \kappa) e^{\mu_2^2 \varphi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.9)$$

Умножая правые и левые части уравнений на $e^{-\mu_i^2 \theta}$, $i = 1, 2$, получим:

$$(1 - k_0) e^{-\mu_i^2 \theta} = 2 - (1 - \kappa) e^{\mu_i^2 (\varphi_0 - \theta)}, \quad i = 1, 2. \quad (5.3.10)$$

Введем обозначение $\varphi_0 - \theta = \Delta$ и будем решать систему (5.3.10) относительно новых неизвестных Δ и θ .

Логарифмируя оба уравнения, получим:

$$\ln(1 - k_0) - \mu_i^2 \theta = \ln[2 - (1 - \kappa) e^{\mu_i^2 \Delta}], \quad i = 1, 2. \quad (5.3.11)$$

Исключая θ из 2-го уравнения, придем к следующей системе, эквивалентной (5.3.10):

$$\left(1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right) \ln(1 - k_0) + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \ln[2 - (1 - \kappa) e^{\mu_1^2 \Delta}] - \\ - \ln[2 - (1 - \kappa) e^{\mu_2^2 \Delta}] = 0, \quad (5.3.12)$$

$$\theta = \frac{1}{\mu_1^2} \{\ln(1 - k_0) - \ln[2 - (1 - \kappa) e^{\mu_1^2 \Delta}]\}. \quad (5.3.13)$$

Обозначим функцию, стоящую слева в уравнении (5.3.12), через $f(\Delta)$ и изучим ее поведение. Прежде всего найдем значение Δ , для которых эта функция имеет смысл. Нас будут интересовать лишь положительные значения $\Delta > 0$, так как всегда $\varphi_0 > 0$. Ограниченность сверху значения Δ вытекает из следующих двух очевидных неравенств:

$$2 - (1 - \kappa) e^{\mu_i^2 \Delta} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Логарифмируя их, получим:

$$\Delta < \frac{1}{\mu_i^2} \ln \frac{2}{1 - \kappa}, \quad i = 1, 2,$$

и так как $\mu_1^2 < \mu_2^2$, имеем окончательно

$$\Delta < \frac{1}{\mu_2^2} \ln \frac{2}{1 - \kappa} = \Delta^*, \quad i = 1, 2. \quad (5.3.14)$$

Итак, функция $f(\Delta)$ определена для всех положительных Δ , удовлетворяющих (5.3.14). Рассмотрим теперь

значения на границах области ее определения (см. § 1 этой главы)

$$\begin{aligned} f(0) &= \left(1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right) \ln(1 - k_0) + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \ln(1 + \kappa) - \ln(1 + \kappa) = \\ &= \left(1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right) [\ln(1 - k_0) - \ln(1 + \kappa)] < 0, \end{aligned}$$

так как $(1 - k_0) > (1 + \kappa)$ (см. гл. I),

$$\lim_{\Delta \rightarrow \Delta^*} f(\Delta) = \text{const} - \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty.$$

Непрерывная функция $f(\Delta)$ имеет разные знаки на границах области определения и, следовательно, существует хотя бы один корень уравнения $f(\Delta) = 0$. Покажем, что этот корень единственный. Для этого достаточно доказать монотонность функции $f(\Delta)$, т. е. знакоопределенность ее производной. Действительно,

$$f'(\Delta) = 2\mu_2^2(1 - \kappa) \frac{e^{\mu_2^2 \Delta} - e^{\mu_1^2 \Delta}}{[2 - (1 - \kappa)e^{\mu_1^2 \Delta}][2 - (1 - \kappa)e^{\mu_2^2 \Delta}]} > 0,$$

так как $\mu_2^2 > \mu_1^2$.

Мы доказали, что система (5.3.9) имеет единственное решение, и имеем теперь алгоритм решения этой системы. Необходимо найти единственный корень уравнения (5.3.12), а затем вычислить θ по формуле (5.3.13). Корень уравнения (5.3.12) будем искать методом последовательного деления пополам отрезка $[0, \Delta^*]$, выбирая всегда тот отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки. Корень считается найденным, когда достигнута заданная «мелкость» разбиения отрезка. Блок-схема программы, реализующей описанный алгоритм решения, изображена на рис. 48.

Перепишем уравнения второй системы в (5.2.16) в виде:

$$(1 - k_0)e^{-\mu_i^2 \theta_1} = 2 - 2e^{\mu_i^2 \Delta_1} + (1 + \kappa)e^{\mu_i^2(\Delta_1 + \Delta_2)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.3.15)$$

Здесь

$$\Delta_1 = \theta_2 - \theta_1, \quad \Delta_2 = \varphi_0 - \theta_2.$$

Требуется найти числа θ_1 , θ_2 , φ_0 , удовлетворяющие (5.3.15). Представим Δ_1 из 3-го уравнения системы как

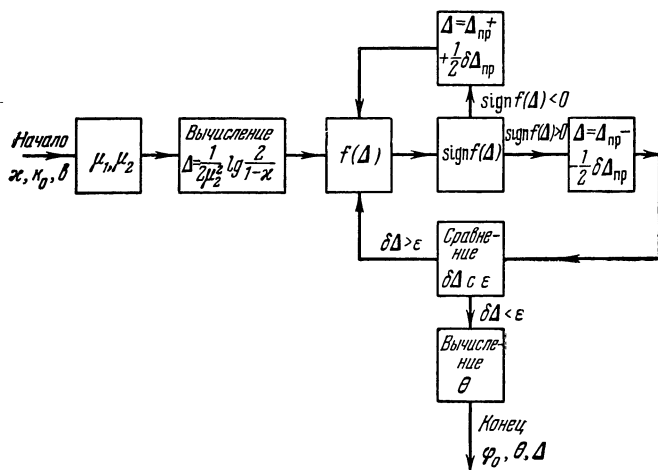


Рис. 48.

функцию Δ_2 , считая число θ_1 известным. Логарифмируя и произведя несложные преобразования, получим:

$$\Delta_1(\Delta_2) = \frac{1}{\mu_3^2} \ln \left(\frac{2 - (1 - k_0) e^{-\mu_3^2 \theta_1}}{2 - (1 - \kappa) e^{\mu_3^2 \Delta_2}} \right). \quad (5.3.16)$$

С помощью формулы (5.3.16) можно показать ограниченность сверху значения Δ_2 . Действительно, так как числитель в выражении, стоящем под логарифмом, положителен, знаменатель также должен быть больше нуля, т. е.

$$2 - (1 + \kappa) e^{\mu_3^2 \Delta_2} > 0,$$

что влечет за собой следующее неравенство:

$$\Delta_2 < \frac{1}{\mu_3^2} \ln \frac{2}{1 + \kappa} = \Delta_2^*. \quad (5.3.17)$$

Исключая θ_1 из первых двух уравнений системы (5.3.15), получим:

$$f(\Delta_2) = \left(1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right) \ln(1 - k_0) - \\ - \ln[2 - 2e^{\mu_2^2 \Delta_1(\Delta_2)} + (1 + \kappa)e^{\mu_2^2[\Delta_2 + \Delta_1(\Delta_2)]}] + \\ + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \ln[2 - 2e^{\mu_1^2 \Delta_1(\Delta_2)} + (1 + \kappa)e^{\mu_1^2[\Delta_2 + \Delta_1(\Delta_2)]}] = 0, \quad (5.3.18)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} \{\ln(1 - k_0) - \ln[2 - e^{\mu_1^2 \Delta_1} + (1 + \kappa)e^{\mu_1^2(\Delta_1 + \Delta_2)}]\}, \quad (5.3.19)$$

где $\Delta_1(\Delta_2)$ определяется формулой (5.3.16). Мы получили систему уравнений (5.3.16), (5.3.18), (5.3.19), эквивалентную системе (5.3.15).

Изучим поведение функции $f(\Delta_2)$, определенной формулой (5.3.18), при фиксированном значении θ_1 в выражении (5.3.16). Опять нас будут интересовать лишь значения $\Delta_2 > 0$. Найдем верхнюю границу значения Δ_2 . При $\Delta \rightarrow \infty$ $\Delta_2 \rightarrow \Delta_2^*$, и оба выражения под знаком \ln в формуле (5.3.18) становятся отрицательными.

Нетрудно видеть, что существует промежуточная точка $\tilde{\Delta}_2$ отрезка $[0, \Delta_2^*]$, в которой один из логарифмов в формуле (5.3.18) обращается в $-\infty$. Ясно также, что при увеличении Δ_2 от нуля первым обратится в нуль выражение

$$2 - 2e^{\mu_2^2 \Delta_1(\Delta_2)} + (1 + \kappa)e^{\mu_2^2[\tilde{\Delta}_2 + \Delta_1(\tilde{\Delta}_2)]} = 0,$$

так как $\mu_2^2 > \mu_1^2$.

Итак, функция $f(\Delta_2)$ определена на интервале $(0, \tilde{\Delta}_2)$, причем

$$\lim_{\Delta_2 \rightarrow \tilde{\Delta}_2} f(\Delta_2) = +\infty.$$

Нетрудно показать, что как и в предыдущем случае, $f(0) < 0$. Докажем теперь монотонность функции $f(\Delta_2)$.

Для этого вычислим ее производную

$$f'(\Delta_2) = - \frac{-2\mu_2^2 \Delta_1' e^{\mu_2^2 \Delta_1} + (1 + \kappa) \mu_2^2 (\Delta_1' + 1) e^{\mu_2^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}}{2 - 2e^{\mu_1^2 \Delta_1} + (1 + \kappa) e^{\mu_2^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}} + \\ + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \frac{-2\mu_1^2 \Delta_1' e^{\mu_1^2 \Delta_1} + (1 + \kappa) \mu_1^2 (1 + \Delta_1') e^{\mu_1^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}}{2 - 2e^{\mu_1^2 \Delta_1} + (1 + \kappa) e^{\mu_2^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}}.$$

Произведя несложные преобразования, получим:

$$f'(\Delta_2) = \\ = \frac{\Delta_1' [e^{\mu_2^2 \Delta_1} - e^{\mu_1^2 \Delta_1}] + \frac{1 + \kappa}{2} e^{(\mu_1^2 + \mu_2^2) \Delta_1} [e^{\mu_2^2 \Delta_2} - e^{\mu_1^2 \Delta_2}]}{[2 - 2e^{\mu_2^2 \Delta_1} + (1 + \kappa) e^{\mu_2^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}] [2 - 2e^{\mu_1^2 \Delta_1} + (1 + \kappa) e^{\mu_1^2 (\Delta_1 + \Delta_2)}]}$$

и т. д., где

$$\Delta_1'(\Delta_2) = \frac{1}{\mu_3^2} \frac{[2 - (1 - k_0) e^{-\mu_2^2 \theta_1}] \mu_3^2 e^{\mu_3^2 \Delta_2}}{2 - (1 + \kappa) e^{\mu_3^2 \Delta_2}} > 0.$$

Как нетрудно видеть, $f'(\Delta_2) > 0$; следовательно, $f(\Delta_2)$ является строго возрастающей функцией своего аргумента. Из всего сказанного ясно, что уравнение (5.3.18) имеет единственный корень $\Delta_2 \in (0, \tilde{\Delta}_2)$. Остается выяснить, как быть с числом θ_1 , которое мы приняли известным в выражении (5.3.16). При фиксированных b, k_0, κ выполняется неравенство $\theta_1 > \tilde{\theta}$, где $\tilde{\theta}$ — точка переключения функции $u_2(\varphi)$, дающей решение проблемы моментов 2-го порядка. В большинстве случаев $\mu_3^2 \tilde{\theta} > 20$ и, следовательно, $e^{-\mu_3^2 \tilde{\theta}}$ очень мало отличается от нуля. В этом случае можно не заботиться о значении θ_1 в формуле (5.3.16). При $\theta \mu_3^2 < 20$ мы поступим следующим образом. Будем подставлять в формулу (5.3.16) значение $\theta_{10} = \theta$, получающееся из решения первого уравнения (5.2.16). После решения уравнения (5.3.18) и вычисления θ_1 по формуле (5.3.19), сравним полученное значение θ_1 с θ_{10} и при выполнении неравенства $|\theta - \theta_{10}| < \varepsilon$ считаем задачу решенной, в

противном же случае подставляем полученное значение θ_1 в формулу (5.3.16) и повторяем процесс вычислений.

В случае расходимости этого метода (сходимость его не была нами доказана) происходит «зацикливание» и метод не приводит к решению. Уравнение (5.3.18) решается совершенно аналогично уравнению (5.3.12).

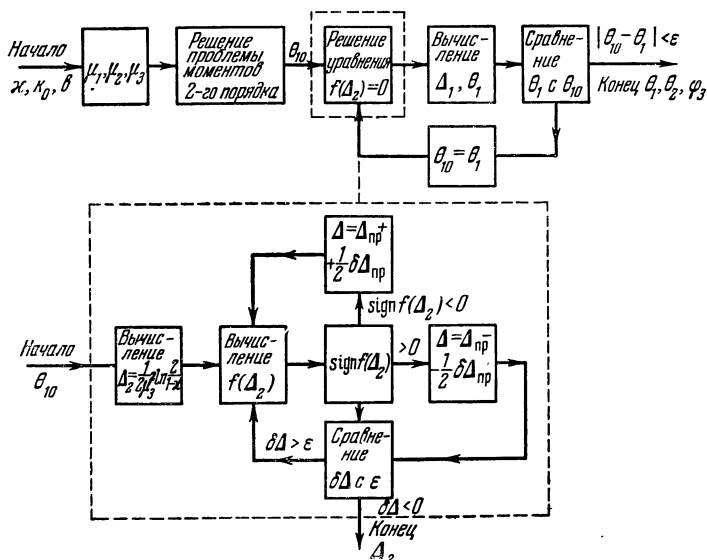


Рис. 49.

Блок-схема программы, реализующей решение системы уравнений (5.2.16), изображена на рис. 49. Было произведено вычисление функций $u_2(\varphi)$, $u_3(\varphi)$, дающих соответственно решение проблем моментов 2-го и 3-го порядков для следующих значений критериев:

$$b = 0,1; 0,2; \dots; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; \dots; 10,0; 15,0; \\ 20,0; 30,0; \dots; 60,0; 30,0; 100,0.$$

При каждом фиксированном b критерии κ, κ_0 принимали

следующие значения:

при $\kappa = 0,0; -0,2; -0,4; -0,6; -0,8$

$k_0 = -0,1; -0,2; \dots; -1,0; -1,5; -2,0;$
 $-3,0; \dots; -10,0;$

при $\kappa = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$

$k_0 = -1,5; -2,0; -3,0; \dots; -10,0.$

Для каждой функции $u_2(\varphi)$, $u_3(\varphi)$ вычислялись решения уравнения теплопроводности $Q(l, \varphi_0)$ в точках $l = 0,0; 0,1; 0,2; \dots 1,0$ и интегральная оценка нагрева (см. главу IV)

$$J = \int_{-1}^{+1} Q^2(l, \varphi_0) dl.$$

Вычисления производились по формулам: при $k = 2$

$$Q(l, \varphi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n l [-(1-k_0)e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + 2e^{-\mu_n^2 \Delta} - (1-\kappa)], \quad (5.3.20)$$

где $\Delta = \varphi_0 - \theta,$

$$J = \int_{-1}^{+1} Q^2(l, \varphi_0) dl = 4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n [-(1-k_0)e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + 2e^{-\mu_n^2 \Delta} - (1-\kappa)]^2, \quad (5.3.21)$$

где

$$B_n = \frac{b^2}{\mu_n^2 + b^2 + b};$$

при $k = 3$

$$Q(l, \varphi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n l [-(1-k_0)e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + 2e^{-\mu_n^2 (\Delta_1 + \Delta_2)} - 2e^{-\mu_n^2 \Delta_2} + (1+\kappa)], \quad (5.3.22)$$

$$J = 4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n [-(1-k_0)e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + 2e^{-\mu_n^2 (\Delta_1 + \Delta_2)} - 2e^{-\mu_n^2 \Delta_2} + (1+\kappa)]^2, \quad (5.3.23)$$

где

$$\Delta_1 = \theta_2 - \theta_1 \text{ и } \Delta_2 = \varphi_0 - \theta_2.$$

Блок-схема общей программы вычислений для обоих случаев ($k = 2$, $k = 3$) имеет вид, изображенный на рис. 49.

Все ряды в формулах (5.3.20) и (5.3.21) вычислялись с точностью до 10^{-5} . Точность всех вычислений по программам рис. 49 является вполне достаточной для практических применений этой задачи.

Результаты расчета оптимальных управлений на вычислительной машине при $k = 2$, $k = 3$ удалось представить в виде системы номограмм для следующей области изменения критерия: $1,5 \leq b \leq 10,0$; $-0,8 \leq \kappa \leq 0,8$; $6,0 \leq v \leq 0,5$.

Эти номограммы даны в приложении I (рис. 67—72). В большей части номограмм отсутствует зависимость от критерия начального условия v . Они справедливы для любого $v \geq 0,5$. Действительно, в формулы (5.3.20) — (5.3.23) $k_0 = -v - \kappa$ входит лишь в виде членов следующего вида:

$$(1 - k_0) e^{-\mu_3^2 \varphi_0}; (1 - k_0) e^{-\mu_3^2 \varphi_0} \text{ и т. д.}$$

Так как при $v \geq 0,5$ $\varphi_0 > 0,4$, $\mu_3^2 > 40$, а $\mu_4^2 > 100$, то выражения $(1 - k_0) e^{-\mu_i^2 \varphi_0}$ ($i = 3, 4$) очень близки к нулю для всех $v \geq 0,5$.

В § 6 настоящей главы приводятся примеры практического использования номограмм приложения I.

§ 4. Задача J -оптимального управления нагревом массивного тела

Решение уравнения теплопроводности (5.1.7) с начальными и граничными условиями (5.1.8), (5.1.9), (5.1.10) можно представить в виде (5.1.12), где $K(l, \varphi)$ — известная функция своих аргументов, а функция $u(\xi)$ — температура окружающей среды, удовлетворяющая условию (5.1.11).

Требуется найти такое управление, удовлетворяющее условию (5.1.11), чтобы отклонение распределения температуры тела от заданного распределения $Q^*(l)$ было

минимальным в момент φ_0 в том смысле, что функционал

$$J = \int_{-1}^{+1} [Q^*(l) - Q(l, \varphi_0)]^2 dl \quad (5.4.1)$$

достигает минимума.

Для вывода уравнения, определяющего оптимальное управление в этом случае, воспользуемся результатами § 9 главы I, а именно, воспользуемся интегральным уравнением (1.9.16), которое перепишем применительно к нашей задаче, полагая $\gamma = 2$.

Тогда уравнение (1.9.16) примет следующий вид:

$$u(\varphi) = \kappa + \text{sign} \left\{ \int_{-1}^1 [vE(l, \varphi_0) - \int_0^{\varphi_0} K(l, \varphi_0 - \tau) u(\tau) d\tau] K(l, \varphi_0 - \varphi) dl \right\}, \quad (5.4.2)$$

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$$

Меняя порядок интегрирования в интегралах последнего уравнения и вводя обозначения

$$B(\varphi_0, \varphi) = \int_{-1}^1 vE(l, \varphi_0) K(l, \varphi_0 - \varphi) dl, \quad (5.4.3)$$

$$G(\varphi_0, \varphi, \tau) = \int_{-1}^1 K(l, \varphi_0 - \tau) K(l, \varphi_0 - \varphi) dl, \quad (5.4.4)$$

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad 0 \leq \tau \leq \varphi_0,$$

получим следующее интегральное уравнение:

$$u(\varphi) = \kappa + \text{sign} \left[B(\varphi_0, \varphi) - \int_0^{\varphi_0} G(\varphi_0, \varphi, \tau) u(\tau) d\tau \right]. \quad (5.4.5)$$

Используя определения функций $E(l, \varphi)$ и $K(l, \varphi)$, данные в § 1 настоящей главы, и ортогональность системы

функций $\{\cos \mu_k l\}$, $-1 \leq l \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$, из формул (5.4.3) и (5.4.4) получим следующие выражения:

$$B(\varphi_0, \varphi) = v \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\mu_k^2 (2\varphi_0 - \varphi)}, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad (5.4.6)$$

$$G(\varphi_0, \varphi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 C_k e^{-\mu_k^2 (2\varphi_0 - \varphi - \tau)}, \quad (5.4.7)$$

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad 0 \leq \tau \leq \varphi_0,$$

где

$$C_k = \mu_k A_k \sin \mu_k = \frac{2\mu_k \sin^2 \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4.8)$$

Используя характеристическое уравнение (5.1.13), получим, что

$$C_k = \frac{2b}{\mu_k^2 + b^2 + b}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4.9)$$

Подставляя выражения (5.4.6) и (5.4.7) в уравнение (5.4.5), получим:

$$u(\varphi) = \kappa + \operatorname{sign} \left[\sum_{k=1}^{\infty} v C_k e^{-\mu_k^2 (2\varphi_0 - \varphi)} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varphi_0} \mu_k^2 C_k e^{-\mu_k^2 (2\varphi_0 - \varphi - \tau)} u(\tau) d\tau \right], \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \quad (5.4.10)$$

Произведем очевидное преобразование уравнения (5.4.10), представив его в следующей форме:

$$u(\varphi) = \kappa + \operatorname{sign} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\mu_k^2 (2\varphi_0 - \varphi)} \left[v - \mu_k^2 \int_0^{\varphi_0} e^{\mu_k^2 \tau} u(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (5.4.11)$$

Обратим внимание на выражение в квадратных скобках, стоящее под знаком sign в (5.4.11). Нетрудно видеть, что

если подставить в (5.4.11) функцию $u(\varphi)$, дающую решение бесконечномерной проблемы моментов (5.2.3), то ряд под знаком sign обратится в тождественный нуль и уравнение (5.4.11) теряет смысл, так как $\text{sign } 0$ — неопределенное выражение. Это отражает тот математический факт, что существует конечное время φ_0^* , за которое возможно добиться точного значения константы (см. § 9 главы I). Ясно, что для всякого $\varphi_0 > \varphi_0^*$ постановка задачи об J -оптимальном управлении теряет смысл. Но функция $u(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, реализующая достижение точного значения константы, как показано также в § 9 главы I, имеет бесконечное число точек переключения на отрезке $[0, \varphi_0^*]$ и не может быть реализована с помощью какого-либо технического устройства. Если же поставить задачу J -оптимального управления корректно в техническом смысле, т. е. задать конечную разрешающую способность переключательного устройства, то имеет смысл рассматривать уравнение (5.4.11) при любом φ_0 .

