



В. Я. КАТКОВНИК
Р. А. ПОЛУЭКТОВ

МНОГОМЕРНЫЕ
ДИСКРЕТНЫЕ
СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ



МНОГОМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

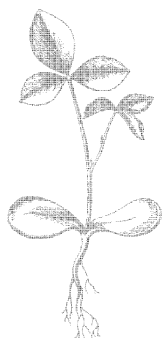


**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966**

В. Я. КАТКОВНИК, Р. А. ПОЛУЭКТОВ

**МНОГОМЕРНЫЕ
ДИСКРЕТНЫЕ
СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966**

6 П.154
К 29
УДК 62-50

Владимир Яковлевич Катковник
Ратмир Александрович Полуэктов

Многомерные дискретные системы управления

(Серия: «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1966 г., 416 стр. с илл.

Редактор *Р. С. Рутман*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 30/V 1966 г. Подписано к печати 2/XI 1966 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 19,57.
Тираж 7500 экз. Т-12794. Цена книги 1 р. 43 к. Заказ. 1056.

Издательство «Наука»
Главная редакция Физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	13
§ В.1. Многомерные системы управления	13
§ В.2. Принципы проектирования многомерных систем	22
§ В.3. Цифровая вычислительная машина в цепи управления	24
§ В.4. Терминология и обозначения	27
Глава 1. Динамические характеристики многомерных непрерывных систем	31
§ 1.1. Характеристики «вход — выход»	31
§ 1.2. Пространство состояний и характеристики непрерывных систем	43
§ 1.3. Управляемость и наблюдаемость многомерных систем	58
§ 1.4. Задача идентификации системы по передаточной матрице	71
§ 1.5. Каноническая структура многомерной системы	85
Глава 2. Динамические характеристики многомерных дискретных систем	88
§ 2.1. Характеристики «вход — выход»	88
§ 2.2. Пространство состояний и характеристики дискретных систем	103
§ 2.3. Определение дискретных характеристик объекта и корректирующих устройств.	107
§ 2.4. Управляемость, наблюдаемость и идентификация дискретных систем. Каноническая структура многомерной дискретной системы	121
Глава 3. Структурные преобразования и устойчивость	139
§ 3.1. Структурные преобразования многомерных систем	139
§ 3.2. Устойчивость многомерных систем	145

§ 3.3 Компенсация и устойчивость	150
§ 3.4 Компенсация и устойчивость (продолжение)	156
Глава 4. Точность многомерных систем при случайных воздействиях	171
§ 4.1. Точность систем управления	171
§ 4.2. Многомерный случайный процесс и его прохождение через непрерывную систему	175
§ 4.3. Многомерный дискретный случайный процесс и его характеристики	186
§ 4.4. Установившиеся систематические ошибки дискретных систем. Условие несмещенности	195
§ 4.5. Установившаяся дисперсия ошибки дискретной системы	205
§ 4.6. Неустановившиеся ошибки дискретной системы	210
Глава 5. Синтез стационарных фильтров при бесконечном времени наблюдения (задача Колмогорова — Винера для многомерных систем)	215
§ 5.1. Постановка задачи оптимальной фильтрации. Вывод уравнений оптимального фильтра	215
§ 5.2. Решение уравнений оптимального фильтра	228
§ 5.3. Решение уравнений оптимального фильтра (продолжение)	245
Глава 6. Синтез систем управления, оптимальных в установившемся режиме работы	254
§ 6.1. Постановка задачи синтеза замкнутой системы	254
§ 6.2. Оптимальное управление минимальнофазовым объектом	257
§ 6.3. Синтез систем управления устойчивым неминимальнофазовым объектом	271
§ 6.4. Синтез систем управления неустойчивым объектом	278
§ 6.5. Задача синтеза при дополнительных требованиях к статической точности	292
§ 6.6. Автономность и инвариантность в задаче синтеза многомерных систем	299
Глава 7. Оптимальная фильтрация при ограниченном времени наблюдения	307
§ 7.1. Постановка задачи фильтрации и вывод уравнений	307
§ 7.2. Задача синтеза одноканального фильтра	318
§ 7.3. Синтез многоканального фильтра при стационарных входных сигналах	333

§ 7.4. Синтез многоканального фильтра при нестационарных входных сигналах	345
§ 7.5. Связь между задачами синтеза фильтров с конечным и бесконечным временем наблюдения	355
Глава 8. Синтез систем управления, оптимальных при конечном времени работы	367
§ 8.1. Оптимальное управление при ограниченном времени	367
§ 8.2. Учет динамических ограничений, вызванных объектом	374
Приложение I. Основные сведения по теории матриц	381
§ П.1.1. Матрицы и действия над ними	381
§ П.1.2. Линейные преобразования. Эквивалентность и подобие матриц. Собственные значения матриц	391
§ П.1.3. Полиномиальные и рациональные матрицы	394
Приложение II. Методы решения систем линейных дифференциальных и разностных уравнений	403
§ П.2.1. Решение систем однородных дифференциальных уравнений	403
§ П.2.2. Решение систем разностных уравнений	407
Литература	410
Предметный указатель	414

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании этой книги авторы поставили своей целью последовательно развить современные методы анализа и синтеза линейных систем управления применительно к многомерному случаю. Ограничение класса исследуемых систем линейными позволило предложить единый подход к задаче проектирования многомерной системы. В основу рассмотрения положено представление о системе управления как о преобразователе сигналов. При этом точность системы управления определяется свойствами внешних воздействий (полезных сигналов и помех), ее структурой и характеристиками заданных элементов.

Большое внимание в книге уделено статистической динамике многомерных систем управления.

Задача синтеза замкнутой системы управления при случайном характере сигналов по постановке и методам решения родственна задаче оптимальной фильтрации (проблеме Колмогорова — Винера). Имеется, однако, и существенная разница, заключающаяся в том, что к системе управления (в отличие от фильтра) предъявляется ряд дополнительных требований. В связи с этим синтез оптимальной замкнутой системы — это почти всегда задача отыскания условного минимума некоторого функционала.

В книге рассмотрены различные варианты задачи синтеза многомерных дискретных систем, оптимальных по

критерию минимума квадратичного показателя качества. Установлены особенности проектирования замкнутых систем и те ограничения, которые накладываются динамическими характеристиками заданной части на достижимое качество.

Различным аспектам теории многомерных систем посвящено большое количество публикаций, содержащих порой противоречивые результаты. Последнее относится, например, к исследованию таких вопросов, как автономность и инвариантность. В книге делается попытка выработать единую точку зрения на принципы проектирования многомерных систем управления. В частности, развиваемые методы позволяют ответить на вопрос о том, в каких случаях свойства автономности и инвариантности позволяют повысить качество системы.

Подход к задаче синтеза, излагаемый в настоящей книге, идейно был подготовлен работами по аналитическому синтезу одномерных непрерывных и дискретных систем управления [8, 29, 50]. Теория управляемости и наблюдаемости, развиваемая в последние годы Р. Е. Калманом [15, 63], позволила по-новому осмыслить результаты, полученные для одномерных систем, и оказалась весьма плодотворной для обобщения на многомерный случай.

Книга состоит из введения, восьми глав и приложения. Во введении дается определение многомерной системы и приводятся примеры многомерных объектов управления. Изложены общие соображения о постановке задачи синтеза, введены терминология и основные обозначения.

Глава 1 посвящена математическому описанию многомерных непрерывных систем. Вводятся понятия о передаточной и весовой матрицах. Рассматриваются характеристики систем в пространстве состояний. Излагаются основные положения теории управляемости и наблюдаемости и

определяется каноническая структура многомерной системы.

В главе 2 исследуются разностные уравнения, как математическая модель дискретной системы. Устанавливается связь между непрерывными и соответствующими дискретными характеристиками.

Различные структуры многомерных систем управления рассмотрены в главе 3. Основные результаты главы относятся к исследованию устойчивости многомерных замкнутых систем. Устанавливаются ограничения, накладываемые заданными элементами на вид передаточной матрицы замкнутой системы. Эти ограничения связаны с появлением неуправляемой и ненаблюдаемой частей при компенсации динамических свойств объекта.

В главе 4 содержатся основные сведения по теории многомерных случайных процессов. Рассматривается вопрос о прохождении случайных сигналов через многомерную линейную систему. Сформулирована задача анализа точности многомерной системы, находящейся под воздействием как случайных, так и детерминированных сигналов.

Задача синтеза стационарных многомерных дискретных фильтров рассмотрена в главе 5. Излагается постановка задачи и приводится компактный способ вывода уравнений оптимального многоканального дискретного фильтра при бесконечном времени наблюдения. В этой же главе приводится метод решения системы уравнений Винера — Хопфа, используемый в последующих главах.

Глава 6 посвящена задаче синтеза замкнутых систем управления, оптимальных в установившемся режиме работы. Рассматриваются особенности задачи синтеза многомерных замкнутых систем. Оценивается влияние на достижимое качество отрицательных свойств объекта таких, как неустойчивость и неминимальнофазовость. Показано, что

в общем случае требования автономности и инвариантности не вытекают из условия наилучшей точности системы управления.

Задача оптимальной обработки конечного числа дискретных данных, рассматриваемая в главе 7, представляет собой обобщение на многомерный дискретный случай известной задачи Заде — Рагаззини. В этой же главе устанавливается связь между задачами синтеза фильтров с бесконечным и конечным временем наблюдения.

В главе 8 решается задача оптимального управления многомерным объектом при учете конечности времени работы. Основным результатом главы является вывод о том, что условия не критичности системы к малым изменениям характеристик объекта совпадают с условиями устойчивости ее установившегося режима.

Изложение теоретических результатов сопровождается примерами, ознакомление с которыми является необходимым для понимания излагаемых методов и, кроме того, может представить самостоятельный интерес. В некоторых примерах содержатся теоретические результаты, не включенные в основной текст.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, сталкивающихся в процессе своей работы с многомерными системами. Для понимания книги необходимо знакомство с общим курсом теории автоматического регулирования (например, [38]), а также основами теории дискретных систем [44, 48] и статистической динамики [29, 39]. Основные сведения по теории матриц (без доказательств) включены в приложение I, объем которого достаточен для понимания содержания книги. Читатель, интересующийся доказательствами соответствующих теорем, может обратиться к чтению монографии Ф. Р. Гантмахера [10].

Изложение теории многомерных систем требует привлечения довольно сложного математического аппарата.

Авторы сделали все возможное, чтобы содержание книги было доступно широкому кругу инженеров. В тексте книги акцент сделан на изложении существа вопросов и объяснении результатов.

Мы глубоко признательны Я. Э. Цыпкину за постоянное внимание к работе и обсуждение ряда результатов, а также И. Б. Челпанову, который привлек наше внимание к проблеме синтеза многомерных систем. Ряд примеров, помещенных в книге, выполнен В. К. Подгайским.

Авторы отдают себе отчет в том, что книга в ее настоящем виде не свободна от недостатков, и поэтому заранее выражают благодарность всем, кто найдет возможность и время сообщить им свои замечания.

§ В.1. Многомерные системы управления

Развитие техники автоматического управления характеризуется тенденцией к переходу от автоматизации отдельных операций и процессов к комплексной автоматизации. Это направление связано со стремлением освободить человека от непосредственного контроля над работой машины. Совершенствование элементов и создание новых средств автоматического управления позволяют осуществить эффективное управление такими процессами, скорости протекания которых исключают надежный контроль со стороны человека.

Этот переход к комплексной автоматизации хорошо иллюстрируется на примере управления самолетом. На первые автопилоты продольной стабилизации возлагалась сравнительно простая задача поддержания угла тангажа самолета или угла наклона траектории с помощью воздействий на руль высоты. Выйдя на стационарный режим полета с заданным углом тангажа и заданной скоростью, летчик включал автопилот и тем самым освобождался от утомительных и однообразных обязанностей коррекции траектории полета. Однако с появлением реактивной авиации и увеличением диапазона скоростей такой простой способ автоматизации оказался недостаточным. Известно, что самолет с воздушнореактивным двигателем при больших скоростях становится неустойчивым. При этом даже для поддержания режима горизонтального полета с заданной скоростью необходимо совместно управлять скоростью и углом тангажа с помощью одновременного воздействия на руль высоты и тягу двигателя.

Комплексная автоматизация почти всегда связана с необходимостью управления многими функциями путем воздействия на несколько регулирующих органов. Система комплексной автоматизации, как и всякая система управления, состоит из объекта и комплекса управляющей аппаратуры. При этом под объектом понимается та часть

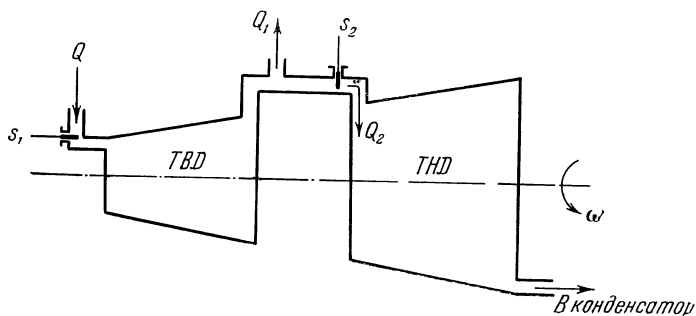


Рис. В. 1.

системы, которая непосредственно участвует в реализации основных функций системы.

Объект управления принято называть многомерным, если число его управляемых параметров больше единицы. Система управления таким объектом называется многомерной. Изменение режима работы многомерного объекта осуществляется путем подачи соответствующих управляющих воздействий — входных сигналов. В большинстве случаев входные и выходные координаты взаимосвязаны, так что изменение лишь одной из входных величин приводит к возникновению процессов по всем выходным координатам. Ниже приводится несколько примеров многомерных объектов, некоторые из которых являются традиционными для теории автоматического регулирования.

Паровая турбина с отбором пара. Паровая турбина с промежуточным отбором пара состоит из части высокого давления (ТВД) и части низкого давления (ТНД). В ТВД поступает свежий пар, расход которого Q может изменяться с помощью перемещения заслонки s_1 ,

(рис. В. 1.). Часть пара Q_1 с выхода ТВД может отбираться для промышленных целей. Изменение положения заслонки s_2 приводит к перераспределению пара между частью низкого давления и отбором. Выходными координатами турбины можно считать число ее оборотов ω и давление отбираемого пара.

Линеаризованные уравнения объекта в отклонениях от установившегося режима [51] имеют вид

$$\left. \begin{aligned} T_1 \frac{dy_1}{dt} + \rho_{11}y_1 - \rho_{12}y_2 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 - \lambda_1, \\ T_2 \frac{dy_2}{dt} + \rho_{22}y_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2 - \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.1})$$

где y_1 — относительное изменение угловой скорости ротора; y_2 — относительное изменение давления в камере отбора; u_1 и u_2 — относительные перемещения заслонок s_1 и s_2 ; λ_1 и λ_2 — относительные изменения момента нагрузки и расхода отбираемого пара.

Первое из уравнений В. 1 является уравнением моментов количества движения, второе — уравнением материального баланса. Отметим, что перемещение любого из регулирующих органов приводит к изменению обеих выходных координат.

Регулирование частоты и напряжения в энергосистеме. В качестве объекта регулирования рассмотрим энергосистему, приведенную к простейшей схеме двух агрегатов, связанных линией передачи и работающих на общую нагрузку [13]. При этом первый из генераторов (рис. В. 2) снабжен лишь статическим регулятором скорости, а второй — является ведущим по частоте. К системам подобного типа предъявляются весьма жесткие требования по точности поддержания требуемых значений основных параметров. Даже небольшие отклонения частоты вызывают весьма неэкономичное перераспределение нагрузки между параллельно работающими агрегатами. Что же касается напряжения, то весьма существенно, чтобы точность его регулирования была порядка $1 \div 1,5\%$. При принятых допущениях первый агрегат является

пассивной нагрузкой системы. Управление частотой и напряжением осуществляется воздействием на второй агрегат.

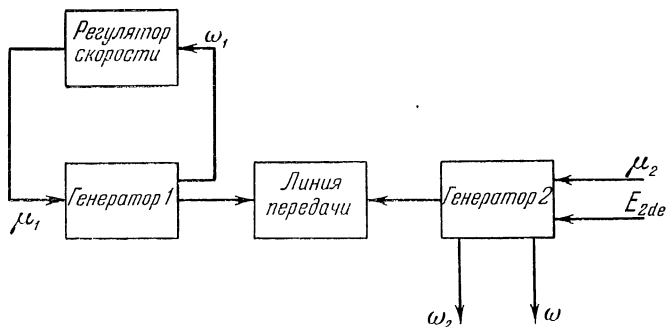


Рис. В. 2.

Уравнения в малых отклонениях от установившегося режима [26] могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \rho_1 \omega_1 + \rho_{12} \delta + k_1 E_{2d} &= \mu_1, \\
 I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \rho_2 \omega_2 + \rho_{21} \delta + k_2 E_{2d} &= \mu_2, \\
 \frac{d\delta}{dt} &= \omega_1 - \omega_2, \\
 T_{2d} \frac{dE'_{2d}}{dt} + E_{2d} &= E_{2de}, \\
 E_{2d} - a\delta - bE_{2d} &= 0, \\
 U_2 - c\delta - dE_{2d} &= 0, \\
 T_1 \frac{d\mu_1}{dt} + \mu_1 &= k'_1 \omega_1,
 \end{aligned} \right\} \quad (B.2)$$

где переменные характеризуют отклонение от установившегося режима следующих координат: ω_1 и ω_2 — частоты

машин; μ_1 и μ_2 — положений регулирующих органов машин; E_{2de} — напряжения возбуждения второго генератора; U_2 — напряжения на зажимах второго генератора; E_{2d} — э. д. с. за переходным реактансом второго генератора; δ — сдвига фаз между э. д. с. первого и

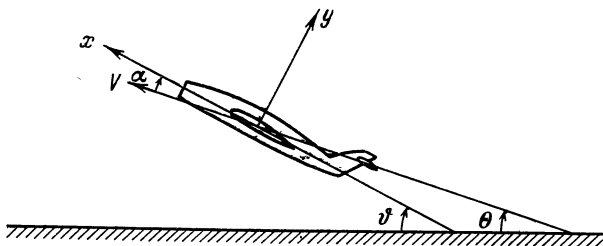


Рис. В. 3.

второго генераторов; E_{2d} — э. д. с. холостого хода второго генератора. Коэффициенты ρ_1 , ρ_2 , ρ_{12} , ρ_{21} , k_1 , k_2 , a , b , c , d , T_{2d} , T_1 , k_1' зависят от параметров системы и режима работы; I_1 и I_2 — приведенные моменты инерции первой и второй машин.

Входными координатами энергосистемы как объекта регулирования являются положение регулирующего органа турбины и напряжение возбуждения второго генератора (μ_2 и E_{2de}). В качестве выходных параметров можно принять напряжение U_2 и частоту ω_2 вырабатываемого тока.

Самолет как объект управления. Рассмотрим движение самолета в продольной плоскости, совпадающей с плоскостью его симметрии. Это движение характеризуется следующими угловыми координатами: углом наклона траектории θ , образуемым вектором скорости V и горизонтальной плоскостью, углом тангажа φ (углом между продольной осью самолета x и горизонтальной плоскостью) и углом атаки α , составленным вектором скорости и продольной осью x . Эти углы связаны кинематическим соотношением (рис. В. 3):

$$\varphi = \theta + \alpha.$$

Воздействиями, с помощью которых можно управлять движением самолета, являются изменение положения руля высоты δ_B и изменение тяги двигателей δ_P . В качестве выходных координат можно принять величину вектора скорости V и один из углов: ϑ или θ .

Линеаризованные уравнения движения в проекциях на естественные оси (касательную и нормаль к траектории) имеют вид [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} + n_{11}v + n_{12}\Delta\alpha + n_{13}\Delta\vartheta &= n_P\Delta\delta_P, \\ -n_{21}v + \frac{d\Delta\alpha}{d\tau} + n_{22}\Delta\alpha - \frac{d\Delta\vartheta}{d\tau} + n_{23}\Delta\vartheta &= 0, \\ n_{31}v + n_0\frac{d\Delta\alpha}{d\tau} + n_{32}\Delta\alpha + \\ &+ \frac{d^2\Delta\vartheta}{d\tau^2} + n_{33}\frac{d\Delta\vartheta}{d\tau} = n_B\Delta\delta_B. \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.3})$$

В уравнениях (В. 3) через v обозначено относительное отклонение скорости полета от установившейся, τ — безразмерное время, $\tau = \frac{t}{\tau_A} = \frac{\rho S V_0 t}{m}$. Третье уравнение (В. 3)

есть уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр инерции перпендикулярно к плоскости симметрии самолета. Коэффициенты уравнений зависят как от аэродинамических и весовых характеристик самолета, так и от режима полета. При изменении высоты и скорости полета величины коэффициентов изменяются в широких пределах.

Турбореактивный двигатель с дожиганием. В турбореактивном авиационном двигателе (рис. В. 4) многоступенчатый компрессор приводится в движение газовой турбиной. Воздух, засасываемый компрессором из окружающей среды, поступает в камеру сгорания, а затем в турбину. Энергия сгоревшего топлива используется как для вращения компрессора, так и для соз-

дания реактивной тяги. В форсажную камеру сгорания, расположенную за турбиной, впрыскивается дополнительное топливо для увеличения тяги на форсажных режимах. Входными (управляющими) воздействиями являются, таким образом, расходы основного и форсажного топлива. В качестве выходных координат, характеризующих режим

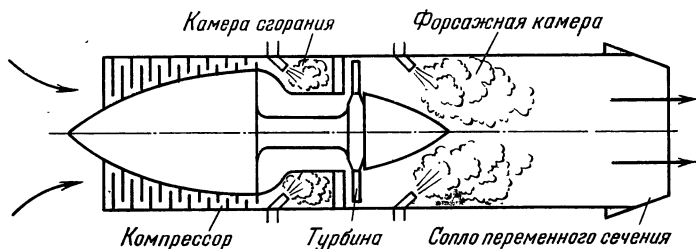


Рис. В. 4.

работы двигателя, могут быть приняты скорость вращения ротора турбокомпрессора и температура газов за турбиной.

Уравнения движения [36] имеют вид

$$\left. \begin{aligned} T_a \frac{d\varphi}{dt} + \varphi &= k_{11}\mu_1 - k_{12}\mu_2, \\ \rho\varphi + \vartheta &= k_{21}\mu_1 + k_{22}\mu_2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.4})$$

где φ и ϑ — относительные отклонения скорости вращения ротора и температуры газов; μ_1 и μ_2 — относительные отклонения расходов основного и форсажного топлива.

Как следует из уравнений, изменение любого из расходов топлива приводит к одновременному отклонению обеих выходных координат.

Непрерывный стан холодной прокатки. Принцип работы непрерывного стана холодной прокатки ясен из рис. В. 5. Полоса металла определенной толщины проходит через ряд клеток между сжимающимися ее вращающимися валками. При этом толщина полосы последовательно уменьшается в результате обжатия валками. Задача заключается в том, чтобы на выходе стана получить

полосу строго заданной толщины. Трудность ее решения связана с неоднородностью механических свойств подаваемого металла (подката), колебаниями толщины подката, разогревом валков стана и рядом других факторов. Изменение толщины подката, а также влияние всех остальных

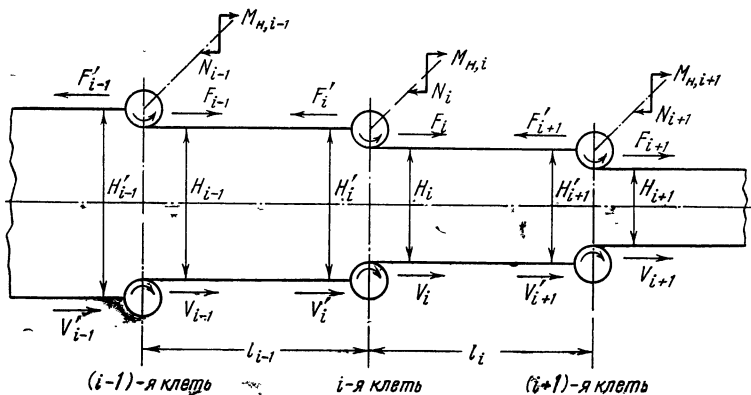


Рис. В. 5.

факторов можно скомпенсировать путем управления скоростью вращения валков и степенью их поджатия. Управление скоростью валков оказывается более эффективным средством, чем их поджатие. Однако если отклонение от нормы превышает определенный уровень, то целесообразно скачкообразно изменить раствор валков, а более тонкие изменения выбирать за счет управления скоростью [45].

Из общих соображений ясно, что непрерывный стан холодной прокатки представляет собой многомерный объект. В качестве входных управляющих воздействий выступают скорости вращения и усилия поджатия валков. Управляемыми параметрами можно считать толщину выходного листа, а также толщины проката в некоторых пролетах стана.

Линеаризованные уравнения стана для случая постоянного раствора валков [46] записываются в следующей

форме:

$$\left. \begin{aligned}
 h_i &= k_{i1}h'_i - k_{i2}f_{i-1} - k_{i3}f_i + k_{in}n_i, \\
 m_{hi} &= k_{i4}h'_i - k_{i5}h_i - k_{f5}f_i + k_{f4}f_{i-1}, \\
 H_{i0}'v_i + V_{i0}'h'_i &= V_{i0}h_i + H_{i0}v_i, \\
 \frac{df_i}{dt} &= k_i(v'_{i+1} - v_i), \\
 v_i &= B_iN_{i0}(f_i - f_{i-1}) + D_in_i, \\
 h'_i(t) &= h_{i-1}(t - \tau_{i-1}), \\
 \tau_i &= \frac{l_i}{V_0}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.5})$$

В уравнениях клеток (В. 5) приняты следующие обозначения:

а) все величины, относящиеся к i -й клетке, имеют индекс i ;

б) переменные со штрихом соответствуют величинам на входе клетки, а переменные без штриха — на выходе;

в) все величины, соответствующие номинальному режиму, имеют индекс нуль;

г) отклонения от номинального режима обозначаются малыми буквами;

д) обозначения переменных величин следующие:

$M_n = M_{n0} + m_n$ — момент нагрузки,

$V = V_0 + v$ — скорость движения полосы,

$F = F_0 + f$ — натяжение полосы,

$H = H_0 + h$ — толщина полосы,

$N = N_0 + n$ — скорость вращения валков.

Соотношения (В. 5) должны быть дополнены уравнениями приводов, связывающими скорости вращения валков, моменты и управляющие напряжения. Как указано в [46], приближенно уравнения привода i -й клетки могут

быть записаны в виде

$$T_i \frac{dn_i(t)}{dt} + k_{mi}m_{ni}(t) = k_{yi}y_i(t - \tau_{i0}), \quad (\text{B.6})$$

где y_i — управляющее напряжение привода, T_i , k_{mi} , k_{yi} — коэффициенты, τ_{i0} — время запаздывания привода. Входными воздействиями рассматриваемого объекта являются управляющие напряжения y_i приводов клеток.

§ В.2. Принципы проектирования многомерных систем

Разработка любой системы автоматического управления, как правило, начинается с изучения динамических свойств объекта и составления его математической модели. В большинстве случаев объект управления является сложной динамической системой. Эта сложность определяется, с одной стороны, высоким порядком его дифференциальных уравнений, а с другой — наличием различных нелинейных зависимостей между отдельными координатами. Кроме того, невозможно представить себе объект, характеристики которого остаются неизменными во времени. Свойства любой технической системы обычно существенно зависят от режима работы, не говоря уже о таком факторе нестационарности, как износ и старение элементов.

На первом этапе проектирования, когда идет изучение объекта и возможностей системы управления в целом, целесообразно пользоваться по возможности упрощенной моделью, учитывающей лишь основные связи. При этом всегда стремятся анализировать линейную и стационарную систему. Такой подход позволяет физически просто осмыслить получаемые результаты и накопить опыт проектирования. В предыдущем параграфе были приведены примеры описания некоторых многомерных объектов, являющихся сложными динамическими системами. Вместе с тем опыт проектирования показал, что достаточно эффективные результаты можно получить в рамках линейной теории.

Степень идеализации системы нельзя рассматривать в отрыве от тех задач, которые она должна решать, и тех

требований, которые к ней предъявляются. Чем выше требования по точности и качеству системы, тем более детализированной должна быть модель объекта.

При разработке системы управления необходимо, помимо свойств объекта, знать те условия, в которых эта система будет работать. Под условиями работы в более узком смысле можно понимать совокупность всех сигналов, действующих на систему. По своему функциональному содержанию эти воздействия делятся на две группы — полезные сигналы и помехи. Под полезными сигналами понимаются сигналы, подлежащие воспроизведению на выходе. Мешающие сигналы (помехи) — это совокупность всех воздействий, препятствующих выполнению предписанных операций. К последним относятся воздействия, источники которых расположены как вне контура управления (нагрузки для энергосистемы, ветер для летательного аппарата и антенны радиолокатора), так и в самой системе (дрейфы и шумы усилителей, уходы гироскопов и т. д.). Ясно, что если некоторые из этих сигналов детерминированы, т. е. могут быть точно предсказаны для любого будущего момента времени, то эффект их воздействия в линейной системе можно вычислить и указать управляющее воздействие, приводящее к желаемому результату с нулевой ошибкой. В реальных условиях большинство из сигналов представляет собой случайные функции времени. Именно с этим связаны многие из трудностей проектирования систем управления.

Изучение условий работы системы требует столь же пристального внимания, что и рассмотрение свойств объекта. В частности, для случайных сигналов результатом такого исследования должны являться их вероятностные характеристики. При этом в большинстве случаев достаточно хорошие результаты дает уже приближенное знание спектральных свойств сигналов. Ясно, что повышение требований к качеству системы управления приводит к необходимости все более полного определения характеристик внешних воздействий.

Исследование объекта и ситуации является лишь предварительным этапом работы. Начало самого проектирования связано с выбором структуры системы управления. Под структурой понимается способ включения корректи-

рующих устройств. Возможно включение корректирующих звеньев в канал ошибки, в каналы обратных связей, в разомкнутую цепь воздействия по возмущению. Постановка корректора в том или ином месте означает измерение соответствующего сигнала. Чем больше сигналов измеряется в данной системе, тем больше имеется информации о значениях внешних воздействий и о работе элементов. Очевидно, что в принципе это должно приводить к увеличению достижимой точности. Однако увеличение числа корректирующих устройств усложняет систему и делает ее менее надежной. Всегда следует знать, где нужно остановиться на пути усложнения системы, т. е. когда дальнейшее усложнение приводит к результатам, не окупающим затрат. Ответ на этот вопрос зависит от свойств объекта и от характера и места приложений внешних сигналов.

В связи с последними обстоятельствами большое значение приобретает задача выявления оптимальной достижимой точности системы при заданной ее структуре. Решение этой задачи может быть получено в рамках теории оптимальных систем управления. Возможность сравнения различных систем и выбора среди них наилучшей связана с понятием критерия качества. В линейной теории за критерий качества обычно принимается квадратичный функционал ошибок. При действии на систему случайных сигналов в одномерном случае — это дисперсия ошибки, в многомерном случае — это сумма взвешенных дисперсий ошибок по каждой из выходных координат. Таким образом, качество любой системы управления характеризуется некоторым числом, и оптимальной системой является та, для которой это число принимает экстремальное значение.

§ В.3. Цифровая вычислительная машина в цепи управления

Можно указать два основных направления использования цифровых вычислительных машин (ЦВМ) в автоматических системах. Это, во-первых, применение ЦВМ для выработки программы управления. В этом случае результаты вычислений на ЦВМ используются, по существу, как задающие воздействия для замкнутого контура управления. Другое направление связано с применением ЦВМ не-

посредственно в замкнутом контуре для стабилизации системы и выработки управляющих сигналов. На этом пути цифровая машина в принципе обладает рядом преимуществ перед непрерывными (аналоговыми) устройствами. Среди последних можно отметить такие, как стабильность работы (отсутствие дрейфов и внутренних шумов), возможность реализации достаточно сложных законов управления, простота перестройки управляющей программы и др. В то же время следует иметь в виду, что в настоящее время малая надежность цифровых устройств не позволяет полностью реализовать все эти преимущества. ЦВМ не может быть включена в замкнутую систему там, где ее отказ вызывает аварийную ситуацию. Этот недостаток ЦВМ, разумеется, является временным и будет преодолен с развитием дискретной техники.

Повышение требований, предъявляемых к системам управления, вызывает необходимость все более полного учета динамических свойств объекта и характеристик внешних сигналов. Увеличение точности системы дается иногда дорогой ценой. Платой за это является существенное усложнение законов управления. Именно в связи с этими обстоятельствами становится очевидной целесообразность применения цифровых машин непосредственно для замыкания контура управления.

При включении ЦВМ в систему управления возникает задача сочленения дискретной цифровой системы с непрерывными элементами.

Рассмотрим один из вариантов включения цифровой вычислительной машины в цепь управления многомерным объектом (рис. В. 6). Объект имеет n выходных координат y_1, y_2, \dots, y_n , управлять которыми можно с помощью n управляющих воздействий u_1, u_2, \dots, u_n . Задачей системы является воспроизведение входных сигналов r_1, r_2, \dots, r_n так, чтобы ошибки рассогласования $e_i = r_i - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) были по возможности малыми. Систему рис. В. 6 можно назвать многомерной дискретной следящей системой. ЦВМ включена в цепь ошибок и служит для выработки управляющих воздействий u_i .

Преобразование непрерывных сигналов ошибок в цифровой код осуществляется в устройстве ввода (преобразователе непрерывных данных в дискретные). Сравняющие

элементы, дающие величины ошибок, могут быть выполнены как на аналоговых, так и на дискретных элементах. Значения ошибок, измеренных в дискретные моменты времени, используются в ЦВМ для вычисления управляющих сигналов по соответствующей программе. Результат

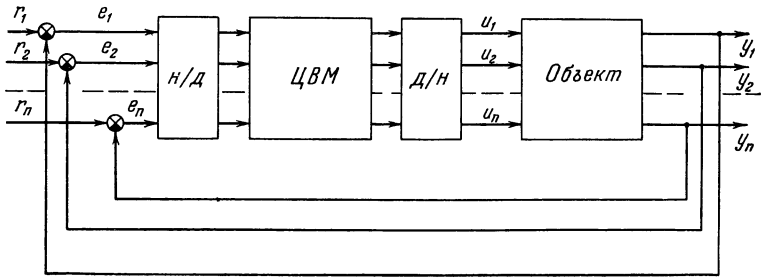


Рис. В. 6.

этого вычисления поступает на декодирующее устройство, преобразующее сигналы из дискретной формы в непрерывную.

Полное описание работы такой системы достаточно сложно. Для построения ее математической модели обычно используется ряд упрощающих допущений, относящихся к характеру преобразования сигналов. Будем считать, что поступление данных на ЦВМ и выдача управляющих сигналов производятся периодически с некоторым периодом T синхронно и синфазно. Это допущение оправдано в случае, когда время, затрачиваемое на ввод и выдачу данных, мало по сравнению с тактностью работы системы T . Кроме того, будем считать, что эффектом квантования сигналов по уровню можно пренебречь, т. е. что количество разрядов преобразователей и ЦВМ достаточно велико.

Эти допущения позволяют перейти при решении задач динамики от схемы рис. В. 6 к следующей модели системы (рис. В. 7). Операция квантования сигналов ошибок считается идеальной и осуществляется ключами k_1, k_2, \dots, k_n , замыкающимися периодически с периодом T , синхронно и синфазно. Декодирующее устройство ЦВМ представляется в виде последовательного соединения ключей k'_1, k'_2, \dots, k'_n и формоимпульсных элементов w_1, w_2, \dots, w_n . Ключи k'_i

также считаются идеальными. Выдача данных ЦВМ осуществляется периодически, с периодом T , одновременно по всем каналам в моменты замыкания входных ключей. Принятая модель во многих случаях сохраняет принципиальные особенности дискретных систем и вместе с тем

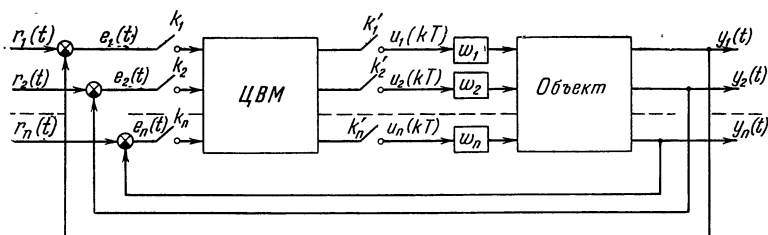


Рис. В. 7.

позволяет решать различные задачи динамики единообразными и хорошо разработанными методами теории импульсных систем.

§ В.4. Терминология и обозначения

Рассматривая многомерные системы управления, целесообразно там, где это возможно, сохранить терминологию, принятую для более простого случая систем с одним входом и одним выходом. Одним из основных понятий теории одномерных систем управления является понятие звена. *Многомерным звеном* будем называть математическую модель динамической системы, имеющей несколько входов и выходов. Уравнения объектов, приведенные в § В. 1, дают примеры многомерных звеньев.

Система автоматического управления представляет собой соединение различных многомерных звеньев. Совокупность многомерных звеньев с заданными характеристиками назовем *объектом*. В понятие объекта, таким образом, включается как математическая модель собственно объекта управления, так и заданные динамические характеристики усилительно-регулирующих и измерительных устройств. Многомерное звено, характеристики которого выбираются при проектировании, называется *многомерным корректирующим звеном* (корректором).

Возможны различные способы соединения объекта и корректирующих устройств. Характер этого соединения определяет *структуру системы управления*. Различают разомкнутые, замкнутые и комбинированные системы управления. В замкнутой системе многомерный корректор может быть включен в канал рассогласования, в цепь обратной связи, в цепи местных обратных связей и т. д.

Для конкретизации изложения в книге делается несущественное во многих случаях допущение о том, что все многомерные звенья (и система в целом) имеют одинаковое число входов и выходов, равное n , т. е. рассматриваются *n -мерные системы*. В этом смысле одномерная система является частным случаем многомерной, когда $n = 1$. Поэтому большинство результатов, изложенных ниже, относится также и к одномерным системам.

Компактное изложение теории многомерных систем может быть достигнуто лишь на пути последовательного приращения аппарата матричного исчисления. При этом результаты можно записать в обозримой форме, а многие из них, если отвлечься от матричных обозначений, по форме совпадают с результатами, соответствующими одномерному случаю. Все входные и все выходные сигналы многомерных звеньев образуют n -мерные векторы. Будем отождествлять n -мерный вектор с матрицей-столбцом размера $n \times 1$.

Динамические свойства непрерывного многомерного звена определяются матрицей их передаточных или весовых функций, которые будем называть соответственно *передаточной* или *весовой матрицами*. Передаточная матрица позволяет связать вход и выход звена с помощью соотношения, по форме совпадающего с одномерным случаем. Так, если $x(p)$ — вектор изображений по Лапласу входных, $y(p)$ — выходных сигналов, а $K(p)$ — передаточная матрица, то

$$y(p) = K(p)x(p).$$

В случае дискретной системы связь дискретных значений входного и выходного сигналов устанавливается с помощью *дискретной передаточной матрицы* или матрицы весовых функций. Отметим, что для дискретных систем в понятие «объект» включаются характеристики формоим-

пульсных (декодирующих) устройств, т. е. объектом называется вся заданная приведенная непрерывная часть системы (ПНЧ). Для исследования дискретных систем используется аппарат z -преобразования (дискретного преобразования Лапласа с обозначением $z = e^{pT}$). Связь между изображениями дискретных значений входных и выходных сигналов дается соотношением

$$y(z) = K(z)x(z),$$

где $K(z)$ — дискретная передаточная матрица.

Все вопросы, связанные с математическим обоснованием введения тех или иных характеристик линейных систем, и смысл вводимых характеристик подробно обсуждаются ниже. В теории дискретных систем существенную роль играет рассмотрение дискретных передаточных матриц как функций комплексной переменной z . При этом имеют значение такие элементы комплексной плоскости, как окружность единичного радиуса с центром в начале координат и области внутри и вне этой окружности. Имея это в виду, введем специальные обозначения: Γ — окружность единичного радиуса плоскости z с центром в начале координат, Γ^+ — область внутри контура Γ , Γ^- — область вне контура Γ (рис. В. 8).

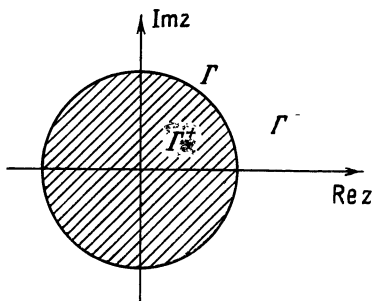


Рис. В. 8.

В тексте книги по мере возможности будем придерживаться следующих обозначений:

1. Прописные буквы без индексов и с индексами сверху — матрицы ($A, K, A^{11}, \Phi^2, \dots$).

2. Элементы матрицы — соответствующие строчные буквы с двумя индексами внизу (a_{ij} — элементы A , k_{ij} — элементы K).

3. Строчные латинские буквы без индексов и с индексами сверху — векторы или матрицы-столбцы (x, y, x^1, \dots).

4. Компоненты вектора — строчные буквы с одним индексом внизу ($x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ — компоненты x^1).

5. Строчные греческие буквы — скаляры ($\alpha, \varepsilon, \gamma, \dots$).

6. Единичная матрица обозначается $I_{n \times n}$ или просто I .

7. Нулевая матрица обозначается $O_{m \times n}$ или просто O .

8. i, j, k, l, m, n, r, N — в индексах целые числа.

Исключения составляют:

t, τ — время,

$D \equiv \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования,

p — переменная преобразования Лапласа,

$\zeta = e^{TD}$ — оператор опережения на такт,

$z = e^{pT}$ — переменная z -преобразования,

D_{e_i} — дисперсия ошибки e_i ,

$j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Функции времени, их преобразования по Лапласу и z -преобразования обозначаются одними и теми же буквами с указанием, когда это требуется, аргумента:

$$x(p) = L\{x(t)\},$$

$$x(z) = Z\{x(t)\} = Z\{x(p)\}.$$

Смысл тех или иных символов поясняется по мере их появления в тексте.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

§ 1.1. Характеристики «вход-выход»

Выходными координатами объекта и системы управления (выходом) будем называть совокупность параметров, которые регулируются в данной системе. По выходным переменным можно судить о работе системы (например, о правильности выполняемых операций, об ошибках и т. д.). Выход системы является совокупностью конкретных физических величин и может быть измерен с помощью соответствующих приборов. Объект управления по определению считается многомерным, если число его регулируемых (выходных) параметров превышает единицу. Система управления таким объектом называется многомерной. Понятие размерности системы управления тесно связано с ее функциональным назначением. Один и тот же объект в зависимости от задач, решаемых системой, может рассматриваться либо как одномерный, либо как многомерный. Так, например, если нас интересует только траектория движения самолета в вертикальной плоскости (скорость полета не регулируется), то единственной управляемой координатой является угол наклона траектории, а система управления одномерна. Если же необходимо управлять одновременно и скоростью полета, то соответствующую систему необходимо считать двумерной. Выходом многомерной системы является вектор, выходом одномерной — скаляр.

Входными воздействиями (входом) являются все внешние возмущения, приложенные к системе. К входным сигналам относятся задающие воздействия, нагрузки объекта, различные помехи. Так же как и выход системы — это конкретные физические величины (силы и моменты сил,

перемещения, напряжения переменного или постоянного тока и т. д.). Аналогичным образом определяются входные воздействия объекта. В дальнейшем понятие «вход» будет употребляться в более узком смысле. Будем считать входом объекта лишь часть входных координат — совокупность всех управляющих воздействий, относя все остальные входные сигналы (нагрузки и пр.) к помехам. Входом системы назовем совокупность (вектор) задающих воздействий, среди которых могут быть и нулевые.

Линеаризованные уравнения динамики объекта или системы с n входными и n выходными координатами в общем случае могут быть записаны в виде

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}(D)y_j(t) = \sum_{j=1}^n p_{ij}(D)r_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $r_j(t)$ — входы; $y_j(t)$ — выходы, а $p_{ij}(D)$ и $q_{ij}(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D \equiv \frac{d}{dt}$. Пере-

ходя к векторно-матричным обозначениям $r(t) = \|r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)\|'$, $y(t) = \|y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\|'$, $Q(D) = \|q_{ij}(D)\|_1^n$, $P(D) = \|p_{ij}(D)\|_1^n$, можно переписать эти уравнения в более компактной форме:

$$Q(D)y(t) = P(D)r(t). \quad (1.1)$$

Дифференциальные уравнения (1.1) могут быть получены в результате теоретического рассмотрения и позволяют полностью описать свойства системы «вход — выход». Запись уравнений в форме (1.1) предполагает, что все промежуточные переменные, появляющиеся при выводе, исключены.

Хотя для исследования свойств системы управления и рассмотрения многих задач анализа и синтеза не возникает потребности в решении уравнений ее движения, однако для понимания последующих результатов необходимо отчетливо представлять связь входа и выхода системы, определяемую дифференциальными уравнениями. Остановимся поэтому коротко на получении решения системы

(1.1). Будем предполагать при этом, что система (1.1) неособая, т. е. что определитель матрицы $Q(\lambda)$ не равен тождественно нулю.

Общее решение системы может быть представлено в виде суммы частного решения исходной неоднородной системы $y^*(t)$ и общего решения $y^{**}(t)$ соответствующей однородной [37]

$$Q(D)y(t) = 0. \quad (1.2)$$

Рассмотрим первоначально систему (1.2), частное решение которой ищется в виде

$$y(t) = ce^{\lambda t}, \quad (1.3)$$

где $c = \|c_1, c_2, \dots, c_n\|'$ — вектор неопределенных постоянных. Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая, что скалярный множитель $e^{\lambda t}$ не равен тождественно нулю, получаем систему n алгебраических уравнений относительно c_1, c_2, \dots, c_n с коэффициентами, зависящими от λ :

$$Q(\lambda)c = 0. \quad (1.4)$$

Система (1.4) имеет решения, отличные от тривиального $c = 0$, только в случае, если параметр λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$|Q(\lambda)| = 0. \quad (1.5)$$

Раскрывая определитель (1.5), получаем алгебраическое уравнение относительно λ , степень которого N определяет порядок системы (1.1) — (1.2):

$$|Q(\lambda)| = a_0\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0. \quad (1.6)$$

Будем считать, что порядок системы N равен сумме порядков по каждой из выходных координат

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_n,$$

где N_j — порядок системы по переменной y_j [37].

Остановимся на простейшем случае, когда все N корней уравнения (1.6) (вещественные или попарно комплексно-сопряженные) различны и равны $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Тогда ранг каждой матрицы $Q(\lambda_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) равен $n - 1$, и, решая систему (1.4), можно выразить компоненты вектора c^j через одну, например первую. Таким образом, вектор c^j , соответствующий собственному значению λ_j

матрицы $Q(\lambda)$, определяется в этом случае с точностью до скалярного множителя c_1^j

$$c^j = c_1^j \|1, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j\|'. \quad (1.7)$$

Обозначив через $Q_{ij}(\lambda)$ алгебраическое дополнение элемента $q_{ij}(\lambda)$ матрицы $Q(\lambda)$, получим для коэффициентов β_i^j соотношения

$$\beta_i^j = \frac{Q_{1i}(\lambda_j)}{Q_{11}(\lambda_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.8)$$

Общее решение однородной системы представляет собой сумму линейно независимых частных решений (1.3)

$$y^{**}(t) = \sum_{j=1}^N c^j e^{\lambda_j t} \quad (1.9)$$

и включает N произвольных постоянных $c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^N$. Методы нахождения общего решения однородной системы (1.2) в более сложных случаях, соответствующих кратным корням характеристического уравнения, рассмотрены в приложении II.

Обратимся к определению $y^*(t)$. Частным решением системы дифференциальных уравнений может служить любая векторная функция времени $y^*(t) = \|y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_n^*(t)\|'$, обращающая (1.1) в тождество. Известны различные способы отыскания частного решения. Метод неопределенных коэффициентов позволяет получить решение для заданного вида правой части, когда компоненты $r(t)$ являются полиномами от t , умноженными на линейные комбинации экспоненциальных функций. Для дальнейших целей удобнее записать частное решение в форме, не зависящей от конкретной реализации $r(t)$. Пользуясь принципом суперпозиции, справедливым для линейных систем, представим $y^*(t)$ в форме интеграла [38]

$$y^*(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) r(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

где $G(t, \tau) = \|g_{ij}(t, \tau)\|_1^n$ — матрица некоторых функций.

Для выяснения смысла функций $g_{ij}(t, \tau)$ воспользуемся понятием δ -функции. Импульсная δ -функция Дирака определяется соотношениями

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0 \\ \infty & \text{при } t = t_0, \end{cases}$$

причем при любом положительном ε

$$\int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Эти свойства δ -функции обеспечивают для непрерывной функции $u(t)$ выполнение равенств

$$\int_a^b u(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau = \int_a^b u(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = u(t_0),$$

$$\int_a^b u(\tau) \delta^{(k)}(t_0 - \tau) d\tau = (-1)^k \int_a^b u(\tau) \delta^{(k)}(\tau - t_0) d\tau = u^{(k)}(t_0),$$

где $a < t_0 < b$, а $\delta^{(k)}(t)$ — производная k -го порядка от $\delta(t)$.

Пусть l -й входной сигнал $r_l(t)$ равен импульсной δ -функции $\delta(t - t_0)$, а остальные входы равны нулю:

$$r_k(t) = \delta_{kl} \delta(t - t_0), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

где δ_{kl} — символ Кронекера,

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Подставляя (1.11) в (1.10) и производя интегрирование, в силу свойств δ -функций получаем:

$$y^{*l}(t) = \|g_{1l}(t, t_0), g_{2l}(t, t_0), \dots, g_{nl}(t, t_0)\|'. \quad (1.12)$$

Таким образом, l -й столбец матрицы $G(t, \tau)$ есть не что иное, как частное решение неоднородной системы (1.1) при воздействии на l -й вход функции $\delta(t - \tau)$ и при всех остальных входах, равных нулю.

Любое частное решение системы дифференциальных уравнений можно рассматривать как общее решение при определенных начальных условиях. Многообразие частных решений неоднородной системы полностью определяется многообразием возможных начальных условий. Поэтому матрица $G(t, \tau)$ не единственна. Из соотношения (1.10) следует, что при $t = t_0$ $y^*(t_0) = 0$. Однако производные от составляющих $y^*(t)$ в начальный момент времени могут принимать произвольные значения. Для того чтобы определить $G(t, \tau)$ единственным образом, необходимо задать дополнительно начальные условия по производным от всех выходных переменных $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) до $(N_i - 1)$ -го порядка.

В теории автоматического управления широко используется понятие реакции линейной системы на импульсную δ -функцию Дирака при нулевых начальных условиях. Эта реакция называется весовой функцией. Будем поэтому в дальнейшем понимать под матрицей $G(t, \tau)$ именно такую матрицу, которая определяет частное решение $y^*(t)$ (1.10), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Эту единственную матрицу $G(t, \tau)$ будем называть *весовой*.

Таким образом, l -й столбец матрицы $G(t, \tau)$ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}(D) g_{jl}(t, \tau) = p_{il}(D) \delta(t - \tau), \quad (1.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

при нулевых начальных условиях. При этом под начальными условиями необходимо понимать значения выходных координат и их соответствующих производных до момента приложения внешнего воздействия, т. е. при $t = \tau - 0$. В момент приложения δ -функции эти величины могут претерпевать разрыв. При определении весовой матрицы предполагается поэтому, что система находилась в покое до момента подачи воздействия, т. е. при $t = \tau - 0$.

Вследствие стационарности системы (1.13) $G(t, \tau)$ зависит лишь от интервала времени между моментом приложения импульса τ и текущим моментом времени t , т. е. от разности аргументов $t - \tau$. Элементы матрицы G являются

функциями от $t - \tau$:

$$G(t, \tau) = G(t - \tau). \quad (1.14)$$

Общее решение исходной системы дифференциальных уравнений (1.1) можно записать в виде

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t - \tau)r(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^N c^j e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (1.15)$$

где

$$c^j = c_1^j \|1, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j\|'.$$

Произвольные постоянные c_1^j , число которых равно порядку системы N , определяются по начальным условиям для выходных координат $y_i(t)$ и их производных. При нулевых начальных условиях в силу определения весовой матрицы все $c_1^j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$).

Таким образом, реакция системы на произвольное внешнее воздействие в общем случае состоит из двух составляющих. Первое слагаемое в соотношении (1.15) — вынужденная составляющая движения — полностью определяется характером внешнего воздействия и не зависит

от начальных условий. Второе слагаемое, $\sum_{j=1}^N c^j e^{\lambda_j(t-t_0)}$, оп-

ределяет свободное движение, вызванное ненулевыми начальными условиями и не зависящее от внешнего воздействия. Выходная координата системы $y(t)$ при нулевых начальных условиях равна

$$y(t) = y^*(t) = \int_{t_0}^t G(t - \tau)r(\tau)d\tau. \quad (1.16)$$

Возвращаясь к смыслу весовой матрицы, можно утверждать, что для любой реальной системы $G(t - \tau)$ удовлетворяет условию

$$G(t - \tau) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \tau > t. \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) отражает тот факт, что движение системы не может предшествовать причине, его вызывающей;

это соотношение называется обычно условием физической реализуемости. Принимая во внимание (1.17) и полагая $t_0 = 0$, перепишем (1.16) в виде

$$y(t) = \int_0^{\infty} G(t - \tau)r(\tau) d\tau. \quad (1.18)$$

Введем понятие *передаточной матрицы системы*. Для этого перейдем в (1.18) к изображениям по Лапласу

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^{\infty} G(t - \tau)r(\tau) d\tau. \quad (1.19)$$

Изменяя в правой части порядок интегрирования, находим связь между изображениями входных и выходных координат

$$y(p) = G(p)r(p), \quad (1.20)$$

где $y(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}y(t) dt$ и $r(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}r(t) dt$ — изобра-

жения выхода и входа системы, а $G(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}G(t) dt$ —

передаточная матрица. Передаточная матрица $G(p)$ существует, если элементы весовой матрицы $g_{ij}(t)$ удовлетворяют обычным условиям существования преобразования Лапласа. В случае линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, элементы $G(p)$ являются рациональными функциями комплексного переменного p . Для большинства реальных устройств $g_{ij}(p)$ являются правильными дробями.

Матрица $G(p)$ может быть определена непосредственно по уравнениям. Записывая (1.1) в операционном виде при нулевых начальных условиях

$$Q(p)y(p) = P(p)r(p) \quad (1.21)$$

и умножая слева на матрицу $Q^{-1}(p)$, получим:

$$y(p) = Q^{-1}(p)P(p)r(p). \quad (1.22)$$

Сравнивая (1.22) с (1.20), находим:

$$G(p) = Q^{-1}(p)P(p) = \frac{1}{|Q(p)|} \tilde{Q}(p)P(p), \quad (1.23)$$

где $\tilde{Q}(p) = \|Q_{ji}(p)\|_1^n$ — присоединенная матрица для матрицы Q .

Очевидно, что между весовой и передаточной матрицами существует взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое преобразованием Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} G(p) &= \mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^{\infty} G(t)e^{-pt}dt, \\ G(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(p)e^{pt}dp, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

где σ — абсцисса сходимости интеграла.

Подводя итоги, отметим, что связь «вход — выход» для линейной системы, описываемой уравнениями (1.1), определяется весовой или передаточной матрицей. Передаточная и весовая матрицы являются исчерпывающими характеристиками системы для определения ее реакции при нулевых начальных условиях.

Пример 1.1. Пусть уравнения непрерывной системы с двумя входными и двумя выходными координатами имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (D + a_{11})y_1 + a_{12}y_2 &= k_{11}r_1 + k_{12}r_2, \\ a_{21}y_1 + (D + a_{22})y_2 &= k_{21}r_1 + k_{22}r_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

или в матричной форме

$$Q(D)y = Pr, \quad (1.26)$$

где

$$Q(D) = \left\| \begin{array}{cc} D + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & D + a_{22} \end{array} \right\|, \quad P = \left\| \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right\|. \quad (1.27)$$

Передаточная матрица определяется выражением

$$G(p) = Q^{-1}(p)P = \frac{1}{|Q(p)|} R(p). \quad (1.28)$$

После простых преобразований получим:

$$|Q(p)| = p^2 + (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}),$$

$$R(p) = \left\| \begin{array}{cc} k_{11}(p + a_{22}) - a_{12}k_{21} & k_{12}(p + a_{22}) - a_{12}k_{22} \\ -k_{11}a_{21} + k_{21}(p + a_{11}) & -k_{12}a_{21} + k_{22}(p + a_{11}) \end{array} \right\|. \quad (1.29)$$

Очевидно, что все элементы полученной рациональной передаточной матрицы $G(p)$ имеют одинаковые полюсы, совпадающие с нулями характеристического определителя системы

$$G(p) = \left\| \frac{k_{11}(p + a_{22}) - a_{12}k_{21}}{p^2 + (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \frac{k_{12}(p + a_{22}) - a_{12}k_{22}}{p^2 + (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right\|$$

$$= \left\| \frac{-k_{11}a_{21} + k_{21}(p + a_{11})}{p^2 + (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \frac{-k_{12}a_{21} + k_{22}(p + a_{11})}{p^2 + (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right\|.$$

Следующий пример иллюстрирует ситуацию, когда полюсы элементов передаточной матрицы различны.

Пример 1.2. Уравнения двумерного объекта управления в общем случае можно записать в виде

$$\left. \begin{array}{l} q_{11}(D)y_1 + q_{12}(D)y_2 = p_{11}(D)u_1 + p_{12}(D)u_2, \\ q_{21}(D)y_1 + q_{22}(D)y_2 = p_{21}(D)u_1 + p_{22}(D)u_2. \end{array} \right\} (1.30)$$

Пусть управление объектом осуществляется с помощью усилительно-исполнительных устройств, описываемых дифференциальными уравнениями вида

$$\left. \begin{array}{l} m_1(D)u_1 = n_1(D)r_1, \\ m_2(D)u_2 = n_2(D)r_2. \end{array} \right\} (1.31)$$

Исключая промежуточные координаты u_1 и u_2 , перепишем

уравнения системы в форме (1.1)

$$\left. \begin{aligned} m_1(D)m_2(D)q_{11}(D)y_1 + m_1(D)m_2(D)q_{12}(D)y_2 &= \\ = m_2(D)n_1(D)p_{11}(D)r_1 + m_1(D)n_2(D)p_{12}(D)r_2, \\ m_1(D)m_2(D)q_{21}(D)y_1 + m_1(D)m_2(D)q_{22}(D)y_2 &= \\ = m_2(D)n_1(D)p_{21}(D)r_1 + m_1(D)n_2(D)p_{22}(D)r_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Несложные алгебраические преобразования приводят к следующей передаточной матрице:

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{|Q|m_1m_2} \times \\ &\times \left\| \begin{array}{cc} n_1m_2(p_{11}q_{22} - q_{12}p_{21}) & n_2m_1(q_{22}p_{12} - q_{12}p_{22}) \\ n_1m_2(-q_{21}p_{11} + q_{11}p_{21}) & n_2m_1(-q_{21}p_{12} + q_{11}p_{22}) \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{n_1(q_{22}p_{11} - q_{12}p_{21})}{m_1|Q|} & \frac{n_2(q_{22}p_{12} - q_{12}p_{22})}{m_2|Q|} \\ \frac{n_1(-q_{21}p_{11} + q_{11}p_{21})}{m_1|Q|} & \frac{n_2(-q_{21}p_{12} + q_{11}p_{22})}{m_2|Q|} \end{array} \right\|, \quad (1.33) \end{aligned}$$

где для сокращения записи аргумент p опущен, а $|Q| = q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}$. Полюсы элементов передаточной матрицы, расположенных в одном столбце, одинаковы. Разные столбцы имеют в общем случае различные полюсы. Этот факт связан с различием характеристик усилительно-исполнительных устройств, действующих на первый и второй входы объекта. Если система уравнений описывает свойства некоторого многомерного объекта, полюсы всех элементов его передаточной матрицы обычно одинаковы и равны нулям характеристического полинома. Возможное различие полюсов связано либо с распадением уравнений объекта на несвязанные группы уравнений, либо с различием характеристик входных (усилительно-исполнительных) и выходных (измерительных) устройств отдельных каналов.

Пример 1.3. Рассмотрим движение самолета в продольной плоскости. Линеаризованные уравнения самолета, как объекта управления, приведены во введении. Исключая переменные θ и α , получим систему уравнений в форме (1.1), связывающей непосредственно входные переменные (отклонения тяги δ_p и руля высоты δ_B) и выходные (отклонение скорости полета v и угла тангажа ϑ):

$$\left. \begin{aligned} [(D + n_{11})(D + n_{22}) + n_{12}n_{21}]v + [(D + n_{22})n_{13} + \\ + (D + n_{23})n_{12}]\vartheta &= (D + n_{22})n_p\delta_p, \\ [(D + n_{11})(n_0D + n_{32}) - n_{12}n_{31}]v - [(D^2 + \\ + n_{33}D)n_{12} - n_{13}(n_0D) + n_{32}]\vartheta &= \\ &= (n_0D + n_{32})n_p\delta_p - n_{12}n_B\delta_B. \end{aligned} \right\} (1.34)$$

Сопоставляя (1.34) с (1.1), получаем:

$$y = \begin{Bmatrix} v \\ \vartheta \end{Bmatrix}, \quad r = \begin{Bmatrix} \delta_p \\ \delta_B \end{Bmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} Q(D) &= \\ &= \begin{Bmatrix} (D+n_{11})(D+n_{22})+n_{12}n_{21} & (D+n_{22})n_{13}+(D+n_{23})n_{12} \\ (D+n_{11})(n_0D+n_{31})-n_{12}n_{31} & -(D^2+n_{33}D)n_{12}+n_{13}(n_0D+n_{32}) \end{Bmatrix} \\ P(D) &= \begin{Bmatrix} (D+n_{22})n_p & 0 \\ (n_0D+n_{32})n_p & -n_{12}n_B \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Передаточная матрица объекта

$$G(p) = Q^{-1}(p)P(p) = \frac{1}{|Q(p)|} \tilde{Q}(p)P(p) = \frac{1}{|Q(p)|} R(p), \quad (1.37)$$

где $R(p)$ — полиномиальная матрица. Элементы $G(p)$, являющиеся рациональными функциями p , определяются как

$$g_{ij}(p) = \frac{r_{ij}(p)}{|Q(p)|}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.38)$$

Произведя соответствующие действия для (1.38), получим:

$$\left. \begin{aligned} |Q(p)| &= p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + c_3 p + c_4, \\ r_{11}(p) &= n_p(p^3 + b_{1v} p^2 + b_{2v} p), \\ r_{12}(p) &= n_B(c_{0v} p + c_{1v}), \\ r_{21}(p) &= n_p(b_{0\theta} p + b_{1\theta}), \\ r_{22}(p) &= n_B(p^2 + c_{1\theta} p + c_{2\theta}), \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= n_0 + n_{11} + n_{22} + n_{33}, \\ c_2 &= n_{41}(n_0 + n_{22} + n_{33}) + n_{33}(n_0 + n_{22}) + n_{32} + \\ &\quad + n_{42} n_{21}, \\ c_3 &= n_{41}(n_{32} + n_{22} n_{33}) + n_{21}(n_0 n_{43} + n_{42} n_{33}) - \\ &\quad - n_{31}(n_{42} + n_{43}), \\ c_4 &= -n_{13}(n_{21} n_{32} + n_{31} n_{22}), \\ b_{1v} &= n_0 + n_{22} + n_{33}, \quad c_{0v} = n_{12} + n_{13}, \\ b_{2v} &= n_{32} + n_{22} n_{33}, \quad c_{1v} = n_{13} n_{22}, \\ b_{0\theta} &= n_0 n_{21} + n_{31}, \quad c_{1\theta} = n_{41} + n_{22}, \\ b_{1\theta} &= n_{21} n_{32} + n_{31} n_{22}, \quad c_{2\theta} = n_{41} n_{22} + n_{42} n_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

§ 1.2. Пространство состояний и характеристики непрерывных систем

Имеются два различных пути описания работы динамической системы. Один из них приведен в предыдущем параграфе и основан на рассмотрении характеристик системы «вход — выход» — передаточной и весовой матрицы. Другой подход связан с описанием поведения системы в абстрактном линейном пространстве состояний (фазовом пространстве). Последний путь оказывается чрезвычайно плодотворным при исследовании свойств линейных систем, так как описание в терминах пространства состояний в ряде случаев более полно, чем описание характеристиками «вход — выход» [63, 68]. В следующем параграфе будет показано, что соотношения «вход — выход» определяют лишь одну часть системы, а именно, полностью управляемую и наблюдаемую часть.

Под состоянием системы будем понимать совокупность величин, полностью определяющих ее положение в данный момент времени. Состояние системы играет роль начальных условий для всего будущего движения. Так, например, для совокупности материальных точек состояние — это значения координат и скоростей всех точек в данный момент времени, для системы, описываемой уравнениями (1.1), — это значения выходных координат y_j и их производных до порядка $N_j - 1$. Коротко говоря, состояние системы — это минимальная информация об истории системы, достаточная для того, чтобы предсказать влияние прошлого на будущее.

Будем определять состояние системы вектором x с компонентами x_1, x_2, \dots, x_N . Множество этих векторов составляет пространство состояний (фазовое пространство), которое может рассматриваться как абстрактное линейное N -мерное пространство. Совокупность N линейно независимых векторов в этом пространстве образует базис. Каждая компонента x является проекцией вектора состояния на соответствующий вектор базиса.

Уравнения движения линейной системы (1.1) можно привести к такому виду, в котором каждое из уравнений имеет первый порядок:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Br, \\ y &= Cx, \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

где вход r и выход y системы представляют собой n -мерные векторы, $r = \|r_1, r_2, \dots, r_n\|'$, $y = \|y_1, y_2, \dots, y_n\|'$, а размерность вектора x совпадает с порядком системы N , $x = \|x_1, x_2, \dots, x_N\|'$. Числовые матрицы A , B и C имеют соответственно размеры $N \times N$, $N \times n$ и $n \times N$. Запись уравнений движения в форме (1.41) позволяет непосредственно исследовать свойства системы в фазовом пространстве.

Существенным для дальнейшего является принципиальное различие, вкладываемое в содержание таких понятий, как векторы входа и выхода и вектор состояний. Как отмечалось ранее, все составляющие векторов входа r и выхода y являются конкретными физическими величинами. Вектор же состояния x может рассматриваться как некоторая абстрактная характеристика системы. Физическая

природа фазовых координат не является существенной. Координаты x_j зависят от выбора базиса N -мерного линейного пространства состояний.

Изменение базиса с помощью неособого преобразования

$$\tilde{x} = Tx, \quad |T| \neq 0, \quad (1.42)$$

соответствует переходу к новым фазовым координатам \tilde{x}_j . В (1.42) $T = \|t_{ij}\|_1^N$ — неособая квадратная матрица порядка N . Неособенность преобразования (1.42) означает, что между старыми (x_1, x_2, \dots, x_N) и новыми $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ переменными существует взаимно однозначное соответствие, так что

$$x = T^{-1}\tilde{x}. \quad (1.43)$$

Производя в уравнениях (1.41) замену переменных, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

где новые матрицы \tilde{A} , \tilde{B} и \tilde{C} связаны с матрицами A , B и C соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1}, \\ \tilde{B} &= TB, \\ \tilde{C} &= CT^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Система уравнений (1.44) при условиях (1.42) и (1.45) эквивалентна исходной системе (1.41). Переход к новому базису не отражается на входных r и выходных y координатах, описывающих изменение конкретных физических величин.

Для получения общего решения системы (1.41) воспользуемся понятием фундаментальной матрицы. Рассмотрим для этого однородную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (1.46)$$

Общее решение последней содержит N произвольных постоянных. В случае простых собственных значений

матрицы A это общее решение имеет вид

$$x(t, t_0) = \sum_{i=1}^N c^i e^{\lambda_i(t-t_0)}, \quad (1.47)$$

где каждый вектор c^i определен с точностью до произвольного множителя, а λ_i — корни характеристического определителя $|I\lambda - A|$. Связь между компонентами вектора c^i дается соотношениями, полностью аналогичными (1.7—1.8).

Выберем j -е частное решение $x^j(t, t_0) = \|x_1^j(t, t_0), x_2^j(t, t_0), \dots, x_N^j(t, t_0)\|'$, подчинив N произвольных постоянных общего решения условиям

$$x_i^j(t_0, t_0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.48)$$

Очевидно, что существует N таких частных решений, $j = 1, 2, \dots, N$. В общей теории линейных дифференциальных уравнений [37] показывается, что все эти частные решения линейно независимы. Матрица, составленная из этих решений таким образом, что $x^j(t, t_0)$ образует j -й столбец, называется фундаментальной матрицей для системы (1.46):

$$X(t, t_0) = \|x^1(t, t_0), x^2(t, t_0), \dots, x^N(t, t_0)\|. \quad (1.49)$$

По определению матрицы X

$$X(t_0, t_0) = I. \quad (1.50)$$

Поэтому общее решение однородной системы (1.46), удовлетворяющее произвольным начальным условиям

$$x(t_0) = x^0,$$

имеет вид

$$x(t) = X(t, t_0)x^0. \quad (1.51)$$

Общее решение неоднородной системы (1.44) может быть получено методом вариаций произвольных постоянных и записано в форме

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)Br(\tau) d\tau. \quad (1.52)$$

Очевидно, что выход системы $y(t)$ равен вектору (1.52), умноженному слева на матрицу C , так что

$$y(t) = CX(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t CX(t, \tau)Br(\tau) d\tau. \quad (1.53)$$

Вследствие стационарности системы фундаментальная матрица X является функцией от разности своих аргументов:

$$X(t, \tau) = X(t - \tau). \quad (1.54)$$

Воспользовавшись понятием функции от матрицы, можно записать фундаментальную матрицу в виде матричной экспоненциальной функции [10]

$$X(t - \tau) = e^{A(t-\tau)},$$

где A — матрица коэффициентов уравнения (1.46). Функция от матрицы e^{At} определяется либо в форме ряда

$$e^{At} = I + At + \frac{t^2}{2!}(A)^2 + \frac{t^3}{3!}(A)^3 + \dots,$$

либо с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа — Сильвестра [10].

Сопоставим характеристики линейных систем, введенные в настоящем и предшествующем параграфах. Пусть уравнения (1.1) и (1.41) описывают динамику одной и той же системы. При нулевых начальных условиях (1.53) принимает вид

$$y(t) = \int_{t_0}^t CX(t - \tau)Br(\tau) d\tau. \quad (1.55)$$

Сравнивая последнее соотношение с (1.16) и учитывая условие физической реализуемости, получаем связь между весовой и фундаментальной матрицами системы

$$G(t) = \begin{cases} CX(t)B & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Эта формула однозначно определяет весовую матрицу системы $G(t)$ по известной фундаментальной матрице

$X(t)$. Обратная операция нахождения фундаментальной матрицы по заданной весовой не является столь тривиальной и, как показано ниже, вообще говоря, неоднозначна.

Можно также установить соответствие между передаточной матрицей $G(p)$ и коэффициентами уравнения (1.41). Переходя в (1.41) к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, получаем:

$$G(p) = C(Ip - A)^{-1}B. \quad (1.57)$$

Относительно (1.57) можно повторить все сказанное по поводу формулы (1.56). Передаточная матрица определяется по коэффициентам уравнения (1.41) единственным образом. Вопрос получения уравнений (1.41) по передаточной матрице $G(p)$ не является столь простым и будет рассмотрен далее. Нетрудно убедиться в том, что элементы передаточной матрицы $G(p)$ всегда имеют вид правильных рациональных (относительно аргумента p) дробей.

Покажем, что матрица $G(p)$ не зависит от выбора базиса (передаточные матрицы эквивалентных систем совпадают). Из (1.44) и (1.45) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p) &= \tilde{C}(Ip - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = CT^{-1}(Ip - TAT^{-1})^{-1}TB = \\ &= CT^{-1}(TT^{-1}Ip - TAT^{-1})^{-1}TB = C(Ip - A)^{-1}B = G(p). \end{aligned}$$

Обратимся к вопросу о том, каким образом от уравнений, заданных в форме (1.1), перейти к описанию динамики системы в фазовом пространстве. Отметим, что этот переход не является однозначным в силу указанной выше произвольности выбора базиса пространства состояний.

Перепишем уравнения (1.1) в следующей форме:

$$\begin{aligned} (Q^0D^v + Q^1D^{v-1} + \dots + Q^{v-1}D + Q^v)y &= \\ &= (P^1D^{v-1} + P^2D^{v-2} + \dots + P^v)r(t), \end{aligned} \quad (1.58)$$

где

$$Q_l = \|q_{ij}^l\|_1^n \quad (l = 0, 1, 2, \dots, v), \quad P^k = \|p_{ij}^k\|_1^n \\ (k = 1, 2, \dots, v)$$

— квадратные матрицы коэффициентов, имеющие размеры $n \times n$, а $v = \max_k \{N_l\}$ — наибольший из порядков

где через $y^{(l)}$ обозначена l -я производная от вектора y , $y^{(l)} = D^l y$. Последние соотношения устанавливают связь между новыми (фазовыми) переменными и старыми (y и его производными).

Матрица перехода к новым переменным F имеет вид квазитреугольной:

$$F = \begin{pmatrix} Q^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q^1 & Q^0 & 0 & \dots & 0 \\ Q^2 & Q^1 & Q^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q^{v-1} & Q^{v-2} & Q^{v-3} & \dots & Q^0 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Введя векторы

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^v \\ x^{v-1} \\ \vdots \\ x^1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(v-1)} \end{pmatrix},$$

перепишем (1.61) в виде

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{y}. \quad (1.63)$$

В случае, если матрица Q^0 неособая, размерность вектора \hat{y} равна порядку системы $N = nv$. Так как при этом и матрица F неособая

$$(|F| = |Q^0|^v \neq 0),$$

то размерность фазового пространства X также равна nv . Соотношения (1.61) с учетом уравнения (1.60) нетрудно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} x^v &= Q^0 y, \\ x^{v-1} &= Q^1 y + \dot{x}^v, \\ x^{v-2} &= Q^2 y + \dot{x}^{v-1}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^1 &= Q^{v-1} y + \dot{x}^2, \\ 0 &= Q^v y + \dot{x}^1 - r. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Находя из первого уравнения (1.64) вектор y и подставляя его во все остальные, приходим к системе уравнений в форме (1.41)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^1 &= -Q^v(Q^0)^{-1}x^v + r, \\ \dot{x}^2 &= x^1 - Q^{v-1}(Q^0)^{-1}x^v, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^v &= x^{v-1} - Q^1(Q^0)^{-1}x^v, \\ y &= (Q^0)^{-1}x^v. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

Сравнивая (1.41) и (1.65), окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} A &= \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -Q^v(Q^0)^{-1} \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & -Q^{v-1}(Q^0)^{-1} \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & -Q^{v-2}(Q^0)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & -Q^1(Q^0)^{-1} \end{array} \right\}, \\ B &= \left\| \begin{array}{c} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\|, C = \|0, 0, \dots, (Q^0)^{-1}\|. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

Очевидно, что система уравнений (1.65) эквивалентна исходной системе (1.60).

Отметим, что выражения (1.61) — (1.64) введены так, что они не зависят от предположения о вырожденности полинома $Q(D)$, а поэтому они без изменения могут быть использованы также и при $|Q^0| = 0$. Однако, в отличие от предыдущего случая, размерность вектора x , а с ней и порядок системы, в этом случае меньше nv . Можно показать, что она равна рангу матрицы F (1.62). Так, например, в случае, если $|Q^1| \neq 0$, а ранг матрицы Q^0 равен $r_0 < n$, то $N = (v-1)n + r_0$. Именно этому частному случаю и соответствует результат, приведенный в книге Р. Фрезера и др. [47], в общем случае неверный*). Если

*) На ошибку в определении порядка системы и в способе приведения системы (1.60) к форме уравнений первого порядка указано также в книге [4].

матрица Q^1 также вырождена, а $|Q^2| \neq 0$, то порядок системы уменьшается на число линейно зависимых строк (дефект) матриц Q^0 и $\|Q^0, Q^1\|$ и т. д. В общем случае можно утверждать, что $N = nv - d$, где d — дефект матрицы F , т. е. общее число ее линейно зависимых строк (или столбцов).

К сожалению, в рассматриваемом случае не удается в явной форме завершить переход к системе уравнений первого порядка, так как соотношения (1.65) теряют смысл при $|Q^0| = 0$. Однако в каждом конкретном случае задача довольно просто доводится до конца. Для этого необходимо последовательно решать уравнения (1.64), исключая переменные y_j с учетом свойств матриц Q^l . Подробности вычисления разъясняются на примерах, приведенных в конце параграфа.

Изложенный способ без особого труда обобщается на тот случай, когда правые части уравнений содержат дифференциальный оператор (уравнения (1.58)). Новые переменные вводим как

$$\left. \begin{aligned} x^v &= Q^0 y, \\ x^{v-1} &= Q^1 y + Q^0 \dot{y} - P^1 r, \\ x^{v-2} &= Q^2 y + Q^1 \dot{y} + Q^0 \ddot{y} - P^2 r - P^1 \dot{r}, \\ &\dots \\ x^1 &= Q^{v-1} y + Q^{v-2} \dot{y} + \dots + Q^0 y^{(v-1)} - \\ &\quad - P^{v-1} r - P^{v-2} \dot{r} - \dots - P^1 r^{(v-2)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Очевидно, что эти соотношения можно записать также в форме

$$\left. \begin{aligned} x^v &= Q^0 y, \\ x^{v-1} &= Q^1 y + \dot{x}^v - P^1 r, \\ x^{v-2} &= Q^2 y + \dot{x}^{v-1} - P^2 r, \\ &\dots \\ x^1 &= Q^{v-2} y + \dot{x}^2 - P^{v-1} r. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Исходное уравнение (1.58) с учетом последнего из соотношений (1.67) дает:

$$0 = Q^{\nu}y + \dot{x}^1 - P^{\nu}r. \quad (1.69)$$

Если матрица Q^0 неособая, то, исключая y из (1.68) и (1.69), приходим к системе (1.41), где матрицы A и C имеют тот же вид (1.66), что и ранее, а

$$B = \begin{Bmatrix} P^{\nu} \\ P^{\nu-1} \\ \vdots \\ P^1 \end{Bmatrix}. \quad (1.170)$$

Пусть $|Q^0| = 0$. Формулы (1.67) — (1.69) не теряют смысла и в этом случае. Размерность пространства состояний N (порядок системы) определяется рангом квадратной матрицы F (1.62), т. е. $N = n\nu - d$. Последовательно исключая переменные y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) из уравнений (1.68), (1.69), можно получить систему уравнений первого порядка, которая в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Br, \\ y &= Cx + Hr, \end{aligned} \quad (1.71)$$

где $x = \|x_1, x_2, \dots, x_N\|'$.

Последняя система отличается от (1.41) наличием во втором уравнении слагаемого Hr . Нетрудно убедиться, что передаточная матрица, соответствующая системе (1.71), содержит по крайней мере один элемент с равной степенью числителя и знаменателя, если не выполняется условие

$$H = 0. \quad (1.72)$$

Если ограничиться случаем систем, элементы передаточных матриц которых имеют степень числителей меньше степени знаменателей, то матрица H будет равна нулю.

Предлагаемый способ перехода от системы уравнений высокого порядка к большему числу уравнений первого порядка отличается от описанных в литературе [4, 37]. Существенно отметить, что изложенный метод дает решение задачи в случае, когда правые части уравнений (1.1)

содержат производные от входных сигналов. Применимость метода и способ вычислений не зависят от характера и расположения корней характеристического уравнения (1.6).

Для пояснения процедуры получения уравнений первого порядка в вырожденном случае рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.4.

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} D^3 + q_{11}^1 D^2 + q_{21}^3 D + q_{11}^3 \\ q_{21}^3 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right\| = \\ = \left\| \begin{array}{cc} D + p_{11} & D + p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Для этих уравнений имеем:

$$\begin{aligned} Q^0 &= \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad Q^1 = \left\| \begin{array}{cc} q_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad Q^2 = \left\| \begin{array}{cc} q_{11}^2 & q_{12}^2 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \\ Q^3 &= \left\| \begin{array}{cc} q_{11}^3 & q_{12}^3 \\ q_{21}^3 & q_{22}^3 \end{array} \right\|, \quad P^1 = 0, \quad P^2 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \\ P^3 &= \left\| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Из уравнений (1.68) и (1.69) в данном случае следует:

$$\begin{aligned} x_1^3 &= y_1, \quad x_2^3 = 0, \\ x_1^2 &= \dot{x}_1^3 + q_{11}^1 y_1, \quad x_2^2 = 0, \\ x_1^1 &= \dot{x}_1^2 + q_{11}^2 y_1 + q_{12}^2 y_2 - r_1 - r_2, \quad x_2^1 = y_2, \\ 0 &= \dot{x}_1^1 + q_{11}^3 y_1 + q_{12}^3 y_2 - p_{11} r_1 - p_{12} r_2, \\ 0 &= \dot{x}_2^1 + q_{21}^3 y_1 + q_{22}^3 y_2 - p_{21} r_1 - p_{22} r_2. \end{aligned}$$

Исключая y_1 и y_2 из дифференциальных уравнений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1^1 &= 0 - q_{12}^3 x_2^1 + 0 - q_{11}^3 x_1^3 + p_{11} r_1 + p_{12} r_2, \\ \dot{x}_2^1 &= 0 - q_{22}^3 x_2^1 + 0 - q_{21}^3 x_1^3 + p_{21} r_1 + p_{22} r_2, \\ \dot{x}_1^2 &= x_1^1 - q_{12}^2 x_2^1 + 0 - q_{11}^2 x_1^3 + r_1 + r_2, \\ \dot{x}_1^3 &= 0 + 0 + x_1^2 - q_{11}^1 x_1^3. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Выходные координаты связаны с переменными состояния выражениями

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1^3, \\ y_2 &= x_2^1. \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

Нетрудно проверить, что ранг матрицы

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{11}^1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{11}^2 & q_{12}^2 & q_{11}^1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

равен четырем, т. е. порядку системы (1.74).

Пример 1.5.

$$\left\| \begin{pmatrix} D^2 + q_{11}^1 D + q_{11}^2 & (D^2 + q_{22}^2) \\ (D^2 + q_{21}^2) & (D^2 + q_{22}^1 D + q_{22}^2) \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

т. е.

$$Q^0 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| (|Q^0| = 0), \quad Q^1 = \left\| \begin{array}{cc} q_{11}^1 & 0 \\ 0 & q_{22}^1 \end{array} \right\|,$$

$$Q^2 = \left\| \begin{array}{cc} q_{11}^2 & q_{12}^2 \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{array} \right\|$$

$$P^1 = 0, P^2 = 0.$$

Из системы (1.68) — (1.69) получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 &= y_1 + y_2, & x_2^2 &= y_1 + y_2, \\ x_1^1 &= \dot{x}_1^2 + q_{11}^1 y_1, & x_2^1 &= \dot{x}_2^2 + q_{22}^1 y_2, \\ 0 &= \dot{x}_1^1 + q_{11}^2 y_1 + q_{12}^2 y_2, \\ 0 &= \dot{x}_2^1 + q_{21}^2 y_1 + q_{22}^2 y_2. \end{aligned} \right\} (1.76)$$

Из первых двух уравнений (1.76) имеем:

$$x_1^2 = x_2^2 = y_1 + y_2.$$

Вычитая из третьего уравнения четвертое, получаем:

$$x_1^1 - x_2^1 = q_{11}^1 y_1 - q_{22}^1 y_2.$$

Из последних соотношений находим при $q_{11}^1 + q_{22}^1 \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^1 - \frac{1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_2^1 + \frac{q_{22}^1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_2^2 \\ y_2 &= -\frac{1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^1 + \frac{1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_2^1 + \frac{q_{11}^1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^2 \end{aligned} \right\} (1.77)$$

Подставляя (1.77) в дифференциальные уравнения,

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1^1 &= \frac{q_{12}^2 - q_{11}^2}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^1 + \frac{q_{11}^2 - q_{12}^2}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_2^1 - \\ &\quad - \frac{q_{22}^1 q_{11}^2 + q_{11}^1 q_{12}^2}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^2, \\ \dot{x}_2^1 &= \frac{q_{22}^2 - q_{21}^2}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^1 + \frac{q_{21}^2 - q_{22}^2}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_2^1 - \\ &\quad - \frac{q_{22}^1 q_{11}^2 + q_{11}^1 q_{22}^1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^2, \\ \dot{x}_1^2 &= \frac{q_{22}^1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^1 + \frac{q_{11}^1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_2^1 - \\ &\quad - \frac{q_{11}^1 q_{22}^1}{q_{11}^1 + q_{22}^1} x_1^2. \end{aligned} \right\} (1.78)$$

Нетрудно видеть, что ранг матрицы

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ q_{11}^1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & q_{22}^1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

при условии $q_{11}^1 + q_{22}^1 \neq 0$ равен трем, т. е. порядку системы (1.78).

Пример 1.6. Рассмотрим систему уравнений продольного движения самолета. Две формы записи этих уравнений приведены во введении и в § 1.1 (пример 1.3). Для целей приведения к системе уравнений первого порядка удобнее воспользоваться первой формой, где не исключены промежуточные переменные α и θ . Задача решается тогда чрезвычайно просто. Введем переменные состояния

$$x_1 = v, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}.$$

Кроме того, обозначим:

$$r_1 = \delta_p, \quad r_2 = \delta_v, \quad y_1 = v, \quad y_2 = \theta.$$

Тогда уравнения (В.3) переписутся в требуемой форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -n_{11}x_1 - n_{12}x_2 - n_{13}x_3 + n_{p1}, \\ \dot{x}_2 &= n_{21}x_1 - n_{22}x_2 + n_{23}x_3 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -(n_{31} + n_0n_{21})x_1 + (n_0n_{22} - n_{32})x_2 - \\ &\quad - n_0n_{23}x_3 - n_0 + n_{33})x_4 - n_{v2}, \\ y_1 &= x_1, \quad y_2 = x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.79)$$

§ 1.3. Управляемость и наблюдаемость многомерных систем

В предыдущих параграфах были рассмотрены два способа описания динамических свойств линейной непрерывной системы. Один из них — способ описания с помощью дифференциальных уравнений (в форме (1.1) или (1.41))

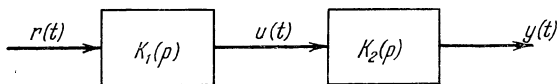


Рис. 1.1.

дает исчерпывающую информацию о характере поведения системы в любых условиях. В инженерной практике получил распространение второй способ — задание системы ее характеристиками «вход — выход» (передаточной или весовой матрицами). Очевидно, что в общем случае характеристики «вход — выход», по определению полученные при нулевых начальных условиях, могут не отражать некоторых динамических особенностей системы. Передаточная и весовая матрицы системы не являются ее исчерпывающими характеристиками.

Дифференциальные уравнения полностью определяют статические и динамические свойства системы. Поэтому естественно отождествить физическую систему с ее математической моделью, считая систему заданной, если имеются дифференциальные уравнения ее движения. Хотя весовая и передаточная матрицы определяются системой дифференциальных уравнений, эта связь не является взаимно однозначной: одни и те же весовые и передаточные матрицы могут соответствовать различным дифференци-

альным уравнениям. Простой пример пояснит смысл дальнейших построений. Одномерная система (рис. 1.1), состоящая из последовательно включенных звеньев

$$K_1(p) = \frac{p+a}{(p+b)(p+c)} \quad \text{и} \quad K_2(p) = \frac{1}{p+a},$$

имеет передаточную функцию

$$K(p) = K_1(p)K_2(p) = \frac{p+a}{(p+a)(p+b)(p+c)} \quad (1.80)$$

На первый взгляд может показаться, что общий множитель $p+a$ в числителе и знаменателе $K(p)$ можно сократить, без ущерба для описания системы. Очень часто именно так и поступают. В действительности же сокращения такого рода можно производить лишь при рассмотрении вынужденной составляющей движения, вызванной входным сигналом $r(t)$ при нулевых начальных условиях

$$y^*(t) = \int_{t_0}^t K(t-\tau)r(\tau)d\tau, \quad (1.81)$$

где

$$K(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(p)\} = \frac{1}{b-c} (e^{-ct} - e^{-bt}).$$

Если же для рассматриваемой схемы (рис. 1.1) записать систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (D+a)y - u &= 0, \\ (D+b)(D+c)u &= (D+a)r, \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

то легко убедиться в том, что характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = (\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c) \quad (1.83)$$

имеет три корня $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = -b$ и $\lambda_3 = -c$. Поэтому изменение выходного сигнала при произвольных начальных условиях описывается соотношением

$$y(t) = y^*(t) + c_1e^{-at} + c_2e^{-bt} + c_3e^{-ct}, \quad (1.84)$$

где $y^*(t)$ имеет вид (1.81). Если $a < 0$, а $\operatorname{Re} b > 0$ и $\operatorname{Res} > 0$, то система неустойчива, несмотря на то, что все полюсы $K(p)$ расположены слева от мнимой оси плоскости p (точка $p = -a$ не является полюсом $K(p)$).

Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что передаточная функция «вход — выход», описывающая поведение системы при нулевых начальных условиях, не является ее исчерпывающей характеристикой. Если система первоначально находилась в покое, то, подавая любые воздействия на вход системы, невозможно обнаружить в ней инерционное звено с передаточной функцией $\frac{1}{p+a}$.

Можно показать, что подобная ситуация встречается всюду, где происходит компенсация полюсов передаточных функций соответствующими нулями. Естественное приложение к исследованию таких систем находят понятия управляемости и наблюдаемости, введенные и развитые Р. Е. Калманом [15, 62, 63, 64]. Нетрудно показать, что схема рис. 1.1 является не полностью управляемой*).

Рассмотрение вопросов управляемости и наблюдаемости в системах управления проще всего производить, пользуясь описанием системы в терминах пространства состояний, т. е. записывая уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Br, \\ y &= Cx. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

Как уже упоминалось, выбор базиса в пространстве состояний является произвольным. Смена базиса

$$\tilde{x} = Tx, \quad |T| \neq 0 \quad (1.86)$$

приводит к эквивалентной системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

*) Появление неуправляемости и ненаблюдаемости системы, по-видимому, впервые было отмечено Е. Н. Розенwasserом [41].

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1}, \\ \tilde{B} &= TB, \\ \tilde{C} &= CT^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

Введение новых фазовых координат с помощью различных неособых преобразований (1.86) приводит к эквивалентным системам (1.87) различной структуры. При некотором базисе может оказаться, что матрицы \tilde{A} , \tilde{B} и \tilde{C} таковы, что часть входных сигналов r_j не входит в некоторые дифференциальные уравнения (1.87), либо часть фазовых координат x_i не участвует в формировании выхода y .

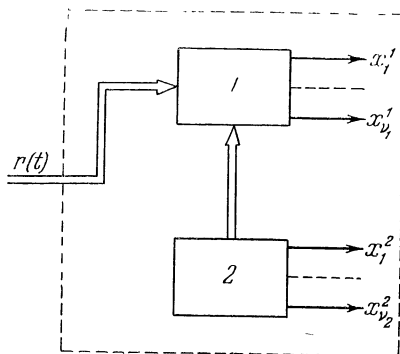


Рис. 1.2.

Появление неуправляемой и ненаблюдаемой частей системы связано со структурами матриц A , B и C . Введем определения, позволяющие строго подойти к рассматриваемым вопросам.

Определение 1. Система (1.85) называется полностью управляемой, если она не эквивалентна системе вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^1 &= A^{11}x^1 + A^{12}x^2 + B^1r, \\ \dot{x}^2 &= A^{22}x^2, \\ y &= C^1x^1 + C^2x^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

где размерность вектора x^1 равна ν_1 , а размерность x^2 равна $\nu_2 = N - \nu_1$. Другими словами, система является полностью управляемой, если нельзя указать такой базис, при котором уравнения (1.85) разбиваются на две группы, так что в уравнения второй группы не входят ни фазовые координаты первой группы, ни входные сигналы (рис. 1.2).

