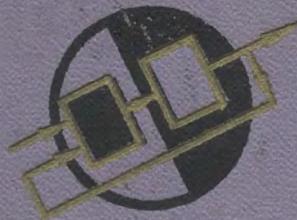


*МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ РЕЛЕЙНОГО И ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ*



**П. В. БРОМБЕРГ**

**МАТРИЧНЫЕ  
МЕТОДЫ  
В ТЕОРИИ  
РЕЛЕЙНОГО  
И ИМПУЛЬСНОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ**

---



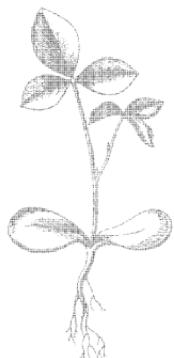


# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1967

П. В. БРОМБЕРГ

# МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ РЕЛЕЙНОГО И ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1967

6П2.154  
Б88  
УДК 62-50

**Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования**, П. В. Бромберг, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1967, 324 стр.

В книге излагаются вопросы приложения методов матричного исчисления к решению линейных дифференциальных и конечноразностных уравнений с постоянными коэффициентами. Теоремы прямого метода Ляпунова распространяются на дискретные динамические системы, возмущенное движение которых определяется автономными уравнениями в конечных разностях. Проводится исследование устойчивости и процессов регулирования линейных импульсных систем для управляющих функций с конечной шириной импульса и паузы, а также для импульсных и ступенчатых управляющих функций.

Строятся характеристические уравнения идробно-рациональные функции, сводящие исследование устойчивости к проблеме Гурвица и приложению принципа аргумента. Определяются дискретные и непрерывные движения импульсных систем для наиболее важных типов внешних воздействий. По функции Ляпунова строится процесс, мажорирующий собственные колебания системы по любой координате. Дается анализ устойчивости «в малом» нелинейных систем с широтно-импульсной модуляцией.

Рассматриваются собственные и вынужденные колебания релейных систем, исследуются автоколебательные режимы и скользящие движения. Устойчивость предельных циклов и периодических режимов исследуется посредством построения точечного преобразования плоскости переключений в окрестности инвариантной точки и уравнений возмущенного движения в линейном приближении.

Предлагается симметричная форма уравнений скользящего движения.

Конечные результаты представляются в замкнутой форме и выражаются через исходные параметры системы независимо от того, разрешены ли исходные дифференциальные уравнения относительно старших производных или нет.

Результаты общей теории иллюстрируются на примерах систем автоматической стабилизации курса нейтрального самолета. Табл. 2. Илл. 28 Библ. 34 назв.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Г л а в а I. Системы автоматического регулирования . . . . .	11
§ 1.1. Функциональная схема . . . . .	11
§ 1.2. Релейные системы стабилизации нейтрального самолета	13
§ 1.3. Системы прерывистого регулирования . . . . .	26
§ 1.4. Общие уравнения движения и классификация систем регулирования . . . . .	32
§ 1.5. Аргументы управления при задающем воздействии . .	34
Г л а в а II. Элементы матричного исчисления . . . . .	38
§ 2.1. Матрицы. Основные определения и действия над ними	38
§ 2.2. Каноническое представление матриц . . . . .	48
§ 2.3. Разложение обратной и характеристической матриц на элементарные дроби . . . . .	53
§ 2.4. Решение линейных конечноразностных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	58
§ 2.5. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричный экспо- ненциал . . . . .	62
§ 2.6. Квадратичные формы . . . . .	72
Г л а в а III. Об устойчивости движений, определяемых раз- ностными уравнениями . . . . .	77
§ 3.1. Общие теоремы прямого метода Ляпунова . . . . .	77
§ 3.2. Об устойчивости движения, определяемого линей- ными разностными уравнениями с постоянными коэф- фициентами . . . . .	86
§ 3.3. Об устойчивости по первому приближению . . . . .	94
Г л а в а IV. Системы импульсного регулирования . . . . .	97
§ 4.1. Непрерывные и дискретные движения линейных импульсных систем . . . . .	98
§ 4.2. Устойчивость и характеристическое уравнение . .	102
§ 4.3. Критерий устойчивости . . . . .	111
§ 4.4. Выделение границы устойчивости . . . . .	125
§ 4.5. Коэффициенты устойчивости и оценка затухания по функции Ляпунова . . . . .	133
§ 4.6. Реакция системы на задающее воздействие и внесе- ние возмущение . . . . .	142

§ 4.7. Предельные случаи импульсной управляющей функции . . . . .	159
§ 4.8. Нелинейные импульсные системы . . . . .	164
§ 4.9. Импульсные системы при исчезающие малых периодах повторения . . . . .	166
§ 4.10. Автопилот прерывистого действия . . . . .	170
<b>Г л а в а V. Релейные системы регулирования . . . . .</b>	<b>181</b>
§ 5.1. Общие замечания . . . . .	182
§ 5.2. Периодические решения и уравнение периодов . . . . .	192
§ 5.3. Устойчивость периодических колебаний и характеристическое уравнение . . . . .	201
§ 5.4. О смене устойчивости . . . . .	213
§ 5.5. Автоколебания в системе стабилизации курса нейтрального самолета . . . . .	215
§ 5.6. Скользящие движения и устойчивость регулируемого положения . . . . .	221
§ 5.7. Устойчивость и скользящие режимы систем стабилизации нейтрального самолета . . . . .	232
§ 5.8. Петлеобразная релейная характеристика . . . . .	241
§ 5.9. Периодические движения с участками скользящего режима . . . . .	248
<b>Г л а в а VI. Релейные системы при внешнем воздействии и возмущении . . . . .</b>	<b>254</b>
§ 6.1. Установившиеся движения при постоянном воздействии и возмущении . . . . .	254
§ 6.2. Периодические колебания в статических системах . . . . .	256
§ 6.3. Периодические колебания в нейтральных системах . . . . .	267
§ 6.4. Скользящие режимы при постоянном воздействии . . . . .	278
§ 6.5. Автопилот с релейным сервомотором . . . . .	280
§ 6.6. Вынужденные колебания релейных систем . . . . .	291
§ 6.7. Скользящий режим при гармоническом воздействии	304
<b>Г л а в а VII. Системы регулирования, определяемые уравнениями второго порядка . . . . .</b>	<b>308</b>
§ 7.1. Постановка задачи . . . . .	308
§ 7.2. Связь между присоединенными матрицами $F(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ . . . . .	310
§ 7.3. Представление конечных результатов через исходные параметры . . . . .	314
<b>Литература . . . . .</b>	<b>320</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>322</b>

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В процессе решения научных проблем бывает важно уметь рассмотреть их с разных точек зрения, применить различные методы исследования. Различные методы дают возможность использовать все богатства приемов и способов, характерных для данного метода решения, широко привлекать к анализу уже имеющиеся результаты в смежных областях, проводить аналогии, часто позволяющие глубже проникнуть в сущность рассматриваемого явления.

Применение методов матричного исчисления к решению многих задач динамики автоматического регулирования и управления является весьма плодотворным. Матричное исчисление позволяет использовать как приемы классической теории дифференциальных и конечноразностных уравнений, так и методы операционного исчисления для анализа автоматических систем. Формулы перехода позволяют представлять конечные результаты в классической форме или в форме, характерной для операционных методов в зависимости от того, что именно диктуется удобством практических приложений. Спрессовывание основных выражений и процессов вычисления в соединении с другими специфическими приемами матричного исчисления позволяет не только экономить чернила и упрощать промежуточные выкладки, но также яснее предвидеть конечный результат выбранного направления исследования: количественный выигрыш порождает как бы новое качество, и это может оказаться весьма полезным при получении новых, еще неизвестных результатов.

Книга посвящена применению матричных методов к решению задач теории импульсного и релейного регулирования. Релейные системы получили широкое распространение благодаря своей простоте и возможности получать в них оптимальные в некотором смысле процессы регулирования. Импульсные

системы возникли сначала из нужд инженерной практики. Они обеспечивали пропорциональное регулирование посредством простейших элементов, работающих в релейном режиме, разрешили противоречие между точностью и мощностью управляющих сигналов в процессе съема информации с деликатных приборов автоматических систем и т. д.

В последнее время в связи с применением в системах управления и регулирования радиолокационных, телеметрических и цифровых вычислительных устройств импульсные системы обрели новое содержание, так как во многих новых системах информация вообще существует только в дискретные и циклически повторяющиеся моменты времени.

Специфические возможности импульсного регулирования позволяют найти условия для максимального использования оборудования с точки зрения технических и экономических возможностей, создать помехозащищенные системы в сочетании с высокой точностью их функционирования и улучшить динамику процесса регулирования. Эти обстоятельства, в частности, имеют место в системах многоканального управления с одним управляющим цифровым вычислительным устройством, в системах с одним каналом связи для передачи информации о нескольких независимых управляющих сигналах, в системах с запаздыванием.

В рассматриваемых импульсных системах существует внешний цикл повторения с постоянным периодом, связанный с моментами начала или конца ввода новой информации в систему. В релейных системах, при некоторых условиях, этот цикл обусловливается внутренними свойствами самих систем. Решение многих задач динамики для обоих типов систем сводится к анализу решений уравнений в конечных разностях с дискретным или «плавающим» аргументом.

Настоящая работа посвящена приложению методов матричного исчисления к решению задач теории импульсных и релейных систем регулирования.

Работа выполнена в следующем плане.

Системы релейного и импульсного регулирования рассматриваются на конкретном примере схем автоматического управления и стабилизации курса нейтрального самолета. При анализе различных схем автопилотов подчеркиваются некоторые технические особенности функционирования отдельных элементов, которые обусловливаются выбором того или иного

принципа регулирования. Во всех случаях используются специальные выражения: *управляющая функция и аргумент управления*.

Управляющая функция определяет вид сигнала (квантованного по уровню и времени), подаваемого на сервомотор; аргумент управления указывает на зависимость управляющего сигнала от линейной комбинации координат системы регулирования. Приведенные схемы автопилотов подводят к выбору математической модели рассматриваемых систем, которая в общем виде исследуется в данной работе методами матричного исчисления.

В сжатой форме излагаются основные правила и методы матричного исчисления. Большое внимание уделяется представлению матриц в канонической форме Жордана, которая является важным инструментом для проведения промежуточных выкладок и рассуждений.

Двояким подходом к обращению характеристической матрицы устанавливаются тождества, связывающие присоединенную матрицу и ее первые производные с матрицами прямого и обратного преобразования к каноническому виду. Эти тождества позволяют представлять конечные результаты в удобной для практики форме. Приводятся различные формы матричных решений линейных дифференциальных и конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теоремы прямого метода Ляпунова распространяются на дискретные динамические системы, возмущенное движение которых определяется уравнениями в конечных разностях, не зависящих явно от времени. Сначала обобщаются основные теоремы Ляпунова; затем решается вопрос об устойчивости решений линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами и, наконец, доказываются теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Проводится исследование устойчивости и процессов регулирования линейных импульсных систем, работающих по принципу амплитудно-импульсной модуляции. Соответствующий анализ проводится для управляющих функций с конечной шириной импульса и паузы, а также для импульсивных и ступенчатых управляющих функций. Строятся характеристические уравнения и дробно-рациональные функции, сводящие исследования устойчивости к приложению критерия Гурвица и принципа аргумента.

Собственные движения и реакция линейных импульсных систем на важные типы внешних воздействий устанавливаются как в граничных точках циклов повторения, так и во всех промежуточных точках. Из функции Ляпунова определяется мажорирующий процесс для собственных колебаний системы по любой координате. Даётся анализ устойчивости в малом для нелинейных систем с широтно-импульсной модуляцией.

Рассматриваются собственные и вынужденные колебания релейных систем; исследуются автоколебательные режимы и скользящие движения. Устойчивость периодических режимов определяется построением и анализом точечного преобразования плоскости переключений в окрестности инвариантной точки или уравнений возмущенного движения в линейном приближении.

Предлагается симметричная форма уравнений скользящих движений, позволяющая представить решение в простой форме; прямым сравнением устанавливается тождественность скользящих режимов движением соответствующей линейной системы с бесконечно большим коэффициентом усиления.

Конечные результаты представляются в замкнутой форме и выражаются через параметры исследуемых систем регулирования независимо от того, задается ли исходная математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме или в виде уравнений второго порядка, неразрешенных относительно старших производных.

Методы матричного исчисления привлекались автором к исследованию устойчивости и автоколебаний импульсных систем регулирования в 1953—1954 гг. [30, 31].

Приведенный список литературы не претендует на полноту. В нем помимо работ, непосредственно использованных автором, приведены, как правило, монографии, освещающие некоторые вопросы теории, не нашедшие отражения в данной книге или использующие иной подход к решению аналогичных задач.

В заключение считаю своим долгом выразить признательность Я. З. Цыпкину за оказанную мне поддержку, а также Е. Н. Розенвассеру за внимательный просмотр рукописи и сделанные замечания.

П. Бромберг

## ГЛАВА I

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

### § 1.1. Функциональная схема

В теории регулирования занимаются исследованием математических моделей реальных систем регулирования вне зависимости от физической природы элементов, входящих в их состав. Математическими моделями являются дифференциальные уравнения, обыкновенные или в частных производных, дифференциально-разностные уравнения, уравнения в конечных разностях с дискретным или непрерывным аргументами, которые с некоторой идеализацией описывают движение системы в той или иной окрестности регулируемого положения. Возможны математические модели в виде логических схем, определяющих стратегию поведения системы регулирования в зависимости от внешних обстоятельств.

В дальнейшем будут рассматриваться системы, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этом случае говорят *о системах регулирования с сосредоточенными параметрами*.

Основная задача автоматического регулирования в собственном смысле этого слова состоит в том, чтобы поддерживать одну или несколько координат той или иной физической системы на постоянном уровне или ограничить их изменения известными пределами при наличии внешних возмущений. Упомянутую физическую систему обычно называют *объектом регулирования*, а подключаемое к ней для решения поставленной задачи автоматическое устройство — *регулятором*. Объект регулирования вместе с подключенным к нему регулятором будем называть *системой регулирования*.

Современные системы регулирования являются весьма сложными, и в них используются различные физические принципы. Однако вне зависимости от физической природы отдельных элементов всегда можно выделить более или менее укрупненные блоки, которые в различных системах регулирования выполняют одинаковые функции.

Для того чтобы конкретизировать задачу, рассмотрим одну весьма распространенную функциональную схему системы непрямого регулирования с одним регулирующим органом, которая представлена на рис. 1.1. Блок чувствительных элементов состоит из одного или нескольких приборов, которые

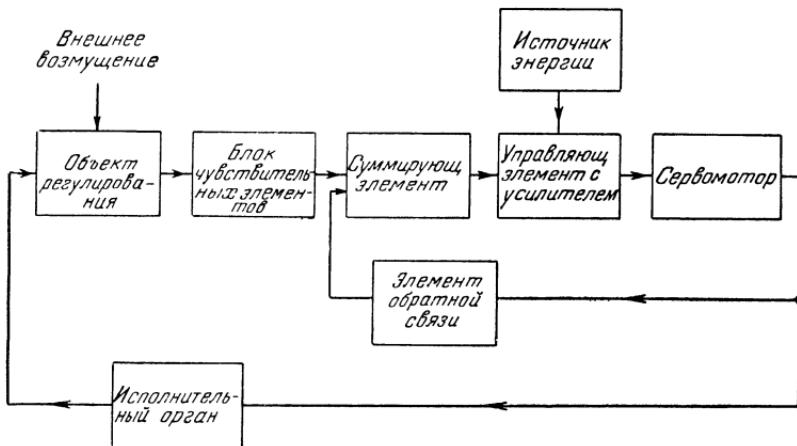


Рис. 1.1. Функциональная схема системы регулирования.

регистрируют отклонения одной или нескольких координат объекта регулирования от заданных значений и, может быть, их первых производных. Соответствующие сигналы блока чувствительных элементов подаются на вход суммирующего устройства. На вход суммирующего устройства также по- даются сигналы обратной связи, пропорциональные выходной координате сервомотора, а иногда и первой ее производной, которые организуются таким образом, чтобы они могли нейтрализовать действие сигналов блока чувствительных элементов.

В суммирующем устройстве все указанные выше сигналы складываются в определенных соотношениях, и образованный таким образом суммарный сигнал подается на вход управляющего элемента с усилителем. Чувствительные элементы и суммирующее устройство, как правило, являются деликатными приборами, которые не могут непосредственно воздействовать на исполнительный орган объекта регулирования.

Эту функцию выполняет специальный сервомотор, черпающий необходимую для этого энергию от внешнего источника.

Управляющий элемент с усилителем в зависимости от величины и знака входного сигнала и в соответствии с определенным законом регулирует подачу энергии от постороннего источника на сервомотор. Сервомотор приводит в движение исполнительный орган, оказывающий необходимое воздействие на объект регулирования. Таким образом получаем *замкнутую* систему автоматического регулирования.

В дальнейшем мы будем оперировать также понятием разомкнутой системы регулирования, понимая под этим термином систему, у которой размыкается связь между управляющим элементом и сервомотором.

В реальных системах регулирования не всегда удается выделить суммирующее устройство и управляющий элемент в виде двух различных приборов. Однако нам удобно рассматривать их в виде двух различных функциональных элементов и выходные сигналы их называть соответственно аргументом управления и управляющей функцией. Аргумент управления и управляющая функция будут играть определяющую роль в классификации систем регулирования.

Системы автоматического регулирования включают в себя практически неограниченный источник посторонней энергии. Поэтому в замкнутых системах, несмотря на неизбежное рассеивание энергии, возможны такие движения, как периодические колебания или колебания с нарастающей амплитудой, требующие постоянного притока внешней энергии. Вопрос об изучении возможности возникновения такого рода движений, а по существу вопрос об устойчивости, является первой и очень важной задачей теории регулирования.

## § 1.2. Релейные системы стабилизации нейтрального самолета

Задача автоматической стабилизации курса нейтрального самолета играла видную роль в развитии некоторых методов анализа современной теории регулирования. Этой задаче было посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных авторов [2, 5, 12, 14, 32, 34].

Мы воспользуемся этой задачей, чтобы на конкретном примере выявить тип математической модели и характер

вопросов, подлежащих изучению в данной работе. Тем более, что такие понятия, как аргумент управления и управляющая функция, которые играют важную роль в классификации соответствующих моделей, отчетливо сформировались в связи с задачей автоматического управления самолетом.

На рис. 1.2 представлена одна из возможных механических моделей нейтрального самолета. Модель состоит из

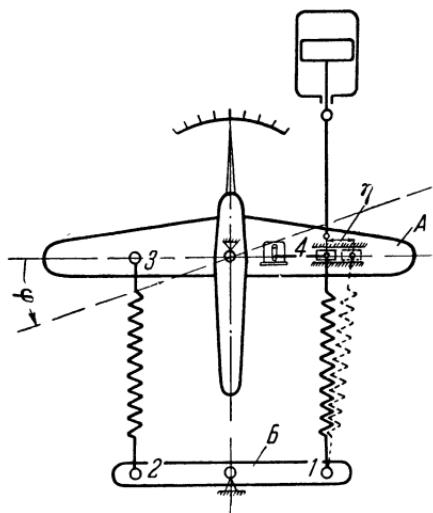
массивной платформы *A*, способной вращаться вокруг вертикальной оси, и легкого коромысла *B*, свободно вращающегося вокруг оси, параллельной оси платформы. Платформа снабжена демпфером и связана с коромыслом двумя одинаковыми пружинами. Пружины устанавливаются с предварительным натягом и действуют на точки *1*, *2*, *3*, *4* с силой  $F_0$ . Точки *1*, *2*, *3* неподвижны относительно платформы и коромысла, точка *4* закреплена на штоке, который может перемещаться в обе стороны сервомотором автопилота.

В нормальном состоянии точки *1*, *2*, *3* и *4* крепления пружин к платформе и коромыслу образуют вершины параллелограмма, поэтому при любом повороте суммарный момент сил натяжения пружин, действующих на платформу, равен нулю.

Рис. 1.2. Механическая модель нейтрального самолета.

Система нейтральна к любому углу поворота платформы вокруг вертикальной оси.

При смещении точки *4* образуется момент сил, действующий на платформу. Этот момент является выходом исполнительного органа. Отклонение точки *4* обычно ограничивается упорами (не показанными на чертеже). Упоры характеризуют ограниченный запас управляющих сил, которые можно использовать для стабилизации самолета.



Обозначим через  $\phi$  и  $\eta$  угол поворота (рысканья) платформы и смещение точки 4 (положительное направление их изменения указано на чертеже). Тогда с достаточной степенью точности уравнение движения платформы можно представить в виде \*)

$$\ddot{\phi} + M\dot{\phi} = -N\eta + g'_1. \quad (1.1)$$

Будем называть  $M$  коэффициентом естественного демпфирования,  $N$  — коэффициентом эффективности руля. Угол  $\phi$  является регулируемой координатой, а  $\eta$  — координатой исполнительного органа. Величина  $g'_1$ , приведенная к размерности углового ускорения, характеризует действие внешнего момента сил, возмущающих движение самолета.

На подобной физической модели можно было бы, например, имитировать действие постоянного по величине внешнего момента посредством установки пружин с различным предварительным натягом. На реальном самолете такой момент сил может возникнуть из-за эксцентризитета тяги. Такой эффект бывает особенно сильным при отказе одного двигателя в многомоторном самолете. Можно указать и другие причины возникновения возмущений, зависящие от аэродинамики самолета, изменчивости метеорологических факторов и т. д.

Регулятором является автопилот, подключенный к объекту регулирования — нейтральному самолету; задача регулятора состоит в том, чтобы придать системе регулирования новое качество — способность отличать заранее заданное направление в пространстве и возвращать объект к этому направлению, если он с него съетсяся.

На рис. 1.3 представлена одна из возможных принципиальных схем автопилота, решающая поставленную задачу.

Чувствительным элементом, регистрирующим отклонения самолета от заданного направления, является курсовой гирокоп. Он представляет собой астатический гирокоп, помещенный в полном кардановом подвесе. Положение оси гирокопа в азимуте корректируется по магнитному компасу \*\*),

\*) Здесь и в дальнейшем точка сверху буквы указывает на дифференцирование по времени.

\*\*) На рис. 1.3 азимутальная коррекция не показана.

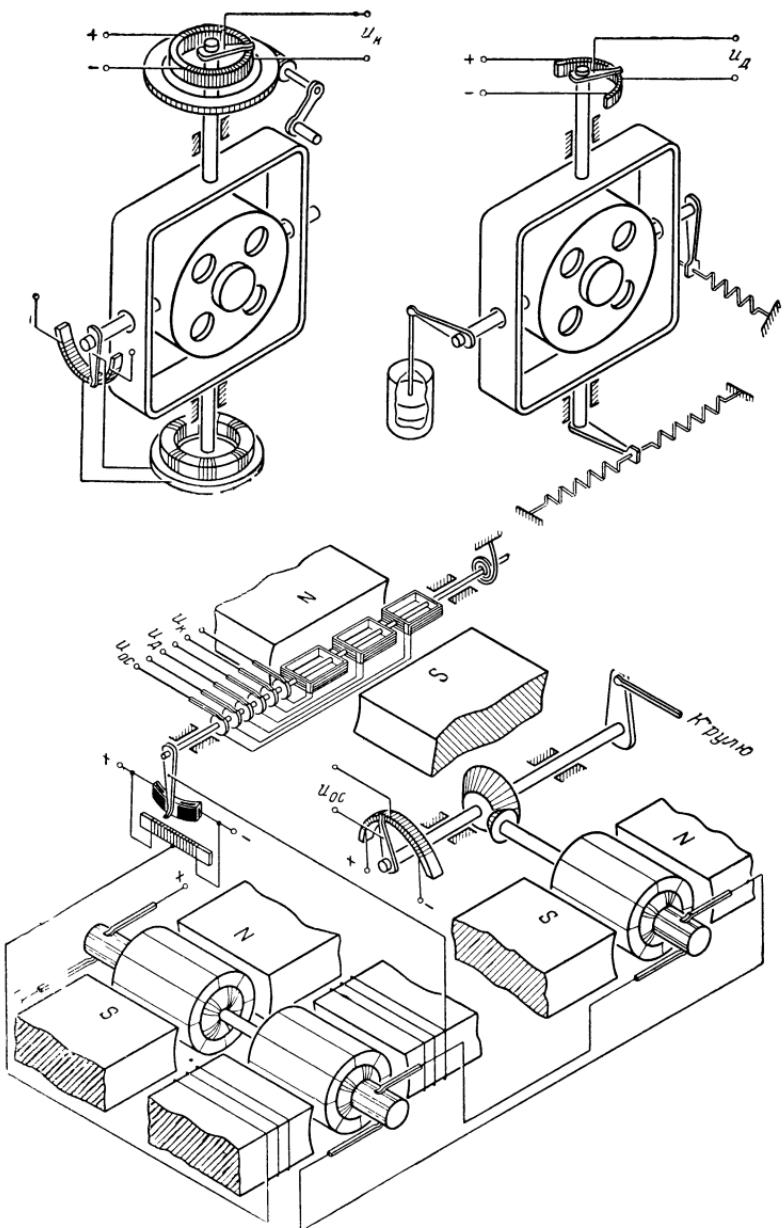


Рис. 1.3. Схема автопилота с сервомотором постоянной скорости.

а положение в вертикальной плоскости стабилизируется коррекцией «по рамке». Электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока снимается с потенциометрического устройства, щетка которого закреплена на наружной рамке гироскопа. Потенциометр посредством червячной передачи может поворачиваться относительно самолета. Таким поворотом вводится в систему заданное направление полета. Процессы корректирования положения гироскопа протекают медленно, поэтому мы будем пренебрегать их влиянием на процесс регулирования. Тогда напряжение, снимаемое с потенциометра курсового гироскопа, будет пропорциональным углу  $\phi$ . Здесь и в дальнейшем угол  $\phi$  будет отсчитываться от заданного, подлежащего регулированию направления полета.

Вторым чувствительным элементом является так называемый демпфирующий гироскоп. На рассматриваемой схеме он представлен в виде астатического трехступенчатого гироскопа, свобода движения которого вокруг обеих осей карданова подвеса ограничена упругими связями. В рамках прецессионной теории движение демпфирующего гироскопа относительно оси наружной рамки можно представить неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка, правая часть которого есть линейная комбинация первых двух производных  $\dot{\phi}$  и  $\ddot{\phi}$  регулируемой координаты  $\phi$ .

Выходное потенциометрическое устройство выдает напряжение, пропорциональное углу поворота наружной рамки гироскопа. Это напряжение с определенной динамической точностью будет пропорциональным линейной комбинации  $\dot{\phi}$  и  $\ddot{\phi}$ .

Суммирующее устройство представлено в виде магнитоэлектрического гальванометра с несколькими независимыми рамками. Концы обмоток рамок выведены на скользящие контакты, к которым подводятся также выходы потенциометрических устройств курсового и демпфирующего гироскопов и обратной связи. Вращающий момент рамок гальванометра, уравновешиваемый упругим волоском, пропорционален линейной комбинации напряжений, снимаемых с указанных выше потенциометров. Выходной сигнал снимается с контактного устройства, состоящего из щетки рамки гальванометра, скользящей по двум проводящим ламелям, электрически изолированным друг от друга. По терминологии теории

регулирования гальванометр можно рассматривать как устойчивое колебательное звено второго порядка.

В данной схеме используется электромашинный усилитель в виде мотора-генератора, который усиливает маломощный сигнал, снимаемый с контактного устройства гальванометра и подаваемый на обмотку независимого возбуждения генератора. Напряжение, снимаемое со щеток якоря генератора, подается на щетки коллектора якоря сервомотора, который на схеме представлен в виде мотора постоянного тока с независимым возбуждением. Сервомотор через редуктор приводит в движение исполнительный орган — руль самолета. При функционировании генератора и сервомотора учитывается влияние самоиндукции обмотки возбуждения и инерция якоря соответственно. Тогда усилитель и сервомотор рассматриваются как устойчивые апериодические звенья.

Уравнения, определяющие функционирование автопилота, можно представить в следующем виде:

уравнение демпфирующего гироскопа

$$T_1^2 \ddot{a} + 2d_1 T_1 \dot{a} + a = k_{11}\varphi + k_{12}\ddot{\varphi}; \quad (1.2)$$

уравнение суммирующего устройства

$$T_2^2 \ddot{\sigma} + 2d_2 T_2 \dot{\sigma} + \sigma = k_{21}\varphi + k_{22}a - k_{23}\eta; \quad (1.3)$$

уравнение усилителя

$$\Theta_1 \mu + \mu = k_{31}\psi(\sigma); \quad (1.4)$$

уравнение сервомотора

$$\Theta \ddot{\eta} + \dot{\eta} = k_{41}\mu. \quad (1.5)$$

Здесь  $a$  и  $\sigma$  — углы поворота наружной рамки демпфирующего гироскопа и рамки гальванометра соответственно,  $\mu$  — ток в обмотке возбуждения генератора,  $\Theta_1$  — электромагнитная постоянная обмотки возбуждения генератора,  $\Theta$  — электромеханическая постоянная времени сервомотора, пропорциональная приведенному к координате исполнительного органа моменту инерции его якоря.

Если частоты собственных колебаний демпфирующего гироскопа и гальванометра значительно выше частоты собственных колебаний регулируемой системы, то в соответствии с теорией регистрирующих устройств можно пренебречь динамиче-

скими искажениями в этих приборах и считать, что они идеально воспроизводят свои входные величины. Кроме того, пренебрежем постоянной времени усилителя.

Тогда уравнения замкнутой системы стабилизации курса нейтрального самолета можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} &= -N\eta + g'_1, \\ \ddot{\Theta}\eta + \dot{\eta} &= h'_2\psi(\sigma), \\ \sigma &= \varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2\ddot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где положительные константы  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a$  и  $h'_2$  будем называть соответственно коэффициентами регулирования по скорости, ускорению, обратной связи и коэффициентом усиления. Заметим, что при идеальных демпфирующем гироскопе и суммирующем устройстве постоянные времени  $\Theta$  и  $\Theta_1$  порознь оказываются одинаковое влияние на динамику регулирования.

Третье уравнение (1.6) определяет аргумент управления. Управляющая функция  $\psi(\sigma)$  может принимать три фиксированных значения, она имеет релейную характеристику. В соответствии с этой характеристикой на сервомотор подаются максимальные напряжения того или другого знака, либо он отключается от источника энергии. В данном случае имеем систему регулирования с постоянной скоростью сервомотора. Подбирая подходящим образом коэффициент усиления  $h'_2$ , представим идеальную управляющую функцию в виде

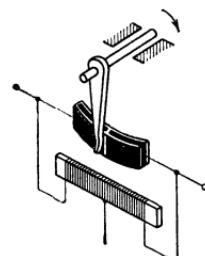
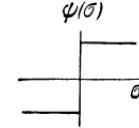
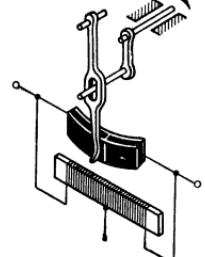
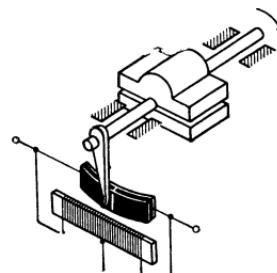
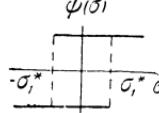
$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma = 0, \\ -1 & \text{при } \sigma < 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

В реальных условиях управляющая функция отклоняется от идеальной симметричной релейной характеристики. В табл. 1.1 приведен ряд характеристик управляющей функции и указаны причины, обусловливающие их специфический вид. Естественно, здесь причины взяты применительно к выходному контактному устройству гальванометра, представленного на рис. 1.3.

Для петлеобразных характеристик величина управляющей функции  $\psi(\sigma)$  зависит не только от знака и величины аргумента управления  $\sigma$ , но и от предыстории его изменения.

Таблица 1.1

## Релейные характеристики управляющей функции

№ пп	Наименование характеристики	Схема	Вид характеристики
1	Идеальная		$\psi(\sigma)$ 
2	Петлеобраз- ная (люфт в передаче)		$\psi(\sigma)$ 
3	Петлеобразная (трение в оси)		$\psi(\sigma)$ 

Продолжение табл. 1.1

№ пп	Наименование характеристики	Схема	Вид характеристики
4	С зоной не- чувствитель- ности		$\varphi(\sigma)$ 
5	Петлеобраз- ная с зоной нечувстви- тельности		$\varphi(\sigma)$ 
6	Несимметрич- ная петлеоб- разная с зоной нечувстви- тельности		$\varphi(\sigma)$ 

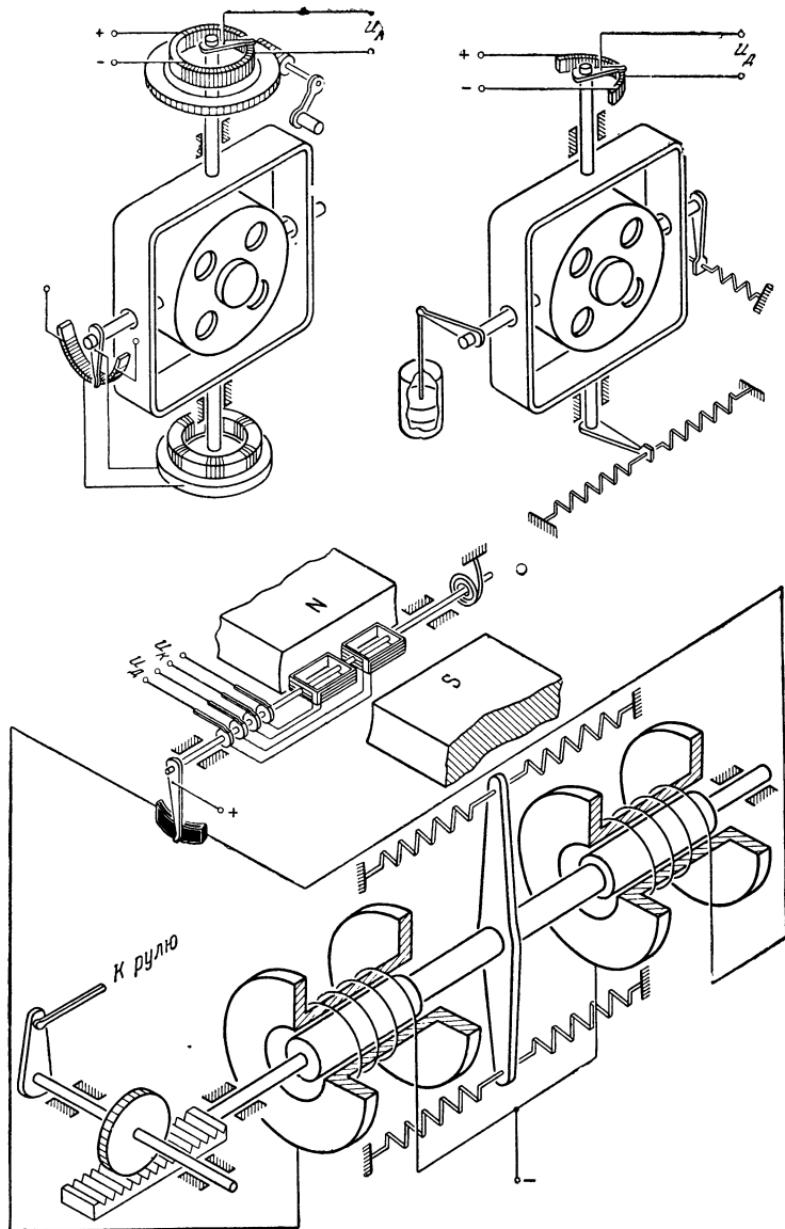


Рис. 1.4. Схема автопилота с релейным сервоприводом.

Это обстоятельство отмечено на соответствующих характеристиках стрелками.

В рассматриваемом автопилоте сервомотор обладал конечной скоростью вращения. В системе принят метод релейного управления скоростью сервомотора.

Однако для некоторых объектов для более полного использования конечного запаса управляющих сил использовался принцип релейного управления положением исполнительного органа [32]. В таких системах сервомотор, выполненный в виде втяжного механизма, практически мгновенно переставляет исполнительный орган из одного крайнего положения в другое.

На рис. 1.4 представлена одна из возможных принципиальных схем автопилота подобного типа. На этой схеме сервомотор представлен в виде двух катушек соленоида и стального штока, кинематически связанного с исполнительным органом. При контакте щетки гальванометра с левой или правой ламелью соответствующий соленоид перебрасывает шток сервомотора из одного крайнего положения, определяемого ограничительными упорами, в другое. Когда щетка гальванометра находится на изолированном промежутке, центрирующие пружины возвращают шток в среднее положение.

При указанных выше ограничениях уравнения движения системы регулирования с релейным сервомотором можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} &= -h'_1\psi(\sigma) + g'_1, \\ \sigma &= \varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1.8)$$

В аргументе управления теперь, естественно, отсутствует слагаемое, определяющее обратную связь по координате исполнительного органа.

Рассмотренные до сих пор автопилоты являются существенно нелинейными регуляторами. На рис. 1.5 представлена схема автопилота, который, несмотря на присутствие контактных и релейных устройств, практически работает в «линейном режиме». По данной схеме автопилот функционирует следующим образом. Две главные шестерни сервопривода вращаются с постоянной скоростью в противоположных направлениях посредством мотора, работающего в стационарном

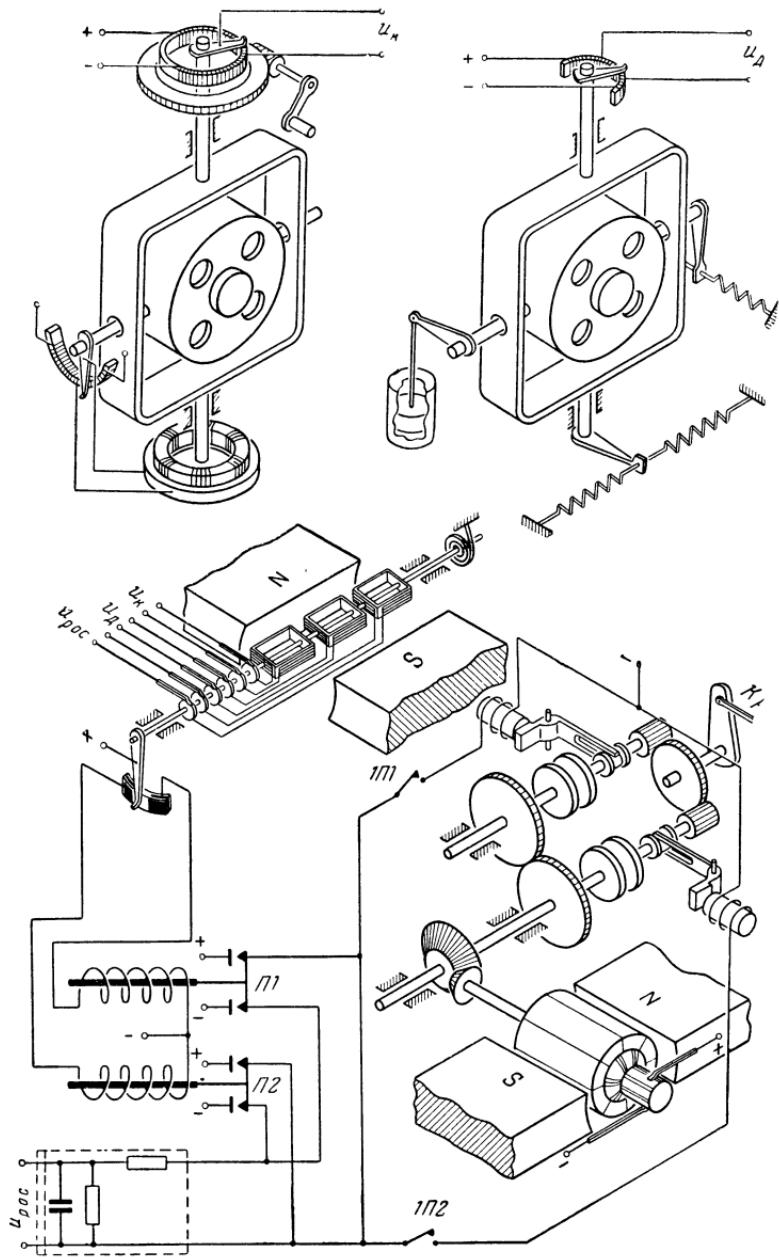


Рис. 1.5. Схема автопилота с дополнительной релейной обратной связью,

режиме. Специальные соленоиды поочередно притягивают фрикционные муфты и приводят их в контакт с главными шестернями. При этом исполнительный орган (руль) жестко сцепляется с шестерней и начинает вращаться с постоянной скоростью в надлежащем направлении.

Управление соленоидами осуществляется выходным сигналом суммирующего гальванометра через реле, играющее роль промежуточного усилителя. Управляющий элемент охватывается отрицательной релейной обратной связью.

Максимальный сигнал в цепи обратной связи всегда больше входного сигнала гальванометра, поступающего от чувствительных элементов и сервомотора, и заставляет выходную щетку гальванометра поворачиваться к нейтральному положению. При достижении щеткой изоляционного промежутка контактной ламели обмотка соленоида обесточивается и соответствующая муфта отжимается пружиной (не показанной на рис. 1.5) к тормозной колодке. Руль фиксируется в текущем положении. Одновременно с этим обесточивается также цепь релейной обратной связи. Тогда входной сигнал гальванометра вернет его рамку в прежнее или несколько измененное положение и весь цикл работы повторится сначала. Инерционное звено, состоящее из электрической емкости и сопротивления, регулирует частоту повторения указанного выше цикла во времени. Отношение интервала времени, в течение которого руль перемещается с постоянной скоростью, к общему периоду цикла оказывается пропорциональным входному сигналу гальванометра, т. е. выражению

$$\varphi + a_1 \dot{\varphi} + a_2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{a} \eta.$$

В среднем за период цикла скорость выходного вала сервопривода также оказывается пропорциональной указанному выше сигналу. Постоянная времени инерционного звена и максимальное напряжение в цепи релейной обратной связи подбираются таким образом, чтобы частота циклов была значительно (в 10—20 раз) выше основной частоты протекания регулируемого процесса. Поэтому практически скорость выходного вала сервомотора можно считать линейной непрерывной функцией указанного выше входного сигнала суммирующего гальванометра.

Уравнения движения рассматриваемой системы при оговоренных уже выше упрощениях можно записать в виде \*)

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta + g'_1, \\ \eta = h'_2\psi(\sigma), \\ T_c\dot{\mu} + \mu = h'_3\psi(\sigma), \\ \sigma = \varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2\ddot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta - b\mu. \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

Здесь через  $\mu$  обозначено напряжение, снимаемое с обкладок конденсатора,  $T_c$  и  $h'_3$  — электрическая постоянная времени и максимальное напряжение в цепи релейной обратной связи.

Только что рассмотренный режим линеаризации в общей теории релейных систем называется скользящим режимом. Скользящие режимы зависят от структуры релейных схем. Если условия существования скользящих режимов выполняются, то они могут возникать только в некоторой области изменения координат системы, включающей в себя регулируемое положение. Роль, которую играют скользящие режимы в общем функционировании релейных систем регулирования, зависит от величины этой области. При достаточно больших областях скользящие режимы будут являться рабочими режимами системы, как это, например, имело место в автопилоте, в котором управляющий элемент был охвачен релейной обратной связью. При скользящих режимах релейную систему можно заменить эквивалентной линейной системой регулирования.

### § 1.3. Системы прерывистого регулирования

В системах импульсного регулирования, как уже отмечалось во введении, можно разрешить противоречие между точностью и мощностью управляющего сигнала посредством простых технических средств. На рис. 1.6 представлена одна из первых схем такого рода, так называемая схема

\*) На рис. 1.5 не показан потенциометр обратной связи на рулевом приводе.

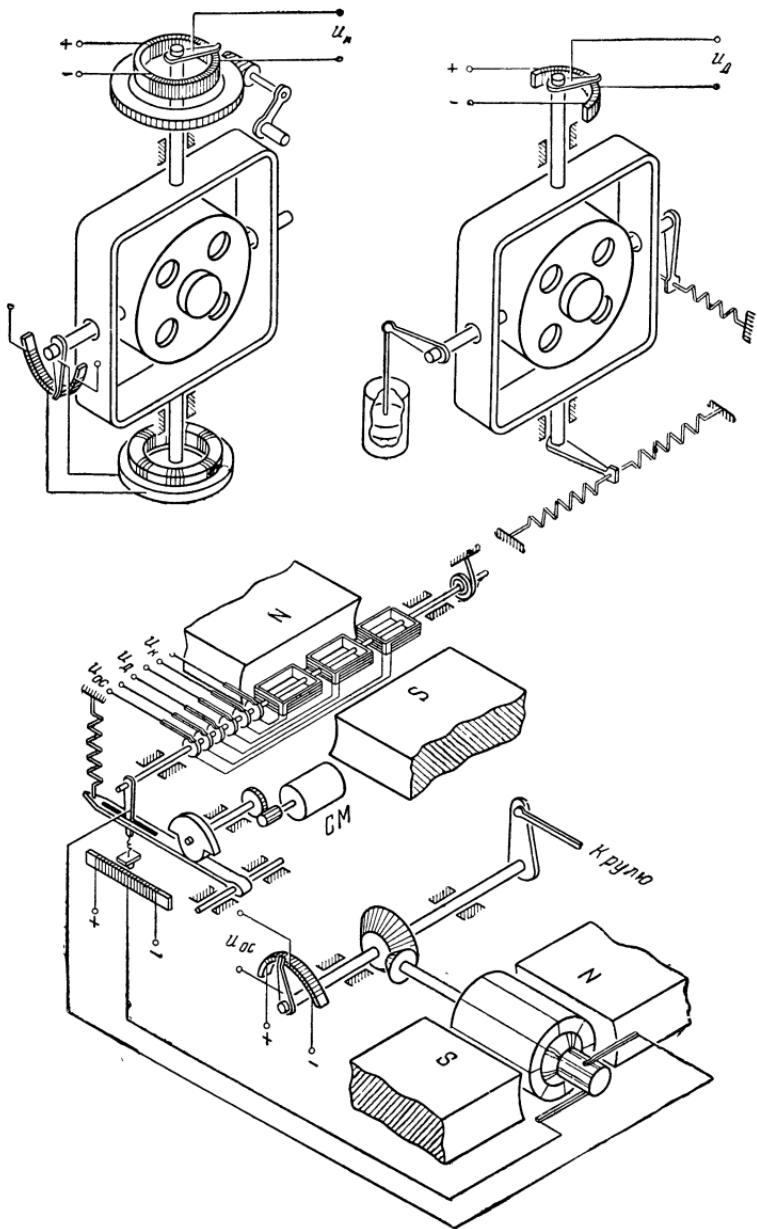


Рис. 1.6. Схема автопилота с амплитудно-импульсной модуляцией управляющего сигнала.

прерывистого регулирования с принудительным ритмом чередования импульсов. Выходной сигнал суммирующего гальванометра формируется потенциометрическим устройством с пружинящей щеткой, которая в свободном состоянии не находится в контакте с потенциометром. Щетку гальванометра приводят в контакт с потенциометром специальная дужка, которая через равные промежутки времени перебрасывается из крайнего нижнего положения в верхнее и обратно. Для этой цели в схеме предусмотрен синхронный мотор с выходным кулачком и специальная восстанавливающая пружина.

Время и сила нажатия щетки при контакте с потенциометром определяются профилем кулачка и пружиной толкателя. Общий период цикла повторения регулируется скоростью вращения синхронного мотора. Необходимую для управления сервомотором мощность выходного сигнала можно обеспечить выбором силы нажатия и площади контактирующей части щетки. Таким образом, в интервалах съема гальванометр фиксируется в текущем положении и с него снимается сигнал, постоянный по величине и достаточный по мощности. В паузах гальванометр освобождается от выходного устройства и с большей точностью устанавливается в новое положение, которое соответствует изменившемуся входному сигналу. Поэтому на схеме рис. 1.6 нет электромашинного усилителя, который фигурирует на рис. 1.3, так как в том случае нельзя повысить мощность снимаемого сигнала, не загrubив при этом показания суммирующего гальванометра. Так, в системах прерывистого регулирования можно найти компромиссное разрешение противоречия, указанного в начале данного параграфа.

На рис. 1.7 дано графическое изображение выходного сигнала гальванометра во времени. Выходной сигнал представляется прямоугольными импульсами постоянной ширины  $T_1$ , следующими друг за другом через равные промежутки времени  $T$  (на рис. 1.7  $T_1 = \text{const}$ ,  $T_2 = \text{const}$ ,  $T = T_1 + T_2$ ). Высота импульсов пропорциональна значению входного сигнала в мгновения, соответствующие началу съема. Можно также сказать, что площадь импульсов пропорциональна указанным выше значениям входной величины. Площадь является более адекватной и содержательной характеристикой импульсов. Если считать гальванометр идеальным прибором и его входную величину обозначить через  $\sigma$  (аргумент управления),

то выходной сигнал можно обозначить через  $\psi(\sigma)$  (управляющая функция).

На графике рис. 1.7 изображен случай, соответствующий данному предположению. Аналитически управляющую функцию  $\psi(\sigma)$  можно записать в виде

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} \sigma(mT) & \text{при } mT \leq t < mT + T_1, \\ & T_1 = \text{const}, \quad T = \text{const}, \\ 0 & \text{при } mT + T_1 \leq t < (m+1)T, \\ & T - T_1 = T_2 = \text{const}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь принято, что в моменты съема управляющая функция равна соответствующему дискретному значению аргумента

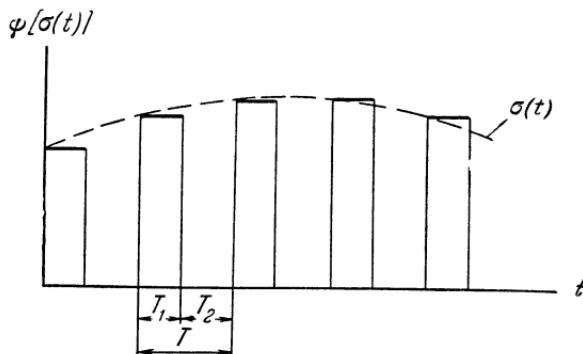


Рис. 1.7. График управляющей функции с амплитудно-импульсной модуляцией.

управления  $\sigma(mT)$ , так как любой другой коэффициент пропорциональности можно учесть в уравнениях системы, поставив перед  $\psi(\sigma)$  подходящий множитель.

Если считать, что рассмотренная здесь схема импульсного управления сервомотором применяется в автопилоте, то уравнения движения системы стабилизации нейтрального самолета формально запишутся также в виде (1.6), но в этих уравнениях  $\psi(\sigma)$  определяется (1.10) или графиком рис. 1.7.

Выходное устройство гальванометра с падающей дужкой (рис. 1.7) является импульсным элементом, осуществляющим амплитудно-импульсную модуляцию управляющего сигнала. Системы регулирования с таким импульсным элементом

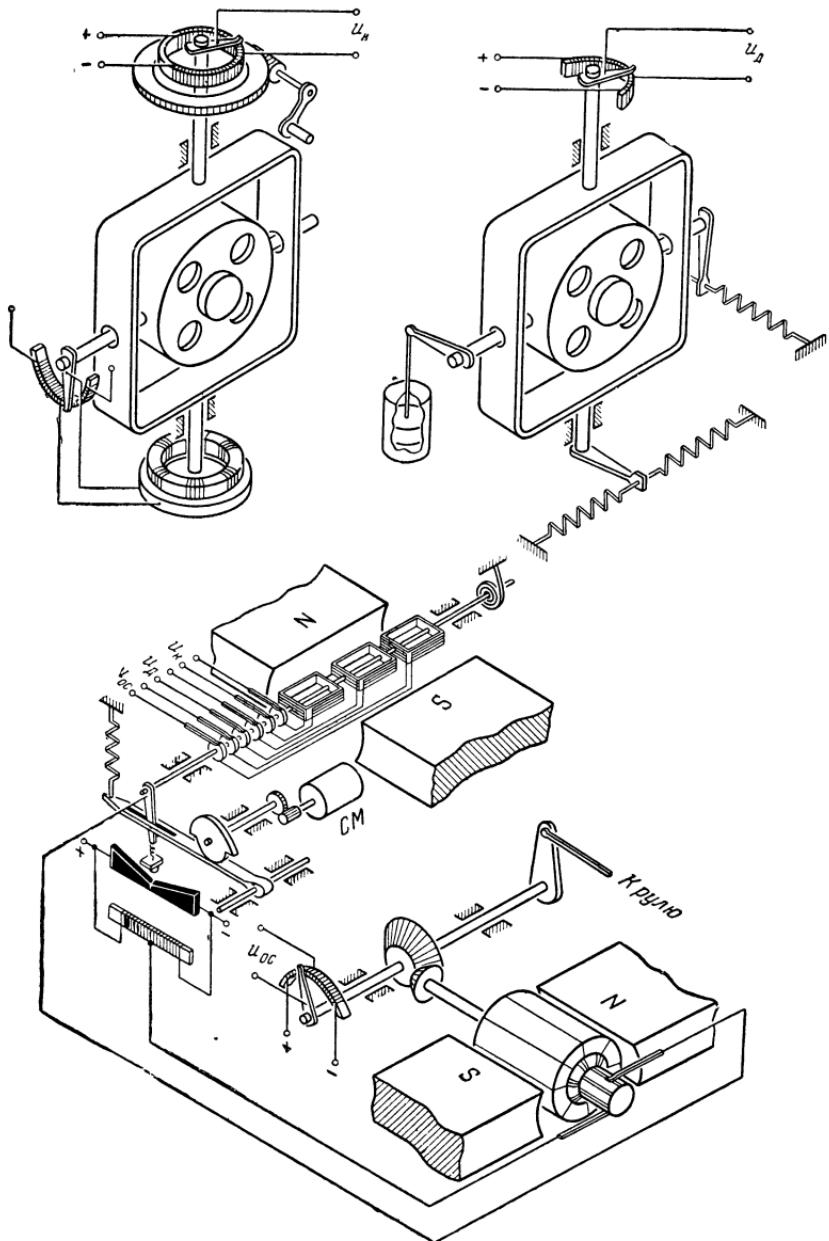


Рис. 1.8. Схема автопилота с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала.

относятся к классу линейных импульсных систем, так как их состояние в дискретные равнотстоящие моменты времени определяется линейными уравнениями в конечных разностях.

На рис. 1.8 представлен другой тип импульсного элемента, который осуществляет широтно-импульсную модуляцию управляющего сигнала.

В данной схеме потенциометр заменен электрически изолированными друг от друга двумя контактными ламелями, которые профилированы с рабочей стороны так, что их ширина пропорционально увеличивается от центра к краям. Теперь абсолютная величина выходного сигнала является постоянной, а время контактирования оказывается пропорциональным углу поворота рамки гальванометра, т. е. абсолютной величине его входного сигнала. В данном случае модулируется ширина импульсов внутри постоянного периода их следования.

Обозначим через  $T_{1,m}$  переменную ширину импульса, а через  $T_{2,m}$  продолжительность паузы, причем  $T_{1,m} + T_{2,m} = T = \text{const}$ . В рассматриваемом случае ширина импульса

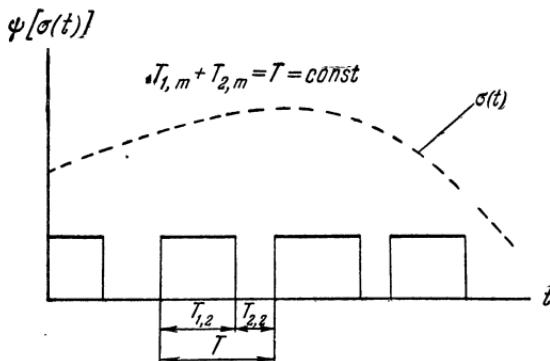


Рис. 1.9. График управляемой функции с широтно-импульсной модуляцией.

$T_{1,m}$  будет пропорциональна значению входного сигнала, соответствующего началу контактирования в  $m$ -м интервале повторения. На рис. 1.9 дано графическое изображение управляемой функции  $\psi(\sigma)$  и аргумента управления  $\sigma$  при использовании принципа широтно-импульсной модуляции.

Аналитически  $\psi(\sigma)$  можно представить в виде

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} \chi_m & \text{при } mT \leq t < mT + T_{1,m}, \\ 0 & \text{при } mT + T_{1,m} \leq t < (m+1)T, \end{cases} \quad (1.11)$$

где

$$T_{1,m} = T_1 \chi_m \sigma(m t),$$

$$\chi_m = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma = 0, \\ -1 & \text{при } \sigma < 0. \end{cases}$$

Здесь  $T_1$  — некоторая константа, имеющая размерность времени, поэтому аргумент управления  $\sigma$  является безразмерной величиной. Удобно принять  $T_1 < T$ .

Системы регулирования с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала являются нелинейными. Интересно отметить одну особенность широтно-импульсной модуляции, которая позволяет ее использовать в системах с цифровыми вычислительными устройствами. Величины постоянного уровня, но разной продолжительности сравнительно просто изменяются с помощью элементарных импульсов стандартной ширины, т. е. они относительно просто преобразуются к виду, весьма удобному при дискретном счете.

#### § 1.4. Общие уравнения движения и классификация систем регулирования

Рассмотренные в предыдущих параграфах системы импульсного и релейного регулирования описывались однотипными дифференциальными уравнениями. Поэтому представляется целесообразным в качестве математической модели использовать систему дифференциальных уравнений второго порядка, представленной в общей форме так, чтобы все частные случаи получались подходящим выбором соответствующих коэффициентов и вида управляющей функции.

Запишем такие уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m (a_{ij}\ddot{y}_j + b_{ij}\dot{y}_j + c_{ij}y_j) &= h'_i \psi(\sigma) + g'_i, \\ \sigma &= \sum_{j=1}^m (\gamma'_j y_j + \gamma''_j \dot{y}_j), \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Здесь через  $y_j$  обозначены координаты системы, которые отсчитываются от регулируемого положения;  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $h'_i$ ,  $\gamma'_j$  и  $\gamma''_j$  — вещественные постоянные коэффициенты; величины  $g'_i$  определяют внешнее воздействие. Так как во всех случаях  $\psi(0) = 0$ , то цепочка равенств

$$y_1(t) = y_2(t) = \dots = y_m(t) \equiv 0 \quad (1.13)$$

является тривиальным решением системы уравнений (1.12) при отсутствии внешнего воздействия. Равенства (1.13) определяют стационарное состояние системы, подлежащее регулированию. Поэтому уравнения (1.12) можно рассматривать как уравнения возмущенного движения системы регулирования около стационарного состояния.

Будем предполагать, что определитель коэффициентов при старших производных системы (1.12) отличен от нуля. Тогда ее можно разрешить относительно старших производных и с помощью новых переменных

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \dots, \quad x_m = y_m, \\ x_{m+1} = \dot{y}_1, \quad x_{m+2} = \dot{y}_2, \dots, \quad x_n = \dot{y}_m, \\ n = 2m \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

представить в нормальной форме Коши

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \dots + p_{1n}x_n + h_1\psi(\sigma) + g_1, \\ \dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \dots + p_{2n}x_n + h_2\psi(\sigma) + g_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n + h_n\psi(\sigma) + g_n, \\ \sigma = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \dots + \gamma_nx_n, \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

где  $p_{ij}$ ,  $h_i$  и  $\gamma_i$  — постоянные коэффициенты, определяемые по ходу вычислений;  $g_i$  являются линейными комбинациями  $g'_i$ . Стационарное состояние в новых координатах определяется равенствами

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) \equiv 0. \quad (1.16)$$

Классификацию систем регулирования, рассматриваемых в данной работе, будем проводить по виду управляющей функции  $\psi(\sigma)$  и аргумента управления  $\sigma$ . По виду управляющей функции будем различать системы релейного и импульсного регулирования; последние в свою очередь будем

разделять на линейные и нелинейные системы. Управляющая функция в этих случаях представляется графиками, приведенными в табл. 1.1 и на рис. 1.7 и 1.9.

По виду аргумента управления  $\sigma$  будем различать системы с принципом регулирования по координате и ее первым производным, системы с обратными связями различной формы.

Уравнения (1.12) и (1.15) охватывают любые случаи в рамках рассматриваемых систем. В частности, если прибор, формирующий аргумент управления, нельзя считать безынерционным, то тогда его выход будет играть роль  $\sigma$ . Этот случай получается из общего, когда все коэффициенты  $\gamma_i$  (см. (1.15)), кроме одного, будут равны нулю. Однако несомненное достоинство понятия аргумента управления в общем виде состоит в том, что он позволяет определить предельные возможности того или иного принципа регулирования.

В уравнения (1.12) и (1.15) все координаты входят симметрично. Симметричные уравнения позволяют находить общие закономерности решений и формулировать конечные результаты в простой и удобной форме.

### § 1.5. Аргументы управления при задающем воздействии

Схемы автопилотов, приведенные выше, решали классическую задачу регулирования, которая состояла в том, чтобы поддерживать регулируемую координату на постоянном уровне или ограничить ее изменение при внешних возмущениях.

Рассмотренные системы регулирования работают по принципу обратной связи; чувствительные элементы системы регистрируют отклонения регулируемой координаты и ее производных от установленного уровня, и исполнительный орган по сигналам регулятора препятствует таким отклонениям вне зависимости от причин, их породивших. Автоматическую систему, решающую подобную задачу, иногда называют собственно системой регулирования или системой стабилизации.

Однако любую систему регулирования легко перевести в другой режим работы, который можно называть режимом управления. В режиме управления оператор вводит в систему задающие воздействия и через посредство регулятора заставляет объект регулирования непрерывно изменять свое положение в желаемом направлении. Перевод системы в режим управления можно осуществить, если производить перена-

стройку чувствительных элементов на новый уровень, который может быть постоянным или непрерывно изменяться в зависимости от поступающей к оператору внешней информации. Тогда система регулирования будет заставлять регулируемую координату как бы подслеживать за непрерывно изменяющимся уровнем и одновременно стабилизировать ее изменение около нового положения. Задающие воздействия описываются произвольными функциями времени, так как они зависят от изменения внешней обстановки и тактики поведения оператора.

Однако, как правило, эти функции подчиняются некоторым ограничениям по величине, по скорости изменения сигнала и т. д., обусловленных спецификой комплексных задач, которые решаются системой в режиме управления. Систему регулирования, работающую в режиме управления, часто называют следящей системой.

На рис. 1.10 представлена одна из возможных принципиальных схем ввода задающих или управляющих воздействий в автопилот. Эта схема очень удобна для объяснения существа вопроса, хотя для практического воплощения основной идеи управления другие технические решения могут оказаться более приемлемыми.

На рис. 1.10 демпфирующий гироскоп и курсовой гироскоп устанавливаются на специальном диске, который может поворачиваться относительно самолета вокруг вертикальной оси. Такой поворот осуществляется специальным мотором через редуктор. Мотор приводится во вращение посредством задающего напряжения  $u'_3$  (имеется в виду электромотор), которое изменяется в соответствии с решением, принимаемым оператором.

Обозначим угол поворота диска относительно самолета через  $\varphi_3$  и будем считать его положительным, когда он изменяется в противоположную сторону по отношению к положительному направлению изменения угла рысканья самолета  $\varphi$ . Тогда диск участвует в двух движениях; в переносном вращении вместе с самолетом и относительном движении по отношению к самолету. Эти движения определяются соответственно углами  $\varphi(t)$  и  $\varphi_3(t)$ , рассматриваемыми как функции времени. С учетом выбранного направления отсчета углов  $\varphi$  и  $\varphi_3$  положение диска в абсолютном движении будет определяться углом  $(\varphi - \varphi_3)$ .

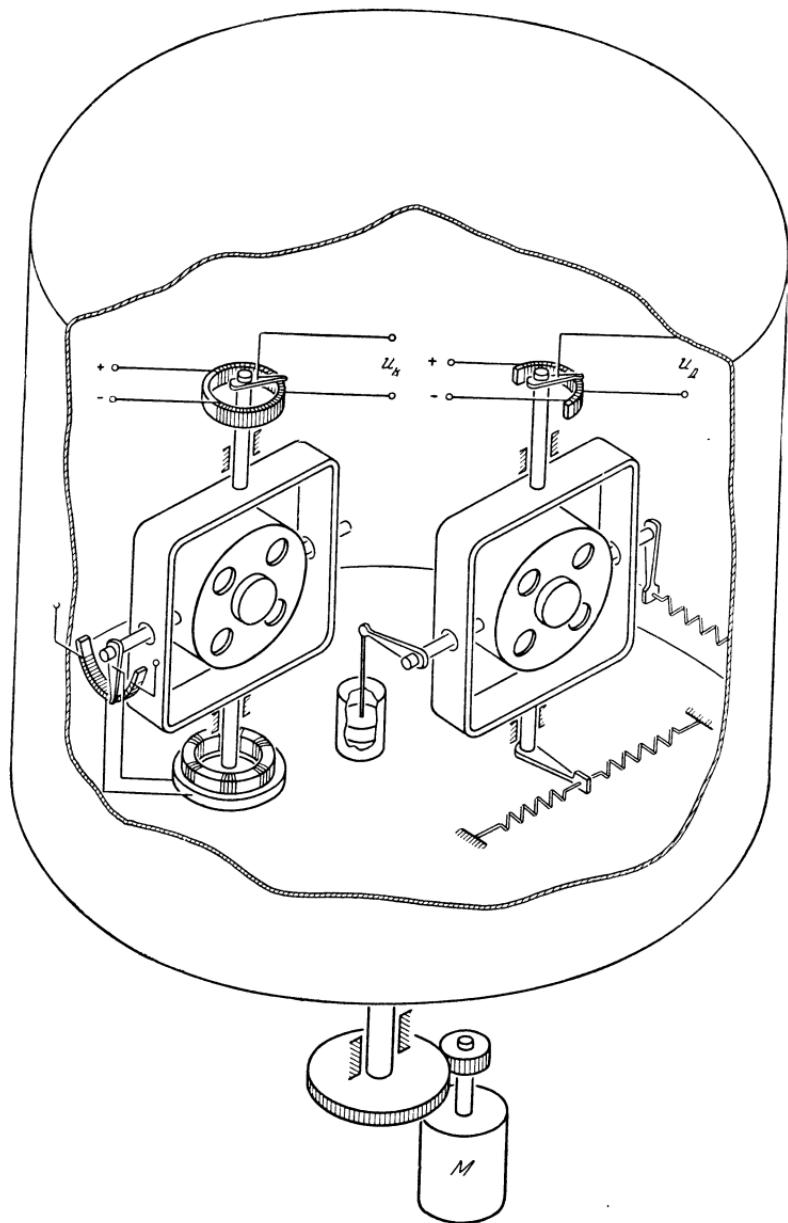


Рис. 1.10. Схема ввода в автопилот управляющего воздействия.