Зафиксируем какое-либо значение $\varphi_0 < \varphi_0^*$ и будем искать решение уравнения (5.4.11) в виде кусочно-постоянной функции $u(\varphi)$, имеющей на отрезке $[0, \varphi_0]$ ($k-1$) точку переключения $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$. Кроме того, будем считать, что при $\varphi \in [0, \theta_1]$, $u(\varphi) = 1 + \kappa$.

Подставляя такую $u(\varphi)$ в правую часть уравнения (5.4.11) и интегрируя на отрезках $[0, \theta_1]$, $[\theta_1, \theta_2]$, \dots , $[\theta_{k-1}, \varphi_0]$, получим:

$$u(\varphi) = \kappa + \text{sign} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu_n^2(\varphi_0 - \varphi)} \left[(1 - k_0) e^{-\nu_n^2 \varphi_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i e^{-\nu_n^2(\varphi_0 - \theta_i)} + (-1)^k - \kappa \right] \right\}, \quad (5.4.12)$$

где $k_0 = -\nu - \kappa$.

Для того чтобы правая часть равенства (5.4.12) давала функцию $u(\varphi)$, имеющую описанный выше вид, необходимо и достаточно обращения в нуль выражения под знаком sign во всех точках $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$ и только в этих точках. Задача, таким образом, свелась к решению следующей

системы уравнений относительно $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}) e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \theta_i)} = 0, \quad (5.4.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1,$$

где

$$f_n(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}) = \left\{ (1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \theta_i)} + \right. \\ \left. + (-1)^k - \kappa \right\}. \quad (5.4.14)$$

положим в (5.4.13) $k = 1$, т. е. будем искать решение уравнения (5.4.11) в виде $u(\varphi) = 1 + \kappa$. Тогда

$$u(\varphi) = \kappa + \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \varphi)} [(1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - (1 + \kappa)]. \quad (5.4.15)$$

Правая часть (5.4.15) равняется $1 + \kappa$ при выполнении неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \varphi)} [(1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - (1 + \kappa)] > 0 \quad (5.4.16)$$

для всех φ из некоторого отрезка $[0, \varphi_0]$.

Можно показать, что выражение слева в (5.4.16) является монотонно убывающей функцией φ при любом фиксированном φ_0 , следовательно, если неравенство выполнено для $\varphi = \varphi_0$, то оно справедливо и при любом другом $\varphi < \varphi_0$. Подставляя $\varphi = \varphi_0$ в (5.4.16), получим:

$$f(\varphi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n [(1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - (1 + \kappa)] > 0,$$

Причем $f(\varphi_0)$ — также монотонно убывающая функция аргумента φ_0 , меняющая свой знак с плюса на минус при изменении φ_0 от нуля до ∞ . Значение $\tilde{\varphi}_0$, при котором $f(\tilde{\varphi}_0) = 0$, является граничным в том смысле, что, начиная с этого значения, уравнение (5.4.11) может допускать нетривиальные решения.

Будем искать решение уравнения (5.4.11) в виде функции, имеющей одну точку переключения θ при $0 \leq \theta \leq \varphi_0$, где $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$. Тогда (5.4.12) примет вид

$$u(\theta) = \kappa + \operatorname{sign} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 (\varphi_0 - \theta)} [(1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - 2e^{-\mu_n^2 (\varphi_0 - \theta)} + (1 - \kappa)] \right\} = 0.$$

Требуется найти число θ , удовлетворяющее условию

$$f_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 (\varphi_0 - \theta)} [(1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - 2e^{-\mu_n^2 (\varphi_0 - \theta)} + (1 - \kappa)] = 0.$$

Очевидно, что если $f_1(0) > 0$ и $f_1(\varphi_0) < 0$, то такое число θ всегда существует, так как $f_1(\theta)$ является непрерывной монотонно убывающей функцией аргумента θ .

Рассмотрим значение $f_1(\theta)$ на концах отрезка $[0, \varphi_0]$

$$f_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 \varphi_0} [-(1 + k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + (1 - \kappa)] > 0,$$

так как

$$-(1 + k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} + (1 - \kappa) > -k_0 - \kappa = \nu > 0,$$

$$f_1(\varphi_0) = f(\varphi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n [(1 - k_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - (1 + \kappa)] < 0$$

в силу выбора $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$.

Таким образом, для любого $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$ уравнение (5.4.11) имеет решение в классе функций с одним переключением. Аналогичным путем можно показать, что уравнение (5.4.11) при $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$ допускает также решение с одним переключением вида

$$u(\varphi) = \begin{cases} -(1 - \kappa) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \theta; \\ +(1 + \kappa) & \text{при } \theta < \varphi \leq \varphi_0. \end{cases}$$

Но это решение всегда можно отбросить, исходя из физических соображений.

Будем теперь искать решение уравнения (5.4.11) в классе функций $u(\varphi)$, имеющих два переключения, т. е. функций следующего вида:

$$u(\varphi) = \begin{cases} (1 + \kappa) & \text{при } \varphi \in [0, \theta_1]; \\ -(1 - \kappa) & \text{при } \varphi \in [\theta_1, \theta_2]; \\ (1 + \kappa) & \text{при } \varphi \in [\theta_2, \varphi_0]. \end{cases} \quad (5.4.17)$$

Для того чтобы функция $u(\varphi)$ вида (5.4.17) была решением уравнения (5.4.11), достаточно существования чисел θ_1, θ_2 , удовлетворяющих следующей системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\theta_1, \theta_2) e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \theta_i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.4.18)$$

где

$$f_n(\theta_1, \theta_2) = [(1 - \kappa_0) e^{-\mu_n^2 \varphi_0} - 2e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \theta_1)} + \\ + 2e^{-\mu_n^2(\varphi_0 - \theta_2)} - (1 + \kappa)]. \quad (5.4.19)$$

Если рассматривать лишь первые три члена рядов (5.4.18), отбросив остальные, то для времени φ_{03} , которое получается из решения проблемы моментов 3-го порядка, функция $u_3(\varphi)$, дающая решение этой проблемы, будет решением системы (5.4.18), а значит, и решением интегрального уравнения (5.4.11). Так как ряды в (5.4.18) быстро сходятся, то можно ожидать, что управление $u_3(\varphi)$, дающее решение проблемы моментов 3-го порядка, будет близким к функции, являющейся решением системы (5.4.18). И вообще, если φ_{0n} — время, при котором существует единственное решение проблемы моментов n -го порядка и $u_n(\varphi)$ — функция, являющаяся решением этой проблемы, то эта же функция обратит в нуль первые n членов рядов (5.4.18) и будет «приближенным» решением интегрального уравнения (5.4.11).

Мы вычислим решения интегрального уравнения (5.4.11) для времени φ_{02} , при котором имеет решение проблема моментов 2-го порядка, и для времени φ_{03} , при котором решается проблема 3-го порядка.

Алгоритм отыскания решения уравнения (5.4.11) в классе функций с одним переключением сводится к нахож-

дению корня монотонной непрерывной функции, имеющей на концах отрезка $[0, \varphi_{02}]$ разные знаки. Такая задача неоднократно решалась выше. Блок-схема программы представлена на рис. 50. Результаты расчета на цифровой

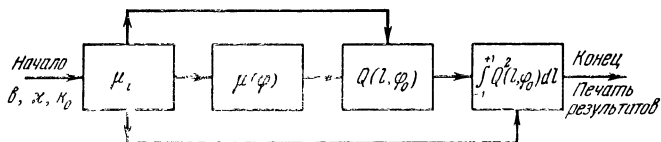


Рис. 50.

машине конкретного примера представлены на рис. 51. Здесь $u(\varphi)$ — функция, дающая решение проблемы моментов

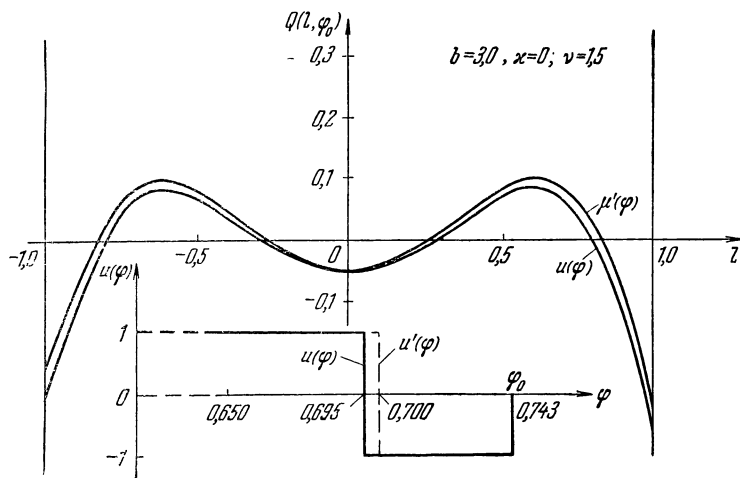


Рис. 51.

2-го порядка, и $u'(\varphi)$ — решение интегрального уравнения (5.4.11) для времени φ_{02} . Изображены также соответствующие этим управлениям решения уравнения теплопроводности. Значение интегрального критерия J для функций

$u(\varphi)$ и $u'(\varphi)$ в этом примере соответственно равны 0,0141; 0,0136.

Для этого конкретного примера нетрудно показать, что уравнение (5.4.11) для любого $\varphi_0 < \varphi_{03}$ не допускает других решений (кроме решения вида

$$u(\varphi) = \begin{cases} -(1 - \kappa), & \varphi \in [0, \theta_1], \\ (1 + \kappa), & \varphi \in [\theta_1, \varphi_0], \end{cases}$$

которое можно отбросить из физических соображений) и, следовательно, $u'(\varphi)$ является J -оптимальным управлением.

Систему уравнений (5.4.18) будем решать следующим методом. Вычислим для первого из уравнений (5.4.18) функцию $\theta_1 = f_1(\theta_2)$ и для второго — функцию $\theta_1 = f_2^*(\theta_2)$. Точка пересечения этих кривых даст нам числа θ_1^* , θ_2^* , которые и будут решением (5.4.18). Кроме того, найдем для времени φ_{03} решение уравнения (5.4.11) с одним переключением. Все результаты вычислений представлены на рис. 5б. Здесь кривая 1 соответствует решению проблемы моментов 3-го порядка, кривая 2 — решению интегрального уравнения для времени φ_{03} в классе функций с двумя переключениями, а кривая 3 — решению интегрального уравнения в классе функций с одним переключением. Значения интегральной оценки J для случаев 1, 2, 3 равны соответственно: 0,0028; 0,0025; 0,0174; в этом конкретном примере нетрудно показать, что для любого времени $\varphi_0 \leq \varphi_{03}$ уравнение (5.4.11) не допускает решений с числом переключений, большим двух. Следовательно, управление 2 является J -оптимальным для времени φ_{03} .

Можно ожидать, что при дальнейшем увеличении времени φ_0 уравнение (5.4.11) будет допускать решения со все большим числом точек переключения, и числа $\varphi'_{02}, \varphi'_{03}, \dots, \varphi'_{0n}$, которые дают последовательность отрезков времени $[0, \varphi'_{0i}]$, обладающую тем свойством, что в каждом последующем отрезке число переключений решения уравнения (5.4.11) увеличивается на единицу по сравнению с предыдущим отрезком, будут близки к значениям $\varphi_{02}, \varphi_{03}, \dots, \varphi_{0n}$, при которых имеет единственное решение проблема моментов соответствующего порядка. Естественно также предположить, что из всех решений уравнения

(5.4.11) для фиксированного значения φ_0 J -оптимальным будет решение с наибольшим числом переключений. Все эти вопросы нуждаются в математическом исследовании и строгом доказательстве. Мы пока умеем решать до конца задачу о J -оптимальном нагреве лишь для случаев, когда время нагрева φ_0 таково, что уравнение (5.4.11) допускает решения с числом переключения не более двух.

§ 5. Оптимальный по быстродействию нагрев массивного тела с учетом ограничений на термонапряжения

Рассмотрим одну задачу оптимального по быстродействию нагрева массивного тела с учетом ограничений, наложенных на внутренние термические напряжения в теле. Эта задача решалась Ю. Н. Андреевым и М. Г. Огульником.

Как известно, при нагреве тел возникают температурные напряжения, которые часто являются основной причиной, ограничивающей скорость нагрева, особенно на первой низкотемпературной стадии. При нагреве тела его наружные слои имеют температуру выше средней по массе (по сечению), а температура внутренних слоев значительно ниже средней температуры. Благодаря такому распределению температур наружные слои тела стремятся расширяться. Этому расширению препятствуют внутренние слои тела, так как они в силу более низкой температуры расширяются меньше. Поэтому наружные слои испытывают сжатие, а внутренние слои — растяжение. В соответствии с этим внутри тела возникают сжимающие и растягивающие напряжения. Эти напряжения могут привести к разрушению тела и к появлению различных микродефектов.

Сформулируем теперь описанную выше задачу оптимального управления точно.

Рассмотрим процесс нагрева одномерной пластины, распределение температуры внутри которой описывается уравнением теплопроводности (5.1.7) с начальными и граничными условиями (5.1.8) — (5.1.10). Управляющее воздействие u (φ) также должно удовлетворять условию (5.1.11). Распределение термонапряжений в пластине описывается соотношением [108]

$$\sigma(l, \varphi) = \frac{\beta E}{1 - \theta} [\bar{Q}(\varphi) - Q(l, \varphi)], \quad (5.5.1)$$

где β — коэффициент линейного температурного расширения, E — модуль упругости, θ — коэффициент Пуассона, $\bar{Q}(\varphi)$ — средняя по сечению (массе) температура.

Эпюра распределения термонапряжений при мгновенном изменении температуры греющей среды $u(\varphi) = 1$ изображена на рис. 52. Из этого

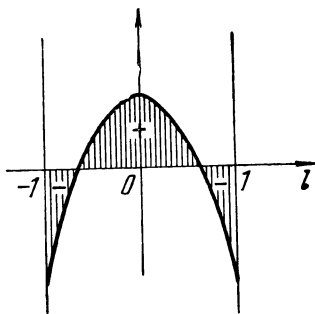


Рис. 52.

рисунка видно, что наибольшее растягивающее напряжение возникает в середине пластины при $l = 0$. Так как при нагреве наиболее опасны растягивающие напряжения (они могут разрушить тело, создать микротрещины), отсюда получается ограничение

$$\sigma(0, \varphi) = \frac{\beta E}{1 - \theta} [\bar{Q}(\varphi) - Q(0, \varphi)] \leq \sigma^*, \quad (5.5.2)$$

где σ^* — предельное допустимое растягивающее напряжение.

Последнее условие можно переписать в безразмерной форме для критерия температурного напряжения s

$$s = \frac{\sigma(0, \varphi)}{\sigma^*} = \gamma [\bar{Q}(\varphi) - Q(0, \varphi)] \leq 1, \quad (5.5.3)$$

где

$$\gamma = \frac{\beta E}{\sigma^* (1 - \theta)}.$$

Таким образом, задача оптимального управления заключается в отыскании такого управления $u(\varphi)$, чтобы при выполнении соотношений (5.1.7) — (5.1.10), (5.1.11) нулевое распределение (5.1.15) достигалось за минимальное время.

Как было показано выше (см. равенство (5.2.8)), выполнение равенства (5.2.3) эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$x_k(\varphi_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.5.4)$$

где

$$x_k(\varphi) = -ve^{-\mu_k^2 \varphi} + \int_0^{\varphi} u(\xi) \mu_k^2 e^{-\mu_k^2(\varphi-\xi)} d\xi. \quad (5.5.5)$$

Дифференцируя по φ последнее равенство, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_k(\varphi) = -\mu_k^2 x_k(\varphi) + \mu_k^2 u(\varphi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.5.6)$$

с начальными условиями

$$x_k(0) = -v, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.5.7)$$

Выразим теперь критерий температурного напряжения $s(\varphi)$ через координаты $x_k(\varphi)$ системы (5.5.6), пользуясь формулой (5.5.5). Получим:

$$s(\varphi) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[-ve^{-\mu_n^2 \varphi} + \mu_n^2 \int_0^{\varphi} u(\xi) e^{-\mu_n^2(\varphi-\xi)} d\xi \right], \quad (5.5.8)$$

где

$$B_n = A_n \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 \right). \quad (5.5.9)$$

Следовательно, ограничение (5.5.3) можно переписать в виде

$$\gamma \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_n(\varphi) \leq 1. \quad (5.5.10)$$

Таким образом, задача оптимального управления формулируется следующим образом. Найти такое управление $u(\varphi)$, чтобы при соблюдении ограничений (5.1.11) и (5.5.10) система (5.5.6) перешла из начального состояния (5.5.7) в конечное (5.5.4) за минимальное время $\varphi = \varphi_0$.

Таким образом, задача сводится к оптимальному управлению бесконечной системой дифференциальных уравнений (управление в банаховом пространстве, см. § 11 главы I) при ограничении на линейную комбинацию фазовых координат (5.5.10).

Очевидно, что при заданном ограничении (5.5.10) и ограничении на управляющее воздействие $u(t)$ можно

выбрать столь большое по модулю значение начального температурного распределения v , что при любом допустимом управлении напряжение в теле выйдет за допустимый предел.

Чтобы найти это предельное соотношение между значением v и значением b , подставим $u(\varphi) = \kappa - 1$ в (5.5.6) и проинтегрируем это уравнение. Полученные значения координат подставим в выражение для $s(\varphi)$. Тогда будем иметь

$$\gamma(-v + \kappa - 1) \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 \varphi} \leq 1,$$

откуда

$$p = -v + \kappa - 1 \leq \frac{1}{\gamma \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 \varphi}}. \quad (5.5.11)$$

На рис. 53 приведен график зависимости предельно допустимого значения логарифма модуля ρ_{\min} от логарифма

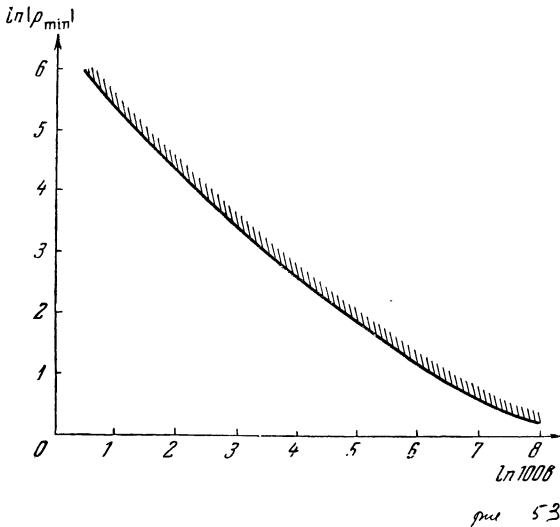


Рис. 53.

критерия Био b при $\gamma = 1$ и $\kappa = 0$. Если точка попадает в заштрихованную область, то система не может быть переведена в требуемое состояние без превышения термо-

напряжением $\sigma(0, \varphi)$ допустимого значения σ^* . График на рис. 53 построен в соответствии с таблицей VIII.

Таблица VIII

b	0,02	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5
ρ_{\min}	-305,7	-64,9	-16,0	-12,1	-9,8	-7,66
b	2,0	3,0	6,0	9,0	15,0	20,0
ρ_{\min}	-6,57	-5,47	-4,38	-3,98	-3,68	-3,57

Как было показано в § 3 главы IV, хорошее приближение задачи оптимального нагрева массивного тела получается, если рассматривать «усеченную» систему уравнений (5.5.6) при небольшом числе уравнений $k = 2, 3, 4$. Как было показано, это объясняется тем, что показатели экспоненты в ряде (5.2.1) или величины μ_k^2 , обратные «постоянным времени» в уравнениях (5.5.6), весьма быстро растут по модулю, так как

$$\mu_k > \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь мы ограничимся системой двух уравнений ($k = 2$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(\varphi) &= -\mu_1^2 x_1(\varphi) + \mu_1^2 u(\varphi), \\ \dot{x}_2(\varphi) &= -\mu_2^2 x_2(\varphi) + \mu_2^2 u(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (5.5.12)$$

с начальным и конечным условиями

$$x_1(0) = x_2(0) = -v, \quad x_1(\varphi_0) = x_2(\varphi_0) = 0. \quad (5.5.13)$$

Будем считать, что

$$\gamma [B_1 x_1(\varphi) + B_2 x_2(\varphi)] \leq 1, \quad (5.5.14)$$

где $B_1 < 0$ и $B_2 > 0$.

Если обозначить $-\gamma B_1 = c_1$ и $\gamma B_2 = c_2$, то $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ и неравенство (5.5.14) примет вид

$$-c_1 x_1(\varphi) + c_2 x_2(\varphi) \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$$

При решении нашей задачи мы ограничимся рассмотрением случая, когда $v \geq 0$. Ибо, как легко видеть из системы, уравнений (5.5.12) — (5.5.14), если $v < 0$, то нужно найти оптимальное управление $u(\varphi)$, соответствующее начальным условиям $x_1(0) = x_2(0) = -v$. Тогда искомое оптимальное управление будет равно $-u(\varphi)$.