Из вида уравнений (1.89) очевидно, что все координаты x_j^2 ($j = 1, 2, \dots, \nu_2$) неуправляемы, так как на них не оказывает действия вход системы r ни непосредственно, ни через остальные координаты x_i^1 ($i = 1, 2, \dots, \nu_1$). Вектор

фазовых координат x и матрицы A , B и C при этом имеют клеточную структуру:

$$x = \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} B^1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$C = \|C^1, C^2\|, \quad (1.90)$$

где клетки A^{11} и A^{22} — квадратные матрицы размеров соответственно $\nu_1 \times \nu_1$ и $\nu_2 \times \nu_2$, а остальные матрицы прямоугольные:

$$A^{12} = \|a_{ij}^{12}\|_{\nu_1 \times \nu_2}, \quad B^1 = \|b_{ij}^1\|_{\nu_1 \times n},$$

$$C^1 = \|c_{ij}^1\|_{n \times \nu_1}, \quad C^2 = \|c_{ij}^2\|_{n \times \nu_2}.$$

Свойство управляемости системы определяется парой матриц A и B и не зависит от вида матрицы C .

О п р е д е л е н и е 2. Система (1.85) называется полностью наблюдаемой, если она не эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A^{11}x^1 + B^1r, \\ \dot{x}^2 &= A^{21}x^1 + A^{22}x^2 + B^2r, \\ y &= C^1x^1, \end{aligned} \quad (1.91)$$

где размерность вектора x^1 равна ν_1' , а размерность x^2 равна $\nu_2' = N - \nu_1'$. Другими словами, полностью наблюдаемой является система, для которой нельзя указать базис такой, чтобы фазовые координаты разбились на две группы, причем координаты второй группы x_j^2 не входят ни в уравнения для координат первой группы x_i^1 , ни в алгебраические соотношения для выходных переменных y (рис. 1.3).

Из вида уравнений очевидно, что координаты x_j^2 ($j = 1, 2, \dots, \nu_2'$) ненаблюдаемы, так как они не оказывают влияния на выход y ни непосредственно, ни через остальные координаты x_i^1 ($i = 1, 2, \dots, \nu_1'$). Матрицы A , B и C при этом имеют вид

$$A = \begin{Bmatrix} A^{11} & 0 \\ A^{21} & A^{22} \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{Bmatrix}, \quad C = \|C^1, 0\|, \quad (1.92)$$

где клетки A^{11} и A^{22} — квадратные размеров соответственно $\nu_1' \times \nu_1'$ и $\nu_2' \times \nu_2'$, а остальные клетки — прямоугольные:

$$A^{21} = \|a_{ij}^{21}\|_{\nu_2' \times \nu_1'}, \quad B^1 = \|b_{ij}^1\|_{\nu_1' \times n},$$

$$B^2 = \|b_{ij}^2\|_{\nu_2' \times n}, \quad C^1 = \|c_{ij}^1\|_{n \times \nu_1'}.$$

Свойство наблюдаемости системы определяется парой матриц A и C и не зависит от вида матрицы B .

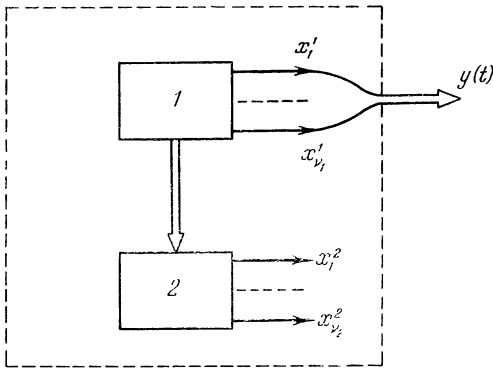


Рис. 1.3.

Для решения вопроса о том, является система полностью управляемой и наблюдаемой или нет, воспользоваться непосредственно определениями, приведенными выше, затруднительно. Ответ на этот вопрос дают критерии управляемости и наблюдаемости, позволяющие судить о свойствах системы без перехода к другим базисам на основе исходной формы записи уравнений (1.85).

Введем в рассмотрение матрицы AB , $A(AB) \cdot = (A)^2B$, ..., $(A)^{N-1}B$ и составим из этих матриц и матрицы B точечную матрицу

$$U = \|B, AB, (A)^2B, \dots, (A)^{N-1}B\|_{n \times nN}, \quad (1.93)$$

имеющую N строк и nN столбцов. Критерий управляемости формулируется следующим образом. Размерность ν_1 управ-

ляемой части равна рангу матрицы U [63]. Очевидно, что $\nu_1 \leq N$. Система является полностью управляемой, если дефект матрицы U равен нулю ($\nu_1 = N$).

Аналогичный критерий имеет место и для свойства наблюдаемости системы. Пусть C' и A' — транспонированные матрицы для матриц C и A . Размерность $\nu_1' \leq N$ наблюдаемой части системы (1.85) равна рангу матрицы

$$V = \|C', A'C', (A')^2C', \dots, (A')^{N-1}C'\|_{N \times nN}. \quad (1.94)$$

Система является полностью наблюдаемой, если дефект матрицы V равен нулю ($\nu_1' = N$). Доказательство этих результатов можно найти в работах Калмана и др. [64], а для одномерного случая, $n = 1$, — в работе Гальперина и Красовского [9].

Пример 1.7. Рассмотрим одномерную систему (рис. 1.1), описываемую уравнениями (1.82), о которой шла речь в начале параграфа, и докажем, что она действительно является неполностью управляемой. Приведем уравнения системы

$$\left. \begin{aligned} [D^2 + (b+c)D + bc]u &= (D+a)r, \\ (D+a)y - u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

к виду (1.85). Для этого воспользуемся методом, изложенным в § 1.2. Соотношения (1.68)–(1.69) для первого из уравнений (1.95) дают:

$$\begin{aligned} x_2 &= u, \\ x_1 &= (b+c)x_2 + \dot{x}_2 - r, \\ 0 &= bcx_2 + \dot{x}_1 - ar. \end{aligned}$$

Введем третью переменную $x_3 = u$ и получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 - bcx_2 + 0 + ar, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - (b+c)x_2 + 0 + r, \\ \dot{x}_3 &= 0 + x_2 - ax_3 + 0, \\ y &= x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.96)$$

По внешнему виду системы (1.96) нельзя ничего ска-

зять об управляемости системы. Для решения этого вопроса составим матрицу U . В соответствии с уравнениями (1.96)

$$B = \begin{vmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & -bc & 0 \\ 1 & -(b+c) & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix},$$

$$AB = \begin{vmatrix} -bc \\ a-b-c \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (A)^2B = \begin{vmatrix} bc(b+c-a) \\ -bc + (b+c)(b+c-a) \\ -(b+c) \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы U равен

$$|U| = \begin{vmatrix} a & -bc & bc(b+c-a) \\ 1 & a-b-c & -bc + (b+c)(b+c-a) \\ 0 & 1 & -(b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & -bc & bc(b+c-a) \\ 1 & 0 & -bc \\ 0 & 1 & -(b+c) \end{vmatrix} = 0.$$

В то же время матрица U имеет один из миноров второго порядка $U_{13} = 1 \neq 0$, так что ранг U равен двум. Это означает, что система (1.95) не полностью управляема и что порядок управляемой части равен двум. Эта система является полностью наблюдаемой, так как определитель матрицы

$$V = \|C', A'C', (A')^2C'\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - (a + \frac{1}{b+c} + c) \begin{vmatrix} 1 \\ a^2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Пример 1.8. Рассмотрим систему, составленную из последовательного соединения тех же звеньев, что и в примере 1.7, но соединенных в обратной последовательности (рис. 1.4). Уравнения системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (D+a)u &= r, \\ [D^2 + (b+c)D + bc]y - (D+a)u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Предлагается в качестве упражнения показать, что система (1.97) управляема, но не полностью наблюдаема и что размерность наблюдаемой части равна двум.

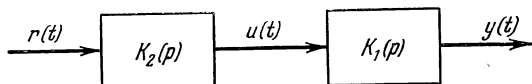


Рис. 1.4.

Для пояснения смысла понятий управляемости и наблюдаемости рассмотрим передаточные матрицы, соответствующие системам (1.89) и (1.91). Перепишем уравнения (1.89) в операционной форме при нулевых начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} (Ip - A^{11})x^1(p) - A^{12}x^2(p) &= B^1r(p), \\ (Ip - A^{22})x^2(p) &= 0, \\ y(p) &= C^1x^1(p) + C^2x^2(p). \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

Очевидно, что вторая группа уравнений имеет только тривиальное решение $x^2 \equiv 0$. Поэтому, исключая фазовые координаты x^1 , получим:

$$y(p) = C^1[Ip - A^{11}]^{-1}B^1r(p). \quad (1.99)$$

Передаточная матрица системы (1.98), таким образом, равна

$$G(p) = C^1[Ip - A^{11}]^{-1}B^1. \quad (1.100)$$

Из последнего соотношения следует, что передаточная матрица не полностью управляемой системы определяется только ее управляемой частью. В формулу для $G(p)$ не входят матрицы A^{12} , A^{22} и C^2 .

Составим характеристическое уравнение системы

$$|Ip - A| = \begin{vmatrix} Ip - A^{11} & -A^{12} \\ 0 & Ip - A^{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.101)$$

Как известно [10, 28], определитель квазиреугольной матрицы равен произведению определителей диагональных

клеток

$$|Ip - A| = |Ip - A^{11}| \cdot |Ip - A^{22}| = 0. \quad (1.102)$$

Из (1.102) следует, что характеристический полином не полностью управляемой системы можно представить как произведение характеристических полиномов двух матриц: матрицы A^{11} , соответствующей управляемой части, и матрицы A^{22} , описывающей неуправляемую часть. Полюсами передаточной матрицы являются лишь нули первого сомножителя, а именно, собственные значения матрицы A^{11} .

Перечисленные особенности неуправляемых систем вполне очевидны, когда уравнения записаны в форме (1.89). В то же время, поскольку передаточная матрица системы не зависит от выбора базиса, наряду с (1.100) можно записать:

$$G(p) = C[Ip - A]^{-1}B. \quad (1.103)$$

На первый взгляд может показаться, что передаточная матрица, определяемая формулой (1.103), содержит в качестве полюсов все собственные числа матрицы A . Однако из тождественного равенства

$$C^1[Ip - A^{11}]^{-1}B^1 \equiv C[Ip - A]^{-1}B \quad (1.104)$$

ясно, что это не так и что при вычислении $G(p)$ по соотношениям (1.103) неизбежно произойдет сокращение некоторых нулей и полюсов. Наличие неуправляемой части системы приводит, таким образом, к сокращению некоторых нулей и полюсов во всех элементах передаточной матрицы.

Все сказанное выше о не полностью управляемой системе переносится непосредственно на систему, содержащую ненаблюдаемую часть. Передаточная матрица системы (1.91) имеет $v_1' < N$ полюсов, равных в обозначениях (1.91) собственным значениям матрицы A^{11} и совпадающих с частью корней характеристического уравнения. Наличие ненаблюдаемой части также связано с сокращением нулей и полюсов $G(p)$.

Структуры системы (1.89) и (1.91) соответствуют лишь некоторым возможным частным случаям, а именно, случаем, когда система либо наблюдаема, но не полностью управляема, либо управляема, но не полностью наблюдае-

ма. Ясно, что в общем случае система может одновременно содержать четыре части, исчерпывающие все возможные комбинации [63]:

- 1) управляемую, но ненаблюдаемую часть (часть I);
- 2) полностью управляемую и наблюдаемую часть (часть II);
- 3) неуправляемую и ненаблюдаемую часть (часть III);
- 4) неуправляемую, но наблюдаемую часть (часть IV).

Это означает, что в пространстве состояний системы имеется базис, в котором фазовые координаты разбиваются на четыре группы:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix},$$

а матрицы A , B и C принимают вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{14} \\ 0 & A^{22} & 0 & A^{24} \\ 0 & 0 & A^{33} & A^{34} \\ 0 & 0 & 0 & A^{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.105)$$

$$C = \parallel 0, C^2, 0, C^4 \parallel.$$

Обозначим размерности каждой из групп фазовых координат соответственно через v_1 , v_2 , v_3 и v_4 , причем

$\sum_{i=1}^4 v_i = N$. Клетки A^{ii} , расположенные на главной диаго-

нали матрицы A , являются квадратными матрицами размеров $v_i \times v_i$, а остальные клетки — прямоугольными матрицами соответствующих размеров. Размеры матриц B^1 , B^2 , C^2 и C^4 соответственно равны $v_1 \times n$, $v_2 \times n$, $n \times v_2$ и $n \times v_4$. Система является полностью управляемой и наблюдаемой лишь в случае, если $v_1 = v_3 = v_4 = 0$, а $v_2 = N$.

Применение критериев управляемости и наблюдаемости позволяет ответить на вопрос о размерности управляемой и наблюдаемой частей, без приведения уравнения к

форме (1.105)

$$v_1 + v_2 = r_U, \quad (1.106)$$

$$v_2 + v_4 = r_V,$$

где через r_U и r_V обозначены ранги матриц U и V (1.93), (1.94).

Разбиение системы на части I—IV может быть проведено многими способами (в зависимости от выбора преобразующей матрицы T). При этом, однако, размерности

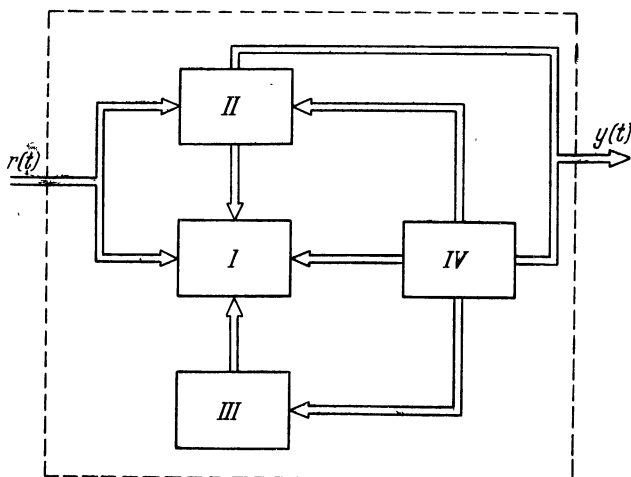


Рис. 1.5.

частей (количество фазовых координат в каждой части) остаются неизменными.

Структура рассматриваемой системы управления графически может быть изображена в виде четырех блоков, связи между которыми изображены на рис. 1.5. Части I и II системы являются управляемыми, так как на них воздействует входной сигнал r . Части II и IV наблюдаемы — они определяют значение выходного сигнала y . Полностью управляемой и наблюдаемой частью является часть II. Наконец, часть III неуправляема и ненаблюдаема. В соответствии с (1.105) дифференциальные уравнения движения

системы в рассматриваемом базисе имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^1 &= A^{11}x^1 + A^{12}x^2 + A^{13}x^3 + A^{14}x^4 + B^1r, \\ \dot{x}^2 &= A^{22}x^2 + A^{24}x^4 + B^2r, \\ \dot{x}^3 &= A^{33}x^3 + A^{34}x^4, \\ \dot{x}^4 &= A^{44}x^4, \\ y &= C^2x^2 + C^4x^4. \end{aligned} \right\} \quad (1.107)$$

Характеристический полином $|Ip - A|$ распадается при этом на четыре сомножителя:

$$|Ip - A| = |Ip - A^{11}| \cdot |Ip - A^{22}| \cdot |Ip - A^{33}| \cdot |Ip - A^{44}|, \quad (1.108)$$

каждый из которых соответствует одной из частей системы.

Передаточная матрица системы

$$G(p) = C[Ip - A]^{-1}B = C^2[Ip - A^{22}]^{-1}B^2 \quad (1.109)$$

содержит в качестве полюсов лишь корни характеристического полинома полностью управляемой и наблюдаемой части. Остальные полюсы передаточной матрицы сокращаются с соответствующими нулями. Справедливо и обратное утверждение — сокращение некоторых полюсов и нулей передаточной матрицы (во всех ее элементах) свидетельствует о том, что система содержит неуправляемую или ненаблюдаемую части.

В дальнейшем нас часто будет интересовать не структура системы, а лишь факт наличия или отсутствия неуправляемых и ненаблюдаемых частей. В зависимости от этого будем называть систему вырожденной или невырожденной и говорить, что система не вырождена, если она содержит лишь часть II.

Все изложенное позволяет утверждать, что передаточная матрица в общем случае не отражает всех свойств системы и является исчерпывающей характеристикой системы управления лишь в том случае, если она не вырождена. С другой стороны, если две полностью управляемые и наблюдаемые системы имеют одну и ту же передаточную матрицу, то их дифференциальные уравнения совпадают с точностью до эквивалентного преобразования.

§ 1.4. Задача идентификации системы по передаточной матрице

В предыдущем параграфе рассматривалось определение характеристики «вход — выход» системы (ее передаточной матрицы) по известным дифференциальным уравнениям. Физическая система отождествлялась с описывающими ее дифференциальными уравнениями, и было показано, что в этом смысле передаточная матрица может не отражать всех свойств системы.

В настоящем параграфе рассматривается обратная задача, а именно, определение дифференциальных уравнений многомерной системы по известной передаточной матрице. Эту задачу будем называть задачей идентификации системы по ее передаточной матрице или, для краткости, просто задачей идентификации. Термин «идентификация» стало принято связывать с более широким кругом вопросов, возникающим при построении математической модели системы по данным, полученным в результате эксперимента. В настоящей книге этот термин относится лишь к указанной частной задаче. Результаты, приведенные ниже, понадобятся нам при рассмотрении вопросов устойчивости и задач синтеза многомерных систем.

Из § 1.3 следует, что по передаточной матрице системы в общем случае невозможно полностью восстановить дифференциальные уравнения исходной динамической системы. Знание передаточной матрицы определяет только одну, а именно, полностью управляемую и наблюдаемую часть системы (часть II). Остальные части (если они имеются) принципиально не могут быть получены на основе известных характеристик «вход — выход». Таким образом, задача идентификации формулируется только как задача определения части II системы.

Очевидно, что существует бесконечное множество динамических систем, имеющих одну и ту же передаточную матрицу. По существу задачи требуется разыскать систему, имеющую при заданной передаточной матрице наименьший порядок дифференциальных уравнений. Отказ от этого условия приводит к появлению в системе произвольных неуправляемых и ненаблюдаемых частей. Все сказанное означает, что ставится задача определения по переда-

точной матрице части II системы уравнений (1.107) в некотором базисе, т. е. нахождения коэффициентов системы вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^2 &= A^{22}x^2 + B^2r, \\ y &= C^2x^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

В дальнейшем при записи системы (1.110) индекс 2 будет опускаться.

Наряду с этим можно поставить задачу отыскания системы уравнений в форме

$$Q(D)y = P(D)r, \quad (1.111)$$

также имея в виду, что эти уравнения описывают только часть II.

Известно [38], что передаточная матрица может рассматриваться как оператор системы, если уравнения решены относительно выходных координат

$$y(t) = G(D)r(t), \quad (1.112)$$

где $G(D)$ получается из $G(p)$ заменой переменной преобразования Лапласа p на оператор дифференцирования

$D \equiv \frac{d}{dt}$. Из (1.109) — (1.112) следует формула для определения оператора системы $G(D)$:

$$G(D) = C[ID - A]^{-1}B = Q^{-1}(D)P(D).$$

Наша задача заключается в отыскании матриц A , B и C или $P(D)$ и $Q(D)$ по заданной $G(D)$.

Рассмотрим первоначально простой одномерный случай, решение для которого хорошо известно. Пусть передаточная функция одномерной системы $G(p)$ является отношением двух взаимно простых полиномов

$$G(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{b_1p^{N-1} + b_2p^{N-2} + \dots + b_N}{p^N + a_1p^{N-1} + \dots + a_{N-1}p + a_N}. \quad (1.113)$$

Дифференциальное уравнение в форме (1.111) записывается сразу же:

$$\begin{aligned} (D^N + a_1D^{N-1} + \dots + a_{N-1}D + a_N)y(t) &= \\ &= (b_1D^{N-1} + b_2D^{N-2} + \dots + b_N)r(t). \end{aligned} \quad (1.114)$$

Передающую функцию (1.113) имеют также все системы вида

$$L(D)Q(D)y(t) = L(D)P(D)r(t), \quad (1.115)$$

где $L(D)$ — произвольный полином степени выше нулевой. Система (1.114) отличается от всех систем (1.115) тем, что она имеет наименьший порядок и не вырождена. Решением поставленной задачи является поэтому лишь первая из систем.

Рассмотрим способ получения по передаточной функции системы уравнений первого порядка в предположении простых полюсов $G(p)$. Разложим $G(D)$ на простейшие дроби:

$$G(D) = \sum_{i=1}^N \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)} \frac{1}{D - \lambda_i}, \quad (1.116)$$

где λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — нули полинома $Q(\lambda)$.

Из (1.112) и (1.116) имеем:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)} \frac{1}{D - \lambda_i} r(t).$$

Введем обозначения

$$c_i = \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}; \quad x_i(t) = \frac{1}{D - \lambda_i} r(t)$$

и получим:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + r(t), \quad (1.117)$$

$$y = \sum_{i=1}^N c_i x_i.$$

Запись уравнений в форме (1.117) есть не что иное, как каноническая форма А. И. Лурье [25]. Система (1.117) полностью управляема и наблюдаема, так как все $c_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Матрицы A , B и C имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \}, \\ B &= \| 1, 1, \dots, 1 \|', \\ C &= \| c_1, c_2, \dots, c_n \|. \end{aligned}$$

Фазовые координаты x_i и константы c_i , соответствующие комплексно-сопряженным λ_i , сами являются комплексно-сопряженными. При желании избавиться от действий с комплексными числами можно для каждой пары x_i, x_{i+1} принять в качестве новых фазовых координат вещественную и мнимую части старой. При этом матрица $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ заменяется матрицей Кейли [4].

Переходя к общему многомерному случаю, отметим, что задача определения уравнений по матрице $G(D)$ уже в случае $n = 2$ не является тривиальной. Действительно, пусть динамическая система, описываемая уравнениями (1.111), полностью управляема и наблюдаема. В этом случае $G(D) = Q^{-1}(D)P(D)$ является исчерпывающей характеристикой системы. Предположим для простоты, что все элементы $G(D)$ имеют одинаковый знаменатель, равный определителю $\Delta(D)$ матрицы $Q(D)$:

$$G(D) = \frac{1}{\Delta(D)} R(D); \quad (1.118)$$

где $R(D) = \tilde{Q}(D)P(D)$ — полиномиальная матрица, а $\tilde{Q}(D)$ — матрица, присоединенная для $Q(D)$. В таком случае

$$y(t) = G(D)r(t) = \frac{1}{\Delta(D)} R(D)r(t). \quad (1.119)$$

Может показаться, что решение задачи идентификации дается простым умножением (1.119) на скалярный множитель $\Delta(D)$:

$$\Delta(D)y(t) = R(D)r(t). \quad (1.120)$$

Такое простое решение не приводит, однако, к желаемому результату, так как система (1.120) не эквивалентна исходной. Здесь возникает та же ситуация, что и при решении систем уравнений методом исключения [37]. Система (1.120) является выводной по отношению к (1.111) — каждое решение (1.111) является решением (1.120), но не наоборот. Порядок (1.120) равен произведению nN , т. е. при $n \geq 2$ выше порядка исходной системы. Система (1.120) фактически получена из (1.111) умножением сле-

ва на неэлементарную матрицу $\tilde{Q}(D)$, определитель которой равен $[\Delta(D)]^{n-1}$. Из того, что порядок (1.120) выше порядка исходных уравнений, следует, что система (1.120) вырождена.

Покажем, что задача идентификации разрешима, и приведем далее два способа ее решения, представляющих обобщение рассмотренных выше методов для $n = 1$. Применение первого способа связано с понятием диагональной канонической формы рациональной матрицы $G(D)$. Полная формулировка соответствующего результата и метод получения канонической формы описаны в приложении I. Сейчас же ограничимся случаем, когда $G(D)$ — квадратная неособая матрица порядка n .

Любая неособая квадратная матрица $G(D) = \|g_{ij}(D)\|_1^n$ с помощью элементарных преобразований может быть сведена к канонической диагональной:

$$G(D) = S(D)V(D)T(D) = \\ = S(D)\text{diag}\left\{\frac{\varphi_1(D)}{\psi_1(D)}, \frac{\varphi_2(D)}{\psi_2(D)}, \dots, \frac{\varphi_n(D)}{\psi_n(D)}\right\}T(D), \quad (1.121)$$

где:

а) $S(D)$ и $T(D)$ — элементарные матрицы, т. е. полиномиальные матрицы с определителями, не равными нулю и не зависящими от D ;

б) $V(D)$ — диагональная рациональная матрица;

в) $\varphi_k(D)$ и $\psi_k(D)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — взаимно простые полиномы с коэффициентами при старшей степени D , равными единице;

г) полином $\varphi_n(D)$ имеет наивысшую степень среди всех $\varphi_k(D)$ и каждый полином $\varphi_k(D)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) является делителем $\varphi_{k+1}(D)$;

д) полином $\psi_1(D)$ имеет наивысшую степень среди всех $\psi_k(D)$ и каждый полином $\psi_k(D)$ ($k = 2, 3, \dots, n$) является делителем $\psi_{k-1}(D)$. Рациональная матрица $V(D)$, удовлетворяющая свойствам б) — д), называется канонической. Поэтому всякая рациональная матрица эквивалентна некоторой канонической.

Представим матрицу $V(D)$ в виде:

$$V(D) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\psi_1(D)}, \frac{1}{\psi_2(D)}, \dots, \frac{1}{\psi_n(D)} \right\} N^{-1}(D) \times \\ \times N(D) \text{diag} \{ \varphi_1(D), \varphi_2(D), \dots, \varphi_n(D) \}, \quad (1.122)$$

где матрица $N(D)$ — элементарная.

Подставим теперь (1.122) в (1.121), а результат — в (1.112) и умножим полученное выражение слева на выражение $N(D) \text{diag} \{ \psi_1(D), \psi_2(D), \dots, \psi_n(D) \} S^{-1}(D)$:

$$N(D) \text{diag} \{ \psi_1(D), \psi_2(D), \dots, \psi_n(D) \} S^{-1}(D) y(t) = \\ = N(D) \text{diag} \{ \varphi_1(D), \varphi_2(D), \dots, \varphi_n(D) \} T(D) r(t). \quad (1.123)$$

Введя обозначения для полиномиальных матриц $Q = N \text{diag} \{ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \} S^{-1}$ и $P = N \text{diag} \{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \} T$, перепишем (1.123) в виде

$$Q(D) y(t) = P(D) r(t). \quad (1.124)$$

Очевидно, что полученная система (1.124) является невырожденной (т. е. полностью управляемой и наблюдаемой). В самом деле, переходя от (1.124) обратно к $G(D)$, т. е. умножая слева на $[Q(D)]^{-1}$, получим рациональную матрицу $G(D)$ в канонической форме. Невырожденность системы следует из взаимной простоты (несократимости) полиномов $\varphi_k(D)$ и $\psi_k(D)$ для всех k , $1 \leq k \leq n$. Система дифференциальных уравнений (1.124) решает поставленную задачу идентификации.

Порядок полностью управляемой и наблюдаемой части системы, совпадающий со степенью определителя $|Q(D)|$, равен, очевидно, сумме порядков полиномов $\psi_1(D)$, $\psi_2(D)$, ..., $\psi_n(D)$, а сам определитель с точностью до постоянного множителя совпадает с произведением $\psi_1(D) \psi_2(D) \dots \psi_n(D)$.

Дополнительно можно отметить следующее обстоятельство. Если передаточная матрица $G(D)$ определена по заданной системе дифференциальных уравнений вида (1.111), причем известно, что эта система не вырождена, то изложенная процедура позволяет получить по передаточной матрице систему (1.124), эквивалентную исходной (точнее левозэквивалентную). Это утверждение вытекает

непосредственно из результатов, изложенных в § 1.3. Произвольные элементарные матрицы $N(D)$ дают все эквивалентные системы, в том числе и исходную.

Пример 1.9. Системе уравнений

$$\begin{aligned} (D + q_{11})y_1 + q_{12}y_2 &= p_{11}r_1 + p_{12}r_2, \\ q_{21}y_1 + (D + q_{22})y_2 &= p_{21}r_1 + p_{22}r_2 \end{aligned} \quad (1.125)$$

соответствует матрица-оператор

$$\begin{aligned} G(D) &= \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{(D + q_{22})p_{11} - q_{12}p_{21}}{\Delta(D)} & \frac{(D + q_{22})p_{12} - q_{12}p_{22}}{\Delta(D)} \\ \frac{-q_{21}p_{11} + (D + q_{11})p_{21}}{\Delta(D)} & \frac{-q_{21}p_{12} + (D + q_{11})p_{22}}{\Delta(D)} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{\Delta(D)} R(D), \end{aligned} \quad (1.126)$$

где

$$\Delta(D) = |Q(D)| = (D + q_{11})(D + q_{22}) - q_{12}q_{21}.$$

Применяя к матрице $R(D)$ левые и правые элементарные операции, преобразуем ее к диагональной:

$$R(D) = S(D) \operatorname{diag} \{1, \Delta(D)\} T(D),$$

где

$$S(D) = \left\| \begin{array}{cc} D + q_{22} & 1 \\ -q_{21} & 0 \end{array} \right\|, \quad (1.127)$$

$$T(D) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{D + q_1}{q_{21}} \\ 0 & \frac{1}{q_{21}} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right\|.$$

Передающая матрица $G(D)$ приводится к канонической форме

$$G(D) = S(D) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\Delta(D)}, 1 \right\} T(D). \quad (1.128)$$

В силу (1.124) матрице $G(D)$ вида (1.128) (при $N(D) = I$) соответствует система уравнений

$$Q^1(D)y(t) = P^1(D)r(t), \quad (1.129)$$

где

$$Q^1(D) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\Delta(D)}{q_{21}} \\ 1 & \frac{D + q_{22}}{q_{21}} \end{vmatrix},$$

$$P^1(D) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{D + q_{11}}{q_{21}} \\ 0 & \frac{1}{q_{21}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}.$$

Полученная система эквивалентна исходной (1.125). Для иллюстрации этого применяем к (1.129) левое элементарное преобразование с матрицей

$$N(D) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{D + q_{11}}{q_{21}} \\ 0 & \frac{1}{q_{21}} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & D + q_{11} \\ 0 & q_{21} \end{vmatrix}$$

и получим:

$$N(D)Q^1(D) = Q(D), \quad N(D)P^1(D) = P(D).$$

Непосредственный переход от (1.126) к системе уравнений простым умножением на $\Delta(D)$ дает выводную систему четвертого порядка:

$$\Delta(D)y_1 = [(D + q_{22})p_{11} - q_{12}p_{21}]r_1 + [(D + q_{22})p_{12} - q_{12}p_{22}]r_2,$$

$$\Delta(D)y_2 = [(D + q_{11})p_{21} - q_{21}p_{11}]r_1 + [(D + q_{11})p_{22} - q_{21}p_{12}]r_2.$$

Изложенные результаты позволяют несколько продвинуться в понимании природы управляемости и наблюдаемости. В самом деле, если система уравнений записана в форме (1.111) и неизвестно, является она вырожденной или нет, то можно поступить следующим образом. Прежде всего определяется порядок полинома $\Delta(D) = |Q(D)|$ и находится передаточная матрица системы. Затем матрица $G(D)$ приводится к канонической диагональной форме (1.121). Очевидно, что размерность невырожденной части системы равна порядку системы (1.124), т. е. сумме порядков полиномов $\psi_k(D)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Исходная система является невырожденной тогда и только тогда, когда порядок полинома $\Delta(D)$ равен сумме порядков всех $\psi_k(D)$.

Покажем, что достаточным (но отнюдь не необходимым) условием невырожденности системы является отсутствие одинаковых нулей у определителей матриц $Q(D)$ и $P(D)$. В самом деле, в силу тождества (1.121) определитель матрицы $G(D)$, равный отношению определителей $|P(D)|$ и $|Q(D)|$, записывается как

$$|G(D)| = \frac{|P(D)|}{|Q(D)|} = st \frac{\varphi_1(D)\varphi_2(D)\dots\varphi_n(D)}{\psi_1(D)\psi_2(D)\dots\psi_n(D)}, \quad (1.130)$$

где

$$s = |S(D)| = \text{const}, \quad t = |T(D)| = \text{const}.$$

В общем случае полиномы φ_1 и ψ_1 , φ_2 и ψ_2 , ..., φ_n и ψ_n попарно несократимы, но этого пока еще нельзя утверждать относительно произведений $\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n$ и $\psi_1\psi_2\dots\psi_n$ (например, полиномы φ_n и ψ_1 могут иметь общий множитель).

Поскольку $|P(D)|$ и $|Q(D)|$ — взаимно простые, то степень полинома $\psi_1\psi_2\dots\psi_n$ больше или равна степени $|Q(D)|$. С другой стороны, степень $\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, совпадающая с порядком невырожденной части, меньше или равна степени $|Q(D)|$. Оба эти условия удовлетворяются лишь при равенстве степеней рассматриваемых многочленов.

Таким образом, можно утверждать, что в случае, если все собственные значения матрицы $Q(D)$ отличны от собственных значений $P(D)$, определитель $\Delta(D) = |Q(D)|$ с точностью до постоянного множителя совпадает с произведением $\psi_1(D)\psi_2(D)\dots\psi_n(D)$, а определитель $|P(D)|$ — с произведением $\varphi_1(D)\varphi_2(D)\dots\varphi_n(D)$. Поскольку порядок

системы совпадает с порядком ее невырожденной части, то другие части в системе отсутствуют и система является полностью управляемой и наблюдаемой.

В частном, но важном практически случае, когда среди собственных значений матриц $P(D)$ и $Q(D)$ нет кратных, каноническая форма $G(D)$, как очевидно, имеет вид

$$G(D) = S(D) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{|Q(D)|}, 1, 1, \dots, 1, |P(D)| \right\} T(D). \quad (1.131)$$

Отметим, что условия равенства некоторых нулей $|Q(D)|$ и нулей $|P(D)|$ еще не свидетельствуют о вырожденности системы. Так, если

$$|P(D)| = (D + \alpha)p_1(D), \text{ а } |Q(D)| = (D + \alpha)q_1(D),$$

причем нули полиномов $p_1(D)$ и $q_1(D)$ не совпадают, каноническая форма может быть равной

$$G(D) = S(D) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{(D + \alpha)q_1(D)}, 1, \dots, \dots, 1, (D + \alpha)p_1(D) \right\} T(D) \quad (1.132)$$

или

$$G(D) = S(D) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{q_1(D)}, 1, \dots, 1, p_1(D) \right\} T(D). \quad (1.133)$$

Вид канонической формы (1.132) или (1.133) определяется более тонкими свойствами структуры матриц Q и P .

Эти положения позволяют сделать следующий важный вывод. Свойство вырожденности системы связано с определенным точным подбором ее параметров и является весьма критичным. Малое отклонение параметров системы, как правило, нарушает вырожденность. Совпадение одного или нескольких собственных значений дифференциальных операторов правой и левой частей системы уравнений является исключением из правила, если идет речь о конкретных динамических системах. В частности, можно утверждать, что все реальные объекты управления полностью управляемы и наблюдаемы.

Эти категорические утверждения могут вызвать сомнения вообще в целесообразности рассмотрения вырожденных систем. Однако, как будет ясно из дальнейшего, многие методы синтеза (в том числе рассматриваемые в этой книге) связаны с компенсацией динамических свойств объекта и приводят к потере управляемости и наблюдаемости. Хотя корректор и объект в отдельности полностью управляемы и наблюдаемы, их соединение в таком случае дает вырожденную систему.

Выше рассмотрена процедура получения по передаточной матрице уравнений движения невырожденной части системы в форме (1.111). Приведем далее метод, позволяющий получить по известной $G(D)$ систему уравнений первого порядка (1.110) [63]. Этот метод является обобщением на многомерный случай способа разложения передаточной функции на простейшие дроби.

Ограничимся практически наиболее интересным случаем простых полюсов передаточной матрицы $G(D)$. Точка $D = \lambda_k$ называется полюсом матрицы $G(D)$, если хотя бы один из ее элементов имеет полюс при $D = \lambda_k$. Этот полюс называется простым, если он не является кратным полюсом ни для одного элемента матрицы $G(D)$ (подробнее об этом см. приложение I).

Передаточная матрица в случае простых полюсов может быть представлена в виде суммы простых дробей

$$G(D) = \sum_{k=1}^{\gamma} R(\lambda_k) \frac{1}{D - \lambda_k}. \quad (1.134)$$

Для получения (1.134) каждый элемент матрицы $G(D)$ можно разложить на простейшие дроби:

$$g_{ij}(D) = \sum_{k=1}^{\gamma} r_{ij}(\lambda_k) \frac{1}{D - \lambda_k}, \quad (1.135)$$

где коэффициент $r_{ij}(\lambda_k)$ равен нулю, если соответствующая функция $g_{ij}(D)$ не имеет полюса в точке λ_k . Очевидно, что матрица $R(\lambda_k) = \|r_{ij}(\lambda_k)\|_1^n$ ($k = 1, 2, \dots, \gamma$) равна вычету матрицы $G(D)$ в точке λ_k :

$$R(\lambda_k) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \{(\lambda - \lambda_k) G(\lambda)\}. \quad (1.136)$$

Воспользовавшись разложением (1.134), перепишем операторную запись (1.112) в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{D - \lambda_k} R(\lambda_k) r(t). \quad (1.137)$$

Обозначим ранг матричного вычета $G(D)$ в точке λ_k , т. е. ранг матрицы $R(\lambda_k)$, через ρ_k . Известно (см. приложение I), что квадратная $n \times n$ -матрица ранга ρ_k может быть представлена в виде произведения двух прямоугольных матриц

$$R(\lambda_k) = C^k \cdot B^k, \quad (1.138)$$

где матрица $C^k = \|c_{ij}^k\|_{n \times \rho_k}$ — числовая матрица размеров $n \times \rho_k$, а $B^k = \|b_{ij}^k\|_{\rho_k \times n}$ — числовая матрица размеров $\rho_k \times n$. В частности, при $\rho_k = 1$ C^k — столбец, а B^k — строка.

Введя обозначения

$$x^k(t) = \frac{1}{D - \lambda_k} B^k r(t), \quad (1.139)$$

где $x^k = \|x_1^k, x_2^k, \dots, x_{\rho_k}^k\|'$ — столбец размера ρ_k , перепишем (1.137) в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\nu} C^k x^k(t). \quad (1.140)$$

Формулы (1.139) и (1.140) уже дают требуемую запись невырожденной системы уравнений первого порядка, так как (1.139) означает:

$$\dot{x}^k = \lambda_k x^k + B^k r(t). \quad (1.141)$$

Введем вектор фазовых координат

$$x(t) = \left\| \begin{array}{c} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^{\nu}(t) \end{array} \right\|, \quad (1.142)$$

имеющий размерность $N = \sum_{k=1}^{\nu} \rho_k$.

Тогда система уравнений (1.140), (1.141) записывается в принятых обозначениях:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Br, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

где матрица A диагональна,

$$A = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 I_{\rho_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_\gamma I_{\rho_\gamma} \end{array} \right\|, \quad (1.143)$$

I_ρ — $\rho \times \rho$ единичная матрица, а клеточные матрицы B и C имеют вид

$$B = \left\| \begin{array}{c} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^\gamma \end{array} \right\|_{N \times n}, \quad C = \| C^1, C^2, \dots, C^\gamma \|_{n \times N}. \quad (1.144)$$

Тем самым задача идентификации решена и, более того, полученная система уравнений имеет диагональную форму.

Попутно выявлен также следующий важный результат. Размерность N полностью управляемой и наблюдаемой части в случае простых полюсов $G(D)$ равна сумме рангов вычетов передаточной матрицы во всех полюсах:

$$N = \sum_{k=1}^{\gamma} \rho_k. \quad (1.145)$$

Этот факт может быть использован для решения вопроса о том, является ли система полностью управляемой и наблюдаемой или нет.

Полученные результаты становятся прозрачными, если обратиться к особенностям структуры канонической диагональной матрицы $G(D)$ (1.121). В частности, в случае простых нулей характеристического определителя

$\Delta(D) = |Q(D)|$ передаточная матрица имеет следующий канонический вид:

$$G(D) = S(D) \operatorname{diag} \left\{ \frac{\varphi_1(D)}{\Delta(D)}, \varphi_2(D), \dots, \varphi_n(D) \right\} T(D). \quad (1.146)$$

Очевидно, что ранг вычета $G(D)$ в любом полюсе λ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) равен единице. В самом деле, матрица $R(\lambda_k)$ равна

$$R(\lambda_k) = S(\lambda_k) \operatorname{diag} \left\{ \frac{\varphi_1(\lambda_k)}{\Delta'(\lambda_k)}, 0, 0, \dots, 0 \right\} T(\lambda_k), \quad (1.147)$$

а матрицы $S(\lambda_k)$ и $T(\lambda_k)$ — неособые:

Пример 1.10. Примем в уравнениях примера 1.9 (1.125) следующие числовые данные:

$$\begin{aligned} q_{11} &= 1, & q_{12} &= 0,5, & q_{21} &= 1,5, & q_{22} &= 2, \\ p_{11} &= 0,8, & p_{12} &= 0,4, & p_{21} &= 1, & p_{22} &= 0,3. \end{aligned}$$

Тогда определитель системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = |Q(\lambda)| = \lambda^2 + 3\lambda + 1,25 = (\lambda + 0,5)(\lambda + 2,5).$$

Нули характеристического определителя равны: $\lambda_1 = -0,5$, $\lambda_2 = -2,5$. Разложим элементы $G(D)$ (1.126) на простейшие дроби:

$$G(D) = \frac{1}{D - \lambda_1} R(\lambda_1) + \frac{1}{D - \lambda_2} R(\lambda_2), \quad (1.148)$$

где

$$\begin{aligned} R(\lambda_1) &= \left\| \begin{array}{cc} 0,35 & 0,225 \\ -0,35 & -0,225 \end{array} \right\|, \\ R(\lambda_2) &= \left\| \begin{array}{cc} 0,45 & 0,175 \\ 1,35 & 0,525 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Очевидно, что определители $|R(\lambda_j)| = 0$ ($j = 1, 2$), так что ранги ρ_j матриц $R(\lambda_j)$ равны 1. Представим $R(\lambda_j)$ в виде произведения столбца на строку

$$\begin{aligned} R(\lambda_1) &= \left\| \begin{array}{c} 0,35 \\ -0,35 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} 1, & 0,225 \\ 0,35 \end{array} \right\|, \\ R(\lambda_2) &= \left\| \begin{array}{c} 0,45 \\ 1,35 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} 1, & 0,525 \\ 1,35 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Система уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0,5x_1 + r_1 + \frac{0,225}{0,35}r_2, & y_1 &= 0,35x_1 + 0,45x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2,5x_1 + r_1 + \frac{0,525}{1,35}r_2, & y_2 &= -0,35x_1 + 1,35x_2. \end{aligned}$$

§ 1.5. Каноническая структура многомерной системы

Если система полностью управляема и наблюдаема, то передаточная матрица $G(p)$ исчерпывающим образом характеризует ее динамические свойства. В предыдущем параграфе для решения задачи идентификации такой системы была использована каноническая диагональная форма матрицы $G(p)$. Возможность подобного представления любой передаточной матрицы $G(p)$ позволяет выявить главные особенности рассматриваемой системы. Действительно, если имеется лишь запись передаточной матрицы $G(p)$ в виде таблицы

$$G(p) = \begin{vmatrix} g_{11}(p) & \dots & g_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(p) & \dots & g_{nn}(p) \end{vmatrix}, \quad (1.149)$$

то вся информация относительно динамических особенностей системы находится в скрытой форме. Запись (1.149) не позволяет непосредственно ответить даже на такие вопросы: каков порядок системы, какова кратность корней характеристического уравнения и т. д.

Пусть матрица $G(p)$ с помощью левых и правых элементарных операций приведена к диагональной форме (не обязательно канонической). Это означает, что она записана в виде

$$G(p) = S(p) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1(p)}{q_1(p)}, \frac{p_2(p)}{q_2(p)}, \dots, \frac{p_n(p)}{q_n(p)} \right\} T(p), \quad (1.150)$$

где:

а) $S(p)$ и $T(p)$ — элементарные полиномиальные матрицы;

б) $p_i(p)$ и $q_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — взаимно простые полиномы.

В частности, если полиномы $p_i(p)$ обладают свойствами г), а полиномы $q_i(p)$ — свойствами д) § 1.4, то форма (1.150) является канонической. Средние (диагональные) сомножители (1.150) и (1.121) эквивалентны.

Воспользуемся операторной записью

$$y(t) = G(D)r(t). \quad (1.151)$$

Тогда $G(D)$ имеет вид (1.150) с заменой p на D :

$$G(D) = S(D) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1(D)}{q_1(D)}, \frac{p_2(D)}{q_2(D)}, \dots, \frac{p_n(D)}{q_n(D)} \right\} T(D). \quad (1.152)$$

Введем новые переменные $u(t) = \|u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\|'$ и $v(t) = \|v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)\|'$ с помощью соотношений

$$u(t) = T(D)r(t), \quad v(t) = S^{-1}(D)y(t). \quad (1.153)$$

Отметим, что новые переменные связаны со старыми лишь операциями дифференцирования, так как $S^{-1}(D)$ — полиномиальная матрица. Точно так же старые переменные $y(t)$ и $r(t)$ определяются по новым лишь с помощью дифференциальных операций:

$$r(t) = T^{-1}(D)u(t), \quad y(t) = S(D)v(t). \quad (1.154)$$

В силу (1.151), (1.152) и (1.153) уравнения динамики многомерной системы в новых переменных принимают вид

$$q_i(D)v_i(t) = p_i(D)u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.155)$$

т. е. представляют собой совокупность n независимых линейных дифференциальных уравнений. Это означает, что многомерную (n -мерную) систему в новых переменных можно рассматривать как простую совокупность n независимых одномерных звеньев.

Такие переменные, по отношению к которым передаточная матрица системы имеет диагональный вид, будем называть *главными координатами* многомерной системы. Переменные $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) являются *главными входными*, а $v_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — *главными выходными* координатами.

Структуру системы в главных координатах (рис. 1.6) назовем *канонической структурой* многомерной системы.

Главные входные координаты $u_i(t)$ образуются из входных сигналов применением линейных дифференциальных операций. Выход системы $y(t)$ представляет собой линейные комбинации главных координат и их производных. Отметим, что преобразования входных координат в главные входные и главных выходных в выходные являются

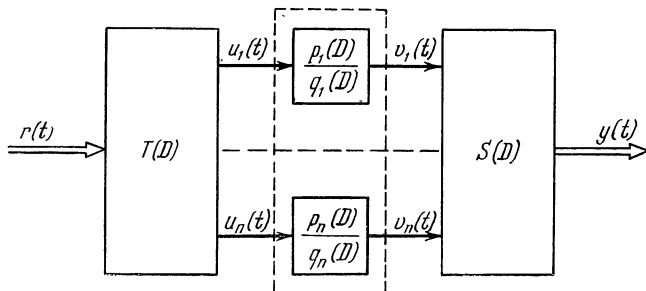


Рис. 1.6.

безынерционными, а все особенности динамики системы сосредоточены в диагональных звеньях $\frac{p_i(D)}{q_i(D)}$. Совокупность этих диагональных звеньев будем называть *главной частью* многомерной системы.

Рассмотрение динамики системы в главных координатах сохраняет специфику многомерной системы, так как в соотношениях (1.153) — (1.154) учтены все перекрестные связи системы. Очевидно, что система рис. 1.6 эквивалентна исходной системе с оператором $G(D)$.

Из всего сказанного ясно, что представление системы в каноническом виде автоматически дает решение задачи идентификации, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Отметим, что и для решения задачи идентификации и для выявления главной части системы можно воспользоваться приведением $G(p)$ к любой эквивалентной диагональной форме. При этом каноническая диагональная форма обладает лишь тем преимуществом, что для ее получения существует стандартная процедура (см. приложение I).

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

§ 2.1. Характеристики «вход — выход»

Под дискретной системой понимается обычно некоторое устройство, оперирующее с дискретными значениями сигналов.

Поведение дискретной системы полностью описывается заданием значений ее координат в дискретные моменты времени. Именно такими системами являются дискретный фильтр, цифровая вычислительная машина и т. д. В то же время дискретная система управления может содержать непрерывные звенья, выходные координаты которых меняются во времени непрерывно. Описание такой системы заданием ее координат лишь в дискретные моменты времени является неполным.

Однако при рассмотрении многих вопросов управления непрерывными объектами с помощью ЦВМ можно ограничиться установлением соответствия между значениями входных и выходных сигналов лишь в дискретные моменты времени. Если на вход непрерывного устройства подается сигнал, квантованный по времени, а выходной сигнал также рассматривается только в дискретные моменты времени, то этому непрерывному устройству соответствует некоторая дискретная модель. Характеристики такой модели неотличимы от характеристик соответствующей дискретной системы. Вопрос определения дискретной модели непрерывной системы имеет самостоятельный интерес и выделен в отдельный параграф (§ 2.3).

В непрерывном случае мы отождествляли физическую систему с ее математической моделью, т. е. с системой дифференциальных уравнений (1.1) или (1.41). Подобно этому в качестве математической модели дискретной

системы естественно принять разностные уравнения. Рассмотрим стационарную линейную дискретную систему с n входными и n выходными координатами, имеющую постоянный период дискретности T .

Уравнения такой системы в общем случае могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [q_{ij}^0 y_j(kT + \nu T) + q_{ij}^1 y_j(kT + \nu T - T) + \dots + q_{ij}^{\nu} y_j(kT)] = \\ = \sum_{j=1}^n [p_{ij}^1 r_j(kT + \nu T - T) + \dots + p_{ij}^{\nu} r_j(kT)], \quad (2.1) \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

где $r_1(kT), r_2(kT), \dots, r_n(kT)$ — дискретные значения входов, $y_1(kT), y_2(kT), \dots, y_n(kT)$ — дискретные значения выходов, q_{ij}^l и p_{ij}^l — постоянные коэффициенты, kT — текущее время.

Некоторые из коэффициентов q_{ij}^l и p_{ij}^l могут быть равны нулю, но среди всех q_{ij}^l и среди всех p_{ij}^l имеется хотя бы по одному коэффициенту, отличному от нуля. Это обеспечивает присутствие в уравнениях хотя бы одного из $y_j(kT + \nu T)$ и хотя бы одного из $r_j(kT)$. Предполагается также, что система физически реализуема, т. е. будущие значения входов не влияют на текущие значения выходов.

Для более компактной записи системы (2.1) введем оператор опережения ζ и воспользуемся матричными обозначениями. Применение оператора ζ к любой функции дискретного аргумента kT дает, по определению, значение этой функции в последующий момент:

$$\zeta f(kT) = f(kT + T). \quad (2.2)$$

Обратный оператор ζ^{-1} определяется как

$$\zeta^{-1} f(kT) = f(kT - T). \quad (2.3)$$

Разностные уравнения (2.1) могут быть при этом записаны в форме, аналогичной дифференциальным

уравнениям (1.1):

$$Q(\zeta)y(kT) = P(\zeta)r(kT), \quad (2.4)$$

где $r(kT) = \|r_1(kT), \dots, r_n(kT)\|'$ и $y(kT) = \|y_1(kT), \dots, y_n(kT)\|'$ — векторы входных и выходных сигналов, а $Q(\zeta) = \|q_{ij}(\zeta)\|_1^n = \|q_{ij}^0 \zeta^v + q_{ij}^1 \zeta^{v-1} + \dots + q_{ij}^v\|_1^n$ и $P(\zeta) = \|p_{ij}(\zeta)\|_1^n = \|p_{ij}^1 \zeta^{v-1} + p_{ij}^2 \zeta^{v-2} + \dots + p_{ij}^v\|_1^n$ — матрицы полиномов от оператора ζ . В дальнейшем используется также запись матриц $Q(\zeta)$ и $P(\zeta)$ в виде матричных полиномов

$$\left. \begin{aligned} Q(\zeta) &= Q^0 \zeta^v + Q^1 \zeta^{v-1} + \dots + Q^v, \\ P(\zeta) &= P^1 \zeta^{v-1} + P^2 \zeta^{v-2} + \dots + P^v, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где

$$Q^l = \|q_{ij}^l\|_1^n, \quad P^l = \|p_{ij}^l\|_1^n.$$

Из теории разностных уравнений [2, 11] известно, что соотношения (2.1) и (2.4) могут рассматриваться как рекуррентные соотношения для вычисления текущего значения выходных координат $y_j(kT)$ по прошлым значениям входов и выходов. Простая замена аргумента kT позволяет записать эти соотношения в иной форме:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [q_{ij}^0 y_j(kT) + q_{ij}^1 y_j(kT - T) + \dots + q_{ij}^v y_j(kT - vT)] = \\ = \sum_{j=1}^n [p_{ij}^1 r_j(kT - T) + \dots + p_{ij}^v r_j(kT - vT)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введя матричные обозначения

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\zeta) &= Q^0 + Q^1 \zeta^{-1} + \dots + Q^v \zeta^{-v} = \|\hat{q}_{ij}(\zeta)\|_1^n, \\ \hat{P}(\zeta) &= P^1 \zeta^{-1} + \dots + P^v \zeta^{-v} = \|\hat{p}_{ij}(\zeta)\|_1^n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

представим (2.6) в виде

$$\hat{Q}(\zeta)y(kT) = \hat{P}(\zeta)r(kT). \quad (2.8)$$

Системы уравнений (2.4) и (2.8) эквивалентны. Далее будет использоваться форма записи как по положительным, так и по отрицательным значениям аргумента, в зависимости от характера решаемой задачи.

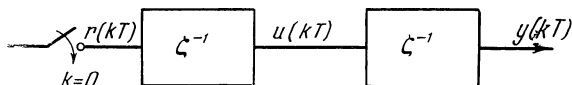


Рис. 2.1.

Будем считать, что входной сигнал поступает в систему, начиная с момента времени $k = 0$:

$$r(kT) = 0 \quad \text{при} \quad k \leq -1.$$

Это не ограничивает общности изложения, так как для стационарной системы начало отсчета времени можно переносить произвольно.

Решением системы (2.4), (2.8) назовем значения выходных координат $y(kT)$ при неотрицательных значениях k (т. е. при $k \geq 0$), обращающих эти уравнения в тождества. Очевидно, что это решение зависит от того состояния системы, в котором она находилась непосредственно перед подачей на ее вход возмущения $r(kT)$. Так, например, для одномерной системы рис. 2.1, состоящей из двух последовательно включенных звеньев запаздывания, под начальным состоянием необходимо понимать значения выходных координат звеньев при $k = 0$:

$$y(0) = y_0, \quad u(0) = u_0.$$

Начальное состояние системы определяет значения выходной координаты при $k = 0$ и $k = 1$:

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = u_0.$$

В соответствии с последним общее решение уравнений системы рис. 2.1

$$y(kT + 2T) = r(kT)$$

имеет вид

$$y(kT) = y_0\delta_{0,k} + u_0\delta_{1,k} + r(kT - 2T), \\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Это общее решение содержит две постоянные — начальные условия.

Приведенный пример иллюстрирует то общее положение, что начальное состояние системы определяется мгновенным значением всех ее фазовых координат при $k = 0$. Однако при решении разностных уравнений (2.4) и (2.8) необходимо задавать начальные условия по выходным координатам $y_j(kT)$. Эти начальные условия должны быть заданы при положительных значениях аргумента k .

Рассмотрим уравнения, записанные в форме (2.4), т. е. по положительным значениям аргумента k . Пусть наибольший аргумент, с которым координата y_j входит в уравнения (2.4) при $k = 0$, есть N_j . Тогда, как правило, порядок системы N равен сумме всех N_j :

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_n. \quad (2.9)$$

Очевидно, что в уравнениях (2.1) и (2.4) обозначено

$$v = \max \{N_1, N_2, \dots, N_n\}.$$

Начальными условиями при этом являются значения координат системы в моменты времени $k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1$:

$$y_j(0) = y_j^0, \quad y_j(T) = y_j^1, \dots, y_j(N_jT - T) = y_j^{N_j - 1}, \\ j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

Общее число начальных условий равно порядку системы N . Методы получения решения системы (2.4) принципиально не отличаются от способов, применяемых при рассмотрении систем дифференциальных уравнений.

Общее решение неоднородной системы (2.4) представляется в виде суммы ее частного решения $y^*(kT)$ и общего решения $y^{**}(kT)$ соответствующей однородной системы

$$Q(\xi)y(kT) = 0, \quad (2.11) \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Решение последней ищется в виде показательной функции с неизвестным основанием μ и неопределенными коэффициентами c_j :

$$y(kT) = c\mu^k, \quad (2.12)$$

где $c = \|c_1, c_2, \dots, c_n\|'$. Подставляя (2.12) в (2.11) и учитывая, что

$$\zeta\mu^k = \mu^{k+1} = \mu \cdot \mu^k,$$

получаем:

$$Q(\mu)c\mu^k = 0.$$

Поскольку μ^k тождественно отлично от нуля ($\mu^k \neq 0$), приходим к системе однородных линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов c_j ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$Q(\mu)c = 0. \quad (2.13)$$

Эта последняя имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$|Q(\mu)| = 0. \quad (2.14)$$

Будем предполагать, что система разностных уравнений неособенная, т. е. что определитель (2.14) не равен нулю тождественно по аргументу μ . Соотношение (2.14) есть не что иное, как характеристическое уравнение дискретной системы (2.4). Раскрывая определитель (2.14), получаем алгебраическое уравнение относительно μ

$$|Q(\mu)| = \alpha_0\mu^N + \alpha_1\mu^{N-1} + \dots + \alpha_N = 0. \quad (2.15)$$

Степень N полинома (2.15) равна порядку дискретной системы *).

Пусть все N корней характеристического уравнения различны. Обозначим их через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ (случай крат-

*) Определение порядка разностных уравнений, принятое в книге, отличается от используемого обычно в теории разностных уравнений [2, 11] и учитывает возможное наличие нулевых корней характеристического уравнения. В [2, 11] порядок системы определяется как число ненулевых корней уравнения (2.15) (с учетом их кратности). Введенное таким образом определение порядка системы позволяет получить решение, справедливое для всех значений аргумента kT , начиная с $k = 0$. На это обстоятельство авторам указал Я. З. Цышкин.

ных корней рассмотрен в приложении II). Тогда для коэффициентов c_j^l имеем N линейных алгебраических систем, соответствующих всем корням μ_l :

$$Q(\mu_l)c^l = 0, \quad (2.16)$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

Ранг каждой из матриц $Q(\mu_l)$ равен $n - 1$. Поэтому в каждой из систем (2.16) можно выразить $n - 1$ компонент вектора c^l через одну, например через первую. Соответствующие формулы аналогичны (1.7) и (1.8) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} c^l &= c_1^l \|1, \beta_{2,2}^l, \beta_{3,2}^l, \dots, \beta_{n,2}^l\|', \\ \beta_{j^l} &= \frac{Q_{1j}(\mu_l)}{Q_{11}(\mu_l)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \quad l = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

где Q_{ij} — алгебраическое дополнение элемента q_{ij} матрицы Q . Общее решение однородной системы является суммой линейно независимых частных решений (2.12)

$$y^{**}(kT) = \sum_{l=1}^N c^l \mu_l^k \quad (2.18)$$

и включает N произвольных постоянных $c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^N$ т. е. столько же, сколько начальных условий (2.10).

Остановимся более подробно на случае нулевого корня, появляющегося, если определитель матрицы коэффициентов q_{ij}^v обращается в нуль:

$$|q_{ij}^v| = 0.$$

Если корень $\mu_N = 0$ простой, то общее решение однородной системы (2.11) необходимо записать в виде

$$y^{**}(kT) = \sum_{l=1}^{N-1} c^l \mu_l^k + c^N \delta_{0,k}, \quad (2.19)$$

где $\delta_{0,k}$ — символ Кронекера.

Неопределенные коэффициенты c_j^N ($j = 1, 2, \dots, n$) в силу уравнения (2.16) связаны зависимостью

$$Q(0)c^N = 0. \quad (2.20)$$

Так как ранг матрицы $Q(0)$ равен $n - 1$, то из уравнений (2.20) все коэффициенты c_j^N можно выразить через первый, c_1^N . С учетом (2.17) получаем общее решение, зависящее от N произвольных постоянных. Случай кратного нулевого корня рассмотрен в приложении II. Формально (2.19) следует из формулы (2.18), если считать $0^0 = 1$. Тогда $0^k = \delta_{0,k}$.

Для отыскания частного решения исходной неоднородной системы введем понятие весовой матрицы. При этом естественнее использовать запись уравнений в форме (2.8). Пусть l -й входной сигнал $r_l(kT)$ равен функции Кронекера $\delta_{0,k}$, а остальные входы равны нулю:

$$\begin{aligned} r_l(kT) = \delta_{0,k} &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0, \end{array} \right\} \\ r_j(kT) = 0 & \quad \text{при } j \neq l. \end{aligned} \quad (2.21)$$

При этом предполагается, что до подачи внешнего сигнала, т. е. при $k < 0$, система находилась в покое:

$$y(kT) = 0, \quad k < 0. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.21) в уравнения системы (2.8), получим:

$$\sum_{j=0}^n \hat{q}_{ij}(\xi) y_j(kT) = \hat{p}_{il}(\xi) \delta_{k,0} \quad (2.23)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Поясним смысл правой части (2.23). По определению оператора опережения

$$\hat{p}_{il}(\xi) \delta_{k,0} = p_{il}^1 \delta_{k-1,0} + p_{il}^2 \delta_{k-2,0} + \dots + p_{il}^v \delta_{k-v,0}.$$

Поэтому

$$\hat{p}_{il}(\xi) \delta_{k,0} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } k \leq 0, \\ p_{il}^1 & \text{при } k = 1, \\ \dots & \dots \\ p_{il}^v & \text{при } k = v, \\ 0 & \text{при } k \geq v + 1. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Решение системы (2.23), удовлетворяющее соотношению (2.22), определяет l -й столбец весовой матрицы.

Весовую матрицу $G(kT) = \|g_{ij}(kT)\|_1^n$ получим, придавая индексу l все значения от $l = 1$ до $l = n$. По определению весовая матрица удовлетворяет соотношению

$$G(kT) = 0 \quad \text{при} \quad k < 0, \quad (2.25)$$

являющемуся условием физической реализуемости системы. Это условие обеспечивает равенство нулю $y(kT)$ для моментов времени, предшествующих появлению входного сигнала.

Реакция системы на произвольное внешнее воздействие $r(kT)$ в силу принципа суперпозиции записывается как

$$y^*(kT) = \sum_{j=0}^k G(kT - jT)r(jT), \quad (2.26)$$

где принято $r(jT) = 0$ при $j < 0$. С учетом (2.25) последнее соотношение можно также представить в виде бесконечной суммы

$$y^*(kT) = \sum_{j=0}^{\infty} G(kT - jT)r(jT). \quad (2.27)$$

Очевидно, что (2.27) является дискретным аналогом интегральной свертки (1.18).

Соотношение (2.27), выражающее реакцию системы на произвольное внешнее воздействие при нулевых начальных условиях, является одним из частных решений неоднородной системы (2.4). Общее решение, содержащее N произвольных постоянных, можно записать как

$$\begin{aligned} y(kT) &= y^*(kT) + y^{**}(kT) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} G(kT - jT)r(jT) + \sum_{l=1}^N c^l \mu_l^k, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где

$$c^l = c_1^l \|1, \beta_2^l, \dots, \beta_n^l\|'.$$

Таким образом, реакция системы на произвольное внешнее воздействие может быть представлена в виде

суммы двух составляющих. Первая сумма в (2.28) — вынужденная составляющая движения — определяется характером внешнего воздействия и не зависит от начальных условий. Вторая сумма определяет свободное движение, вызванное ненулевыми начальными условиями и не зависящее от внешнего воздействия.

Отметим, что начальные условия (2.10) определяются состоянием системы до подачи внешнего сигнала $r(kT)$. Поэтому при нахождении постоянных c_1^l ($l = 1, 2, \dots, N$) необходимо подставлять в (2.10) лишь свободную составляющую движения

$$n_j^{* *}(kT) = y_j^k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

Вследствие того, что весовая матрица $G(kT)$ отлична от нуля при $k \geq 0$, выходные координаты системы $y_j(kT)$ при действии внешнего сигнала в моменты времени $k = 0, 1, 2, \dots$ могут отличаться от значений y_j^k . Ситуация здесь полностью аналогична непрерывному случаю, когда действие возмущения $r(t)$ вызывает при $t = 0$ скачкообразные изменения некоторых производных выходного сигнала. В случае нулевых начальных условий все постоянные c_1^l равны нулю.

Введем понятие *дискретной передаточной матрицы* системы, описываемой разностными уравнениями (2.4) и (2.8). Для этого в (2.28) примем начальные условия нулевыми и применим к полученному равенству z -преобразование [12, 44]:

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} y(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z^{-k} G(kT - jT) r(jT). \quad (2.30)$$

При этом под z -преобразованием вектора $y(kT)$ понимается вектор z -преобразований его составляющих:

$$y_l(z) = Z \{y_l(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} y_l(kT),$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

Изменив в (2.30) порядок суммирования, перепишем это соотношение в виде

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k-j)} G(kT - jT) r(jT) z^{-j}.$$

Производя далее замену переменных, т. е. вводя вместо k новую переменную $k_1 = k - j$, и учитывая свойство физической реализуемости системы (2.25), получим:

$$y(z) = \hat{G}(z) r(z), \quad (2.31)$$

где $r(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} r(jT)$ — z -преобразование входного сигнала системы, а $\hat{G}(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} z^{-k_1} G(k_1T)$ — дискретная переда-

точная матрица. Элементы передаточной матрицы определяются, очевидно, как изображения элементов весовой матрицы $G(kT)$:

$$\hat{g}_{ij}(z) = Z \{g_{ij}(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}(kT) z^{-k}. \quad (2.32)$$

Более простым путем матрица $\hat{G}(z)$ может быть найдена непосредственно по известной системе разностных уравнений. Применив z -преобразование к системе (2.8) при нулевых начальных условиях и воспользовавшись теоремой запаздывания [44, 48], получим:

$$\hat{Q}(z) y(z) = \hat{P}(z) r(z), \quad (2.33)$$

где

$$\hat{Q}(z) = \|\hat{q}_{ij}(z)\|_1^n = Q^0 + Q^1 z^{-1} + \dots + Q^v z^{-v},$$

$$\hat{P}(z) = \|\hat{p}_{ij}(z)\|_1^n = P^1 z^{-1} + \dots + P^v z^{-v}.$$

Умножая (2.33) слева на $\hat{Q}^{-1}(z)$ и сравнивая результат с

(2.31), получим формулу для дискретной передаточной матрицы $\hat{G}(z)$

$$\hat{G}(z) = \hat{Q}^{-1}(z) \hat{P}(z). \quad (2.34)$$

Передаточная матрица (2.34) является рациональной матрицей аргумента z , записанной по отрицательным степеням z . Если умножить уравнения (2.33) на z^v и уже после этого определить передаточную матрицу как $Q^{-1}(z) \times \times P(z)$, то получим запись $G(z)$ по положительным степеням z

$$G(z) = Q^{-1}(z)P(z). \quad (2.35)$$

Очевидно, что обе записи (2.34) и (2.35) эквивалентны. Поэтому «шапка» над матричными полиномами и рациональными матрицами в дальнейшем обычно будет опускаться.

Между весовой $G(kT)$ и передаточной $G(z)$ матрицами существует взаимно однозначное соответствие, определенное прямым и обратным z -преобразованиями:

$$G(z) = Z \{G(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} G(kT) z^{-k}, \quad (2.36)$$

$$G(kT) = Z^{-1} \{G(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^k G(z) \frac{dz}{z};$$

здесь интеграл берется по замкнутому контуру γ , охватывающему все особые точки (полюсы) $G(z)$. Условие физической реализуемости, которое в общем случае можно записать в виде (2.25), накладывает ограничение на соотношение степеней числителей и знаменателей элементов $G(z)$. Действительно, раскладывая $G(z)$ в ряд Лорана с центром в точке $z = 0$, получим:

$$G(z) = \dots G_{-2}z^2 + G_{-1}z + G_0 + G_1z^{-1} + G_2z^{-2} + \dots \quad (2.37)$$

Сравнение (2.37) с определением z -преобразования (2.32) дает при учете (2.25):

$$\begin{aligned} G_k &= G(kT), & k &= 0, 1, 2, \dots, \\ G_{-k} &= 0, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

Условие равенства нулю всех коэффициентов разложения G_{-k} означает требование того, чтобы все элементы матрицы $G(z)$, записанные по положительным степеням z , имели степени числителей не выше степеней знаменателей. Это и есть *условие физической реализуемости*, которому должна удовлетворять дискретная передаточная матрица любой реальной системы. В случае, если дискретная система содержит непрерывную часть, включенную на выходе, обычно будет предполагаться несколько большее, а именно что степени всех числителей $G(z)$ по крайней мере на единицу меньше степеней соответствующих знаменателей. Для весовой матрицы это означает, что дополнително к (2.25) $G(kT) = 0$ при $k = 0$.

Использование z -преобразования позволяет записать общее решение уравнений (2.4), описывающее реакцию системы на произвольное внешнее воздействие при любых начальных условиях, в форме

$$y(kT) = Z^{-1} \{G(z)r(z)\} + \sum_{l=1}^N c^l \mu_l^k. \quad (2.39)$$

Дискретная передаточная матрица $G(z)$ является такой же характеристикой дискретной системы, какой для непрерывного случая является передаточная матрица $G(p)$. Матрица $G(z)$ не отражает всех свойств системы в вырожденном случае, когда во всех элементах $G(z)$ происходит сокращение общего множителя числителей и знаменателей.

Пример 2.1. Уравнения дискретной системы записываются в форме

$$\left. \begin{aligned} (\xi + q_{11})y_1(kT) + q_{12}y_2(kT) &= r_1(kT), \\ \zeta q_{21}y_1(kT) + (\zeta^2 + \zeta q_{22})y_2(kT) &= r_2(kT), \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

где коэффициенты $q_{11} = 1$, $q_{12} = 0,5$, $q_{21} = -7,5$, $q_{22} = -3$. Характеристический определитель системы имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) &= \mu[\mu^2 + (q_{11} + q_{22})\mu + (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21})] = \\ &= \mu(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2). \end{aligned}$$

Для заданных значений коэффициентов его нули

$$\mu_1 = 0,5, \quad \mu_2 = 1,5, \quad \mu_3 = 0.$$

Запишем общее решение однородной системы в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1^{**}(kT) &= c_1^1 \mu_1^k + c_1^2 \mu_2^k + c_1^3 \mu_3^k, \\ y_2^{**}(kT) &= c_2^1 \mu_1^k + c_2^2 \mu_2^k + c_2^3 \mu_3^k. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Связь между константами найдем из первого уравнения (2.40)

$$\begin{aligned} \frac{c_2^1}{c_1^1} &= \beta_2^1 = \frac{q_{12}}{\mu_1 - q_{11}} = -1, \\ \frac{c_2^2}{c_1^2} &= \beta_2^2 = \frac{q_{12}}{\mu_2 - q_{11}} = 1, \\ \frac{c_2^3}{c_1^3} &= \beta_2^3 = -\frac{q_{12}}{q_{11}} = -0,5. \end{aligned}$$

Поэтому (2.41) переписывается как

$$\left. \begin{aligned} y_1^{**}(kT) &= c_1^1 \mu_1^k + c_1^2 \mu_2^k + c_1^3 \delta_{0,k}, \\ y_2^{**}(kT) &= -c_1^1 \mu_1^k + c_1^2 \mu_2^k - 0,5 c_1^3 \delta_{0,k}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Для нахождения трех постоянных c_1^1 , c_1^2 и c_1^3 имеем начальные условия по переменным y_1 и y_2 :

$$y_1(0) = y_1^0, \quad y_2(0) = y_2^0, \quad y_2(T) = y_2^1.$$

Передаточная матрица системы $G(z)$ равна $Q^{-1}(z)$:

$$G(z) = Q^{-1}(z) = \left\| \begin{array}{cc} \frac{(z + q_{22})}{\Delta_1(z)} & \frac{-q_{12}}{\Delta(z)} \\ \frac{-q_{21}}{\Delta_1(z)} & \frac{z + q_{11}}{\Delta(z)} \end{array} \right\|, \quad (2.43)$$

где $\Delta(z) = z\Delta_1(z) = z(z - \mu_1)(z - \mu_2)$.

Весовая матрица системы находится по $G(z)$ с помощью формулы обращения

$$G(kT) = \|g_{ij}(kT)\|_1^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^k G(z) \frac{dz}{z}.$$

Вычисляя обратное z -преобразование от элементов $G(z)$, находим:

$$g_{11}(kT) = \begin{cases} 5\mu_1^k - \mu_2^k & \text{при } k \geq 1, \\ 0 & \text{при } k \leq 0, \end{cases}$$

$$g_{21}(kT) = \begin{cases} -7,5\mu_1^k + 7,5\mu_2^k & \text{при } k \geq 2, \\ 0 & \text{при } k \leq 1, \end{cases}$$

$$g_{12}(kT) = \begin{cases} 0,5\mu_1^k - 0,5\mu_2^k & \text{при } k \geq 3, \\ 0 & \text{при } k \leq 2, \end{cases}$$

$$g_{22}(kT) = \begin{cases} -1,5\mu_1^k + 2,5\mu_2^k & \text{при } k \geq 2, \\ 0 & \text{при } k \leq 1. \end{cases}$$

Общее решение при произвольных начальных условиях и произвольных внешних сигналах записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1(kT) &= \sum_{j=0}^{k-1} g_{11}(kT-jT)r_1(jT) + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-3} g_{12}(kT-jT)r_2(jT) + y_1^{**}(kT), \\ y_2(kT) &= \sum_{j=0}^{k-2} g_{21}(kT-jT)r_1(jT) + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-2} g_{22}(kT-jT)r_2(jT) + y_2^{**}(kT). \end{aligned} \right\} (2.44)$$

§ 2.2. Пространство состояний и характеристики дискретных систем

Помимо характеристик «вход — выход», т. е. весовой и передаточной матриц, для описания дискретной системы можно ввести понятие состояния системы и пространства состояний. Ситуация здесь точно такая же, что и в непрерывном случае. Состояние дискретной системы определяется конечным набором величин, образующих вектор, а совокупность векторов порождает пространство состояний. Минимальное количество этих величин, достаточное для определения положения системы в любой момент времени, дает размерность пространства состояний.

Математическим аппаратом, адекватным описанию системы в терминах пространства состояний, является система разностных уравнений первого порядка. Эта система может быть записана в одной из следующих эквивалентных форм:

$$\left. \begin{aligned} x(kT + T) &= Fx(kT) + Hr(kT), \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x(kT) &= Fx(kT - T) + Hr(kT - T), \\ y(kT) &= Cx(kT), \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

где $r = \|r_1, r_2, \dots, r_n\|'$ и $y = \|y_1, y_2, \dots, y_n\|'$ — векторы входных и выходных сигналов, $x = \|x_1, x_2, \dots, x_N\|'$ — вектор состояния системы, а F , H и C — матрицы коэффициентов, имеющие размеры $N \times N$, $N \times n$ и $n \times N$.

Всегда имеющийся произвол в выборе базиса пространства состояний означает возможность перехода к новым фазовым координатам:

$$\tilde{x}(kT) = Sx(kT), \quad |S| \neq 0,$$

где $S = \|s_{ij}\|_1^N$ — неособая квадратная матрица. Уравнения (2.45) в новом базисе имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}(kT + T) &= F\tilde{x}(kT) + \tilde{H}r(kT), \\ y(kT) &= C\tilde{x}(kT), \end{aligned} \right\}$$

где, очевидно, \tilde{F} , \tilde{H} и \tilde{C} определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= SFS^{-1}, \\ \tilde{H} &= SH, \\ \tilde{C} &= CS^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Система (2.47) при условиях (2.48) эквивалентна (2.45).

Для получения общего решения системы (2.45) можно повторить почти полностью все рассуждения § 1.2, предшествующие формуле (1.52), и получить:

$$x(kT) = (F)^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} (F)^{k-j-1} Hr(jT), \quad (2.49)$$

где через $(F)^k$ обозначена k -я степень матрицы F . Не останавливаясь подробно на получении (2.49), рассмотрим только специфику, присущую разностным уравнениям (2.45).

Как неоднократно отмечалось, общие свойства систем разностных уравнений и их решений в основном аналогичны соответствующим свойствам дифференциальных уравнений. Имеется, однако, и принципиальное различие между этими двумя типами систем. Разностные уравнения являются, по существу, алгебраическими соотношениями, точнее, рекуррентными формулами для последовательного определения значений координат. Это свойство разностных уравнений наиболее выпукло выступает при записи их в форме (2.45).

Действительно, полагая в (2.45) $k = 0$, получаем значение выхода системы в момент времени $t = T$ при заданных начальных условиях $x(0)$:

$$\left. \begin{aligned} x(T) &= Fx(0) + Hr(0), \\ y(T) &= Cx(T). \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Для следующего момента времени вычисление проводится с использованием результата первого шага:

$$\left. \begin{aligned} x(2T) &= Fx(T) + Hr(T), \\ y(2T) &= Cx(2T). \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Этот процесс может быть продолжен неограниченно и представляет собой простой алгоритм построения реше-

ния «шаг за шагом». Заметим, что указанная процедура дает нечто большее, чем алгоритм вычисления. Так, исключая значения фазовых координат на промежуточных шагах, легко прийти к соотношению (2.49), т. е. получить общее решение системы.

Для решения разностных уравнений «шаг за шагом» не обязательно переходить к форме записи (2.45), а можно непосредственно воспользоваться уравнениями (2.4) или (2.8). Это сделать особенно просто, если матрица Q^0 неособая, так как тогда без ограничения общности можно считать $Q^0 = I_{n \times n}$. Перепишем при этом условия уравнения (2.8) в виде, разрешенном относительно $y(kT)$,

$$y(kT) = (P^1 \zeta^{-1} + P^2 \zeta^{-2} + \dots + P^v \zeta^{-v}) r(kT) - \\ - (Q^1 \zeta^{-1} + Q^2 \zeta^{-2} + \dots + Q^v \zeta^{-v}) y(kT) \quad (2.52)$$

или в развернутой форме

$$y_l(kT) = \sum_{j=1}^n [p_{lj}^1 r_j(kT - T) + \dots + p_{lj}^v r_j(kT - vT)] - \\ - \sum_{j=1}^n [q_{lj}^1 y_j(kT - T) + \dots + q_{lj}^v y_j(kT - vT)], \quad (2.53)$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

Формулы (2.52) — (2.53) представляют собой линейные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить текущие значения выходных координат по конечному числу прошлых значений входов и выходов (начальных условий). Это — алгоритм вычисления с обратной связью.

Хотя все свойства дискретных систем могут быть установлены, если пользоваться любой из форм записи уравнений (2.4), (2.8), (2.45), (2.46), все же часто удобнее основываться на системе уравнений первого порядка. В связи с этим возникает вопрос о сведении уравнений (2.4) к виду (2.45). Это может быть сделано различными способами, приводящими к эквивалентным системам. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что одним из возможных путей является простой перенос на разностные уравнения метода, изложенного в § 1.2.

Фазовые координаты x_j^l вводятся с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} x^v(kT) &= Q^0 y(kT), \\ x^{v-1}(kT) &= Q^1 y(kT) + x^v(kT + T) - P^1 r(kT), \\ x^{v-2}(kT) &= Q^2 y(kT) + x^{v-1}(kT + T) - P^2 r(kT), \\ &\dots \\ x^1(kT) &= Q^{v-1} y(kT) + x^2(kT + T) - P^{v-1} r(kT). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Исходное уравнение (2.4) с учетом (2.54) дает:

$$0 = Q^v y(kT) + x^1(kT + T) - P^v r(kT). \quad (2.55)$$

Если матрица Q^0 неособая, $|Q^0| \neq 0$, то, исключая $y(kT)$ из (2.54), (2.55), приходим к системе вида (2.45), где соответствующие матрицы

$$\left. \begin{aligned} F &= \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & - & Q^v (Q^0)^{-1} \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & - & Q^{v-1} (Q^0)^{-1} \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & - & Q^{v-2} (Q^0)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & I & - & Q^1 (Q^0)^{-1} \end{array} \right\|, \\ H &= \left\| \begin{array}{c} P^v \\ P^{v-1} \\ \vdots \\ P^1 \end{array} \right\|, \quad C = \|0, 0, \dots, (Q^0)^{-1}\|. \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Процедура исключения $y_j(kT)$ в случае особой матрицы Q^0 аналогична рассмотренной выше для непрерывного случая. Порядок N системы разностных уравнений равен при этом рангу матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} Q^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q^1 & Q^0 & 0 & \dots & 0 \\ Q^2 & Q^1 & Q^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q^{v-1} & Q^{v-2} & Q^{v-3} & & Q^0 \end{array} \right\|. \quad (2.57)$$

Пример 2.2. Рассмотрим уравнения (2.40) примера 2.1. Соответствующие матрицы

$$Q^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad Q^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix},$$

$$Q^2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P^2 = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Перейдем от системы (2.40) к уравнениям первого порядка. В соответствии с (2.54) имеем:

$$x_1^2 = 0, \quad x_2^2(kT) = y_2(kT),$$

$$x_1^1(kT) = y_1(kT),$$

$$x_2^1(kT) = q_{21}y_1(kT) + q_{22}y_2(kT) + x_2^2(kT + T),$$

$$0 = q_{11}y_1(kT) + q_{12}y_2(kT) + x_1^1(kT + T) - r_1(kT),$$

$$0 = x_2^1(kT + T) - r_2(kT).$$

Переписывая эти соотношения в виде системы (2.45), окончательно получим:

$$x_1^1(kT + T) = -q_{11}x_1^1(kT) - q_{12}x_2^2(kT) + r_1(kT),$$

$$x_2^1(kT + T) = r_2(kT),$$

$$x_2^2(kT + T) = -q_{21}x_1^1(kT) - q_{22}x_2^2(kT) - x_2^1(kT),$$

$$y_1(kT) = x_1^1(kT),$$

$$y_2(kT) = x_2^2(kT).$$

§ 2.3. Определение дискретных характеристик объекта и корректирующих устройств

В предыдущих параграфах настоящей главы предполагалось, что дискретная система описывается разностными уравнениями, причем указывалось, что эти уравнения позволяют описывать процессы и при наличии в системе непрерывных звеньев. Настоящий параграф посвящен

выяснению смысла дискретного описания непрерывных систем и способам получения их дискретных моделей.

Общее решение системы дифференциальных уравнений, записанное в форме (1.15) или (1.53), определяет выход системы при произвольных начальных условиях и произвольном изменении во времени вектора входных сигналов. Очевидно, что эти соотношения могут быть использованы и для дискретных систем управления, когда управляющий (входной) сигнал непрерывной части квантуется по времени. Тем не менее при исследовании дискретных систем целесообразно использовать другие характеристики, существенным образом учитывающие дискретный характер управляющих воздействий. Такими характеристиками являются система разностных уравнений и дискретная передаточная матрица.

Цифровое управляющее устройство оперирует лишь с дискретными значениями сигналов, т. е. с процессами, квантованными по времени. Для управления непрерывным объектом необходимо преобразовать дискретную последовательность чисел, вырабатываемую ЦВМ, в непрерывный управляющий сигнал $r(t)$. Эта операция осуществляется устройством, обычно называемым формоимпульсным элементом.

В зависимости от способа экстраполяции управляющего сигнала на промежуток времени до следующего поступления сигнала различают несколько типов формоимпульсных элементов. Простейшим из них является фиксатор, т. е. устройство, запоминающее дискретный сигнал на все время такта. Такой способ формирования управляющего сигнала обычно применяется при управлении с помощью ЦВМ. Поэтому в дальнейшем, когда будет идти речь о дискретных характеристиках непрерывной системы, всегда будет предполагаться, что формоимпульсный элемент является фиксатором. Это допущение, разумеется, не является принципиальным и принято лишь для конкретизации изложения. Все дальнейшие выводы могут быть повторены для любых иных способов формирования импульсов.

Рассмотрим разомкнутую импульсную систему, состоящую из n импульсных элементов и некоторой непрерывной части (объекта) (рис. 2.2). Импульсные элементы, включенные на входе, представлены в виде последователь-

ного соединения идеальных ключей и фиксаторов $w_0(p)$. Ключи k_1, k_2, \dots, k_n замыкаются периодически с периодом T , синхронно и синфазно.

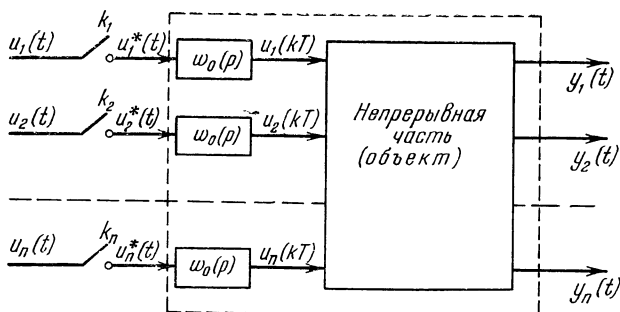


Рис. 2.2.

Идеальный ключ модулирует непрерывный входной сигнал последовательностью импульсных δ -функций, так что на выходе l -го ключа имеем:

$$u_l^*(t) = \delta_T(t) u_l(t), \quad (2.58)$$

где

$$\delta_T(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - jT).$$

Фиксатор превращает последовательность δ -функций в прямоугольные импульсы, имеющие ширину T и амплитуду, равную интенсивности δ -функции, т. е. $u_l(kT)$. Таким образом, на выходе импульсных элементов (на входе непрерывной части) получается ступенчатая функция, значения которой в дискретные моменты времени совпадают с величиной входных сигналов (рис. 2.3). Передаточная функция фиксатора

$$w_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

Рассмотрим теперь дискретные характеристики системы рис. 2.2. Дискретные характеристики устанавливают соответствие между значениями входных и выходных сигналов в дискретные моменты времени $t = kT$ (k — целое).

Пусть непрерывная часть системы описывается дифференциальными уравнениями вида (1.1) или (1.41). При этом входной сигнал $r(t)$ является ступенчатым:

$$r(t) = u(kT), \quad kT \leq t < kT + T. \quad (2.59)$$

Обратимся сначала к форме записи дифференциальных уравнений непрерывной части (1.41). Решение (1.52) с учетом (1.54) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= X(t-t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t-\tau)Br(\tau)d\tau, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы. Полагая

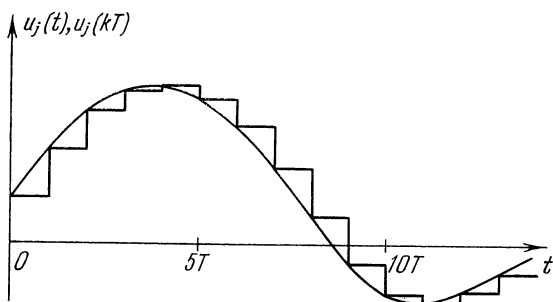


Рис. 2.3.

в последнем выражении $t_0 = kT$, $r(t) = u(kT)$, запишем для $kT \leq t < kT + T$

$$x(t) = X(t-kT)x(kT) + \left[\int_{kT}^t X(t-\tau)Bd\tau \right] u(kT). \quad (2.61)$$

Формула (2.61) позволяет последовательно вычислять значения фазовых координат $x(t)$ и выхода $y(t)$ для любого момента времени t по известным дискретным значениям управляющего сигнала $u(kT)$. При этом значения фазовых координат x в конце каждого такта определяют начальные условия для следующего такта.

В дальнейшем нас будет интересовать выходной сигнал только в дискретные моменты времени, кратные T . Если $t = kT + T$, то (2.61) дает:

$$x(kT + T) = X(T)x(kT) + \left[\int_0^T X(\tau)Bd\tau \right] u(kT). \quad (2.62)$$

Вводя обозначения матриц

$$X(T) = e^{AT} = F, \quad \int_0^T X(\tau)Bd\tau = \int_0^T e^{A\tau}Bd\tau = H, \quad (2.63)$$

приходим к разностным уравнениям с постоянными коэффициентами, записанным в виде системы первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} x(kT + T) &= Fx(kT) + Hu(kT), \\ y(kT) &= Cx(kT). \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Уравнения (2.64) дают связь между дискретными значениями входных и выходных сигналов объекта и являются дискретной моделью непрерывной части системы.

Очевидно, что порядок системы разностных уравнений (2.64) равен порядку исходной системы (1.41), так как размерность вектора x сохранилась. Кроме того, матрица F является неособой. Последнее следует из формулы Лиувилля [37]:

$$|F| = |X(T)| = e^{T \text{Sp}A} \neq 0, \quad (2.65)$$

где $\text{Sp}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$ — след матрицы A .

Перейдем к описанию дискретных характеристик «вход — выход». Для этого введем понятие приведенной непрерывной части (ПНЧ) [48], как последовательного соединения самой непрерывной части (объекта) и формоимпульсных элементов (рис. 2.2). Передаточная матрица ПНЧ, очевидно, имеет вид

$$G(p) = w_0(p)G^1(p), \quad (2.66)$$

где $G^1(p)$ — передаточная матрица непрерывной части, а $w_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$ — передаточная функция фиксатора.

Обратное преобразование Лапласа от $G(p)$ есть весовая функция ПНЧ:

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}. \quad (2.67)$$

На основании (1.18) и (2.58) представим выходной сигнал системы с учетом свойств δ -функции в виде

$$y(t) = \int_0^{\infty} G(t - \tau) u^*(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} G(t - jT) u(jT). \quad (2.68)$$

При написании (2.68) начальные условия, очевидно, приняты нулевыми.

Применим к (2.68) преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} y(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \sum_{j=0}^{\infty} G(t - jT) u(jT) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} G(t - jT) u(jT) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Производя в последнем равенстве замену переменных $t_1 = t - jT$ и учитывая условие физической реализуемости для $G(t)$ (1.17), получим

$$\begin{aligned} y(p) &= \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} G(t_1) u(jT) e^{-p(t_1 + jT)} dt_1 = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt_1} G(t_1) dt_1 \sum_{j=0}^{\infty} u(jT) e^{-pjT}. \quad (2.69) \end{aligned}$$

Последний множитель в (2.69) представляет собой обычное преобразование Лапласа от непрерывной функции, промодулированной δ -функциями, и называется дискретным преобразованием Лапласа $\mathcal{L}^*\{u(t)\}$:

$$u^*(p) = \mathcal{L}^*\{u(t)\} = \mathcal{L}\{u^*(t)\} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-pjT} u(jT). \quad (2.70)$$

Поэтому (2.69) можно переписать как

$$y(p) = G(p) u^*(p). \quad (2.71)$$

Соотношение (2.71) означает, что изображение выходного сигнала системы (рис. 2.2) по Лапласу равно дискретному преобразованию Лапласа от входного сигнала, умноженному слева на передаточную матрицу ПНЧ.

Положим в (2.68) $t = kT$ (k — целое)

$$y(kT) = \sum_{j=0}^{\infty} G(kT - jT)u(jT)$$

и применим к полученному равенству дискретное преобразование Лапласа:

$$y^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} y(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-pkT} G(kT - jT)u(jT). \quad (2.72)$$

После замены переменных $k - j = k_1$ и изменения порядка суммирования получим

$$y^*(p) = G^*(p)u^*(p), \quad (2.73)$$

где

$$G^*(p) = \sum_{k_1=0}^{\infty} G^*(k_1T) e^{-pk_1T}. \quad (2.74)$$

Матрица $G^*(p)$, определяемая равенством (2.74), называется дискретной передаточной матрицей непрерывной системы. Очевидно, что $G^*(p)$ есть не что иное, как дискретное преобразование Лапласа от весовой матрицы приведенной непрерывной части системы $G(t)$.