Ось фигуры курсового гироскопа сохраняет неизменное направление в абсолютном пространстве, поэтому с его потенциометра в данном случае мы снимаем напряжение  $u_k$ , пропорциональное разности  $(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_3)$ . Демпфирующий гироскоп определяет угловую скорость и угловое ускорение относительно абсолютного пространства. По схеме рис. 1.10 демпфирующий гироскоп устанавливается на диске, поэтому с его потенциометра мы снимаем напряжение  $u_a$ , пропорциональное линейной комбинации разностей  $(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_3)$  и  $(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_3)$ . При вводе задающего воздействия по схеме рис. 1.10 аргумент управления  $\sigma$  имеет обычную структуру, только, очевидно, в определяющем его выражении нужно вместо  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$  ставить соответственно  $(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_3)$ ,  $(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_3)$  и  $(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_3)$ . Таким образом, аргумент управления при вводе задающего воздействия в автопилот будет определяться формулой

$$\sigma = (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_3) + a_1(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_3) + a_2(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_3) - \frac{1}{a} \eta. \quad (1.17)$$

Для общих уравнений движения систем регулирования в виде (1.12) и (1.15) аргумент управления  $\sigma$  с учетом задающего воздействия можно записать в симметричной форме

$$\sigma = \sum_{j=1} \gamma'_j (y_j - y_{3j}) + \gamma''_j (\dot{y}_j - \dot{y}_{3j}) \quad (1.18)$$

или

$$\sigma = \gamma_1(x_1 - x_{31}) + \gamma_2(x_2 - x_{32}) + \dots + \gamma_n(x_n - x_{3n}) \quad (1.19)$$

соответственно для уравнений (1.12) и (1.15).

## ГЛАВА II

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### § 2.1. Матрицы. Основные определения и действия над ними

**Общие замечания.** В настоящее время существует ряд руководств по теории матриц и их применению к решению практических задач. Можно отметить известные монографии Б. В. Булгакова [5], Ф. Р. Гантмахера [6], Р. Фрезера, В. Дункана и А. Коллара [24]. Однако мы считаем целесообразным привести здесь основные формулы и изложить специальные методы матричного исчисления, на которых будут основываться дальнейшие исследования. Это позволит решение задач регулирования проводить более сжато, не загромождая их необходимыми отступлениями по обоснованию выбранных методов. Такой прием изложения облегчит пользование книгой и сделает ее более доступной для инженеров.

#### *Основные определения*

Упорядоченная совокупность комплексных или вещественных чисел, образующих прямоугольную таблицу из  $m$  строк и  $n$  столбцов

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad (2.1)$$

называется *прямоугольной матрицей размерности  $m \times n$* . Числа  $a_{ij}$  называются элементами матрицы; первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в таблице. Матрица называется *квадратной порядка  $n$* , когда  $m = n$ . При  $n = 1$

имеем *матрицу-столбец*

$$h = \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{vmatrix}; \quad (2.2)$$

при  $m = 1$  — *матрицу-строку*

$$\gamma = \| \gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n \| . \quad (2.3)$$

Таблица, составленная из  $r < m$  строк и  $s < n$  столбцов матрицы (2.1), называется *субматрицей*. Если субматрица квадратная порядка  $r$ , то ее определитель называется *минором* порядка  $r$ . Говорят, что матрица имеет *ранг*  $r$ , если наибольший порядок не равного нулю минора равен  $r$ . Квадратная матрица называется *неособой*, если ее ранг совпадает с порядком матрицы. Определитель неособой матрицы отличен от нуля.

Две матрицы  $A$  и  $B$  считаются равными, если они имеют одинаковую размерность и все их соответственные элементы равны между собой, т. е.  $a_{ij} = b_{ij}$ . Матрица  $A = 0$ , если все ее элементы  $a_{ij} = 0$ . Матрица  $A^T$  с элементами  $a_{ij}^T$  называется *транспонированной* по отношению к  $A$  с элементами  $a_{ij}$ , если  $a_{ji}^T = a_{ij}$ . Строки транспонированной матрицы равны столбцам исходной, и наоборот.

Квадратная матрица  $A$  называется *симметричной*, если она совпадает с транспонированной матрицей, т. е.  $A = A^T$ . В такой матрице элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой,  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Квадратная матрица  $A$  называется *диагональной*, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю, т. е.  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Диагональная матрица вида

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

называется *единичной*. Иногда пишут  $E_n$ , если хотят подчеркнуть порядок единичной матрицы.

**Сложение матриц.** Матрицы  $A$  и  $B$  одинаковой размерности  $m \times n$  можно складывать. Матрица  $C = A + B$  той же размерности, элементы  $c_{ij}$  которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (2.5)$$

называется суммой матриц  $A$  и  $B$ . Из (2.5) следует, что сложение матриц подчиняется тем же законам, что и сложение скалярных величин.

**Умножение матриц.** Если число столбцов первой матрицы  $A$  размерности  $m \times n$  равно числу строк второй матрицы  $B$  размерности  $k \times l$ , т. е.  $n = k$ , то их можно перемножить в указанном направлении.

Матрица  $C$  размерности  $m \times l$  является их произведением

$$C = AB, \quad (2.6)$$

если ее элементы  $c_{ij}$  являются суммой произведенияния элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ , т. е.

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n=k} a_{ir} b_{rj}. \quad (2.7)$$

Матрицу размерности  $m \times n$  можно умножить справа на матрицу-столбец  $n \times 1$  и слева на матрицу-строку  $1 \times m$ ; при этом получается матрица-столбец и матрица-строка с размерностями  $m \times 1$  и  $1 \times n$  соответственно. Матрицы с размерностями  $m \times n$  и  $n \times m$  и, в частности, квадратные матрицы одинакового порядка можно перемножить в любом направлении.

Умножение матриц удовлетворяет ассоциативному и дистрибутивному законам, т. е.

$$\left. \begin{aligned} (AB)C &= A(BC) = ABC, \\ (A+B)C &= AC + BC, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

но коммутативный закон в общем случае не имеет места, так что

$$AB \neq BA. \quad (2.9)$$

Две матрицы  $A$  и  $B$  называются *перестановочными*, если

$$AB = BA. \quad (2.10)$$

При умножении матрицы на скалярную величину все ее элементы умножаются на эту величину. Диагональные матрицы одного порядка являются перестановочными.

Если две матрицы  $A$  и  $B$  квадратные и одна из них неособая, то равенство  $AB = 0$  возможно тогда и только тогда, когда другая матрица нулевая. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Транспонирование подчиняется следующему закону:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Отсюда, в частности, следует, что произведение двух симметричных и перестановочных матриц является также симметричной матрицей

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

Ранг произведения двух прямоугольных матриц не превосходит ранга любого из сомножителей. Если  $C = AB$  и  $r_A$ ,  $r_B$  и  $r_C$  — ранги матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то  $r_C \leq r_A, r_B$ . В частности, произведение матрицы-столбца  $h$  размерности  $n \times 1$  и матрицы-строки  $\gamma$  размерности  $1 \times n$

$$h\gamma = \begin{vmatrix} h_1\gamma_1 & h_1\gamma_2 & \dots & h_1\gamma_n \\ h_2\gamma_1 & h_2\gamma_2 & \dots & h_2\gamma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n\gamma_1 & h_n\gamma_2 & \dots & h_n\gamma_n \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

имеет ранг, равный единице, т. е. все миноры этой матрицы порядка выше первого равны нулю.

Присоединенная и обратная матрицы. Пусть  $A_{ij}$  — алгебраические дополнения (миноры с соответствующим знаком) элементов  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$ . Если в матрице  $A$  заменить элементы  $a_{ij}$  их алгебраическими дополнениями  $A'_{ij}$ , а затем матрицу транспонировать, то получим *присоединенную* матрицу  $A'$ . Элементы  $a'_{ij}$  матрицы  $A'$

удовлетворяют условиям

$$a'_{ij} = A_{ji}.$$

По известному свойству определителей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a'_{jk} = \sum_{j=1}^n a'_{ij} a_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (2.12)$$

Отсюда, с учетом правила умножения матриц на скалярную величину, следуют равенства

$$A \cdot A' = A'A = (\det A)E. \quad (2.13)$$

Если матрица  $A$  неособая, т. е.  $\det A \neq 0$ , то  $\det A' = (\det A)^{n-1}$ .

Матрица  $A^{-1}$  с элементами  $a_{ij}$ , удовлетворяющая равенству

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E, \quad (2.14)$$

называется *обратной*. Неособая матрица  $A$  всегда имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ , определяемую формулой

$$A^{-1} = \frac{A'}{\det A},$$

так что элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A^{-1}$  равны алгебраическим дополнениям  $A_{ji}$ , деленным на определитель матрицы  $A$ . Из формулы (2.12) и указанного свойства элементов  $a_{ij}$  устанавливаем равенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (2.15)$$

Матрица, обратная произведению  $AB$ , равна произведению обратных матриц  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  в противоположном направлении, т. е.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (2.16)$$

Квадратная матрица  $A$  называется *ортогональной*, если  $A^{-1} = A^T$ . Определитель ортогональной матрицы равен  $\pm 1$ . В ортогональной матрице элементы совпадают со своими алгебраическими дополнениями. Из этого факта и равенств (2.12)

и (2.15) следует, что элементы ортогональной матрицы удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (2.17)$$

**Степени матриц.** Произведение  $k$  квадратных матриц  $A$  называется  $k$ -й степенью матрицы  $A$  и обозначается  $A^k$ . Для любых целых неотрицательных  $k$  и  $l$  в силу ассоциативного закона следует

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl}. \quad (2.18)$$

В случае неособых матриц это равенство справедливо для любых целых чисел, так как можно записать

$$A^{-k} = (A^{-1})^k. \quad (2.19)$$

**Матричные единицы.** Квадратную матрицу  $E_{ij}$ , у которой элемент, находящийся на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен единице, а остальные равны нулю, назовем *матричной единицей*. Матричные единицы подчиняются следующему правилу умножения:

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases} \quad (2.20)$$

Любую квадратную матрицу  $A$  с элементами  $a_{ij}$  можно разложить по матричным единицам и представить в виде

$$A = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} E_{ij}. \quad (2.21)$$

Рассмотрим две квадратные матрицы  $K$  и  $K^{-1}$  с элементами  $k_{ij}$  и  $\kappa_{ij}$  и введем обозначения

$$k_i = \begin{vmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ k_{ni} \end{vmatrix}, \quad \kappa_j = \|\kappa_{j1} \kappa_{j2} \dots \kappa_{jn}\| \quad (2.22)$$

для  $i$ -го столбца и  $j$ -й строки  $K$  и  $K^{-1}$  соответственно. Тогда легко установить, что

$$KE_{ij}K^{-1} = k_i \alpha_j, \quad (2.23)$$

и вообще для трех квадратных матриц  $A$ ,  $K$  и  $K^{-1}$  имеет место разложение \*)

$$KAk^{-1} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} k_i \alpha_j. \quad (2.24)$$

В частности, если  $A$  — единичная матрица, то будем иметь

$$KEK^{-1} = KK^{-1} = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i. \quad (2.25)$$

**Косые ряды.** Квадратную матрицу  $n$ -го порядка

$$H^i = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} i \text{ строк} \\ \cdot \end{array} \right\} . \quad (2.26)$$

у которой элементы, расположенные на прямой, параллельной главной диагонали и сдвинутой на  $i$  мест влево, равны единице, а все остальные элементы равны нулю, назовем *единичным (левым) косым рядом*. Индекс  $i$  может пробегать значения от 1 до  $n - 1$ ; соответствующие матрицы будем называть *первым, вторым и т. д. единичным косым рядом*.

Прямыми вычислениями можно убедиться в справедливости следующего правила перемножения единичных косых рядов:

$$H^i \cdot H^j = H^j \cdot H^i = \begin{cases} H^{i+j} & \text{при } i + j < n, \\ 0 & \text{при } i + j \geq n. \end{cases} \quad (2.27)$$

При умножении единичных рядов их индексы ведут себя формально, как показатели степени, когда их сумма меньше порядка матрицы.

\*) Формулы (2.23) и (2.24) верны также и в том случае, когда вместо  $K$  и  $K^{-1}$  берутся две произвольные квадратные матрицы.

С помощью единичных косых рядов левую треугольную матрицу порядка  $n$

$$A_{\Delta} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

с равными элементами в косых рядах можно представить в виде

$$A_{\Delta} = a_0 E + a_1 H^1 + a_2 H^2 + \dots + a_{n-1} H^{n-1}. \quad (2.29)$$

Благодаря свойству (2.27) полученное разложение формально подчиняется правилам алгебры скалярных величин. С помощью разложения (2.29) легко образовать степени матрицы (2.28). Рассмотрим частный случай, когда  $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$ , т. е.

$$A_{\Delta} = a_0 E + a_1 H^1. \quad (2.30)$$

Принимая во внимание, что  $H^i = 0$  при  $i \geq n$  и пользуясь обычным правилом бинома Ньютона, получим для  $m$ -й степени матрицы (2.30):

при  $m < n$

$$\begin{aligned} A_{\Delta}^m &= (a_0 E + a_1 H^1)^m = a_0^m E + m a_0^{m-1} a_1 H^1 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{m!}{(m-k)! k!} a_0^{m-k} a_1^k H^k + \dots + a_1^m H^m; \end{aligned} \quad (2.31)$$

при  $m \geq n$

$$\begin{aligned} A_{\Delta}^m &= (a_0 E + a_1 H^1)^m = a_0^m E + m a_0^{m-1} a_1 H^1 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{m!}{(m-k)! k!} a_0^{m-k} a_1^k H^k + \dots \\ &\quad \dots + \frac{m!}{(m-n+1)! (n-1)!} a_0^{m-n+1} a_1^{n-1} H^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Разложение (2.29) позволяет систематизировать процесс образования обратной матрицы  $A_{\Delta}^{-1}$  [5]. Применяя формально

разложение по правилу бинома для матрицы (2.30), получим

$$\begin{aligned} A_{\Delta}^{-1} &= (a_0 E + a_1 H^1)^{-1} = \\ &= a_0^{-1} E - a_0^{-2} a_1 H^1 + a_0^{-3} a_1^2 H^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_0^{-n} a_1^{n-1} H^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Умножая правую и левую части этого разложения на матрицу (2.30), получим единичную матрицу; это доказывает, что формула (2.33) действительно определяет обратную матрицу  $A_{\Delta}^{-1}$ .

**Характеристическая матрица.** Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$  с элементами  $a_{ij}$ . Тогда матрица

$$\lambda E - A = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

называется *характеристической матрицей*, а ее определитель  $\det(\lambda E - A)$ , являющийся по  $\lambda$  многочленом  $n$ -й степени, — *характеристическим полиномом* матрицы  $A$ . Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристического полинома называются *характеристическими числами* или *собственными значениями* матрицы  $A$ .

Две квадратные матрицы  $A$  и  $B$  одного и того же порядка называются *подобными*, если они связаны соотношением  $A = CBC^{-1}$ . Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические уравнения. Это следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - A) &= \det(\lambda E - CBC^{-1}) = \\ &= \det C (\lambda E - B) C^{-1} = \det(\lambda E - B) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

**Коагулированные матрицы.** Соответствующими перегородками каждую матрицу можно разбить на блоки.

В качестве примера возьмем матрицу пятого порядка

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|. \quad (2.35)$$

Субматрицы  $A_{ij}$  будем называть *блоками*, а матрицу, представленную через блоки, — *коагулированной*. Коагулированные матрицы можно складывать и умножать, если они удовлетворяют оговоренным выше условиям по размерности (см. стр. 40 и 41), причем эти условия должны удовлетворяться как для коагулированной матрицы с блочными элементами, так и для соответствующих субматриц-блоков. Тогда операции производятся каскадом сначала над блоками коагулированных матриц, а затем над элементами блоков.

Коагулированная матрица

$$J = \left\| \begin{array}{ccccc} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_s \end{array} \right\|, \quad (2.36)$$

у которой все блочные элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю, называется *квазидиагональной*. Нетрудно видеть, что две квазидиагональные матрицы  $J$  и  $J'$  подходящих размерностей перемножаются по правилу

$$JJ' = \left\| \begin{array}{ccccc} J_1 J'_1 & & & & \\ & J_2 J'_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_s J'_s \end{array} \right\|. \quad (2.37)$$

Матрицы  $J$  и  $J'$  являются перестановочными, т. е.  $JJ' = J'J$ , если все блоки  $J_i$  и  $J'_i$  являются попарно перестановочными

матрицами. В частности, для квадратных блоков  $J_i$  имеем

$$J^m = \begin{vmatrix} J_1^m & & & \\ & J_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^m \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

Если блоки  $J_i$  являются неособыми квадратными матрицами, то обратная матрица  $J^{-'}$  имеет вид

$$J^{-'} = \begin{vmatrix} J_1^{-'} & & & \\ & J_s^{-'} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^{-'} \end{vmatrix}. \quad (2.39)$$

Нетрудно видеть, что правила (2.37) — (2.39) являются естественными обобщениями соответствующих операций над диагональными матрицами.

## § 2.2. Каноническое представление матриц

Рассмотрим квадратную матрицу  $B$  порядка  $n$  с элементами  $b_{ij}$ . Всегда можно найти неособую матрицу

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} \quad (\det K \neq 0) \quad (2.40)$$

и обратную ей матрицу

$$K^{-1} = \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1n} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \kappa_{n2} & \dots & \kappa_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2.41)$$

с помощью которых матрицу  $B$  можно представить в виде

$$B = KJK^{-1}, \quad (2.42)$$

где  $J$  в общем случае является квазидиагональной матрицей типа (2.36), зависящей от свойств и типа характеристических чисел матрицы  $B$ . Матрицу  $J$  будем называть *канонической формой* матрицы  $B$ , а  $K$  — *преобразующей матрицей*\*).

Каноническим представлением удобно пользоваться для образования степеней матрицы  $B$  и обратной матрицы  $B^{-1}$ . Возводя в  $m$ -ю степень левую и правую части равенства (2.42) и используя свойство ассоциативности, получим

$$B^m = K J^m K^{-1}. \quad (2.43)$$

Когда характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $B$  простые, каноническая матрица является диагональной матрицей характеристических чисел \*\*)

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}. \quad (2.44)$$

Поэтому

$$\Lambda^m = \begin{vmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{vmatrix}. \quad (2.45)$$

Воспользовавшись правилом (2.24) разложения произведения трех матриц по элементам среднего множителя и учитывая формулы (2.43) и (2.45), представим  $B^m$  в виде

$$B^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m k_i \alpha_i, \quad (2.46)$$

где  $k_i$  и  $\alpha_i$  суть  $i$ -е столбец и строка матриц  $K$  и  $K^{-1}$  соответственно (см. (2.22)). Если матрица  $B$  неособая, то ее каноническая матрица  $J$  будет также неособой. Тогда обратная

\*) Существует бесчисленное множество квазидиагональных матриц  $J$ . Мы будем пользоваться канонической формой Жордана в том виде, как это будет указано ниже.

\*\*) Для случая простых характеристических чисел каноническую матрицу вместо  $J$  будем обозначать через  $\Lambda$ .

матрица  $B^{-1}$  будет получаться, если в (2.43) и (2.46) положить  $m = -1$ . Так, из формулы (2.46) получим

$$B^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} k_i u_i. \quad (2.47)$$

Для кратных характеристических чисел разложение  $B^m$  и  $B^{-1}$  имеет более сложный вид. В этом случае в качестве канонической матрицы  $J$  удобно взять квазидиагональную матрицу (2.36) с клетками (блоками) Жордана  $J_\sigma$ . Число и вид клеток Жордана  $J_\sigma$  зависят от числа и степени так называемых элементарных делителей, соответствующих кратному характеристическому числу. Пусть  $\lambda_\sigma$  – характеристическое число матрицы  $B$  кратности  $q_\sigma$ . Будем характеристическое число  $\lambda_\sigma$  считать столько раз, сколько различных элементарных делителей  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{e_\sigma}$  ему соответствует. Число  $e_\sigma$  называется степенью элементарного делителя. Тогда клетку Жордана  $J$ , соответствующую элементарному делителю  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{e_\sigma}$ , можно найти в виде

$$J_\sigma = \begin{vmatrix} \lambda_\sigma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_\sigma & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_\sigma \end{vmatrix}. \quad (2.48)$$

Клетка Жордана есть левая треугольная квадратная матрица порядка  $e_\sigma$ ; ее можно представить через единичный первый косой ряд в виде

$$\therefore J_\sigma = \lambda_\sigma E_{e_\sigma} + H_{e_\sigma}^1. \quad (2.49)$$

Нижний индекс  $e_\sigma$  указывает здесь на порядок соответствующих матриц. Если  $e_\sigma = q_\sigma$ , то характеристическому числу  $\lambda_\sigma$  соответствует один элементарный делитель и одна клетка Жордана, порядок которой в этом случае совпадает с кратностью  $q_\sigma$ . В частности, для случая, когда характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$  простые, а  $\lambda_{n-1} = \lambda_n$  есть двойной корень с одним элементарным делителем второй степени, ка-

каноническая матрица  $J$  будет представляться в виде

$$J = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \lambda_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}. \quad (2.49a)$$

Степень клетки Жордана  $J_\sigma^m$  для  $m < e_\sigma$  и  $m \geq e_\sigma$  определяется из разложений (2.31) и (2.32), если в соответствии с (2.30) и (2.49) положить в них  $a_0 = \lambda_\sigma$  и  $n = e_\sigma$ .

Запишем  $J_\sigma^m$  в форме левой треугольной матрицы порядка  $e_\sigma$  с равными элементами  $b_\rho^{(\sigma)}$  в косых рядах:

$$J_\sigma^m = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_\rho & b_{\rho-1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{e_\sigma-1} & b_{e_\sigma-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}, \quad (2.50)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} b_\rho^{(\sigma)} = \frac{m! \lambda_\sigma^{m-\rho}}{(m-\rho)! \rho!}, \\ \rho = 0, 1, 2, \dots, m \quad \text{при } m < e_\sigma, \\ \rho = 0, 1, 2, \dots, e_\sigma - 1 \quad \text{при } m \geq e_\sigma. \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

Здесь для простоты в матрице (2.50) опущен верхний индекс  $\sigma$  при коэффициентах  $b_\rho^{(\sigma)}$ . В соответствии с формулой (2.38)  $J^m$  есть квазидиагональная матрица с блоками  $J_\sigma^m$ , определяемыми формулами (2.50) и (2.51). Разложим  $B^m = K J^m K^{-1}$  (2.43) по элементам матрицы  $J^m$ . Для этой цели обозначим сумму порядков клеток Жордана, предшествующих  $J_\sigma$ , через

$$e_1 + e_2 + \dots + e_{\sigma-1} = s^{(\sigma)}. \quad (2.52)$$

Тогда номера  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $J^m$ , на пересечении которых будут находиться элементы  $\rho$ -го косого ряда клетки  $J_\sigma^m$ , будут определяться формулой  $i - j = \rho$ , где  $j$  принимает последовательные значения от  $s^{(\sigma)} + 1$  до  $s^{(\sigma)} + e_\sigma - \rho$ .

Учитывая это обстоятельство и формулу (2.23), представим  $B^m$  в виде \*)

$$\begin{aligned} B^m = \sum_{\sigma}'' b_0^{(\sigma)} (k_{s+1}\kappa_{s+1} + k_{s+2}\kappa_{s+2} + \dots + k_{s+e_{\sigma}}\kappa_{s+e_{\sigma}}) + \\ + b_1^{(\sigma)} (k_{s+2}\kappa_{s+1} + k_{s+3}\kappa_{s+2} + \dots + k_{s+e_{\sigma}}\kappa_{s+e_{\sigma}-1}) + \dots \\ \dots + b_{e_{\sigma}-1}^{(\sigma)} k_{s+e_{\sigma}}\kappa_1. \quad (2.53) \end{aligned}$$

Здесь  $\sum''$  означает, что суммирование ведется по корням, имеющим различные элементарные делители. Коэффициенты  $b_{\rho}^{(\sigma)}$  определяются формулой (2.51),  $s$  определяется из (2.52). В частности, для случая, когда  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$  — простые корни, а  $\lambda_{n-1} = \lambda_n$  — двойной корень с одним элементарным делителем второй степени, имеем

$$\begin{aligned} e_{\sigma} = 1 & \text{ для } \sigma = 1, 2, \dots, n-2, \\ e_{\sigma} = 2 & \text{ для } \sigma = n-1 \end{aligned}$$

и

$$s = \sigma - 1 \quad \text{при} \quad \sigma \leq n-1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B^m = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i^m k_i \kappa_i + \lambda_{n-1}^m (k_{n-1} \kappa_{n-1} + k_n \kappa_n) + \\ + m \lambda_{n-1}^{m-1} k_n \kappa_{n-1}. \quad (2.53a) \end{aligned}$$

Если матрица  $B$  неособая, то обратная матрица  $B^{-1}$  получается из (2.51) и (2.53) при  $m = -1$ . Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} B^{-1} = \sum_{\sigma}'' \lambda_{\sigma}^{-1} (k_{s+1}\kappa_{s+1} + k_{s+2}\kappa_{s+2} + \dots + k_{s+e_{\sigma}}\kappa_{s+e_{\sigma}}) - \\ - \lambda_{\sigma}^{-2} (k_{s+2}\kappa_{s+1} + k_{s+3}\kappa_{s+2} + \dots + k_{s+e_{\sigma}}\kappa_{s+e_{\sigma}-1}) + \dots \\ \dots + (-1)^{e_{\sigma}-1} \lambda_{\sigma}^{-e_{\sigma}} k_{s+e_{\sigma}} \kappa_{s+1}. \quad (2.54) \end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что среди корней  $\lambda_{\sigma}$  могут быть и равные, но с различными элементарными делителями.

\*) Здесь для простоты записи вместо  $s^{(\sigma)}$  пишется  $s$ .

### § 2.3. Разложение обратной и характеристической матриц на элементарные дроби

Для квадратной матрицы  $B$  порядка  $n$  рассмотрим характеристическую матрицу  $f(\lambda) = \lambda E - B$ . Обозначим через  $F(\lambda)$  матрицу, присоединенную к  $f(\lambda)$ . Тогда, согласно (2.14), будем иметь

$$f(\lambda)^{-1} = (\lambda E - B)^{-1} = \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (2.55)$$

где  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - B)$  — характеристический полином  $n$ -й степени. Элементы  $F_{ji}$  присоединенной матрицы  $F(\lambda)$  суть полиномы степени не выше  $(n - 1)$ . Это следует из того, что  $F_{ji}$  являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы  $f(\lambda)$ . Следовательно, выражения  $F_{ji}(\lambda)/\Delta(\lambda)$  есть правильные дроби и их можно по известным формулам разложить на элементарные дроби, а затем представить в матричной записи. Если корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристического полинома  $\Delta(\lambda)$  простые, то указанное разложение представляется в виде

$$\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \sum_{i=1}^n \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_i}, \quad (2.56)$$

где

$$\Delta'(\lambda_i) = \left[ \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_i}.$$

В случае, когда  $\lambda_\sigma$  есть корень кратности  $q_\sigma$ , это разложение представляется в форме

$$\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \sum_{\sigma} \sum_{\rho=1}^{q_{\sigma}} \frac{1}{(q_{\sigma} - \rho)!} \left[ \frac{F(\lambda_{\sigma})}{\Delta_{\sigma}(\lambda_{\sigma})} \right]^{(q_{\sigma} - \rho)} \cdot \frac{1}{(\lambda - \lambda_{\sigma})^{\rho}}, \quad (2.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\sigma}(\lambda) &= \frac{\Delta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_{\sigma})^{q_{\sigma}}}, \\ \left[ \frac{F(\lambda_{\sigma})}{\Delta_{\sigma}(\lambda_{\sigma})} \right]^{(\rho)} &= \left[ \frac{d^{\rho}}{d\lambda^{\rho}} \frac{F(\lambda)}{\Delta_{\sigma}(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_{\sigma}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

а штрих указывает, что суммирование следует вести по всем различным корням  $\lambda_{\sigma}$ . Под производной матрицы любого порядка понимается матрица, составленная из соответствующих

производных ее элементов. Формально разложения (2.56) и (2.57) совпадают со своими скалярными аналогами.

Теперь применим процедуру построения обратной матрицы  $f(\lambda)^{-1}$ , рассмотренную в предыдущем параграфе. Учитывая, что

$$KEK^{-1} = KK^{-1} = E,$$

запишем

$$f(\lambda) = \lambda E - B = \lambda E - KJK^{-1} = K[\lambda E - J]K^{-1}. \quad (2.59)$$

Отсюда по правилу (2.15) имеем

$$f(\lambda)^{-1} = (\lambda E - B)^{-1} = K[\lambda E - J]^{-1}K^{-1}. \quad (2.60)$$

Характеристическая матрица  $J = \lambda E - J$  имеет ту же структуру, что и каноническая матрица  $J$ . Когда все характеристические числа  $\lambda_i$  простые, она является диагональной матрицей с элементами  $\lambda - \lambda_i$  и по аналогии с формулами (2.42) — (2.47) можно записать

$$f(\lambda)^{-1} = (\lambda E - B)^{-1} = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \frac{1}{\lambda - \lambda_i}. \quad (2.61)$$

Если  $\lambda_\sigma$  — характеристические числа с элементарными делителями степени  $e_\sigma$ , то по аналогии с формулой (2.49) можно в данном случае записать

$$J'_\sigma = (\lambda - \lambda_\sigma)E_{e_\sigma} - H_{e_\sigma}^1, \quad (2.62)$$

где  $J'_\sigma$  — соответствующая клетка Жордана в квазидиагональной матрице  $J' = \lambda E - J$ . Тогда легко заметить, что  $(\lambda E - B)^{-1}$  можно получить из правой части равенства (2.54), если заменить в нем  $\lambda_\sigma$  на  $\lambda - \lambda_\sigma$  и вместо знака минус всюду ставить знак плюс. Мы выпишем формулу для частного случая, когда  $\lambda_\sigma$  соответствует один элементарный делитель, степень которого равна кратности корня,  $e_\sigma = q_\sigma$ . Получаем

$$\begin{aligned} f(\lambda)^{-1} &= (\lambda E - B)^{-1} = \\ &= \sum_{\sigma} (k_{s+1}\alpha_{s+1} + k_{s+2}\alpha_{s+2} + \dots + k_{s+q_\sigma}\alpha_{s+q_\sigma}) \frac{1}{\lambda - \lambda_\sigma} + \\ &+ (k_{s+2}\alpha_{s+1} + k_{s+3}\alpha_{s+2} + \dots + k_{s+q_\sigma}\alpha_{s+q_\sigma-1}) \frac{1}{(\lambda - \lambda_\sigma)^2} + \dots \\ &\dots + k_{s+q_\sigma}\alpha_{s+1} \frac{1}{(\lambda - \lambda_\sigma)^{q_\sigma}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

В этой формуле опять вместо  $s^{(\sigma)}$  пишем  $s$ . В данном случае  $s^{(\sigma)}$  равно сумме кратностей всех предыдущих характеристических чисел (см. (2.52)).

Сравнивая разложения (2.56) с (2.61) и (2.57) с (2.63), а также учитывая равенство (2.55), получим весьма важные для практических приложений матричные тождества. Для простых характеристических чисел  $\lambda_i$  будем иметь

$$k_i \chi_i = \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.64)$$

Для случая, когда  $\lambda_\sigma$  — характеристическое число кратности  $q_\sigma$  с одним элементарным делителем степени  $e_\sigma = q_\sigma$ , получим

$$\left. \begin{aligned} k_{s+1} \chi_{s+1} + k_{s+2} \chi_{s+2} + \dots + k_{s+q_\sigma} \chi_{s+q_\sigma} &= \\ &= \frac{1}{(q_\sigma - 1)!} \left[ \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(q_\sigma - 1)}, \\ k_{s+2} \chi_{s+1} + k_{s+3} \chi_{s+2} + \dots + k_{s+q_\sigma} \chi_{s+q_\sigma - 1} &= \\ &= \frac{1}{(q_\sigma - 2)!} \left[ \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(q_\sigma - 2)}, \\ \dots &\dots \\ k_{s+\rho} \chi_{s+1} + k_{s+\rho+1} \chi_{s+2} + \dots + k_{s+q_\sigma} \chi_{s+q_\sigma - \rho + 1} &= \\ &= \frac{1}{(q_\sigma - \rho)!} \left[ \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(q_\sigma - \rho)}, \\ \dots &\dots \\ k_{s+q_\sigma} \chi_{s+1} &= \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

В частности, для двойного корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n$  с одним элементарным делителем второй степени имеем:  $s = n - 2$ ,  $\sigma = n - 1$ ,  $q_\sigma = 2$  и  $e_\sigma = 2$ . Тогда, согласно (2.65), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} k_{n-1} \chi_{n-1} + k_n \chi_n &= \left[ \frac{F(\lambda_{n-1})}{\Delta_{n-1}(\lambda_{n-1})} \right]^{(1)}, \\ k_n \chi_{n-1} &= \frac{F(\lambda_{n-1})}{\Delta_{n-1}(\lambda_{n-1})}. \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Начертание левых частей равенства (2.65) изменится, если  $\lambda_\sigma$  соответствуют несколько элементарных делителей. Общие формулы имеют громоздкий вид и они плохо

обозримы. Поэтому мы их выписывать не будем, а ограничимся одним замечанием принципиального характера.

Пусть корню  $\lambda_\sigma$  кратности  $q_\sigma$  соответствуют несколько элементарных делителей. Обозначим через  $e_\sigma$  степень старшего делителя,  $e_\sigma < q_\sigma$ . Тогда из анализа структуры разложения (2.54) легко установить, что в разложении (2.63) пропадают члены  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{-\rho}$ , для которых  $\rho > e_\sigma$ . Из этого факта немедленно следует

$$\frac{1}{(q_\sigma - \rho)!} \left[ \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(q_\sigma - \rho)} = 0, \quad \rho = e_\sigma + 1, \quad e_\sigma + 2, \dots, q_\sigma. \quad (2.67)$$

Используя полученные матричные тождества (2.64) и (2.65) и формулу (2.51), представим разложения (2.46) и (2.53) в виде

$$B^m = \sum_{i=1}^m \lambda_i^m \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad (2.68)$$

$$B^m = \sum_{\sigma} \sum_{\rho=0}^{q_\sigma-1} \lambda_{\sigma}^{m-\rho} \frac{m!}{(m-\rho)! \rho!} \frac{1}{(q_\sigma - \rho - 1)!} \left[ \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(q_\sigma - \rho - 1)}, \quad (2.69)$$

что справедливо \*) соответственно для простых  $\lambda_i$  и кратных  $\lambda_\sigma$  характеристических чисел матрицы  $B$ . Последнее равенство можно переписать в виде

$$B^m = \sum_{\sigma} \sum_{\rho=0}^{q_\sigma-1} \frac{(\lambda_{\sigma}^m)^{(\rho)}}{\rho!} \cdot \frac{1}{(q_\sigma - \rho - 1)!} \left[ \frac{F(\lambda_\sigma)}{\Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(q_\sigma - \rho - 1)}, \quad (2.70)$$

где

$$(\lambda_{\sigma}^m)^{(\rho)} = \frac{d^\rho (\lambda_{\sigma}^m)}{d\lambda^\rho} \Big|_{\lambda=\lambda_\sigma} = \frac{m! \lambda_{\sigma}^{m-\rho}}{(m-\rho)!}.$$

Эта запись удобна в том отношении, что она легко обобщается на любой полином от матрицы  $B$  с матричными или скалярными коэффициентами [5].

Во многих случаях бывает удобно оперировать с каноническими формами матриц. Для обратного перехода необходимо знать прямую  $K$  и обратную  $K^{-1}$  преобразующие мат-

\*) Эта запись не зависит от числа и степени элементарных делителей, соответствующих кратному корню.

рицы. Матричные тождества позволяют производить такой переход, так как выражают определенные комбинации столбцов  $k_i$  и строк  $\alpha_j$  матриц  $K$  и  $K^{-1}$  через присоединенную матрицу  $F(\lambda)$  и, вообще говоря, первые ее производные. Присоединенная матрица строится из элементов исходной матрицы по известным и указанным выше правилам. Существуют различные способы, систематизирующие и упрощающие процесс построения присоединенной матрицы (см., например, [6]).

Наконец, во всех операциях с каноническими матрицами, которые мы будем приводить ниже, можно принимать, что  $\lambda_\sigma$  соответствует один элементарный делитель, так как после перехода к присоединенной матрице  $F(\lambda)$  учет изменения структуры соответствующих разложений будет производиться как бы автоматически. Это обстоятельство является следствием равенств (2.67).

В заключение отметим некоторые свойства присоединенной матрицы  $F(\lambda)$ . Заметим, что  $\alpha_i$  и  $k_j$  являются строками и столбцами взаимно обратных матриц  $K^{-1}$  и  $K$ . Тогда в соответствии с (2.15) и (2.25) будем иметь в любом случае

$$\alpha_i k_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (2.71)$$

и

$$KK^{-1} = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = E. \quad (2.72)$$

Из тождества (2.64) и только что приведенных формул легко устанавливаются равенства

$$\left. \begin{array}{l} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} = 0 \quad (i \neq j), \\ \left( \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \right)^m = \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} = E, \end{array} \right\} \quad (2.73)$$

справедливые для простых характеристических чисел  $\lambda_i$ .

В случае кратных корней  $\lambda_\sigma$  из (2.65) можно получить аналогичные свойства для матрицы  $F(\lambda)/\Delta_\sigma(\lambda)$  и ее произ-

водных, которые мы сформулируем следующим образом. Коэффициенты разложения (2.57) на элементарные дроби, стоящие при  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{-1}$ , удовлетворяют равенствам (2.73), если только в третьем равенстве суммирование вести по разным корням  $\lambda_\sigma$ . Произведение в произвольном порядке любых двух коэффициентов разложения (2.57), соответствующих различным корням  $\lambda_\sigma$  и  $\lambda_\tau$ , равно нулю. Произведение в произвольном порядке двух коэффициентов стоящих при  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{-\rho}$  и  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{-\rho'}$  равно коэффициенту при  $(\lambda - \lambda_\sigma)^{-(\rho+\rho'-1)}$  или нулю, если эта степень в разложении отсутствует. Последнее всегда имеет место при  $\rho + \rho' - 1 > q_\sigma$  или, вследствие равенства (2.67), при  $\rho + \rho' - 1 > e_\sigma$ , где  $e_\sigma$  — старшая степень элементарного делителя, соответствующего корню  $\lambda_\sigma$ .

## § 2.4. Решение линейных конечноразностных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему уравнений в конечных разностях вида

$$\left. \begin{aligned} x_1(m) &= p_{11}^* x_1(m-1) + p_{12}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{1n}^* x_n(m-1) + g_1^*(m-1), \\ x_2(m) &= p_{21}^* x_1(m-1) + p_{22}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{2n}^* x_n(m-1) + g_2^*(m-1), \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n(m) &= p_{n1}^* x_1(m-1) + p_{n2}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{nn}^* x_n(m-1) + g_n^*(m-1), \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

где  $p_{ij}^*$  — постоянные вещественные числа, а  $x_i(m)$  и  $g_i^*(m)$  — вещественные функции целочисленной переменной  $m$ , пробегающей все значения натурального ряда чисел  $0, 1, 2, \dots$  и т. д.

Целочисленную переменную  $m$  называют *дискретным аргументом* \*), а уравнения (2.74) *разностными уравне-*

\*) Начиная с гл. IV, роль дискретного аргумента будут играть равноотстоящие мгновения времени с интервалом  $T$ . Тогда дискретный аргумент  $mT$  будет пробегать значения  $0, T, 2T, \dots$  и т. д. В гл. II и III мы сохраним более короткую запись для дискретного аргумента т. е. будем подразумевать  $T = 1$ .

ниями с дискретным аргументом. Функции  $g_i^*(m)$  считаются известными и их можно задавать различными способами.

В частности, их можно получать из непрерывных функций при целочисленных значениях независимостей переменной. В этом случае непрерывные функции называют *производящими функциями*. По виду производящих функций можно, например, говорить о дискретной экспоненте  $e^{at}$ , дискретном синусе  $\sin \omega t$  и косинусе  $\cos \omega t$  и т. д. Систему (2.74) будем называть *нормальной формой* уравнений в конечных разностях.

Перепишем уравнения (2.74) в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \\ \vdots \\ x_n(m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{12}^* & \cdots & p_{1n}^* \\ p_{22}^* & \cdots & p_{2n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n2}^* & \cdots & p_{nn}^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(m-1) \\ x_2(m-1) \\ \vdots \\ x_n(m-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_1^*(m-1) \\ g_2^*(m-1) \\ \vdots \\ g_n^*(m-1) \end{vmatrix} \quad (2.75)$$

или более компактно в виде

$$x(m) \equiv P^* x(m-1) + g^*(m-1), \quad (2.76)$$

где  $P^*$  — квадратная матрица элементов  $p_{ij}^*$ , порядка  $n$ , а  $x(m)$  и  $g^*(m)$  — матрицы-столбцы элементов  $x_i(m)$  и  $g_i^*(m)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) соответственно. Матричное уравнение (2.76) является рекуррентным соотношением, которое позволяет последовательно, шаг за шагом, получить  $x(m)$  для любого значения дискретного аргумента  $m$  при произвольно задаваемом начальном значении  $x(0)$ .

Так, будем иметь

Таким образом, общее решение уравнения (2.76), удовлетворяющее начальному условию  $x(0)$ , можно записать в виде

$$x(m) = P^{*m} x(0) + \sum_{m'=0}^{m-1} P^{*m-m'-1} g^*(m'). \quad (2.78)$$

Чтобы это равенство было справедливо при  $m=0$ , будем считать, что дискретные функции при отрицательном дискретном аргументе равны нулю. Равенство (2.78) допускает и такую запись:

$$x(m) = P^{*m} x(0) + \sum_{m'=0}^{m-1} P^{*m'} g^*(m-m'-1). \quad (2.79)$$

Решение (2.78) можно преобразовать, если использовать формулы (2.68) и (2.70), где вместо матрицы  $B$ , ее характеристического полинома  $\Delta(\lambda)$  и характеристических чисел  $\lambda_i$ , а также присоединенной матрицы  $F(\lambda)$  для  $(\lambda E - B)$  будем соответственно писать  $P^*$ ,  $\Delta^*(\lambda)$ ,  $\lambda_i^*$  и  $F^*(\lambda)$ .

Подставим в (2.78) или (2.79)  $P^{*m}$  и  $P^{*m-m'-1}$ , определенные по формулам (2.68) и (2.70), и во втором слагаемом переставим порядок суммирования. Тогда для простых характеристических чисел  $\lambda_i^*$  матрицы  $P^*$  будем иметь

$$x(m) = \sum_{i=1}^n \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} \left\{ \lambda_i^{*m} x(0) + \sum_{m'=0}^{m-1} \lambda_i^{*m-m'-1} g^*(m') \right\} \quad (2.80)$$

или

$$x(m) = \sum_{i=1}^n \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} \left\{ \lambda_i^{*m} x(0) + \sum_{m'=0}^{m-1} \lambda_i^{*m'} g^*(m-m'-1) \right\}. \quad (2.81)$$

Для кратных характеристических чисел  $\lambda_\sigma$  аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} x(m) = & \sum_{\sigma} \sum_{\rho=0}^{q_{\sigma}-1} \frac{1}{(q_{\sigma}-\rho-1)!} \left[ \frac{F^*(\lambda_{\sigma}^*)}{\Delta_{\sigma}^*(\lambda_{\sigma}^*)} \right]^{(q_{\sigma}-\rho-1)} \left\{ \frac{(\lambda_{\sigma}^{*\rho})^{(\rho)}}{\rho!} x(0) + \right. \\ & \left. + \sum_{m'=0}^{m-1} \frac{(\lambda_{\sigma}^{*m-m'-1})^{(\rho)}}{\rho!} g^*(m') \right\}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

или

$$x(m) = \sum_{\sigma} \sum_{\rho=0}^{q_{\sigma}-1} \frac{1}{(q_{\sigma}-\rho-1)!} \left[ \frac{F^*(\lambda_{\sigma}^*)}{\Delta_{\sigma}^*(\lambda_{\sigma}^*)} \right]^{(q_{\sigma}-\rho-1)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\lambda_{\sigma}^{*m})^{(\rho)}}{\rho!} x(0) + \\ & + \sum_{m'=0}^{m-1} \frac{(\lambda_{\sigma}^{*m'})^{(\rho)}}{\rho!} g^*(m-m'-1) \end{aligned} \right\}. \quad (2.83)$$

Напомним, что (см. (2.68))

$$\frac{(\lambda_{\sigma}^{*m})^{(\rho)}}{\rho!} = \frac{m(m-1)\dots(m-\rho+1)}{\rho!} \lambda_{\sigma}^{*m-\rho}. \quad (2.84)^{*}$$

Выбор той или другой формы решения разностного уравнения зависит от характера поставленной задачи или от технических возможностей реализации соответствующей вычислительной схемы. Если в формулах (2.80) — (2.83) положить  $g^*(m) \equiv 0$ , то получим общее решение однородной системы. Из структуры решения однородной системы легко устанавливается следующий факт: независимо от задания  $x(0)$  матричная переменная  $x(m)$  стремится к нулю при безграничном увеличении времени  $m$  тогда и только тогда, когда модули всех характеристических чисел  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$  матрицы  $D^*$  меньше единицы. И при тех же условиях наверняка хотя бы одна из переменных  $x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)$ , входящих в столбец  $x(m)$ , будет стремиться к бесконечности, если модуль по крайней мере одного характеристического числа будет больше единицы.

Мы рассматривали конечноразностные уравнения в нормальной форме. Такие уравнения будут встречаться при анализе релейных и импульсных систем регулирования. Однако в большинстве случаев к нормальной форме можно привести произвольную линейную систему в конечных разностях. Процедура приведения и условия осуществимости приведения аналогичны тем, которые используются в теории дифференциальных уравнений и которые в § 1.4 уже применялись нами.

---

<sup>\*</sup>) При  $\rho = 0$  правая часть уравнения (2.84) равна  $\lambda^{*m}$ .

## § 2.5. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

### Матричный экспоненциал

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, заданной в нормальной форме, особенно просто осуществляется с помощью матричного экспоненциала. *Матричный экспоненциал*  $e^{Pt}$  определяется суммой степенного ряда

$$e^{Pt} = E + P \frac{t}{1!} + P^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + P^m \frac{t^m}{m!} + \dots, \quad (2.85)$$

где  $P$  — произвольная квадратная матрица порядка  $n$ , а  $t$  — скалярный параметр. Нетрудно показать, что скалярные степенные ряды (2.85), соответствующие элементам матрицы  $e^{Pt}$ , сходятся абсолютно и равномерно для всех значений  $t$ , т. е. они имеют бесконечный радиус сходимости. Если вместо  $P$  подставим в (2.85) скалярную величину  $\lambda$  (вещественную или комплексную), то получим степенной ряд для экспоненты  $e^{\lambda t}$ .

Основные свойства скалярной экспоненты  $e^{\lambda t}$  сохраняются и для матричного экспоненциала  $e^{Pt}$ . Так, например, если две матрицы  $P'$  и  $P''$  перестановочны, т. е.  $P'P'' = P''P'$ , то

$$e^{P't} e^{P''t} = e^{P''t} e^{P't} = e^{(P'+P'')t}, \quad (2.86)$$

откуда, в частности, устанавливаем, что

$$e^{Pt} e^{-Pt} = e^{-Pt} e^{Pt} = E, \quad (2.87)$$

т. е. матрицы  $e^{Pt}$  и  $e^{-Pt}$  являются взаимно обратными. Эти свойства вытекают из того обстоятельства, что арифметические операции над перестановочными матрицами и скалярными величинами формально подчиняются одним и тем же правилам.

Рассмотрим каноническую форму матричного экспоненциала. Пусть  $P = KJK^{-1}$ . Тогда, учитывая (2.43) и дистрибутивный закон умножения, представим ряд (2.85) в виде

$$e^{Pt} = K \left( E + J \frac{t}{1!} + J^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + J^m \frac{t^m}{m!} + \dots \right) K^{-1}. \quad (2.88)$$

Но по определению матричного экспоненциала

$$e^{Jt} = E + J \frac{t}{1!} + J^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + J^m \frac{t^m}{m!} + \dots \quad (2.89)$$

и, следовательно,

$$e^{Pt} = Ke^{Jt}K^{-1}. \quad (2.90)$$

Введем специальное обозначение

$$M(t) = e^{Jt}. \quad (2.91)$$

Матрицу  $M(t)$  будем считать канонической формой экспоненциала  $e^{Pt}$ . Таким образом, матрицы  $P$  и  $e^{Pt}$  приводятся к каноническому виду посредством одной и той же преобразующей матрицы  $K$ . Так как две матрицы  $Jt_1$  и  $Jt_2$  являются перестановочными, то в соответствии с общими формулами (2.86) и (2.87) будем иметь

$$M(t_1)M(t_2) = M(t_2)M(t_1) = M(t_1 + t_2) \quad (2.92)$$

и

$$M(t)M(-t) = M(-t)M(t) = E. \quad (2.93)$$

Вид матрицы  $M(t)$  зависит от типа корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - P) = 0$  или, по другой терминологии, характеристических чисел матрицы  $P$ . Для простых корней  $J$  является диагональной матрицей  $\Lambda$  (2.44). Но тогда из (2.89) немедленно устанавливаем, что  $M(t)$  является диагональной матрицей вида

$$M(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}. \quad (2.94)$$

Для случая кратных корней  $\lambda_\sigma$  матрица  $J$  является квазidiагональной матрицей (2.36) с клетками (блоками) Жордана  $J_\sigma$ . Тогда аналогично получаем, что  $M(t)$  является квазidiагональной матрицей

$$M(t) = \begin{vmatrix} e^{J_{1t}} & & & \\ & e^{J_{2t}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_{st}} \end{vmatrix}, \quad (2.95)$$

блоки которой суть матричные экспоненциалы  $e^{J_\sigma t}$ , соответствующие клеткам Жордана  $J_\sigma$  порядка  $e_\sigma$ , а индекс  $s$  указы-

вает на число корней  $\lambda_\sigma$ , имеющих различные элементарные делители  $(\lambda - \lambda_\sigma)^e_\sigma$ . Так как  $m$ -я степень клетки Жордана  $J_\sigma^m$  для  $m < e_\sigma$  и  $m \geq e_\sigma$  определяется формулами (2.50) и (2.51), то прямым вычислением устанавливаем сумму ряда (2.89) при  $J = J_\sigma$  в виде левой треугольной матрицы порядка  $e_\sigma$  с равными элементами  $d_\rho^{(\sigma)}$  в косых рядах

$$e^{J_\sigma t} = \begin{vmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ d_{e_\sigma-1} & d_{e_\sigma-2} & \dots & d_0 \end{vmatrix}, \quad (2.96)$$

где

$$d_\rho^{(\sigma)} = \frac{t^\rho e^{\lambda_\sigma t}}{\rho!} \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, e_\sigma - 1, \quad (2.97)$$

причем в матрице (2.96) для простоты записи в  $d_\rho^{(\sigma)}$  опущен верхний индекс  $\sigma$ . В частности, если корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$  простые, а  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  с одним элементарным делителем, то из (2.94) — (2.97) следует, что

$$M(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-2} t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.98)$$

Здесь уместно отметить, что характеристические числа матрицы  $e^{Pt}$  равняются  $e^{\lambda_i t}$ , где  $\lambda_i$  — характеристические числа матрицы  $P$ , безразлично, простые или кратные.

Рассмотрим правила дифференцирования и интегрирования матричных экспоненциалов. Степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри их кругов сходимости. Это свойство имеем место и для ряда (2.85). Дифференцируя его почленно, получим

$$\frac{d}{dt} e^{Pt} = P + P^2 \frac{t}{1!} + \dots + P^m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots, \quad (2.99)$$

откуда немедленно устанавливаем, что

$$\frac{d}{dt} e^{Pt} = Pe^{Pt} = e^{Pt}P, \quad (2.100)$$

или, учитывая формулы (2.42), (2.90) и (2.91), получим

$$\frac{d}{dt} e^{Pt} = KJM(t)K^{-1} = KM(t)JK^{-1}. \quad (2.101)$$

В частности \*),

$$\frac{d}{dt} M(t) = \dot{M}(t) = JM(t) = M(t)J. \quad (2.102)$$

Далее, интегрируя почленно ряд (2.85), получим

$$\int_0^t e^{Pt} dt = Et + P \frac{t^2}{2!} + \dots + P^m \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} + \dots \quad (2.103)$$

Предполагая, что матрица  $P$  неособая, представим (2.103) в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{Pt} dt = \\ & = P^{-1} \left\{ -E + E + P \frac{t}{1!} + P^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + P^m \frac{t^m}{m!} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.104)$$

или, что то же самое, в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{Pt} dt = \\ & = \left\{ -E + E + P \frac{t}{1!} + P^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + P^m \frac{t^m}{m!} + \dots \right\} P^{-1}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Отсюда получаем

$$\int_0^t e^{Pt} dt = P^{-1} (e^{Pt} - E) = (e^{Pt} - E) P^{-1}. \quad (2.106)$$

\*) Здесь и в дальнейшем (кроме случаев, специально оговоренных) точка, поставленная сверху буквы, указывает на дифференцирование по  $t$ .

В данном случае можно записать \*)

$$\int_0^t e^{Pt} dt = \frac{e^{Pt} - E}{P}. \quad (2.107)$$

Если использовать формулы (2.42), (2.90), (2.91) и (2.43) при  $m = -1$ , то (2.107) можно представить в виде

$$\int_0^t e^{Pt} = K \frac{M(t) - E}{J} K^{-1}, \quad (2.108)$$

откуда, в частности, имеем

$$\int_0^t M(t) dt = \frac{M(t) - E}{J}. \quad (2.109)$$

Введем специальное обозначение

$$N(t) = \frac{M(t) - E}{J} = J^{-1} \{M(t) - E\} = \{M(t - E)\} J^{-1}. \quad (2.110)$$

В общем случае, когда корни  $\lambda_\sigma$  кратные, матрица  $N(t)$  является квазидиагональной вида

$$N(t) = \begin{vmatrix} \frac{e^{J_1 t} - E e_1}{J_1} & & & \\ & \frac{e^{J_2 t} - E e_2}{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{e^{J_s t} - E e_s}{J_s} \end{vmatrix}, \quad (2.111)$$

где, как и раньше,  $J_\sigma$  — клетки Жордана порядка  $e_\sigma$ , а  $E_{e_\sigma}$  — единичная матрица того же порядка. Определим блоки матрицы (2.111) для индекса  $\sigma$ . В соответствии

\*) Здесь деление подчиняется правилу деления скалярных чисел в том отношении, что результат не зависит от того, с какой стороны (т. е. справа или слева) производится умножение числителя на  $P^{-1}$ .

с формулами (2.33) и (2.49) будем иметь

$$\begin{aligned} J_{\sigma}^{-1} = \lambda_{\sigma}^{-1} E - \lambda_{\sigma}^{-2} H^1 + \dots + (-1)^{\rho} \lambda_{\sigma}^{-\rho-1} H^{\rho} + \dots \\ \dots + (-1)^{e_{\sigma}-1} \lambda_{\sigma}^{-e_{\sigma}} H^{e_{\sigma}-1}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Учитывая (2.96), представим матрицу  $e^{J_{\sigma}t} - E_{e_{\sigma}}$  через единичные косые ряды  $H^{\rho}$  в виде

$$\begin{aligned} e^{J_{\sigma}t} - E_{e_{\sigma}} = (d_0^{(\sigma)} - 1)E + d_1^{(\sigma)} H^1 + \dots \\ \dots + d_{\rho}^{(\sigma)} H^{\rho} + \dots + d_{e_{\sigma}-1}^{(\sigma)} H^{e_{\sigma}-1}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

В правых частях (2.112) и (2.113) опущен нижний индекс  $e_{\sigma}$  при  $E$  и  $H^{\rho}$ . Перемножая обе части равенств (2.112) и (2.113) с учетом правил (2.27), получим

$$\begin{aligned} J_{\sigma}^{-1} \{ e^{J_{\sigma}t} - E_{e_{\sigma}} \} = c_0^{(\sigma)} E + c_1^{(\sigma)} H^1 + \dots \\ \dots + c_{\rho}^{(\sigma)} H^{\rho} + \dots + c_{e_{\sigma}-1}^{(\sigma)} H^{e_{\sigma}-1}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

где

$$c_{\rho}^{(\sigma)} = \lambda_{\sigma}^{-1} d_{\rho}^{(\sigma)} - \lambda_{\sigma}^{-2} d_{\rho-1}^{(\sigma)} + \dots + (-1)^{\rho} \lambda_{\sigma}^{-\rho-1} (d_0^{(\sigma)} - 1). \quad (2.115)$$

Учитывая (2.97), представим  $c_{\rho}^{(\sigma)}$  в виде

$$c_{\rho}^{(\sigma)} = \frac{t^{\rho}}{\rho!} \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{\lambda_{\sigma}} - \frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} \cdot \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{\lambda_{\sigma}^2} + \dots + (-1)^{\rho} \frac{e^{\lambda_{\sigma} t} - 1}{\lambda_{\sigma}^{\rho+1}} \quad (2.116)$$

$$(\rho = 0, 1, 2, \dots, e_0 - 1).$$

Формулы (2.111) и (2.114) были выведены в предположении, что матрица  $P$  неособая или, что то же самое, все корни  $\lambda_{\sigma}$  ее характеристического уравнения отличны от нуля. Однако интеграл от  $e^{Pt}$  существует в любом случае, и его можно вычислить по найденным формулам посредством предельного перехода также в случае, когда один или несколько корней  $\lambda_{\sigma}$  равны нулю. Для этой цели перепишем (2.116) в виде

$$\begin{aligned} c_{\rho}^{(\sigma)} = (-1)^{\rho} \frac{e^{\lambda_{\sigma} t}}{\lambda_{\sigma}^{\rho+1}} \left[ 1 - \frac{\lambda_{\sigma} t}{1!} + \dots + (-1)^{\rho} \frac{(\lambda_{\sigma} \cdot t)^{\rho}}{\rho!} \right] - \\ - (-1)^{\rho} \frac{1}{\lambda_{\sigma}^{\rho+1}}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

В этом равенстве многочлен по  $\lambda_\sigma t$  представляет первые  $\rho$  членов разложения экспоненты  $e^{-\lambda_\sigma t}$  в ряд. Учитывая это обстоятельство, перепишем (2.117) в виде

$$c_\rho^{(\sigma)} = (-1)^\rho \frac{e^{\lambda_\sigma t}}{\lambda_\sigma^{\rho+1}} \left[ e^{-\lambda_\sigma t} - (-1)^{\rho+1} \frac{(\lambda_\sigma t)^{\rho+1}}{(\rho+1)!} - \right. \\ \left. - (-1)^{\rho+2} \frac{(\lambda_\sigma t)^{\rho+2}}{(\rho+2)!} - \dots \right] - (-1)^\rho \frac{1}{\lambda_\sigma^{\rho+1}}$$

или после очевидных приведений

$$c_\rho^{(\sigma)} = e^{\lambda_\sigma t} \left[ \frac{t^{\rho+1}}{(\rho+1)!} - \frac{\lambda_\sigma t^{\rho+2}}{(\rho+2)!} + \dots \right].$$

В предельном случае при  $\lambda_\sigma = 0$  будем иметь

$$c_\rho^{(\sigma)} = \frac{t^{\rho+1}}{(\rho+1)!}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, e_\sigma - 1. \quad (2.118)$$

Таким образом, матрица (2.114), являющаяся блочным элементом квазidiагональной матрицы  $N(t)$  (2.111), представляет собой левую треугольную матрицу \*)

$$\frac{e^{J_\sigma t} - E_{e_\sigma}}{J_\sigma} = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{e_\sigma-1} & c_{e_\sigma-2} & \dots & c_0 \end{vmatrix} \quad (2.119)$$

с равными элементами  $c_\rho^{(\sigma)}$  в косых рядах, которые определяются из (2.116) при  $\lambda_\sigma \neq 0$  и из (2.118) при  $\lambda_\sigma = 0$ .

Укажем форму матрицы  $N(t)$  (2.111) в некоторых частных случаях. В случае, когда все корни  $\lambda_i$  простые и отличны от нуля, матрица  $N(t)$  представляется в виде

$$N(t) = \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{e^{\lambda_2 t} - 1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n} \end{vmatrix}. \quad (2.120)$$

\*) Здесь для простоты записи опущен верхний индекс в коэффициентах  $c_\rho^{(\sigma)}$ .

Отсюда при  $\lambda_n = 0$  получим

$$N(t) = \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_{n-1} t} - 1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix}. \quad (2.121)$$

Если корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$  простые, а корень  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  и ему соответствует один элементарный делитель второй степени ( $e_{n-1} = q_{n-1} = 2$ ), то

$$N(t) = \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_{n-2} t} - 1}{\lambda_{n-2}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{t^2}{2!} & t \end{vmatrix}. \quad (2.122)$$

Учитывая (2.110), представим (2.108) окончательно в виде

$$\int_0^t e^{Pt} dt = KN(t)K^{-1}, \quad (2.123)$$

где матрица  $N(t)$  определяется соотношениями (2.111) и (2.119). Эта формула удобна в том отношении, что она справедлива также при  $\det P = 0$ . В этом случае следует только коэффициенты матрицы (2.119) определять по формуле (2.118), а не (2.116), как это имеет место при  $\det P \neq 0$ .

Рассмотрим неоднородную линейную систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \dots + p_{1n}x_n + h_1(t), \\ \dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \dots + p_{2n}x_n + h_2(t), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n + h_n(t), \end{array} \right\} \quad (2.124)$$

где  $p_{ij}$  — константы,  $h_i(t)$  — известные функции времени, которые могут допускать разрывы первого рода. Систему

уравнений (2.125) запишем в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_1 t \\ g_2 t \\ \vdots \\ g_n t \end{vmatrix} \quad (2.125)$$

или более компактно в виде

$$\dot{x} = Px + g(t), \quad (2.126)$$

где  $P$  — квадратная матрица элементов  $p_{ij}$ ,  $x$  — матрица-столбец переменных  $x_i$ , а  $g(t)$  — матрица-столбец известных функций  $g_i(t)$ . Пусть при  $t = t_0$  матричная координата  $x(t)$  имеет значение  $x(t_0)$ . Тогда решение уравнения (2.126), удовлетворяющее заданному начальному условию, представляется в виде

$$x(t) = e^{P(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{P(t-\xi')}g(\xi')d\xi', \quad (2.127)$$

в чем легко убедиться простой подстановкой (2.127) в уравнение (2.126). Внешне формула (2.127) имеет такой же вид, как если бы все элементы уравнения (2.126) являлись скалярными величинами. Как и в случае скалярных уравнений, первое слагаемое (2.127) определяет решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее при  $t = t_0$  начальному условию  $x(t_0)$ , а второе слагаемое есть частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее нулевому начальному условию.

Положив  $t - t_0 = \tau$  и  $\xi' = \xi + t_0$  преобразуем (2.127) к виду

$$x(t_0 + \tau) = e^{P\tau}x(t_0) + \int_0^\tau e^{P(\tau-\xi)}g(t_0 + \xi)d\xi, \quad (2.127')$$

которое при учете обозначений (2.90), (2.91) перепишется в форме

$$x(t_0 + \tau) = KM(\tau)K^{-1}x(t_0) + \int_0^\tau KM(\tau - \xi)K^{-1}g(t_0 + \xi)d\xi. \quad (2.128)$$

Если положить  $g(t) = h$  с элементами  $h_i = \text{const}$  и иметь в виду формулы (2.109), (2.110) и правило (2.92) перемножения матриц  $M(t_1)$  и  $M(t_2)$ , то из равенства (2.128) получим выражение

$$x(t_0 + \tau) = KM(\tau)K^{-1}x(t_0) + KN(\tau)K^{-1}h, \quad (2.129)$$

которое будет часто использоваться в теории импульсных систем. Правую часть формулы (2.129) можно разложить по элементам матриц  $M(t)$  и  $N(t)$ , если использовать правило (2.24). Для случая простых корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - P) = 0$  матрицы  $M(t)$  и  $N(t)$  определяются формулами (2.94) и (2.120) и указанное разложение будет иметь вид

$$x(t_0 + \tau) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i \tau} k_i x_i x(t_0) + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} - 1}{\lambda_i} k_i x_i h, \quad (2.130)$$

или

$$x(t_0 + \tau) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i \tau} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} x(t_0) + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} - 1}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h, \quad (2.131)$$

если воспользоваться матричными тождествами (2.64). При анализе импульсных систем регулирования будет встречаться случай, когда корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$  простые, а  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ . Матрицы  $M(t)$  и  $N(t)$  определяются теперь формулами (2.98) и (2.122). Тогда по правилу (2.24) получим разложение \*)

$$\begin{aligned} x(t_0 + \tau) &= \sum_{i=1}^{n-2} e^{\lambda_i \tau} k_i x_i x(t_0) + (k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n) x(t_0) + \\ &\quad + \tau k_n x_{n-1} x(t_0) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i \tau} - 1}{\lambda_i} k_i x_i h + \\ &\quad + \tau (k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n) h + \frac{\tau^2}{2!} k_n x_{n-1} h, \end{aligned} \quad (2.132)$$

\*) Формула (2.132) соответствует случаю, когда корню  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  соответствует один элементарный делитель второй степени. Если корню будут соответствовать два элементарных делителя первой степени, то в (2.122) отсутствует член, содержащий  $t^2$ .

которое посредством формул (2.66) при  $\lambda_{n-1} = 0$  можно представить в форме

$$\begin{aligned} x(t_0 + \tau) &= \sum_{i=1}^{n-2} e^{\lambda_i \tau} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} x(t_0) + \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} x(t_0) + \\ &+ \tau \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right] x(t_0) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i \tau} - 1}{\Delta'(\lambda_i)} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h + \\ &+ \tau \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \frac{\tau^2}{2!} \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right] h. \quad (2.133) \end{aligned}$$

Разложение (2.133) справедливо в любом случае, так как в соответствии с формулой (2.67) член, содержащий  $t^2$ , пропадает автоматически при  $e_{n-1} = 1$ , т. е. если двойному нулевому корню будут соответствовать два элементарных делителя степени единица. Равенство (2.129) и соответствующие ему разложения типа (2.130) и (2.132) будем называть *классической формой* решения системы дифференциальных уравнений (2.125) — (2.126), а разложения типа (2.131) и (2.133) условно назовем *операционной формой* решения. В данном случае операционная форма решения была получена из классической с помощью матричных тождеств (2.64) и (2.65). Операционную форму решения можно получить самостоятельно, если воспользоваться методами операционного исчисления, построенного на базе преобразования Лапласа.