Таким образом, на фазовой плоскости (x_1, x_2) задача сводится к тому, чтобы построить траекторию изображающей точки системы (x_1, x_2) , начинающуюся на биссектрисе третьего квадранта в точке $(-v, -v)$ и кончающуюся в начале координат $(0, 0)$, причем, двигаясь по этой траектории, изображающая точка должна достичь начала координат за минимальное время, не заходя в запрещенную область, лежащую выше прямой

$$-c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1. \quad (5.5.15)$$

При достаточно малых $|v|$ оптимальная траектория, очевидно, не будет достигать ограничения. Поэтому в силу того, что данная система является линейной системой 2-го порядка с действительными собственными числами — μ_1^2 и — μ_2^2 оптимальное управление $u(\varphi)$ будет иметь одно переключение. Линия переключения в этом случае легко вычисляется методом «обратного времени» $\varphi \leq 0$ [118]. Параметрическое уравнение линии переключения определяется путем интегрирования уравнений движения (5.5.12) при $u(\varphi) = -1$ в отрицательном направлении времени $\varphi \leq 0$ с начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(\varphi) &= \mu_1^2 x_1(\varphi) + \mu_1^2, \\ \dot{x}_2(\varphi) &= \mu_2^2 x_2(\varphi) + \mu_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.16)$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$\left. \begin{aligned} x_1(\varphi) &= 1 - e^{\mu_1^2 \varphi}, \\ x_2(\varphi) &= 1 - e^{\mu_2^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.17)$$

Исключая из последней системы параметр φ , получим уравнение линии переключения (рис. 54)

$$x_2 = 1 - (1 - x_1)^{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2} = f(x_1). \quad (5.5.18)$$

При увеличении v наступит такой момент, когда оптимальная траектория коснется линии ограничения. Вычислим

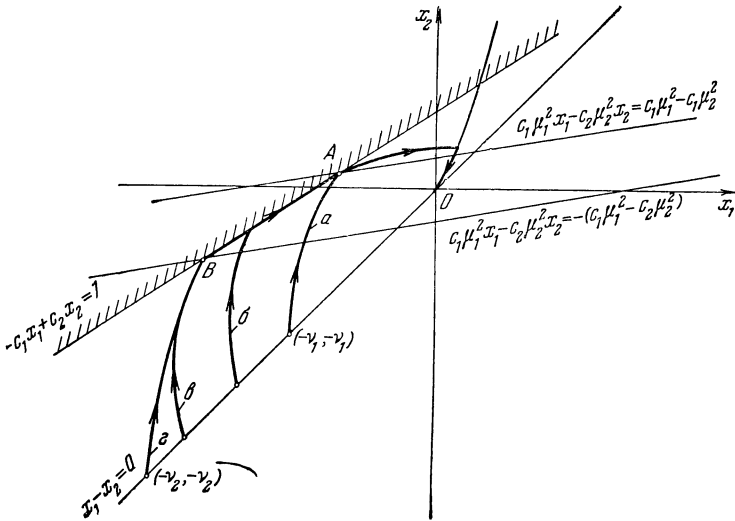


Рис. 54

координаты этой точки касания. Путем интегрирования системы (5.5.12) определим сначала уравнение оптимальной траектории при $u = 1$ с начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = -v$:

$$\left. \begin{aligned} x_1(\varphi) &= (1 - v) e^{-\mu_1^2 \varphi} + 1, \\ x_2(\varphi) &= (1 - v) e^{-\mu_2^2 \varphi} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.19)$$

Исключая φ , получим искомое уравнение

$$x_2 = (1 - v) \left(\frac{x_1 - 1}{1 - v} \right)^{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2} + 1 = f_2(x_1). \quad (5.5.20)$$

Координату x_1 искомой точки касания A (рис. 54) и максимальное значение параметра $\nu = \nu_1$, при котором оптимальная траектория впервые касается линии ограничения, найдем из системы уравнений:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \left(\frac{x_1 - 1}{1 - \nu}\right)^{\frac{\mu_2}{2} - 1} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (5.5.21)$$

$$-c_1 x_1 + c_2 (1 - \nu) \left(\frac{x_1 - 1}{1 - \nu}\right)^{\frac{\mu_2}{2}} + c_2 = 1. \quad (5.5.22)$$

Из первого уравнения (5.5.21) определим:

$$\left(\frac{x_1 - 1}{1 - \nu}\right)^{\frac{\mu_2}{2}} = \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \left(\frac{x_1 - 1}{1 - \nu}\right) \quad (5.5.23)$$

и подставим конкретное выражение в (5.5.22). Тогда получим:

$$-c_1 x_1 + c_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 (x_1 - 1) + c_2 = 1. \quad (5.5.24)$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{1 - c_2 + c_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}{c_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - c_1}. \quad (5.5.25)$$

Используя уравнение (5.5.23), уже без труда можно найти:

$$\nu_1 = \left[\frac{c_2}{c_1} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \right]^{\frac{\mu_1}{2} - 1} \frac{1 - c_2 + c_1}{c_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - c_2} \quad (5.5.26)$$

Таким образом, при $\nu < \nu_1$ оптимальная траектория не выходит на линию ограничения.

При $\nu = \nu_1$ оптимальная траектория лишь только касается ограничения. Оптимальный процесс в этом случае изображен на рис. 55, *a*.

При $v > v_1$ изображающая точка «упирается» в ограничение, и для того, чтобы не выйти за пределы допустимой области, она должна двигаться по линии ограничения до точки A . Условие, при котором изображающая точка может двигаться вдоль прямой (5.5.15), очевидно, имеет вид

$$\frac{\dot{x}_2(\varphi)}{\dot{x}_1(\varphi)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu_2^2 x_2(\varphi) - \mu_2^2 u}{\mu_1^2 x_1(\varphi) - \mu_1^2 u}. \quad (5.5.27)$$

Отсюда

$$u(\varphi) = \frac{1}{\frac{c_1}{c_2} \mu_1^2 - \mu_2^2} \left[\frac{c_1}{c_2} \mu_1^2 x_1(\varphi) - \mu_2^2 x_2(\varphi) \right] \quad (5.5.28)$$

или

$$u(\varphi) = \frac{c_1 \mu_1^2 x_1(\varphi) - c_2 \mu_2^2 x_2(\varphi)}{c_1 \mu_1^2 - c_2 \mu_2^2}. \quad (5.5.29)$$

Для того чтобы найти явную зависимость управления $u(\varphi)$ от времени на рассматриваемом участке, нужно последнее соотношение для $u(\varphi)$ подставить в исходные уравнения (5.5.12). Эти уравнения являются линейными уравнениями и, следовательно, их решение при соответствующих начальных условиях нетрудно найти. Найдя из этих уравнений явные зависимости $x_1(\varphi)$ и $x_2(\varphi)$ и подставив их обратно в уравнение (5.5.29), найдем явную зависимость $u(\varphi)$. Эти вычисления мы делать здесь не будем.

Так как $u(\varphi)$, определяемое формулой (5.5.29), должно подчиняться основному ограничению (5.1.11), то допустимый для движения отрезок BA прямой ограничения (на этом отрезке изображающая точка может держаться на линии ограничения, не заходя в запрещенную область, с помощью допустимого управления) определяется пересечением линии ограничения с двумя прямыми (рис. 54):

$$c_1 \mu_1^2 x_1 - c_2 \mu_2^2 x_2 = c_1 \mu_1^2 - c_2 \mu_2^2,$$

$$c_1 \mu_1^2 x_1 - c_2 \mu_2^2 x_2 = -(c_1 \mu_1^2 - c_2 \mu_2^2).$$

Точка B соответствует минимальному значению $v_{\min} = v_2$, определяемому из графика на рис. 54, при котором:

изображающая точка не заходит за пределы допустимой области.

Таким образом, луч, соответствующий биссектрисе третьего квадранта, разбивается точками $(-v_2, -v_2)$, $(-v_1, -v_1)$ на три части.

Если начальная точка $(x_1(0), x_2(0)) = (-v, -v)$ лежит дальше от начала координат, чем точка $(-v_2, -v_2)$, то оптимального управления не существует.

Если начальная точка совпадает с точкой $(-v_2, -v_2)$, то оптимальный процесс имеет вид, изображенный на рис. 55, г.

Если начальная точка лежит между точками $(-v_2, -v_2)$ и $(-v_1, -v_1)$, то оптимальный процесс имеет вид, изображенный на рис. 55, б, в.

На рис. 55, а изображен вид оптимального управления, когда ограничение по термонапряжению не достигается.

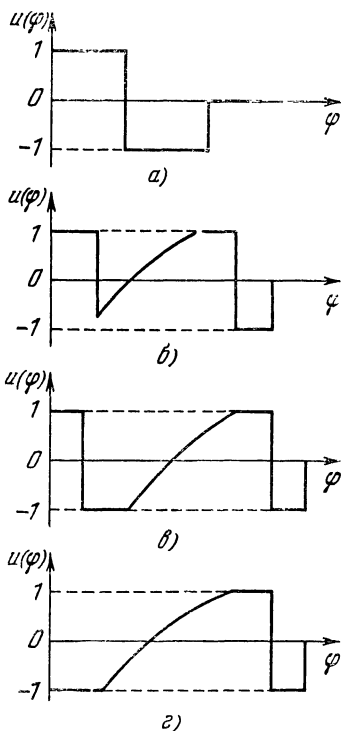


Рис. 55.

§ 6. Пример расчета оптимального режима нагрева

При нагреве металла в печах заводов черной металлургии значения критерия b колеблются обычно в пределах $0,5 < b < 10,0$. Причем, например, при нагреве массивных

слитков перед прокаткой допускается неравномерность нагрева $100^\circ\text{C} - 300^\circ\text{C}$ на 1 метр толщины металла.

Посмотрим, что дает нагрев с помощью управлений $u_2(\varphi)$ и $u_3(\varphi)$ в случае $b = 3,0$. При нагреве функцией $u_2(\varphi)$ получаем из номограмм, изображенных на рис. 70, 71 Приложения 1, для $b = 3,0$ и любых x и v следующие

предельные значения $Q_{\text{сер}}$, $Q_{\text{пов}}$, Q_{max} :

$$0 \geq Q_{\text{сер}} \geq -0,055; \quad 0 \geq Q_{\text{пов}} \geq -0,35; \\ |Q_{\text{max}}| \leq 0,09 \quad \text{при } |l| \leq 0,85.$$

Учитывая, что в таких печах обычно $A_2 - A_1 < 800^\circ$, получим оценки нагрева в градусах:

$$0 \geq t_{\text{сер}} - C \geq -22^\circ; \quad 0 \geq t_{\text{пов}} - C \geq -140^\circ; \\ |t - C|_{\text{max}} \leq 36^\circ \quad \text{при } |l| \leq 0,85.$$

Таким образом, для данного значения критерия b и всех κ будем иметь равномерный нагрев тела на 85% его толщины и значительный «всплеск» температуры у поверхности тела. Уже при функции $u_3(\varphi)$ этот всплеск смещается еще ближе к поверхности, причем значительно улучшается и прогрев середины пластины. Действительно, нагрев функцией $u_3(\varphi)$ дает соответственно следующие предельные значения: $Q_{\text{сер}}$, $Q_{\text{пов}}$, $|Q_{\text{max}}|$, которые получаются из номограмм, изображенных на рис. 70, 72, для всех $b < 3,0$ и любых ν , κ :

$$0 > Q_{\text{сер}} \geq -0,013, \quad 0 < Q_{\text{пов}} \leq 0,17, \\ |Q|_{\text{max}} \leq 0,058 \quad \text{при } |l| \leq 0,93,$$

или при $A_2 - A_1 \leq 800^\circ$ имеем оценки в градусах

$$0 > t_{\text{сер}} - C \geq -5^\circ, \quad 0 < t_{\text{пов}} - C \leq 70^\circ, \\ |t - C|_{\text{max}} \leq 22^\circ \quad \text{при } |l| \leq 0,93.$$

Здесь уже тело оказывается равномерно нагретым на 93% своей толщины и для большинства практических задач такой нагрев можно считать идеальным (рис. 56).

Рассмотрим конкретные примеры расчета оптимального по быстродействию нагрева массивного тела.

Требуется нагреть плиту толщиной $2S = 0,4$ м до температуры $C = 960^\circ$. В начальный момент времени температура плиты $T_0 = 20^\circ$. Нагрев осуществляется симметрично с обеих поверхностей плиты. Максимальная температура печи $A_2 = 1600^\circ$, минимальная $A_1 = 800^\circ$. Считаем, что в процессе нагрева коэффициенты a , λ , α не меняются.

Требуется обеспечить следующую равномерность нагрева:

$$|t(x, \tau) - C| < 20^\circ \text{ при } |x| \leq 0,18,$$

где $-0,2 \leq x \leq 0,2$. Итак, имеем следующие данные:
 $A_2 = 1600^\circ$, $A_1 = 800^\circ$, $T_0 = 20^\circ$, $C = 960^\circ$, $a = 0,03 \text{ м}^2/\text{час}$,
 $\lambda = 30 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}}$, $\alpha = 225 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{час} \cdot \text{град}}$, $S = 0,2 \text{ м}$.

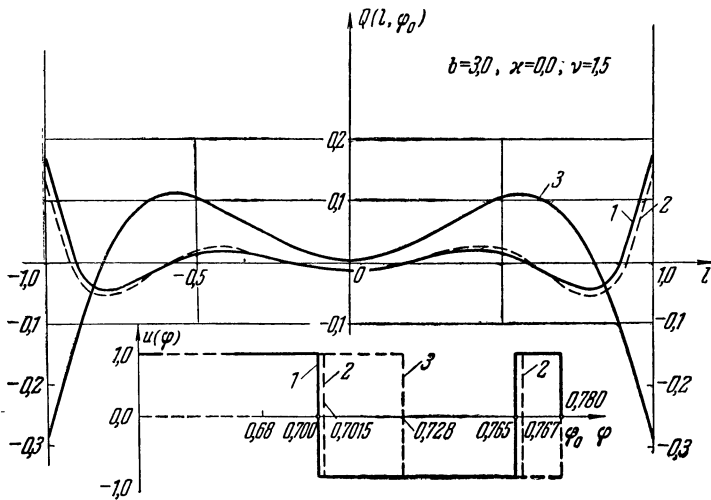


Рис. 56.

Вычислим значение критериев b , κ , ν :

$$b = \frac{\alpha}{\lambda} S = \frac{225}{30} \cdot 0,2 = 1,5,$$

$$\kappa = \frac{A_2 + A_1 - 2C}{A_2 - A_1} = \frac{2400 - 1920}{800} = 0,6.$$

$$\nu = \frac{2C - 2T_0}{A_2 - A_1} = \frac{1920 - 40}{800} = 2,35.$$

Из номограмм, изображенных на рис. 68 и 69, находим значения $\varphi_0 - \Delta = 0,94$; $\Delta = 0,13$ или (переходя к

размерному времени):

$$\tau_0 = \frac{0,04 \cdot 1,07}{0,03} = 1,43 \text{ час} = 1 \text{ час } 26 \text{ мин.},$$

$$\Delta' = \frac{4}{3} 0,13 = 0,17 \text{ час} = 10 \text{ мин.}$$

Из номограмм, изображенных на рис. 70, 71, находим параметры полученного температурного распределения в плите:

$$Q_{\text{сеп}} = -0,02, \quad Q_{\text{пов}} = -0,065, \\ |Q|_{\text{max}} = 0,030 \quad \text{при } |l| \leq 0,85,$$

или (переходя к градусам)

$$t_{\text{сеп}} - C = -8,0^\circ; \quad t_{\text{пов}} - C = -26^\circ; \\ |t - C|_{\text{max}} = 12^\circ \quad \text{при } |l| \leq 0,85.$$

Получившееся в результате нагрева распределение температуры по толщине пластины представлено на рис. 57

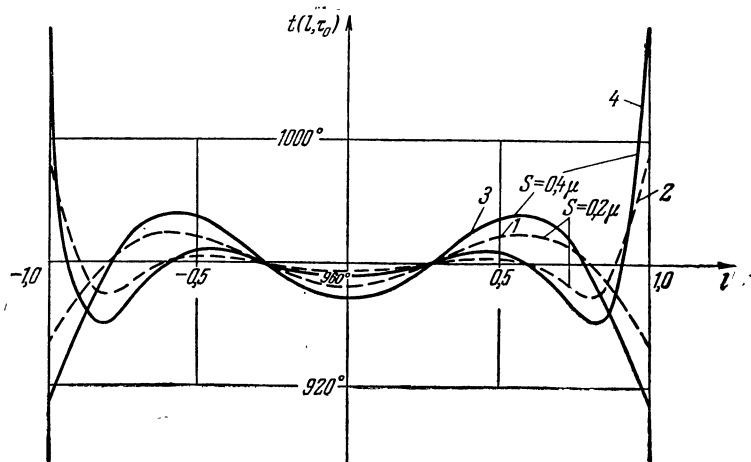


Рис. 57.

кривой 1. Нетрудно видеть, что полученное распределение температуры удовлетворяет требованиям, предъявленным в задаче к равномерности нагрева.

Найдем для этого примера функцию $u_3(\varphi)$.

Из формулы (Iп) приложения I и номограммы рис. 69 имеем:

$\varphi_0 - \Delta_1 - \Delta_2 = 0,942$, $\Delta_1 = 0,15$; $\Delta_2 = 0,006$,
чему соответствует

$$\tau_0 = 1 \text{ час } 29 \text{ мин}; \Delta'_1 = 12 \text{ мин}; \Delta'_2 = 0,5 \text{ мин}.$$

Этой функции нагрева соответствует температурное распределение 2 на рис. 57.

Рассмотрим теперь точно такую же задачу нагрева, но для тела в два раза более массивного, т. е. $2S = 0,8 \text{ м}$ и соответственно $b = \frac{\alpha}{\lambda} S = 3,0$.

Для этого случая имеем из номограмм на рис. 68 и рис. 69 следующие значения:

$$\varphi_0 - \Delta = 0,68; \Delta = 0,11,$$

или (переходя к размерному времени)

$$\tau_0 = \frac{\varphi_0 S^2}{a} = 4,21 \text{ час} = 4 \text{ час } 12 \text{ мин},$$

$$\Delta'_1 = \frac{\Delta S^2}{a} = 0,59 \text{ час} = 35 \text{ мин}.$$

Получающееся при этом нагреве распределение температуры в теле представлено функцией 3 на рис. 57.

Значение $|Q|_{\max}$ (при $|l| < 0,85$) увеличилось в этом случае в 1,5 раза по сравнению со случаем $b = 1,5$, а общее время нагрева возросло в 2,7 раза.

Кривая 4 рис. 57 соответствует нагреву функцией $u_3(\varphi)$ при значении $b = 3,0$.

Для двух рассмотренных примеров различие между функциями $u_2(\varphi)$ и $u_3(\varphi)$ не является существенным, так как время последнего интервала постоянства этих функций пренебрежимо мало по сравнению с общим временем нагрева (составляет лишь 0,5%) и наверняка окажется меньше переходных процессов в печи.

Ясно также, что и функции более высокого порядка $u_4(\varphi)$, $u_5(\varphi)$ также не будут существенно отличаться от $u_2(\varphi)$.

Замечательно, что функция $Q(l, \varphi_0)$, получающаяся в результате нагрева $u_2(\varphi)$, всегда будет иметь вид кривой 1

рис. 57. Благодаря такому распределению температуры для основной массы тела созданы условия для выравнивания температуры до нулевого значения независимо от изменения температуры среды. Из-за инерционности массивного тела по отношению к изменению температуры его поверхности, температурные возмущения на поверхности проникают в глубь тела лишь через значительное время, поэтому функция $u(\varphi)$, которая должна нагреть тело до заданной постоянной температуры за минимальное время, своими первыми 2—3 интервалами постоянства создает условия (температурные градиенты внутри тела) для дальнейшего «самостоятельного» выравнивания температур, а своими последующими интервалами, которые все вместе занимают незначительную часть общего времени нагрева φ_0 , уничтожает неравномерность нагрева вблизи поверхности. Смысл отыскания решений $u_2(\varphi)$, $u_3(\varphi)$ и заключается в том, чтобы найти функцию $u(\varphi)$ на основной части общего времени нагрева, обеспечивающую равномерный прогрев основной массы тела.

Остальную же часть функции $u(\varphi)$ из-за быстрого сближения точек переключения чаще всего нельзя реализовать в таких инерционных объектах, как металлургические печи.

Однако для очень массивных тел, например, при $b > 10$, знание первых двух-трех интервалов функции $u(\varphi)$ может оказаться недостаточным для получения удовлетворительного нагрева. В этих случаях приходится решать проблему моментов 4-го или 5-го порядка.

Результаты решения задач оптимального нагрева бесконечной пластины непосредственно применимы для решения конкретных задач нагрева массивных тел, например, при расчете оптимального управления нагревом массивных плит в камерных печах с выдвижным подом. Нагреваемая заготовка в такой печи устанавливается на подставки и обогревается симметрично с обеих поверхностей (рис. 58). Если ширина и длина нашей заготовки много больше ее толщины, то можно пренебречь теплообменом боковых граней. При нагреве массивных заготовок, когда общая продолжительность нагрева составляет несколько часов, время переходных процессов в печи при смене температуры нагрева с минимальной на максимальную и обратно много

меньше любого интервала постоянства оптимального управляющего воздействия.