Дискретное преобразование Лапласа в соответствии с определениями (2.70), (2.74) является трансцендентной функцией p (рациональной функцией e^{pT}). Вследствие периодичности функции e^{pT} вдоль прямой, параллельной мнимой оси, заключающейся в тождестве

$$e^{\left(p+j\frac{2\pi k}{T}\right)T} = e^{pT} (j = \sqrt{-1}, \quad k - \text{целое}),$$

дискретное преобразование Лапласа является периодической функцией переменной p . Период функций $y^*(p)$,

$u^*(p)$ и $G^*(p)$ при изменении аргумента p вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси, равен частоте квантования сигнала $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. Для устранения этой неоднозначности введем взамен комплексной переменной p новую переменную $z = e^{pT}$. После этого соотношения (2.70), (2.72) и (2.74) переписываются как

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} u(jT), & y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} y(kT), \\ G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} G(kT) z^{-k}, \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

а (2.73) примет вид

$$y(z) = G(z)u(z). \quad (2.76)$$

Дискретное преобразование Лапласа с обозначением $z = e^{pT}$ и есть z -преобразование, введенное в § 2.1. Таким образом, дискретная передаточная матрица системы рис. 2.2 определяется как z -преобразование от весовой матрицы ПНЧ $G(t)$.

По определению (2.75) z -преобразование соотносит каждой непрерывной функции времени ее дискретное изображение:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= Z\{u(t)\}, \\ y(z) &= Z\{y(t)\}, \\ G(z) &= Z\{G(t)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

В силу взаимной однозначности преобразования Лапласа можно считать также, что z -преобразование устанавливает соответствие между дискретными изображениями функций и их изображениями по Лапласу, и писать:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= Z\{u(p)\}, \\ y(z) &= Z\{y(p)\}, \\ G(z) &= Z\{G(p)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

Очевидно, что $u(z)$ и $y(z)$ суть векторы размерности n , составляющие которых определяются как z -преобразова-

ние от составляющих векторов $u(t)$ (или $u(p)$) и $y(t)$ (или $y(p)$). Точно так же элементы матрицы $G(z)$ находятся как z -преобразование от элементов $G(t)$ ($G(p)$):

$$\left. \begin{aligned} u_k(z) &= Z\{u_k(t)\} = Z\{u_k(p)\}, \\ y_l(z) &= Z\{y_l(t)\} = Z\{y_l(p)\}, \\ g_{kl}(z) &= Z\{g_{kl}(t)\} = Z\{g_{kl}(p)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Для определения $u_k(z)$ и $g_{kl}(z)$ могут использоваться обычные таблицы z -преобразования.

Дискретное преобразование Лапласа (z -преобразование) применяется при анализе дискретных систем так же широко, как обычное преобразование Лапласа при исследовании непрерывных. Основные свойства дискретного преобразования Лапласа предполагаются известными читателю. Здесь же остановимся лишь на некоторых деталях, существенных для дальнейшего. В частности, отметим, что z -преобразование рациональной функции аргумента p , представляющей собой правильную дробь, в свою очередь также является рациональной функцией z и правильной дробью. Полюсам функции $p = p_k$ на плоскости p соответствуют полюсы $z_k = e^{p_k T}$ на плоскости z (для нулей такого соответствия не существует). Изображение большинства функций имеет степень числителя на единицу меньше степени знаменателя. Поэтому дискретная передаточная матрица $G(z)$ является рациональной, ее элементы имеют полюсы $z_k = e^{p_k T}$, соответствующие полюсам элементов $G(p)$, и степень числителя на единицу меньше степени знаменателя.

Учитывая наличие фиксатора, передаточную матрицу можно определять в соответствии с формулой

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G^1(p)}{p} \right\}. \quad (2.80)$$

Числители и знаменатели элементов матрицы $G(z)$ могут быть записаны как по положительным, так и по отрицательным степеням z . В последнем случае имеем:

$$G(z) = \|g_{kl}(z)\|_1^n = z^{-1} \left\| \frac{s_{kl}(z)}{r_{kl}(z)} \right\|_1^n, \quad (2.81)$$

где

$$r_{kl}(z) = 1 + \beta_{kl}^1 z^{-1} + \dots + \beta_{kl}^v z^{-v},$$

$$s_{kl}(z) = \alpha_{kl}^0 + \alpha_{kl}^1 z^{-1} + \dots + \alpha_{kl}^{v-1} z^{-v+1},$$

а v — наивысшая из степеней знаменателей $r_{kl}(z)$. Некоторые из коэффициентов α_{kl}^μ , β_{kl}^μ могут быть равны нулю, но по крайней мере один из β_{kl}^v ($kl, l = 1, 2, \dots, n$) отличен от нуля.

Для нахождения $G(z)$ по формуле (2.80) можно применить разложение матрицы $G^1(p) / p$ на простейшие дроби. В случае простых полюсов матрицы $G^1(p) / p$ имеем:

$$\frac{1}{p} G^1(p) = \frac{1}{p} \bar{R}(0) + \sum_{\mu=1}^v \bar{R}(\lambda_\mu) \frac{1}{p - \lambda_\mu}, \quad (2.82)$$

где

$$\bar{R}(0) = \lim_{p \rightarrow 0} G^1(p) = G^1(0),$$

$$\bar{R}(\lambda_\mu) = \lim_{p \rightarrow \lambda_\mu} \left[\frac{p - \lambda_\mu}{p} G^1(p) \right]. \quad (2.83)$$

Воспользовавшись известной формулой

$$Z \left\{ \frac{1}{p - \lambda_\mu} \right\} = \frac{1}{1 - d_\mu z^{-1}}, \quad \text{где } d_\mu = e^{\lambda_\mu T},$$

перепишем (2.80) в виде

$$G(z) = \bar{R}(0) + \sum_{\mu=1}^v \frac{1 - z^{-1}}{1 - d_\mu z^{-1}} \bar{R}(\lambda_\mu) =$$

$$= \bar{R}(0) + \sum_{\mu=1}^v \frac{z - 1}{z - d_\mu} \bar{R}(\lambda_\mu). \quad (2.84)$$

Приведя дроби в (2.84) к общему знаменателю, нетрудно убедиться в том, что коэффициенты при старшей (v -й)

степени полиномов числителей образуют нулевую матрицу

$$\tilde{R}(0) + \sum_{\mu=1}^{\nu} \tilde{R}(\lambda_{\mu}) = 0_{n \times n}. \quad (2.85)$$

Действительно, левая часть (2.85) есть не что иное, как сумма вычетов матрицы $G^1(p) / p$ во всех полюсах комплексной плоскости p . Учитывая (2.85), перепишем окончательно (2.84) в виде

$$G(z) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{d_{\mu} - 1}{z - d_{\mu}} \tilde{R}(\lambda_{\mu}). \quad (2.86)$$

Пусть, так же как и ранее, полюсы $G^1(p)$ простые, но среди них имеется нулевой. Это соответствует наличию интегратора в одном или нескольких (в частности, во всех) каналах непрерывной части. Тогда последняя формула несколько видоизменится. Обозначим

$$G^1(p) = \frac{1}{p} G^2(p),$$

где $G^2(0)$ конечно. Разложение на простейшие дроби в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} G^1(p) = \frac{1}{p^2} G^2(p) &= \frac{1}{p^2} G^2(0) + \frac{1}{p} \tilde{R}(0) + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{1}{p - \lambda_{\mu}} \tilde{R}(\lambda_{\mu}), \end{aligned} \quad (2.87)$$

где

$$G^2(0) = \lim_{p \rightarrow 0} p G^1(p) = R(0),$$

а $\tilde{R}(\lambda_{\mu})$ — вычеты при $p = \lambda_{\mu}$ матрицы $G^1(p) / p$. Общее число полюсов $G^1(p)$, включая нулевой, как и ранее, обозначено через ν . Вычисляя $G(z)$ по формуле (2.80) и учитывая (2.85), получим:

$$G(z) = \frac{T}{z - 1} R(0) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{1 - d_{\mu}}{z - d_{\mu}} \tilde{R}(\lambda_{\mu}). \quad (2.88)$$

Отметим, что $\tilde{R}(\lambda_\mu)$ в (2.86) и (2.88) — это не что иное, как вычеты передаточной матрицы непрерывной части $G^1(p)$, деленные на λ_μ :

$$\tilde{R}(\lambda_\mu) = \frac{1}{\lambda_\mu} R(\lambda_\mu). \quad (2.89)$$

Дискретную передаточную матрицу $G(z)$ можно получить также из системы разностных уравнений (2.64). Переходя в (2.64) от временной области к изображениям при нулевых начальных условиях и пользуясь теоремой сдвига

$$Z\{x(kT + T)\} = zx(z),$$

запишем:

$$\left. \begin{aligned} zx(z) &= Fx(z) + Hu(z), \\ y(z) &= Cx(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Исключая вектор фазовых координат $x(z)$, получим связь изображений «вход — выход»:

$$y(z) = G(z)u(z) = C[Iz - F]^{-1}Hu(z). \quad (2.91)$$

Таким образом, передаточная матрица системы выражается через коэффициенты уравнений (2.64) как

$$G(z) = C[Iz - F]^{-1}H. \quad (2.92)$$

Пример 2.3. Непрерывная система описывается уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} (D + q_{11})y_1 + q_{12}y_2 &= p_{11}r_1 + p_{12}r_2, \\ q_{21}y_1 + (D + q_{22})y_2 &= p_{21}r_1 + p_{22}r_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

где

$$\begin{aligned} q_{11} &= 1, & q_{12} &= 0,5, & q_{21} &= 1,5, & q_{22} &= 2, \\ p_{11} &= 0,8, & p_{12} &= 0,4, & p_{21} &= 1, & p_{22} &= 0,3. \end{aligned}$$

Передаточная матрица непрерывной части для этого случая была получена в примере 1.10 (см. соотношения (1.148))

$$G^1(p) = \frac{1}{p - \lambda_1} R(\lambda_1) + \frac{1}{p - \lambda_2} R(\lambda_2),$$

где

$$R(\lambda_1) = \begin{vmatrix} 0,35 & 0,225 \\ -0,35 & -0,225 \end{vmatrix}, \quad R(\lambda_2) = \begin{vmatrix} 0,45 & 0,175 \\ 1,35 & 0,525 \end{vmatrix},$$

а $\lambda_1 = -0,5$, $\lambda_2 = -2,5$.

Вычеты матрицы $G^1(p) / p$ в точках λ_1 и λ_2

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}(\lambda_1) &= \frac{1}{\lambda_1} R(\lambda_1) = \begin{vmatrix} -0,7 & -0,45 \\ 0,7 & 0,45 \end{vmatrix} \\ \bar{R}(\lambda_2) &= \frac{1}{\lambda_2} R(\lambda_2) = \begin{vmatrix} -1,125 & -0,4375 \\ -3,375 & -1,3425 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (2.94)$$

Пусть период дискретности $T = 0,2$ сек. Дискретную передаточную матрицу получим, подставив (2.94) в (2.86) и приведя полученные дроби к общему знаменателю:

$$G(z) = \begin{vmatrix} \frac{0,1374z - 0,1045}{(z - 0,905)(z - 0,6065)} & \frac{0,0703z - 0,0509}{(z - 0,905)(z - 0,6065)} \\ \frac{0,1459z - 0,1519}{(z - 0,905)(z - 0,6065)} & \frac{0,0398z - 0,0487}{(z - 0,905)(z - 0,6065)} \end{vmatrix}. \quad (2.95)$$

Переходим к рассмотрению характеристик дискретных корректирующих устройств. Если для управления непрерывным объектом используется цифровая вычислительная машина, естественно рассматривать случай, когда корректирующие устройства реализуются в виде программы ЦВМ. Наиболее общим случаем линейной программы управления является программа с обратной связью, когда выходной сигнал корректирующего устройства в каждый момент времени формируется как линейная комбинация конечного числа значений входных и выходных данных.

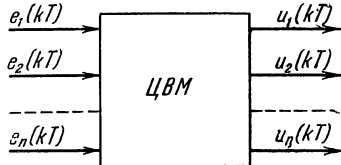


Рис. 2.4.

Пусть на вход ЦВМ (рис. 2.4) поступает совокупность сигналов (вектор) $e(kT) = \|e_1(kT), e_2(kT), \dots, e_n(kT)\|'$,

а выходом является $u(kT) = \|u_1(kT), u_2(kT), \dots, u_n(kT)\|'$.

Корректирующее устройство, формирующее n управляющих сигналов по измеренным дискретным значениям n входных сигналов, может в общем случае состоять из n^2 независимых одномерных звеньев (см. рис. 2.5, где $n = 2$).

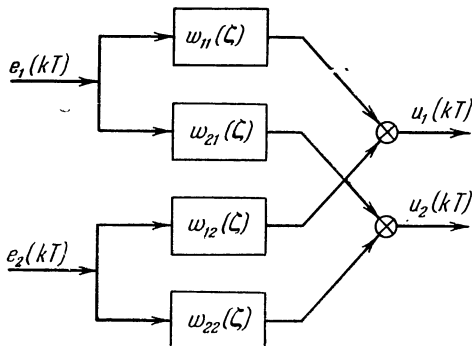


Рис. 2.5.

Выходной сигнал каждого из звеньев $u_{ij}(kT)$ получается как линейное преобразование с обратной связью от входного сигнала $e_j(kT)$. Это преобразование дается оператором $w_{ij}(\zeta)$, являющимся рациональной функцией ζ :

$$u_{ij}(kT) = w_{ij}(\zeta) e_j(kT), \quad (2.96)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Сигналы с одинаковым первым индексом суммируются, образуя управляющее воздействие $u_i(kT)$ (см. рис. 2.5):

$$u_i(kT) = \sum_{j=1}^n u_{ij}(kT). \quad (2.97)$$

Операторы $w_{ij}(\zeta)$ должны быть физически реализуемы. Это означает, что для вычисления $u_{ij}(kT)$ не должна использоваться информация о будущих значениях сигнала. Для реализуемости корректора необходимо и достаточно, чтобы операторы $w_{ij}(\zeta)$, записанные по степеням ζ^{-1} , не

имели в знаменателе множителя ζ^{-1} :

$$w_{ij}(\zeta) = \frac{m_{ij}(\zeta)}{n_{ij}(\zeta)} = \frac{m_{ij}^0 + m_{ij}^1 \zeta^{-1} + \dots + m_{ij}^l \zeta^{-l}}{1 + n_{ij}^1 \zeta^{-1} + \dots + n_{ij}^l \zeta^{-l}}. \quad (2.98)$$

Введя матрицу $W(\zeta) = \|w_{ij}(\zeta)\|_1^n$, запишем (2.96) и (2.97) в виде

$$u(kT) = W(\zeta)e(kT). \quad (2.99)$$

Очевидно, что передаточная матрица определенного таким образом корректирующего устройства равна $W(z)$, так что связь между z -преобразованиями векторов e и u определяется формулой

$$u(z) = W(z)e(z). \quad (2.100)$$

§ 2.4. Управляемость, наблюдаемость и идентификации дискретных систем. Каноническая структура многомерной дискретной системы

Дальнейшее рассмотрение динамических свойств дискретной системы связано с привлечением идей и понятий, связанных с управляемостью и наблюдаемостью. Исследование системы с этой точки зрения позволит выяснить те обстоятельства, при которых передаточная матрица не является ее исчерпывающей характеристикой. Понятия управляемости и наблюдаемости переносятся на дискретный случай достаточно тривиальным образом. Не останавливаясь на деталях, приведем лишь некоторые результаты, которые будут использованы в дальнейшем.

Дискретная система, подобно непрерывной (см. § 1.3), в общем случае может содержать четыре части. Это означает, что в разностных уравнениях (2.47) при некотором выборе базиса могут быть выделены четыре группы:

$$\left. \begin{aligned} \zeta x^1 &= F^{11}x^1 + F^{12}x^2 + F^{13}x^3 + F^{14}x^4 + H^1 r, \\ \zeta x^2 &= \quad \quad F^{22}x^2 \quad \quad \quad + F^{24}x^4 + H^2 r, \\ \zeta x^3 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad F^{33}x^3 + F^{34}x^4, \\ \zeta x^4 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad F^{44}x^4, \\ y(kT) &= C^2 x^2 + C^4 x^4, \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

где $x^l(kT)$ — вектор размерности v_l ($l = 1, 2, 3, 4$), а сумма всех v_l равна порядку системы N . Управляющий сигнал $r(kT)$ не действует на фазовые координаты третьей и четвертой групп ($l = 3, 4$), которые образуют часть, называемую неуправляемой. В то же время фазовые координаты первой и третьей групп не участвуют в формировании выхода системы $y(kT)$ и относятся по этой причине к ненаблюдаемой части.

Все фазовые координаты образуют четыре группы:

$$x(kT) = \begin{pmatrix} x^1(kT) \\ x^2(kT) \\ x^3(kT) \\ x^4(kT) \end{pmatrix},$$

которые определяют следующие части системы:

- 1) управляемую, но ненаблюдаемую (часть I);
- 2) управляемую и наблюдаемую часть (часть II);
- 3) неуправляемую и ненаблюдаемую (часть III);
- 4) неуправляемую, но наблюдаемую (часть IV).

Характеристический полином системы (2.101) разбивается на четыре множителя:

$$|I\xi - F| = \begin{vmatrix} I\xi - F^{11} & -F^{12} & -F^{13} & -F^{14} \\ 0 & I\xi - F^{22} & 0 & -F^{24} \\ 0 & 0 & I\xi - F^{33} & -F^{34} \\ 0 & 0 & 0 & I\xi - F^{44} \end{vmatrix} = \\ = |I\xi - F^{11}| \cdot |I\xi - F^{22}| \cdot |I\xi - F^{33}| \cdot |I\xi - F^{44}|, \quad (2.102)$$

каждый из которых соответствует одной из частей системы.

Для определения передаточной матрицы системы $K(z)$ перейдем к z -преобразованию уравнений (2.101) при нулевых начальных условиях. Учитывая, что при этом для $x^3(kT)$ и $x^4(kT)$ имеется только тривиальное решение

$$x^3(kT) \equiv 0, \quad x^4(kT) \equiv 0,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} zx^1(z) &= F^{11}x^1(z) + F^{12}x^2(z) + H^1r(z), \\ zx^2(z) &= F^{22}x^2(z) + H^2r(z), \\ y(z) &= C^2x^2(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

После исключения $x^2(z)$ найдем:

$$K(z) = C^2[Iz - F^{22}]^{-1}H^2. \quad (2.104)$$

Таким образом, передаточная матрица системы

$$K(z) = C[Iz - F]^{-1}H = C^2[Iz - F^{22}]^{-1}H^2$$

определяется лишь полностью управляемой и наблюдаемой частью системы (частью II). Свойства остальных частей не находят своего отражения в передаточной матрице вследствие сокращения соответствующих множителей в числителе и знаменателе всех элементов $K(z)$.

Так же как и в непрерывном случае, будем называть систему невырожденной, если она состоит только из части II, и вырожденной в противном случае. Для суждения о свойствах системы нет необходимости приводить уравнения к виду (2.101). Можно также применить критерии, аналогичные непрерывному случаю (см. (1.93) — (1.94)), к системе, записанной в любом базисе, причем:

а) размерность управляемой части системы ($v_1 + v_2$) равна рангу матрицы

$$U = \|H, FH, \dots, (F)^{n-1}H\|_{N \times nN}; \quad (2.105)$$

б) размерность наблюдаемой части системы ($v_2 + v_4$) равна рангу матрицы

$$V = \|C', F'C', \dots, (F')^{n-1}C'\|_{N \times nN}. \quad (2.106)$$

В дальнейшем при исследовании вопросов устойчивости нужно будет знать, каким образом изменяются части системы при замыкании ее единичной обратной связью. Пусть уравнения (2.101) описывают разомкнутую систему. Чтобы подчеркнуть это, заменим в (2.101) $r(kT)$ на $e(kT)$:

$$\left. \begin{aligned} \zeta x^1 &= F^{11}x^1 + F^{12}x^2 + F^{13}x^3 + F^{14}x^4 + H^1e, \\ \zeta x^2 &= F^{22}x^2 + F^{24}x^4 + H^2e, \\ \zeta x^3 &= F^{33}x^3 + F^{34}x^4, \\ \zeta x^4 &= F^{44}x^4, \\ y &= C^2x^2 + C^4x^4. \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

Замкнутую систему с жесткой отрицательной обратной связью получим, положив

$$e(kT) = r(kT) - y(kT), \quad (2.108)$$

где $r(kT)$ — входной сигнал замкнутой системы. Подставим (2.108) в (2.107):

$$\left. \begin{aligned} \zeta x^1 &= F^{11}x^1 + (F^{12} - H^1C^2)x^2 + F^{13}x^3 + (F^{14} - H^1C^4)x^4 + H^1r, \\ \zeta x^2 &= (F^{22} - H^2C^2)x^2 + (F^{24} - H^2C^4)x^4 + H^2r, \\ \zeta x^3 &= F^{33}x^3 + F^{34}x^4, \\ \zeta x^4 &= F^{44}x^4, \\ y &= C^2x^2 + C^4x^4. \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

Передаточная матрица замкнутой системы равна

$$H(z) = C^2[Iz - F^{22} + H^2C^2]^{-1}H^2. \quad (2.110)$$

Характеристический определитель замкнутой системы

$$\Delta(z) = |Iz - F^{11}| \cdot |Iz - F^{22} + H^2C^2| \cdot |Iz - F^{33}| \times \\ \times |Iz - F^{44}| \quad (2.111)$$

имеет нули, равные:

- а) полюсам $H(z)$;
- б) собственным значениям матриц F^{11} , F^{33} и F^{44} , определяющих части I, III и IV разомкнутой системы.

Последнее обстоятельство показывает, что замыкание вырожденной системы единичной обратной связью изменяет расположение лишь тех нулей характеристического определителя, которые соответствуют ее управляемой и наблюдаемой части (части II), и не изменяет всех остальных нулей. Открытым, однако, остается вопрос о том, не приводит ли такое замыкание к уменьшению размерности части II. Другими словами, все ли нули определителя $|Iz - F^{22} + H^2C^2|$ являются полюсами передаточной матрицы $H(z)$ (2.110).

Для одномерной ($n=1$) и двумерной ($n=2$) систем нетрудно показать, что введение единичной обратной связи не приводит к сокращению размерности части II системы. Интуитивные соображения говорят за то, что подобная ситуация имеет место при любом n . Однако получить доказательство в общем случае авторам не удалось. В дальнейшем при рассмотрении систем с обратной связью будем считать, что введение обратной связи не приводит к дополнительному вырождению системы.

Во многих случаях нас не будут интересовать детали структуры системы. Существенным будет лишь один вопрос: является система вырожденной или нет. Решение этой более простой задачи тесно связано с проблемой идентификации.

Задача идентификации есть задача определения системы разностных уравнений наименьшего порядка, соответствующей заданной передаточной матрице. Для непрерывного случая она подробно обсуждалась в § 1.4. При рассмотрении дискретного случая можно воспользоваться аналогией с непрерывным вариантом, которая неоднократно отмечалась ранее.

Один из возможных путей решения задачи связан с введением главных координат и канонической диагональной формы передаточной матрицы системы. Пусть многомерное звено (объект или корректор) имеет передаточную матрицу $K(z) = \|k_{ij}(z)\|_1^n$, являющуюся рациональной и неособой. Эта матрица соответствует физически реализуемой системе. Поэтому каждый из элементов $k_{ij}(z)$ имеет степень числителя не выше степени знаменателя.

Переходя к записи элементов $k_{ij}(z)$ матрицы $K(z)$ по отрицательным степеням z , можно в общем случае представить их в виде

$$k_{ij}(z) = \frac{a_{ij}^0 + a_{ij}^1 z^{-1} + \dots + a_{ij}^{\kappa} z^{-\kappa}}{1 + b_{ij}^1 z^{-1} + \dots + b_{ij}^{\kappa} z^{-\kappa}}, \quad (2.112)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где κ — наивысшая из степеней z^{-1} в числителе и знаменателе всех элементов $K(z)$. Очевидно, что некоторые из коэффициентов a_{ij}^l и b_{ij}^l могут быть равны нулю.

Введем оператор системы $K(\zeta)$, получаемый из передаточной матрицы $K(z)$ заменой z^{-1} на оператор запаздывания ζ^{-1} . Вход $r(kT)$ и выход $y(kT)$ системы связаны при этом соотношением

$$y(kT) = K(\zeta)r(kT). \quad (2.113)$$

Матрица $K(\zeta)$ всегда может быть приведена к канонической диагональной форме так, как это указано в

приложении I:

$$\begin{aligned}
 K(\zeta) &= S(\zeta) V(\zeta) T(\zeta) = \\
 &= S(\zeta) \operatorname{diag} \left\{ \frac{\varphi_1(\zeta)}{\psi_1(\zeta)}, \frac{\varphi_2(\zeta)}{\psi_2(\zeta)}, \dots, \frac{\varphi_n(\zeta)}{\psi_n(\zeta)} \right\} T(\zeta), \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

где:

а) $S(\zeta)$ и $T(\zeta)$ — матрицы полиномов от оператора запаздывания ζ^{-1} с определителями

$$|T(\zeta)| = t = \text{const}, \quad |S(\zeta)| = s = \text{const},$$

не зависящими от ζ^{-1} ;

б) $V(\zeta)$ — диагональная рациональная матрица;

в) $\varphi_l(\zeta)$ и $\psi_l(\zeta)$ ($l = 1, 2, \dots, n$) — взаимно простые полиномы. Свободный член полиномов $\psi_l(\zeta)$ равен единице;

г) полином $\varphi_n(\zeta)$ имеет наивысшую степень среди всех $\varphi_l(\zeta)$ ($l = 1, 2, \dots, n-1$) и каждый $\varphi_l(\zeta)$ делится без остатка на $\varphi_{l-1}(\zeta)$;

д) полином $\psi_1(\zeta)$ имеет наивысшую степень среди всех $\psi_l(\zeta)$ и каждый $\psi_l(\zeta)$ ($l = 2, 3, \dots, n$) является делителем $\psi_{l-1}(\zeta)$. Рациональная матрица $V(\zeta)$, удовлетворяющая свойствам б) — д), называется канонической.

Представим $V(\zeta)$ в виде

$$\begin{aligned}
 V(\zeta) &= \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\psi_1(\zeta)}, \dots, \frac{1}{\psi_n(\zeta)} \right\} N^{-1}(\zeta) N(\zeta) \times \\
 &\quad \times \operatorname{diag} \{ \varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_n(\zeta) \}, \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

где $N(\zeta)$ — произвольная элементарная матрица, $|N(\zeta)| = \text{const}$. Подставляя (2.115) и (2.114) в (2.113), умножим полученное выражение слева на $N \operatorname{diag} \{ \psi_1, \dots, \psi_n \} S^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 N(\zeta) \operatorname{diag} \{ \psi_1(\zeta), \dots, \psi_n(\zeta) \} S^{-1}(\zeta) y(kT) &= \\
 &= N(\zeta) \operatorname{diag} \{ \varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_n(\zeta) \} T(\zeta) r(kT). \quad (2.116)
 \end{aligned}$$

После введения очевидных обозначений найдем:

$$Q(\zeta) y(kT) = P(\zeta) r(kT), \quad (2.117)$$

где $Q(\zeta)$ и $P(\zeta)$ — матрицы полиномов от оператора запаздывания ζ^{-1} . Система (2.117) и является решением поставленной задачи идентификации.

Полученная система разностных уравнений имеет вид (2.8), т. е. записана по отрицательным степеням оператора ζ . Если за основу взять матрицу $K(\zeta)$, числители и знаменатели которой записаны как полиномы от оператора опережения ζ , то указанный метод решения задачи приведет к системе (2.4).

В случае простых полюсов $K(\zeta)$ можно воспользоваться вторым способом решения задачи идентификации — методом разложения передаточной матрицы на простейшие дроби. Процедура решения полностью аналогична изложенной в § 1.4 и приводит к системе

$$\left. \begin{aligned} \zeta x(kT) &= Fx(kT) + Hr(kT), \\ y(kT) &= Cx(kT) + Br(kT) \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

при равенстве степеней числителей и знаменателей элементов $K(\zeta)$ и к системе (2.45)

$$\begin{aligned} \zeta x(kT) &= Fx(kT) + Hr(kT), \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned}$$

в случае, когда степени числителей меньше степени соответствующих знаменателей. Так же как и в непрерывном случае, нетрудно убедиться в том, что порядок полученной системы равен сумме рангов вычетов матрицы $K(z)$ во всех полюсах.

Пример 2.4. Рассмотрим задачу определения уравнений по дискретной передаточной матрице, вычисленной в примере 2.3. Представим $G(\zeta)$ (2.95) в виде

$$G(\zeta) = \frac{1}{q(\zeta)} R(\zeta), \quad (2.119)$$

где

$$\begin{aligned} q(\zeta) &= (\zeta - 0,905)(\zeta - 0,6065) = \zeta^2 - 1,511\zeta + 0,5488, \\ R(\zeta) &= \|r_{ij}(\zeta)\|_1^n = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} 0,1374\zeta - 0,1045 & 0,0703\zeta - 0,0509 \\ 0,1459\zeta - 0,1519 & 0,0398\zeta - 0,0487 \end{array} \right\| \quad (2.120) \end{aligned}$$

Отметим, что определитель матрицы $R(\zeta)$ только постоянным множителем отличается от $q(\zeta)$, т. е. от знаменателя

$G(\zeta)$. Это становится очевидным, если вспомнить формулу (2.86), по которой находилась матрица $G(\zeta)$. Вычеты в точках $\zeta = d_1 = 0,905$ и $\zeta = d_2 = 0,6065$ равны соответственно $(d_1 - 1)\bar{R}(\lambda_1)$ и $(d_2 - 1)\bar{R}(\lambda_2)$ и имеют в соответствии с (2.94) ранг, равный единице. Поэтому определитель $|R(\zeta)|$ имеет нули $\zeta = d_1$ и $\zeta = d_2$. Будем решать задачу идентификации, пользуясь записью передаточной матрицы по положительным степеням ζ . Первый шаг связан с приведением квадратной полиномиальной матрицы $R(\zeta)$ к каноническому диагональному виду. Для этого приведения воспользуемся обычным методом. Введем обозначения для элементов $R(\zeta)$

$$r_{ij}(\zeta) = a_{ij}\zeta - b_{ij}.$$

Приведение $R(\zeta)$ к диагональной форме может быть выполнено в пять этапов.

1. Умножим вторую строку на $-\frac{a_{11}}{a_{21}}$ и сложим с первой, что равносильно умножению $R(\zeta)$ слева на

$$S^1(\zeta) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{a_{11}}{a_{21}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получим:

$$\begin{aligned} S^1(\zeta)R(\zeta) &= \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{a_{21}}b_{21} - b_{11} & \left(a_{12} - \frac{a_{11}}{a_{21}}\right)\zeta - \left(b_{12} - \frac{a_{11}}{a_{21}}b_{22}\right) \\ a_{21}\zeta - b_{21} & a_{22}\zeta - b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} b_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)}\zeta - b_{12}^{(1)} \\ a_{21}\zeta - b_{21} & a_{22}\zeta - b_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Умножим первый столбец полученной матрицы на $-\frac{a_{12}^{(1)}\zeta - b_{12}^{(1)}}{b_{11}^{(1)}}$ и сложим со вторым, что эквивалентно

умножению справа на

$$T^1(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{a_{12}^{(4)}\xi - b_{12}^{(4)}}{b_{11}^{(4)}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получим:

$$S^1(\xi)R(\xi)T^1(\xi) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} b_{11}^{(4)} & 0 \\ a_{21}\xi - b_{21} & a_{22}\xi - b_{22} - (a_{21}\xi - b_{21})\frac{a_{12}^{(4)}\xi - b_{12}^{(4)}}{b_{11}^{(4)}} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} b_{11}^{(4)} & 0 \\ a_{21}\xi - b_{21} & -a_{22}^{(2)}\xi + b_{22}^{(2)}\xi - c_{22}^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3. Умножим первую строку полученной матрицы на $-\frac{a_{21}\xi - b_{21}}{b_{11}^{(4)}}$ и сложим со второй, что равносильно умножению слева на

$$S^2(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}\xi - b_{21}}{b_{11}^{(4)}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Получим:

$$S^2S^1RT^1 = \begin{vmatrix} b_{11}^{(4)} & 0 \\ 0 & -a_{22}^{(2)}\xi^2 + b_{22}^{(2)}\xi - c_{22}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

4. Умножим первую строку на $\frac{1}{b_{11}^{(4)}}$, т. е. умножим сле-

ва на

$$S^3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{b_{11}^{(4)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получим:

$$S^3 S^2 S^1 R T^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_{22}^{(2)} \zeta^2 + b_{22}^{(2)} \zeta - c_{22}^{(2)} \end{vmatrix}$$

5. Умножим второй столбец на $-\frac{1}{a_{22}^{(2)}}$, т. е. умножим справа на

$$T^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_{22}^{(2)}} \end{vmatrix}.$$

Получим:

$$\begin{aligned} S^3 S^2 S^1 R T^1 T^2 &= S^{-1}(\zeta) R(\zeta) T^{-1}(\zeta) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^2 - b_{22}^{(3)} \zeta + c_{22}^{(3)} \end{vmatrix} = \Theta(\zeta). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Проведя числовой расчет, приходим к следующим значениям введенных матриц:

$$\left. \begin{aligned} S^{-1}(\zeta) &= S^3 S^2 S^1 = \begin{vmatrix} 25,907 & -24,396 \\ -3,78\zeta + 3,935 & 3,594\zeta - 2,706 \end{vmatrix}, \\ T^{-1}(\zeta) &= T^1 T^2 = \begin{vmatrix} 1 & 6,854\zeta - 1,044 \\ 0 & -8,066 \end{vmatrix} \\ \Theta(\zeta) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^2 - 1,511\zeta + 0,5488 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q(\zeta) \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

Матрицы $S(\zeta)$ и $T(\zeta)$ получим, вычислив обратные

матрицы для $S^{-1}(\zeta)$ и $T^{-1}(\zeta)$:

$$\left. \begin{aligned} S(\zeta) &= \left\| \begin{array}{cc} 0,1374\zeta - 0,1045 & 0,9417 \\ 0,1459\zeta - 0,1519 & 1 \end{array} \right\| \\ T(\zeta) &= \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0,8497\zeta - 0,1295 \\ 0 & -0,124 \end{array} \right\| \end{aligned} \right\} \quad (2.123)$$

Формула (2.121) дает:

$$R(\zeta) = S(\zeta) \Theta(\zeta) T(\zeta). \quad (2.124)$$

Подставляя (2.124) в (2.119) и учитывая, что $\Theta(\zeta)$ имеет вид (2.122), получаем каноническую диагональную структуру матрицы $G(\zeta)$:

$$G(\zeta) = S(\zeta) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{q(\zeta)}, 1 \right\} T(\zeta), \quad (2.125)$$

где $S(\zeta)$ и $T(\zeta)$ имеют вид (2.123).

Определение уравнений по канонической структуре (2.125) осуществляется уже достаточно просто. Обозначая

$$Q(\zeta) = \operatorname{diag} \{q(\zeta), 1\} S^{-1}(\zeta), \quad P(\zeta) = T(\zeta), \quad (2.126)$$

получим:

$$Q(\zeta) y(kT) = P(\zeta) r(kT),$$

где в соответствии с (2.122) и (2.123)

$$Q(\zeta) = \left\| \begin{array}{cc} 25,91q(\zeta) & -24,40q(\zeta) \\ -3,780\zeta + 3,935 & 3,594\zeta - 2,706 \end{array} \right\|,$$

$$P(\zeta) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0,8497\zeta - 0,1295 \\ 0 & -0,124 \end{array} \right\|,$$

а $q(\zeta) = \zeta^2 - 1,511\zeta + 0,5516$. Умножая второе уравнение (2.126) на $\frac{3,780}{25,91} \zeta = \frac{3,594}{24,40} \zeta$ и складывая с первым, получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} (-12,27\zeta + 14,29)y_1(kT) + (18,41\zeta - 13,46)y_2(kT) &= \\ &= r_1(kT) - 0,1295r_2(kT), \\ (3,780\zeta - 3,935)y_1(kT) + \\ + (-3,594\zeta + 2,706)y_2(kT) &= 0,124r_2(kT). \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что передаточная матрица системы (2.127) совпадает с исходной (2.95).

Пример 2.5. Неустойчивый объект управления описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} (D + 1)y_1(t) + 4y_2(t) &= 0,8r_1(t) + 0,4r_2(t), \\ y_1(t) + (D - 2)y_2(t) &= r_1(t) + 0,3r_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Характеристический определитель $|Q(p)| = (p - 2) \times (p + 3)$. Передаточная матрица объекта $G(p)$ равна

$$G(p) = \frac{1}{|Q(p)|} \begin{vmatrix} 0,8p - 5,6 & 0,4p - 2 \\ p + 0,2 & 0,3p - 0,1 \end{vmatrix}.$$

Дискретная передаточная матрица объекта при наличии фиксатора находится по формуле (2.80)

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{p} G(p) \right\} = \\ &= \frac{1}{q(z)} \begin{vmatrix} 0,0620z - 0,315 & 0,0485z - 0,1388 \\ 0,2347z - 0,2257 & 0,0669z - 0,0715 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где

$$\begin{aligned} q(z) &= (z - d_1)(z - d_2) = (z - 0,6703)(z - 1,8221) = \\ &= z^2 - 2,492z + 1,221. \end{aligned}$$

Период дискретности T принят равным $0,2$ сек. Процедура приведения к канонической форме ничем не отличается от рассмотренной в предыдущем примере:

$$G(z) = S(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{q(z)}, 1 \right\} T(z), \quad (2.130)$$

где

$$S(z) = \begin{vmatrix} 0,0627z - 0,3150 & 0,2642 \\ 0,2347z - 0,2257 & 1 \end{vmatrix},$$

$$T(z) = \begin{vmatrix} 1 & -0,1206z + 0,4695 \\ 0 & 0,0283 \end{vmatrix}.$$

Разностные уравнения, соответствующие матрице $G(z)$ (2.129), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (6,0319\zeta - 4,7733)y_1(kT) + (2,6186\zeta + 1,261)y_2(kT) &= \\ &= r_1(kT) + 0,4695r_2(kT), \\ (0,9295\zeta - 0,8837)y_1(kT) + (-0,2456\zeta + 1,2335)y_2(kT) &= \\ &= 0,0283r_2(kT). \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

Рассмотрим приведение к канонической форме для того случая, когда передаточная матрица записана по отрицательным степеням z . Умножая числители и знаменатели элементов $G(z)$ (2.129) на z^{-2} , получим:

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= z^{-1}\hat{G}^1(z) = \\ &= \frac{z^{-1}}{\hat{q}(z)} \left\| \begin{array}{cc} 0,0620 - 0,315z^{-1} & 0,0485 - 0,1388z^{-1} \\ 0,2347 - 0,2257z^{-1} & 0,0699 - 0,0715z^{-1} \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (2.132)$$

где

$$\hat{q}(z) = 1 - 2,492z^{-1} + 1,221z^{-2}.$$

С помощью операций, аналогичных рассмотренным выше, получим:

$$\hat{G}(z) = z^{-1}\hat{S}(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\hat{q}(z)}, 1 \right\} \hat{T}(z), \quad (2.133)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}(z) &= \left\| \begin{array}{cc} 0,0620 - 0,315z^{-1} & 1,396 \\ 0,2347 - 0,2257z^{-1} & 1 \end{array} \right\|, \\ \hat{T}(z) &= \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0,1691 + 0,1468z^{-1} \\ 0 & 0,0272 \end{array} \right\| \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

Рассмотренные способы решения задачи идентификации позволяют построить систему разностных уравнений наименьшего порядка по известной передаточной матрице. Полученное решение является единственным, если эквивалентные системы уравнений считать неразличимыми.

Необходимость написания уравнений по передаточной матрице может возникнуть в ряде случаев. Так, например, для многомерного дискретного корректирующего устройства решение задачи идентификации дает конструктивный

способ реализации корректора на ЦВМ в виде рекуррентных соотношений (2.53). По существу, та же цель преследуется и при решении задачи идентификации для передаточной матрицы объекта, если ставится задача моделирования системы управления с помощью дискретных устройств (например, цифрового дифференциального анализатора ЦДА).

В настоящем параграфе и в § 2.3 были изложены два различных пути получения разностных уравнений для описания динамических свойств ПНЧ. Первый из них (§ 2.3) приводит к системе разностных уравнений (2.64), имеющей тот же порядок, что и исходная непрерывная система. Второй путь — составление разностных уравнений по дискретной передаточной матрице ПНЧ, полученной как z -преобразование от соответствующей непрерывной.

Очевидно, что если исходная непрерывная система содержит неуправляемую и ненаблюдаемую части, т. е. является вырожденной, то вырождена также и ее дискретная модель. В этом случае второй путь приводит к разностным уравнениям меньшего порядка, чем исходная система (1.41). Это означает, что второй путь позволяет получить описание лишь полностью управляемой и наблюдаемой части непрерывной системы, в то время как первый способ дает дискретную модель всей системы.

Остается еще открытым вопрос, не вырождается ли система в результате дискретного характера воздействия на непрерывную часть и дискретного характера наблюдений. Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно сравнить порядки непрерывной и соответствующей дискретной систем.

Пусть непрерывная система не вырождена, а полюсы матрицы $G(p)$ простые. Тогда, как было выяснено, порядок непрерывной системы равен сумме рангов вычетов $\bar{R}(\lambda_\mu)$ матрицы $G(p)$ во всех полюсах. Дискретная передаточная матрица имеет при этом вид (2.86) при отсутствии нулевого полюса и вид (2.88), если $G(p)$ имеет простой полюс в точке $p = 0$. При этом в соответствии с (2.83) и (2.89)

$$\bar{R}(\lambda_\mu) = \lim_{p \rightarrow \lambda_\mu} \left[\frac{p - \lambda_\mu}{p} G(p) \right] = \frac{1}{\lambda_\mu} R(\lambda_\mu). \quad (2.135)$$

Порядок системы разностных уравнений, которые отвечают заданной матрице $G(z)$, равен сумме рангов ее вычетов. В общем случае сумма рангов вычетов $G(z)$ равна в соответствии с выражениями (2.86), (2.88) и (2.135) сумме рангов вычетов $G(p)$, т. е. порядки невырожденной части непрерывной и дискретной систем совпадают.

Покажем, однако, что при наличии комплексных полюсов $G(p)$ и при соответствующем выборе тактности T это совпадение может быть нарушено. Порядок дискретной системы в этом случае оказывается меньшим, чем порядок непрерывной. Действительно, рассмотрим два слагаемых в выражении (2.86) или (2.88), соответствующих двум комплексным значениям λ с одинаковой вещественной частью:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_\mu &= \alpha + j\beta_\mu, \\ \lambda_\nu &= \alpha + j\beta_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

(Это, в частности, могут быть комплексно-сопряженные корни, для которых $\beta_\mu = -\beta_\nu$.) Соответствующие полюсы $G(z)$

$$\left. \begin{aligned} d_\mu &= e^{\lambda_\mu T} = e^{\alpha T} (\cos \beta_\mu T + j \sin \beta_\mu T), \\ d_\nu &= e^{\lambda_\nu T} = e^{\alpha T} (\cos \beta_\nu T + j \sin \beta_\nu T). \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

Очевидно, что при выборе периода дискретности T в соответствии с равенством

$$\beta_\nu - \beta_\mu = \frac{2k\pi}{T}, \quad (2.138)$$

где k — произвольное целое, эти полюсы становятся неразличимыми:

$$d_\nu = d_\mu = e^{\alpha T} (\cos \beta_\mu T + j \sin \beta_\mu T). \quad (2.139)$$

Сумма слагаемых в (2.86) — (2.88), соответствующих этим полюсам, принимает вид

$$\frac{d_\mu - 1}{z - d_\mu} \bar{R}(\lambda_\mu) + \frac{d_\nu - 1}{z - d_\nu} \bar{R}(\lambda_\nu) = \frac{d_\mu - 1}{z - d_\mu} [\bar{R}(\lambda_\mu) + \bar{R}(\lambda_\nu)]. \quad (2.140)$$

В случае, если период дискретности T не удовлетворяет условию (2.138), удельный вес, вносимый каждым полю-

сом d_μ и d_ν в общий порядок системы, равен соответственно рангам матриц $\tilde{R}(\lambda_\mu)$ и $\tilde{R}(\lambda_\nu)$. В случае, если выполняется (2.138), наличие полюса $z = d_\mu = d_\nu$ увеличивает порядок системы на величину, равную рангу суммы матриц $\tilde{R}(\lambda_\mu) + \tilde{R}(\lambda_\nu)$. Поскольку ранг суммы матриц равен или меньше суммы рангов матриц слагаемых [10]

$$\text{rang}[\tilde{R}(\lambda_\mu) + \tilde{R}(\lambda_\nu)] \leq \text{rang} \tilde{R}(\lambda_\mu) + \text{rang} \tilde{R}(\lambda_\nu),$$

то общий порядок системы может уменьшиться.

Таким образом, ясно, что дискретная модель непрерывной системы может вырождаться либо при условии вырожденности непрерывной системы, либо при специальном выборе периода дискретности T из условия (2.138). Вырождение системы в последнем случае есть проявление стробоскопического эффекта, характерного для дискретных систем, и математически связано с периодичностью дискретного преобразования Лапласа вдоль мнимой оси.

Дискретная модель непрерывной системы является полностью управляемой и наблюдаемой (невырожденной), если:

- а) непрерывная система не вырождена;
- б) выполнено условие

$$\beta_\nu - \beta_\mu \neq \frac{2k\pi}{T}, \quad (2.141)$$

где β_ν и β_μ — все возможные мнимые части комплексных полюсов $G(p)$ с одинаковой вещественной частью.

В случае выполнения условия а) условие б) является лишь достаточным, но не необходимым. Поскольку оно имеет вид запрещения равенства, то естественно считать, что оно всегда имеет место.

Пример 2.6. Выполнение неравенства (2.141) является необходимым и достаточным условием невырожденности системы в одномерном случае. Следующий простой пример поясняет природу возникновения вырожденности за счет специального выбора периода дискретности T . Пусть одномерная система имеет передаточную функцию

$$G(p) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Дискретная передаточная функция

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} = \\ = 1 - \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2 - ze^{-\alpha T} \sec \theta \cos(\beta T + \theta)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}, \quad (2.142)$$

где $\theta = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right)$. Очевидно, что при произвольном T передаточная функция $G(z)$ соответствует системе второго порядка и имеет два комплексно-сопряженных полюса

$$\lambda_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$\lambda_2 = -\alpha - j\beta.$$

Если нарушено условие (2.41), т. е.

$$2\beta = \frac{2k\pi}{T},$$

то второе слагаемое в (2.142) принимает вид

$$\frac{(z-1)[z - (-1)^k e^{-\alpha T}]}{[z - (-1)^k e^{-\alpha T}]^2} = \frac{z-1}{z - (-1)^k e^{-\alpha T}}.$$

При этом дискретная модель непрерывной системы вырождается, так как $G(z)$ дает систему лишь первого порядка.

Переход к диагональной структуре (2.114) дискретной передаточной матрицы $K(z)$ позволяет выявить все основные особенности динамики многомерной дискретной системы. Пусть матрица $K(z)$ с помощью левых и правых элементарных операций приведена к диагональной форме (не обязательно канонической)

$$K(z) = S(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1(z)}{q_1(z)}, \dots, \frac{p_n(z)}{q_n(z)} \right\} T(z). \quad (2.143)$$

где:

а) $S(z)$ и $T(z)$ — матрицы полиномов от z^{-1} с определителями, не зависящими от z ;

б) $p_i(z)$ и $q_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — взаимно простые полиномы от z^{-1} ;

в) свободный член всех $q_i(z)$ равен единице.

Воспользуемся операторной записью

$$y(kT) = K(\zeta)r(kT). \quad (2.144)$$

Аналогично тому, как это было сделано в § 1.5 для непрерывного случая, введем *главные координаты* $v_i(kT)$ и $u_i(kT)$ многомерной дискретной системы:

$$\left. \begin{aligned} u(kT) &= T(\zeta)r(kT), \\ v(kT) &= S^{-1}(\zeta)y(kT). \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

В новых координатах уравнения динамики принимают вид

$$\begin{aligned} q_i(\zeta)v_i(kT) &= p_i(\zeta)u_i(kT), \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

т. е. представляют собой совокупность n независимых разностных уравнений. Многомерная система в главных

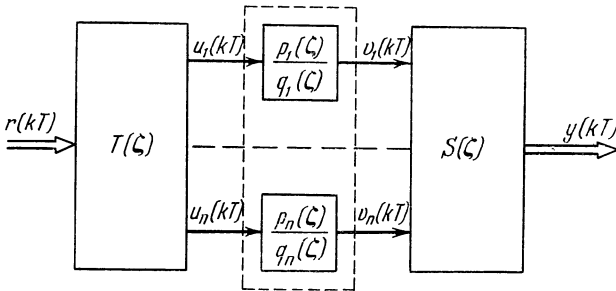


Рис. 2.6.

координатах может поэтому рассматриваться как совокупность одномерных звеньев.

Существенно отметить, что переход от новых координат к старым и обратно не требует решения разностных уравнений. Это следует из того, что матрицы $T(\zeta)$ и $S(\zeta)$ — элементарные.

Структуру системы в главных координатах (рис. 2.6) назовем *канонической структурой* многомерной дискретной системы. Очевидно, что все особенности динамики системы сосредоточены в диагональных звеньях, совокупность которых будем называть поэтому *главной частью* системы.

СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 3.1. Структурные преобразования многомерных систем

Для различных задач анализа и синтеза систем управления часто необходимо определять динамические характеристики всей системы или отдельной ее части по характеристикам составляющих ее звеньев. Иногда требуется решить и обратную задачу — найти характеристики отдельных звеньев (например, корректирующего устройства) по известным динамическим характеристикам других заданных элементов и системы в целом. Все преобразования подобного типа, называемые обычно структурными, наиболее просто и наглядно проводятся в терминах передаточных матриц.

Для многомерной системы переход к ее описанию с помощью одной передаточной матрицы, связывающей вход и выход, представляет собой удобный способ исключения промежуточных переменных из системы дифференциальных или разностных уравнений. При этом в общем случае получаемая передаточная матрица определяет лишь часть системы, а именно, полностью управляемую и наблюдаемую часть.

Под структурой системы понимается способ соединения отдельных многомерных звеньев. В качестве этих звеньев могут выступать как заданная часть (объект), имеющая несколько входов и выходов, так и многомерные корректирующие устройства. Среди различных способов соединения звеньев простейшими являются соединения параллельное, последовательное и соединение с обратной связью.

Параллельным соединением двух многомерных звеньев называется такое соединение, при котором входные сигналы обоих звеньев являются общими, а соответствующие

выходные координаты суммируются. Это соединение изображено на рис. 3.1, где двойная черта означает, что

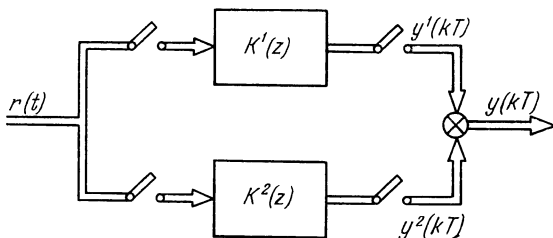


Рис. 3.1.

соответствующий сигнал является вектором. В соответствии с определением

$$\left. \begin{aligned} y^1(z) &= K^1(z)r(z), \\ y^2(z) &= K^2(z)r(z), \\ y(z) &= y^1(z) + y^2(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Очевидно, что передаточная матрица параллельного соединения $K(z)$ равна сумме передаточных матриц звеньев

$$\left. \begin{aligned} y(z) &= K(z)r(z), \\ K(z) &= K^1(z) + K^2(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

При последовательном соединении многомерных звеньев (рис. 3.2) выходные координаты одного из звеньев

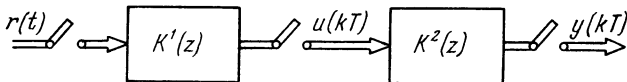


Рис. 3.2.

являются входными для другого:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= K^1(z)r(z), \\ y(z) &= K^2(z)u(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Исключая вектор $u(z)$ из (3.3), получим:

$$y(z) = K^2(z)K^1(z)r(z). \quad (3.4)$$

Таким образом, передаточная матрица последовательного соединения равна произведению передаточных матриц

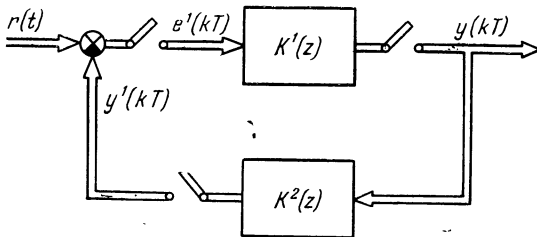


Рис. 3.3.

звеньев, взятых в порядке, обратном их следованию в системе:

$$K(z) = K^2(z)K^1(z). \quad (3.5)$$

Соединение с обратной связью изображено на рис. 3.3. Связь между координатами системы устанавливается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} y(z) &= K^1(z)e^1(z), \\ y^1(z) &= K^2(z)y(z), \\ e^1(z) &= r(z) - y^1(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Исключая из (3.6) $y^1(z)$ и $e^1(z)$, найдем:

$$y(z) = [I + K^1(z)K^2(z)]^{-1}K^1(z)r(z).$$

С другой стороны, исключая из этих же соотношений $y^1(z)$ и $y(z)$, можем записать:

$$e^1(z) = [I + K^2(z)K^1(z)]^{-1}r(z). \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в первое из уравнений (3.6), получим:

$$y(z) = K^1(z)[I + K^2(z)K^1(z)]^{-1}r(z). \quad (3.8)$$

Таким образом, передаточная матрица замкнутой системы может быть записана в виде соотношений:

$$\begin{aligned} H(z) &= [I + K^1(z)K^2(z)]^{-1}K^1(z) = \\ &= K^1(z)[I + K^2(z)K^1(z)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В частности, в случае жесткой обратной связи $K^2(z) = I$, $H(z) = [I + K^1(z)]^{-1}K^1(z) = K^1(z)[I + K^1(z)]^{-1}$. (3.10)

Последняя формула свидетельствует о том, что матрицы $K^1(z)$ и $[I + K^1(z)]^{-1}$ переставимы. Для таких матриц иногда используется обозначение обычной (скалярной) дроби

$$H(z) = \frac{K^1(z)}{I + K^1(z)}.$$

Очевидно, что соотношения, аналогичные (3.1) — (3.10), имеют место и для непрерывных систем, отличающихся от схем (рис. 3.1—3.3) тем, что в них отсутствуют ключи. В частности, для параллельного, последовательного соединения и соединения обратной связью соответственно

$$\left. \begin{aligned} K(p) &= K^1(p) + K^2(p), \\ K(p) &= K^2(p)K^1(p), \\ H(p) &= K^1(p)[I + K^2(p)K^1(p)]^{-1} = \\ &= [I + K^1(p)K^2(p)]^{-1}K^1(p). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

При исследовании дискретных систем управления могут встретиться более сложные случаи, когда на непрерывную часть системы действуют как сигналы, квантованные

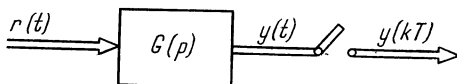


Рис. 3.4.

по времени, так и непрерывные воздействия (например, помехи). В последнем случае выходной сигнал непрерывной части зависит от значений входа во все моменты времени, и понятия дискретной передаточной матрицы не существует. Для схемы рис. 3.4 изображение по Лапласу выходного сигнала $y(t)$ связано с изображением входа $r(t)$ соотношением

$$y(p) = G(p)r(p). \quad (3.12)$$

Поэтому z -преобразование выхода определяется как

$$y(z) = Z\{y(p)\} = Z\{G(p)r(p)\}. \quad (3.13)$$

Известно, что z -преобразование от произведения изображений по Лапласу двух функций не равно произведению их z -преобразований. В дальнейшем для соотношений типа (3.13) будем пользоваться обозначением

$$Z\{G(p)r(p)\} = Gr(z). \quad (3.14)$$

То, что аргумент z указан лишь для последнего сомножителя, как раз и означает, что рассматривается z -преобразование от всего произведения.

Установим связь между входными и выходными сигналами более сложной системы, изображенной на рис. 3.5.

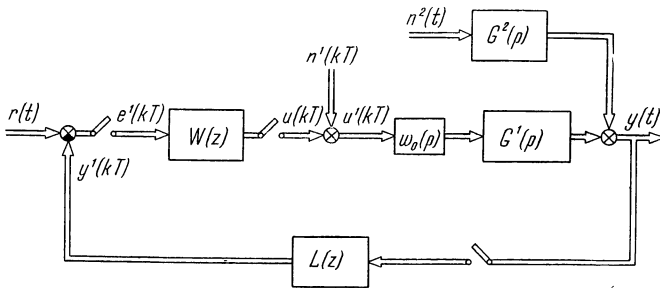


Рис. 3.5.

На заданную непрерывную часть системы действует дискретный управляющий сигнал $u^1(kT)$ и непрерывное внешнее воздействие $n^2(t)$. Передаточные матрицы ПНЧ по отношению к этим сигналам равны $w_0(p)G^1(p)$ и $G^2(p)$, где $w_0(p)$ — передаточная функция формоимпульсного элемента (фиксатора). Дискретные корректирующие устройства $W(z)$ и $L(z)$ включены как в канал ошибки, так и в цепь обратной связи. Помимо $n^2(t)$, внешними воздействиями являются входной сигнал $r(t)$ и помеха $n^1(kT)$; последний сигнал имеет дискретный характер, т. е. действует на систему лишь в моменты времени $t = kT$. Все сигналы являются n -мерными векторами, а передаточные матрицы — квадратными, размера $n \times n$. В соответствии с рис. 3.5 имеем:

$$\left. \begin{aligned} u^1(z) &= W(z)e^1(z) + n^1(z), & y^1(z) &= L(z)y(z), \\ y(z) &= G(z)u^1(z) + G^2n^2(z), & e^1(z) &= r(z) - y^1(z), \end{aligned} \right\} (3.15)$$

где $G(z) = Z\{w_0(p)G^1(p)\}$ и $G^2n^2(z) = Z\{G^2(p)n^2(p)\}$. Исключая в соотношениях (3.15) u^1 , e^1 и y^1 , получим:

$$[I + G(z)W(z)L(z)]y(z) = G(z)W(z)r(z) + G(z)n^1(z) + G^2n^2(z). \quad (3.16)$$

Умножая (3.16) слева на $[I + G(z)W(z)L(z)]^{-1}$, найдем связь между изображениями выходного и входных сигналов:

$$y(z) = H(z)r(z) + H^1(z)n^1(z) + [I + G(z)W(z)L(z)]^{-1} G^2n^2(z), \quad (3.17)$$

где $H(z) = [I + G(z)W(z)L(z)]^{-1}G(z)W(z)$ — дискретная передаточная матрица замкнутой системы, устанавливающая связь между входом системы $r(kT)$ и выходом $y(kT)$, $H^1(z) = [I + G(z)W(z)L(z)]^{-1}G(z)$ — дискретная передаточная матрица, связывающая $n^1(kT)$ и $y(kT)$. Дискретной передаточной матрицы по отношению к непрерывному воздействию $n^2(t)$ не существует. С учетом соотношения (3.9) можно записать для передаточных матриц $H(z)$ и $H^1(z)$ выражения

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= [I + G(z)W(z)L(z)]^{-1}G(z)W(z) = \\ &= G(z)W(z)[I + L(z)G(z)W(z)]^{-1}, \\ H^1(z) &= [I + G(z)W(z)L(z)]^{-1}G(z) = \\ &= G(z)[I + W(z)L(z)G(z)]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Соотношения (3.18) позволяют определить характеристики замкнутой системы «вход — выход» (передаточные матрицы $H(z)$ и $H^1(z)$) по известным передаточным матрицам отдельных звеньев. Пусть требуется решить обратную задачу, а именно, найти передаточную матрицу коррелятора $W(z)$ (или $L(z)$) по заданным характеристикам остальных элементов и всей системы. Например, решая первое из соотношений (3.18) относительно $W(z)$, получим:

$$W(z) = G^{-1}(z)H(z)[I - L(z)H(z)]^{-1} = G^{-1}(z)[I - H(z)L(z)]^{-1}H(z). \quad (3.19)$$

В частности, при наличии единичной обратной связи, когда $L(z) = I$, имеем:

$$W(z) = G^{-1}(z)H(z)[I - H(z)]^{-1} = \\ = G^{-1}(z)[I - H(z)]^{-1}H(z),$$

откуда следует, что матрицы H и $(I - H)^{-1}$ переставимы:

$$W(z) = G^{-1}(z) \frac{H(z)}{I - H(z)}. \quad (3.20)$$

§ 3.2. Устойчивость многомерных систем

Понятие устойчивости систем автоматического управления и динамических систем вообще является одним из важнейших для теории и практики проектирования. Система является устойчивой, если она обладает свойством консерватизма по отношению к своему положению равновесия по всем фазовым координатам. Будучи предоставлена самой себе, устойчивая линейная система всегда возвращается в положение равновесия при любых начальных условиях. Требование устойчивости является необходимым условием работоспособности системы управления, так как только при выполнении условия устойчивости движение системы с течением времени стремится к своей вынужденной составляющей, а свободная составляющая затухает.

Пусть замкнутая дискретная система автоматического управления, часть этой системы или отдельное звено описываются разностными уравнениями типа (2.4) или (2.45), которые перепишем здесь в виде

$$Q(\zeta)y(kT) = P(\zeta)r(kT), \quad (3.21)$$

или

$$\zeta x(kT) = Fx(kT) + Br(kT), \\ y(kT) = Cx(kT), \quad (3.22)$$

где $\zeta = e^{TD}$ — оператор опережения. Выход системы при произвольном входном сигнале и произвольных начальных условиях равен

$$y(kT) = Z^{-1}\{H(z)r(z)\} + \sum_{l=1}^N c^l \mu^k, \quad (3.23)$$

где $H(z) = Q^{-1}(z)P(z) = C[Iz - F]^{-1}B$ — передаточная матрица системы, а μ_l ($l = 1, 2, \dots, N$) — корни характеристического уравнения

$$\Delta(\mu) = |Q(\mu)| = |I\mu - F| = \mu^N + \alpha_1\mu^{N-1} + \dots + \alpha_N = 0. \quad (3.24)$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (3.24) по модулю были меньше единицы:

$$|\mu_l| < 1, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (3.25)$$

В этом случае второе слагаемое в (3.23) с течением времени затухает:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^N c^l \mu_l^k = 0,$$

а выход системы $y(kT)$ стремится к вынужденной составляющей. Хотя общее решение (3.23) написано лишь для простых корней характеристического уравнения (3.24), условие устойчивости (3.25) остается в силе и для общего случая.

Если хотя бы один из корней уравнения (3.24) имеет модуль, больший единицы, $|\mu_i| > 1$, то система не является устойчивой. Свободная составляющая при этом по абсолютной величине неограниченно возрастает. Наличие хотя бы одного из корней, по модулю равного единице, при всех остальных корнях, удовлетворяющих (3.25), соответствует особому случаю системы, находящейся на границе устойчивости.

Отметим, что корни характеристического уравнения (3.24) аналитически зависят от параметров линейной системы, т. е. малому изменению параметров соответствуют лишь малые изменения нулей характеристического уравнения. В случае корней, находящихся на границе устойчивости, линейная система оказывается негрубой [1], так как малейшее изменение параметров может привести к потере устойчивости. Вследствие этого особый случай корней, расположенных на единичной окружности, в дальнейшем будет относиться к нежелательным, и устойчивой будет

называться лишь асимптотически устойчивая система, удовлетворяющая условиям (3.25).

Подчеркнем следующее обстоятельство. Если уравнения (3.21) и (3.22) описывают дискретную модель некоторой непрерывной системы (например, объекта), то для обеих (непрерывной и дискретной) систем устойчивость (или неустойчивость) имеет место одновременно. Действительно, собственные значения μ_l матрицы F определяют устойчивость или неустойчивость дискретной системы. Если соответствующая непрерывная система описывается уравнениями (1.41), то, как было показано в § 2.3, матрица F определяется как

$$F = e^{AT}. \quad (3.26)$$

Известно, что собственные значения функции от матрицы $F = f(A)$ равны той же функции f от собственных значений матрицы-аргумента, т. е. $\mu_l = f(\lambda_l)$. Поэтому

$$\mu_l = e^{\lambda_l T} \quad (l = 1, 2, \dots, N), \quad (3.27)$$

где μ_l — характеристические числа матрицы F , а λ_l — характеристические числа матрицы A . Непрерывная система устойчива, если все λ_l имеют отрицательные вещественные части.

$$\operatorname{Re} \lambda_l < 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N). \quad (3.28)$$

Очевидно, что из (3.28) в силу (3.27) следует (3.25) и наоборот. Это и доказывает высказанное утверждение.

Вернемся к рассмотрению дискретной системы управления в целом. Как было показано выше, система управления может быть вырожденной и содержать в общем случае четыре части (см. § 2.4). При этом характеристический полином дискретной системы (3.22) содержит четыре сомножителя, каждый из которых есть характеристический полином одной из частей:

$$\Delta(\mu) = |I\mu - F^{11}| \cdot |I\mu - F^{22}| \cdot |I\mu - F^{33}| \cdot |I\mu - F^{44}|. \quad (3.29)$$

В соответствии с обозначениями § 2.4 первый сомножитель отвечает управляемой, но ненаблюдаемой части; второй — полностью управляемой и наблюдаемой; третий —

неуправляемой и ненаблюдаемой и, наконец, четвертый — неуправляемой, но наблюдаемой. Для устойчивости системы, как очевидно, требуется, чтобы все N собственных значений матрицы F , т. е. нули всех четырех сомножителей (3.29), имели модули, меньшие единицы.

Рассмотрим передаточную матрицу системы $H(z)$. Ее полюсами являются нули только второго сомножителя полинома (3.29), т. е. корни определителя $|Iz - F^{22}|$. Поэтому в общем случае полюсы передаточной матрицы системы еще не определяют ее устойчивости. Только в случае, когда система полностью управляема и наблюдаема, т. е. состоит только из части II, полюсы передаточной матрицы $H(z)$ дают исчерпывающую информацию об устойчивости системы. Для выполнения условий устойчивости при этом необходимо и достаточно, чтобы все полюсы матрицы $H(z)$ были по модулю меньше единицы, т. е. располагались внутри единичной окружности на комплексной плоскости z (рис. В.8). В общем случае требование расположения полюсов $H(z)$ внутри единичной окружности (в области Γ^+) дает лишь необходимое условие устойчивости. Необходимыми и достаточными условиями по-прежнему являются (3.25).

Остановимся более подробно на том случае, когда заведомо известно, что все звенья системы и система в целом являются полностью управляемыми и наблюдаемыми, т. е. невырожденными. Тогда передаточные матрицы звеньев и системы дают полную информацию о ее динамике, в том числе и об устойчивости. В силу соотношений (3.2) — (3.5) полюсами передаточной матрицы параллельного, последовательного и параллельно-последовательного соединений являются объединения полюсов отдельных звеньев. Поэтому система, в которой отсутствуют обратные связи, устойчива в случае, если устойчивыми являются все звенья, и неустойчива, если хотя бы одно из звеньев неустойчиво.

Отдельно необходимо рассмотреть соединение с обратной связью. При этом для составления характеристического определителя системы можно воспользоваться правилами преобразования структурных схем. Из соотношения (3.9) вытекает, что полюсами передаточной матрицы замкнутой системы (рис. 3.3) являются нули определителя матрицы $I + K^1(z)K^2(z)$. Поэтому замкнутая система

устойчива, если корни ее характеристического уравнения

$$|I + K^1(z)K^2(z)| = 0 \quad (3.30)$$

расположены в области Γ^+ .

Для составления характеристического определителя замкнутой многомерной системы можно воспользоваться обычным методом, применяемым в теории одномерных систем. Размыкая контур управления на входе какого-либо звена, запишем разностные уравнения относительно соответствующей переменной. Так, произведя размыкание на входе $K^1(z)$ (рис. 3.3), получим

$$\left. \begin{aligned} y^1(kT) &= K^2(\zeta)K^1(\zeta)e^1(kT), \\ y^1(kT) &= -e^1(kT), \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

откуда следует, что в случае отсутствия внешних сигналов координата $e^1(kT)$ удовлетворяет системе однородных уравнений

$$[I + K^2(\zeta)K^1(\zeta)]e^1(kT) = 0. \quad (3.32)$$

Характеристическое уравнение системы (3.32) позволяет судить об устойчивости системы управления по координатам $e^1(kT)$. Если нули характеристического полинома $|I + K^2(z)K^1(z)|$ расположены в Γ^+ , то система устойчива.

Характеристическое уравнение в форме (3.30) соответствует размыканию контура управления в другой точке, на входе звена $K^2(z)$. Характеристический полином замкнутой системы не зависит от выбора точки размыкания:

$$|I + K^1(z)K^2(z)| = |I + K^2(z)K^1(z)|. \quad (3.33)$$

Равенство (3.33) является следствием подобия матриц $I + K^1(z)K^2(z)$ и $I + K^2(z)K^1(z)$. В самом деле, очевидно, имеет место соотношение

$$I + K^2(z)K^1(z) = K^2(z)[I + K^1(z)K^2(z)][K_2(z)]^{-1},$$

откуда для определителей получаем равенство (3.33).

Проведя подобные рассуждения для общего случая — контура, состоящего из нескольких многомерных звеньев (рис. 3.6), нетрудно убедиться, что характеристический

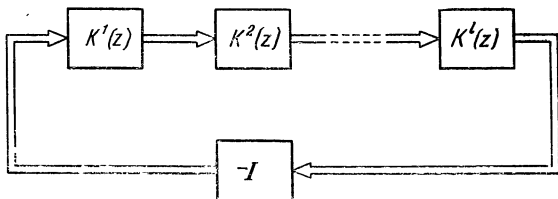


Рис. 3.6.

полином может быть записан в одной из следующих форм:

$$|I + K^l(z)K^{l-1}(z) \dots K^1(z)| = |I + K^1(z)K^l(z)K^{l-1}(z) \dots K^2(z)| = \dots = |I + K^{l-1}(z)K^{l-2}(z) \dots K^1(z)K^l(z)|. \quad (3.34)$$

Представление характеристического полинома в том или ином виде соответствует размыканию контура системы рис. 3.6 на входе различных звеньев. Матрицы

$$\left. \begin{aligned} I + K^l(z)K^{l-1}(z) \dots K^1(z), \\ I + K^1(z)K^l(z) \dots K^2(z), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ I + K^{l-1}(z)K^{l-2}(z) \dots K^1(z)K^l(z), \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

отличающиеся лишь круговой перестановкой сомножителей $K^j(z)$, подобны, а потому определители этих матриц равны.

§ 3.3. Компенсация и устойчивость

Как установлено ранее (см. § 2.4), неуправляемая и ненаблюдаемая части появляются в системе при сокращении во всех элементах передаточной матрицы одних и тех же нулей и полюсов. Очевидно, что подобное сокращение, предполагающее выполнение системы равенств, является весьма критичным к изменению параметров системы. Так, сочетание параметров объекта, при котором он является вырожденным, может встретиться лишь в исключитель-

ных случаях, которые можно не принимать во внимание вследствие зависимости свойств объекта от условий и режима работы. Поэтому объект управления (т. е. заданную часть системы) всегда будем считать полностью управляемым и наблюдаемым.

Кроме того, можно считать, что корректирующие устройства также не содержат неуправляемой и ненаблюдаемой частей. Последнее связано с тем, что характеристики корректирующего устройства задаются обычно передаточной матрицей, элементы которой представляют собой взаимно простые (несократимые) дроби. Таким образом, каждое из звеньев системы управления не вырождено, а его

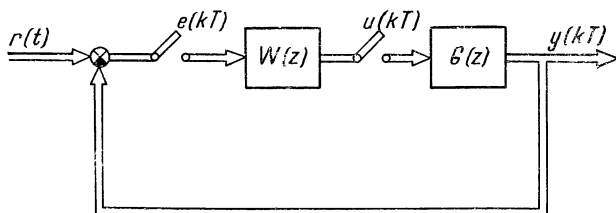


Рис. 3.7.

передаточная матрица исчерпывающим образом характеризует все его динамические свойства. Это не исключает, однако, возможности появления неуправляемой или ненаблюдаемой части в системе, представляющей собой соединение нескольких звеньев. Более того, из последующего рассмотрения станет ясно, что некоторые методы синтеза систем управления всегда приводят к возникновению таких частей. Полное исследование этого вопроса должно включать рассмотрение всех возможных способов соединения звеньев — параллельного, последовательного, обратной связью и комбинированного. Для дальнейшего изложения понадобятся, однако, лишь два случая, которыми мы и ограничимся.

Прежде чем начать подробное исследование, рассмотрим возможный метод синтеза замкнутой системы управления, подводящий к тем идеям, которые составляют основное содержание настоящего параграфа. Система рис. 3.7 состоит из заданной части $G(z)$ и корректора

$W(z)$. В соответствии с (3.5) и (3.10) передаточная матрица «вход — выход» замкнутой системы

$$H(z) = \frac{G(z)W(z)}{I + G(z)W(z)}. \quad (3.36)$$

Пусть требуется определить характеристики корректирующего устройства так, чтобы передаточная матрица замкнутой системы $H(z)$ была равна некоторой заданной $H^0(z)$:

$$H(z) = H^0(z). \quad (3.37)$$

Воспользовавшись формулой (3.20), получим:

$$W(z) = G^{-1}(z) \frac{H^0(z)}{I - H^0(z)}. \quad (3.38)$$

Вид передаточной матрицы $W(z)$ означает, что корректирующее устройство может рассматриваться как последовательное соединение двух многомерных звеньев $W^1(z) = \frac{H^0(z)}{I - H^0(z)}$ и $W^2(z) = G^{-1}(z)$, включенных так, как

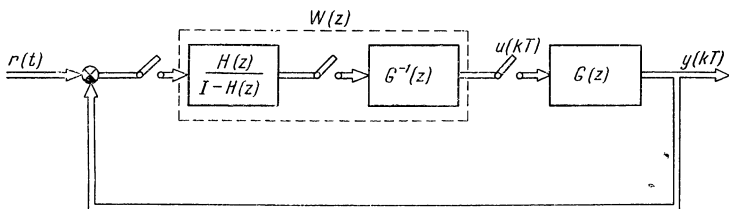


Рис. 3.8.

это показано на рис. 3.8. Последнее из этих звеньев имеет передаточную матрицу, инверсную по отношению к передаточной матрице заданной части $G(z)$, т. е. корректирующее устройство полностью компенсирует все динамические эффекты, связанные с наличием заданной части.

Приведенный пример свидетельствует о том, что методы синтеза, основанные на первоначальном задании динамических характеристик замкнутой системы с последующим нахождением передаточной матрицы корректора, все-

гда приводят к компенсации динамических свойств объекта, т. е. к сокращению во всех элементах передаточной матрицы прямой цепи

$$G(z)W(z) = G(z)G^{-1}(z) \frac{H^0(z)}{I - H^0(z)} = \frac{H^0(z)}{I - H^0(z)}$$

некоторых нулей и полюсов. Очевидно, что подобное сокращение вызывает появление ненаблюдаемой и неуправляемой частей. При таком методе синтеза расположение полюсов передаточной матрицы $H^0(z)$ в области Γ^+ не может гарантировать устойчивости замкнутой системы, так как вырожденная часть системы может оказаться неустойчивой. Поэтому процедуру синтеза нужно несколько видоизменить, связав вид желаемой передаточной матрицы $H^0(z)$ с характеристиками заданной части. При этом оказывается, что можно подчинить $H^0(z)$ таким ограничениям, чтобы система в целом (включая вырожденную часть) была устойчивой. Выводу этих условий для различных структур систем управления и посвящен настоящий и следующий параграфы.

Пример 3.1. Установим условия устойчивости, которым должна удовлетворять передаточная функция $H(z)$ одномерной системы, имеющей структуру рис. 3.7. Передаточная функция объекта, записанная по отрицательным степеням z , является рациональной:

$$G(z) = z^{-1} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (3.39)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы по степеням z^{-1} . Корректирующее устройство также разыскивается в виде рациональной функции, т. е. отношения полиномов по z^{-1} :

$$W(z) = \frac{S(z)}{R(z)}. \quad (3.40)$$

Для исследования устойчивости перейдем к описанию динамики замкнутой системы с помощью уравнений. Разностные уравнения, соответствующие передаточным функциям (3.39) и (3.40), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Q(\xi)y(kT) &= \xi^{-1}P(\xi)u(kT), \\ R(\xi)u(kT) &= S(\xi)e(kT), \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

где

$$e(kT) = r(kT) - y(kT).$$

Исключая $e(kT)$, получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Q(\xi)y(kT) - \xi^{-1}P(\xi)u(kT) &= 0, \\ S(\xi)y(kT) + R(\xi)u(kT) &= S(\xi)r(kT). \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Характеристический полином системы (3.42) имеет вид

$$\Delta(\mu) = Q(\mu)R(\mu) + \mu^{-1}S(\mu)P(\mu). \quad (3.43)$$

Разобьем каждый из полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ на два с множителя

$$\left. \begin{aligned} Q(z) &= Q^+(z)Q^-(z), \\ P(z) &= P^+(z)P^-(z), \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

где $Q^+(z)$ и $P^+(z)$ — полиномы, имеющие все нули z_k в области Γ^+ , а $Q^-(z)$ и $P^-(z)$ — полиномы с нулями в области Γ^- и на контуре Γ . Зададим передаточную функцию системы в виде

$$H^0(z) = z^{-1} \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (3.45)$$

где $A(z)$ и $B(z)$ — произвольные полиномы, но $B(z) = = B^+(z)$. В соответствии с (3.38) для $W(z)$ получим:

$$W(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{H^0(z)}{1 - H^0(z)} = \frac{Q(z)A(z)}{P(z)[B(z) - z^{-1}A(z)]}. \quad (3.46)$$

Сомножитель z^{-1} включен в $H^0(z)$ для обеспечения физической реализуемости корректора $W(z)$. Сравнивая (3.46) и (3.40), находим взаимно простые полиномы $S(z)$ и $R(z)$:

$$\left. \begin{aligned} S(z) &= Q(z)A(z), \\ R(z) &= P(z)[B(z) - z^{-1}A(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Характеристическое уравнение системы при выборе корректора в соответствии с (3.46) получим, подставляя

(3.47) в (3.43):

$$\Delta(\mu) = Q(\mu)P(\mu)[B(\mu) - \mu^{-1}A(\mu)] + \\ + \mu^{-1}Q(\mu)A(\mu)P(\mu) = Q(\mu)P(\mu)B(\mu) = 0$$

или в соответствии с (3.44)

$$\Delta(\mu) = Q^+(\mu)Q^-(\mu)P^+(\mu)P^-(\mu)B^+(\mu) = 0. \quad (3.48)$$

Из уравнения (3.48) ясно, что характеристическое уравнение системы имеет корни в Γ^- , если объект не является устойчивым и минимальнофазовым, т. е. если не выполнены условия

$$P^-(z) \equiv 1, \quad Q^-(z) \equiv 1. \quad (3.49)$$

Система при этом является неустойчивой. Знаменатель $B^+(z)$ передаточной функции $H^0(z)$ является одним из сомножителей уравнения (3.48) и определяет лишь часть корней характеристического уравнения системы. Поскольку корректор выбран таким образом, что объект полностью скомпенсирован, то в системе имеются ненаблюдаемая и неуправляемая части. Именно эти части системы и определяются сомножителями характеристического полинома $Q(z)$ и $P(z)$.

Для обеспечения устойчивости системы в целом (включая ее вырожденную часть) необходимо не допустить компенсации отрицательных свойств объекта, т. е. полиномов $Q^-(z)$ и $P^-(z)$. Для этого подчиним $H^0(z)$ условиям:

$$H^0(z) = z^{-1} \frac{P^-(z)A(z)}{B^+(z)}, \quad 1 - H^0(z) = \frac{Q^-(z)C(z)}{B^+(z)}, \quad (3.50)$$

где $A(z)$, $B^+(z)$ и $C(z)$ — произвольные полиномы, удовлетворяющие в силу (3.50) уравнению

$$B^+(z) = z^{-1}P^-(z)A(z) + Q^-(z)C(z). \quad (3.51)$$

Тогда для $W(z)$ вместо (3.46) получим

$$W(z) = \frac{Q(z)P^-(z)A(z)}{P(z)Q^-(z)C(z)} = \frac{Q^+(z)A(z)}{P^+(z)C(z)}. \quad (3.52)$$

Сокращение, проведенное при определении $W(z)$, необходимо, так как по условию корректирующее устройство ищется как невырожденное звено. Учитывая (3.40), находим:

$$\begin{aligned} S(z) &= Q^+(z)A(z), \\ R(z) &= P^+(z)C(z). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Характеристический полином

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) &= Q(\mu)P^+(\mu)C(\mu) + \mu^{-1}P(\mu)Q^+(\mu)A(\mu) = \\ &= Q^+(\mu)P^+(\mu)[Q^-(\mu)C(\mu) + \mu^{-1}P^-(\mu)A(\mu)] \end{aligned}$$

в силу (3.51) принимает вид

$$\Delta(\mu) = Q^+(\mu)P^+(\mu)B^+(\mu). \quad (3.54)$$

Система является устойчивой.

Необходимость подчинения передаточной функции одномерной системы условиям (3.50) и (3.51) была известна и ранее. Однако обоснование этих условий не вполне точно связывалось с понятиями грубости системы управления [8, 56, 57, 61].

Разобранный одномерный пример показывает, что при компенсации с помощью корректора некоторых динамических свойств объекта замкнутая система становится вырожденной, причем неуправляемая и ненаблюдаемая части как раз и определяются скомпенсированными нулями и полюсами объекта. При этом система может стать неустойчивой, хотя это свойство неустойчивости не обнаруживается при рассмотрении передаточной функции замкнутой системы $H(z)$. Аналогичная ситуация возникает в общем многомерном случае.

§ 3.4. Компенсация и устойчивость (продолжение)

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в выводе условий, которым должна удовлетворять передаточная матрица замкнутой системы, чтобы при компенсации система в целом оставалась устойчивой. Очевидно, что эти условия зависят как от структуры системы (способа включения корректирующих устройств), так и от свойств заданной

части $G(z)$. Хотя способы вывода ограничений для любых структур системы управления аналогичны, для конкретизации изложения целесообразно остановиться на схеме (рис. 3.7), в которой корректор $W(z)$ включен в канал ошибок.

Основным элементом рассматриваемой схемы является прямая цепь, состоящая из последовательного соединения

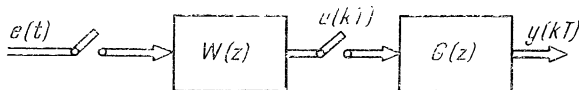


Рис. 3.9.

корректора $W(z)$ и объекта $G(z)$ (рис. 3.9). Пусть звенья системы описываются разностными уравнениями

$$Q(\zeta)y(kT) = \zeta^{-1}P(\zeta)u(kT) \quad (3.55)$$

и

$$R(\zeta)u(kT) = S(\zeta)e(kT), \quad (3.56)$$

где $Q(\zeta)$, $P(\zeta)$, $R(\zeta)$ и $S(\zeta)$ — матрицы полиномов по степеням оператора запаздывания ζ^{-1} размера $n \times n$, а $y(kT)$, $u(kT)$ и $e(kT)$ — n -мерные векторы. Передаточные матрицы соответственно имеют вид

$$G(z) = z^{-1}Q^{-1}(z)P(z) \quad (3.57)$$

и

$$W(z) = R^{-1}(z)S(z). \quad (3.58)$$

Уравнения (3.55) и (3.56) образуют систему $2n$ разностных уравнений с характеристическим определителем

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} Q(z) & z^{-1}P(z) \\ 0 & R(z) \end{vmatrix} = |Q(z)| \cdot |R(z)|. \quad (3.59)$$

Формула (3.59) подтверждает тот очевидный факт, что порядок последовательного соединения звеньев равен сумме их порядков.

Передаточная матрица разомкнутой системы (рис. 3.9) равна

$$K(z) = G(z)W(z). \quad (3.60)$$

Разомкнутая система будет невырожденной, если порядок матрицы $K(z)$ равен сумме порядков звеньев. Снижение порядка $K(z)$, очевидно, может произойти лишь за счет компенсации некоторых полюсов $G(z)$ нулями $W(z)$ и полюсов $W(z)$ нулями $G(z)$. Наглядное представление о появлении неуправляемых и ненаблюдаемых частей при компенсации можно получить, если воспользоваться диагональным представлением матриц $G(z)$ и $W(z)$:

$$\left. \begin{aligned} G(z) &= z^{-1} T^1(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1(z)}{q_1(z)}, \dots, \frac{p_n(z)}{q_n(z)} \right\} T^2(z), \\ W(z) &= T^3(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{s_1(z)}{r_1(z)}, \dots, \frac{s_n(z)}{r_n(z)} \right\} T^4(z), \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

где $T^i(z)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — элементарные матрицы полиномов от z^{-1} , а $p_i(z)$, $q_i(z)$, $s_i(z)$, $r_i(z)$ — полиномы. При этом полиномы $p_i(z)$ и $q_i(z)$ и соответственно $s_i(z)$ и $r_i(z)$ для одного и того же номера i взаимно простые. Очевидно, что характеристический определитель рассматриваемой системы с точностью до постоянного множителя равен произведению знаменателей диагональных элементов $G(z)$ и $W(z)$:

$$\Delta(z) = q_1(z) q_2(z) \dots q_n(z) r_1(z) r_2(z) \dots r_n(z). \quad (3.62)$$

Воспользовавшись свободой выбора корректирующих устройств, примем $T^3(z) = [T^2(z)]^{-1}$. Тогда для передаточной матрицы соединения $K(z)$ получим:

$$K(z) = z^{-1} T^1(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1(z) s_1(z)}{q_1(z) r_1(z)}, \dots, \frac{p_n(z) s_n(z)}{q_n(z) r_n(z)} \right\} T^4(z). \quad (3.63)$$

Передаточная матрица всегда записывается в виде рациональной матрицы с элементами, имеющими взаимно простые числители и знаменатели. Это означает, что в (3.63) необходимо сократить общие множители в тех элементах диагонали, где они имеются. Появление таких общих множителей означает компенсацию динамических свойств заданной части и корректирующего устройства. В частности, при полной компенсации можно выбрать

$$\left. \begin{aligned} s_k(z) &= q_k(z), \\ r_k(z) &= p_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

и $T^4(z) = [T^1(z)]^{-1}$. Тогда передаточная матрица соединения примет вид диагональной матрицы

$$K(z) = z^{-1}I. \quad (3.65)$$

Подобное сокращение вызывает понижение порядка матрицы $K(z)$, а следовательно, вырождение системы. Характеристический полином невырожденной части системы равен произведению знаменателей диагональных элементов $K(z)$ после всех возможных сокращений. Очевидно, что в него не входят те из сомножителей $q_i(z)$ и $r_i(z)$, которые были сокращены. В то же время характеристический полином всей системы содержит нули всех $q_i(z)$ и $r_i(z)$ и имеет вид (3.62).

Таким образом, ясно, что скомпенсированные элементы $G(z)$ образуют неуправляемую и ненаблюдаемую часть последовательного соединения двух звеньев.

Продолжая ту же мысль, отметим, что передаточную матрицу $G(z)$ множеством способов можно представить в виде произведения двух рациональных матриц:

$$G(z) = z^{-1}G^2(z)G^1(z). \quad (3.66)$$

Для этого достаточно отнести к $G^1(z)$ лишь часть множителей диагональных элементов и матрицу $T^2(z)$, а к $G^2(z)$ — все остальное:

$$\left. \begin{aligned} G^2(z) &= T^1(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1^2(z)}{q_1^2(z)}, \dots, \frac{p_n^2(z)}{q_n^2(z)} \right\} N(z), \\ G^1(z) &= N^{-1}(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1^1(z)}{q_1^1(z)}, \dots, \frac{p_n^1(z)}{q_n^1(z)} \right\} T^2(z), \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

где

$$p_k(z) = p_k^1(z)p_k^2(z),$$

$$q_k(z) = q_k^1(z)q_k^2(z),$$

а $N(z)$ — произвольная элементарная матрица. Матрица $W(z)$ также может быть представлена в виде произведения

$$W(z) = W^1(z)W^2(z). \quad (3.68)$$

Из проведенного выше рассмотрения следует, что система, составленная из двух последовательно включенных звеньев, является вырожденной, если

$$W^1(z) = [G^1(z)]^{-1}. \quad (3.69)$$

При этом неуправляемая и ненаблюдаемая части определяются: а) полюсами $G^1(z)$, б) полюсами $W^1(z)$ (нулями $G^1(z)$). При условии (3.69) передаточная матрица системы (рис. 3.9)

$$K(z) = z^{-1}G^2(z)W^2(z). \quad (3.70)$$

Вообще говоря, понятие вырожденности системы в значительной степени условно. Система будет вырождена или

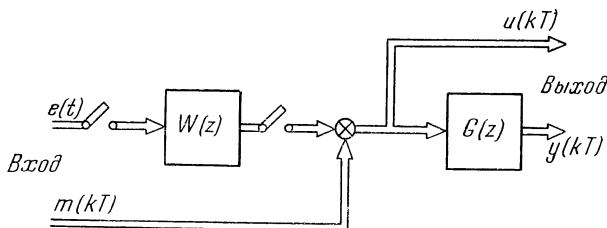


Рис. 3.10.

нет в зависимости от того, что считать входом системы и что — выходом. В частности, система рис. 3.9 при условии (3.69) является вырожденной только в случае, если входом ее является $e(kT)$, а выходом — $y(kT)$. Покажем, что та же система является полностью управляемой и наблюдаемой, если считать, что группа входных сигналов дополнена воздействиями $m(kT)$, а группа выходов — сигналами $u(kT)$ (рис. 3.10). При этом мы приходим к $2n$ -мерной разомкнутой системе, имеющей передаточную матрицу

$$\left\| \begin{array}{cc} G(z)W(z) & G(z) \\ W(z) & I \end{array} \right\|. \quad (3.71)$$

Вход и выход этой расширенной системы связаны соотношениями

$$\left\| \begin{array}{c} y(z) \\ u(z) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} G(z)W(z) & G(z) \\ W(z) & I \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} e(z) \\ m(z) \end{array} \right\|. \quad (3.72)$$

Очевидно, что добавление новых управляющих и измеряемых сигналов не изменяет порядка системы, который по-прежнему равен сумме порядков $G(z)$ и $W(z)$. То, что такая расширенная система полностью управляема и наблюдаема, может быть доказано вполне строго для произвольных $G(z)$ и $W(z)$. Чтобы не усложнять изложение, ограничимся случаем простых полюсов матриц $G(z)$ и $W(z)$.

Рассмотрим порядок передаточной матрицы (3.71). Ранг вычета матрицы (3.71) в полюсах объекта $G(z)$ не меньше, чем ранг вычета в тех же полюсах матрицы $G(z)$. Это следует из того, что вычет матрицы (3.71) имеет число линейно независимых столбцов, не меньшее числа линейно независимых столбцов вычета матрицы $G(z)$. Точно так же ранг вычета (3.71) в полюсах $W(z)$ не меньше ранга вычета $W(z)$ в тех же полюсах. Это следует из сравнения числа линейно независимых строк вычетов обеих матриц. Суммируя сказанное, можно утверждать, что порядок матрицы (3.71), равный сумме рангов вычетов во всех полюсах, больше порядка системы или равен ему. Альтернатива решается в пользу равенства, так как порядок матрицы не может быть больше порядка соответствующей ей системы. Утверждение доказано.