## § 2.6. Квадратичные формы

Рассмотрим вещественную квадратичную форму

$$U = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (2.134)$$

вещественных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В матричной записи представим ее в виде

$$U = \| x_1 x_2 \dots x_n \| \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{array}, \quad (2.135)$$

или сокращенно

$$U = x^T A x, \quad (2.136)$$

где  $x$  — матрица-столбец переменных  $x_i$ , а  $A$  — симметричная квадратная матрица элементов  $a_{ij}$ , т. е.  $A = A^T$ . Определитель матрицы  $A$  называется *дискриминантом формы*. Характеристическое уравнение  $\det[\lambda E - A] = 0$  называется *вековым уравнением*. Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  векового уравнения всегда вещественны.

Всегда существует преобразующая ортогональная матрица  $O$  ( $O^T = O^{-1}$ ), которая приводит симметричную матрицу  $A$  к каноническому виду

$$O^{-1}AO = \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{vmatrix}, \quad (2.137)$$

причем вид канонической матрицы (2.137) не зависит от кратности корней  $\lambda_i$  векового уравнения. Если использовать преобразующую матрицу  $O$  для перехода к новой матричной переменной — столбцу  $y$  с помощью линейного преобразования

$$x = Oy, \quad y = O^{-1}x = O^T x, \quad (2.138)$$

то квадратичная форма  $U$  (2.136) преобразуется к виду

$$U = y^T O^T A O y = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad (2.139)$$

т. е. она представится в виде суммы квадратов новых независимых переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , равными корням векового уравнения.

Квадратичная форма  $U$  называется *определенной положительной*, если она обращается в нуль только при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  или, в матричном обозначении, при  $x = 0$ , а при всех остальных значениях переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  или матричной переменной  $x$  — положительна. Из (2.138) следует, что  $x$  и  $y$  обращаются в нуль одновременно. Отсюда из формулы (2.139) устанавливаем, что квадратичная форма  $U$  тогда и только тогда определена положительна, когда положительны все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ее векового уравнения.

В частности, дискриминант определенно положительной формы

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad (2.140)$$

больше нуля. Отсюда можно немедленно заключить, что все главные миноры дискриминанта определенно положительной квадратичной формы  $U$  положительны.

Действительно, указанные главные миноры являются в свою очередь дискриминантами определенно положительных частных форм, которые получаются из  $U$  приравниванием нулю части переменных.

**Теорема Сильвестра.** Для определенной положительности квадратичной формы  $U$  необходимо и достаточно, чтобы главные миноры ее дискриминанта были положительны, т. е. имели место неравенства

$$D_1 = a_{11} > 0, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, D_n = \left. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \right. > 0. \quad (2.141)$$

Необходимость этих условий мы уже показали, достаточность их выводится из следующих соображений. Рассмотрим правую треугольную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.142)$$

с элементами

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\tilde{A}_{ij}}{\tilde{A}_{jj}} \quad i \leq j, \quad (2.143)$$

где  $\tilde{A}_{ij}$  суть алгебраические дополнения (миноры со знаком) для элементов  $a_{ij} = a_{ji}$  определителей  $D_j$ , фигурирующих в неравенствах (2.141); ясно, что  $\tilde{A}_{jj} = D_{j-1}$ . Определитель треугольной матрицы (2.142) равен единице, так как все ее диагональные элементы  $\tilde{a}_{ii}$  равны единице. Используя изве-

стное правило определителей (2.12), устанавливаем прямым вычислением

$$\tilde{A}^T A \tilde{A} = \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{D_2}{D_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_3}{D_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{vmatrix}. \quad (2.144)$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$x = \tilde{A}z \quad (2.145)$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = z_1 + \tilde{a}_{12}z_2 + \tilde{a}_{13}z_3 + \dots + \tilde{a}_{1n}z_n, \\ x_2 = z_2 + \tilde{a}_{23}z_3 + \dots + \tilde{a}_{2n}z_n, \\ x_3 = z_3 + \dots + a_{3n}z_n, \\ \dots \\ x_n = z_n. \end{array} \right\} \quad (2.146)$$

Учитывая формулы (2.136), (2.144) и (2.145), представим квадратичную форму  $U$  в виде суммы квадратов новых независимых переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , т. е.

$$U = z^T \tilde{A}^T A \tilde{A} z = D_1 z_1^2 + \frac{D_2}{D_1} z_2^2 + \dots + \frac{D_n}{D_{n-1}} z_n^2. \quad (2.147)$$

Эта формула имеет самостоятельное и весьма важное значение, попутно она определяет достаточность условий (2.141).

Наряду с (2.134) — (2.136) рассмотрим вторую вещественную квадратичную форму

$$V = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (b_{ij} = b_{ji}) \quad (2.148)$$

или в матричной записи

$$V = x^T B x \quad (B = B^T). \quad (2.149)$$

Две квадратичные формы  $U$  и  $V$  определяют пучок форм

$$\rho U - V = x^T (\rho A - B) x, \quad (2.150)$$

где  $\rho$  является параметром. Пучок форм (2.150) называется *регулярным*, если форма  $U$  является определенно положительной. Для регулярного пучка форм всегда существует неособая вещественная матрица  $L$ , которая одновременно приводит матрицы  $A$  и  $B$  к виду

$$L^T A L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = E \quad (2.151)$$

и

$$L^T B L = \begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n \end{vmatrix} = R, \quad (2.152)$$

где  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  — корни характеристического уравнения

$$\det[\rho A - B] = 0 \quad (2.153)$$

пучка форм (2.150). Характеристическое уравнение (2.153) регулярного пучка форм всегда имеет  $n$  вещественных корней. Линейное преобразование переменных

$$x = Ly \quad (2.154)$$

одновременно приводит квадратичные формы  $U$  и  $V$  к виду

$$U = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad (2.155)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2. \quad (2.156)$$

Из формул (2.155) и (2.156) следует, что квадратичная форма  $V$  будет тогда и только тогда определено положительной, когда все корни  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  характеристического уравнения регулярного пучка форм будут положительными.

Если  $U = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , то  $A = E$  и характеристическое уравнение (2.153) регулярного пучка форм превращается в вековое уравнение для формы  $V$ .

### ГЛАВА III

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

### § 3.1. Общие теоремы прямого метода Ляпунова

При исследовании систем импульсного и релейного регулирования возникают вопросы об определении устойчивости стационарного состояния движения или равновесия, когда в возмущенном движении известны состояния системы в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени. Эти вопросы тесно связаны с изучением свойств решений систем разностных уравнений, и поэтому имеет смысл рассмотреть их в общем виде \*).

Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений, заданных в нормальной форме

$$x_i(m) = X_i[x_1(m-1), x_2(m-1), \dots, x_n(m-1)], \quad (3.1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n,$$

которые устанавливают связь между переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  для двух последовательных, равноотстоящих друг от друга значений независимого переменного  $m$ . Не нарушая общности, будем считать, что переменное  $m$  принимает только целочисленные значения 0, 1, 2, ... Независимую переменную  $m$ , как и прежде, будем называть *дискретным* временем.

Правые части уравнений (3.1) суть однозначные, непрерывные функции переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . При этих условиях всякая система значений переменных  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ , принимаемая за начальные условия при  $m=0$ , определяет единственное решение  $x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)$  уравнений (3.1), которое при  $m=0$  удовлетворяет начальным условиям. Это решение будет непрерывно зависеть от начальных условий.

---

\* ) Поставленный вопрос рассматривался автором с точки зрения построения функций Ляпунова в 1953 г. [30]. В 1919 г. Е. Коттон применял к анализу решений нелинейных разностных уравнений теорию характеристических чисел Ляпунова [33].

Будем считать, что существует область

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq b > 0 \quad (3.2)$$

изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , внутри которой правые части (3.1) непрерывны и не обращаются одновременно в нуль, кроме значений переменных

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (3.3)$$

при которых

$$X_i(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Геометрически переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно трактовать как координаты  $n$ -мерного фазового пространства, а решение системы разностных уравнений (3.1) — как движение изображающей точки. Тогда систему уравнений (3.1) можно назвать дискретной динамической системой \*). Дискретная динамическая система осуществляет точечное преобразование фазового пространства. Точка  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  является неподвижной, или *инвариантной*, точкой данного преобразования.

Равенства (3.3) определяют тривиальное решение уравнений (3.1). В соответствии с терминологией Ляпунова \*\*)  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  будем называть *невозмущенным движением системы*, а уравнения (3.1) — *уравнениями возмущенного движения*, а их решения — *возмущенными движениями* системы.

Правые части уравнений (3.1) не зависят явно от дискретного времени  $t$ , поэтому их решение определяет устойчивость установившихся невозмущенных движений. Однако, как будет показано ниже, к анализу решений такого типа разностных уравнений будет сведена задача об устойчивости периодических режимов колебаний релейных систем регулирования.

Для дискретных систем можно сформулировать определение устойчивости по Ляпунову.

\*) Такое наименование находится в соответствии с терминологией, принятой в качественной теории дифференциальных уравнений.

\*\*) С вопросами теории устойчивости движения по Ляпунову читатель может познакомиться по монографиям А. М. Ляпунова [16], Н. Г. Четаева [28] и И. Г. Малкина [17].

Если для всякого произвольно задаваемого числа  $a > 0$ , как бы мало оно ни было, можно выбрать положительное число  $\lambda$  так, что для всех возмущенных движений  $x_1(m)$ ,  $x_2(m)$ , ...,  $x_n(m)$ , для которых в начальный момент времени  $m = 0$  выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(0) \leq \lambda, \quad (3.5)$$

будут иметь место неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(m) < a \quad (3.6)$$

для любого значения  $m > 0$ , то невозмущенное движение (3.3) устойчиво \*). В противном случае неустойчиво и устойчиво асимптотически, если дополнительно имеют место предельные равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_i(m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Решение вопроса об устойчивости дискретных систем дается естественным распространением теорем прямого метода Ляпунова на рассматриваемый случай. Пусть существует вещественная функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , относительно которой будем предполагать, что существует достаточно малая область

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq c, \quad (3.8)$$

внутри которой она однозначна, непрерывна и обращается в нуль, когда все координаты  $x_i$  суть нули. Будем дополнительно считать, что функция  $V$  является знакопределенной положительной (отрицательной), если для всех значений координат  $x_i$ , удовлетворяющих неравенству (3.8), кроме  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ,  $V > 0$  ( $V < 0$ ); знакопостоянной положительной (отрицательной), если при указанных выше условиях  $V \geq 0$  ( $V \leq 0$ ).

Если функция  $V$  не является знакопределенной или знакопостоянной, то в любой сколь угодно малой окрестности

---

\*) Иногда говорят *обыкновенно устойчиво* или *просто устойчиво*.

точки  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , то функция  $V$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Такую функцию будем называть знакопеременной.

Введем обозначения

$$V[x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)] = V_m \quad (3.9)$$

и будем говорить, что первая разность  $V_m - V_{m-1}$  функции  $V$  взята в силу уравнений (3.1), если в ней переменные  $x_1(m)$ ,  $x_2(m)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(m)$  выражены через  $x_1(m-1)$ ,  $x_2(m-1)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(m-1)$  посредством указанных уравнений.

Первая теорема об устойчивости. *Если разностные уравнения (3.1) возмущенного движения таковы, что можно найти знакопределенную функцию  $V$ , первая разность которой в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$  или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Эта теорема доказывается почти дословным повторением соответствующей теоремы Ляпунова. Пусть  $c < b$  и  $V$  есть определенно положительная функция, а первая разность ее, взятая в силу уравнений (3.1), удовлетворяет уравнению

$$V_m - V_{m-1} = -U_{m-1}, \quad (3.10)$$

где  $U$  — знакопостоянная положительная функция.

Отсюда суммированием получим

$$V_m - V_0 = -\sum_{l=0}^{m-1} U_l \quad (3.11)$$

и, учитывая, что  $U_l \geqslant 0$ , будем иметь

$$V_m \leqslant V_0. \quad (3.12)$$

Пусть, далее,  $a$  есть некоторое произвольно малое положительное число (которое во всяком случае будем полагать меньше  $c$ ); пусть  $l$  есть точная низшая граница функции  $V$  на сфере  $a$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = a, \quad (3.13)$$

т. е. для всех точек сферы  $a$  имеет место неравенство

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant l. \quad (3.14)$$

Число  $l$  отлично от нуля и положительно, так как  $V$  представляет собой определено положительную функцию. С другой стороны, для  $l$  найдется такое  $\lambda > 0$ , что для значений переменных  $x_i$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \lambda, \quad (3.15)$$

значения функции  $V$  будут удовлетворять неравенству

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) < l. \quad (3.16)$$

Такое значение  $\lambda > 0$  необходимо существует в силу свойств функции  $V$ , оговоренных выше. Если при  $m = 0$  начальные значения координат  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$  выбраны таким образом, что они удовлетворяют неравенству (3.15), то в соответствии с формулами (3.9), (3.12) и (3.16) для любого момента дискретного времени будут иметь место неравенства

$$V_m \leqslant V_0 < l. \quad (3.17)$$

Ввиду того, что в процессе движения  $V_m$  не достигает значения  $l$ , то в силу равенств (3.13) и (3.14) изображающая точка никогда не достигает сферы  $a$ , т. е. для любого момента времени  $m$  координаты  $x_i$  удовлетворяют неравенству (3.6).

*Вторая теорема об устойчивости.* Если разностные уравнения (3.1) возмущенного движения таковы, что можно найти знакопределенную функцию  $V$ , первая разность которой в силу этих уравнений была бы знакопределенной функцией противоположного с  $V$  знака, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

В данном случае, очевидно, выполняются условия первой теоремы. Поэтому невозмущенное движение устойчиво. Покажем, что здесь имеют место предельные равенства (3.7). Пусть функция  $V$  является определено положительной. Тогда в уравнении (3.10)  $V_m \geqslant 0$  и  $U_m \geqslant 0$ , причем знак равенства имеет место при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Из (3.10) следует, что с изменением времени  $m$  функция  $V_m$  образует монотонно убывающую последовательность

$$V_m < V_{m-1} < \dots < V_0, \quad (3.18)$$

ограниченную снизу нулем. Следовательно, эта последовательность стремится к пределу при неограниченно возрастающем

*m.* Этот предел равен нулю, и в силу определенной положительности функции  $V$  координаты  $x_i(m)$  в пределе также равны нулю.

Это положение доказывается от противного. Пусть указанный предел равен  $l' > 0$ ; тогда существует такая окрестность, ограниченная сферой  $a'$ , в которую не может проникнуть изображающая точка с координатами  $x_i(m)$  при любом  $m$ . Вследствие этого определено положительная функция  $U_m$  для любого  $m$  будет больше некоторого, не равного нулю положительного числа  $l''$ . Но тогда из формулы (3.11) легко получить неравенство

$$V_m < V_0 - ml'', \quad (3.19)$$

по которому функция  $V_m$  наверняка становится отрицательной, что невозможно.

Имеют место две теоремы о неустойчивости.

Первая теорема о неустойчивости. *Если разностные уравнения (3.1) возмущенного движения таковы, что можно найти функцию  $V$ , которая обладала бы в силу этих уравнений знакопредetermined первой разностью и была бы такова, что при надлежащем выборе величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  численно сколь угодно малых ее можно было бы сделать величиной одинакового знака с ее первой разностью, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Вторая теорема о неустойчивости. *Если разностные уравнения (3.11) возмущенного движения таковы, что можно найти функцию  $V$ , первая разность которой в силу этих уравнений приводилось бы к виду*

$$V_m - V_{m-1} = aV_{m-1} + W, \quad (3.20)$$

где  $a$  — положительная постоянная, а  $W$  или тождественно равно нулю или представляет собой некоторую знакопостоянную функцию и при этом найденная функция  $V$  такова, что надлежащим выбором величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  численно сколь угодно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с  $W$ , то невозмущенное движение неустойчиво.

В частности, условия теорем о неустойчивости наверняка будут выполняться, если функция  $V$  будет знакопостоянной

или знакоопределенной функцией одного знака с первой разностью (первая теорема) или с функцией  $W$  (вторая теорема).

Доказательство этих теорем легко провести, следуя соответствующим рассуждениям Ляпунова с теми упрощениями и изменениями, которые теперь ясны из данных выше доказательств теорем об устойчивости, поэтому мы их здесь в аналитическом виде приводить не будем.

Приведенные выше теоремы Ляпунова об устойчивости движения допускают очень наглядную геометрическую интерпретацию \*). Пусть  $V$  есть знакоопределенная положительная функция. Рассмотрим в фазовом пространстве однопараметрическое семейство поверхностей

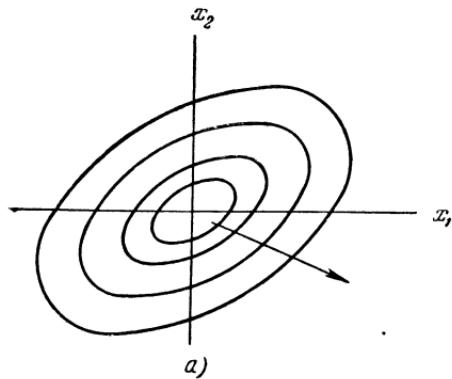
$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = d, \quad (3.21)$$

где параметр  $d$  — положительное число. Будем называть их поверхностями равного уровня. Очевидно,  $V(0)$  вырождается в точку. Существует такая достаточно малая окрестность (3.8) около нулевой точки  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , в которой поверхности уровня будут замкнутыми и охватывающими нулевую точку. При изменении параметра  $d$  от нуля до некоторого достаточно малого значения получим однопараметрическое семейство замкнутых, не пересекающихся между собой поверхностей равного уровня, охватывающих нулевую точку и стягивающихся в эту точку при  $d = 0$ . На рис. 3.1 эти поверхности представлены в виде кривых равного уровня для случая двумерного фазового пространства — фазовой плоскости.

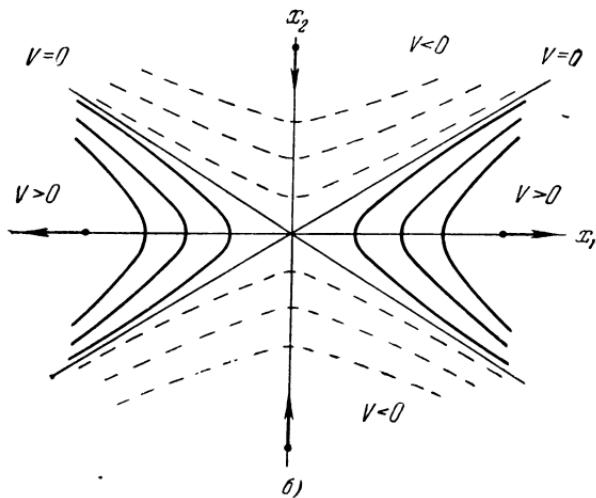
Каждая поверхность (3.21) охватывает все поверхности семейства, соответствующие более низкому уровню параметра  $d$ . Величины  $V_m$ , вычисленные для текущих значений  $x_i(m)$  координат изображающей точки, всегда совпадают с определенными значениями параметра  $d$ . Это означает, что в данный момент времени изображающая точка с координатами  $x_i(m)$  попадает на поверхность указанного уровня. Таким образом, в дискретном движении изображающая точка перескакивает с одной поверхности равного уровня на другую, причем, если первая разность  $V_m - V_{m-1}$  представляет собой знакоопределенную функцию противоположного с  $V$

\*) См. цитированную выше книгу И. Г. Малкина [17].

знака \*), то изображающая точка всегда перескакивает с поверхности данного уровня на поверхность более низкого



a)



б)

Рис. 3.1. Кривые равного уровня для знакоопределенной и знакопеременной функций  $V$ .

уровня и поэтому асимптотически приближается к нулевой точке. Если первая разность  $V_m - V_{m-1}$ , взятая в силу урав-

\*). То есть в данном случае определенно отрицательную функцию.

нений (3.1), тождественно равна нулю или является знакопостоянной функцией противоположного с  $V$  знака, то изображающая точка при своем движении может «застрять» на поверхности определенного уровня и тогда она наверняка не сможет неограниченно приближаться к нулевой точке.

Если теперь функция  $V$  знакопеременная, то поверхности уровня (3.21) не будут замкнутыми. Параметр  $d$  в этом случае может принимать положительные и отрицательные значения, так что в окрестности нулевой точки будем иметь области  $V > 0$  и  $V < 0$ , причем эти области разделяются поверхностью  $V = 0$ , которая проходит через нулевую точку  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . В области  $V > 0$  поверхности (3.21) равного уровня не пересекаются в силу однозначности функции  $V$  и удаляются от нулевой точки с увеличением положительного параметра  $d$  в области  $V < 0$ ; с ростом отрицательного параметра  $d$  поверхности равного уровня, наоборот, как бы приближаются к нулевой точке и к разделяющей поверхности  $V = 0$ . На рис. 3.1, б представлена подобная ситуация для фазовой плоскости. В любой сколь угодно малой окрестности нулевой точки существуют области  $V > 0$  и  $V < 0$ .

Пусть первая разность  $V_m - V_{m-1}$ , вычисленная в силу разностных уравнений (3.1), — определенно положительная функция. Тогда, если движение начинается из точки области  $V > 0$ , находящейся в любой близости начала координат, то изображающая точка в процессе дискретного движения будет перескакивать с поверхностей низшего уровня на поверхности более высокого уровня. Изображающая точка, не покидая области  $V > 0$ , обязательно выйдет за пределы любой наперед задаваемой области (3.6), поэтому невозмущенное движение будет неустойчивым. Заметим, что для доказательства неустойчивости невозмущенного движения достаточно найти хотя бы одну фазовую траекторию, которая выходит за пределы области (3.6).

В предыдущих рассуждениях не был в полной мере использован тот факт, что первая разность является определенно положительной функцией. Для доказательства достаточно только знать, что в любой близости нулевой точки существует область  $V > 0$  и что первая разность  $V_m - V_{m-1}$ , взятая в силу уравнений (3.1), является положительной в этой области.

Такое обобщение теорем Ляпунова о неустойчивости было дано Н. Г. Четаевым [28].

Общие теоремы об устойчивости невозмущенного движения дискретных динамических систем являются естественным обобщением соответствующих теорем Ляпунова. Функцию  $V$ , обладающую свойствами, которые оговорены в одной из четырех теорем, называют обычно *функцией Ляпунова*.

Приложение общих теорем к исследованию устойчивости линейных дискретных систем требует своеобразного подхода, причем применение методов матричного исчисления здесь оказывается весьма полезным. Специфические приемы матричного исчисления позволяют получить решение такой задачи довольно простыми средствами.

### § 3.2. Об устойчивости движения, определяемого линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1(m) &= p_{11}^* x_1(m-1) + p_{12}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{1n}^* x_n(m-1), \\ x_2(m) &= p_{21}^* x_1(m-1) + p_{22}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{2n}^* x_n(m-1), \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n(m) &= p_{n1}^* x_1(m-1) + p_{n2}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{nn}^* x_n(m-1). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Равенства (3.3) и в этом случае определяют тривиальное решение системы (3.22) или неподвижную точку линейного точечного преобразования. Таким образом, уравнения (3.22) являются частным видом общих уравнений (3.1) возмущенного движения системы. Очевидно, к уравнениям (3.22) применимы общие теоремы прямого метода Ляпунова, изложенные в предыдущем параграфе, причем в данном случае решение задачи об устойчивости легко довести до алгоритма, если строить функцию  $V$  в виде квадратичной формы переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Систему линейных разностных уравнений (3.22) представим в матричной записи

$$x(m) = P^* x(m-1), \quad (3.23)$$

где  $P^*$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка элементов  $p_{ij}^*$ , а  $x$  представляет собой матрицу-столбец переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Исследуем вопрос об устойчивости невозмущенного движения  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Для этой цели будем искать квадратичную форму

$$V = \sum_{i, j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (b_{ij} = b_{ji}) \quad (3.24)$$

или в матричной записи (см. § 2.6)

$$V = x^T B x \quad (B = B^T), \quad (3.25)$$

которая в силу уравнений (3.22), (3.23) разрешает разностное уравнение

$$V_m - V_{m-1} = -U_{m-1}, \quad (3.26)$$

где

$$U = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (3.27)$$

или в матричной записи

$$U = x^T A x \quad (A = A^T) \quad (3.28)$$

представляет любую наперед заданную определенно положительную квадратичную форму.

Остановимся на этом вопросе подробнее. Заменим в уравнении (3.26)  $V$  и  $U$  их выражениями в соответствии с (3.25) и (3.28). Тогда уравнение (3.26) перепишется в виде

$$\begin{aligned} x^T(m) B x(m) - x^T(m-1) B x(m-1) &= \\ &= -x^T(m-1) A x(m-1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставим сюда столбец  $x(m)$ , определенный по формуле (3.23), а также строку  $x^T(m)$ , получаемую из той же формулы (3.23) посредством транспонирования. Тогда получим

уравнение

$$\begin{aligned} x^T(m-1)P^{*T}BP^*x(m-1) - x^T(m-1)Bx(m-1) = \\ = -x^T(m-1)Ax(m-1), \quad (3.30) \end{aligned}$$

которое после очевидных преобразований представим в виде

$$x^T(m-1)(P^{*T}BP^* - B + A)x(m-1) = 0. \quad (3.31)$$

Левая часть уравнения (3.31) определяет некоторую квадратичную форму, так как матрица, стоящая в скобках, является симметричной. Квадратичная форма обращается в нуль при произвольных значениях матричной переменной  $x$  тогда и только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю. Таким образом, из (3.31) получаем матричное уравнение

$$P^{*T}BP^* - B + A = 0, \quad (3.32)$$

которое эквивалентно  $\frac{n(n+1)}{2}$  скалярным алгебраическим уравнениям вида

$$\sum_{r,s=1}^n p_{ri}^* p_{sj}^* b_{rs} - b_{ij} + a_{ij} = 0, \quad i \leq j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.33)$$

В этих уравнениях  $p_{ij}^*$  и  $a_{ij}$  являются известными величинами, а коэффициенты  $b_{ij} = b_{ji}$  искомой квадратичной формы  $V$  (3.24), (3.25) — неизвестными. Число уравнений (3.33) и число неизвестных  $b_{ij}$  совпадают и равны  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Обозначим определитель системы алгебраических уравнений (3.33) через  $D(p_{ij}^*)$ , подчеркнув этим его зависимость от коэффициентов  $p_{ij}^*$  исходной системы разностных уравнений (3.22). Если определитель  $D(p_{ij}^*)$  отличен от нуля, то существует единственная система значений  $b_{ij}$ , являющаяся решением уравнений (3.33). Таким образом, в случае, когда  $D(p_{ij}^*) \neq 0$ , всегда можно построить и притом единственным образом квадратичную форму  $V$  (3.24), (3.25), которая в силу (3.22), (3.23) удовлетворяет разностному уравнению (3.26). Если, кроме того, найденная квадратичная форма  $V$  является определенно положительной, т. е., согласно кри-

терию Сильвестра (2.141), ее коэффициенты  $b_{ij}$  удовлетворяют неравенствам

$$D_1 = b_{11} > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, D_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad (3.34)$$

то в силу общих теорем Ляпунова невозмущенное движение будет устойчиво и притом асимптотически.

Общие теоремы Ляпунова определяют только достаточные условия устойчивости. Однако для линейного случая найденные условия являются также необходимыми.

Это утверждение можно доказать следующими рассуждениями. Сначала установим связь, которая существует между условием  $D(p_{ij}^*) \neq 0$  разрешимости алгебраических уравнений (3.33) и корнями  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$  характеристического уравнения матрицы  $P^*$ , фигурирующей в уравнении (3.23).

Заметим, что  $D(p_{ij}^*) = 0$  тогда и только тогда, когда система однородных алгебраических уравнений, получаемых из (3.33) приравниванием к нулю всех коэффициентов  $a_{ij}$ , имеет ненулевое решение.

В матричной записи это равносильно требованию, чтобы существовала такая ненулевая, симметричная матрица  $B$ , которая удовлетворяла бы матричному уравнению

$$P^{*T} B P^* = B, \quad (3.35)$$

получающемуся из (3.32) при  $A = 0$ . Ради простоты рассмотрим случай простых корней  $\lambda_i^*$ . Тогда на основании формул (2.40) — (2.44) и правила транспонирования произведения матриц, представим уравнение (3.35) в виде

$$(K^{*T})^{-1} \Lambda^{*T} K^{*T} B K^* \Lambda^* K^{*-1} = B, \quad (3.36)$$

где через  $\Lambda^*$  обозначена каноническая матрица для  $P^*$ . Матрица  $\Lambda^*$  является диагональной матрицей типа (2.44) с элементами  $\lambda_i^*$ . Для нее  $\Lambda^{*T} = \Lambda^*$ .

Умножим обе части равенства (3.36) слева на  $K^{*T}$  и справа на  $K^*$ . Тогда получим

$$\Lambda^* C \Lambda^* = C, \quad (3.37)$$

где

$$C = K^{*T} B K^* \quad (3.38)$$

есть симметричная вместе с  $B$  матрица. Так как при умножении матрицы  $C$  слева на диагональную матрицу  $\Lambda^*$  все элементы  $i$ -й строки умножаются на  $\lambda_i^*$ , а при умножении справа на  $\Lambda^*$  умножаются на  $\lambda_j^*$  все элементы  $j$ -го столбца, то, очевидно, матричное уравнение (3.37) эквивалентно  $n^2$  скалярным уравнениям

$$\lambda_i^* \lambda_j^* c_{ij} = c_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.39)$$

в которых через  $c_{ij}$  обозначены элементы матрицы (3.38). Очевидно, при  $\lambda_i^* \lambda_j^* \neq 1$  имеем  $c_{ij} = c_{ji} = 0$ , а при  $\lambda_i^* \lambda_j^* = 1$  коэффициент  $c_{ij} = c_{ji}$  может принимать отличное от нуля значение.

Таким образом, требование, чтобы  $D(p_{ij}^*) \neq 0$ , равносильно тому, чтобы характеристические числа  $\lambda_i^*$  матрицы  $P^*$  не удовлетворяли ни одному соотношению

$$\lambda_i^* \lambda_j^* = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.40)$$

Теперь предположим, что невозмущенное движение системы (3.22), (3.23) асимптотически устойчиво. Тогда на основании результатов § 2.4 следует, что абсолютные значения всех характеристических чисел  $\lambda_i^*$  матрицы  $P^*$

$$|\lambda_i^*| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.41)$$

При выполнении условий (3.41) ни одно из соотношений (3.40) не выполняется, поэтому в данном случае можно построить, и притом единственным способом, квадратичную форму  $V$  (3.24), (3.25), разрешающую в указанном выше смысле уравнение (3.26).

Покажем, что форма  $V$  должна быть определенно положительной, т. е. знака, противоположного со знаком своей первой разности  $V_m - V_{m-1}$ . Действительно, функция  $V_m$ ,

определенная в силу разностных уравнений (3.22), (3.23), образует монотонно убывающую последовательность (3.18), так как правая часть равенства (3.26) меньше нуля по условию и обращается в нуль только при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Но, с другой стороны, при  $m \rightarrow \infty$  квадратичная форма  $V_m$  должна обратиться в пределе в нуль вместе с переменными  $x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)$ , так как система, по предположению, асимптотически устойчива. Поэтому ни в какой последовательности (3.18)  $V_m$  не может принимать отрицательных значений, т. к. иначе в некоторые моменты времени она должна была бы возрастать, чтобы в пределе достичь нуля, а это невозможно.

Таким образом, возможность построить такую квадратичную форму  $V$  (3.24), (3.25), которая разрешала бы в силу (3.22), (3.23) уравнение (3.26) при произвольной определенно положительной квадратичной форме  $U$  (3.27), (3.28) и коэффициенты  $b_{ij}$  которой удовлетворяли бы неравенствам (3.34), является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости для линейной дискретной системы.

Рассмотрим теперь вопрос о построении и свойствах функции  $V$ , когда по крайней мере одно характеристическое число  $\lambda_i^*$  матрицы  $P^*$  по модулю больше единицы. В этом случае невозмущенное движение будет неустойчиво. Предположим сначала, что числа  $\lambda_i^*$  не удовлетворяют ни одному из соотношений (3.40). Тогда по уже известной процедуре найдем квадратичную форму  $V$ , удовлетворяющую в силу уравнений (3.22), (3.23) уравнению (3.26) при определенно положительной форме  $U$ . Найденная форма  $V$  не может быть определено положительной, так как невозмущенное движение было бы асимптотически устойчивым, что противоречит условию. Квадратичная форма  $V$  не может быть постоянно положительной; действительно, в этом случае всегда можно найти начальные условия  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$  \*), для которых  $V_0 = 0$ . Но тогда в следующий дискретный момент времени форма  $V$  станет отрицательной, так как в силу (3.26) и принятого соглашения относительно  $U$  первая разность  $V_m - V_{m-1}$  отрицательна. Таким образом, найденная форма  $V$  такова, что в любой близости начала координат она может

\*) Не равные нулю одновременно.

принимать значения одного знака со своей первой разностью. Этот случай соответствует условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Если среди характеристических чисел  $\lambda_i^*$  есть такие, которые удовлетворяют соотношениям (3.40), то на этот случай можно распространить соответствующие рассуждения Ляпунова в следующем виде. Введем новую матричную переменную

$$x(m) = \chi^{-m} x'(m), \quad (3.42)$$

где  $\chi$  есть некоторое число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \chi < 1$ . При условии (3.42) элементы столбца  $x(m)$  будут стремиться к бесконечности вместе с соответствующими элементами столбца  $x'(m)$ . В новых переменных матричное уравнение (3.23) представится в виде

$$x'(m) = \chi P^* x'(m - 1). \quad (3.43)$$

Корни  $\lambda'_i$  характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - \chi P^*) = 0 \quad (3.44)$$

матрицы измененной системы будут выражаться через  $\lambda_i^*$  в виде

$$\lambda'_i = \chi \lambda_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.45)$$

Выберем положительное число  $\chi$  настолько близким к единице, чтобы корни  $\lambda'_i$  не удовлетворяли ни одному из соотношений (3.40) и, кроме того, чтобы корням  $\lambda_i^*$  с  $|\lambda_i^*| > 1$  соответствовали корни  $\lambda'_i$  с  $|\lambda'_i| \leq 1$ . Для рассматриваемого случая это сделать всегда возможно. Для преобразованного уравнения (3.43) в силу указанного выбора числа  $\chi$  всегда можно построить квадратичную форму

$$V' = (x')^T B x', \quad (3.46)$$

первая разность которой в силу этих уравнений

$$\begin{aligned} V'_m - V'_{m-1} &= [x'(m-1)]^T \{ \chi^2 P^{*T} B P^* - B \} x'(m-1) = \\ &= -[x'(m-1)]^T A x'(m-1) \end{aligned} \quad (3.47)$$

будет, например, определенно отрицательной формой и которая, согласно сказанному выше, при надлежащем выборе

элементов столбца  $x'$  численно сколь угодно малых, будет иметь знак, совпадающий со знаком своей первой разности.

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$V = \chi^2 x^T B x. \quad (3.47')$$

Первую разность  $V$  в силу матричного уравнения (3.23) можно представить в виде

$$V_m - V_{m-1} = x^T (m-1) \chi^2 [P^{*T} B P^* - B] x (m-1) \quad (3.48)$$

или, учитывая равенство (3.47), в виде

$$V_m - V_{m-1} = a V_{m-1} + W_{m-1}, \quad (3.49)$$

где

$$a = \frac{1 - \chi^2}{\chi^2} > 0,$$

а  $W = -x^T A x$  — определенно отрицательная форма. Таким образом, в данном случае имеют место условия второй теоремы Ляпунова о неустойчивости и при указанных свойствах корней  $\lambda_i^*$  вопрос о неустойчивости полностью решается в рамках прямого метода Ляпунова.

И, наконец, остается рассмотреть случай, когда по крайней мере модуль одного корня равен единице, а остальные корни  $\lambda_i^*$  по модулю меньше единицы. Очевидно, теперь хотя бы одно из соотношений (3.40) выполняется, и поэтому в данном случае невозможно построить квадратичную форму  $V$  по формулам (3.23)–(3.28). Процедура построения формы  $V$ , связанная с применением преобразования (3.42), также не может привести к цели.

В рассматриваемом критическом случае теоремы прямого метода Ляпунова не решают вопроса об устойчивости невозмущенного движения линейной дискретной динамической системы (3.22)–(3.23). В этом критическом случае устойчивость зависит от тонкой структуры решения системы линейных разностных уравнений. Из формул (2.80)–(2.83) при  $g^*(m) = 0$  можно установить, что в критическом случае невозмущенное движение может быть просто устойчивым или неустойчивым в зависимости от степени  $e_\sigma$  элементарных делителей, соответствующих корням  $\lambda_\sigma^*$  с модулями, равными единице: при  $e_\sigma = 1$  невозмущенное движение просто устойчиво, при  $e_\sigma > 1$  оно неустойчиво.

### § 3.3. Об устойчивости по первому приближению

Будем предполагать, что правые части (3.1) таковы, что разностные уравнения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1(m) &= p_{11}^* x_1(m-1) + p_{12}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{1n}^* x_n(m-1) + \tilde{X}_1[x_1(m-1), \dots, x_n(m-1)], \\ x_2(m) &= p_{21}^* x_1(m-1) + p_{22}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{2n}^* x_n(m-1) + \tilde{X}_2[x_1(m-1), \dots, x_n(m-1)], \\ x_n(m) &= p_{n1}^* x_1(m-1) + p_{n2}^* x_2(m-1) + \dots \\ &\quad \dots + p_{nn}^* x_n(m-1) + \tilde{X}_n[x_1(m-1), \dots, x_n(m-1)], \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

где  $\tilde{X}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представляются абсолютно сходящимися по степеням  $x_1, x_2, \dots, x_n$  рядами, начинающимися с членов не ниже второго порядка, а  $p_{ij}^*$  — постоянные. Эти уравнения в матричной форме запишем в виде

$$x(m) = P^* x(m-1) + \tilde{X}[x_1(m-1), x_2(m-1), \dots, x_n(m-1)], \quad (3.51)$$

где  $\tilde{X}$  есть матрица-столбец функций  $\tilde{X}_i$ , а остальные обозначения совпадают с таковыми для уравнения (3.23). Линейную часть матричного уравнения, формально совпадающую с (3.23), будем называть уравнениями первого приближения. Имеют место следующие теоремы Ляпунова.

**Теорема.** *Если модули всех корней  $\lambda_i^*$  характеристического уравнения первого приближения, т. е. характеристических чисел матрицы  $P^*$ , меньше единицы, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов высшего порядка  $\tilde{X}_i$  в разностных уравнениях (3.50).*

Ввиду того, что  $|\lambda_i^*| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то в соответствии с результатами предыдущего параграфа для уравнения первого приближения, формально совпадающего с (3.23), можно построить определенно положительную квадратичную форму  $V$  (3.24), (3.25), и притом единственным образом, которая разрешала бы уравнения (3.26) при определенно

положительной форме  $U$  (3.27), (3.28). Для таким образом построенной квадратичной формы  $V$  составим первую разность в силу исходной нелинейной системы разностных уравнений (3.51). Тогда получим

$$V_m - V_{m-1} = -U_{m-1} + \tilde{W}_{m-1}, \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{m-1} = & x^T(m-1) P^{*T} B \tilde{X}_{m-1} + \\ & + \tilde{X}_{m-1}^T B P^* x(m-1) + \tilde{X}_{m-1}^T B \tilde{X}_{m-1}^*. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Так как функции  $\tilde{X}_i$  представляются в виде абсолютно сходящихся рядов, содержащих члены не ниже второго порядка, то в правой части (3.52) три последних слагаемых можно записать в виде абсолютно сходящегося ряда, который будет начинаться с членов не ниже третьего порядка относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Но тогда наверняка существует достаточно малая область (3.8), внутри которой первая разность  $V_m - V_{m-1}$  будет определено отрицательной и в силу общих теорем § 3.1 невозмущенное движение нелинейной дискретной системы (3.42), (3.43) будет устойчиво и притом асимптотически.

**Теорема.** *Если среди корней  $\lambda_i^*$  характеристического уравнения первого приближения, т. е. характеристических чисел матрицы  $P^*$ , найдется по крайней мере один с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов  $\tilde{X}_i$  высшего порядка в разностных уравнениях (3.50).*

В этом случае для уравнений первого приближения (совпадающих формально с (3.22), (3.23)) всегда можно построить квадратичную форму  $V$ , которая будет, например, в силу уравнений первого приближения удовлетворять уравнению (3.49)\*\*.

Построим для найденной формы  $V$  первую разность в силу нелинейного матричного уравнения (3.51). Тогда, учитывая (3.49), получим

$$V_m - V_{m-1} = aV_{m-1} + W_{m-1} + \tilde{W}_{m-1}, \quad (3.54)$$

\*) Здесь для сокращения записи мы пишем  $\tilde{X}_{m-1}$ , подразумевая  $\tilde{X}[x_1(m-1), x_2(m-1), \dots, x_n(m-1)]$ .

\*\*) Мы рассмотрим здесь только этот более общий случай.

где  $\tilde{W}_{m-1}$  — форма, определяемая выражением (3.53), представляется абсолютно сходящимися рядами с членами порядка выше второго относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $W$  — определенно отрицательная квадратичная форма. Поэтому опять существует такая малая область (3.8), внутри которой  $(W + \tilde{W})$  будет определено отрицательной функцией.

В соответствии с общими теоремами Ляпунова о неустойчивости невозмущенное движение для нелинейной системы (3.50) — (3.51) будет неустойчиво вне зависимости от нелинейных членов  $\tilde{X}_i$ , обладающих указанными выше свойствами.

В критическом случае уравнения первого приближения не позволяют сделать выводы об устойчивости. В этом случае устойчивость зависит от характера отбрасываемых нелинейных членов  $\tilde{X}_i$  уравнений (3.50) — (3.51). Этот факт можно пояснить на одном простом примере. Рассмотрим разностное уравнение

$$x_1(m) = x_1(m-1) + \mu x_1^3(m-1), \quad (3.55)$$

которое является частным случаем уравнений (3.50). Здесь мы имеем критический случай, так как  $\lambda_1^* = 1$  для уравнения первого приближения  $x_1(m) = x_1(m-1)$ . Выберем определенно положительную квадратичную форму  $V$  в виде

$$V = x_1^2. \quad (3.56)$$

Тогда первую разность  $V_m - V_{m-1}$ , определенную в силу уравнения (3.55), можно представить в виде

$$V_m - V_{m-1} = 2\mu x_1^4(m-1) + \mu^2 x_1^6(m-1) \quad (3.57)$$

или

$$V_m - V_{m-1} = \mu x_1^4(m-1)[2 + \mu x_1^2(m-1)]. \quad (3.58)$$

Существует такая область типа (3.8)

$$x_1^2 < \frac{2}{|\mu|}, \quad (3.59)$$

внутри которой первая разность  $V_m - V_{m-1}$  является определено отрицательной или определено положительной функцией, смотря по тому, будет ли  $\mu$  отрицательным или положительным числом. Но тогда в силу общих теорем Ляпунова получим, что невозмущенное движение при  $\mu < 0$  будет асимптотически устойчивым, а при  $\mu > 0$  — неустойчивым.

## ГЛАВА IV

# СИСТЕМЫ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В теории импульсных систем автоматического регулирования наметились в настоящее время два основных метода исследования. Один из методов базируется на математическом аппарате, который связан с дискретным преобразованием Лапласа и некоторыми его модификациями. Этот аппарат позволяет ввести понятия передаточной функции и частотной характеристики, а также применить методы исследования, в некотором смысле аналогичные тем, которые являются характерными для частотного анализа непрерывных систем автоматического регулирования. Основная заслуга в развитии этого направления в теории импульсных систем принадлежит у нас Я. З. Цыпкину [26], среди зарубежных ученых можно отметить Э. Джури [7].

Другое направление связано с применением метода припасовывания начальных условий, посредством которого задача сводится к решению линейных или нелинейных уравнений в конечных разностях. Это направление восходит еще к Н. Е. Жуковскому [9], который использовал этот метод при исследовании так называемых систем регулирования на отсечку.

В настоящей книге будет использован метод припасовывания начальных условий в сочетании со специфическими приемами матричного исчисления. Интересно отметить, что на определенном этапе исследования устойчивости линейных систем импульсного регулирования мы, хотя и формально, близко подойдем к тем приемам, которые характерны для частотного анализа. И вообще матричные методы можно применять также в сочетании с методами операционного исчисления. В некоторых случаях такая комбинация быстрее и проще приводит к нужным результатам, хотя, разумеется, здесь многое зависит от навыка самого исследователя.

### § 4.1. Непрерывные и дискретные движения линейных импульсных систем

Рассмотрим линейную систему импульсного регулирования. Возмущенное движение такой системы описывается уравнениями (1.12) или (1.15), в которых управляющая функция  $\psi(\sigma)$  определяется выражением (1.10) и графически представляется разрывной кривой типа изображенной на рис. 1.7. Будем сначала рассматривать уравнения движения в нормальной форме (1.15). Систему уравнений представим в матричной форме

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{vmatrix} \psi(\sigma) + \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{vmatrix}, \\ \sigma &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

или в более компактном виде

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Px + h\psi(\sigma) + g, \\ \sigma = \gamma x, \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

где вновь введенные матричные обозначения не требуют специального пояснения, так как они, естественно, вытекают из сравнения уравнений (4.1) и (4.2). Квадратную матрицу  $P$  будем иногда называть *матрицей разомкнутой системы регулирования*.

Сначала будем исследовать собственное движение импульсной системы, обусловленное мгновенными возмущениями, которые математически определяются заданием начального значения для матричной переменной  $x$  при  $t = 0$ . Собственные

движения описываются уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Px + h\psi(\sigma), \\ \sigma = \gamma x, \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

которые получаются из (4.2) при  $g \equiv 0$ , т. е. при отсутствии внешнего возмущения. Нахождение решения уравнения (4.3) упрощается по двум обстоятельствам. Во-первых, управляющая функция  $\psi(\sigma)$  является кусочно-постоянной функцией с разрывами первого рода, поэтому на отдельных интервалах времени, где  $\psi(\sigma) = \text{const}$ , уравнение (4.3) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянной или равной нулю правой частью. Во-вторых, промежуток времени между началами прохождения двух последовательных импульсов функции  $\psi(\sigma)$ , так называемый интервал повторения  $T$ , есть величина постоянная. Поэтому достаточно будет установить связь между состояниями системы на концах первого цикла, чтобы обычными методами матричного исчисления определить состояние системы в конце любого цикла повторения, а также и во внутренних его точках.

При построении решения уравнений (4.3), как это уже указывалось выше, будем использовать метод припасовывания начальных условий, т. е. при прохождении точек разрыва функции  $\psi(\sigma)$  за начальное значение матричной переменной  $x$  в следующем интервале времени будем принимать ее конечное значение в предыдущем интервале. Таким образом, можно построить непрерывное решение уравнений (4.3), которое будет однозначно определяться заданием произвольного начального значения для матричной переменной  $x$  при  $t = 0$  или в любой другой момент времени, принимаемый за начальный.

Для удобства и упрощения последующих рассуждений выберем начальный момент времени  $t = 0$  так, чтобы он совпадал с началом прохождения первого импульса функции  $\psi(\sigma)$ \*). Тогда начало любого интервала повторения будет совпадать с началом прохождения соответствующего импульса. Рассмотрим  $m$ -й интервал повторения, началом которого является момент  $(m - 1)T$ . Пусть, далее, при  $t = 0$  состояние

\*) Если это в действительности не так, то соответствующим пересчетом всегда можно совместить начало отсчета времени  $t$  с началом первого цикла.

системы определяется начальным условием  $x = x(0)$ , а к дискретному моменту времени  $t = (m - 1)T$  имеем  $x = x[(m - 1)T]$ .

Примем  $x = x[(m - 1)T]$  за начальное значение матричной координаты  $x$  для  $m$ -го интервала повторения, т. е. для  $(m - 1)T \leq t \leq mT$ . Далее будет иногда удобно выделять в  $t$  целое число периодов повторения и полагать  $t = (m - 1)T + \tau$  при  $0 \leq \tau \leq T_1$  и  $t = (m - 1)T + T_1 + \tau$  при  $0 \leq \tau \leq T_2$ . Тогда, согласно (1.10) и второму уравнению (4.3), будем иметь

$$\psi(\sigma) = \sigma[(m - 1)T] = \gamma x[(m - 1)T]. \quad (4.4)$$

При учете (4.4) первое уравнение (4.3) перепишется в виде  $\dot{x} = Px + h\gamma x[(m - 1)T], \quad (m - 1)T \leq t \leq (m - 1)T + T_1 \quad (4.5)$

Так как  $\gamma x[(m - 1)T]$  есть скалярная постоянная, а  $h$  — матрица-столбец постоянных, то на основании формулы (2.129) решение уравнения (4.5), обращающееся при  $t = [(m - 1)T]$  в  $x[(m - 1)T]$ , представится в виде

$$x[(m - 1)T + \tau] = KM(\tau)K^{-1}x[(m - 1)T] + \\ + KN(\tau)K^{-1}h\gamma x[(m - 1)T], \quad (4.6)$$

которое, очевидно, является справедливым в интервале  $0 \leq \tau \leq T_1$ . В уравнении (4.6) под  $K$  следует понимать преобразующую матрицу для матрицы  $P$  разомкнутой системы регулирования. Решение (4.6) перепишем в виде

$$x[(m - 1)T + \tau] = Q'(\tau)x[(m - 1)T], \quad 0 \leq \tau \leq T_1, \quad (4.7)$$

где

$$Q'(t) = KM(t)K^{-1} + KN(t)K^{-1}h\gamma. \quad (4.8)$$

После прохождения импульса управляющей функции  $\psi(\sigma)$ , т. е. с мгновения времени  $t = (m - 1)T + T_1$ , начинается пауза, продолжительность которой равна  $T_2$ . В этом промежутке времени цепь регулирования разомкнута и  $\psi(\sigma) = 0$ . Тогда первое уравнение (4.3) можно записать в виде

$$\dot{x} = Px, \quad (m - 1)T + T_1 \leq t \leq mT. \quad (4.9)$$

Проинтегрируем уравнение (4.9), приняв за начальное значение матричной координаты  $x$  ее конечное значение на

предыдущем отрезке времени, которое получается из (4.7) и (4.8) при  $t = (m-1)T + T_1$ . Тогда решение уравнения (4.9) можно представить в виде

$$x[(m-1)T + T_1 + \tau] = KM(\tau)K^{-1}x[(m-1)T + T_1], \quad (4.10)$$

что будет справедливым в интервале  $0 \leq \tau \leq T_2$ . Заменим в (4.10)  $x[(m-1)T + T_1]$  значением, полученным из (4.7) при  $t = (m-1)T + T_1$  и используем правило (2.92). Тогда получим

$$x[(m-1)T + T_1 + \tau] = Q''(\tau)x[(m-1)T], \quad 0 \leq \tau \leq T_2, \quad (4.11)$$

где

$$Q''(t) = KM(t + T_1)K^{-1} + KM(t)N(T_1)K^{-1}h\gamma. \quad (4.12)$$

В конце  $m$ -го периода, т. е. при  $\tau = T_2$  получим из уравнения (4.11) соотношение

$$x(mT) = Q''(T_2)x[(m-1)T]. \quad (4.13)$$

Для матрицы  $Q''(T_2)$  введем специальное обозначение

$$P^* = Q''(T_2). \quad (4.14)$$

Матрица  $P^*$  в развернутом виде запишется

$$P^* = KM(T)K^{-1} + KM(T_2)N(T_1)K^{-1}h\gamma, \quad (4.15)$$

а уравнение (4.13) в новых обозначениях перепишется в виде

$$x(mT) = P^*x[(m-1)T]. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) является рекуррентным соотношением, устанавливающим связь между значениями матричной переменной  $x$  в начале и в конце произвольного периода повторения. Матрицу  $P^*$  будем называть *операторной матрицей линейной импульсной системы*.

Соотношение (4.16) можно рассматривать как матричное разностное уравнение с дискретным аргументом, представленным в нормальной форме. Решение разностного уравнения (4.16) однозначно определяется начальным условием  $x = x(0)$  при  $t = 0$ . Решение исходного дифференциального уравнения (4.3) так же однозначно определяется тем же начальным условием. Решение дифференциального уравнения

(4.3) и разностного уравнения (4.16), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, совпадают в дискретные равноотстоящие моменты времени  $mT$ . Разностное уравнение определяет дискретное движение линейной импульсной системы и им можно самостоятельно пользоваться при решении задач динамики систем импульсного регулирования.

Решение разностного уравнения (4.16), удовлетворяющее значению  $x = x_0$  при  $t = 0$ , можно представить в виде (см. § 2.4)

$$x(mT) = P^{*m}x(0). \quad (4.17)$$

Значение матричной переменной для произвольного момента времени  $t$  можно получить по формулам (4.7) и (4.11), если в них подставить  $x[(m-1)T]$  из равенства (4.17). Так, будем иметь

$$x[(m-1)T + \tau] = Q'(\tau)P^{*m-1}x(0), \quad 0 \leq \tau \leq T_1 \quad (4.18)$$

и

$$x[(m-1)T + T_1 + \tau] = Q''(\tau)P^{*m-1}x(0), \quad 0 \leq \tau \leq T_2. \quad (4.19)$$

Так как  $Q'(0) = E$  и  $Q''(T_2) = P^*$ , то при  $\tau = 0$  и  $\tau = T_2$  формулы (4.18) и (4.19) определяют соответственно  $x[(m-1)T]$  и  $x(mT)$  в том же виде, в каком они получаются по формуле (4.17). Таким образом, формулы (4.18) и (4.19) определяют непрерывное движение импульсной системы в зависимости от начального значения  $x(0)$ , или, по другой терминологии, непрерывную фазовую траекторию в зависимости от начальной точки  $x(0)$ .

Как показано выше, координаты непрерывной фазовой траектории, определяемой выражениями (4.18) и (4.19), совпадают с координатами дискретной фазовой траектории, определяемой формулой (4.17), в дискретные равноотстоящие моменты времени  $mT$ .

## § 4.2. Устойчивость и характеристическое уравнение

К вопросу об устойчивости линейной импульсной системы можно подойти с двух точек зрения. Первая основывается на изучении структуры общего решения однородной системы уравнений движения, а вторая — на построении функции Ля-

пунова. В данном параграфе мы используем первую точку зрения.

Дифференциальное уравнение (4.3) и разностное уравнение (4.16) равносильны в смысле, указанном в предыдущем параграфе. Поэтому устойчивость линейной импульсной системы можно определять по характеру решений разностного уравнения (4.16). Линейная импульсная система будет устойчива, и притом асимптотически, если все корни  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$  характеристического уравнения матрицы  $P^*$  (см. (4.16)) будут по абсолютной величине меньше единицы, и неустойчива, если по крайней мере один из корней  $\lambda_i^*$  будет по абсолютной величине больше единицы. Границным является случай, когда некоторые корни по абсолютной величине равны единице, а остальные по модулю меньше единицы.

На границе асимптотической устойчивости дискретная система может быть просто устойчивой или неустойчивой в зависимости от степени  $e_\sigma$  элементарных делителей, соответствующих корням с модулем, равным единице. При  $e_\sigma = 1$  система просто устойчива, при  $e_\sigma > 1$  она неустойчива.

Последнее обстоятельство легко установить по формуле (2.82), определяющей при  $g^*(m') = 0$  общее решение однородной системы для кратных корней  $\lambda_\sigma^*$  с учетом выражений (2.84). Очевидно, для случая простых корней  $\lambda_i^*$  на указанной выше границе всегда имеет место обыкновенная устойчивость.

Поведение линейной импульсной системы на границе асимптотической устойчивости, когда условия обыкновенной устойчивости выполняются, зависит от вида корня с модулем, равным единице. Если этот корень можно представить

в виде  $e^{i2\pi \frac{p}{q}}$ , где  $p$  и  $q$  — целые взаимно простые числа, то, очевидно, независимо от начальных условий в системе устанавливаются периодические колебания с периодом  $qT$ . В остальных случаях система будет совершать ограниченные, никогда не повторяющиеся движения.

В линейной непрерывной системе движения подобного типа являются квазипериодическими и они могут возникать только в случаях, когда граница колебательной устойчивости определяется двумя или большим числом чисто мнимых корней, не соизмеримых друг с другом.

Перейдем к построению характеристического уравнения для матрицы  $P^*$ , фигурирующей в разностном уравнении (4.16) и определяемой формулой (4.15). Как было показано в гл. II, подобные матрицы имеют одинаковые характеристические уравнения. Поэтому данную матрицу удобно заменить на подобную, так как для последней процесс нахождения характеристического уравнения становится проще. Воспользовавшись этим, представим матрицу (4.15) в виде\*)

$$P^* = KP^{**}K^{-1},$$

где

$$P^{**} = M(T) + M(T_2)N(T_1)K^{-1}h\gamma K. \quad (4.20)$$

Далее для сокращения введем новые обозначения

$$u = K^{-1}h, \quad \beta = \gamma K. \quad (4.21)$$

Элементы  $u_1, u_2, \dots, u_n$  матрицы-столбца  $u$  и элементы  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  матрицы-строки  $\beta$  определяются по формулам

$$u_i = \kappa_i h; \quad \beta_i = \gamma k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.22)$$

где  $\kappa_i$  и  $k_i$  — строки и столбцы матриц  $K^{-1}$  и  $K$  соответственно. В новых обозначениях матрица (4.20) представится в виде

$$P^{**} = M(T) + M(T_2)N(T_1)u\beta, \quad (4.23)$$

или в более простой форме

$$P^{**} = M(T) + u'\beta, \quad (4.24)$$

если через  $u'$  обозначить матрицу-столбец \*\*)

$$u' = M(T_2)N(T_1)u. \quad (4.25)$$

Матрица  $P^{**}$  имеет простейший вид, так как в правой части равенства (4.24)  $M(T)$  есть диагональная или, в общем случае, квазидиагональная матрица, а  $u'\beta$  — матрица ранга единица (см. (2.11)). Таким образом, характеристическое

\*) Напомним, что  $K$  есть преобразующая матрица для  $P$  — матрицы разомкнутой системы регулирования, фигурирующей в уравнении (4.2).

\*\*) Такое последовательное введение новых обозначений оказывается более удобным для дальнейшего изложения.

уравнение для матрицы  $P^*$  можно представить в виде  
 $\Delta^*(\lambda) = \det(\lambda E - P^*) = \det(\lambda E - P^{**}) =$   
 $= \det(\lambda E - M(T) - u'\beta) = 0.$  (4.26)

a) *Случай простых характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $P$*

Принимая во внимание формулы (2.11), (2.94) и (4.26), представим характеристическое уравнение для матрицы  $P^*$  в виде

$$\Delta^*(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - e^{\lambda_1 T} - u'_1 \beta_1 & -u'_1 \beta_2 & \dots & -u'_1 \beta_n \\ -u'_2 \beta_1 & \lambda - e^{\lambda_2 T} - u'_2 \beta_2 & \dots & -u'_2 \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u'_n \beta_1 & -u'_n \beta_2 & \dots & \lambda - e^{\lambda_n T} - u'_n \beta_n \end{vmatrix} = 0. \quad (4.27)$$

Из высшей алгебры известно, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} z_1 + c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & z_2 + c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & z_n + c_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.28)$$

можно развернуть по диагональным элементам  $z_i$  и представить в виде

$$D = \prod_{j=1}^n z_j \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{c_{ii}}{z_i} + \right.$$

$$+ \sum_{\substack{i, k=1 \\ i < k}}^n \frac{\begin{vmatrix} c_{ii} & c_{ik} \\ c_{ki} & c_{kk} \end{vmatrix}}{z_i z_k} + \dots + \left. \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}}{z_1 z_2 \dots z_n} \right\}. \quad (4.29)$$

В определителе (4.27) роль членов  $z_i$  играют выражения  $(\lambda - e^{\lambda_i T})$ , а матрицей с элементами  $c_{ij}$  является  $(-u'\beta)$ . Но матрица, являющаяся произведением столбца  $u'$  на строку  $\beta$ , имеет ранг, равный единице. Все ее миноры порядка выше первого равны нулю. Поэтому характеристическое

уравнение (4.27) можно представить в развернутом виде так:

$$\Delta^*(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - e^{\lambda_j T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{u'_i \beta_i}{\lambda - e^{\lambda_i T}} \right\} = 0. \quad (4.30)$$

В этом уравнении элементы  $u'_i$  столбца  $u'$  можно выразить через элементы  $u_i$  столбца  $u$  и посредством формулы (4.25). Принимая во внимание, что для случая простых корней  $\lambda_i$  матрицы  $M(t)$  и  $N(t)$  являются диагональными и определяются соответственно формулами (2.94) и (2.120), матрица  $M(T_2)N(T_1)$  является также диагональной с элементами  $e^{\lambda_i T_2}(e^{\lambda_i T_1} - 1)/\lambda_i$ . Учитывая это обстоятельство, из (4.25) получим

$$u'_i = \frac{e^{\lambda_i T_2}(e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.31)$$

Подставляя  $u'_i$  из (4.31) в (4.30), будем иметь

$$\Delta^*(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - e^{\lambda_j T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2}(e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i(\lambda - e^{\lambda_i T})} u_i \beta_i \right\} = 0. \quad (4.32)$$

По формулам (4.22) произведение двух скалярных величин  $u_i$  и  $\beta_i$  удобно записать в виде

$$u_i \beta_i = \beta_i u_i = \gamma k_i \alpha_i h. \quad (4.33)$$

Пользуясь ассоциативным законом умножения матриц и матричными тождествами (2.64), представим (4.33) в форме

$$\beta_i u_i = \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.34)$$

Подставляя отсюда  $u_i \beta_i$  в (4.32), представим окончательно искомое характеристическое уравнение в виде

$$\Delta^*(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - e^{\lambda_j T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2}(e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i(\lambda - e^{\lambda_i T})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} \right\} = 0. \quad (4.35)$$

Характеристическое уравнение (4.35) для матрицы (4.15) выражено через параметры исходного матричного дифференциального уравнения (4.3), так как  $\lambda_i$  есть корни характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - P)$ , а  $F(\lambda)$  есть присоединенная матрица для  $(\lambda E - P)$ .

Во многих практических важных случаях структура матрицы  $P$  разомкнутой системы такова, что  $\Delta(\lambda)$  представляется в виде произведения нескольких полиномов по  $\lambda$ . В этих случаях корни  $\lambda_i$  легко определяются.

*б) Случай кратных характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $P$*

Рассмотрим важный и наиболее часто встречающийся в практических приложениях случай, когда два характеристических числа матрицы  $P$  равны нулю. Для определенности будем считать, что  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  и что двойному нулевому корню соответствует один элементарный делитель второй степени, т. е.  $e_{n-1} = 2$ .

Для рассматриваемого случая матрица  $M(T)$  определяется формулой (2.98) при  $t = T$ . Учитывая формулу (2.98), перепишем характеристическое уравнение (4.26) в виде

$$\begin{vmatrix} \lambda - e^{\lambda_1 T} - u'_1 \beta_1 & -u'_1 \beta_2 & \dots & -u'_1 \beta_{n-1} & -u'_1 \beta_n \\ -u'_2 \beta_1 & \lambda - e^{\lambda_2 T} - u'_2 \beta_2 & \dots & -u'_2 \beta_{n-1} & -u'_2 \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u'_{n-1} \beta_1 & -u'_{n-1} \beta_2 & \dots & \lambda - 1 - u'_{n-1} \beta_{n-1} & -u'_{n-1} \beta_n \\ -u'_n \beta_1 & -u'_n \beta_2 & \dots & T - u'_n \beta_{n-1} & \lambda - 1 - u'_n \beta_n \end{vmatrix} = 0. \quad (4.36)$$

Определитель, стоящий в левой части уравнения (4.36), можно представить в виде суммы двух определителей, один из которых совпадает с определителем в уравнении (4.27)\*), а другой можно представить в виде определителя  $(n-1)$ -го порядка

$$T \begin{vmatrix} \lambda - e^{\lambda_1 T} - u'_1 \beta_1 & -u'_1 \beta_2 & \dots & -u'_1 \beta_{n-2} & -u'_1 \beta_n \\ -u'_2 \beta_1 & \lambda - e^{\lambda_2 T} - u'_2 \beta_2 & \dots & -u'_2 \beta_{n-2} & -u'_2 \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u'_{n-2} \beta_1 & -u'_{n-2} \beta_2 & \dots & \lambda - e^{\lambda_{n-2} T} - u'_{n-2} \beta_{n-2} & -u'_{n-2} \beta_n \\ -u'_{n-1} \beta_1 & -u'_{n-1} \beta_2 & \dots & -u'_{n-1} \beta_{n-2} & -u'_{n-1} \beta_n \end{vmatrix}. \quad (4.37)$$

\*) Этот определитель в развернутом виде представляется левой частью уравнения (4.30).

Этот определитель будем также раскрывать, учитывая формулы (4.28) и (4.29). Здесь только нужно иметь в виду, что слагаемое в последнем диагональном элементе  $z_{n-1}$  равно нулю, а матрица из элементов  $u'_i$  и  $\beta'_i$  в этом случае также имеет ранг, равный единице. С учетом вышеизложенного (4.37) можно представить в виде

$$-Tu'_{n-1}\beta_n \prod_{i=1}^{n-2} (\lambda - e^{\lambda i^T}). \quad (4.38)$$

Складывая теперь левую часть уравнения (4.30), в которой только следует считать  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ , с выражением (4.38) и приравнивая сумму нулю, получим характеристическое уравнение (4.46) в развернутом виде

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \prod_{j=1}^{n-2} (\lambda - e^{\lambda j^T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{u'_i \beta_i}{\lambda - e^{\lambda i^T}} - \right. \\ \left. - \frac{u'_{n-1} \beta_{n-1} + u'_n \beta_n}{\lambda - 1} \right\} - Tu'_{n-1} \beta_n \prod_{j=1}^{n-2} (\lambda - e^{\lambda j^T}) = 0, \quad (4.39)$$

которое можно представить как

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - e^{\lambda j^T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{u'_i \beta_i}{\lambda - e^{\lambda i^T}} - \right. \\ \left. - \frac{u'_{n+1} \beta_{n-1} + u'_n \beta_n}{\lambda - 1} - T \frac{u'_{n-1} \beta_n}{(\lambda - 1)^2} \right\} = 0. \quad (4.40)$$

Выразим величины  $u'_i$  через  $u_i$ . В формуле (4.25) матрицы  $M(T_2)$  и  $N(T_1)$  определяются в рассматриваемом случае формулами (2.98) и (2.122), если в них положить соответственно  $t = T_2$  и  $t = T_1$ . Разобьем матрицы  $M(T_2)$  и  $M(T_1)$  на блоки и представим их в виде квазидиагональных матриц

$$M(T_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 T_2} & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-2} T_2} & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & T_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{vmatrix}, \quad (4.41)$$

$$M(T_1) = \left\| \begin{array}{cccc|cc} \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{\lambda} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_{n-2} T_1} - 1}{\lambda_{n-2}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{T_1^2}{2} & T_1 \\ \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{array} \right\|. \quad (4.42)$$

Перемножая квазидиагональные матрицы (4.41) и (4.42), получим

$$M(T_2)N(T_1) = \left\| \begin{array}{cc} M_1 N_1 & 0 \\ 0 & M_2 N_2 \end{array} \right\|. \quad (4.43)$$

Субматрицы  $M_1$  и  $N_1$  являются диагональными, поэтому их произведение  $M_1 N_1$  находится без затруднений. Очевидно,  $M_1 N_1$  есть диагональная матрица  $(n-2)$ -го порядка с общим элементом  $\frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i}$ .