Пусть теперь ставится задача о быстрейшем нагреве массивной плиты от начальной температуры T_0 до заданной

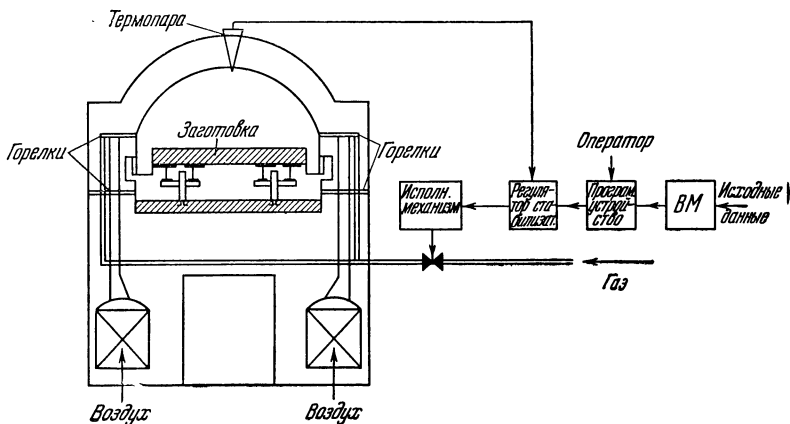


Рис. 58.

С, причем задается допустимая неравномерность нагрева по толщине заготовки.

По заданным физическим параметрам тела и температурам нагрева вычисляем критерии b , κ , ν и определяем по соответствующим номограммам рис. 70, 71 результат нагрева функцией $u_2(\varphi)$.

Если нагрев оказывается недостаточно равномерным, то с помощью другой серии номограмм рис. 70, 72 определяем результат нагрева функцией $u_3(\varphi)$. Затем находим функцию $u_3(\varphi)$ (вернее точки переключения), реализующую оптимальное управление. Найденную функцию можно реализовать с помощью простейшего программного устройства типа реле времени.

Если ставится задача J -оптимального нагрева за фиксированное время φ_0 и выполнено условие $\varphi_0 < \varphi_{03}$, что обычно справедливо в большинстве практических случаев, то в этом случае можно быстро отыскать J -оптимальное управление, решая интегральное уравнение (5.4.11) на цифровой вычислительной машине. J -оптимальное управле-

ние реализуется с помощью того же программного устройства. Результаты решения задачи быстрогодействия для пластины можно применить и для тел другой формы, если пользоваться практическими оценками продолжительности нагрева тел произвольной формы по отношению к продолжительности нагрева бесконечной пластины при помощи так называемого коэффициента формы, который характеризует отношение «активной» поверхности тела к его весу. Однако эти методы следует применять с большой осторожностью, так как этот вопрос нуждается в дальнейшем математическом исследовании.

Результаты решения задачи быстрогодействия можно использовать и для оценки предельных скоростей нагрева металла в той или иной практической задаче. Кроме того, поскольку для каждой функции $u_2(\varphi)$, $u_3(\varphi)$ вычислялось результирующее температурное распределение в теле, при заданных температурах нагрева и при заданном критерии b можно из вида температурного распределения получить информацию о динамике нагрева данного тела.

В заключение этой главы нужно отметить, что рассмотренные методы безусловно являются перспективными и их следует применять при решении других, более сложных, практических задач оптимального нагрева.

При дальнейшем развитии теории оптимального нагрева массивных тел представляются интересными следующие моменты:

1. Следует решать задачи оптимального нагрева для теплообмена на поверхности, происходящего по закону Стефана—Больцмана, что соответствует передаче тепла из окружающей среды за счет излучения. Этот закон верно отражает физику нагрева в пламенных печах. В этом случае граничные условия (5.1.4) — (5.1.5) примут вид

$$\pm \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\pm S} = \sigma [u^4(\tau) - t^4(\pm S, \tau)].$$

2. Необходимо при решении оптимальных задач принимать во внимание конечную разрешающую способность переключательных устройств, участвующих в управлении процессом, а также величину постоянных времени переходных процессов в системе управления.

3. В практике нагрева обычно бывают ограничены температура поверхности тела и величины температурных градиентов в теле. Поэтому оптимальные задачи следует ставить с учетом этих ограничений.

4. Важным представляется решение вопроса о едином математическом методе отыскания решения интегрального уравнения, получающегося при решении задачи J -оптимального нагрева.

5. Решение рассмотренных выше задач оптимального нагрева необходимо обобщить на тела более сложной формы, например, на прямоугольную призму.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОХОДНЫМИ ПЕЧАМИ

Одним из основных направлений прогресса технологии во многих отраслях производства является переход от периодических к непрерывным поточным процессам обработки. Сущность этого перехода заключается в следующем. При периодических процессах обработки некоторые дискретные порции материала подвергаются изменяющемуся во времени (температура, структура, форма и т. п.) воздействию, в результате чего состояние материала изменяется от начального к заданному. При непрерывном способе обработки организуется непрерывный поток обрабатываемого материала, который подвергается такому распределенному в пространстве воздействию, при котором достигается требуемое изменение во времени воздействия на каждый элемент движущегося потока обрабатываемого материала [22, 23].

Тенденцию перехода к поточным процессам можно наблюдать на примерах широкого распространения проходных печей, прокатных станов, перехода к непрерывным методам производства химических продуктов, строительных материалов и т. п.

Это обстоятельство, приводящее к тому, что поточный процесс должен рассматриваться как объект управления; содержащий распределенные в пространстве параметры; предопределяет необходимость особого подхода к построению систем автоматического управления такими объектами.

Недоучет этого обстоятельства и перенесение на такие объекты приемов управления, выработанных применительно к объектам с сосредоточенными параметрами, в лучшем случае приводит к существенному недоиспользованию возможностей управления и соответствующему снижению точности выдерживания требуемых режимов обработки.

В этой главе мы рассмотрим приложение теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к поточным производственным процессам на примере создания системы оптимального управления методической печи, служащей для нагрева слябов под прокатку.

§ 1. Моделирование некоторых классов объектов с распределенными параметрами

Для создания замкнутой оптимальной системы автоматического управления необходимо, чтобы информация о состоянии управляемого объекта все время поступала в управляющее устройство. Для систем оптимального управления с сосредоточенными параметрами эта информация состоит из конечного набора значений координат управляемого объекта. В несложных объектах эти координаты могут измеряться непосредственно на реальном объекте и после измерения поступать в управляющее устройство. В тех случаях, когда такие измерения непосредственно на объекте невозможны, пытаются строить модель управляемого объекта, на которую можно было бы подавать все имеющиеся возмущающие воздействия реального объекта. При этом о состоянии управляемого объекта судят по состоянию модели объекта, координаты которой уже доступны измерению. Даже для объектов с сосредоточенными параметрами, процессы в которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, не всегда удается построить хорошую модель, несмотря на то, что техника моделирования таких процессов продвинулась довольно далеко.

В реальном объекте полное определение его состояния, характеризуемого функцией распределения, в каждый момент времени бывает довольно затруднительно, а подчас и невозможно. Например, не существует сколько-нибудь простых и надежных методов определения распределения температуры нагреваемых заготовок в проходной печи по длине печи и сечению заготовок. Поэтому при создании систем управления объектами с распределенными параметрами наиболее существенным является вопрос о получении достаточно полной информации о состоянии управляемого объекта. Таким образом, необходимо разрабатывать надежные и простые модели объектов с распределен-

ными параметрами, с которых можно легко получить информацию о состоянии объекта.

Моделирование систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными уравнениями и др., имеет, кроме того, большое самостоятельное значение при изучении важных процессов в науке и технике.

В этом параграфе мы рассмотрим способ моделирования уравнений двух типов, которые являются довольно распространенными уравнениями математической физики и применяются для описания целого ряда тепловых, диффузионных, электрических, стохастических и других процессов [17, 71, 72]. Этими уравнениями описываются процессы, происходящие во многих производственных агрегатах, где имеется движение обрабатываемого материала через зоны обработки.

I тип:

$$b(y, t) \frac{\partial Q}{\partial t} + b(y, t) v(t) \frac{\partial Q}{\partial y} + Q = u(y, t), \quad (6.1.1)$$

$$0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Граничное условие имеет вид

$$Q(0, t) = Q_r(t). \quad (6.1.2)$$

Начальное условие имеет вид

$$Q(y, 0) = Q_0(y). \quad (6.1.3)$$

II тип:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - b(y, t) v(t) \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (6.1.4)$$

$$0 \leq x \leq S, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Граничные условия имеют вид

$$Q(x, 0, t) = Q_r(x, t), \quad (6.1.5)$$

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 [u_1(y, t) - Q(0, y, t)], \quad (6.1.6)$$

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha_2 [u_2(y, t) - Q(S, y, t)]. \quad (6.1.7)$$

Начальное условие имеет вид

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y). \quad (6.1.8)$$

Принцип моделирования этих уравнений разберем на примере процесса нагрева заготовок в проходных нагревательных печах, скажем, в методической печи с односторонним подогревом (рис. 1). Для простоты рассмотрим случай одностороннего нагрева «тонких» заготовок, т. е. будем считать, что второе граничное условие, соответствующее обогреву материала снизу, имеет вид

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=S} = 0. \quad (6.1.9)$$

Процесс теплообмена в этом случае описывается уравнением типа I (6.1.1) — (6.1.3). Функция $b(y, t)$ зависит лишь от разности $\eta = y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma$ и является коэффициентом, характеризующим условие теплообмена

$$b = \frac{c\rho S}{\alpha}, \quad (6.1.10)$$

где c — теплоемкость, ρ — удельный вес, S — толщина заготовки, α — коэффициент теплообмена между рабочим пространством печи и нагреваемыми заготовками.

Функция $v(t)$ характеризует скорость продвижения всех нагреваемых в печи заготовок, образующих как бы сплошную бесконечную ленту, движущуюся через печь от ее входа к выходу в положительном направлении оси y .

Температура в рабочем пространстве печи непрерывно измеряется в нескольких отдельных точках a , b , c с помощью датчиков температур. По значениям температуры в этих точках строится кусочно-линейная аппроксимация всего распределения температуры рабочего пространства печи $u(y, t)$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$ (рис. 1).

Зафиксируем точку, связанную с движущимся металлом, которая в момент времени $t = 0$ находится в точке $y = 0$. Пусть $U = U(t)$ — температура печи, которая воздействует на эту точку в течение всего времени ее пребывания в печи, пока она не достигла координаты $y = L$.

Тогда уравнение нагрева этой точки имеет вид

$$B \frac{d\tilde{Q}}{dt} + \tilde{Q} = U(t), \quad (6.1.11)$$

где $\tilde{Q} = \tilde{Q}(t)$ — температура зафиксированной точки в зависимости от времени t . При фиксированном значении координаты $\eta = y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma$ функция b есть константа, равная B . Очевидно, что $U(t) = u\left(\int_0^t v(\sigma) d\sigma, t\right)$, т. е. $U(t)$ равно температуре в печи $u(y, t)$, где вместо y подставлено выражение $\int_0^t v(\sigma) d\sigma$, и интегрирование должно происходить до момента t_1 , удовлетворяющего условию

$$\int_0^{t_1} v(\sigma) d\sigma = L. \quad (6.1.12)$$

Также очевидно, что если проинтегрировать уравнение (6.1.11) от момента времени t_0 до момента t_1 , $0 \leq t_0 \leq t_1$, с начальным условием $Q_r(t)$ ($Q_r(t)$ — температура металла при входе в печь в момент t в точке $y = 0$), то величина $\tilde{Q}(t_1)$ (решение уравнения (6.1.11) в момент времени t_1) определяет температуру металла в зафиксированной точке заготовки, которая имеет пространственную координату

$$y = \int_{t_0}^{t_1} v(\sigma) d\sigma, \quad (6.1.13)$$

т. е.

$$Q(y, t) = \tilde{Q}(t_1), \quad (6.1.14)$$

где y задается формулой (6.1.13).

Таким образом, вычисление распределения $Q(y, t)$ в момент t требует знания функций v и постоянной времени B на интервале времени $[t - t_1, t]$, предшествующем данному моменту времени t , где t_1 определяется из условия

(6.1.12). Блок-схема модели изображена на рис. 59. Блок 5 на этом рисунке представляет собой модель уравнения (6.1.11).

Указанные функции могут храниться на отдельных дорожках магнитного барабана 2 (рис. 59), который вращается с достаточно большой скоростью, чтобы можно было решать уравнения в быстром темпе. Запись и воспроизведение

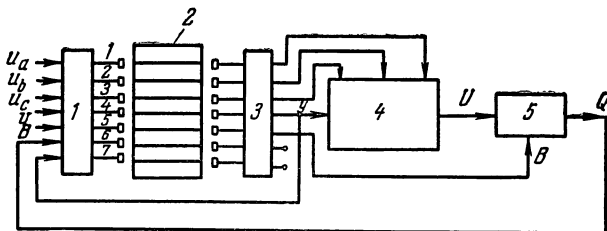


Рис. 59.

производится с помощью соответствующих блоков записи 1 и воспроизведения 3. Для моделирования функции двух переменных $u = u(y, t)$ с некоторой точностью необходимо запоминать несколько функций одной переменной. В частности, для случая, представленного на рис. 1, необходимо помнить три функции

$$u_a = u_a(t), \quad u_b = u_b(t), \quad u_c = u_c(t). \quad (6.1.15)$$

С помощью управляемого функционального преобразователя 4 (рис. 59) [118], имея функции $u_a(t)$, $u_b(t)$ и $u_c(t)$, можно воспроизводить функцию $u = u(y, t)$ с помощью кусочно-линейной аппроксимации (рис. 1).

Для запоминания каждой из пяти указанных функций времени u_a , u_b , u_c , b и v соответствующая дорожка барабана разбивается на $n = \frac{T_m}{\Delta t}$ секторов, где T_m — максимальное возможное время пребывания каждой нагреваемой заготовки в печи, а Δt — интервал между двумя соседними записями функций, который выбирается из условия точности их аппроксимации.

В моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots$, отстоящие друг от друга на Δt , в очередной сектор каждой дорожки записывается мгновенное или усредненное за время Δt значение функции, соответствующее этой дорожке, т. е.

$$u_{ai}, u_{bi}, u_{ci}, b_i, v_i.$$

Запись ведется в направлении, обратном вращению барабана. После заполнения последнего n -го сектора очередная запись через интервал Δt производится снова в 1-й сектор, затем во 2-й и т. д. Таким образом, на барабана хранятся все необходимые функции за интервал времени, равный T_m .

Предположим, что в данный момент времени t надо вычислить температуру металла в конце печи, т. е. при $y = L$. Пусть последняя запись производилась в r -й сектор. Следовательно, каналы воспроизведения должны открыться в тот момент, когда мимо воспроизводящих головок пройдет тот сектор, в который производилась запись в момент $t - t_1$, где t_1 определяется из условия (6.1.12) в дискретной форме

$$\sum_{i=k}^r v_i = \frac{L}{\Delta t}. \quad (6.1.16)$$

Определение номера k этого сектора производится логическим блоком за два оборота барабана следующим образом: начиная с сектора r , где была сделана последняя запись, производится суммирование величин v_i по всем n секторам барабана; в результате получается величина $R_n = \sum_i^n v_i$. Из R_n вычитается постоянная величина L (длина печи). На следующем обороте суммирование начинается с того же сектора r , что и при первом обороте, но с обратным знаком. В момент, когда на выходе сумматора будет нуль, воспроизводящие головки будут находиться против сектора, в который производилась запись в момент времени t_1 . В этот момент открываются каналы воспроизведения, и информация со всех пяти дорожек поступает на управляемый функциональный преобразователь и модель уравнения (6.1.11). Значение функции b , равное B , хранящееся в этом секторе, также поступает на модель уравнения (6.1.11)

в течение всего времени решения. В момент, когда под воспроизводящими головками пройдет r -й сектор, где была сделана последняя запись в момент времени t , на выходе модели уравнения (6.1.11) получается напряжение, пропорциональное значению температуры металла в точке L , которое запоминается (например, записывается в свободную дорожку барабана). В этот момент канал воспроизведения запираются. После этого канал воспроизведения отопрется в момент начала прохождения под головкой воспроизведения сектора с номером $k + 1$. Когда до воспроизводящих головок дойдет r -й сектор, на выходе модели уравнения (6.1.11) будет напряжение, соответствующее температуре металла в точке

$$y_1 = \Delta t \sum_{i=k+1}^r v_i.$$

Полученное значение температуры и координата y_1 запоминаются в следующих секторах шестой и седьмой дорожек барабана. После каждого оборота барабана номер сектора, с которого начинается решение, увеличивается на единицу и так до r -го сектора.

Так как барабан вращается с достаточно большой скоростью, то за промежуток времени Δt вычисляется распределение температуры по всей длине печи.

Моделирование уравнения II типа аналогично моделированию уравнения I типа. Апериодическое звено вида (6.1.11) в этом случае заменяется моделью системы обыкновенных дифференциальных уравнений рис. 27, аппроксимирующую систему уравнений нагрева массивного тела.

Во многих случаях уравнения, описывающие процесс в объекте, известны лишь с точностью до констант, характеризующих параметры процесса. Знание этих уравнений позволяет найти структуру модели объекта.

Для определения неизвестных констант можно воспользоваться идеей самонастройки. При этом автоматический оптимизатор путем поиска находит такие значения неопределенных параметров модели, чтобы критерий, характеризующий ошибку между вычисленным на модели значением функции распределения и действительным измеренным значением в определенной точке объекта, был мини-

мален. Таким образом, измерение всего распределения заменяется измерением этого распределения лишь в отдельной наиболее доступной точке (или в отдельных точках). Конечно, в каждом данном случае корректность и однозначность решения этой задачи должна доказываться или проверяться на практике при весьма разнообразных режимах работы объекта.

Вычислительное устройство, включающее в себя оперативный блок памяти на магнитном барабане, управляемый нелинейный функциональный преобразователь и простейшие линейные блоки, позволяет производить в быстром темпе вычисление значения функции распределения в определенной точке пространства. С другой стороны, производится измерение этого значения. Усредненная разность вычисленного и измеренного значения служит критерием качества настройки модели. С помощью автоматического оптимизатора находятся такие значения неопределенных априори коэффициентов модели, при которых принятый критерий качества достигает минимального значения.

В следующем параграфе будут приведены результаты экспериментов, проведенных для определения неизвестных параметров теплообмена в методической печи. Они показывают, что самонастраивающаяся модель, основанная на вышеописанных принципах, дает достаточно высокую точность вычисления функции распределения температуры металла по длине печи. Полученная на такой модели функция распределения служит для вычисления оптимального управляющего воздействия (температуры в печи) с целью получения минимального отклонения заданной температуры металла на выходе из печи от действительной.

§ 2. Моделирование процессов нагрева металла в методической печи

Проходные нагревательные и методические печи получили широкое распространение в промышленности, особенно в металлургической. Через методические печи проходит основная масса прокатываемого металла. В процессе движения от входа печи к выходу металл постепенно нагревается до определенной заданной технологической температуры начала прокатки. Так как методическая печь является

принципиально объектом с распределенными параметрами, возникает трудная задача поддержания заданной температуры каждой отдельной заготовки, выходящей из печи, несмотря на изменение темпа продвижения металла в печи, изменение сортамента и т. д.

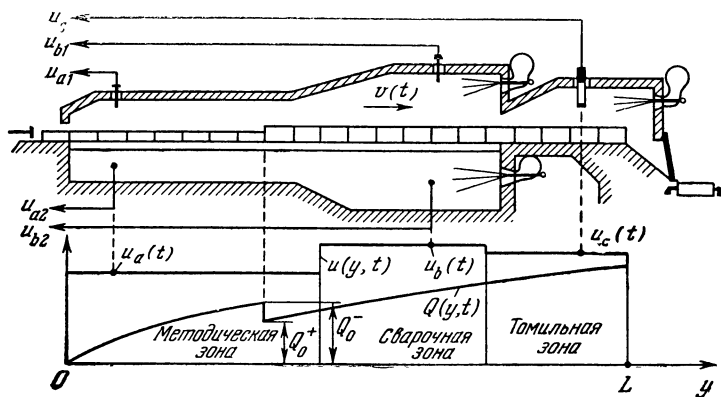


Рис. 60.

Автоматическая система, обеспечивающая стабилизацию средней температуры заготовки, выходящей из печи, позволит перейти на прокатку с минусовыми допусками, резко сократить брак, а также число аварий и поломок из-за некондиционного нагрева слябов.

В настоящем параграфе описывается система оптимального управления методической печью, схема которой изображена на рис. 60. Здесь $u(y, t)$ и $Q(y, t)$ — распределения температуры в печи и температуры слябов соответственно в зависимости от расстояния y , $0 \leq y \leq L$, в фиксированный момент времени t , $0 \leq t \leq T$.

Эта печь является трехзонной методической печью с нижним подогревом. В методической и сварочной зонах происходит двусторонний нагрев слябов, а в томильной зоне — односторонний. Печь служит для нагрева слябов перед прокаткой на тонколистовом стане. Этот стан является многоклетьевым станом с двумя группами клетей. Первая группа (черновая) состоит из четырех клетей. Черновые кле-

ти являются заготовительными для чистовой группы, состоящей из шести клетей. В чистовой группе клетей происходит непрерывная прокатка заготовки на тонкий лист толщиной от 1,5 до 3 мм. Нагретые до необходимой температуры слябы выдают в определенной очередности из всех печей на подающий рольганг стана. Минимальное время пребывания слябов в печи при нормальных режимах работы равно $T_{1\min} = 1 \text{ час } 15 \text{ мин}$, а максимальное время $T_{1\max} = 1 \text{ час } 45 \text{ мин}$.