Перейдем к рассмотрению основной задачи — установлению условий устойчивости замкнутой системы (рис. 3.7). В § 2.4 было высказано утверждение, что переход от разомкнутой системы к системе с единичной обратной связью (переход от системы рис. 3.9 к системе рис. 3.7) изменяет расположение лишь части корней характеристического уравнения. Именно, при замыкании системы изменяется только характеристический полином, соответствующий невырожденной части. Корни этого полинома совпадают при этом с полюсами передаточной матрицы «вход — выход» замкнутой системы $H(z)$. Три остальных множителя характеристического полинома, соответствующие вырожденной части, остаются без изменения (см. соотношения (2.110) — (2.111)). Эти обстоятельства позволяют сформулировать условия устойчивости замкнутой системы.

В случае, если разомкнутая система является не полностью управляемой и наблюдаемой, для устойчивости

замкнутой системы необходимо и достаточно обеспечить устойчивость:

а) невырожденной части замкнутой системы, определяемой передаточной матрицей «вход — выход» $H(z)$;

б) неуправляемых и ненаблюдаемых частей (частей I, III, IV) разомкнутой системы. Поэтому для устойчивости системы управления нужно, чтобы ее передаточная матрица не имела полюсов вне единичного круга плоскости z и на окружности Γ . Кроме того, при компенсации свойств объекта недопустимо сокращение его нулей и полюсов, имеющих модули, большие или равные единице. Это последнее условие накладывает ограничения на вид передаточной матрицы замкнутой системы. Установим эти ограничения.

Для этого введем понятие факторизации передаточной матрицы объекта. Пусть $G(z)$ приведено к диагональной форме (3.61), например к канонической диагональной. Разобьем полиномы $p_k(z)$ и $q_k(z)$ на множители:

$$\left. \begin{aligned} p_k(z) &= \bar{p}_k(z) \overset{+}{p}_k(z), \\ q_k(z) &= \bar{q}_k(z) \overset{+}{q}_k(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

К полиномам $\bar{p}_k(z)$ и $\bar{q}_k(z)$ отнесем те сомножители $p_k(z)$ и $q_k(z)$, которые имеют нули в области Γ^- и на контуре Γ , а к $\overset{+}{p}_k(z)$ и $\overset{+}{q}_k(z)$ — сомножители, имеющие нули в Γ^+ . Тогда левая факторизация $G(z)$ означает ее представление в виде произведения

$$G(z) = z^{-1} G^-(z) G^+(z), \quad (3.74)$$

где

$$G^-(z) = T^1(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{\bar{p}_1(z)}{\bar{q}_1(z)}, \dots, \frac{\bar{p}_n(z)}{\bar{q}_n(z)} \right\} N(z), \quad (3.75)$$

$$G^+(z) = N^{-1}(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{\overset{+}{p}_1(z)}{\overset{+}{q}_1(z)}, \dots, \frac{\overset{+}{p}_n(z)}{\overset{+}{q}_n(z)} \right\} T^2(z),$$

а $N(z)$ — произвольная элементарная матрица.

Объект управления является *устойчивым*, если все $q_j(z) \equiv 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Устойчивый объект $G(z)$ будем называть *минимальнофазовым*, если

$$p_j^-(z) \equiv 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Свойства устойчивости и минимальнофазовости многомерного объекта управления определяются характером его главной части*). Многомерный объект будет устойчивым, если устойчивы все одномерные звенья, образующие главную часть. То же самое относится и к понятию минимальнофазовости многомерного звена.

Введем следующие обозначения. Пусть $q^-(z)$ — наименьшее общее кратное всех $q_k^-(z)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а $p^-(z)$ — наименьшее общее кратное всех $p_k^-(z)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, что для минимальнофазового объекта

$$p^-(z) \equiv q^-(z) \equiv 1. \quad (3.76)$$

Покажем, что для устойчивости вырожденной части разомкнутой (а значит, и замкнутой) системы достаточно, чтобы передаточная матрица $H(z)$ удовлетворяла условиям

$$H(z) = z^{-1}p^-(z)H^1(z)_+, \quad (3.77)$$

$$I - H(z) = q^-(z)H^2(z)_+, \quad (3.78)$$

где $H^1(z)_+$ и $H^2(z)_+$ — произвольные рациональные матрицы, имеющие полюсы лишь в области Γ^+ и связанные в силу (3.77), (3.78) соотношением

$$I = z^{-1}p^-(z)H^1(z)_+ + q^-(z)H^2(z)_+. \quad (3.79)$$

Действительно, передаточная матрица корректора $W(z)$ выражается через передаточную матрицу замкнутой системы и объекта $G(z)$ как (3.20):

$$W(z) = G^{-1}(z) \frac{H(z)}{I - H(z)}. \quad (3.80)$$

*) Понятие канонической структуры и главной части системы введено в § 2.4.

Учитывая (3.74) — (3.79), получим:

$$\begin{aligned}
 W(z) &= [G^+(z)]^{-1} [G^-(z)]^{-1} \frac{H^1(z)_+}{H^2(z)_+} \cdot \frac{p^-(z)}{q^-(z)} = \\
 &= [G^+(z)]^{-1} N^{-1}(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{q_1^-(z)}{p_1^-(z)}, \dots, \frac{q_n^-(z)}{p_n^-(z)} \right\} T_1^{-1}(z) \times \\
 &\quad \times \frac{H^1(z)_+}{H^2(z)_+} \cdot \frac{p^-(z)}{q^-(z)}. \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

Для окончательного определения матрицы корректора $W(z)$ в (3.81) необходимо провести все возможные сокращения. Введя обозначения для полиномов

$$\tilde{p}_i^-(z) = \frac{p^-(z)}{p_i^-(z)}, \quad \tilde{q}_i^-(z) = \frac{q^-(z)}{q_i^-(z)}, \quad (3.82)$$

получим передаточную матрицу невырожденного корректирующего устройства в виде

$$\begin{aligned}
 W(z) &= [G^+(z)]^{-1} N^{-1}(z) \times \\
 &\times \operatorname{diag} \left\{ \frac{\tilde{p}_1^-(z)}{\tilde{q}_1^-(z)}, \dots, \frac{\tilde{p}_n^-(z)}{\tilde{q}_n^-(z)} \right\} T_1^{-1}(z) \frac{H^1(z)_+}{H^2(z)_+}. \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, что представляет собой вырожденная часть последовательного соединения корректора и объекта $K(z) = G(z)W(z)$. Подставляя в выражение для $K(z)$ (3.74) и (3.83), получим:

$$\begin{aligned}
 K(z) &= z^{-1} G^-(z) G^+(z) [G^+(z)]^{-1} N^{-1}(z) \times \\
 &\times \operatorname{diag} \left\{ \frac{\tilde{p}_1^-(z)}{\tilde{q}_1^-(z)}, \dots, \frac{\tilde{p}_n^-(z)}{\tilde{q}_n^-(z)} \right\} T_1^{-1}(z) \frac{H^1(z)_+}{H^2(z)_+} = \\
 &= z^{-1} T^1(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1^-(z) \tilde{p}_1^-(z)}{q_1^-(z) \tilde{q}_1^-(z)}, \dots, \frac{p_n^-(z) \tilde{p}_n^-(z)}{q_n^-(z) \tilde{q}_n^-(z)} \right\} \frac{H^1(z)_+}{H^2(z)_+}. \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

Сокращение тех или иных полюсов и нулей в (3.84) свидетельствует о появлении соответствующих вырожденных частей системы. Из преобразований, проделанных в (3.84), очевидно, что произошло сокращение лишь полюсов и нулей матрицы $G^+(z)$, т. е. полюсов и нулей объекта, расположенных в области Γ^+ . Это гарантирует выполнение условий устойчивости вырожденных частей разомкнутой и замкнутой систем.

Проведенное рассмотрение доказывает достаточность условий (3.77), (3.78). Резюмируя сказанное, отметим, что требование устойчивости вырожденной части, несмотря на имеющийся произвол в выборе устойчивой передаточной матрицы системы $H(z)$, накладывает существенные ограничения на вид матрицы $H(z)$. Для обеспечения устойчивости системы достаточно, чтобы ее передаточная матрица удовлетворяла соотношениям (3.77), (3.78).

Если объект является устойчивым, то $q^-(z) \equiv 1$ и единственным ограничением для $H(z)$ является (3.77). В случае минимальнофазового объекта условия устойчивости (3.77), (3.78) сводятся к требованию расположения полюсов матрицы $H(z)$ в области Γ^+ и принимают вид

$$H(z) = z^{-1}H^1(z)_+. \quad (3.85)$$

Отметим, что введение множителя z^{-1} в условия (3.77) и (3.85) не связано с устойчивостью системы, а вытекает из требования физической реализуемости корректора $W(z)$.

Условия устойчивости (3.77) и (3.78), являясь достаточными, не учитывают различия свойств объекта по различным каналам, а поэтому в некоторых случаях представляют собой неоправданно жесткие ограничения свободы выбора передаточной матрицы системы. Из общих соображений ясно, что более детальное рассмотрение свойств матрицы $G(z)$ позволит сформулировать условия устойчивости с учетом специфики каждого из каналов, без предъявления излишних требований к $H(z)$. Так, в наиболее простом случае многомерной системы, когда $G(z)$ диагональна, условия (3.77), (3.78) приводят к тому, что неустойчивость или неминимальнофазовость хотя бы по одному каналу ограничивает характеристики системы по всем каналам. Очевидно, что такие требования к харак-

теристикам системы являются чрезмерными и могут быть облегчены при учете различия динамических свойств системы по каналам.

Кроме того, следует иметь в виду, что условия (3.77), (3.78) непротиворечивы лишь в случае, когда $p^-(z)$ и $q^-(z)$ не имеют одинаковых нулей. В самом деле, если это не так и имеется такой общий нуль $z = \alpha$ ($q^-(\alpha) = p^-(\alpha) = 0$), то (3.77) и (3.78) дают несовместные условия для диагональных членов матрицы $H(z)$:

$$H(\alpha) = 0,$$

$$H(\alpha) = I.$$

Для вывода условий устойчивости замкнутой системы, учитывающих различие свойств отдельных каналов, применим несколько иной подход. Способ, излагаемый ниже, основан на специфике не полностью управляемых и наблюдаемых (вырожденных) систем. Если для такой системы составить передаточные матрицы, устанавливающие связь между сигналами в различных точках замкнутого контура, то некоторые из этих матриц будут иметь различные полюсы [17]. Совокупность корней характеристического уравнения дается объединением полюсов всех передаточных матриц. Очевидно, что для устойчивости системы все эти полюсы должны быть расположены в области Γ^+ .

В общем случае нет необходимости рассматривать все передаточные матрицы — от всех возможных входов до всех выходов. Так, для системы рис. 3.7 достаточно выделить три соотношения

$$\left. \begin{aligned} H_{y/z}(z) &= G(z)W(z)[I + G(z)W(z)]^{-1}, \\ H_{y/u}(z) &= G(z)[I + G(z)W(z)]^{-1}, \\ H_{u,r}(z) &= W(z)[I + G(z)W(z)]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

и рассмотреть передаточные матрицы системы, связывающие вход $r(kT)$, выход $y(kT)$ и управляющий сигнал $u(kT)$ в точке компенсации. Далее необходимо исключить из соотношений (3.86) передаточную матрицу корректора $W(z)$, пользуясь соотношением (3.20). В результате

получим:

$$\begin{aligned} H_{y/r}(z) &= H(z), & H_{y/u}(z) &= [I - H(z)]G(z), \\ H_{u/r}(z) &= G^{-1}(z)H(z). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Для устойчивости системы в целом, включая ее вырожденную часть, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} H_{y/r}(z) &= H_{y/r}(z)_+, & H_{y/u}(z) &= H_{y/u}(z)_+, \\ H_{u/r}(z) &= H_{u/r}(z)_+. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Очевидно, что последние условия ограничивают свободу выбора $H(z)$.

Воспользовавшись каноническим представлением матрицы (3.61) и соотношениями (3.73), введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} P^-(z) &= T^1(z) \operatorname{diag} \{p_1^-(z), \dots, p_n^-(z)\}, \\ Q^-(z) &= \operatorname{diag} \{q_1^-(z), \dots, q_n^-(z)\} [T_1(z)]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

Элементы матриц $P^-(z)$ и $Q^-(z)$ являются полиномами от z^{-1} . Очевидно, что все нули определителей матриц $P^-(z)$ и $Q^-(z)$ расположены вне единичного круга плоскости z или на контуре Γ .

Условия, обеспечивающие устойчивость системы, в соответствии с (3.87) и (3.88) могут быть записаны в форме

$$H(z) = z^{-1}P^-(z)H^1(z)_+, \quad (3.90)$$

$$I - H(z) = H^2(z)_+Q^-(z), \quad (3.91)$$

где $H^1(z)_+$ и $H^2(z)_+$ — произвольные устойчивые матрицы, удовлетворяющие в силу (3.90) и (3.91) соотношению

$$I = z^{-1}P^-(z)H^1(z)_+ + H^2(z)_+Q^-(z). \quad (3.92)$$

Действительно, подставляя (3.90) и (3.91) в (3.87), легко убедиться в том, что все три передаточные матрицы устойчивы.

Соотношения (3.90) и (3.91) являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости системы рис. 3.7. В качестве достаточных условий можно использовать как соотношения (3.77), (3.78), так и комбинации (3.78) и

(3.90) или (3.77) и (3.91). Условия устойчивости для других структур систем управления могут быть получены аналогичным образом.

Пример 3.2. Пусть непрерывная часть заданной системы рис. 3.7 описывается уравнениями (2.93) (см. пример 2.3 § 2.3). Дискретная передаточная матрица ПНЧ имеет вид (2.95). Отвлекаясь от числовых значений параметров, запишем ее в виде

$$G(z) = \frac{1}{q(z)} R(z), \quad (3.93)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q(z) &= z^2 - c_1 z + c_2 = (z - d_1)(z - d_2), \\ R(z) &= \|r_{ij}(z)\|_1^2 = \|a_{ij}z + b_{ij}\|_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

Как указывалось в примере 2.4, определитель матрицы $R(z)$ в этом случае отличается от $q(z)$ только числовым множителем γ :

$$|R(z)| = \gamma q(z). \quad (3.95)$$

Умножая числители и знаменатели элементов $G(z)$ на z^{-2} , перейдем к форме записи передаточной матрицы по отрицательным степеням z :

$$G(z) = z^{-1} \left\| \frac{a_{ij} + b_{ij}z^{-1}}{(1 - d_1z^{-1})(1 - d_2z^{-1})} \right\|_1^2 = z^{-1} G^1(z). \quad (3.96)$$

Если рассматриваемый объект устойчив, т. е. $|d_1| < 1$ и $|d_2| < 1$, то он является также минимальнофазовым. Инверсная передаточная матрица $[G^1(z)]^{-1}$, как и сама $G^1(z)$, устойчива:

$$G^1(z) = G^+(z).$$

Поэтому единственное ограничение, которому должна удовлетворять $H(z)$, связано с условием физической реализуемости корректора и имеет вид (3.85). Выберем в (3.85) $H^1(z)_+ = I$. Тогда

$$H(z) = \left\| \begin{array}{cc} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{array} \right\|. \quad (3.97)$$

Определим передаточную матрицу корректора $W(z)$ по

заданным $H(z)$ и $G(z)$:

$$\begin{aligned} W(z) &= [G(z)]^{-1} \frac{H(z)}{I - H(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} [G^1(z)]^{-1} = \\ &= \frac{1}{\gamma(1 - z^{-1})} \left\| \begin{array}{cc} a_{22} + b_{22}z^{-1} & -(a_{12} + b_{12}z^{-1}) \\ -(a_{21} + b_{21}z^{-1}) & a_{11} + b_{11}z^{-1} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{\gamma(z-1)} \left\| \begin{array}{cc} a_{22}z + b_{22} & -(a_{12}z + b_{12}) \\ -(a_{21}z + b_{21}) & a_{11}z + b_{11} \end{array} \right\| = \frac{1}{\gamma(z-1)} \tilde{R}(z), \end{aligned} \quad (3.98)$$

где $\tilde{R}(z)$ — матрица, присоединенная для $R(z)$.

Перейдем к системе разностных уравнений. Разностные уравнения объекта в соответствии с (2.127) имеют вид

$$Q(\xi)y(kT) = P(\xi)u(kT), \quad (3.99)$$

где $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ — полиномиальные матрицы, причем определитель $|Q(\xi)|$ может отличаться от полинома $q(\xi)$ лишь постоянным множителем. Уравнения корректора в соответствии с (3.98) получим в виде

$$\left. \begin{aligned} (\xi-1)u_1(kT) &= \frac{1}{\gamma} [(a_{22}\xi + b_{22})e_1(kT) - \\ &\quad - (a_{12}\xi + b_{12})e_2(kT)], \\ (\xi-1)u_2(kT) &= \frac{1}{\gamma} [-(a_{21}\xi + b_{21})e_1(kT) + \\ &\quad + (a_{11}\xi + b_{11})e_2(kT)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.100)$$

Для составления уравнений, соответствующих матрице (3.98), нет необходимости приводить ее к диагональной форме, так как определитель матрицы $\tilde{R}(z)$ не имеет нулей, совпадающих с полюсом $z = 1$. Запишем (3.100) в матричных обозначениях:

$$M(\xi)u(kT) = N(\xi)e(kT), \quad (3.101)$$

где $M(\xi) = (\xi - 1)I$, а $N(\xi) = \frac{1}{\gamma} \tilde{R}(\xi)$. Учитывая равенство

$$e(kT) = r(kT) - y(kT),$$

перейдем к уравнениям замкнутой системы

$$\left. \begin{aligned} Q(\xi)y(kT) - P(\xi)u(kT) &= 0, \\ N(\xi)y(kT) + M(\xi)u(kT) &= N(\xi)r(kT). \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

Характеристический определитель системы

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} Q(\mu) & -P(\mu) \\ N(\mu) & M(\mu) \end{vmatrix}. \quad (3.103)$$

Раскрывая его по формуле Шура ([10], стр. 45), получим:

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) &= |Q(\mu)| \cdot |M(\mu) + N(\mu)Q^{-1}(\mu)P(\mu)| = \\ &= q(\mu) |M(\mu) + N(\mu)G(\mu)| = \\ &= \frac{1}{q(\mu)} |q(\mu)M(\mu) + N(\mu)R(\mu)|. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Обозначим

$$N(\mu)R(\mu) = A(\mu)$$

и

$$M(\mu)q(\mu) + A(\mu) = \|q(\mu)m_{ij}(\mu) + a_{ij}(\mu)\|_1^2 = C(\mu).$$

Рассмотрим определитель матрицы $C(\mu)$. Учитывая, что $m_{11}(\mu) = m_{22}(\mu) = \mu - 1$ и $m_{12}(\mu) = m_{21}(\mu) = 0$, получим:

$$|C(\mu)| = c_{11}(\mu)c_{22}(\mu) - c_{12}(\mu)c_{21}(\mu) = q^2(\mu)(\mu - 1)^2 + (\mu - 1)q(\mu)[a_{11}(\mu) + a_{22}(\mu)] + |A(\mu)|.$$

Но

$$|A(\mu)| = |N(\mu)| \cdot |R(\mu)| = \frac{|R(\mu)|}{\gamma^2} \gamma q(\mu) = q^2(\mu).$$

Кроме того,

$$a_{11}(\mu) = \frac{1}{\gamma} |R(\mu)| = q(\mu), \quad a_{22}(\mu) = \frac{1}{\gamma} |R(\mu)| = q(\mu).$$

Поэтому получаем

$$\Delta(\mu) = \frac{1}{q(\mu)} |C(\mu)| = \mu^2 q(\mu). \quad (3.105)$$

Один из нулей характеристического определителя $\mu = 0$ соответствует полюсу матрицы $H(z)$. Кратность этого нуля, равная двум, соответствует тому, что ранг вычета $\bar{H}(z)$ в точке $z = 0$ также равен двум. Сомножитель $q(\mu) = (\mu - d_1)(\mu - d_2)$ характеристического полинома определяется скомпенсированной, т. е. вырожденной, частью системы.

ТОЧНОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

§ 4.1. Точность систем управления

Качество системы управления принято характеризовать теми ошибками, которые возникают в процессе ее работы. При этом под ошибками понимаются отклонения регулируемых параметров от некоторых их желаемых значений. Из общих соображений ясно, что построить абсолютно точную систему, все ошибки которой тождественно равны нулю, практически невозможно. К счастью, это и не требуется. Для практических целей достаточно, чтобы ошибки системы не превышали некоторых допустимых величин.

На пути решения задачи обеспечения точности системы необходимо выявить те факторы, которые оказывают существенное влияние на работу системы и препятствуют достижению заданного качества. Ограничения достижимого качества системы управления (точности) при линейной постановке задачи связаны, с одной стороны, с видом заданной части и структурой системы управления, а с другой — со свойствами действующих на систему сигналов и с характером задачи, решаемой системой.

Вопросы построения работоспособной системы управления при заданной ее структуре были рассмотрены в предыдущей главе. Было показано, что в случае неминимально-фазового или неустойчивого объекта для обеспечения устойчивости замкнутой системы ее характеристики «вход — выход» (передаточная матрица) должны удовлетворять определенным соотношениям. Перейдем к рассмотрению другого фактора, который оказывается весьма существенным для точностных характеристик системы.

Система автоматического управления никогда не работает в идеальных условиях. Помимо полезных сигналов,

несущих информацию о том, что и как надо делать, на систему, как правило, воздействуют различного рода помехи. Трудности проектирования системы связаны с тем, что большинство сигналов, действующих на систему, носит случайный характер. Это утверждение является очевидным

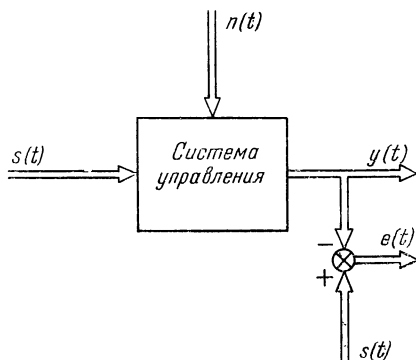


Рис. 4.1.

по отношению к помехам. Однако и полезный сигнал является неслучайным, пожалуй, лишь для систем программного управления.

Обозначим вектор полезных входных сигналов, воздействующих на систему, через $s(t)$. Для вектора помех воспользуемся обозначением $n(t)$. Часть составляющих вектора $n(t)$ — это помехи, приложенные совместно с полезным сигналом на входе системы. Другие компоненты $n(t)$ — это помехи, воздействующие в каких-то иных точках.

Ошибка системы может быть определена как отклонение выхода системы (вектора $y(t)$) от полезного сигнала $s(t)$ (рис. 4.1):

$$e(t) = s(t) - y(t). \quad (4.1)$$

В этом случае, очевидно, речь идет о многомерной следящей системе, предназначенной для воспроизведения процесса $s(t)$. С точки зрения теории преобразования сигналов такая система является фильтром. Ее характеристики следует выбирать из условия подавления мешающих воздействий и достаточно хорошего воспроизведения полезного процесса.

В общем случае перед системой управления может ставиться более сложная задача, когда требуется не только выделить полезный сигнал, но и произвести над ним дополнительно некоторую линейную операцию. В идеале выход системы должен быть равен некоторому желаемому сигналу $d(t)$. В качестве такого желаемого сигнала будем в дальнейшем рассматривать некоторое заданное линейное

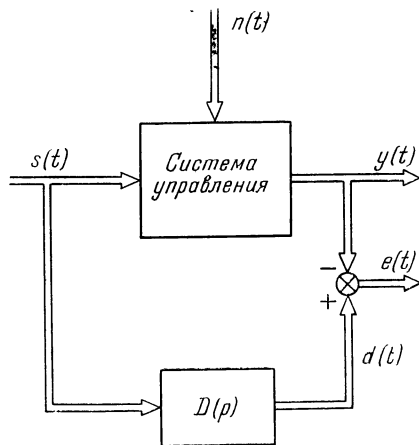


Рис. 4.2.

преобразование полезного входного сигнала. Обозначая весовую матрицу этого преобразования через $D(t, \tau)$, запишем

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \tau) s(\tau) d\tau. \quad (4.2)$$

Весовая матрица $D(t, \tau)$ соответствует идеальной системе, которая может быть физически нереализуемой. В случае стационарности операции (4.2) свойства желаемой системы описываются некоторой передаточной матрицей $D(p)$ (рис. 4.2). Ошибка системы определяется при этом как разность между желаемым и выходным сигналом системы

$$e(t) = d(t) - y(t). \quad (4.3)$$

Вектор ошибок (4.1) или (4.3) полностью характеризует точность работы системы. В детерминированном случае величины этих ошибок могут быть вычислены и, вообще говоря, позволяют судить о сравнительных достоинствах и недостатках различных систем.

Имея в виду удобство сравнения различных систем, целесообразно характеризовать точность работы системы одной скалярной величиной — показателем или критерием качества. Показатель качества обычно выбирается как некоторый функционал от составляющих вектора ошибки. В теории линейных систем этот функционал, как правило, является квадратичным. Выбор квадратичного показателя качества позволяет последовательно развить теорию аналитического синтеза линейных систем управления. Естественно, что удобства вычислительной процедуры и простота сравнения различных систем играют не последнюю роль в выборе такого критерия.

Введем скалярную функцию $\varepsilon^2(t)$ как некоторую меру суммарной ошибки системы:

$$\varepsilon^2(t) = \rho_1 e_1^2(t) + \rho_2 e_2^2(t) + \dots + \rho_m e_m^2(t), \quad (4.4)$$

где $e_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) — составляющие вектора ошибки, а $\rho_i > 0$ — выбранные весовые коэффициенты. Тогда показателем качества может служить линейный функционал от $\varepsilon^2(t)$

$$J_e = F\{\varepsilon^2(t)\} = \sum_{i=1}^m \rho_i F\{e_i^2(t)\}. \quad (4.5)$$

В детерминированном случае функционал $F\{e_i^2\}$ может быть выбран как интеграл по времени от квадрата ошибки:

$$F\{e_i^2(t)\} = \int_0^{\infty} e_i^2(t) dt. \quad (4.6)$$

При воздействии на систему случайных сигналов под функционалом F можно понимать величину среднего, по множеству реализаций, квадрата ошибки (дисперсия ошибки):

$$F\{e_i^2(t)\} = M\{e_i^2(t)\} = D_{e_i}, \quad (4.7)$$

где $M\{ \}$ — символ осреднения по множеству реализаций (математическое ожидание).

Для дальнейшего удобно записать соотношение (4.4) для $\varepsilon^2(t)$ в несколько иной форме. Введем матрицу

$$E'(t) = e(t) e'(t) = \|e_i(t) e_j(t)\|_1^n. \quad (4.8)$$

Нетрудно видеть, что величина $\varepsilon^2(t)$ есть не что иное, как след произведения матрицы $E'(t)$ на диагональную матрицу весовых коэффициентов $R = \text{diag} \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \}$:

$$\varepsilon^2(t) = \text{Sp} [E'(t)R] = \text{Sp} [RE'(t)]. \quad (4.9)$$

Последующее содержание книги тесно связано с рассмотрением вопросов статистической динамики многомерных систем. Предполагается, что читатель знаком с основами корреляционной теории случайных процессов, понятия которой широко используются ниже без специальных пояснений. Тем не менее в двух последующих параграфах будут приведены некоторые положения теории случайных процессов применительно к многомерному случаю. Это изложение преследует две цели: во-первых, ввести читателя в круг идей статистической динамики и, во-вторых, обратить внимание на специфику многомерного случая.

§ 4.2. Многомерный случайный процесс и его прохождение через непрерывную систему

Под случайным процессом (или случайной функцией времени) $r(t)$ понимается совокупность случайных величин, зависящих от параметра t (времени), который принимает на некотором отрезке либо все действительные значения (непрерывный случайный процесс), либо дискретные значения, кратные некоторому промежутку T (случайная последовательность, или дискретный случайный процесс). Настоящий параграф посвящен рассмотрению непрерывного случая. Конечное число случайных функций $r_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) можно рассматривать как n -мерный векторный процесс и изображать матрицей-столбцом $r(t) = \|r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)\|'$.

Для полной характеристики вероятностных свойств процесса необходимо знание совместного закона распреде-

ления составляющих вектора $r(t)$ всех возможных измерений. Однако при рассмотрении линейных систем можно ограничиться заданием более «бедных» вероятностных характеристик случайного процесса — соответствующих математических ожиданий и корреляционных функций.

Математическим ожиданием случайного процесса $r(t)$ называется вектор, составляющие которого определяются как математические ожидания соответствующих компонент $r(t)$:

$$m_r(t) = M\{r(t)\}. \quad (4.10)$$

Центрированный процесс получим, если из векторной случайной функции вычтем ее математическое ожидание:

$$r^0(t) = r(t) - m_r(t). \quad (4.11)$$

Очевидно, что среднее значение $r^0(t)$ равно нулю, $M\{r^0(t)\} = 0$.

Корреляционные свойства случайного процесса задаются квадратной матрицей

$$R_{rr}(t_1, t_2) = \|R_{r_i r_j}(t_1, t_2)\|_1^n = M\{r^0(t_1)[r^0(t_2)]'\}, \quad (4.12)$$

которую будем называть корреляционной. Из определения (4.12) следует, что элементами корреляционной матрицы являются корреляционные функции составляющих процесса

$$R_{r_i r_j}(t_1, t_2) = M\{r_i^0(t_1)r_j^0(t_2)\}, \quad (4.13)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

В случае, если составляющие вектора r не коррелированы между собой, матрица $R_{rr}(t_1, t_2)$ превращается в диагональную:

$$R_{rr}(t_1, t_2) = \text{diag}\{R_{r_1 r_1}(t_1, t_2), \dots, R_{r_n r_n}(t_1, t_2)\}. \quad (4.14)$$

Взаимно корреляционная матрица двух случайных процессов $r(t) = \|r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)\|'$ и $s(t) = \|s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\|'$ определяется как

$$R_{rs}(t_1, t_2) = \|R_{r_i s_j}(t_1, t_2)\|_{n \times m} = M\{r^0(t_1)[s^0(t_2)]'\} \quad (4.15)$$

и имеет элементами корреляционные функции

$$\left. \begin{aligned} R_{r_i s_j}(t_1, t_2) &= M\{r_i^0(t_1) s_j^0(t_2)\}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Корреляционные матрицы (4.12), (4.15) обладают следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(t_1, t_2) &= R'_{rr}(t_2, t_1), \\ R_{rs}(t_1, t_2) &= R'_{sr}(t_2, t_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Действительно, в силу определения (4.15) имеем:

$$\begin{aligned} R'_{sr}(t_2, t_1) &= M\{s^0(t_2) [r^0(t_1)]'\}' = \\ &= M\{r^0(t_1) [s^0(t_2)]'\} = R_{rs}(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Первое из соотношений (4.17) является частным случаем второго при $r(t) \equiv s(t)$.

Можно показать, что корреляционная матрица является положительно определенной [39, 40], т. е. для любой векторной функции $l(t)$ размерности n выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} l'(t_1) R_{rr}(t_1, t_2) l(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0, \quad (4.19)$$

где интегрирование ведется по области Ω , расположенной в области определения векторной случайной функции. Знак равенства в (4.19) имеет место лишь в случае, когда $l(t) \equiv 0$.

Векторный случайный процесс $r(t)$ называется стационарным, если все его составляющие стационарны и стационарно связаны. Стационарность процесса в широком смысле означает, что его математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная матрица является функцией лишь от разности аргументов:

$$\left. \begin{aligned} M\{r(t)\} &= m_r = \text{const}, \\ R_{rr}(t_1, t_2) &= R_{rr}(t_2 - t_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Два векторных стационарных процесса стационарно связаны, если все их составляющие связаны стационарно:

$$R_{rs}(t_1, t_2) = R_{rs}(t_2 - t_1). \quad (4.21)$$

Для таких процессов удобно записывать корреляционные матрицы как функции одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$:

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(\tau) &= M \{r^0(t) [r^0(t + \tau)]'\}, \\ R_{rs}(\tau) &= M \{r^0(t) [s^0(t + \tau)]'\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

При этом соотношения (4.17) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(\tau) &= R'_{rr}(-\tau), \\ R_{rs}(\tau) &= R'_{sr}(-\tau). \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Элементы, расположенные на главной диагонали матрицы $R_{rr}(0)$, дают дисперсии соответствующих компонент случайного процесса $R_{r_i r_i}(0) = D_{r_i}$.

Для практических приложений представляет интерес случай, когда сигналы $r(t)$ и $s(t)$ представляют собой суммы стационарных случайных функций времени и детерминированных функций со случайными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= x(t) + \sum_{j=1}^l \alpha_j p^j(t), \\ s(t) &= d(t) + \sum_{j=1}^l \alpha_j q^j(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

где $x(t)$ и $d(t)$ — стационарные случайные сигналы с нулевыми средними значениями, $p^j(t) = \|p_1^j(t), p_2^j(t), \dots, p_n^j(t)\|'$ и $q^j(t) = \|q_1^j(t), q_2^j(t), \dots, q_m^j(t)\|'$ — векторные заданные (детерминированные) функции времени, а α_j — скалярные случайные величины, некоррелированные с функциями $x(t)$ и $d(t)$ и имеющие средние значения, равные нулю. Вероятностные свойства случайных величин α_j заданы матрицей их корреляционных моментов:

$$K = \|k_{ij}\|_1^l = \|M\{\alpha_i \alpha_j\}\|_1^l. \quad (4.25)$$

Удобно ввести обозначения матриц $P(t) = \|p_i^j(t)\|_{n \times n}$ и $Q(t) = \|q_i^j(t)\|_{m \times l}$, а также вектора $a = \|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\|'$. Тогда (4.24) переписывается в компактной форме:

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t) + P(t)a, \\ s(t) &= d(t) + Q(t)a. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Корреляционные матрицы сигналов $r(t)$ и $s(t)$ в соответствии с (4.12) и (4.15) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(t_1, t_2) &= M\{r(t_1)r'(t_2)\} = \\ &= R_{xx}(t_2 - t_1) + P(t_1)KP'(t_2), \\ R_{rs}(t_1, t_2) &= M\{r(t_1)s'(t_2)\} = \\ &= R_{xd}(t_2 - t_1) + P(t_1)KQ'(t_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

причем матрица корреляционных моментов (4.25)

$$K = M\{aa'\}. \quad (4.28)$$

Для характеристики свойств стационарных случайных процессов наряду с корреляционными функциями, определяющими вероятностную связь значений функций, разделенных интервалом времени τ , широко используются частотные представления. Функции спектральной плотности позволяют судить о вероятностном распределении энергии процесса по частотам. Между корреляционными и спектральными функциями существует взаимно однозначное соответствие, определяемое преобразованием Фурье (двусторонним преобразованием Лапласа). Для многомерного стационарного случайного процесса эта связь выражается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rr}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{rr}(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \\ \Phi_{rs}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{rs}(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

где $\Phi_{rr}(p)$ — матрица спектральной плотности процесса $r(t)$, а $\Phi_{rs}(p)$ — матрица взаимной спектральной плотности процессов $r(t)$ и $s(t)$.

Очевидно, что элементами матрицы спектральной плотности являются функции спектральной плотности составляющих случайных процессов r и s :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r_i r_j}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{r_i r_j}(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n, \\ \Phi_{r_i s_j}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{r_i s_j}(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \\ i &= 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Корреляционные функции могут быть определены по соответствующим спектральным характеристикам с помощью формул обращения

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(\tau) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_{rr}(p) e^{p\tau} dp, \\ R_{rs}(\tau) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_{rs}(p) e^{p\tau} dp. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Для большинства практических приложений достаточно ограничиться случаем, когда матрицы $\Phi_{rr}(p)$ и $\Phi_{rs}(p)$ являются рациональными. Элементы таких матриц являются отношениями полиномов от комплексного аргумента p . Для записи матриц спектральной плотности в функции частоты положим $p = j\omega$, где ω — вещественная переменная.

С помощью определения (4.29) и свойств корреляционных матриц (4.23) легко убедиться, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rr}(j\omega) &= \Phi'_{rr}(-j\omega), \\ \Phi_{rs}(j\omega) &= \Phi'_{sr}(-j\omega), \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

т. е. матрица спектральной плотности $\Phi_{rr}(j\omega)$ является эрмитовой. Можно показать далее, что матрица спектральной плотности стационарного процесса является положительно определенной, т. е. что неравенство

$$b' \Phi_{rr}(j\omega) \bar{b} \geq 0 \quad (4.33)$$

выполняется при любой вещественной ω и любом векторе $b = \|b_1, b_2, \dots, b_n\|'$. Вектор \bar{b} является комплексно-сопряженным для вектора b . Для одномерного случайного процесса последнее неравенство означает известное свойство положительности функции спектральной плотности при любой частоте ω . При этом знак равенства в (4.33) может иметь место лишь в случае $b = 0$.

Свойство положительной определенности $\Phi_{rr}(j\omega)$ (4.33) является чрезвычайно важным и позволяет получить ряд дополнительных результатов [40, 67]. Если ранг матрицы $\Phi_{rr}(p) = \|\Phi_{r_i r_j}(p)\|_1^n$ равен m , то она может быть представлена в виде произведения двух матриц [40]

$$\Phi_{rr}(p) = L(-p)L'(p), \quad (4.34)$$

где штрих означает транспонирование. Элементы матрицы $L(p) = \|l_{ki}(p)\|_{n \times m}$ рациональны относительно p и аналитичны в правой полуплоскости (элементы $L(-p)$ аналитичны, следовательно, в левой полуплоскости).

Если $\Phi_{rr}(p)$ неособая, то этот результат может быть усилен [67]:

$$\Phi_{rr}(p) = \Phi_{rr}^-(p) \Phi_{rr}^+(p), \quad (4.35)$$

где $\Phi_{rr}^-(p) = \|\Phi_{r_i r_j}^-(p)\|_1^n$ и ее обратная $[\Phi_{rr}^-(p)]^{-1}$ — матрицы, аналитические в левой полуплоскости комплексной плоскости p , а $\Phi_{rr}^+(p) = \|\Phi_{r_i r_j}^+(p)\|_1^n$ и ее обратная $[\Phi_{rr}^+(p)]^{-1}$ — матрицы, аналитические при $\operatorname{Re} p > 0$. При этом

$$\Phi_{rr}^-(p) = [\Phi_{rr}^+(-p)]'. \quad (4.36)$$

Разбиение матрицы $\Phi_{rr}(p)$ на два сомножителя (4.35) на-

зывается факторизацией и представляет собой обобщение на многомерный случай известного свойства функции спектральной плотности.

Будем говорить, что стационарный случайный процесс имеет ранг m , если m — ранг матрицы его спектральной плотности.

Абсолютная величина корреляционной функции для реальных процессов (составляющих вектора $r(t)$) стремится к нулю, когда τ неограниченно увеличивается. Значение τ , при котором $R_{r_i r_i}(\tau)$ достаточно мало, дает представление о времени корреляции. В силу соответствия, существующего между элементами корреляционной и спектральной матриц, можно утверждать, что составляющая $r_i(t)$ процесса $r(t)$ является тем более широкополосной, чем меньше время ее корреляции.

Полезной математической абстракцией является одномерный случайный процесс, спектральная плотность которого является постоянной. Если $\Phi_{r_k r_k}(p) = c_k^2$, то соответствующая корреляционная функция превращается в импульсную δ -функцию «площади» c_k^2 :

$$R_{r_k r_k}(\tau) = c_k^2 \delta(\tau).$$

Это означает, что два сколь угодно близких во времени значения процесса $r_k(t)$ не коррелированы между собой. Такой одномерный случайный процесс принято называть белым шумом.

Многомерным белым шумом будем называть векторный случайный процесс, матрица спектральной плотности которого диагональна и не зависит от p :

$$\Phi_{rr}(p) = \text{diag}\{c_1^2, c_2^2, \dots, c_n^2\}.$$

Поэтому n -мерный белый шум представляет собой n некоррелированных стационарных процессов, спектральная плотность каждого из которых есть постоянная величина.

Рассмотрим вопрос о прохождении стационарного процесса через линейную систему с постоянными параметрами (рис. 4.3). Реакция линейной системы с n входными и m выходными координатами и с весовой матрицей $L(\tau) =$

$= \|l_{ij}(\tau)\|_{m \times n}$ на входной сигнал $r(t)$ в соответствии с (4.15) определяется как

$$y(t) = \int_{t_0}^t L(t-\tau)r(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^N c_j e^{\lambda_j(t-t_0)}. \quad (4.37)$$

Рассматривая установившийся режим работы системы, положим $t_0 = -\infty$. Если система устойчива (т. е. если

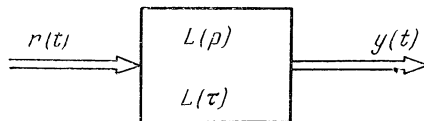


Рис. 4.3.

$\text{Re } \lambda_j < 0, j = 1, 2, \dots, N$), то влияние свободного движения в установившемся режиме пренебрежимо мало. Отбросив второе слагаемое в (4.37) и произведя замену переменных $t - \tau = t_1$, получим:

$$y(t) = \int_0^{\infty} L(t_1)r(t-t_1)dt_1. \quad (4.38)$$

Среднее значение $y(t)$ равно

$$\begin{aligned} m_y(t) = M\{y(t)\} &= \int_0^{\infty} L(t_1)M\{r(t-t_1)\}dt_1 = \\ &= \int_0^{\infty} L(t_1)m_r(t-t_1)dt_1. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Поэтому среднее значение при прохождении сигнала через линейную систему преобразуется так же, как и сам сигнал.

Случайный процесс $y(t)$ (4.38) является стационарным и стационарно связан с $r(t)$. Корреляционные матрицы $R_{yr}(\tau)$ и $R_{yy}(\tau)$ следующим образом выражаются через

вероятностные характеристики процесса $r(t)$:

$$\begin{aligned} R_{yr}(\tau) &= M\{y(t)r'(t+\tau)\} = \\ &= \int_0^{\infty} L(\tau_1)M\{r(t-\tau_1)r'(t+\tau)\}d\tau_1 = \\ &= \int_0^{\infty} L(\tau_1)R_{rr}(\tau+\tau_1)d\tau_1, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= M\{y(t)y'(t+\tau)\} = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} L(\tau_1)M\{r(t-\tau_1)r'(t+\tau-\tau_2)\}L'(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} L(\tau_1)R_{rr}(\tau+\tau_1-\tau_2)L'(\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Переходя к матрицам спектральной плотности, применим к соотношению (4.40) преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi_{yr}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yr}(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} L(\tau_1)e^{p\tau_1}d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{rr}(\tau+\tau_1)e^{-p(\tau+\tau_1)}d\tau_1 = \\ &= L(-p)\Phi_{rr}(p), \end{aligned} \quad (4.42)$$

где $L(-p)$ — матрица, полученная из передаточной матрицы системы заменой p на $-p$. Аналогично для (4.41) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} L(\tau_1)e^{p\tau_1}d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{rr}(\tau+\tau_1-\tau_2)e^{-p(\tau+\tau_1-\tau_2)}d\tau_2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} L'(\tau_2)e^{-p\tau_2}d\tau_2 = L(-p)\Phi_{rr}(p)L'(p). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Таким образом, спектральные характеристики стационарного случайного сигнала на входе и выходе линейной системы в установившемся режиме связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{yr}(p) &= L(-p)\Phi_{rr}(p), \\ \Phi_{yy}(p) &= L(-p)\Phi_{rr}(p)L'(p), \\ \Phi_{ry}(p) &= \Phi'_{yr}(-p) = \Phi_{rr}(p)L'(p). \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Последнее из соотношений (4.44) является следствием свойства спектральных матриц (4.32).

Пусть $r(t)$ — n -мерный белый шум с единичной спектральной матрицей $\Phi_{rr}(p) = I_{n \times n}$. Тогда

$$\Phi_{yy}(p) = L(-p)L'(p), \quad (4.45)$$

где $L(p) = \|l_{ij}(p)\|_{m \times n}$ — устойчивая передаточная матрица. Ранее указывалось, что любая рациональная спектральная матрица может быть представлена в виде (4.34), совпадающем с (4.45).

Сравнивая (4.45) с (4.34), можно утверждать, что любой m -мерный стационарный процесс с рациональным спектром может рассматриваться как результат прохождения некоторого n -мерного белого шума через стационарную систему с некоторой передаточной матрицей $L(p)$. Будем называть эту многомерную систему *многомерным формирующим фильтром*.

Понятие о многомерном формирующем фильтре разъясняет смысл термина «ранг случайного процесса». Можно говорить, что m -мерный случайный процесс имеет ранг n , если его можно рассматривать как результат прохождения n -мерного белого шума через формирующий фильтр с передаточной матрицей размеров $m \times n$. Очевидно, что ранг процесса не может превышать величины его размерности.

Если исключить из рассмотрения случай белого шума, то элементы корреляционной матрицы $R_{rr}(\tau)$ при $\tau = 0$ должны быть ограничены. Это условие накладывает ограничение на соотношение степеней элементов матрицы $\Phi_{rr}(p)$. Для сходимости интегралов (4.31) необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент $\Phi_{r_i r_j}(p)$ имел степень полинома числителя, по крайней мере на 2 меньше степе-

ни знаменателя. Это приводит к тому, что элементы передаточной матрицы формирующего фильтра всегда имеют вид правильных дробей.

Преобразование матриц спектральных плотностей по формулам (4.44) имеет смысл лишь в случае устойчивой передаточной матрицы преобразующей системы $L(p)$. В то же время во многих задачах анализа и синтеза необходимо рассматривать преобразование процессов звеньями, находящимися на границе устойчивости. Если стационарный случайный сигнал поступает на вход неустойчивой системы или системы, находящейся на границе устойчивости, то выходной сигнал уже не будет стационарным, а его дисперсия растет со временем и в пределе стремится к бесконечности. Несмотря на это, для систем, находящихся на границе устойчивости, иногда целесообразно формально вводить матрицы спектральной плотности выходного сигнала в соответствии с формулами (4.44). Эти соотношения необходимо тогда понимать как некоторые предельные, полученные при рассмотрении прохождения случайного сигнала через устойчивые звенья с бесконечно малой степенью устойчивости.

§ 4.3. Многомерный дискретный случайный процесс и его характеристики

Понятие дискретного случайного процесса связано с рассмотрением некоторых упорядоченных во времени совокупностей случайных величин. Под многомерным дискретным случайным процессом понимается вектор $r = \|r_1, r_2, \dots, r_n\|'$, составляющие которого определены лишь для дискретных моментов времени $\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$ и принимают в эти моменты времени случайные значения.

В дальнейшем, как правило, будет рассматриваться случайный процесс, полученный из непрерывного квантованием по времени, причем это квантование осуществляется периодически с некоторым периодом T . В этом смысле можно говорить о дискретном процессе, порождаемом непрерывным.

Если имеется непрерывный случайный процесс $r(t)$, то соответствующий ему дискретный определится как выборка из $r(t)$ через интервал T , т. е. как последовательность

случайных величин $r(kT)$ ($k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Такое определение дискретного случайного процесса позволяет целиком использовать все соотношения предыдущего параграфа, касающиеся определения математических ожиданий и корреляционных матриц. Для этого в соотношениях (4.10) — (4.18) и (4.20) — (4.27) необходимо заменить непрерывное время дискретным, т. е. вместо t, t_1, t_2 и τ подставить соответственно kT, k_1T, k_2T и lT , где k, k_1, k_2, l — целые.

В частности, корреляционные матрицы в дискретном случае определяются как

$$R_{rr}(k_1T, k_2T) = \|R_{r_i r_j}(k_1T, k_2T)\|_{1,1}^{n'} = M \{r^0(k_1T) [r^0(k_2T)]'\} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} R_{rs}(k_1T, k_2T) &= \|R_{r_i s_j}(k_1T, k_2T)\|_{n \times m} = \\ &= M \{r^0(k_1T) [s^0(k_2T)]'\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Если процесс $r(t)$ стационарен, то и соответствующий ему дискретный процесс также является стационарным. Корреляционная матрица для него зависит от разности аргументов $lT = k_2T - k_1T$ и, аналогично (4.23), обладает свойствами

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(lT) &= R'_{rr}(-lT), \\ R_{rs}(lT) &= R'_{sr}(-lT), \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Спектральная плотность стационарного дискретного случайного процесса определяется, в отличие от (4.29), как дискретное двустороннее преобразование Лапласа от корреляционной матрицы:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rr}^*(p) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-plT} R_{rr}(lT), \\ \Phi_{rs}^*(p) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-plT} R_{rs}(lT). \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Элементами дискретных спектральных матриц $\Phi_{rr}^*(p)$ и $\Phi_{rs}^*(p)$ являются, таким образом, функции спектральной

плотности дискретных значений составляющих процессов $r(t)$ и $s(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r_i r_j}^*(p) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{r_i r_j}(lT) e^{-plT}, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n, \\ \Phi_{r_i s_j}^*(p) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{r_i s_j}(lT) e^{-plT}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Дискретная спектральная плотность $\Phi_{rr}^*(p)$ или $\Phi_{rs}^*(p)$ может быть определена не только по дискретным значениям корреляционной матрицы, но и по соответствующей спектральной плотности непрерывного процесса. Так же как и для одностороннего преобразования Лапласа, для двустороннего имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rr}^*(p) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{rr}(p + jk\omega_s), \\ \Phi_{rs}^*(p) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{rs}(p + jk\omega_s), \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

где $\omega_s = 2\pi/T$ — частота квантования непрерывного сигнала, а $j = \sqrt{-1}$. Поэтому спектр непрерывного процесса $\Phi_{rr}(j\omega)$ и $\Phi_{rs}(j\omega)$ при квантовании преобразуется точно так же, как и частотная характеристика непрерывного звена. Если говорить о спектре какой-либо из компонент случайного процесса, то квантование сигнала приводит к транспонированию всех частот в диапазон от $-\pi/T$ до π/T . Это явление связано со стробоскопическим эффектом, характерным для процесса квантования по времени.

Рассмотрим два одномерных случайных процесса, один из которых является широкополосным, а другой — уз-

кополосным. Как видно из рис. 4.4, транспонирование частот для широкополосного сигнала приводит к существенному повышению значений спектральной плотности $\Phi^*(j\omega)$ в случае, если частота квантования достаточно мала. Значения спектра узкополосного процесса в диапазоне частот от $-\pi/T$ до π/T при той же величине периода квантования практически не изменяются (рис. 4.5).

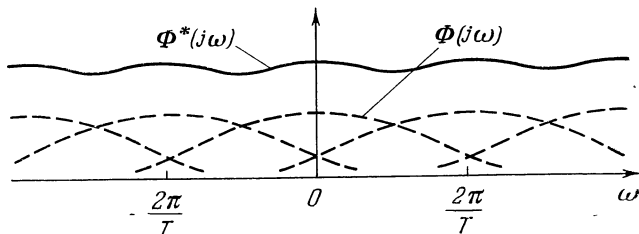


Рис. 4.4.

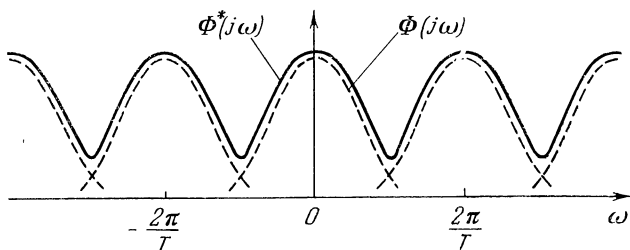


Рис. 4.5.

Это обстоятельство надо учитывать при рассмотрении воздействия на дискретную систему широкополосной помехи. Эффект транспонирования частот может привести к тому, что малая по своей интенсивности помеха после прохождения через импульсную цепь полностью «забывает» полезный сигнал.

Из определения дискретной спектральной плотности (4.49) и соотношений (4.51) следует, что дискретная спектральная плотность является периодической вдоль любой прямой, параллельной оси частот $p = j\omega$, и имеет на этой прямой период, равный частоте квантования $\omega_s = 2\pi/T$.

Для устранения неоднозначности в аргументе перейдем к комплексной переменной $z = e^{pT}$. Тогда матрица дискретной спектральной плотности определится как двустороннее z -преобразование (Z_{Π}) от соответствующей корреляционной матрицы:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rr}(z) &= Z_{\Pi}\{R_{rr}(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{-l} R_{rr}(lT), \\ \Phi_{rs}(z) &= Z_{\Pi}\{R_{rs}(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{-l} R_{rs}(lT). \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Корреляционные функции дискретного процесса могут быть определены по соответствующим спектральным характеристикам с помощью формул обращения

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(kT) &= Z_{\Pi}^{-1}\{\Phi_{rr}(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^k \Phi_{rr}(z) \frac{dz}{z}, \\ R_{rs}(kT) &= Z_{\Pi}^{-1}\{\Phi_{rs}(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^k \Phi_{rs}(z) \frac{dz}{z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

где контуром интегрирования является окружность Γ единичного радиуса с центром в начале координат.

Рациональному спектру непрерывных процессов соответствуют матрицы дискретной спектральной плотности, элементами которых являются дробно-рациональные функции z . Из определения (4.52) и соотношений (4.48) легко получить свойства матриц $\Phi_{rr}(z)$ и $\Phi_{rs}(z)$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rr}(z) &= \Phi'_{rr}(z^{-1}), \\ \Phi_{rs}(z) &= \Phi'_{sr}(z^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Аналогично (4.34), рациональная дискретная спектральная плотность n -мерного процесса $r(t)$, имеющего ранг m , может быть представлена в виде произведения двух матриц

$$\Phi_{rr}(z) = K(z^{-1})K'(z), \quad (4.55)$$

где элементы матрицы $K(z) = \|k_{ij}(z)\|_{n \times m}$ — рациональные функции z , аналитичные внутри единичного круга (в области Γ^+) [40].

Если матрица $\Phi_{rr}(z)$ неособая, то этот результат может быть усилен:

$$\Phi_{rr}(z) = \Phi_{rr}^-(z) \Phi_{rr}^+(z), \quad (4.56)$$

где матрица $\Phi_{rr}^-(z) = \|\Phi_{r_i r_j}^-(z)\|_1^n$ и ее обратная $[\Phi_{rr}^-(z)]^{-1}$ аналитичны в области Γ^+ , а $\Phi_{rr}^+(z) = \|\Phi_{r_i r_j}^+(z)\|_1^n$ и ее обратная $[\Phi_{rr}^+(z)]^{-1}$ аналитичны в Γ^- . При этом

$$\Phi_{rr}^-(z) = [\Phi_{rr}^+(z^{-1})]'. \quad (4.57)$$

Формулы (4.51) и (4.52) позволяют определить дискретную спектральную плотность, если известна корреляционная или спектральная матрицы исходного непрерывного процесса. Во многих случаях можно, однако, быстрее прийти к цели, если воспользоваться результатом, доказанным Ш. Чангом [50].

Пусть $\Phi_{rs}(p)$ — спектральная матрица непрерывного процесса, полученного как результат прохождения через формирующий фильтр многомерного белого шума. В силу предположения о том, что элементы передаточной матрицы формирующего фильтра являются правильными дробями, можно утверждать, что $\Phi_{rs}(p)$ при $p \rightarrow \infty$ убывает по крайней мере как p^{-1} . В частном случае, когда $s(t) \equiv r(t)$, спектральная плотность $\Phi_{rr}(p)$ убывает при $p \rightarrow \infty$ по крайней мере как p^{-2} и имеет нули и полюсы, расположенные симметрично по обе стороны от мнимой оси. Определим некоторую вспомогательную матрицу $R_{rs}^1(t)$ как результат применения к $\Phi_{rs}(p)$ одностороннего обратного преобразования Лапласа, т. е. как интеграл

$$R_{rs}^1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_c \Phi_{rs}(p) e^{pt} dp, \quad (4.58)$$

Таблица

№ п/п	Корреляционная функция	Непрерывная спектральная плотность	Дискретная спектральная плотность
1	$R(\tau) = A^2 \delta(\tau)$	A^2	—
2	$R(kT) = A^2 \delta_{0, k}$	—	A^2
3	$R(\tau) = A^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2A^2\alpha}{\alpha^2 - p^2}$	$\frac{A^2(1 - e^{-2\alpha T})}{(1 - e^{-\alpha T} z^{-1})(1 - e^{-\alpha T} z)}$
4	$R(kT) = A^2 e^{-\alpha T k } + B^2 \delta_{0, k}$	—	$\frac{C^2(1 - \mu z^{-1})(1 - \mu z)}{(1 - e^{-\alpha T} z^{-1})(1 - e^{-\alpha T} z)}$, $\mu = e^{-\alpha_1 T}$, $\text{ch } \alpha_1 T = \text{ch } \alpha T + \frac{A^2}{B^2} \text{sh } \alpha T$, $C^2 = B^2 e^{(\alpha_1 - \alpha) T}$
5	$R(\tau) = A^2 e^{-\alpha \tau } \cos \beta \tau$	$\frac{2A^2\alpha[(\alpha^2 + \beta^2) - p^2]}{[(\alpha^2 + \beta^2) + p^2]^2 - 4\alpha^2 p^2}$	$D(1 - \mu z^{-1})(1 - \mu z) \times$ $\times [(1 - 2e^{-\alpha T} z^{-1} \cos \beta T + e^{-2\alpha T} z^{-2}) \times$ $\times (1 - 2e^{-\alpha T} z \cos \beta T + e^{-2\alpha T} z^2)]^{-1}$, $\mu = e^{-\alpha_1 T}$, $\text{ch } \alpha_1 T = \frac{\text{ch } \alpha T}{\cos \beta T}$, $D = e^{(\alpha_1 - \alpha) T} A^2 \cos \beta T (1 - e^{-2\alpha T})$

<p>6</p> $R(\tau) = A^2 e^{-\alpha \tau } \times$ $\times \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{4A^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{[(\alpha^2 + \beta^2) + P^2]^2 - 4\alpha^2 P^2}$	$D(1 - \mu z^{-1})(1 - \mu z) \times$ $\times [(1 - 2e^{-\alpha T} z^{-1} \cos \beta T + e^{-2\alpha T} z^{-2}) \times$ $\times (1 - 2e^{-\alpha T} z \cos \beta T + e^{-2\alpha T} z^2)]^{-1},$ $\mu = e^{-\alpha_1 T},$ $\operatorname{ch} \alpha_1 T = \frac{\alpha}{\beta} \sin 2\beta T - \operatorname{sh} 2\alpha T$ $= \frac{\alpha}{2 \left[\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \operatorname{ch} \alpha T - \cos \beta T \operatorname{sh} \alpha T \right]},$ $D = A^2 e^{(\alpha_1 - \alpha) T} \left[\cos \beta T (1 - e^{-2\alpha T}) - \right.$ $\left. - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T (1 + e^{-2\alpha T}) \right]$
<p>7</p> $R(\tau) = A^2 e^{-\alpha \tau } \times$ $\times \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{-4A^2\alpha P^2}{[(\alpha^2 + \beta^2) + P^2]^2 - 4\alpha^2 P^2}$	$D(1 - \mu z^{-1})(1 - \mu z) \times$ $\times [(1 - 2e^{-\alpha T} z^{-1} \cos \beta T + e^{-2\alpha T} z^{-2}) \times$ $\times (1 - 2e^{-\alpha T} z \cos \beta T + e^{-2\alpha T} z^2)]^{-1},$ $\mu = e^{-\alpha_1 T},$ $\operatorname{ch} \alpha_1 T = \frac{\alpha}{\beta} \sin 2\beta T + \operatorname{sh} 2\alpha T$ $= \frac{\alpha}{2 \left[\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \operatorname{ch} \alpha T + \cos \beta T \operatorname{sh} \alpha T \right]},$ $D = A^2 e^{(\alpha_1 - \alpha) T} [(1 - e^{-2\alpha T}) \cos \beta T +$ $+ \frac{\alpha}{\beta} (1 + e^{-2\alpha T}) \sin \beta T]$

где контур интегрирования C состоит из прямой, параллельной оси частот и расположенной справа от всех полюсов $\Phi_{rs}(p)$, и части окружности бесконечного радиуса в

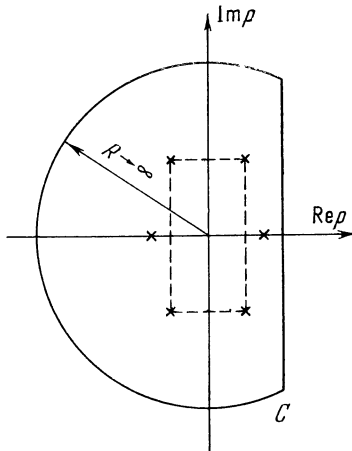


Рис. 4.6.

левой полуплоскости (рис. 4.6). Тогда $\Phi_{rs}(z)$ можно найти как одностороннее z -преобразование матрицы $R^{r1}(t)$:

$$\Phi_{rs}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} R_{rs}^1(lT) z^{-l}. \quad (4.59)$$

Это означает, что дискретная спектральная плотность может быть найдена по соответствующей непрерывной по обычным правилам одностороннего z -преобразования:

$$\Phi_{rs}(z) = Z\{\Phi_{rs}(p)\}. \quad (4.60)$$

Для определения элементов $\Phi_{rs}(z)$ по элементам $\Phi_{rs}(p)$ можно, в частности, использовать обычные таблицы z -преобразования. Примеры корреляционных функций и соответствующих им непрерывных и дискретных спектральных плотностей приведены в таблице.

В предыдущем параграфе при рассмотрении непрерывного процесса было введено понятие белого шума как некоторой полезной математической абстракции. Следует от-

метить, что такой непрерывный случайный процесс не может рассматриваться в качестве процесса, порождающего случайную последовательность. Формально это является следствием того, что его спектральная плотность равна постоянной величине, для которой не существует двустороннего дискретного преобразования. Физически это связано с тем обстоятельством, что белый шум сам по себе представляет нереализуемый процесс с бесконечной энергией и вводится лишь для удобства математического рассмотрения.

В дискретном случае, однако, имеется некоторый аналог белого шума, так называемый «дискретный белый шум». Это — процесс, имеющий постоянную дискретную спектральную плотность:

$$\Phi_{r_k r_k}(z) = C_k^2. \quad (4.61)$$

Представление о дискретном белом шуме, в отличие от непрерывного, является достаточно наглядным — это просто последовательность некоррелированных между собой случайных величин. Корреляционная функция его

$$R_{r_k r_k}(lT) = C_k^2 \delta_{0,l} = \begin{cases} C_k^2 & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } l \neq 0. \end{cases} \quad (4.62)$$

В качестве порождающего для дискретного белого шума может выступать любой непрерывный процесс, время корреляции которого меньше периода дискретности. Практически важным случаем появления дискретного белого шума является периодическое измерение некоторого параметра, сопровождающееся независимыми ошибками. Случайная последовательность этих независимых ошибок измерения как раз и дает дискретный белый шум.

§ 4.4. Установившиеся систематические ошибки дискретных систем. Условие несмещенности

Внешние воздействия, приложенные к системе управления, вообще говоря, всегда можно рассматривать как случайные функции времени. Отличие средних значений этих функций от нуля означает, что на систему, помимо

чисто случайных сигналов, поступают детерминированные известные функции времени. Кроме того, среди входных воздействий могут встречаться случайные функции особого вида, а именно, детерминированные функции времени

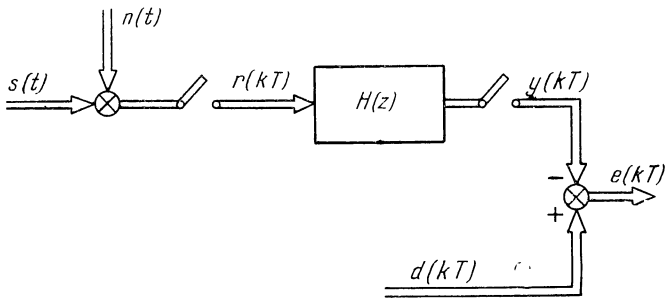


Рис. 4.7.

со случайными коэффициентами. Принцип суперпозиции, имеющий место для линейных систем, позволяет отдельно анализировать реакцию системы на детерминированные и на случайные центрированные функции. Настоящий параграф посвящен анализу ошибок системы, возникающих при воздействии на нее детерминированных входных сигналов.

Пусть на вход дискретной системы с передаточной матрицей $H(z) = \|h_{ij}(z)\|_1^n$ (рис. 4.7) поступает сумма полезного сигнала $s = \|s_1, s_2, \dots, s_n\|'$ и помехи $n = \|n_1, n_2, \dots, n_n\|'$

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad (4.63)$$

причем математические ожидания полезного сигнала и помехи в общем случае не равны нулю.

Среднее значение входного сигнала системы равно сумме средних значений полезного сигнала и помехи

$$m_r(t) = m_s(t) + m_n(t). \quad (4.64)$$

Если система устойчива, то математическое ожидание выходного сигнала $m_y(kT) = \|m_{y_1}, m_{y_2}, \dots, m_{y_n}\|'$ в

установившемся режиме определяется как

$$m_y(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) m_r(kT - lT), \quad (4.65)$$

где $H(lT)$ — весовая матрица системы:

$$H(lT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^l H(z) \frac{dz}{z}. \quad (4.66)$$

Рассмотрим для определенности позиционную следящую систему, т. е. будем считать желаемый сигнал $d(t)$ равным полезному сигналу $s(t)$.

Установившееся значение систематической ошибки определяется как

$$m_e(kT) = M\{s(kT) - y(kT)\} = m_s(kT) - m_y(kT). \quad (4.67)$$

Учитывая (4.65), получим:

$$m_e(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} [I\delta_{0,l} - H(lT)] m_s(kT - lT) - \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) m_n(kT - lT). \quad (4.68)$$

Вводя дополнительно весовую матрицу ошибки

$$W_e(lT) = I\delta_{0,l} - H(lT), \quad (4.69)$$

перепишем (4.68) в виде

$$m_e(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} W_e(lT) m_s(kT - lT) - \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) m_n(kT - lT). \quad (4.70)$$

В силу (4.69) передаточная матрица ошибки $W_e(z) = Z\{W_e(lT)\}$ связана с передаточной матрицей системы

$H(z)$ соотношением

$$W(z) = I - H(z). \quad (4.71)$$

Рассмотрим первоначально случай, когда среднее значение помехи равно нулю, т. е. (4.70) имеет вид

$$m_e(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} W_e(lT) m_s(kT - lT). \quad (4.72)$$

Представим математическое ожидание полезного сигнала в виде ряда Тейлора с центром в точке $t = kT$:

$$\begin{aligned} m_s(kT - lT) &= m_s(kT) - lT \dot{m}_s(kT) + \\ &+ \frac{(lT)^2}{2!} \ddot{m}_s(kT) + \dots + (-1)^r \frac{(lT)^r}{r!} m_s^{(r)}(kT) + \dots, \end{aligned} \quad (4.73)$$

где через $m_s^{(r)}(kT)$ обозначена величина r -й производной по времени от $m_s(t)$ при $t = kT$. Подставляя последнее выражение в (4.72), получим:

$$m_e(kT) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (lT)^r W_e(lT) \right] m_s^{(r)}(kT). \quad (4.74)$$

Вводя матрицы коэффициентов

$$C_s^r = \|c_{ij}^r\|_1^n = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{l=0}^{\infty} (lT)^r W_e(lT), \quad (4.75)$$

перепишем ряд (4.74) в виде

$$m_e(kT) = C_s^0 m_s(kT) + C_s^1 \dot{m}_s(kT) + \dots + C_s^r m_s^{(r)}(kT) + \dots \quad (4.76)$$

Из последнего выражения следует, что установившаяся систематическая ошибка системы в любой момент времени kT определяется суммой ряда, члены которого пропорциональны среднему значению входного сигнала, скорости изменения этого среднего значения, ускорению и последующим производным. Соотношение (4.76) определяет ряд ошибки многомерной дискретной системы.

Матрицы коэффициентов ряда $C_s^0, C_s^1, \dots, C_s^r, \dots$ будем называть по аналогии с одномерным случаем матрицами

ошибки по положению. Система является статической или астатической по полезному сигналу в зависимости от того, отлична от нуля или равна нулю матрица C_s^0 . Астатические системы обрабатывают постоянный сигнал с нулевой установившейся ошибкой. В соответствии с (4.71) и (4.80) дискретная передаточная матрица астатической системы обращается при $z = 1$ в единичную:

$$H(z) |_{z=1} = I. \quad (4.81)$$

Матрицу C_s^1 назовем матрицей ошибки по скорости, а C_s^2 — матрицей ошибки по ускорению. Если $C_s^0 = 0$, а $C_s^1 \neq 0$, система имеет астатизм первого порядка и обрабатывает линейные сигналы с постоянной установившейся ошибкой. Система, имеющая матрицы ошибок $C_s = 0$, $C_s = 0$, $C_s \neq 0$, является астатической второго порядка. Установившаяся ошибка такой системы равна нулю при линейных входных сигналах и постоянна, если входной сигнал изменяется с постоянным ускорением.

В общем случае астатической системой с астатизмом порядка l называется система, у которой l первых матриц ошибки равны нулю:

$$C_s^0 = 0, \quad C_s^1 = 0, \dots, \quad C_s^{l-1} = 0, \quad C_s^l \neq 0. \quad (4.82)$$

Такая система имеет нулевую установившуюся ошибку при воздействии на вход любых сигналов, являющихся полиномами от t степени не выше $l - 1$:

$$m_s(t) = m^0 + m^1 t + \dots + m^{(l-1)} t^{l-1}. \quad (4.83)$$

Аналогичным образом можно ввести понятие астатизма системы по отношению к помехе $n(t)$. Составляющая ошибки, вызванная помехой, определяется рядом

$$m_e(kT) = C_n^0 m_n(kT) + C_n^1 \dot{m}_n(kT) + \dots + C_n^r m_n^{(r)}(kT) + \dots, \quad (4.84)$$

где матрицы ошибок

$$C_n^r = - \frac{1}{r!} \frac{d^r H^*(p)}{dp^r} \Big|_{p=0}. \quad (4.85)$$

Система является астатической по отношению к помехе, если ее передаточная матрица удовлетворяет условию

$$H(z) \Big|_{z=1} = 0. \quad (4.86)$$

Очевидно, что условия (4.81) и (4.86) не могут быть выполнены одновременно. Если полезный сигнал и помеха приложены в одной точке системы, то она может быть астатической либо по отношению к полезному сигналу, либо к помехе.

Рассмотрим условия равенства нулю установившейся систематической ошибки системы в случае, когда математическое ожидание полезного сигнала (или помехи) является не полиномом, а экспонентой с вещественным или комплексным показателем. Вследствие устойчивости системы очевидно, что при достаточно большом времени t реакция системы на затухающее воздействие стремится к нулю. Условие равенства нулю установившейся систематической ошибки при этом выполняется автоматически и не накладывает ограничений на весовые коэффициенты системы.

Иная ситуация имеет место в случае, если $m_s(t)$ или $m_n(t)$ представляют собой растущие по абсолютной величине функции времени, например экспоненты с показателем, имеющим положительную вещественную часть. Для пояснения характера влияния растущих входных сигналов рассмотрим первоначально случай, когда математическое ожидание помехи равно нулю, а математические ожидания составляющих полезного сигнала равны $m_{si}(t) = a_i e^{\beta t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\beta > 0$. Тогда условие нулевой установившейся ошибки в силу (4.72) записывается в виде

$$m_e(kT) = \sum_{l=0} W_e(lT) a e^{\beta(kT-lT)} = 0_{n \times 1}, \quad (4.87)$$

где $a = \|a_1, a_2, \dots, a_n\|'$ — вектор амплитуд входных сигналов. В частных случаях некоторые из a_i могут быть равны нулю. Соотношение (4.87) представляет собой условие

несмещенного воспроизведения экспоненциально растущего сигнала в установившемся режиме работы. Сократив (4.87) на общий множитель $e^{\beta k T}$ и воспользовавшись теоремой обращения для z -преобразования, перейдем к изображениям:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^l W_e(z) a e^{-\beta l T} \frac{dz}{z} = 0_{n \times 1}. \quad (4.88)$$

Изменим далее в последнем равенстве порядок интегрирования и суммирования и после суммирования ряда $\sum_{l=0}^{\infty} z^l e^{-\beta l T}$ получим:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z - \gamma} W_e(z) a \frac{dz}{z} = 0_{n \times 1}, \quad (4.89)$$

где $\gamma = e^{\beta T} > 1$.

Векторное равенство (4.89) представляет собой n условий, которые в скалярной форме имеют вид

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z - \gamma} \left[\sum_{i=1}^n w_{ki}(z) a_i \right] \frac{dz}{z} = 0, \quad (4.90)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

где $w_{ki}(z)$ — элементы матрицы $W_e(z)$.

Выполнение (4.90) возможно только в случае, если все n сумм вида $\sum_{i=1}^n w_{ki}(z) a_i$ будут иметь множителем $z - \gamma$.

Действительно, в этом и только в этом случае подынтегральные выражения в (4.90) не имеют полюсов вне контура интегрирования (единичной окружности Γ). Кроме того, то обстоятельство, что разность степеней знаменателей и числителей больше единицы, обеспечивает отсутствие вычета в бесконечно удаленной точке.

Условия (4.90) существенно зависят от амплитудных значений входных сигналов. Однако во многих случаях числовые значения a_i неизвестны и целесообразно потребовать выполнения несмещенного воспроизведения сигналов вида $e^{\beta t}$ при любых значениях амплитуд a_i . Для этого

достаточно выполнить не n , а n^2 равенств:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z - \gamma} w_{kl}(z) \frac{dz}{z} = 0, \quad (4.91)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, n$$

С учетом (4.71) последние соотношения переписываются в форме

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z)}{z - \gamma} \frac{dz}{z} = 0. \quad (4.92)$$

Очевидно, что для выполнения (4.92) необходимо и достаточно, чтобы дискретная передаточная матрица системы удовлетворяла условию

$$I - H(z) = (z - \gamma) H^2(z)_+, \quad (4.93)$$

где $H^2(z)_+$ — произвольная устойчивая матрица. В частности, при $\gamma = 1$ условие (4.93) означает требование астатизма первого порядка по отношению к полезному сигналу.

В более общем случае математическое ожидание полезного сигнала представляет собой сумму экспонент с вещественными или комплексными показателями или слагаемых вида $c_{lk} t^l e^{\beta_k t}$, где l — целое. Сигналы, представляющие собой суммы слагаемых вида $(c_{0k} + c_{1k} t + \dots + c_{lk} t^l) e^{\beta_k t}$, где β_k — вещественные или комплексные числа, будем называть квазиполиномами. Известно [37], что все функции такого вида являются решениями линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Дискретное изображение квазиполинома является рациональной функцией z .

В соответствии с предположением относительно вида $m_s(z)$ имеем для компонент изображения среднего значения полезного сигнала:

$$m_{si}(z) = \frac{a_i(z)}{q_i(z)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.94)$$

где $a_i(z)$ и $q_i(z)$ — полиномы. Если все сигналы $m_{si}(t)$ затухают во времени, то все полиномы знаменателей $m_{si}(z)$

имеют корни в Γ^+ :

$$q_i(z) = q_i^+(z).$$

Условие несмещенности, т. е. равенства нулю установившейся систематической ошибки, выполняется при этом автоматически. Возрастающим экспонентам и полиномам от t в изображениях соответствуют полюсы, расположенные вне единичного круга и на окружности Γ , т. е. сомножители $q_i^-(z)$. Обозначая наименьшее общее кратное всех $q_i^-(z)$ через $q^-(z)$, можно записать условие несмещенности в виде, аналогичном (4.93):

$$W_e(z) = I - H(z) = q^-(z)H^2(z)_+. \quad (4.95)$$

Доказательство последнего условия тривиально. Это — просто требование выполнения (4.93) для каждого из неубывающих членов математического ожидания $m_s(t)$. Выражение (4.95) показывает, что передаточная функция ошибки по отношению к полезному сигналу $W_e(z)$ должна иметь в качестве нулей все полюсы изображения $m_s(z)$, расположенные вне области Γ^+ .

Точно так же в случае, если математическое ожидание помехи отлично от нуля и содержит неубывающие компоненты, условие нулевой установившейся ошибки запишется в виде

$$H(z) = p^-(z)H^1(z)_+, \quad (4.96)$$

где $H^1(z)_+$ — произвольная устойчивая передаточная матрица, а $p^-(z)$ — полином, нулями которого является объединение всех полюсов изображения математического ожидания помехи $m_n(z) = \left\| \frac{b_1(z)}{p_1(z)}, \frac{b_2(z)}{p_2(z)}, \dots, \frac{b_n(z)}{p_n(z)} \right\|'$, расположенных в Γ^- и на контуре Γ . Складывая два последних равенства, получим связь между матрицами $H^1(z)_+$ и $H^2(z)_+$:

$$p^-(z)H^1(z)_+ + q^-(z)H^2(z)_+ = I. \quad (4.97)$$

Условия (4.95) и (4.96) являются не противоречивыми и могут выполняться одновременно лишь в случае, если полиномы $p^-(z)$ и $q^-(z)$ не имеют общих нулей.

Из вывода соотношений (4.95) и (4.96) следует, что они являются лишь достаточными условиями нулевой установившейся ошибки. В некоторых конкретных случаях может понадобиться их уточнение, т. е. учет различия условий несмещенности по отдельным каналам. Подобный случай может представиться, когда функция одного и того же вида, например линейно возрастающая, в одном из каналов входит в полезный сигнал, а в другом — в помеху. Тогда для вывода условий несмещенности можно воспользоваться условиями типа (4.90), не делая последующего шага к (4.91).

Сравнивая соотношения (4.95) и (4.96) соответственно с (3.77) и (3.78), убеждаемся в полном совпадении условий, порождаемых совершенно различными физическими ситуациями. Оказывается, что вид условия несмещенного подавления сигнала формально совпадает с достаточным условием устойчивости замкнутой системы управления неминимальнофазовым объектом. Вид же условия несмещенного воспроизведения сигнала совпадает с условием устойчивости при наличии неустойчивого объекта. Эта общность характера ограничений, накладываемых на передаточную матрицу замкнутой системы $H(z)$, будет использована в дальнейшем при постановке и решении задачи синтеза.

Выполнение соотношений типа (4.95) и (4.96) обеспечивает равенство нулю установившейся ошибки не только для детерминированных функций времени, но и для случайных квазиполиномов, т. е. функций вида $\sum_k (c_{0k} + c_{1k}t + \dots + c_{lk}t^l) e^{\beta_k t}$ со случайными коэффициентами c_{jk} . При этом установившаяся ошибка равна нулю для каждой реализации такого случайного процесса.

Условия (4.95) и (4.96) представляют собой дискретный аналог известной $K(D)$ -инвариантности.

§ 4.5. Установившаяся дисперсия ошибки дискретной системы

Рассмотрим установившуюся реакцию дискретной системы с постоянными параметрами на стационарный случайный сигнал. В настоящем параграфе будем предполагать, что математическое ожидание сигнала равно нулю.

Иначе говоря, будем рассматривать центрированные случайные функции времени. В рамках корреляционной теории основными характеристиками случайных процессов являются корреляционные функции и соответствующие им

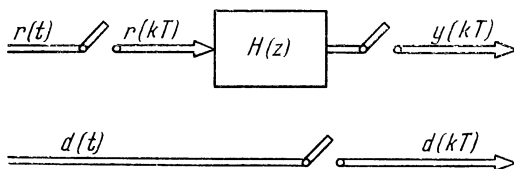


Рис. 4.8.

спектральные плотности. При исследовании вопроса о прохождении случайного сигнала через линейную систему представляет интерес выяснение того, каким образом преобразуются эти характеристики сигналов.

Установившееся значение сигнала $y(kT) = \|y_1(kT), y_2(kT), \dots, y_m(kT)\|'$ на выходе устойчивой дискретной системы с весовой матрицей $H(lT)$ связано с входным сигналом $r(t) = \|r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)\|'$ соотношением

$$y(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) r(kT - lT). \quad (4.98)$$

Размер весовой матрицы $H(lT)$ при этом равен $m \times n$. Пусть $d(t) = \|d_1(t), d_2(t), \dots, d_p(t)\|'$ — некоторый p -мерный стационарный векторный случайный процесс, стационарно связанный с процессом $r(t)$ (рис. 4.8). Выразим корреляционные матрицы $R_{yy}(kT) = \|R_{y_i y_j}(kT)\|_1^m$, $R_{yr}(kT) = \|R_{y_i r_j}(kT)\|_{m \times n}$ и $R_{yd}(kT) = \|R_{y_i d_j}(kT)\|_{m \times p}$ через характеристики входных сигналов в матрицу $H(lT)$.

По определению корреляционной матрицы имеем:

$$R_{yd}(kT) = M\{y(nT) d'(nT + kT)\}. \quad (4.99)$$

Подставляя в (4.99) соотношение (4.98) и производя осреднение, найдем:

$$R_{yd}(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) R_{rd}(kT + lT). \quad (4.100)$$

Полагая в (4.100) $d(t) \equiv r(t)$, получим:

$$R_{yr}(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) R_{rr}(kT + lT). \quad (4.101)$$

При $d(kT) \equiv y(kT)$ из (4.100), (4.48) и (4.101) следует:

$$\begin{aligned} R_{yy}(kT) &= \sum_{l_1=0}^{\infty} H(l_1T) R_{ry}(kT + l_1T) = \\ &= \sum_{l_1=0}^{\infty} H(l_1T) R'_{yr}(-kT - l_1T) = \\ &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} H(l_1T) R_{rr}(kT + l_1T - l_2T) H'(l_2T). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Применяя к (4.100) двустороннее z -преобразование, перейдем к соотношению, связывающему дискретные спектральные плотности сигналов $d(t)$, $r(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{yd}(z) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} z^{-h} \sum_{l=0}^{\infty} H(lT) R_{rd}(kT + lT) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l H(lT) \sum_{h=-\infty}^{\infty} z^{-(h+l)} R_{rd}(kT + lT) = H(z^{-1}) \Phi_{rd}(z). \end{aligned} \quad (4.103)$$

При $d(t) \equiv r(t)$ из (4.103) следует:

$$\Phi_{yr}(z) = H(z^{-1}) \Phi_{rr}(z). \quad (4.104)$$

С другой стороны, при $d(kT) \equiv y(kT)$ с учетом (4.54) и (4.104) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(z) &= H(z^{-1}) \Phi_{ry}(z) = H(z^{-1}) \Phi'_{yr}(z^{-1}) = \\ &= H(z^{-1}) \Phi_{rr}(z) H'(z). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Таким образом, матрицы дискретных спектральных плотностей сигналов на входе и выходе линейной

дискретной системы (рис. 4.8) связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{yd}(z) &= H(z^{-1})\Phi_{rd}(z), \\ \Phi_{dy}(z) &= \Phi'_{yd}(z^{-1}) = \Phi_{dr}(z)H'(z), \\ \Phi_{yr}(z) &= H(z^{-1})\Phi_{rr}(z), \\ \Phi_{ry}(z) &= \Phi'_{yr}(z^{-1}) = \Phi_{rr}(z)H'(z), \\ \Phi_{yy}(z) &= H(z^{-1})\Phi_{rr}(z)H'(z). \end{aligned} \right\} \quad (4.106)$$

В более общем случае дискретному преобразованию сигналов может предшествовать их прохождение через

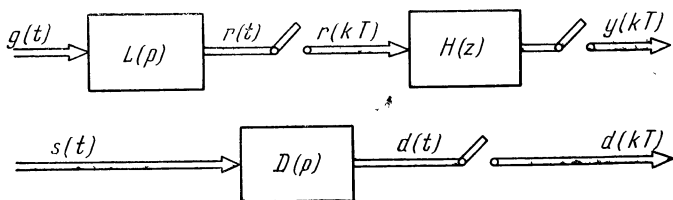


Рис. 4.9.

непрерывную устойчивую многомерную систему (рис. 4.9). При этом для получения спектральных плотностей непрерывных сигналов $r(t)$ и $d(t)$ необходимо воспользоваться соответствующими формулами из § 4.2:

$$\begin{aligned} \Phi_{rd}(p) &= \Phi'_{dr}(-p) = L(-p)\Phi_{gs}(p)D'(p), \\ \Phi_{rr}(p) &= L(-p)\Phi_{ss}(p)L'(p). \end{aligned}$$

Спектральные плотности дискретных значений сигналов $\Phi_{dr}(z)$ и $\Phi_{rr}(z)$ получатся как z -преобразования от соответствующих непрерывных характеристик:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{rd}(z) &= Z\{\Phi_{rd}(p)\} = Z\{L(-p)\Phi_{gs}(p)D'(p)\}, \\ \Phi_{rr}(z) &= Z\{\Phi_{rr}(p)\} = Z\{L(-p)\Phi_{ss}(p)L'(p)\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

Пусть в последнем из соотношений (4.106) все компоненты сигнала $r(kT)$ являются дискретным белым шумом

с единичной дисперсией, т. е. $\Phi_{rr}(z) = I_{n \times n}$. Тогда

$$\Phi_{yy}(z) = H(z^{-1})H'(z). \quad (4.108)$$

В то же время, как отмечалось в § 4.3, любой стационарный дискретный случайный процесс может быть представлен в форме (4.55), совпадающей с (4.108) с точностью до обозначений. Это означает, что любой процесс с рациональным спектром может рассматриваться как сформированный из многомерного дискретного белого шума некоторым устойчивым *дискретным формирующим фильтром*.

Перейдем к анализу установившихся случайных ошибок дискретной системы. В соответствии с определением (4.3) ошибка системы рис. 4.7 в дискретные моменты времени

$$e(kT) = d(kT) - y(kT), \quad (4.109)$$

где $d(kT)$ — дискретные значения желаемого сигнала. Из стационарности сигналов $d(kT)$ и $y(kT)$ следует стационарность ошибки $e(kT)$. При этом дисперсия каждой составляющей ошибки является постоянной величиной и может быть определена по соответствующей функции спектральной плотности с помощью формулы

$$D_{e_i} = R_{e_i e_i}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{e_i e_i}(z) \frac{dz}{z}. \quad (4.110)$$

Точность работы многомерной системы будем характеризовать квадратичным показателем качества (4.5):

$$J_e = M \{ \varepsilon^2(kT) \} = M \left\{ \sum_{i=1}^m \rho_i e_i^2(kT) \right\}, \quad (4.111)$$

где ρ_i — выбранные весовые коэффициенты. В частном случае, когда существенной является величина ошибки лишь в одном из каналов, все коэффициенты ρ_i , кроме одного, в (4.111) следует положить равными нулю. С учетом обозначения (4.8) и (4.9) соотношение (4.111) запишется как

$$J_e = M \{ \text{Sp}[E(kT)R] \} = \text{Sp}[M\{E(kT)R\}]. \quad (4.112)$$

Матрица $M\{E(kT)\}$ есть не что иное, как корреляционная

матрица ошибок $R_{ee}(kT)$ при $k = 0$. Она выражается через спектральные плотности ошибок с помощью интеграла

$$R_{ee}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{ee}(z) \frac{dz}{z}. \quad (4.113)$$

Подставляя (4.113) в (4.112), окончательно получим:

$$J_e = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp} [\Phi_{ee}(z) R] \frac{dz}{z}. \quad (4.114)$$

Для того чтобы выразить показатель качества (4.114) через динамические характеристики системы и спектральные матрицы входных сигналов, необходимо воспользоваться правилами, установленными выше. В частности, для схемы рис. 4.7 легко получить:

$$\Phi_{ee}(z) = \Phi_{dd}(z) - \Phi_{yd}(z) - \Phi_{dy}(z) + \Phi_{yy}(z), \quad (4.115)$$

где для $\Phi_{yd}(z)$, $\Phi_{dy}(z)$ и $\Phi_{yy}(z)$ справедливы соотношения (4.106). Величина интеграла (4.114) позволяет вынести суждение о качестве работы системы управления. Варьируя некоторые из параметров системы и вычисляя (4.114) при различных значениях параметров, можно остановить свой выбор на тех или иных их величинах.

§ 4.6. Неустановившиеся ошибки дискретной системы

В предыдущем параграфе установлена связь между корреляционными матрицами и матрицами спектральных плотностей на входе и выходе линейной системы в установившемся режиме работы в случае, когда входные сигналы являются реализациями стационарного случайного процесса. Для рассмотрения динамики систем управления бывает необходимо учесть дополнительно два фактора. Это, во-первых, наличие переходных процессов при включении системы в работу и, во-вторых, возможная нестационарность входных сигналов и самой системы.

Рассмотрим прохождение случайного сигнала через дискретную линейную систему. Весовая матрица нестациона-

нарной системы $H(kT, lT)$ зависит от двух аргументов lT и kT и определяется как реакция системы в момент времени kT на δ -функции Кронекера, приложенные в момент lT . Пусть на систему, находившуюся в покое при $t < 0$, в момент времени $t = 0$ начинает поступать сигнал $r(t)$ (рис. 4.10). Выходной сигнал системы

$$y(kT) = \sum_{l=0}^k H(kT, lT)r(lT). \quad (4.116)$$

В силу принципа суперпозиции можно отдельно рассматривать преобразование математических ожиданий и центрированных случайных функций. В настоящем параграфе будем поэтому считать, что математическое ожидание входного сигнала $r(t)$ (а следовательно, и выходного $y(kT)$) равно нулю.

Для корреляционных матриц в соответствии с определением (4.46), (4.47) получим:

$$\left. \begin{aligned} R_{ys}(kT, lT) &= M \{y(kT) s'(lT)\} = \\ &= \sum_{j=0}^k H(kT, jT) R_{rs}(jT, lT), \\ R_{yr}(kT, lT) &= \sum_{j=0}^k H(kT, jT) R_{rr}(jT, lT), \\ R_{yy}(kT, lT) &= \sum_{j=0}^k H(kT, jT) R_{ry}(jT, lT) = \\ &= \sum_{j=0}^k H(kT, jT) R'_{yr}(lT, jT) = \\ &\approx \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^l H(kT, jT) R_{rr}(jT, iT) H'(lT, iT). \end{aligned} \right\} (4.117)$$

В случае, если входной сигнал и система являются стационарными, формулы (4.117) позволяют учесть переходные процессы, связанные с учетом конечности времени

работы системы. При этом

$$R_{rr}(jT, lT) = R_{rr}(lT - jT), \quad H(kT, jT) = H(kT - jT),$$

так что

$$\left. \begin{aligned} R_{ys}(kT, lT) &= \sum_{j=0}^k H(kT - jT) R_{rs}(lT - jT), \\ R_{yr}(kT, lT) &= \sum_{j=0}^k H(kT - jT) R_{rr}(lT - jT), \\ R_{yy}(kT, lT) &= \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^k H(kT - jT) R_{rr}(iT - jT) H'(lT - iT). \end{aligned} \right\} \quad (4.118)$$

Последние соотношения, в отличие от (4.100) — (4.102), пригодны и в случае неустойчивой системы. Если же система устойчива и время ее работы kT неограниченно увеличивается, то (4.118) переходят соответственно в (4.100) — (4.102).

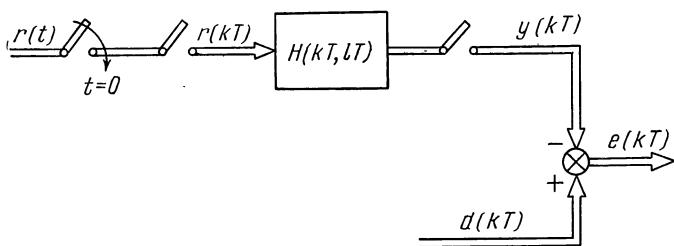


Рис. 4.10.

Для практических приложений представляет интерес случай, когда сигналы $r(t)$ и $s(t)$ представляют собой суммы стационарных случайных функций и детерминированных функций со случайными коэффициентами (случайных квазиполиномов). Пользуясь обозначениями (4.26), запишем:

$$r(t) = x(t) + P(t)a, \quad s(t) = d(t) + Q(t)a. \quad (4.119)$$

В силу (4.27) для корреляционных матриц $R_{rr}(kT, lT)$ и $R_{rs}(kT, lT)$ получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(kT, lT) &= R_{xx}(lT - kT) + P(kT)KP'(lT), \\ R_{rs}(kT, lT) &= R_{xd}(lT - kT) + P(kT)KQ'(lT), \end{aligned} \right\} (4.120)$$

где $K = M\{aa'\}$ — матрица корреляционных моментов составляющих случайного вектора a .