Произведение субматриц  $M_2 N_2$  в данном простом случае нетрудно получить прямым вычислением. Но имея в виду более сложные случаи, применим следующую процедуру вычислений. Субматрицы  $M_2$  и  $N_2$  являются левыми треугольными матрицами второго порядка с равными элементами в косых рядах; поэтому с помощью единичных косых рядов (см. (2.26)) их можно представить в виде

$$\left. \begin{array}{l} M_2 = E + T_2 H^1, \\ N_2 = T_1 E + \frac{T_1^2}{2} H^1. \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

Перемножая левые и правые части уравнений (4.44) и учитывая (2.27), получим

$$M_2 N_2 = T_1 E + \left( T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} \right) H^1, \quad (4.45)$$

или, переходя к обычной записи,

$$M_2 N_2 = \begin{vmatrix} T_1 & 0 \\ T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} & T_1 \end{vmatrix}. \quad (4.46)$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$M(T_2) N(T_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_1 T_1} - 1)}{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_{n-2} T_2} (e^{\lambda_{n-2} T_1} - 1)}{\lambda_{n-2}} & 0 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & T_1 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} & T_1 & \end{vmatrix}. \quad (4.47)$$

Учитывая (4.47), из выражения (4.25) устанавливаем

$$\left. \begin{array}{l} u'_i = \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ u'_{n-1} = T_1 u_{n-1}, \\ u'_n = \left( T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} \right) u_{n-1} + T_1 u_n. \end{array} \right\} \quad (4.48)$$

Подставляя  $u'_i$  из (4.48) в (4.40), приведем характеристическое уравнение к виду

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \prod_{j=1}^{n-2} (\lambda - e^{\lambda_j T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda - e^{\lambda_i T})} u_i \beta_i - \right. \\ \left. - \frac{T_1}{\lambda - 1} (u_{n-1} \beta_{n-1} + u_n \beta_n) - \right. \\ \left. - \left( T_2 + \frac{T_1}{2} + \frac{T}{\lambda - 1} \right) \frac{T_1}{\lambda - 1} u_{n-1} \beta_n \right\} = 0. \quad (4.49)$$

Далее по формулам (4.22) будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} u_i \beta_i = \gamma k_i x_i h, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ u_{n-1} \beta_{n-1} + u_n \beta_n = \gamma (k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n) h, \\ u_{n-1} \beta_n = \gamma k_n x_{n+1} h. \end{array} \right\} \quad (4.50)$$

Для первых ( $n - 2$ ) равенств (4.50) воспользуемся матричными тождествами (2.64), а для двух последних — равенством (2.66). Тогда будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \beta_i u_i = \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ \beta_{n-1} u_{n-1} + \beta_n u_n = \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h, \\ \beta_n u_{n-1} = \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right] h. \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

Используя формулы (4.51), перепишем окончательно характеристическое уравнение (4.49) в виде

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \prod_{j=1}^{n-2} (\lambda - e^{\lambda_j T}) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda - e^{\lambda_i T})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \right. \\ \left. - \frac{T_1}{\lambda - 1} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h - \right. \\ \left. - \left( T_2 + \frac{T_1}{2} + \frac{T}{\lambda - 1} \right) \frac{T_1}{\lambda - 1} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right] h \right\} = 0. \quad (4.52)$$

Характеристическое уравнение (4.52) выражено в конечном виде через параметры исходного матричного уравнения (4.3).

### § 4.3. Критерии устойчивости

Критерии устойчивости линейной импульсной системы устанавливают тот факт, что все корни  $\lambda_i^*$  характеристического уравнения матрицы  $P^*$  (4.15) по модулю меньше единицы или, геометрически, что все корни  $\lambda_i^*$  лежат внутри круга радиуса единицы с центром в начале координат.

Существуют различные способы определения необходимых и достаточных условий устойчивости. Остановимся на двух критериях, из которых один сводит задачу к проблеме Гурвица, а другой основывается на применении теории вычетов

к вычислению контурных интегралов. Второй критерий в некотором смысле является более общим, так как он применим и в тех случаях, когда характеристическое уравнение матрицы  $P^*$  замкнутой импульсной системы является трансцендентным уравнением.

*a) Сведение задачи к проблеме Гурвица*

В характеристическом уравнении заменим  $\lambda$  на новую переменную  $v$  посредством известной подстановки \*)

$$\lambda = \frac{v+1}{v-1} \quad (4.53)$$

и, наоборот,

$$v = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}. \quad (4.54)$$

Подстановку (4.53) можно рассматривать как конформное преобразование, которое устанавливает взаимно однозначное взаимодействие между точками комплексной плоскости  $\lambda$ , лежащими внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, и точками комплексной плоскости  $v$ , лежащими левее мнимой оси. Действительно, если точка  $\lambda$  описывает единичную окружность  $\lambda = e^{ia}$  против часовой стрелки ( $0 \leq a \leq 2\pi$ ), то точка  $v = -i \operatorname{ctg} \frac{a}{2}$  перемещается вдоль мнимой оси снизу вверх от отрицательной до положительной бесконечности. При оговоренном направлении обхода внутренние точки единичного круга на плоскости  $\lambda$  и точки левой полуплоскости  $v$  лежат слева от своих граничных кривых, поэтому при конформном преобразовании (4.53) они оказываются взаимными.

Рассмотрим сначала случай простых характеристических чисел  $\lambda_i$  матрицы  $P$  и выберем соответствующее этому случаю характеристическое уравнение замкнутой импульсной системы в форме (4.30). Подставим в (4.30)  $\lambda$  из (4.53). Тогда, принимая во внимание, что

$$\lambda - e^{\lambda_i T} = \frac{(v+1) - (v-1)e^{\lambda_i T}}{v-1} = \frac{v(1 - e^{\lambda_i T}) + (1 + e^{\lambda_i T})}{v-1}, \quad (4.55)$$

---

\*) См., например, книгу Р. Ольденбурга и Г. Сарториуса [20.]

получим

$$\prod_{j=1}^n \left[ \frac{v(1 - e^{\lambda_j T}) + (1 + e^{\lambda_j T})}{v - 1} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - (v - 1) \sum_{i=1}^n \frac{u'_i \beta_i}{v(1 - e^{\lambda_i T}) + (1 + e^{\lambda_i T})} \right\} = 0 \quad (4.56)$$

или после сокращения на не равный нулю множитель  $(v - 1)^{-n}$  \*) представим преобразованное характеристическое уравнение в виде

$$\prod_{j=1}^n [v(1 - e^{\lambda_j T}) + (1 + e^{\lambda_j T})] \times \\ \times \left\{ 1 - (v - 1) \sum_{i=1}^n \frac{u'_i \beta_i}{v(1 - e^{\lambda_i T}) + (1 + e^{\lambda_i T})} \right\} = 0. \quad (4.57)$$

В случае двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  следует взять характеристическое уравнение (4.40). Повторяя приведенную выше процедуру вычислений, получим для этого случая преобразованное характеристическое уравнение в виде

$$\prod_{j=1}^{n-2} [v(1 - e^{\lambda_j T}) + (1 + e^{\lambda_j T})] \times \\ \times \left\{ 1 - (v - 1) \sum_{i=1}^{n-2} \frac{u'_i \beta_i}{v(1 - e^{\lambda_i T}) + (1 + e^{\lambda_i T})} - \right. \\ \left. - \frac{v-1}{2} (u'_{n-1} \beta_{n-1} + u'_n \beta_n) - T \frac{(v-1)^2}{4} u'_{n-1} \beta_n \right\} = 0. \quad (4.58)$$

Чтобы выразить преобразованные характеристические уравнения (4.57) и (4.58) через исходные параметры уравнения (4.3), нужно последовательно применить формулы (4.31) и (4.34) или (4.48) и (4.51) к уравнениям (4.57) и (4.58) соответственно. Для непреобразованного характеристического уравнения импульсной системы такой последовательный переход был выполнен выше. Преобразованные уравнения

\*) Заметим, что при  $v = 1$  из (4.53) следует  $\lambda = \infty$ , но так как нас интересует только область, где  $|\lambda| < 1$ , то подобный случай исключен.

оставим в сокращенной записи (4.57) и (4.58), имея в виду, что подобный переход просто осуществляется по указанным выше формулам. Преобразованные характеристические уравнения являются уравнениями  $n$ -й степени

$$p'_0 v^n + p'_1 v^{n-1} + \dots + p'_n = 0 \quad (4.59)$$

с вещественными коэффициентами  $p'_i$ . Для асимптотической устойчивости линейной импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнений (4.59) лежали левее мнимой оси, а для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, p'_n > 0 \text{ при } p'_0 > 0 \quad (4.60)$$

или

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^{n-1} \Delta_{n-1} > 0, p'_n < 0 \text{ при } p'_0 < 0, \quad (4.61)$$

где  $\Delta_i$  суть определители Гурвица. Определители  $\Delta_i$  являются главными диагональными минорами матрицы Гурвица

$$\left| \begin{array}{cccccc} p'_1 & p'_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p'_3 & p'_2 & p'_1 & p'_0 & 0 & 0 & \dots \\ p'_5 & p'_4 & p'_3 & p'_2 & p'_1 & p'_0 & \dots \\ p'_7 & p'_6 & p'_5 & p'_4 & p'_3 & p'_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array} \right| \quad (4.62)$$

В матрице Гурвица следует вместо  $p'_i$  ставить нуль, если  $i > n$ . Таким образом, подстановка (4.53) позволяет свести решение задачи об устойчивости линейной импульсной системы к хорошо известному и широко применяемому в теории линейных систем непрерывного регулирования критерию Гурвица.

### б) Применение принципа аргумента

Будем рассматривать характеристическое уравнение  $\Delta^*(\lambda)$  линейных импульсных систем в виде (4.30) и (4.40), считая этот вид сокращенной записью уравнений (4.35) и (4.52), которые выражены через исходные параметры системы. Введем

обозначения для дробно-рациональной функции, фигурирующей в уравнениях (4.30) и (4.40). Положим

$$\left. \begin{aligned} W^*(\lambda) &= \frac{e^*(\lambda)}{\Delta_p^*(\lambda)} = - \sum_{i=1}^n \frac{u'_i \beta_i}{\lambda - e^{\lambda_i T}}, \\ W^*(\lambda) &= \frac{e^*(\lambda)}{\Delta_p^*(\lambda)} = - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{u'_i \beta_i}{\lambda - e^{\lambda_i T}} - \frac{u'_{n-1} \beta_{n-1} + u'_n \beta_n}{\lambda - 1} \\ &\quad - T \frac{u'_{n-1} \beta_n}{(\lambda - 1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Знаменатель  $\Delta_p^*(\lambda)$  есть полином степени  $n$ , который в любом случае можно записать в виде

$$\Delta_p^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - e^{\lambda_i T}), \quad (4.64)$$

если считать, что корни  $\lambda_i$  могут повторяться. Из сравнения формул (4.30) и (4.40) с формулами (4.63) и (4.64) вытекает соотношение

$$1 + W^*(\lambda) = \frac{\Delta^*(\lambda)}{\Delta_p^*(\lambda)}, \quad (4.65)$$

из которого следует, что нули функции  $1 + W^*(\lambda)$  совпадают с корнями  $\lambda_i^*$  характеристического полинома  $\Delta^*(\lambda)$ , а ее полюсы являются корнями  $e^{\lambda_i T}$  полинома  $\Delta_p^*(\lambda)$ . Так как степень числителя  $e^*(\lambda)$  дробно-рациональной функции (4.63) по крайней мере на единицу ниже степени знаменателя  $\Delta_p^*(\lambda)$ , то степени полиномов  $\Delta^*(\lambda)$  и  $\Delta_p^*(\lambda)$  совпадают. Следовательно, функция  $1 + W^*(\lambda)$  имеет одинаковое количество нулей и полюсов. Для функции  $1 + W^*(\lambda)$  имеет место принцип аргумента.

**Принцип аргумента.** На комплексной плоскости  $\lambda$  возьмем замкнутый контур  $\Gamma$ , не проходящий через нули и полюсы функции  $1 + W^*(\lambda)$ . Тогда разность между количеством нулей  $q$  и полюсов  $p$  функции  $1 + W^*(\lambda)$ , заключающихся внутри контура  $\Gamma$ , равна изменению аргумента  $\delta \arg [1 + W^*(\lambda)]$  функции  $1 + W^*(\lambda)$  при обходе точкой  $\lambda$  контура  $\Gamma$  в положительном направлении, деленному на  $2\pi$ .

При этом каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, какова его кратность, а положительным направлением считается обход кривой  $\Gamma$  против часовой стрелки.

Таким образом,

$$\frac{\Psi_1 - \Psi_0}{2\pi} = q - p, \quad (4.66)$$

где  $\Psi_0 = \arg [1 + W^*(\lambda)]$  в начальной точке  $\lambda_0$ , а  $\Psi_1$  — аргумент в той же самой точке  $\lambda_0$  после обхода кривой  $\Gamma$  в положительном направлении.

Для доказательства принципа аргумента представим функцию  $1 + W^*(\lambda)$  с учетом (4.65) в виде

$$1 + W^*(\lambda) = \text{const} \frac{(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*)}{(\lambda - e^{\lambda_1 T})(\lambda - e^{\lambda_2 T}) \dots (\lambda - e^{\lambda_n T})}. \quad (4.67)$$

Здесь каждый элементарный множитель записывается столько раз, какова кратность соответствующего корня \*). В соответствии с правилами умножения комплексных чисел имеем

$$\delta \arg [1 + W^*(\lambda)] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \delta \arg (\lambda - \lambda_i^*) - \sum_{k=1}^n \delta \arg (\lambda - e^{\lambda_k T}). \quad (4.68)$$

Если корень  $\lambda_i^*$  полинома  $\Delta^*(\lambda)$  или корень  $e^{\lambda_k T}$  полинома  $\Delta_p^*(\lambda)$  лежат внутри замкнутого контура  $\Gamma$ , то, как видно из рис. 4.1, *a*, вектор, изображающий разность  $\lambda - \lambda_i^*$  или  $\lambda - e^{\lambda_k T}$ , повернется против часовой стрелки на угол, равный  $2\pi$ , когда точка  $\lambda$  совершил один обход кривой  $\Gamma$  в положительном направлении, начав свое движение из произвольного начального положения. Если же указанные выше корни лежат вне контура  $\Gamma$ , то из рис. 4.1, *b* можно заключить, что при тех же условиях соответствующие векторы поворачиваются на один и тот же угол в положительном и отрицательном направлениях, так что их суммарный поворот равен нулю.

Приведенные рассуждения при учете формулы (4.68) доказывают справедливость принципа аргумента для дробно-

\*) Такая запись позволяет не повторять рассуждения для случая кратных корней.

рациональной функции. Вообще принцип аргумента является следствием теоремы о логарифмическом вычете и справедлив для любой аналитической функции, имеющей внутри замкнутого контура  $\Gamma$  только изолированные особые точки — полюсы \*).

Можно дать геометрическое истолкование принципу аргумента. При обходе точкой  $\lambda$  замкнутого контура  $\Gamma$  в положительном направлении конец вектора  $1 + W^*(\lambda)$  описывает некоторую замкнутую кривую  $\Gamma'$ . При этом вектор  $1 + W^*(\lambda)$ ,

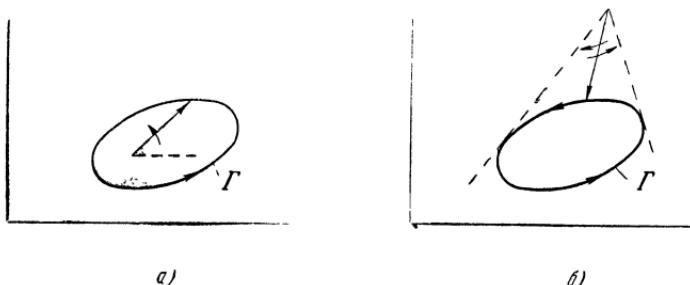


Рис. 4.1. Изменение аргумента при обходе замкнутого контура.

вообще говоря, совершил некоторое число полных оборотов вокруг начала координат. Будем каждому полному обороту засчитывать  $+1$ , если он совершается в положительном направлении, и  $-1$ , если он совершается в отрицательном направлении. Тогда принцип аргумента можно сформулировать так: разность между количеством нулей и полюсов функции  $1 + W^*(\lambda)$ , заключенных внутри замкнутого контура  $\Gamma$ , равна числу полных оборотов, которые делает вокруг начала координат вектор, изображающий функцию  $1 + W^*(\lambda)$ , когда точка  $\lambda$  совершает обход контура  $\Gamma$  в положительном направлении.

В теории регулирования принято строить замкнутую кривую, которую при указанных выше условиях описывает вектор, изображающий функцию  $W^*(\lambda)$ . Построенную таким образом кривую называют *годографом* вектора  $W^*(\lambda)$ . Очевидно, в этом случае для определения разности между количеством нулей и полюсов функции  $1 + W^*(\lambda)$  нужно

---

\* См., например, А. И. Маркушевич [18].

подсчитать число полных оборотов, которые на плоскости  $W^*$  совершают соответствующий вектор относительно точки  $-1$ .

Применение принципа аргумента к исследованию устойчивости основывается на следующих положениях. Полюсы  $e^{\lambda_i T}$  функции  $1 + W^*(\lambda)$  считаются известными, так как они определяются корнями  $\lambda_i$  характеристического уравнения разомкнутой системы регулирования. Распределение полюсов  $e^{\lambda_i T}$  относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат устанавливается из свойств корней  $\lambda_i$ . Действительно, для любого корня  $\lambda_i$  из условий  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  следуют неравенства  $|e^{\lambda_i T}| \leq 1$ .

На языке теории регулирования этот факт можно выразить следующим образом. Если система регулирования в разомкнутом состоянии устойчива, то все полюсы функции  $1 + W^*(\lambda)$  (4.63), являющиеся корнями полинома  $\Delta_p^*(\lambda)$  (4.64), лежат внутри единичного круга с центром в начале координат; в противном случае один или несколько полюсов находятся вне этого круга. Наконец, если разомкнутая система находится на границе устойчивости, то один или несколько полюсов находятся на граничной окружности единичного радиуса.

Когда линейная импульсная система устойчива, все корни  $\lambda_i^*$  функции  $1 + W^*(\lambda)$ , являющиеся корнями характеристического полинома  $\Delta^*(\lambda)$ , лежат внутри единичного круга. Таким образом, для устойчивой линейной импульсной системы заранее известна разность между количеством нулей и полюсов, находящихся внутри окружности единичного радиуса.

Рассмотрим на комплексной плоскости единичную окружность  $\lambda = e^{ia}$  при  $0 \leq a \leq 2\pi$ . Такой интервал изменения соответствует положительному обходу точкой  $\lambda$  единичной окружности. Можно сформулировать следующий критерий устойчивости.

*Критерий устойчивости I. Для того чтобы линейная импульсная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента функции  $1 + W^*(e^{ia})$ , когда  $a$  изменяется в интервале  $0 \leq a \leq 2\pi$ , определялось табл. 4.1.*

Первый и четвертый случаи являются следствием принципа аргумента, если окружность  $\lambda = e^{ia}$  ( $0 \leq a \leq 2\pi$ ) при-

Таблица 4.1

№ пп	Приращение $\arg [1 + W^*(e^{ia})]$	Характеристика корней $\lambda_i$ разомкнутой системы
1	0	$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$
2	$s\pi$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$ $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = s+1, s+2, \dots, n$
3	$2s\pi$	$\lambda_1 = \pm i\omega_1, \lambda_2 = \pm i\omega_2, \dots, \lambda_s = \pm i\omega_s$ $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = 2s+1, 2s+2, \dots, n$
4	$2s\pi$	$\operatorname{Re} \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, s$ $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = s+1, s+2, \dots, n$

нять за контур  $\Gamma$  (рис. 4.2, а). Действительно, в данном случае  $q = n$ , а  $p = n$  и  $p = n - s$  соответственно в первом и четвертом случаях.

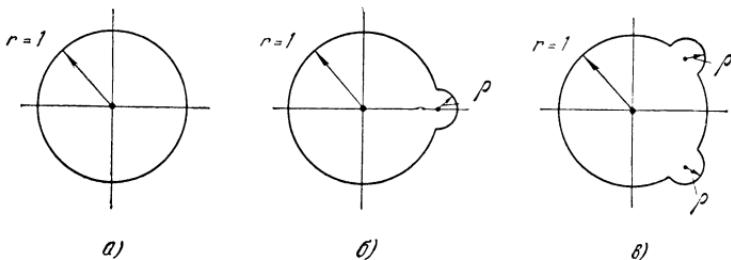


Рис. 4.2. Замкнутые контуры  $\Gamma$  на комплексной плоскости  $\lambda$ .

Для второго и третьего случаев единичная окружность не может служить контуром  $\Gamma$ , так как она проходит через некоторые полюсы функции  $1 + W^*(\lambda)$ . В этих случаях в качестве контура  $\Gamma$  примем кривые, которые представлены на рис. 4.2, б и рис. 4.2, в. Эти кривые состоят из дуг  $\lambda = e^{ia}$  единичной окружности и дуг  $\lambda - e^{\lambda jT} = \rho e^{ia}$  окружностей малого радиуса  $\rho$  с центрами в полюсах  $e^{\lambda jT}$ , для которых  $|e^{\lambda jT}| = 1$ , т. е. для которых либо  $\lambda_j = 0$ , либо  $\lambda_j = \pm i\omega$ . Эти случаи изображены на рис. 4.2, б и рис. 4.2, в соответственно.

В малой окрестности полюса  $e^{\lambda_j T}$  формулу (4.67) можно приближенно записать в виде

$$1 + W^*(\lambda) \approx \text{const} \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_j T}}. \quad (4.69)$$

Отсюда следует, что при обходе точкой  $\lambda$  дуги  $\lambda - e^{\lambda_j T} = \rho e^{ia}$  в положительном направлении изменение аргумента функции  $1 + W^*(\lambda)$  совпадает с приращением угла  $a$ , взятым с обратным знаком. Но при  $\rho \rightarrow 0$  приращение  $a$  стремится к  $\pi$ . Это обстоятельство с учетом того факта, что внутри контуров  $\Gamma$ , представленных на рис. 4.2, б и рис. 4.2, в, функция  $1 + W^*(\lambda)$  имеет  $n$  нулей и  $n$  полюсов, доказывает, что в пределе изменение  $\arg [1 + W^*(\lambda)]$  на единичной окружности при  $\rho \rightarrow 0$  будет таким, как это указано в пп. 2. и 3 табл. 4.1.

Для систем импульсного регулирования, которые в разомкнутом состоянии устойчивы или находятся на границе устойчивости \*), можно дать единую формулировку критерия устойчивости, если использовать геометрическое истолкование принципа аргумента с учетом добавления, которое было сделано относительно построения годографа вектора  $W^*(\lambda)$ . Построим годограф вектора, изображающего на комплексной плоскости  $W^*$  функцию  $W^*(\lambda)$ , когда точка  $\lambda$  обходит в положительном направлении один из замкнутых контуров, представленных на рис. 4.2. Тогда критерий устойчивости можно сформулировать в следующем виде.

*Критерий устойчивости II. Для того чтобы линейная импульсная система (которая в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы суммарный поворот вектора с началом в точке  $-1$  равнялся нулю, когда его конец обходит годограф  $W^*(\lambda)$  \*\*).*

При использовании сформулированных критериев устойчивости приходится отображать замкнутые контуры  $\Gamma$  (см. рис. 4.2) комплексной плоскости  $\lambda$  посредством функции  $W^*(\lambda)$  на комплексную плоскость  $W^*$ . Отметим некоторые характерные черты такого отображения.

\*) См. пп. 1 и 2 табл. 4.1.

\*\*) С учетом бесконечных ветвей.

Полиномы  $e^*(\lambda)$  и  $\Delta_p^*(\lambda)$  (4.63) имеют вещественные коэффициенты, поэтому для комплексно-сопряженных значений  $\lambda$  функция  $W^*(\lambda)$  принимает также комплексно-сопряженные значения. Отсюда следует, что годограф вектора  $W^*(\lambda)$  симметричен относительно вещественной оси комплексной плоскости  $W^*$ , так как замкнутые кривые  $\Gamma$ , представленные на рис. 4.2, симметричны относительно вещественной оси комплексной плоскости  $\lambda$ . В частности, точкам пересечения кривых  $\Gamma$  с вещественной осью соответствуют аналогичные точки годографа  $W^*(\lambda)$ . Дугам окружностей малого радиуса  $\rho$  соответствуют дуги большого радиуса (порядка  $1/\rho$ ) на плоскости  $W^*$  (4.69). Точка  $W^*$  обходит эти дуги в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке. При  $\rho \rightarrow 0$  дуги бесконечно большого радиуса на плоскости  $W^*$  содержат столько полуокружностей, какова кратность соответствующего полюса  $e^{\lambda_j T}$  при  $|e^{\lambda_j T}| = 1$ .

На рис. 4.3 изображены типичные годографы вектора  $W^*(\lambda)$ . На рис. 4.3, а представлен годограф  $W^*(\lambda)$  для линейной импульсной системы устойчивой в разомкнутом состоянии, на рис. 4.3, б и рис. 4.3, в — для нейтрально-устойчивой системы в разомкнутом состоянии, когда  $\lambda_n = 0$  и  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  соответственно и, наконец, на рис. 4.3, г изображен случай, когда  $\lambda_{n-1, n} = \pm i\omega$ . Конец вектора с началом в точке  $-1$  изображает функцию  $1 + W^*(\lambda)$ , если за начало координат принять точку  $-1$ . На всех чертежах рис. 4.3 точка  $-1$  расположена так, что все четыре случая соответствуют устойчивым импульсным системам.

Критерий устойчивости II можно переформулировать еще в следующем виде.

**Критерий устойчивости III.** Для того чтобы линейная импульсная система (которая в разомкнутом состоянии устойчива или находится на границе устойчивости) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф  $W^*(\lambda)$  пересекал вещественную ось слева от точки  $-1$  одинаковое число раз снизу вверх и сверху вниз, когда точка  $\lambda$  обходит в положительном направлении половину контура  $\Gamma$  (рис. 4.2), лежащую в верхней полуплоскости.

Можно указать на особый случай, когда применение дробно-рациональной функции  $W^*(\lambda)$  может привести к неправильным выводам относительно устойчивости импульсной

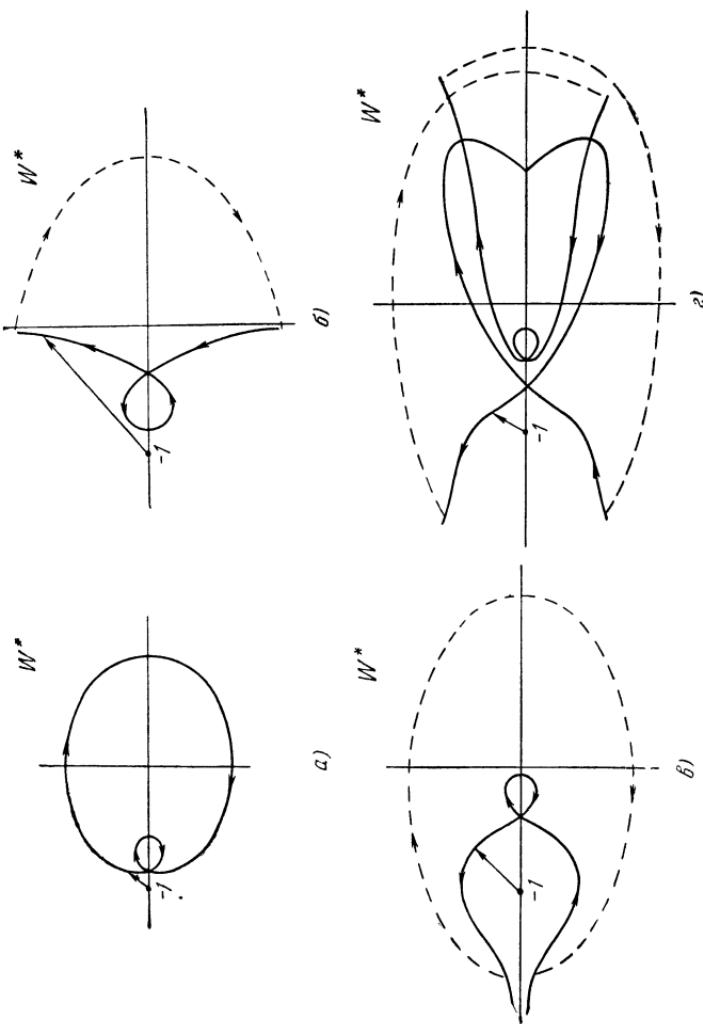


Рис. 4.3. Типичные годографы вектора  $W^*(\lambda)$  на комплексной плоскости  $W^*$ .

системы. Этот случай будет иметь место, когда числитель  $e^*(\lambda)$  и знаменатель  $\Delta_p^*(\lambda)$  дробно-рациональной функции  $W^*(\lambda)$  будут иметь одинаковые корни  $e^{\lambda jT}$ , для которых  $|e^{\lambda jT}| > 1$ . В этом случае, очевидно,  $e^{\lambda jT}$  будет также корнем характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda)$  и импульсная система будет неустойчивой. Однако при формальном применении критерии устойчивости и функции  $W^*(\lambda)$  после сокращений соответствующих элементарных множителей  $(\lambda - e^{\lambda jT})$  может оказаться, что условия устойчивости выполняются.

Рассмотренные здесь критерии устойчивости являются родственными критерию Найквиста в теории линейных непрерывных систем регулирования.

Критерий устойчивости замкнутых импульсных систем, основанный на применении принципа аргумента к дробно-рациональной функции, был впервые получен Я. З. Цыпкиным. В теории импульсных систем, которую он развел на базе дискретного преобразования Лапласа, дробно-рациональная функция  $W^*(\lambda)$  при  $\lambda = e^{sT}$  имеет ясный физический смысл, так как она является передаточной функцией в смысле дискретного преобразования Лапласа для разомкнутой линейной импульсной системы. Заметим, что понятие разомкнутой системы регулирования, принятое здесь, не совпадает с понятием разомкнутой импульсной системы, которым оперировал Я. З. Цыпкин. В книге Я. З. Цыпкина [26] читатель также может познакомиться с некоторыми особенностями в применении критерия устойчивости III, на которых автор здесь не останавливался.

#### *Применение принципа аргумента к характеристическому полиному*

Характеристический полином  $\Delta^*(\lambda)$  линейной импульсной системы представим через его корни  $\lambda_i^*$  в виде

$$\Delta^*(\lambda) = p_0^*(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*), \quad (4.70)$$

причем каждый элементарный множитель здесь повторяется столько раз, какова кратность соответствующего корня  $\lambda_j^*$ , а  $p_0^*$  есть коэффициент при  $\lambda^n$ . Полином  $\Delta^*(\lambda)$  можно

рассматривать как частный случай дробно-рациональной функции  $1 + W^*(\lambda)$ , когда  $\Delta_p^*(\lambda) = 1$ .

Применим принцип аргумента к характеристическому полиному  $\Delta^*(\lambda)$ , взяв в качестве контура  $\Gamma$  окружность единичного радиуса, представленную на рис. 4.2, а. Конец вектора, изображающего функцию  $\Delta^*(\lambda)$  при  $\lambda = e^{ia}$ , описывает замкнутую кривую, когда  $a$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Этую кривую будем называть *годографом вектора*  $\Delta^*(e^{ia})$ .

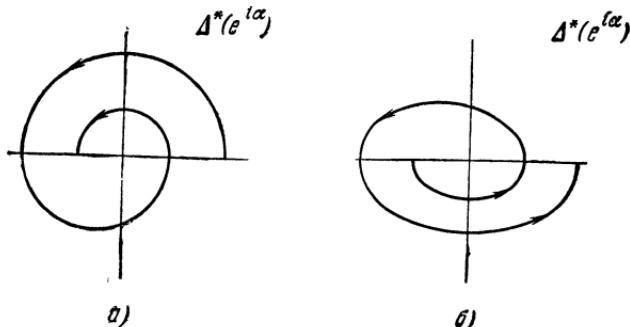


Рис. 4.4. Годограф вектора  $\Delta^*(e^{ia})$  при  $0 \leq a \leq \pi$  для  
 а)  $p_0^* > 0$  и б)  $p_0^* < 0$ .

Окружность единичного радиуса и годограф  $\Delta^*(e^{ia})$  симметричны относительно своих вещественных осей; поэтому годограф  $\Delta^*(e^{ia})$  удобно строить в интервале  $0 \leq a \leq \pi$ , что соответствует обходу точкой  $\lambda$  верхней полуокружности в положительном направлении. При  $|\lambda_i^*| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , из (4.70) следует, что  $\Delta^*(e^{ia}) \neq 0$  в интервале  $0 \leq a \leq 2\pi$ . Функция  $\Delta^*(e^{ia})$  может обратиться в нуль только при  $|\lambda_j^*| = 1$  в точках  $a$ , удовлетворяющих равенству  $\lambda_j = e^{ia}$ . При  $|\lambda_i^*| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , знак  $\Delta^*(e^{ia})$  при  $a = 0$  совпадает со знаком старшего коэффициента  $p_0^*$ . При изменении  $a$  от 0 до  $2\pi$  вектор, изображающий элементарный множитель  $(e^{ia} - \lambda_i^*)$  функции  $\Delta^*(e^{ia})$ , монотонно поворачивается в положительном направлении (см. рис. 4.1, а) на угол, равный  $2\pi$ , если  $|\lambda_i^*| < 1$ .

Пусть все корни  $\lambda_i^*$  лежат внутри единичного круга; тогда приращение аргумента функции  $\Delta^*(e^{ia})$  равняется  $2\pi n$ ,

когда  $a$  изменяется в интервале от 0 до  $2\pi$ . Этот факт немедленно следует из формулы (4.66), так как  $\Delta^*(\lambda)$  не имеет полюсов в любой конечной части комплексной плоскости  $\lambda$ . Исходя из этого, можно сформулировать критерий устойчивости, который будет являться аналогом критерия А. В. Михайлова из теории линейных непрерывных систем.

**Критерий устойчивости IV.** Для того чтобы линейная импульсная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор годографа  $\Delta^*(e^{ia})$  повернулся в положительном направлении на угол  $p\pi$ , когда  $a$  изменяется от 0 до  $\pi$ . Здесь  $p$  — степень характеристического полинома  $\Delta^*(\lambda)$ .

На рис. 4.4 представлен годограф для полинома  $\Delta^*(\lambda)$  третьей степени, когда его корни  $\lambda_i^*$  по модулю меньше единицы.

Впервые критерий А. В. Михайлова был обобщен на характеристический полином  $\Delta^*(\lambda)$  линейной импульсной системы Я. З. Цыпкиным [26].

## § 4.4. Выделение границы устойчивости

В предыдущем параграфе были получены необходимые и достаточные условия устойчивости для линейных импульсных систем. Сейчас мы остановимся на одном частном приеме исследования устойчивости, который может оказаться удобным для практических приложений. Этот прием основывается на следующих положениях. Корни  $\lambda_i^*$  характеристического полинома  $\Delta^*(\lambda)$  являются непрерывными функциями параметров системы. Пусть параметры системы в свою очередь являются непрерывными функциями какого-нибудь параметра  $a$ ; тогда корни  $\lambda_i^*$  также будут непрерывными функциями этого параметра. Назовем те значения параметра  $a$ , при которых по крайней мере один из корней  $\lambda_i^*$  по модулю равен единице, *критическими*; тогда, очевидно, перемена знака устойчивости может происходить только при критических значениях параметра  $a$ . Поэтому при всех значениях параметра  $a$ , находящихся между двумя его последовательными критическими значениями, устойчивость системы имеет один и тот же знак. Интервал изменения параметра  $a$ , внутри которого система устойчива, всегда ограничивается его критическими значениями.

Таким образом, можно применить следующий прием исследования устойчивости. Сначала нужно отыскать все критические значения параметра  $\alpha$ , а затем достаточно каким-либо способом (хотя бы прямым вычислением корней  $\lambda_i^*$ ) определить знак устойчивости только для одного значения внутри каждого интервала изменения  $\alpha$  между двумя его последовательными критическими значениями, чтобы получить суждение об устойчивости во всем диапазоне изменения параметра  $\alpha$ . В указанных выше интервалах следует выбрать те значения  $\alpha$ , для которых характеристический полином  $\Delta^*(\lambda)$  принимает наиболее простой вид, чтобы облегчить вычисления при определении характера его корней  $\lambda_i^*$ .

Указанным путем среди всех критических значений параметра  $\alpha$  можно выделить те, которые являются границами области устойчивости системы.

Применим матричные методы к определению условий, обеспечивающих существование корней  $\lambda_i^*$  с модулем, равным единице. Для этой цели представим характеристическое уравнение  $\Delta^*(\lambda) = 0$  в виде

$$\Delta^*(\lambda) = p_0^* \lambda^n + p_1^* \lambda^{n-1} + \dots + p_n^* = 0, \quad (4.71)$$

где, очевидно, все коэффициенты  $p_i^*$  являются вещественными числами. Рассмотрим сначала вещественные корни уравнения (4.71) с модулем, равным единице. Такими корнями могут быть  $\lambda^* = 1$  или  $\lambda^* = -1$ . Подставляя эти значения в уравнение (4.67), получим необходимые условия существования таких корней

$$\left. \begin{aligned} p_0^* + p_1^* + \dots + p_n^* &= 0, \\ (-1)^n p_0^* + (-1)^{n-1} p_1^* + \dots + p_n^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

Нетрудно видеть, что эти необходимые условия являются также и достаточными условиями. Исследуем теперь случай комплексных корней. Пусть  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$  — пара сопряженных комплексных корней уравнения (4.71) с модулями, равными единице. Тогда при  $\omega > 0$  их можно записать в виде

$$\lambda_1^* = e^{i\omega}, \quad \lambda_2^* = e^{-i\omega}. \quad (4.73)$$

Далее будем иметь

$$\lambda_1^* \lambda_2^* = 1; \quad \lambda_1^* + \lambda_2^* = 2 \cos \omega = -\xi. \quad (4.74)$$

Представим левую часть уравнения (4.71) в виде

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda^2 + \xi\lambda + 1)(q_0\lambda^{n-2} + q_1\lambda^{n-3} + \dots + q_{n-2}). \quad (4.75)$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  в (4.71) и (4.75), получим  $(n+1)$  уравнений для определения  $n$  неизвестных  $q_0, q_1, \dots, q_{n-2}$  и  $\xi$

$$\left. \begin{array}{l} q_0 = p_0^*, \\ q_0\xi + q_1 = p_1^*, \\ q_0 + q_1\xi + q_2 = p_2^*, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ q_{s-2} + q_{s-1}\xi + q_s = p_s^*, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ q_{n-4} + q_{n-3}\xi + q_{n-2} = p_{n-2}^*, \\ q_{n-3} + q_{n-2}\xi = p_{n-1}^*, \\ q_{n-2} = p_n^*. \end{array} \right\} \quad (4.75)$$

Уравнения (4.75) симметрично записываются сверху вниз и снизу вверх. Для полной симметрии и упрощения последующих выкладок будем пока считать  $n$  нечетным, т. е. положим  $n = 2k + 1$ . Тогда имеем четное число  $(2k + 2)$  уравнений (4.75). Введем левую треугольную матрицу  $(k+1)$ -го порядка

$$\overbrace{\left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \xi & 1 \end{array} \right|}^{(k+1) \text{ столбцов}} \quad (4.76)$$

с равными элементами в косых рядах. Треугольную матрицу (4.76) можно представить через единичные косые

ряды (2.26) в виде

$$C = E + \xi H^1 + H^2. \quad (4.77)$$

Легко убедиться, что с помощью матрицы (4.76) систему уравнений (4.75) можно записать в виде двух матричных уравнений

$$C \begin{vmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{k-1} \\ q_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_0^* \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{k-1}^* \\ p_k^* \end{vmatrix} \quad (4.78)$$

и

$$\|q_{k-1}q_k \dots q_{2k-2}q_{2k-1}\| C = \|p_{k+1}^*p_{k+2}^* \dots p_{2k}^*p_{2k+1}^*\|. \quad (4.79)$$

Решение уравнений (4.78) и (4.79) можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{k-1} \\ q_k \end{vmatrix} = C^{-1} \begin{vmatrix} p_0^* \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{k-1}^* \\ p_k^* \end{vmatrix} \quad (4.80)$$

и

$$\|q_{k-1}q_k \dots q_{2k-2}q_{2k-1}\| = \|p_{k+1}^*p_{k+2}^* \dots p_{2k}^*p_{2k+1}^*\| C^{-1} \quad (4.81)$$

Входящая сюда обратная матрица  $C^{-1}$  может быть получена в соответствии с той процедурой обращения треугольной матрицы с равными элементами в косых рядах, которая на частном примере была изложена в § 2.1 (см. уравнение (2.33)).

Из (4.77) чисто формально получаем

$$C^{-1} = E - (\xi H^1 + H^2) + (\xi H^1 + H^2)^2 - \dots - (-1)^k (\xi H^1 + H^2)^k. \quad (4.81')$$

Таким образом,  $C^{-1}$  является левой треугольной матрицей с равными элементами в косых рядах, т. е.

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-2} & c_{k-3} & c_{k-4} & \dots & c_0 & 0 & 0 \\ c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \dots & c_1 & c_0 & 0 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 \end{vmatrix}, \quad (4.82)$$

или, в другой записи,

$$C^{-1} = c_0 E + c_1 H^1 + \dots + c_k H^k. \quad (4.83)$$

Для определения коэффициентов  $c_\rho$  этой матрицы развернем по правилу бинома Ньютона правую часть выражения (4.81). Тогда, учитывая правило умножения (2.27) единичных косых рядов, получим

$$C^{-1} = E - \xi H^1 - H^2 + \xi^2 H^2 + 2\xi H^3 + H^4 - \xi^3 H^3 - 3\xi^2 H^4 - 3\xi H^5 - H^6 + \xi^4 H^4 + 4\xi^3 H^5 + 6\xi^2 H^6 + 4\xi H^7 + H^8 - \dots \quad (4.84)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых  $H^k$  в разложениях (4.83) и (4.84), найдем

$$\left. \begin{array}{l} c_0 = 1, \quad c_1 = -\xi, \quad c_2 = (\xi^2 - 1), \quad c_3 = -(\xi^2 - 2\xi), \\ c_4 = (\xi^4 - 3\xi^2 + 1), \quad \dots \end{array} \right\} \quad (4.85)$$

Между коэффициентами (4.85) существует рекуррентная связь, выражаемая формулой

$$c_\rho = -(\xi c_{\rho-1} + c_{\rho-2}), \quad (4.85')$$

с помощью которой можно последовательно (начиная с  $c_3$ ) выписывать значения любого коэффициента  $c_\rho$  вплоть до старшего  $c_k$ . Коэффициенты  $c_\rho$  являются полиномами степени  $\rho$  относительно  $\xi$ .

В равенствах (4.80) и (4.81) фигурируют одинаковые неизвестные  $q_{k-1}$  и  $q_k$ . Учитывая вид матрицы  $C^{-1}$ , опреде-

ляемой формулой (4.82), получим из (4.80) и (4.81) прямым вычислением скалярные выражения

$$\left. \begin{array}{l} q_{k-1} = c_{k-1} p_0^* + c_{k-2} p_1^* + \dots + c_1 p_{k-2}^* + c_0 p_{k-1}^*, \\ q_k = c_k p_0^* + c_{k-1} p_1^* + \dots + c_1 p_{k-1}^* + c_0 p_k^*, \\ q_{k-1} = c_0 p_{k+1}^* + c_1 p_{k+2}^* + \dots + c_{k-1} p_{2k}^* + c_k p_{2k+1}^*, \\ q_k = c_0 p_{k+2}^* + c_1 p_{k+3}^* + \dots + c_{k-1} p_{2k}^* + c_{k-1} p_{2k+1}^*, \end{array} \right\} \quad (4.86)$$

определяющие неизвестные коэффициенты  $q_{k-1}$  и  $q_k$ . Исключая из (4.86)  $q_{k-1}$  и  $q_k$ , получим соотношения

$$\left. \begin{array}{l} c_0(p_{k+1}^* - p_{k-1}^*) + c_1(p_{k+2}^* - p_{k-2}^*) + \dots \\ \dots + c_{k-1}(p_{2k}^* - p_0^*) + c_k p_{2k+1}^* = 0, \\ c_0(p_k^* - p_{k+2}^*) + c_1(p_{k-1}^* - p_{k+3}^*) + \dots \\ \dots + c_{k-1}(p_1^* - p_{2k+1}^*) + c_k p_0^* = 0. \end{array} \right\} \quad (4.87)$$

Необходимо обратить внимание на форму записи уравнений (4.87). Если, например, первое уравнение (4.87) составлено, то второе уравнение получается из первого заменой коэффициентов  $p_j^*$  на  $p_{2k+1-j}^*$ .

Левые части уравнений (4.87), после того как в них подставить значения  $c_\rho$  из (4.85) и (4.85'), можно представить в виде полиномов степени  $k$  относительно величины  $\xi$ . Поэтому уравнения (4.87) можно рассматривать как алгебраические уравнения  $k$ -й степени относительно величины  $\xi$ , которые должны удовлетворяться при одном и том же значении  $\xi$ .

Как известно из алгебры [29], два алгебраических уравнения

$$\left. \begin{array}{l} a_0 \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \dots + a_m = 0, \\ b_0 \xi^n + b_1 \xi^{n-1} + \dots + b_n = 0 \end{array} \right\} \quad (4.88)$$

тогда и только тогда имеют общий корень, когда их результатант обращается в нуль. Это условие можно записать

в виде

$$\left| \begin{array}{cc} \overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}^n \text{столбцов} & \overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}^m \text{столбцов} \\ \begin{array}{ccccccc} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{array} \end{array} \right| = 0. \quad (4.89)$$

Таким образом, если уравнение (4.71) имеет корни в виде (4.73), то его коэффициенты  $p_i^*$  должны удовлетворять условию типа (4.89). Следовательно, (4.80) дает необходимое условие, при котором характеристическое уравнение (4.71) имеет два комплексных сопряженных корня (4.73), по модулю равных единице.

Однако это условие не является достаточным. Дело в том, что в проведенных рассуждениях был использован только тот факт, что  $\lambda_1^* \lambda_2^* = 1$ . Но таким свойством обладают любые числа, которые можно представить в виде  $\lambda_i^* = e^\varepsilon \pm i\omega$  и  $\lambda_2^* = e^{-\varepsilon} \mp i\omega$ , при произвольных вещественных числах  $\varepsilon$  и  $\omega$ . Поэтому условие (4.89) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (4.71) имело хотя бы два корня  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$ , произведение которых  $\lambda_1^* \lambda_2^* = 1$ . Однако этот факт не препятствует применению указанного выше приема выделения областей устойчивости.

Остановимся теперь на случае, когда степень уравнения (4.71) четная. Нетрудно видеть, что при  $n = 2k$  систему уравнений (4.75) также можно записать в матричной форме, причем уравнение (4.78) можно оставить без изменения, а порядок матрицы во втором уравнении уменьшится на единицу, так как в нем будут отсутствовать коэффициенты  $p_{2k+1}^*$  и  $q_{2k-1}$ . Поэтому, если провести те же рассуждения, но уже с разными порядками матрицы (4.76), то придем опять к четырем уравнениям типа (4.87), причем эти уравнения получаются из (4.87) как предельные, если в них положить  $p_{2k+1}^* = 0$ . Нахождение результанта (4.89) в конкретных случаях не представляет большого труда.

В практических приложениях следует придерживаться следующего порядка. Пусть для определенности  $n$  — нечетное. Тогда положим  $n = 2k + 1$ . Для найденного значения  $k$  выписываем первое уравнение (4.87). Далее, используя формулы (4.85) и рекуррентную связь (4.85'), выписываем коэффициенты  $c_p$ . Затем представляем левую часть первого уравнения (4.87) в виде полинома степени  $k$  по параметру  $\xi$ , из которого далее заменой  $p_j^*$  на  $p_{2k+1-j}^*$  получаем второе уравнение (4.87). После этого составляем результант (4.89).

В качестве примера рассмотрим характеристическое уравнение пятой степени. В данном случае  $k = 2$ , поэтому первое уравнение (4.87) запишется в виде

$$c_0(p_3^* - p_1^*) + c_1(p_4^* - p_0^*) + c_2 p_5^* = 0. \quad (4.90)$$

Подставляя сюда  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  из (4.85) и производя подобные члены по степеням  $\xi$ , получим

$$p_5^* \xi^2 + (-p_4^* + p_0^*) \xi + (-p_5^* + p_3^* - p_1^*) = 0. \quad (4.91)$$

Заменяя в этом уравнении  $p_j^*$  на  $p_{5-j}^*$ , получим

$$p_0^* \xi^2 + (-p_1^* + p_5^*) \xi + (-p_0^* + p_2^* - p_4^*) = 0. \quad (4.92)$$

Переставляя столбцы, запишем результант уравнений (4.91) и (4.92) в виде (см. (4.88) и (4.89))

$$\begin{vmatrix} p_0^* & p_5^* & 0 & 0 \\ p_5^* - p_1^* & p_0^* - p_4^* & p_0^* & p_5^* \\ -p_0^* + p_2^* - p_4^* & -p_5^* + p_3^* - p_1^* & p_5^* - p_1^* & -p_4^* + p_0^* \\ 0 & 0 & -p_0^* + p_2^* - p_4^* & -p_5^* + p_3^* - p_1^* \end{vmatrix} = 0. \quad (4.93)$$

Развертывая определитель, представим уравнения (4.93) в виде

$$[p_0^*(-p_4^* + p_0^*) - p_5^*(p_5^* - p_1^*)][(p_5^* - p_1^*)(-p_5^* + p_3^* - p_1^*) - (-p_4^* + p_0^*)(-p_0^* + p_2^* - p_4^*)] - [p_0^*(p_3^* - p_1^*) - p_5^*(p_2^* - p_4^*)]^2 = 0. \quad (4.94)$$

Из формулы (4.94), полагая последовательно  $p_5^* = 0$ ,  $p_5^* = p_4^* = 0$ ,  $p_5^* = p_4^* = p_3^* = 0$ , получим результа́нт (4.89) для характеристических уравнений (4.71) 4-й, 3-й и 2-й степеней

для характеристического уравнения 4-й степени в виде

$$(-p_4^* + p_0^*)[p_1^*(p_3^* - p_1^*) + (-p_4^* + p_0^*)(-p_0^* + p_2^* - p_4^*)] + p_0^*(p_3^* - p_1^*)^2 = 0; \quad (4.95)$$

для характеристического уравнения 3-й степени в виде

$$p_0^*(p_2^* - p_0^*) + p_3^*(p_3^* - p_1^*) = 0; \quad (4.96)$$

для характеристического уравнения 2-й степени в виде

$$p_2^* - p_0^* = 0. \quad (4.97)$$

При выполнении соотношений (4.94) — (4.97) характеристическое уравнение соответствующих степеней имеет по крайней мере два корня  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$ , для которых  $\lambda_1^*\lambda_2^* = 1$ .

Условия (4.94) — (4.97) можно также получить, хотя и несколько сложнее, если построить преобразованное характеристическое уравнение (4.59) и приравнять его предпоследний определитель Гурвица нулю ( $\Delta_{n-1} = 0$ ).

## § 4.5. Коэффициенты устойчивости и оценка затухания по функции Ляпунова

Исследования устойчивости линейной импульсной системы можно провести путем построения соответствующей функции Ляпунова. Необходимые и достаточные условия устойчивости решения системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами по прямому методу Ляпунова были получены в § 3.2. Здесь мы проведем более углубленное

исследование свойств функции Ляпунова, которое позволило бы не только определить качественное состояние системы — ее устойчивость, но также установить некоторые количественные характеристики процесса перехода возмущенного движения системы к ее невозмущенному стационарному состоянию.

### *Коэффициенты устойчивости*

Матричное разностное уравнение (4.16) определяет дискретное движение линейной импульсной системы около невозмущенного стационарного состояния, которое определяется матричным равенством  $x \equiv 0$ . Соответствующая уравнению (4.16) функция Ляпунова  $V$  определяется в виде квадратичной формы (3.25). Первая разность формы  $V$  в силу матричного уравнения (4.16) удовлетворяет равенству (3.26) при произвольно задаваемой определенно положительной квадратичной форме  $U$ . Необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в том, что функция Ляпунова — квадратичная форма  $V$  — должна быть определено положительной функцией.

Квадратичные формы  $U$  и  $V$  образуют регулярный пучок форм (см. § 2.6), так как  $U$  выбирается определено положительной. Как уже упоминалось в § 2.6, в этом случае форма  $V$  будет определено положительной тогда и только тогда, когда все корни  $\rho_i$  характеристического уравнения (2.153) пучка форм будут больше нуля. Введем новые числа  $\mu_i$ , связав их с корнями  $\rho_i$  соотношениями

$$\mu_i = \frac{\rho_i - 1}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.98)$$

Если корень  $\rho_i$  пробегает значения от 1 до  $\infty$ , то  $\mu_i$  пробегает все значения от 0 до 1. Числа  $\mu_i$  будем называть *коэффициентами устойчивости*. Относительно чисел  $\mu_i$  можно доказать ряд предложений.

**Теорема I.** Для того чтобы линейная импульсная система была устойчивой и притом асимптотически, необходимо и достаточно, чтобы числа  $\mu_i$  удовлетворяли неравенствам

$$0 \leq \mu_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.99)$$

Функцией Ляпунова для устойчивой линейной импульсной системы является определено положительная квадратичная форма  $V$ . Рассмотрим формы  $U$  и  $V$ . С помощью линейного преобразования (2.154) с неособой вещественной матрицей  $L$  приведем одновременно формы  $U$  и  $V$  к виду (2.155) и (2.156). Подставим  $U$  и  $V$  в виде (2.155) и (2.156) в разностное уравнение (3.26). Тогда после несложной перегруппировки членов получим равенство

$$\sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2(mT) = \sum_{i=1}^n (\rho_i - 1) y_i^2[(m-1)T], \quad (4.100)$$

которое справедливо для любого мгновения дискретного времени  $mT$ . В частности, при  $m = 1$  будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2(T) = \sum_{i=1}^n (\rho_i - 1) y_i^2(0). \quad (4.101)$$

Начальные значения  $y_i(0)$  можно задавать произвольно. Это следует из того обстоятельства, что матрица  $L$ -преобразования (2.154) является неособой, поэтому для любой системы значений  $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)$  всегда можно найти, и при этом единственным образом, соответствующую систему значений  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$  исходных координат. Тогда, выбирая поочередно одно из значений  $y_i(0)$  отличным от нуля, а остальные значения полагая равными нулю, немедленно устанавливаем, что квадратичная форма  $V$  может быть определено положительной и одновременно удовлетворять равенству (4.101) только в том случае, если корни  $\rho_i$  удовлетворяют неравенствам

$$\rho_i \geqslant 1, \quad (4.102)$$

причем при  $\rho_i = 1$  в конце первого интервала  $T$  имеем уже  $y_i(T) = 0$ . Из формул (4.98) и (4.102) следуют равенства (4.99).

Таким образом, для устойчивых линейных импульсных систем положительные коэффициенты устойчивости  $\mu_i$ , так же как и модули корней  $\lambda_i^*$  характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda) = 0$  (4.30) — (4.40), меньше единицы.

Вообще между коэффициентами устойчивости  $\mu_i$  и корнями  $\lambda_i^*$  характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda) = 0$  существует более тесная связь, которая устанавливается следующими теоремами.

**Теорема II.** *Если линейная импульсная система асимптотически устойчива, то имеет место равенство*

$$\mu_{\min} < |\lambda_i^*|^2 < \mu_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.103)$$

Рассмотрим систему алгебраических уравнений в матричной записи (3.32), которая определяет функцию Ляпунова в виде формы  $V = x^T B x$ , когда  $U = x^T A x$ . Матрица  $P^*$  есть операторная матрица линейной импульсной системы.

Представим матрицы  $A$  и  $B$  по формулам (2.151) и (2.152) в виде

$$A = (L^T)^{-1} E L^{-1}, \quad B = (L^T)^{-1} R L^{-1}, \quad (4.104)$$

что можно сделать, так как вещественная матрица  $L$  неособая. Подставим в уравнение (3.32) матрицы  $A$  и  $B$  в форме (4.104). Тогда получим

$$P^{*T} (L^T)^{-1} R L^{-1} P - (L^T)^{-1} R L^{-1} = (L^T)^{-1} E L^{-1}.$$

Умножим обе части равенства справа на  $L$ , а слева на  $L^T$  и перенесем второе слагаемое из левой части в правую; тогда будем иметь

$$L^T P^{*T} (L^T)^{-1} R L^{-1} P^* L = R - E. \quad (4.105)$$

Введем новое обозначение

$$Q = L^{-1} P^* L \quad (4.106)$$

и перепишем (4.105) в виде

$$Q^T R Q = R - E. \quad (4.107)$$

Матрицы  $P^*$  и  $Q$  являются подобными, поэтому  $\lambda_i^*$  будут характеристическими числами матрицы  $Q$ . Для простоты будем предполагать, что все характеристические числа  $\lambda_i^*$  простые. Тогда можно записать, что

$$Q = K \Lambda^* K^{-1}, \quad (4.108)$$

где  $K$  есть матрица, преобразующая  $Q$  к каноническому виду  $\Lambda^*$ . При сделанных предположениях  $\Lambda^*$  есть диагональная матрица с элементами  $\lambda_i^*$  (см. (2.42) и (2.44)). Из (4.108) нетрудно усмотреть, что столбцы  $k_j$  матрицы  $K$  удовлетворяю

уравнению

$$Qk_j = \lambda_j^* k_j. \quad (4.109)$$

Так как матрица  $Q$  вещественная, то двум комплексным сопряженным корням  $\lambda_j^*$  и  $\bar{\lambda}_j^*$  соответствуют столбцы  $k_j$  и  $\bar{k}_j$  с комплексно-сопряженными элементами  $k_{ij}$  и  $\bar{k}_{ij}$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $\lambda_j^*$  и  $\bar{\lambda}_j^*$  — сопряженные корни. Умножим обе части уравнения (4.107) слева на строку  $\bar{k}_j^T$  и справа на столбец  $k_j$ . Тогда, учитывая формулу (4.109) и соотношение, получаемое из нее транспонированием матриц, получим скалярное выражение

$$\bar{\lambda}_j \lambda_j \bar{k}_j^T R k_j = \bar{k}_j (R - E) k_j, \quad (4.110)$$

которое прямым вычислением приведем к виду

$$\bar{\lambda}_j \lambda_j \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{k}_{ij} k_{ij} = \sum_{i=1}^n (\rho_i - 1) \bar{k}_{ij} k_{ij} \quad (4.111)$$

или, полагая  $\bar{\lambda}_j \lambda_j = |\lambda_j|^2$  и  $\bar{k}_{ij} k_{ij} = |k_{ij}|^2$  и учитывая формулу (4.98), представим окончательно (4.111) в виде

$$|\lambda_j|^2 = \frac{\mu_1 \rho_1 |k_{1j}|^2 + \mu_2 \rho_2 |k_{2j}|^2 + \dots + \mu_n \rho_n |k_{nj}|^2}{\rho_1 |k_{1j}|^2 + \rho_2 |k_{2j}|^2 + \dots + \rho_n |k_{nj}|^2}, \quad (4.112)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Если трактовать  $\mu_i$  как координаты материальных точек на прямой с неотрицательными массами  $\rho_i |k_{ij}|^2$ , то  $|\lambda_j|^2$  определяет координату центра масс, который находится между крайними точками. Таким образом, теорема доказана. Нетрудно ее доказать и для случая кратных корней  $\lambda_j^*$ .

Из теоремы II вытекают следствия.

**Следствие I.** *Если хотя бы один из корней  $\lambda_i^*$  устойчивой импульсной системы равен нулю, то наименьший коэффициент устойчивости  $\mu_{\min}$  также обращается в нуль. Этот факт следует из того, что для устойчивой системы  $\mu_{\min} \geq 0$  и  $\mu_{\min} < |\lambda_j|^2$  для любого номера  $j$ .*

**Следствие II.** *Если линейная импульсная система находится на границе устойчивости, то наибольший коэффициент устойчивости  $\mu_{\max}$  равен единице.*

Действительно, при оговоренных условиях наибольший из модулей корней  $\lambda_j^*$  равен единице. Но для устойчивой импульсной системы имеют место равенства  $\mu_{\max} < 1$  и  $|\lambda_j|^2 < \mu_{\max}$  для любого номера  $j$ . Предельным переходом  $|\lambda_j| \rightarrow 1$  устанавливаем справедливость сформулированного условия. Строго говоря, это не столько доказательство, сколько логичное доопределение числа  $\mu_{\max}$  на границе устойчивости, так как при  $|\lambda_j| = 1$  функция Ляпунова не существует. И, наконец, имеет место следующая теорема.

**Теорема III.** *Если линейная импульсная система асимптотически устойчива, то имеет место равенство*

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i^2 = \prod_{i=1}^n \mu_i. \quad (4.113)$$

Приравняем определители матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (4.107). Тогда, учитывая правило образования определителей от произведения матриц, получим

$$\det Q^T \det R \det Q = \det(R - E). \quad (4.114)$$

Но по формуле (2.152)

$$\det R = \prod_{i=1}^n \rho_i, \quad \det(R - E) = \prod_{i=1}^n (\rho_i - 1),$$

а

$$\det Q^T = \det Q = \prod_{i=1}^n \lambda_i^*,$$

так как  $\det Q$  является свободным членом характеристического полинома матрицы  $Q$ . Если подставить в (4.114) найденные значения определителей, разделить левую и правую части на не равный нулю  $\det R$  и учесть формулу (4.98), то получим равенство (4.113).

### Оценка затухания

Используем коэффициенты устойчивости  $\mu_i$  для оценки некоторых количественных характеристик затухания возмущенного движения системы к своему стационарному состоянию. Напомним, что возмущенное движение определялось

нами как собственное движение системы, порождаемое мгновенными возмущениями. Математически мгновенные возмущения определяются заданием начальных условий.

Рассмотрим уравнение (4.100). Учитывая формулу (4.98), перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2(mT) = \sum_{i=1}^n \mu_i \rho_i y_i^2 [(m-1)T]. \quad (4.115)$$

В левой части уравнения (4.115) стоит квадратичная форма  $V$  (функция Ляпунова), выраженная через преобразованные координаты  $y_i$ .

Обозначим, как и прежде, через  $\mu_{\min}$  и  $\mu_{\max}$  наименьшее и наибольшее значения среди коэффициентов устойчивости  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , которые для устойчивой системы удовлетворяют неравенствам (4.99). Тогда из (4.115) устанавливаем неравенства

$$\mu_{\min} V_{m-1} \leq V_m \leq \mu_{\max} V_{m-1}. \quad (4.116)$$

Применяя последовательно неравенства (4.116), получим

$$V_0 \mu_{\min}^m \leq V_m \leq V_0 \mu_{\max}^m. \quad (4.117)$$

Неравенства (4.117) определяют кривые, которые устанавливают верхний и нижний пределы для изменения функции Ляпунова в виде формы  $V$ , если последнюю рассматривать как функцию  $x_1(mT)$  решений разностного уравнения (4.16). Из правого неравенства (4.17) можно получить мажорирующую кривую для любой координаты  $x_i(mT)$ .

Определенно положительную квадратичную форму  $V$  (3.25) можно представить в соответствии с формулой (2.147) в виде

$$V = D_1 z_1^2 + \frac{D_2}{D_1} z_2^2 + \dots + \frac{D_n}{D_{n-1}} z_n^2, \quad (4.118)$$

где вследствие (2.141)

$$\begin{aligned} D_1 &= b_{11} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad D_n = \\ &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Согласно (2.146) имеем  $z_n = x_n$ . Принимая во внимание неравенства (4.119) и равенство  $z_n = x_n$ , получим из (4.118) неравенство

$$x_n^2 \leq \frac{D_{n-1}}{D_n} V. \quad (4.120)$$

Такое неравенство можно получить для любой координаты  $x_i$ , присвоив ей номер  $n$ , поэтому можем записать

$$x_i^2 \leq \frac{D_{i-1}}{D_i} V \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.121)$$

где  $D_i = D_n$  есть дискриминант квадратичной формы  $V$ , а  $D_{i-1}$  — его главный минор, получаемый вычеркиванием  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца. Из правой части неравенства (4.17) и формулы (4.120) получим выражения

$$x_i^2(mT) \leq \frac{D_{i-1}}{D_i} V_0 \mu_{\max}^m. \quad (4.122)$$

Эти выражения могут быть использованы для расчета параметров систем импульсного регулирования, так как они позволяют определить, правда, с некоторым избытком, тот промежуток времени  $mT$ , по прошествии которого координата  $x_i$  в дискретном движении попадает внутрь заранее заданной зоны, характеризующей точность регулирования по данной координате.

Однако к неравенствам (4.122) можно подойти и с другой точки зрения. Нетрудно видеть, что чем меньше число  $\mu_{\max}$ , тем быстрее спадает мажорантная кривая, представляемая правой частью неравенства (4.122). Так как скорость уменьшения ординат мажорантной кривой гарантирует по крайней мере не меньшую скорость убывания всех координат  $x_i$  с ростом дискретного времени  $mT$ , то число  $\mu_{\max}$  играет роль коэффициента устойчивости, характеризующего в известной мере скорость затухания возмущенного движения системы к ее невозмущенному стационарному состоянию. Поэтому в предварительных расчетах можно использовать в качестве критерия степени затухания возмущенного движения системы максимальный коэффициент устойчивости  $\mu_{\max}$  и вести расчет таким образом, чтобы получить минимально возможное значение этого коэффициента.