Температура в рабочем пространстве печи измеряется с помощью датчиков температур. В томильной зоне температура измеряется с помощью радиационного пирометра, визируемого на карбофраксовый стакан, опущенный через свод внутрь рабочего пространства печи. Температура в верхней и нижней сварочных зонах, а также в начале верхней и нижней методических зон измеряется с помощью термопар. Печь снабжена регуляторами температур томильной, верхней и нижней сварочных зон. Изменение заданий этим регуляторам является управляющим воздействием осуществляется сварщиком с целью получения заданного нагрева слябов на выходе из печи.

После пятой чистовой клетки прокатного стана установлен радиационный пирометр, визируемый на выходящую из этой клетки раскатанную полосу металла. С помощью специальных устройств производится очистка поверхности полосы от окалины, поэтому показания пирометра, как проверено опытом его эксплуатации в цехе, довольно хорошо характеризуют качество нагрева в печи того сляба, из которого получена данная полоса. При моделировании уравнений теплообмена слябов с окружающей средой показания этого пирометра можно использовать для определения путем самонастройки неизвестных коэффициентов, входящих в уравнения теплообмена. Таким образом, в этом случае необходимо учитывать не только процесс нагрева слябов в печи, но и процесс охлаждения их во время прокатки с момента выхода сляба из печи до момента прохождения полосы, полученной из этого сляба, под пирометром после пятой клетки.

При описании процесса нагрева сляба в печи мы пренебрегали передачей тепла вдоль направления движения слябов из-за неплотного прилегания друг к другу соседних

слябов ввиду малости градиента температур вдоль направления их движения. Будем также пренебрегать теплообменом, происходящим с торцов слябов, ввиду малости их площади по сравнению с площадью остальной поверхности нагрева сляба. При этих условиях получается задача теплопроводности для бесконечно широкой пластины толщиной S_1 , движущейся со скоростью v , зависящей от времени t , в положительном направлении оси y .

Пусть x и y суть пространственные координаты, жестко связанные с печью, причем $0 \leq x \leq S$, $0 \leq y \leq L$, где S_1 — толщина пластины, а L — длина печи. В этих координатах уравнения нагрева будут иметь вид

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} - v \frac{\partial Q_1}{\partial y}, \quad (6.2.1)$$

где функция $Q_1 = Q_1(x, y, t)$ характеризует распределение температуры в металле $0 \leq x \leq S$, $0 \leq y \leq L$ за время $0 \leq t \leq T$. (Здесь a есть коэффициент теплопроводности.)

Основное уравнение дополняется граничными условиями III рода, характеризующими условия лучистого и конвективного теплообмена между поверхностью металла и рабочим пространством печи:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \sigma'_1 \{ [u_1(y, t)]^4 - [Q(0, y, t)]^4 \} + \\ &+ \alpha'_1 [u(y, t) - Q_1(0, y, t)], \quad (6.2.2) \\ 0 &\leq y \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Big|_{x=S_1} &= \sigma''_1 \{ [u_2(y, t)]^4 - [Q_1(S_1, y, t)]^4 \} + \\ + \alpha''_1 [u(y, t) - Q_1(S_1, y, t)], \quad 0 &\leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.2.3) \end{aligned}$$

где l — общая длина методической и сварочной зон, а σ'_1 , σ''_1 , α'_1 , α''_1 — соответственно коэффициенты лучистого и конвективного теплообмена.

Для томильной зоны, где имеется только односторонний нагрев металла сверху, выполняется условие

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad l \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.2.4)$$

что соответствует отсутствию потока тепла через нижнюю поверхность сляба.

Граничное условие, имеющее место при входе в печь при $y = 0$, примет вид

$$Q_1(x, 0, t) = p_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq S_1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.2.5)$$

где величина p_0 соответствует температуре цеха. Начальное условие задается в виде

$$Q_1(x, y, 0) = Q_0(x, y), \quad 0 \leq x \leq S_1, \quad 0 \leq y \leq L, \quad (6.2.6)$$

где $Q_0(x, y)$ — известная функция.

После выхода сляба из печи в прокатку можно считать, что с этого момента, принятого за нулевой, $t = 0$, происходит охлаждение бесконечно широкой пластины некоторой толщины S_2 . Распределение температуры по толщине пластины будет описываться функцией $Q_2(x, t)$, $0 \leq x \leq S_2$, $0 \leq t \leq T_2$, где T_2 есть время охлаждения с момента выхода сляба из печи до момента прохождения под пирометром после пятой чистой клетки.

Уравнение внутреннего теплообмена имеет вид

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq S_2, \quad 0 \leq t \leq T_2. \quad (6.2.7)$$

Граничные условия можно записать в виде

$$-\lambda \left. \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \sigma'_2 \{p_0^4 - [Q_2(0, t)]^4\} + \alpha'_2 [p_0 - Q_2(0, t)], \quad (6.2.8)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right|_{x=S_2} = \sigma''_2 \{p_0^4 - [Q_2(S_2, t)]^4\} + \alpha''_2 [p_0 - Q_2(S_2, t)]. \quad (6.2.9)$$

При этом начальное распределение для уравнения (6.2.7) будет конечным распределением для уравнения (6.2.1) при $y = L$

$$Q_2(x, 0) = Q_1(x, L, T_1), \quad (6.2.10)$$

где T_1 — момент выхода охлаждающегося сляба из печи.

Уравнения (6.2.1) — (6.2.10), характеризующие процессы нагрева и охлаждения массивного сляба, можно аппроксимировать, как это показано в предыдущей главе,

например, с помощью дифференциально-разностных уравнений. Однако для простоты будем считать, что нагреваемые и охлаждаемые слябы являются «тонкими телами». В этом случае состояние нагрева металла в печи характеризуется функцией

$$Q = Q(y, t), \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.2.11)$$

которая показывает, какова температура металла в данной точке y по длине печи в данный момент времени t .

Уравнения нагрева для функции $Q(y, t)$ соответственно примут вид

$$b(y, t) \frac{\partial Q}{\partial t} + b(y, t) v(t) \frac{\partial Q}{\partial y} = \sigma'_1 \{ [u_1(y, t)]^4 - [Q(y, t)]^4 \} + \\ + \sigma''_1 \{ [u_2(y, t)]^4 - [Q(y, t)]^4 \} + \alpha'_1 [u_1(y, t) - Q(y, t)] + \\ + \alpha''_1 [u_2(y, t) - Q(y, t)], \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq t \leq T_1. \quad (6.2.12)$$

В томильной зоне

$$b(y, t) \frac{\partial Q}{\partial t} + b(y, t) v(t) \frac{\partial Q}{\partial y} = \sigma''_1 \{ [u_2(y, t)]^4 - [Q(y, t)]^4 \} + \\ + \alpha''_1 [u_2(y, t) - Q(y, t)], \quad l \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T_1. \quad (6.2.13)$$

Здесь функция $b(y, t)$ определяется равенством (6.1.10)

и согласно (1.10.11) зависит лишь от $\eta = y - \int_0^t v(\sigma) d\sigma$.

Требование повышенной точности при расчете температур порядка 1200—1400°С вызывает необходимость рассмотрения уравнений для отклонений температур слябов от температур некоторого известного номинального режима. Однако сами номинальные режимы нагрева и охлаждения слябов при фиксированных температурах в печи известны лишь приближенно. Поэтому, начиная с грубого приближения к номинальному режиму, при работе системы будет производиться поиск достаточно хороших приближений к неизвестному заранее точному номинальному режиму.

Номинальный режим нагрева сляба получается, когда на сляб определенной толщины S_1 и определенной марки стали во время его равномерного продвижения в печи действует температура печи, характеризуемая функциями

верхнего и нижнего подогрева соответственно:

$$\left. \begin{aligned} U'_{н1} &= U'_{н1}(t), & 0 \leq t \leq T_{1\max}, \\ U''_{н1} &= U''_{н1}(t), & 0 \leq t \leq T_{1\max} \frac{l}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.14)$$

где $T_{1\max}$ — максимальное время нагрева сляба в печи.

В дальнейшем будем считать, что номинальные режимы температур верхнего и нижнего рабочего пространства печи на участке $0 \leq t \leq \frac{l}{L} T_{1\max}$ совпадают, т. е. в пределах методической и сварочной зон $U'_{н1} = U''_{н1} = U_{н1}$ (рис. 61). При этом температура сляба во времени описывается функцией

$$Q_{н1} = Q_{н1}(t), \quad 0 \leq t \leq T_{1\max}. \quad (6.2.15)$$

На рис. 61 приведены распределения температур, построенные на основе опытных данных. Здесь изображен номинальный режим нагрева слябов одинаковой марки и разной толщины S'_1, S''_1, S'''_1 .

Аналогично, исходя из расчета времени прохождения сляба от печи до пирометра после пятой клетки и температуры после пятой клетки, можно приближенно построить номинальную кривую охлаждения

$$Q_{н2} = Q_{н2}(t), \quad 0 \leq t \leq T_{2\max}, \quad (6.2.16)$$

где $T_{2\max}$ — максимальное время прохождения сляба от печи до пирометра после пятой клетки. При этом температура цеха считается постоянной и равной нулю.

Нас будет интересовать лишь линейное приращение температур заготовки, которое подчиняется линейным уравнениям и содержит главную часть отклонения действительной температуры от номинальной.

Уравнение для линейной части отклонения ΔQ_1 температуры сляба в печи от вариации температуры в печи будет иметь вид

$$B_1 \frac{d\Delta Q_1}{dt} + \Delta Q_1 = \Delta U_1(t), \quad 0 \leq t \leq T_{1\max}. \quad (6.2.17)$$

Здесь B_1 — постоянная времени изменения приращения ΔQ_1 , которая равна

$$B_1 = k_1 S_1, \quad (6.2.18)$$

где S_1 — толщина нагреваемого сляба, а k_1 — постоянный коэффициент, который для данной марки стали зависит от условий теплообмена.

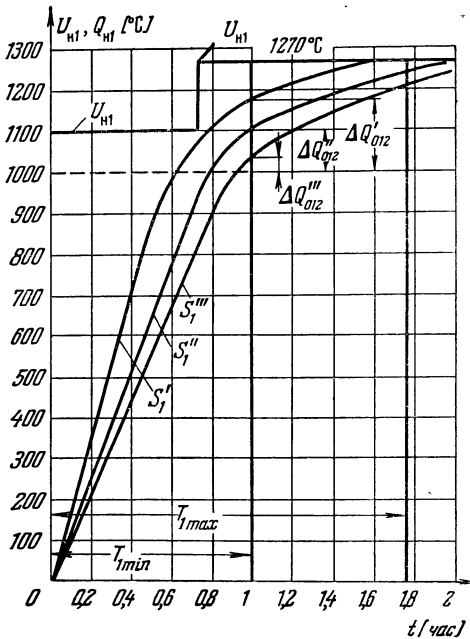


Рис. 61.

Правая часть уравнения (6.2.17), $\Delta U_1(t)$, определяется следующим образом:

$$\Delta U_1(t) = \begin{cases} \frac{\Delta U_1' + \Delta U_1''(t)}{2} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{l}{L} T_{1 \max}; \\ \Delta U_1'(t) & \text{при } \frac{l}{L} T_{1 \max} \leq t \leq T_{1 \max}, \end{cases}$$

где $\Delta U_1'(t)$ и $\Delta U_1''(t)$ получаются как разность соответственно между действительным воздействием температуры верхней части печи $U_1'(t)$ и номинальным воздействием верхней части печи $U_{н1}'(t)$ и разность между действительным воздействием температуры нижней части печи $U_1''(t)$ и номинальным воздействием нижней части печи $U_{н1}''(t)$. Здесь мы также будем полагать, что в пределах методической и сварочной зон $U_{н1}'(t) = U_{н1}''(t)$. При этом начальное условие для уравнения (6.2.17) будет нулевым.

Однако, кроме отклонений температур печи от номинального режима, имеются еще отклонения времени пребывания сляба в печи. Отклонение ΔT_1 действительного времени нагрева заготовки T_1 от максимального $T_{1\max}$ равно

$$\Delta T_1 = T_1 - T_{1\max}. \quad (6.2.19)$$

Изменения температур сляба $\Delta Q_{н1}(T_1)$, возникающие из-за наличия изменений времени нагрева металла в печи T_1 от величины $T_{1\min}$ до $T_{1\max}$, можно определить, используя кривые номинального режима нагрева, изображенные на рис. 61 для разных толщин S_1', S_1'', S_1''' .

Таким образом, суммарное приращение температуры сляба $\Delta Q'(T_1)$ равно

$$\Delta Q'(T_1) = \Delta Q_1(T_1) + \Delta Q_{н1}(T_1). \quad (6.2.20)$$

Уравнение для линейного отклонения $\Delta Q_2(t)$ температуры сляба при охлаждении от некоторой номинальной кривой $Q_{н2}(t)$, $0 \leq t \leq T_{2\max}$, имеет вид

$$B_2 \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 = 0. \quad (6.2.21)$$

Здесь B_2 — постоянная времени, равная

$$B_2 = k_2 S_2, \quad (6.2.22)$$

где S_2 — средняя толщина сляба при прокатке в первых шести клетях стана, а k_2 — коэффициент, зависящий от условий теплообмена и марки стали.

Правая часть уравнения (6.2.21) равна нулю, так как колебаниями температуры в цехе можно пренебречь,

Начальным условием для решения уравнения (6.2.21) является конечное значение функции $\Delta Q_1'(t)$, равное $\Delta Q_1'(T_1)$ (формула (6.2.20)). На рис. 62 изображены графики

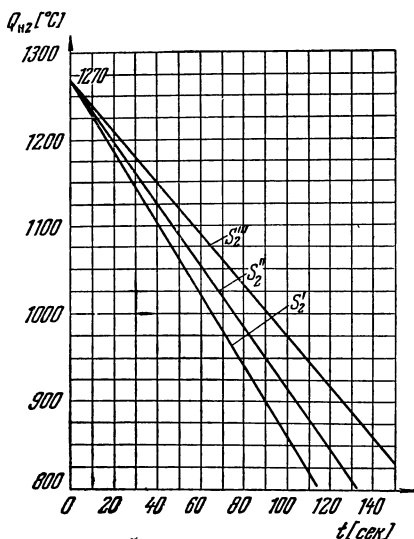


Рис. 62.

номинального режима охлаждения слябов одинаковой марки и разной толщины S_2, S_2', S_2'' .

Зная время охлаждения сляба T_2 , можно определить, пользуясь номинальной кривой охлаждения (рис. 62), температуру $\Delta Q_{н2}(T_2)$ данной заготовки при условии, что она начала охлаждаться, имея начальную температуру, равную 1270°C . За максимальное время охлаждения $T_{2\text{max}} = 145 \text{ сек}$ средняя температура слябов даже при минимальной толщине раската не опускается ниже 830°C . Поэтому на этом

участке температур номинальные кривые для разных толщин раската будут представляться прямыми линиями.

Итак, температура заготовки после пятой клетки стана будет равна сумме

$$\Delta Q''(T_2) = \Delta Q_2(T_2) + \Delta Q_{н2}(T_2), \quad (6.2.23)$$

где T_2 — время, протекающее с момента выдачи сляба из печи до момента прохождения его под пирометром после пятой чистой клетки стана.

Для предварительной проверки точности только что описанного расчета процесса нагрева и охлаждения слябов была собрана лабораторная электронная модель, включавшая в себя блок магнитной записи и воспроизведения с магнитным барабаном, основанная на новом принципе моделирования, описанном в § 1 этой главы.

С целью получения экспериментального материала для этой модели была получена «фотография» нормального рабочего процесса нагрева и охлаждения слябов в печи.

С помощью самопишущего многоточечного потенциометра велась непрерывная запись температур u_{a1} в верхней и u_{a2} в нижней методических зонах, u_{b1} в верхней и u_{b2} в нижней сварочных зонах и u_c в томильной зоне (рис. 60). Образцы зависимости этих температур u_{a1} , u_{a2} , u_{b1} , u_{b2} и u_c от времени через интервалы в три минуты приведены в соответствующих столбцах таблицы в приложении II.

Чтобы получить скорости продвижения слябов в печи в зависимости от времени, производилась запись моментов выдачи нагретых слябов из печи. Производилась также запись размеров слябов, нагреваемых в печи, марки стали и толщины раската. Эти данные приведены в таблице. Зная количество слябов, вышедших из печи за очередные три минуты, и зная их ширину, можно было определить скорость v продвижения слябов в печи в мм за три минуты. Скорость v также приводится в таблице приложения II.

Далее, с помощью радиационного пирометра, визируемого на раскатанную полосу, выходящую из пятой клетки стана, измерялась температура этой полосы и самопишущим потенциометром записывалась на диаграммную ленту. Для усреднения температуры раскатанной полосы по ее длине производилось планиметрирование кривых температуры. Таким образом, вычислялось среднее значение температуры $Q_{нс}$ полосы, полученной из сляба, нагретого в печи.

Кроме этого, производились записи моментов выдачи слябов из печи и моментов начала прохождения раскатанной полосы под пирометром после пятой клетки. По этим записям определялось время T_2 прохождения сляба от печи до пятой клетки стана.

Значения $Q_{нс}$ и T_2 также записывались в определенную таблицу. Величина $Q_{нс}$ отсчитывалась не от 0°C , а от 830°C , и это приращение обозначалось $\Delta Q_{нс}$. Эти значения относятся к тому слябу, который был выдан из печи не ранее, чем за три минуты до времени, указанного против приведенных значений.

На рис. 63 изображена схема модели нагрева и охлаждения слябов, на которой производилась проверка точности предложенного метода вычисления температур слябов.

Модель нагрева построена на принципе моделирования, описанном в § 1 настоящей главы. Вся установка для моделирования состоит из магнитного барабана *МБ* с блоком усилителей записи и воспроизведения *БЗВ* и реле, а также из блоков стандартной электронной моделирующей установки *ЭМУ-8*.

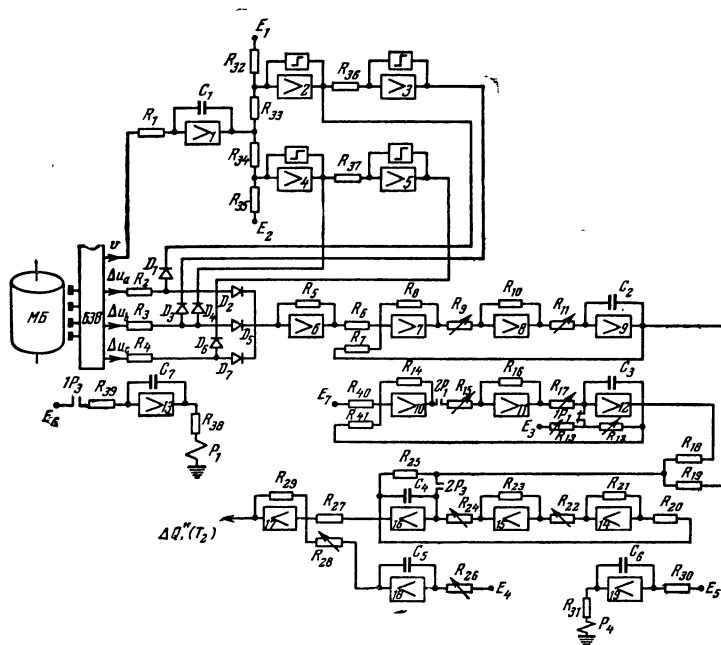


Рис. 63.

В дальнейшем для еще большего упрощения модели производилась кусочно-постоянная аппроксимация температуры рабочего пространства печи. Считалось, что в пределах каждой зоны температура печи зависит только от времени t . Аппроксимация номинального режима $U_{н1}(t)$ также была кусочно-постоянной, причем учитывалось, что номинальные температуры верхней и нижней зон совпадают в пределах методической и сварочной зоны (рис. 61). За номинальную температуру сварочной и томильной зон

было принято 1270°C , а за номинальную температуру методической зоны — 1100°C .

Магнитный барабан был разделен на 32 сектора и имел четыре дорожки. Три из этих дорожек служили для записи и воспроизведения трех приращений температур

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_a &= u_a - U_{\text{н1}}(t_a), \\ \Delta u_b &= u_b - U_{\text{н1}}(t_b), \\ \Delta u_c &= u_c - U_{\text{н1}}(t_c), \end{aligned} \right\} \quad (6.2.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_a &= \frac{u_{a1} + u_{a2} + u_{b1} + u_{b2}}{4}, \\ u_b &= \frac{u_{b1} + u_{b2}}{2}, \\ t_a &= \frac{l_a}{2L} T_{1 \text{ макс}}, \\ t_b &= t_a + \frac{l_b}{2L} T_{1 \text{ макс}}, \\ t_c &= t_b + \frac{l_c}{2L} T_{1 \text{ макс}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.25)$$

Здесь l_a , l_b , l_c — соответственно длины методической, сварочной и томильной зон, причем

$$\frac{l_a}{L} = 0,43, \quad \frac{l_b}{L} = 0,34, \quad \frac{l_c}{L} = 0,23, \quad (6.2.26)$$

где L — общая длина активного пода, равная 24,85 м. На четвертую дорожку барабана записывалась скорость продвижения слябов в печи. В каждую ячейку по всем четырем каналам записывались значения Δu_a , Δu_b , Δu_c и u , соответствующие одной «трехминутке» из приложения II. Таким образом, в 32 ячейках барабана запасалась информация об изменении температур и скорости продвижения слябов в печи за $32 \times 3 = 96$ минут работы печи. Скорость вращения барабана равнялась 30 об/мин, т. е. моделирование процесса нагрева происходило в $96 \times 30 = 2880$ раз быстрее реального процесса. Непосредственная запись

и считывание с барабана производились частотно-модулированными сигналами с помощью универсальных головок.