Точность системы управления по-прежнему будем оценивать отклонениями выходного сигнала от некоторого желаемого $d(t)$. Однако в рассматриваемом нестационарном случае существенное значение имеет момент времени, в который определяется ошибка. В дальнейшем для этого момента времени будем пользоваться обозначением NT так, что

$$e(NT) = d(NT) - y(NT). \quad (4.121)$$

Тогда показатель качества работы системы, являющийся суммой взвешенных неустановившихся дисперсий ошибок, также зависит от времени NT :

$$J_e(NT) = \sum_{i=1}^m \rho_i M\{e_i^2(NT)\}. \quad (4.122)$$

Имея в виду (4.8) — (4.9), можно записать:

$$J_e(NT) = \text{Sp}[M\{E(NT)R\}] = \text{Sp}[R_{ee}(NT, NT)R]. \quad (4.123)$$

Для системы рис. 4.10 корреляционная матрица ошибок

$$\begin{aligned} R_{ee}(NT, NT) &= M\{[d(NT) - y(NT)][d'(NT) - y'(NT)]\} = \\ &= R_{dd}(NT, NT) - R_{yd}(NT, NT) - \\ &\quad - R_{dy}(NT, NT) + R_{yy}(NT, NT). \end{aligned} \quad (4.124)$$

Соответствующие слагаемые в последнем соотношении с учетом (4.117) следующим образом выражаются через корреляционные характеристики входных сигналов и

значения весовой матрицы системы:

$$\left. \begin{aligned} R_{yd}(NT, NT) &= \sum_{j=0}^N H(NT, jT) R_{rd}(jT, NT), \\ R_{dy}(NT, NT) &= R'_{yd}(NT, NT), \\ R_{yy}(NT, NT) &= \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N H(NT, jT) R_{rr}(jT, iT) H'(NT, iT). \end{aligned} \right\} (4.125)$$

Формулы (4.123) — (4.125) могут быть использованы для анализа точности системы управления при нестационарных входных сигналах и учете конечности времени ее работы. Эти же соотношения являются исходными в задачах синтеза оптимальной многомерной дискретной системы при учете конечности времени ее работы.

СИНТЕЗ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЛЬТРОВ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ (ЗАДАЧА КОЛМОГорова — Винера для многомерных систем)

§ 5.1. Постановка задачи оптимальной фильтрации. Вывод уравнений оптимального фильтра

Управление сложным объектом (летательным аппаратом, энергетической системой, химическим или ядерным реактором и др.) почти всегда требует измерения большого числа параметров процессов, протекающих в системе. Во многих случаях оказывается, что различные измеряемые величины не являются независимыми, а, напротив, связаны друг с другом некоторой функциональной зависимостью. В этих условиях для выделения полезной информации естественно попытаться рационально использовать данные, поступающие от нескольких измерителей.

Построение фильтра с несколькими входами позволяет получить существенный выигрыш в точности по сравнению с одноканальной системой. Эффективность использования данных от нескольких источников определяется, во-первых, различием спектральных свойств помех в каждом из каналов и, во-вторых, взаимной корреляцией полезных составляющих процессов.

Наглядным примером многоканального фильтра может служить любая комплексная навигационная система. Так, для определения координаты движущегося объекта могут использоваться данные как о самой координате, так и о скорости ее изменения [16]. Блок-схема такой двухканальной системы изображена на рис. 5.1. Выходной сигнал позиционного измерителя $r_2(t)$ представляет собой аддитивную смесь измеряемой координаты $s_1(t)$ и некоторой помехи $n_2(t)$, $r_2(t) = s_1(t) + n_2(t)$. Другой измеритель позволяет определить скорость изменения координаты $\dot{s}_1(t)$ с некоторой ошибкой $n_1(t)$, $r_1(t) = \dot{s}_1(t) + n_1(t)$. Требуется выбрать динамические характеристики некоторого двухка-

нального фильтра так, чтобы его выходной сигнал в определенном смысле наименее уклонялся от полезного сигнала $s_1(t)$.

В случае дискретного фильтра входные сигналы $r_1(t)$ и $r_2(t)$ поступают для обработки лишь в дискретные

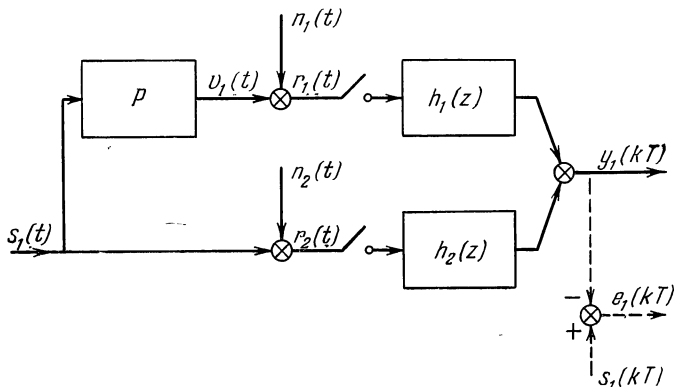


Рис. 5.1.

моменты времени $t = kT$ (k — целое), а в качестве динамических характеристик фильтра выступают дискретные передаточные функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$.

Из общих соображений ясно, что если уровень помехи $n_2(t)$ велик, то один второй канал не в состоянии обеспечить требуемое качество фильтрации. В то же время отдельно взятый первый канал накапливает ошибку, которая при увеличении времени наблюдения оказывается значительной даже при малом уровне помехи $n_1(t)$. Комплексная же система при подходящем выборе передаточных функций $h_1(z)$ и $h_2(z)$ дает точность более высокую, чем каждый из каналов в отдельности.

Обратимся к общей постановке задачи оптимальной многомерной фильтрации. Результаты решения этой задачи имеют принципиальное значение для статистического синтеза замкнутых систем управления.

На вход дискретного фильтра $H(z)$ поступает некоторый n -мерный случайный процесс $r(t)$, несущий информацию о полезном сигнале $s(t)$ (рис. 5.2) и представляющий

собой аддитивную смесь двух сигналов

$$r(t) = m(t) + n(t), \quad (51)$$

где $n(t)$ — вектор помех, приведенных ко входу системы обработки данных, а $m(t)$ — процесс, связанный с

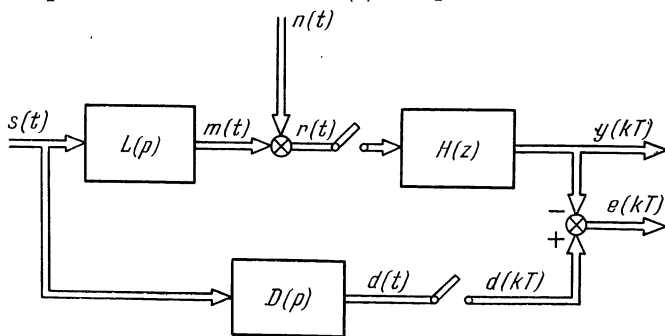


Рис. 5. 2.

полезным сигналом $s(t)$ известным линейным преобразованием с оператором $L(D)$:

$$m(t) = L(D)s(t). \quad (5.2)$$

Преобразование $L(D)$ учитывает как динамические искажения, вносимые измерителями, так и различие в способах измерения. В частности, при измерении производной интеграла или иного линейного преобразования от составляющих вектора $s(t)$ в соответствующие элементы $L(D)$ входят множители D , $1/D$ и т. д. Для схемы рис. 5.1 $L(D)$ — это матрица-столбец, $L(D) = \|D, 1\|'$.

Основная задача теории оптимальной фильтрации (в дискретном случае) может быть сформулирована как проблема приближения одной векторной случайной функции времени $d(kT)$ другой функцией $y(kT)$. Точность приближения оценивается вектором ошибки

$$e(kT) = d(kT) - y(kT). \quad (5.3)$$

Процесс $d(kT)$ играет роль желаемого сигнала, т. е. того идеального сигнала, к которому должен быть приближен выход системы $y(kT)$ (рис. 5.2). Та или иная степень близости сигналов $d(kT)$ и $y(kT)$ может быть получена

варьированием характеристик дискретного фильтра $H(z) = \|h_{ij}(z)\|_{l \times n}$.

В настоящей главе будет предполагаться, что как полезный сигнал $s(t)$, так и помеха $n(t)$ являются стационарными (и стационарно связанными) случайными векторными функциями времени с нулевыми средними значениями. Вероятностные свойства полезного сигнала и помехи заданы соответствующими матрицами корреляционных функций или рациональных спектральных плотностей $\Phi_{ss}(p)$, $\Phi_{nn}(p)$ и $\Phi_{sn}(p)$. Эффекты, связанные с переходными процессами при включении системы в работу, в настоящей главе не учитываются, т. е. предполагается, что время наблюдения (время работы системы) бесконечно.

За показатель качества примем сумму дисперсий ошибок всех каналов:

$$J_e = \sum_{i=1}^l M \{e_i^2(kT)\} = \text{Sp}[R_{ee}(0)], \quad (5.4)$$

где l — размерность вектора ошибки $e(kT)$. Выражение показателя качества системы J_e через след матрицы $R_{ee}(0)$ уже использовалось в § 4.5. Там же было показано, что выражение для J_e может быть записано в виде интеграла от следа матрицы спектральной плотности ошибки:

$$J_e = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \text{Sp}[\Phi_{ee}(z)] \frac{dz}{z}. \quad (5.5)$$

Используя соотношения (4.106), (4.107) и (4.115) для схемы рис. 5.2, получим:

$$\Phi_{ee}(z) = \Phi_{dd}(z) - H(z^{-1})\Phi_{rd}(z) - \Phi_{dr}(z)H'(z) + H(z^{-1})\Phi_{rr}(z)H'(z), \quad (5.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{dd}(z) &= Z\{D(-p)\Phi_{ss}(p)D'(p)\}, \\ \Phi_{rd}(z) &= Z\{\Phi_{rd}(p)\} = Z\{L(-p)\Phi_{ss}(p)D'(p) + \Phi_{ns}(p)(D'(p))\}, \\ \Phi_{rr}(z) &= Z\{\Phi_{rr}(p)\} = Z\{L(-p)\Phi_{ss}(p)L'(p) + L(-p)\Phi_{sn}(p) + \Phi_{ns}(p)L'(p) + \Phi_{nn}(p)\}, \\ \Phi_{dr}(z) &= \Phi'_{rd}(z^{-1}). \end{aligned} \right\} (5.7)$$

Показатель качества (5.5) (числовое значение J_e) при заданных свойствах входных и желаемого сигналов является функционалом от передаточной матрицы системы дискретных фильтров $H(z)$. Выбор динамических характеристик фильтров определяет величину J_e . Будем разыскивать такой многомерный дискретный фильтр, передаточная матрица которого $H(z)$ придает функционалу (5.5) минимальное значение:

$$J_e[H(z)] = J_e \min. \quad (5.8)$$

Фильтр, удовлетворяющий условию (5.8), назовем оптимальным.

Задача отыскания минимума функционала (5.8) является обычной вариационной задачей. Вследствие квадратичности функционала характеристики оптимального фильтра должны удовлетворять некоторой линейной системе уравнений. Для их получения можно воспользоваться стандартной процедурой.

Будем искать минимум функционала (5.5) в классе линейных многомерных дискретных операторов $H(z)$, удовлетворяющих условиям устойчивости и физической реализуемости. Представим каждую из передаточных функций системы фильтров $h_{ik}(z)$ (каждый элемент матрицы $H(z)$) в виде суммы оптимальной передаточной функции (z) и ее произвольной вариации $\delta h_{ik}(z) = \eta_{ik} h_{ik}^1(z)$:

$$h_{ik}(z) = h_{ik}^0(z) + \eta_{ik} h_{ik}^1(z), \quad (5.9)$$

$$i = 1, 2, \dots, l, k = 1, 2, \dots, n.$$

Вариации $\delta h_{ik}(z)$ должны принадлежать к тому же классу функций, что и $h_{ik}(z)$. Поэтому в выражении (5.9) η_{ik} — произвольные числа, а $h_{ik}^1(z)$ — произвольные рациональные функции z , удовлетворяющие условиям устойчивости и физической реализуемости.

Необходимым условием минимума J_e является равенство нулю вариации функционала (5.5), что приводит к равенствам

$$\left. \frac{\partial J_e}{\partial \eta_{ik}} \right|_{\|\eta_{ik}\|_{l \times n} = 0} = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, l, \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{matrix} \quad (5.10)$$

Для квадратичного функционала условия (5.10) являются также и достаточными. Система $l \times n$ уравнений (5.10)

в соответствии с соотношениями (5.5), (5.6) и (5.9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_e}{\partial \eta_{ik}} \Big|_{\|\eta_{ik}\|_{l \times n} = 0_{l \times n}} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \operatorname{Sp} [\Phi_{ee}(z)]}{\partial h_{ik}(z^{-1})} h_{ik}^1(z^{-1}) \frac{dz}{z} + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \operatorname{Sp} [\Phi_{ee}(z)]}{\partial h_{ik}(z)} h_{ik}(z) \frac{dz}{z} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Вследствие того, что при любой матрице $H(z)$ имеет место равенство $\operatorname{Sp}[\Phi_{ee}(z)] = \operatorname{Sp}[\Phi_{ee}(z^{-1})]$, второй интеграл (5.11) сводится к первому подстановкой $z_1 = z^{-1}$. Поэтому для выполнения (5.11) достаточно приравнять нулю лишь один из интегралов:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \operatorname{Sp} [\Phi_{ee}(z)]}{\partial h_{ik}(z^{-1})} h_{ik}^1(z^{-1}) \frac{dz}{z} = 0, \quad (5.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, l, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Из теории функций комплексного переменного [23] известно, что интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю тогда и только тогда, когда внутри этого контура не содержится особых точек подынтегрального выражения. Но, поскольку все $h_{ik}^1(z)$ устойчивы, то $h_{ik}^1(z^{-1})$ имеют полюсы лишь в области Γ^- . В силу произвольности вариаций $h_{ik}^1(z^{-1})$ подынтегральное выражение в (5.12) будет аналитическим внутри единичного круга (в области Γ^+) в том и только том случае, если выполняются $l \times n$ соотношений

$$\frac{1}{z} \frac{\partial \operatorname{Sp} [\Phi_{ee}(z)]}{\partial h_{ik}(z^{-1})} = q_{ik}(z)_-, \quad (5.13)$$

где $q_{ik}(z)_-$ — неизвестные рациональные функции z , аналитические внутри единичного круга плоскости z .

Перепиывая (5.13) в матричной форме, введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Sp} [\Phi_{ee}(z)]}{\partial H(z^{-1})} &= \left\| \frac{\partial \operatorname{Sp} [\Phi_{ee}(z)]}{\partial h_{ik}(z^{-1})} \right\|_{l \times n}, \\ Q(z)_- &= \|q_{ik}(z)_-\|_{l \times n} \end{aligned} \quad (5.14)$$

и получим:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial \text{Sp}[\Phi_{ee}(z)]}{\partial H(z^{-1})} = Q(z)_{-}. \quad (5.15)$$

Соотношения (5.15) представляют собой систему $l \times n$ уравнений, служащих для определения элементов оптимальной передаточной матрицы системы дискретных фильтров $H(z)$. Будем называть (5.15) уравнениями оптимального фильтра.

Операция дифференцирования следа матрицы в общем случае является достаточно трудоемкой. Можно, однако, существенно упростить процесс написания уравнений (5.15) в явной форме и свести его к простым операциям с матрицей $\Phi_{ee}(z)$, если воспользоваться следующими правилами дифференцирования следа произведения матриц:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \text{Sp}[AB]}{\partial A} &= B', \\ \frac{\partial \text{Sp}[BA']}{\partial A} &= B, \\ \frac{\partial \text{Sp}[ABC]}{\partial B} &= (CA)' = A'C', \\ \frac{\partial \text{Sp}[AB'C']}{\partial B} &= C'A, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

где A , B , C — произвольные прямоугольные матрицы таких размеров, чтобы произведения в квадратных скобках существовали и были квадратными матрицами. Вывод соотношений (5.16) приведен в приложении I.

Пользуясь правилами (5.16) и учитывая вид матрицы $\Phi_{ee}(z)$ (5.6), запишем уравнения оптимального фильтра (5.15) в явном виде:

$$\frac{1}{z} H(z) \Phi'_{rr}(z) - \frac{1}{z} \Phi'_{rd}(z) = Q(z)_{-}. \quad (5.17)$$

Транспонируя уравнения (5.17), можно переписать их в эквивалентной форме:

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) H'(z) - \frac{1}{z} \Phi_{rd}(z) = Q'(z) \quad (5.18)$$

Уравнения (5.17), (5.18) представляют собой дискретный аналог системы уравнений Винера — Хопфа. Матричное равенство (5.17) эквивалентно системе $l \times n$ скалярных уравнений. Нетрудно, однако, убедиться в том, что эта система распадается на l групп независимых систем по n уравнений в каждой группе. Действительно, элементы любой строки матрицы $H(z)$ входят только в ту же строку произведения $H(z) \Phi'_{rr}(z)$, так что в скалярной форме каждая из l групп уравнений (5.17) ($p = 1, 2, \dots, l$) имеет вид

$$\frac{1}{z} \sum_{k=1}^n \Phi_{r_i r_k}(z) h_{pk}(z) - \frac{1}{z} \Phi_{r_i d_p}(z) = q_{pi}(z), \quad (5.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что выходной сигнал p -го канала системы $y_p(z)$ зависит лишь от передаточных функций $h_{pk}(z)$ с одним и тем же индексом p :

$$y_p(z) = \sum_{k=1}^n h_{pk}(z) r_k(z). \quad (5.20)$$

В связи с этим факт распада уравнений (5.17) на l независимых подсистем означает, что ошибки $e_p(kT)$ по каждому из p выходов фильтра могут рассматриваться независимо. Передаточные функции $h_{pk}(z)$ при фиксированном p удовлетворяют при этом условию минимума дисперсии p -й составляющей вектора ошибки:

$$D_{e_p} = M\{e_p(kT)\}. \quad (5.21)$$

Очевидно, что если за показатель качества взять сумму взвешенных дисперсий ошибок

$$J_e = \sum_{p=1}^l \rho_p D_{e_p},$$

то окажется, что оптимальные характеристики фильтра не зависят от значений весовых коэффициентов ρ .

Вследствие независимости дисперсий ошибок по каждому из каналов для дальнейших целей достаточно ограничиться рассмотрением системы с одним выходом, т. е. принять $l = 1$.

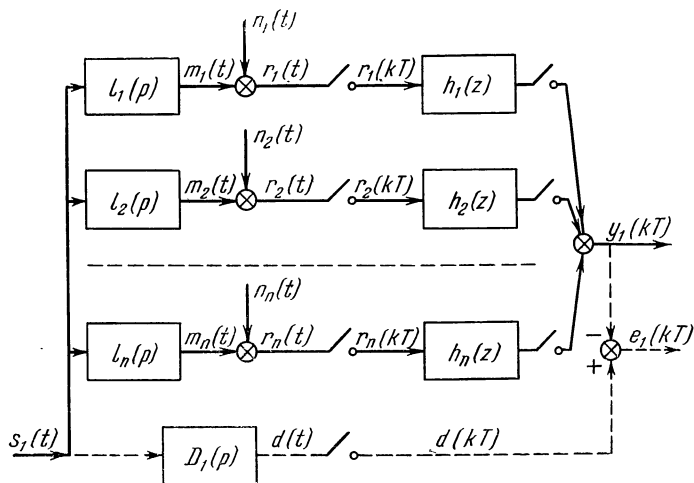


Рис. 5.3.

Практический интерес представляет частный случай, когда измеряемые сигналы $r_j(t)$ находятся в функциональной зависимости от одного полезного сигнала. В этом случае сигнал $s(t)$ является одномерным случайным процессом, $s(t) = s_1(t)$ (рис. 5.3). Матрица-столбец передаточных функций преобразователей $l(p) = \|l_1(p), l_2(p), \dots, l_n(p)\|'$ учитывает динамические искажения в измерителях и принципиальные особенности способов измерения (измерение сигнала, его скорости и т. д.). Так же как и в общем случае, помехи $n(t) = \|n_1(t), n_2(t), \dots, n_n(t)\|'$ аддитивно входят в измеряемый сигнал:

$$r_i(t) = l_i(D) s_1(t) + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подобный случай встречается при измерении одного сигнала несколькими измерителями. Задача заключается в выборе дискретных передаточных функций n фильтров

$h_1(z), h_2(z), \dots, h_n(z)$, обеспечивающих минимум дисперсии ошибки $e_1(kT)$ заданного преобразования полезного сигнала $s_1(t)$.

Уравнения оптимального фильтра имеют вид (5.19), где p необходимо положить равным единице. Вводя обозначения $h(z) = \|h_1(z), h_2(z), \dots, h_n(z)\|$, $\Phi_{rd_1}(z) = \|\Phi_{r_1 d_1}(z), \Phi_{r_2 d_1}(z), \dots, \Phi_{r_n d_1}(z)\|'$ и $q(z)_- = \|q_{11}(z)_-, q_{12}(z)_-, \dots, q_{1n}(z)_-\|'$, запишем (5.19) в векторной форме:

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) h'(z) - \frac{1}{z} \Phi_{rd_1}(z) = q(z)_-, \quad (5.22)$$

где, как и ранее, $\Phi_{rr}(z) = \|\Phi_{r_i r_k}(z)\|_1^n$ — квадратная матрица спектральных плотностей.

Перейдем к выводу соотношений, определяющих минимальное значение дисперсии ошибки для этого частного случая. Дисперсия ошибки $e_1(kT)$ выражается через функцию спектральной плотности по формуле

$$D_{e_1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{e_1 e_1}(z) \frac{dz}{z}. \quad (5.23)$$

Применяя для определения спектральной плотности $\Phi_{e_1 e_1}(z)$ соотношение (5.6), необходимо учесть, что для системы с одним выходом прямоугольная матрица $H(z)$ превращается в матрицу-строку:

$$H(z) = h(z). \quad (5.24)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_{e_1 e_1}(z) &= \Phi_{d_1 d_1}(z) - h(z^{-1}) \Phi_{rd_1}(z) - \Phi_{d_1 r}(z) h'(z) + \\ &+ h(z^{-1}) \Phi_{rr}(z) h'(z). \end{aligned} \quad (5.25)$$

В случае, если динамические характеристики фильтра удовлетворяют уравнениям (5.22), дисперсия ошибки принимает минимальное значение. При этом формулы для вычисления $[D_{e_1}]_{\min}$ можно упростить. Подставим (5.25) в

(5.23) и разобьем интеграл на два слагаемых:

$$D_{e_1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [\Phi_{d_1 d_1}(z) - \Phi_{d_1 r}(z) h'(z)] \frac{dz}{z} + \\ + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} h(z^{-1}) \left[\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) h'(z) - \frac{1}{z} \Phi_{rd_1}(z) \right] dz. \quad (5.26)$$

Нетрудно убедиться в том, что второй из интегралов равен нулю в силу уравнений оптимального фильтра (5.22). В самом деле, подынтегральное выражение этого интеграла, равное $h(z^{-1})q(z)$, не содержит полюсов внутри контура интегрирования. Поэтому минимальная дисперсия ошибки

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [\Phi_{d_1 d_1}(z) - \Phi_{d_1 r}(z) h'(z)] \frac{dz}{z}. \quad (5.27)$$

Прибавляя к подынтегральному выражению (5.25) и вычитая из него член $h(z^{-1})\Phi_{rr}(z)h'(z)$, в силу уравнений (5.22) получим:

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [\Phi_{d_1 d_1}(z) - h(z^{-1})\Phi_{rr}(z)h'(z)] \frac{dz}{z} - \\ - \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} h(z^{-1})q(z) dz + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} q'(z^{-1})h'(z) \frac{dz}{z^2}. \quad (5.28)$$

Последний интеграл в (5.28) сводится ко второму заменой z на z^{-1} , так что, очевидно, оба эти интеграла равны нулю.

Окончательно для минимальной дисперсии ошибки получим два эквивалентных выражения:

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [\Phi_{d_1 d_1}(z) - h(z^{-1})\Phi_{rr}(z)h'(z)] \frac{dz}{z} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} [\Phi_{d_1 d_1}(z) - \Phi_{d_1 r}(z)h'(z)] \frac{dz}{z}. \quad (5.29)$$

В общем случае, когда имеется l выходных сигналов, а показатель качества системы определен выражением (5.4), минимальное значение функционала находится как сумма минимальных значений ошибок каждого из каналов:

$$[J_e]_{\min} = \sum_{p=1}^l [D_{e_p}]_{\min}. \quad (5.30)$$

Определение минимального значения дисперсии ошибки по формулам (5.27) и (5.29) в общем случае приводит к довольно сложным вычислениям, причем результат получается обычно в труднообозримой форме. В связи с этим представляет интерес любая возможность облегчить процедуру вычисления минимального значения показателя качества. Существенное упрощение задачи можно получить для схемы рис. 5.3 в случае, если речь идет о чистой фильтрации ($d_1(t) = s_1(t)$, $D(p) = 1$) и, кроме того, хотя бы в одном из каналов, например, k -м, с какой-то ошибкой $n_k(t)$ измеряется сам полезный сигнал $s_1(t)$. Последнее означает, что для этого канала $h_k(p) = 1$. Для вывода упрощенной формулы вычисления минимального значения дисперсии ошибки требуется записать уравнения оптимального фильтра (5.22) и формулу (5.27) с учетом принятых допущений в скалярной форме.

Пусть во всех каналах помехи $n_i(t)$ не коррелированы с полезным сигналом $s_1(t)$. Тогда уравнения (5.22) примут вид

$$\frac{1}{z} \sum_{j=1}^n [\Phi_{m_i m_j}(z) + \Phi_{n_i n_j}(z)] h_j(z) - \frac{1}{z} \Phi_{m_i s_1}(z) = q_i(z),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.31)$$

а выражение для минимальной дисперсии ошибки (5.27) запишется в форме

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\Phi_{s_1 s_1}(z) - \sum_{j=1}^n \Phi_{s_1 m_j}(z) h_j(z) \right] \frac{dz}{z}. \quad (5.32)$$

Выберем из уравнений (5.31) k -е и учтем, что

$$m_k(t) = s_1(t) \quad (\text{т. е. } l_k(p) = 1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \sum_{j=1}^n \Phi_{s_1 m_j}(z) h_j(z) + \\ & + \frac{1}{z} \sum_{j=1}^n \Phi_{n_k n_j}(z) h_j(z) - \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) = q_k(z). \end{aligned} \quad (5.33)$$

С учетом (5.33) для (5.32) получим:

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\frac{1}{z} \sum_{j=1}^n \Phi_{n_k n_j}(z) h_j(z) - q_k(z) \right] dz,$$

или, поскольку

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} q_k(z) dz = 0,$$

окончательно найдем:

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\sum_{j=1}^n \Phi_{n_k n_j}(z) h_j(z) \right] \frac{dz}{z}. \quad (5.34)$$

В последнем выражении в качестве индекса k может быть выбран номер любого из каналов, для которого $l_k(p) = 1$. Если помеха в этом k -м канале не коррелирована с помехами во всех других каналах, то в сумме (5.34) остается лишь одно слагаемое:

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{n_k n_k}(z) h_k(z) \frac{dz}{z}. \quad (5.35)$$

Особенно простое выражение для минимальной дисперсии ошибки получается, если помеха в k -м канале является дискретным белым шумом с дисперсией B_k^2 :

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{B_k^2}{2\pi j} \oint_{\Gamma} h_k(z) \frac{dz}{z} = B_k^2 h_k(\infty), \quad (5.36)$$

где под $h_k(\infty)$ понимается предел

$$h_k(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} h_k(z). \quad (5.37)$$

§ 5.2. Решение уравнений оптимального фильтра

динамические характеристики оптимального филь-

В общем случае коррелированных входных сигналов тра, т. е. передаточные функции $h_{pk}(z)$ ($p = 1, 2, \dots, l$; $k = 1, 2, \dots, n$), определяются как решения l систем уравнений вида (5.19). Вводя обозначения $h^p(z) = \|h_{p1}(z),$

$h_{p2}(z), \dots, h_{pn}(z)\|$, $\Phi_{rd_p}(z) = \|\Phi_{r_1 d_p}(z), \Phi_{r_2 d_p}(z), \dots,$

$\Phi_{r_n d_p}(z)\|'$ и $q^p(z)_- = \|q_{p1}(z)_-, q_{p2}(z)_-, \dots, q_{pn}(z)_-\|'$,

перепишем (5.19) в матричной форме:

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) [h^p(z)]' - \frac{1}{z} \Phi_{rd_p}(z) = q^p(z)_-, \quad (5.38)$$

$$p = 1, 2, \dots, l.$$

Каждая из систем уравнений (5.38) есть не что иное, как p -я строка системы (5.17) или p -й столбец системы (5.18). В соответствии с этим $h^p(z)$ представляет собой p -ю строку матрицы $H(z)$, а $\Phi_{rd_p}(z)$ — p -й столбец матрицы $\Phi_{rd}(z)$.

В случае, когда входной сигнал (полезный сигнал и помеха) любого j -го канала не коррелирован с сигналом k -го канала (при $k \neq j$), соотношения (5.38) распадаются на ln независимых уравнений

$$\frac{1}{z} \Phi_{r_k r_k}(z) h_{pk}(z) - \frac{1}{z} \Phi_{r_k d_p}(z) = q_{pk}(z)_-. \quad (5.39)$$

Каждое из этих уравнений служит для определения одного из элементов матрицы $H(z)$. Решение задачи синтеза сводится при этом к рассмотрению ln одномерных случаев.

Способы решения уравнений (5.39) хорошо известны. Один из них основан на факторизации функции спектраль-

ной плотности входного сигнала $\Phi_{r_k r_k}(z)$ [50, 52]. Этот метод может быть обобщен также на многомерный случай [67]. Однако для многомерной системы (5.38) и, особенно, для синтеза замкнутых систем управления более удобен другой способ решения, который может быть назван методом неопределенных коэффициентов с предварительным определением полюсов [19, 53, 54, 55, 66].

Суть метода сводится к следующему. Первоначально находится формальное алгебраическое решение уравнений. Это решение в случае неособой матрицы $\Phi_{rr}(z)$ имеет вид

$$[\tilde{h}^p(z)]' = z[\Phi_{rr}(z)]^{-1}[q^p(z) - \frac{1}{z}\Phi_{rd_p}(z)] \quad (5.40)$$

и используется лишь для определения полюсов оптимальных передаточных функций $\tilde{h}_{pk}(z)$.

Решение задачи разыскивается в классе устойчивых и физически реализуемых систем. Поэтому в качестве полюсов $\tilde{h}_{pk}(z)$ необходимо взять лишь те (и все те) полюсы соотношений (5.40), которые расположены внутри единичного круга плоскости z . Этими полюсами являются:

- а) нули определителя матрицы спектральной плотности входного сигнала $\Phi_{rr}(z)$, по модулю меньшие единицы, и
- б) те полюсы правой части (5.40), которые соответствуют полюсам желаемого оператора $D(p)$, расположенным в левой полуплоскости плоскости p .

Нетрудно убедиться в том, что соотношения (5.40) не содержат других полюсов в области Γ^+ .

Рассмотрим определитель матрицы $\Phi_{rr}(z)$. Нули этого определителя суть корни уравнения

$$|\Phi_{rr}(z)| = |\Phi_{rr}(z^{-1})| = 0. \quad (5.41)$$

Уравнение (5.41) является возвратным, т. е. не изменяется при замене z на z^{-1} . Это следует из возможности представления любой матрицы $\Phi_{rr}(z)$ в виде (4.55). Особенно noteworthy является то, что каждому его корню μ_i соответствует корень μ_i^{-1} . Степень возвратного уравнения может быть понижена вдвое с помощью подстановки

$$w = z + z^{-1}.$$

Из выражения (4.55) следует также, что все вещественные корни уравнения встречаются парами $(\mu_i$ и $\mu_i^{-1})$, а комплексные — четверками $(\alpha_i + j\beta_i, \alpha_i - j\beta_i, (\alpha_i + j\beta_i)^{-1}, (\alpha_i - j\beta_i)^{-1})$.

Для упрощения записи в дальнейшем будем опускать индекс p , имея в виду однотипность уравнений (5.38) для различных p .

Обозначим корни уравнения (5.41), по модулю меньшие единицы, через μ_i , а их общее число через α . Полюсы $h(z)$, соответствующие оператору $D(p)$, обозначим через γ_j ($|\gamma_j| < 1$), а их общее число через β . В таком случае решение уравнения оптимального фильтра (5.38), удовлетворяющее условиям устойчивости и реализуемости, необходимо разыскивать в виде рациональных функций с полюсами μ_i и γ_j и с неопределенными коэффициентами полиномов числителя:

$$h_k(z) = \frac{a_0^k z^{\alpha+\beta} + a_1^k z^{\alpha+\beta-1} + \dots + a_{\alpha+\beta}^k}{\prod_{i=1}^{\alpha} (z - \mu_i) \prod_{j=1}^{\beta} (z - \gamma_j)} = \frac{a_k(z)}{\prod_{i=1}^{\alpha} (z - \mu_i) \prod_{j=1}^{\beta} (z - \gamma_j)}. \quad (5.42)$$

После подстановки (5.42) в исходные уравнения (5.38) левая часть, вообще говоря, будет содержать полюсы как в области Γ^- , так и в области Γ^+ :

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) \frac{[a(z)]'}{\prod_{i=1}^{\alpha} (z - \mu_i) \prod_{j=1}^{\beta} (z - \gamma_j)} - \frac{1}{z} \Phi_{rd}(z) = q(z), \quad (5.43)$$

где через $a(z)$ обозначена строка полиномов $a(z) = \|a_1(z), a_2(z), \dots, a_n(z)\|$. Для того, чтобы соотношения (5.42) были решениями уравнений (5.38), необходимо выбрать

неопределенные коэффициенты a_i^k так, чтобы в левой части (5.43) полюсы в Γ^+ отсутствовали. Это требование приводит к уравнениям для определения коэффициентов a_i^k :

$$\left[\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) \frac{[a(z)]'}{\prod_{i=1}^{\alpha} (z - \mu_i) \prod_{j=1}^{\beta} (z - \gamma_j)} - \frac{1}{z} \Phi_{rd}(z) \right]_+ = 0_{n \times 1}. \quad (5.44)$$

Операция $[]_+$ означает выделение из выражения в квадратных скобках слагаемых, содержащих полюсы в Γ^+ . Таким образом, уравнения для a_i^k могут быть получены путем разложения левой части (5.43) на простейшие дроби и приравнивания нулю слагаемых, содержащих полюсы в Γ^+ .

Соотношения (5.44) представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_i^k . Написать эту систему уравнений, т. е. раскрыть смысл операции $[]_+$, вообще говоря, несложно. Однако при последующем решении уравнений неизбежно возникают трудности, связанные с тем, что число полученных уравнений всегда оказывается больше количества неизвестных. Поэтому среди всех уравнений приходится отбирать те, которые являются независимыми. Подробное рассмотрение этих обстоятельств отложим до следующего параграфа. Сейчас же приведем некоторые примеры, иллюстрирующие особенности метода решения.

Пример 5.1. Рассмотрим задачу чистой фильтрации, т. е. выделения полезного сигнала $s_1(t)$ из его смеси с помехами $n_1(t)$ и $n_2(t)$, различными в каждом из каналов (рис. 5.4). Будем полагать, что динамическими искажениями сигнала в измерителях можно пренебречь и считать

$$l_1(p) \equiv l_2(p) \equiv 1.$$

Корреляционная функция полезного сигнала

$$R_{s_1 s_1}(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (5.45)$$

а его дискретная спектральная плотность имеет вид

$$\Phi_{s_1 s_1}(z) = \frac{A^2(1-d^2)}{(1-dz)(1-dz^{-1})}, \quad (5.46)$$

где $d = e^{-\alpha T}$. Помехи при измерении, не коррелированные

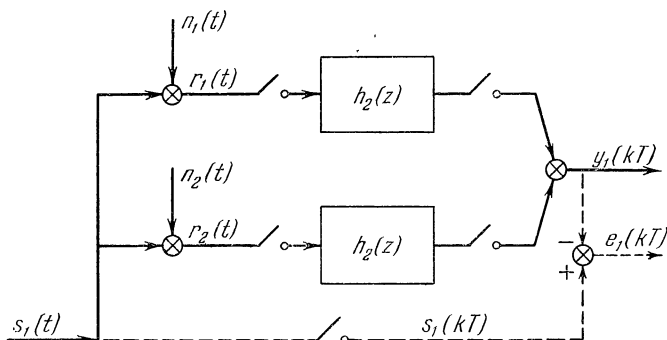


Рис. 5.4.

между собой и с полезным сигналом, представляют собой дискретный белый шум с дисперсиями B_1^2 и B_2^2 :

$$\Phi_{n_i n_i}(z) = B_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (5.47)$$

Желаемый оператор

$$D(p) \equiv 1.$$

Для входных сигналов фильтров $r_1(kT)$ и $r_2(kT)$ имеем:

$$\Phi_{r_i r_j}(z) = \begin{cases} \Phi_{s_1 s_1}(z) + \Phi_{n_i n_i}(z) & \text{при } i = j, \\ \Phi_{s_1 s_1}(z) & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\Phi_{r_1 d}(z) = \Phi_{s_1 s_1}(z). \quad (5.49)$$

Дискретные передаточные функции оптимальных фильтров определяются из системы уравнений (5.38), которая

для рассматриваемого случая принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z} \Phi_{r_1 r_1}(z) h_1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_2(z) - \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) &= q_1(z) \dots \\ \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{r_2 r_2}(z) h_2(z) - \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) &= q_2(z) \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Вычислим определитель системы $|\Phi_{rr}(z)|$. В соответствии с (5.48) он преобразуется к виду

$$\begin{aligned} |\Phi_{rr}(z)| &= \Phi_{r_1 r_1}(z) \Phi_{r_2 r_2}(z) - \Phi_{s_1 s_1}^2(z) = \\ &= \Phi_{s_1 s_1}(z) [\Phi_{n_1 n_1}(z) + \Phi_{n_2 n_2}(z)] + \Phi_{n_1 n_1}(z) \Phi_{n_2 n_2}(z). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Учитывая (5.46) и (5.47) и приравнявая нулю числитель (5.51), получим уравнения для определения полюсов оптимальных передаточных функций $h_1(z)$ и $h_2(z)$:

$$-\kappa_1 z^{-1} + \kappa_0 - \kappa_1 z = 0, \quad (5.52)$$

где

$$\kappa_0 = B_1^2 B_2^2 (1 + d^2) + A^2 (1 - d^2) (B_1^2 + B_2^2),$$

$$\kappa_1 = B_1^2 B_2^2 d.$$

В силу симметрии возвратного уравнения (5.52) один из его корней расположен внутри, а другой — вне единичного круга. Обозначая корни (5.52) через μ и μ^{-1} ($|\mu| < 1$), получим:

$$\mu = e^{-\alpha_1 T}, \quad \text{ch } \alpha_1 T = \text{ch } \alpha T + A^2 \left(\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2} \right) \text{sh } \alpha T. \quad (5.53)$$

Формальное алгебраическое решение системы двух уравнений (5.50) имеет внутри единичного круга лишь один полюс $z_1 = \mu$. Поэтому решение задачи ищется в виде

$$h_i(z) = \frac{a_0^i z + a_1^i}{z - \mu}, \quad i = 1, 2. \quad (5.54)$$

Для определения четырех неизвестных коэффициентов a_0^i

и a_1^i ($i = 1, 2$) подставим (5.54) в (5.50) и приравняем нулю выражения, содержащие полюсы в области Γ^+ :

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(\frac{A^2(1-d^2)}{(z-d)(1-dz)} + \frac{B_1^2}{z} \right) \frac{a_0^1 z + a_1^1}{z-\mu} + \frac{A^2(1-d^2)}{(z-d)(1-dz)} \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{a_0^2 z + a_1^2}{z-\mu} \right]_+ - \left[\frac{A^2(1-d^2)}{(z-d)(1-dz)} \right]_+ = 0, \\ & \left[\frac{A^2(1-d^2)}{(z-d)(1-dz)} \cdot \frac{a_0^1 z + a_1^1}{z-\mu} + \left(\frac{A^2(1-d^2)}{(z-d)(1-dz)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{B_2^2}{z} \right) \frac{a_0^2 z + a_1^2}{z-\mu} \right]_+ - \left[\frac{A^2(1-d^2)}{(z-d)(1-dz)} \right]_+ = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Выражения в квадратных скобках имеют простые полюсы $z = 0$, $z = d$ и $z = \mu$. Приравняв нулю вычеты в этих точках, получим следующие уравнения:

а) два уравнения, соответствующих полюсу $z = 0$:

$$a_1^1 = 0, \quad a_1^2 = 0; \quad (5.56)$$

б) два одинаковых уравнения, соответствующих $z = d$:

$$\frac{a_0^1 d + a_1^1}{d-\mu} + \frac{a_0^2 d + a_1^2}{d-\mu} = 1; \quad (5.57)$$

в) два уравнения, соответствующих полюсу $z = \mu$:

$$\begin{aligned} \Phi_{r_1 r_1}(\mu)[a_0^1 \mu + a_1^1] + \Phi_{s_1 s_1}(\mu)[a_0^2 \mu + a_1^2] &= 0; \\ \Phi_{s_1 s_1}(\mu)[a_0^1 \mu + a_1^1] + \Phi_{r_2 r_2}(\mu)[a_0^2 \mu + a_1^2] &= 0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Последние соотношения представляют собой систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных в квадратных скобках. Определитель этой системы $|\Phi_{rr}(\mu)|$ равен нулю в силу определения μ по (5.53). Поэтому одно из уравнений (5.58) является следствием другого. Таким образом, для определения четырех

неизвестных получаем четыре независимых линейных алгебраических уравнения. Решая их, находим:

$$\begin{aligned} a_0^1 &= \frac{B_2^2}{B_1^2 + B_2^2} (1 - \mu d^{-1}), & a_1^1 &= 0, \\ a_0^2 &= \frac{B_1^2}{B_1^2 + B_2^2} (1 - \mu d^{-1}), & a_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Оптимальные передаточные функции имеют вид

$$h_k(z) = \frac{a_0^k z}{z - \mu}, \quad k = 1, 2. \quad (5.60)$$

Выражение для дисперсии ошибки получим в соответствии с формулой (5.36)

$$[D_{e_i}]_{\min} = B_1^2 h_1(\infty) = B_2^2 h_2(\infty) = \frac{B_1^2 B_2^2}{B_1^2 + B_2^2} (1 - \mu d^{-1}). \quad (5.61)$$

Пример 5.2. Рассмотрим пример, отличающийся от предыдущего лишь тем, что корреляционные функции помех имеют более сложный вид:

$$R_{n_i n_j}(\tau) = \begin{cases} B_i^2 e^{-\beta_i |\tau|} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (5.62)$$

Помехи не коррелированы с сигналом $s_1(t)$. Дискретные спектральные плотности помех

$$\Phi_{n_i n_j}(z) = \begin{cases} \frac{B_i^2 (1 - \delta_i^2)}{(z - \delta_i)(1 - \delta_i z)} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (5.63)$$

где $\delta_i = e^{-\beta_i T}$ ($i = 1, 2$). Повторяя все выкладки, предшествующие (5.52), получим для определения единственного полюса $h_k(z)$ уравнение

$$-\kappa_1 z^{-1} + \kappa_0 - \kappa_1 z = 0, \quad (5.64)$$

где

$$\kappa_0 = B_1^2 B_2^2 d(1 - \delta_1^2)(1 - \delta_2^2) + A^2(1 - d^2)[B_1^2 \delta_2(1 - \delta_1^2) + B_2^2 \delta_1(1 - \delta_2^2)],$$

$$\kappa_1 = B_1^2 B_2^2 (1 + d^2)(1 - \delta_1^2)(1 - \delta_2^2) + A^2(1 - d^2)[B_1^2(1 - \delta_1^2)(1 + \delta_2^2) + B_2^2(1 + \delta_1^2)(1 - \delta_2^2)].$$

Обозначая корни уравнения (5.64) через $\mu = e^{-\alpha_1 T}$ и $\mu^{-1} = e^{\alpha_1 T}$ (где $\mu < 1$, $\alpha_1 > 0$) и учитывая, что $\operatorname{ch} \alpha_1 T = \frac{\mu + \mu^{-1}}{2} = \frac{\kappa_0}{2\kappa_1}$, для определения α_1 получим:

$$\operatorname{ch} \alpha_1 T = \frac{A^2 \operatorname{sh} \alpha T [B_1^2 \operatorname{sh} \beta_1 T \operatorname{ch} \beta_2 T + \dots + B_2^2 \operatorname{sh} \beta_2 T \operatorname{ch} \beta_1 T] + B_1^2 B_2^2 \operatorname{sh} \beta_1 T \operatorname{sh} \beta_2 T \operatorname{ch} \alpha T}{A^2 \operatorname{sh} \alpha T [B_1^2 \operatorname{sh} \beta_1 T + B_2^2 \operatorname{sh} \beta_2 T] + \dots + B_1^2 B_2^2 \operatorname{sh} \beta_1 T \operatorname{sh} \beta_2 T}. \quad (5.65)$$

Формальное алгебраическое решение уравнений (5.50) имеет внутри единичного круга лишь один полюс $\mu = e^{-\alpha_1 T}$. Поэтому решение задачи ищется в виде

$$h_k(z) = \frac{a_0^k z + a_1^k}{z - \mu}. \quad (5.66)$$

Для определения коэффициентов необходимо использовать исходные уравнения оптимального фильтра (5.50). Подставляя (5.66) в (5.50) и приравнивая нулю вычеты левой части в полюсах, расположенных в Γ^+ , т. е. при $z_1 = d$, $z_2 = \delta_1$, $z_3 = \delta_2$ и $z_4 = \mu$, получим следующую систему:

1) два одинаковых уравнения, соответствующих полюсу $z_1 = d$:

$$\frac{a_0^1 d + a_1^1}{d - \mu} + \frac{a_0^2 d + a_1^2}{d - \mu} = 1; \quad (5.67)$$

2) уравнение, соответствующее полюсу $z_2 = \delta_1$:

$$a_0^1 \delta_1 + a_1^1 = 0; \quad (5.68)$$

3) уравнение, соответствующее полюсу $z_3 = \delta_2$:

$$a_0^2 \delta_2 + a_1^2 = 0; \quad (5.69)$$

4) два однородных уравнения, из которых одно является следствием другого:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r_1 r_1}(\mu) (a_0^1 \mu + a_1^1) + \Phi_{s_1 s_1}(\mu) (a_0^2 \mu + a_1^2) &= 0, \\ \Phi_{s_1 s_1}(\mu) (a_0^1 \mu + a_1^1) + \Phi_{r_2 r_2}(\mu) (a_0^2 \mu + a_1^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

Определитель (5.70) равен нулю в силу уравнения для μ . Используя (5.68) и (5.69), находим:

$$h_k(z) = a_0^k \frac{z - \delta_k}{z - \mu_k}, \quad k = 1, 2, \quad (5.71)$$

где a_0^1 и a_0^2 в соответствии с двумя оставшимися уравнениями определяются выражениями

$$a_0^1 = \frac{d - \mu}{d - \delta_1 + K(d - \delta_2)}, \quad a_0^2 = \frac{K(d - \mu)}{d - \delta_1 + K(d - \delta_2)}, \quad (5.72)$$

$$K = - \frac{\mu - \delta_1}{\mu - \delta_2} \left[1 + \frac{\Phi_{n_1 n_1}(\mu)}{\Phi_{s_1 s_1}(\mu)} \right] = \frac{\mu - \delta_1}{\mu - \delta_2} \frac{\Phi_{n_1 n_1}(\mu)}{\Phi_{n_2 n_2}(\mu)}.$$

Вычислим минимальное значение дисперсии ошибки. В соответствии с (5.35) для $[D_{e_1}]_{\min}$ имеем:

$$\begin{aligned} [D_{e_1}]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{n_1 n_1}(z) h_1(z) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{n_2 n_2}(z) h_2(z) \frac{dz}{z}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Подставляя в (5.73) выражения (5.63) и (5.71), получим:

$$[D_{e_1}]_{\min} = a_0^1 \frac{B_1^2 (1 - \delta_1^2)}{1 - \delta_1 \mu} = a_0^2 \frac{B_2^2 (1 - \delta_2^2)}{1 - \delta_2 \mu}. \quad (5.74)$$

Пример 5.3. Рассмотрим задачу синтеза дискретных фильтров для оптимальной обработки данных радио-доплеровского измерителя расстояния. Скорость движения летательного аппарата $v_1(t) = \dot{s}_1(t)$ измеряется системой Допплера с ошибкой $n_1(t)$. Определение положения объекта радиосредствами сопровождается помехами $n_2(t)$ (рис. 5.1). Измеренные значения координаты $r_2(t) = s_1(t) + n_2(t)$ и скорости $r_1(t) = v_1(t) + n_1(t)$ периодически (с периодом T) поступают на дискретные фильтры. Ошибка фильтрации определяется как разность между значениями сигнала $s_1(kT)$ и суммой выходов фильтров (рис. 5.1)

$$e_1(kT) = s_1(kT) - y_1(kT). \quad (5.75)$$

Относительно характера входных сигналов примем следующие допущения. Отклонение скорости движения от некоторого известного режима представляет собой стационарный случайный процесс с функцией корреляции

$$R_{v_1 v_1}(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (5.76)$$

Очевидно, что тогда сигнал $s_1(t)$ не является стационарным, а представляет собой процесс со стационарными приращениями [39, 52]. Однако, как уже указывалось в главе 4, и в этом случае формально можно пользоваться таким понятием, как спектральная плотность, рассматривая ее как предельную спектральную плотность некоторого стационарного случайного процесса. Для данного примера имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{s_1 s_1}(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2 - p^2} \Phi_{v_1 v_1}(p) = -\frac{1}{p^2} \Phi_{v_1 v_1}(p), \\ \Phi_{v_1 s_1}(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon + p} \Phi_{v_1 v_1}(p) = \frac{1}{p} \Phi_{v_1 v_1}(p), \\ \Phi_{s_1 v_1}(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon - p} \Phi_{v_1 v_1}(p) = -\frac{1}{p} \Phi_{v_1 v_1}(p), \end{aligned} \right\} (5.77)$$

где $\varepsilon \geq 0$.

Помехи измерения представляют собой дискретный белый шум с дисперсиями B_1^2 и B_2^2 . Дискретные

спектральные плотности входных сигналов

$$\begin{aligned}
 \Phi_{r_1 r_1}(z) &= Z\{\Phi_{v_1 v_1}(p)\} + B_1^2 = \\
 &= \frac{A^2(1-d^2)}{(1-dz)(1-dz^{-1})} + B_1^2, \\
 \Phi_{r_1 r_2}(z) &= Z\{\Phi_{v_1 s_1}(p)\} = \Phi_{v_1 s_1}(z) = \\
 &= \frac{A^2(1-d)^2(1+z^{-1})}{\alpha(1-dz)(1-dz^{-1})(1-z^{-1})}, \\
 \Phi_{r_2 r_1}(z) &= \Phi_{s_1 v_1}(z) = \Phi_{r_1 r_2}(z^{-1}) = \\
 &= \frac{A^2(1-d)^2(1+z)}{\alpha(1-dz)(1-dz^{-1})(1-z)}, \\
 \Phi_{r_2 r_2}(z) &= Z\{\Phi_{s_1 s_1}(p)\} + B_2^2 = \\
 &= \Phi_{s_1 s_1}(z) + B_2^2 = -\frac{A^2}{\alpha^2} \frac{1-d^2}{(1-dz)(1-dz^{-1})} + \\
 &\quad + \frac{2A^2 T}{\alpha(1-z)(1-z^{-1})} + B_2^2,
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

где $d = e^{-\alpha T}$.

Уравнения оптимального фильтра имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z} \Phi_{r_1 r_1}(z) h_1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{r_1 r_2}(z) h_2(z) - \\
 - \frac{1}{z} \Phi_{v_1 s_1}(z) = q_1(z)_-, \\
 \frac{1}{z} \Phi_{r_2 r_1}(z) h_1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{r_2 r_2}(z) h_2(z) - \\
 - \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) = q_2(z)_-.
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

Приравнявая нулю определитель системы $|\Phi_{rr}(z)|$, получим уравнения для определения полюсов оптимальных

передаточных функций фильтров:

$$\kappa_0 + \kappa_1(z + z^{-1}) + \kappa_2(z^2 + z^{-2}) = 0, \quad (5.80)$$

где

$$\kappa_0 = -\frac{4A^4(1-d^2)}{\alpha^2} + 2A^2(1-d^2) \left[\frac{A^2T}{\alpha} + \right. \\ \left. + B_2^2 - \frac{B_1^2}{\alpha} \right] + 2B_1^2(1+d^2) \left[\frac{A^2T}{\alpha} + B_2^2 \right],$$

$$\kappa_1 = -A^2(1-d^2) \left(B_2^2 - \frac{B_1^2}{\alpha^2} \right) - B_1^2 \frac{2A^2Td}{\alpha} - \\ - B_1 B_2 (1+d)^2,$$

$$\kappa_2 = B_1^2 B_2^2 d.$$

Уравнение (5.80) имеет внутри единичного круга два корня, которые обозначим μ_1 и μ_2 . Решение системы (5.79) поэтому ищется в виде

$$h_k(z) = \frac{a_0^k z^2 + a_1^k z + a_2^k}{(z - \mu_1)(z - \mu_2)}, \quad k = 1, 2. \quad (5.81)$$

Подставляя (5.81) и (5.78) в (5.79) и приравнявая нулю вычеты в полюсах, расположенных в Γ^+ , находим систему уравнений для определения шести неизвестных коэффициентов a_j^k :

1) два уравнения, соответствующих полюсу $z = 0$:

$$a_2^1 = 0, \quad a_2^2 = 0; \quad (5.82)$$

2) два одинаковых уравнения, соответствующих полюсу $z = d$:

$$a_0^1 + a_1^1 d^{-1} - \frac{1}{\alpha} (a_0^2 + a_1^2 d^{-1}) + \\ + \frac{1}{\alpha} (1 - \mu_1 d^{-1})(1 - \mu_2 d^{-1}) = 0; \quad (5.83)$$

3) два однородных уравнения при $z = \mu_1$ с определителем, равным нулю. Независимым из них является лишь одно, например, первое:

$$\frac{a_0^1 \mu_1 + a_1^1}{a_0^2 \mu_1 + a_1^2} = - \frac{\Phi_{r_1 r_2}(\mu_1)}{\Phi_{r_1 r_1}(\mu_1)}; \quad (5.84)$$

4) аналогично предыдущему имеем одно уравнение для $z = \mu_2$:

$$\frac{a_0^1 \mu_2 + a_1^1}{a_0^2 \mu_2 + a_1^2} = - \frac{\Phi_{r_1 r_2}(\mu_2)}{\Phi_{r_1 r_1}(\mu_2)}; \quad (5.85)$$

5) два одинаковых уравнения для $z = 1$:

$$a_0^2 + a_1^2 = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2). \quad (5.86)$$

По поводу последнего уравнения следует сделать несколько замечаний. При рассмотрении полюса $z = 1$ нужно иметь в виду, что спектральные плотности в этом случае определены лишь в предельном смысле (5.77). Поэтому те полюсы $z = 1$, которые соответствуют $p = -\varepsilon$, должны рассматриваться как расположенные в Γ^+ , а полюсы, соответствующие $p = +\varepsilon$, — в Γ^- . Это различие полюсов $z = 1$ принято во внимание при записи формул (5.78). Сомножители знаменателя с нулем в Γ^+ записаны по отрицательным степеням z . Решение системы (5.82) — (5.86) позволяет найти все неизвестные коэффициенты.

Пример 5.4. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной n -канальной системы фильтрации (рис. 5.3). Спектральная плотность полезного сигнала, подлежащего воспроизведению на выходе системы,

$$\Phi_{s_1 s_1}(z) = \frac{A^2(1 - d^2)}{(1 - dz)(1 - dz^{-1})}.$$

Примем $l_1(p) = l_2(p) = \dots = l_n(p) = D_1(p) = 1$. Не коррелированные между собой и с полезным сигналом помехи являются реализациями дискретного белого шума:

$$\Phi_{n_i n_i}(z) = B_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.87)$$

Вычислим определитель матрицы входного сигнала $\Phi_{rr}(z)$:

$$|\Phi_{rr}(z)| = \begin{vmatrix} \Phi_{s_1 s_1}(z) + B_1^2 & \Phi_{s_1 s_1}(z) & \dots & \Phi_{s_1 s_1}(z) \\ \Phi_{s_1 s_1}(z) & \Phi_{s_1 s_1}(z) + B_2^2 & \dots & \Phi_{s_1 s_1}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{s_1 s_1}(z) & \Phi_{s_1 s_1}(z) & \dots & \Phi_{s_1 s_1}(z) + B_n^2 \end{vmatrix}. \quad (5.88)$$

Вынося из каждой строки определителя множитель $\Phi_{s_1 s_1}(z)$, получим:

$$|\Phi_{rr}(z)| = [\Phi_{s_1 s_1}(z)]^n \begin{vmatrix} 1 + \beta_1(z) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \beta_2(z) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + \beta_n(z) \end{vmatrix},$$

где

$$\beta_i(z) = \frac{B_i^2}{\Phi_{s_1 s_1}(z)}.$$

Вычитая из каждой строки последнюю, найдем:

$$|\Phi_{rr}(z)| = [\Phi_{s_1 s_1}(z)]^n \times \begin{vmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_n \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & -\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & -\beta_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 + \beta_n \end{vmatrix}. \quad (5.89)$$

Определитель (5.89) — это диагональный определитель, окаймленный последними строкой и столбцом. Применяем к нему формулы для окаймленного определителя ([28], стр. 32)

$$|\Phi_{rr}(z)| = [\Phi_{s_1 s_1}(z)]^n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i(z) \left[1 + \beta_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_n(z)}{\beta_j(z)} \right] = [\Phi_{s_1 s_1}(z)]^n \prod_{i=1}^n \beta_i(z) \left[1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j(z)} \right].$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для

$$\beta_i(z) = \frac{B_i^2}{\Phi_{s_1 s_1}(z)}, \text{ получим:}$$

$$|\Phi_{rr}(z)| = \prod_{i=1}^n B_i^2 \left[1 + \Phi_{s_1 s_1}(z) \sum_{j=1}^n \frac{1}{B_j^2} \right]. \quad (5.90)$$

Для нахождения полюсов оптимальных передаточных функций необходимо приравнять определитель (5.90) нулю. Вводя обозначение

$$\frac{1}{B_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i^2}, \quad (5.91)$$

получим:

$$\Phi_{s_1 s_1}(z) + B_0^2 = 0. \quad (5.92)$$

Система уравнений оптимального фильтра имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z} [\Phi_{s_1 s_1}(z) + B_1^2] h_1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_2(z) + \dots \\ \dots + \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_n(z) = q_1(z), \\ \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_1(z) + \frac{1}{z} [\Phi_{s_1 s_1}(z) + B_2^2] h_2(z) + \dots \\ \dots + \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_n(z) = q_2(z), \\ \dots \\ \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{s_1 s_1}(z) h_2(z) + \dots \\ \dots + \frac{1}{z} [\Phi_{s_1 s_1}(z) + B_n^2] h_n(z) = q_n(z). \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Нетрудно убедиться в том, что единственным полюсом формального решения (5.93) в области Γ^+ является корень

уравнения (5.92), по модулю меньший единицы. Обозначая этот корень через μ , найдем:

$$\mu = e^{-\alpha_1 T}, \quad \text{ch } \alpha_1 T = \text{ch } \alpha T + \frac{A^2}{B_0^2} \text{sh } \alpha T. \quad (5.94)$$

Оптимальные передаточные функции поэтому имеют вид

$$h_k(z) = \frac{a_0^k z + a_1^k}{z - \mu}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.95)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов приравняем нулю вычеты левых частей системы (5.93) в области Γ^+ . Для полюсов $z = 0$ имеем

$$a_1^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При полюсе $z = d$ получим n одинаковых уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_0^k = \frac{d - \mu}{d}. \quad (5.96)$$

Для $z = \mu$ получим систему n однородных уравнений с определителем, равным нулю:

$$\left. \begin{aligned} [1 + \beta_1(\mu)]a_0^1 + a_0^2 + \dots + a_0^n &= 0, \\ a_0^1 + [1 + \beta_2(\mu)]a_0^2 + \dots + a_0^n &= 0, \\ \dots & \\ a_0^1 + a_0^2 + \dots + [1 + \beta_n(\mu)]a_0^n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.97)$$

Принимая в качестве независимых уравнений системы (5.97) $n - 1$ первых, выпишем n уравнений для определения коэффициентов a_0^k :

$$\begin{aligned} [1 + \beta_1(\mu)]a_0^1 + a_0^2 + \dots + a_0^n &= 0, \\ a_0^1 + [1 + \beta_2(\mu)]a_0^2 + \dots + a_0^n &= 0, \\ \dots & \\ a_0^1 + a_0^2 + \dots + [1 + \beta_{n-1}(\mu)]a_0^{n-1} + a_0^n &= 0, \\ a_0^1 + a_0^2 + \dots + a_0^n &= \frac{d - \mu}{d}. \end{aligned}$$

Вычитая из k -го уравнения ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) последнее, найдем:

$$a_0^k = \frac{\mu - d}{d\beta_k(\mu)} = \frac{A^2(1 - d^2)\mu}{B_k^2 d(1 - \mu d)}, \quad (5.98)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Наконец, величина минимальной дисперсии ошибки в соответствии с (5.36) равна

$$[D_{e_1}]_{\min} = B_k^2 h_k(\infty) = B_k^2 a_0^k = \frac{A^2(1 - d^2)\mu}{d(1 - \mu d)}. \quad (5.99)$$

Частным случаем n -канальной системы фильтрации является одноканальная. Решение задачи для этого случая получим, положив в (5.91), (5.95), (5.96) и (5.98) $n = 1$. Нетрудно заметить, что многоканальная система по качеству фильтрации эквивалентна одноканальной, дисперсия помехи в которой равна величине B_0^2 , вычисленной по формуле (5.91). В частности, n -канальная система с одинаковыми уровнями помех во всех каналах, $B_k^2 = B_1^2$ ($k = 1, 2, \dots, n$), эквивалентна по достижимой точности фильтрации одноканальной схеме, у которой дисперсия помехи в n раз меньше:

$$B_0^2 = \frac{B_1^2}{n}. \quad (5.100)$$

§ 5.3. Решение уравнений оптимального фильтра (продолжение)

Из примеров, приведенных в предыдущем параграфе, ясно, что, несмотря на принципиальную простоту метода неопределенных коэффициентов, его применение к конкретным задачам имеет ряд особенностей. В частности, всегда оказывается, что количество линейных алгебраических уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов больше числа этих коэффициентов. Для однозначной разрешимости уравнений требуется совпадение количества уравнений и коэффициентов. Это совпадение всегда имеет место, поскольку некоторые из уравнений являются следствием других.

Так, в примере 5.1 для определения четырех коэффициентов a_0^1 , a_1^1 , a_0^2 и a_1^2 мы имели шесть линейных алгебраических уравнений. Из них два неоднородных уравнения полностью совпадали, а два однородных уравнения имели определитель, равный нулю. Число независимых уравнений было равно четырем. Эти обстоятельства свидетельствуют о том, что техника применения метода неопределенных коэффициентов требует дополнительного обсуждения.

Рассмотрим первоначально более подробно определитель матрицы спектральных плотностей входных сигналов. Будем предполагать для простоты, что ранг случайного процесса $r(kT)$ равен n , т. е. что матрица $\Phi_{rr}(z)$ неособая. Тогда, как показано в § 4.3, эта матрица может быть приведена к виду

$$\Phi_{rr}(z) = K(z^{-1})K'(z), \quad (5.101)$$

где матрица $K(z) = \|k_{ij}(z)\|_1^n$ имеет все нули и полюсы в области Γ^+ . Последнее означает, что $K(z)$ представляет собой передаточную матрицу некоторой минимальнофазовой дискретной системы (формирующего фильтра).

Разностные уравнения формирующего фильтра можно получить, если для матрицы $K(z)$ решить задачу идентификации (см. § 2.4). Запишем эти уравнения в следующей форме:

$$Q(\xi)r(kT) = P(\xi)v(kT), \quad (5.102)$$

где $v(kT) = \|v_1(kT), v_2(kT), \dots, v_n(kT)\|'$ — дискретный белый шум с единичной матрицей спектральных плотностей, $\Phi_{vv}(z) = I$. Очевидно, что

$$K(z) = Q^{-1}(z)P(z). \quad (5.103)$$

В соответствии с этим определитель матрицы $\Phi_{rr}(z)$ представляется в виде дроби

$$|\Phi_{rr}(z)| = \frac{|P(z^{-1})| \cdot |P(z)|}{|Q(z^{-1})| \cdot |Q(z)|}. \quad (5.104)$$

Полюсами формального решения (5.40), расположенными в области Γ^+ , являются нули определителя $|P(z)|$, т. е. собственные значения матрицы $P(z)$.

Обычная процедура раскрытия определителя без перехода к соотношению (5.101) и решения задачи идентификации, как правило, приводит к выражению, отличающемуся от (5.104) наличием в числителе и знаменателе общих сомножителей типа $(1 - dz) \cdot (1 - dz^{-1})$. Очевидно, что эти сомножители не определяют полюсов формального решения и поэтому должны быть сокращены. Смысл последнего утверждения вполне понятен, если обратиться к рассмотрению формального решения (5.40). Однако обнаружить факт совпадения некоторых нулей и полюсов $|\Phi_{rr}(z)|$ без рассмотрения общих свойств матрицы $\Phi_{rr}(z)$, как правило, затруднительно.

Так, в примере (5.3) формальное раскрытие определителя $\Phi_{rr}(z)$ по формуле

$$|\Phi_{rr}(z)| = \Phi_{r_1 r_1}(z) \Phi_{r_2 r_2}(z) - \Phi_{r_1 r_2}(z) \Phi_{r_2 r_1}(z)$$

приводит в соответствии с (5.78) к соотношению

$$\begin{aligned} |\Phi_{rr}(z)| &= \frac{A_{11}(z)}{B_{11}(z)} = \\ &= \frac{A_{11}(z)}{(1-z)(1-z^{-1})(1-dz^{-1})^2(1-dz)^2}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $A_{11}(z)$ имеет простые корни $z = d$ и $z = d^{-1}$. В то же время по виду полинома

$$\begin{aligned} A_{11}(z) &= [A^2(1-d^2) + B_1^2(1-dz)(1-dz^{-1})] \times \\ &\times [-A^2(1-d^2)(1-z^{-1})(1-z) + 2A^2\alpha T(1-dz^{-1})(1- \\ &- dz) + \alpha^2 B_2^2(1-dz^{-1})(1-dz)(1-z^{-1})(1-z)] - \\ &- A^4(1-d)^4(1+z^{-1})(1+z) \end{aligned}$$

догадаться об этом довольно трудно. Полюсы оптимального фильтра следует искать не как нули полинома $A_{11}(z)$, а как нули числителя (5.105) после сокращения общего множителя $(1-dz^{-1}) \cdot (1-dz)$. Именно так мы и поступили в примере 5.3.

Для решения задачи оптимальной фильтрации нет необходимости приводить матрицу спектральной плотности

к виду (5.101) и (5.103). Однако всегда необходимо учитывать общие свойства определителя $|\Phi_{rr}(z)|$, позволяющие записать его в этой форме.

Пусть все полюсы $z = d_i$ и $z = d_i^{-1}$ матрицы $\Phi_{rr}(z)$ простые. Этот случай представляет наибольший практический интерес. Обозначим через ρ_i ранг вычета матрицы $\Phi_{rr}(z)$ в точке $z = d_i$ ($z = d_i^{-1}$). Тогда знаменатель $|\Phi_{rr}(z)|$ в формуле (5.104) равен

$$|Q(z)| \cdot |Q(z^{-1})| = \prod_{i=1}^m (1 - d_i z^{-1})^{\rho_i} (1 - d_i z)^{\rho_i},$$

где m — общее число полюсов $\Phi_{rr}(z)$. Если после раскрытия определителя окажется, что сомножители $(1 - d_i z^{-1}) \times \times (1 - d_i z)$ входят в знаменатель в степени выше ρ_i , то этот же сомножитель входит и в числитель. Для приведения $|\Phi_{rr}(z)|$ к виду (5.104) необходимо с помощью соответствующих преобразований выделить этот сомножитель в числителе и сократить.

Остановимся более подробно на частном случае, когда полезный сигнал $s_1(t)$ является одномерным (рис. 5.3). Будем считать, что все помехи $n_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) не коррелированы с полезным сигналом. Матрица дискретной спектральной плотности в этом случае имеет вид

$$\Phi_{rr}(z) = Z\{l(-p)l'(p)\Phi_{s_1 s_1}(p)\} + \Phi_{nn}(z), \quad (5.106)$$

где $l(p) = \|l_1(p), l_2(p), \dots, l_n(p)\|'$ — столбец передаточных функций измерителей.

Предполагая рациональность спектра полезного сигнала $s_1(t)$, запишем его корреляционную функцию в виде

$$R_{s_1 s_1}(\tau) = \sum_{i=1}^s A_i e^{-\alpha_i |\tau|}, \quad (5.107)$$

а функцию спектральной плотности как

$$\Phi_{s_1 s_1}(p) = \sum_{i=1}^s \frac{2A_i \alpha_i}{\alpha_i^2 - p^2}. \quad (5.108)$$

Пусть $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Обозначим $e^{-\alpha_i T}$ через d_i . Тогда каждый из элементов $\Phi_{rr}(z)$ в соответствии с (5.106) содержит простые полюсы $z = d_i$ и $z = d_i^{-1}$. Покажем, что в этом случае определитель $|\Phi_{rr}(z)|$, записанный в форме (5.104), будет иметь в качестве сомножителей знаменателя выражения

$$(1 - d_i z) \cdot (1 - d_i z^{-1})$$

лишь в первой степени:

$$|\Phi_{rr}(z)| = \frac{A_{11}(z)}{\prod_{i=1}^s (1 - d_i z)(1 - d_i z^{-1}) \hat{B}_{11}(z)}. \quad (5.109)$$

Для доказательства разложим (5.106) на простейшие дроби. В этом разложении нам понадобятся только члены, соответствующие полюсам $z = d_i$ и $z = d_i^{-1}$. Пользуясь обычными правилами z -преобразования, с учетом (5.108) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{rr}(z) = \sum_{i=1}^s l(\alpha_i) \cdot l'(-\alpha_i) \frac{A_i z}{z - d_i} + \\ + \sum_{i=1}^s l(-\alpha_i) l'(\alpha_i) \frac{A_i}{1 - d_i z} + \dots; \end{aligned} \quad (5.110)$$

где многоточию соответствуют все остальные члены разложения. Вычеты матрицы $\Phi_{rr}(z)$ в полюсах $z = d_i$ и $z = d_i^{-1}$

$$\left. \begin{aligned} R(d_i) &= \lim_{z \rightarrow d_i} \{(z - d_i) \Phi_{rr}(z)\} = A_i d_i l(\alpha_i) l'(-\alpha_i), \\ R(d_i^{-1}) &= \lim_{z \rightarrow d_i^{-1}} \{(z - d_i^{-1}) \Phi_{rr}(z)\} = -A_i l(-\alpha_i) l'(\alpha_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

имеют ранг, равный единице, так как матрицы $l(\alpha_i) l' \times (-\alpha_i)$ и $l(-\alpha_i) l'(\alpha_i)$ представляют собой произведения столбца на строку.

Рассмотрим полюс $z = d_i$. Определитель $|\Phi_{rr}(z)|$ запишем в виде

$$\begin{aligned} |\Phi_{rr}(z)| &= \left| \frac{1}{z - d_i} R(d_i) + C(z) \right| = \\ &= \frac{1}{(z - d_i)^n} \left| R(d_i) + (z - d_i)C(z) \right|, \quad (5.112) \end{aligned}$$

где $C(z)$ — матрица, включающая все остальные члены разложения (5.110) и не имеющая особенностей при $z = d_i$. Определитель $|R(d_i) + (z - d_i)C(z)|$ в точке $z = d_i$ обращается в нуль вместе со всеми своими алгебраическими дополнениями до $(n - 1)$ -го порядка. Из теории матриц известно, что такой определитель имеет нуль $z = d_i$ порядка $n - 1$. Поэтому множитель $(z - d_i)^{n-1}$ в числителе и знаменателе (5.112) сокращается, так что в знаменателе $|\Phi_{rr}(z)|$ остается лишь первая степень $z - d_i$. Аналогичным образом это утверждение доказывается для полюсов $z = d_i^{-1}$. Этим завершается доказательство справедливости (5.109). Отметим, что это свойство определителя матрицы $\Phi_{rr}(z)$ учитывалось нами при решении всех примеров в § 5.2.

Перейдем к вопросу выделения линейно независимых уравнений из системы (5.44). Для системы рис. 5.3, когда полезный сигнал является одномерным, уравнения (5.44) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{z} [Z\{l(-p)l'(p)\Phi_{s_1s_1}(p)\} + \Phi_{nn}(z)] \times \right. \\ &\quad \times \frac{a'(z)}{\prod_{i=1}^{\alpha} (z - \mu_i) \prod_{j=1}^{\beta} (z - \gamma_j)} - \\ &\quad \left. - \frac{1}{z} Z\{l(-p)\Phi_{s_1s_1}(p)D_1(p)\} \right]_+ = 0_{n \times 1}, \quad (5.113) \end{aligned}$$

где помехи приняты не коррелированными с полезным сигналом. Наибольший интерес представляет случай про-

стных полюсов $\Phi_{rr}(z)$, $\Phi_{rd}(z)$ и $h(z)$, который мы и рассмотрим. Чтобы раскрыть смысл операции $[]_+$, необходимо в этом случае приравнять нулю вычеты левой части (5.113) во всех полюсах, расположенных в Γ^+ . Этими полюсами являются:

а) $z = d_i = e^{-\alpha_i T}$ — полюсы, соответствующие спектральной плотности $\Phi_{s_i s_i}(p)$;

б) $z = \kappa_i$ — полюсы, соответствующие матрице-столбцу передаточных функций $l(p)$;

в) $z = \delta_i$ — полюсы $\Phi_{\gamma_n}(z)$;

г) $z = \mu_i$ — полюсы $h(z)$, равные нулям определителя матрицы $\Phi_{rr}(z)$;

д) $z = \gamma_j = e^{\sigma_j T}$ — полюсы $h(z)$, соответствующие полюсам желаемого оператора $D_1(p)$ в левой полуплоскости, $\operatorname{Re} \sigma_j < 0$.

Уравнения (5.113), соответствующие полюсам $z = d_i$, имеют вид

$$(z - d_i) \Phi_{rr}(z) \Big|_{z=d_i} h'(d_i) = (z - d_i) \Phi_{rd}(z) \Big|_{z=d_i}. \quad (5.114)$$

В соответствии с (5.111) ранг основной матрицы системы (5.114) $R(d_i) = \lim_{z \rightarrow d_i} [(z - d_i) \Phi_{rr}(z)]$ равен единице. По-

кажем, что эта система является непротиворечивой, т. е. что ранги основной и расширенной матриц совпадают. Для этого отметим, что вектор правой части (5.114) имеет вид

$$(z - d_i) \Phi_{rd}(z) \Big|_{z=d_i} = \lim_{z \rightarrow d_i} [(z - d_i) \Phi_{rd}(z)] = A_i D_1(-\alpha_i) l(\alpha_i).$$

Расширенная матрица системы (5.114) $\|A_i l(\alpha_i) l'(-\alpha_i), A_i D_1(-\alpha_i) l(\alpha_i)\| = A_i l(\alpha_i) \|l'(-\alpha_i), D_1(-\alpha_i)\|$ представляет собой произведение скалярного коэффициента A_i , матрицы-столбца $l(\alpha_i) = \|l_1(\alpha_i), l_2(\alpha_i), \dots, l_n(\alpha_i)\|'$ и строки $\|l_1(-\alpha_i), l_2(-\alpha_i), \dots, l_n(-\alpha_i), D_1(-\alpha_i)\|$. Ранг такого произведения равен единице. Это свидетельствует о том, что уравнения (5.114) совместны, но являются линейно зависимыми и связаны $n - 1$ соотношениями. В качестве независимого уравнения можно выбрать любое из них,

в котором хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. В частности, если $l_i(p) = 1$ для всех номеров i и $D_1(p) = 1$, все уравнения (5.114) одинаковы и принимают вид

$$\sum_{j=1}^n h_j(\alpha_i) = 1.$$

Полюсу $z = \kappa_i$ соответствует система однородных уравнений

$$(z - \kappa_i)Z\{l(-p)l'(p)\Phi_{s_1s_1}(p)\} |_{z=\kappa_i} \cdot a'(\kappa_i) = 0. \quad (5.115)$$

Ранг матрицы коэффициентов этого уравнения

$$\lim_{z \rightarrow \kappa_i} [(z - \kappa_i)Z\{l(-p)l'(p)\Phi_{s_1s_1}(p)\}]$$

равен единице, т. е. из n уравнений (5.115) в качестве независимого можно принять лишь одно.

Полюсу $z = \delta_i$ также соответствует система однородных уравнений

$$(z - \delta_i)\Phi_{nn}(z) |_{z=\delta_i} \cdot a'(\delta_i) = 0. \quad (5.116)$$

Число независимых уравнений (5.116) равно рангу вычета матрицы $\Phi_{nn}(z)$ в полюсе $z = \delta_i$.

Полюсы $z = \mu_i$ приводят к однородным системам уравнений

$$\Phi_{rr}(\mu_i)a'(\mu_i) = 0. \quad (5.117)$$

Так как μ_i — простые корни определителя матрицы $\Phi_{rr}(z)$, то ранг матрицы $\Phi_{rr}(\mu_i)$ равен $n - 1$. Для получения системы независимых уравнений одно из них надо отбросить.

Полюсу $z = \gamma_i = e^{\sigma_i T}$ соответствует система n неоднородных уравнений

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\alpha} (\gamma_i - \alpha_k) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\beta} (\gamma_i - \gamma_j)} \Phi_{rr}(\gamma_i)a'(\gamma_i) = \\ = (z - \gamma_i)\Phi_{rd}(z) |_{z=\gamma_i} \quad (5.118)$$

с определителем, отличным от нуля, $|\Phi_{rr}(\gamma_i)| \neq 0$.

Кроме указанных полюсов, в системе (5.113) может быть нулевой, $z = 0$, если хотя бы в одном канале помеха содержит составляющую в виде дискретного белого шума. В этом случае получаем систему однородных уравнений

$$\Phi_{nn}(0)a'(0) = 0. \quad (5.119)$$

Ранг матрицы системы и число независимых уравнений равны количеству каналов, в которых действует дискретный белый шум.

Можно показать, что после выделения из системы алгебраических уравнений линейно независимых, число уравнений и число неопределенных коэффициентов передаточных функций оптимальных фильтров совпадают.

Аналогичным образом может быть исследован и общий случай, когда ранг случайного процесса $s(t)$ больше единицы.

Все рассмотрение в предшествующем и настоящем параграфах проводилось в предположении невырожденности матрицы $\Phi_{rr}(z)$. Однако не следует думать, что это ограничение имеет принципиальный характер. В случае особой матрицы $\Phi_{rr}(z)$ формальное решение нельзя записать в виде (5.40). Однако метод решения уравнений оптимального фильтра (5.38) без особого труда распространяется и на этот случай, если система (5.38) совместна. Примеры решения задачи синтеза для вырожденной матрицы $\Phi_{rr}(z)$ будут приведены далее.

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫХ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ РАБОТЫ

§ 6.1. Постановка задачи синтеза замкнутой системы

Любая система автоматического управления может рассматриваться как комплекс устройств, осуществляющих преобразование информации, содержащейся во внешних сигналах. С этой точки зрения система управления является фильтром, предназначенным для выделения полезной информации и подавления различного рода помех.

Однако имеется и существенное отличие замкнутых систем управления от тех устройств, синтез которых рассматривался в предыдущей главе. Это отличие в основном сводится к тому, что система управления всегда содержит некоторую часть в замкнутом контуре, характеристики которой заранее заданы и не подлежат изменению в процессе проектирования. Во многих случаях задана также и структура системы, а задача проектирования заключается лишь в выборе передаточных функций корректирующих устройств, тем или иным способом включенных в контур управления. Выбор этот должен быть произведен таким образом, чтобы динамические характеристики замкнутой системы удовлетворяли определенным техническим требованиям. Такой путь проектирования является естественным при использовании любого из вариантов метода проб (метод корневого годографа, логарифмических частотных характеристик и т. д.).

Ряд методов синтеза линейных систем автоматического управления объединен иным общим подходом. При этом подходе первоначально задаются или определяются из решения вариационной задачи характеристики замкнутой системы в целом (ее передаточная матрица). Динамические же характеристики корректирующих звеньев опреде-

ляются по известным соотношениям, связывающим их с передаточными матрицами заданных элементов и системы. Эта процедура синтеза является общепринятой в задаче Винера для систем управления, в теории инвариантности, при синтезе дискретных систем с конечным временем переходного процесса и т. д.

Как показано в § 3.3 (см. также рис. 3.8), такая последовательность синтеза неизбежно приводит к компенсации нулей и полюсов объекта соответствующими полюсами и нулями корректирующего устройства. Система при этом становится вырожденной и ее свойство «быть устойчивой» зависит не только от расположения полюсов передаточной матрицы «вход — выход». В § 3.4 показано, что в общем случае неминимальнофазового объекта свобода выбора передаточной матрицы системы ограничена. Это ограничение отражает специфику замкнутых систем и является одним из отличий задачи синтеза системы управления от задачи синтеза фильтра.

В теории аналитического синтеза оптимальных систем управления ставится задача выявления потенциальных возможностей системы и условий, ограничивающих максимально достижимую точность. Существенным моментом постановки задачи синтеза является выбор показателя (критерия) точности работы системы.

По соображениям, которые приводились в § 4.1, для линейных систем целесообразно использовать квадратичный функционал ошибок. При синтезе замкнутых систем управления (в отличие от оптимальной фильтрации) приходится разыскивать условный экстремум этого функционала. Последнее связано с тем, что система управления должна удовлетворять ряду дополнительных условий, ограничивающих достижимую точность. В качестве основных из этих ограничений можно указать следующие:

- (1) произвольность структуры проектируемой системы,
- (2) необходимость учета динамических характеристик заданной части,
- (3) учет условия физической реализуемости корректирующих устройств,
- (4) наличие помех внутри контура системы управления,

(5) необходимость учета ограничений по координатам системы,

(6) дополнительные требования к статическим и динамическим характеристикам системы (синтез астатических систем, следящих систем с заданной добротностью и т. д.).

Условия (1) — (3) являются обязательными и их необходимо учитывать при любой постановке задачи синтеза. Остальные ограничения (4) — (6) могут оказаться либо существенными, либо несущественными в зависимости от конкретного технического содержания задачи.

В настоящей главе излагается теория аналитического синтеза систем управления, находящихся под воздействием стационарных случайных полезных сигналов и помех. Рассматриваются установившиеся режимы работы. Это означает, что дополнительные ошибки, связанные с переходными процессами при включении системы, не учитываются. Показателем качества является сумма взвешенных дисперсий ошибок (4.114)

$$J_e = \sum_{i=1}^n \rho_i D_{e_i} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp} [\Phi_{ee}(z) R] \frac{dz}{z}. \quad (6.1)$$

Ограничения (2) — (6) выражены в интегральной форме, что позволило развить единый подход к задачам синтеза

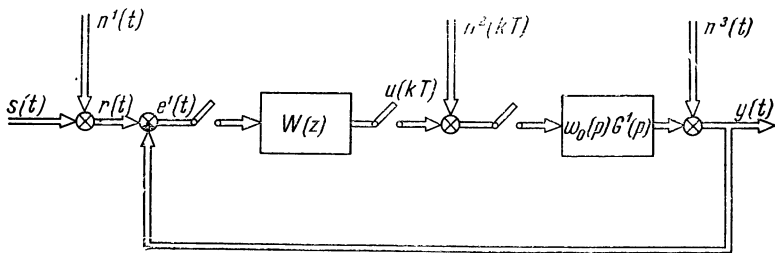


Рис. 6.1.

многомерных систем, оптимальных в смысле минимума показателя (6.1).

Для конкретизации изложения задач синтеза будем рассматривать замкнутую систему с **корректирующим** устройством $W(z)$, включенным в канал ошибок (рис. 6.1).

Фиксированная приведенная непрерывная часть системы характеризуется передаточной матрицей $w_0(p)G^1(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} G^1(p)$. Дискретная передаточная матрица ПНЧ в соответствии с (2.80) определяется соотношением

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{G^1(p)}{p} \right\}. \quad (6.2)$$

На вход системы поступает аддитивная смесь полезного сигнала $s(t) = \|s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\|'$ и помехи $n^1(t) = \|n_1^1(t), n_2^1(t), \dots, n_n^1(t)\|'$:

$$r(t) = s(t) + n^1(t). \quad (6.3)$$

Источником помех $n_i^1(t)$ являются как ошибки измерения сигнала рассогласования $e^1(t)$, так и неточности преобразования непрерывных данных в дискретные. Сигнал $n^2(kT)$ (рис. 6.1) характеризует дискретные мешающие воздействия на входе ПНЧ. В частности, это может быть шум квантования по уровню и погрешности преобразования D/H . Воздействия $n^3(t) = \|n_1^3(t), n_2^3(t), \dots, n_n^3(t)\|'$ представляют собой помехи, приложенные к объекту (колебания нагрузки для энергосистемы, порывы ветра для летательного аппарата и т. д.). Для удобства эти помехи пересчитаны к выходу объекта. Предполагается, что как полезный сигнал, так и помехи являются реализациями стационарных случайных процессов с нулевыми средними значениями. Входной сигнал $r(t)$ и помехи $n^2(kT)$ и $n^3(t)$ независимы.

§ 6.2. Оптимальное управление минимальнофазовым объектом

В настоящем параграфе рассмотрим случай, когда объект управления является минимальнофазовым:

$$G(z) = z^{-1}G^+(z). \quad (6.4)$$

В главе 3 показано, что при наличии такого объекта (и только в этом случае) требование обеспечения устойчивости

замкнутой системы не накладывает дополнительных ограничений на вид передаточной матрицы системы $H(z)$. Единственное условие, ограничивающее свободу выбора $H(z)$, связано с физической реализуемостью корректора $W(z)$ (3.85):

$$H(z) = z^{-1}H^1(z)_+, \quad (6.5)$$

где $H^1(z)_+$ — произвольная устойчивая рациональная матрица, все элементы которой имеют степень числителя не выше степени знаменателя.

Для вывода уравнений оптимальной системы необходимо выразить матрицу спектральной плотности ошибки

$$\Phi_{ee}(z) = \Phi_{dd}(z) - \Phi_{yd}(z) - \Phi_{dy}(z) + \Phi_{yy}(z) \quad (6.6)$$

через вероятностные характеристики входных сигналов $r(t)$, $n^2(kT)$ и $n^3(t)$, передаточную матрицу заданной части $G(z)$ и искомую передаточную матрицу замкнутой системы $H(z)$. Для этого, пользуясь правилами, установленными в главе 3, запишем связь изображений выходного и входного сигналов:

$$\begin{aligned} y(z) = & G(z)W(z) [I + G(z)W(z)]^{-1}r(z) + \\ & + [I + G(z)W(z)]^{-1}G(z)n^2(z) + \\ & + [I + G(z)W(z)]^{-1}n^3(z). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Исключая из (6.7) характеристики корректирующих устройств (передаточную матрицу $W(z)$), выразим выходной сигнал $y(z)$ через $G(z)$ и передаточную матрицу «вход — выход» системы

$$H(z) = G(z)W(z) [I + G(z)W(z)]^{-1}. \quad (6.8)$$

Воспользовавшись соотношением

$$[I + G(z)W(z)]^{-1} = I - H(z), \quad (6.9)$$

получим:

$$y(z) = H(z)r(z) + [I - H(z)][G(z)n^2(z) + n^3(z)]. \quad (6.10)$$

В соответствии с правилами преобразования матриц спектральных плотностей, установленными в главе 4, можно записать следующие выражения для матриц спектраль-

ных плотностей $\Phi_{yy}(z)$, $\Phi_{yd}(z)$ и $\Phi_{dy}(z)$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{yy}(z) &= H(z^{-1})\Phi_{rr}(z)H'(z) + \\ &+ [I - H(z^{-1})] \cdot [G(z^{-1})\Phi_{n^2n^2}(z)G'(z) + \\ &+ \Phi_{n^3n^3}(z)] \cdot [I - H'(z)], \\ \Phi_{yd}(z) &= H(z^{-1})\Phi_{rd}(z), \Phi_{dy}(z) = \Phi_{dr}(z)H'(z). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

При выводе этих соотношений учитывалась формула (6.10), устанавливающая связь входных и выходных сигналов.

После подстановки (6.5), (6.6) и (6.11) в формулу (6.1), определяющую величину показателя качества J_e , нетрудно заметить, что полученное выражение представляет собой квадратичный функционал относительно элементов $h_{ij}^1(z)_+$ матрицы $H^1(z)_+$. Для нахождения минимума J_e необходимо приравнять нулю вариацию функционала δJ_e , вызванную вариацией элементов $h_{ij}^1(z)$.

Отметим, что подынтегральное выражение в (6.1) обладает при произвольной матрице $H^1(z)$ свойством симметрии:

$$\text{Sp}[\Phi_{ee}(z)R] = \text{Sp}[\Phi_{ee}(z^{-1})R]. \quad (6.12)$$

Кроме того, варьируемая матрица $H^1(z)$ должна удовлетворять условиям устойчивости и физической реализуемости. Поэтому для составления уравнений оптимальной системы можно воспользоваться методом, изложенным в § 5.1. В соответствии с (5.15) эти уравнения имеют вид

$$\frac{1}{z} \frac{\partial \text{Sp}[\Phi_{ee}(z)R]}{\partial H^1(z^{-1})} = Q'(z)_-, \quad (6.13)$$

где $Q(z)_-$ — неизвестная рациональная матрица размеров $n \times n$, аналитическая в области Γ^+ . Воспользовавшись дополнительно правилами дифференцирования следа матрицы (5.16), приведенными в том же параграфе, запишем (6.13) в явной форме:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z} [\Phi_{rr}(z) + G(z^{-1})\Phi_{n^2n^2}(z)G'(z) + \Phi_{n^3n^3}(z)] \times \\ &\times [H^1(z)]' R - [\Phi_{rd}(z) + G(z^{-1})\Phi_{n^2n^2}(z)G'(z) + \\ &+ \Phi_{n^3n^3}(z)] R = Q'(z)_-. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Эта система n^2 уравнений аналогична уравнениям оптимального фильтра (5.18), полученным в главе 5 для разомкнутой системы. Раскрывая смысл произведений матриц в (6.14), нетрудно убедиться, что (так же как и в случае фильтрации) эта система уравнений распадается на n независимых групп по n уравнений. В каждую из этих групп в качестве неизвестных входят элементы одной из строк матрицы $H^1(z)$. Это является следствием того обстоятельства, что в уравнение (6.14) с одной стороны (справа) от неизвестной матрицы $H^1(z)$ в качестве сомножителя входит лишь диагональная матрица (матрица R).

Из соотношений (6.14), помимо распада системы на группы уравнений, следует независимость решения задачи от значений весовых коэффициентов ρ_k . Если ни один из ρ_k не равен нулю, то матрица R является неособой и ее можно сразу исключить из рассмотрения, умножив (6.14) справа на R^{-1} . В случае, если какой-либо из коэффициентов ρ_k , например ρ_l , равен нулю, то соответствующая система уравнений в (6.14) удовлетворяется автоматически. Характеристики l -й строки матрицы $H^1(z)$ являются при этом произвольными, так как их выбор не оказывает влияния на величину показателя качества.