Из формулы (2.80) при  $g(m) = 0$  следует, что в возмущенном движении, определяемом начальным возмущением

$x(0)$ , каждому корню  $\lambda_i^*$  характеристического полинома  $\Delta^*(\lambda)$  операторной матрицы  $P^*$  соответствует парциальное возмущенное движение, причем модуль корня  $\lambda_i^*$  определяет затухание, а аргумент — колебательность этого движения. Общее возмущенное движение определяется суперпозицией ее парциальных движений. Если определять приближенно скорость затухания возмущенного движения по скорости затухания того парциального движения, которое затухает наиболее медленно, то в качестве критерия затухания следует принять наибольшее значение модуля всех корней  $\lambda_i^*$ , т. е. величину  $|\lambda_i^*|_{\max}$ . Такая точка зрения была принята Я. З. Цыпкиным [26] (см. также [27]), который ввел понятие степени устойчивости  $\delta^*$  линейной импульсной системы, приняв  $\delta^* = |\lambda_i^*|_{\max}$  и дал метод ее определения.

Из правой части неравенства (4.103) следует, что степень устойчивости всегда меньше максимального коэффициента устойчивости, т. е.  $\delta^* = |\lambda_i^*|_{\max} < \mu_{\max}$ . Этот факт получает свое фундаментальное объяснение посредством неравенства (4.122). Действительно, согласно только что приведенным соображениям, мажорантная кривая должна спадать медленнее любого парциального движения, но это возможно только при выполнении условия  $|\lambda_i^*|_{\max} < \mu_{\max}$ . Далее заметим, что, согласно второму следствию теоремы II, на границе устойчивости имеет место равенство  $|\lambda_i^*|_{\max}^2 = \mu_{\max} = 1$ . Следовательно, в силу непрерывности величины  $|\lambda_i^*|_{\max}^2$  и  $\mu_{\max}$  будут мало отличаться друг от друга вблизи границы устойчивости и по крайней мере до момента достижения первого минимума при изменении какого-нибудь параметра они будут одновременно уменьшаться. Здесь, естественно, предполагается, что изменение выбранного параметра происходит от границы во внутреннюю часть области устойчивости. Это замечание подводит основание под метод расчета параметров системы на достижение максимальной степени устойчивости, т. е. наименьшего значения  $|\lambda_i^*|_{\max}$ . Однако расчет степени затухания по  $(\mu_{\max})_{\min}$  имеет то преимущество, что он позволяет по (4.122) определить конечный промежуток времени  $t' T$ , когда модуль любой координаты  $x_i$  станет меньше заданного значения.

## § 4.6. Реакция системы на задающее воздействие и внешнее возмущение

Пусть на систему регулирования действуют внешние возмущения, в результате которых она к некоторому мгновению занимает определенное положение в фазовом пространстве. С указанного мгновения, которое далее принимается за начало отсчета времени, внешнее возмущение снимается и система предоставляет самой себе. Тогда она будет совершать собственное движение, по характеру которого мы определяли ранее устойчивость стационарного состояния системы. Собственное движение в указанном смысле, очевидно, не зависит от характера предшествующих возмущений, а целиком определяется результатом их действия к рассматриваемому мгновению времени. Поэтому удобно не учитывать предыстории действия возмущений, а считать, что собственное движение обусловливается мгновенными возмущениями, сразу переводящими систему в некоторое отклоненное положение. Тогда математически действие мгновенных возмущений определяется заданием начальных условий, т. е. значений координат при  $t = 0$ . Собственное движение системы определяется решением однородных уравнений при заданных начальных условиях.

Рассмотрим обратную картину. Пусть система регулирования к данному мгновению времени находилась в стационарном состоянии, и пусть в это мгновение в систему вводится задающее воздействие или накладывается внешнее возмущение. Тогда последующее движение системы принято называть ее *реакцией на внешние воздействия и возмущения*.

Математически реакция системы на задающие воздействия и внешние возмущения определяется решением неоднородных уравнений, удовлетворяющих нулевым начальным условиям. Если внешние воздействия и возмущения таковы, что при  $t \rightarrow \infty$  система приходит к соответствующему стационарному состоянию движения или равновесия, то тогда реакцию системы считают состоящей из установившегося и переходного процессов. В общем случае выделение установившегося процесса является сложной задачей. В некоторых частных случаях, когда внешние возмущения определяются простейшими функциями, такая задача вполне разрешима. В теории импульсного регулирования можно рассматривать реакцию системы в дискретном и непрерывном движении.

### *Движение системы при мгновенных возмущениях*

Дискретное движение линейной импульсной системы при мгновенных возмущениях определяется решением матричного разностного уравнения (4.16) при начальном условии  $x(0)$ . Это решение можно выразить через степень операторной матрицы  $P^*$  (4.15) или через ее характеристический полином  $\Delta^*(\lambda)$ , корни  $\lambda_i^*$  и присоединенную матрицу  $F^*(\lambda)$ . Указанные формы решений даются формулами (2.78), (2.80) и (2.82) при  $g^*(m) \equiv 0$ .

Первая форма решений удобна, когда для построения процесса движения используются цифровые вычислительные машины, так как вычисление целой степени матрицы  $P^*$  осуществляется повторяющимися циклами.

Вторая форма решения глубже вскрывает внутреннюю структуру системы и ее влияние на характер собственного движения, поэтому она более пригодна для общих исследований импульсных систем регулирования.

Наша задача состоит в том, чтобы выразить матрицы  $P^*$  и  $F^*(\lambda)$  через исходные параметры системы. По формуле (4.15) имеем

$$P^* = KM(T)K^{-1} + KM(T_2)N(T_1)K^{-1}h\gamma.$$

Разложим матрицы  $KM(T)K^{-1}$  и  $KM(T_2)N(T_1)K^{-1}$  по элементам матриц  $M(T)$  и  $M(T_2)N(T_1)$ , используя формулу (2.24). Для случая простых корней  $\lambda_i$  матрицы  $P$  разомкнутой системы матрицы  $M(t)$  и  $N(t)$  являются диагональными и определяются соответственно формулами (2.94) и (2.120). Матрица  $M(T_2)N(T_1)$  является также диагональной с общим элементом

$$e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1) / \lambda_i^*.$$

Тогда будем иметь

$$P^* = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} k_i \kappa_i + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} k_i \kappa_i h\gamma, \quad (4.123)$$

\*) См. также рассуждения, предшествовавшие формуле (4.31).

или с учетом матричных тождеств (2.64) получим

$$P^* = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h\gamma. \quad (4.124)$$

Для случая, когда имеется один кратный корень  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ , следует пользоваться формулами (2.98), (4.47), (2.65) и (2.66). Конечный результат здесь можно представить в виде

$$\begin{aligned} P^* = & \sum_{i=1}^{n-2} e^{\lambda_i T} k_i x_i + (k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n) + T k_n x_{n-1} + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} k_i x_i + T_1 (k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n) + \right. \\ & \left. + \left( T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} \right) k_n x_{n-1} \right\} h\gamma \end{aligned} \quad (4.125)$$

или

$$\begin{aligned} P^* = & \sum_{i=1}^{n-2} e^{\lambda_i T} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} + \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} + T \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} + T_1 \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} + \right. \\ & \left. + \left( T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} \right) \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right\} h\gamma. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Перейдем к построению присоединенной матрицы  $F^*(\lambda)$ . В соответствии с формулой (2.55) имеем

$$\begin{aligned} \frac{F^*(\lambda)}{\Delta^*(\lambda)} &= (\lambda E - P^*)^{-1}, \\ \Delta^*(\lambda) &= \det(\lambda E - P^*). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Учитывая выражения (4.20) — (4.25), характеристическую матрицу представим в виде

$$\begin{aligned} \lambda E - P^* &= K(\lambda E - M(T) - u'\beta)K^{-1} = \\ &= K[\lambda E - M(T)]\{E - [\lambda E - M(T)]^{-1}u'\beta\}K^{-1}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Учитывая (4.128), представим (4.127) в виде \*)

$$\left. \begin{aligned} F^*(\lambda) &= K \{E - [\lambda E - M(T)]^{-1} u' \beta\}^{-1} [\lambda E - M(T)]^{-1} K^{-1}, \\ \Delta^*(\lambda) &= \det [\lambda E - M(T)] \det \{E - [\lambda E - M(t)]^{-1} u' \beta\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.129)$$

Основная трудность теперь будет состоять в обращении матрицы, стоящей в фигурных скобках в выражениях (4.129). Введем новый столбец

$$u'' = [\lambda E - M(t)]^{-1} u' \quad (4.130)$$

и перепишем эту матрицу в виде

$$E - [\lambda E - M(T)]^{-1} u'' \beta = E - u'' \beta. \quad (4.131)$$

Транспонируем матрицу (4.131) и запишем ее в развернутом виде. Тогда будем иметь

$$(E - u'' \beta)^T = \begin{vmatrix} 1 - u''_1 \beta_1 & -u''_2 \beta_1 & \dots & -u''_n \beta_1 \\ -u''_1 \beta_2 & 1 - u''_2 \beta_2 & \dots & -u''_n \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u''_1 \beta_n & -u''_2 \beta_n & \dots & 1 - u''_n \beta_n \end{vmatrix}. \quad (4.132)$$

Далее нужно найти алгебраические дополнения (миноры со знаком) для элементов матрицы (4.132) и поделить их на определитель матрицы. Определитель и миноры матрицы (4.132) будем определять по формуле (4.29). В данном случае  $z_i = 1$  для любого индекса  $i$ , а  $c_{ij}$  являются элементами матрицы  $-u'' \beta$ , которая имеет ранг, равный единице. Поэтому имеем

$$\det(E - u'' \beta)^T = \det(E - u'' \beta) = 1 - \sum_{i=1}^n u''_i \beta_i = 1 - \beta u''. \quad (4.133)$$

Минор, получаемый вычеркиванием  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца, имеет ту же структуру, что и матрица (4.132), только в нем будут отсутствовать элементы  $u''_i$  и  $\beta_i$ . Поэтому алгебраическое дополнение, соответствующее диагональному

---

\*) См. в гл. II правила обращения произведения нескольких матриц.

элементу, можно представить в виде

$$1 - \sum_{j=1}^n u''_j \beta_j = 1 - \sum_{i=1}^n u''_i \beta_j + u''_i \beta_i. \quad (4.134)$$

Здесь штрих указывает, что при суммировании нужно пропустить элементы с индексом  $i$ .

При нахождении алгебраического дополнения для элемента  $(-\beta_i u''_j)$  нужно вычеркнуть  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец, а затем переставить строки или столбцы таким образом, чтобы все оставшиеся  $(n-2)$  диагональных элемента матрицы (4.132) опять оказались на главной диагонали полученного минора. Тогда оставшееся место на главной диагонали займет элемент  $(-\beta_j u''_i)$ . Далее можно установить, что для любого элемента  $(-\beta_i u''_j)$  при  $i \neq j$  сумма  $(i+j)$  и число указанных выше перестановок строк или столбцов будет числом нечетным.

Таким образом, устанавливаем, что алгебраическое дополнение  $D_{ij}$  для элемента  $(-\beta_i u''_j)$  имеет вид

$$D_{ij} = u''_i \beta_j. \quad (4.135)$$

В соответствии с формулами (4.134) и (4.135) матрицу алгебраических дополнений, т. е. присоединенную матрицу, для  $E - u''\beta$  можно представить в виде суммы двух матриц

$$\left( 1 - \sum_{i=1}^n u''_i \beta_i \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u''_1 \beta_1 & u''_1 \beta_2 & \dots & u''_1 \beta_n \\ u''_2 \beta_1 & u''_2 \beta_2 & \dots & u''_2 \beta_n \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ u''_n \beta_1 & u''_n \beta_2 & \dots & u''_n \beta_n \end{vmatrix}. \quad (4.136)$$

Разделим сумму матриц (4.136) на определитель (4.133). Тогда в результате получим обратную матрицу для  $E - u''\beta$ , которую запишем компактно в виде

$$(E - u''\beta)^{-1} = E + \frac{u''\beta}{1 - \beta u''}. \quad (4.137)$$

Если в равенствах (4.133) и (4.137) подставить столбец  $u''$  из формулы (4.130), то получим матричные выражения

в форме

$$\left. \begin{aligned} \{E - [\lambda E - M(T)]^{-1} u' \beta\}^{-1} &= \\ &= E + \frac{[\lambda E - M(T)]^{-1} u' \beta}{1 - \beta [\lambda E - M(T)]^{-1} u'}, \\ \det \{E - [\lambda E - M(T)]^{-1} u' \beta\} &= \\ &= 1 - \beta [\lambda E - M(T)]^{-1} u'. \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

Используя (4.138), перепишем соотношения (4.129) в виде

$$\frac{F^*(\lambda)}{\Delta^*(\lambda)} = K \left\{ E + \frac{[\lambda E - M(T)]^{-1} u' \beta}{1 - \beta [\lambda E - M(T)]^{-1} u'} \right\} [\lambda E - M(T)]^{-1} K^{-1} \quad (4.139)$$

и

$$\Delta^*(\lambda) = \{\det [\lambda E - M(t)]\} \{1 - \beta [\lambda E - M(T)]^{-1} u'\}. \quad (4.140)$$

Скалярное выражение (4.140) определяет характеристический полином операторной матрицы  $P^*$  (4.15). Это выражение справедливо для любых характеристических чисел  $\lambda_i$  матрицы  $P$ . В частности, отсюда можно получить характеристические уравнения в форме (4.30) и (4.40). Матрица  $M(T)$  во всех случаях является треугольной матрицей, диагональные элементы которой суть  $e^{\lambda_i T}$ . Поэтому всегда имеет место равенство (см. (4.64))

$$\det [\lambda E - M(T)] = \prod_{i=1}^n (\lambda - e^{\lambda_i T}) = \Delta_p^*(\lambda). \quad (4.141)$$

В матричных выражениях (4.139) и (4.140) фигурирует матрица, обратная для матрицы  $\lambda E - M(T)$ . Для случаев, когда характеристические числа  $\lambda_i$  матрицы  $P$  простые и когда среди них есть двойной нулевой корень  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ , эта матрица представляется соответственно в виде

$$[\lambda E - M(T)]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_1 T}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_2 T}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_n T}} \end{vmatrix} \quad (4.142)$$

и

$$[\lambda E - M(T)]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_i T}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_{n-2} T}} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda - 1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{T}{(\lambda - 1)^2} & \frac{1}{\lambda - 1} \end{vmatrix}. \quad (4.143)$$

Эти формулы нетрудно получить с учетом (2.94) и (2.98). Умножая обе части равенства (4.139) на  $\Delta^*(\lambda)$  и учитывая формулы (4.140) и (4.141), получим матричное соотношение

$$F^*(\lambda) = K \{ \Delta^*(\lambda) [\lambda E - M(T)]^{-1} + \\ + \Delta_p^*(\lambda) [\lambda E - M(T)]^{-1} u' \beta [\lambda E - M(T)]^{-1} \} K^{-1}, \quad (4.144)$$

определенное исходную присоединенную матрицу  $F^*(\lambda)$  и справедливое для всех случаев, рассматриваемых в данной работе. Хотя эта формула имеет вполне самостоятельное значение, ее можно привести к виду, более удобному для практических приложений.

Подставим в (4.144)  $u'$  и  $\beta$  из (4.21) и (4.25). Получим

$$F^*(\lambda) = \Delta^*(\lambda) K [\lambda E - M(T)]^{-1} K^{-1} + \\ + \Delta_p^*(\lambda) K [\lambda E - M(T)]^{-1} M(T_2) N(T_1) K^{-1} h v K \times \\ \times [\lambda E - M(T)]^{-1} K^{-1}. \quad (4.145)$$

Используем формулу разложения (2.24). Для случая простых корней имеем разложения

$$\left. \begin{aligned} K [\lambda E - M(T)]^{-1} K^{-1} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_i T}} k_i \alpha_i, \\ K [\lambda E - M(T)]^{-1} M(T_2) N(T_1) K^{-1} &= \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda - e^{\lambda_i T})} k_i \alpha_i, \end{aligned} \right\} \quad (4.146)$$

так как  $[\lambda E - M(T)]^{-1}$  определяется формулой (4.142), а матрица  $M(T_2) N(T_1)$  является в этом случае диагональной с элементами  $\frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i}$ . Используем матричные тождества (2.64). Тогда матрицу (4.145) можно представить в виде

$$F^*(\lambda) = \left\{ \Delta^*(\lambda)E + \Delta_p^*(\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda - e^{\lambda_i T})} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h \gamma \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_j T}} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} \right\}. \quad (4.147)$$

Пусть корни  $\lambda_k^*$  характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda) = 0$  простые \*). Тогда по формуле (2.80) при  $g^*(m) \equiv 0$  и при значениях  $F^*(\lambda_k^*)$ , определяемых по формуле (4.147), будем иметь

$$x(mT) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{*m} \frac{\Delta_p^*(\lambda_k^*)}{\Delta'^*(\lambda_k^*)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda_k^* - e^{\lambda_i T})} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h \right) \times \\ \times \left( \gamma \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_k^* - e^{\lambda_j T}} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} \right) x(0). \quad (4.148)$$

Формула (4.148) определяет собственное дискретное движение импульсной системы, выраженное через исходные параметры.

Для определения непрерывного движения нужно предварительно представить матрицы (4.8) и (4.12) в виде разложений (см. для примера формулы (4.123) и (4.124))

$$\left. \begin{aligned} Q'(t) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h \gamma, \\ Q''(t) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i (t+T_1)} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.149)$$

---

\*) Для устойчивой импульсной системы случай простых корней  $\lambda_k^*$  представляется наиболее важным.

Используя формулы (4.148), (4.149) и матричные тождества (2.73), представим (4.7) и (4.11) в виде

$$\begin{aligned} x[(m-1)T + \tau] = \\ = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{*m-1} \frac{\Delta_p^*(\lambda_k^*)}{\Delta'^*(\lambda_k^*)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda_k^* - e^{\lambda_i T})} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} - 1}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h \right) \left( \gamma \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_k^* - e^{\lambda_j T}} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} \right) x(0), \quad (4.150) \end{aligned}$$

$$0 \leq \tau \leq T_1$$

и

$$\begin{aligned} x[(m-1)T + T_1 + \tau] = \\ = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{*m} \frac{\Delta_p^*(\lambda_k^*)}{\Delta'^*(\lambda_k^*)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda_k^* - e^{\lambda_i T})} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h \right) \times \\ \times \left( \gamma \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_k^* - e^{\lambda_j T}} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} \right) x(0), \quad 0 \leq \tau \leq T_2. \quad (4.151) \end{aligned}$$

При выводе этих формул использовалось равенство

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda_k^* - e^{\lambda_i T})} \gamma \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h, \quad (4.152)$$

которое получается из формулы (4.35) при  $\lambda = \lambda_k^*$ . При граничных значениях времени  $t = (m-1)T$  и  $t = mT$  формулы (4.150) и (4.151), естественно, дают для  $x[(m-1)T]$  и  $x(mT)$  те же значения, что и формула (4.148).

Для случая двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  имеем

$$K[\lambda E - M(T)]^{-1} K^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_i T}} k_i \kappa_i + \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (4.153)$$

$$+ \frac{1}{\lambda - 1} (k_{n-1} \kappa_{n-1} + k_n \kappa_n) + \frac{T}{(\lambda - 1)^2} k_n \kappa_{n-1},$$

$$\begin{aligned}
 K [\lambda E - M(T)]^{-1} M(T_2) N(T_1) K^{-1} = \\
 = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda - e^{\lambda_i T})} k_i x_i + \\
 + \frac{1}{\lambda - 1} (k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n) + \\
 + \left( T_2 + \frac{T_1}{2} + \frac{T}{\lambda - 1} \right) \frac{T_1}{\lambda - 1} k_n x_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{4.153}$$

Эти выражения получаются, если воспользоваться формулой разложения (2.24) и выражениями (4.143) для матрицы  $[\lambda E - M(T)]^{-1}$  и (4.47) для матрицы  $M(T_2) N(T_1)$ .

Если, далее, иметь в виду матричные тождества (2.64) и (2.66), то (4.145) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 F^*(\lambda) = & \left\{ \Delta^*(\lambda) E + \Delta_p^*(\lambda) \left( \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (\lambda - e^{\lambda_i T})} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} + \right. \right. \\
 & + \frac{T_1}{\lambda - 1} \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} + \left( T_2 + \frac{T_1}{2} + \frac{T}{\lambda - 1} \right) \frac{T_1}{\lambda - 1} \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \Big) n \gamma \times \\
 & \times \left( \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_j T}} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} + \frac{1}{\lambda - 1} \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{T}{(\lambda - 1)^2} \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right) \right\}. \tag{4.154}
 \end{aligned}$$

Дискретное движение в рассматриваемом случае получается из формулы (2.80) при  $g^*(m) \equiv 0$ , если  $F^*(\lambda_k^*)$  определять из равенства (4.154). Соответствующие формулы для непрерывного движения можно также получить по тому образцу рассуждений, которые были проведены для случая простых корней  $\lambda_i$ .

### a) Реакция системы на задающее воздействие

В соответствии с формулой (1.19) аргумент управления  $\sigma$  можно записать в матричной форме:

$$\sigma = \gamma(x - x_3), \tag{4.155}$$

где  $x_3$  — столбец скалярных функций  $x_{3t}$ , определяющих задающее воздействие. Уравнения, определяющие реакцию системы на задающее воздействие, можно весьма просто получить по формулам § 4.1, если в соответствующие выражения вместо  $\psi x$  подставить  $\psi(x - x_3)$ .

Так, например, имея в виду формулы (4.7), (4.8), (4.11), (4.12), (4.15), (4.16) и учитывая сделанное замечание, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x[(m-1)T + \tau] &= Q'(\tau)x[(m-1)T] - \\ &- KN(\tau)K^{-1}h\psi x_3[(m-1)T], \quad 0 \leq \tau \leq T_1, \end{aligned} \quad (4.156)$$

$$\begin{aligned} x[(m-1)T + T_1 + \tau] &= Q''(\tau)x[(m-1)T] - \\ &- KM(\tau)N(T_1)K^{-1}h\psi x_3[(m-1)T], \quad 0 \leq \tau \leq T_2, \end{aligned} \quad (4.157)$$

$$\begin{aligned} x(mT) &= P^*x[(m-1)T] - \\ &- KM(T_2)N(T_1)K^{-1}h\psi x_3[(m-1)T]. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Уравнение (4.158) является неоднородным разностным уравнением, решение которого при нулевом начальном условии определяет реакцию импульсной системы в дискретном движении на задающее воздействие. После того как решение разностного уравнения (4.158) найдено, формулы (4.156) и (4.157) дают возможность определить матричную координату  $x$  для любого момента времени, лежащего в любом интервале повторения.

Неоднородное разностное уравнение (4.158) представим в виде

$$x(mT) = P^*x[(m-1)T] + g^*[(m-1)T], \quad (4.159)$$

где

$$g^*(mT) = -KM(T_2)N(T_1)h\psi x_3(mT). \quad (4.160)$$

Очевидно,  $g^*(mT)$  является матрицей-столбцом. Разностное уравнение (4.159) совпадает с уравнением (2.76) с точностью до выбранного шага, поэтому реакция импульсной системы в дискретном движении на задающее воздействие будет определяться формулами (2.78) — (2.83), если в них положить  $x(0) = 0$  и принять  $T$  за новый шаг дискретного времени. В дальнейшем мы будем пользоваться формулами

$$x(mT) = \sum_{m'=0}^{m-1} P^{*m-m'-1} g^*(m'T) \quad (4.161)$$

и

$$x(mT) = \sum_{i=1}^n \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{**}(\lambda_i^*)} \sum_{m'=0}^{m-1} \lambda_i^{*m-m'-1} g^*(m'T). \quad (4.162)$$

Равенство (4.161) определяет реакцию импульсной системы в любом случае, а равенство (4.162) — только в случае, когда корни  $\lambda_i^*$  характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda) = 0$  простые.

Рассмотрим реакцию устойчивой импульсной системы, когда задающее воздействие можно описать некоторыми простейшими функциями времени.

### *б) Реакция на единичное воздействие*

В этом случае  $\gamma x_3(mT) = 1$ . Введем обозначение

$$-KM(T_2)N(T_1)K^{-1}h = g_0^*. \quad (4.163)$$

Тогда в соответствии с формулой (4.160) формула (4.161) перепишется в виде

$$x(mT) = \left( \sum_{m'=0}^{m-1} P^{*m-m'-1} \right) g_0^*. \quad (4.164)$$

Применяя формулу для определения суммы геометрической прогрессии, получим

$$x(mT) = \frac{E - P^{*m}}{E - P^*} g_0^*. \quad (4.165)$$

Далее по формулам типа (2.55) и (2.68) устанавливаем

$$x(mT) = - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{*m} \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{**}(\lambda_i^*)} \right) \frac{F^*(1)}{\Delta^*(1)} g_0^* + \frac{F^*(1)}{\Delta^*(1)} g_0^*. \quad (4.166)$$

### *в) Реакция на экспоненциальное и гармоническое воздействие*

Пусть  $\gamma x_3(mT) = e^{\alpha_0 m T}$ . Тогда с учетом (4.160) и (4.163) по формуле (4.161) будем иметь

$$x(mT) = \left( \sum_{m'=0}^{m-1} P^{*m-m'-1} e^{\alpha_0 m' T} \right) g_0^*. \quad (4.167)$$

Сумма, фигурирующая в правой части этого равенства, представляет собой геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен  $P^*e^{-a_0T}$ . Используя формулу для суммы геометрической прогрессии и умножая числитель и знаменатель получаемого выражения на  $e^{a_0T}$ , представим (4.167) в виде

$$x(mT) = \frac{e^{a_0mT}E - P^*m}{e^{a_0T}E - P^*} g_0^*. \quad (4.168)$$

Применяя формулы типа (2.55) и (2.68), получим

$$x(mT) = - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{*m} \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{**}(\lambda_i^*)} \right) \frac{F^*(e^{a_0T})}{\Delta^*(e^{a_0T})} g_0^* + \frac{F^*(e^{a_0T})}{\Delta^*(e^{a_0T})} g_0^* e^{a_0mT}. \quad (4.169)$$

Полученная формула позволяет определить реакцию импульсной системы в дискретном движении на внешнее гармоническое воздействие. Например, при синусоидальном воздействии имеем

$$\sin \omega mT = \frac{(e^{i\omega mT} - e^{-i\omega mT})}{2i}.$$

Используя свойство суперпозиции линейных импульсных систем и формулу (4.169), получим

$$x(mT) = - \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^{*m} \frac{F^*(\lambda_j^*)}{\Delta^{**}(\lambda_j^*)} \right) \operatorname{Im} \left\{ \frac{F^*(e^{i\omega T})}{\Delta^*(e^{i\omega T})} g_0^* \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \frac{F^*(e^{i\omega T})}{\Delta^*(e^{i\omega T})} g_0^* \right\} \sin \omega mT - \operatorname{Re} \left\{ \frac{F^*(e^{i\omega T})}{\Delta^*(e^{i\omega T})} g_0^* \right\} \cos \omega mT, \quad (4.170)$$

где  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  обозначают действительную и мнимую части соответствующего комплексного числа. При  $a_0 = 0$  формула (4.169) совпадает с равенством (4.166). Формула (4.169) теряет смысл, если  $e^{a_0T}$  является корнем характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda) = 0$ .

### г) Реакция на воздействие вида $t^k e^{a_0 t}$

В этом случае имеем  $\gamma x_3(mT) = (mT)^k e^{a_0 mT}$  или в более компактной форме  $\gamma x_3(mT) = \left( \frac{d^k}{da^k} e^{a_0 mT} \right)_{a=a_0}$ . Формулу (4.161)

можно в данном случае представить в виде

$$x(mT) = \left\{ \frac{d^k}{da^k} \sum_{m'=0}^{m-1} P^{*m-m'-1} e^{am'T} \right\}_{a=a_0} g_0^*. \quad (4.171)$$

В равенствах (4.167) и (4.171) фигурируют одинаковые суммы геометрической прогрессии. Поэтому на основании (4.169) равенство (4.171) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x(mT) = & - \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i^{*m} \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} \right\} \left\{ \frac{d^k}{da^k} \frac{F^*(e^{aT})}{\Delta^*(e^{aT})} \right\}_{a=a_0} g_0^* + \\ & + \left\{ \frac{d^k}{da^k} \frac{F^*(e^{aT})}{\Delta^*(e^{aT})} e^{amT} \right\}_{a=a_0} g_0^*. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Формула (4.172) определяет реакцию системы в дискретном движении на указанное выше воздействие. Эта формула в сочетании с принципом суперпозиции позволяет легко получить реакцию системы на задающее воздействие более общего вида, когда  $\gamma x_3(t) = Q_k(t) e^{a_0 T}$ , где  $Q_k(t)$  есть полином степени  $k$  относительно  $t$ .

Во всех полученных ранее формулах: (4.166), (4.169) и (4.172) — первые слагаемые правых частей определяют собственные дискретные движения импульсных систем, возбужденные задающим воздействием, а вторые слагаемые определяют вынужденные дискретные движения. Если импульсная система удовлетворяет условиям устойчивости, то можно сказать, что первые слагаемые определяют переходной процесс дискретного движения импульсной системы к установившемуся состоянию движения или равновесия, которые определяются вторыми слагаемыми в указанных выше формулах. Интересно, в частности, отметить, что если установившимся состоянием импульсной системы в дискретном движении является положение равновесия, то в непрерывном движении система будет совершать периодические колебания.

Если это положение равновесия совпадает с точкой  $x = 0$ , эта точка также будет положением равновесия импульсной системы и в непрерывном движении.

Определение реакций систем в дискретном движении проводилось по формуле (4.161), так как она позволяла просто и в весьма компактной форме получать нужные результаты.

Естественно, те же результаты можно получить, если пользоваться решением разностного уравнения (4.159) в форме (4.162). Причем, пользуясь решением в форме (4.162), можно определить реакцию системы также и в тех особых случаях, когда  $e^{\alpha_0 T}$  является корнем характеристического уравнения  $\Delta^*(\lambda) = 0$ . Действительно, пусть опять  $\gamma x_3(mT) = e^{\alpha_0 mT}$ . Тогда, учитывая (4.160) и (4.163), получим из (4.162) выражение

$$x(mT) = \sum_{i=1}^n \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} \sum_{m'=0}^{m-1} \lambda_i^{*m-m'-1} e^{\alpha_0 m' T} g_0^*. \quad (4.173)$$

Сворачивая вторую сумму по формуле геометрической прогрессии, получим

$$x(mT) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha_0 m T} - \lambda_i^{*m}}{e^{\alpha_0 T} - \lambda_i^*} \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} g_0^*. \quad (4.174)$$

Пусть для определенности  $\lambda_n^* = e^{\alpha_0 T}$ . Тогда, раскрывая неопределенность при  $i = n$ , представим (4.174) в виде

$$\begin{aligned} x(mT) = & - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i^{*m}}{e^{\alpha_0 T} - \lambda_i^*} \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} g_0^* + \\ & + e^{\alpha_0 m T} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{e^{\alpha_0 T} - \lambda_i^*} \frac{F^*(\lambda_i^*)}{\Delta^{*'}(\lambda_i^*)} g_0^* + m e^{\alpha_0(m-1)T} \frac{F^*(e^{\alpha_0 T})}{\Delta^{*'}(e^{\alpha_0 T})} g_0^*. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Все элементы полученных выше формул, кроме столбца  $g_0^*$ , были ранее выражены через исходные параметры рассматриваемых импульсных систем. Матрица-столбец  $g_0^*$ , определяемая формулой (4.163), входит множителем во второе слагаемое выражения (4.15). Поэтому по формулам (4.124) и (4.126) нетрудно установить для  $g_0^*$  следующие разложения:

$$\left. \begin{aligned} g_0^* = & - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h, \\ g_0^* = & - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} h - \\ & - T_1 \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h - \left( T_1 T_2 + \frac{T_1^2}{2} \right) \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} h, \end{aligned} \right\} \quad (4.176)$$

которые справедливы соответственно для случаев простых корней  $\lambda_i$  и, когда среди  $\lambda_i$  есть двойной нулевой корень,  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ .

В соответствии с идеализацией, принятой в данной работе, реакция импульсной системы не зависит от значений, которые принимает функция задающего воздействия во внутренних точках интервалов повторения, если считать, что начало каждого интервала совпадает с началом ввода в систему информации об управляющем сигнале. Задающее воздействие носит дискретный характер.

Несколько другая картина получается при анализе поведения системы при внешних возмущениях. В этом случае реакция системы существенно зависит от протекания «возмущающей» функции во всем интервале изменения времени  $t$ .

#### *д) Реакция системы на внешнее возмущение*

В этом случае движение импульсной системы определяется матричным дифференциальным уравнением (4.2), в котором столбец  $g$  является известной функцией времени, определяющей внешнее возмущение. Решение уравнения (4.2) легко построить, если исходить из следующих соображений. Пусть в момент  $t = (m - 1)T$ , который является началом  $m$ -го интервала повторения, матричная координата  $x = x[(m - 1)T]$ . Тогда внутри  $m$ -го интервала  $\Psi(\sigma)$  является известной функцией времени, так же как и функция  $g$ . Таким образом, внутри  $m$ -го интервала повторения уравнение (4.2) можно трактовать как линейное неоднородное дифференциальное уравнение, в правую часть которого входят в виде слагаемых две известные функции времени. Поэтому можно применить принцип суперпозиции. Сначала, например, найти решение при  $g \equiv 0$ , удовлетворяющее при  $t_0 = (m - 1)T$  начальному значению  $x[(m - 1)T]$ , а затем к нему прибавить решение при  $\Psi(\sigma) \equiv 0$ , удовлетворяющее нулевому начальному условию. Первое решение было получено ранее, и оно определяется формулами (4.7) и (4.11). Второе решение определяется формулой (2.128) при  $x(t_0) = 0$ . Объединяя оба решения, получим

$$x[(m - 1)T + \tau] = Q'(\tau) x[(m - 1)T] + \left. \begin{aligned} &+ \int_0^\tau KM(\tau - \xi) K^{-1} g [(m - 1)T + \xi] d\xi, \\ &0 \leq \tau \leq T_1, \end{aligned} \right\} (4.177)$$

$$\left. \begin{aligned} x[(m-1)T + T_1 + \tau] &= Q''(\tau)x[(m-1)T] + \\ &+ \int_0^{T_1+\tau} KM(T_1 + \tau - \xi) K^{-1} g[(m-1)T + \xi] d\xi, \\ 0 &\leq \tau \leq T_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.177)$$

где матрицы  $Q'(\tau)$  и  $Q''(\tau)$  определяются по формулам (4.8) и (4.12). Из второго равенства (4.177) при  $\tau = T_2$  (см. формулу (4.14)) получим выражение

$$\begin{aligned} x(mT) &= P^*x[(m-1)T] + \\ &+ \int_0^T KM(T - \xi) K^{-1} g[(m-1)T + \xi] d\xi, \end{aligned} \quad (4.178)$$

которое можно также представить в виде уравнения (4.159), если положить

$$g^*(mT) = \int_0^T KM(T - \xi) K^{-1} g(mT + \xi) d\xi. \quad (4.179)$$

Неоднородное разностное уравнение (4.178) определяет дискретное движение импульсной системы при наличии внешнего возмущения. Когда дискретное движение найдено, то непрерывное движение импульсной системы определяется по формулам (4.177).

Таким образом, дискретное движение импульсной системы, обусловленное задающим воздействием и внешним возмущением, определяется решением одного и того же неоднородного разностного уравнения (4.159), в котором столбец  $g^*(mT)$  определяется соответственно равенствами (4.160) и (4.179). Поэтому полученные ранее результаты будут справедливы и в данном случае, если соблюсти необходимую предосторожность. Дело в том, что в столбец (4.160) функция времени входит в виде скалярного множителя, поэтому столбец (4.179) следует предварительно представить в таком же виде, например расщепив его на сумму подходящим образом подобранных столбцов.

Столбец (4.179) можно представить через исходные параметры в виде выражений

$$\left. \begin{aligned} g^*(mT) &= \sum_{i=1}^n \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \int_0^T e^{\lambda_i(T-\xi)} g(mT + \xi) d\xi, \\ g^*(mT) &= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \int_0^T e^{\lambda_i(T-\xi)} g(mT + \xi) d\xi + \\ &\quad + \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} \int_0^T g(mT + \xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \int_0^T (T - \xi) g(mT + \xi) d\xi, \end{aligned} \right\} (4.180)$$

которые справедливы соответственно для простых корней  $\lambda_t$  и при наличии среди них двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ .

## § 4.7. Предельные случаи импульсной управляющей функции

Управляющая функция  $\psi(\sigma)$  в рассматриваемых до сих пор импульсных системах изображалась кривой, представленной на рис. 1.7. Для произвольного интервала повторения ширина импульса и продолжительность последующей паузы изображаются конечными и постоянными отрезками времени  $T_1$  и  $T_2$ .

Можно рассмотреть случаи, когда  $T_1$  или  $T_2$  являются исчезающими малыми величинами по отношению к некоторому характеристическому времени системы. За характеристическое время удобно в данном случае взять величину  $1/|\lambda_i|_{\max}$ , где  $|\lambda_i|_{\max}$  — наибольший по модулю корень характеристического уравнения разомкнутой системы. При сделанном предположении не интересуются изменением координат во внутренних точках указанных выше отрезков, поэтому их можно в пределе положить равными нулю.

В первом случае предельный переход нужно производить таким образом, чтобы сохранить основную физическую

характеристику управляющего сигнала, которая определяется площадью соответствующих импульсов. При уменьшении ширины импульсов высоту их нужно пропорционально увеличивать так, чтобы площадь оставалась постоянной величиной.

Такая идеализация принимается в различных случаях и, в частности, при образовании импульсивной функции —  $\delta$ -функции Дирака — из прямоугольного импульса \*). Поэтому для краткости управляющую функцию с мгновенными импульсами будем называть *импульсивной* и обозначать ее через  $\psi^*(\sigma)$ .

Введем вспомогательную управляющую функцию  $\bar{\psi}^*(\sigma)$  с шириной импульса  $T_1^*$ , определив ее по формуле

$$\bar{\psi}^*(\sigma) = \frac{T_1}{T_1^*} \psi(\sigma). \quad (4.181)$$

Для любого значения  $T_1^* < T_1$  площадь импульса  $T_1^* \bar{\psi}^*(\sigma)$  будет равна постоянной величине  $T_1 \psi(\sigma)$ . В пределе из  $\bar{\psi}^*(\sigma)$  при  $T_1^* = 0$  получим импульсивную управляющую функцию  $\psi^*(\sigma)$ . Эта функция представлена на рис. 4.5 в виде дискрет, следующих друг за другом через равные промежутки времени.

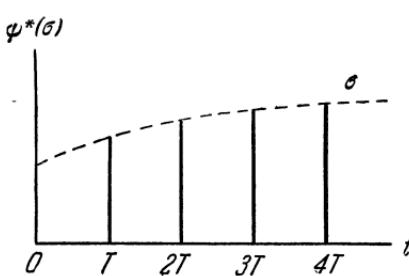


Рис. 4.5. График импульсивной управляющей функции.

цией (4.181). В этом случае значение матричной координаты  $x$  при  $t = (m - 1)T + T_1^*$  определяется выражением

$$x[(m - 1)T + T_1^*] = Q'(T_1^*)x[(m - 1)T], \quad (4.182)$$

Высота дискрет условно принимается равной величине аргумента управления  $\sigma$  в соответствующие моменты времени. Так условно обозначается тот факт, что интенсивность мгновенных импульсов пропорциональна соответствующим значениям  $\sigma$ .

Рассмотрим собственное движение импульсной системы с управляющей функци-

\*) См., например, А. И. Лурье [15].

где

$$Q'(T_1^*) = KM(T_1^*)K^{-1} + KN(T_1^*)K^{-1}\frac{T_1}{T_1^*}h\gamma. \quad (4.183)$$

Эти равенства нетрудно получить из формул (4.7) и (4.8), если положить  $\tau = T_1^*$  и учесть соотношение (4.181). Матрицы  $M(t)$  и  $N(t)$  определяются формулами (2.94), (2.98) и (2.120) — (2.122). В соответствии с этими формулами в пределе при  $T_1^* = 0$  получим из (4.183) выражение

$$Q'(0) = E + T_1 h\gamma. \quad (4.184)$$

Полагая  $T_1^* \rightarrow 0$  в равенстве (4.182) и учитывая,  $Q'(0) \neq E$  (4.184), получим, что при  $T_1^* = 0$  значения матричной координаты  $x$  в левой и правой частях равенства (4.182) не будут совпадать друг с другом. Чтобы подчеркнуть этот факт, будем в предельном равенстве слева писать  $x[(m-1)T+0]$ , а справа  $-x[(m-1)T-0]$ . Если учесть это обстоятельство и выражение  $Q'(0)$  из (4.184), то из равенства (4.182) в пределе при  $T_1^* = 0$  можно получить соотношение в виде

$$x[(m-1)T+0] = x[(m-1)T-0] + T_1 h\gamma x[(m-1)T-0]. \quad (4.185)$$

Отрезок времени, равный ширине импульса функции  $\psi(\sigma)$ , мы свернули в точку. У этой точки следует различать левую и правую стороны. Правая сторона соответствует прохождению мгновенного управляющего импульса; его действие на систему сводится в этом случае к скачкообразному изменению матричной координаты  $x$ , которое происходит в соответствии с формулой (4.185). В оставшемся промежутке времени  $[(m-1)T+0] \leq t \leq (mT-0)$   $m$ -го интервала повторения движение системы описывается дифференциальным уравнением (4.9). Решение этого уравнения, справедливое для указанного интервала, можно записать в форме

$$x[(m-1)T+\tau] = KM(\tau)K^{-1}x[(m-1)T+0], \quad (4.186)$$

которая получается из формулы (4.10) при  $T_1 = 0$  и при учете оговоренного выше двухстороннего обозначения граничных точек интервалов повторения. Если подставить сюда

$x[(m-1)T+0]$  из (4.185), то получим выражение

$$x[(m-1)T+\tau] = Q''(\tau)x[(m-1)T-0], \quad (4.187)$$

где

$$Q''(\tau) = KM(\tau)K^{-1} + KM(\tau)K^{-1}T_1h\gamma. \quad (4.188)$$

При  $\tau = T - 0$  будем иметь

$$x(mT-0) = P^*x[(m-1)T-0], \quad (4.189)$$

где

$$P^* = Q''(T) = KM(T)K^{-1} + KM(T)K^{-1}T_1h\gamma. \quad (4.190)$$

Разностное уравнение (4.189) определяет дискретное движение системы, когда управляющая функция имеет вид мгновенных импульсов. После нахождения решения этого уравнения значение матричной координаты  $x$  в промежуточных точках интервала повторения определяется по формулам (4.187) и (4.188) при  $0 < \tau < T$ .

Матрицы (4.188) и (4.190) можно формально получить из матриц (4.12) и (4.15), если в последних выражениях положить  $T_1 = T_1^*$ , заменить  $h$  на  $\frac{T_1}{T_1^*}h$ , перейти к пределу

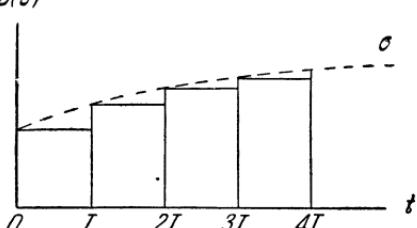
при  $T_1^* = 0$  и при этом, естественно, считать  $T_2 = T$ . Поэтому все соотношения, полученные нами для управляющей функции с конечной шириной импульса

будут справедливы и для систем с мгновенными управляющими импульсами, если в них произвести указанные выше замену и предельный переход.

Во втором предельном случае, когда пауза считается равной нулю, управляющая функция  $\psi(\sigma)$  изображается в виде ступенчатой функции, представленной на рис. 4.6.

Рис. 4.6. График ступенчатой управляющей функции.

В этом случае все необходимые соотношения получаются непосредственно из формул, полученных для управляющей функции  $\psi(\sigma)$  с конечной паузой путем предельного перехода при  $T_2 \rightarrow 0$  и, как всегда, с сохранением равенства



$T_1 + T_2 = T$ . В частности, из (4.15) получим выражение

$$P^* = KM(T)K^{-1} + KN(T)K^{-1}h\psi, \quad (4.191)$$

которое определяет операторную матрицу дискретного движения импульсной системы при ступенчатой управляющей функции  $\psi(\sigma)$ .

В заключение отметим, что теория линейных импульсных систем с импульсивной и ступенчатой управляющими функциями можно построить самостоятельно, по тому же плану и посредством тех же рассуждений, которые применялись для систем с конечной (не равной нулю) шириной управляющего импульса и конечной продолжительностью паузы. При развитии такой теории необходимо иметь в виду, что все выражения, содержащие непосредственно столбец  $u'$  или столбцы, определяемые через  $u'$ , сохраняются без изменения для любого вида управляющей функции. Такими выражениями, например, являются характеристические уравнения в форме (4.30) и (4.40), присоединенная матрица в форме (4.144), преобразованные характеристические уравнения (4.56) и (4.58) и т. д. Столбец  $u'$  выражается через элементы столбца  $u$  по формулам, которые зависят от вида управляющей функции. Так, указанные формулы перехода представляются соотношением (4.25) для управляющей функции с конечной шириной импульса и паузы, выражением

$$u' = T_1 M(T) u \quad (4.192)$$

для импульсивной управляющей функции и равенством

$$u' = N(T) u \quad (4.193)$$

для ступенчатой управляющей функции. Формулы (4.25), (4.192) и (4.193) представлены в матричной форме, которая является справедливой для любого вида корней  $\lambda_i$ .

Читатель может выбрать любой из указанных выше путей или пользоваться ими одновременно для контроля получаемых результатов.

В качестве упражнения предлагается для импульсивной управляющей функции  $\psi^*(\sigma)$  привести преобразованное

характеристическое уравнение (4.58) к виду

$$\prod_{j=1}^{n-2} [v(1 - e^{\lambda_j T}) + (1 + e^{\lambda_j T})] \left\{ 1 - T_1(v - 1) \times \right. \\ \times \left[ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T}}{v(1 - e^{\lambda_i T}) + (1 + e^{\lambda_i T})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \frac{1}{2} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \right. \\ \left. \left. + \frac{T}{4} (v + 1) \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} \right] \right\} = 0, \quad (4.193a)$$

а при выполнении условия  $\gamma h = 0$  к виду

$$\prod_{j=1}^{n-2} [v(1 - e^{\lambda_j T}) + (1 + e^{\lambda_j T})] \times \\ \times \left\{ (1 - T_1(v + 1)) \left[ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{v(1 - e^{\lambda_i T}) + (1 + e^{\lambda_i T})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \frac{T}{4} (v + 1) \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} \right] \right\} = 0. \quad (4.193b)$$

Для вывода уравнения (4.193б) предлагается использовать материал, изложенный в конце § 2.3., или воспользоваться промежуточной формой уравнения, использующей элементы столбца  $u$  и строки  $\beta$ . В этом случае в соответствии с (4.21)  $\beta u = \gamma h$ .

## § 4.8. Нелинейные импульсные системы

Рассмотрим нелинейные импульсные системы с управляющей функцией, образованной по принципу широтно-импульсной модуляции. Управляющая функция в этом случае определяется табличкой (1.11) и графически изображена на рис. 1.9.

Идеальная сторона процесса нахождения решения исходных дифференциальных уравнений, которое было бы справедливым внутри  $m$ -го интервала повторения, т. е. при  $(m-1)T \leq t \leq mT$ , остается без изменения и в данном случае. Поэтому мы используем полученные для линейных импульсных

систем соотношения и позволим себе получать нужные выражения посредством внесения в них необходимых изменений.

Рассмотрим собственное движение нелинейной импульсной системы. Воспользовавшись формулами (4.7) — (4.12) и учитывая (1.11), запишем решение в  $m$ -м интервале повторения в виде

$$\left. \begin{aligned} x[(m-1)T + \tau] &= KM(\tau)K^{-1}x[(m-1)T] + \\ &\quad + KN(\tau)K^{-1}h\chi_{m-1}, \quad 0 \leq \tau \leq T_{1,m-1}, \\ x[(m-1)T + T_{1,m-1} + \tau] &= \\ &= KM(T_{1,m-1} + \tau)K^{-1}x[(m-1)T] + \\ &\quad + KM(\tau)(T_{1,m-1})K^{-1}h\chi_{m-1}, \quad 0 \leq \tau \leq T_{2,m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.194)$$

Из второго равенства (4.194) при  $\tau = T_{2,m-1}$  получим

$$x(mT) = KM(T)K^{-1}x[(m-1)T] + \\ + KM(T_{2,m-1})N(T_{1,m-1})K^{-1}h\chi_{m-1}, \quad (4.195)$$

причем напомним, что  $T_{1,m-1}$  определяется по формуле

$$T_{1,m-1} = T_1\chi_{m-1}\sigma[(m-1)T] \quad (4.196)$$

или

$$T_{1,m-1} = T_1\chi_{m-1}\gamma x[(m-1)T]. \quad (4.197)$$

Соотношения (4.195) и (4.197), рассмотренные совместно представляют собой нелинейное разностное уравнение, которое описывает дискретное движение системы с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала. Полученное нелинейное разностное уравнение является рекуррентным соотношением. Оно позволяет по заданному начальному значению  $x(0)$ , шаг за шагом, определить значения  $x$  для любого дискретного момента времени  $mT$ . Значение координаты  $x$  в промежуточных точках любого интервала повторения определяется по формулам (4.194). Для проведения таких вычислений нужно предварительно выразить все элементы этих формул через исходные параметры.

Исследование устойчивости дискретного движения нелинейной импульсной системы можно провести по методу Ляпунова (см. гл. III). Для этого нужно получить линейное

уравнение первого приближения. По терминологии Ляпунова соотношения (4.195) и (4.197) определяют нелинейное разностное уравнение возмущенного движения системы; невозмущенное движение дается равенством  $x \equiv 0$ . При  $x \equiv 0$  левая часть равенства (4.197) также обращается в нуль, а  $T_{2,m-1}$  превращается в  $T$ , так как  $T_{1,m} + T_{2,m} = T$ .

Для построения уравнения первого приближения разложим правую часть равенства (4.195) в ряд Тейлора, взяв за центр разложения  $x = 0$ , и удержим в нем только члены порядка не выше первого относительно  $x$ . Тогда, учитывая сказанное выше, получим

$$\begin{aligned} x(mT) = & KM(T)K^{-1}x[(m-1)T] + K \left[ \frac{dM(\xi_2)}{d\xi_2} N(\xi_1) T_{2,m-1} + \right. \\ & \left. + M(\xi_2) \frac{dN(\xi_1)}{d\xi_1} T_{1,m-1} \right] \Big|_{\substack{\xi_1=0 \\ \xi_2=T}} K^{-1} h \chi_{m-1}. \end{aligned} \quad (4.198)$$

Если учесть, что  $M(0) = E$ ,  $N(0) = 0$ ,  $\frac{dM}{dt} = JM(t)$ ,  $\frac{dN(t)}{dt} = M(t)$  и воспользоваться равенством (4.197), то из (4.198) можно получить выражение

$$x(mT) = P^* x[(m-1)T], \quad (4.199)$$

где

$$P^* = KM(T)K^{-1} + KM(T)K^{-1}T_1 h \gamma, \quad (4.200)$$

которое будет уравнением первого приближения для рассматриваемой нелинейной импульсной системы. Полученная операторная матрица  $P^*$  (4.199) уравнения первого приближения формально совпадает с матрицей (4.190).

Таким образом, можно сделать вывод, что исследование устойчивости нелинейной импульсной системы в смысле Ляпунова сводится к анализу устойчивости линейной импульсной системы с импульсивной управляющей функцией  $\psi^*(\sigma)$ .

## § 4.9. Импульсные системы при исчезающе малых периодах повторения

Поведение импульсных систем при малых периодах повторения  $T$  приближается к поведению соответствующих линейных систем непрерывного регулирования. В сущности говоря, «изобретение» принципа прерывистого регулирования с при-

нудительным ритмом чередования управляющих импульсов обязано инженерной интуиции, которая подсказывала, что при таком принципе в среднем будет осуществляться пропорциональное регулирование. Среднее значение  $\psi_{cp}^{(m)}(\sigma)$  управляющей функции в  $m$ -м интервале повторения для любой из рассмотренных выше импульсных систем определяется формулой

$$\psi_{cp}^{(m)}(\sigma) = \frac{T_1}{T} \gamma x [(m-1)T], \quad (4.201)$$

причем для ступенчатой управляющей функции (4.201) нужно принимать  $T_1 = T$ . Поэтому естественно сравнить поведение импульсных систем при малых значениях  $T$  с поведением линейной непрерывной системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Px + \frac{T_1}{T} h \gamma x, \quad (4.202)$$

представленным в матричной форме. Решение уравнения (4.202), принимающее при  $t=0$  заданное начальное значение  $x(0)$ , можно записать в виде (см. (2.127) при  $g(t) \equiv 0$ )

$$x(t) = e^{\left(P + \frac{T_1}{T} h \gamma\right)t} x(0). \quad (4.203)$$

По формуле (4.203) можно, в частности, определить значение матричной координаты  $x$  в дискретные моменты времени  $mT$ , т. е.

$$x(mT) = \tilde{P}^{*m} x(0), \quad (4.204)$$

где матрица  $\tilde{P}^{*}$  определяется выражением

$$\tilde{P}^{*} = e^{\left(P + \frac{T_1}{T} h \gamma\right)T}. \quad (4.205)$$

Если разложить экспоненту, стоящую в правой части равенства (4.205) в ряд (2.85) и удержать в этом разложении члены порядка не выше первого относительно  $T^*$ ), то получим приближенное равенство

$$\tilde{P}^{*} = E + \left(P + \frac{T_1}{T} h \gamma\right) T. \quad (4.206)$$

<sup>\*)</sup> Так как всегда имеет место неравенство  $T_1 \leq T$ .

Собственное дискретное движение линейной импульсной системы в любом случае определяется формулой

$$x(mT) = P^{*m}x(0), \quad (4.207)$$

в которой операторная матрица  $P^*$  определяется по формулам (4.15), (4.190), (4.191) в зависимости от типа импульсной управляющей функции  $\psi(\sigma)$ .

Рассмотрим операторную матрицу (4.15), так как она имеет наиболее общий вид, и будем для упрощения последующих рассуждений считать, что матрица  $P$  неособая, т. е. что все корни  $\lambda_i$  отличаются от нуля. Тогда, учитывая формулы (2.90), (2.91) и (2.107) — (2.110), перепишем (4.15) в виде

$$P^* = e^{PT} + e^{PT_2}(e^{PT_1} - E)P^{-1}h\gamma \quad (4.208)$$

или

$$P^* = e^{PT} + (e^{PT} - e^{PT_2})P^{-1}h\gamma. \quad (4.209)$$

Разлагая фигурирующие в (4.209) экспоненты в ряд, получим приближенное равенство

$$P^* \approx E + PT + T_1h\gamma, \quad (4.210)$$

совпадающее с равенством (4.206). Равенство (4.210) остается справедливым и для импульсивной управляющей функции; для ступенчатой управляющей функции следует положить  $T_1 = T$ .

Таким образом, если период повторения  $T$  — величина достаточно малая, то значения матричной координаты  $x$  для линейной непрерывной системы (4.202) и для рассмотренных импульсных систем будут совпадать в первом приближении. При этом, естественно, считается, что в обоих случаях берутся одинаковые начальные условия.

Рассмотрим теперь характеристические уравнения импульсной системы с операторной матрицей  $P^*$  и непрерывной системы, описываемой уравнением (4.202). Мы доказали, что в первом приближении матрицы  $P^*$  и  $\tilde{P}^*$  совпадают (см. (4.206) и (4.210)). Как следует из § 2.5, характеристические числа  $\tilde{\lambda}_i^*$  матрицы  $\tilde{P}^*$  (4.205) определяются выражением  $e^{\tilde{\lambda}_i T}$ , где  $\tilde{\lambda}_i$  суть характеристические числа матрицы  $\left(P + \frac{T_1}{T}h\gamma\right)$ , а, следовательно, и уравнения (4.202). Поэтому в первом

приближении должны иметь место равенства

$$\lambda_i^* = \tilde{\lambda}_i^* = e^{\tilde{\lambda}_i T}. \quad (4.211)$$

Таким образом, если в характеристическом уравнении  $\Delta^*(\lambda) = 0$  матрицы  $P^*$ , например, определяемой формулой (4.15), заменить  $\lambda$  на  $e^{\tilde{\lambda} T}$  и устремить  $T$  к нулю с сохранением постоянства отношения  $T_1/T$ , то в пределе при  $T = 0$  получим характеристическое уравнение для (4.202). Читателю предлагается самому провести необходимые выкладки и при этом рекомендуется воспользоваться характеристическим уравнением  $\Delta^*(\lambda) = 0$  в виде (4.32) и (4.49).

Рассмотрим далее преобразование (4.54). Заменив в нем  $\lambda$  на  $e^{\tilde{\lambda} T}$  и считая  $T$  достаточно малым, получим приближенно

$$v \approx \frac{1}{\tilde{\lambda}} \frac{T}{2}. \quad (4.212)$$

Если в преобразованном характеристическом уравнении (4.56) и (4.58) выполнить подстановку (4.212), то в пределе опять получим характеристическое уравнение для (4.202).

В уравнении (4.202) положительный коэффициент  $T_1/T$  можно считать коэффициентом усиления управляющего сигнала. Поэтому изменение отношения продолжительности управляющего импульса к периоду повторения в импульсной системе эквивалентно по своему действию соответствующему изменению коэффициента усиления в линейной системе непрерывного регулирования.

К полученным выше результатам можно подойти также с точки зрения приближенного интегрирования линейных дифференциальных уравнений и, в частности, получить приближенное представление матрицы  $\tilde{P}^*$  в виде (4.206) из следующих простых соображений. Для приближенного интегрирования уравнения (4.202) выберем достаточно малый шаг  $T$ . В интервале времени  $(m - 1)T \leq t \leq mT$  считаем правую часть уравнения (4.202) постоянной и само уравнение записываем для этого интервала в виде

$$\dot{x}(t) = \left( P + \frac{T_1}{T} h \gamma \right) x [(m - 1)T]. \quad (4.213)$$

Решение этого уравнения, обращающееся в  $x[(m-1)T]$  при  $t = (m-1)T$ , представляется в виде

$$\begin{aligned} x[(m-1)T + \tau] &= \\ &= x[(m-1)T] + \left( P + \frac{T_1}{T} h\gamma \right) \tau x[(m-1)T], \quad 0 \leq \tau \leq T. \end{aligned} \quad (4.214)$$

Отсюда при  $\tau = T$  получаем линейное разностное уравнение

$$x(mT) = \tilde{P}^* x[(m-1)T], \quad (4.215)$$

операторная матрица  $\tilde{P}^*$  которого определяется по формуле (4.206).

### § 4.10. Автопилот прерывистого действия

Рассмотрим собственное движение системы автоматической стабилизации курса нейтрального самолета посредством автопилота прерывистого действия. Будем считать, что применен принцип регулирования по координате и двум ее первым производным и выполняются условия для идеализации управляемой функции, которую будем принимать в виде импульсивной функции  $\psi^*(\sigma)$ . Тогда, полагая в (1.6)  $a = \infty$ ,  $g'_1 = 0$  и заменяя  $\psi(\sigma)$  на  $\psi^*(\sigma)$ , получим уравнения движения в виде

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \\ \Theta\ddot{\eta} + \dot{\eta} = h'_2 \psi^*(\sigma), \\ \sigma = \varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2\ddot{\varphi}. \end{array} \right\} \quad (4.216)$$

Импульсивная функция  $\psi^*(\sigma)$  определяется графиком, представленным на рис. 4.5. Приведем систему уравнений (4.216) к нормальной форме (1.15). Для этого введем, согласно (1.14), новые обозначения:

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\varphi}, \quad x_4 = \dot{\eta}. \quad (4.217)$$

В новых переменных  $x_i$  уравнения (4.216) можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -Nx_2 - Mx_3, \\ \dot{x}_4 = -\frac{1}{\Theta}x_4 + \frac{h'_2}{\Theta}\psi^*(\sigma), \\ \sigma = x_1 - Na_2x_2 + (a_1 - Ma_2)x_3. \end{array} \right\} \quad (4.218)$$

В процессе преобразования в третьем уравнении (4.216) нужно заменить сначала выражением, полученным из первого уравнения. Нормальную форму уравнений (4.218) запишем в матричном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -N & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h'_2/\Theta \end{pmatrix} \psi^*(\sigma), \\ \sigma = \begin{pmatrix} 1, & -Na_2, & (a_1 - Ma_2), & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{array} \right\} \quad (4.219)$$

В данном случае основные постоянные матрицы имеют вид: матрица  $P$  разомкнутой системы регулирования

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -N & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\Theta \end{pmatrix}, \quad (4.220)$$

матрица-столбец  $h$ , распределяющая в системе действия управляющего сигнала,

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{h'_2}{\Theta}, \quad (4.221)$$

матрица-строка  $\gamma$ , определяющая структуру аргумента управления  $\sigma$ ,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1, & -Na_2, & (a_1 - Ma_2), & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.222)$$

Матрицы (4.221) и (4.222) таковы, что имеет место равенство

$$\gamma h = 0. \quad (4.223)$$

Далее для разомкнутой системы \*) можно получить следующие матричные и скалярные выражения:

характеристическая матрица

$$\lambda E - P = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & N & \lambda + M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1/\Theta \end{vmatrix}, \quad (4.224)$$

характеристический полином

$$\Delta(\lambda) = (\lambda + M) \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) \lambda^2, \quad (4.225)$$

корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -M, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\Theta}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad (4.226)$$

транспонированная характеристическая матрица

$$(\lambda E - P)^T = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & N & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + M & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda + 1/\Theta \end{vmatrix}, \quad (4.227)$$

присоединенная матрица

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \\ = & \begin{vmatrix} \lambda(\lambda + M) \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) & -N \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) & \lambda \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) & -N \\ 0 & \lambda(\lambda + M) \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) & 0 & \lambda(\lambda + M) \\ 0 & -N\lambda \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) & \lambda^2 \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right) & -\lambda N \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda + M) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.228)$$

\*) Часто разомкнутую систему называют *непрерывной частью* импульсной системы.

полином  $\Delta_3(0)$  для двойного нулевого корня  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$$\Delta_3(\lambda) = (\lambda + M) \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right), \quad (4.229)$$

производная от матрицы  $F(\lambda)/\Delta_3(\lambda)$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{F(\lambda)}{\Delta_3(\lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2\lambda + M \\ \cdot & \cdot & \cdot & -N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{(\lambda + M) \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right)} \left( 2\lambda + M + \frac{1}{\Theta} \right) \frac{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda(\lambda + M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{(\lambda + M)^2 \left( \lambda + \frac{1}{\Theta} \right)^2}. \quad (4.230)$$

При вычислении производной (4.230) мы сознательно выписывали только первые три элемента последнего столбца в соответствующих матрицах, а в остальных ячейках ставили точки. Таким образом, мы хотим обратить внимание на тот факт, что все вычисления можно провести более экономно. Нужно вычислять только те величины, которые войдут в конечный результат.

В дальнейшем мы будем исследовать устойчивость импульсной системы. В характеристическое уравнение входят скалярные величины, которые получаются из матриц (4.228) и (4.230) при  $\lambda = \lambda_i$  умножением справа на столбец  $h$  и слева на строку  $u$ . Так как первые три элемента столбца (4.221) и последний элемент строки (4.222) равны нулю, то, очевидно, указанные выше скалярные коэффициенты зависят только от трех первых элементов последнего столбца матриц (4.228) и (4.230). Поэтому, если ограничиться исследованием устойчивости, то в присоединенной матрице (4.228) можно было тоже ограничиться определением первых трех элементов последнего столбца, а в остальных ячейках ставить точки.

Для исследования устойчивости воспользуемся критерием Гурвица и применим его к преобразованному характеристическому уравнению. В данном случае среди  $\lambda_i$  имеется двойной нулевой корень  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$  и выполняется равенство (4.223), поэтому преобразованное характеристическое уравнение можно взять в форме (4.193б).

Из предыдущих формул нетрудно получить выражения скалярных коэффициентов этого уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\gamma F(\lambda_1) h}{\Delta'(\lambda_1)} = \frac{Nh'_2}{M\theta - 1} \left( \frac{1}{M^2} - \frac{a_1}{M} + a_2 \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\gamma F(\lambda_2) h}{\Delta'(\lambda_2)} = \frac{Nh'_2}{M\theta - 1} (-\theta^2 + a_1\theta - a_2), \\ \varepsilon_3 &= \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_3(0)} \right]^{(1)} h = Nh'_2 \left( \frac{M\theta + 1}{M^2} - \frac{a_1}{M} \right), \\ \varepsilon_4 &= \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_3(0)} = -\frac{Nh'_2}{M}. \end{aligned} \right\} \quad (4.231)$$

Легко проверить, что  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  удовлетворяют равенству \*)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (4.232)$$

Представим преобразованное уравнение в форме (4.59)

$$p'_0 v^4 + p'_1 v^3 + p'_2 v^2 + p'_3 v + p'_4 = 0, \quad (4.233)$$

причем по форме (4.193б) для  $n = 4$  с учетом новых обозначений  $\varepsilon_i$  будем иметь

$$\left. \begin{aligned} p'_0 &= -\frac{1}{4} T_1 T \varepsilon_4 (1 - e^{\lambda_1 T}) (1 - e^{\lambda_2 T}), \\ p'_1 &= -\frac{1}{2} T_1 \varepsilon_3 (1 - e^{\lambda_1 T}) (1 - e^{\lambda_2 T}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} T_1 T \varepsilon_4 [1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T}], \\ p'_2 &= (1 - e^{\lambda_1 T}) (1 - e^{\lambda_2 T}) + T_1 \varepsilon e^{\lambda_2 T} + T_1 \varepsilon_2 e^{\lambda_1 T} + \\ &\quad + T_1 \varepsilon_3 \left[ e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} - \frac{1}{2} (1 - e^{\lambda_1 T}) (1 - e^{\lambda_2 T}) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} T_1 T (e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}), \\ p'_3 &= 2 [1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T}] - \\ &\quad - \frac{1}{2} T_1 \varepsilon_3 [-1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} + e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}] + \\ &\quad + \frac{1}{2} T_1 T \varepsilon_4 [1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T}], \end{aligned} \right\} \quad (4.234)$$

\*) Можно показать, что равенство (4.232) является следствием равенства (4.223).

$$\left. \begin{aligned} p'_4 &= (1 + e^{\lambda_1 T})(1 + e^{\lambda_2 T}) - T_1 \varepsilon_1 (1 + e^{\lambda_2 T}) - \\ &- T_1 \varepsilon_2 (1 + e^{\lambda_1 T}) - \frac{1}{2} \varepsilon_3 (1 + e^{\lambda_1 T})(1 + e^{\lambda_2 T}) + \\ &+ \frac{1}{4} T_1 T \varepsilon_4 (1 + e^{\lambda_1 T})(1 + e^{\lambda_2 T}). \end{aligned} \right\} \quad (4.234)$$

При нахождении коэффициентов  $p'_i$  были произведены простейшие преобразования, при которых использовалось равенство (4.232). Разложим экспоненты, фигурирующие в выражениях (4.234), в ряды по степеням периода повторения  $T$ . Для каждого коэффициента удержим два первых члена разложения относительно малого параметра  $T$ ; при этом отношение  $T_1/T$  будет считаться постоянной величиной — константой системы, — не зависящей от величины  $T$ . Тогда после несложных приведений получим для коэффициентов  $p'_i$  выражения в виде

$$\left. \begin{aligned} p'_0 &= -\frac{1}{4} \frac{T_1}{T} \varepsilon_4 \lambda_1 \lambda_2 \left[ 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} T \right] T^4, \\ p'_1 &= \frac{1}{2} \frac{T_1}{T} [\varepsilon_3 \lambda_1 \lambda_2 + \varepsilon_4 (\lambda_1 + \lambda_2)] \left( 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} T \right) T^3, \\ p'_2 &= \left\{ \lambda_1 \lambda_2 + \frac{T_1}{T} [\varepsilon_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \lambda_1 + \varepsilon_3 (\lambda_1 + \lambda_2) - \varepsilon_4] \right\} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} T \right) T^2, \\ p'_3 &= -2(\lambda_1 + \lambda_2) \left( 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} T \right) T, \\ p'_4 &= 4 \left( 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} T \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.235)$$

Правые части всех равенств (4.235) содержат один и тот же множитель, который можно отбросить, так как он не может оказать влияние на устойчивость системы \*). Отбросим общий множитель в коэффициентах (4.235) и образуем уравнение (4.233) посредством подстановки (4.212). Тогда, заменяя корни  $\lambda_i$  и коэффициенты  $\varepsilon_i$  их выражениями по

\* ) В частном случае, когда этот множитель равен нулю, нужно удерживать в разложении члены более высокого порядка относительно  $T_1$ .