Каждая ячейка барабана ограничена двумя радиусами, в конце каждого из которых имеется высверленное отверстие, куда может вставляться большой или малый металлический зуб в виде цилиндра. На неподвижной панели магнитного барабана вдоль его образующей в непосредственной

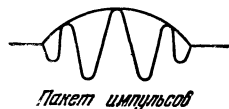
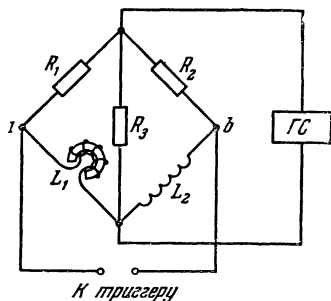


Рис. 64.

близости от цилиндрической поверхности укреплена колодка, в которой находятся две одинаковые магнитные катушки, включенные в плечи двух идентичных электрических мостов, один из которых изображен на рис. 64.

Эти два сбалансированных моста являлись нагрузками генератора синусоидальных колебаний ГС. Когда во время вращения большой зуб проходит возле неподвижной колодки, он замыкает магнитную цепь катушки одного из мостов (рис. 64). Мост разбалансируется и с его диагонали a, b снимается пакет синусоидальных колебаний, который

подается на левый вход симметричного триггера через диод, пропускающий напряжение отрицательной полярности, после чего левая лампа триггера закрывается. Когда следом за большим зубом возле колодки проходит малый зуб, то он замыкает магнитную цепь другой моста, и пакет импульсов также через диод подается на другой вход триггера, возвращая его в исходное состояние.

Запись производилась следующим образом. На переднем радиусе сектора, в который производилась запись, устанавливался большой зуб, а на заднем — малый зуб. В течение времени от пересечения колодки с большим зубом до пересечения ее с малым зубом клапан, управляемый указанным выше триггером, открыт и пропускает сигнал от усилителей записи к записывающей головке.

Воспроизведение производилось следующим образом. Сигналы с магнитной головки непрерывно поступают на входы усилителей воспроизведения, демодулируются и далее проходят на входы решающих усилителей модели ЭМУ-8.

При «решении» какого-либо определенного сляба с помощью большого и малого зуба ограничивается сектор магнитного барабана, в который записана информация Δu_a , Δu_b , Δu_c , v за время, в течение которого решаемый сляб находился в печи с момента входа в печь до момента выхода из печи. Когда при проходе большого зуба мимо колодки триггер перебрасывается в новое состояние, от него срабатывает поляризованное реле, которое соединяет контакт «пуск» с общей точкой моделирующей установки ЭМУ-8. При последующем проходе малого зуба мимо колодки триггер возвращается в исходное состояние, и поляризованное реле соединяет контакт «останов» с общей точкой модели. Усилители воспроизведения дают линейное изменение напряжения в диапазоне от 3,2 до 8 в. Чтобы растянуть этот диапазон от -100 до $+100$ в, был использован решающий усилитель 6 (рис. 63).

При решении какого-либо конкретного сляба на выходе интегратора 1 образуется напряжение u_1 , пропорциональное пути сляба в печи, причем вся длина печи L соответствует 100 в. Это напряжение подается на два делителя R_{32} , R_{33} и R_{34} , R_{35} , которые рассчитаны таким образом, что пока u_1 на выходе усилителя 1 не достигло величины $\frac{l_a}{L} 100$ (формула (6.2.26)), открыт канал, по которому идет величина Δu_a .

Когда

$$\frac{l_a}{L} 100 < u_1 < \frac{l_a + l_b}{L} 100, \quad (6.2.27)$$

открыт только канал Δu_b . И, наконец, когда

$$\frac{l_a - l_b}{L} 100 < u_1 < 100, \quad (6.2.28)$$

открыт только канал Δu_c .

Усилители 2, 3 и 4, 5 играют роль релейных устройств, управляющих ключами каналов воспроизведения.

Напряжение u_6 на выходе усилителя 6, которое имитирует температурное поле печи, воздействующее на моделируемый сляб, подается на вход усилителя 7.

На усилителях 7, 8 и 9 моделируется процесс нагрева сляба вследствие отклонений температур в печи от номинальных значений. С помощью переменных сопротивлений R_9 и R_{11} очень удобно изменять параметры этой части модели. Изменение этих сопротивлений соответствует изменению величин S_1 и k_1 в (6.2.18).

На выходе усилителя 9 в конце времени считывания заданного сектора появляется напряжение U_9 , пропорциональное величине $\Delta Q_1(T_1)$ (формула (6.2.17)).

В момент начала считывания сектора, когда большой зуб пересекает колодку, срабатывает реле P_3 , контакт которого IP_3 подключает постоянное напряжение E_6 ко входу интегратора 13. Сопротивление R_{39} подобрано так, что реле P_1 , катушка которого подсоединена к выходу усилителя 13, срабатывает тогда, когда напряжение U_{13} будет соответствовать времени T_1 пребывания слябов в печи, равному 1 часу. После срабатывания реле P_1 начинает работать аperiодическое звено, собранное на усилителях 10, 11, 12 с начальным условием U_{012} , соответствующим номинальной температуре решаемого сляба спустя время T'_1 . Это напряжение равно

$$U_{012} = kE_3, \quad (6.2.29)$$

где E_3 — напряжение, соответствующее наименьшей температуре нагрева за минимальное время $T_{1\min}$ самого «инерционного» сляба при номинальной температуре в печи.

Как показано на рис. 61, эта температура равна 1000°C . Постоянный коэффициент k в (6.2.29) имеет вид

$$k = k'S_1, \quad (6.2.30)$$

где S_1 — толщина нагреваемого сляба, устанавливаемая сопротивлением R_{12} , а k' устанавливается сопротивлением R_{13} и подбирается при моделировании.

Постоянная времени этого звена B' равна

$$B' = k'_1 S_1, \quad (6.2.31)$$

где k'_1 подбирается с помощью сопротивления R_{15} , а S_1 устанавливается с помощью сопротивления R_{17} .

Предельное напряжение на выходе интегратора 12 определяется постоянным напряжением E_7 , равным 100 вольтам и соответствующим номинальной температуре томильной зоны 1270° С.

Таким образом, в цепочке усилителей 10, 11, 12 сопротивления R_{13} и R_{15} подбираются так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать последний участок кривой номинального нагрева сляба. В конце процесса воспроизведения данного сектора на выходе усилителя 12 образуется напряжение, пропорциональное величине $\Delta Q_{н1}(T_1)$ (формула (6.2.20)).

Все блоки решающих усилителей, начиная с 14 и кончая 19, управляются с другого пульта управления, имеющего свои контакты «пуск» и «останов». После размыкания контакта $2P_3$ на усилителе 16 запоминается напряжение U_{16} , пропорциональное сумме

$$\Delta Q'(T_1) = \Delta Q_1(T_1) + \Delta Q_{н1}(T_1).$$

После того как малый зуб, ограничивающий сектор считывания, пройдет возле колодки, контакт $2P_3$ размыкается и замыкается контакт «пуск» на второй группе решающих усилителей, моделирующих процесс охлаждения сляба.

На усилителях 14, 15, 16 моделируется уравнение (6.2.21) с начальным условием, равным $\Delta Q'(T_1)$.

С помощью переменных сопротивлений R_{22} и R_{21} легко устанавливаются параметры этих усилителей, соответствующие изменению S_2 и k_2 (формула (6.2.22)).

Выход интегратора 18 моделирует номинальное изменение температуры $Q_{н2}(t)$ сляба, вышедшего из печи, с начальным условием 100 в, соответствующим температуре 1270° С (рис. 62). Постоянная времени этого интегратора B'_2 равна

$$B'_2 = k'_2 S_2, \quad (6.2.32)$$

где S_2 — средняя толщина раската, а k'_2 — коэффициент пропорциональности, подбираемый сопротивлением R_{28} .

Сопротивление R_{30} на выходе интегратора 19 устанавливается таким, чтобы реле P_4 , стоящее на выходе интегратора 19, срабатывало через время, пропорциональное величине T_2 для решаемого сляба.

Перед началом решения каждого сляба устанавливается сектор барабана, соответствующий решаемому слябу, а также сопротивления $R_9, R_{12}, R_{17}, R_{22}, R_{26}, R_{30}$, соответствующие величинам S_1, S_2, T_2 .

Задача заключалась в том, чтобы определить путем подбора такие значения сопротивлений $R_{11}, R_{13}, R_{15}, R_{24}, R_{28}$, соответствующие коэффициентам k_1, k', k_2, k'_1, k_2 , при которых получилось наименьшее среднее отклонение вычисленных значений приращений температур слябов $\Delta Q'' (T_2)$ (6.2.23) от измеренных приращений

$$\Delta Q_i = \Delta Q_{nci} - \Delta Q_i'' (T_{2i}). \quad (6.2.33)$$

Здесь приращение $\Delta Q_i'' (T_{2i})$ также отсчитывается от уровня 830°C , а индекс $i, i = 1, 2, \dots, m$, указывает на порядковый номер сляба, к которому относятся указанные величины. Общее количество слябов в данном опыте было равно $m = 129$ штукам.

За меру отклонения была принята величина

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta_i,$$

где

$$\Delta_i = |\Delta Q_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Путем подбора вышеуказанных сопротивлений удалось получить значение функционала A , равное $6,3^\circ \text{C}$. При этом наибольшее отклонение изученной температуры от вычисленной,

$$\Delta_{\max} = \max_i \Delta_i,$$

достигало величины $\Delta_{\max} = 22^\circ \text{C}$.

Таблица в приложении III содержит полученные при моделировании и измерении данные, по которым производились вычисления функционала A и максимального отклонения Δ_{\max} .

Таким образом, хотя максимальное отклонение вычисленной температуры от заданной составляет 22°C , среднее отклонение оказалось довольно малой величиной, равной $6,3^\circ \text{C}$, что говорит о достаточно высокой точности работы рассмотренной модели. Малая величина средней погрешности позволяет довольно точно осуществлять стабилиза-

цию температуры металла на выходе из печи. Можно ожидать, что применение автоматического оптимизатора для отыскания оптимальных параметров модели при наличии исходных данных о большом количестве слябов существенно уменьшит величину A и Δ_{\max} .

§ 3. Система оптимального управления нагревом металла в методической печи

Как видно из рассуждений § 1 этой главы, задача обеспечения точной стабилизации температуры $Q(L, t)$ на заданном уровне Q^* не всегда разрешима при изменяющейся скорости продвижения металла в печи, при изменяющихся марках и размерах слябов. Например, при переходе с одного сортамента слябов на другой, когда в непрерывной ленте слябов в печи имеется скачок толщины, выдержать строго заданную температуру соседних слябов из разных партий при неизменной скорости продвижения металла в печи невозможно [22, 23].

Поэтому задача системы управления состоит в том, чтобы при всех режимах работы печи обеспечить такое управление температурой в печи, чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение за определенное время T средней температуры сляба $Q(L, t)$ на выходе из печи при $y = L$ от заданной температуры, т. е. добиться того, чтобы

$$J = \int_0^T [Q^* - Q(L, t)]^2 dt = \min. \quad (6.3.1)$$

Как показывает формула (1.10.30), оптимальное управление в каждый момент времени t зависит от характера распределения температуры металла $Q(y, t)$ в этот момент. Однако, как мы это уже отмечали, непосредственный замер этой функции распределения невозможен. Поэтому в оптимальной системе управления существенную роль играет настраиваемая модель объекта, которая служит источником информации для управляющего устройства.

Автоматическую подстройку неизвестных параметров описанного выше процесса нагрева производит оптимизатор путем автоматического поиска.

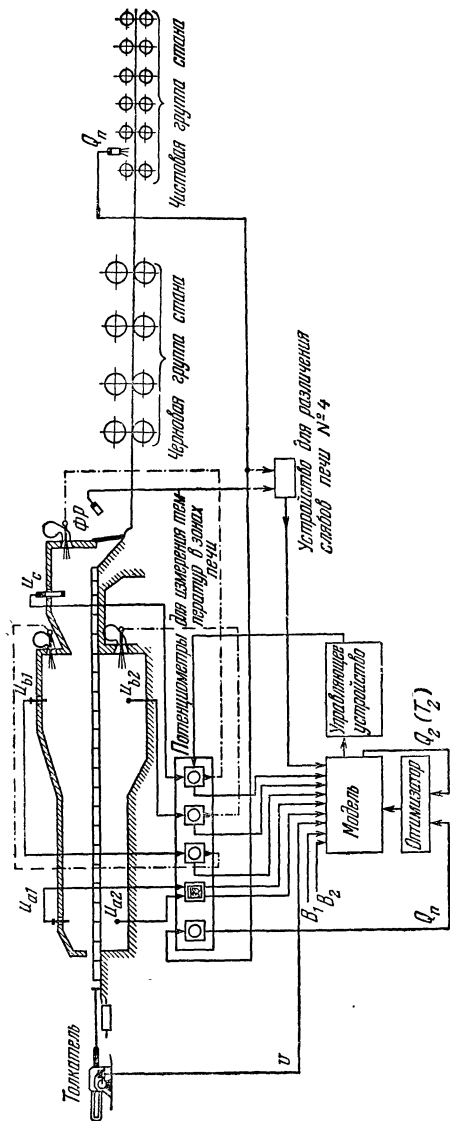


Рис. 65.

Функциональная схема системы оптимального управления методической печью изображена на рис. 65. Систему оптимального управления функционально можно подразделить на две части: модель объекта, которая вычисляет распределение температуры металла по длине печи, и собственно управляющее устройство, воздействующее на установку регулятора температуры томильной зоны. Модель объекта получает информацию с датчиков, установленных на печи. С реостатных потенциометрических датчиков поступает информация о температурах во всех зонах печи. С толкателя каждые 2,5 минуты поступает информация о величине пути v , проходимом всей массой слябов в печи за каждые 2,5 минуты. Теплофизические параметры S_{1n} и S_{2n} из-за отсутствия автоматических датчиков вводятся в систему вручную.

Под S_{1n} и S_{2n} будем понимать толщины сляба и раската соответственно приведенные к одной фиксированной марке стали (например, к стали СТ-3).

Кроме того, в оптимизатор вводится температура раската Q_n после пятой чистой клетки стана.

Усредненная по длине полосы температура раската Q_{nc} используется оптимизатором для настройки параметров модели объектов. Путем автоматического поиска определяются такие значения изменяемых параметров модели, при которых будет минимальна ошибка, усредненная за пять следующих друг за другом слябов

$$\overline{\Delta Q} = \sum_{i=1}^5 |\Delta Q_i|, \quad (6.3.2)$$

где $|\Delta Q_i|$ определяется формулой (6.2.33).

Момент выхода из печи очередного сляба фиксируется специальным фотореле ФР. Специальное устройство фиксирует момент прохождения «решаемого» сляба под пирометром после пятой клетки.

На модели в быстром темпе каждые 2,5 минуты просчитывается распределение температуры слябов по длине печи, а также вычисляется температура сляба, проходящего под пирометром после пятой клетки. Принцип построения этой модели аналогичен принципу рассмотренной выше модели.

Для выработки управляющего воздействия управляющее устройство использует полученные с модели данные о распределении температуры слябов по длине печи. В качестве управляющего воздействия принято задание регулятору температуры томильной зоны печи. Распределение температуры рабочего пространства томильной зоны можно считать зависящим только от времени t . Поэтому требуется определить такую функцию задания $\xi = \xi(t)$, зависящую от времени, чтобы обеспечить наилучший нагрев в смысле минимума функционала (6.3.1). Если пренебречь временем переходного процесса в регуляторе температуры зоны, то можно считать, что температура u_c в томильной зоне во все моменты времени равна величине задания ξ , т. е.

$$u(t) = \xi(t). \quad (6.3.3)$$

Будем считать, что $\xi(t)$ есть ограниченная функция времени, удовлетворяющая условию

$$A_1 \leq \xi \leq A_2, \quad (6.3.4)$$

где A_1 и A_2 — соответственно наименьшая и наибольшая допустимые температуры в печи.

В отношении аппаратуры систему можно разделить на четыре основные части: 1) логический блок с системой записи и воспроизведения с магнитного барабана; 2) модель нагрева и охлаждения; 3) оптимизатор с блоком усреднения температур раската по длине каждой полосы и за пять полос вместе и 4) управляющее устройство.

Принципиальная схема системы оптимального управления изображена на рис. 66.

При наличии возмущения только скорости продвижения материала в печи была выведена формула (1.10.30) для оптимального управляющего воздействия. В этом случае условие (6.3.3) примет вид

$$\xi(t) = Q^* + Bv(t) Q'_0 \left(t, L - \int_0^t v(\sigma) d\sigma \right) e^{-\frac{t}{B}}. \quad (6.3.5)$$

Принимая произвольный момент времени τ за начальный, будем иметь, что в каждый момент времени τ оптимальное задание регулятору $\xi(\tau)$ имеет вид

$$\xi(\tau) = Q^* + Bv(\tau) Q'_v(\tau, L), \quad (6.3.6)$$

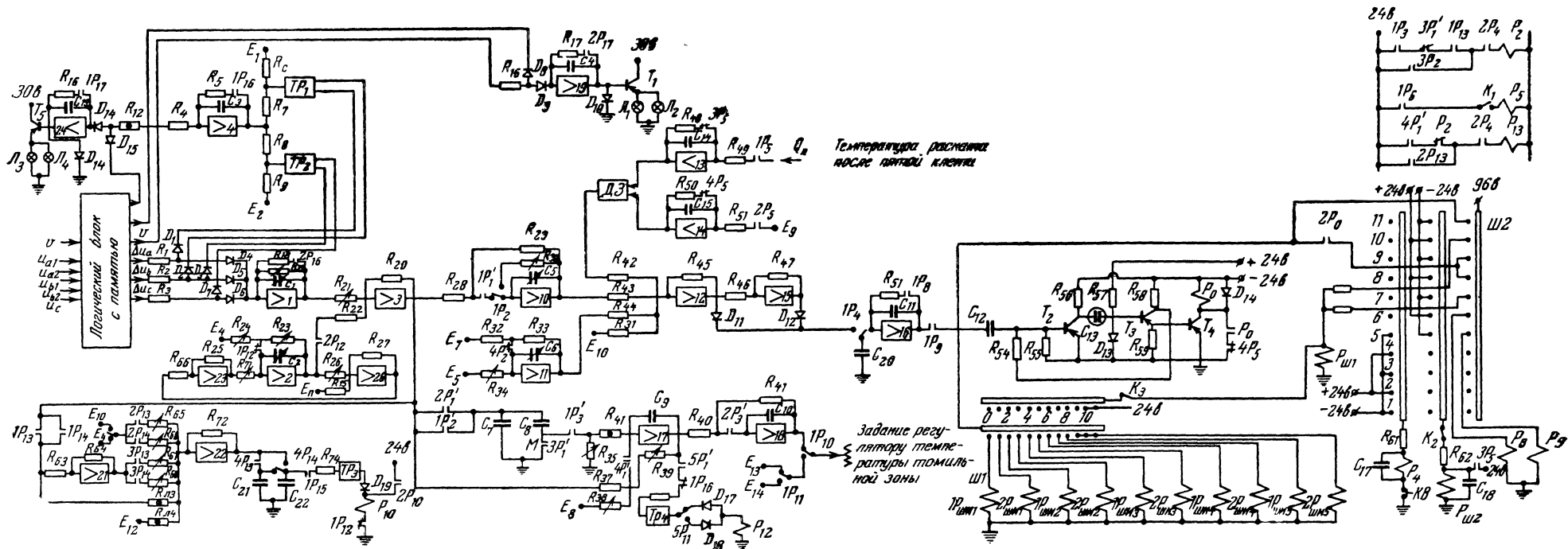


Рис. 66.

где $Q'_y(\tau, L)$ есть частная производная по y от функции распределения $Q(y, t)$ в момент времени $t = \tau$ в точке $y = L$.

Так как движение слябов в печи происходит толчками, то $v(\tau)$ — это среднее значение скорости около момента времени τ .

Из-за различного рода неточностей и погрешностей, когда задание регулятору ξ устанавливается в соответствии с формулой (6.3.6), температура слябов при выходе из печи не будет в точности равняться заданной величине Q^* . Поэтому целесообразно, кроме управления температурой в зоне по формуле (6.3.6), производить регулирование по отклонению, т. е. к величине ξ , вычисленной по формуле (6.3.6), добавлять член ξ_1 , равный

$$\xi_1(\tau) = \beta(Q^* - Q(\tau, L)), \quad (6.3.7)$$

где β — некоторый постоянный коэффициент. Таким образом, суммарное воздействие на задание регулятору будет равно

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_2(\tau) = \xi(\tau) + \xi_1(\tau) = \\ &= Q^* + Bv(\tau)Q'_y(\tau, L) + \beta(Q^* - Q(\tau, L)). \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Так происходит управление температурой в томительной зоне при наличии возмущений только скорости продвижения металла в печи.

Однако при нагреве в печи слябов разных марок и разных толщин необходим другой тип оптимального управления заданием регулятора температуры в зоне печи, при котором происходит выход температуры печи на допустимые границы A_1 и A_2 .

Как показано в § 10 главы I, при наличии одного скачка коэффициента B с величины $B = b_1$ до величины $B = b_2$ имеется один интервал времени, в течение которого температура в зоне поддерживается на одном из своих предельных уровней A_1 или A_2 в зависимости от того, положительный или отрицательный скачок имеет место на кривой распределения $Q(y, t)$ при фиксированном t (рис. 60). В том же параграфе было показано, что моменты начала и конца интервала, где ξ_2 находится на одном из своих предельных уровней, определяются равенством (1.10.32) (рис. 9).

Таким образом, надо определить момент начала интервала, где ξ_2 находится на предельном значении, в зависимости от времени t^* , которое требуется для того, чтобы первая заготовка новой партии прошла до конца печи, если она будет двигаться со скоростью v (τ), где τ — настоящий момент времени.