Метод решения уравнений оптимальной системы (6.14) принципиально не отличается от рассмотренного в предыдущей главе.

Для определения полюсов матрицы $H^1(z)$ используется формальное алгебраическое решение системы. В качестве этих полюсов следует принять, во-первых, нули определителя

$$\Delta(z) = |\Phi_{rr}(z) + G(z^{-1})\Phi_{n^2n^2}(z)G'(z) + \Phi_{n^3n^3}(z)| \quad (6.15)$$

и, во-вторых, полюсы, соответствующие полюсам желаемого оператора $D(p)$, расположенным в левой полуплоскости плоскости p .

После определения полюсов матрицы $H^1(z)$ ее элементы ищутся в виде рациональных функций, имеющих равные степени числителя и знаменателя и неопределенные коэффициенты полиномов числителя. Эти коэффициенты находятся как решения систем линейных алгебраических

уравнений

$$\left[\frac{1}{z} \{ \Phi_{rr}(z) + G(z^{-1}) \Phi_{n^2 n^2}(z) G'(z) + \right. \\ \left. + \Phi_{n^3 n^3}(z) \} [H^1(z)]' R \right]_+ = [\{ \Phi_{rd}(z) + \\ + G(z^{-1}) \Phi_{n^2 n^2}(z) G'(z) + \Phi_{n^3 n^3}(z) \} R]_+. \quad (6.16)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если помехи внутри контура управления отсутствуют ($n^2(kT) = 0$, $n^3(t) = 0$), то уравнения (6.14) упрощаются:

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) [H^1(z)]' - \Phi_{rd}(z) = Q'(z)_-. \quad (6.17)$$

Последние соотношения формально совпадают с уравнениями оптимального фильтра (5.18), если в желаемый оператор $D(p)$ дополнительно включена операция экстраполяции на такт.

Пусть в (6.17) входные сигналы в различных каналах не коррелированы между собой, а матрица желаемой системы $D(p)$ диагональна. Тогда диагональными являются матрицы $\Phi_{rr}(z)$ и $\Phi_{rd}(z)$ и система (6.17) распадается на n^2 независимых уравнений. Нетрудно убедиться, что уравнения, соответствующие недиагональным элементам передаточной матрицы, имеют только тривиальные решения

$$h_{ij}^1(z) = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (6.18) \\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнения же для диагональных элементов $H^1(z)$ принимают вид

$$\frac{1}{z} \Phi_{r_i r_i}(z) h_{ii}^1(z) - \Phi_{r_i d_i}(z) = q_{ii}(z)_-, \quad (6.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что оптимальная система управления в этом случае является автономной, а ее передаточная матрица — диагональной:

$$H(z) = \text{diag} \{ h_{11}(z), h_{22}(z), \dots, h_{nn}(z) \}. \quad (6.20)$$

Отметим, что при наличии помех внутри контура соответствующие матрицы — коэффициенты в (6.14) в общем случае недиагональны даже при некоррелированных входных сигналах $r_i(t)$, и оптимальной является неавтономная система.

Другим частным случаем общей задачи синтеза является случай проектирования оптимальной системы автоматической стабилизации. Назначением такой системы является компенсация возмущающего действия помех и поддержание выходного сигнала вблизи нулевого уровня. Очевидно, что для системы стабилизации при отсутствии помех на входе входной и желаемый сигналы можно считать равными нулю:

$$r(t) \equiv d(t) \equiv 0_{n \times 1}. \quad (6.21)$$

Характеристики оптимальной системы стабилизации находятся из уравнений

$$\begin{aligned} [G(z^{-1})\Phi_{n^2 n^2}(z)G'(z) + \Phi_{n^3 n^3}(z)] \times \\ \times \left[\frac{1}{z} H^1(z) - I \right]' = Q'(z). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Решение последней системы может быть найдено обычным путем.

Интересно отметить, что аналогичная постановка задачи в непрерывном случае приводит к тривиальному результату — единичной передаточной матрице системы

$$H(p) = I.$$

Реализация этого решения при структуре рис. 6.1 требует, как известно, бесконечных коэффициентов усиления по всем каналам. Система (6.22), в отличие от непрерывного случая, имеет нетривиальное решение.

Минимальное значение показателя качества подсчитывается по формуле (6.1), если в подынтегральное выражение подставлено значение оптимальной передаточной матрицы

$$H(z) = z^{-1}H^1(z).$$

Нетрудно, однако, показать, что, как и ранее, общая формула для $[J_e]_{\min}$ при удовлетворении уравнений (6.14)

упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} [J_e]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp}[\Phi_{dd}(z)R - \Phi_{yy}(z)R] \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp}[\Phi_{dd}(z)R - \Phi_{yd}(z)R] \frac{dz}{z}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Пример 6.1. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной двумерной системы управления. Пусть на входе системы действует лишь полезный сигнал с матрицей спектральной плотности

$$\Phi_{ss}(z) = \text{diag}\{\Phi_{s_1s_1}(z), \Phi_{s_2s_2}(z)\}, \quad (6.24)$$

где

$$\Phi_{s_i s_i}(z) = \frac{A_i^2 (1 - \delta_i^2)}{(1 - \delta_i z)(1 - \delta_i z^{-1})}, \quad i = 1, 2. \quad (6.25)$$

Помеху $n^3(t)$, так же как и $n^1(t)$, примем равной нулю. Пусть сигнал $n^2(kT)$ представляет собой дискретный белый шум с матрицей спектральной плотности

$$\Phi_{n^2 n^2}(z) = \text{diag}\{B_1^2, B_2^2\}. \quad (6.26)$$

Объект управления описывается уравнениями (2.93) примера 2.3. Дискретная передаточная матрица этого объекта (2.95) получена в том же примере. В буквенных обозначениях $G(z)$ имеет вид

$$G(z) = \|g_{ij}(z)\|_1 = \frac{1}{q(z)} R(z) = \frac{1}{q(z)} \|r_{ij}(z)\|_1, \quad (6.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q(z) &= (z - d_1)(z - d_2), \\ r_{ij}(z) &= a_{ij}z + b_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Объект управления является устойчивым и минимальнофазовым (см. пример 2.4), так что его передаточная матрица имеет вид

$$G(z) = z^{-1}G^+(z). \quad (6.29)$$

Поэтому единственным ограничением, которому необходимо подчинить передаточную матрицу замкнутой системы, является условие (6.5). Принимая весовые коэффициенты равными единице, $\rho_i = 1$ ($i = 1, 2$), запишем уравнения оптимальной системы (6.14) в скалярной форме:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{z} [\Phi_{s_1 s_1} + B_1^2 \bar{g}_{11} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{12}] h_{11}^1 + \\ & \quad + \frac{1}{z} [B_1^2 \bar{g}_{11} g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{12}] h_{12}^1 - \\ & \quad - [\Phi_{s_1 s_1} + B_1^2 \bar{g}_{11} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{12}] = q_{11-}, \\ & \frac{1}{z} [B_1^2 \bar{g}_{21} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{12}] h_{11}^1 + \\ & \quad + \frac{1}{z} [\Phi_{s_2 s_2} + B_1^2 \bar{g}_{21} g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{22}] h_{12}^1 - \\ & \quad - [B_1^2 \bar{g}_{21} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{12}] = q_{12-}, \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{z} [\Phi_{s_1 s_1} + B_1^2 \bar{g}_{11} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{12}] h_{21}^1 + \\ & \quad + \frac{1}{z} [B_1^2 \bar{g}_{11} g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{12}] h_{22}^1 - \\ & \quad - [B_1^2 \bar{g}_{11} g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{22}] = q_{21-}, \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{z} [B_1^2 \bar{g}_{21} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{12}] h_{21}^1 + \\ & \quad + \frac{1}{z} [\Phi_{s_2 s_2} + B_1^2 \bar{g}_{21} g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{22}] h_{22}^1 - \\ & \quad - [\Phi_{s_2 s_2} + B_1^2 \bar{g}_{21} g_{22} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{22}] = q_{22-}. \end{aligned} \right\}$$

В уравнениях (6.30) и (6.31) для упрощения записи аргумент опущен и принято обозначение $g_{ij} = g_{ij}(z)$, $\bar{g}_{ij} = = g_{ij}(z^{-1})$. В соответствии с общими выводами настоящего параграфа система четырех уравнений распалась на две независимые, каждая из которых служит для определения

элементов строки матрицы $H^1(z)$. Решим первые два уравнения — систему (6.30). Определитель системы

$$\Delta(z) = \frac{1}{z^2} \{ \Phi_{s_1 s_1} \Phi_{s_2 s_2} + \Phi_{s_1 s_1} (B_1^2 \bar{g}_{21} g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{22} g_{22}) + \\ + \Phi_{s_2 s_2} (B_1^2 \bar{g}_{11} g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{12} g_{12}) + |\bar{G} \Phi_{n^2 n^2} G'| \}; \quad (6.32)$$

учитывая, что $|G| = \left| \frac{1}{q} R \right| = \frac{1}{q^2} |R| = \frac{\gamma}{q}$ (см. формулу

(3.95) примера 3.2), получим:

$$\Delta(z) = \frac{1}{z^2} \left\{ \Phi_{s_1 s_1} \Phi_{s_2 s_2} + \Phi_{s_1 s_1} (B_1^2 \bar{r}_{21} r_{21} + B_2^2 \bar{r}_{22} r_{22}) \frac{1}{\bar{q}q} + \right. \\ \left. + \Phi_{s_2 s_2} (B_1^2 \bar{r}_{11} r_{11} + B_2^2 \bar{r}_{12} r_{12}) \frac{1}{\bar{q}q} + \frac{B_1^2 B_2^2 \gamma^2}{\bar{q}q} \right\}, \quad (6.33)$$

где r_{ij} — элементы матрицы R . Приводя (6.33) к общему знаменателю, приравняем нулю числитель полученного выражения:

$$A_1^2 A_2^2 (1 - \delta_1^2) (1 - \delta_2^2) (z - d_1) (1 - d_1 z) (z - d_2) \times \\ \times (1 - d_2 z) + A_1^2 (1 - \delta_1^2) (z - \delta_2) (1 - \delta_2 z) \times \\ \times [B_1^2 (a_{21} z + b_{21}) (a_{21} + b_{21} z) + B_2 (a_{22} z + b_{22}) \times \\ \times (a_{22} + b_{22} z)] + A_2^2 (1 - \delta_2^2) (z - \delta_1) (1 - \delta_1 z) \times \\ \times [B_1^2 (a_{11} z + b_{11}) (a_{11} + b_{11} z) + B_2 (a_{12} z + b_{12}) \times \\ \times (a_{12} + b_{12} z)] + B_1^2 B_2^2 \gamma^2 (z - \delta_1) (1 - \delta_1 z) \times \\ \times (z - \delta_2) (1 - \delta_2 z) = 0. \quad (6.34)$$

Это — возвратное уравнение четвертой степени, служащее для определения полюсов передаточной матрицы оптимальной системы. Вводя очевидные обозначения, запишем его

в виде

$$\kappa_2 z^4 + \kappa_1 z^3 + \kappa_0 z^2 + \kappa_1 z + \kappa_2 = 0. \quad (6.35)$$

Поделив обе части уравнения (6.35) на z^2 и введя новую неизвестную $w = z + z^{-1}$, сведем его к квадратному:

$$\kappa_2 w^2 + \kappa_1 w + \kappa_0 - 2\kappa_2 = 0. \quad (6.36)$$

Для нахождения полюсов $h_{ij}^1(z)$ первоначально необходимо найти корни (6.36) $w_{1,2}$ и затем решить квадратные уравнения

$$z^2 - w_{1,2}z + 1 = 0. \quad (6.37)$$

В результате можно получить значения четырех корней $z_1 = \mu_1$, $z_2 = \mu_2$, $z_3 = \mu_1^{-1}$, $z_4 = \mu_2^{-1}$, $|\mu_i| < 1$. На основании этого решение задачи ищется в виде

$$\left. \begin{aligned} h_{11}^1(z) &= \frac{a_{11}^0 z^2 + a_{11}^1 z + a_{11}^2}{(z - \mu_1)(z - \mu_2)}, \\ h_{12}^1(z) &= \frac{a_{12}^0 z^2 + a_{12}^1 z + a_{12}^2}{(z - \mu_1)(z - \mu_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Подставляя (6.38) в уравнения (6.30) и приравнявая затем нулю слагаемые, содержащие полюсы в Γ^+ , получим уравнения для неопределенных коэффициентов. Эти уравнения имеют вид:

1) Для полюса $z = \delta_1$

$$h_{11}^1(\delta_1) = \delta_1. \quad (6.39)$$

2) Для полюса $z = \delta_2$

$$h_{12}^1(\delta_2) = \delta_2. \quad (6.40)$$

3) Для полюса $z = d_1$ получим два неоднородных уравнения

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^1 h_{11}^1(d_1) + k_{12}^1 h_{12}^1(d_1) &= d_1 k_{11}^1, \\ k_{21}^1 h_{11}^1(d_1) + k_{22}^1 h_{12}^1(d_1) &= d_1 k_{21}^1, \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^1 &= \lim_{z \rightarrow d_1} \{(z - d_1)[B_1^2 \bar{g}_{11}g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{12}g_{12}]\}, \\ k_{12}^1 &= \lim_{z \rightarrow d_1} \{(z - d_1)[B_1^2 \bar{g}_{11}g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{12}g_{22}]\}, \\ k_{21}^1 &= \lim_{z \rightarrow d_1} \{(z - d_1)[B_1^2 \bar{g}_{21}g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{22}g_{12}]\}, \\ k_{22}^1 &= \lim_{z \rightarrow d_1} \{(z - d_1)[B_1^2 \bar{g}_{21}g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{22}g_{22}]\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

Принимая во внимание вид коэффициентов k_{ij}^1 (6.42), нетрудно показать, что определитель системы (6.41) равен нулю. Эти уравнения, однако, совместны, так как ранг расширенной матрицы также равен единице. В качестве независимого, следовательно, можно использовать лишь одно из уравнений (6.41).

4) Для полюса $z = d_2$ аналогично предыдущему получим два уравнения, различающихся лишь множителем. В качестве независимого примем одно из них, например первое:

$$k_{11}^2 h_{11}^1(d_2) + k_{12}^2 h_{12}^1(d_2) = d_2 k_{11}^2, \quad (6.43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^2 &= \lim_{z \rightarrow d_2} \{(z - d_2)[B_1^2 \bar{g}_{11}g_{11} + B_2^2 \bar{g}_{12}g_{12}]\}, \\ k_{12}^2 &= \lim_{z \rightarrow d_2} \{(z - d_2)[B_1^2 \bar{g}_{11}g_{21} + B_2^2 \bar{g}_{12}g_{22}]\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

5) Для $z = \mu_1$ получим два однородных уравнения с определителем, равным нулю. Независимым из них является лишь одно:

$$\begin{aligned} &[\Phi_{s_1 s_1}(\mu_1) + B_1^2 g_{11}(\mu_1^{-1})g_{11}(\mu_1) + B_2^2 g_{12}(\mu_1^{-1})g_{12}(\mu_1)] \times \\ &\quad \times (a_{11}^0 \mu_1^2 + a_{11}^1 \mu_1 + a_{11}^2) + \\ &+ [B_1^2 g_{11}(\mu_1^{-1})g_{21}(\mu_1) + B_2^2 g_{12}(\mu_1^{-1})g_{22}(\mu_1)] \times \\ &\quad \times (a_{12}^0 \mu_1^2 + a_{12}^1 \mu_1 + a_{12}^2) = 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

6) Для $z = \mu_2$ аналогично предыдущему получим одно уравнение:

$$\begin{aligned} & [\Phi_{s_1 s_1}(\mu_2) + B_1^2 g_{11}(\mu_2^{-1}) g_{11}(\mu_2) + \\ & + B_2^2 \bar{g}_{12}(\mu_2^{-1}) g_{12}(\mu_2)] (a_{11}^0 \mu_2^2 + a_{11}^1 \mu_2 + a_{11}^2) + \\ & + [B_1^2 g_{11}(\mu_2^{-1}) g_{21}(\mu_2) + B_2^2 g_{12}(\mu_2^{-1}) g_{12}(\mu_2)] \times \\ & \times (a_{12}^0 \mu_2^2 + a_{12}^1 \mu_2 + a_{12}^2) = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Таким образом, для определения шести неизвестных коэффициентов

$$a_{11}^0, \dots, a_{12}^2$$

имеем систему шести независимых линейных алгебраических уравнений.

Пример 6.2. Рассмотрим двумерную систему автоматической стабилизации. Уравнения объекта имеют вид

$$Q(D)y(t) = P(D)u(t) + S(D)f(t), \quad (6.47)$$

где Q , P и S — квадратные полиномиальные матрицы размера 2×2 . Предположим, что нагрузка $f(t)$ является белым шумом, имеющим матрицу спектральной плотности

$$\Phi_{ff}(p) = \text{diag} \{C_1^2, C_2^2\}.$$

Спектральная плотность помехи $n^3(t)$, приведенной к выводу объекта (рис. 6.1), равна

$$\Phi_{n^3 n^3}(p) = G^1(-p) \Phi_{ff}(p) [G^1(p)]', \quad (6.48)$$

где

$$G^1(p) = Q^{-1}(p)S(p) = \|g_{ij}^1(p)\|_1^2. \quad (6.49)$$

Раскрывая (6.48) и (6.49), получим:

$$\Phi_{n^3 n^3}(p) = \left\| \begin{array}{cc} C_1^2 \bar{g}_{11}^1 g_{11}^1 + C_2^2 \bar{g}_{12}^1 g_{12}^1, & C_1^2 \bar{g}_{11}^1 g_{21}^1 + C_2^2 \bar{g}_{12}^1 g_{22}^1 \\ C_1^2 \bar{g}_{21}^1 g_{11}^1 + C_2^2 \bar{g}_{22}^1 g_{21}^1, & C_1^2 \bar{g}_{21}^1 g_{21}^1 + C_2^2 \bar{g}_{22}^1 g_{22}^1 \end{array} \right\| \quad (6.50)$$

где обозначено $\bar{g}_{ij}^1 = g_{ij}^1(-p)$.

Полагая

$$C_2 = 0, \quad g_{11}^1(p) = \frac{k_{11}}{p + a_{11}}, \quad g_{21}^1(p) = \frac{k_{21}}{p + a_{21}},$$

найдем:

$$\Phi_{n^3 n^3}(p) = \left\| \begin{array}{cc} \frac{C_1^2 k_{11}^2}{(a_{11} - p)(a_{11} + p)} & \frac{C_1^2 k_{11} k_{21}}{(a_{11} - p)(a_{21} + p)} \\ \frac{C_1 k_{21}^2 k_{11}}{(a_{21} - p)(a_{11} + p)} & \frac{C_1^2 k_{21}}{(a_{21} - p)(a_{21} + p)} \end{array} \right\|. \quad (6.51)$$

Переходя к дискретным характеристикам помехи $n^3(t)$, получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{n^3 n^3}(z) &= Z \{ \Phi_{n^3 n^3}(p) \} = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{C_1^2 k_{11}^2}{2a_{11}} \frac{(1 - \alpha_1^2)z}{(z - \alpha_1)(1 - \alpha_1 z)} & \frac{C_1 k_{11} k_{21}}{a_{11} + a_{21}} \frac{(1 - \alpha_1 \alpha_2)z}{(z - \alpha_2)(1 - \alpha_1 z)} \\ \frac{C_1 k_{21}^2 k_{11}}{a_{21} + a_{11}} \frac{(1 - \alpha_2 \alpha_1)z}{(z - \alpha_1)(1 - \alpha_2 z)} & \frac{C_1^2 k_{21}^2}{2a_{21}} \frac{(1 - \alpha_2^2)z}{(1 - \alpha_2 z)(z - \alpha_2)} \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (6.52)$$

где

$$\alpha_1 = e^{-a_{11}T}, \quad \alpha_2 = e^{-a_{21}T}.$$

За показатель качества примем сумму дисперсий ошибок двух каналов. При равенстве нулю входного сигнала, желаемого сигнала и помехи $n^2(kT)$ (рис. 6.4) уравнения оптимальной системы автоматической стабилизации (6.22) примут вид

$$\frac{1}{z} \Phi_{nn}(z) [H^1(z)]' - \Phi_{nn}(z) = Q(z)', \quad (6.53)$$

где индекс 3 опущен, так как других помех нет. В скалярной

форме получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z} \Phi_{n_1 n_1}(z) h_{11}^1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{n_1 n_2}(z) h_{12}^1(z) - \\ - \Phi_{n_1 n_1}(z) = q_{11}(z) -, \\ \frac{1}{z} \Phi_{n_2 n_1}(z) h_{11}^1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{n_2 n_2}(z) h_{12}^1(z) - \\ - \Phi_{n_2 n_1}(z) = q_{12}(z) -, \end{aligned} \right\} (6.54)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z} \Phi_{n_1 n_1}(z) h_{21}^1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{n_1 n_2}(z) h_{22}^1(z) - \\ - \Phi_{n_1 n_2}(z) = q_{21}(z) -, \\ \frac{1}{z} \Phi_{n_2 n_1}(z) h_{21}^1(z) + \frac{1}{z} \Phi_{n_2 n_2}(z) h_{22}^1(z) - \\ - \Phi_{n_2 n_2}(z) = q_{22}(z) -, \end{aligned} \right\} (6.55)$$

где $\Phi_{n_i n_j}(z)$ — элементы матрицы $\Phi_{nn}(z)$. Рассмотрим решение системы (6.54). Определитель

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \frac{1}{z^2} |\Phi_{nn}(z)| = \\ &= \frac{C_1^4 k_{11}^2 k_{21}^2}{4a_{11}a_{21}} (1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2) - \frac{C_1^4 k_{11}^2 k_{21}^2}{(a_{11} + a_{21})^2} \cdot (1 - \alpha_1 \alpha_2) \\ &= \frac{\quad}{(z - \alpha_1)(1 - \alpha_1 z)(z - \alpha_2)(1 - \alpha_2 z)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

не имеет нулей. Поэтому передаточные функции $h_{ij}^1(z)$ ищутся в виде неопределенных постоянных величин

$$h_{11}^1 = a_{11}, \quad h_{12}^1 = a_{12}. \quad (6.57)$$

Подставляя (6.57) в (6.54), найдем постоянные a_{11} и a_{12} :

$$a_{11} = \alpha_1, \quad a_{12} = 0. \quad (6.58)$$

Аналогично, решая вторую систему уравнений определим:

$$h_{21}^1 = a_{21} = 0, \quad h_{22}^1 = a_{22} = \alpha_2.$$

Передаточная матрица оптимальной системы является, следовательно, диагональной и имеет вид

$$H(z) = \begin{vmatrix} \alpha_1 z^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 z^{-1} \end{vmatrix}. \quad (6.59)$$

Минимальное значение показателя качества найдется по формуле

$$\begin{aligned} [J_e]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp}[\Phi_{nn}(z) - \Phi_{nn}(z)H'(z)] \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{C_1^2}{2} \left[\frac{k_{11}^2}{a_{11}} (1 - \alpha_1^2) + \frac{k_{21}^2}{a_{21}} (1 - \alpha_2^2) \right]. \quad (6.60) \end{aligned}$$

§ 6.3. Синтез систем управления устойчивым неминимальнофазовым объектом

При управлении минимальнофазовым объектом характеристики оптимальной системы полностью определяются спектральными свойствами и местом приложения внешних воздействий. Влияние заданной части проявляется лишь в необходимости учета запаздывания на такт (множитель z^{-1} в передаточной матрице $H(z)$). Наличие устойчивого или неустойчивого неминимальнофазового объекта накладывает на вид $H(z)$ дополнительные ограничения, связанные с требованием обеспечения устойчивости системы. Как показано в главе 3, передаточная матрица замкнутой системы рис. 6.1, помимо требования аналитичности вне единичного круга, должна при этом удовлетворять дополнительно любой из четырех пар соотношений (3.77) и (3.78), (3.90) и (3.91), (3.77) и (3.91), (3.90) и (3.78).

В настоящем параграфе рассматривается задача синтеза системы управления устойчивым, но неминимальнофазовым объектом. В таком случае $Q^-(z) = I$, $q^-(z) = 1$ и ограничения, наложенные на $H(z)$ принимают вид (3.77) или (3.90):

$$H(z) = z^{-1}P^-(z)H^1(z)_+ \quad (6.61)$$

или

$$H(z) = z^{-1}p^-(z)H^1(z)_+. \quad (6.62)$$

Для упрощения выкладок будем считать, что помехи действуют лишь на входе системы в смеси с полезным сигналом $s(t)$. Как и ранее, показателем качества является квадратичный функционал (6.1). Для вывода уравнений оптимальной системы необходимо приравнять нулю вариацию этого функционала. При этом необходимо учитывать, что как характеристика оптимальной системы, так и ее вариация должны удовлетворять условиям (6.61) или (6.62). Подставляя эти соотношения в выражение для дискретной спектральной плотности ошибки (6.6) и (6.11) и принимая помехи $n^2(kT)$ и $n^3(t)$ равными нулю, получим:

$$\Phi_{ee}(z) = \Phi_{dd}(z) - zP^-(z^{-1})H^1(z^{-1})\Phi_{rd}(z) - \\ - z^{-1}\Phi_{dr}(z)[H^1(z)]' \cdot [P^-(z)]' + \\ + P^-(z^{-1})H^1(z^{-1})\Phi_{rr}(z)[H^1(z)]'[P^-(z)]' \quad (6.63)$$

и

$$\Phi_{ee}(z) = \Phi_{dd}(z) - zp^-(z^{-1})H^1(z^{-1})\Phi_{rd}(z) - \\ - z^{-1}p^-(z)\Phi_{dr}(z)[H^1(z)]' + \\ + p^-(z^{-1})p^-(z)H^1(z^{-1})\Phi_{rr}(z)[H^1(z)]'. \quad (6.64)$$

В силу последних соотношений функционал (6.1) зависит от вида матрицы $H^1(z)$, которая должна удовлетворять условиям устойчивости и физической реализуемости, а в остальном является произвольной. Этим произволом мы и воспользуемся для минимизации показателя качества системы. Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение после подстановки в (6.1) выражений (6.63) или (6.64) обладает при любой матрице $H^1(z)$ свойством симметрии относительно единичной окружности:

$$\text{Sp}[\Phi_{ee}(z)R] = \text{Sp}[\Phi_{ee}(z^{-1})R].$$

Поэтому для составления уравнений оптимальной системы можно применить способ, приведенный в § 5.1. Условие минимума функционала (6.1) имеет вид

$$\frac{1}{z} \frac{\partial \text{Sp}[\Phi_{ee}(z)R]}{\partial H^1(z^{-1})} = Q(z)_-, \quad (6.65)$$

где $Q(z)_-$ — неизвестная рациональная матрица, аналитическая в Γ^+ .

Подставляя в (6.65) выражения для спектральной плотности ошибки (6.63) или (6.64) и применяя правила (5.16) получим уравнения оптимальной системы в виде

$$\frac{1}{z} [P^-(z^{-1})]' R P^-(z) H^1(z) \Phi'_{rr}(z) - \\ - [P^-(z^{-1})]' R \Phi_{rd}(z) = Q(z) - \quad (6.66)$$

для ограничений типа (6.61) и

$$\frac{1}{z} P^-(z^{-1}) P^-(z) R H^1(z) \Phi'_{rr}(z) - P^-(z^{-1}) R \Phi_{rd}(z) = Q(z) - \quad (6.67)$$

для ограничений (6.62).

Особенностью системы (6.66) является то, что она не распадается на группы независимых уравнений. Это приводит к необходимости совместного решения всех n^2 уравнений (6.66). В связи с этим выбор величин весовых коэффициентов ρ_i влияет не только на значение показателя качества J_e , но и на вид оптимальной передаточной матрицы $H(z)$. Для решения уравнений (6.66) можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов с предварительным определением полюсов.

Рассмотрим случай, когда ни один из весовых коэффициентов ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не равен нулю. Для нахождения полюсов матрицы $H^1(z)$ используется формальное алгебраическое решение:

$$[\tilde{H}^1(z)]' = \\ = z \Phi_{rr}^{-1}(z) [Q(z)' + \Phi_{rd}(z) R P^-(z^{-1})] \cdot [P^-(z)' R P^-(z^{-1})]^{-1}. \quad (6.68)$$

Очевидно, что полюсами формального решения являются:

а) нули определителя $|\Phi_{rr}(z)|$. В силу свойств матрицы спектральной плотности $\Phi_{rr}(z)$ эти нули симметричны относительно окружности Γ , так что каждому корню определителя $\Phi_{rr}(z)$, $z_k = \mu_k$, $|\mu_k| < 1$ соответствует корень $z_{k+1} = \mu_k^{-1}$.

б) Нули определителя $|P^-(z)' R P^-(z^{-1})| = |P^-(z)| \times |P^-(z^{-1})| \cdot |R|$ также симметричны относительно единичной окружности Γ . По смыслу определения матрицы $P^-(z)$

все нули определителя $|P^-(z)|$ расположены вне единичного круга (в области Γ^-), а следовательно, все нули $|P^-(z^{-1})|$ — в области Γ^+ .

В соответствии с рассматриваемым методом решения в качестве полюсов $H^1(z)_+$ нужно принять те полюсы формального решения (6.68), которые расположены в области Γ^+ , т. е. половину нулей определителя $|\Phi_{rr}(z)|$, $z = \mu_k$, и нули определителя $|P^-(z^{-1})|$. Кроме того, полюсами $H^1(z)_+$ являются полюсы, связанные с видом желаемого преобразования $D(p)$. Порядок дальнейшего решения задачи полностью аналогичен рассмотренному в главе 5.

Остановимся на некоторых особенностях случая, когда один или несколько весовых коэффициентов ρ_i равны нулю. Формальное решение (6.68) при этом не имеет смысла, так как матрица R является особой. В то же время задача синтеза оптимальной системы по-прежнему остается разрешимой.

Для ее решения методом неопределенных коэффициентов можно записать уравнения (6.66) в скалярной форме и выбрать из них те, которые являются линейно независимыми. Нетрудно убедиться в том, что если ранг матрицы R равен m ($m < n$), то число таких уравнений равно mn . При этом, очевидно, появляется определенный произвол в выборе $n(n - m)$ элементов матрицы $H(z)$. Отметим некоторые особенности другого случая, когда ограничения выбраны в форме (6.62). Нетрудно видеть, что уравнения оптимального фильтра (6.67) распадаются на n групп, в каждую из которых входят элементы лишь одной из строк матрицы $H^1(z)$.

Пример 6.3. Рассмотрим задачу синтеза системы управления двумерным объектом, когда корректирующее устройство включено в канал ошибок (рис. 6.1). Будем предполагать, что помехи отсутствуют, а вероятностные свойства полезного входного сигнала описываются корреляционной матрицей

$$R_{ss}(\tau) = \text{diag} \{A_1^2 e^{-\alpha_1|\tau|}, A_2^2 e^{-\alpha} e^{-\alpha_2|\tau|}\}. \quad (6.69)$$

Рассмотрим задачу синтеза следящей системы, т. е. примем $D(p) = I$. Показателем точности является сумма дисперсий ошибок каналов, $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Пусть уравнения объекта имеют вид

$$Q(D)y(t) = P(D)u^1(t), \quad (6.70)$$

где

$$Q(D) = \begin{vmatrix} -0,912D - 112,0 & -15,21D - 38,56 \\ -0,542D^2 + 19,22D - & 4,06D^2 + 0,3805D - \\ -102,9 & -25,72 \end{vmatrix},$$

$$P(D) = \begin{vmatrix} -56,31 & -350,5 & \text{''} \\ 0 & 47,25D - 134,8 & \end{vmatrix}$$

Тогда определитель матрицы $Q(p)$ имеет следующие нули: $p_1 = -8,05$; $p_2 = -5,2$; $p_3 = -2,17$, т. е. объект является устойчивым. Передаточная матрица системы

$$G^1(p) = Q^{-1}(p)P(p) = \frac{1}{(p + 8,05)(p + 5,21)(p + 2,17)} \times \\ \times \begin{vmatrix} 19,18(p + 2,56)(p - 2,47) & 57,57(p + 2)(p + 1,62) \\ 2,56(p^2 - 35,5p + 190) & 19,3(p^2 - 6,46p + 91,4) \end{vmatrix} \quad (6.71)$$

Дискретная передаточная матрица ПНЧ в соответствии с (2.80) при $T = 0,2$ сек имеет вид

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{G^1(p)}{p} \right\} = \frac{1}{q(z)} R(z) = \frac{1}{q(z)} \times \\ \times \begin{vmatrix} 0,661z^2 - 1,661z + 0,765 & 2,13z^2 - 5,02z + 2,23 \\ -0,261z^2 + 0,826z + 0,409 & 0,870z^2 + 1,304z + 1,343 \end{vmatrix}^2 \quad (6.72)$$

где $q(z) = (z - 0,2)(z - 0,3526)(z - 0,6474)$.

Решая задачу идентификации (по положительным степеням z), находим разностные уравнения, соответствующие дискретной модели приведенной непрерывной части:

$$(\zeta^2 + \zeta + 1)y_1(kT) - (1,3\zeta^2 - 3,55\zeta + 1,65)y_2(kT) = \\ = (\zeta - 1,8)r_1(kT) + (\zeta - 0,3)r_2(kT),$$

$$(\zeta + 0,3)y_1(kT) + (\zeta - 0,6)y_2(kT) = 0,4r_1(kT) + 3r_2(kT).$$

Определитель правой части разностных уравнений

$3(\zeta - 1,8) - 0,4(\zeta - 0,3) = 2,6(\zeta - 2,038)$ имеет нуль вне единичного круга. Поэтому дискретная модель ПНЧ является устойчивой, но неминимальнофазовой. Для выявления характера ограничений, накладываемых на передаточную матрицу замкнутой системы $H(z)$, приведем $G(z)$ к канонической диагональной форме и, выделив множитель, имеющий нуль в области Γ^- , запишем $G(z)$ в виде

$$G(z) = z^{-1}P^-(z)G^+(z), \quad (6.73)$$

где $G^+(z)$ и $[G^+(z)]^{-1}$ — устойчивые матрицы, а

$$P^-(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 - \kappa z^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9,24 & 1 - 2,038z^{-1} \end{vmatrix}. \quad (6.74)$$

Рассмотрим первоначально случай, когда ограничения вида $H(z)$ заданы в форме (6.61). В соответствии с (6.66) уравнения оптимальной системы для данного примера записываются следующим образом:

$$\frac{1}{z} [P^-(z^{-1})]' P^-(z) H^1(z) \Phi'_{ss}(z) - [P^-(z^{-1})]' \Phi_{ss}(z) = Q(z), \quad (6.75)$$

где

$$\Phi_{ss}(z) = \text{diag} \left\{ \frac{A_1^2 (1 - d_1) z}{(z - d_1) (1 - d_1 z)}, \frac{A_2^2 (1 - d_2^2) z}{(z - d_2) (1 - d_2 z)} \right\},$$

$$[P^-(z^{-1})]' P^-(z) = \begin{vmatrix} 1 + c^2 & c(1 - \kappa z^{-1}) \\ c(1 - \kappa z) & (1 - \kappa z)(1 - \kappa z^{-1}) \end{vmatrix}.$$

$$d_i = e^{-\alpha_i T}.$$

Формальное решение системы (6.75) имеет в области Γ^+ единственный полюс $z = \kappa^{-1} = \frac{1}{2,038}$. Поэтому $H^1(z)$ необходимо искать в виде

$$H^1(z) = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}z + b_{11}}{z - \kappa^{-1}} & \frac{a_{12}z + b_{12}}{z - \kappa^{-1}} \\ \frac{a_{21}z + b_{21}}{z - \kappa^{-1}} & \frac{a_{22}z + b_{22}}{z - \kappa^{-1}} \end{vmatrix}. \quad (6.76)$$

Подставляя (6.76) в (6.75) и приравнявая нулю вычеты в полосах $z = 0$, $z = \kappa^{-1}$, $z = d_1$ и $z = d_2$, находим:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{\kappa d_1 (\kappa - d_1) (1 + c^2) + c^2 d_1 (1 - \kappa^2)}{\kappa (\kappa - d_1) (1 + c^2)} \\ b_{11} &= \frac{d_1^2 c (\kappa^2 - 1) + d_1 (d_1 - \kappa) (1 + c^2)}{\kappa (\kappa - d_1) (1 + c^2)}, \\ a_{21} &= \frac{c d_1 (\kappa d_1 - 1)}{\kappa (\kappa - d_1)}, \quad b_{21} = 0, \\ a_{12} &= \frac{c d_2 (\kappa^2 - 1)}{\kappa (1 + c^2) (\kappa - d_2)}, \quad b_{12} = \frac{c d_2^2 (1 - \kappa^2)}{\kappa (1 + c^2) (\kappa - d_2)}, \\ a_{22} &= \frac{d_2 (1 - \kappa d_2)}{\kappa (\kappa - d_2)}, \quad b_{22} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

Для вычисления минимального значения показателя качества воспользуемся первым из соотношений (6.23):

$$\begin{aligned} [J_e]_{\min} &= \frac{A_1^2 (1 - d_1^2)}{(1 + c^2) (\kappa - d_1)^2} [(\kappa - d_1)^2 (1 + c^2) + \\ &+ c^2 d_1^2 (\kappa^2 - 1)] + \frac{A_2^2 (1 - d_2^2)}{(1 + c^2) (\kappa - d_2)^2} [\kappa d_2 (\kappa^2 - 1) + \\ &+ c^2 d_2 (\kappa^2 - 1) - \kappa (\kappa d_2 - 1) (1 + c^2) (\kappa - d_2)]. \end{aligned} \quad (6.78)$$

При ограничениях вида (6.62)

$$H(z) = z^{-1} (1 - \kappa z^{-1}) H^1(z)_+$$

система (6.67) распадается на четыре независимых уравнения. При этом для недиагональных элементов $H^1(z)$ получим тривиальное решение

$$h_{12}^1(z) = h_{21}^1(z) = 0.$$

Диагональные члены имеют вид

$$h_{ii}^1(z) = \frac{d_i(1 - \kappa d_i)}{\kappa(\kappa - d_i)} \cdot \frac{z}{z - \kappa^{-1}}, \quad i = 1, 2. \quad (6.79)$$

Для $[J_e^1]_{\min}$ найдем:

$$[J_e^1]_{\min} = A_1^2 \left[1 - \frac{d_1^2(1 - \kappa d_1)^2}{(\kappa - d_1)^2} \right] + A_2^2 \left[1 - \frac{d_2^2(1 - \kappa d_2)^2}{(\kappa - d_2)^2} \right]. \quad (6.80)$$

Примем следующие числовые данные для характеристик входных сигналов: $A_1 = 0,5$, $\alpha_1 = 1$, $A_2 = 4$, $\alpha_2 = 3,5$, $T = 0,2$ сек. Тогда $d_1 = 0,819$, $d_2 = 0,497$.

Для случая матричного ограничения в соответствии с (6.78)

$$[J_e]_{\min} = 12,25.$$

Для скалярного ограничения в соответствии с (6.80)

$$[J_e^1]_{\min} = 16,2.$$

Проигрыш в качестве системы управления при отказе от учета различия ограничений по каналам составляет:

$$\frac{[J_e^1]_{\min} - [J_e]_{\min}}{[J_e]_{\min}} = 32,3\%.$$

§ 6.4. Синтез систем управления неустойчивым объектом

Перейдем к рассмотрению случая неустойчивого объекта. Если передаточная матрица $G(z)$ имеет как нули, так и полюсы в области Γ^- , то существенными являются оба условия (3.90) и (3.91) и способ получения уравнений оптимальной системы, использованный выше, неприемлем.

Покажем, что задача отыскания оптимальных характеристик системы управления в этом случае может быть сведена к отысканию условного минимума функционала (6.1).

С целью конкретизации дальнейшего изложения будем исходить из условий устойчивости в виде соотношений

$$H(z) = z^{-1}P^-(z)H^1(z)_+, \quad (6.81)$$

$$I - H(z) = q^-(z)H^2(z)_+. \quad (6.82)$$

Первоначально рассмотрим простейший случай, когда $G(z)$ имеет один полюс в области Γ^- , так что

$$q^-(z) = 1 - \gamma z^{-1}, \quad (6.83)$$

где γ — вещественное число, по абсолютной величине большее или равное единице, $|\gamma| \geq 1$.

Для выполнения (6.82) необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$H^2(z)_+ = \frac{1}{z - \gamma} [I - H(z)]$$

была аналитической в области Γ^- и на окружности Γ , т. е. чтобы все элементы $H^2(z)_+$ были в этой области аналитическими функциями z . Последнее условие эквивалентно выполнению n^2 соотношений

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z)}{z - \gamma} \frac{dz}{z} = 0, \quad (6.84)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, n,$$

где $h_{kl}(z)$ — элементы матрицы $H(z)$, а δ_{kl} — символ Кронекера.

Действительно, будем вычислять интеграл (6.84) как сумму вычетов в полюсах, расположенных вне единичного круга. В силу устойчивости системы управления подынтегральное выражение может иметь лишь один полюс вне единичного круга, $z = \gamma$. Поэтому интеграл (6.84) равен вычету при $z = \gamma$ в случае, если (6.82) не выполняется, и равен нулю, если (6.82) имеет место. Равенство нулю вычета в бесконечно удаленной точке гарантируется тем, что разность степеней знаменателя и числителя в подынтегральном выражении больше единицы.

Соотношения (6.84) не изменятся от замены z на z^{-1} , так что наряду с (6.84) можно записать:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z^{-1})}{z^{-1} - \gamma} \frac{dz}{z} = 0, \quad (6.85)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Для вывода уравнений оптимальной системы понадобится запись условия (6.82) в форме интеграла с симметричным подынтегральным выражением. Эту запись можно получить, если сложить (6.84) и (6.85):

$$J_{kl} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z)}{z - \gamma} + \frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z^{-1})}{z^{-1} - \gamma} \right] \frac{dz}{z} = 0,$$

$$k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (6.86)$$

Таким образом, для решения задачи синтеза оптимальной замкнутой системы нужно найти условный минимум функционала (6.1) при n^2 дополнительных условиях (6.86), т. е. решить задачу на условный экстремум функционала (6.1). Вводя матрицу множителей Лагранжа $\Lambda = \|\lambda_{kl}\|_1$ и записывая сумму $J_1 = \sum_{k,l} \lambda_{kl} J_{kl}$ в виде

$$J_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{k,l} \lambda_{kl} \left[\frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z)}{z - \gamma} + \frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z^{-1})}{z^{-1} - \gamma} \right] \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp} \left[\frac{\Lambda[I - H(z)]}{z - \gamma} + \frac{\Lambda[I - H(z^{-1})]}{z^{-1} - \gamma} \right] \frac{dz}{z} \quad (6.87)$$

приходим к задаче отыскания абсолютного минимума функционала

$$J = J_e + J_1 = \sum_{l=1}^n \rho_l M\{e_l^2(kT)\} + \sum_{k,l=1}^n \lambda_{kl} J_{kl} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \text{Sp}[\Phi(z)] \frac{dz}{z}, \quad (6.88)$$

где матрица $\Phi(z)$ в силу соотношений (6.1), (6.63) и (6.87) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_{ee}(z)R + \frac{\Lambda[I - H(z)]}{z - \gamma} + \frac{\Lambda[I - H(z^{-1})]}{z^{-1} - \gamma} = \\ &= \Phi_{dd}(z)R - zP^-(z^{-1})H^1(z^{-1})\Phi_{rd}(z)R - \\ &- z^{-1}\Phi_{dr}(z)[H^1(z)]' \cdot [P^-(z)]'R + P^-(z^{-1})H^1(z^{-1})\Phi_{rr}(z) \times \\ &\times [H^1(z)]'[P^-(z)]'R + \frac{\Lambda[I - z^{-1}P^-(z)H^1(z)]}{z - \gamma} + \\ &+ \frac{\Lambda[I - zP^-(z^{-1})H^1(z^{-1})]}{z^{-1} - \gamma}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Отметим, что след матрицы $\Phi(z)$ при произвольной матрице $H^1(z)$ удовлетворяет соотношению $\text{Sp}[\Phi(z)] = \text{Sp}[\Phi(z^{-1})]$. Поэтому для вывода уравнений оптимальной системы можно воспользоваться формальным приемом варьирования следа матрицы:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \text{Sp}[\Phi(z)]}{\partial H^1(z^{-1})} = Q(z)_{-}. \quad (6.90)$$

Из (6.90) при учете правил дифференцирования следа матрицы (5.16) следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} [P^-(z^{-1})]' R P^-(z) H^1(z) \Phi'_{rr}(z) - [P^-(z^{-1})]' R \Phi'_{rd}(z) - \\ - z \frac{P^-(z^{-1})' \Lambda}{1 - \gamma z} = Q(z)_{-}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Соотношения (6.91) представляют собой систему n^2 уравнений типа Винера — Хопфа относительно неизвестных элементов оптимальной матрицы $H^1(z)$. Дополнительными неизвестными в уравнениях являются n^2 множителей Лагранжа λ_{kl} , $k, l = 1, 2, \dots, n$, для определения которых имеют соотношения (6.85).

Обычный метод решения подобных задач заключается в следующем. Из уравнений (6.91) находится $H^1(z)$, как функция параметров Λ . Для определения последних решение $H^1(z)$ подставляется в дополнительные условия (6.85).

Такой путь решения предполагает определение характеристик оптимальной системы только после нахождения всех множителей Лагранжа и является достаточно трудоемким.

Покажем, что эту обычную последовательность решения можно видоизменить и предложить метод, обходящий трудности, связанные с определением множителей Лагранжа Λ . Для этого отметим, что по сравнению с задачей синтеза системы управления устойчивым объектом уравнения (6.91) содержат дополнительный полюс $z = \gamma^{-1}$, симметричный неустойчивому полюсу объекта относительно окружности Γ . Дополнительный полюс $z = \gamma^{-1}$ приводит к увеличению на единицу степени знаменателей и числителей элементов $H^1(z)$, т. е. к появлению n^2 дополнительных неопределенных коэффициентов (по одному в числителе каждого элемента матрицы $H^1(z)$). В то же время условия (6.85), которые могут быть записаны также в форме

$$\delta_{kl} - h_{kl}(\gamma) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, n, \quad (6.92)$$

дают n^2 дополнительных соотношений.

Учитывая эти обстоятельства, можно предложить следующую процедуру решения задачи. После того как элементы матрицы $H^1(z)$ записаны в виде рациональных функций с неопределенными коэффициентами числителя, используются n^2 соотношений (6.92). Они позволяют исключить из общего числа неизвестных коэффициентов n^2 величин. Уравнения для остальных коэффициентов получаются приравниванием нулю слагаемых правой части (6.91), соответствующих всем полюсам в Γ^+ , за исключением полюса $z = \gamma^{-1}$. В эти уравнения не входят множители Лагранжа Λ . Число полученных при этом уравнений будет достаточным для нахождения всех неизвестных коэффициентов. Оставшиеся n^2 уравнений, порождаемые полюсом $z = \gamma^{-1}$, могут рассматриваться как уравнения для определения множителей Лагранжа λ_{kl} . Эти последние не нужны, однако, для определения оптимальных характеристик системы управления.

При наличии нескольких неустойчивых полюсов передаточной матрицы объекта полином $q^-(z)$ имеет вид

$$q^-(z) = \prod_{i=1}^n (z - \gamma_i), \quad |\gamma_i| > 1, \quad (6.93)$$

причем величины γ_i могут быть либо вещественными, либо комплексными. В последнем случае для каждой γ_i имеется сопряженная $\bar{\gamma}_{i+1} = \bar{\gamma}_i$, так что каждой паре $\gamma_i, \bar{\gamma}_i$ соответствует квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами

$$z^2 - 2\mu_i z + \delta_i. \quad (6.94)$$

Взамен условий (6.86) в этом случае появляется an^2 условий

$$J_{kl}^i = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z)}{z - \gamma_i} + \frac{\delta_{kl} - h_{kl}(z^{-1})}{z^{-1} - \gamma_i} \right] \frac{dz}{z} = 0, \quad (6.95)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, a.$$

Введя a матриц множителей Лагранжа $\Lambda^i = \|\lambda_{kl}^i\|_1^n$, запишем по аналогии с (6.87) сумму $\sum_{i=1}^a \sum_{k,l=1}^n \lambda_{kl}^i J_{kl}^i$ в виде

$$J_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{i=1}^a \text{Sp} \left[\frac{(\Lambda^i)' [I - H(z)]}{z - \gamma_i} + \frac{(\Lambda^i)' [I - H(z^{-1})]}{z^{-1} - \gamma_i} \right] \frac{dz}{z} = 0 \quad (6.96)$$

и придем к задаче отыскания безусловного минимума функционала

$$J = J_e + J_1. \quad (6.97)$$

Варьируя (6.97) при условии (6.96), получим уравнения оптимальной системы

$$\frac{1}{z} [P^-(z^{-1})]' R P^-(z) H^1(z) \Phi'_{rr}(z) - [P^-(z^{-1})]' R \Phi'_{rd}(z) - z [P^-(z^{-1})]' \sum_{i=1}^a \frac{\Lambda^i}{1 - \gamma_i z} = Q(z). \quad (6.98)$$

Метод решения последней системы аналогичен рассмотренному выше. В качестве дополнительных полюсов в передаточной матрице появляются все полюсы $z_i = -\frac{1}{\gamma_i}$, обратные неустойчивым полюсам объекта. Следует обратить внимание на особенность, связанную с наличием комплексно-сопряженных полюсов $G(z)$. Пары γ_i и $\gamma_i = \gamma_{i+1}$ соответствуют также комплексно-сопряженным матрицы Λ^i и $\bar{\Lambda}^{i+1} = \bar{\Lambda}^i$. Чтобы не усложнять вычислений операциями с комплексными величинами, целесообразно в последней сумме (6.98) объединить комплексно-сопряженные слагаемые и записать:

$$\frac{\Lambda^i}{1 - \gamma_i z} + \frac{\bar{\Lambda}^i}{1 - \bar{\gamma}_i z} = \frac{\Lambda_1^i z + \Lambda_2^i}{1 - 2\mu_i z + \delta_i z^2}, \quad (6.99)$$

где Λ_1^i и Λ_2^i можно рассматривать как матрицы некоторых новых, вещественных множителей Лагранжа. При этом в силу (6.96) и (6.98) все элементы матрицы $H^1(z)$ должны в знаменателе содержать множители $1 - 2\mu_i z + \delta_i z^2$, а числители элементов матрицы $I - H(z)$ — множители $z^2 - 2\mu_i z + \delta_i$.

Особо необходимо рассмотреть случай объекта, находящегося на границе устойчивости, т. е. случай, когда матрица $G(z)$ имеет полюс на окружности Γ . Такая ситуация возникает, например, при наличии в заданной части системы интегрирующих звеньев.

Отметим следующий важный факт, к подробному обсуждению которого мы еще вернемся в следующем параграфе. Наличие полюсов $G(z)$ на границе области устойчивости не оказывает влияния на достижимое качество системы управления, так что при решении задачи синтеза эти полюсы (имеющие любую кратность) учитывать не следует. Динамические характеристики оптимальной системы, полученные как решения уравнений (6.98), не зависят от полюсов заданной части $G(z)$, расположенных на контуре Γ .

Величина показателя качества при оптимальных характеристиках системы принимает минимальное значение и может быть вычислена по формуле (6.1), если подста-

вить в нее решение соответствующих уравнений (6.91), (6.98).

Из общих соображений ясно, что любое из дополнительных условий, в том числе и условия, связанные с неустойчивостью объекта, ухудшают достижимое качество,

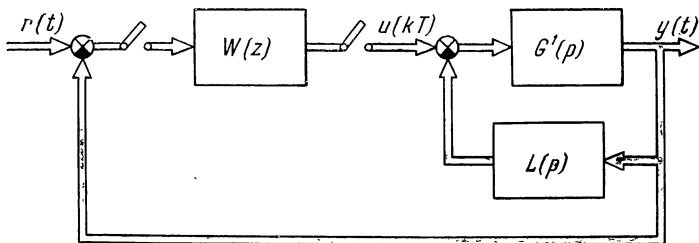


Рис. 6.2.

системы, т. е. увеличивают минимальное значение функционала (6.1). Поэтому если имеется возможность с помощью корректирующих устройств (непрерывных или дискретных) стабилизировать заданную часть, охватывая, например, объект дополнительной обратной связью (рис. 6.2), то свойство неустойчивости объекта можно рассматривать как несущественное и не учитывать его при решении задачи синтеза.

Пример 6.4. Пусть одномерный неустойчивый объект управления имеет передаточную функцию $G(p) = \frac{k_1}{(p-a)^2 + \omega^2}$ где $a \geq 0$. Тогда дискретная передаточная функция ПНЧ

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} = \frac{\kappa_0 z + \kappa_1}{z^2 - 2\mu z + \delta^2}, \quad (6.100)$$

где

$$\mu = e^{aT} \cos \omega_0 T, \quad \delta = e^{aT},$$

$$\kappa_0 = \frac{k_1}{a^2 + \omega_0^2} \left[1 - \mu + \frac{a}{\omega_0} \sqrt{\delta^2 - \mu^2} \right],$$

$$\kappa_1 = \frac{k_1}{a^2 + \omega_0^2} \left[\delta^2 - \mu - \frac{a}{\omega_0} \sqrt{\delta^2 - \mu^2} \right].$$

Ноль числителя $G(z)$ расположен в области Γ^+ , а пара полюсов $z_{1,2} = \delta (\cos \omega_0 T \pm j \sin \omega_0 T)$ — вне области Γ^+ .

Пусть помехи отсутствуют, а корреляционная функция полезного входного сигнала равна

$$\Phi_{rr}(z) = \Phi_{ss}(z) = \frac{A^2(1-d^2)}{(1-dz)(1-dz^{-1})}, \quad d < 1.$$

Условия устойчивости и реализуемости системы (6.81) и (6.82) имеют вид

$$h(z) = z^{-1}h_1(z)_+, \quad (6.101)$$

$$1 - h(z) = (z^2 - 2\mu z + \delta^2)h_2(z)_+,$$

где $h(z)$ — передаточная функция замкнутой системы. Запишем уравнение оптимальной системы (6.98) при учете (6.99):

$$\frac{1}{z} \Phi_{ss}(z) h_1(z) - \Phi_{ss}(z) - \frac{(\lambda_1 z + \lambda_2)z}{1 - 2\mu z + \delta^2 z^2} = q(z)_-. \quad (6.102)$$

Полюсами формального решения (6.102) являются нули уравнения

$$\delta^2 z^2 - 2\mu z + 1 = 0,$$

т. е.

$$z_{1,2} = \delta^{-1}(\cos \omega_0 T \mp j \sin \omega_0 T).$$

Поэтому

$$h_1(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 - 2\mu_1 z + \delta_1^2}, \quad (6.103)$$

где

$$\delta_1 = e^{-aT} = \delta^{-1}, \quad \mu_1 = e^{-aT} \cos \omega_0 T.$$

Для определения трех неизвестных коэффициентов воспользуемся методом, изложенным в настоящем параграфе. Приравнявая нулю вычет левой части (6.102) в полюсе $z = d$, найдем:

$$h_1(d) = d. \quad (6.104)$$

Условия (6.104) дают два других уравнения. Решая

(6.101) и (6.104) при учете (6.103), найдем:

$$1 - h(z) = \frac{(z-d)(z^2 - 2\mu z + \delta^2)}{z(z^2 - 2\mu_1 z + \delta_1^2)}, \quad (6.105)$$

откуда

$$h(z) = \frac{(d + 2\mu - 2\mu_1)z^2 + (\delta_1^2 - \delta^2 - 2\mu d)z + \delta^2 d}{z(z^2 - 2\mu_1 z + \delta_1^2)}$$

Спектральная плотность ошибки в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{ee}(z) &= \Phi_{ss}(z) - h(z^{-1})\Phi_{ss}(z) - h(z)\Phi_{ss}(z) + \\ &+ h(z)h(z^{-1})\Phi_{ss}(z) = \Phi_{ss}(z) [1 - h(z^{-1})] \cdot [1 - h(z)]. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Подставляя (6.105) в (6.106) и вычисляя интеграл

$$[D_e]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{ee}(z) \frac{dz}{z},$$

найдем:

$$[D_e]_{\min} = A^2(1 - d^2) \frac{\delta^2}{\delta_1^2},$$

так что

$$\frac{[D_e]_{\min}}{A^2} = e^{4aT}(1 - d^2). \quad (6.107)$$

Из соотношения (6.107) следует, что величина минимальной дисперсии ошибки увеличивается с ростом степени неустойчивости объекта a и времени дискретности T . При $a = 0$ (объект на границе устойчивости) величина $[D_e]_{\min}$ соответствует решению обычной задачи экстраполяции сигнала на такт и динамические характеристики объекта не влияют на достижимое качество системы. Кривые зависимости $\frac{[D_e]_{\min}}{A^2}$ от величины a при $T = 1 \text{ сек}$

и различных значениях d приведены на графике рис. 6.3.

Пример 6.5. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной следящей системы управления двумерным неустойчивым объектом, характеристики которого соответствуют

примеру 2.5. Матрица $G(z)$ имеет вне единичного круга полюс $z = \gamma = 1,822$.

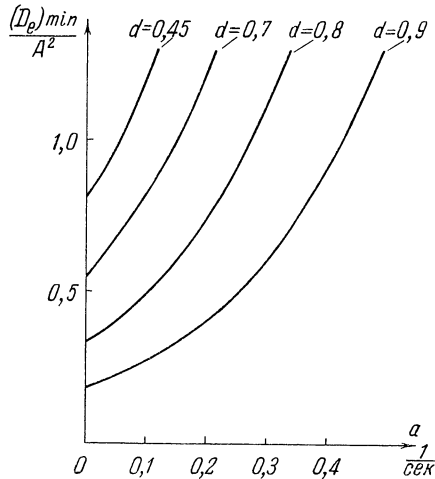


Рис. 6.3.

Полезные сигналы и помехи не коррелированы между собой и имеют спектральные плотности:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{s_i s_i}(z) &= \frac{A_i^2 (1 - d_i^2) z}{(z - d_i)(1 - d_i z)}, & i = 1, 2, \\ \Phi_{s_i s_j}(z) &= 0, & i \neq j. \\ \Phi_{n_i n_i}(z) &= B_i^2, & i = 1, 2, \\ \Phi_{n_i n_j}(z) &= 0, & i \neq j, \end{aligned} \right\} (6.108)$$

Для входных сигналов системы получим:

$$\Phi_{r_i r_j}(z) = \begin{cases} \Phi_{s_i s_i}(z) + \Phi_{n_i n_i}(z) = \\ = \frac{C_i^2 (1 - \mu_i z^{-1})(1 - \mu_i z)}{(1 - d_i z^{-1})(1 - d_i z)}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Условия (6.81), (6.82) для рассматриваемого случая принимают вид

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-1}H^1(z)_+, \\ I - H(z) &= (1 - \gamma z^{-1})H^2(z)_+. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Показателем качества является сумма дисперсий ошибок каналов.

Запишем уравнения оптимальной системы (6.91) в скалярной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z}[\Phi_{s_1 s_1}(z) + \Phi_{n_1 n_1}(z)]h_{11}^1(z) + \Phi_{s_1 s_1}(z) - \frac{\lambda_{11}z}{1 - \gamma z} &= q_{11}(z)_-, \\ \frac{1}{z}[\Phi_{s_1 s_1}(z) + \Phi_{n_1 n_1}(z)]h_{21}^1(z) - \frac{\lambda_{21}z}{1 - \gamma z} &= q_{21}(z)_-, \\ \frac{1}{z}[\Phi_{s_2 s_2}(z) + \Phi_{n_2 n_2}(z)]h_{12}^1(z) - \frac{z\lambda_{12}}{1 - \gamma z} &= q_{12}(z)_-, \\ \frac{1}{z}[\Phi_{s_2 s_2}(z) + \Phi_{n_2 n_2}(z)]h_{22}^1(z) - \Phi_{s_2 s_2}(z) - \frac{\lambda_{22}z}{1 - \gamma z} &= q_{22}(z)_-. \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Нетрудно убедиться, что второе и третье уравнения системы (6.110) имеют тривиальное решение

$$h_{12}^1 = h_{21}^1 = 0, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0, \quad (6.111)$$

а первое и четвертое уравнения отличаются лишь индексами.

Найдем решение первого уравнения. Его формальное решение имеет в области Γ^+ два полюса $z = \gamma^{-1}$ и $z = \mu_1$. Поэтому для $h_{11}^1(z)$ имеем:

$$h_{11}^1(z) = \frac{a_0^1 z^2 + a_1^1 z + a_2^1}{(z - \mu_1)(z - \gamma^{-1})}. \quad (6.112)$$

Уравнения для неопределенных коэффициентов принимают вид:

1) для полюса $z = 0$

$$a_2^1 = 0, \quad (6.113)$$

2) для полюса $z = d_1$

$$h_{11}^1(d_1) = d_1. \quad (6.114)$$

Третье уравнение получим, исходя из второго условия (6.109): $1 - \gamma^{-1}h_{11}^1(\gamma) = 0$, т. е.

$$h_{11}^1(\gamma) = \gamma. \quad (6.115)$$

Из (6.113) — (6.115) найдем:

$$1 - h_{11}(z) = \frac{(z - d_1)(z - \gamma)}{(z - \mu_1)(z - \gamma^{-1})}, \quad (6.116)$$

где $h_{11}(z) = z^{-1}h_{11}^1(z)$ — элемент передаточной матрицы $H(z)$. Решая аналогично последнее уравнение системы (6.110), получим:

$$1 - h_{22}(z) = \frac{(z - d_2)(z - \gamma)}{(z - \mu_2)(z - \gamma^{-1})}. \quad (6.117)$$

Поэтому оптимальная передаточная матрица является диагональной (оптимальная система автономна):

$$H(z) = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma + d_1 - \mu_1 - \gamma^{-1})z}{(z - \mu_1)(z - \gamma^{-1})} + \frac{\mu_1\gamma^{-1} - \gamma d_1}{(z - \mu_1)(z - \gamma^{-1})} & 0 \\ 0 & \frac{(\gamma + d_2 - \mu_2 - \gamma^{-1})z}{(z - \mu_2)(z - \gamma^{-1})} + \frac{\mu_2\gamma^{-1} - \gamma d_2}{(z - \mu_2)(z - \gamma^{-1})} \end{pmatrix}. \quad (6.118)$$

Дисперсии ошибок по каждому из каналов вычисляются независимо. Для первого канала

$$[D_{e_1}]_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{e_1 e_1}(z) \frac{dz}{z}, \quad (6.119)$$

где

$$\Phi_{e_1 e_1}(z) = [1 - h_{11}(z)] \cdot [1 - h_{11}(z^{-1})] \Phi_{r_1 r_1}(z) + [h_{11}(z) + h_{11}(z^{-1}) - 1] \Phi_{n_1 n_1}(z). \quad (6.120)$$

Вычисляя интегралы от каждого слагаемого (6.120), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [1 - h_{11}(z)] \cdot [1 - h_{11}(z^{-1})] \Phi_{r_1 r_1}(z) \frac{dz}{z} &= C_1^2 \gamma^2, \\ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{n_1 n_1}(z) \frac{dz}{z} &= B_1^2, \\ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [h_{11}(z) + h_{11}(z^{-1})] \Phi_{n_1 n_1}(z) \frac{dz}{z} &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $C_1^2 = B_1^2 \mu_1^{-1} d_1$, получаем:

$$[D_{e_1}]_{\min} = B_1^2 [\gamma^2 \mu_1^{-1} d_1 - 1]. \quad (6.121)$$

Аналогично

$$[D_{e_2}]_{\min} = B_2^2 [\gamma^2 \mu_2^{-1} d_2 - 1]. \quad (6.122)$$

Величина минимального показателя качества поэтому равна

$$\begin{aligned} [J_e]_{\min} &= [D_{e_1}]_{\min} + [D_{e_2}]_{\min} = \\ &= B_1^2 [\gamma^2 \mu_1^{-1} d_1 - 1] + B_2^2 [\gamma^2 \mu_2^{-1} d_2 - 1]. \end{aligned} \quad (6.123)$$

При $\gamma = 1$ соотношение (6.123) дает величину показателя качества двухканальной системы фильтрации с экстраполяцией на такт:

$$[J_e^0]_{\min} = B_1^2 (\mu_1^{-1} d_1 - 1) + B_2^2 (\mu_2^{-1} d_2 - 1). \quad (6.124)$$

Вычитая из (6.123) соотношение (6.124), определим ту потерю качества оптимальной системы, которая связана с неустойчивостью объекта управления:

$$[J_e]_{\min} - [J_e^0]_{\min} = (B_1^2 \mu_1^{-1} d_1 + B_2^2 \mu_2^{-1} d_2) (\gamma - 1). \quad (6.125)$$

На рис. 6.4 изображен график функции (6.125) в зависимости от величины γ при следующих числовых значениях остальных параметров:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= 1, & B_1^2 &= 0,1, & d_1 &= 0,8187, \\ A_2^2 &= 0,5, & B_2^2 &= 0,02, & d_2 &= 0,4493. \end{aligned}$$

По смыслу постановки задачи ясно, что горизонтальный

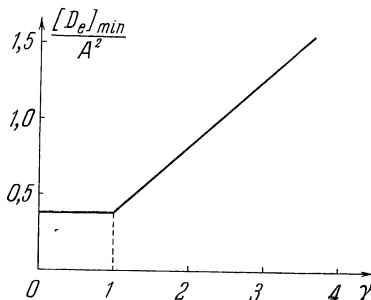


Рис. 6.4.

участок кривой соответствует случаю устойчивого объекта $G(z)$, не накладывающего ограничений на достижимое качество.

§ 6.5. Задача синтеза при дополнительных требованиях к статической точности

Задачи синтеза оптимальных систем управления и оптимальных фильтров, несмотря на единообразие подхода и общность математического аппарата, имеют ряд существенных различий. Система управления, помимо осуществления оптимального выделения полезного сигнала из смеси с помехой, должна удовлетворять, как правило, ряду дополнительных требований.

Предыдущие параграфы этой главы были посвящены некоторым сторонам этой проблемы — учету отрицательных динамических свойств объекта и учету помех, приложенных внутри контура.

Другое существенное различие фильтра и системы управления заключается в качественно ином подходе к уче-

ту известных детерминированных функций, содержащихся во внешних сигналах. Эти детерминированные составляющие могут рассматриваться как математические ожидания сигналов, действующих на систему. Входной сигнал представляется при этом в виде суммы известной функции времени и центрированного стационарного случайного процесса. Очевидно, что учет известного ненулевого математического ожидания не приводит к изменениям свойств оптимального фильтра. Это связано с чисто информационным смыслом задачи фильтрации: детерминированные функции не несут дополнительной информации и поэтому не оказывают влияния на характеристики фильтра.

Система управления в отличие от фильтра, помимо функций преобразования сигналов, выполняет также роль исполнительного устройства. Если на вход системы управления поступает подлежащая воспроизведению известная функция времени, то она должна быть получена на входе заданной части в виде изменения конкретной физической величины. Для схемы рис. 6.1 это изменение выходной координаты может быть получено лишь подачей на объект специально вычисленного управляющего воздействия.

При проектировании системы, как правило, не требуют полной компенсации детерминированных воздействий, а ограничиваются лишь требованиями заданного поведения системы в установившемся режиме.

Помимо детерминированных функций времени в сигнале или помехе могут присутствовать функции заданного вида с неизвестными или случайными коэффициентами, например синусоиды заданной частоты и неизвестной амплитуды и фазы, полиномы от t с неизвестными коэффициентами и т. д. В этом случае также желательно учесть их влияние на систему (хотя бы в смысле ее установившейся реакции).

Вопросы установившейся точности систем управления при детерминированных воздействиях рассматривались в § 4.4. Было показано, что ошибка системы будет равна нулю в установившемся режиме, если ее передаточная матрица удовлетворяет определенным условиям, так называемым условиям несмещенности.

В случае, если желаемая система имеет единичную передаточную матрицу, $D(p) = I$, условия несмещенного

воспроизведения сигнала в установившемся режиме имеют вид (4.95), а условия несмещенного подавления сигнала — вид (4.96).

В § 4.4 указывалось также на совпадение формы условий несмещенности (4.95) и (4.96) с ограничениями, накладываемыми на вид передаточной матрицы системы при наличии неустойчивого и неминимальнофазового объекта (3.77) и (3.78). Поэтому постановка и решение задачи синтеза системы управления при условиях несмещенности принципиально не отличаются от рассмотренных в предыдущем параграфе. Проблема синтеза сводится к вариационной задаче отыскания условного минимума функционала качества.

Пусть полином $q^-(z)$ в (4.95) имеет вид

$$q^-(z) = \prod_{i=1}^{\alpha} (z - \gamma_i), \quad (6.126)$$

где $|\gamma_i| > 1$ при $i = 1, 2, \dots, \alpha$. Тогда уравнения оптимальной системы при требовании выполнения (4.95) и (4.96) имеют вид (6.98), где в соответствии с характером условия (4.96) надо заменить матрицу $P^-(z)$ скалярным множителем $p^-(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} p^-(z^{-1}) p^-(z) R H^1(z) \Phi'_{rr}(z) - p^-(z^{-1}) R \Phi'_{rd}(z) - \\ - p^-(z^{-1}) \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\Lambda^i z}{1 - \gamma_i z} = Q(z). \end{aligned} \quad (6.127)$$

Метод решения уравнений (6.127) полностью совпадает с изложенным в предыдущем параграфе.

Особо остановимся на случае, когда в полезном сигнале содержится составляющая в виде полинома $(l-1)$ -й степени t . Тогда $q^-(z)$ принимает вид

$$q^-(z) = (z - 1)^l$$

и (4.95) сводится к требованию астатизма l -го порядка:

$$W_e(z) = I - H(z) = (z - 1)^l H^2(z)_+. \quad (6.128)$$

Последнее условие может рассматриваться как предел соотношения

$$W_e(z) = I - H(z) = \prod_{i=1}^l (z - \gamma_i) H^2(z)_+, \quad (6.129)$$

где все γ_i стремятся к единице:

$$\gamma_i = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} (1 + \varepsilon_i), \quad \varepsilon_i > 0.$$

Из предыдущего параграфа следует, что при выполнении условия (6.129) оптимальная передаточная матрица $H(z)$, а следовательно, и $I - H(z)$, имеет полюсами все $z = \gamma_i^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). В то же время $I - H(z)$ должно содержать множителями все $z - \gamma_i$. Эти условия не могут быть выполнены одновременно при $\gamma_i \rightarrow 1$.

Если все же провести формальное решение задачи при $\gamma_i > 1$ и устремить в окончательном результате γ_i к единице, то все множители $z - 1$ в числителе и знаменателе матрицы $I - H(z)$ сократятся. При этом окажется также, что все матрицы множителей Лагранжа Λ^i при $\gamma_i \rightarrow 1$ обращаются в нулевые, $\Lambda^i \rightarrow 0_{n \times n}$, а оптимальное решение переходит в решение задачи без дополнительного условия астатизма (6.128).

Все сказанное означает, что условие астатизма любого порядка не является существенным для оптимальной системы и не накладывает ограничения на достижимое качество. Условие (6.128) необходимо учитывать лишь при реализации системы управления.

Пусть $H^0(z)$ — передаточная матрица, полученная из решения вариационной задачи без условия астатизма. Тогда, выбирая $H(z)$ в соответствии с равенством

$$I - H(z) = \frac{(z - 1)^l}{\prod_{i=1}^l (z - \eta_i)} [I - H^0(z)], \quad (6.130)$$

$$0 < 1 - \eta_i < \varepsilon_i,$$

где ε_i — малые положительные величины, получим астатическую систему, обладающую астатизмом l -го порядка.

Если матрицу $H(z)$, определенную в соответствии с (6.130), подставить в выражение для показателя качества системы (6.1), то можно убедиться в том, что отличие показателя оптимальности J_e от его минимального значения имеет величину порядка ϵ_i . Проведенное рассмотрение без труда распространяется на случай комплексно-сопряженных величин γ_i , расположенных на единичной окружности Γ .

Пример 6.6. Одномерный объект имеет передаточную функцию

$$G(p) = \frac{k}{p(p+a)}, \quad a > 0. \quad (6.131)$$

Дискретная передаточная функция ПНЧ

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\} = \\ &= \frac{\kappa_0 z + \kappa_1}{(z-1)(z-\nu)} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \end{aligned} \quad (6.132)$$

где

$$\nu = e^{-aT} < 1, \quad \kappa_0 = \frac{aT - 1 + \nu}{a^2}, \quad \kappa_1 = \frac{1 - \nu - \nu aT}{a^2},$$

причем

$$\left| \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \right| < 1.$$

Спектральные плотности входных сигналов имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{ss}(z) &= \frac{A^2(1-d^2)}{(1-dz)(1-dz^{-1})}, \quad \Phi_{nn}(z) = B^2, \\ \Phi_{rr}(z) &= \Phi_{ss}(z) + \Phi_{nn}(z) = \frac{C^2(1-\mu z^{-1})(1-\mu z)}{(1-dz^{-1})(1-dz)}, \end{aligned} \quad (6.133)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha_1 T &= \operatorname{ch} \alpha T + \frac{A^2}{B^2} \operatorname{sh} \alpha T, \quad \mu = e^{\alpha_1 T}, \\ C^2 &= B^2 \mu^{-1} d. \end{aligned}$$

Ставится задача синтеза позиционной следящей системы рис. 6.1. В соответствии с изложенным в § 6.4 и в настоя-

щем параграфе единственным существенным ограничением, наложенным на передаточную функцию системы $h(z)$, является требование физической реализуемости корректора $W(z)$:

$$h(z) = z^{-1}h_1(z)_+. \quad (6.134)$$

Оптимальные характеристики системы определяются как решение уравнения

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) h_1^0(z) - \Phi_{ss}(z) = q(z)_-. \quad (6.135)$$

Это решение имеет вид

$$h^0(z) = \frac{d - \mu}{z - \mu}. \quad (6.136)$$

Оптимальная система является статической, так как

$$1 - h^0(1) = \frac{1 - d}{1 - \mu} \neq 0. \quad (6.137)$$

Для получения астатической системы воспользуемся формулой (6.130), т. е. примем

$$1 - h(z) = \frac{z - 1}{z - \eta} [1 - h^0(z)] = \frac{(z - 1)(z - d)}{(z - \eta)(z - \mu)}, \quad (6.138)$$

где $0 < 1 - \eta < \varepsilon$.

Найдем передаточную функцию корректирующего устройства $W(z)$ по $h(z)$, удовлетворяющей (6.138):

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{h(z)}{1 - h(z)} = \\ &= \frac{(z - \nu)[(1 + d - \mu - \eta)z + \mu\eta - d]}{k(\kappa_0 z + \kappa_1)(z - d)} = \frac{S(z)}{R(z)}. \end{aligned} \quad (6.139)$$

В соответствии с выражением (3.43) характеристический полином замкнутой системы управлений имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= Q(z)R(z) + P(z)S(z) = k(z - \nu)(\kappa_0 z + \kappa_1) \times \\ &\times [(z - 1)(z - d) + (1 + d - \mu - \gamma)z + \mu\gamma - d] = \\ &= k(z - \nu)(\kappa_0 z + \kappa_1)(z - \mu)(z - \eta). \end{aligned} \quad (6.140)$$

Первый сомножитель в (6.140) $(z - \nu)$ соответствует неуправляемой части, а второй, $\kappa_0 z + \kappa_1$, — ненаблюдаемой части. Два последних сомножителя $(z - \mu)$ и $(z - \eta)$ соответствуют полюсам $h(z)$, т. е. невырожденной части системы. Для получения оптимальной системы в соответствии с (6.138) необходимо положить $\eta = 1$. При этом в характеристическом уравнении появляется нуль на единичной окружности. Таким образом, оптимальная система находится на границе устойчивости и является негрубой — незначительные изменения параметров корректора могут привести к потере устойчивости. При $\eta < 1$ ($\varepsilon > 0$) система является устойчивой и грубой. Малое изменение параметров не выводит систему из области устойчивости.

Определим дисперсию ошибки в случае, если система не является оптимальной и удовлетворяет условию (6.138). Спектральная плотность ошибки равна

$$\Phi_{ee}(z) = [1 - h(z^{-1})] \cdot [1 - h(z)] \Phi_{rr}(z) + \\ + [h(z) + h(z^{-1}) - 1] \Phi_{nn}(z).$$

Вычислив интеграл

$$D_e = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{ee}(z) \frac{dz}{z},$$

получим:

$$D_e = \frac{C^2(1 + \gamma^2)}{\gamma(1 + \gamma)} - B^2 = \frac{C^2(2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2 - 3\varepsilon + \varepsilon^2} - B^2.$$

Увеличение дисперсии ошибки по сравнению с ее минимальным значением

$$\delta D_e = D_e - [D_e]_{\min} = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon)} C^2 \quad (6.141)$$

при малых ε определяется величиной

$$\delta D_e \approx \frac{1}{2} \varepsilon C^2. \quad (6.142)$$

§ 6.6. Автономность и инвариантность в задаче синтеза многомерных систем

В книге, посвященной теории многомерных систем автоматического управления, нельзя оставить без внимания вопросы, связанные с автономностью и инвариантностью. Идея проектирования любой многомерной системы как совокупности независимых одномерных, высказанная впервые И. Н. Вознесенским, казалась настолько привлекательной, что почти все дальнейшее развитие теории многомерных систем проходило под знаком исследования различных аспектов условий автономности. Это в значительной мере было обусловлено тем, что на автономные системы без особого труда переносятся все методы проектирования, разработанные для простого одномерного случая.

К настоящему времени имеется обширная литература, посвященная условиям автономности различного рода [6, 7, 21, 22, 27, 43, 49, 58, 59, 60 и др.]. Однако несмотря на обилие работ, детально рассмотрению были подвергнуты лишь вопросы реализации свойства автономности при различных конкретных структурах систем управления. Вопросы целесообразности проектирования автономных систем большей частью вообще не рассматривались.

Очевидно, что автономность системы управления не может рассматриваться как самоцель. Развитие средств моделирования и цифровой техники делает также шатким обоснование такого подхода соображением простоты расчета автономных схем. При проектировании систем управления необходимо иметь в виду главную цель — обеспечение высокой точности. С этих позиций проблема выявления класса систем, в которых целесообразно выполнять условия автономности, становится корректно поставленной математической задачей.

Сформулируем условия автономности. Многомерную систему автоматического управления будем называть автономной, если вынужденная составляющая k -й компоненты $y_k(jT)$ вектора выходного сигнала $y(jT)$ зависит только от одного k -го входного воздействия $r_k(jT)$ и не зависит от остальных составляющих вектора $r(jT)$. Это свойство должно быть выполнено для всех k . Для автономности системы необходимо и достаточно, чтобы ее передаточная

матрица была диагональной:

$$H(z) = \text{diag}\{h_{11}(z), h_{22}(z), \dots, h_{nn}(z)\}. \quad (6.143)$$

Подчеркнем, что в определении автономности речь идет только о вынужденной составляющей движения системы. Наличие ненулевых начальных условий хотя бы в одном канале может приводить к появлению свободных движений по всем координатам $y_k(jT)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Пусть система разностных уравнений, связывающая входные и выходные координаты, имеет вид

$$B(\zeta)y(jT) = A(\zeta)r(jT), \quad (6.144)$$

где $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — полиномиальные матрицы. Для выполнения условий автономности не обязательно распадение системы (6.144) на n независимых уравнений вида

$$b_{kk}(\zeta)y_k(jT) = a_{kk}(\zeta)r_k(jT), \quad (6.145) \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Действительно, матрица

$$H(z) = B^{-1}(z)A(z) \quad (6.146)$$

может быть диагональной и при недиагональных матрицах $A(z)$ и $B(z)$. В соответствии с методами, изложенными в § 2.1, общее решение системы (6.144) имеет вид

$$y(jT) = Z^{-1} \{H(z)r(z)\} + \sum_{l=1}^N c^l \mu_l^j, \quad (6.147)$$

где μ_l — корни характеристического уравнения системы

$$|B(z)| = 0, \quad (6.148)$$

а c^l — векторы произвольных постоянных. При нулевых начальных условиях все векторы c^l обращаются в нуль и выходные координаты системы меняются независимо:

$$y_k(jT) = Z^{-1} \{h_{kk}(z)r_k(z)\}, \quad (6.149) \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Ненулевые начальные условия, как нетрудно видеть, в общем случае приводят к появлению движений по всем выходным координатам.

Приведенное определение автономности как диагональности передаточной матрицы системы, по-видимому, впервые было дано А. Боксенбмом и Р. Худом [58]. Первоначальное понятие автономности, введенное И. Н. Вознесенским, является частным случаем рассмотренного выше и требует диагональности обеих матриц в (6.144):

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \text{diag}\{a_{11}(\xi), \dots, a_{nn}(\xi)\}, \\ B(\xi) &= \text{diag}\{b_{11}(\xi), \dots, b_{nn}(\xi)\}. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Очевидно, что при выполнении условий автономности по Вознесенскому независимыми являются как вынужденные, так и свободные составляющие вектора $y(jT)$. В дальнейшем нам потребуется лишь более общее определение (6.143).

В случае недиагональной передаточной матрицы заданной части $G(z)$ выполнение условий автономности связано с компенсацией динамических свойств объекта, что влечет за собой появление в системе неуправляемых и ненаблюдаемых частей. Передаточная матрица $H(z)$ при этом не является исчерпывающей характеристикой системы, а ее полюсы не определяют всех корней характеристического уравнения. Поэтому при проектировании следует иметь в виду те ограничения, которые необходимо выполнить для обеспечения устойчивости системы в целом (см. § 3.4).

Для схемы рис. 6.1, где корректирующее устройство включено в канал ошибок, эти ограничения могут быть приняты в виде (3.77), (3.78), (3.90), (3.91). Автономность системы связана, однако, с диагональным видом матрицы $H(z)$. Поэтому условия устойчивости следует выбрать в диагональной форме, например в виде ограничений (3.77) и (3.78), одинаковых по всем каналам:

$$H(z) = z^{-1}p^-(z)H^1(z)_+, \quad (6.151)$$

$$I - H(z) = q^-(z)H^2(z)_+. \quad (6.152)$$

Очевидно, что для автономной системы матрицы $H^1(z)_+$ и $H^2(z)_+$ должны быть диагональными. В соответствии с этим последние уравнения записываются в виде $2n$

скалярных соотношений

$$h_{kk}(z) = z^{-1}p^-(z)h_{kk}^1(z)_+, \quad (6.153)$$

$$1 - h_{kk}(z) = q^-(z)h_{kk}^2(z)_+, \quad (6.154)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

где $h_{kk}^1(z)_+$ и $h_{kk}^2(z)_+$ — произвольные рациональные функции, удовлетворяющие условиям устойчивости и физической реализуемости и связанные в силу (6.153) — (6.154) соотношением

$$z^{-1}p^-(z)h_{kk}^1(z)_+ + q^-(z)h_{kk}^2(z)_+ = 1, \quad (6.155)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Пример синтеза автономной системы управления минимальнофазовым и устойчивым объектом был рассмотрен в § 3.4 (см. пример 3.2). Этот пример как раз и иллюстрирует тот факт, что, несмотря на диагональность матрицы $H(z)$, распадаения системы разностных уравнений на ряд независимых вида (6.145) не происходит.

Перейдем к рассмотрению связи условий автономности с задачей синтеза оптимальных систем. С позиций теории оптимальных систем можно установить, в каких случаях требование автономности оправдано, т. е. не противоречит требованиям, предъявляемым к точности системы. Этими случаями как раз и являются те, в которых оптимальная система имеет диагональную структуру или структуру, близкую к диагональной. Поэтому методы синтеза, развитые в предыдущих параграфах настоящей главы, вообще говоря, позволяют ответить на поставленный вопрос. Целесообразно, однако, остановиться на тех частных случаях, когда по виду уравнений оптимальной системы сразу же можно определить, что оптимальная система автономна.

Пусть заданная часть системы является минимальнофазовой. Тогда уравнения оптимальной системы имеют вид (6.14). Нетрудно видеть, что системе (6.14) удовлетворяет диагональная матрица $H^1(z)$ в том и только том случае, когда матрицы $\Phi_{rr}(z) + G(z^{-1})\Phi_{n^2n^2}(z)G'(z) +$

$+ \Phi_{n^3 n^3}(z)$ и $\Phi_{rd}(z) + G(z^{-1})\Phi_{n^2 n^2}(z)G'(z) + \Phi_{n^3 n^3}(z)$ диагональны. Действительно, только при этих условиях система уравнений (6.14) распадается на n^2 независимых уравнений, причем для недиагональных членов $H^1(z)$ получается тривиальное решение $h_{ij}(z) = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$).

Будем считать желаемый оператор $D(p)$ диагональным. Если действием помехи внутри контура $n^2(kT)$ и $n^3(t)$ можно пренебречь, то диагональность указанных матриц обеспечивается при некоррелированности входных сигналов различных каналов:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r_i r_j}(z) &= 0, & i \neq j, \\ \Phi_{r_i d_j}(z) &= 0, & i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (6.156)$$

Это означает, что только в случае, когда данные, поступающие по каждому из входов, не несут никакой информации относительно других входных сигналов, оптимальная система будет автономной. Наличие взаимной корреляции либо по полезным сигналам, либо по помехам приводит к неавтономности оптимальной системы управления.

Условия автономности не нарушаются также, если все составляющие помехи $n^3(t)$, приведенной к выходу непрерывной части, можно считать независимыми. Учет же помехи $n^2(kT)$ даже в случае диагональности матрицы $\Phi_{n^2 n^2}(z)$ приводит к тому, что оптимальная система становится взаимосвязанной.

Перейдем далее к рассмотрению системы управления неминимальнофазовым объектом. Уравнения оптимальной системы при этом имеют вид (6.66). Нетрудно видеть, что даже в случае диагональности матриц $\Phi_{rr}(z)$ и $\Phi_{rd}(z)$ оптимальная система не автономна. Это связано с тем, что ограничения (6.61) в общем случае наложены на систему в целом, а не на отдельные каналы, и матрица $P^-(z)$ не диагональна. Однако при некоррелированных сигналах возможно поставить вариационную задачу отыскания минимума на классе автономных систем. Для этого необходимо заменить условия (6.61) условиями (6.62). Для характеристик оптимальной системы при этом получим вместо

(6.66) уравнения (6.67). Решение системы (6.66) при условиях (6.156) дается диагональной матрицей:

$$H^1(z) = \text{diag}\{h_{11}^1(z), \dots, h_{nn}^1(z)\}. \quad (6.157)$$

Отметим, что замена соотношений (6.64) условиями (6.62), одинаковыми по всем каналам, представляет собой ужесточение ограничений, накладываемых на достижимое качество системы. Поэтому показатель оптимальности в этом случае больше минимального, получаемого при условиях (6.62). Последнее иллюстрируется примером 6.3 для двумерной системы. При переходе к автономной оптимальной системе увеличение показателя качества составляет 32,3%.

Перейдем к рассмотрению связи теории оптимальных систем с вопросами инвариантности. Инвариантностью в многомерной системе будем называть свойство независимости вынужденной составляющей вектора каких-либо координат от вектора внешних воздействий, приложенных в некоторой точке системы. Для обеспечения условий инвариантности необходимо и достаточно, чтобы передаточная матрица системы от точки приложения воздействия до точки измерения сигнала равнялась нулю.

Очевидно, что выполнение условий инвариантности всегда связано с компенсацией динамических свойств заданных элементов. Поэтому на характеристики системы в целом должны быть наложены ограничения типа соотношений (3.90) — (3.91), обеспечивающие устойчивость вырожденной части системы. Система управления может быть спроектирована как инвариантная, если выполнение условий инвариантности не приводит к нарушению устойчивости вырожденной части. С другой стороны, для реализуемости условий инвариантности требуется выполнение принципа двухканальности, сформулированного Б. Н. Петровым [33].

Задача синтеза оптимальной системы является, очевидно, более общей, чем подход с позиций теории инвариантности. Решение общей задачи синтеза, давая минимальную дисперсию ошибки, обеспечат и нулевое ее значение, если характеристики входных сигналов и ограничения таковы, что оптимальная система является инвариантной.

Нужно, однако, иметь в виду следующее обстоятельство. Для того чтобы определить, не противоречит ли условие инвариантности требованиям наилучшей точности, необходимо уделить особое внимание постановке задачи синтеза. В частности, любая имеющаяся возможность измерять те или иные сигналы (входной сигнал или помеху)

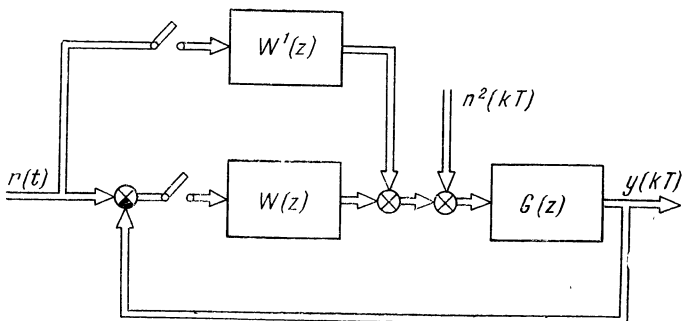


Рис. 6.5.

должна быть учтена при выводе уравнений оптимальной системы введением дополнительных произвольных корректирующих звеньев. Так, для схемы рис. 6.5 выход системы определяется как

$$y(z) = G(z)W(z)[I + G(z)W(z)]^{-1}r(z) + [I + G(z)W(z)]^{-1}G(z)W^1(z)r(z) + [I + G(z)W(z)]^{-1}G(z)n^2(z). \quad (6.158)$$

Введя обозначения для передаточных матриц

$$H(z) = [I + G(z)W(z)]^{-1}G(z)W(z), \quad (6.159)$$

$$K(z) = [I + G(z)W(z)]^{-1}G(z)W^1(z),$$

перепишем (6.158) в виде

$$y(z) = [H(z) + K(z)]r(z) + [I - H(z)]G(z)n^2(z). \quad (6.160)$$

Уравнения оптимальной системы могут быть получены в результате подстановки (6.160) в функционал (6.1) и

варьирования последнего по независимым матрицам $H(z)$ и $K(z)$. Решение полученных уравнений дает оптимальные значения матриц $H(z)$ и $K(z)$, после чего передаточные матрицы корректирующих звеньев вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} W(z) &= G^{-1}(z)[I - H(z)]^{-1}H(z), \\ W^1(z) &= G^{-1}(z)[I - H(z)]^{-1}K(z). \end{aligned} \right\} \quad (6.161)$$

Дополнительная свобода, появляющаяся при включении в систему корректирующего звена $W^1(z)$, не может ухудшить характеристик оптимальной системы и либо приведет к уменьшению показателя качества, либо сохранит его на прежнем уровне.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ

§ 7.1. Постановка задачи фильтрации и вывод уравнений

При рассмотрении задачи синтеза в предыдущих главах было принято существенно ограничивающее допущение относительно режима работы системы. Предполагалось, что проектируемое устройство (фильтр или замкнутая система) может выполнять операции над всеми прошлыми значениями входных сигналов. Иначе говоря, время наблюдения (время работы системы) считалось бесконечным. В настоящей главе будет рассмотрена задача проектирования оптимальных фильтров с ограниченным временем наблюдения.

Очевидно, что на практике время наблюдения (время работы системы с момента ее включения) всегда конечно и предположение об установившемся режиме работы является лишь полезной математической абстракцией. Переход к бесконечному времени наблюдения связан с пренебрежением переходными процессами в заданной части и в самой системе обработки информации. Для дискретных систем конечность времени наблюдения означает, что число используемых данных хотя и конечно, но увеличивается с течением времени.