формулам (4.226) и (4.231), вводя обозначение

$$c = \frac{T_1}{T} < 1 \quad (4.236)$$

и умножая все получаемые коэффициенты на  $\Theta/4$ , получим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \Theta\lambda^4 + (1 + M\Theta)\lambda^3 + (M + Nch'_2a_2)\lambda^2 + \\ + Nch'_2a_1 + Nch'_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.237)$$

Это уравнение является характеристическим для предельной линейной непрерывной системы, которая в общем виде представляется матричным уравнением (4.202).

Характеристическое уравнение (4.237) можно непосредственно получить из уравнений (4.216), если в них предварительно заменить  $\psi(\sigma)$  на  $c\sigma$  и ввести коэффициент  $c$  по формуле (4.236). Все коэффициенты характеристического уравнения четвертой степени (4.237) положительны, поэтому для анализа устойчивости имеет значение только одно неравенство

$$(1 + M\Theta)(M + Nch'_2a_2)Nch'_2a_1 - \Theta N^2 c^2 h'_2 a_1^2 - \\ - (1 + M\Theta)^2 Nch'_2 > 0, \quad (4.238)$$

устанавливающее положительность предпоследнего определителя Гурвица (4.60). Сокращая на  $Nc > 0$ , раскрывая скобки и делая приведение подобных членов относительно  $c$ , представим неравенство (4.238) в виде

$$M(1 + M\Theta)\left(a_1 - \frac{1}{M} - \Theta\right) + \\ + a_1\Theta\left(-a_1 + a_2M + \frac{a_2}{\Theta}\right)Nch'_2 > 0. \quad (4.239)$$

Теперь нетрудно установить, что при выполнении неравенств

$$\left. \begin{array}{l} a_1 > \frac{1}{M} + \Theta, \\ a_1 < a_2M + \frac{a_2}{\Theta} \end{array} \right\} \quad (4.240)$$

исследуемая система будет устойчивой при любом положительном значении коэффициента  $ch'_2$ . При обратных

неравенствах, т. е. при условиях

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < \frac{1}{M} + \Theta, \\ a_2 > a_2 M + \frac{a_2}{\Theta}, \end{array} \right\} \quad (4.241)$$

система будет неустойчивой для всех значений  $ch'_2 > 0$ .

В двух других возможных случаях, когда

$$\left. \begin{array}{l} a_1 > \frac{1}{M} + \Theta, \\ a_1 > a_2 M + \frac{a_2}{\Theta}, \end{array} \right\} \quad (4.242)$$

или, наоборот,

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < \frac{1}{M} + \Theta, \\ a_1 < a_2 M + \frac{a_2}{\Theta}, \end{array} \right\} \quad (4.243)$$

существует такое положительное значение  $ch'_2 = c^*$ , при котором левая часть неравенства (4.238) обращается в нуль. При условии (4.242) система будет устойчивой для значений  $ch'_2 < c^*$ , а при условии (4.243), наоборот, для значений  $ch'_2 > c^*$ . Значение  $ch'_2 = c^*$  определяет в этих случаях границу колебательной устойчивости.

Полученные результаты можно изобразить геометрически с помощью диаграммы Вышнеградского. Рассмотрим пространство трех параметров системы: коэффициента естественного демпфирования нейтрального самолета  $M$ , коэффициента искусственного демпфирования  $a_1$  и коэффициента усиления  $ch'_2$ . На плоскости параметров  $M$ ,  $a_1$ , откладывая по оси абсцисс в качестве независимого переменного коэффициент  $M$ , а по оси ординат коэффициент  $a_1$ , построим гиперболу

$$a_1 = \frac{1}{M} + \Theta \quad (4.244)$$

и прямую

$$a_1 = a_2 M + \frac{a_2}{\Theta}. \quad (4.245)$$

Гипербола (4.244) и прямая (4.245) разбивают плоскость первого квадранта на четыре области, как это представлено на

рис. 4.7. Внутри областей I, II, III и IV будут иметь место неравенства (4.240), (4.241), (4.242) и (4.243) соответственно. Таким образом, в области I система будет устойчива при любом  $ch'_2 > 0$ , в области II, наоборот, неустойчива при каждом значении коэффициента  $ch'_2 > 0$ , в областях III и IV

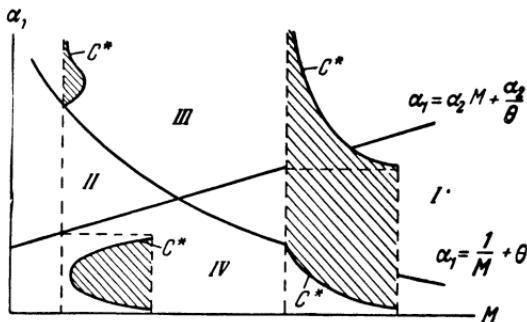


Рис. 4.7. Области устойчивости системы стабилизации курса самолета.

устойчива при  $ch'_2 < c^*$  и  $ch'_2 > c^*$  соответственно. Положительный коэффициент  $c^*$  определяется посредством равенства

$$c^* = \frac{M(1+M\Theta)\left(\alpha_1 - \frac{1}{M} - \theta\right)}{\alpha_1\Theta N(\alpha_1 - \alpha_2 M - \alpha_2/\Theta)}, \quad (4.246)$$

которое получается приравниванием нулю левой части неравенства (4.239).

Если в равенстве (4.246) считать  $M$  и  $\alpha_1$  независимыми переменными, то в указанном выше пространстве параметров  $M$ ,  $\alpha_1$  и  $ch'_2$  равенство (4.246) можно геометрически истолковывать как поверхность, определяющую границу устойчивости исследуемой системы.

Рассмотрим два сечения граничной поверхности (4.246) координатной плоскостью  $M = \text{const}$ , расположенных левее и правее общей точки гиперболы (4.244) и прямой (4.245). Полученные сечения с указанием их места представлены на рис. 4.7, где они изображены на плоскости параметров  $M$  и  $\alpha_1$ . На рис. 4.7 штриховкой обозначены области устойчивости.

Мы провели исследования устойчивости, пользуясь характеристическим уравнением (4.237). Это уравнение является характеристическим для линейной непрерывной системы регулирования, которая получается указанным выше способом из уравнений движения (4.216) \*). Но это уравнение является также характеристическим для линейной импульсной системы, если удерживать два первых члена в разложениях коэффициентов (4.234) в ряды по степеням малого параметра  $T$ .

Поэтому для более детального анализа устойчивости импульсной системы нужно удержать в разложениях члены более высокого порядка малости или проводить исследование непосредственно по характеристическому уравнению (4.233), не делая никаких предположений относительно малости периода повторения  $T$ .

В этом последнем случае можно руководствоваться правилами, установившимися в инженерной практике. При проектировании регулятора объект регулирования считается обычно заданным. Кроме того, можно также считать известными постоянные времени некоторых элементов, входящих в состав регулятора, так как они являются сопутствующими параметрами, обусловленными выбором таких элементов из ограниченного ряда одинаковых по своим функциям устройств. При такой точке зрения в нашей задаче можно считать известными параметры  $M$ ,  $N$  и  $\Theta$  или, по крайней мере, считать заданным диапазон их изменения. Но тогда для оставшихся параметров  $a_1$ ,  $a_2$  и  $ch'_2$ , характеризующих принцип регулирования и общее усиление в системе, анализ устойчивости значительно упрощается.

Однако следует особо подчеркнуть, что в данном случае анализ устойчивости, проведенный по уравнению (4.237), имеет глубокий смысл. Дело в том, что выражение (4.237) является не просто характеристическим уравнением предельной непрерывной системы, но оно также фактически служит в первом приближении (с точностью до членов, пропорциональных  $T^2$ ) преобразованным характеристическим уравнением для рассматриваемой импульсной системы. Такое свойство преобразованного уравнения не является случайным, присущим только

\*) Интересно отметить, что при этом как бы получается уменьшение общего коэффициента усиления  $h_2$  линейной непрерывной системы в отношении  $c = T_1/T < 1$ .

данному конкретному примеру. Оно справедливо для целого класса линейных импульсных систем регулирования с импульсивной управляющей функцией, характеризующихся равенством (4.223).

В качестве упражнения предлагается вывести это свойство в общем виде. Для этого рекомендуем использовать преобразованное характеристическое уравнение (4.193а) или аналогичное уравнение для простых корней  $\lambda_i$ . Можно воспользоваться также промежуточной формой этого уравнения, выраженного через элементы столбца  $\alpha$  и строки  $\beta$ .

Задача ставится так: найти в общем виде выражение для преобразованного характеристического уравнения в первом приближении.

Для случая простых корней  $\lambda_i$  конечный результат можно представить в виде

$$\prod_{j=1}^n (\tilde{\lambda} - \lambda_j) \left[ 1 - \frac{T_1}{T} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{\lambda} - \lambda_i} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \right\} \right] = 0, \quad (4.247)$$

где  $\tilde{\lambda}$  определяется по формуле (4.212).

## ГЛАВА V

# РЕЛЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Теории релейных систем посвящено большое число специальных работ. Краткий исторический очерк развития теории релейных систем, доведенный до 1955 г., читатель может найти в монографии Я. З. Цыпкина [25]. Здесь мы остановимся только на некоторых работах. А. А. Андронов, совместно со своими учениками и сотрудниками [2], методом точечного преобразования поверхностей исследовал в целом структуру разбиения фазового пространства на траектории для ряда классических задач регулирования, а также для системы стабилизации курса нейтрального самолета, снабженного автопилотом с постоянной скоростью сервомотора. Эти работы сыграли видную роль в освоении процессов, протекающих в релейных системах регулирования.

А. И. Лурье в цикле своих работ, подытоженных в монографии [14], ввел в рассмотрение специальную форму математической модели, которую он назвал *системой непрямого регулирования*. Эта математическая модель описывается дифференциальными уравнениями в нормальной форме по типу системы (1.15). Применяя метод канонических переменных как промежуточное средство исследования, А. И. Лурье построил в общем виде симметричные периодические режимы для указанного выше типа релейных систем регулирования.

В указанной выше монографии Я. З. Цыпкина излагается в систематическом виде общая теория релейных систем, основанная на частотных представлениях. Интересный метод анализа релейных систем применял Ю. И. Неймарк [19]. Он, в частности, первый обратил внимание на возможность существования в релейных системах сложных периодических режимов колебаний.

В последующих разделах настоящей работы автор рассматривает собственные и вынужденные колебания релейных

систем — автоколебательные и скользящие режимы, — методами матричного исчисления.

Матричные методы привлекались автором к анализу релейных систем регулирования также и в работах, относящихся к самому началу пятидесятых годов [30], [31].

### § 5.1. Общие замечания

Релейные системы относятся к весьма сложному классу нелинейных систем регулирования. Для нелинейных систем не существует общих решений, определяющих в замкнутой форме собственное движение системы или ее реакцию на внешнее возмущение. К нелинейным системам неприменим принцип суперпозиции, что затрудняет изучение движения систем при наличии нескольких воздействий. Поэтому в настоящее время в теории нелинейных систем регулирования получили широкое распространение приближенные методы исследования, которые во многих случаях, хотя и в первом приближении, позволяют получать конечные формулы, приемлемые для инженерной практики. Однако в теории релейных систем, благодаря специальному виду нелинейностей, многие весьма важные задачи допускают точные решения. Это обстоятельство имеет самостоятельное значение и, кроме того, оно может быть использовано для проверки точности результатов, получаемых приближенными методами.

Для пояснения существа дела рассмотрим собственное движение релейной системы, которое в матричной форме описывается уравнениями вида

$$\dot{x} = Px + h\psi(\sigma), \quad \sigma = \gamma x. \quad (5.1)$$

В этих уравнениях управляющая функция  $\psi(\sigma)$  геометрически представляется в виде релейных характеристик, важнейшие типы которых сведены в табл. 1.1. Релейная управляющая функция  $\psi(\sigma)$  относится к классу кусочно-постоянных функций; в нашем случае она может принимать два или три различных значения для целых континуумов значений аргумента управления  $\sigma$ . Переход от одного значения  $\psi(\sigma)$  к другому происходит скачкообразно при дискретных значениях  $\sigma$  в зависимости от направления его изменения. Переход аргумента управления  $\sigma$  через указанные дискретные значения,

при котором будет происходить переброс значений управляющей функции  $\psi(\sigma)$  с одного уровня на другой, будем называть *переключением*, а условия, гарантирующие переброс, — *условиями переключения*. В тех интервалах изменения  $\sigma$ , в которых  $\psi(\sigma)$  сохраняет постоянное значение, уравнение (5.1) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, причем правая часть уравнения (5.1) будет иметь простейший вид: она будет равна столбцу констант, включая и тот случай, когда все элементы этого столбца суть нули. Для каждой из указанных выше областей  $\sigma$  можно построить общее решение, зависящее от соответствующего числа произвольных постоянных; тогда, если в моменты перехода из одной области в другую применить уже описанный в начале предыдущей главы метод припасовывания, то так по кускам можно построить непрерывное решение исходной системы при заданных начальных условиях. Однако на таком, казалось бы, простом пути могут возникнуть ситуации, когда решение, доведенное до границы областей постоянства функции  $\psi(\sigma)$ , окажется непродолжаемым.

На некоторых участках границы областей, в которых  $\psi(\sigma)$  сохраняет постоянное значение, уравнения (5.1) с релейной характеристикой  $\psi(\sigma)$  как бы становятся противоречивыми. В этих случаях нужно доопределить систему, чтобы получить возможность неограниченно продолжать решение во времени. Чтобы указать на условия для разумного доопределения системы и вообще более наглядно представить поведение системы в процессе переключений, удобно перейти на геометрический язык фазового пространства.

Для определенности рассмотрим идеальную релейную характеристику, представленную в первой графе табл. 1.1. В этом случае имеем два интервала значений аргумента управления  $\sigma$ , в которых управляющая функция сохраняет постоянное значение. При  $\sigma > 0$  имеем  $\psi(\sigma) = 1$  и движение системы будет описываться матричным уравнением

$$\dot{x} = Px + h, \quad (5.2)$$

при  $\sigma < 0$  имеем  $\psi(\sigma)' = -1$  и соответственно

$$\dot{x} = Px - h. \quad (5.3)$$

Границей этих интервалов служит значение  $\sigma = 0$ .

В развернутом виде эту границу можно записать в форме уравнения

$$\sigma = \gamma x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n = 0. \quad (5.4)$$

В фазовом пространстве уравнение (5.4) определяет гиперплоскость (в дальнейшем мы будем называть ее просто плоскостью), проходящую через начало координат. Эта плоскость разбивает фазовое пространство на две области или на два полупространства, в которых  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ .

В полупространствах  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$  движение релейной системы определяется уравнениями (5.2) и (5.3) соответственно. Таким образом, в фазовом пространстве плоскость (5.4) является плоскостью переключений.

Произвольное начальное значение  $x(t_0)$  определяет единственное решение уравнения (5.2) при  $\sigma(t_0) = \gamma x(t_0) > 0$  и уравнения (5.3) при  $\sigma(t_0) = \gamma x(t_0) < 0$ . В фазовом пространстве эти решения изображаются фазовыми траекториями, которые при  $t = t_0$  проходят через точку с координатой  $x(t_0)$ . Направление фазовой траектории определяется вектором фазовой скорости (столбец  $\dot{x}$ ), направленным вдоль ее касательной. Фазовые траектории не пересекаются и сплошь заполняют свои полупространства.

Эти два обстоятельства являются следствием того, что линейные уравнения типа (5.2) и (5.3) имеют единственное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию  $x(t_0)^*$ , и что начальное значение  $x(t_0)$  можно произвольно задавать внутри соответствующего полупространства. Поэтому к каждой точке плоскости переключения подходит одна и только одна фазовая траектория из каждого полупространства:  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ .

Имеются следующие возможности для протекания фазовых траекторий обоих полупространств в непосредственной близости от плоскости переключений. Фазовые траектории могут иметь одинаковое направление, могут быть направлены на встречу друг другу и, наконец, иметь противоположные направления.

На рис. 5.1, а и 5.1, в для наглядности все три случая представлены в трехмерном фазовом пространстве. Первый

---

\* ) Две фазовые траектории, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают целиком.

случай соответствует области I плоскости переключений  $\gamma x = 0$ , второй и третий случай — областям II и III той же

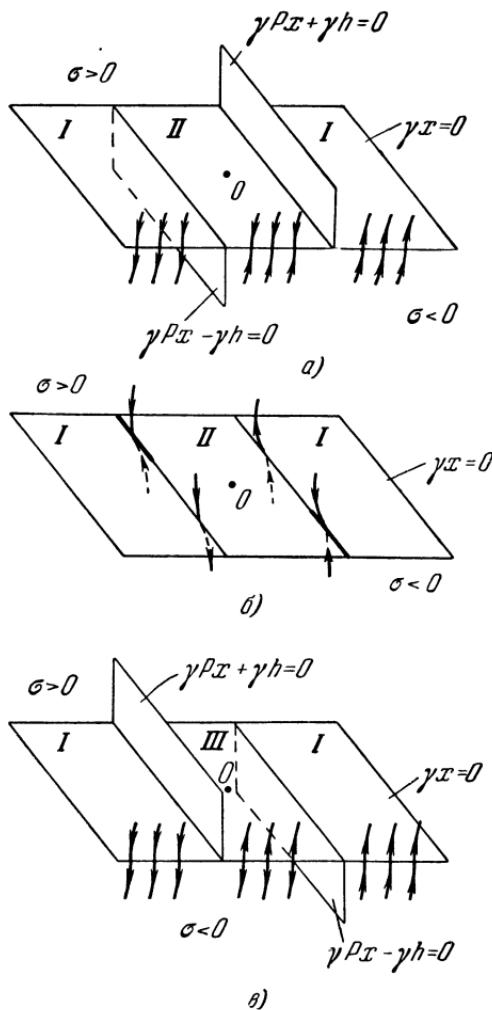


Рис. 5.1. Направление фазовых траекторий в окрестности плоскости переключений: а) и б) для  $\gamma h < 0$  и в) для  $\gamma h > 0$ .

плоскости. В первом случае фазовые траектории, идущие к плоскости переключения из разных полупространств, являются как бы естественным продолжением друг друга. В точках

пересечения с плоскостью переключений они сопрягаются в единую непрерывную траекторию, по которой изображающая точка свободно переходит из одного полупространства в другое. При этом, в общем случае, в момент пересечения плоскости (5.4) компоненты фазовой скорости  $\dot{x}$  и скорость  $\dot{\sigma}$  изменяются скачкообразно на конечную величину. Будем говорить, что в этом случае выполняются условия нормального переключения. При этом аналитически любое частное решение будет получаться чередованием решений уравнений (5.2) и (5.3) и сопряжением их по методу припасовывания начальных условий.

Когда изображающая точка попадает на такие участки плоскости переключения, которые соответствуют второму случаю, то она не может сразу покинуть эту плоскость и перейти из одного полупространства в другое. Некоторое время — конечное или бесконечное — она вынуждена двигаться или, как иногда говорят, скользить вдоль плоскости переключений либо к границам такого участка, либо к началу координат, которое определяет регулируемое положение системы. Указанное движение релейной системы принято называть *скользящим*. Физически скользящее движение обусловливается своеобразным движением релейного элемента, который начинает совершать быстрые колебания из одного крайнего положения в другое и посыпать при этом в систему знакопеременные управляющие сигналы максимального уровня, но разной продолжительности. Для идеальной характеристики частоту переключений реле в скользящем режиме приходится теоретически считать равной бесконечности\*).

Движение релейной системы в скользящем режиме нельзя описать чередующимися решениями уравнений (5.2) и (5.3). Необходимо ввести новые аналитические зависимости, доопределяющие исходные уравнения (5.1). Анализ структуры фазового пространства в полосе, прилегающей к плоскости переключений, показывает, что при любом разумном доопределении нужно учитывать, что в скользящем режиме изображающая точка должна двигаться вдоль плоскости переключе-

\* ) Напомним, что все описания здесь даются применительно к идеальной релейной характеристике. При учете *петли* можно дать более детальное описание движения реле в скользящем режиме и получить, в частности, конечную частоту переключений (см. ниже § 5.8).

ний. Это обстоятельство мы учтем ниже, в § 5.6, в котором рассмотрим более подробно скользящий режим движения релейных систем.

В третьем случае оказывается неопределенным поведение релейном системы на том участке плоскости переключений, из которого фазовые траектории выходят в разные стороны. При решении конкретных задач такие участки можно трактовать как континуумы неустойчивого равновесия системы. Такие примеры поставляют не собственно системы регулирования, а нелинейные системы типа лампового генератора с Г-образной характеристикой, для которого рабочим режимом является режим самовозбуждающихся автоколебаний.

Перейдем теперь к нахождению количественных характеристик, определяющих соответствующую структуру фазового пространства. Эти характеристики удобно получить из следующих простых соображений. Каждый из описанных случаев характеризуется тем, что проекции векторов фазовых скоростей на перпендикуляр к плоскости переключений имеют либо одно направление, либо направлены навстречу друг другу, либо направлены в разные стороны. Если правую часть уравнения (5.4) положить равной  $c$  и считать  $c$  вещественным параметром, то мы получим однопараметрическое семейство параллельных между собой плоскостей. Вектор с компонентами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  (матрица-строка  $\gamma$ ) будет градиентом этого семейства. Вектор градиента перпендикулярен к поверхностям уровня семейства и указывает направление наискорейшего увеличения функции в пространстве. Таким образом, вектор  $\gamma$  перпендикулярен к плоскости переключений и направлен в сторону полупространства  $\sigma > 0$ .

Вектор фазовой скорости определяется матрицей-столбцом  $\dot{x}$ . Матричное произведение  $\gamma \dot{x}$  можно трактовать как скалярное произведение векторов  $\gamma$  и  $\dot{x}$ . Поэтому при  $\gamma \dot{x} > 0$  проекция вектора  $\dot{x}$  на перпендикуляр к плоскости переключений направлена вдоль вектора  $\gamma$  и, наоборот, при  $\gamma \dot{x} < 0$  указанная проекция имеет противоположное направление.

Вектор фазовой скорости  $\dot{x}$  определяется для точек полу-пространств  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$  правыми частями уравнений (5.2) и (5.3) соответственно. Умножая матрицы, стоящие в правых частях этих уравнений, слева на матрицу-строку  $\gamma$ , получим выражения для  $\gamma \dot{x}$ , которые к тому же определяют  $\sigma$  — ско-

рость изменения аргумента управления  $\dot{\sigma}$ . Условия нормального переключения, обеспечивающие переход изображающей точки из полупространства  $\sigma < 0$  в полупространство  $\sigma > 0$  или переброс значения функции  $\psi(\sigma)$  от  $-1$  к  $1$ , определяются соотношениями

$$\gamma x(t_{\text{п}}) = 0, \quad \gamma Px(t_{\text{п}}) + \gamma h > 0, \quad \gamma Px(t_{\text{п}}) - \gamma h > 0. \quad (5.5)$$

Обратный переход изображающей точки или переброс значения  $\psi(\sigma)$  от  $1$  к  $-1$  обусловливается выражениями

$$\gamma x(t_{\text{п}}) = 0, \quad \gamma Px(t_{\text{п}}) + \gamma h < 0, \quad \gamma Px(t_{\text{п}}) - \gamma h < 0. \quad (5.6)$$

В неравенствах (5.5) и (5.6)  $t_{\text{п}}$  обозначает момент времени, при котором происходит переключение. Левые части неравенств (5.5) и (5.6) определяют  $\dot{\sigma}$  в соответствующих полупространствах. При переходе через плоскость переключения  $\sigma$  изменяется скачком на величину  $\pm 2\gamma h$ . Вследствие этого будем считать, что в релейной системе осуществляется жесткое переключение, если  $\gamma h \neq 0$  и мягкое переключение, когда  $\gamma h = 0$ .

Скользящий режим характеризуется соотношениями

$$\gamma x(t) = 0, \quad \gamma Px(t) + \gamma h < 0, \quad \gamma Px(t) - \gamma h > 0, \quad (5.7)$$

которые должны выполняться для конечного или бесконечного интервала времени  $t$ .

Выражения (5.7) определяют также тот участок плоскости переключения, внутри которого происходит скользящее движение системы. Рассмотрим равенства

$$\gamma Px + \gamma h = 0, \quad \gamma Px - \gamma h = 0, \quad (5.8)$$

которые в фазовом пространстве определяют две параллельные плоскости, симметрично расположенные относительно начала координат. Эти плоскости пересекают плоскость переключений по двум параллельным прямым, также симметрично расположенным относительно начала координат. Эти прямые являются границами участка скользящего движения. Указанные плоскости и прямые изображены на рис. 5.1, a, область II является зоной скользящего режима. Фазовые траектории, идущие из полупространств  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ , касаются плоскости переключений, если они примыкают к прямым, которые

определяются соответственно первой или второй плоскостью (5.8). Этот факт для наглядности изображен на рис. 5.1, б.

Таким образом, участок скользящего движения представляет собой бесконечную полосу на плоскости переключений, ограниченную двумя параллельными прямыми. Центром полосы является начало координат. Ширина этой полосы зависит от скалярной величины  $\gamma h$ . Изменением тех параметров элементов  $h_i$  столбца  $h$ , которые не входят в первые слагаемые равенств (5.8), можно непосредственно влиять на ширину полосы скользящего режима. При  $\gamma h = 0$  полоса стягивается в прямую.

**Примечание.** Каждую из граничных прямых зоны скользящего режима можно разбить на две полуправые. Полупрямые

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x(t) = 0, \\ \gamma Px(t) + \gamma h = 0, \\ \gamma P^2x(t) + \gamma Ph < 0, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \gamma x(t) = 0, \\ \gamma Px(t) - \gamma h = 0, \\ \gamma P^2x(t) - \gamma Ph > 0 \end{array} \right\} \quad (5.8a)$$

будут относиться к зоне скользящего режима, а полуправые

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x(t) = 0, \\ \gamma Px(t) + \gamma h = 0, \\ \gamma P^2x(t) + \gamma Ph > 0, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \gamma x(t) = 0, \\ \gamma Px(t) - \gamma h = 0, \\ \gamma P^2x(t) - \gamma Ph < 0, \end{array} \right\} \quad (5.8b)$$

— к области нормального переключения, причем неравенства, фигурирующие в (5.8a) и (5.8b) определяют знаки проекций вектора  $\ddot{x}$  фазового ускорения на вектор  $\gamma^*$ , который перпендикулярен плоскости переключений. Для фазовых траекторий полупространств  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$  соответственно имеют место выражения

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\gamma x} = \gamma P^2x + \gamma Ph, \\ \ddot{\gamma x} = \gamma P^2x - \gamma Ph. \end{array} \right\} \quad (5.8b)$$

Таким образом, при выполнении левой и правой групп условий (5.8b) изображающая точка переходит из зоны скользящего режима в полупространства  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$  соответ-

\*) То есть при  $\dot{\sigma} = 0$  судят о возможности переключения по знаку второй производной  $\ddot{\sigma}$ .

ственno. На рис. 5.1, б граничные полупрямые, принадлежащие области нормального переключения и зоне скользящего режима, изображены соответственно тонкой и жирной линиями. Однотипные граничные полупрямые симметричны относительно начала координат.

В третьем случае имеют место соотношения

$$\gamma x(t) = 0, \quad \gamma Px(t) + \gamma h > 0, \quad \gamma Px(t) - \gamma h < 0. \quad (5.9)$$

Очевидно, и в этом случае соотношения (5.9) определяют полосу на плоскости переключений.

Соотношения (5.7) и (5.9) являются противоречивыми между собой, поэтому соответствующие движения не могут одновременно существовать в одной релейной системе. Нетрудно установить, что неравенства (5.7), определяющие скользящий режим, могут иметь место только при  $\gamma h < 0$ , а следовательно неравенства (5.9) — при  $\gamma h > 0$ . Направление фазовых траекторий для случая  $\gamma h > 0$  изображено на рис. 5.1, в. Условиям (5.9) соответствует область III. В соответствии с направлением фазовых траекторий область III является пластинкой неустойчивых положений равновесия. В собственно релейных системах регулирования условие  $\gamma h < 0$  всегда выполняется или, точнее говоря, всегда имеет место неравенство  $\gamma h \leq 0$ . В этом неравенстве заложен глубокий смысл. Напомним, что основная задача регулирования состоит в том, чтобы привести систему к стационарному состоянию, которое в нашем случае определяется равенством  $x = 0$ . В релейных системах регулирующее воздействие вводится через матрицу-столбец  $\pm h$  посредством надлежащего чередования знаков «плюс» и «минус». Столбец  $h$  имеет размерность скорости, поэтому в фазовом пространстве он является «регулирующей скоростью». Релейная система не может решить задачу регулирования без переключений релейного управляющего элемента, так как математически этого не позволяет структура решений уравнений (5.2) и (5.3), описывающих движение системы в полупространствах  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ . Поэтому регулирующая скорость в этих полупространствах не может быть направлена в противоположную сторону от плоскости переключений. Это условие выполняется, если скалярное произведение векторов  $u$  и  $h$  не будет положительным, т. е. при  $\gamma h \leq 0$ . Поэтому для релейных систем регулирования мы будем рассматривать только два первых случая:

режим нормального переключения и скользящий режим движения вдоль плоскости переключения. Однако подчеркнем, что все результаты, которые получаются для режима нормального переключения, не зависят от знака скалярной величины  $\dot{y}h$ , поэтому они в одинаковой мере будут справедливы для систем регулирования и указанных выше нелинейных систем типа лампового генератора с характеристикой в виде кусочно-постоянной функции.

Мы рассматривали до сих пор идеальную характеристику релейного элемента. Однако нетрудно обобщить вышеизложенное на другие типы характеристик. Такие обобщения будут проводиться всякий раз, когда это окажется необходимым.

В режиме нормального переключения уравнение (5.1) является нелинейным. При некоторых условиях это уравнение допускает существование конечного числа (или счетного множества) периодических решений, которые могут существовать в целой области изменения параметров системы. Если стационарный режим, соответствующий периодическому решению, устойчив, то он наблюдается в виде автоколебаний системы.

Во многих случаях знание качественных и количественных характеристик стационарных режимов колебаний, описываемых периодическими решениями, является весьма важным фактором в общей оценке поведения релейных систем регулирования.

Мы займемся определением периодических решений уравнения (5.1), а следовательно, и стационарных режимов колебаний, соответствующих этим решениям, причем, если такие стационарные режимы колебаний нежелательны в системе, то мы попутно будем получать также средства для их уничтожения. Однако если иметь в виду не только системы регулирования, но и другие, в которых автоколебания являются рабочим режимом, то такое направление исследования становится самодовлеющим. Впрочем, следует отметить, что существование около регулируемого положения малых автоколебаний достаточно большой частоты иногда допускается и в системах регулирования. Это делается для подавления вредного влияния сухого трения люфтов и «мертвых» зон, имеющих место при относительном движении отдельных частей регулятора.

## § 5.2. Периодические решения и уравнение периодов

Периодическое решение уравнения (5.1) будем искать для режима нормального переключения, представив управляющую функцию  $\psi(\sigma)$  в виде релейной характеристики с петлей, которая изображена во второй и третьей графах табл. 1.1. Условия нормального переключения (5.5) и (5.6) сохранят свой смысл и в этом случае, если в правых частях первых равенств поставить  $\sigma_1^*$  и  $-\sigma_1^*$  соответственно, то есть будем иметь для перехода от  $\psi(\sigma) = -1$  к  $\psi(\sigma) = 1$  соотношения \*)

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x(t_n) = \sigma_1^*, \\ \gamma Px(t_n) - \gamma h > 0, \\ \gamma Px(t_n) + \gamma h > 0, \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

и для обратного перехода от  $\psi(\sigma) = 1$  к  $\psi(\sigma) = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x(t_n) = -\sigma_1^*, \\ \gamma Px(t_n) + \gamma h < 0, \\ \gamma Px(t_n) - \gamma h < 0. \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

Пусть в некоторый момент времени  $t = t_n$ , который примем за начало отсчета, выполняются условия нормального переключения (5.10). При этих условиях движение системы определяется уравнением (5.2). Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $x(0)$ , запишется в виде (см. (2.129) при  $t_0 = 0$ )

$$x(\tau) = KM(\tau)K^{-1}x(0) + KN(\tau)K^{-1}h. \quad (5.12)$$

Полученное выражение будет определять процесс движения системы до тех пор, пока справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) = \gamma x(\tau) = \\ = \gamma KM(\tau)K^{-1}x(0) + \gamma KN(\tau)K^{-1}h > -\sigma_1^*. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Предположим теперь, что мы выбрали такое начальное условие  $x(0) = x^*(0)$ , при котором по прошествии времени  $T$  имеем

$$x(T) = -x^*(0). \quad (5.14)$$

\*) Подробнее см. в § 5.8. В первом чтении можно принять  $\sigma_1^* = 0$ .

а в интервале времени  $0 \leq \tau \leq T$  неравенство (5.13) выполняется. При  $\tau = T$  произойдет новое переключение, так как матричная координата  $x(T)$  будет удовлетворять условию нормального переключения (5.11). Это является следствием формулы (5.14) и того факта, что  $x(0)$  по условию удовлетворяет соотношению (5.10). Но тогда при  $t > T$  движение системы будет определяться уравнением (5.3). Полагая в формуле (2.129)  $t_0 = T$ , меняя знак перед  $h$  на обратный и учитывая (5.14), запишем решение уравнения (5.3) в виде

$$x(T + \tau) = -KM(\tau)K^{-1}x(0) - KN(\tau)K^{-1}h \quad (5.15)$$

или

$$x(T + \tau) = -x(\tau), \quad (5.16)$$

где  $x(\tau)$  определяется по формуле (5.12). Это решение будет справедливо при  $0 \leq \tau \leq T$ , что соответствует интервалу времени  $T \leq t \leq 2T$ , так как в этом интервале будет выполняться неравенство

$$\sigma(T + \tau) = \gamma x(T + \tau) = -\gamma x(\tau) = -\sigma(\tau) < \sigma_1^*. \quad (5.17)$$

Из равенств (5.14) и (5.16) следует, что  $x(2T) = x(0)$ , т. е. к моменту времени  $t = 2T$  рассматриваемая автономная система возвращается к своему исходному состоянию. Таким образом, мы получаем периодическое решение с периодом  $2T$ , которое является симметричным на полупериоде  $T$ , так как удовлетворяет равенству (5.16) в интервале  $0 \leq \tau \leq T$ .

Для фактического построения периодического решения нужно отыскать такое значение  $x^*(0)$ , которое удовлетворяло бы условиям нормального переключения (5.10) и при котором решение (5.12) удовлетворяло бы условию симметричной периодичности (5.14). Подставляя в решение (5.12)  $\tau = T$  и учитывая условие периодичности (5.14), получим для определения  $x^*(0)$  матричное выражение

$$-x^*(0) = KM(T)K^{-1}x^*(0) + KN(T)K^{-1}h, \quad (5.18)$$

откуда будем иметь

$$-K[M(T) + E]K^{-1}x^*(0) = KN(T)K^{-1}h. \quad (5.19)$$

Разрешая (5.19) относительно  $x^*(0)$ , получим

$$x^*(0) = -K[M(T) + E]^{-1}N(T)K^{-1}h. \quad (5.20)$$

Подставим отсюда  $x^*(0)$  в условие нормального переключения (5.10). Тогда получим

$$-\gamma K [M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} h = \sigma_1^* \quad (5.21)$$

и

$$-\gamma P K [M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} h > |\gamma h|.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$-\gamma K J [M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} h > |\gamma h|, \quad (5.22)$$

если подставить в него матрицу  $P$ , выраженную по формуле типа (2.42) через каноническую матрицу и учесть, что  $KK^{-1} = E$ .

В неравенстве (5.22)  $|\gamma h|$  есть абсолютное значение скалярной величины  $\gamma h$ . Равенство (5.21) является трансцендентным уравнением относительно  $T$ . Это уравнение может иметь конечное или счетное множество корней. Каждый положительный корень уравнения (5.21) является полупериодом  $T$  периодического решения \*), если он удовлетворяет неравенству (5.22). Равенство (5.21) называется *уравнением периодов*. Процесс колебаний в интервале времени  $0 \leq t \leq T$  будет описываться выражением

$$x(t) = -K M(t) [M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} h + K N(t) K^{-1} h, \quad (5.23)$$

которое получается из (5.12) заменой  $\tau$  на  $t$  и подстановкой  $x(0) = x^*(0)$  из формулы (5.20). Начальное условие  $x^*(0)$  можно рассматривать как точку пересечения замкнутой фазовой траектории, соответствующей периодическому решению с плоскостью переключений  $\sigma = \sigma_1^*$ . Соотношения (5.20) — (5.23) определяют периодическое решение в матричной форме.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы привести эти соотношения к виду, удобному для вычислений. Для этого мы выразим их через исходные параметры системы в том виде, который был принят в предыдущей главе.

Форма матричной записи основных соотношений по существу определяет рецептуру необходимых вычислений. Рассмотрим сначала случай, когда характеристические числа  $\lambda_i$  ма-

\*) Для корней уравнения (5.21), являющихся полупериодами, сохраним обозначение  $T$ .

трицы  $P$  простые. Проведем рассуждения для формулы (5.20). Обратную матрицу для  $M(T) + E$  можно получить из формулы (4.142), если в ней положить  $\lambda = -1$ , и затем поменять знак на обратный. Матрица  $N(T)$  определяется по формуле (2.120) при  $t = T$ . Таким образом, матрицы  $[M(T) + E]^{-1}$  и  $N(T)$  являются диагональными с общими элементами, равными

$$\frac{1}{1 + e^{\lambda_i T}} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\lambda_i T} - 1}{\lambda_i}$$

соответственно. Поэтому будем иметь

$$[M(T) + E]^{-1} N(T) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{th} \frac{\lambda_2 T}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \operatorname{th} \frac{\lambda_n T}{2} \end{vmatrix}, \quad (5.24)$$

так как

$$\frac{e^{\lambda_i T} - 1}{e^{\lambda_i T} + 1} = \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}.$$

Далее, пользуясь формулой разложения (2.24), получим

$$K [M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} k_i \kappa_i. \quad (5.25)$$

Подставляя выражение (5.25) в формулу (5.20), получим соотношение для определения начального значения  $x^*(0)$  в виде

$$x^*(0) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} k_i \kappa_i h. \quad (5.26)$$

Подставляя (5.25) в формулу (5.21), получим уравнение периодов в форме

$$-\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \gamma k_i \kappa_i h = \sigma_1^*. \quad (5.27)$$

Для развертывания левой части неравенства (5.22) поступим следующим образом. Умножим слева матрицу (5.24) на диагональную матрицу  $J = \Lambda$ , определенную по формуле (2.44). Тогда будем иметь

$$J[M(T) + E]^{-1}N(T) = \begin{vmatrix} \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname{th} \frac{\lambda_2 T}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \operatorname{th} \frac{\lambda_n T}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.28)$$

Применяя к этой матрице формулу разложения (2.24), получим

$$KJ[M(T) + E]^{-1}N(T)K^{-1} = \sum_{i=1}^n \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} k_i \kappa_i. \quad (5.29)$$

Подставляя матрицу (5.29) в неравенство (5.22), представим его в виде

$$-\sum_{i=1}^n \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \gamma k_i \kappa_i h > |\gamma h|. \quad (5.30)$$

Перейдем, наконец, к формуле (5.23), определяющей процесс периодических колебаний на полупериоде  $T$ . Матрица  $M(t)$  определяется по формуле (2.94); она является диагональной с общим элементом  $e^{\lambda_i t}$ , поэтому (см. (5.24))

$$M(t)[M(T) + E]^{-1}N(T) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1} \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2} \operatorname{th} \frac{\lambda_2 T}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_n t}}{\lambda_n} \operatorname{th} \frac{\lambda_n T}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.31)$$

Далее, применяя формулу разложения (2.24) к диагональным матрицам (2.120) и (5.31), получим

$$KM(t)[M(T)+E]^{-1}N(T)K^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} k_i \alpha_i, \quad (5.32)$$

$$KN(t)K = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} k_i \alpha_i. \quad (5.33)$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.23), получим соотношение в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} k_i \alpha_i h + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} k_i \alpha_i h. \quad (5.34)$$

И, наконец, подставляя в формулы (5.27), (5.30) и (5.34)  $k_i \alpha_i$  из матричных тождеств (2.64), получим окончательную форму выражений для уравнения периодов

$$-\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} = \sigma_1^* \quad (5.35)$$

неравенства нормального переключения \*)

$$-\sum_{i=1}^n \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} > |\gamma h| \quad (5.36)$$

процесса периодического колебания на полупериоде  $T$

$$x(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad (5.37)$$

$$0 \leq t \leq T.$$

\*) Так будем называть неравенство (5.22), объединяющее в себе два неравенства условий нормального переключения (5.10).

Напомним, что  $t = 0$  соответствует точке пересечения замкнутой фазовой траектории периодического решения с плоскостью переключений  $\gamma x = \sigma_1^*$ . Матричная координата  $x^*(0)$  этой точки получается из формулы (5.26) вышеизложенным способом или из формулы (5.37) при  $t = 0$  в виде

$$x^*(0) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}. \quad (5.38)$$

Для случая, когда среди корней  $\lambda_i$  имеется один кратный корень — двойной нулевой корень  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ , процедура развертывания матричных выражений (5.20) — (5.23) сохраняется. Так, из формулы (4.143) указанным выше способом можно получить матрицу  $[M(T) + E]^{-1}$ . Эта матрица и матрица  $N(T)$  (формула (2.122) при  $t = T$ ) являются теперь квазидиагональными. Если их разбить на блоки так, как это делалось в выражениях (4.41) и (4.42), то новыми будут только нижние блоки. Перемножая эти клетки, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{T}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T & 0 \\ \frac{T^2}{2} & T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{T}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.39)$$

Учитывая (5.24) и (5.39), получим

$$[M(T) + E]^{-1} N(T) = \\ = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_{n-2}} \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{T}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.40)$$

Тогда по формуле разложения (2.24) будем иметь

$$K[M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} = \\ = \sum_{l=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_l} \operatorname{th} \frac{\lambda_l T}{2} k_l \kappa_l + \frac{T}{2} (k_{n-1} \kappa_{n-1} + k_n \kappa_n). \quad (5.41)$$

Умножая матрицу (5.40) на матрицу  $J$ , которую определим по формуле (2.49а) при  $\lambda_{n-1} = 0$ , будем иметь

$$J[M(T) + E]^{-1} N(T) = \\ = \begin{vmatrix} \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2} & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.42)$$

Применяя к этой матрице формулу разложения (2.24), получим

$$KJ[M(T) + E]^{-1} N(T) K^{-1} = \sum_{l=1}^{n-2} \operatorname{th} \frac{\lambda_l T}{2} k_l \kappa_l + \frac{T}{2} k_n \kappa_{n-1}. \quad (5.43)$$

Если умножить матрицу (5.40) на квазидиагональную матрицу  $M(t)$  (2.98) слева, то получим

$$M(t)[M(T) + E]^{-1} N(T) = \\ = \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1} \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_{n-2} t}}{\lambda_{n-2}} \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{tT}{2} & \frac{T}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.44)$$

Применяя формулу разложения (2.24) к квазидиагональным матрицам  $N(t)$  (2.122) и (5.44), получим

$$KN(t)K^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} k_i x_i + t(k_{n-1}x_{n-1} + k_n x_n) + \frac{t^2}{2} k_n x_{n-1}, \quad (5.45)$$

$$KM(t)[M(T) + E]^{-1}N(T)K^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} k_i x_i + \\ + \frac{T}{2} (k_{n-1}x_{n-1} + k_n x_n) + \frac{tT}{2} k_n x_{n-1}. \quad (5.46)$$

При наличии разложений (5.41), (5.43), (5.45) и (5.46) дальнейшие выкладки проводятся без затруднений. На конечном этапе следует только воспользоваться матричными тождествами (2.64) для простых корней  $\lambda_i$  и (2.66) для двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ .

Так, для случая двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  получим окончательную форму расчетных выражений для уравнения периодов

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h = \sigma_1^*, \quad (5.47)$$

неравенства нормального переключения

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} > |\gamma h|, \quad (5.48)$$

процесса периодического колебания на полупериоде

$$x(t) = -\sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h - \\ - \frac{tT}{2} \frac{F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} \frac{F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ + t \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \frac{t^2}{2} \frac{F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.49)$$

и, наконец, начальной координаты процесса периодического колебания

$$x^*(0) = - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h. \quad (5.50)$$

### § 5.3. Устойчивость периодических колебаний и характеристическое уравнение

Устойчивость периодических колебаний определяется посредством исследования характера решений уравнений (5.1), удовлетворяющих начальным условиям, близким к тем, которые соответствуют найденным периодическим решениям. Периодическому решению (5.23) в фазовом пространстве соответствует изолированная замкнутая траектория. Замкнутой фазовой траектории соответствует бесконечное множество периодических решений, отличающихся друг от друга по фазе, так как каждая точка замкнутой траектории может служить начальной для периодического решения. Этот факт является следствием автономности системы уравнения (5.1); их решение не зависит от выбора начала отсчета времени.

Вследствие указанных обстоятельств найденное периодическое решение может обладать обыкновенной устойчивостью по Ляпунову, асимптотически устойчивым оно быть не может. Действительно, в любой, сколь угодно малой окрестности произвольной точки замкнутой фазовой траектории будет находиться элемент ее дуги. Каждую точку этой дуги можно выбрать за начальную для возмущенного движения. Это возмущенное движение является периодическим решением, отличающимся от исходного на постоянную фазу. Указанному континууму периодических решений соответствует одна и та же «амплитуда» колебаний и «частота».

Этими величинами обычно интересуются в собственных задачах по автоматическому регулированию. «Хранителем» этих величин является изолированная замкнутая фазовая траектория или, как ее иначе называют, предельный цикл, поэтому оказывается интересным рассмотреть устойчивость такого цикла. Исследование устойчивости предельного цикла не потребует дополнительных сведений, помимо тех, которые уже были изложены в предыдущих главах. Можно показать,

что из асимптотической устойчивости предельного цикла следует обыкновенная устойчивость периодического решения.

Соответствующие рассуждения проведем в следующем плане. Начальное значение (5.20) определяет матричную координату  $x^*(0)$  точки пересечения замкнутой фазовой траектории с плоскостью переключений, когда изображающая точка переходит из полупространства  $\sigma < 0$  в полупространство  $\sigma > 0$ . Такое направление будем называть пересечением снизу вверх. По прошествии времени, равного периоду  $2T$ , изображающая точка, двигаясь вдоль замкнутой траектории, опять попадает в указанную точку. На плоскости переключений точка  $x^*(0)$  является в этом смысле неподвижной. Другие решения уравнений (5.1), соответствующие начальным условиям, близким к  $x^*(0)$ , определяют, вообще говоря, незамкнутые фазовые траектории. Эти траектории образуют временную последовательность точек пересечения снизу вверх плоскости переключений.

Так как фазовые траектории не пересекаются между собой, то об устойчивости предельного цикла можно судить по характеру указанной временной последовательности точек на плоскости переключений. Если эта последовательность сходится к неподвижной точке, то предельный цикл будет асимптотически устойчив. В таком смысле задача сводится к построению точечного преобразования плоскости переключений в окрестности точки, соответствующей найденному периодическому решению. Эта точка является неподвижной или инвариантной для искомого точечного преобразования. Аналитически точечное преобразование определяется разностным уравнением.

Для найденного выше периодического решения, которое является симметричным на полупериоде  $T$ , можно упростить рассуждения. Для этого случая достаточно установить зависимость между последовательными точками пересечения плоскости переключений, а не точками, которые пересекают плоскость только снизу вверх. Пусть  $x^*(0)$  определяется по формуле (5.20), удовлетворяет условию нормального переключения (5.10) и является начальным условием для симметричного периодического решения (5.23). Тогда по прошествии времени  $T$  матричная координата примет противоположное значение —  $x^*(0)$ . Выберем матричную координату  $x^*(0) + \delta x(0)$ , близкую к  $x^*(0)$ , и потребуем, чтобы она удовлетворяла

условию нормального переключения (5.10). Примем координату  $x^*(0) + \delta x(0)$  за новое начальное условие, которое, вообще говоря, будет определять непериодическое решение уравнений (5.1). Для этого решения следующий момент переключения наступит не по прошествии времени  $T$ , а через  $T + \delta T_0$ . При этом соответствующая матричная координата будет мало отличаться от  $-x^*(0)$ , поэтому обозначим ее через  $-[x^*(0) + \delta x(T)]$ .

Матричная координата  $-[x^*(0) + \delta x(T)]$  должна удовлетворять условиям нормального переключения (5.11). Подставим в решение (5.12) вместо  $x(0)$  новое начальное условие  $x^*(0) + \delta x(0)$ . Полагая там  $\tau = T + \delta T_0$  и учитывая принятые обозначения, получим выражение

$$\begin{aligned} -[x^*(0) + \delta x(T)] &= \\ &= KM(T + \delta T_0)K^{-1}[x^*(0) + \delta x(0)] + KN(T + \delta T_0)K^{-1}h. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Отсюда равенство, фигурирующее в условиях нормального переключения (5.11), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma KM(T + \delta T_0)K^{-1}[x^*(0) + \delta x(0)] + \\ + \gamma KN(T + \delta T_0)K^{-1}h = -\sigma_1^*. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Два последних неравенства условий (5.11) выполняются для  $-[x^*(0) + \delta x(T)]$  по непрерывности, так как они выполняются для  $-x^*(0)$ , а элементы столбца  $\delta x(T)$  являются малыми величинами.

Обозначим координаты и моменты времени последующих переключений через  $x^*(0) + \delta x(2T)$ ,  $-[x^*(0) + \delta x(3T)]$  и т. д.,  $T + \delta T_1$ ,  $T + \delta T_2$  и т. д. соответственно. Тогда несложно показать, что выражения (5.50) и (5.51) устанавливают зависимость между

$$x^*(0) + \delta x[(m-1)T], \quad T + \delta T_{m-1}$$

и

$$-[x^*(0) + \delta x(mT)], \quad T + \delta T_m,$$

соответствующими любым двум последовательным нормальным переключениям. Учитывая это обстоятельство и осуществляя простую перегруппировку, перепишем уравнения (5.51)

и (5.52) в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta x(mT) = & -x^*(0) - KM(T + \delta T_{m-1}) K^{-1} \{x^*(0) + \\ & + \delta x[(m-1)T]\} - KN(T + \delta T_{m-1}) K^{-1} h, \\ \gamma KM(T + \delta T_{m-1}) K^{-1} \{x^*(0) & + \delta x[(m-1)T]\} + \\ & + \gamma KN(T + \delta T_{m-1}) K^{-1} h = -\sigma_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Выражения (5.53) являются нелинейными разностными уравнениями относительно так называемых вариаций  $\delta x$  матричной координаты  $x$ . Вариации  $\delta x(mT)$  можно рассматривать как матричные координаты указанной выше временной последовательности точек, которые отсчитываются от точки  $x^*(0)$ . Анализ устойчивости периодических колебаний сводится теперь к нахождению условий, при которых  $\delta x(mT) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Такая задача решается в рамках теории устойчивости Ляпунова, изложенной в гл. III. Действительно, выражения (5.53) можно рассматривать как разностные уравнения возмущенного движения дискретной динамической системы, так как нетрудно показать, что тождество  $\delta x \equiv 0$  составляет тривиальное решение для этих уравнений.

Для исследования устойчивости в смысле Ляпунова построим уравнения первого приближения. Для этой цели разложим функции, входящие в уравнения (5.53) в ряд Тейлора по степеням вариаций  $\delta x[(m-1)T]$  и  $\delta T_{m-1}$ . Все члены, не содержащие вариаций, очевидно, сократятся. Тогда, отбрасывая все члены разложения порядка выше первого относительно вариаций  $\delta x[(m-1)T]$  и  $\delta T_{m-1}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \delta x(mT) = & -KM(T)K^{-1}\delta x[(m-1)T] - \\ & - [K\dot{M}(T)K^{-1}x^*(0) + K\dot{N}(T)K^{-1}h]\delta T_{m-1}, \\ \gamma KM(T)K^{-1}\delta x[(m-1)T] & + \\ & + \gamma [K\dot{M}(T)K^{-1}x^*(0) + K\dot{N}(T)K^{-1}h]\delta T_{m-1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

где

$$\dot{M}(T) = \left[ \frac{dM(t)}{dt} \right]_{t=T}, \quad \dot{N}(T) = \left[ \frac{dN(t)}{dt} \right]_{t=T}.$$

По формулам (2.102), (2.109), (2.110) и (5.20) имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}(T) &= M(T)J, & \dot{N}(T) &= M(T), \\ x^*(0) &= -K[M(T) + E]^{-1}N(T)K^{-1}h. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

С помощью выражений (5.55) уравнения (5.54) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \gamma x(mT) &= -KM(T)K^{-1}\delta x[(m-1)T] - \\ &\quad - KS(T)K^{-1}h\delta T_{m-1}, \\ \gamma KM(T)K^{-1}\delta x[(m-1)T] &+ \gamma KS(T)K^{-1}h\delta T_{m-1} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

где

$$S(T) = M(T)\{-J[M(T) + E]^{-1}N(T) + E\}. \quad (5.57)$$

Из второго, скалярного уравнения (5.56) получим

$$\delta T_{m-1} = -\frac{\gamma KM(T)K^{-1}\delta x[(m-1)T]}{\gamma KS(T)K^{-1}h}. \quad (5.58)$$

Подставляя полученное значение  $\delta T_{m-1}$  в первое уравнение (5.56), преобразуем его к виду

$$\delta x(mT) = K\left[-M(T) + \frac{S(T)K^{-1}h\gamma KM(T)}{\gamma KS(T)K^{-1}h}\right]K^{-1}\delta x[(m-1)T]. \quad (5.59)$$

Таким образом, мы получили в матричной форме уравнение первого приближения, которое представляет собой линейное разностное уравнение с постоянной операторной матрицей

$$P^* = K\left[-M(T) + \frac{S(T)K^{-1}h\gamma KM(T)}{\gamma KS(T)K^{-1}h}\right]K^{-1}. \quad (5.60)$$

Следовательно, найденное периодическое решение будет асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова с точностью до фазы, если все корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения операторной матрицы (5.60), которое можно записать в виде

$$\det\left[\lambda E + M(T) - \frac{S(T)K^{-1}h\gamma KM(T)}{\gamma KS(T)K^{-1}h}\right] = 0, \quad (5.61)$$

будут по модулю меньше единицы, и неустойчиво, если по крайней мере один корень будет по модулю больше единицы.

Приведем уравнение (5.61) к форме, более приемлемой для вычислений. Используем формулы (4.21) и вынесем матрицу  $\lambda E + M(T)$  за квадратные скобки. Тогда уравнение (5.61) запишется в виде (см. § 2.1)

$$\det[\lambda E + M(T)] \det \left\{ E - \frac{[\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) u \beta M(T)}{\beta S(T) u} \right\} = 0. \quad (5.62)$$

Второе слагаемое в фигурных скобках представляет собой произведение столбца

$$\tilde{u} = [\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) u \quad (5.63)$$

на строку

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta M(T)}{\beta S(T) u}, \quad (5.64)$$

так как  $\beta S(T) u$  — скалярная величина. Тогда, используя формулу (4.133), представим уравнение (5.62) в форме

$$\{\det[\lambda E + M(T)]\} \left\{ 1 - \frac{\beta M(T) [\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) u}{\beta S(T) u} \right\} = 0. \quad (5.65)$$

Если использовать тождество

$$\begin{aligned} M(T)[\lambda E + M(T)]^{-1} &= [M(T) + \lambda E - \lambda E][\lambda E + M(T)]^{-1} = \\ &= E - \lambda [\lambda E + M(T)]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

то после несложных приведений и отбрасывания скалярной величины  $\beta S(T) u$ , характеристическое уравнение (5.65) представляется в форме

$$\{\det[\lambda E + M(T)]\} \lambda \beta [\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) u = 0. \quad (5.67)$$

Отсюда вытекает, что один корень характеристического уравнения всегда равен нулю. Этот факт является фундаментальным, так как он показывает, что асимптотическая устойчивость периодических колебаний с точностью до фазы (т. е. предельного цикла) в автономной релейной системе зависит от  $(n-1)$  характеристических чисел линейного разностного уравнения первого приближения (5.59).

Таким образом, окончательно за характеристическое уравнение, решающее задачу об устойчивости, будем принимать

уравнение  $(n - 1)$ -й степени в виде

$$\{\det[\lambda E + M(T)]\} \beta [\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) u = 0. \quad (5.68)$$

Чтобы иметь возможность применять различные критерии устойчивости, которые обсуждались в § 4.3, введем в рассмотрение дробно-рациональную функцию от  $\lambda$

$$W^*(\lambda) = -\frac{\beta M(T) [\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) u}{\beta S(T) u}, \quad (5.69a)$$

которая фигурирует в характеристическом уравнении в форме (5.65).

Форма записи матричных выражений (5.68) и (5.69a) определяет порядок и характер предварительных операций, которые необходимо провести, чтобы получить окончательные вычислительные формулы.

Развернем сначала матричные выражения (5.68) и (5.69a) для случая простых корней  $\lambda_i$ . В этом случае все квадратные матрицы, входящие в (5.68) и (5.69a), являются диагональными. Так, из матрицы (4.142) изменением знака перед  $M(T)$  получаем

$$[\lambda E + M(T)]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda + e^{\lambda_1 T}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda + e^{\lambda_2 T}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda + e^{\lambda_n T}} \end{vmatrix}. \quad (5.69)$$

Учитывая вид матрицы (5.28) и тождество

$$e^{\lambda_i T} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}\right) = 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}, \quad (5.70)$$

получим для матрицы (5.57) выражение в виде

$$S(T) = \begin{vmatrix} 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_2 T}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_n T}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.71)$$

Перемножая матрицы (5.69) и (5.71), получим

$$[\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda + e^{\lambda_1 T}}{1 + e^{\lambda_1 T}} & 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_2 T}{2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda + e^{\lambda_2 T}}{1 + e^{\lambda_2 T}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_n T}{2} \\ & & & \frac{\lambda + e^{\lambda_n T}}{1 + e^{\lambda_n T}} \end{vmatrix}. \quad (5.72)$$

Умножая матрицу (5.72) слева на диагональную матрицу  $M(T)$  с общим элементом  $e^{\lambda_i T}$ , получим

$$M(T)[\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{e^{\lambda_1 T} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2}\right)}{\lambda + e^{\lambda_1 T}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_n T} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_n T}{2}\right)}{\lambda + e^{\lambda_n T}} \end{vmatrix}. \quad (5.73)$$

Для любых корней  $\lambda_i$  имеет место равенство

$$\det [\lambda E + M(T)] = \prod_{i=1}^n (\lambda + e^{\lambda_i T}), \quad (5.74)$$

в котором каждый корень учитывается столько раз, какова его кратность. Умножая матрицу (5.71) слева на строку  $\beta$  и справа на столбец  $u$ , получим прямым вычислением \*)

$$a = \beta S(T) u = \sum_{i=1}^n \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}\right) u_i \beta_i. \quad (5.75)$$

Проделывая такую же операцию над матрицами (5.72), (5.73) и учитывая формулы (5.74), (5.75), получим выражения

---

\*) Для сокращения записи здесь скалярная величина  $\beta S(T) u$  обозначается  $a$ .

для характеристического уравнения (5.68) в форме

$$\prod_{j=1}^n (\lambda + e^{\lambda_j T}) \sum_{i=1}^n \frac{1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}}{\lambda + e^{\lambda_i T}} u_i \beta_i = 0 \quad (5.76)$$

для дробно-рациональной функции (5.69) в виде

$$W^*(\lambda) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}\right)}{\lambda + e^{\lambda_i T}} u_i \beta_i. \quad (5.77)$$

Для случая, когда среди корней  $\lambda_i$  имеется один кратный корень, а именно  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ , общая процедура вычислений, естественно, сохраняется, хотя получаемые выражения несколько усложняются. Так, из матрицы (4.143) посредством замены  $\lambda$  на  $-\lambda$  и общей перемены знака перед всеми членами получим

$$[\lambda E + M(T)]^{-1} = \\ = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_1 T}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\lambda - e^{\lambda_{n-2} T}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda + 1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{T}{(\lambda + 1)^2} & \frac{1}{\lambda + 1} \end{vmatrix}. \quad (5.78)$$

Учитывая вид матрицы (5.42), образуем сначала матрицу

$$-J[M(T) + E]^{-1} N(T) + E = \\ = \begin{vmatrix} 1 - \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 - \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{T}{2} & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.79)$$

Умножая матрицу (5.79) на квазидиагональную матрицу  $M(T)$  (формула (2.98) при  $t=T$ ) и учитывая тождество (5.75),

получим для матрицы (5.57) выражение

$$S(T) = \begin{vmatrix} 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2} & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.80)$$

Перемножая матрицы (5.78) и (5.80), получим

$$[\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) = \\ = \begin{vmatrix} 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2}}{1 + e^{\lambda_1 T}} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2}}{\lambda + e^{\lambda_{n-2} T}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda + 1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2} \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)^2} & \frac{1}{\lambda + 1} \end{vmatrix}. \quad (5.81)$$

Умножая таблицу (5.81) на квазидиагональную матрицу  $M(T)$  (формула (2.98) при  $t = T$ ), получим

$$M(T)[\lambda E + M(T)]^{-1} S(T) = \\ = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 T} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{\lambda_1 T} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_1 T}{2}\right)}{\lambda + e^{\lambda_1 T}} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\lambda_{n-2} T} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_{n-2} T}{2}\right)}{\lambda + e^{\lambda_{n-2} T}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda + 1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2} \frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2} & \frac{1}{\lambda + 1} \end{vmatrix}. \quad (5.82)$$

Умножая матрицу (5.8) слева на строку  $\beta$  и справа на столбец  $u$ , получим прямым вычислением

$$\begin{aligned} a = \beta S(T) u = \sum_{i=1}^n \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right) u_i \beta_i + u_{n-1} \beta_{n-1} + u_n \beta_n + \\ + \frac{T}{2} u_{n-1} \beta_n. \quad (5.83) \end{aligned}$$

Проделывая такую же операцию над матрицами (5.81) и (5.82) и учитывая формулы (5.74) и (5.83), получим выражения для характеристического уравнения (5.68) в форме

$$\begin{aligned} (\lambda + 1)^2 \prod_{j=1}^{n-2} (\lambda + e^{\lambda_j T}) \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}}{\lambda + e^{\lambda_i T}} u_i \beta_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda + 1} (u_{n-1} \beta_{n-1} + u_n \beta_n) + \frac{T}{2} \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)^2} u_{n-1} \beta_n \right\} = 0, \quad (5.84) \end{aligned}$$

а для дробно-рациональной функции (5.69) в виде

$$\begin{aligned} W^*(\lambda) = -\frac{1}{a} \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right)}{\lambda + e^{\lambda_i T}} u_i \beta_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda + 1} (u_{n-1} \beta_{n-1} + u_n \beta_n) + \frac{T}{2} \frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2} u_{n-1} \beta_n \right\}. \quad (5.85) \end{aligned}$$

Дробно-рациональные функции (5.77) и (5.85) позволяют проводить анализ устойчивости по принципу аргумента, который был изложен в § 4.3, так как эти функции играют ту же роль, что и функции (4.63).

Чтобы представить эти функции в окончательной форме, подставим в выражения (5.75), (5.83) и (5.85) величины  $u_i$ ,  $\beta_i$ , определенные по формулам (4.51), причем для простых корней  $\lambda_i$  следует брать первые формулы (4.51), а для двойного нулевого корня — два последних выражения. Тогда для дробно-рациональных функций (5.77) и (5.85) получим соответственно выражения в виде

$$\left. \begin{aligned} W^*(\lambda) = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right)}{\lambda + e^{\lambda_i T}} \frac{\gamma^F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}, \\ a = \sum_{i=1}^n \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right) \frac{\gamma^F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} \end{aligned} \right\} \quad (5.86)$$

и

$$\left. \begin{aligned} W^*(\lambda) = & -\frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right)}{\lambda + e^{\lambda_i T}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda+1} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \frac{T}{2} \frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} \right\}, \\ a = & \sum_{i=1}^{n-2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right) \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \\ & + \frac{T}{2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

Характеристические уравнения (5.76) и (5.84) преобразуем посредством подстановки (4.53) и выражений (4.51) соответственно к форме

$$\prod_{j=1}^n \left( v - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\lambda_i T}{2}}{v - \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} = 0 \quad (5.88)$$

и

$$\left. \begin{aligned} v^2 \prod_{j=1}^{n-2} \left( v - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \right) \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\lambda_i T}{2}}{v - \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{v} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \frac{T}{2v^2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} \right\} = 0. \right\} \quad (5.89)$$

Преобразованные характеристические уравнения  $(n-1)$ -й степени (5.88) и (5.89) удобны в том отношении, что они позволяют решать задачу об устойчивости с помощью критерия Гурвица.