Пусть Q_0^+ и Q_0^- — соответственно левый и правый пределы в точке разрыва кривой распределения температуры слябов $Q(y, t)$ при фиксированном t (рис. 60).

Тогда условие (1.10.32) в случае наличия одного скачка на кривой $Q(y, t)$ при фиксированном t и при $Q_0^+ > Q_0^-$ можно приближенно заменить условием

$$R_1(t^*) = \left(\frac{A_2 - Q_0^+}{b_1} + \frac{Q_0^+ - Q^*}{t^*} \right) + \left(\frac{A_2 - Q_0^-}{b_2} - \frac{Q_0^- - Q^*}{t^*} \right) = 0, \quad (6.3.9)$$

а при $Q_0^+ < Q_0^-$ — условием

$$R_2(t^*) = \left(\frac{A_1 - Q_0^+}{b_1} + \frac{Q_0^+ - Q^*}{t^*} \right) + \left(\frac{A_1 - Q_0^-}{b_2} + \frac{Q_0^- - Q^*}{t^*} \right) = 0. \quad (6.3.10)$$

Алгоритм управления заданием регулятора теперь можно записать следующим образом:

1) при $Q_0^+ > Q_0^-$

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \xi(t) + \xi_1(t) & \text{при } R_1(t^*) > 0; \\ A_2 & \text{при } R_1(t^*) \leq 0, \end{cases} \quad (6.3.11)$$

2) при $Q_0^+ < Q_0^-$

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \xi(t) + \xi_1(t) & \text{при } R_2(t^*) > 0; \\ A_1 & \text{при } R_2(t^*) \leq 0. \end{cases} \quad (6.3.12)$$

Эти соотношения и были реализованы в управляющем устройстве.

В соответствии с утвержденной Магнитогорским металлургическим комбинатом программой по методической печи № 3 ЛПЦ-1 было проведено испытание нового метода управления режимом нагрева металла в печи, осуществ-

вляемого описанной в этом параграфе системой оптимального управления.

Во время работы системы оптимального управления нагревом обслуживающий персонал не вмешивался в работу печи. Отклонение температуры раската после пятой клетки стана от требуемого составило в среднем 19°C . Величина этого среднего отклонения без системы оптимального управления составляет около 60°C . Таким образом, среднее значение отклонения температуры раската от номинала уменьшилось примерно в 3 раза, что имеет существенное значение для улучшения качества прокатываемого листа и создает предпосылки для перехода на прокатку с минусовыми допусками и для фактического увеличения выпуска годной продукции.

§ 4. Перспективы применения управляющих машин для оптимизации совместной работы печей и стана

Как было показано выше, развитая теория уже сейчас дает возможность оптимально управлять рядом производственных объектов с распределенными параметрами. Эффективность такого управления теперь не вызывает сомнения. Однако ряд важных задач требует дальнейшего развития этой теории, ее необходимо распространить на более сложные случаи; например, как это отмечалось во введении, требуется решение задач с ограничениями на фазовые координаты системы, задач при некоторых специальных видах граничных условий, задач с параметрами и т. д. Зачастую решения, получаемые предлагаемыми методами, требуют громоздких расчетов и, по-видимому, целесообразно изыскивать более эффективные методы решения этих подчас чрезвычайно сложных задач.

Значительного усложнения задач можно ожидать при переходе от тех критериев управления, которые рассматривались выше (критерий минимума времени, критерий минимального отклонения, минимаксный критерий), к более сложным критериям, которые возникают, в частности, как только мы ставим перед собой задачу оптимизации совместной работы ряда взаимосвязанных производственных агрегатов. Рассмотрим, например, совместную работу методической печи и стана, на который работает эта печь. Известно,

что количество окалины, которая образуется при нагреве металла в печи, обезуглероживание металла, риск сваривания заготовок и оплавления огнеупоров, скорость нарастания подины в томильной зоне, удельный расход топлива и т. д. возрастают при повышении температуры поверхности и увеличения времени нагрева металла в печи. Это означает, что чем более высокая температура поддерживается в печи и на поверхности заготовок и чем больше задержек в потреблении металла, тем дороже обходится его нагрев.

С другой стороны, для стана в первую очередь существенна пластичность металла, т. е. его средняя температура. От этой температуры зависят усилия в механизмах и приводе стана, т. е. их износ и риск их поломок, а также расход электроэнергии на прокатку и соответствующие факторы, определяющие надежность работы электрооборудования. От средней температуры заготовки зависит также и темп прокатки. Стан, в некотором смысле, является антагонистом печи: для печи выгодно снижать нагрев, а для стана повышать. Здесь мы видим не только необходимость в непрерывном выборе оптимального распределения температуры по длине печи для обеспечения требуемой температуры металла Q^* , но и необходимость в самонастройке по этому параметру задания Q^* .

Внедрение систем оптимального управления на промышленных объектах стимулирует повышение культуры производства, замену устаревшего оборудования, переход на прогрессивные методы работы. Обновление и расширение системы контроля управляемых агрегатов оказываются важным условием при внедрении таких систем.

Так, для наладки, внедрения и надежной работы упомянутой системы оптимального управления совместной работой печи и стана требуется кроме 22 параметров контроля и регулирования, имеющихся ныне на печах, внедрить еще 18, причем внедрение каждой из этих систем контроля может быть эффективным даже само по себе [77].

Здесь мы упомянем только о трех параметрах контроля, ожидающих внедрения. Прежде всего это непосредственное измерение температуры поверхности заготовок в печи. Регулирование этой температуры улучшит экономические показатели работы печи и позволит более эффективно осуществлять самонастройку модели в системе оптимального

управления. Вторым параметром — непосредственное изменение темпа прокатки, что становится совершенно необходимым для управления печью, когда в ней нагреваются заготовки различных размеров и свойств, имеющие различную температуру при посадке в печь. Третьим параметром контроля — расход электроэнергии на раскатывание заготовок, который непосредственно характеризует пластичность прокатываемого металла. Помимо этого, такой прибор позволяет оценивать и анализировать текущую работу стана.

Суммарный эффект внедрения системы контроля и оптимального управления с лихвой и в короткие сроки окупит все затраты. Самой серьезной статьей этих затрат является вычислительная машина, выбору которой следует уделить особое внимание.

В описанной выше системе оптимального управления одной из методических печей была применена специализированная машина. Однако, по-видимому, для этой цели иногда предпочтительно применять универсальную машину. Прежде всего при этом исключается необходимость в разработке, постройке и наладке специализированной машины, появляется возможность работы по различным алгоритмам и сопоставления этих алгоритмов. При построенной специализированной машине в ходе усовершенствования алгоритма управления возникает необходимость перестраивать машину. Универсальная машина может работать (по крайней мере, в принципе) по сколь угодно сложному алгоритму, может иметь неограниченную внешнюю память и, следовательно, может хранить и перерабатывать большой объем сведений о процессе за более длительное время, накапливать опыт и обучаться. Универсальные машины, построенные из стандартных блоков, более надежны. Имея в цеху универсальную машину, можно использовать ее полнее и шире, чем специализированную, решая с ее помощью многие оперативные задачи. Универсальной машине можно поручать управление все более широким кругом агрегатов и процессов, постепенно охватывая более широкие участки: сначала на ней решается задача точного нагрева металла в одной печи, затем она начинает регулировать нагрев заготовок во всех печах, потом оптимизирует совместную работу печей и стана и, наконец, оптимизирует работу всего цеха и т. д.

В последние годы был создан ряд управляющих цифровых машин широкого назначения УМШН. Эти машины приспособлены для сбора и периодического обновления текущей информации о процессе, для выдачи команд управления на объект. Они снабжены преобразователями непрерывных величин в дискретные, обладают достаточной надежностью. Применение универсальной машины для управления методическими печами имеет целый ряд преимуществ: а) отпадает необходимость в крайнем упрощении математической модели процесса, появляется возможность более точного решения задачи оптимального управления; б) большой объем внешней памяти позволяет осуществлять самонастройку модели, накапливая опыт обучения, и создавать все более адекватную модель процесса нагрева и обработки металла в стане; в) одна машина дает возможность оптимально управлять всеми печами и совместной работой печей со станом. Все эти соображения указывают на безусловную перспективность внедрения вычислительных машин для управления производственными процессами.

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ МАССИВНОГО ТЕЛА

В данном приложении сохранены обозначения, принятые в § 2 главы V. На рис. 67 представлен общий вид оптимальных управлений для случаев $k = 2$ и $k = 3$ вместе с соответствующими температурными распределениями в момент φ_0 окончания оптимального процесса. Для удобства расчетов на рис. 67 приведены все обозначения, принятые в главе V.

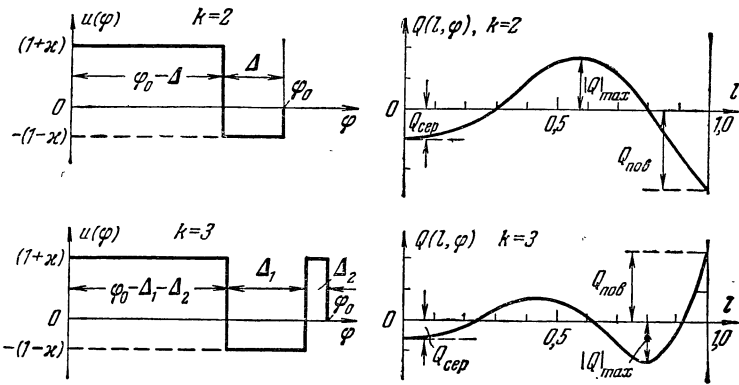


Рис. 67.

Порядок расчета управления $u(\varphi)$ при $k = 2$ с помощью номограмм следующий. По заданным значениям критериев b , χ , ν находим величину $\varphi_0 - \Delta$ по номограмме рис. 68. Расчет по этой номограмме состоит из двух последовательных этапов. Сначала по заданным значениям ν и χ отыскивается точка на немой шкале (шаг 1 на номограмме). Затем, соединяя найденную точку с соответствующей точкой шкалы критерия « b » (шаг 2 на номограмме), получим на ответной шкале искомую величину $\varphi_0 - \Delta$. На рис. 68 приведен пример, поясняющий эту процедуру.

Суммарная относительная погрешность отсчета величины по номограмме рис. 68, состоящая из погрешности аппроксимации точных

зависимостей, рассчитанных на ЦВМ, погрешности построения номограммы и погрешности отсчета по ней составляет не более 3% в любой точке шкалы, с которой считывается конечный результат.

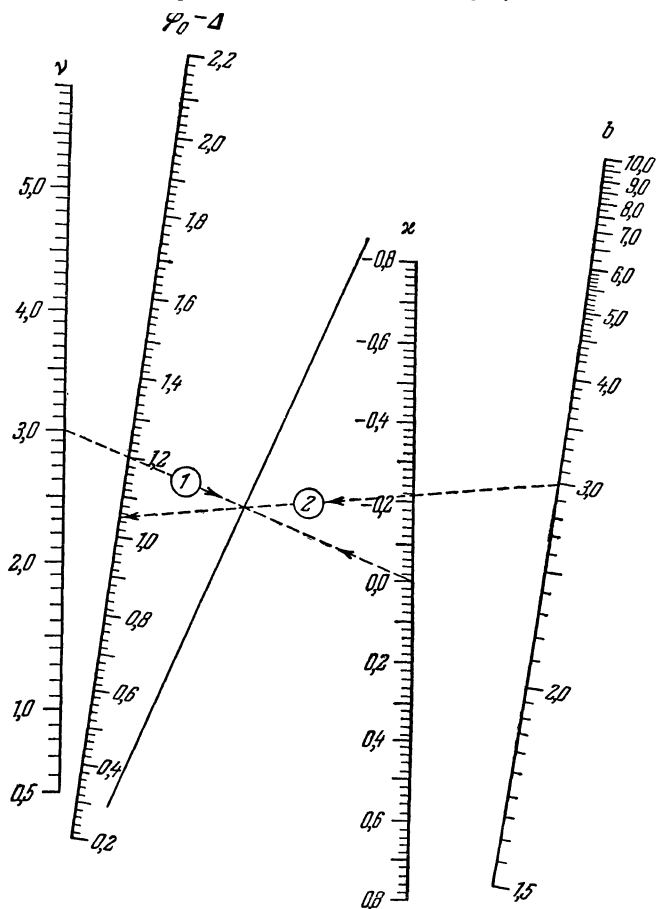


Рис. 68.

Пример. Дано: $\nu = 3,0$; $x = 0,0$; $b = 3,0$.
Находим: $\varphi_0 - \Delta = 1,05$.

Величина Δ определяется по номограмме рис. 69 по заданным значениям x и b с более высокой точностью, чем величина $\varphi_0 - \Delta$. В номограмме рис. 69 отсутствует зависимость от критерия начального условия ν (см. § 4 главы V).

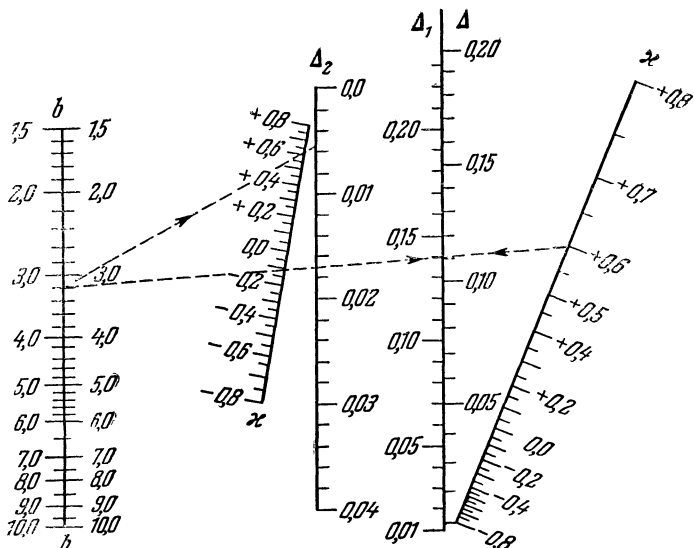


Рис. 69.

Пример. Дано: $b = 3,20$; $x = +0,6$.
Находим: $\Delta = 0,110$; $\Delta_1 = 0,140$; $\Delta_2 = 0,006$.

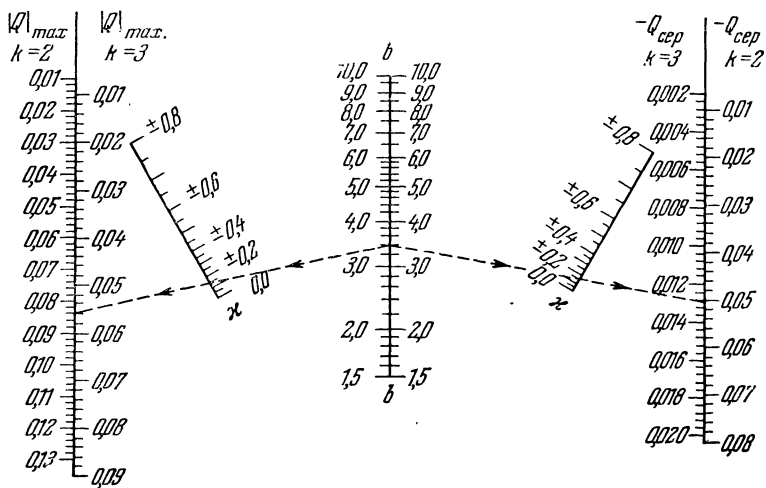


Рис. 70.

Пример. Дано: $b = 3,40$; $x = -0,15$.
Находим: 1) при $k = 2$ $|Q_1|_{\max} = 0,084$; $Q_{\text{сер}} = -0,050$; 2) при $k = 3$
 $|Q_1|_{\max} = 0,056$; $Q_{\text{сер}} = 0,013$.

Для определения управления $u(\varphi)$ при $k=3$ необходимо найти величины Δ_1, Δ_2 и $\varphi_0 - \Delta_1 - \Delta_2$ (см. рис. 67). Величина $\varphi_0 - \Delta_1 - \Delta_2$ (первый момент переключения) в пределах точности номограммы рис. 68 практически совпадает с величиной $\varphi_0 - \Delta$ (первый момент переключения управления $u(\varphi)$ при $k=2$), однако ввиду систематического характера погрешности, вносимой при замене $\varphi_0 - \Delta_1 - \Delta_2$

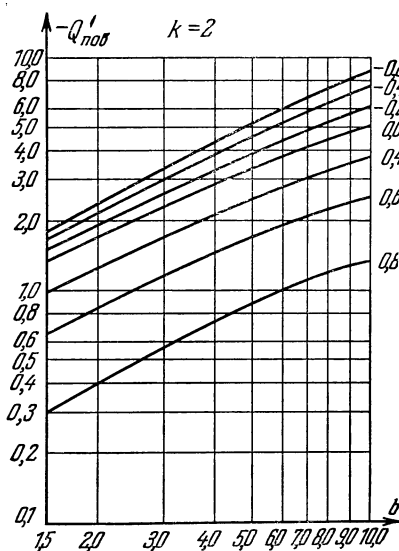


Рис. 71,

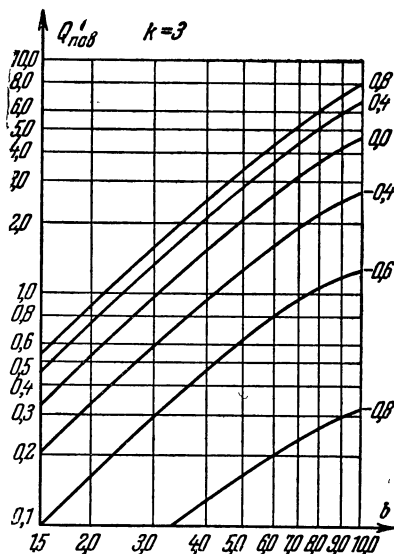


Рис. 72.

на $\varphi_0 - \Delta$, величина $\varphi_0 - \Delta_1 - \Delta_2$ всегда больше $\varphi_0 - \Delta$. Поэтому необходимо вводить поправку по следующей эмпирической формуле:

$$\varphi_0 - \Delta_1 - \Delta_2 = \varphi_0 - \Delta + 0,006 (0,9 - \kappa). \quad (1п)$$

Величины Δ_1 и Δ_2 рассчитываются по номограмме рис. 69. Пример поясняет метод пользования этой номограммой.

Величины $|Q|_{\max}$, $Q_{\text{сер}}$, $Q_{\text{пов}}$ рассчитываются по номограмме на рис. 70 и графикам на рис. 71, 72 ($Q'_{\text{пов}} = Q_{\text{пов}} \cdot 10^{-1}$).

Причем оценка величины $|Q|_{\max}$ по номограмме рис. 70 справедлива при $k=2$ для значений $|l| \leq 0,85$, а при $k=3$ для значений $|l| \leq 0,93$.