Другой практически важной ситуацией является случай, когда суждение о полезном сигнале следует вынести, основываясь на заранее заданном количестве прошлых значений входных сигналов (система с конечной памятью). В последнем случае «память» системы фиксирована заранее и число используемых данных не изменяется с ростом времени. Несмотря на различие физического содержания, обе задачи приводят к уравнениям оптимальных фильтров, отличающихся лишь обозначениями. Методы их решения

аналогичны. Поэтому в дальнейшем ограничимся лишь рассмотрением первого случая.

Хотя более простым и наглядным является частотный подход к задаче синтеза, использованный в предыдущих

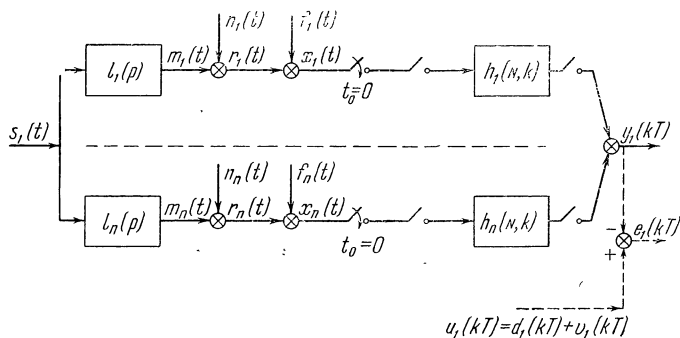


Рис. 7.1.

главах, он неприменим к системам с ограниченным временем наблюдения. Поэтому в настоящей главе в основу рассмотрения положен анализ во временной области. В то же время имеется глубокая внутренняя связь задач синтеза системы с конечным и бесконечным временем наблюдения. Это обстоятельство позволяет провести далеко идущую аналогию между методами решения обеих задач и, что более важно, использовать для решения задач с конечным временем результаты частотного анализа.

Перейдем к математической формулировке задачи. Исходным является предположение о том, что входные сигналы многомерного фильтра могут быть представлены в виде суммы стационарного случайного процесса $r(t) = \|r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)\|'$ и некоторой нестационарной функции времени $f(t) = \|f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\|'$:

$$x(t) = r(t) + f(t). \quad (7.1)$$

Стационарная составляющая входного сигнала представляет собой аддитивную смесь полезного $m(t)$ и мешающего $n(t)$ воздействий:

$$r(t) = m(t) + n(t), \quad (7.2)$$

причем вектор $m(t) = \|m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)\|'$ является результатом преобразования одномерного полезного случайного сигнала $s_1(t)$ заданными измерителями $l_k(p)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (рис. 7.1). Передаточные функции $l_k(p)$ учитывают как динамические искажения, вносимые измерителями, так и принципиальные особенности способов измерения (измерение самого сигнала, его скорости, интеграла и т. д.). Очевидно, что стационарный случайный процесс $m(t)$ имеет ранг единицу. Составляющие вектора помехи $n(t)$, как обычно, приведены к выходу измерителей.

Нестационарные случайные функции времени $f_h(t)$ представляют собой суммы известных функций времени со случайными или неизвестными коэффициентами:

$$f_h(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_{ki}(t). \quad (7.3)$$

Детерминированные функции $p_{ki}(t)$ для части индексов i ($i = 1, 2, \dots, m_1 \leq m$) — это детерминированные компоненты полезного сигнала, приведенные к выходу измерителей, для других индексов i ($i = m_1 + 1, \dots, m$) — это детерминированные составляющие помех в соответствующих каналах. Наличие таких нестационарных сигналов физически может быть связано со случайными уходами гироскопов, дрейфом усилителей, вибрациями известной частоты, случайными начальными условиями самой измерительной схемы и т. д.

В векторной записи формула (7.3) принимает вид

$$f(t) = P(t)a, \quad (7.4)$$

где $P(t) = \|p_{ki}(t)\|_{n \times m}$ — матрица известных функций времени, а $a = \|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\|'$ — случайный вектор, имеющий нулевое среднее значение и заданную матрицу корреляционных моментов

$$K = M\{aa'\} = M\{\|\alpha_i \alpha_j\|_1\}. \quad (7.5)$$

Предполагается, что случайные величины α_i не коррелированы ни с одним из стационарных сигналов.

Поясним смысл элементов матрицы $P(t)$. Пусть полезный сигнал является суммой стационарной случайной

составляющей $s_1(t)$ и детерминированных функций со случайными коэффициентами

$$\sum_{l=1}^{m_1} \alpha_l \varphi_l(t), \quad (7.6)$$

где верхний предел суммирования m_1 может быть меньше или равен m :

$$m_1 \leq m.$$

Тогда на выходе преобразователей

$$l(p) = \|l_1(p), \dots, l_n(p)\|'$$

детерминированные компоненты преобразуются к виду

$$\sum_{l=1}^{m_1} \alpha_l \int_{-\infty}^t L(t-\tau) \varphi_l(\tau) d\tau = \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_l \int_0^{\infty} L(\tau) \varphi_l(t-\tau) d\tau. \quad (7.7)$$

Помимо этого, на вход системы фильтров действуют мешающие детерминированные воздействия, которые, будучи приведенными к выходу преобразователей, запишутся в форме

$$\sum_{l=m_1+1}^m \alpha_l \int_0^{\infty} L^1(\tau) \varphi_l(t-\tau) d\tau, \quad (7.8)$$

где $L^1(\tau)$ — весовая матрица линейной системы от точки приложения мешающих воздействий до выхода преобразователей. Введя обозначения

$$p_{kl}(t) = \int_0^{\infty} L_k(\tau) \varphi_l(t-\tau) d\tau, \\ k = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m_1, \quad (7.9)$$

и

$$p_{kl}(t) = \int_0^{\infty} L_k^1(\tau) \varphi_l(t-\tau) d\tau, \\ k = 1, 2, \dots, n, \quad l = m_1 + 1, \dots, m,$$

запишем детерминированную часть сигнала, поступающего для обработки, в компактной форме $P(t)a$. Это обозначение и принято в формуле (7.4).

Процесс обработки и выдачи данных начинается в некоторый момент времени $t = 0$, причем измерение сигнала $x(t)$, производится дискретно во времени и периодически с периодом T (при $t = 0, T, 2T, \dots$). Задачей системы является приближение выходного сигнала $y_1(kT)$ в дискретные моменты времени к некоторому одномерному желаемому процессу $u_1(kT)$. Последний является суммой стационарной составляющей $d_1(t)$ и нестационарной функции времени $v_1(t)$:

$$u_1(t) = d_1(t) + v_1(t) = d_1(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i q_i(t) = \\ = d_1(t) + q'(t) \cdot a, \quad (7.10)$$

где

$$q'(t) = \|q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)\|.$$

Для пояснения происхождения функции $u_1(t)$ введем, как и ранее, понятие желаемого оператора. Желаемый оператор определяется как некоторое преобразование, не обязательно физически реализуемое, которое требуется произвести над полезным сигналом. Обычно этот оператор стационарен. Тогда

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_1(t-\tau) s_1(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_l \int_{-\infty}^{\infty} D_1(t-\tau) \varphi_l(\tau) d\tau, \quad (7.11)$$

где $D_1(t)$ — весовая функция желаемой системы. Сравнивая (7.11) и (7.10), найдем:

$$d_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_1(t-\tau) s_1(\tau) d\tau, \quad (7.12)$$

$$q_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_1(t-\tau) \varphi_l(\tau) d\tau, \quad l = 1, 2, \dots, m_1, \quad (7.13)$$

$$q_l(t) = 0, \quad l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m. \quad (7.14)$$

Несмотря на то, что $m - m_1$ последних компонент вектора $q(t)$, соответствующих детерминированным составляющим помех, равны нулю, для дальнейшего будет удобно сохранить размерность вектора $q(t)$ равной m и обозначение (7.10).

Ошибка преобразования $e_1(jT)$ определяется как разность между желаемым и выходным сигналами:

$$e_1(jT) = u_1(jT) - y_1(jT). \quad (7.15)$$

Время работы системы (время наблюдения) отсчитывается от момента включения системы в работу и обозначается через $t_N = NT$. Критерием качества является значение дисперсии ошибки $D_e(N)$ в момент времени t_N , так что минимум $D_e(N)$ определяет оптимальную систему.

Рассматриваемая задача представляет собой обобщение на многомерный дискретный случай известной задачи Заде — Рагазини [31, 32, 42, 65, 69].

Выходной сигнал системы фильтров (рис. 7.1) в момент времени $t_N = NT$ равен сумме выходных сигналов отдельных каналов. Вводя матрицу-строку весовых коэффициентов нестационарного дискретного фильтра

$$h(N, j) = \|h_1(N, j), h_2(N, j), \dots, h_n(N, j)\|,$$

для одномерного выходного сигнала получим:

$$y_1(NT) = \sum_{j=0}^N h(N, j)x(jT). \quad (7.16)$$

Ошибка системы $e_1(NT)$ в соответствии с (7.1), (7.4), (7.10), (7.15) и (7.16) может быть записана в виде суммы стационарной и нестационарной составляющих:

$$e_1(NT) = d_1(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j)r(jT) + \left[q'(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j)P(jT) \right] a. \quad (7.17)$$

В соответствии с общими свойствами корреляционных

Функций можно утверждать, что показатель качества

$$D_e(N) = M \{e_1^2(NT)\} = R_{e_1 e_1}(NT, NT) \quad (7.18)$$

является знакоопределенной положительной квадратичной формой от $n(N+1)$ весовых коэффициентов $h_k(N, j)$ ($k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, N$). Значения $h_k(N, j)$, при которых дисперсия ошибки $D_e(N)$ принимает наименьшее возможное значение, назовем оптимальными. Для их определения можно воспользоваться обычными правилами нахождения экстремума функции многих переменных.

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial D_e(N)}{\partial h_l(N, i)} = 0, \quad (7.19)$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

является также и достаточным в силу положительной знакоопределенности $D_e(N)$. С учетом переставимости операций математического ожидания и дифференцирования по параметру перепишем (7.19) в виде

$$2M \left\{ e_1(NT) \frac{\partial e_1(NT)}{\partial h_l(N, i)} \right\} = 0. \quad (7.20)$$

В силу (7.17) частная производная

$$\frac{\partial e_1(NT)}{\partial h_l(N, i)} = -x_l(iT), \quad (7.21)$$

и соотношение (7.20) принимает вид

$$M \{e_1(NT) x_l(iT)\} = 0, \quad (7.22)$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Поэтому условие минимума дисперсии ошибки $D_e(N)$ можно сформулировать как требование некоррелированности ошибки e_1 в момент времени $t_N = NT$ и всех компонент входного сигнала $x_l(iT)$ ($i = 0, 1, \dots, N$).

Подставляя в (7.22) соотношения (7.15) и (7.16) и производя операцию осреднения по множеству реализаций, получим систему $n(N+1)$ уравнений оптимального

фильтра:

$$\sum_{h=1}^n \sum_{j=0}^N R_{x_l x_h}(iT, jT) h_h(N, j) - R_{x_l u_1}(iT, NT) = 0 \quad (7.23)$$

$$l = 1, 2, \dots, n_1 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Введем квадратную матрицу корреляционных функций входного сигнала $R_{xx}(iT, jT) = \|R_{x_l x_h}(iT, jT)\|_1^n$ и матрицу-столбец взаимной корреляции входного и желаемого сигналов

$$R_{xu_1}(iT, NT) = \|R_{x_1 u_1}(iT, NT), \dots, R_{x_{n_1} u_1}(iT, NT)\|'.$$

Тогда (7.23) переписывается в форме

$$\sum_{j=0}^N R_{xx}(iT, jT) h'(N_2, j) - R_{xu_1}(iT, NT) = 0_{n \times 1} \quad (7.24)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Соотношения (7.23) — (7.24) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $n(N+1)$ неизвестных весовых коэффициентов. Учитывая вид входного и желаемого сигналов (7.1), (7.4) и (7.10), найдем выражения для корреляционных матриц, входящих в (7.24):

$$\begin{aligned} R_{xx}(iT, jT) &= M\{x(iT)x'(jT)\} = \\ &= R_{rr}(jT - iT) + P(iT)KP'(jT), \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} R_{xu_1}(iT, NT) &= M\{x(iT)u_1(NT)\} = \\ &= M\{[r(iT) + P(iT)a] \cdot [d_1(NT) + a'q(NT)]\} = \\ &= R_{rd_1}(NT - iT) + P(iT)Kq(NT). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Подстановка последних соотношений в (7.24) дает уравнения, в которые входят только весовые коэффициенты оптимального фильтра и известные вероятностные

характеристики входных сигналов:

$$\sum_{j=0}^N R_{rr}(jT - iT) h'(N, j) - R_{rd_1}(NT - iT) + \\ + P(iT)K \left[\sum_{j=0}^N P'(jT) h'(N, j) - q(NT) \right] = 0_{n \times 1}, \quad (7.27)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

В частном случае, когда нестационарные составляющие в желаемом и входных сигналах отсутствуют, соотношения (7.24) — (7.27) упрощаются. Уравнения оптимального фильтра принимают вид

$$\sum_{j=0}^N R_{rr}(jT - iT) h'(N, j) - R_{rd_1}(NT - iT) = 0_{n \times 1}, \quad (7.28)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Перейдем к определению минимальной дисперсии ошибки. В соответствии с определением (7.18) имеем:

$$D_e(N) = R_{u_1 u_1}(NT, NT) - 2 \sum_{i=0}^N h(N, i) R_{xu_1}(iT, NT) + \\ + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N h(N, i) R_{xx}(iT, jT) h'(N, j) \quad (7.29)$$

При учете уравнения оптимального фильтра соотношение (7.29) упрощается, так что минимальное значение дисперсии ошибки может быть вычислено по одной из двух формул:

$$[D_e(N)]_{\min} = R_{u_1 u_1}(NT, NT) - \sum_{i=0}^N h(N, i) R_{xu_1}(iT, NT) \quad (7.30)$$

или

$$[D_e(N)]_{\min} = R_{u_1 u_1}(NT, NT) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N h(N, i) R_{xx}(iT, jT) h'(N, j),$$

где $R_{xu_1}(iT, NT)$ и $R_{xx}(iT, jT)$ заданы выражениями (7.25), (7.26), а

$$R_{u_1 u_1}(NT, NT) = R_{d_1 d_1}(NT, NT) + q'(NT) K q(NT). \quad (7.31)$$

Действительно, для получения первой из формул (7.30) представим (7.29) в виде

$$D_e(N) = R_{u_1 u_1}(NT, NT) - \sum_{i=0}^N h(N, i) R_{xu_1}(iT, NT) + \\ + \sum_{i=0}^N h(N, i) [-R_{xu_1}(iT, NT) + \sum_{j=0}^N R_{xx}(iT, jT) h'(N, j)]. \quad (7.32)$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю для любого i в силу уравнений (7.24). Для вывода второго из соотношений (7.30) преобразуем (7.29):

$$D_e(N) = R_{u_1 u_1}(NT, NT) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N h(N, i) R_{xx}(iT, jT) h'(N, j) + \\ + 2 \sum_{i=0}^N h(N, i) \left[-R_{xu_1}(iT, NT) + \sum_{j=0}^N R_{xx}(iT, jT) h'(N, j) \right], \quad (7.33)$$

после чего справедливость (7.30) очевидна.

Для стационарных входных и желаемого сигналов минимальное значение дисперсии ошибки определится

выражениями

$$\begin{aligned}
 [D_e(N)]_{\min} &= R_{d_1 d_1}(0) - \sum_{i=0}^N h(N_2 i) R_{r d_1}(NT - iT) = \\
 &= R_{d_1 d_1}(0) - \sum_{i=0}^N \left| \sum_{j=0}^N h(N_2 i) R_{rr}(jT - iT) h'(N_2 j) \right|. \quad (7.34)
 \end{aligned}$$

Так же как и для бесконечного времени наблюдения в случае чистой фильтрации, когда

$$D_1(t) = \delta(t), \quad d_1(t) = s_1(t),$$

последнее соотношение допускает существенное упрощение. Пусть все помехи не коррелированы с полезным сигналом, а в одном из каналов (например, в первом) измеряется сам сигнал $s_1(t)$ ($s_1(t) = m_1(t)$). Запишем уравнения оптимального фильтра (7.28) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^N \sum_{l=1}^n R_{r_k r_l}(jT - iT) h_l(N_2 j) - R_{r_k s_1}(NT - iT) = 0, \\
 k = 1, 2, \dots, n_2 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.35)
 \end{aligned}$$

При этом минимальная дисперсия ошибки в (7.34) принимает вид

$$[D_e(N)]_{\min} = R_{s_1 s_1}(0) - \sum_{j=0}^N \sum_{l=1}^n h_l(N, j) R_{m_l s_1}(NT - jT). \quad (7.36)$$

Так как помехи и полезный сигнал не коррелированы, то

$$R_{r_k r_l}(jT - iT) = R_{m_k m_l}(jT - iT) + R_{n_k n_l}(jT - iT).$$

С учетом этого уравнение системы (7.36) для $k = 1$ и $i = N$ дает:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^N \left| \sum_{l=1}^n h_l(N_2 j) R_{s_1 m_l}(jT - NT) - R_{s_1 s_1}(0) + \right. \\
 \left. + \sum_{j=0}^N \sum_{l=1}^n h_l(N_2 j) R_{n_1 n_l}(jT - NT) \right| = 0. \quad (7.37)
 \end{aligned}$$

Если сравнить (7.36) и (7.37), нетрудно убедиться, что

$$[D_e(N)]_{\min} = \sum_{j=0}^N \sum_{l=1}^n h_l(N, j) R_{n_1 n_1}(jT - NT). \quad (7.38)$$

В частности, если помехи в различных каналах не коррелированы с $n_1(t)$, то

$$[D_e(N)]_{\min} = \sum_{j=0}^N h_1(N, j) R_{n_1 n_1}(jT - NT). \quad (7.39)$$

В случае, когда помеха в первом канале является дискретным белым шумом, (7.39) принимает чрезвычайно простой вид:

$$[D_e(N)]_{\min} = h_1(N, N) B_{1s}^2 \quad (7.40)$$

где $B_{1s}^2 = R_{n_1 n_1}(0)$ — дисперсия помехи $n_1(kT)$.

§ 7.2. Задача синтеза одноканального фильтра

Рассмотрим простейший случай, когда информация о полезном сигнале поступает только по одному каналу. Тогда процесс на входе дискретного фильтра $x_1(t)$ имеет вид

$$x_1(t) = r_1(t) + f_1(t) = m_1(t) + n_1(t) + \sum_{j=1}^m p_{1j}(t) \alpha_j, \quad (7.41)$$

где $m_1(t)$ и $n_1(t)$ — стационарные скалярные функции времени, а α_j — случайные коэффициенты. Как и в общем случае, известные функции времени $p_{1j}(t)$ для $j = 1, 2, \dots, m_1$ ($m_1 \leq m$) относятся к полезному сигналу. Функции $p_{1j}(t)$ для остальных номеров j характеризуют мешающее воздействие, приведенное ко входу фильтра.

Желаемый сигнал также представляется в виде суммы стационарной и детерминированной компонент. Очевидно, что его нестационарная часть должна содержать функции

времени, связанные только с детерминированной составляющей полезного сигнала

$$u_1(t) = d_1(t) + \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j q_j(t). \quad (7.42)$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения целесообразно ввести функции $q_{m_1+1}(t) = q_{m_1+2}(t) = \dots = q_m(t) = 0$ и считать верхний предел суммирования в (7.42) равным m .

Динамические характеристики оптимального фильтра $h_1(N, i)$ определяются из условия минимума дисперсии ошибки $e_1(NT) = u_1(NT) - y_1(NT)$. Уравнения оптимальной системы можно получить из более общих (7.23), положив в них $n = 1$:

$$\sum_{j=0}^N h_1(N, j) R_{x_1 x_1}(iT, jT) - R_{x_1 u_1}(iT, NT) = 0, \quad (7.43)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Эти соотношения представляют собой систему $N + 1$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же количества неизвестных $h(N, j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$).

Система (7.43) всегда разрешима и имеет единственное решение, так как ее определитель отличен от нуля в силу положительной определенности корреляционной функции сигнала $x_1(iT)$. Решение системы (7.43) для малых значений времени наблюдения N может быть получено известными способами, например по правилу Крамера. Ряд вычислительных приемов, упрощающих процедуру получения решения и существенно использующих симметрию матрицы коэффициентов ($R_{x_1 x_1}(iT, jT) = R_{x_1 x_1}(jT, iT)$), изложен в монографиях [14, 24].

Вместе с тем непосредственное решение уравнений (7.43) при большом времени наблюдения N связано со значительными вычислительными трудностями. Кроме того, получение результата лишь в численной форме не позволяет аналитически исследовать зависимость решения от параметра N и характеристик сигналов. Рассмотрим другой метод, при котором вычислительные трудности нахождения оптимальных коэффициентов $h_1(N, j)$ не увеличиваются с ростом времени наблюдения.

В соответствии с (7.27) перепишем (7.43) в развернутой форме:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) - R_{r_1 d_1}(NT - iT) + \\ & + \sum_{k=1}^m p_{1k}(iT) \sum_{l=1}^m k_{kl} \left[\sum_{j=0}^N p_{1l}(jT) h_1(N, j) - q_l(NT) \right] = 0, \\ & i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Первоначально рассмотрим случай, когда нестационарные компоненты во входных сигналах отсутствуют. Система $N + 1$ уравнения (7.44) при этом получает вид

$$\sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) - R_{r_1 d_1}(NT - iT) = 0, \quad (7.45)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Коэффициентами последней системы $R_{r_1 r_1}(jT - iT)$ являются значения корреляционной функции стационарного случайного процесса, которые могут быть выражены с помощью формулы обращения через спектральную плотность $\Phi_{r_1 r_1}(z)$:

$$R_{r_1 r_1}(jT - iT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{r_1 r_1}(z) z^{i-j} \frac{dz}{z}. \quad (7.46)$$

Это свойство матрицы коэффициентов позволяет свести систему $N + 1$ линейных алгебраических уравнений к одному эквивалентному ей разностному уравнению с некоторыми граничными условиями [34]. Обозначим числитель и знаменатель рациональной функции $\Phi_{r_1 r_1}(z)$ соответственно $A_{11}(z)$ и $B_{11}(z)$:

$$\Phi_{r_1 r_1}(z) = \frac{A_{11}(z)}{B_{11}(z)}. \quad (7.47)$$

Полиномы $B_{11}(z)$ и $A_{11}(z)$ симметричны относительно z и z^{-1} и могут быть поэтому записаны в виде

$$B_{11}(z) = \sum_{l=-\beta}^{\beta} b_l z^l, \quad b_l = b_{-l},$$

И

$$A_{11}(z) = \sum_{j=-\alpha}^{\alpha} a_j z^j, \quad a_j = a_{-j}, \quad (7.48)$$

причем всегда $\alpha \leq \beta$. Отметим, что равенство $\alpha = \beta$ возможно лишь в случае, если сигнал $r_1(kT)$ содержит составляющую в виде дискретного белого шума; во всех же остальных случаях $\alpha < \beta$, причем, как правило, $\alpha = \beta - 1$.

Воспользовавшись оператором опережения $\zeta = e^{DT}$, сформируем линейный оператор $B_{11}(\zeta) = \sum_{l=-\beta}^{\beta} b_l \zeta^l$. Применим $B_{11}(\zeta)$ к системе (7.45) по переменной i :

$$B_{11}(\zeta) \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(iT - jT) h_1(N, j) = B_{11}(\zeta) R_{r_1 d_1}(NT - iT). \quad (7.49)$$

Последнее означает, что i -е уравнение системы (7.45) умножается на b_0 , $(i+1)$ -е и $(i-1)$ -е уравнения умножаются на b_1 и т. д. Наконец, $(i+\beta)$ -е и $(i-\beta)$ -е уравнения умножаются на b_β . Выражение (7.49) получается при сложении результатов этих умножений. Очевидно поэтому, что подобная операция возможна лишь для тех значений i , для которых $i+\beta$ и $i-\beta$ не выходят за пределы интервала $[0, N]$, т. е. для $i = \beta, \beta+1, \dots, N-\beta-1, N-\beta$. После такого преобразования исходная система (7.45) заменяется эквивалентной:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(iT - jT) h_1(N, j) = R_{r_1 d_1}(NT - iT), \\ & i = 0, 1, \dots, \beta - 1, N - \beta + 1, N - \beta + 2, \dots, N, \\ & \sum_{j=0}^N \sum_{l=-\beta}^{\beta} b_l R_{r_1 r_1}(iT + lT - jT) h_1(N, j) = \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{l=-\beta}^{\beta} b_l R_{r_1 d_1}(NT - iT + lT), \\ & i = \beta, \beta + 1, \dots, N - \beta - 1, N - \beta. \end{aligned} \right\} (0 \leq l)$$

Соотношение (7.49) представляет собой краткую запись второй группы уравнений (7.50).

Используя (7.46) и (7.47), перепишем (7.49) в виде

$$B_{11}(\zeta) \sum_{k=0}^N \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{A_{11}(z)}{B_{11}(z)} z^{i-k} h_1(N, k) \frac{dz}{z} = \\ = B_{11}(\zeta) R_{r_1 d_1}(NT - iT), \quad (7.51)$$

$$i = \beta, \beta + 1, \dots, N - \beta.$$

Внесем оператор $B_{11}(\zeta)$ под знак интеграла. Учитывая, что $B_{11}(\zeta) z^i = B_{11}(z) z^i$, получим:

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} A_{11}(z) z^{i-k} h_1(N, k) \frac{dz}{z} = B_{11}(\zeta) R_{r_1 d_1}(NT - kT).$$

Если в левой части изменить теперь порядок интегрирования и суммирования, то в силу тождества

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-l} \frac{dz}{z} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases} \quad (7.52)$$

получим:

$$\sum_{l=-\alpha}^{\alpha} a_l h_1(N, i+l) = B_{11}(\zeta) R_{r_1 d_1}(NT - iT). \quad (7.53)$$

Вводя оператор $A_{11}(\zeta) = \sum_{l=-\alpha}^{\alpha} a_l \zeta^l$, перепишем (7.53) окончательно в виде

$$A_{11}(\zeta) h_1(N, i) = B_{11}(\zeta) R_{r_1 d_1}(NT - iT), \quad (7.54)$$

$$i = \beta, \beta + 1, \dots, N - \beta.$$

Последнее соотношение может рассматриваться как разностное уравнение относительно неизвестной весовой функции $h_1(N, i)$. Очевидно, что оно эквивалентно второй группе уравнений (7.50).

Решение уравнения (7.54) может быть получено по общим правилам, изложенным во второй главе и в приложе-

нии II. Оно состоит из частного решения $h_1^*(N, i)$, соответствующего правой части, и общего решения однородного уравнения

$$A_{11}(\xi) h_1^{**}(N, i) = 0. \quad (7.55)$$

Последнее имеет вид

$$h_1^{**}(N, i) = \sum_{k=1}^{\alpha} (c_{1k} \mu_k^i + c_{2k} \mu_k^{-i}), \quad (7.56)$$

где μ_k и μ_k^{-1} ($|\mu_k| < 1$) — корни характеристического уравнения

$$h_1^{**}(N, i) = \sum_{l=-\alpha}^{\infty} (c_{1k} \mu_k^i + c_{2k} \mu_k^{-i}), \quad (7.56)$$

Отметим, что уравнение (7.57) является возвратным. Его степень может быть уменьшена вдвое введением вспомогательной переменной

$$w = z + z^{-1}.$$

Вследствие того, что разностное уравнение (7.54) эквивалентно второй группе уравнений системы (7.50), его общее решение

$$h_1(N, i) = h_1^*(N, i) + \sum_{k=1}^{\alpha} (c_{1k} \mu_k^i + c_{2k} \mu_k^{-i}) \quad (7.58)$$

тождественно удовлетворяет этой группе при любых величинах постоянных c_{1k} и c_{2k} . Эти постоянные должны быть выбраны поэтому из условий удовлетворения первой группы уравнений (7.50). Однако выбором 2α коэффициентов c_{1k} и c_{2k} ($k = 1, 2, \dots, \alpha$) при $\alpha < \beta$ невозможно удовлетворить 2β независимым условиям. Поэтому в выражении для искомого коэффициента $h_1(N, i)$ необходимо добавить $2(\beta - \alpha)$ произвольных слагаемых, не искажающих решение (7.58) внутри интервала $\beta \leq i \leq N - \beta$. Такими слагаемыми являются δ -функции Кронекера, отличные от нуля на концах интервала $[0, N]$. Окончательно искомая

весовая функция может быть записана в виде

$$h_1(N, i) = h_1^*(N, i) + \sum_{k=1}^{\alpha} (c_{1k}\mu_k^i + c_{2k}\mu_k^{-i}) + \\ + \sum_{i=0}^{\beta-\alpha-1} (c_{3i}\delta_{l, i} + c_{4i}\delta_{N-l, i}). \quad (7.59)$$

Подводя итог, отметим, что изложенный прием позволяет свести систему $N + 1$ линейных алгебраических уравнений к одному разностному. Решение задачи завершается нахождением неопределенных коэффициентов, входящих в общее решение разностного уравнения. Число алгебраических уравнений, решаемых совместно, равно 2β и не зависит от величины времени наблюдения N .

Для получения разностного уравнения не обязательно исходить из представления полиномов $B_{11}(z)$ и $A_{11}(z)$, записанных в симметричной форме (7.48). Возможно использовать запись числителя и знаменателя $\Phi_{r_1 r_1}(z)$ только по положительным степеням z , т. е. как

$$\Phi_{r_1 r_1}(z) = \\ = \frac{z^{\beta-\alpha}(a_{-\alpha} + a_{-\alpha+1}z + \dots + a_0z^{\alpha} + a_1z^{\alpha+1} + \dots + a_{\alpha}z^{2\alpha})}{b_{-\beta} + b_{-\beta+1}z + \dots + b_0z^{\beta} + b_1z^{\beta+1} + \dots + b_{\beta}z^{2\beta}} = \\ = \frac{\tilde{A}_{11}(z)}{\tilde{B}_{11}(z)}.$$

Тогда, применяя к системе (7.45) оператор $\tilde{B}_{11}(z) = b_{-\beta} + b_{-\beta+1}z + \dots + b_{\beta}z^{2\beta}$, придем к разностному уравнению

$$\tilde{A}_{11}(\xi)h(N, i) = \tilde{B}_{11}(\xi)R_{r_1 d_1}(NT - iT),$$

справедливому, как очевидно, для $i = 0, 1, \dots, N - 2\beta$. Общее решение этого уравнения имеет вид (7.59). Единственное отличие в решении задачи заключается в том, что для определения неизвестных коэффициентов c_{1k} , c_{2k} , c_{3k} и c_{4k} необходимо использовать 2β последних уравнений системы (7.45), т. е. уравнения для $i = N - 2\beta + 1, N - 2\beta + 2, \dots, N$. Отметим, что если во входной сигнал $r_1(kT)$ аддитивно входит дискретный белый шум, то $\beta = \alpha$ и δ -функции в решении (7.59) отсутствуют.

Переходя к общему случаю, когда во входных сигналах имеются нестационарные составляющие, введем обозначения:

$$\gamma_k = \sum_{l=1}^m k_{kl} \left[\sum_{j=0}^N p_{1l}(jT) h_1(N, j) - q_l(NT) \right]. \quad (7.60)$$

Уравнения оптимального фильтра (7.44) с учетом (7.60) примут вид

$$\sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) = R_{r_1 d_1}(NT - iT) - \sum_{k=1}^m \gamma_k p_{1k}(iT),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.61)$$

Будем пока рассматривать γ_k как некоторые неизвестные постоянные величины. Тогда, применяя метод, изложенный выше, сведем (7.61) к одному разностному уравнению для $i = \beta, \beta + 1, \dots, N - \beta$:

$$A_{11}(\xi) h_1(N, i) = B(\xi) \left[R_{r_1 d_1}(NT - iT) - \sum_{k=1}^m \gamma_k p_{1k}(iT) \right]$$

$$(7.62)$$

и граничным условиям:

$$\sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(iT - jT) h_1(N, j) = R_{r_1 d_1}(NT - iT) - \sum_{k=1}^m \gamma_k p_{1k}(iT),$$

$$i = 0, 1, \dots, \beta - 1, N - \beta + 1, \dots, N. \quad (7.63)$$

Применяя принцип суперпозиции, запишем общее решение разностного уравнения, включающее 2β произвольных постоянных, в виде

$$h_1(N, i) = \varphi_1^*(N, i) + \sum_{k=1}^m \gamma_k \psi_{1k}^*(N, i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\alpha} (c_{1k} \mu_k^i + c_{2k} \mu_k^{-i}) + \sum_{l=0}^{\beta-\alpha-1} (c_{3l} \delta_{l, i} + c_{4l} \delta_{N-l, i}), \quad (7.64)$$

где $\varphi_1^*(N, i)$ и $\psi_{1k}^*(N, i)$ — частные решения уравнения (7.63), соответствующие правым частям

$$B(\zeta)R_{r_1 d_1}(NT - iT) \quad \text{и} \quad R(\zeta)p_{1k}(iT) \\ (k = 1, 2, \dots, m).$$

В решение (7.64) входят 2β неопределенных постоянных c_{1k} , c_{2k} , c_{3k} и c_{4k} и m неизвестных коэффициентов γ_k . Для их нахождения необходимо решить систему $2\beta + m$ линейных алгебраических уравнений, которые можно получить, подставив (7.64) в (7.60) и (7.63).

Очевидно, что изложенный метод решения применим только в случае, когда $N + 1 \geq 2\beta$, причем преимущества метода перед обычным способом решения исходной системы (7.44) сказываются при достаточно больших временах наблюдения N . При этом вычислительные трудности задачи не зависят от величины N , а определяются лишь характером входных сигналов.

Задача синтеза решается для каждого фиксированного значения N . Если требуется минимизировать дисперсию ошибки в каждый момент времени (N — переменная величина), то при реализации оптимального фильтра необходимо учитывать зависимость коэффициентов c_{ik} решения (7.64) от N :

$$h_1(N, i) = \varphi_1^*(N, i) + \sum_{k=1}^m \gamma_k \psi_{1k}^*(N, i) + \sum_{k=1}^{\alpha} [c_{1k}(N) \mu_k^i + \\ + c_{2k}(N) \mu_k^{-i}] + \sum_{l=0}^{\beta-\alpha-1} [c_{3l}(N) \delta_{l,i} + c_{4l}(N) \delta_{N-l,i}]. \quad (7.65)$$

Преыдущее рассмотрение относилось к случаю, когда были известны корреляционные моменты коэффициентов при детерминированных составляющих входного сигнала α_i . В случае, если вероятностные характеристики этих коэффициентов не заданы, причем известно, что сами коэффициенты в некоторых реализациях могут иметь достаточно большие значения, целесообразно рассматривать задачу оптимальной фильтрации при дополнительном условии несмещенности по отношению к детерминированным компонентам.

Перепишем ошибку фильтрации (7.17) в виде

$$e_1(NT) = d_1(NT) - \sum_{j=0}^N h_1(N, j)r_1(jT) + \\ + \sum_{l=1}^m \alpha_l \left[q_l(NT) + \sum_{j=0}^N h_1(N, j)p_{1l}(jT) \right], \quad (7.66)$$

где $q_l(NT) \equiv 0$ при $l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$.

Из этого выражения ясно, что большие значения α_l могут привести к большим ошибкам фильтрации, если на весовые коэффициенты фильтра $h_1(N, j)$ не наложить условия несмещенности

$$\sum_{j=0}^N h_1(N, j)p_{1l}(jT) = q_l(NT), \\ l = 1, 2, \dots, m. \quad (7.67)$$

Последние условия означают точное воспроизведение детерминированных составляющих желаемого сигнала (известных функций времени) и точное подавление детерминированных компонент помехи (также известных) в фиксированный момент времени $t_N = NT$.

Соотношения (7.67) представляют собой m ограничивающих условий, которым должны удовлетворять $N + 1$ весовых коэффициентов $h_1(N, j)$. Очевидно, что если время наблюдения $N + 1 < m$, то условия (7.67) в общем случае выполнены быть не могут. В случае же, когда $N \geq m$, появляется известная свобода в выборе коэффициентов $h_1(N, j)$, удовлетворяющих всем соотношениям (7.67). Этой свободой можно воспользоваться для минимизации дисперсии ошибки:

$$D_e(N) = M \{e_1^2(NT)\}. \quad (7.68)$$

При выполнении равенств (7.67) ошибка $e_1(NT)$ принимает вид

$$e_1(NT) = d_1(NT) - \sum_{j=0}^N h_1(N, j)r_1(jT). \quad (7.69)$$

Задача минимизации (7.68) при условиях (7.67) является обычной задачей отыскания условного минимума функции многих переменных. Для ее решения введем m множителей Лагранжа λ_l . Коэффициенты $h_1(N, j)$ необходимо разыскивать при этом из условия минимума функции

$$J(N) = D_e(N) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \left[-q_l(NT) + \sum_{j=0}^N h_1(N, j) p_{1l}(jT) \right]. \quad (7.70)$$

Приравнявая нулю частные производные от $J(N)$ по $h_1(N, j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$), приходим к системе $N + 1$ уравнений

$$\sum_{j=0}^N R_{x_1 x_1}(iT - jT) h_1(N, j) - R_{x_1 d_1}(NT - iT) + \sum_{l=1}^m \lambda_l p_{1l}(iT) = 0, \quad (7.71)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

которая совместно с m соотношениями (7.67) служит для определения $N + 1$ весовых коэффициентов $h_1(N, j)$ и m множителей Лагранжа λ_l . Система (7.71) по форме ничем не отличается от (7.64). Поэтому методы решения (7.61) и (7.71) полностью совпадают.

В настоящем параграфе рассмотрены две возможные постановки задачи синтеза оптимального одноканального фильтра при конечном времени наблюдения и при наличии детерминированных функций во входных сигналах. Возможна смешанная задача, когда условие несмещенности ставится лишь для некоторых из детерминированных функций, а вероятностные характеристики коэффициентов при других функциях заданы. Отметим, что задача синтеза при условиях несмещенности, вообще говоря, является частным случаем синтеза при заданной корреляционной матрице случайных коэффициентов K . Условие несмещенности по какой-либо из детерминированных функций соответствует заданию бесконечной дисперсии ее случайного коэффициента [39].

Пример 7.1. Рассмотрим задачу синтеза одномерного фильтра в случае, когда отсутствуют детерминированные составляющие входных сигналов. Пусть корреляционная

функция полезного сигнала имеет вид

$$R_{s_1 s_1}(kT) = A^2 e^{-\alpha T |k|},$$

а помеха представляет собой дискретный белый шум

$$R_{n_1 n_1}(kT) = B^2 \delta_{0, k}.$$

Тогда дискретная спектральная плотность входного процесса $r(t) = s(t) + n(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{r_1 r_1}(z) &= -\frac{A^2(1-d^2)}{(1-dz)(1-dz^{-1})} + B^2 = \\ &= \frac{C^2(1-\mu z)(1-\mu z^{-1})}{(1-dz)(1-dz^{-1})} = \frac{A_{11}(z)}{B_{11}(z)}, \end{aligned} \quad (7.72)$$

где

$$C^2 = B^2 \mu^{-4} d, \quad d = e^{-\alpha T}, \quad \mu = e^{-\alpha_1 T_2}$$

$$\operatorname{ch} \alpha_1 T = \operatorname{ch} \alpha T + \frac{A^2}{B^2} \operatorname{sh} \alpha T.$$

Решим задачу чистой фильтрации. Желаемый процесс $d(t)$ совпадает при этом с полезным сигналом. Весовая функция оптимального фильтра $h_1(N, j)$ ищется как решение системы уравнений (7.45), которая для данного случая имеет вид

$$\sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) - R_{s_1 s_1}(NT - iT) = 0, \quad (7.73)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Применяя к (7.73) по аргументу i оператор $B_{11}(\xi) = (1 - d\xi)(1 - d\xi^{-1})$, получим однородное разностное уравнение

$$A_{11}(\xi) h_1(N, i) = 0, \quad (7.74)$$

где в соответствии с (7.72)

$$A_{11}(\xi) = C^2(1 - \mu\xi)(1 - \mu\xi^{-1}). \quad (7.75)$$

Весовая функция оптимального фильтра определяется выражением

$$h_1(N, i) = c_1 \mu^i + c_2 \mu^{-i}. \quad (7.76)$$

Для нахождения неизвестных постоянных c_1 и c_2 необходимо использовать исходную систему уравнений (7.73) при $i = 0$ и $i = N$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT)[c_1 \mu^j + c_2 \mu^{-j}] &= R_{ss}(NT), \\ \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(NT - jT)[c_1 \mu^j + c_2 \mu^{-j}] &= R_{ss}(0). \end{aligned} \right\} \quad (7.77)$$

Перепишем последнюю систему в форме

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 &= d^N, \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.78)$$

где коэффициенты α_{hi} с учетом вида корреляционной функции входного сигнала равны

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{B^2}{A^2} + \frac{1 - \mu^{N+1} d^{N+1}}{1 - \mu d}, \\ \alpha_{12} &= \frac{B^2}{A^2} + \frac{1 - \mu^{-N-1} d^{N+1}}{1 - \mu^{-1} d}, \\ \alpha_{21} &= \frac{B^2}{A^2} \mu^N + \frac{1 - \mu^{N+1} d^{-N-1}}{1 - \mu d^{-1}} d^N = \alpha_{12} \mu^{N_1}, \\ \alpha_{22} &= \frac{B^2}{A^2} \mu^{-N} + \frac{1 - \mu^{-N-1} d^{-N-1}}{1 - \mu^{-1} d^{-1}} d^N = \alpha_{11} \mu^{-N}. \end{aligned} \right\} \quad (7.79)$$

Минимальное значение дисперсии ошибки в соответствии с (7.34) определяется по формуле

$$[D_e(N)]_{\min} = R_{ss}(0) - \sum_{i=0}^N h_1(N, i) R_{ss}(iT - NT). \quad (7.80)$$

С учетом (7.40) последнее выражение можно упростить и представить в виде

$$[D_e(N)]_{\min} = h_1(N, N) R_{n_1 n_1}(0) = B^2(c_1 \mu^N + c_2 \mu^{-N}). \quad (7.81)$$

Пример 7.2. Пусть некоторая случайная величина α_0 измеряется с помехой в виде дискретного белого шума. Стационарная составляющая полезного сигнала отсутствует. Поэтому

$$m_1(t) = d_1(t) = 0, \quad f_1(t) = v_1(t) = \alpha_0,$$

а корреляционная функция помехи равна $R_{n_1 n_1}(kT) = B^2 \delta_{0,k}$. Считая, что α_0 может принимать сколь угодно большие значения, будем искать решение при условии несмещенности:

$$\sum_{j=0}^N h_1(N, j) = 1. \quad (7.82)$$

Уравнение оптимального фильтра (7.71) принимает вид

$$B^2 h_1(N, i) + \lambda_1 = 0, \quad (7.83)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

т. е.

$$h_1(N, i) = -\frac{\lambda_1}{B^2}.$$

Подставляя $h_1(N, i)$ в формулу (7.82), находим:

$$\lambda_1 = -\frac{B^2}{N+1}, \quad h_1(N, i) = \frac{1}{N+1}. \quad (7.84)$$

Минимальное значение дисперсии ошибок

$$[D_e(N)]_{\min} = \frac{B^2}{N+1}. \quad (7.85)$$

Таким образом, оптимальное несмещенное определение некоторой случайной величины, принимающей в каждой реализации постоянное значение, при наличии помехи в виде дискретного белого шума сводится к нахождению среднего арифметического результатов всех измерений.

Пример 7.3. Пусть, так же как и в предыдущем примере, необходимо найти несмещенную оценку случайной величины α_0 , но значения помехи в дискретные моменты

коррелированы, так что

$$R_{n_1 n_1}(kT) = B^2 e^{-\beta T |k|}. \quad (7.86)$$

Спектральная плотность помехи имеет вид

$$\Phi_{n_1 n_1}(z) = \frac{B^2(1 - \delta^2)}{(1 - \delta z)(1 - \delta z^{-1})}, \quad (7.87)$$

где $\delta = e^{-\beta T}$.

Применяя к уравнению оптимального фильтра

$$\sum_{j=0}^N R_{n_1 n_1}(iT - jT) h_1(N, j) + \lambda_1 = 0, \quad (7.88)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

оператор $B_{11}(\zeta) = (1 - \delta\zeta)(1 - \delta\zeta^{-1})$, приходим к уравнению

$$B^2(1 - \delta^2) h_1(N, i) = -(1 - \delta\zeta)(1 - \delta\zeta^{-1}) \lambda_1 = \\ = -(1 - \delta)^2 \lambda_1. \quad (7.89)$$

В соответствии с этим

$$h_1^*(N, i) = -\frac{1 - \delta}{B^2(1 + \delta)} \lambda_1. \quad (7.90)$$

Весовая функция оптимального фильтра ищется в виде

$$h_1(N, i) = -\frac{(1 - \delta)\lambda_1}{B^2(1 + \delta)} + c_1 \delta_{0,i} + c_2 \delta_{N,i}. \quad (7.91)$$

Для определения постоянных λ_1 , c_1 и c_2 необходимо использовать первое и последнее уравнения системы (7.88) и условие несмещенности (7.82). Нетрудно показать, что минимальная дисперсия ошибки в рассматриваемом случае равна

$$[D_e(N)]_{\min} = -\lambda_1.$$

Поэтому для определения качества системы достаточно получить выражение лишь для множителя Лагранжа λ_1 . Решая систему трех уравнений, найдем:

$$\lambda_1 = -\frac{1 + \delta}{(1 - \delta)(N + 1) + 2\delta} \cdot B^2$$

так что

$$\frac{[D_e(N)]_{\min}}{B^2} = \frac{1 + \delta}{(1 - \delta)(N + 1) + 2\delta}. \quad (7.92)$$

При $\delta \rightarrow 0$ последнее выражение переходит в (7.85). Графики зависимости минимальной дисперсии ошибки от величины времени наблюдения N для различных значений βT приведены на рис. 7.2. Как и следовало ожидать, увеличение времени корреляции помехи приводит к ухудшению качества фильтрации. Действительно, увеличение βT означает, что помеха по своим свойствам приближается к дискретному белому шуму. Различие частотных характеристик полезного сигнала и помехи становятся при этом все более существенными. Это и приводит к уменьшению дисперсии ошибки с ростом βT . С другой стороны, при увеличении времени наблюдения минимальная дисперсия ошибки стремится к нулю при любом βT .

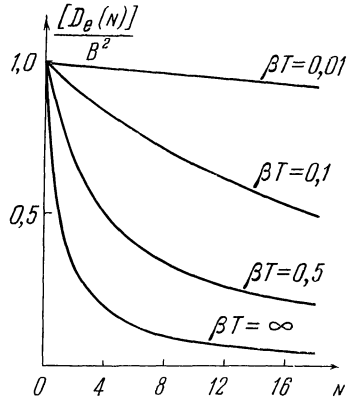


Рис. 7.2.

§ 7.3. Синтез многоканального фильтра при стационарных входных сигналах

В случае, если детерминированные составляющие во входном сигнале отсутствуют, уравнения оптимального многоканального фильтра (7.27) упрощаются. Для определения динамических характеристик оптимального фильтра необходимо при этом в соотношениях (7.27) положить $P(iT) = 0$ и $q(NT) = 0$:

$$\sum_{j=0}^N R_{rr}(jT - iT) h'(N, j) - R_{rd_1}(NT - iT) = 0, \quad (7.93)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Напомним, что в этих уравнениях используются матричные обозначения, так что $R_{rr}(lT) = \|R_{r_i r_j}(lT)\|_1^n$ — корреляционная матрица входных сигналов, $R_{rd_1}(lT) = \|R_{r_1 d_1}(lT), \dots, R_{r_n d_1}(lT)\|'$ — столбец взаимно корреляционных функций входного $r = \|r_1, r_2, \dots, r_n\|'$ и желаемого d_1 сигналов, $h'(N, j) = \|h_1(N, j), h_2(N, j), \dots, h_n(N, j)\|$ — матрица-строка весовых коэффициентов оптимального фильтра.

Соотношения (7.93) представляют собой систему $n(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно переменных $h_k(N, j)$ ($k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, N$) с определителем, отличным от нуля в силу положительной знакоопределенности корреляционной матрицы $R_{rr}(lT)$. Поэтому решение уравнений (7.93) всегда существует.

Тем не менее получение решения при достаточно больших N затруднительно с чисто вычислительной точки зрения. В случае двухканальной системы ($n = 2$) уже при объеме памяти системы $N = 4$ приходится решать систему десяти линейных алгебраических уравнений. Поэтому для получения характеристик оптимального фильтра целесообразно воспользоваться методом сведения системы алгебраических уравнений (7.93) к разностным уравнениям, вычислительные трудности решения которых не увеличиваются с ростом времени наблюдения N . Этот способ является обобщением на многомерный случай метода решения, рассмотренного в предыдущем параграфе.

В силу теоремы обращения корреляционные функции следующим образом выражаются через дискретные спектральные плотности:

$$R_{r_k r_l}(iT - jT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \Phi_{r_k r_l}(z) z^{i-j} \frac{dz}{z}, \quad (7.94)$$

причем спектральные плотности $\Phi_{r_k r_l}(z)$ являются рациональными функциями z , удовлетворяющими соотношениям

$$\Phi_{r_l r_k}(z) = \frac{A_{lk}(z)}{B_{lk}(z)} = \frac{A_{kl}(z^{-1})}{B_{kl}(z^{-1})} = \Phi_{r_k r_l}(z^{-1}). \quad (7.95)$$

Подставляя (7.94) в (7.93), перепишем уравнения

оптимального фильтра в виде

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{j=0}^N \oint_{\Gamma} \Phi_{rr}(z) z^{i-j} h'(N, j) \frac{dz}{z} = R_{rd_1}(NT - iT), \quad (7.96)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\Phi_{rr}(z) = \|\Phi_{r_i r_j}(z)\|_1^n.$$

Рассмотрение, проведенное в предыдущем параграфе, подсказывает следующий путь решения. Для получения системы разностных уравнений, эквивалентных (7.93), необходимо каким угодно способом найти две полиномиальные матрицы $P(z)$ и $Q(z)$ такие, что произведение $Q^{-1}(z)$ на $P(z)$ дает рациональную матрицу спектральной плотности $\Phi_{rr}(z)$:

$$\Phi_{rr}(z) = Q^{-1}(z)P(z). \quad (7.97)$$

Иначе говоря, необходимо найти такую матрицу $Q(z)$, умножение которой слева на $\Phi_{rr}(z)$ дает полиномиальную матрицу

$$Q(z)\Phi_{rr}(z) = P(z). \quad (7.98)$$

Простой способ получения $Q(z)$ состоит в следующем [18].

Составим операторы $B_l(\zeta)$ ($l = 1, 2, \dots, n$), каждый из которых является наименьшим общим кратным знаменателей элементов l -й строки матрицы $\Phi_{rr}(z)$. Оператор $B_l(\zeta)$ является полиномом по положительным и отрицательным степеням ζ :

$$B_l(\zeta) = \sum_{i=-\beta_{l1}}^{\beta_{l2}} b_i^l \zeta^i. \quad (7.99)$$

Отметим, что в общем случае $B_l(\zeta) \neq B_l(\zeta^{-1})$. Свойство симметрии $B_l(\zeta)$ имеет место лишь в случае, когда все $l_i(p)$ (рис. 7.1) равны между собой.

Применим к уравнениям (7.96) слева оператор $Q(\zeta)$, являющийся диагональной матрицей введенных операторов $B_l(\zeta)$:

$$Q(\zeta) = \text{diag}\{B_1(\zeta), B_2(\zeta), \dots, B_n(\zeta)\}. \quad (7.100)$$

Это означает, что оператор $B_l(\zeta)$ применяется к l -й строке равенств (7.96). В результате получим:

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{j=0}^N \oint_{\Gamma} Q(z) \Phi_{rr}(z) z^{i-j} h'(N, i) \frac{dz}{z} = Q(\zeta) R_{rd_1}(NT - iT), \quad (7.101)$$

где матрица $Q(z) \Phi_{rr}(z)$ — полиномиальная. Используя обозначение (7.98), перепишем (7.101) в виде

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{j=0}^N \oint_{\Gamma} P(z) h'(N, j) z^{i-j} \frac{dz}{z} = Q(\zeta) R_{rd_1}(NT - iT) \quad (7.102)$$

и, учитывая тождество (7.52), окончательно найдем:

$$P(\zeta) h'(N, i) = Q(\zeta) R_{rd_1}(NT - iT). \quad (7.103)$$

Соотношения (7.103) представляют собой систему n линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, которая в скалярной форме записывается как

$$\sum_{k=1}^n p_{lk}(\zeta) h_k(N, i) = B_l(\zeta) R_{r_l d_1}(NT - iT), \quad (7.104)$$

$$l = 1, 2, \dots, n,$$

где $p_{lk}(\zeta)$ — элементы матрицы $P(\zeta)$. При этом в силу вида операторов $B_l(\zeta)$ (7.99) l -я строка системы разностных уравнений (7.103) эквивалентна l -й строке системы алгебраических уравнений (7.93) при значениях индекса i , заключенных в интервале

$$i = \beta_{l1}, \beta_{l1} + 1, \dots, N - \beta_{l2} - 1, N - \beta_{l2}. \quad (7.105)$$

Остальные алгебраические уравнения (7.93), т. е. уравнения для

$$i = 0, 1, \dots, \beta_{l1} - 1, N - \beta_{l2} + 1, \dots, N, \quad (7.106)$$

используются как граничные условия для разностных уравнений (7.104). Всего, таким образом, имеется

$$p = \sum_{l=1}^n (\beta_{1l} + \beta_{2l})$$

граничных условий.

Методы решения систем разностных уравнений изложены в § 2.1 и в приложении II. Общее решение (7.103) складывается из частного решения системы неоднородных уравнений $h^*(N, j)$, соответствующего виду правой части, и общего решения однородной системы $h^{**}(N, j)$:

$$h(N, j) = h^*(N, j) + h^{**}(N, j). \quad (7.107)$$

В соответствии с результатом, изложенным в § 2.1, общее решение однородной системы

$$P(\xi) [h^{**}(N, i)]' = 0 \quad (7.108)$$

имеет вид

$$[h^{**}(N, i)]' = \sum_{k=1}^{\beta} (c^{1k} \mu_k^i + c^{2k} \mu_k^{-i}), \quad (7.109)$$

где μ_k^i и μ_k^{-i} — корни возвратного характеристического уравнения

$$\Delta(\mu) = |P(\mu)| = 0, \quad (7.110)$$

число которых обозначено через 2β , а c^{1k} и c^{2k} — n -мерные векторы коэффициентов, определенные с точностью до скалярных множителей c_1^{1k} и c_1^{2k} :

$$\begin{aligned} c^{1k} &= c_1^{1k} \|1, \beta_2^{1k}, \beta_3^{1k}, \dots, \beta_n^{1k}\|', \\ c^{2k} &= c_1^{2k} \|1, \beta_2^{2k}, \beta_3^{2k}, \dots, \beta_n^{2k}\|'. \end{aligned} \quad (7.111)$$

Общее решение неоднородной системы (7.107) включает, таким образом, 2β произвольных постоянных c_1^{1k} и c_1^{2k} ($k = 1, 2, \dots, \beta$). Эти последние находятся из условий удовлетворения исходных уравнений (7.93) для

$i = 0, 1, \dots, \beta_{1i} - 1, N - \beta_{2i} + 1, \dots, N (i = 1, 2, \dots, n)$, которые следует рассматривать как граничные условия для системы разностных уравнений (7.103). При этом может оказаться, что число этих граничных условий, равное

$$\sum_{l=1}^n (\beta_{1l} + \beta_{2l}) - 2\beta, \text{ больше числа неизвестных коэффициентов } c_1^{1k} \text{ и } c_1^{2k}.$$

В этом случае к общему решению системы разностных уравнений нужно добавить $\sum_{l=1}^n (\beta_{1l} + \beta_{2l}) - 2\beta$ δ -функций Кронекера с неизвестными коэффициентами на концах интервала $[0, N]$.

Таким образом, задача определения характеристик оптимального фильтра заканчивается решением системы

$\sum_{l=1}^n (\beta_{1l} + \beta_{2l})$ линейных уравнений с таким же числом переменных. Очевидно, что рассмотренный способ решения применим в случае, если время наблюдения N превышает величину $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (\beta_{1l} + \beta_{2l})$, а ощутимый выигрыш в простоте вычислений получается при достаточно больших N .

Пример 7.4. Рассмотрим случай измерения одного полезного случайного сигнала двумя позиционными измерителями (рис. 7.3). При измерении в каждом канале к сигналу примешиваются помехи в виде дискретного белого шума. Корреляционные функции сигнала и помех имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_{s_1 s_1}(kT) &= A^2 e^{-\alpha T |k|}, \\ R_{n_i n_i}(kT) &= B_i^2 \delta_{0,k}, \quad i = 1, 2, \\ R_{s_1 n_i}(kT) &= R_{n_i n_j}(kT) = 0, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned} \right\} (7.112)$$

Желаемый оператор $D(p) = 1$.

Уравнения оптимальной системы (7.93) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) + \sum_{j=0}^N R_{s_1 s_1}(jT - iT) h_2(N, j) &= \\ &= R_{s_1 s_1}(NT - iT), \\ \sum_{j=0}^N R_{s_1 s_1}(jT - iT) h_1(N, j) + \sum_{j=0}^N R_{r_2 r_2}(jT - iT) h_2(N, j) &= \\ &= R_{s_1 s_1}(NT - iT), \\ i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.113)$$

В соответствии с (7.112) корреляционные функции

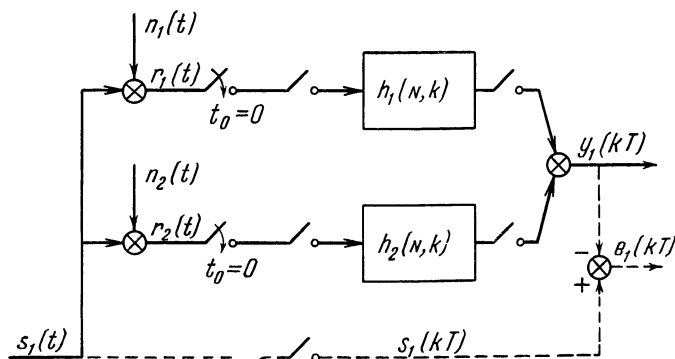


Рис. 7.3.

входных сигналов $r_1(kT)$ и $r_2(kT)$

$$R_{r_i r_i}(kT) = A^2 d^{|k|} + B_i^2 \delta_{0,k}, \quad i = 1, 2, \quad (7.114)$$

где $d = e^{-\alpha T}$.

Для соответствующих спектральных плотностей получим:

$$\Phi_{s_1 s_1}(z) = \frac{A^2(1 - d^2)}{(1 - dz)(1 - dz^{-1})}$$

и

$$\Phi_{r_i r_i}(z) = \frac{B_i^2(1-dz)(1-dz^{-1}) + A^2(1-d^2)}{(1-dz)(1-dz^{-1})}. \quad (7.115)$$

Применяя к каждому уравнению (7.113) оператор $B(\zeta) = (1-d\zeta)(1-d\zeta^{-1})$, приходим к однородной системе разностных уравнений

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(\zeta)h_1(N, i) + p_{12}(\zeta)h_2(N, i) &= 0, \\ p_{21}(\zeta)h_1(N, i) + p_{22}(\zeta)h_2(N, i) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.116)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_{ii}(\zeta) &= B_i^2(1-d\zeta)(1-d\zeta^{-1}) + A^2(1-d^2) \quad i = 1, 2, \\ p_{ij}(\zeta) &= A^2(1-d^2), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (7.117)$$

Определитель матрицы $P(\zeta)$ для системы (7.116)

$$|P(\zeta)| = p_{11}(\zeta)p_{22}(\zeta) - p_{12}(\zeta)p_{21}(\zeta) \quad (7.118)$$

имеет нули

$$\zeta_1 = d, \quad \zeta_2 = d^{-1}, \quad \zeta_3 = \mu, \quad \zeta_4 = \mu^{-1},$$

где значение μ определяется соотношениями

$$\mu = e^{-\alpha_1 T}, \quad \operatorname{ch} \alpha_1 T = \operatorname{ch} \alpha T + A^2 \left(\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2} \right) \operatorname{sh} \alpha T. \quad (7.119)$$

Очевидно, что величина μ совпадает с величиной полюса оптимального фильтра при бесконечном времени наблюдения (см. пример 5.1). Общее решение системы разностных уравнений ищется в виде

$$h_1(N, i) = c_1^1 d^i + c_1^2 d^{-i} + c_1^3 \mu^i + c_1^4 \mu^{-i},$$

$$h_2(N, i) = c_2^1 d^i + c_2^2 d^{-i} + c_2^3 \mu^i + c_2^4 \mu^{-i},$$

где постоянные c_1^l и c_2^l в силу уравнений (7.116) связаны соотношениями

$$\frac{c_1^1}{c_2^1} = \frac{c_1^2}{c_2^2} = -1; \quad \frac{c_1^3}{c_2^3} = \frac{c_1^4}{c_2^4} = -\frac{A_{12}(\mu)}{A_{11}(\mu)} = \frac{B_2^2}{B_1^2}. \quad (7.120)$$

С учетом (7.120) это общее решение, включающее четыре произвольные постоянные, запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} h_1(N, i) &= c_1^1 d^i + c_1^2 d^{-i} + c_1^3 \mu^i + c_1^4 \mu^{-i}, \\ h_2(N, i) &= -(c_1^1 d^i + c_1^2 d^{-i}) + \frac{B_1}{d^2} (c_1^3 \mu^i + c_1^4 \mu^{-i}). \end{aligned} \right\} (7.121)$$

Подставляя (7.121) в исходную систему (7.113) для $i = 0$ и $i = N$, получим четыре уравнения. Из рассмотрения этих уравнений нетрудно установить, что $c_1^1 = c_1^2 = 0$. Тогда уравнения для двух оставшихся неизвестных примут вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} c_1^3 + \alpha_{12} c_1^4 &= 1, \\ \alpha_{21} c_1^3 + \alpha_{22} c_1^4 &= 1, \end{aligned} \right\} (7.122)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{d^N} \left[\frac{B_1^2}{A^2} + \left(1 + \frac{B_1^2}{B_2^2} \right) \frac{1 - \mu^{N+1} d^{N+1}}{1 - \mu d} \right], \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{d^N} \left[\frac{B_1^2}{A^2} + \left(1 + \frac{B_1^2}{B_2^2} \right) \frac{1 - \mu^{-N-1} d^{N+1}}{1 - \mu^{-1} d} \right], \\ \alpha_{21} &= \left[\frac{B_1^2}{A^2} \mu^N + \left(1 + \frac{B_1^2}{B_2^2} \right) \frac{1 - \mu^{N+1} d^{-N-1}}{1 - \mu d^{-1}} d^N \right], \\ \alpha_{22} &= \left[\frac{B_1}{A^2} \mu^{-N} + \left(1 + \frac{B_1}{B_2} \right) \frac{1 - \mu^{-N-1} d^{-N-1}}{1 - \mu^{-1} d^{-1}} d^N \right] \end{aligned} \right\} (7.123)$$

Так как помеха является дискретным белым шумом, то величина минимальной дисперсии ошибки может быть вычислена по формуле

$$(D_e(N))_{\min} = h_i(N, N) B_i^2, \quad (7.124)$$

где номер i произволен ($i = 1, 2$). Отметим, что приведенный путь решения задачи не является наиболее рациональным. Действительно, применяя оператор $B(\zeta)$ к

каждой строке, мы ввели лишнюю операцию, повысив порядок разностных уравнений. Следствием этого было появление в характеристическом уравнении корней $z_1 = d$ и $z_2 = d^{-1}$ (совпадающих с нулями оператора $B(\zeta)$), коэффициенты при которых в общем решении оказались равными нулю. Это говорит о том, что сведение к системе разностных уравнений может быть получено применением оператора меньшего порядка. При этом под порядком оператора понимается степень по ζ или ζ^{-1} определителя матрицы операторов, т. е. для рассматриваемого примера — степень $[B(\zeta)]^2$. Укажем более простой путь решения. Для этого вычтем из первого уравнения (7.113) второе. В результате получим эквивалентную систему

$$B_1^2 h_1(N, i) - B_2^2 h_2(N, i) = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N R_{s_1 s_1}(jT - iT) h_1(N, j) + \sum_{j=0}^N R_{r_2 r_2}(jT - iT) h_2(N, j) = \\ = R_{s_1 s_1}(NT - iT). \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Применяя ко второму уравнению (7.125) оператор $B(\zeta)$ и исключая $h_2(N, i)$ в соответствии с первым, получим одно разностное уравнение

$$\left[A^2(1 - d^2) \left(\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2} \right) + (1 - d\zeta)(1 - d\zeta^{-1}) \right] h_1(N, i) = 0; \quad (7.126)$$

его общее решение записывается в виде

$$h_1(N, i) = c_1^3 \mu^i + c_1^4 \mu^{-i}, \quad (7.127)$$

где величина μ совпадает с (7.119). Используя первое уравнение (7.125), получим

$$h_2(N, i) = \frac{B_1^2}{B_2^2} (c_1^3 \mu^i + c_1^4 \mu^{-i}). \quad (7.128)$$

Для определения постоянных c_1^3 и c_1^4 необходимо воспользоваться лишь вторым из уравнений (7.125) при $i = 0$ и

$i = N$. При таком методе решения степень вычислительных трудностей для двухканального случая, по существу, не выше, чем для соответствующего одноканального. Очевидно, что аналогичный метод решения можно применить и для n -канальной системы при произвольном n .

Приведенный выше пример показывает, что выбор матрицы $Q(\xi)$ в форме (7.100) решает поставленную задачу, но приводит к системе разностных уравнений завышенного порядка. Это связано с тем обстоятельством, что для рациональной матрицы $\Phi_{rr}(z)$ существуют полиномиальные матрицы $P(z)$ и $Q(z)$ меньшего порядка, удовлетворяющие (7.97). Очевидно, что процедура решения задачи будет наиболее простой, если в качестве матриц $P(z)$ и $Q(z)$ выбрать такие, которые при заданной $\Phi_{rr}(z)$ имеют наименьшие возможные порядки.

Нетрудно видеть, что поставленная задача, по существу, есть не что иное, как рассмотренная в § 2.4 проблема идентификации для матрицы $\Phi_{rr}(z)$. Для ее решения нужно с помощью левых и правых элементарных операций привести матрицу $\Phi_{rr}(z)$ к диагональной:

$$\Phi_{rr}(z) = S(z) \operatorname{diag} \left\{ \frac{p_1(z)}{q_1(z)}, \dots, \frac{p_n(z)}{q_n(z)} \right\} T(z), \quad (7.129)$$

где $p_i(z)$ и $q_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — взаимно простые полиномы, а $S(z)$ и $T(z)$ — элементарные полиномиальные матрицы. Очевидно, что в качестве матриц $P(z)$ и $Q(z)$ можно выбрать следующие:

$$\left. \begin{aligned} Q(z) &= \operatorname{diag} \{q_1(z), q_2(z), \dots, q_n(z)\} S^{-1}(z), \\ P(z) &= \operatorname{diag} \{p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z)\} T(z). \end{aligned} \right\} \quad (7.130)$$

При этом полиномы $p_i(z)$, $q_i(z)$ и элементы матриц $S(z)$ и $T(z)$ записаны по положительным степеням z .

Представление матрицы $\Phi_{rr}(z)$ в виде (7.97) позволяет записать систему разностных уравнений, соответствующую (7.93), в виде

$$P(\xi) h'(N, i) = Q(\xi) R_{xd_1} (NT - iT). \quad (7.131)$$

Однако само нахождение системы разностных уравнений

еще не позволяет решить задачу до конца. Необходимо, помимо разностных уравнений, найти те алгебраические соотношения, которые будут играть роль граничных условий задачи. Для этого процесс перехода к разностным уравнениям разобьем на два этапа.

Применим первоначально к (7.93) слева элементарный оператор $S^{-1}(z)$. В результате этого получим эквивалентную систему $n(N+1)$ алгебраических уравнений

$$S^{-1}(\zeta) \sum_{j=0}^N R_{rr}(iT - iT) h'(N, j) = S^{-1}(\zeta) R_{rd_1}(NT - iT),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.132)$$

На втором этапе к полученной системе уравнений применяется уже диагональный оператор $\text{diag}\{q_1(\zeta), q_2(\zeta), \dots, q_n(\zeta)\}$. Это означает, что полиномиальный оператор $q_i(\zeta)$ должен быть применен к l -й строке системы (7.132).

Пусть полином $q_i(\zeta)$ имеет степень β_i , т. е. $q_i(\zeta) = \zeta^{\beta_i} + b_1 \zeta^{\beta_i-1} + \dots + b_{\beta_i}$. Тогда в качестве граничных условий используются последние β_i уравнений каждой строки (7.132), т. е. уравнения для $i = N - \beta_i + 1, N - \beta_i + 2, \dots, N$. Всего, таким образом, имеется $\sum_{l=1}^n \beta_l$ граничных условий. Эти условия должны быть удовлетворены за счет выбора произвольных постоянных общего решения системы разностных уравнений (7.131).

Изложенный метод решения применим также к более общему случаю, когда входные сигналы нестационарны. Здесь имеется в виду нестационарность особого вида, возникающая при прохождении стационарного случайного процесса через некоторую линейную систему с постоянными параметрами. Эта нестационарность, с одной стороны, может быть связана с эффектом переходных процессов в заданной части (измерителях $l_k(p)$), возникающих при включении системы в работу. Другой вид нестационарности связан с прохождением стационарного процесса через систему, находящуюся на границе устойчивости. Отметим, что формально путь решения задачи в случае таких неста-

ционарных процессов ничем не отличается от рассмотренного выше. При этом спектральную матрицу входного сигнала $\Phi_{rr}(z)$ нужно понимать в предельном смысле (см. § 4.2).

§ 7.4. Синтез многоканального фильтра при нестационарных входных сигналах

В предыдущем параграфе был рассмотрен частный случай задачи оптимальной обработки конечного числа данных, когда во входном сигнале отсутствовали нестационарные компоненты. В более общем случае ошибка фильтрации содержит как стационарную, так и нестационарную составляющие и может быть записана в виде

$$e_1(NT) = v_1(NT) - y_1(NT) = d_1(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j)r(jT) + \left[q'(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j)P(jT) \right] a. \quad (7.133)$$

Как и в § 7.1, некоторые из детерминированных составляющих (столбцов матрицы $P(jT)$) характеризуют мешающие воздействия. Соответствующие этим столбцам $P(jT)$ компоненты вектора $q(NT)$ (желаемого сигнала) должны быть положены равными нулю.

Можно рассмотреть две постановки задачи синтеза. В случае, если вероятностные характеристики коэффициентов a_s (составляющих вектора a) известны и их дисперсии не слишком велики, имеет смысл минимизация дисперсии ошибки (7.133). Характеристики оптимального фильтра в этом случае находятся из уравнений (7.27). Если же некоторые из величин a_s могут принимать достаточно большие значения, то задачу синтеза целесообразно решать при дополнительных условиях несмещенности по этим детерминированным составляющим:

$$\sum_{j=0}^N \sum_{l=1}^n h_l(N, j)p_{ls}(jT) = q_s(NT). \quad (7.134)$$

Отметим, что часто условие несмещенности ставится так-

же в случае, когда случайные коэффициенты α_s невелики, но их вероятностные свойства неизвестны. Минимальная дисперсия ошибки в этом случае получается больше, чем при учете корреляционных свойств коэффициентов α_s . Это увеличение дисперсии ошибки — плата за незнание свойств сигналов.

Прежде чем переходить к решению общей задачи, целесообразно остановиться на частном случае, представляющем значительный самостоятельный интерес для практических приложений.

Пусть стационарная составляющая полезного сигнала отсутствует, а помехами в каждом канале являются некоррелированные ошибки измерения (дискретный белый шум). При этом стационарная составляющая желаемого сигнала $d_1(NT) = 0$, а стационарная компонента входного сигнала $r(jT)$ представляет собой помеху $n(jT) = \|n_1(jT), n_2(jT), \dots, n_n(jT)\|'$. Ошибка измерения при $t_N = NT$ равна

$$e_1(NT) = - \sum_{j=0}^N h(N, j) n(jT) + \left[q'(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j) P(jT) \right]^{-1} a. \quad (7.135)$$

Уравнения оптимального фильтра в этом случае могут быть получены из более общих уравнений (7.27), если положить в них:

$$\left. \begin{aligned} R_{rd1}(NT - iT) &\equiv 0_{n \times 1} \\ R_{rr}(iT - jT) &= B\delta_{i,j}, \end{aligned} \right\} \quad (7.136)$$

где $B = \text{diag}\{B_1^2, B_2^2, \dots, B_n^2\}$ — диагональная матрица дисперсий ошибок. С учетом (7.136) уравнения оптимального фильтра (7.27) переписываются в виде

$$Bh'(N, i) + P(iT)K \left[\sum_{j=0}^N P'(jT)h'(N, j) - q(NT) \right] = 0, \quad (7.137)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Определение характеристик фильтра (весовых коэффициентов $h_k(N, j)$) непосредственным решением системы $n(N+1)$ уравнений (7.137) связано с большими вычислительными трудностями, на которые неоднократно указывалось ранее. Следующий простой прием позволяет свести задачу к решению системы лишь m уравнений. Это позволяет существенно сократить объем вычислений при $n(N+1) \gg m$. Напомним, что m — это число независимых нестационарных функций входного сигнала (размерность случайного вектора a).

Введем обозначение

$$b = K \left[\sum_{j=0}^N P'(jT) h'(N, j) - q(NT) \right]. \quad (7.138)$$

Вектор b имеет размерность m , $b = \|b_1, b_2, \dots, b_m\|'$. Решение уравнений (7.137) при учете введенного обозначения (7.138) имеет вид

$$\begin{aligned} h'(N, i) &= -B^{-1}P(iT)b, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.139)$$

Подставим (7.139) в (7.138). В результате получим систему m линейных уравнений относительно неизвестных b_i :

$$b = K \left[- \sum_{j=0}^N P'(jT) B^{-1} P(jT) b - q(NT) \right]. \quad (7.140)$$

Введем обозначение

$$C = \|c_{ij}\|_i^m = I + K \sum_{j=0}^N P'(jT) B^{-1} P(jT).$$

Тогда система (7.140) переписывается следующим образом:

$$Cb = -Kq(NT). \quad (7.141)$$

Используя (7.139), получим окончательное решение задачи:

$$h'(N, i) = -B^{-1}P(iT)C^{-1}Kq(NT). \quad (7.142)$$

Основным этапом получения решения является, таким образом, решение системы m линейных алгебраических уравнений (7.140) относительно m переменных b_l .

Выведем соотношение для минимальной дисперсии ошибки. Общее выражение (7.30) при учете (7.136) принимает вид

$$\begin{aligned} [D_e(N)]_{\min} &= q'(NT)Kq(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j)P(jT)Kq(NT) = \\ &= \left[q'(NT) - \sum_{j=0}^N h(N, j)P(jT) \right] Kq(NT). \end{aligned} \quad (7.143)$$

Принимая во внимание (7.138), получим:

$$[D_e(N)]_{\min} = -b'q(NT). \quad (7.144)$$

Рассмотрим ту же задачу в случае, когда по всем детерминированным составляющим наложены условия несмещенности в момент времени $t_N = NT$:

$$\sum_{j=0}^N h(N, j)P(jT) - q'(NT) = 0. \quad (7.145)$$

Вводя вектор множителей Лагранжа $\Lambda = \|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\|'$, приходим к задаче отыскания абсолютного минимума функции:

$$J = \sum_{j=0}^N h(N, j)Bh'(N, j) + \left[\sum_{j=0}^N h(N, j)P(jT) - q'(NT) \right] \Lambda. \quad (7.146)$$

Условие минимума функции (7.146) $n(N+1)$ переменных $h_l(N, j)$ имеет вид, совпадающий с точностью до обозначений с уравнениями (7.139):

$$\begin{aligned} Bh'(N, i) &= -P(iT)\Lambda, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.147)$$

Существенное различие уравнений (7.147) и (7.139) вытекает из различного смысла переменных b_l и λ_l , кото-

рые в последнем случае должны вычисляться из условий несмещенности (7.145). Подставляя решение (7.147) в (7.145) и транспонируя результат, получим:

$$\sum_{j=0}^N P'(jT) B^{-1} P(jT) \Lambda = -q(NT). \quad (7.148)$$

Из последней системы m уравнений с определителем, не равным нулю, находятся неизвестные множители Лагранжа λ_i . После этого оптимальные характеристики фильтра определяются по формулам (7.147). Как и в предыдущем случае, необходимо совместно решать систему m линейных алгебраических уравнений (7.148), независимо от величины времени наблюдения N . Минимальная дисперсия ошибки вычисляется по формуле, аналогичной (7.144):

$$[D_e(N)]_{\min} = -\Lambda' q(NT). \quad (7.149)$$

Результат решения задачи синтеза при наличии в качестве стационарных составляющих лишь помех вида дискретного белого шума и при условиях несмещенности полностью совпадает с результатами оценки параметров процессов, получаемыми по методу наименьших квадратов [24]. Это совпадение, очевидно, не является случайным, а отражает глубокую внутреннюю связь задачи синтеза оптимального фильтра и метода наименьших квадратов, хотя исходная постановка обеих задач на первый взгляд различна. Поскольку в методе наименьших квадратов задача решается без учета вероятностных характеристик коэффициентов α_s и в предположении некоррелированности помех при измерении, ее результаты можно рассматривать как частный случай общей теории синтеза оптимальных систем по критерию минимума дисперсии ошибки.

Пример 7.5. Пусть на вход каждого из n каналов поступают одни и те же детерминированные функции времени, которые измеряются с различными по уровню ошибками. В этом случае матрица

$$P(iT) = \left\| \begin{array}{c} p_1(iT), p_2(iT), \dots, p_m(iT) \\ p_1(iT), p_2(iT), \dots, p_m(iT) \\ \dots \\ p_1(iT), p_2(iT), \dots, p_m(iT) \end{array} \right\| \quad (7.150)$$

имеет n одинаковых строк. Корреляционная матрица помехи, как и в общем случае, имеет вид $B = \text{diag} \{B_1^2, B_2^2, \dots, B_n^2\}$. Решим задачу при условиях несмещенности (7.145). Тогда для неопределенных множителей Лагранжа λ_l ($l = 1, 2, \dots, m$) имеем систему m уравнений (7.148). Решая (7.148) при учете того, что матрица $P(jT)$ имеет вид (7.150), найдем:

$$\Lambda = -B_0^2 R^{-1} q(NT), \quad (7.151)$$

где $\frac{1}{B_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i^2}$ — след матрицы B^{-1} , а

$$R = \|r_{kl}\|_1^m = R' = \left\| \sum_{j=0}^N p_k(jT) p_l(jT) \right\|_1^m. \quad (7.152)$$

Для минимального значения дисперсии ошибки в соответствии с (7.149) и (7.151) получим:

$$[D_e(N)]_{\min} = B_0^2 q'(NT) R^{-1} q(NT). \quad (7.153)$$

Оценим эффективность многоканальной оптимальной обработки данных по сравнению с оптимальной одноканальной. Очевидно, что минимальная дисперсия при обработке данных, поступающих по одному, например k -му, каналу

$$[D_e^k(N)]_{\min} = B_k^2 q'(NT) R^{-1} q(NT). \quad (7.154)$$

Поэтому выигрыш при использовании n -канальной системы определяется формулой

$$\frac{[D_e(N)]_{\min}}{[D_e^k(N)]_{\min}} = \frac{B_0^2}{B_k^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{B_k^2}{B_i^2}}. \quad (7.155)$$

Если дисперсии помех во всех каналах одинаковы, то отношение (7.155) равно $1/n$.

Более общей, чем рассмотренная выше, является ситуация, когда входные сигналы содержат как стационарную случайную, так и детерминированную компоненты.

Уравнения для этого общего случая выведены в § 7.1:

$$\sum_{j=0}^N R_{rr}(jT - iT)h'(N, j) - R_{rd_1}(NT - iT) + P(iT)K \left[\sum_{j=0}^N P'(jT)h'(N, j) - q(NT) \right] = 0, \quad (7.156)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Для решения уравнений (7.156) воспользуемся приемом сведения их к системе разностных уравнений, рассмотренным ранее. Вводя обозначение

$$b = K \left[\sum_{j=0}^N P'(jT)h'(N, j) - q(NT) \right], \quad (7.157)$$

перепишем (7.156) в виде

$$\sum_{j=0}^N R_{rr}(jT - iT)h'(N, j) - R_{rd_1}(NT - iT) + P(iT)b = 0, \quad (7.158)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Применим к системе (7.158) оператор $Q(\zeta)$, полученный из матрицы $Q(z)$ (7.130) заменой комплексной переменной z на оператор опережения ζ . В результате аналогично (7.131) получим:

$$P(\zeta)h'(N, i) = Q(\zeta)R_{rd_1}(NT - iT) - Q(\zeta)P(iT)b. \quad (7.159)$$

Общее решение системы разностных уравнений (7.159) является суммой общего решения однородной системы

$$[h^{**}(N, i)]' = \sum_{k=1}^{\beta} (c^{1k}\mu_k^i + c^{2k}\mu_k^{-i}) \quad (7.160)$$

и частного решения, соответствующего виду правой части. Последнее в силу принципа суперпозиции записывается в виде

$$[h^*(N, i)]' = u^*(N, i) + V^*(N, i)b. \quad (7.161)$$

В формуле (7.161) $u^*(N, i) = \|u_1^*(N, i), \dots, u_n^*(N, i)\|'$ — частное решение, соответствующее вектору правой части $Q(\xi)R_{rd_1}(NT - iT)$. Вид матрицы решения $V^*(N, i) = \|v_{ki}^*(N, i)\|_{n \times m}$ соответствует матрице $Q(\xi)P(iT)$.

Частное решение (7.161) находится по обычным правилам отыскания частного решения систем линейных разностных уравнений по виду правой части (см. [2, 14], а также приложение II).

Завершающий этап решения задачи не отличается от изложенного в § 7.3. К общему решению системы разностных уравнений добавляется необходимое количество функций Кронекера на концах интервала $[0, N]$. Неизвестные константы C_1^k и C^{2k} и коэффициенты при функциях Кронекера находятся из соответствующих граничных условий. Дополнительные неизвестные b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) исключаются с помощью m соотношений (7.157). В случае, если задача синтеза оптимального фильтра решается при условиях несмещенности по всем или некоторым детерминированным функциям, то для соответствующих b_k , играющих роль множителей Лагранжа, вместо (7.157) используются условия несмещенности (7.145).

Пример 7.6. Рассмотрим двухканальную систему фильтрации, когда полезный сигнал стационарен и имеет корреляционную функцию

$$R_{s_1 s_1}(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Измерители являются позиционными и не вносят динамических искажений, $l_1(p) = l_2(p) = 1$. Желаемый оператор $D(p) \equiv 1$. Помеха в первом канале содержит стационарную составляющую в виде дискретного белого шума и нестационарную — уход с неизвестной постоянной скоростью α_1 . Во втором канале также имеется помеха в виде дискретного белого шума и гармоническая помеха заданной частоты ω , но неизвестной амплитуды α_2 . Матрица $P(t)$, таким образом, имеет вид

$$P(t) = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & \sin \omega t \end{vmatrix} \quad (7.162)$$

а вектор a равен $a = \|\alpha_1, \alpha_2\|'$. Задача решается при условиях несмещенности по детерминированным составляю-

щим помехи:

$$\sum_{j=0}^N j h_1(N, j) = 0, \quad \sum_{j=0}^N h_2(N, j) \sin \omega j T = 0. \quad (7.163)$$

Уравнения оптимального фильтра в соответствии с (7.158) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) + \sum_{j=0}^N R_{s_1 s_1}(jT - iT) h_2(N, j) &= \\ &= R_{s_1 s_1}(NT - iT) - b_1 iT, \\ \sum_{j=0}^N R_{s_1 s_1}(jT - iT) h_1(N, j) + \sum_{j=0}^N R_{r_2 r_2}(jT - iT) h_2(N, j) &= \\ &= R_{s_1 s_1}(NT - iT) - b_2 \sin \omega iT, \\ & i = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (7.164)$$

где b_1 и b_2 — неопределенные множители Лагранжа. Исходные данные по стационарным составляющим в настоящем примере совпадают с данными примера 7.4 (см. соотношения (7.112), (7.114) и (7.115)). Используя тот же прием, что и в примере 7.4, т. е. вычитая второе уравнение из первого, перейдем от (7.164) к эквивалентной системе:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^N R_{r_1 r_1}(jT - iT) h_1(N, j) + \sum_{j=0}^N R_{s_1 s_1}(jT - iT) h_2(N, j) &= \\ &= R_{s_1 s_1}(NT - iT) - b_1 iT, \\ B_1^2 h_1(N, i) - B_2^2 h_2(N, i) &= -b_1 iT + b_2 \sin \omega Ti, \\ & i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.165)$$

Применим к первому уравнению оператор $B(\zeta) = (1 - d\zeta)(1 - d\zeta^{-1})$ и перейдем к разностным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} [B_1^2(1 - d\zeta)(1 - d\zeta^{-1}) + A^2(1 - d^2)] h_1(N, i) + \\ + A^2(1 - d^2) h_2(N, i) &= -b_1(1 - d)^2 iT, \\ B_1^2 h_1(N, i) - B_2^2 h_2(N, i) &= -b_1 iT + b_2 \sin \omega Ti. \end{aligned} \right\} \quad (7.166)$$

Находя из второго уравнения $h_2(N, i)$ и подставляя в первое, после преобразования получим:

$$\begin{aligned} & \left[(1 - d\xi) (1 - d\xi^{-1}) + (1 - d^2) \left(\frac{A^2}{B_1^2} + \frac{A^2}{B_2^2} \right) \right] h_1(N, i) = \\ & = -A^2(1 - d^2) \left[\frac{1}{A^2 B_1^2} + \frac{1}{B_1^2 B_2^2} \right] b_1 iT + \\ & \quad + \frac{A^2(1 - d^2)}{B_1^2 B_2^2} b_2 \sin \omega T i. \end{aligned} \quad (7.167)$$

Частное решение (7.167) ищем в виде

$$h_1^*(N, i) = A_1 b_1 iT + A_2 b_2 \sin \omega T i, \quad (7.168)$$

где A_1 и A_2 — неопределенные коэффициенты. Подставляя (7.168) в (7.167) и приравнявая коэффициенты при iT и $\sin \omega iT$, получим:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= - \frac{\frac{1-d}{A^2 B_1^2} + \frac{1+d}{B_1^2 B_2^2}}{\frac{1-d}{A^2} + (1+d) \left(\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2} \right)} \\ A_2 &= \frac{\frac{1-d}{B_1^2 B_2^2}}{\frac{1+d^2 - 2d \cos \omega T}{A^2} + (1+d^2) \left(\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.169)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (7.167), имеет вид

$$h_1^{**}(N, i) = c_1 \mu^i + c_2 \mu^{-i}, \quad (7.170)$$

где величина μ вычисляется по (7.119). Для окончательного решения задачи осталось найти четыре неизвестных: две константы c_1 и c_2 и два множителя Лагранжа b_1 и b_2 . Для их определения надо воспользоваться первым из уравнений (7.165) при $i = 0$ и $i = N$ и условиями несмещенности (7.163). При этом необходимо учесть, что связь весовых функций каналов дается вторым из соотношений (7.166).

§ 7.5. Связь между задачами синтеза фильтров с конечным и бесконечным временем наблюдения

Динамические характеристики оптимального фильтра с бесконечной памятью могут быть получены из решения задачи для конечного N с помощью предельного перехода при $N \rightarrow \infty$. Очевидно, что для осуществления такого предельного перехода необходимо найти явную зависимость решения задачи фильтрации от N . При решении задачи методом, изложенным в §§ 7.2—7.4, для выполнения последнего требования достаточно найти зависимость от величины N коэффициентов c_1^{1k} и c_1^{2k} , входящих в общее решение системы разностных уравнений, и коэффициентов при δ -функциях.

Более общей является постановка задачи, учитывающая конечность времени наблюдения. Однако задача синтеза фильтра с бесконечной памятью представляет значительный самостоятельный интерес. Вычислительная процедура получения характеристик винеровского фильтра значительно проще решения аналогичной задачи с конечным временем наблюдения. Характеристика этого фильтра (дискретная передаточная матрица) непосредственно дает алгоритм реализации оптимальных операций на ЦВМ. Вычисление выходного сигнала фильтра в этом случае производится по программе с обратной связью, и при этом используется лишь конечное число значений входных и выходных сигналов. Количество удерживаемых в памяти данных определяется вероятностными свойствами сигналов и видом желаемого оператора и не зависит от времени наблюдения N .

Очевидно, что нестационарность фильтра с конечным временем наблюдения требует запоминания всех прошлых значений входного сигнала и перестройки программы вычислений при переходе к следующему такту. В то же время зависимость динамических характеристик оптимального фильтра от времени наблюдения такова, что, начиная с некоторого значения N , они практически становятся постоянными и достаточно близкими к характеристикам фильтра с бесконечной памятью. Оптимальный фильтр приближается при этом к стационарному. С ростом времени наблюдения N минимальное значение дисперсии ошибки

асимптотически уменьшается, приближаясь в пределе к величине дисперсии ошибки винеровского фильтра.

В связи с перечисленными обстоятельствами можно сделать вывод о том, что при рассмотрении вопросов об оптимальном выделении полезной информации целесообразно первоначально решить задачу синтеза фильтра с бесконечной памятью. Часто возможно использовать это решение для обработки данных даже в случае, если время наблюдения невелико, так как полученные результаты являются близкими к оптимальному решению задачи. Ошибка от замены оптимального фильтра с конечной памятью соответствующим винеровским может быть оценена после решения задачи синтеза при конечном N .

После этих вводных замечаний перейдем к рассмотрению вопроса о формальной связи решений при конечном и бесконечном времени наблюдения. Обратимся первоначально к случаю стационарных входных сигналов. Производя в уравнениях оптимального фильтра (7.28) замену переменных $i_1 = N - i$, $j_1 = N - j$, перепишем их в виде

$$\sum_{j_1=0}^N R_{rr}(i_1 T - j_1 T) h'(N, N - j_1) - R_{rd_1}(i_1 T) = 0, \quad (7.171)$$

$$i_1 = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Устремив в (7.171) N к бесконечности и замечая, что коэффициенты полученной системы уравнений не зависят от N , приходим к выводу, что и решение также не будет зависеть от N , так что

$$h(N, N - j_1) = h(j_1). \quad (7.172)$$

Последнее соотношение свидетельствует о стационарности оптимального фильтра. Учитывая (7.172), вместо (7.171) получим при $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} R_{rr}(i_1 T - j_1 T) h'(j_1) - R_{rd_1}(i_1 T) = 0, \quad (7.173)$$

$$i_1 = 0, 1, 2, \dots$$

Это — система уравнений типа Винера — Хопфа, записанная во временной области и представляющая собой беско-

нечную систему линейных алгебраических уравнений относительно весовых коэффициентов $h_k(j_1)$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $j_1 = 0, 1, 2, \dots$).