**П р и м е ч а н и е.** Из асимптотической устойчивости предельного цикла следует обыкновенная устойчивость исходного периодического решения. Это положение легко доказать, если будет показано, что надлежащим выбором  $\delta x(0)$  сумму всех вариаций  $\delta T_m$  можно сделать меньше любого, наперед заданного числа. Из (5.58), (5.59) и (5.60) легко установить, что

$$\sum_{m=1}^m \delta T_m = - \frac{\gamma K M(T) K^{-1}}{\gamma K S(T) K^{-1} h} \sum_{m=0}^{\infty} P^{*m} \delta x(0).$$

Из асимптотической устойчивости предельного цикла следует, что  $P^{*m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  и матрица  $P^* - E$  является неособой. Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta T_m = \frac{\gamma K M(T) K^{-1} [P^* - E]^{-1} \delta x(0)}{\gamma K S(T) K^{-1} h}.$$

## § 5.4. О смене устойчивости

При нахождении периодических решений необходимо определять положительные корни уравнения периодов. Уравнение периодов является трансцендентным, и его удобно решать графическими методами. Для графического построения будем рассматривать левую часть уравнения периодов как функцию положительного параметра  $\tau$  и обозначать ее через  $\sigma^*(\tau)$ . Тогда, например, для случая простых корней  $\lambda_i$  в соответствии с формулой (5.35) можем записать

$$\sigma^*(\tau) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i \tau}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}. \quad (5.90)$$

График функции  $\sigma^*(\tau)$  будем называть *кривой периодов*. Наряду с кривой периодов будем рассматривать прямую, параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на положительную величину  $\sigma_1^*$ , которую для краткости будем называть *прямой*  $\sigma_1^*$ . Абсциссы точек пересечения кривой периодов  $\sigma^*(\tau)$  с прямой  $\sigma_1^*$ , которые удовлетворяют неравенству нормального переключения, являются полупериодами  $T$ . Для кривой периодов (5.90) неравенство нормального переключения определяется формулой (5.36).

Продифференцируем  $\sigma^*(\tau)$  по  $\tau$ . Тогда при  $\tau = T$  будем иметь

$$\left[ \frac{d\sigma^*(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T} = \dot{\sigma}^*(T) = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\lambda_i T}{2}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}. \quad (5.91)$$

Геометрически  $\dot{\sigma}^*(T)$  определяет угловой коэффициент касательной в тех точках кривой периодов, абсциссы которых могут быть полупериодами. С помощью тождества

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} = 1 - \operatorname{th}^2 y \quad (5.92)$$

выражение (5.91) преобразуется к виду

$$\dot{\sigma}^*(T) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{\lambda_i T}{2}\right) \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}. \quad (5.93)$$

Теперь мысленно развернем преобразованное характеристическое уравнение (5.88) и представим его в форме (4.59). Коэффициент при  $v$  в старшей степени получается из (5.88), если в выражениях  $v = \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}$  второе слагаемое положить равным нулю. Так, нетрудно получить выражение

$$p'_0 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{\lambda_i T}{2}\right) \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}. \quad (5.94)$$

Сравнивая формулы (5.93) и (5.94), получим соотношение

$$\dot{\sigma}^*(T) = -\frac{1}{2} p'_0. \quad (5.95)$$

Это соотношение является характерным для рассматриваемых систем, и оно не зависит от типа корней  $\lambda_i$ . Таким образом, половина старшего коэффициента преобразованного характеристического уравнения и угловой коэффициент касательной кривой периодов в точках ее пересечения с прямой  $\sigma_1^*$  совпадают, если одну из этих величин взять с обратным знаком. В частности, из формулы (5.95) следует, что старший коэффициент  $p'_0$  будет отрицательным или, наоборот, положительным, смотря по тому, будет ли кривая периодов пересекать прямую  $\sigma_1^*$  соответственно снизу вверх или сверху вниз. Если однозначная и непрерывная кривая периодов пересекает прямую  $\sigma_1^*$  в нескольких точках, то, очевидно, в этих точках знаки угловых коэффициентов касательных к кривой периодов будут чередоваться. Но тогда будут чередоваться и знаки старшего коэффициента  $p'_0$  в преобразованном характеристическом уравнении.

Условия Гурвица имеют различный вид в зависимости от знака старшего коэффициента  $p'_0$ . Для  $p'_0 > 0$  условия Гурвица имеют вид неравенств (4.60), для  $p'_0 < 0$  они определяются неравенствами (4.61). Если, например, данной точке пересечения соответствует автоколебательный режим, то

в большинстве практических случаев можно ожидать, что следующей (или предшествующей) точке пересечения будет соответствовать неустойчивое периодическое решение, так как для сохранения устойчивости нужно, чтобы вместе с коэффициентом  $p'_0$  изменили свой знак все определили Гурвица с нечетными индексами. Соотношение (5.95) имеет большое практическое значение, так как оно помогает правильно сформулировать условия устойчивости в виде неравенств (4.60) или (4.61) для найденных периодических решений.

## § 5.5. Автоколебания в системе стабилизации курса нейтрального самолета

Собственное движение системы стабилизации будем описывать уравнениями по типу (4.216) в виде

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \\ \Theta\ddot{\eta} + \dot{\eta} = h_2'\psi(\sigma), \\ \sigma = \varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2\ddot{\varphi}. \end{array} \right\} \quad (5.96)$$

Управляющую функцию  $\psi(\sigma)$  будем представлять в виде идеальной релейной характеристики или в виде петлеобразной характеристики типа люфта. Графики этих характеристик приведены в первых графах табл. 1.1.

Чтобы воспользоваться общими вычислительными формулами для нахождения периодических решений, необходимо предварительно определить характеристики разомкнутой системы регулирования. Такими характеристиками являются: характеристический полином  $\Delta(\lambda)$ , его корни  $\lambda_i$ , присоединенная матрица  $F(\lambda)$ , а также элементы строки  $\psi$  и столбца  $h$ . Однако все эти величины были уже получены в § 4.10, так как при  $\psi(\sigma) \equiv 0$  уравнения (4.216) и (5.96) идентичны.

Рассматриваемая система относится к релейным системам с мягким переключением, так как имеет место равенство (4.223), т. е.  $\psi h = 0$ . Поэтому вся плоскость переключения, за исключением прямой или ее отрезка, представляет собой зону нормального переключения.

Среди корней  $\lambda_i$ , определяемых формулами (4.226), находится один кратный корень, а именно  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Следовательно, периодические решения будут определяться по

формулам (5.47) — (5.50), а их устойчивость — по преобразованному характеристическому уравнению (5.89). Принимая во внимание вид корней (4.226) и коэффициенты (4.231), запишем уравнение периодов (5.47) в виде

$$\frac{Nh'_2}{M\Theta - 1} \left[ \left( -\frac{1}{M^3} + \frac{a_1}{M^2} - \frac{a_2}{M} \right) \operatorname{th} \frac{MT}{2} + (\Theta^3 - a_1\Theta^2 + a_2\Theta) \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right] + \frac{Nh'_2}{M} \left( a_1 - \frac{1}{M} - \Theta \right) \frac{T}{2} = \sigma^*. \quad (5.97)$$

Представим уравнение (5.97) в более симметричной форме

$$-\frac{Nh'_2}{M\Theta - 1} \left[ \left( -\frac{1}{M^3} + \frac{a_1}{M^2} - \frac{a_2}{M} \right) \left( \frac{MT}{2} - \operatorname{th} \frac{MT}{2} \right) + (\Theta^3 - a_1\Theta^2 + a_2\Theta) \left( \frac{T}{2\Theta} - \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right) \right] = \sigma^*. \quad (5.98)$$

Левая часть уравнения (5.98) при замене  $T$  на  $\tau$  определяет кривую периодов  $\sigma^*(\tau)$  (см. предыдущий параграф). Разложим функцию  $\sigma^*(\tau)$  в ряд по степеням  $\tau$ . Учитывая формулу

$$\operatorname{th} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{2y^5}{3 \cdot 5} - \dots, \quad (5.99)$$

получим для малых значений  $\tau$  выражение

$$\sigma^*(\tau) \approx \frac{Nh'_2}{\Theta} \left( -a_1 + a_2 M + \frac{a_2}{\Theta} \right) \frac{\tau^3}{24}. \quad (5.100)$$

Для больших значений  $\tau$  можно пренебречь гиперболическими тангенсами относительно  $\tau$ . Тогда будем иметь

$$\sigma^*(\tau) \approx \frac{Nh'_2}{M} \left( a_1 - \frac{1}{M} - \Theta \right) \frac{\tau}{2}. \quad (5.101)$$

Таким образом, поведение кривой периодов зависит от знака выражений, стоящих в скобках в формулах (5.100) и (5.101). Эти выражения совпадают со скобками, фигурирующими в неравенстве (4.239). Поэтому на плоскости параметров  $a_1, M$  опять можно построить четыре области, которые изображены на рис. 4.7. Внутри этих областей сохраняются постоянными сочетания знаков, указанных выше скобок. В области I обе скобки положительны, в области II, наоборот, они отрицательны. В областях III и IV скобки имеют различные знаки. В области III скобка в формуле (5.100) отри-

цательна, а в области *IV* положительна. Функция  $\sigma^*(\tau)$  является суммой двух монотонных функций.

Учитывая все вышеизложенные обстоятельства, нетрудно установить характер поведения кривой периодов во всех четырех областях рис. 4.7. Ход кривых периодов в этих областях представлен на рис. 5.2. Кроме того, там изображена прямая  $\sigma_1^*$ , точкам пересечения которой с кривой перио-

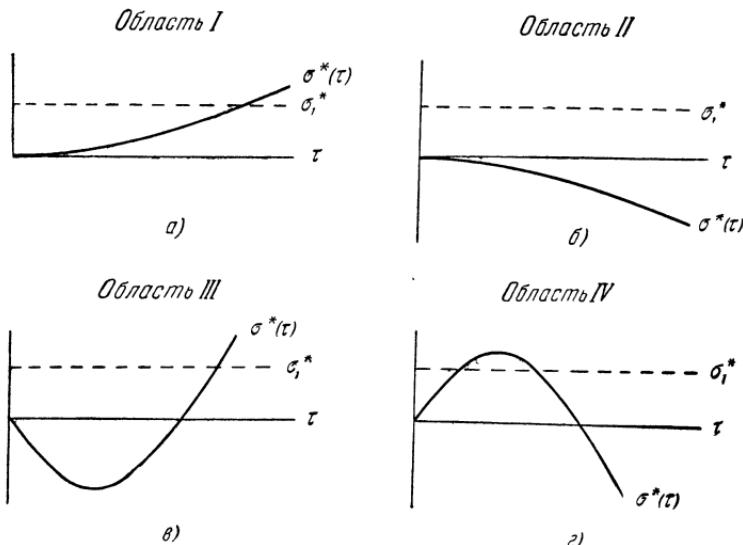


Рис. 5.2. Кривые периодов автоколебательных режимов.

дов соответствуют периодические решения. Если рассматривается идеальная релейная характеристика, то следует полагать  $\sigma_1^* = 0$ ; тогда периодические решения будут соответствовать точкам пересечения кривой периодов с осью абсцисс.

В точках пересечения необходимо проверить выполнение неравенства нормального переключения, которое в данном случае получается из формулы (5.48). При учете параметров (4.223), (4.226) и (4.231) неравенство (5.48) запишется в виде

$$\frac{Nh'_2}{M\Theta - 1} \left[ \left( \frac{1}{M^2} - \frac{a_1}{M} + a_2 \right) \operatorname{th} \frac{MT}{2} + (-\Theta^2 + a_1\Theta - a_2) \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right] + \frac{Nh'_2}{M} \frac{T}{2} > 0. \quad (5.102)$$

Для достаточно больших значений  $T$  это неравенство выполняется. Оно выполняется также и при малых значениях  $T$ , так как с точностью до членов, пропорциональных  $T^3$ , его в этом случае можно представить в виде

$$\frac{Nh'_2 a_2}{\Theta} \frac{T}{2} > 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что неравенство (5.102) имеет место для любых  $T$ , так как его левая часть является линейной комбинацией монотонно возрастающих функций. Следовательно, для рассматриваемой системы все корни уравнения периодов (5.98) будут определять полупериоды  $T$  симметричных периодических решений.

Таким образом, для идеальной релейной характеристики имеем по одному периодическому решению в областях III и IV (см. рис. 5.2). В областях I и II периодические решения не существуют. Наличие петли в релейной характеристике приводит к появлению периодического решения в области I и при малых значениях  $\sigma_1^*$  к появлению дополнительного периодического решения в области IV.

Для определения устойчивости найденных периодических решений воспользуемся преобразованным характеристическим уравнением (5.89). В данном случае оно является уравнением третьей степени вида

$$p'_0 v^3 + p'_1 v^2 + p'_2 v + p'_3 = 0, \quad (5.103)$$

коэффициенты  $p'_i$ , которого определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} p'_0 &= \frac{Nh'_2}{M\Theta - 1} \left[ \left( -\frac{1}{M^2} + \frac{a_1}{M} - a_2 \right) \operatorname{th}^2 \frac{MT}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (\Theta^2 - a_1\Theta + a_2) \operatorname{th}^2 \frac{T}{2\Theta} \right], \\ p'_1 &= \frac{Nh'_2 \left( 1 + \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right)}{M\Theta - 1} \times \\ &\quad \times \left[ \left( -\frac{1}{M^2} + \frac{a_1}{M} - a_2 \right) \operatorname{th} \frac{MT}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (\Theta^2 - a_1\Theta + a_2) \operatorname{th} \frac{T}{2T} \right] - \frac{Nh'_2 T}{2M}, \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$

$$\left. \begin{aligned} p'_2 &= Nh'_2 \left[ \left( \frac{M\Theta+1}{M^2} - \frac{\alpha_1}{M} \right) \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} - \frac{T}{2M} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \operatorname{th} \frac{MT}{2} + \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right) \right], \\ p'_3 &= - \frac{Nh'_2 T}{2M} \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$

Как известно, необходимое условие устойчивости состоит в том, чтобы все коэффициенты  $p'_i$  были или одновременно положительными или отрицательными величинами. Из формул (5.104) устанавливаем, что  $p'_3 < 0$ . Но в точках, в которых кривая периодов пересекает прямую  $\sigma_1^*$  сверху вниз, имеем  $p'_0 > 0$  (см. предыдущий параграф). Следовательно, в этом случае необходимое условие устойчивости не выполняется, поэтому соответствующее периодическое решение будет неустойчивым. Такая ситуация имеет место в области IV для второй точки пересечения. Во всех остальных случаях, представленных на рис. 5.2, кривая периодов пересекает прямую  $\sigma_1^*$  снизу вверх, поэтому для этих точек  $p'_0 < 0$ . В соответствии с (4.61) неравенства Гурвица записываются в данном случае в виде

$$p'_0 < 0, \Delta_1 = p'_1 < 0, \Delta_2 = p'_1 p'_2 - p'_0 p'_3 > 0, p'_3 < 0. \quad (5.105)$$

Для дальнейших выкладок нам удобнее пользоваться условиями устойчивости в виде неравенств

$$p'_3 < 0, p'_2 < 0, \Delta'_2 = p'_2 p'_1 - p'_3 p'_0 > 0, p'_0 < 0, \quad (5.106)$$

которые эквивалентны неравенствам (5.105). Далее, прямой проверкой легко установить, что коэффициент  $p'_2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} p'_2 &= Nh'_2 \left[ -\frac{1}{M^2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \left( \frac{MT}{2} - \operatorname{th} \frac{MT}{2} \right) - \frac{\Theta}{M} \operatorname{th} \frac{MT}{2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{T}{2\Theta} - \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right) - \frac{\alpha_1}{M} \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \right]. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Так как  $y - \operatorname{th} y > 0$  при  $y > 0$ , то из формулы (5.107) устанавливаем, что коэффициент  $p'_2 < 0$ .

Преобразуем выражение, определяющее коэффициент  $p'_1$ . Для этой цели помножим и разделим на  $\left(\operatorname{th} \frac{MT}{2} + \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}\right)$  выражение в квадратных скобках, стоящее во втором равенстве (5.104). Тогда, учитывая остальные равенства (5.104), получим для определения коэффициента  $p'_1$  выражение в форме

$$p'_1 = \frac{1 + \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}}{\operatorname{th} \frac{MT}{2} + \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}} (p'_0 + p'_2) - p'_3. \quad (5.108)$$

Используя это выражение, представим предпоследний определитель Гурвица в виде

$$\Delta'_2 = (p'_0 + p'_2) \left[ \frac{1 + \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}}{\operatorname{th} \frac{MT}{2} + \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}} p'_2 - p'_3 \right]. \quad (5.109)$$

И, наконец, учитывая два последних равенства (5.104), приведем это выражение к виду

$$\Delta'_2 = \frac{Nh'_0(p'_0 + p'_2)}{M} \left[ \frac{\operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta} \left(1 + \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}\right)}{\operatorname{th} \frac{MT}{2} + \operatorname{th} \frac{T}{2\Theta}} \times \right. \\ \left. \times \left(-a_1 + \frac{1}{M} + \Theta\right) - \frac{T}{2} \right]. \quad (5.110)$$

Так как  $p'_0 < 0$  и  $p'_2 < 0$ , то при выполнении неравенства

$$a_1 > \frac{1}{M} + \Theta \quad (5.111)$$

будем иметь  $\Delta'_2 > 0$ . Из рис. 4.7 видно, что неравенство (5.111) выполняется в областях I и III. Условия устойчивости выполняются в областях I и III, и периодическим решениям там соответствуют автоколебательные режимы системы. Форма выражения (5.110) не позволяет сделать заключение об устойчивости периодического решения в области IV, которое соответствует пересечению снизу вверх. Но это решение обусловливается петлей релейной характеристики. Полупериод  $T$  этого решения мал вместе с величиной  $a_1^*$ . Тогда, разлагая в (5.110) выражение в квадратных скобках в ряд

по степеням  $T$ , получим с точностью до величин порядка  $T$  соотношение

$$\Delta'_2 = \frac{-Nh'_0(p'_0 + p'_2)}{M\Theta + 1} \frac{T}{2}. \quad (5.112)$$

Таким образом, и в этом случае  $\Delta'_2 > 0$ , а следовательно, периодическое решение также устойчиво.

По формуле (5.49) можно построить процесс колебаний на полупериоде  $T$ , если задаться конкретными числовыми значениями параметров системы. Однако по формуле (5.50) можно сделать одно общее заключение. При  $T = 0$  имеем  $x^*(0) = 0$ . Отсюда по непрерывности следует, что малым полупериодам  $T$  соответствуют малые значения координат  $x_1^*(0), x_2^*(0), \dots, x_n^*(0)$ , которые являются элементами столбца  $x^*(0)$ . Отсюда можно сделать заключение, что амплитуды соответствующих периодических колебаний будут также малыми величинами.

Из данных соображений и приведенного выше анализа следует, что наличие петли в релейной характеристики вызывает в областях I и III автоколебания в системе, причем при малой ширине петли возникают автоколебания малой амплитуды и большой частоты.

Автоколебания в области III и неустойчивое периодическое решение в области IV являются следствием выбранного принципа регулирования.

## § 5.6. Скользящие движения и устойчивость регулируемого положения

В релейных системах с жестким переключением существуют скользящие движения. Такие движения были описаны в первом параграфе данной главы для идеальной релейной характеристики. При скользящем движении изображающая точка перемещается вдоль плоскости переключения, а релейный управляющий элемент колеблется между своими крайними положениями с бесконечной частотой. Такое движение про текает в некотором интервале времени — конечном или бесконечном — до тех пор, пока изображающая точка не пересечет границу зоны скользящего режима или не придет к положению равновесия  $x = 0$ . Скользящее движение не

определяется уравнением (5.1). Для его описания необходимо доопределить управляемую функцию  $\psi(\sigma)$ .

Доопределим функцию  $\psi(\sigma)$  из следующих соображений \*). При скользящем движении первое равенство в условиях (5.7) должно удовлетворяться тождественно, т. е. в соответствии со вторым уравнением (5.1) должен тождественно равняться нулю аргумент управления  $\sigma$ , а следовательно, и его производная по времени  $\dot{\sigma}$ . Продифференцируем второе уравнение (5.1), подставим в полученное выражение столбец  $\dot{x}$ , определенный из первого уравнения (5.1), и результат приравняем тождественно нулю. Тогда получим

$$\dot{\sigma} = \gamma \dot{x} = \gamma P x + \gamma h \psi(\sigma) \equiv 0. \quad (5.113)$$

Так как при жестком переключении  $\gamma h \neq 0$ , то, разрешая уравнение (5.113) относительно  $\psi(\sigma)$ , получим выражение

$$\psi(\sigma) \equiv -\frac{\gamma P x}{\gamma h}, \quad (5.114)$$

по которому мы будем доопределять управляемую функцию в скользящем режиме. Подставляя  $\psi(\sigma)$  из (5.114) в первое уравнение (5.1), получим матричное уравнение

$$\dot{x} = P x - \frac{1}{\gamma h} h \gamma P x, \quad (5.115)$$

которое является компактной записью системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Движение релейной системы в скользящем режиме будем определять уравнением (5.115). Если помножить обе части уравнения (5.115) слева на строку  $\gamma$ , то получим тождество  $\gamma \dot{x} \equiv 0$ . В § 5.1 было показано, что строка  $\gamma$  в фазовом пространстве представляет собой вектор, перпендикулярный к семейству плоскостей параллельных плоскости переключе-

\*) Скользящие движения и их условия существования для систем, близких к тем, которые исследуются в данной работе, рассматривались Ю. В. Долголенко [8]. В данной работе автор сохраняет симметрию для координат системы и в случае скользящих движений. Такой подход позволяет проще довести решение задачи до конца и в весьма простой форме выразить конечные результаты через исходные параметры. Такой подход к решению поставленной задачи (хотя это может показаться на первый взгляд странным) автору был навеян методом неопределенных множителей Лагранжа.

ний  $\sigma = \gamma x = 0$ . Тождество  $\gamma \dot{x} = 0$  показывает, что вектор  $\dot{x}$  фазовой скорости в силу уравнения (5.115) всегда перпендикулярен вектору  $\gamma$ . Но тогда изображающая точка будет двигаться вдоль плоскости, параллельной плоскости переключений и проходящей через начальную точку  $x(0)$ . В частности, при начальном условии  $\sigma(0) = \gamma x(0) = 0$  изображающая точка будет двигаться вдоль плоскости переключений  $\sigma = \gamma x = 0$ .

Таким образом, уравнение (5.115) определяет плоскопараллельное движение изображающей точки во всем фазовом пространстве. Скользящее движение определяется частным интегралом этого уравнения, который обусловливается начальным значением  $x(0)$ , удовлетворяющим условию  $\gamma x(0) = 0$ .

Уравнение (5.115) было получено через доопределение функции  $\Phi(\sigma)$  по формуле (5.114). Ниже мы покажем, что полученное уравнение описывает предельное движение изображающей точки в случае, когда идеальная релейная характеристика принимается в качестве предела петлеобразной характеристики типа люфта, когда ширина петли стремится к нулю.

Перейдем к определению структуры решения уравнения (5.115), удовлетворяющего при  $t = 0$  условию  $\gamma x(0) = 0$ . Ниже будет показано, что характеристическое уравнение, соответствующее рассматриваемой задаче, заведомо имеет нулевой корень. Предвосхищая этот результат, обозначим характеристический полином через  $\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)$ , а присоединенную матрицу через  $\tilde{F}(\lambda)$ . Будем считать, что  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$  — простые корни полинома  $\tilde{\Delta}(\lambda)$ , и среди них нет равных нулю. Тогда в соответствии с выражениями (2.126) и (2.131) при  $g(t) = h = 0$  запишем решение уравнения (5.115) в виде

$$x(t) = \frac{\tilde{F}(0)}{\tilde{\Delta}(0)} x(0) + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_i \tilde{\Delta}'(\tilde{\lambda}_i)} x(0), \quad (5.116)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)} &= \left( \lambda E - P + \frac{1}{\gamma h} h \gamma P \right)^{-1}, \\ \lambda \tilde{\Delta}(\lambda) &= \det \left( \lambda E - P + \frac{1}{\gamma h} h \gamma P \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

Воспользуемся каноническим представлением матрицы  $P$ , т. е. положим  $P = KJK^{-1}$ , и выразим  $u$  и  $h$  через  $\beta$  и  $u$  по формулам (4.21). Тогда равенства (5.117) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)} &= K \left( \lambda E - J + \frac{1}{\beta u} u \beta J \right)^{-1} K^{-1}, \\ \lambda \tilde{\Delta}(\lambda) &= \det \left( \lambda E - J + \frac{1}{\beta u} u \beta J \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

В полученных выражениях вынесем матрицу  $\lambda E - J$  за скобку. Тогда, очевидно, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)} &= K \left[ E + \frac{1}{\beta u} (\lambda E - J)^{-1} u \beta J \right]^{-1} (\lambda E - J)^{-1} K^{-1}, \\ \lambda \tilde{\Delta}(\lambda) &= \det (\lambda E - J) \det \left[ E + \frac{1}{\beta u} (\lambda E - J)^{-1} u \beta J \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.119)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{\beta u} (\lambda E - J)^{-1} u, \\ \beta' &= \beta J, \end{aligned} \right\} \quad (5.120)$$

то нетрудно усмотреть, что в новых обозначениях квадратная скобка в (5.119) приводится к виду матрицы, стоящей в правой части равенства (4.131). Если теперь использовать формулы (4.133), (4.137) и вернуться к прежним обозначениям, то выражение (5.119) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)} &= K \left[ E - \frac{(\lambda E - J)^{-1} u \beta J}{\beta u \left[ 1 + \frac{\beta J (\lambda E - J)^{-1} u}{\beta u} \right]} \right] (\lambda E - J)^{-1} K^{-1}, \\ \lambda \tilde{\Delta}(\lambda) &= [\det (\lambda E - J)] \left[ 1 + \frac{\beta J (\lambda E - J)^{-1} u}{\beta u} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

Если учесть матричное тождество

$$J(\lambda E - J)^{-1} = -E + \lambda(\lambda E - J)^{-1}, \quad (5.122)$$

раскрыть скобки и провести сокращения, то выражения (5.121) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)} &= K(\lambda E - J)^{-1} K^{-1} + \frac{K(\lambda E - J)^{-1} u \beta K^{-1}}{\lambda \beta (\lambda E - J)^{-1} u} - \\ &- \frac{K(\lambda E - J)^{-1} u \beta (\lambda E - J)^{-1} K^{-1}}{\beta (\lambda E - J)^{-1} u}, \\ \tilde{\Delta}(\lambda) &= \frac{\Delta(\lambda) \beta (\lambda E - J)^{-1} u}{\beta u} = \frac{\tilde{\Delta}_*(\lambda)}{\beta u}, \end{aligned} \right\} \quad (5.123)$$

причем здесь  $\Delta(\lambda)$  обозначает полином  $n$ -й степени

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - J) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad (5.124)$$

т. е. характеристический полином матрицы  $P$ . При написании второго равенства (5.123) был отброшен множитель  $\lambda$ . Поэтому характеристический полином для данной задачи действительно имеет вид  $\lambda \tilde{\Delta}(\lambda)$  и один корень его заведомо равен нулю. Полином  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  имеет строго степень  $n - 1$ , так как в нем коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  равен единице \*).

Образуем столбцы  $\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i)x(0)$ , фигурирующие в решении (5.116). Если иметь в виду, что  $\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}_i) = 0$  и для скользящего режима  $\beta K^{-1}x(0) = \gamma x(0) = 0$ , то из формулы (5.123) легко получить выражения

$$\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i)x(0) = -\frac{\tilde{\lambda}_i \Delta(\tilde{\lambda}_i)}{\beta u} K(\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} u \beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} x(0) \quad (5.125)$$

и, в частности,

$$\tilde{F}(0)x(0) = 0. \quad (5.126)$$

Из равенства (5.126) вытекает, что нулевой корень характеристического полинома не влияет на движение системы в скользящем режиме, так как в решении (5.116) пропадает слагаемое, соответствующее этому корню. Таким образом, скользящее движение зависит от  $n - 1$  корней  $\tilde{\lambda}_i$  полинома  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  (см. вторую формулу (5.123)) и оно определяется

\*.) Нетрудно видеть, что старший коэффициент полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  равен  $\beta u = \gamma h \neq 0$ .

выражением

$$x(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\Delta(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} K(\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} u \beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} x(0), \quad (5.127)$$

которое получается из (5.116) при учете равенств (5.125) и (5.126).

Решение (5.127) справедливо до тех пор, пока выполняются условия скользящего режима (5.7). Первое равенство (5.7) выполняется тождественно. Это еще раз можно проверить, если умножить обе части равенства (5.127) слева на строку  $\gamma$  и учесть вторую формулу (5.123) и что  $\gamma K = \beta$ .

Два последних неравенства (5.7) можно записать в форме

$$\gamma h < \gamma P x(t) < -\gamma h. \quad (5.128)$$

Неравенства (5.128) представляются через матрицы  $\beta u$  и  $J$  в виде

$$\beta u < \beta J K^{-1} x < -\beta u. \quad (5.129)$$

Подставим в (5.129)  $x$  из формулы (5.127) и используем тождество (5.122) при  $\lambda = \tilde{\lambda}_i$ . Тогда, учитывая, что  $\tilde{\lambda}_i$  являются корнями полинома  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  (5.123), получим

$$-1 < \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\Delta(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} \beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} x(0) < 1. \quad (5.130)$$

При получении условий (5.130) мы произвели сокращение на скалярную величину  $\beta u = \gamma h$  и изменили знаки неравенств, так как, согласно § 5.1, скользящие режимы могут существовать только при  $\gamma h < 0$ . Для получения вычислительных формул нужно выразить характеристическое уравнение, решение и условие скользящего режима через исходные параметры.

В выражениях (5.123), (5.127) и (5.130), после подстановки в них  $\beta = \gamma K$  и  $u = K^{-1}h$ , фигурирует матрица

$$K(\lambda E - J)^{-1} K^{-1} = (\lambda E - P)^{-1} = \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \quad (5.131)$$

Используя это выражение, получим следующие вычислительные формулы:

для характеристического полинома в виде

$$\tilde{\Delta}_*(\lambda) = \gamma F(\lambda) h; \quad (5.132)$$

для процесса скользящего движения в виде

$$x(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} h \gamma \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} x(0); \quad (5.133)$$

для условия скользящего режима в виде

$$-1 < \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} < 1, \quad (5.134)$$

причем  $\tilde{\lambda}_i$  суть корни полинома (5.132).

Характер поведения скользящих фазовых траекторий на границе зоны скользящего режима определяется из следующих соображений. Строку  $\gamma P$  можно трактовать как вектор градиента семейства параллельных плоскостей  $\gamma Px = c$ , где  $c$  — вещественный параметр. К этому семейству принадлежат плоскости (5.8). Тогда знак выражения

$$\gamma P \dot{x} = \gamma P^2 x - \frac{1}{\gamma h} \gamma P h \gamma P x, \quad (5.134a)$$

которое получается при умножении обеих частей уравнения (5.115) слева на строку  $\gamma P$ , определяет направление проекции вектора фазовой скорости  $\dot{x}$ , «скользящей» траектории на указанный выше градиент.

На граничных прямых, определяемых пересечением плоскости переключений с плоскостями (5.8), будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \gamma P \dot{x} = \gamma P^2 x + \gamma P h, \\ \gamma P \dot{x} = \gamma P^2 x - \gamma P h. \end{array} \right\} \quad (5.134b)$$

Знаки этих выражений по полупрямым (5.8a) и (5.8б) таковы, что в первом случае скользящие фазовые траектории направлены внутрь зоны скользящего режима, а во втором случае — наружу. Таким образом, направления трех кусков фазовых траекторий, примыкающих к полупрямым (5.8a) и (5.8б) со стороны зоны скользящего режима и полупространства  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$  оказываются согласованными в том смысле, что они однозначно определяют движение изображающей точки при естественном течении времени. В обратном направлении однозначность движения нарушается. Подобное обстоятельство, очевидно, имеет место и для всех внутренних точек зоны скользящего режима.

В заключение заметим, что изображающая точка может покинуть зону скользящего режима и выйти в полупространства  $\sigma > 0$  или  $\sigma < 0$  только через полупрямые (5.8б), причем левая группа условий (5.8б) обуславливает выход точки в полупространство  $\sigma > 0$ , правая группа — в полупространство  $\sigma < 0$ .

Для наглядности соответствующая картина сопряжения кусков фазовых траекторий, примыкающих к зоне скользящего режима и ее границам, изображена на рис. 5.3 в трехмерном фазовом пространстве.

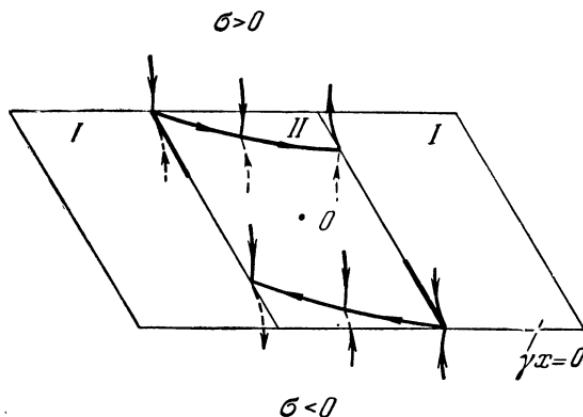


Рис. 5.3. Сопряжение фазовых траекторий в зоне скользящего режима и на ее границах.

Перейдем теперь к определению некоторых свойств скользящего движения. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений в матричной форме

$$\dot{x} = Px + ch\gamma x \quad (c > 0). \quad (5.135)$$

Это уравнение получается из (5.1), если положить  $\psi(\sigma) = c\sigma$  и считать  $c > 0$ . Определим структуру решения уравнения (5.135). Для этого уравнения будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} &= (\lambda E - P - ch\gamma)^{-1}, \\ \tilde{\Delta}(\lambda) &= \det(\lambda E - P - ch\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (5.136)$$

Если, далее, провести рассуждения, аналогичные предыдущим, то (5.136) можно привести к форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} &= K \left[ E + \frac{c(\lambda E - J)^{-1}u\beta}{1 - c\beta(\lambda E - J)^{-1}u} \right] (\lambda E - J)^{-1}K^{-1}, \\ \tilde{\Delta}(\lambda) &= [\det(\lambda E - J)] [1 - c\beta(\lambda E - J)^{-1}u]. \end{aligned} \right\} \quad (5.137)$$

Учитывая вторую формулу (5.123) и (5.124), представим  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  в виде \*)

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = c\tilde{\Delta}_*(\lambda) = c \left[ \frac{\Delta(\lambda)}{c} - \tilde{\Delta}_*(\lambda) \right]. \quad (5.138)$$

Тогда решение уравнения (5.135) для случая простых корней  $\tilde{\lambda}_i$  характеристического полинома  $\tilde{\Delta}(\lambda)$ , а следовательно, и полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$ , можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\Delta(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} K(\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} u \beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} x(0). \quad (5.139)$$

Как указывалось ранее, в полиноме  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  равен  $\beta u = \gamma h < 0$ . Учитывая это обстоятельство, получим в соответствии с формулой (5.138) следующие предельные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_*(\lambda) &= -\tilde{\Delta}_*(\lambda), \\ \lim_{c \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \lim_{c \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n &= -\infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.140)$$

Теперь легко установить, что при  $c \rightarrow \infty$  выражение (5.139) имеет своим пределом равенство (5.127). Этим фактом можно пользоваться для непосредственного построения решения (5.127). Но, кроме того, отсюда можно сделать практический вывод, что скользящий режим релейной системы совпадает с движением соответствующей линейной системы при бесконечно большом коэффициенте усиления ( $c \rightarrow \infty$ ). Так возникает техническая возможность создавать системы регулирования, аналогичные линейным системам с большим коэффициентом усиления.

---

\*) Полином  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  определяется формулами (5.123) и (5.132).

### *Устойчивость регулируемого положения*

Исследование скользящего режима имеет непосредственное отношение к определению устойчивости регулируемого положения релейной системы.

Из формы решения (5.133) уравнения (5.115) при ограничительных неравенствах (5.134) следует, что скользящее движение будет асимптотически устойчивым, если действительные части всех корней  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$  полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  (5.132) будут меньше нуля. С точки зрения теории Ляпунова и геометрии фазового пространства этот факт можно описать следующим образом. Если на плоскости переключений внутри зоны скользящего режима выбрать произвольную окрестность ( $\epsilon$ ) точки  $x = 0$ , которая может быть сколь угодно малой, то всегда можно на той же плоскости найти другую окрестность ( $\delta$ ) и такую, что если фазовая траектория скользящего движения будет начинаться из окрестности ( $\delta$ ), то она не выйдет за пределы первой окрестности, а изображающая точка, скользя вдоль плоскости переключений, будет асимптотически стремиться к регулируемому положению, т. е. к точке  $x = 0$ .

Напомним, что для рассматриваемых автономных релейных систем движение вдоль фазовых траекторий, примыкающих к точкам зоны скользящего режима со стороны полупространств  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ , направлено навстречу друг к другу, а сами траектории не зависят от времени.

Тогда, очевидно, в фазовом пространстве системы можно найти такую окрестность точки  $x = 0$  \*), что если фазовая траектория будет начинаться из этой окрестности, то она обязательно попадет внутрь окрестности ( $\delta$ ) плоскости переключений, и далее изображающая точка скользящим движением будет асимптотически стремиться к регулируемому положению равновесия.

Таким образом, из асимптотической устойчивости скользящего движения следует асимптотическая устойчивость регулируемого положения релейной системы. Задача об устойчивости регулируемого положения релейной системы, обладающей

\*) То есть окрестность, которая будет включать в себя точки полупространств  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ .

скользящим режимом, сводится к проблеме Гурвица для полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  (5.132). Скользящий режим существует при  $\gamma h < 0$ , а полином  $-\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  (5.132) является предельным для полинома  $\tilde{\tilde{\Delta}}_*(\lambda)$  (5.138) при  $c \rightarrow \infty$ .

Таким образом, регулируемое положение релейной системы с жестким переключением будет асимптотически устойчивым, если  $\gamma h < 0$  и предельный характеристический полином  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  соответствующей линейной системы будет гурвицевым\*).

С другой стороны, при  $\gamma h < 0$  и гурвицевом полиноме  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  соответствующая линейная система будет устойчива при больших коэффициентах усиления  $c > 0$  (см. (5.140)), а при  $\gamma h > 0$ , как это нетрудно показать, она будет неустойчива при тех же условиях.

Условие устойчивости можно сформулировать также следующим образом.

*Регулируемое положение релейной системы будет устойчивым тогда и только тогда, когда соответствующая линейная система, получаемая заменой релейной характеристики  $\Psi(\sigma)$  на линейную  $c\sigma$ , будет устойчива при  $c > c^*$ , где  $c^*$  — любое, сколь угодно большое положительное число.*

Условие устойчивости в такой формулировке является универсальным. Оно остается справедливым и для релейных систем с мягким переключением, так как такие системы можно рассматривать как предельный случай релейных систем с жестким переключением при  $\gamma h \rightarrow 0$ .

Для систем с мягким переключением можно также поставить задачу о нахождении условий, которые совместно с требованием, чтобы предельный полином  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  был гурвицевым, обеспечивали устойчивость линейной системы при больших коэффициентах усиления ( $c > c^*$ ). Такую задачу в общем виде решил Я. З. Цыпкин [25], который исследовал устойчивость релейных систем, рассматривая релейную характеристику как предельную кусочно-линейную характеристику с бесконечно большим угловым коэффициентом линейного участка.

\*). То есть все корни  $\tilde{\lambda}_i$  его будут лежать левее мнимой оси.

### § 5.7. Устойчивость и скользящие режимы систем стабилизации нейтрального самолета

Применим общие результаты, полученные в предыдущем параграфе, к частным задачам. В качестве таких задач рассмотрим различные варианты релейных систем стабилизации курса нейтрального самолета, принципиальные схемы которых обсуждались в § 2.2.

*а) Автопилот с принципом регулирования по углу, угловой скорости и угловому ускорению при учете инерции сервомотора*

В § 5.5 мы провели исследования возможности возникновения автоколебаний в такой системе стабилизации нейтрального самолета. Там же были приведены соответствующие уравнения движения в виде системы (5.96). Разомкнутая система регулирования, представляемая в данном случае линейной непрерывной частью уравнений (5.96), совпадает с соответствующей частью импульсной системы стабилизации, которая была рассмотрена в § 4.10. Данная система является релейной системой с мягким переключением, так как для нее имеет место равенство (4.223). В системе с мягким переключением зона скользящего режима вырождается в прямую. Устойчивость регулируемого положения совпадает с устойчивостью соответствующей линейной системы  $(\Phi(\sigma) = c\sigma)$  при бесконечно большом коэффициенте усиления  $c > 0$ . Характеристическое уравнение для такой линейной системы определяется формулой (4.237), причем в этой формуле теперь, соответственно, снимается ограничение (4.236), накладываемое на коэффициент  $c$ .

Суждение об устойчивости при различных значениях коэффициента  $c$  можно получить из диаграммы, приведенной на рис. 4.7. Очевидно, в областях I и IV соответствующая линейная система будет устойчива при достаточно больших коэффициентах  $c > 0$ ; в областях II и III, наоборот, она будет неустойчива при эквивалентных условиях. Таким образом, можно сделать вывод, что регулируемое положение релейной системы стабилизации будет асимптотически устой-

чивым в смысле Ляпунова в областях *I* и *IV*, лежащих ниже прямой (4.245). В областях *II* и *III*, лежащих выше этой прямой, регулируемое положение будет неустойчивым. Устойчивость в смысле Ляпунова называют иногда *устойчивостью в малом*.

Для определения *устойчивости в большом* нужно в фазовом пространстве найти такую предельную область, чтобы всякое движение, начинающееся из этой области, сходилось к началу координат, которое определяет регулируемое положение системы. Как показали А. А. Андронов и Н. Н. Баутин [2] при исследовании структуры разбиения всего фазового пространства на траектории для одной задачи об автопилоте, этот вопрос тесно связан с возможностью существования периодических режимов. В области *IV* (рис. 4.7) существует неустойчивый периодический режим колебаний. Можно ожидать, что через замкнутую фазовую траекторию, соответствующую периодическому режиму, будет проходить сепаратрисная поверхность, которая разделит фазовое пространство на две части. Та часть фазового пространства, которая содержит начало координат, будет определять область устойчивости в большом.

В области *I* периодические режимы не существуют, поэтому можно ожидать, что из устойчивости регулируемого положения в смысле Ляпунова будет следовать устойчивость в большом при любых начальных отклонениях.

В области *III* существует автоколебательный режим, а регулируемое положение неустойчиво в смысле Ляпунова. В системе будут самовозбуждаться автоколебания, которые являются единственным устойчивым режимом движения системы.

В области *I* можно ожидать, что система будет неустойчива в большом при любых начальных отклонениях от регулируемого положения равновесия.

Точное решение вопроса об устойчивости в большом и о поведении системы во всем фазовом пространстве является сложной задачей, и, естественно, изложенные выше рассуждения носят эвристический характер.

Однако попытка связать воедино отдельные результаты и на этой основе нарисовать общую картину поведения системы является важной и весьма полезной при решении практических задач.

*б) Автопилот с принципом регулирования по углу, угловой скорости, угловому ускорению с постоянной скоростью сервомотора*

Данная система стабилизации имеет жесткое переключение, поэтому в ней будет существовать скользящий режим. Проведем исследование скользящего режима и устойчивости регулируемого положения.

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \\ \dot{\eta} = h'_2\psi(\sigma), \\ \sigma = \varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2\ddot{\varphi}. \end{array} \right\} \quad (5.141)$$

Они получаются из уравнений (5.96) при  $\Theta = 0$ . В нормальной форме эти уравнения перепишутся в виде

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = h'_2\psi(\sigma), \quad \dot{x}_3 = -Nx_2 - Mx_3, \\ \sigma = x_1 - Na_2x_2 + (a_1 - Ma_2)x_3, \end{array} \right\} \quad (5.142)$$

где  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  определяются соответствующими равенствами (4.217), а аргумент управления  $\sigma$  имеет, очевидно, тот же вид, что и в уравнениях (4.218).

Для уравнений (5.142) можем записать

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N & -M \end{vmatrix}, \quad (5.143)$$

$$h = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} h'_2, \quad (5.144)$$

$$\gamma = \|1, -Na_2, (a_1 - Ma_2)\|. \quad (5.145)$$

Умножая столбец (5.144) слева на строку (5.145), получим

$$\gamma h = -Nh'_2a_2. \quad (5.146)$$

Так как все буквенные коэффициенты уравнений (5.141) определяют положительные величины, то в соответствии с формулой (5.146)  $\gamma h < 0$ . Согласно общей теории при

$\gamma h < 0$  существует зона скользящего режима. Движение в зоне скользящего режима определяется формулами (5.132) — (5.134). Для матрицы  $P$  (5.143) имеем

$$\lambda E - P = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & N & \lambda + M \end{vmatrix}, \quad (5.147)$$

$$(\lambda E - P)^T = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & N \\ -1 & 0 & \lambda + M \end{vmatrix}, \quad (5.148)$$

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(\lambda + M) & -N & \lambda \\ 0 & \lambda(\lambda + M) & 0 \\ 0 & -\lambda N & \lambda^2 \end{vmatrix}, \quad (5.149)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(\lambda E - P) = \lambda^2(\lambda + M), \\ \lambda_1 &= -M, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.150)$$

Далее по формулам (5.144), (5.145) и (5.149) образуем выражения

$$F(\lambda) h = \begin{vmatrix} -N \\ \lambda(\lambda + M) \\ -\lambda N \end{vmatrix} h'_2, \quad (5.151)$$

$$\begin{aligned} \gamma F(\lambda) &= \\ &= \|\lambda(\lambda + M), \quad N(1 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2), \quad \lambda(1 + \lambda a_1 - \lambda Ma_2)\| \end{aligned} \quad (5.152)$$

и, наконец (см. (5.132)),

$$\gamma F(\lambda) h = \tilde{\Delta}_*(\lambda) = -(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + 1) N h'_2. \quad (5.153)$$

Дифференцируя полином (5.153) по  $\lambda$ , получим

$$\tilde{\Delta}'_*(\lambda) = -(2a_2 \lambda + a_1) N h'_2. \quad (5.154)$$

Корни  $\tilde{\lambda}_1$  и  $\tilde{\lambda}_2$  полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  (5.153) определяются по формуле

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2}. \quad (5.155)$$

При  $a_1^2 > 4a_2$  имеем два отрицательных корня, при  $a_1^2 < 4a_2$  — два комплексных сопряженных корня с отрицательной вещественной частью. Таким образом, скользящее движение и вместе с ним регулируемое положение системы будут асимптотически устойчивыми.

Посредством выражений (5.150) — (5.154) представим формулы (5.133) и (5.134), определяющие процесс и условие существования скользящего режима соответственно в виде \*)

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{l} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = \\ & = \sum_{i=1}^2 e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\tilde{\lambda}_i (\tilde{\lambda}_i + M) x_1(0) + \tilde{\lambda}_i (1 + \tilde{\lambda}_i a_1 - \tilde{\lambda}_i M a_2) x_3(0)}{\tilde{\lambda}_i^2 N (2\tilde{\lambda}_i a_2 + a_1) (\tilde{\lambda}_i + M)} \times \\ & \quad \times \begin{vmatrix} -N \\ \tilde{\lambda}_i (\tilde{\lambda}_i + M) \\ -\tilde{\lambda}_i N \end{vmatrix} \quad (5.156) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & -h'_2 < \\ & < \sum_{i=1}^2 e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\tilde{\lambda}_i (\tilde{\lambda}_i + M) x_1(0) + \tilde{\lambda}_i (1 + \tilde{\lambda}_i a_1 - \tilde{\lambda}_i M a_2) x_3(0)}{N (2\tilde{\lambda}_i a_2 + a_1)} < h'_2. \quad (5.157) \end{aligned}$$

Коэффициент  $h'_2$  определяет постоянную скорость сервомотора. Корни  $\tilde{\lambda}_1$  и  $\tilde{\lambda}_2$ , определяемые формулой (5.155), не зависят от  $h'_2$ . Их значения целиком определяются коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ , обусловливающими структуру аргумента управления  $\sigma$ .

Процесс скользящего режима не зависит от скорости сервомотора. Но неравенства (5.157) становятся менее ограничительными при увеличении коэффициента  $h'_2$ . Неравенства (5.157) являются линейными выражениями относительно начальных

\*) В силу (5.153) — (5.155) коэффициент при  $x_2(0)$  обращается в нуль и поэтому не содержится в (5.156) и (5.157).

значений координат  $x_i(0)$ , поэтому их можно представить в виде

$$-h'_2 < \sum_{j=1}^3 a_j(t) x_j(0) < h'_2 \quad (5.158)$$

или

$$\left( \sum_{j=1}^3 a_j(t) x_j(0) \right)^2 < h'^2_2, \quad (5.159)$$

где функции  $a_j(t)$  в свою очередь линейно зависят от экспонент  $e^{\tilde{\lambda}_1 t}$  и  $e^{\tilde{\lambda}_2 t}$ . С помощью неравенства Шварца — Буняковского \*) перепишем (5.159) в виде \*\*)

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^3 a_j(t) x_j(0) \right)^2 &\leqslant \left( \sum_{j=1}^3 a_j^2(t) \right) \left( \sum_{j=1}^3 x_j^2(0) \right) \leqslant \\ &\leqslant R^2 \sum_{j=1}^3 x_j^2(0) < h'^2_2, \end{aligned} \quad (5.160)$$

где  $R^2$  — положительное число, равное максимуму функции  $\left( \sum_{j=1}^3 a_j(t) \right)^2$ . Этот максимум существует, так как для устойчивой системы указанная функция ограничена и непрерывна в интервале  $0 \leqslant t < \infty$ ; при  $t \rightarrow \infty$  она стремится к нулю. Число  $R^2$  не зависит от коэффициента  $h'_2$ . Точка с координатами  $x_i(0)$  выбирается на плоскости переключений внутри зоны скользящего режима.

Рассмотрим на плоскости переключений круг радиуса  $h'_2/R$  с центром в начале координат. Для рассматриваемой задачи координаты  $x_j(0)$  точек этого круга должны удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} x_1^2(0) + x_2^2(0) + x_3^2(0) &< \left( \frac{h'_2}{R} \right)^2, \\ x_1(0) - N\alpha_2 x_2(0) + (\alpha_1 - M\alpha_2) x_3(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.161)$$

Вследствие неравенств (5.158) — (5.160) условия (5.161) являются достаточными для того, чтобы в процессе движения изображающая точка не вышла за пределы зоны скользящего

\*) См., например, [11].

\*\*) То есть сделаем неравенство (5.159) более жестким.

режима. С ростом  $h'_2$  радиус круга (5.16) увеличивается и, следовательно, возрастает область начальных значений  $x_j(0)$ , для которых движение обладает указанным выше свойством.

Далее можно провести рассуждения качественного характера. С увеличением  $h'_2$  будет увеличиваться число фазовых траекторий, примыкающих к кругу (5.161) со стороны полу-пространств  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ . Вследствие этого будет также увеличиваться в фазовом пространстве системы окрестность нулевой точки, из которой движение будет затягиваться в скользящий режим. Движения, начинающиеся из части такой окрестности, будут затягиваться в скользящий режим при первом подходе изображающей точки к плоскости переключений. Скользящее движение будет практически являться рабочим режимом системы, если из-за энергетических, физических и других ограничений начальные отклонения не будут выходить за пределы такой окрестности. В этом случае можно говорить, что релейная система линеаризована посредством скользящего режима.

*в) Автопилот с постоянной скоростью сервомотора и с принципом регулирования по углу и угловой скорости*

Уравнения движения получаются из (5.141) при  $a_2 = 0$ . В соответствии с формулой (5.146) при  $a_2 = 0$  имеем  $\gamma h = 0$ , и, таким образом, данная система стабилизации является релейной системой с мягким переключением. Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы можно получить непосредственно из (5.151) при  $a_2 = 0$  и  $\psi(\sigma) = \sigma$  или из уравнения (4.237), положив в нем  $\Theta = a_2 = 0$ . Таким образом, будем иметь

$$\lambda^3 + M\lambda^2 + Nh'_2 c a_1 \lambda + Nh'_2 c = 0. \quad (5.162)$$

Условия Гурвица сводятся к неравенству

$$Nh'_2 c M \left( a_1 - \frac{1}{M} \right) > 0. \quad (5.163)$$

На рис. 5.4 приведена диаграмма устойчивости. Область устойчивости заштрихована. Границей области устойчивости является гипербола

$$a_1 = \frac{1}{M}. \quad (5.164)$$

Для точек, лежащих выше и ниже гиперболы (5.164), линейная система будет соответственно устойчива и неустойчива для любых значений коэффициента усиления  $c > 0$ , поэтому регулируемое положение релейной системы стабилизации будет устойчивым только в заштрихованной области диаграммы рис. 5.4.

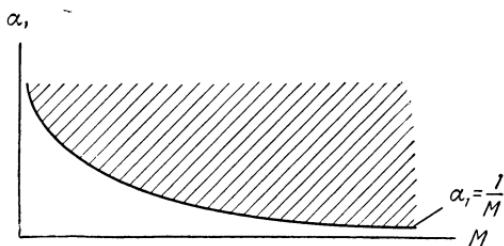


Рис. 5.4. Диаграмма устойчивости периодических режимов.

При  $\Theta = \alpha_2 = 0$  уравнение периодов (5.97) приводится к виду

$$\frac{Nh'_2}{M^2} \left( \alpha_1 - \frac{1}{M} \right) \left( \frac{MT}{2} - \operatorname{th} \frac{MT}{2} \right) = \sigma_1^*. \quad (5.164')$$

Так как при  $y > 0$  имеет место неравенство  $y - \operatorname{th} y > 0$ , то уравнение периодов (5.164') не имеет положительных корней при  $\sigma_1^* = 0$ . Таким образом, при идеальной релейной характеристике в рассматриваемой системе стабилизации не существуют симметричные периодические режимы. Поэтому можно ожидать, что релейная система стабилизации в заштрихованной области будет устойчива при любых начальных отклонениях.

Как было показано, рассматриваемая система стабилизации является релейной системой с мягким переключением, поэтому в ней не существует зоны скользящего режима. Такую зону можно получить, если охватить управляющий элемент релейной обратной связью через инерционное звено, как это, например, сделано в автопилоте, схема которого изображена на рис. 1.6.

2) Автопилот с релейной обратной связью и с принципом регулирования по углу и угловой скорости

Уравнения движения такой системы получаются из (1.9) при  $a_2 = a^{-1} = 0$ . Для собственного движения системы получим уравнения в виде

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \\ \dot{\eta} = h'_2\varphi(\sigma), \\ T_c\dot{\mu} + \mu = h'_3\psi(\sigma), \\ \sigma = \varphi + a_1\dot{\varphi} - b\mu. \end{array} \right\} \quad (5.165)$$

Вводя обозначения

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\varphi}, \quad x_4 = \mu, \quad (5.166)$$

перепишем уравнения (5.165) в нормальной форме:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = h'_2\varphi(\sigma), \quad \dot{x}_3 = -Nx_2 - Mx_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{1}{T_c}x_4 + \frac{h'_3}{T_c}\psi(\sigma), \\ \sigma = x_1 + a_1x_3 - bx_4. \end{array} \right\} \quad (5.167)$$

Для уравнений (5.167) столбец  $h$  и строка  $\gamma$  имеют вид

$$h = \begin{vmatrix} 0 \\ h'_2 \\ 0 \\ \frac{h'_3}{T_c} \end{vmatrix}, \quad \gamma = \|1, 0, a_1, -b\|. \quad (5.168)$$

Учитывая (5.168), получим

$$\gamma h = -\frac{bh'_3}{T_c}. \quad (5.169)$$

Так как все буквенные коэффициенты уравнений (5.165) определяют положительные величины, то в соответствии с формулой (5.169)  $\gamma h < 0$ . Таким образом, в рассматриваемой системе стабилизации существует зона скользящего

режима и она в данном случае зависит от параметров контура релейной обратной связи.

Столбец  $h$  (5.168) зависит от коэффициентов  $h'_2$  и  $h'_3$ . Эти коэффициенты включают в себя общий множитель, которым является выходное напряжение релейного усилителя, изображенного на рис. 1.5. Но корни  $\tilde{\lambda}_l$  полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  не зависят от общего множителя элементов столбца  $h$ , который, очевидно, войдет скалярным множителем в правую часть выражения (5.132). Этот множитель будет находиться в знаменателе выражения, фигурирующего в неравенствах (5.134). При увеличении этого множителя неравенства (5.134) накладывают меньшие ограничения на выбор начального значения  $x(0)$ , при котором движение не выйдет за пределы зоны скользящего режима. Надлежащим выбором величины указанного множителя можно сделать скользящее движение рабочим режимом релейной системы стабилизации в том смысле, который был вложен в это понятие при разборе второго примера настоящего параграфа.

Легко показать и в общем виде, что надлежащим выбором параметров релейной обратной связи указанного выше типа всегда можно получить зону скользящего режима. Однако для правильного выбора параметров обратной связи нужно по общим формулам построить и провести анализ процесса скользящего движения.

## § 5.8. Петлеобразная релейная характеристика

Во второй и третьей графах табл. 1.1 изображена петлеобразная релейная характеристика. Там же представлена схема передаточного механизма с люфтом или сухим трением в сочленениях, которые обусловливают такой тип петли. По изображенной характеристике можно проследить те значения, которые принимает управляющая функция  $\psi(\sigma)$  в зависимости от величины и направления изменения аргумента управления  $\sigma$ .

Чтобы полнее понять процесс скачкообразного перехода или переброса значений функции  $\psi(\sigma)$  в угловых точках релейной характеристики, удобно привлекать к рассмотрению также схему передаточного механизма с люфтом. При  $\sigma > \sigma_1^*$  и  $\sigma < -\sigma_1^*$  имеем соответственно  $\psi(\sigma) = 1$  и  $\psi(\sigma) = -1$

В интервале  $-\sigma^* < \sigma < \sigma_1^*$  значение управляющей функции  $\psi(\sigma)$  зависит от предыстории изменения аргумента управления  $\sigma$ . Управляющая функция сохраняет то значение (равное 1 или  $-1$ ), при котором аргумент управления попадает внутрь указанного интервала. Скачкообразный переход значений функции  $\psi(\sigma)$  от  $-1$  к 1 или, наоборот, происходит в точках  $\sigma_1^*$  и  $-\sigma_1^*$  соответственно, причем, в отличие от идеальной релейной характеристики, такой переход будет иметь место, если знак производной  $\dot{\sigma}$  в этих точках, определенной при той величине  $\psi(\sigma)$ , с которой происходит переброс значений, будет совпадать со знаком конечного приращения функции в процессе переброса. Однако характер последующего движения существенно зависит от знака, который приобретает  $\dot{\sigma}$  после переброса значения  $\psi(\sigma)$ .

Пусть в процессе переброса значений  $\psi(\sigma)$  знак  $\dot{\sigma}$  не меняется. Тогда имеет место нормальное переключение. Если при таком перебросе знак  $\dot{\sigma}$  меняется на обратный, то после переключения аргумент управления  $\sigma$  начинает изменяться в обратном направлении. Аргумент управления будет, очевидно, изменяться внутри замкнутого интервала  $-\sigma_1^* \leq \sigma \leq \sigma_1^*$ , когда указанная ситуация будет иметь место в ряде последовательных точек переключений. В этом случае, например, для второй схемы табл. 1.1 аргумент управления  $\sigma$  будет совершать колебания внутри люфта передаточного механизма.

При  $\psi(\sigma) = 1$  и  $\psi(\sigma) = -1$  первое уравнение (5.1) представляется в виде (5.2) и (5.3) соответственно. Если воспользоваться этими уравнениями для определения  $\dot{\sigma}$ , а  $\sigma$  выразить по второму уравнению (5.1), то условия переключений можно записать в виде следующих выражений:

$$\gamma x = \sigma_1^*, \quad \gamma Px - \gamma h > 0, \quad \gamma Px + \gamma h > 0 \quad (5.170)$$

и

$$\gamma x = -\sigma_1^*, \quad \gamma Px - \gamma h > 0, \quad \gamma Px + \gamma h < 0 \quad (5.171)$$

для перехода от  $\psi(\sigma) = -1$  к  $\psi(\sigma) = 1$  и

$$\gamma x = -\sigma_1^*, \quad \gamma Px + \gamma h < 0, \quad \gamma Px - \gamma h < 0 \quad (5.172)$$

и

$$\gamma x = \sigma_1^*, \quad \gamma Px + \gamma h < 0, \quad \gamma Px - \gamma h > 0 \quad (5.173)$$

для перехода от  $\psi(\sigma) = 1$  к  $\psi(\sigma) = -1$ . Выражения (5.170) и (5.172) определяют условия нормального переключения, а при выполнении условий (5.171) и (5.173) имеет место ситуация, когда аргумент управления  $\sigma$  колеблется внутри петли релейной характеристики.

Полученные результаты удобно описать геометрическим языком. Для наглядности будем пользоваться понятием трехмерного фазового пространства. На рис. 5.5 в трехмерном

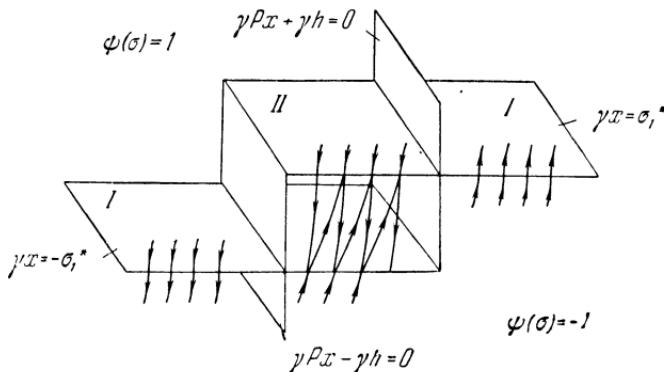


Рис. 5.5. Фазовое пространство при релейной характеристике типа люфта: I — области нормального переключения; II — верхняя грань «коробки».

фазовом пространстве изображены полуплоскости  $yx = \sigma_1^*$  и  $yx = -\sigma_1^*$ , ограниченные плоскостями (5.8). Эти полуплоскости разбивают фазовое пространство на области, в которых  $\psi(\sigma) = 1$  или  $\psi(\sigma) = -1$ , причем внутри коробки, образованной пересечением всех четырех плоскостей, управляющая функция может принимать значения  $\psi(\sigma) = 1$  и  $\psi(\sigma) = -1$ . Полуплоскости  $yx = \sigma_1^*$  и  $yx = -\sigma_1^*$  являются полуплоскостями переключений. Куски фазовых траекторий, примыкающие с обеих сторон к полуплоскостям  $yx = \sigma_1^*$  и  $yx = -\sigma_1^*$  соответственно правее первой и левее второй плоскостей (5.8), имеют одинаковые направления. Указанные участки полуплоскостей  $yx = \sigma_1^*$  и  $yx = -\sigma_1^*$  определяют область нормальных переключений.

Некоторые куски траекторий, соответствующие  $\psi(\sigma) = 1$ , проинкают внутрь коробки при общем движении сверху вниз

и оканчиваются на нижней грани коробки, так как пересекающие эту грань снизу куски траекторий, соответствующие  $\psi(\sigma) = -1$ , имеют в этих точках обратное направление. По аналогичной причине некоторые куски траекторий, соответствующие  $\psi(\sigma) = -1$ , будут оканчиваться на верхней грани. При движении по указанным кускам траекторий изображающая точка будет совершать колебания между нижней и верхней гранями «коробки». В этом случае изображающая точка может выйти из коробки только через боковые грани или через определенные участки ее ребер.

Рассмотренное движение соответствует чередованию условий переключения (5.171) и (5.173). Движение релейной системы с петлеобразной характеристикой типа люфта в областях нормального переключения мы уже рассматривали в § 5.2, так как фигурирующие там условия переключений (5.10) и (5.11) совпадают с выражениями (5.170) и (5.172). Поэтому рассмотрим сейчас движение, в котором последующие переключения обусловлены выражениями (5.171) и (5.173). При таком рассмотрении будем предполагать, что  $\sigma_1^*$  является достаточно малой величиной. Такое предположение оправдывается тем обстоятельством, что  $\sigma_1^*$  определяет половину ширины люфта или трение в сочленениях передаточного механизма, которые в прецизионных приборах должны быть малыми величинами.