Суммарная абсолютная погрешность расчета величин $|Q|_{\max}$, $Q_{\text{сер}}$, $Q_{\text{пов}}$ по этим номограммам составляет соответственно 0,002; 0,02; 0,05.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Образцы данных, полученных с действующей методической печи

№ пп.	Абсолютное время		Температура °С по зонам						Корость прокатки в п.с. - чн, мм/3 мин	Размер слябов в мм и марка стали	Толщина раската $S_{\text{р}}, \text{мм}$	Температура после пятой клетн $Q_{\text{пс}}$	Время прокатки до пятой клетн, сек	Номер сляба
	час	мин	Томпль-на $u_{\text{с}}$	сварочная		методическая								
			верх $u_{\text{в1}}$	низ $u_{\text{п2}}$	верх $u_{\text{д1}}$	низ $u_{\text{д2}}$								
1	9	54	1257	1287	1308	970	982	760	110×760×4000 ст.3	2,5				
2		57	1260	1290	1310	977	982	760						
3	10	00	1257	1300	1317	983	980	760						
4		03	1257	1300	1320	995	981	1520						
5		06	1258	1303	1320	1002	981	0						
6		09	1253	1305	1320	1013	983	760						
7		12	1253	1310	1327	1020	984	760						
8		15	1253	1311	1330	1033	985	1520						
9		18	1253	1312	1335	1043	987	0						
10		21	1253	1320	1335	1050	988	0						
11		24	1254	1310	1320	1060	990	760						
12		27	1253	1307	1325	1075	993	760						
13		30	1253	1270	1290	1100	998	760						
14		33	1253	1255	1280	1105	1105	760						
15		36	1252	1250	1270	1060	1003	0						
16		39	1252	1243	1262	1065	1005	1520						
17		42	1252	1240	1258	1075	1008	760						
18		45	1250	1250	1260	1080	1010	760						
19		48	1253	1240	1260	1090	1010	760						
20		51	1280	1235	1255	1095	1012	760						
21		54	1284	1213	1250	1050	1010	1520						

Продолжение

№ пп.	Абсолютное время		Температура °С по зонам				Скорость продвижения слювы в пещ., м/3 мин	Размер слитков в мм и марка стали	Толщина раската S ₂ , мм	Температура после пайки Q _{нс} клети, сек	Время проколки слитка от пайки до пайки клети, сек	Номер слитка	
	час	мин	Томильная °С	сварочная		методическая							
				верх °С ₁	низ °С ₂	верх °С ₁							низ °С ₂
22		57	1287	1230	1245	1000	990	760					
23	44	00	1288	1230	1260	980	992	0					
24		03	1277	1234	1270	970	997	0					
25		06	1272	1218	1235	973	996	760					
26		09	1271	1210	1225	963	994	760					
27		12	1272	1205	1220	982	998	760					
28		15	1285	1205	1217	983	997	760					
29		18	1292	1200	1210	980	995	0					
30		21	1295	1225	1245	980	992	1520					
31		24	1295	1250	1270	980	987	760					
32		27	1297	1255	1277	987	984	760					
33		30	1297	1290	1300	996	983	760					
34		33	1298	1310	1320	1015	980	760					
35		36	1298	1300	1310	1020	980	0					
36		39	1302	1290	1310	1017	982	760					
37		42	1308	1290	1310	1003	980	760					
38		45	1303	1340	1350	1015	975	760					
39		48	1300	1330	1350	1012	978	760					
40		51	1298	1330	1350	1008	979	760					
41		54	1280	1320	1335	982	981	1520	910	129	1		
42		57	1290	1315	1330	972	982	760	904	138	2		
43	12	00	1285	1315	1335	978	980	760	893	127	3		
44		03	1265	1330	1350	980	976	1520	902	129	4		
45		06	1260	1334	1355	978	974	0	901	131	5		
									915, 905	122, 134	6, 7		

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Вычисленные Q_B и измеренные $Q_{нс}$ значения температур раската каждого сляба после пятой чистовой клетки прокатного стана и их абсолютные разности Δ

№ сляба	$Q_B, ^\circ\text{C}$	$Q_{нс}, ^\circ\text{C}$	$\Delta, ^\circ\text{C}$	$Q_B, ^\circ\text{C}$	$Q_{нс}, ^\circ\text{C}$	$\Delta, ^\circ\text{C}$	$Q_B, ^\circ\text{C}$	$Q_{нс}, ^\circ\text{C}$	$\Delta, ^\circ\text{C}$
1	910	908	2,0	880	903	13,0	911	920	9,0
2	904	897	7,0	893	897,5	4,5	910	916	6,0
3	893	889	4,0	853	851	2,0	905	909	4,0
4	902	905	3,0	871	862,5	8,5	903	902	1,0
5	901	903	2,0	875	870	5,0	905	902	3,0
6	915	918,5	3,5	901	888	13,0	900	882	18,0
7	905	911	6,0	848	841	7,0	908	906	2,0
8	899	916	17,0	839	843	4,0	915	902	13,0
9	906	897,5	8,5	891	897	6,0	910	916	6,0
10	903	913	10,0	840	847	7,0	907	910	3,0
11	931	940	2,0	847	859	12,0	901	911	10,0
12	912	924	12,0	882	887	5,0	906	903	3,0
13	906	913	7,0	886	886	0	900	907	7,0
14	900	895	5,0	872	858	6,0	902	911	9,0
15	913	910	3,0	872	858	14,0	906	902	4,0
16	915	909	6,0	881	892	11,0	912	909	3,0
17	916	918,5	2,5	868	873	5,0	919	902	17,0
18	918	909,5	8,5	890	897,5	7,5	905	909	4,0
19	911	912	1,0	894	897	3,0	907	898	8,0
20	916	911	5,0	878	876	2,0	911	902	9,0
21	913	923	10,0	873	867	6,0	904	914	10,0
22	918	919	1,0	874	860	14,0	862	863	6,0
23	915	915,5	0,5	879	873	6,0	864	872,5	8,5
24	921	932	11,0	889	881	8,0	878	866	12,0
25	905	911	6,0	871	873	2,0	876	871	5,0
26	909	899	10,0	873	867	6,0	904	914	10,0
27	910	917	7,0	874	860	14,0	862	868	6,0
28	915	917	2,0	879	873	6,0	864	872,5	8,5
29	910	901	8,5	889	881	8,0	878	866	12,0
30	903	898	5,0	871	873	2,0	876	871	5,0
31	910	907	3,0	874	878	4,0	848	849	1,0
32	905	904	1,0	889	831	8,0	856	862	6,0
33	915	921	6,0	859	861	2,0	864	874,0	10,0
34	908	912	4,0	833	848	10,0	874	882	8,0
35	916	919	3,0	875	873	3,0	875	880	5,0

Продолжение

№ сляба	$Q_b, \text{ } ^\circ\text{C}$	$Q_{нс}, \text{ } ^\circ\text{C}$	$\Delta, \text{ } ^\circ\text{C}$	$Q_b, \text{ } ^\circ\text{C}$	$Q_{нс}, \text{ } ^\circ\text{C}$	$\Delta, \text{ } ^\circ\text{C}$	$Q_b, \text{ } ^\circ\text{C}$	$Q_{нс}, \text{ } ^\circ\text{C}$	$\Delta, \text{ } ^\circ\text{C}$
36	909	916	7,0	892	887	5,0	859	853	6,0
37	914	912	2,0	870	876	6,0	871	868	3,0
38	916	910	6,0	890	894,5	4,5	866	860	6,0
39	909	902	7,0	875	885	10,0	872	870	2,0
40	915	900	15,0	893	888	5,0	892	892,5	0,5
41	927	930	3,0	888	894	6,0	872	881,5	9,5
42	928	932	4,0	902	899	3,0	867	862	5,0
43	906	912	6,0				859	865	6,0
44							868	878	10,0

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдикеримов Т., Оптимальные процессы в некоторых дискретных системах с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 2, 1964.
2. Агранович З. С., Повзнер А. Я., Применение операционных методов к решению некоторых задач математической физики, Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1954.
3. Андреев Ю. Н., Бутковский А. Г., Оптимальное управление нагревом массивных тел, Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1964.
4. Андреев Ю. Н., Бутковский А. Г., Задача оптимального управления нагревом массивных тел, Инж.-физ. журнал, т. VIII, № 1, 1965.
5. Арис Р., Оптимальное проектирование химических реакторов, ИЛ, 1963.
6. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
7. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ГСНТИ, Харьков, 1938.
8. Баженов А. П., Исследование теплопроводности при сушке тонких материалов, Научные доклады Высшей школы, Энергетика, 1959, № 2, стр. 147.
9. Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
10. Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.
11. Будаков Б. М., Горбунов А. Д., О разностном методе решения нелинейной задачи Гурса, Доклады АН СССР, т. 117, № 4, 1957.
12. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, 1958.
13. Бутковский А. Г., Выступление в дискуссии на секции оптимальных систем I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, Труды I Международного конгресса ИФАК. Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем, Изд-во АН СССР, 1961, стр. 518—520.
14. Бутковский А. Г., Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 1, 1961.
15. Бутковский А. Г., Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 10, 1961.

16. Бутковский А. Г., Некоторые приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 12, 1961.
17. Бутковский А. Г., О моделировании некоторых объектов с распределенными параметрами, Сб. «Автоматическое управление», Изд-во АН СССР, М., 1961.
18. Бутковский А. Г., О необходимых и достаточных условиях оптимальности в импульсных системах управления, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 8, 1963.
19. Бутковский А. Г., Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 9, 1963.
20. Бутковский А. Г., Оптимальное управление системами с распределенными параметрами, Труды II Международного конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1963.
21. Бутковский А. Г., Расширенный принцип максимума для задач оптимального управления, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 3, 1963.
22. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами, Доклады АН СССР, Кибернетика и теория регулирования, т. 134, № 4, 1960.
23. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 6, 1960.
24. Butkowski A. G., Lerner A. Ja., Über die optimale Steuerung von Systemen mit verteilten Parametern. Regelungstechnik, Heft 5, 1961, стр. 185—188.
25. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Малыш С. А., Задачи оптимального управления процессами вытягивания изделий из расплава, Доклады АН СССР, т. 153, № 4, 1963.
26. Бутковский А. Г., Сун Цзянь, К построению функционального преобразования со многими входами, Известия АН СССР, Энергетика и автоматика, № 2, 1961.
27. Ватажин А. Б., Некоторые двумерные задачи с распределением тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле, Прикладная механика и техническая физика, № 2, 1963.
28. Волин Ю. М., Островский Г. М., Об оптимизации одного класса химико-технологических процессов, Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 10, 1964.
29. Волин Ю. М., Островский Г. М., О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 7, 1965.
30. Волюнский Б. А., Бухман В. Е., Модели для решения краевых задач, Физматгиз, 1960.
31. Волюнский Б. А., Аналоговые интегро-вычислители для решения краевых задач, Изд-во АН СССР, 1963.

32. Воронцов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, Воениздат, 1950.
33. Габасов Р., К оптимальным процессам в связанных системах, Автоматика и телемеханика, т. XXIII, № 7, 1962.
34. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
35. Гинцель М., Мультхот Г., Крылья с минимальным индуктивным сопротивлением в сверхзвуковом потоке, Механика, периодический сборник, ИЛ, 1961, 1, 65.
36. Гирсанов И. В., Минимальные задачи в теории диффузионных процессов, Доклады АН СССР, т. 136, № 4, 1961.
37. Гирсанов И. В., Некоторые минимаксные задачи в теории управляемых марковских процессов, Резюме доклада на секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического о-ва, Теория вероятностей и ее применение, т. VII, вып. 2, 1962.
38. Давиденко П. А., Электронная схема автоматического контроля и сушки древесины, Гослесбумиздат, 1962.
39. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, ИЛ, 1962.
40. Девятов Б. Н., Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления, Редакционно-издательский отдел Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск, 1964.
41. Дубовицкий А. Б., Милютин А. А., Задачи на экстремум при наличии ограничений, Доклады АН СССР, т. 149, № 4, 1963.
42. Егоров А. И., Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах, Прикладная математика и механика, т. XXVII, № 4, 1963.
43. Егоров А. И., Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 5, 1964.
44. Егоров Ю. В., О некоторых задачах теории оптимального управления, Доклады АН СССР, т. 145, № 4, 1962.
45. Егоров Ю. В., Оптимальное управление в банаховом пространстве, Доклады АН СССР, т. 150, № 2, 1963.
46. Егоров Ю. В., Некоторые задачи теории оптимального управления, Журнал вычисл. матем. и математич. физики, т. 3, вып. 5, 1963.
47. Егоров Ю. В., О достаточных условиях сильного экстремума в классе кривых с ограниченной производной, Доклады АН СССР, т. 159, № 5, 1964.
48. Егоров Ю. В., Необходимые условия оптимальности управления в банаховом пространстве, Математический сб., т. 64, вып. 1, 1964.
49. Жидкова М. А., Моделирование процесса регулирования производительности газокompрессорной станции, Автоматика, № 4, 1961, Изд-во АН УССР, Киев.
50. Ильин А. А., Калашников А. С., Олейник О. А., Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН, 1962, т. 17, вып. 3, стр. 3—146,

51. Калман Р. Е., Об общей теории систем управления, Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, Изд-во АН СССР, 1961, стр. 521.
52. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
53. Карплюс У., Моделирующие устройства для решения задач теории поля, ИЛ, 1962.
54. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.
55. Красовский Н. Н., Об одной задаче оптимального регулирования, Прикладная математика и механика, т. XXI, 1957.
56. Красовский Н. Н., К теории оптимального регулирования, Автоматика и телемеханика, т. VIII, № 11, 1957.
57. Красовский Н. Н., Оптимальные процессы в системах с запаздыванием, Труды II Международного конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1963.
58. Ковнер С. С., К теории автоматического регулирования процесса вытягивания, Ростехиздат, 1962.
59. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, Изд-во Московск. ун-та, вып. I, 1954; вып. II, 1960.
60. Коломейцева М. Б., Комбинированная система программного регулирования процесса индукционного нагрева, Известия АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, № 1, 1963.
61. Крайко А. Н., Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений, Прикладная механика и математика, т. 28, вып. 2, 1964, стр. 275.
62. Кротов В. Ф., Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, I и II, Автоматика и телемеханика, т. XXIII, № 12, 1962; т. XXIV, № 5, 1963.
63. Кудрявцев Е. П., Осесимметричная задача электроуплотнения глинистых грунтов. Научные доклады Высшей школы, Энергетика, № 2, 1959.
64. Кэмпбелл Д. П., Динамика процессов химической технологии, ИЛ, 1962.
65. Лернер А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, I и II, Автоматика и телемеханика, т. XIII, № 2, № 4, 1952.
66. Лернер А. Я., О предельном быстродействии систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. XV, № 6, 1964.
67. Лернер А. Я., Построение быстродействующих систем автоматического регулирования при ограничении значений координат регулируемого объекта, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. II, Изд-во АН СССР, 1955.
68. Лернер А. Я., Введение в теорию автоматического регулирования, М., Машгиз, 1958.
69. Лернер А. Я., Выступление в дискуссии на секции оптимальных систем I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, Труды I Международного

- конгресса ИФАК. Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем, Изд-во АН СССР, 1961, стр. 516—518.
70. Лернер А. Я., Оптимальное управление поточными процессами, Труды II Международного конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1963.
 71. Лернер А. Я., Бутковский А. Г., Способ определения управляющих воздействий в системах автоматического управления и регулирования, Бюллетень изобретений, № 7, 1961.
 72. Лернер А. Я., Бутковский А. Г., Хлебников С. П., Способ определения временного и пространственного распределения параметров, характеризующих состояние контролируемого (или управляемого) объекта, Бюллетень изобретений, № 3, 1961.
 73. Лурье К. А., Задача Майера — Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами, Прикладная математика и механика, т. XXVII, вып. 5, 1963.
 74. Лурье К. А., Оптимальное управление проводимостью жидкости, движущейся по каналу в магнитном поле, Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. 2, 1964, стр. 258—267.
 75. Лыков А. В., Теплопроводность нестационарных процессов, М., Гостехиздат, 1961.
 76. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., Гостехиздат, 1951.
 77. Малый С. А., Автоматизация методических печей, М., Металлургиздат, 1962.
 78. Мандельброт С., Квазианалитические классы функций, ОНТИ, 1937.
 79. Металлургические печи, Коллективный труд под редакцией М. А. Глинкова, М., Metallurgizdat, 1951.
 80. Митягин Б. С., О бесконечно дифференцируемой функции с заданными значениями производных в точке, Доклады АН СССР, т. 138, № 2, 1961.
 81. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, Изд-во «Наука», М., 1965.
 82. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М., 1957.
 83. Нейрингер Г., Оптимальная генерация мощности движущейся плазмой, Сборник переводов «Движущаяся плазма», ИЛ, 1961.
 84. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1949.
 85. Нетушил А. В., Объект индукционного или радиационного нагрева как звено системы автоматического регулирования, Известия ОТН АН СССР, Энергетика и автоматика, № 2, 1962.
 86. Нетушил А. В., Поливанов К. М., Влияние сил влагонепроводности на движение влаги в грунтах под действием электроосмоса, Труды МЭИ, вып. XIV, М., Госэнергоиздат, 1953.
 87. Ньюстад Л., Пайеванский Б., Синтез оптимальных управлений, Труды II Международного конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1965,

88. Паркус Г., Неустановившиеся температурные напряжения, ИЛ, 1963
89. Паскал Г., Переходное течение газов в магистральных трубопроводах, Доклады АН СССР, т. 137, № 3, 1961.
90. Петровский И. Г., Некоторые неравенства для гиперболических систем, Математический сб., т. 2 (44), 1937, стр. 815.
91. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
92. Пост Р., Высокотемпературная плазма и управляемые термоядерные реакции, ИЛ, 1961.
93. Привалов И. И., Интегральные уравнения, ГТТИ, 1935.
94. Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М., Гостехиздат, 1947.
95. Розоноэр Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, т. XX, № 10—12, 1959.
96. Розоноэр Л. И., Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления, I, II, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 6, 7, 1963.
97. Самарский А. А., Фомин С. В., О математическом изучении процессов сорбции и десорбции газов (квазистационарный случай), Научные доклады Высшей школы, сер. Физико-математические науки, № 6, 1958.
98. Сенин А. Г., Прохождение случайных сигналов через линейную динамическую систему с распределенными параметрами, Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1964.
99. Сиразетдинов Т. К., К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 4, 1964.
100. Слинько М. Г., Островский Г. М., О применении вычислительных машин для управления контактными аппаратами, Химическая промышленность, № 3, 1962.
101. Смиглевский Ю. Д., Вариационные проблемы для тел в сверхзвуковом потоке, Прикладная математика и механика, т. 26 (1962), стр. 110—125.
102. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, М., Гостехиздат, 1954.
103. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., Гостехиздат, 1950.
104. Соколов В. Н., Расчет нагрева металла в металлургических печах, М., Металлургиздат, 1956.
105. Солодовников В. В., Применение операторного метода к исследованию процесса регулирования скорости гидротурбины, Автоматика и телемеханика, т. I, 1941.
106. Солодовников В. В., Интегральное уравнение системы регулирования, «Бюллетень Всесоюзного электротехнического института», № 5, 1941.
107. Тайц Н. Ю., Методические нагревательные печи, М., Металлургиздат, 1957.

108. Тайц Н. Ю., Технология нагрева стали, М., Металлургиздат, 1962.
109. Тихонов А. Н., Жуковский А. А., Забежинский Я. Л., Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала, Ж. физ. химии, т. 20, вып. 10, 1946.
110. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., Гостехиздат, 1951.
111. Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
112. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
113. Троицкий В. А., Об оптимизации процесса транспортировки, Прикладная механика и математика, вып. 6, 1963.
114. Фельдбаум А. А., Простейшие релейные системы автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. X, № 4, 1949.
115. Фельдбаум А. А., Оптимальные процессы в системе автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. XIV, № 6, 1953.
116. Фельдбаум А. А., О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства, Автоматика и телемеханика, т. XVI, № 2, 1955.
117. Фельдбаум А. А., О применении вычислительных устройств в автоматических системах, Автоматика и телемеханика, т. XVII, № 11, 1956.
118. Фельдбаум А. А., Применение вычислительных устройств в автоматических системах, Физматгиз, 1959.
119. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных систем, Физматгиз, 1963.
120. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., Гостехиздат, 1951.
121. Халилов З. И., Линейная задача управления в банаховом пространстве, Доклады АН СССР, т. 155, № 4, 1964.
122. Ш ура-Бура М. Р., Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного, Сб. «Вычислительная математика», № 2, 1957.
123. Этерман И. П., Математические машины непрерывного действия, М., Машгиз, 1957.
124. Bellman R., The Variation of Green's Functions of the One-dimensional case. Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, v. 43, No 9, 1957.
125. Bellman R., Osborn H., Dynamic Programming and the Variations of Green's Functions, J. of Mathem. and Mechan. v. 7, No 1, 1958.
126. Biot M. A., New methods in heat flow analysis with applications to flight structures, J. of Aeronautical Sciences, v. 24, 1957, стр. 857—873.
127. Chang S. S. L., Digitized maximum principle, Proc. IRE., 1960, v. 48, N 12, стр. 2030—2031. (См. реферат экспресс-информации «Системы автоматического управления производственными процессами», 1961, № 14, рефер. № 62, ВИНТИ.)

128. Fleming W. H., Some Markovian. Optimization Problems, *J. of Mathem. and Mechan.*, vol. 12, N 1, 1963, стр. 131—140.
129. Froment G. F., Bischoff K. B., Non-Steady state behaviour of fixed bed catalytic reactors due to catalyst fouling, *Chem. Engng. Sci.*, v. 16, 1961, стр. 189.
130. Ginsburg F., On the Cauchy problem for the one-dimensional heat equation, *Math. Comput.*, 17, 83, стр. 257—269, July, 1963.
131. John F., Numerical Solution of the Equation of Heat Conduction for Preceding Times. *Annali di matematica*, series, IV, V, XI 1955, стр. 129—142.
132. Kipiniak W., *Dynamic Optimization and Control*. MIT Press, USA, 1961.
133. Lanczos C., *Applied Analysis*, Sir Pitman and Sons, 1957.
134. Lions J., Malgrange B., Sur l'unicité retrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, *Math. Scand.*, 1960, т. 8, No 2, стр. 277—286.
135. McCausland J., On-off Control of Linear systems with Distributed Parameters, Dissertation submitted to the University of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy, October 1963.
136. Miranker W. L., A well-posed Problem for the Backward Heat Equation and Signal Recovery SBM Research Report, NoRC-167, November, 1959.
137. Pike E. W., Silerbery T. R., Designing Mechanical Computers, *Mech. Design*, v. 24, No 7, 8, 1952.
138. Wang P. K. C., Optimum Control of Distributed Parameter Systems with Time Delays, *IEEE Transaction Automatic Control*, v. 9, No 1, 1964.
139. Wang P. K. C., Tung F., Optimum Control of Distributed Parameter Systems, Joint Automatic Control Conference, 1963, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, June 19—20, 1963.
140. Wang P. K. C., Control of Distributed Parameter Systems, *Advances in Control Systems. Theory and applications*, Edited by C. T. Leondes, v. 1, Academic Press New York, London, 1964.

Анатолий Григорьевич Бутковский

Теория оптимального управления системами
с распределенными параметрами

(Серия «Теоретические основы
технической кибернетики»)

М., 1965 г., 476 стр. с илл.

Редакторы: *Ю. Ф. Кичатов* и *Л. П. Сысоев*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*

Корректор *Г. Г. Желтова*

Сдано в набор 14/VI 1965 г.

Подписано к печати 12/XI 1965 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$.

Физ. печ. л. 14,88+1 вкл. Условн. печ. л. 24,61.

Уч.-изд. л. 21,93. Тираж 8000 экз. Т-13766.

Цена книги 1 р. 30 к. Заказ № 2847

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука»

Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫЙДУТ ИЗ ПЕЧАТИ В 1966 г.

Серия «Теоретические основы технической кибернетики»

А н д р е е в Н. И., Корреляционная теория статистически оптимальных систем.

Г и л л А., Введение в теорию конечных автоматов.

К а т к о в н и к В. Я., П о л у э к т о в Р. А., Многомерные дискретные системы управления.

Л и Р., Оптимальные оценки, определение характеристик и управление, перевод с английского.

П а в л о в А. А., Синтез релейных оптимальных по быстродействию систем (метод фазового пространства),

С а н д л е р Дж., Техника надежности систем, перевод с английского.

Предварительные заказы на печатающуюся литературу принимаются всеми магазинами Книготорга. При отказе в приеме заявки следует обращаться по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Союзкнига».