Для дальнейшего целесообразно ввести вспомогательную векторную функцию времени $q^1(iT) = \| q_1^1(iT), q_2^1(iT), \dots, q_n^1(iT) \|^T$, тождественно равную нулю при неотрицательных значениях аргумента

$$q^1(iT) = 0 \quad \text{при } i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.174)$$

и равную левой части (7.173) при $i < 0$. Тогда уравнения оптимального фильтра переписуются в эквивалентной форме:

$$\sum_{j=0}^{\infty} R_{rr}(iT - jT) h'(j) - R_{rd_1}(iT) = q^1(iT), \quad (7.175)$$

$$i = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Применим к (7.175) двустороннее z -преобразование, для чего умножим i -е уравнение на z^{-i} и просуммируем по всем i :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} R_{rr}(iT - jT) h'(j) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^{-i} R_{rd_1}(iT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^{-i} q^1(iT). \quad (7.176)$$

Переходя к соответствующим изображениям, получим:

$$\Phi_{rr}(z) h'(z) - \Phi_{rd_1}(z) = q^1(z)_-, \quad (7.177)$$

где $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} h(j)$ — дискретная передаточная матрица оптимального фильтра (матрица-строка), а

$$q^1(z)_- = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^{-i} q^1(iT) = \sum_{i=-\infty}^{-1} z^{-i} q^1(iT) = \\ = z[q^1(-T) + q^1(-2T)z + q^1(-3T)z^2 + \dots]$$

— неизвестная функция, аналитическая в силу (7.174) внутри единичного круга плоскости z (в области Γ^+).

Вводя обозначение

$$q^1(z)_- = zq(z)_-, \quad (7.178)$$

учитывающее, что $q^1(z)_-$ имеет множителем z , приведем уравнения (7.177) к виду, полностью совпадающему с уравнениями оптимального фильтра (5.22):

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) h'(z) - \frac{1}{z} \Phi_{rd_1}(z) = q(z)_-. \quad (7.179)$$

Эти уравнения были выведены в главе 5 непосредственно в частотной области. Проведенное рассмотрение дает путь их получения из временного подхода.

Интерес представляет то обстоятельство, что на базе общности уравнений оптимальных фильтров с конечной и бесконечной памятью возможно установить связь их решений — характеристик фильтров. Как показано в § 7.3, решение задачи фильтрации после определения корней характеристического уравнения $|P(z)| = 0$ записывается в виде суммы частных решений μ_k^i и μ_k^{-i} с неопределенными коэффициентами, зависящими от времени наблюдения N . При этом, как следует из (7.130), нули μ_k и μ_k^{-1} определителя матрицы $P(z)$ являются одновременно нулями определителя матрицы спектральной плотности $\Phi_{rr}(z)$, причем такими, что для всех k значения μ_k по модулю меньше, а μ_k^{-1} больше единицы.

Полюсами винеровского фильтра являются лишь половина нулей определителя $|\Phi_{rr}(z)|$ или, что то же самое, определителя $|P(z)|$. Весовая матрица фильтра с бесконечной памятью в соответствии с (5.42) может быть записана в виде суммы

$$h'(i) = \sum_{k=1}^{\beta} c^k \mu_k^i. \quad (7.180)$$

В силу устойчивости фильтра в (7.180) входят лишь слабые, убывающие с ростом аргумента i . Сравнивая (7.180) с (7.109), можно утверждать, что при осуществле-

нии предельного перехода $N \rightarrow \infty$ коэффициенты $c^{2k}(N)$ при неограниченно растущих членах μ_k^{-i} должны стремиться к нулю, а коэффициенты $c^{1k}(N)$ — соответственно к c^k :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} c^{1k}(N) &= c^k, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} c^{2k}(N) &= 0_{n \times 1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.181)$$

Пример 7.7. Постановка задачи синтеза в примерах 5.1 и 7.4 отличается лишь тем, что в последнем учитывалась конечность времени наблюдения. Решение задачи синтеза для примера 7.4 имеет вид (7.121), где

$$c_1^1 = c_1^2 = 0$$

и для нахождения коэффициентов c_1^3 и c_1^4 нужно решить систему двух уравнений (7.122). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что имеют место предельные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} c_1^3(N) &= \frac{B_2^2}{B_1^2 + B_2^2} (1 - \mu d^{-1}), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} c_1^4(N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.182)$$

При этом оптимальное решение переходит в (5.60) из примера 5.1.

Перейдем к рассмотрению вопроса о связи задач синтеза систем с конечным и бесконечным временем наблюдения при наличии во входных сигналах детерминированных функций времени. Задача синтеза оптимального фильтра при $N \rightarrow \infty$ в случае, если входной сигнал системы $x(t)$ содержит детерминированные компоненты, имеет определенную специфику. Формальный предельный переход от решения задачи с конечным к задаче с бесконечным временем не всегда имеет смысл. В общем случае при $N \rightarrow \infty$ фильтр остается нестационарным и ошибка фильтрации по-прежнему зависит от N .

В случае, если в числе детерминированных компонент имеется периодическая функция времени, характеристики

оптимального фильтра также будут изменяться периодически, так что предела в обычном смысле не существует. Подобный фильтр с бесконечной памятью не обладает указанными выше преимуществами винеровского фильтра. Поэтому будем осуществлять предельный переход таким образом, чтобы при $N \rightarrow \infty$ получить стационарный фильтр и ошибку $e^1(kT)$, являющуюся стационарной случайной функцией.

Обеспечение стационарности ошибки требует выполнения условий несмещенности по детерминированным компонентам.

Действительно, перепишем ошибку (7.133), считая фильтр стационарным, а время включения системы t_0 равным $-\infty$. Это означает, что в качестве нижнего предела суммирования необходимо принять $j = -\infty$:

$$\begin{aligned}
 e_1(kT) &= d_1(kT) - \sum_{j=-\infty}^k h(k-j)r(jT) + \\
 &+ \left[q'(kT) - \sum_{j=-\infty}^k h(k-j)P(jT) \right] a = \\
 &= d_1(kT) - \sum_{i=0}^{\infty} h(i)r(kT-iT) + \\
 &+ \left[q'(kT) - \sum_{i=0}^{\infty} h(i)P(kT-iT) \right] a. \quad (7.183)
 \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые (7.183) являются стационарными случайными функциями времени. Для того чтобы ошибка $e_1(kT)$ также была стационарной, достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$q'(kT) - \sum_{i=0}^{\infty} h(i)P(kT-iT) = 0_{1 \times m}. \quad (7.184)$$

Вспоминая обозначения, введенные в § 7.1, запишем

(7.184) в форме

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \int_0^{\infty} L(\tau) \varphi_l(kT - iT - \tau) d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\tau) \varphi_l(kT - \tau) d\tau, \\ l = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \int_0^{\infty} L^1(\tau) \varphi_l(kT - iT - \tau) d\tau = 0, \\ l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} (7.185)$$

Первые m_1 условий (7.185) являются условиями точного воспроизведения желаемых детерминированных функций времени, а $m - m_1$ последних соотношений — условиями точного подавления детерминированных помех.

Очевидно, что если функции $\varphi_l(t)$ для некоторых номеров l асимптотически убывают во времени, а измерители и желаемая система устойчивы, то соответствующие условия (7.185) удовлетворяются автоматически и не накладывают ограничений на вид весовой матрицы $h(i)$. Поэтому из всех соотношений (7.185) необходимо оставить лишь те, в которые входят функции $\varphi_l(t)$, не стремящиеся асимптотически к нулю.

Условия (7.185) не могут быть выполнены для всех k при функциях $\varphi_l(t)$ произвольного вида, например $\frac{1}{t}$, $\ln t$.

Однако при весьма естественных допущениях о характере функций $\varphi_l(t)$ эти соотношения выполнимы.

Пусть $\varphi_l(t)$ представляют собой квазиполиномы, т. е. функции времени, являющиеся решениями некоторых однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как показано в [50], такие функции удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_l(t + \tau) = \sum_{k=1}^m b_{lk}(\tau) \varphi_k(t), \quad (7.186)$$

где $b_{kl}(\tau)$ ($k, l = 1, 2, \dots, m$) — квазиполиномы. Используя свойство квазиполиномов $\varphi_l(t)$ (7.186) перепишем

(7.185) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m b_{lj}(kT) \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \int_0^{\infty} \mathcal{L}(\tau) \varphi_l(-iT - \tau) d\tau = \\ = \sum_{j=1}^m b_{lj}(kT) \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\tau) \varphi_l(-\tau) d\tau, \\ l = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^m b_{lj}(kT) \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \int_0^{\infty} \mathcal{L}^1(\tau) \varphi_l(-iT - \tau) d\tau = 0, \\ l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} (7.187)$$

Для удовлетворения (7.187) достаточно выполнить m равенств, не зависящих от текущего времени $t = kT$:

$$\left. \begin{aligned} I_l = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \int_0^{\infty} \mathcal{L}(\tau) \varphi_l(-iT - \tau) d\tau - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\tau) \varphi_l(-\tau) d\tau = 0, \\ l = 1, 2, \dots, m_1, \\ I_l = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \int_0^{\infty} \mathcal{L}^1(\tau) \varphi_l(-iT - \tau) d\tau = 0, \\ l = m_1 + 1, \dots, m. \end{aligned} \right\} (7.188)$$

Последние соотношения представляют собой систему ограничений (m равенств), наложенных на характеристики оптимального фильтра (весовую матрицу $h(i)$). Очевидно, что задача минимизации дисперсии ошибки $e_1(kT)$ при выполнении соотношений (7.188) является задачей на условный экстремум функции счетного числа переменных $h_l(i)$.

Для конкретизации дальнейшего изложения будем рассматривать частный случай, когда желаемый сигнал равен

полезному, т. е. $D(\tau) = \delta(\tau)$, а измерители являются позиционными и не вносят динамических искажений: $L(\tau) = 1_{n \times 1} \delta(\tau)$, где через $1_{n \times 1}$ обозначена матрица-столбец, состоящая из n единиц. Кроме того, примем $L^1(\tau) = 1_{n \times 1} \delta(\tau)$. Тогда (7.188) упрощаются. В скалярной форме они принимают вид

$$\left. \begin{aligned} I_l &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} h_k(i) \varphi_l(-iT) - \varphi_l(0) = 0, \\ & \quad l = 1, 2, \dots, m_1, \\ I_l &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} h_k(i) \varphi_l(-iT) = 0, \\ & \quad l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} (7.189)$$

Последние соотношения представляют собой условия несмещенности в установившемся режиме — условия несмещенного воспроизведения сигналов при $l = 1, 2, \dots, m_1$ и условия несмещенного подавления при $l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$. Отметим, что в соответствии с высказанным ранее замечанием в (7.189) включены условия лишь для незатухающих функций $\varphi_l(t)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи вида детерминированных сигналов $\varphi_l(t)$. Пусть детерминированная составляющая полезного сигнала является полиномом степени $m_1 - 1$ с неизвестными коэффициентами, $\varphi_l(t) = t^l$, $l = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$. Тогда первая группа условий (7.189) означает требование астатизма порядка m_1 :

$$\left. \begin{aligned} I_l &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} h_k(i) - 1 = 0, \\ I_l &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} (-iT)^l h_k(iT) = 0, \\ & \quad l = 1, 2, \dots, m_1 - 1. \end{aligned} \right\} (7.190)$$

Если l -я детерминированная функция представляет собой экспоненту $f_l(t) = e^{\beta_l t}$, $\text{Re } \beta_l > 0$, что l -е уравнения (7.189)

принимают вид

$$I_l = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n h_k(i) e^{-\beta_l iT} - 1 = 0, \quad (7.191)$$

если $1 \leq l \leq m_1$, и

$$I_l = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} h_k(i) e^{-\beta_l iT} = 0 \quad (7.192)$$

в случае, если $m_1 + 1 \leq l \leq m$.

Переходя к выводу уравнений фильтра, оптимального при условиях (7.189), введем m множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, после чего задача на условный экстремум переходит в задачу отыскания безусловного минимума функции

$$J = D_{e_1} + 2 \sum_{k=1}^m \lambda_k I_k, \quad (7.193)$$

где I_k имеют вид (7.189), а

$$\begin{aligned} D_{e_1} = & R_{d_1 d_1}(0) - 2 \sum_{i=0}^{\infty} h(i) R_{r d_1}(iT) + \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h(i) R_{rr}(iT - jT) h'(j). \end{aligned} \quad (7.194)$$

Приравнявая нулю частные производные от J по $h_k(i)$ ($k = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, 2, \dots$), получим, как обычно, уравнения оптимального фильтра

$$\sum_{j=0}^{\infty} R_{rr}(iT - jT) h'(j) - R_{r d_1}(iT) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(-iT) = 0, \quad (7.195)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Для перехода к уравнениям, записанным в изображениях, воспользуемся приемом, уже использованным ранее. Введем функцию $q^1(iT)$, удовлетворяющую (7.174) при $i = 0, 1, 2, \dots$ и равную левой части (7.195) при отрицательных значениях i . Кроме того, так как функции $\varphi_k(-iT)$ входят в уравнения лишь при $i \geq 0$, можно до-

определить их для остальных значений аргумента i . Примем

$$\varphi_k(-iT) = 0 \text{ при } i = -1, -2, -3, \dots \quad (7.196)$$

Рассмотрим случай, когда все $\varphi_k(t)$ являются экспонентами с положительными или комплексными показателями:

$$\varphi_k(t) = e^{\beta_k t}, \quad \operatorname{Re} \beta_k \geq 0. \quad (7.197)$$

Тогда применение двустороннего z -преобразования к соотношениям (7.195) дает с учетом обозначения (7.178) следующие уравнения:

$$\frac{1}{z} \Phi_{rr}(z) h'(z) - \Phi_{rd_1}(z) - \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{z - \gamma_k^{-1}} = q(z), \quad (7.198)$$

где $h'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} h'(i)$ — дискретная передаточная матрица (столбец) оптимального фильтра, а

$$\gamma_k = e^{\beta_k T} (|\gamma_k| > 1).$$

Для последовательного решения задачи в области комплексного переменного z ограничения (7.191) и (7.192) можно также выразить через изображения соответствующих функций. Нетрудно видеть, что условия (7.191) — (7.192) в соответствии с теоремой обращения z -преобразования эквивалентны соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^n h_k(z) - 1 \right] \frac{1}{1 - \gamma_l^{-1} z} \frac{dz}{z} &= 0, \\ l &= 1, 2, \dots, m_1, \\ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^n h_k(z) \frac{1}{1 - \gamma_l^{-1} z} \frac{dz}{z} &= 0, \\ l &= m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (7.199)$$

Действительно, $\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{1 - \gamma_l^{-1} z} \frac{dz}{z} = 1$, так как единст-

венным полюсом подынтегрального выражения внутри контура интегрирования является $z = 0$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} h_k(i) e^{-\beta_i T i} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta_i T i} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} h_k(z) z^i \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^n h_k(z) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta_i T i} z^i \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^n h_k(z) \frac{1}{1 - \gamma_l^{-1} z} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Очевидно, для удовлетворения (7.199) необходимо и достаточно выполнить условие аналитичности подынтегральных выражений вне единичного круга (окружности Γ)

$$\left. \begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^n h_k(z) &= (1 - \gamma_l z^{-1}) p_l(z)_+, \quad l = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{k=1}^n h_k(z) &= (1 - \gamma_l z^{-1}) p_l(z)_+, \quad l = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (7.200)$$

где $p_l(z)_+$ — произвольные рациональные функции z , аналитические в области Γ^+ .

Интересно отметить, что уравнения оптимального фильтра (7.198) и условия (7.200) полностью аналогичны соответствующим соотношениям в задаче синтеза замкнутых систем управления неустойчивым и неминимальнофазовым

объектом. Сумма $\sum_{k=1}^n h_k(z)$ является передаточной функцией выходного сигнала фильтра по отношению к полезному

сигналу $s_1(kT)$, а $1 - \sum_{k=1}^n h_k(z)$ — передаточная функция ошибки. Условия (7.200) выражают $K(z)$ -инвариантность, т. е. условие нулевой установившейся ошибки по соответствующим детерминированным сигналам. Метод решения уравнений оптимального фильтра (7.198) при условиях (7.200) ничем не отличается от изложенного в гл. 6.

Все приведенные выводы и соотношения можно распространить на более общий случай, когда $\phi_l(t)$ — произвольные квазиполиномы, $L(p) \neq 1_{n \times 1}$ и $D_1(p) \neq 1$.

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИ КОНЕЧНОМ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ

§ 8.1. Оптимальное управление при ограниченном времени

Рассмотрим систему управления с корректирующим устройством, включенным в канал ошибки. Предполагается, что система, которая находилась в покое при $t < 0$,

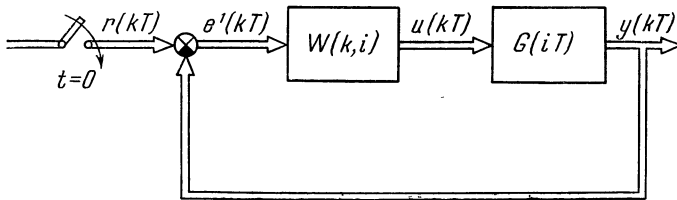


Рис. 8.1.

включается в работу в момент времени $t = 0$ (рис. 8.1). На вход системы поступает аддитивная смесь стационарного полезного сигнала $s(kT)$ и стационарной помехи $n(kT)$:

$$r(kT) = s(kT) + n(kT). \quad (8.1)$$

Ошибкой системы является отклонение выходного сигнала y от желаемого d в некоторый момент времени $t_N = NT$:

$$e(NT) = d(NT) - y(NT). \quad (8.2)$$

Критерием качества является сумма дисперсий ошибок отдельных каналов

$$J_e(N) = \text{Sp}[R_{ee}(NT, NT)] = \text{Sp}[M\{e(NT)e'(NT)\}]. \quad (8.3)$$

Возможны две постановки задачи синтеза. В первом случае время работы системы NT заранее фиксировано,

а сама система проектируется как стационарная. Весовая матрица корректирующего устройства зависит при этом от разности аргументов:

$$W(k, i) = W(k - i). \quad (8.4)$$

Обозначая весовую матрицу ПНЧ через $G(iT)$, запишем соотношения для координат системы:

$$\left. \begin{aligned} y(kT) &= \sum_{i=0}^{k-1} G(kT - iT) u(iT), \\ u(iT) &= \sum_{j=0}^i W(j) e^1(iT - jT), \\ e^1(kT) &= r(kT) - y(kT), \\ k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

В (8.5) учтено, что весовая матрица ПНЧ $G(iT)$ при $i = 0$ обращается в нуль: $G(0) = 0$.

При другой постановке задачи можно потребовать минимума показателя качества в каждый момент времени. Тогда NT — это текущее время и проектируемая система нестационарна:

$$\left. \begin{aligned} y(kT) &= \sum_{i=0}^{k-1} G(kT - iT) u(iT), \\ u(iT) &= \sum_{j=0}^i W(i, j) e^1(jT), \\ e^1(kT) &= r(kT) - y(kT), \\ k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Обратимся к первой задаче. Подстановка (8.5) в (8.3), позволяет выразить показатель качества J_e через весовые коэффициенты $w_{ij}(l)$ (элементы матрицы $W(lT)$):

$$J_e(N) = J_e(W(0), W(1), \dots, W(N-1)). \quad (8.7)$$

или в изображениях

$$y(z) = H(z)r(z),$$

где

$$H(z) = z^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} H(i+1)z^{-i}.$$

Задавая произвольные значения весовых коэффициентов корректора $w_{ij}(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) по соотношениям (8.8), можно последовательно определить $h_{ij}(l)$ ($l = 1, 2, \dots, N$). Связь старых $w_{ij}(k)$ и новых $h_{ij}(l)$ переменных взаимно однозначна, если матрица $G(T)$ неособая, $|G(T)| \neq 0$. В этом случае задача оптимизации характеристик корректирующего устройства системы рис. 8.1 эквивалентна задаче синтеза оптимальной разомкнутой системы рис. 8.2.

Для решения последней необходимо выразить значение корреляционной матрицы ошибки $R_{ee}(NT, NT)$ через весовую матрицу $H(lT)$. Учитывая (4.17) и (4.117), получим:

$$\left. \begin{aligned} R_{ee}(NT, NT) &= R_{dd}(NT, NT) - R_{dy}(NT, NT) - \\ &\quad - R_{yd}(NT, NT) + R_{yy}(NT, NT), \\ R_{yd}(NT, NT) &= \sum_{j=1}^N H(j)R_{rd}(jT), \\ R_{dy}(NT, NT) &= \sum_{j=1}^N R'_{rd}(jT)H'(j), \\ R_{yy}(NT, NT) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N H(j)R_{rr}(jT - iT)H'(i). \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Очевидно, что условия минимума показателя качества (8.3) имеют вид

$$\frac{\partial J_e}{\partial h_{ij}(l)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (8.11)$$

Вводя обозначение

$$\frac{\partial J_e}{\partial H(l)} = \left\| \frac{\partial J_e}{\partial h_{ij}(l)} \right\|_1,$$

перепишем (8.11) в матричной форме

$$\frac{\partial J_e}{\partial H(l)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (8.12)$$

Для записи уравнений оптимальной системы в явном виде необходимо подставить (8.10) в (8.12) и применить к полученному выражению правила дифференцирования следа матрицы (5.16). Производные соответствующие выкладки, получим:

$$\sum_{i=1}^N R_{rr}(lT - iT) H'(i) - R_{rd}(lT) = 0_{n \times n}, \quad (8.13)$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнения (8.13) представляют собой систему n^2N линейных алгебраических уравнений относительно оптимальных весовых коэффициентов $h_{ij}(l)$.

Подобно тому как это имело место в случае синтеза системы управления при бесконечном времени наблюдения (см. § 6.2), система (8.13) распадается на n групп независимых систем. Обозначая через $h^p(i)$ p -ю строку матрицы $H(i)$, а через $R_{rdp}(kT)$ — вектор $R_{rdp}(kT) = \|R_{r_1d_p}(kT), R_{r_2d_p}(kT), \dots, R_{r_nd_p}(kT)\|'$, перепишем (8.13) в виде

$$\sum_{i=1}^N R_{rr}(lT - iT) [h^p(i)]' - R_{rdp}(lT) = 0_{n \times 1}, \quad (8.14)$$

$$l = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Распадение уравнений на n независимых систем означает, что дисперсии компонент вектора ошибки $e(NT)$ минимизируются независимо.

Решение уравнений (8.14) путем сведения их к системе разностных уравнений производится способом, ничем не отличающимся от описанного в главе 7.

Перейдем ко второй задаче — синтезу системы, оптимальной в каждый момент времени $t = NT$ ($N = 1, 2, \dots$).

В этом случае, как очевидно, корректирующее устройство по существу задачи является нестационарным. Это приводит к нестационарности системы в целом.

При $N = 1$ соотношения (8.6) принимают вид (при $y(0) = 0$)

$$\left. \begin{aligned} y(T) &= G(T)u(0), \\ u(0) &= W(0, 0)e^1(0) = W(0, 0)r(0). \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Для минимизации дисперсии ошибки в момент времени T необходимо соответствующим образом выбрать n^2 элементов $w_{ij}(0, 0)$ матрицы $W(0, 0)$. При $N = 2$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} y(2T) &= G(2T)u(0) + G(T)u(T), \\ u(0) &= W(0, 0)r(0), \\ u(T) &= W(1, 0)r(0) + W(1, 1)[r(T) - y(T)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Весовая матрица $W(0, 0)$ была определена на предыдущем шаге. Поэтому произвольными являются $2n^2$ весовых ко-

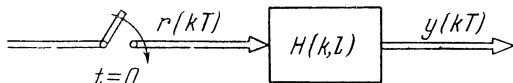


Рис. 8.3.

эффициентов $w_{ij}(1, 0)$ и $w_{ij}(1, 1)$. Ясно, что для произвольного N возможность минимизации показателя качества связана с выбором Nn^2 коэффициентов матриц $W(N - 1, 0)$, $W(N - 1, 1)$, ..., $W(N - 1, N - 1)$. Значения матриц $W(i, j)$ при $i, j = 0, 1, \dots, N - 2$ определены из решения задачи синтеза для предыдущих моментов времени.

Введем нестационарную разомкнутую систему (рис. 8.3), так что

$$y(kT) = \sum_{j=0}^{k-1} H(k, j)r(jT). \quad (8.17)$$

Потребуем, чтобы эта система по своим характеристикам «вход — выход» была эквивалентна замкнутой системе рис. 8.1. Это означает, что выходная координата $y(kT)$, вычисленная в силу (8.6), должна совпадать с величиной, оп-

линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N R_{rr}(kT - iT) H'(N, N - i) - R_{rd}(kT) = 0_{n \times n}, \quad (8.19)$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

из которых определяются n^2N неизвестных весовых коэффициентов $h_{ij}(N, l)$ ($l = 0, 1, \dots, N - 1$).

Уравнения (8.19) отличаются от (8.13) лишь обозначениями переменных. Это доказывает, что, несмотря на различие физического содержания, задачи синтеза оптимальной стационарной системы и системы, оптимальной в каждый момент времени, тождественны. Различие задач проявляется лишь при реализации системы.

В частности, для обеих систем минимальные значения показателя качества совпадают:

$$[J_e]_{\min} = \text{Sp} \left[R_{dd}(0) - \sum_{j=1}^N H(j) R_{rd}(jT) \right] =$$

$$= \text{Sp} \left[R_{dd}(0) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N H(j) R_{rr}(jT - iT) H'(i) \right], \quad (8.20)$$

где $H(i)$ — решение системы (8.13).

§ 8.2. Учет динамических ограничений, вызванных объектом

При отыскании оптимальных весовых коэффициентов $h_{ij}(l)$ по формулам (8.13) учитываются ограничения достижимого качества, связанные с характером входных сигналов. Учет динамических свойств заданной части производится только при помощи включения в $H(z)$ множителя z^{-1} , связанного с запаздыванием сигнала в объекте. Вместе с тем динамические свойства объекта накладывают некоторые дополнительные ограничения, которые необходимо учитывать при постановке задачи синтеза. Система, спроектированная без учета этих ограничений, не выполняет своих функций при отклонении параметров заданной части от расчетных.

Рассмотрим вариацию передаточной матрицы системы. Для этого перепишем рекуррентные соотношения (8.8) в изображениях:

$$H(z) = G(z)W(z)[I + G(z)W(z)]^{-1}, \quad (8.21)$$

где $W(z) = \sum_{i=0}^{N-1} W(i)z^{-i}$. Варьируя (8.21), получим:

$$\delta H(z) = [I - H(z)] \cdot \delta G(z)W(z)[I - H(z)]. \quad (8.22)$$

Передаточная матрица ПНЧ $G(z)$ определяется как рациональная матрица (2.35):

$$G(z) = Q^{-1}(z)P(z), \quad (8.23)$$

где $Q(z)$ и $P(z)$ — матрицы полиномов. Согласно (8.23)

$$\begin{aligned} \delta G(z) &= \delta[Q^{-1}(z)] \cdot P(z) + Q^{-1}(z) \cdot \delta P(z) = \\ &= -Q^{-1}(z)\delta Q(z)Q^{-1}(z)P(z) + Q^{-1}(z)\delta P(z) = \\ &= -Q^{-1}(z) \cdot \delta Q(z)G(z) + Q^{-1}(z) \cdot \delta P(z). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Исключая $W(z)$ по формуле $W(z) = G^{-1}(z)H(z)[I - H(z)]^{-1}$, перепишем (8.22) в виде

$$\begin{aligned} \delta H(z) &= [I - H(z)]Q^{-1}(z)\delta Q(z) + \\ &+ [I - H(z)] \cdot Q^{-1}(z)\delta P(z)G^{-1}(z)H(z). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Отклонения весовых коэффициентов $\delta H(l)$ находятся при этом по формуле обращения:

$$\delta H(l) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \delta H(z) z^l \frac{dz}{z}. \quad (8.26)$$

Эти отклонения характеристик системы от оптимальных, вызванные неточностью задания свойств объекта, приводят к увеличению показателя качества по сравнению с его минимальным значением:

$$\delta J_e = J_e - [J_e]_{\min} = \text{Sp} \left[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \delta H(j) R_{rr}(jT - iT) \delta H'(i) \right]. \quad (8.27)$$

Величина в квадратных скобках последнего соотношения формально представляет собой матрицу ковариаций на выходе многомерной линейной системы с передаточной функцией $\delta H(z)$, если на ее вход поступает сигнал $r(kT)$.

Если $G(z)$ имеет нули или полюсы вне единичного круга плоскости z , то $\delta H(l)$ в соответствии с (8.25) и (8.26) неограниченно увеличиваются с ростом номера l , так что при памяти системы N , превышающей некоторую величину, показатель качества J_e существенно отличается от своего минимального значения. При этом скорость роста δJ_e с увеличением N определяется наибольшим по модулю полюсом $\delta H(z)$.

Чтобы избежать этого, необходимо подчинить весовые коэффициенты $H(l)$ некоторым условиям, вытекающим из (8.25). Значение показателя качества будет при этом, естественно, больше величины, подсчитанной по формуле (8.20), но эта потеря в точности с избытком окупится тем, что система станет нечувствительной к малым вариациям динамических характеристик объекта. Из соотношения (8.25) вытекает, что асимптотические свойства вариации $\delta H(l)$ зависят от характеристик заданной части системы. Если объект является неустойчивым или неминимальнофазовым, то $\delta H(z)$ имеет дополнительные полюсы в области Γ^- . Для обеспечения нечувствительности показателя качества системы к характеристикам заданной части при большом N необходимо наложить на $H(z)$ такие условия, при которых вариация $\delta H(z)$ не будет иметь полюсов, совпадающих с полюсами и нулями $G(z)$ вне единичного круга.

Очевидно, что для выполнения последнего требования надо подчинить $H(z)$ соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= z^{-1}P^-(z)H^1(z), \\ I - H(z) &= H^2(z)Q^-(z) \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

или

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= z^{-1}p^-(z)H^1(z), \\ I - H(z) &= q^-(z)H^2(z), \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

где матрицы $P^-(z)$ и $Q^-(z)$ и полиномы $p^-(z)$ и $q^-(z)$ определены в соответствии с равенствами § 3.4, а $H^1(z)$ и $H^2(z)$ — матрицы полиномов от z^{-1} , связанные уравнением

$$z^{-1}P^-(z)H^1(z) + H^2(z)Q^-(z) = I \quad (8.30)$$

ИЛИ

$$z^{-1}p^-(z)H^1(z) + q^-(z)H^2(z) = I. \quad (8.31)$$

Действительно, в этом случае полюсами $\delta H(z)$ являются только полюсы оптимального оператора $H(z)$ и нули и полюсы $G(z)$, расположенные внутри единичного круга. Последнее обстоятельство приводит к асимптотическому затуханию элементов $\delta H(l)$ с ростом номера l .

Рассмотрим условия некритичности в форме (8.29). Полиномы $p^-(z)$ и $q^-(z)$ имеют вид

$$p^-(z) = \prod_{i=1}^{\alpha} (1 - \gamma_i z^{-1}),$$

$$q^-(z) = \prod_{j=1}^{\beta} (1 - \nu_j z^{-1}), \quad (8.32)$$

где γ_i и ν_j — нули и полюсы $G(z)$, расположенные в Γ^- , $|\gamma_i| > 1$, $|\nu_j| > 1$. Пусть $\alpha = \beta = 1$. Перепишем (8.29) в виде

$$H(z) = z^{-1} [H(1) + z^{-1}H(2) + \dots + z^{-N+1}H(N)] =$$

$$= z^{-1} (1 - \gamma_1 z^{-1}) [H^1(1) + z^{-1}H^1(2) + \dots + H^1(N-1) z^{-N+2}], \quad (8.33)$$

$$I - H(z) = I - z^{-1} [H(1) + z^{-1}H(2) + \dots + z^{-N+1}H(N)] =$$

$$= (1 - \nu_1 z^{-1}) [I + H^2(1) z^{-1} + \dots + H^2(N-1) z^{-N+1}]. \quad (8.34)$$

Приравнявая в (8.33) и (8.34) коэффициенты при одинаковых степенях z^{-1} и исключая $H^1(l)$ и $H^2(l)$, заменим последние условия эквивалентными:

$$\sum_{i=1}^N \gamma_1^{-i} H(i) = 0_{n \times n}, \quad (8.35)$$

$$I - \sum_{i=1}^N H(i) \nu_1^{-i} = 0_{n \times n}. \quad (8.36)$$

Соотношения (8.35) и (8.36) представляют собой систему $2n^2$ ограничений, наложенных на элементы весовой

матрицы $H(l)$. Задача минимизации показателя качества при условиях (8.35) — (8.36) является задачей на условный экстремум.

Вводя матрицы множителей Лагранжа Λ^1 и Λ^2 , придем к минимизации функции

$$J = J_e - 2 \operatorname{Sp} \left[(\Lambda^1)' \sum_{i=1}^N \gamma_1^{-i} H(i) \right] + \\ + 2 \operatorname{Sp} \left[(\Lambda^2)' \left(I - \sum_{i=1}^N H(i) \nu_1^{-i} \right) \right]. \quad (8.37)$$

Для получения уравнений оптимальной системы приравняем нулю частные производные от J по всем весовым коэффициентам. В результате получим систему $n^2 N$ линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^N R_{rr}(kT-lT) H'(l) - R_{rd}(kT) - \Lambda^1 \gamma_1^{-k} - \Lambda^2 \nu_1^{-k} = 0_{n \times n}, \\ k = 1, 2, \dots, N. \quad (8.38)$$

Последние уравнения совместно с дополнительными условиями представляют собой замкнутую систему $(N+2)n^2$ уравнений относительно Nn^2 весовых коэффициентов $h_{ij}(l)$ и $2n^2$ множителей Лагранжа λ_{ij}^1 и λ_{ij}^2 .

Повторяя все выкладки для произвольных α и β , нетрудно получить $\alpha + \beta$ дополнительных условий

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_j^{-i} H(i) &= 0_{n \times n} \\ j &= 1, 2, \dots, \alpha, \\ I - \sum_{i=1}^N \nu_j^{-i} H(i) &= 0_{n \times n}, \\ j &= 1, 2, \dots, \beta, \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

и уравнения оптимальной системы

$$\sum_{l=1}^N R_{rr}(kT - lT) H'(l) - R_{rd}(kT) - \\ - \sum_{i=1}^{\alpha} \Lambda^{ti} \gamma_i^{-k} - \sum_{i=1}^{\beta} \Lambda^{2i} \nu_i^{-k} = 0_{n \times n}, \quad (8.40) \\ k = 1, 2, \dots, N,$$

где введено $\alpha + \beta$ матриц множителей Лангранжа Λ^{ti} и Λ^{2i} . Метод решения уравнений (8.40) полностью аналогичен рассмотренному в предыдущей главе.

Изложенный подход к учету условий не критичности системы без особого труда распространяется на случай наличия во входных сигналах детерминированных функций времени и нестационарности проектируемой системы.

Пример 8.1. Рассмотрим одномерную систему. Полезный случайный сигнал имеет корреляционную функцию вида $R_{ss}(kT) = 0,9^{|k|}$, а помеха является дискретным белым шумом с дисперсией $R_{nn}(0) = 0,5$. Заданная непрерывная часть описывается передаточной функцией

$$G(p) = \frac{k_1(T_1 p + 1)}{p(T_2^2 p^2 + 2T_2 \xi p + 1)}, \quad (8.41)$$

где $k_1 = 0,5$; $T_1 = 2$ сек; $T_2 = 0,25$ сек; $\xi = 0,12$.

Дискретная передаточная функция ПНЧ при наличии фиксатора определяется равенством

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} = \frac{0,16(z - 0,95)(z + 3,96)}{(z - 1)(z^2 + 1,76z + 0,91)} \quad (8.42)$$

и имеет один нуль в области Γ^- , $z = \gamma = -3,96$. Период дискретности $T = 0,15$ сек. Уравнения для нахождения оптимальных весовых коэффициентов $h(l)$ без учета условий не критичности (8.13) имеют вид

$$\sum_{j=1}^N R_{rr}(iT - jT) h(j) = R_{ss}(iT), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.43)$$

где $R_{rr}(lT) = 0,9^{|l|} + 0,5\delta_{l,0}$.

Решение последней системы для малых N находится по правилу Крамера, а для больших — способом, изложенным в § 7.2. После этого

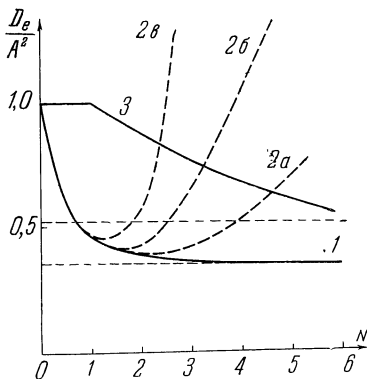


Рис. 8.4.

может быть построена зависимость минимальной дисперсии ошибки от величины N . Последняя приведена на рис. 8.4 (кривая 1). На том же графике дана зависимость дисперсии ошибки от величины N в случае, когда параметры объекта таковы, что величина γ отличается от расчетного значения на 5, 10 и 20% (кривые 2а, 2б и 2в). Как видно из рисунка, сравнительно небольшое изменение характери-

стик объекта даже при малых N приводит к существенному увеличению дисперсии ошибки.

Уравнения оптимальной системы при учете условий не критичности записываются в виде (8.38)

$$\sum_{j=1}^N R_{rr}(iT - jT)h(j) - \lambda\gamma^{-i} = R_{ss}(iT), \quad (8.44)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

причем для определения множителя Лагранжа λ используется условие

$$\sum_{i=1}^N h(i)\gamma^{-i} = 0. \quad (8.45)$$

Решение (8.44) — (8.45) и вычисление минимальной дисперсии ошибки дают кривую 3 на рис. 8.4. Непосредственная проверка показывает, что при отклонении γ на $\pm 20\%$ отклонение дисперсии ошибки от величины, соответствующей кривой 3, не превышает 4%.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ МАТРИЦ

В настоящем приложении приводятся краткие сведения по теории матриц, необходимые для понимания основных результатов книги. Все сведения носят справочный характер и, разумеется, даже в малой степени не могут заменить знакомства со специальной литературой. Читатель, незнакомый с теорией матриц, может обратиться к изучению монографии Ф. Р. Гантмахера [10] (достаточно знакомства с главами I—VII). В приложение включены также необходимые сведения по рациональным матрицам, отсутствующие в распространенной литературе.

§ П.1.1. Матрицы и действия над ними

Прямоугольная таблица, составленная из элементов любой природы

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m'n} \end{array} \right\| \quad (\text{П.1.1})$$

называется *матрицей*. Будем в дальнейшем рассматривать матрицы, *элементами* которых a_{ij} являются комплексные или действительные числа, полиномы или рациональные функции некоторого скалярного аргумента. Матрица, имеющая m строк и n столбцов, называется прямоугольной размера $m \times n$. При $m = n$ матрица называется квадратной.

Для сокращения записи матрица будет обозначаться также одной прописной буквой, например A . Для квадратной матрицы A с элементами a_{ij} вводится также обозначение $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Прямоугольная матрица, имеющая m строк и n столбцов, кратко записывается как $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$. В обозначении элементов первый индекс соответствует номеру строки, а второй — номеру столбца.

Определители, составленные из элементов p строк и p столбцов матрицы

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}, \quad (\text{П.1.2})$$

причем $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$ называются минорами p -го порядка. Определитель квадратной матрицы в соответствии с обозначением (П. 1.2) записывается как

$$|A| = A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1.3})$$

Главный минор p -го порядка получим, если в (П.1.2) положить $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$. Окаймленный минор для некоторого минора p -го порядка есть определитель $(p+1)$ -го порядка, полученный из (П.1.2) добавлением элементов любой строки матрицы A , расположенной сверху или снизу, и любого столбца A , расположенного слева или справа от исходного минора p -го порядка.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Очевидно, что ранг матрицы A не может быть больше минимального из чисел m и n :

$$r_A \leq \min \{m, n\}. \quad (\text{П.1.4})$$

Число линейно независимых строк матрицы A равно числу линейно независимых столбцов и равно ее рангу. Дефект матрицы определяется как

$$d_A = \min \{m, n\} - r_A. \quad (\text{П.1.5})$$

Для нахождения ранга можно воспользоваться следующей теоремой. Если матрица A имеет некоторый минор r -го порядка, отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры $(r + 1)$ -го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен r .

Квадратная матрица A называется *особой* либо *неособой* в зависимости от того, равен нулю или отличен от нуля ее определитель.

В случае, если число столбцов матрицы равно единице, $n = 1$, т. е. матрица имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\|, \quad (\text{П.1.6})$$

то ее называют *матрицей-столбцом*. Будем отождествлять матрицу-столбец с n -мерным вектором, вводя для его обозначения строчную букву:

$$x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\| = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|. \quad (\text{П.1.7})$$

Величины x_j называют компонентами вектора x .

Квадратную матрицу, у которой отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, будем называть *диагональной* и обозначать:

$$\text{diag} \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} = \left\| \begin{array}{cccc} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{array} \right\|. \quad (\text{П.1.8})$$

Единичная матрица — это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:

$$I = I_{n \times n} = \text{diag} \{1, 1, \dots, 1\}.$$

Нулевая матрица размеров $m \times n$ имеет все элементы, равные нулю, и обозначается символом $O_{m \times n}$. Квадратная матрица называется *верхней треугольной*, если она имеет

вид

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|.$$

Матрица

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

называется нижней треугольной. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$|A| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Следом квадратной матрицы A назовем сумму элементов главной диагонали

$$\text{Sp}[A] = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (\text{П.1.9})$$

Транспонированной для матрицы A является матрица A' , получаемая из A заменой строк на столбцы:

$$A' = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|. \quad (\text{П.1.10})$$

Сумма двух прямоугольных матриц A и B одинаковых размеров определяется как матрица $C = A + B$ того же размера с элементами c_{ij} , равными суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П.1.11})$$

Свойства суммы матриц:

$$\left. \begin{array}{l} A + B = B + A, \\ (A + B) + C = A + (B + C). \end{array} \right\} \quad (\text{П.1.12})$$

Произведением матрицы A на скаляр α называется матрица C , все элементы которой получаются из элементов A умножением на скаляр α :

$$C = \alpha A, \quad (\text{П.1.13})$$

если

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П.1.14})$$

Свойства произведения матрицы на скаляр:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B, \\ (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A, \\ (\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.15})$$

Если A — квадратная матрица размеров $n \times n$, а $C = \alpha A$, то определитель C равен

$$|C| = \alpha^n |A|. \quad (\text{П.1.16})$$

Произведение двух матриц A и B размеров $m \times l$ и $l \times n$ определяется как матрица $C = AB$ размера $m \times n$, элементы которой находятся по формулам

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}, \quad (\text{П.1.17})$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Произведение двух матриц определено, только если число столбцов первой равно числу строк второй.

Свойства произведения матриц:

$$\left. \begin{aligned} (AB)C &= A(BC), \\ (A+B)C &= AC + BC, \\ A(B+C) &= AB + AC, \\ AI &= IA = A, \\ (AB)' &= B'A'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.18})$$

В общем случае

$$AB \neq BA. \quad (\text{П.1.19})$$

Матрицы A и B называются *переставимыми*, если в (П.1.19) имеет место знак равенства. Определитель

В частности, ранг произведения двух квадратных матриц A и B равен рангу матрицы A , если B неособая, и равен рангу матрицы B , если A неособая:

$$\begin{aligned} r_{AB} &= r_A, & \text{если } |B| \neq 0; \\ r_{AB} &= r_B, & \text{если } |A| \neq 0. \end{aligned}$$

Обратной (инверсной) для неособой матрицы A называется матрица

$$A^{-1} = \|a_{ij}^{(-1)}\|_1^n, \quad (\text{П.1.26})$$

элементы которой равны

$$a_{ij}^{(-1)} = \frac{A_{ji}}{|A|}, \quad (\text{П.1.27})$$

где A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} в определителе $|A|$. Легко проверить, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \quad (\text{П.1.28})$$

Транспонированная матрица алгебраических дополнений определителя матрицы A называется *присоединенной* для A и обозначается через \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \|A_{ji}\|_1^n = \left\| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{array} \right\|. \quad (\text{П.1.29})$$

Таким образом, обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}. \quad (\text{П.1.30})$$

Определитель обратной матрицы

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \quad (\text{П.1.31})$$

Определитель присоединенной матрицы \tilde{A} равен определителю исходной матрицы в $(n-1)$ -й степени, где n — размер матрицы,

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1},$$

а все миноры p -го порядка матрицы \bar{A} имеют общий множитель $|A|^{p-1}$. Поэтому, если матрица A особая и имеет дефект, равный единице, то ранг присоединенной матрицы равен единице; в случае, если дефект матрицы A больше единицы, присоединенная матрица \bar{A} является нулевой.

Обратная матрица для произведения матриц равна произведению обратных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (\text{П.1.32})$$

Для диагональной матрицы $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ имеем

$$D^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}\right\}. \quad (\text{П.1.33})$$

Понятие обратной матрицы естественным образом связывается с решением систем линейных алгебраических уравнений. Если

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

то

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(-1)} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или в сокращенной записи

$$y = Ax \text{ и } x = A^{-1}y. \quad (\text{П.1.34})$$

Матрица, элементы которой сами являются матрицами соответствующих размеров, называется *клеточной*. Ее матрицы-элементы носят название клеток.

Матрица

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1t} \\ A^{21} & A^{22} & \dots & A^{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{A^{s1}}_{n_1} & \underbrace{A^{s2}}_{n_2} & \dots & \underbrace{A^{st}}_{n_t} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \dots \\ \} m_s \end{array} \quad (\text{П.1.35})$$

состоит из st клеток $A^{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$; $\beta = 1, 2, \dots, t$), имеющих размеры соответственно $m_\alpha \times n_\beta$: $A^{\alpha\beta} = \|a_{ij}^{\alpha\beta}\|_{m_\alpha \times n_\beta}$. Клеточную матрицу будем обозначать как

$$A = \|A^{\alpha\beta}\|_{s \times t}. \quad (\text{П.1.36})$$

Сумма двух клеточных матриц $A = \|A^{\alpha\beta}\|_{s \times t}$ и $B = \|B^{\alpha\beta}\|_{u \times v}$ определена, если $u = s$, $v = t$ и все соответствующие клетки $A^{\alpha\beta}$ и $B^{\alpha\beta}$ также имеют одинаковые размеры. В этом случае

$$A + B = \|A^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta}\|_{s \times t}. \quad (\text{П.1.37})$$

Произведение двух клеточных матриц определено, если $t = u$. Тогда

$$AB = C = \|C^{\alpha\beta}\|_{s \times v}, \quad (\text{П.1.38})$$

где

$$C^{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^t A^{\alpha\mu} B^{\mu\beta}, \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots, s, \\ \beta = 1, 2, \dots, v. \end{array} \quad (\text{П.1.39})$$

Размеры матриц $A^{\alpha\mu}$ и $B^{\mu\beta}$ при этом должны быть таковы, чтобы все произведения (П.1.39) имели смысл. Клеточная матрица (П.1.36) называется верхней (нижней) квазитреугольной, если $s = t$ и все $A^{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha > \beta$ (соответственно при $\alpha < \beta$). Частным случаем квазитреугольной является квазидиагональная матрица.

Определитель квазитреугольной (в частности, квазидиагональной) матрицы равен произведению определителей диагональных клеток, если эти клетки — квадратные матрицы:

$$|A| = |A^{11}| \cdot |A^{22}| \dots |A^{ss}|. \quad (\text{П.1.40})$$

Рассмотрим матрицу

$$F = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\|, \quad (\text{П.1.41})$$

где A и D — квадратные матрицы. Определитель F равен

$$|F| = \left| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right| = \begin{cases} |A| \cdot |D - CA^{-1}B|, & \text{если } |A| \neq 0, \\ |D| \cdot |A - BD^{-1}C|, & \text{если } |D| \neq 0. \end{cases} \quad (\text{П.1.42})$$

В частном случае, когда все четыре матрицы A , B , C и D — квадратные размеров $n \times n$, то из (II.1.42) следуют формулы Шура:

$$|F| = \begin{cases} |AD - ACA^{-1}B|, & \text{если } |A| \neq 0, \\ |AD - BD^{-1}CD|, & \text{если } |D| \neq 0. \end{cases} \quad (\text{II.1.43})$$

Если элементы матрицы A являются функциями некоторого скалярного параметра τ , то говорят, что матрица A является функцией от τ :

$$A(\tau) = \|a_{ij}(\tau)\|_{m \times n}. \quad (\text{II.1.44})$$

Применение линейной операции к $A(\tau)$ означает ее выполнение для каждого элемента $a_{ij}(\tau)$. В частности,

$$\frac{d}{d\tau} A(\tau) = \left\| \frac{da_{ij}(\tau)}{d\tau} \right\|_{m \times n} \quad (\text{II.1.45})$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} A(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \left\| \int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(\tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_{m \times n}, \quad (\text{II.1.46})$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная скалярная функция. Пусть квадратная матрица $C = \|c_{ij}\|_1^n$ равна произведению двух матриц $A = \|a_{ij}\|_{n \times l}$ и $B = \|b_{ij}\|_{l \times n}$:

$$C = AB.$$

Введем матрицу D , элементами d_{ij} которой являются частные производные от следа матрицы C по элементам a_{ij} :

$$D = \|d_{ij}\|_{n \times l} = \left\| \frac{\partial \text{Sp}[AB]}{\partial a_{ij}} \right\|_{n \times l}. \quad (\text{II.1.47})$$

В соответствии с (II.1.17) имеем:

$$\text{Sp}[AB] = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{ki}. \quad (\text{II.1.48})$$

Тогда

$$d_{ij} = \frac{\partial \text{Sp}[AB]}{\partial a_{ij}} = b_{ji}.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{\partial \operatorname{Sp}[AB]}{\partial a_{ij}} \right\|_{n \times l} = \|b_{ji}\|_{n \times l} = B'. \quad (\text{П.1.49})$$

Для матрицы вида (П.1.47) введем обозначение

$$\left\| \frac{\partial \operatorname{Sp}[AB]}{\partial a_{ij}} \right\| = \frac{\partial \operatorname{Sp}[AB]}{\partial A}$$

и окончательно запишем:

$$\frac{\partial \operatorname{Sp}[AB]}{\partial A} = B'. \quad (\text{П.1.50})$$

Аналогичным образом для произведения трех матриц показывается, что

$$\frac{\partial \operatorname{Sp}[ABC]}{\partial B} = (C \cdot A)'. \quad (\text{П.1.51})$$

§ П.1.2. Линейные преобразования. Эквивалентность и подобие матриц. Собственные значения матриц

Произведение матрицы на вектор дает некоторый другой вектор. Это преобразование допускает две интерпретации.

Первая интерпретация имеет смысл лишь в случае, если матрица преобразования $T = \|t_{ij}\|_1^n$ является квадратной и неособой. Тогда матрица T устанавливает взаимно однозначное соответствие между компонентами векторов x и \tilde{x} в двух различных системах координат одного и того же n -мерного линейного пространства:

$$\tilde{x} = Tx, \quad x = T^{-1}\tilde{x}, \quad |T| \neq 0. \quad (\text{П.1.52})$$

Вектор x как геометрический образ при этом не изменяется, а приобретает лишь новые координаты. Линейное преобразование с матрицей T означает переход от одного базиса (системы координат) к другому.

В другой интерпретации вектору x с помощью преобразования

$$y = Ax \quad (\text{П.1.53})$$

ставится в соответствие новый вектор y , где матрица

$A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ в общем случае может быть прямоугольной ранга r . Преобразование (П.1.53) сопоставляет каждому вектору x исходного n -мерного пространства X новый вектор y другого пространства Y с числом измерений, равным рангу r матрицы A . Так как ранг матрицы A меньше, чем $\min\{m, n\}$, то размерность пространства Y всегда не больше размерности n пространства X .

Очевидно, что любое линейное преобразование означает переход к пространству, имеющему размерность меньшую или равную исходной. Рассмотрим, как изменяется преобразование (П.1.53) при изменении базиса в пространствах X и Y . Пусть старые x, y и новые \tilde{x} и \tilde{y} координаты связаны соотношениями

$$\tilde{x} = Tx, \quad \tilde{y} = Py, \quad |T| \neq 0, \quad |P| \neq 0. \quad (\text{П.1.54})$$

Тогда наряду с (П.1.53) будем иметь:

$$\tilde{y} = A\tilde{x}. \quad (\text{П.1.55})$$

Матрицы \tilde{A} и A в новом и старом базисе связаны соотношением

$$A = P^{-1}\tilde{A}T \quad (\text{П.1.56})$$

или, обозначая P^{-1} через S ,

$$A = S\tilde{A}T. \quad (\text{П.1.57})$$

Две матрицы одинаковых размеров \tilde{A} и A , связанные соотношением (П.1.57), где S и T — неособые квадратные, называются *эквивалентными*. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг. Равенство рангов является необходимым и достаточным условием эквивалентности двух матриц одинаковых размеров. Более того, матрицы S и T всегда могут быть выбраны такими, чтобы матрица \tilde{A} имела вид

$$\tilde{A} = I_r = \left\| \begin{array}{cccccc} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}^r & & & & & \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & & & & & \end{array} \right\|. \quad (\text{П.1.58})$$

В матрице I_r (П.1.58) вдоль главной диагонали сверху вниз идут r единиц. Все остальные ее элементы равны нулю. Это означает, что любая прямоугольная $m \times n$ -матрица ранга r может быть записана в виде

$$A = SI_r T. \quad (\text{П.1.59})$$

Равенство (П.1.59) не изменится, если в матрице S отбросить $n - r$ последних столбцов, в матрице T отбросить $m - r$ последних строк и заменить I_r единичной матрицей I размера $r \times r$. Обозначая матрицу, составленную из первых r столбцов S , через S^1 и матрицу, составленную из первых r строк T , через T^1 , получим:

$$A = S^1 \cdot T^1. \quad (\text{П.1.60})$$

Таким образом, любая $m \times n$ -матрица ранга r может быть представлена как произведение двух матриц: матрицы $S^1 = \|s_{ij}\|_{m \times r}$ ранга r и матрицы $T^1 = \|t_{ij}\|_{r \times n}$ ранга r .

Пусть в (П.1.53) матрица A — квадратная (не обязательно неособая). Тогда преобразование (П.1.53) сопоставляет вектору x новый вектор y в том же самом пространстве. Рассмотрим, как будет выглядеть это преобразование в другой системе координат (в другом базисе). Для новых и старых координат имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= Tx, \\ \tilde{y} &= Ty, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П. 1.61})$$

$$|T| \neq 0.$$

Поэтому

$$A = T^{-1} \tilde{A} T. \quad (\text{П.1.62})$$

Две квадратные матрицы, связанные равенством (П.1.62), где T — любая неособая матрица, называются *подобными*.

Особую роль играют векторы x , для которых (П.1.53) даст вектор y , коллинеарный x :

$$y = \lambda x, \quad Ax = \lambda x,$$

где λ — скалярный множитель.

Такой ненулевой вектор x существует лишь в случае, если значения λ удовлетворяют характеристическому

уравнению

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (\text{П.1.63})$$

Корни этого уравнения, которое в развернутой форме имеет вид

$$\lambda^n - \text{Sp}[A]\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n |A| = 0, \quad (\text{П.1.64})$$

называются *собственными значениями* (характеристическими числами) матрицы A . Две подобные матрицы имеют одни и те же собственные значения.

§ П.1.3. Полиномиальные и рациональные матрицы

Полиномиальной (или λ -матрицей) называется прямоугольная матрица $A(\lambda)$, элементы которой являются многочленами от скалярного аргумента λ :

$$A(\lambda) = \|a_{ij}(\lambda)\|_{m \times n} = \|a_{ij}^0 \lambda^v + a_{ij}^1 \lambda^{v-1} + \dots + a_{ij}^v\|_{m \times n}, \quad (\text{П.1.65})$$

где v — наибольшая из степеней всех $a_{ij}(\lambda)$. Эта матрица может быть записана также в виде *матричного полинома*

$$A(\lambda) = A^0 \lambda^v + A^1 \lambda^{v-1} + \dots + A^v, \quad (\text{П.1.66})$$

где

$$A^k = \|a_{ij}^k\|_{m \times n}.$$

Многочлен (П.1.66) называется *регулярным*, если матрица коэффициентов при старшей степени λ неособая, $|A^0| \neq 0$, и *иррегулярным* — в противном случае.

Левыми *элементарными* операциями над λ -матрицами являются:

- 1) умножение любой (i -й) строки на число $c \neq 0$;
- 2) прибавление к какой-либо (i -й) строке другой (k -й), предварительно умноженной на полином $b(\lambda)$;
- 3) перестановка местами двух строк (i -й и k -й).

Эти операции равносильны умножению матрицы $A(\lambda)$ слева на квадратные матрицы размеров $m \times m$:

$$\left. \begin{aligned}
 S' &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right\|^{(i)}, & S'' &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \dots & b(\lambda) & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right\|^{(i)}, \\
 S''' &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \dots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & \dots & 0 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right\|^{(i), (k)}
 \end{aligned} \right\} \quad (П.1.67)$$

Аналогичные операции, произведенные над столбцами, называются правыми элементарными операциями. Этим операциям соответствуют квадратные матрицы размеров $n \times n$:

$$\left. \begin{aligned}
 T' &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right\|^{(i)}, & T'' &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \dots & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & b(\lambda) & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & \dots & 1 \end{array} \right\|^{(i), (k)}, \\
 T''' &= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \dots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 0 & \dots & 0 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right\|^{(i), (k)}
 \end{aligned} \right\} \quad (П.1.68)$$

Матрицы S', S'', \dots, T''' являются полиномиальными

квадратными матрицами с определителем, отличным от нуля и не зависящим от λ . Такие матрицы называются элементарными. Матрица, обратная элементарной, а также произведение любого конечного числа элементарных матриц являются элементарными матрицами.

Две полиномиальные матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ называются эквивалентными, если они связаны соотношением

$$B(\lambda) = S(\lambda)A(\lambda)T(\lambda), \quad (\text{П.1.69})$$

где $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ — элементарные матрицы.

Каждая квадратная λ -матрица с постоянным и отличным от нуля определителем может быть представлена в виде произведения матриц типа S' , S'' , ..., T''' . Поэтому соотношение (П.1.69) можно рассматривать как результат применения к матрице $A(\lambda)$ последовательно лево- и правоэлементарных операций.

Ранг λ -матрицы равен r , если хотя бы один из ее миноров r -го порядка не обращается в нуль тождественно по аргументу λ , а все миноры более высокого порядка тождественно равны нулю.

Введем понятие об *инвариантных многочленах* λ -матрицы. Наибольший общий делитель всех миноров j -го порядка со старшим коэффициентом, равным 1, обозначим через $A_j(\lambda)$.

Тогда в ряду $A_r(\lambda)$, $A_{r-1}(\lambda)$, ..., $A_1(\lambda)$, $A_0(\lambda) \equiv 1$ каждый многочлен без остатка делится на последующий. Частные от этих делений

$$i_1(\lambda) = \frac{A_r(\lambda)}{A_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{A_{r-1}(\lambda)}{A_{r-2}(\lambda)}, \dots, \quad i_r(\lambda) = A_1(\lambda) \quad (\text{П.1.70})$$

называются *инвариантными многочленами матрицы* $A(\lambda)$. При этом каждый многочлен, начиная со второго, является делителем предыдущего. Две эквивалентные матрицы имеют одинаковые инвариантные многочлены. С помощью правых и левых элементарных операций любую прямоугольную матрицу можно привести к эквивалентной ей

канонической форме:

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} i_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{r-1}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.1.71})$$

так что

$$A(\lambda) = S(\lambda)U(\lambda)T(\lambda) \quad (\text{П.1.72})$$

(S и T — элементарные матрицы).

Процедура приведения полиномиальной матрицы $A(\lambda)$ к канонической форме с помощью левых и правых элементарных преобразований может быть построена следующим образом [10]. Среди всех не равных тождественно нулю элементов $a_{jj}(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ возьмем тот элемент, который имеет наименьшую степень относительно λ , и путем соответствующих перестановок строк и столбцов сделаем его элементом $a_{11}(\lambda)$. После этого найдем частные и остатки от деления многочленов $a_{i1}(\lambda)$ и $a_{1j}(\lambda)$ на $a_{11}(\lambda)$:

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda) + r_{i1}(\lambda), \quad (\text{П.1.73})$$

$$a_{1j}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{1j}(\lambda) + r_{1j}(\lambda),$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если хотя бы один из остатков $r_{i1}(\lambda)$, $r_{1j}(\lambda)$, например $r_{1k}(\lambda)$, не равен тождественно нулю, то, вычитая из k -го столбца первый столбец, предварительно умноженный на $q_{1k}(\lambda)$, мы заменим элемент $a_{1k}(\lambda)$ остатком $r_{1k}(\lambda)$, который имеет меньшую степень, нежели $a_{11}(\lambda)$. Тогда мы имеем возможность снова уменьшить степень элемента, стоящего в левом верхнем углу матрицы, поместив на это место элемент с наименьшей степенью относительно λ . Если же все остатки $r_{21}(\lambda)$, ..., $r_{m1}(\lambda)$; $r_{12}(\lambda)$, ..., $r_{1n}(\lambda)$ равны тождественно нулю, то, вычитая из i -й строки первую, помноженную предварительно на $q_{i1}(\lambda)$ ($i = 2, \dots, m$), а из j -го столбца — первый, предварительно помноженный

на $q_{1j}(\lambda)$ ($j = 2, 3, \dots, n$), мы приведем нашу многочленную матрицу к виду

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{array} \right\|.$$

Если при этом хотя бы один из элементов $a_{ij}(\lambda)$ ($i = 2, \dots, m; j = 2, \dots, n$) не делится без остатка на $a_{11}(\lambda)$, то прибавляя к первому столбцу тот столбец, который содержит этот элемент, мы придем к предыдущему случаю и, следовательно, снова сможем заменить элемент $a_{11}(\lambda)$ многочленом меньшей степени.

Поскольку первоначальный элемент $a_{11}(\lambda)$ имел определенную степень и процесс уменьшения этой степени не может неограниченно продолжаться, то после конечного числа элементарных операций мы должны получить матрицу вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) & \dots & b_{mn}(\lambda) \end{array} \right\|, \quad (\text{П.1.74})$$

в которой все элементы $b_{ij}(\lambda)$ делятся без остатка на $a_1(\lambda)$. Если среди этих элементов $b_{ij}(\lambda)$ имеются не равные тождественно нулю, то, продолжая тот же процесс приведения для строк с номерами 2, 3, ..., m и столбцов с номерами 2, 3, ..., n , мы приведем матрицу (П. 1.74) к виду

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \dots & c_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3}(\lambda) & \dots & c_{mn}(\lambda) \end{array} \right\|, \quad (\text{П.1.75})$$

где $a_2(\lambda)$ делится без остатка на $a_1(\lambda)$, а все многочлены $c_{ij}(\lambda)$ делятся без остатка на $a_2(\lambda)$. Продолжая этот процесс далее, мы в конце концов придем к матрице

получается как объединение элементарных делителей матриц $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$.

Перейдем к рассмотрению рациональных матриц. Матрица $G(\lambda)$ называется *рациональной*, если ее элементы являются рациональными функциями параметра λ , в общем случае комплексного. Таким образом, $G(\lambda) = \|g_{ij}(\lambda)\|_{m \times n} = \left\| \frac{p_{ij}(\lambda)}{q_{ij}(\lambda)} \right\|_{m \times n}$, где $p_{ij}(\lambda)$ и $q_{ij}(\lambda)$ — полиномы. Матрица $G(\lambda)$ называется *вещественной*, если коэффициенты полиномов $p_{ij}(\lambda)$ и $q_{ij}(\lambda)$ — вещественные числа. Для вещественной матрицы $\overline{G(\lambda)} = G(\bar{\lambda})$, где черта означает переход к комплексно-сопряженным величинам. Ранг рациональной матрицы определяется как наивысший порядок минора, не обращающегося тождественно в нуль. Квадратная рациональная матрица называется *неособой*, если ее ранг равен размеру, и *особой* — в противном случае.

Матрица $G(\lambda)$ является *аналитической* в некоторой области комплексной плоскости λ , если все ее элементы $q_{ij}(\lambda)$ не имеют в этой области особых точек (полюсов). Точка $\lambda = \lambda_0$ является *полюсом* $G(\lambda)$, если хотя бы один из ее элементов имеет полюс при $\lambda = \lambda_0$. Если λ_0 — полюс рациональной матрицы, то каждый элемент $q_{ij}(\lambda)$ может быть разложен на простейшие дроби, и после объединения всех членов, имеющих полюс в этой точке, получим (при $\lambda_0 \neq \infty$)

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-k} G_k + (\lambda - \lambda_0)^{-k+1} G_{k-1} + \dots \\ \dots + (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_1 + G_0(\lambda), \quad (\text{П.1.80})$$

где $G_0(\lambda_0)$ конечно, $G_k \neq 0$ и G_i ($1 \leq i \leq k$) — числовые матрицы. Для случая $\lambda_0 = \infty$ необходимо заменить в (П.1.80) $(\lambda - \lambda_0)^{-i}$ на λ^i ($1 \leq i \leq k$). Все матрицы в (П.1.80) определяются единственным образом, если задана $G(\lambda)$. Число k в (П.1.80) называется порядком (кратностью) полюса $G(\lambda)$.

Вычетом матрицы $G(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ называется матрица числовых коэффициентов G_1 в разложении (П.1.80). В случае, если полюс $\lambda = \lambda_0$ является простым, то вычет матрицы находится по формуле

$$G_1 = R(\lambda_0) = \lim [(\lambda - \lambda_0)G(\lambda)]. \quad (\text{П.1.81})$$

В общем случае

$$G_1 = R(\lambda_0) = \lim \left\{ \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} [(\lambda - \lambda_0)^k G(\lambda)] \right\} \frac{1}{(k-1)!}. \quad (\text{П.1.82})$$

Ранг вычета $G(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ определяется как ранг матрицы G_1 .

Пусть $G(\lambda)$ — рациональная матрица размеров $m \times n$ и ранга r . Тогда существуют такие две элементарные (полиномиальные) матрицы $S(\lambda) = \|s_{ij}(\lambda)\|_{m \times r}$ и $T(\lambda) = \|t_{ij}(\lambda)\|_{r \times n}$, что

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= S(\lambda) \operatorname{diag} \left\{ \frac{\varphi_1(\lambda)}{\psi_1(\lambda)}, \frac{\varphi_2(\lambda)}{\psi_2(\lambda)}, \dots, \frac{\varphi_n(\lambda)}{\psi_n(\lambda)} \right\} T(\lambda) = \\ &= S(\lambda) V(\lambda) T(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{П.1.83})$$

При этом:

а) $\varphi_k(\lambda)$ и $\psi_k(\lambda)$ — взаимно простые полиномы с коэффициентами при старшей степени, равными единице;

б) каждый полином $\psi_k(\lambda)$, начиная со второго является делителем предыдущего $\psi_{k-1}(\lambda)$ и каждый полином $\varphi_k(\lambda)$ является делителем последующего, $\varphi_{k+1}(\lambda)$;

в) диагональная матрица $V(\lambda)$ определяется по заданной $G(\lambda)$ единственным образом;

г) если $G(\lambda)$ вещественна, то $\varphi_i(\lambda)$, $\psi_i(\lambda)$, $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ вещественны;

д) точка $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_0 \neq \infty$) является полюсом $G(\lambda)$ порядка k тогда и только тогда, когда она является нулем $\psi_1(\lambda)$ порядка k .

Рациональная матрица называется *канонической*, если она является диагональной, неособой и удовлетворяет свойствам а) и б).

Метод приведения рациональной матрицы $G(\lambda)$ к эквивалентной ей канонической (П.1.83) может быть построен следующим образом. Вынося за знак матрицы наименьшее общее кратное $q(\lambda)$ всех знаменателей $q_{ij}(\lambda)$, представим $G(\lambda)$ в виде

$$G(\lambda) = \frac{1}{q(\lambda)} R(\lambda), \quad (\text{П.1.84})$$

где $R(\lambda) = \|r_{ij}(\lambda)\|_{m \times n}$ — полиномиальная матрица. Далее, используя процедуру, изложенную выше, приводим к канонической форме (П.1.76) полиномиальную матрицу $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = S(\lambda)U(\lambda)T(\lambda). \quad (\text{П.1.85})$$

Каноническая рациональная матрица $V(\lambda)$ будет получена путем деления каждого элемента $U(\lambda)$ на $q(\lambda)$ и сокращения всех общих множителей:

$$V(\lambda) = \frac{1}{q(\lambda)} U(\lambda). \quad (\text{П.1.86})$$

Рассмотренный метод приведения к канонической форме одновременно является доказательством ее существования и единственности.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ П.2.1. Решение систем однородных дифференциальных уравнений

Рассмотрим метод решения однородной системы дифференциальных уравнений вида

$$Q(D)y(t) = 0, \quad (\text{П.2.1})$$

где $Q(D) = \|q_{ij}(D)\|_1^n$ — матрица полиномов от оператора дифференцирования $D \equiv \frac{d}{dt}$, а $y(t)$ — n -мерный вектор, $y(t) = \|y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\|'$.

Пусть система является невырожденной, т. е. характеристический определитель матрицы $Q(\lambda)$

$$|Q(\lambda)| = \alpha_0 \lambda^N + \alpha_1 \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_N \quad (\text{П.2.2})$$

отличен от тождественного нуля.

Рассмотрим общий случай кратных корней характеристического уравнения системы

$$|Q(\lambda)| = 0. \quad (\text{П.2.3})$$

Ответ на вопрос о том, в каком виде искать решение однородной системы, содержащее N произвольных постоянных, определяется структурой матрицы $Q(\lambda)$. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — корень характеристического уравнения кратности m . При этом может оказаться, что матрица $Q(\lambda_0)$ имеет дефект, также равный m . Тогда, как и в случае простых корней, решение, соответствующее $\lambda = \lambda_0$, ищется в виде

$$y(t) = ce^{\lambda_0 t}, \quad (\text{П.2.4})$$

где постоянные c_1, c_2, \dots, c_n (составляющие вектора c) ищутся из условия удовлетворения системы

$$Q(\lambda_0)c = 0. \quad (\text{П.2.5})$$

Из теории линейных алгебраических уравнений известно, что в случае, если дефект матрицы коэффициентов однородной системы n уравнений с n неизвестными равен m , то в результате решения этих уравнений можно выразить $n - m$ переменных через m оставшихся, например c_1, c_2, \dots, c_m . При этом корню $\lambda = \lambda_0$ характеристического уравнения, имеющему кратность m , соответствует решение (П.2.4), содержащее m произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_m . Общее решение системы (П.2.1) записывается в этом случае так же, как и для простых корней, и имеет в совокупности N произвольных постоянных (каждому корню λ_j кратности m_j соответствует m_j постоянных). Рассмотренный случай будем называть случаем полной кратной вырожденности.

В другом крайнем случае — случае простой кратной вырожденности — матрица $Q(\lambda_0)$ имеет дефект, равный единице. Пусть для простоты кратность m корня λ_0 равна двум. Решение, соответствующее корню λ_0 , разыскивается в виде

$$y(t) = (c^0 + c^1 t) e^{\lambda_0 t} = c^0 e^{\lambda_0 t} + c^1 \frac{\partial}{\partial \lambda_0} e^{\lambda_0 t}, \quad (\text{П.2.6})$$

где c^0 и c^1 — векторы.

Подставим (П.2.6) в уравнения (П.2.1)

$$Q(D)y(t) = Q(D) \left[c^0 + c^1 \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \right] e^{\lambda_0 t} = 0$$

и, изменяя порядок дифференцирования по времени и по параметру λ_0 , получим:

$$Q(D)y(t) = Q(\lambda_0) c^0 e^{\lambda_0 t} + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} Q(\lambda_0) \right] c^1 e^{\lambda_0 t} + Q(\lambda_0) c^1 t e^{\lambda_0 t} = 0. \quad (\text{П.2.7})$$

Очевидно, что однородная система дифференциальных уравнений (П.2.7) удовлетворяется, если

$$\left. \begin{aligned} Q(\lambda_0) c^0 + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} Q(\lambda_0) \right] c^1 &= 0, \\ Q(\lambda_0) c^1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2.8})$$

Дефект этой системы алгебраических уравнений равен двум (т. е. кратности корня). Поэтому, решая ее, можно все произвольные постоянные c^j_0 и c^j_1 выразить через две, например c^0_1 и c^1_1 . Таким образом, и в этом случае корню кратности 2 соответствуют две произвольные постоянные. Решение однородной системы (П.2.1) можно попытаться искать в виде (П.2.6) и в случае полной кратной вырожденности. Но тогда при $m = 2$ решение системы (П.2.8) дает для вектора $c^1 = 0$. Аналогичное построение можно произвести для любого m , разыскивая решение в виде

$$y(t) = (c^0 + c^1 t + \dots + c^{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda_0 t}. \quad (\text{П.2.9})$$

Промежуточным между случаями простой и полной кратной вырожденности является случай частичной вырожденности, когда дефект $Q(\lambda_0)$, равный d , удовлетворяет неравенству

$$1 < d < m. \quad (\text{П.2.10})$$

Решение в этом случае ищется в форме

$$y(t) = (c^0 + c^1 t + \dots + c^{m-d} t^{m-d}) e^{\lambda_0 t}. \quad (\text{П.2.11})$$

Связь произвольных постоянных $c^0_1, c^0_2, \dots, c^0_n, c^1_1, \dots, c^{m-d}_n$ может быть получена путем подстановки (П.2.11) в уравнения (П.2.1) и приравнивания нулю коэффициентов при $e^{\lambda_0 t}, t e^{\lambda_0 t}, \dots, t^{m-d} e^{\lambda_0 t}$. Количество независимых произвольных постоянных в общем решении, записываемом как сумма частных решений, соответствующих корням λ_j , и в этом общем случае равно порядку системы, т. е. N .

Различный характер решения системы однородных дифференциальных уравнений становится прозрачным, если обратиться к канонической диагональной структуре матрицы $Q(D)$. Применяя элементарные преобразования, приведем матрицу Q к виду

$$Q(D) = S(D) \text{diag} \{i_n(D), i_{n-1}(D), \dots, i_1(D)\} T(D), \quad (\text{П.2.12})$$

где $T(D)$ и $S(D)$ — элементарные матрицы, а $i_1(D), i_2(D), \dots, i_n(D)$ — инвариантные многочлены матрицы $Q(D)$.

Вводя главные координаты $y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1$ с помощью элементарного дифференциального оператора

$$T(D)y(t) = y^1(t), \quad (\text{П.2.13})$$

перейдем от системы (П.2.1) к эквивалентной:

$$\left. \begin{aligned} i_n(D)y_1^1(t) &= 0, \\ i_{n-1}(D)y_2^1(t) &= 0, \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ i_1(D)y_n^1(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2.14})$$

При переходе к главным координатам система распадается, таким образом, на n независимых уравнений, сумма порядков которых, совпадающая с общим количеством независимых постоянных, равна N . Структура диагональной формы определяет, к какому из рассматриваемых случаев относится данная система.

Если $i_n(D) = i_{n-1}(D) = \dots = i_2(D) = 1$, все корни характеристического уравнения (П.2.3) являются корнями уравнения $i_1(\lambda) = 0$. Этой структуре $Q(D)$ соответствуют два из рассмотренных случаев. Если все нули многочлена $i_1(\lambda)$ различны, то мы имеем дело со случаем простых корней характеристического уравнения. Наличие кратных нулей $i_1(\lambda)$ свидетельствует о простой вырожденности.

Случай, когда один из нулей $i_1(\lambda)$ является также нулем полиномов $i_2(\lambda), \dots, i_d(\lambda)$, охватывает две оставшиеся возможности: если этот корень является простым в каждом многочлене, это полная кратная вырожденность (при этом $m = d$); если этот корень для некоторых $i_h(\lambda)$ является кратным, это частичная кратная вырожденность ($d < m$).

Общее решение каждого из уравнений (П.2.14) в главных координатах пишется независимо в соответствии с известными способами решения однородного дифференциального уравнения. Решение в исходных переменных получается с помощью применения к вектору $y^1(t)$ линейного дифференциального оператора

$$y(t) = T^{-1}(D)y^1(t). \quad (\text{П.2.15})$$

§ П.2.2. Решение систем разностных уравнений

Рассмотрим метод решения однородной системы разностных уравнений вида

$$Q(\xi)y(kT) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П.2.16})$$

где $Q(\xi) = \|q_{ij}(\xi)\|_1^n$ — матрица полиномов от оператора опережения $\xi = e^{DT}$, а $y(kT) = \|y_1(kT), y_2(kT), \dots, y_n(kT)\|'$ — n -мерный вектор. Пусть система не вырождена, т. е. определитель матрицы $Q(\mu)$ отличен от тождественного нуля. Характеристическое уравнение системы:

$$|Q(\mu)| = \alpha_0\mu^N + \alpha_1\mu^{N-1} + \dots + \alpha_N = 0, \quad (\text{П.2.17})$$

где N — порядок системы разностных уравнений.

Методы решения систем разностных уравнений аналогичны методам решения систем дифференциальных уравнений в § П.2.1. Пусть $\mu = \mu_0$ — корень характеристического уравнения (П.2.17) кратности m , а дефект матрицы $Q(\mu_0)$ равен d . Решение, соответствующее μ_0 , ищем в виде

$$y(kT) = [c^0 + c^1kT + \dots + c^{m-d}(kT)^{m-d}]\mu_0^k, \quad (\text{П.2.18})$$

где $c^i = \|c_1^i \ c_2^i \ \dots \ c_n^i\|'$ ($i = 0, 1, \dots, m-d$) — векторы неопределенных постоянных.

Компоненты векторов c_j^i не являются независимыми. Связь между константами может быть получена после подстановки (П.2.18) в систему (П.2.16). Число независимых постоянных, соответствующих корню m -й кратности, равно m .

Остановимся подробно на случае нулевого корня уравнения (П.2.17) (в общем случае кратности m). В этом случае решение ищется в виде, отличном от (П.2.18):

$$y(kT) = c^0\delta_{0,k} + c^1\delta_{1,k} + \dots + c^{m-d}\delta_{m-d,k}, \quad (\text{П.2.19})$$

где d — дефект матрицы $Q(0)$, а $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера. Связь констант c_j^i находится из условия тождественного удовлетворения (П.2.16) при любых положительных k после подстановки в него (П.2.19):

$$Q(\xi) [c^0\delta_{0,k} + c^1\delta_{1,k} + \dots + c^{m-d}\delta_{m-d,k}] = 0, \quad (\text{П.2.20})$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

где a — вектор заданных коэффициентов, а величина $e^{\alpha T}$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения (П.2.17). Частное решение системы, соответствующее правой части вида (П.2.25), разыскивается в форме

$$y(kT) = be^{\alpha kT}, \quad (\text{П.2.26})$$

где b — вектор неизвестных коэффициентов. Подставляя (П.2.26) и (П.2.25) в (П.2.24) и сокращая на скалярный множитель $e^{\alpha kT} \neq 0$, получим:

$$b = Q^{-1}(e^{\alpha T}) \cdot P(e^{\alpha T})a = G(e^{\alpha T})a, \quad (\text{П.2.27})$$

где через G обозначена матрица $Q^{-1}P$. Параметр α и вектор a могут быть как вещественными, так и комплексными. Последний случай соответствует правой части вида $f(kT) = (a^1 \cos \omega kT - a^2 \sin \omega kT) e^{\beta kT}$, которая может быть переписана как

$$f(kT) = \text{Re}ae^{\alpha kT}, \quad (\text{П.2.28})$$

где $\alpha = \beta + j\omega$, $a = a^1 + ja^2$. Соответствующее частное решение записывается в форме

$$y(kT) = \text{Re}be^{\alpha kT}, \quad (\text{П.2.29})$$

где вектор b по-прежнему определяется по (П.2.27).

В более общем случае, когда $f(kT)$ представляет собой векторный квазиполином

$$f(kT) = e^{\alpha kT} [a^0 + a^1 kT + \dots + a^m (kT)^m], \quad (\text{П.2.30})$$

решение ищется также в форме квазиполинома с неопределенными коэффициентами b_j^i ($i = 0, 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$):

$$y(kT) = e^{\alpha kT} [b^0 + b^1 kT + \dots + b^m (kT)^m]. \quad (\text{П.2.31})$$

Последние определяются из системы алгебраических уравнений, полученной в результате подстановки (П.2.30) и (П.2.31) в (П.2.24) и приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Грубые системы, Доклады АН СССР, 14, № 5, 1937.
2. Блейх Ф., Мелан Е., Уравнения в конечных разностях статики сооружений, ОНТИ, 1936.
3. Боднер В. А., Теория автоматического управления полетом, Изд-во «Наука», 1964.
4. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
5. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.
6. Вознесенский И. Н., О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров, Автоматика и телемеханика, № 4—5, 1938.
7. Вознесенский И. Н., О принципах и схемах автоматического регулирования, Прикл. матем. и мех., т. VI, вып. 1, 1942.
8. Волгин Л. Н., Элементы теории цифровых управляющих машин, Изд-во «Сов. радио», 1962.
9. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н., О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем, Прикл. матем. и мех., т. XXVII, вып. 6, 1963.
10. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, изд. 2-е, «Наука», 1966.
11. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Физматгиз, 1959.
12. Джури Э. А., Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1963.
13. Жданов П. С., Устойчивость электрических систем, Госэнергоиздат, 1948.
14. Идельсон Н. И., Способ наименьших квадратов и теория математической обработки результатов измерений, Геодезиздат, 1947.
15. Калман Р. Е., Об общей теории систем управления, Труды 1-го Международного конгресса ИФАК, т. II, Изд-во АН СССР, 1961.
16. Катковник В. Я., Синтез двухканальной системы оптимальной обработки информации, Труды Ленинградского политехнического института, № 235, 1964.
17. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., О выборе программы и тактики в цифровых системах управления, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 4, 1963.
18. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Синтез многоканальных дискретных систем при конечном времени наблюдения, Изв. АН СССР, ОН, Техническая кибернетика, № 3, 1963.

19. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Челпанов И. Б., Синтез многоканальных дискретных систем при наличии случайных помех, Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, № 1, 1963.
20. Колмогоров А. Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. АН СССР, сер. Математика, т. 5, № 1, 1941.
21. Корнилов Ю. Г., Автономное регулирование при параллельной работе котельных агрегатов, Сб. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах», Изд-во АН СССР, 1959.
22. Кухтенко А. И., Проблема инвариантности в автоматике, Гос. изд-во техн. литер. УССР, Киев, 1963.
23. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958.
24. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Физматгиз, 1962.
25. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
26. Мееров М. В., Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, 1959.
27. Мееров М. В., Системы многосвязного регулирования, Изд-во «Наука», М., 1965.
28. Мишина А. П., Проскураков И. В., Высшая алгебра, Серия «Справочная математическая библиотека», Физматгиз, 1962.
29. Ньютон Дж. К., Гулд Л. А., Кайзер Дж. Ф., Теория линейных следящих систем, Физматгиз, 1961.
30. Пелегрин М., Статистический расчет следящих систем, Изд. иностр. лит., 1957.
31. Перов В. П., Статистический синтез импульсных систем, Изд-во «Сов. радио», 1959.
32. Перов В. П., Статистический синтез импульсных систем, Труды 1-го Международного конгресса ИФАК, т. II, Изд-во АН СССР, 1961.
33. Петров Б. Н., О реализуемости условий инвариантности, Сб. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах», Изд-во АН СССР, М., 1959.
34. Покровский А. Н., К расчету дискретных фильтров, Сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем», Изд-во АН СССР, 1960.
35. Полуэктов Р. А., Инвариантность в системах, включающих цифровое вычислительное устройство, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 6, 1962.
36. Полуэктов Р. А., Об улучшении качества переходных процессов в системах регулирования нескольких величин, Труды Ленинградского политехнического института, № 226, 1963.
37. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961.
38. Пугачев В. С. (ред.), Основы автоматического управления, Физматгиз, 1963.

39. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1962.
40. Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.
41. Розенвассер Е. Н., О преобразовании уравнения нелинейной системы автоматического регулирования, Труды Ленинградского кораблестроительного института, вып. XXXI, 1960.
42. Семенов В. М., К теории экстраполирования случайных процессов, Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, вып. 495, 1954.
43. Стрейц В., Ружичка Й., Теория автономности и инвариантности многопараметрических систем регулирования с цифровыми регуляторами, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 5, 1961.
44. Ту Ю., Цифровые и импульсные системы автоматического управления, Изд-во «Машиностроение», 1964.
45. Файнберг Ю. М., Авторегулирование при холодной прокатке, Металлургиядат, 1960.
46. Фельдбаум А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1959.
47. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, Изд. иностр. лит., 1950.
48. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.
49. Цянь Сюэ-сень, Техническая кибернетика, Изд. иностр. лит., 1956.
50. Чанг Ш. С. Л., Синтез оптимальных систем автоматического управления, Изд-во «Машиностроение», 1964.
51. Шифрин М. Ш., Автоматическое регулирование судовых паросиловых установок, Судпромгиз, 1963.
52. Яглом А. М., Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, т. VII, вып. 5 (51), 1952.
53. Яглом А. М., Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, Труды Московского математического общества, № 4, 1955.
54. Яглом А. М., Эффективное решение линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром, Теория вероятностей и ее применение, т. V, вып. 3, 1960.
55. Amara R. S., Application of Matrix Methods to the Linear Least Square Synthesis of Multivariable Systems, Journ. of Franklin Inst., v. 268, № 4, 1959.
56. Bergen A. R., Ragazzini J. R., Sampled-Data Processing Techniques for Feedback Control Systems, AIEE Trans., v. 73, pt. II, 1954.
57. Bertram J. E., Factors in the Design of Digital Controllers for Sampled-Data Feedback Systems, AIEE Trans., v. 75, pt. II, 1956.
58. Boksenbom A. B., Hood R., General Algebraic Method Applied to Control Analysis of Complex Engine Types, NACA Techn. Rep. 980, 1950.

59. Freeman H., A Synthesis Method for Multipole Control Systems, AIEE Trans., v. 76, pt. II, 1957.
60. Freeman H., Stability and Physical Realizability Considerations in the Synthesis of Multipole Control, AIEE Trans., v. 77, pt. II, 1958.
61. Jury E. I., Schroeder W., Discrete Compensation of Sampled-Data and Continuous Control Systems, AIEE Trans., v. 76, pt. II, 1957.
62. Kalman F. E., Canonical Structure of Linear Dynamical Systems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 48, 1962.
63. Kalman R. E., Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM Journ. Contr., Ser. A., № 1, 1963.
64. Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S., Controllability of Linear Dynamical Systems, Contr. to Differential Equations, № 1, 1962.
65. Less A. B., Interpolation and Extrapolation of Sampled-Data, IRE Trans., v. IT-2, № 1, 1956.
66. Wiener N. L., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, John Willey, N. Y., 1950.
67. Youla D. C., On the Factorization of Rational Matrices, IRE Trans., v. IT-7, № 3, 1961.
68. Zadeh L. A., Desoer C. A., Linear Systems Theory (The State Space Approach), McGraw-Hill, N. Y., 1963.
69. Zadeh L. A., Ragazzini J. R., An Extension of Wiener's Theory of Prediction, Journ. App. Phys., v. 21, № 7, 1950.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоматизация комплексная 13
Анализ точности системы 214
Астатизм системы 200, 295
- Базис пространства состояний
44, 61, 391
- Вариация передаточной функции 219
— функционала 219
Вектор 383
— состояния 44, 103
Величина случайная 148
Вход объекта 32
— системы 32
Выход объекта 31
— системы 31
Вычет матрицы 81, 400
- Грубость системы управления 298
- Дефект матрицы 52, 64, 382
Дисперсия случайного процесса 178
Дифференцирование следа матрицы 221, 390
- Задача Заде — Рагазини 312
— идентификации 71, 125
— Колмогорова — Винера 215, 217
Звено многомерное 27
— — корректирующее 27
Значение матрицы собственное 394
- Инвариантность 299, 304, 366
- Качество системы управления 171
Квазиполином 203, 361
Ключ 26
— идеальный 27, 109
Координаты входные 31
— выходные 31
— главные 86, 138
— ненаблюдаемые 62
— неуправляемые 61
— фазовые 45, 68, 74
Критерий качества 24
— наблюдаемости 64, 123
— управляемости 63, 123
- Матрица 381
— весовая 28, 36, 96
— диагональная 75, 137, 383
— — каноническая 75, 126
— дискретная передаточная 28, 97
— единичная 30, 383
— корреляционная 176, 187
— нулевая 30, 383
— обратная (инверсная) 387
— особая 383
— передаточная 28, 38, 66
— полиномиальная 394
— присоединенная 39, 387
— рациональная 38, 99, 180, 400
— спектральной плотности 180, 187
— транспонированная 64, 384
— установившейся ошибки 199, 200
— элементарная 75, 158, 395
Матрицы переставимые 142, 145, 385
— подобные 393

- Матрицы эквивалентные 392
 Машина цифровая вычислительная (ЦВМ) 25, 87
 Минимальнофазовость 163
 Многочлен матричный 394
 Множитель Лагранжа 281
 Момент корреляционный 178
- Наблюдаемость 58, 121
 Нуль передаточной матрицы 160
- Объект многомерный 14, 27, 139
 — — минимальнофазовый 163
 — — устойчивый 162
 Оператор дифференцирования 30, 72
 — опережения 30, 89, 145
 — системы 72, 126
 Ошибка системы управления 172
- Период дискретности 89
 Показатель качества 218
 Полином матричный 90
 — характеристический 67, 147
 Полюс матрицы 40, 67, 70, 81, 400
 Помеха 172
 Порядок системы дифференциальных уравнений 33
 — — разностных уравнений 92
 Преобразование Лапласа 29, 39
 — — дискретное 113
 — — обратное 99
 Пространство состояний 43, 103
 Процесс случайный многомерный 175
 — — — дискретный 186
 — — — стационарный 178
 — — — центрированный 176
 Процессы случайные стационарно связанные 178
- Ранг вычета матрицы 161, 401
 — матрицы 35, 51, 64, 382
 — произведения матриц 386
 — стационарного случайного процесса 182, 185
 — суммы матриц 386
 Решение однородной системы общее 34, 404
- Решение системы разностных уравнений 91, 105, 407
 — уравнений оптимальной фильтрации 229
 Ряд ошибки 199
- Связь обратная жесткая 141
 Сигнал желаемый 173, 217
 — полезный 171, 217
 — случайный 172
 Символ Кронекера 35, 92
 Синтез оптимального фильтра 217
 — оптимальной системы управления 254, 293
 — — — минимальнофазовым объектом 257
 — — — неминимальнофазовым объектом 271
 — — — неустойчивым объектом 278
 Система автономная 299
 — вырожденная 70, 81, 123
 — дискретная 88
 — желаемая 173
 — многомерная 14, 31, 172
 — — дискретная 25
 — полностью наблюдаемая 62
 — — управляемая 61
 — разностных уравнений 89
 — — — неособенная 93
 — стабилизации 262
 — устойчивая 145
 — n -мерная 28
 Системы эквивалентные 45, 60
 След матрицы 111, 384
 Соединение параллельное 139
 — последовательное 140
 — с обратной связью 141
 Состояние системы 44
 Структура системы управления 23, 28, 139
 — — — каноническая 85, 138
- Точность системы управления 171, 209, 213
- Управляемость 58, 121
 Уравнение Винера — Хопфа 222, 281, 356
 — возвратное 229
 — разностное 89

- Уравнение характеристическое 33, 393
 — — дискретной системы 93, 146
 Условие начальное 92
 — несмещенности 204, 327, 345
 — устойчивости 146, 167
 — — достаточное 165
 — физической реализуемости 38, 47, 96, 100, 165
 Устойчивость 145, 163
- Факторизация матрицы спектральной плотности 181
 — передаточной матрицы 162
 Фиксатор 108, 143
 Фильтр винеровский 356
 — дискретный 216
 — — оптимальный 219
 — многомерный формирующий 185
 — — — дискретный 209
 Фильтрация оптимальная многомерная 216, 307
- Форма каноническая диагональная 125
 Функционал качества 219
 Функция импульсная Дирака (δ -функция) 35
- Характеристики «вход — выход» 43, 57, 109, 111, 119
- Часть приведенная непрерывная (ПНЧ) 111, 143
 — системы главная 87, 138
 — — ненаблюдаемая 64, 122, 151
 — — неуправляемая 61, 66, 122, 151
 — — полностью управляемая и наблюдаемая 68, 71
- Шум белый многомерный 182
 — — — дискретный 195
- Элемент формоимпульсный 108, 143
 z-преобразование 29, 97, 114