Пусть при  $t = 0$  начальное значение матричной координаты  $x(0)$  удовлетворяет условиям переключений (5.171). Тогда в интервале времени  $0 \leq t \leq T_1$  (до следующего переключения) движение определяется уравнением (5.2), решение которого получается из формулы (2.129) при  $t_0 = 0$ . Полагая в (2.129) дополнительно  $\tau = T_1$ , получим

$$x(T_1) = KM(T_1)K^{-1}x(0) + KN(T_1)K^{-1}h. \quad (5.174)$$

Пусть матричная координата  $x(T_1)$  удовлетворяет условиям переключений (5.173). Тогда аналогичными рассуждениями, полагая в (2.129)  $t_0 = T_1$ ,  $\tau = T_2$  и меняя  $h$  на  $-h$ , получим формулу

$$x(T_1 + T_2) = KM(T_2)K^{-1}x(T_1) - KN(T_2)K^{-1}h, \quad (5.175)$$

причем координата  $x(T_1 + T_2)$  удовлетворяет исходным условиям переключений (5.171). В соответствии с формулами

(4.198) для малых значений скалярной величины  $\xi$  будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} M(\xi) = M(0) + \xi \dot{M}(0) = E + \xi J, \\ N(\xi) = N(0) + \xi \dot{N}(0) = \xi E. \end{array} \right\} \quad (5.176)$$

Полагая последовательно  $\xi = T_1$  и  $\xi = T_2$ , подставим матрицы (5.176) в формулы (5.174) и (5.175). Тогда, учитывая матричные соотношения  $KK^{-1} = E$  и  $KJK^{-1} = P$ , получим

$$x(T_1) = (E + T_1 P)x(0) + T_1 h \quad (5.177)$$

и

$$x(T_1 + T_2) = (E + T_2 P)x(T_1) - T_2 h. \quad (5.178)$$

Обе части равенств (5.177) и (5.178) умножим слева на строку  $\gamma$ . Тогда, принимая во внимание, что столбцы  $x(0)$  и  $x(T_1 + T_2)$  удовлетворяют условиям (5.171), а столбец  $x(T_1)$  — условиям (5.173), получим

$$T_1 = -\frac{2\sigma_1^*}{\gamma Px(0) + \gamma h} > 0, \quad T_2 = \frac{2\sigma_1^*}{\gamma Px(T_1) - \gamma h} > 0. \quad (5.179)$$

По формулам (5.179) интервалы времени  $T_1$  и  $T_2$  между двумя последовательными переключениями на гранях «коробки» пропорциональны параметру петли  $\sigma_1^*$ . Подставим в (5.178)  $x(T_1)$  из формулы (5.177) и при развертывании полученного выражения пренебрежем членами, содержащими множитель  $T_1 T_2$ . Тогда получим

$$x(T_1 + T_2) = [E + (T_1 + T_2)P]x(0) + (T_1 - T_2)h. \quad (5.180)$$

Умножим обе части этого равенства слева на строку  $\gamma$ . Учитывая, что столбцы  $x(0)$  и  $x(T_1 + T_2)$  удовлетворяют первому равенству в условиях (5.171), получим

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} = -\frac{\gamma Px(0)}{\gamma h}. \quad (5.181)$$

Из формул (5.180) и (5.181) легко получить выражение

$$\frac{x(T_1 + T_2) - x(0)}{T_1 + T_2} = Px(0) - \frac{1}{\gamma h} h \gamma Px(0). \quad (5.182)$$

Матричное выражение (5.182) устанавливает в первом приближении связь между любыми двумя последовательными точками, лежащими на верхней грани «коробки», когда в процессе движения следующие друг за другом переключения определяются условиями (5.171) и (5.173). Если параметр петли  $\sigma_1^*$  устремить к нулю, то в соответствии с выражениями (5.179)  $T_1$  и  $T_2$  также будут стремиться к нулю. В этом случае левая часть уравнения (5.182) будет стремиться к производной  $\dot{x}(0)$ . Таким образом, в пределе при  $\sigma_1^* = 0$  выражение (5.182) превращается в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x} = Px - \frac{1}{\gamma h} h \gamma P x. \quad (5.183)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5.115), которое описывает скользящее движение для идеальной релейной характеристики. Но вполне естественно идеальную релейную характеристику считать предельной для петлеобразной характеристики типа люфта, когда параметр  $\sigma_1^*$  стремится к нулю. Таким образом, уравнение скользящего движения (5.115) получает свое фундаментальное объяснение, причем, так как в пределе при  $\sigma_1^* = 0$  имеем также по формулам (5.179)  $T_1 = T_2 = 0$ , то частота переключений релейного управляющего элемента в скользящем режиме становится бесконечной.

### *Релейная характеристика с зоной нечувствительности*

При учете зоны нечувствительности можно также получить в замкнутой форме выражения, которые будут определять периодические режимы собственных колебаний и скользящие движения системы. Релейная характеристика с зоной нечувствительности изображена в четвертой граfe табл. 1.1; в пятой граfe представлена характеристика с люфтом и зоной нечувствительности.

Для характеристики с зоной нечувствительности существуют две параллельные между собой плоскости переключений  $\gamma x = \sigma_2^*$  и  $\gamma x = -\sigma_2^*$ , которые разбивают фазовое пространство на три части:  $\gamma x < -\sigma_2^*$ ,  $-\sigma_2^* < \gamma x < \sigma_2^*$  и  $\gamma x > \sigma_2^*$ . В этих частях управляющая функция соответственно равна  $-1$ ,  $0$  и  $1$ . Три параллельные плоскости  $\gamma P x - \gamma h = 0$ ,

$\gamma Px = 0$  и  $\gamma Px + \gamma h = 0$  разбивают части фазового пространства в указанной последовательности на области, в которых проекция  $\gamma \dot{x}$  вектора скорости  $\dot{x}$  на вектор  $\gamma$  имеет постоянный знак. На каждой плоскости переключений может существовать зона скользящего режима. Границы этих зон определяются параллельными прямыми, которые являются линиями пересечения плоскости  $\gamma x = -\sigma_2^*$  с плоскостями  $\gamma Px - \gamma h = 0$  и  $\gamma Px = 0$  и плоскости  $\gamma x = \sigma_2^*$  с плоскостями  $\gamma Px = 0$  и  $\gamma Px + \gamma h = 0$ . На участках плоскостей  $\gamma x = -\sigma_2^*$  и  $\gamma x = \sigma_2^*$ , лежащих вне зон скользящего режима, выполняются условия нормального переключения. Если устремить  $\sigma_2^*$  к нулю, то в пределе две полосы скользящего режима плоскостей переключений примкнут друг к другу по общей границе и образуют, таким образом, рассмотренную ранее зону скользящего режима для идеальной релейной характеристики.

Уравнения скользящего движения (5.183) остаются справедливыми для релейных систем с зоной нечувствительности. То же самое можно сказать о характеристическом полиноме  $\tilde{\Delta}_x(\lambda)$  и присоединенной матрице  $\tilde{F}(\lambda)$ , определяемых формулами (5.123). Однако вид решения несколько изменится, так как второе слагаемое правой части первой формулы (5.123) не исчезает при формировании столбцов  $\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i)x(0)$  ввиду того, что теперь скалярная величина  $\beta K^{-1}x(0) = \gamma x(0)$  равна  $\sigma_2^*$  или  $-\sigma_2^*$ .

Конечные результаты, определяющие симметричные периодические колебания, получаются в данном случае более громоздкими, так как на полупериоде теперь имеют место два нормальных переключения управляющего элемента. При построении характеристического уравнения здесь возникает новая задача: раскрыть определитель специальной матрицы, равной сумме единичной матрицы с двумя вырожденными матрицами типа произведений столбца на строку. Подобная задача возникает также при анализе установившихся движений релейной системы при постоянном внешнем возмущении. Эту задачу мы рассмотрим ниже, в § 6.2.

Вычислительные формулы для нахождения периодических решений и исследования их устойчивости читатель может найти в одной из ранних работ автора [30].

### § 5.9. Периодические движения с участками скользящего режима

В релейных системах с жестким переключением могут возникать периодические движения, содержащие в себе участки скользящего режима. Замкнутая фазовая траектория, соответствующая такому периодическому движению, содержит куски траекторий, находящиеся как в полупространствах  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ , так и в зоне скользящего режима, причем рассматриваемый класс релейных систем допускает и в этом случае симметричные периодические колебания.

Определим в общем виде периодические решения описываемых указанный вид симметричных колебаний системы.

Пусть при  $t = 0$  изображающая точка с координатой  $x(0)$  находится в зоне скользящего режима и по прошествии времени  $T_1$  попадает на граничную полупрямую этой зоны, через которую она переходит в полупространство  $\sigma > 0$ . Пусть, далее, через промежуток времени  $T_2$  изображающая точка снова возвращается в зону скользящего режима и попадает в ту точку, которая симметрична начальной, т. е. в точку с матричной координатой —  $x(0)$ . Тогда в системе возникает симметричный периодический режим колебаний. Скользящий режим определяется условиями (5.7). Изображающая точка выходит из зоны скользящего режима в полупространство  $\sigma > 0$  при выполнении левой группы условий (5.8б).

Следовательно, точки с координатами  $x(0)$  и  $x(T_1)$  должны удовлетворять соответственно условиям

$$\gamma x(0) = 0, \quad \gamma Px(0) + \gamma h < 0, \quad \gamma Px(0) - \gamma h > 0, \quad (5.184)$$

$$\gamma x(T_1) = 0, \quad \gamma Px(T_1) + \gamma h = 0, \quad \gamma P^2x(T_1) + \gamma Ph > 0. \quad (5.185)$$

Столбец  $x(T_1)$  определяется через столбец  $x(0)$  по формуле (5.133) в виде

$$x(T_1) = - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i)}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} h \gamma \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\Delta'_*(\tilde{\lambda}_i)} x(0), \quad (5.186)$$

где  $\tilde{\lambda}_i$  — корни полинома (5.132). В интервале времени  $0 < t < T_1$  должны выполняться условия (5.134). Далее положение точки в момент времени  $t = T_1 + T_2$  будет

определяться выражением

$$x(T_1 + T_2) = KM(T_2)K^{-1}x(T_1) + KN(T_2)K^{-1}h, \quad (5.187)$$

которое получается из формулы (2.129) при  $t_0 = T_1$  и  $\tau = T_2$ .

Квадратные матрицы, входящие в правую часть равенства (5.187), в развернутом виде представляются так:

$$\left. \begin{aligned} KM(T_2)K^{-1} &= \sum_{j=1}^{n-2} e^{\lambda_j T_2} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} + \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} + T_2 \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)}, \\ KN(T_2)K^{-1} &= \sum_{j=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_j T_2} - 1}{\lambda_j} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} + T_2 \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} + \\ &\quad + \frac{T_2^2}{2} \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.188)$$

Формулы (5.188) справедливы в случае, когда среди корней  $\lambda_j$  есть только один двойной корень  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ . Если все корни  $\lambda_j$  простые, то в формуле (5.188) следует удержать только симметричную часть, распространив в ней суммирование до  $n$ .

Подставим в равенство (5.187)  $x(T_1)$  из формулы (5.186) и положим  $x(T_1 + T_2) = -x(0) = -x^*(0)$ . Тогда для определения начального условия  $x^*(0)$  искомого периодического решения получим выражение в виде

$$\begin{aligned} -x^*(0) &= -\sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} KM(T_2)K^{-1} \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x^*(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} + \\ &\quad + KN(T_2)K^{-1}h. \end{aligned} \quad (5.189)$$

Будем обозначать столбец  $x(T_1) = x^*(T_1)$ , если он соответствует начальному условию  $x(0) = x^*(0)$ . В условиях (5.184) и (5.185) фигурируют три равенства. Однако существенными являются только два скалярных равенства

$$\gamma x^*(0) = 0, \quad (5.190)$$

$$\gamma P x^*(T_1) + \gamma h = 0, \quad (5.191)$$

которые мы записали для начального значения  $x(0) = x^*(0)$ . Первое равенство (5.185) выполняется автоматически из условий (5.184). Равенство (5.191) совпадает с левым граничным

условием (5.134) при  $t = T_1$ , поэтому его можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x^*(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} + 1 = 0. \quad (5.192)$$

Матричное уравнение (5.189) и скалярные уравнения (5.190), (5.191) образуют систему из  $n+2$  скалярных уравнений для нахождения такого же числа неизвестных  $x_1^*(0), x_2^*(0), \dots, x_n^*(0)$ ,  $T_1 > 0$  и  $T_2 > 0$ . При выполнении неравенства (5.134) и неравенств, фигурирующих в условиях (5.184) и (5.185), указанные выше  $n+2$  величины определяют начальное условие  $x^*(0)$  периодического решения и его полу-период  $T_1 + T_2$ . При этом, естественно, должны отсутствовать дополнительные нормальные переключения.

Для исследования устойчивости найденных периодических решений нужно проверять матричные равенства (5.186), (5.187) и скалярные выражения (5.190), (5.191). Так будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \delta x(T_1) = & - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) \delta(x_0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{\tilde{\lambda}_i F(\tilde{\lambda}_i) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x^*(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} \delta T_1, \\ & \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) \delta x(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{\tilde{\lambda}_i \gamma F(\tilde{\lambda}_i) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x^*(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} \delta T_1 = 0, \\ - \delta x(T_1 + T_2) = & KM(T_2) K^{-1} \delta x(T_1) + \\ & + KM(T_2) [JK^{-1} x^*(T_1) + K^{-1} h] \delta T_2, \\ \gamma KM(T_2) K^{-1} \delta x(T_1) + & \\ & + \gamma KM(T_2) [JK^{-1} x^*(T_1) + K^{-1} h] \delta T_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.193)$$

Уравнения (5.193) устанавливают связь между  $\delta x(T_1 + T_2)$  и  $\delta x(0)$ , т. е. они образуют точечное преобразование

в окрестности инвариантной точки  $x^*(0)$ , соответствующей найденному периодическому решению. Корни характеристического уравнения этого преобразования определяют устойчивость. При решении конкретных задач может оказаться полезным представить уравнение (5.189) в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i T_1} \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x^*(0)}{\Delta'_*(\tilde{\lambda}_i)} = \\ = KM(-T_2) K^{-1} x^*(0) + KM(-T_2) N(T_2) K^{-1} h. \quad (5.194)$$

Это выражение получается из уравнения (5.189), если обе части его умножить на матрицу  $KM(-T_2)K^{-1}$  и сделать очевидные перестановки. Матрица  $KM(-T_2)K^{-1}$  получается из первой формулы (5.188) заменой  $T_2$  на  $-T_2$ , а матрица  $KM(-T_2)N(T_2)K^{-1}$  для случая двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  имеет вид

$$KM(-T_2)N(T_2)K^{-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1 - e^{\lambda_j T_2}}{\lambda_j} \frac{F(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)} + \\ + T_2 \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} - \frac{T_2^2}{2} \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)}. \quad (5.195)$$

В качестве примера рассмотрим систему стабилизации нейтрального самолета, движение которой описывается уравнениями (5.141). В такой системе возможны скользящие движения. Такие движения были рассмотрены в § 5.7. Найдем периодические режимы первого типа, которые могут существовать в системе при выполнении условий нормального переключения. В соответствии с формулами (5.149) — (5.152) находим выражения

$$\begin{aligned} \frac{\gamma F(\lambda_1) h}{\Delta'(\lambda_1)} &= \left( -\frac{1}{M^2} + \frac{a_1}{M} - a_2 \right) Nh'_2, \\ \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_2(0)} \right]^{(1)} h &= \left( \frac{1}{M^2} - \frac{a_1}{M} \right) Nh'_2, \\ \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_2(0)} &= -\frac{Nh'_2}{M}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5.196)$$

Учитывая формулы (5.146), (5.150) и (5.196), представим для данного случая уравнение периодов (5.47) и неравенства

нормального переключения (5.48) соответственно в виде \*)

$$-\frac{1}{M} \left( -\frac{1}{M^2} + \frac{\alpha_1}{M} - \alpha_2 \right) \operatorname{th} \frac{MT}{2} - \left( \frac{1}{M^2} - \frac{\alpha_1}{M} \right) \frac{T}{2} = 0, \quad (5.197)$$

$$\left( -\frac{1}{M^2} + \frac{\alpha_1}{M^2} - \alpha_2 \right) \operatorname{th} \frac{MT}{2} + \frac{T}{2M} > \alpha_2. \quad (5.198)$$

Уравнение периодов (5.197) имеет один положительный корень  $T$  при выполнении неравенства

$$\alpha_1 < \frac{1}{M}. \quad (5.199)$$

При условии (5.199) левая часть уравнения периодов будет положительна при малых  $T$  и отрицательна при достаточно больших  $T$ . Графически левую часть можно изобразить в виде кривой, представленной для области IV на рис. 5.2. Такая аналогия не является случайной, так как уравнение периодов (5.197) является предельным для уравнения (5.97) при  $\Theta = 0$ , а неравенство (5.199) выполняется в области IV (см. рис. 4.7) при том же условии.

Для значений  $T$ , удовлетворяющих уравнению периодов (5.197), неравенство (5.198) можно привести к виду

$$\alpha_1 T/2 > \alpha_2. \quad (5.200)$$

В силу только что сделанного замечания относительно характера изменения левой части уравнения (5.197), неравенство (5.200) может иметь место только при выполнении условия

$$\left( \frac{1}{M^2} - \frac{\alpha_1}{M} + \alpha_2 \right) \operatorname{th} \frac{Ma_2}{\alpha_1} + \left( \alpha_1 - \frac{1}{M} \right) \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0. \quad (5.201)$$

Таким образом, при одновременном выполнении неравенств (5.199) и (5.201) существует одно периодическое решение рассматриваемого типа.

Для анализа устойчивости исследуем преобразованное характеристическое уравнение (5.89). Для данной задачи последний коэффициент  $p'_2$  этого уравнения имеет вид

$$p'_2 = -\frac{T}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_2(0)} = -\frac{Nh'_2}{M} \frac{T}{2} \operatorname{th} \frac{MT}{2}. \quad (5.202)$$

Очевидно, коэффициент  $p'_2 < 0$ , а старший коэффициент  $p'_0$ , наоборот, больше нуля, так как кривая периодов в данном

\*) При записи выражений (5.197) и (5.198) был отброшен общий множитель  $Nh'_2 > 0$  и положено  $\sigma_1 = 0$ .

случае пересекает ось абсцисс сверху вниз (см. § 5.4). Два коэффициента преобразованного характеристического уравнения имеют разные знаки, поэтому найденное периодическое решение неустойчиво.

Замкнутая фазовая траектория, соответствующая найденному периодическому решению, состоит из двух симметричных кусков, целиком находящихся в полупространствах  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ . Эти куски траекторий опираются своими концами на плоскость переключений в точках, лежащих вне зоны скользящего режима.

При условии (5.199) и обратном неравенстве (5.201) в рассматриваемой системе стабилизации возникают периодические режимы с участками скользящего движения.

Соответствующие периодические решения следует искать в этом случае по общим формулам, полученным в данном параграфе. Однако ожидаемый результат такого исследования можно предвосхитить посредством следующих рассуждений. Система уравнений (5.141), определяющая движение рассматриваемой системы, получается из уравнений (5.96) при  $\Theta = 0$ . В § 5.5 было показано, что в любой точке области IV (см. рис. 4.7 и 5.2) существует неустойчивый периодический режим. Этот режим существует при любом  $\Theta$  и, в частности, при сколь угодно малом его значении.

При  $\Theta = 0$  область IV определяется неравенством (5.199). Поэтому можно ожидать, что при выполнении неравенства (5.199) будет существовать один неустойчивый периодический режим вне зависимости от того, будет ли он состоять из участков скользящих движений или нет.

Решение аналогичной задачи для автопилота с жесткой обратной связью, полученное А. А. Андроновым и Н. Н. Баутинным [2] при исследовании структуры разбиения фазового пространства на траектории, подтверждает сделанный выше вывод \*). Интересно отметить, что здесь мы имеем пример, когда конечные результаты проще получить для системы уравнений более высокого порядка.

\*.) В [2] аргумент управления имеет вид

$$\sigma = \varphi + \beta \dot{\varphi} - \frac{1}{a} \eta.$$

Соответствующие результаты для рассматриваемой здесь задачи можно получить из [2], если положить  $\beta = a_1 - Ma_2$  и  $1/a = Na_2$ .

## ГЛАВА VI

# РЕЛЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ ВНЕШНEM ВОЗДЕЙСТВИИ И ВОЗМУЩЕНИИ

### § 6.1. Установившиеся движения при постоянном воздействии и возмущении

Задающее воздействие вводится в релейную систему посредством надлежащего изменения аргумента управления  $\sigma$ . Аргумент управления определяется в этом случае формулой (1.19) или эквивалентным матричным выражением (4.155). При постоянном воздействии скалярная величина  $\gamma x_3$  и все элементы столбца  $x_3$  считаются постоянными величинами. В дальнейшем удобнее решать задачу в более общей постановке, т. е. считать, что на релейную систему накладывается постоянное внешнее возмущение.

Уравнения движения такой системы можно представить в форме

$$\dot{x} = Px + h\psi(\sigma) + g, \quad \sigma = \gamma x, \quad (6.1)$$

которая является матричной записью системы уравнений (1.15). В уравнении (6.1) элементы столбца  $g$ , обусловливающего внешнее возмущение, суть постоянные числа. При постоянном воздействии легко привести уравнения движения к форме (6.1), если на начало отсчета координат системы принять элементы столбца  $x_3$ . В этом случае столбец  $g$  записывается в виде

$$g = Px_3. \quad (6.2)$$

К анализу уравнений (6.1) можно также свести задачу по исследованию движения релейной системы при несимметричной характеристики, график которой в общем виде приведен в шестой графе табл. 1.1. В этом случае столбец  $g$  определяется в форме

$$g = \varepsilon h, \quad (6.3)$$

где  $\varepsilon$  — положительное число, определяющее смещение релейной характеристики вверх.

Таким образом, будем рассматривать уравнения (6.1), причем, исходя из рассуждений, приведенных в предыдущей

главе, в областях нормальных переключений будем предполагать, что релейная характеристика имеет петлю типа люфта, а в зонах, где эти условия не выполняются, рассматривать идеальную релейную характеристику. При таком подходе к задаче мы будем получать общие результаты в первом случае, равным образом пригодные для обоих типов релейных характеристик. Во втором случае мы сможем привлечь к анализу более удобную математическую модель — уравнения скользящего движения. При нормальном переключении переброс значений управляющей функции от  $\psi(\sigma) = -1$  к  $\psi(\sigma) = 1$  осуществляется при выполнении условий

$$\gamma x = \sigma_1^*, \quad \gamma Px - \gamma h + \gamma g > 0, \quad \gamma Px + \gamma h + \gamma g > 0. \quad (6.4)$$

При условиях

$$\gamma x = -\sigma_1^*, \quad \gamma Px + \gamma h + \gamma g < 0, \quad \gamma Px - \gamma h + \gamma g < 0 \quad (6.5)$$

имеет место переход от значения  $\psi(\sigma) = 1$  к значению  $\psi(\sigma) = -1$ . Условия скользящего режима записываются в данном случае в виде

$$\gamma x = 0, \quad \gamma Px + \gamma h + \gamma g < 0, \quad \gamma Px - \gamma h + \gamma g > 0. \quad (6.6)$$

Для идеальной релейной характеристики в условиях (6.4) и (6.5) следует брать  $\sigma_1^* = 0$ . В релейных системах с жестким переключением условия (6.6) могут выполняться только при  $\gamma h < 0$ . Зона скользящего режима, определяемая условиями (6.6), не симметрична относительно начала координат. При изменении скалярной величины  $\gamma g$  зона скользящего режима перемещается вдоль плоскости переключений параллельно самой себе. При  $|\gamma g| < |\gamma h|$  начало координат лежит внутри зоны скользящего режима.

При анализе уравнений (6.1) следует различать два случая, которые зависят от разрешимости алгебраических уравнений

$$Px + g = 0, \quad \gamma x = 0, \quad (6.7)$$

определяющих положение равновесия системы. Для неособой матрицы  $P$  уравнения (6.7) разрешимы, если столбец  $g$  удовлетворяет равенству

$$\gamma P^{-1}g = 0. \quad (6.8)$$

Относительно положения равновесия, определяемого уравнениями (6.7) и (6.8), система будет совершать собственные движения, которые рассматривались в предыдущей главе.

Если уравнения (6.7) неразрешимы, то в системе могут возникнуть периодические колебания, обусловленные постоянным возмущением. Такие колебания не будут обладать симметрией на полупериоде. Это обстоятельство приводит к усложнению вычислительных формул.

Перейдем к нахождению периодических решений уравнений (6.1), которым соответствуют периодические колебания указанного типа.

## § 6.2. Периодические колебания в статических системах

В этом случае среди корней  $\lambda_i$  нет равных нулю; кроме того, будем считать, что они простые.

При  $\psi(\sigma)=1$  первое уравнение (6.1) представляется в виде

$$\dot{x} = Px + h + g. \quad (6.9)$$

В соответствии с формулой (2.129) его решение  $x(t)$ , принимающее при  $t=t_0$  начальное значение  $x(t_0)$ , определяется выражением

$$x(t_0 + \tau) = KM(\tau)K^{-1}x(t_0) + KN(\tau)K^{-1}(h + g), \quad (6.10)$$

в котором положено  $t = t_0 + \tau$ . Для  $\psi(\sigma) = -1$  имеем соответственно уравнение движения в форме

$$\dot{x} = Px - h + g \quad (6.11)$$

и его решение в виде

$$x(t_0 + \tau) = KM(\tau)K^{-1}x(t_0) + KN(\tau)K^{-1}(-h + g). \quad (6.12)$$

Пусть при  $t_0 = 0$  координата  $x(t_0) = x(0)$  удовлетворяет условию переключения (6.4). Тогда состояние системы будет определяться выражением (6.10) вплоть до ближайшего мгновения времени  $t = T_1$ , при котором произойдет следующее переключение, т. е. при котором  $x(T_1)$  будет удовлетворять условиям (6.5). Из (6.10) при  $t_0 = 0$  и  $\tau = T_1$  получим

$$x(T_1) = KM(T_1)K^{-1}x(0) + KN(T_1)(h + g). \quad (6.13)$$

В следующем интервале времени  $T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$  состояние системы будет определяться выражением (6.12). При  $t_0 = T_1$  и  $\tau = T_2$  из (6.12) получим

$$\begin{aligned} x(T_1 + T_2) &= \\ &= KM(T_2)K^{-1}x(T_1) + KN(T_2)K^{-1}(-h + g), \end{aligned} \quad (6.14)$$

причем  $t = T_1 + T_2$  считается ближайшим к  $t = T_1$  мгновением времени, при котором происходит следующее переключение, т. е. при котором  $x(T_1 + T_2)$  удовлетворяет условиям переключения (6.4). Условие периодичности имеет вид

$$x(T_1 + T_2) = x(0) = x^*(0). \quad (6.15)$$

Из формул (6.13) — (6.15) легко установить выражение

$$\begin{aligned} K[E - M(T_1 + T_2)]K^{-1}x^*(0) &= \\ &= K[M(T_2)N(T_1) - N(T_2)]K^{-1}h + \\ &\quad + K[M(T_2)N(T_1) + N(T_2)]K^{-1}g. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Полученные соотношения для определения  $x^*(0)$  являются общими: они справедливы для любых корней  $\lambda_i$ . Рассмотрим в данном пункте случай, когда корни простые и среди них нет равных нулю. В этом случае каноническая матрица  $J = \Lambda$  для  $P$  и матрицы  $M(t)$ ,  $N(t)$  определяются соответственно по формулам (2.44), (2.94) и (2.120). Матрица  $E - M(T_1 + T_2)$  при сделанных предположениях является неособой. Кроме того, все перечисленные матрицы перестановочны между собой. При сделанных предположениях уравнение (6.16) можно разрешить относительно  $x^*(0)$  умножением его обеих частей на матрицу  $K[E - M(T_1 + T_2)]^{-1}K^{-1}$ . Выполняя такую операцию и проводя элементарные преобразования с использованием формулы (2.110), получим

$$\begin{aligned} x^*(0) &= \\ &= -2K[E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_2)K^{-1}h - K\Lambda^{-1}K^{-1}(h + g). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Выражение (6.13) посредством подстановки в него  $x(0) = x^*(0)$

преобразуется к виду \*)

$$\begin{aligned} x^*(T_1) &= \\ &= 2K [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) K^{-1} h - K \Lambda^{-1} K^{-1} (-h + g). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Столбцы  $x^*(0)$  и  $x^*(T_1)$  должны удовлетворять условиям переключений (6.4) и (6.5) соответственно. Первые равенства этих условий образуют уравнения периодов (их в данном случае будет два), которые запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} &- 2\gamma K [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) K^{-1} h - \\ &\quad - \gamma K \Lambda^{-1} K^{-1} (h + g) = \sigma_1^*, \\ &2\gamma K [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) K^{-1} h - \\ &\quad - \gamma K \Lambda^{-1} K^{-1} (-h + g) = -\sigma_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Оставшиеся неравенства можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} &- 2\gamma K \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) K^{-1} h - \\ &\quad - \gamma h - |\gamma h| > 0, \\ &2\gamma K \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) K^{-1} h + \gamma h + |\gamma h| < 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

где  $|\gamma h|$  обозначает абсолютную величину  $\gamma h$ . Чтобы получить (6.20), нужно в неравенстве (6.4) и (6.5) сначала подставить  $P = K \Lambda K^{-1}$ , а затем уже соответственно  $x^*(0)$  и  $-x^*(T_1)$  из формул (6.17) и (6.18). Решение в интервале  $0 \leq t \leq T_1 + T_2$ , соответствующее найденным значениям  $x^*(0)$  (6.17) и  $x^*(T_1)$  (6.18), получается из (6.10) и (6.12) в виде

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(\tau) = \\ &= -2K M(\tau) [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) K^{-1} h - \\ &\quad - K \Lambda^{-1} K^{-1} (h + g), \quad 0 \leq \tau \leq T_1, \\ x(t) &= x(T_1 + \tau) = \\ &= 2K M(\tau) [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) K^{-1} h - \\ &\quad - K \Lambda^{-1} K^{-1} (-h + g), \quad 0 \leq \tau \leq T_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

---

\*) Столбец  $x(T_1)$ , соответствующий начальному значению  $x(0) = x^*(0)$ , будем обозначать через  $x^*(T_1)$ .

Выражения (6.21) будут определять периодическое решение на интервале времени, равном периоду, если положительные величины  $T_1$  и  $T_2$  удовлетворяют уравнениям периодов (6.19), неравенствам переключения (6.20) и если будут отсутствовать дополнительные переключения. Последнее условие можно записать в виде неравенств

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(t) = \gamma x(t) = \gamma x(\tau) > -\sigma_1^*, \quad 0 \leq \tau \leq T_1, \\ \sigma(t) = \gamma x(t) = \gamma x(T_1 + \tau) < \sigma_1^*, \quad 0 \leq \tau \leq T_2, \end{array} \right\} \quad (6.22)$$

в которых  $x(\tau)$  и  $x(T_1 + \tau)$  определяются из формул (6.21).

Найденные периодические решения не обладают симметрией на полуperiоде, поэтому среднее значение координат системы на интервале времени, равном периоду, не будет равно нулю. Среднее значение координат определяется по формуле

$$x_{cp} = \frac{1}{T_1 + T_2} \left\{ \int_0^{T_1} x(\tau) d\tau + \int_0^{T_2} x(T_1 + \tau) d\tau \right\}, \quad (6.23)$$

где  $x(\tau)$  и  $x(T_1 + \tau)$  даются выражениями (6.21). Если учесть, что в соответствии с (2.109) и (2.110)

$$\int_0^{T_i} M(\tau) d\tau = N(T_i),$$

то нетрудно установить для  $x_{cp}$  выражение

$$x_{cp} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} K \Lambda^{-1} K h - K \Lambda^{-1} K^{-1} g. \quad (6.24)$$

Но  $K \Lambda^{-1} K^{-1} = P^{-1}$ , поэтому формулу (6.24) можно также записать в таком виде:

$$P x_{cp} - \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} h + g = 0. \quad (6.25)$$

Множитель при столбце  $h$  равен среднему значению управляющей функции  $\psi(\sigma)$  на интервале времени, равном одному периоду. Таким образом, выражение (6.25) получается приравниванием в среднем правой части первого уравнения (6.1) нулю.

Формула (6.25) дает аналитическое выражение тому обстоятельству, что уравновешивание постоянного возмущения происходит в динамическом режиме периодических колебаний. Столбец  $x_{\text{ср}}$ , в который входит регулируемая координата, можно принимать за статическую ошибку рассматриваемой релейной системы.

Анализ устойчивости найденного периодического решения будем снова проводить посредством построения разностных уравнений первого приближения и исследования характера распределения корней их характеристического уравнения. Рассмотрим решение уравнений (6.1) в интервале времени между двумя последовательными переключениями, близкое к найденному периодическому решению.

Пусть  $x^*(0) + \delta x(0)$  — начальное значение этого решения, удовлетворяющее условию переключения (6.4) при численно малых значениях элементов столбца  $\delta x(0)$ . Тогда последующие два переключения произойдут в моменты времени  $T_1 + \delta T_1$  и  $T_2 + \delta T_2$  и соответствующие им матричные координаты, которые можно обозначить через  $x^*(T_1) + \delta x(T_1)$  и  $x^*(0) + \delta x(T_2)$ , будут удовлетворять условиям переключения (6.5) и (6.4) соответственно. Здесь  $x^*(0)$ ,  $x^*(T_1)$ ,  $T_1$  и  $T_2$  — параметры найденного периодического решения, а  $\delta T_1$ ,  $\delta T_2$  и элементы столбцов  $\delta x(T_1)$  и  $\delta x(T_2)$  являются численно малыми вместе с элементами столбца  $\delta x(0)$ . Для нового начального условия из уравнений (6.13) и (6.14) легко установить соотношения

$$\begin{aligned} x^*(T_1) + \delta x(T_1) &= KM(T_1 + \delta T_1)K^{-1}[x^*(0) + \delta x(0)] + \\ &\quad + KN(T_1 + \delta T_1)K^{-1}(h + g), \\ x^*(0) + \delta x(T_2) &= KM(T_2 + \delta T_2)K^{-1}[x^*(T_1) + \delta x(T_1)] + \\ &\quad + KN(T_2 + \delta T_2)K^{-1}(-h + g), \end{aligned}$$

варьированием которых получаются уравнения первого приближения в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta x(T_1) &= KM(T_1)K^{-1}\delta x(0) + K[\dot{M}(T_1)K^{-1}x^*(0) + \\ &\quad + \dot{N}(T_1)K^{-1}(h + g)]\delta T_1, \\ \delta x(T_2) &= KM(T_2)K^{-1}\delta x(T_1) + K[\dot{M}(T_2)K^{-1}x^*(0) + \\ &\quad + \dot{N}(T_2)K^{-1}(-h + g)]\delta T_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Если учесть формулы (4.198), (6.17) и (6.18), то выражения (6.26) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \delta x(T_1) &= KM(T_1)K^{-1}\delta x(0) - \\ &\quad - 2KM(T_1)\Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_2)K^{-1}h\delta T_1, \\ \delta x(T_2) &= KM(T_2)K^{-1}\delta x(T_1) + \\ &\quad + 2KM(T_2)\Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_1)K^{-1}h\delta T_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Вариации  $\delta x(0)$  и  $\delta x(T_1)$  удовлетворяют дополнительным условиям

$$\gamma \delta x(T_1) = 0, \quad \gamma \delta x(T_2) = 0, \quad (6.28)$$

которые получаются варьированием первых равенств в условиях переключения (6.4) и (6.5).

Подставим  $\delta x(T_1)$  и  $\delta x(T_2)$  из (6.27) в (6.28), разрешим их относительно  $\delta T_1$  и  $\delta T_2$  и полученные выражения подставим в (6.27). Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \delta x(T_1) &= K \left\{ M(T_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M(T_1)\Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_2)K^{-1}h\gamma KM(T_1)}{\gamma KM(T_1)\Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_2)K^{-1}h} \right\} \times \\ &\quad \times K^{-1}\delta x(0), \\ \delta x(T_2) &= K \left\{ M(T_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M(T_2)\Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_1)K^{-1}h\gamma KM(T_2)}{\gamma KM(T_2)\Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1}N(T_1)K^{-1}h} \right\} \times \\ &\quad \times K^{-1}\delta x(T_1). \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

И, наконец, подставим  $\delta x(T_1)$  из первого равенства (6.29) во второе. Тогда будем иметь

$$\delta x(T_2) = K[M(T_1 + T_2) - u'\beta' - u''\beta'']K^{-1}\delta x(0), \quad (6.30)$$

причем строки  $\beta'$ ,  $\beta''$  и столбцы  $u'$ ,  $u''$  определяются

выражениями

$$\left. \begin{aligned} \beta' &= \beta M(T_1 + T_2), \\ \beta'' &= \beta M(T_1), \\ u' &= \frac{1}{\alpha_1} M(T_2) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) u, \\ u'' &= \left\{ \frac{1}{\alpha_2} M(T_1 + T_2) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2} M(T_2) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) \right\} u, \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

в которых  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  суть скалярные величины

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta M(T_2) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) u, \\ \alpha_2 &= \beta M(T_1) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) u, \\ \alpha_3 &= \beta M(T_1 + T_2) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) u, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

а строка  $\beta$  и столбец  $u$  по-прежнему определяются формулами (4.21). Соотношение (6.14) при условии (6.13) определяет связь между координатами двух последовательных точек пересечения фазовой траекторией плоскости переключений  $\gamma x = \sigma_1^*$  или, по другой терминологии, определяет точечное преобразование плоскости переключений  $\gamma x = \sigma_1^*$  в самое себя. Столбец  $x^*(0)$  определяет инвариантную точку такого преобразования, которой соответствует периодическое решение.

В этом отношении линейное разностное уравнение (6.30), представленное в матричной форме, будет определять точечное преобразование плоскости переключений  $\gamma x = \sigma_1^*$  в окрестности инвариантной точки.

Характеристическое уравнение этого преобразования, которое можно записать в виде

$$\det [\lambda E - M(T_1 + T_2) - u'\beta' - u''\beta''] = 0 \quad (6.33)$$

определяет устойчивость инвариантной точки, а следовательно, и предельного цикла. Для устойчивости, как мы неоднократно уже отмечали, нужно, чтобы модули всех корней уравнения (6.33) были меньше единицы. Основная трудность теперь состоит в развертывании определителя, стоящего в левой части уравнения (6.33), так как соответствующая ему

матрица имеет более сложную структуру по отношению к аналогичным выражениям, встречавшимся в предыдущих разделах. Однако специфика матриц  $u'\beta'$  и  $u''\beta''$ , имеющих ранг равный единице, позволяет единообразным приемом получить окончательный результат.

Введем матрицы-столбцы

$$\left. \begin{array}{l} [\lambda E - M(T_1 + T_2)]^{-1} u' = \tilde{u}', \\ [\lambda E - M(T_1 + T_2)]^{-1} u'' = \tilde{u}'', \\ [E - \tilde{u}'\beta']^{-1} \tilde{u}'' = \tilde{\tilde{u}}''. \end{array} \right\} \quad (6.34)$$

Тогда, вынося в матрице, стоящей в квадратных скобках в левой части уравнения (6.33), в виде множителя матрицу  $\lambda E - M(T_1 + T_2)$ , а затем матрицу  $E - \tilde{u}'\beta'$  и применяя правило образования определителя от произведения, получим

$$\det[\lambda E - M(T_1 + T_2)] \det(E - \tilde{u}'\beta') \det(E - \tilde{u}''\beta'') = 0. \quad (6.35)$$

Но уравнение (6.35) в соответствии с (4.133) немедленно приводится к виду

$$\{\det[\lambda E - M(T_1 + T_2)]\} (1 - \beta'\tilde{u}') (1 - \beta''\tilde{u}'') = 0 \quad (6.36)$$

или

$$\{\det[\lambda E - M(T_1 + T_2)]\} \{(1 - \beta'\tilde{u}') (1 - \beta''\tilde{u}'') - \beta''\tilde{u}'\beta'\tilde{u}''\} = 0, \quad (6.37)$$

если в (6.36) подставить  $\tilde{u}''$  из третьего равенства (6.34), предварительно обратив в нем матрицу  $E - \tilde{u}'\beta'$  в соответствии с формулой (4.137).

Постоянное внешнее воздействие не нарушает автономности рассматриваемых релейных систем. Поэтому, так же как и в предыдущей главе, устойчивость периодического решения будет зависеть от  $(n - 1)$  корней характеристического уравнения (6.37), так как один его корень будет заведомо равен нулю. Чтобы установить этот результат, нужно последовательно подставить в (6.37)  $\tilde{u}'$  и  $\tilde{u}''$  по формулам (6.34) и  $\beta', \beta'', u'$  и  $u''$  по формулам (6.31) и (6.32), а затем раскрыть скобки и провести сокращения. После такой операции нужно во всех выражениях, которые одновременно содержат

матрицы  $\lambda E - M(T_1 + T_2)$  и  $M(T_1 + T_2)$  в виде множителей, представить последнюю матрицу в форме

$$M(T_1 + T_2) = \lambda E - [\lambda E - M(T_1 + T_2)]$$

и провести соответствующие расщепления \*).

После указанных операций характеристическое уравнение (6.37) преобразуется к виду

$$\lambda \{ \det [\lambda E - M(T_1 + T_2)] \} (\lambda d_1 d_2 - d_3 d_4) = 0, \quad (6.38)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \beta [\lambda E - M(T_1 + T_2)]^{-1} M(T_2) \Lambda \times \\ &\quad \times [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) u, \\ d_2 &= \beta [\lambda E - M(T_1 + T_2)]^{-1} M(T_1) \Lambda \times \\ &\quad \times [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) u, \\ d_3 &= \beta [\lambda E - M(T_1 + T_2)]^{-1} M(T_1 + T_2) \Lambda \times \\ &\quad \times [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) u, \\ d_4 &= \beta [\lambda E - M(T_1 + T_2)]^{-1} M(T_1 + T_2) \Lambda \times \\ &\quad \times [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) u. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Развивая матричные соотношения (6.19) — (6.21) и (6.38) по правилам, которые мы неоднократно использовали при аналогичных обстоятельствах в предыдущих главах, получим вычислительные формулы для нахождения периодических решений и анализа их устойчивости:

уравнения периодов \*\*)

$$\left. \begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \frac{\gamma F(0)(h+g)}{\Delta(0)} &= \sigma_1^*, \\ 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \frac{\gamma F(0)(-h+g)}{\Delta(0)} &= -\sigma_1^*; \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

\*) При указанных операциях следует учесть, что все квадратные матрицы перестановочны между собой и  $M(T_1 + T_2) = M(T_1) M(T_2)$ .

\*\*) По формулам (2.43), (2.55) при  $B = P$ ,  $J = \Lambda$  и  $\lambda = 0$  имеем

$$K \Lambda^{-1} K = P^{-1} = -\frac{F(0)}{\Delta(0)}.$$

неравенства переключения \*)

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{1 - e^{\lambda_i T'}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} > 0, \\ & \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{1 - e^{\lambda_i T'}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} < 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

периодическое решение в интервале времени, равном периоду одного полного колебания

$$\left. \begin{aligned} x(t) = x(\tau) = & -2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T_1})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ & + \frac{F(0)(h+g)}{\Delta(0)}, \quad 0 \leq \tau \leq T_1, \\ x(t) = x(T_1 + \tau) = & 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i \tau} (e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T_1})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ & + \frac{F(0)(-h+g)}{\Delta(0)}, \quad 0 \leq \tau \leq T_2; \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

характеристическое уравнение ( $n - 1$ )-й степени \*\*)

$$\left[ \begin{aligned} & \prod_{j=1}^n (\lambda_j - e^{\lambda_j T'}) \left[ -\lambda \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_1} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{(1 - e^{\lambda_i T'})(\lambda - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} \times \right. \right. \\ & \times \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k T_2} (e^{\lambda_k T_1} - 1)}{(1 - e^{\lambda_k T'})(\lambda - e^{\lambda_k T'})} \frac{\gamma F(\lambda_k) h}{\Delta'(\lambda_k)} + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T'} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{(1 - e^{\lambda_i T'})(\lambda - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} \times \\ & \left. \left. \times \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k T'} (e^{\lambda_k T_1} - 1)}{(1 - e^{\lambda_k T'})(\lambda - e^{\lambda_k T'})} \frac{\gamma F(\lambda_k) h}{\Delta'(\lambda_k)} \right] \right]. \quad (6.43)$$

\*) Здесь неравенства переключения (6.20) развернуты для случая  $\gamma h \leq 0$ .

\*\*) То есть мы отбросили несущественный для анализа устойчивости корень  $\lambda_n = 0$ .

В формулах (6.40) — (6.43) для кратности введено обозначение  $T' = T_1 + T_2$ . Чтобы получить характеристическое уравнение, к которому применимы условия Гурвица, нужно использовать подстановку (4.53). Если учесть, что в соответствии с этой подстановкой

$$\lambda - e^{\lambda_s T'} = \frac{1}{v-1} (1 - e^{\lambda_s T'}) \left( v - \operatorname{cth} \frac{\lambda_s T'}{2} \right), \quad (6.44)$$

то преобразованное характеристическое уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^n \left( v - \operatorname{cth} \frac{\lambda_j T'}{2} \right) \left[ - (v+1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_1} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{(1 - e^{\lambda_i T'})^2 \left( v - \operatorname{cth} \frac{\lambda_i T'}{2} \right)} \times \right. \\ & \times \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k T_2} (e^{\lambda_k T_1} - 1)}{(1 - e^{\lambda_k T'})^2 \left( v - \operatorname{cth} \frac{\lambda_k T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_k) h}{\Delta'(\lambda_k)} + \\ & + (v-1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T'} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{(1 - e^{\lambda_i T'})^2 \left( v - \operatorname{cth} \frac{\lambda_i T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} \times \\ & \times \left. \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k T'} (e^{\lambda_k T_1} - 1)}{(1 - e^{\lambda_k T'})^2 \left( v - \operatorname{cth} \frac{\lambda_k T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_k) h}{\Delta'(\lambda_k)} \right] = 0. \quad (6.45) \end{aligned}$$

И, наконец, для практических приложений имеет известное значение следующий факт. Обозначим левые части уравнений периодов (6.40) по порядку через  $\sigma_1(\tau_1, \tau_2)$  и  $\sigma_2(\tau_1, \tau_2)$  и будем рассматривать их как функции параметров  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{2} p'_0 = \left[ \frac{\partial \sigma_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \frac{\partial \sigma_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \frac{\partial \sigma_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} \frac{\partial \sigma_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \right]_{\substack{\tau_1=T_1 \\ \tau_2=T_2}}, \quad (6.46)$$

где  $p'_0$  — коэффициент преобразованного характеристического уравнения (6.45) при  $v$  в старшей степени. Формуле (6.46) можно дать геометрическое истолкование. На плоскости  $\tau_1, \tau_2$  ( $\tau_1$  — абсцисса,  $\tau_2$  — ордината) уравнения

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1(\tau_1, \tau_2) = \sigma_1^*, \\ \sigma_2(\tau_1, \tau_2) = -\sigma_1^* \end{array} \right\} \quad (6.47)$$

в неявном виде определяют две кривые периодов. Координаты  $\tau_1 = T_1$  и  $\tau_2 = T_2$  их точек пересечения определяют периодические решения при выполнении некоторых дополнительных условий.

Угол  $\delta$  между градиентами функций  $\sigma_1(\tau_1, \tau_2)$  и  $\sigma_2(\tau_1, \tau_2)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \\ &= \frac{\frac{\partial \sigma_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \frac{\partial \sigma_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} - \frac{\partial \sigma_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} \frac{\partial \sigma_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Угол  $\delta$  считается положительным, если градиент функции  $\sigma_1(\tau_1, \tau_2)$  поворачивается против часовой стрелки, чтобы совместиться по кратчайшему направлению с градиентом функции  $\sigma_2(\tau_1, \tau_2)$ . Напомним, что вектор градиента функций  $\sigma_1(\tau_1, \tau_2)$  и  $\sigma_2(\tau_1, \tau_2)$  вдоль кривых периодов совпадает с нормалями, и они указывают направление деформации этих кривых, когда константы, стоящие в правых частях уравнений (6.47), получают положительное приращение.

Из (6.46) и (6.48) следует, что при изменении знака угла  $\delta$  происходит также изменение знака коэффициента  $p'_0$ , а следовательно, меняется также формулировка условий Гурвица (см. неравенства (4.60) и (4.61)). Этот факт является аналогичным тому, который был установлен ранее в § 5.4.

### § 6.3. Периодические колебания в нейтральных системах

Будем искать периодические решения для случая, когда среди простых корней  $\lambda_i$  есть один корень  $\lambda_n = 0$ . К таким системам, в частности, относятся важные и часто встречающиеся на практике системы регулирования, нейтрально устойчивые в разомкнутом состоянии.

Матричное уравнение (6.16), определяющее начальное значение  $x^*(0)$  периодического решения, является общим соотношением, справедливым при любых корнях  $\lambda_i$ . В рассматриваемом случае это уравнение нельзя непосредственно разрешить, так как при  $\lambda_n = 0$  матрица  $[E - M(T_1 + T_2)]$

становится необратимой. Однако это трудность не принципиального, а чисто вычислительного характера.

Действительно, матричная координата  $x^*(0)$  должна удовлетворять матричному уравнению (6.16) и условиям переключения (6.4). В развернутом виде эти соотношения образуют систему из  $n+1$  скалярных алгебраических уравнений, линейных относительно  $n$  неизвестных координат  $x_1^*(0), x_2^*(0), \dots, x_n^*(0)$  — элементов столбца  $x^*(0)$ . Неизвестные координаты можно однозначно определить из любых  $n$  уравнений, если их определитель не равен нулю. Тогда оставшееся уравнение после исключения из него неизвестных  $x_1^*(0), x_2^*(0), \dots, x_n^*(0)$  будет одним из уравнений периодов. Второе уравнение периодов в обычном порядке получается из условий переключения (6.5).

Можно предложить следующую процедуру вычислений. Применим к общим матричным соотношениям формулу разложения (2.24), причем в данном случае все матрицы, по элементам которых будем вести разложение, суть диагональные, так как  $M(t)$  и  $N(t)$  для простых корней  $\lambda_i$  определяются формулами (2.94) и (2.120). В соответствии с такой процедурой выражения (6.13) и (6.14) перепишутся в виде

$$x(T_1) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T_1} k_i x_i(0) + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{\lambda_i} k_i x_i(h + g), \quad (6.49)$$

$$x(T_1 + T_2) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T_2} k_i x_i(T_1) + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{\lambda_i} k_i x_i(-h + g). \quad (6.50)$$

Введем новые столбцы переменных  $z_i$  и постоянных  $\tilde{h}_i$  и  $\tilde{g}_i$ , а также строку с элементами, равными единице, т. е.

$$z = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{vmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \\ \vdots \\ \tilde{g}_n \end{vmatrix}, \quad \tilde{h} = \begin{vmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{vmatrix}, \quad \tilde{v} = \|1 \ 1 \ \dots \ 1\|. \quad (6.51)$$

Определим элементы этих столбцов по формулам

$$z_i = \gamma k_i \alpha_i x, \quad \tilde{h}_i = \gamma k_i \alpha_i h, \quad \tilde{g}_i = \gamma k_i \alpha_i g, \quad (6.52)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Эти формулы не зависят от характера корней  $\lambda_i$ . Для простых корней  $\lambda_i$ , рассматриваемых в данном пункте, имеем в соответствии с матричными тождествами (2.64) выражения

$$z_i = \frac{\gamma F(\lambda_i) x}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad \tilde{h}_i = \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad \tilde{g}_i = \frac{\gamma F(\lambda_i) g}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad (6.53)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Для элементов  $\tilde{h}_i$  во всех случаях имеют место равенства

$$\tilde{h}_i = \beta_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.54)$$

где  $\beta_i$  и  $u_i$  суть элементы строки  $\beta$  и столбца  $u$ , определяемых формулами (4.22). Переменные  $z_i$  являются разновидностью канонических переменных, которые впервые ввел в теорию регулирования А. И. Лурье [14]. Умножая обе части равенств (6.49) и (6.50) слева на строки  $\gamma k_i \alpha_i$  и используя правило (2.71), получим выражения

$$\left. \begin{aligned} z_i(T_1) &= e^{\lambda_i T_1} z_i(0) + \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{\lambda_i} (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i), \\ z_n(T_1) &= z_n(0) + T_1 (\tilde{h}_n + \tilde{g}_n), \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

$$\left. \begin{aligned} z_i(T_1 + T_2) &= e^{\lambda_i T_2} z_i(T_1) + \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{\lambda_i} (-\tilde{h}_i + \tilde{g}_i), \\ z_n(T_1 + T_2) &= z_n(T_1) + T_2 (-\tilde{h}_n + \tilde{g}_n), \\ i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Выражения (6.55) и (6.56) определяют точечное преобразование в новых переменных. Выражение (6.16) представим в виде

$$\sum_{i=1}^n (1 - e^{\lambda_i T'}) k_i \alpha_i x^*(0) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1) - (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i} k_i \alpha_i h +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1) + (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i} k_i \alpha_i g. \quad (6.57)$$

Здесь  $T' = T_1 + T_2$ . Аналогичным образом отсюда получим

$$(1 - e^{\lambda_i T'}) z_i^*(0) = \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1) - (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i} \tilde{h}_i + \\ + \frac{e^{\lambda_i T_2} (e^{\lambda_i T_1} - 1) + (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i} \tilde{g}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.58)$$

$$0 = (T_1 - T_2) \tilde{h}_n + (T_1 + T_2) \tilde{g}_n. \quad (6.59)$$

Выражения (6.58) легко привести к виду

$$z_i^*(0) = -\frac{2(e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i(1 - e^{\lambda_i T'})} \tilde{h}_i - \frac{1}{\lambda_i} (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i), \quad (6.60)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Выражение (6.59) является одним из уравнений периодов, а формулы (6.60) определяют в новых переменных  $n-1$  начальных значений периодического решения.

Далее, используя формулу (2.25), перепишем равенства, фигурирующие в условиях переключения (6.4) и (6.5) в виде

$$\sum_{i=1}^n \gamma k_i \alpha_i x(0) = \sigma_1^*, \quad (6.61)$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma k_i \alpha_i x(T_1) = -\sigma_1^*. \quad (6.62)$$

В новых переменных будем иметь

$$\sum_{i=1}^n z_i(0) = \sigma_1^*, \quad (6.63)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i(T_1) = -\sigma_1^*. \quad (6.64)$$

Равенство (6.63) можно использовать для нахождения  $z_n^*(0)$ . Действительно, полагая в (6.63)  $z_i(0) = z_i^*(0)$  и используя формулы (6.60), получим

$$z_n^*(T_1) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{\lambda_i(1 - e^{\lambda_i T'})} \tilde{h}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i) + \sigma_1^*. \quad (6.65)$$

Подставим в (6.65)  $z_i(0) = z_i^*(0)$  из формул (6.60) и (6.65). Тогда получим для  $z(T_1) = z^*(T_1)$  выражения

$$z_i^*(T_1) = \frac{2(e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i(1 - e^{\lambda_i T_1})} \tilde{h}_i - \frac{1}{\lambda_i}(-\tilde{h}_i + \tilde{g}_i), \quad (6.66)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z_n^*(T_1) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{\lambda_i(1 - e^{\lambda_i T_1})} \tilde{h}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i) +$$

$$+ T_1(\tilde{h}_n + \tilde{g}_n) + \sigma_1^*. \quad (6.67)$$

Образуем из (6.63) и (6.64) выражение

$$\sum_{i=1}^n [z_i(0) - z_i(T_1)] = 2\sigma_1^*. \quad (6.68)$$

Подставляя сюда  $z_j = z_j^*(0)$  и  $z_j(T_1) = z_j^*(T_1)$  из формул (6.60), (6.65)–(6.67), а также используя равенство (6.59), получим второе уравнение периодов, которое можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e^{\lambda_i T_1} - 1)(e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i(1 - e^{\lambda_i T_1})} \tilde{h}_i - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \tilde{h}_n = \sigma_1^*. \quad (6.69)$$

При  $\gamma h < 0$  два неравенства, фигурирующих в условиях переключений (6.4), можно заменить на одно эквивалентное

$$\gamma P x(0) + \gamma h + \gamma g > 0. \quad (6.70)$$

Подставляя сюда  $P = K \Lambda K^{-1}$ , используя формулу (2.25) и замечая, что  $\lambda_n = 0$ , представим (6.70) в форме

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \gamma k_i \alpha_i x(0) + \sum_{i=1}^n \gamma k_i \alpha_i h + \sum_{i=1}^n \gamma k_i \alpha_i g > 0, \quad (6.71)$$

которая в новых переменных (6.51) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i z_i(0) + \sum_{i=1}^n (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i) > 0. \quad (6.72)$$

Подставим сюда  $z_i(0) = z_i^*(0)$  из формул (6.60). Тогда, используя равенство (6.59), представим неравенство

переключения в виде

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{1 - e^{\lambda_i T'}} \tilde{h}_i + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \tilde{h}_n > 0. \quad (6.73)$$

Аналогичным образом при  $\gamma h < 0$  неравенства, фигурирующие в условиях переключения (6.5), можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{1 - e^{\lambda_i T'}} \tilde{h}_i - \frac{T_1}{T_1 + T_2} \tilde{h}_n < 0. \quad (6.74)$$

И, наконец, нужно установить, что при найденных параметрах периодического решения отсутствуют дополнительные переключения. Для этого нужно построить аргумент управления  $\sigma(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq T_1 + T_2$ . Аргумент управления  $\sigma(t')$  легко определить из следующих соображений. Формулы (6.55) и (6.56), если в них заменить  $T_1$  и  $T_2$  на  $\tau$  и соответственно изменять  $\tau$  в интервалах  $0 \leq \tau \leq T_1$  и  $0 \leq \tau \leq T_2$ , будут определять  $z_j(t)$  в интервале  $0 \leq t \leq T_1 + T_2$ .

Если выполнить такую замену и просуммировать координаты  $z_j(t)$  по всем индексам, то при начальных значениях, соответствующих периодическому решению, получим выражения для  $\sigma(t)$  в соответствующих интервалах времени. Полученные таким образом выражения для  $\sigma(t)$  мы приведем ниже в общей сводке конечных результатов. Дополнительные переключения будут отсутствовать при выполнении неравенств (6.22).

Таким образом, в новых переменных параметры, определяющие периодическое решение, найдены в виде конечных выражений. Переходим теперь к анализу устойчивости. Для этой цели провортируем уравнения (6.55) и (6.56), взяв за центр разложения найденное периодическое решение. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \delta z_i(T_1) &= e^{\lambda_i T_1} \delta z_i(0) + e^{\lambda_i T_1} [\lambda_i z_i^*(0) + (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i)] \delta T_1, \\ \delta z_n(T_1) &= \delta z_n(0) + (\tilde{h}_n + \tilde{g}_n) \delta T_1, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta z_i(T_2) &= e^{\lambda_i T_2} \delta z_i(T_1) + \\ &\quad + e^{\lambda_i T_2} [\lambda_i z_i^*(T_1) + (-\tilde{h}_i + \tilde{g}_i)] \delta T_2, \\ \delta z_n(T_2) &= \delta z_n(T_1) + (-\tilde{h}_i + \tilde{g}_i) \delta T_2, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

Здесь  $z_i^*(0)$ ,  $z_i^*(T)$ ,  $T_1$  и  $T_2$  суть параметры найденного периодического решения. Подставляя в (6.75) и (6.76)  $z_i^*(0)$  и  $z_i^*(T_1)$  из формул (6.60) и (6.65)–(6.67), преобразуем их к виду

$$\left. \begin{aligned} \delta z_i(T_1) &= e^{\lambda_i T_1} \delta z_i(0) - \frac{2e^{\lambda_i T_1}(e^{\lambda_i T_2} - 1)}{1 - e^{\lambda_i T'}} \tilde{h}_i \delta T_1, \\ \delta z_n(T_1) &= \delta z_n(0) + \frac{2T_2}{T'} h'_n \delta T_1, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta z_i(T_2) &= e^{\lambda_i T_2} \delta z_i(T_1) + \frac{2e^{\lambda_i T_2}(e^{\lambda_i T_1} - 1)}{1 - e^{\lambda_i T'}} \tilde{h}_i \delta T_2, \\ \delta z_n(T_2) &= \delta z_n(T_1) - \frac{2T_1}{T'} \tilde{h}_n \delta T_2, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

Непосредственной проверкой нетрудно установить, что системы скалярных уравнений (6.77) и (6.78) можно свернуть и записать их в матричной форме в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta z(T_1) &= M(T_1) \delta z_0 - \\ &\quad - 2M(T_1) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_2) \tilde{h} \delta T_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.79)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta z(T_2) &= M(T_2) \delta z(T_1) + \\ &\quad + 2M(T_2) \Lambda [E - M(T_1 + T_2)]^{-1} N(T_1) \tilde{h} \delta T_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

В этих уравнениях мы записали явно  $T' = T_1 + T_2$  и, кроме того, здесь предполагается предельный переход при

$\lambda_n = 0$ , так как, например,

$$\lim_{\lambda_n=0} \frac{e^{\lambda_n T_1} - 1}{1 - e^{\lambda_i(T_1+T_2)}} = - \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (6.81)$$

Если проварыровать равенства (6.63) и (6.64), то получим выражения

$$\sum_{i=1}^n \delta z_i(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \delta z_i(T_1) = 0, \quad (6.82)$$

которые можно записать в матричной форме так:

$$\tilde{\gamma} \delta z(0) = 0, \quad \tilde{\gamma} \delta z(T_1) = 0. \quad (6.83)$$

Далее, если исключить из (6.79) и (6.80) вариации  $\delta T_1$  и  $\delta T_2$  посредством равенств (6.83) и образовать характеристическое уравнение, то в результате получим выражение (6.33). Только в соотношениях (6.31) и (6.32), определяющих  $\beta'$ ,  $\beta''$ ,  $u'$  и  $u''$  вместо строки  $\beta$  и столбца  $u$  будут соответственно стоять  $\tilde{\gamma}$  и  $\tilde{h}$ . Однако конечные результаты будут полностью совпадать, так как в соответствии с формулами (6.51)–(6.54) имеем

$$\beta_i u_i = \tilde{\gamma}_i \tilde{h}_i = \tilde{h}_i = \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.84)$$

Таким образом, характеристические уравнения в форме (6.43) и (6.45) остаются справедливыми также в случае, когда  $\lambda_n = 0$ . Предельный переход при  $\lambda_n = 0$  осуществляется в (6.43) и (6.45) элементарно.

И, наконец, подставляя в выражения (6.59), (6.69), (6.73) и (6.74)  $\tilde{h}_i$  и  $\tilde{g}_i$  из формул (6.53) и выполняя в преобразованном характеристическом уравнении (6.45) предельный переход при  $\lambda_n = 0$ , получим следующие выражения: уравнения периодов

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)} &= - \frac{\gamma F(0) g}{\Delta'(0)}, \\ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e^{\lambda_i T_1} - 1)(e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \\ &- \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)} &= \sigma_1^*; \end{aligned} \right\} (6.85)$$

неравенства нормального переключения

$$\left. \begin{aligned} & -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T_2} - 1}{1 - e^{\lambda_i T'}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)} > 0, \\ & \sum_{i=1}^n \frac{e^{\lambda_i T_1} - 1}{1 - e^{\lambda_i T'}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T_1}{T_1 + T_2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)} < 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

преобразованное характеристическое уравнение

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left( v - \coth \frac{\lambda_j T'}{2} \right) [ - (v+1) d'_1 d'_2 + (v-1) d'_3 d'_4 ], \quad (6.87)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T_1} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{(1 - e^{\lambda_i T'})^2 \left( v - \coth \frac{\lambda_i T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ &\quad + \frac{T_2}{2T'} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)}, \\ d_2 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_k T_2} (e^{\lambda_k T_1} - 1)}{(1 - e^{\lambda_k T'})^2 \left( v - \coth \frac{\lambda_k T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_k) h}{\Delta'(\lambda_k)} + \\ &\quad + \frac{T_1}{2T'} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)}, \\ d_3 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_i T'} (e^{\lambda_i T_2} - 1)}{(1 - e^{\lambda_i T'})^2 \left( v - \coth \frac{\lambda_i T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ &\quad + \frac{T^2}{2T'} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)}, \\ d_4 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\lambda_k T'} (e^{\lambda_k T_1} - 1)}{(1 - e^{\lambda_k T'})^2 \left( v - \coth \frac{\lambda_k T'}{2} \right)} \frac{\gamma F(\lambda_k) h}{\Delta'(0)} + \\ &\quad + \frac{T_1}{2T'} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)}; \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

аргумент управления  $\sigma(t)$  и неравенства, исключающие дополнительные переключения,

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) = & -2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e^{\lambda_i \tau} - 1)(e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ & + \frac{2\tau T_2}{T'} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)} + \sigma_1^* > -\sigma_1^*, \\ 0 \leq t = \tau \leq T_1, \\ \sigma(t) = \sigma(T_1 + \tau) = & \\ = & -2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e^{\lambda_i T_2} - e^{\lambda_i \tau})(e^{\lambda_i T_1} - 1)}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ & + \frac{2T_1(T_2 - \tau)}{T'} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta'(0)} + \sigma_1^* < \sigma_1^*, \quad 0 \leq \tau \leq T_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

Соотношения (6.85) — (6.89) определяют внутренние характеристики периодических колебаний системы; они инвариантны по отношению к линейным преобразованиям координат. Чтобы получить форму колебаний, необходимо вернуться к исходным координатам  $x_i$ , т. е. выполнить обратное преобразование. Обратное преобразование определяется решением системы линейных алгебраических уравнений, которые в матричной форме представлены первыми равенствами в формулах (6.53).

Использованная выше процедура, связанная с переходом к новым координатам и параметрам (6.52), позволяет довести решение задачи до конца также при наличии кратных нулевых корней  $\lambda_i$ . В частности, при  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  уравнения периодов можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} &= -\frac{\gamma F(0) g}{\Delta_{n-1}(0)}, \\ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(e^{\lambda_i T_1} - 1)(e^{\lambda_i T_2} - 1)}{\lambda_i (1 - e^{\lambda_i T'})} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - & \\ - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h &= \sigma_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.90)$$

Для случая, когда среди корней  $\lambda_i$  имеются нулевые, одно из уравнений периода имеет вид

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \gamma F(0) h = -\gamma F(0) g. \quad (6.91)$$

Это равенство имеет смысл при выполнении условия

$$|\gamma F(0) g| < |\gamma F(0) h|, \quad (6.92)$$

которое показывает, что эффект управляющего действия релейного регулятора должен быть больше соответствующего эффекта постоянного внешнего возмущения.

Если столбец  $g$  можно представить в виде

$$g = ag_*, \quad (6.93)$$

где  $a$  — некоторая скалярная величина, а  $g_*$  — столбец из постоянных элементов, то из формулы (6.91) получим

$$a = -\frac{\gamma F(0) h}{\gamma F(0) g_*} \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}. \quad (6.94)$$

Равенство (6.94) является аналитическим выражением того свойства, которое лежит в основе функционирования импульсных измерительных устройств.

В этом параграфе были найдены несимметричные периодические решения, а следовательно, и соответствующие им несимметричные периодические колебания, которые возникают в релейных системах при постоянном внешнем возмущении. Однако полученные результаты имеют более общее значение. Формально все рассуждения остаются справедливыми также при  $g \equiv 0$ ; в этом случае полученные формулы определяют несимметричные собственные периодические колебания релейных систем и, в частности, несимметричные автоколебания.

На основании формул (6.85) и (6.90) можно сделать вывод, что в случае, когда среди корней  $\lambda_i$  есть нулевые и, в частности, в релейных системах, нейтрально устойчивых в разомкнутом состоянии, могут существовать только симметричные автоколебания.

### § 6.4. Скользящие режимы при постоянном воздействии

При постоянном внешнем воздействии или возмущении скользящий режим возникает при выполнении условий (6.6). Для этого случая доопределим управляющую функцию по формуле

$$\psi(\sigma) = -\frac{\gamma P x}{\gamma h} - \frac{\gamma g}{\gamma h}. \quad (6.95)$$

Выражение (6.95) получается из уравнений (6.1), если к ним применить те рассуждения, которые привели нас раньше к формуле (5.114). Подставим  $\psi(\sigma)$  из (6.95) в первое уравнение (6.1). Тогда получим матричное уравнение скользящего режима при постоянном возмущении в виде

$$\dot{x} = Px - \frac{1}{\gamma h} h\gamma Px + g - \frac{1}{\gamma h} h\gamma g. \quad (6.96)$$

Из этого уравнения следует  $\dot{\gamma x} \equiv 0$ . Поэтому в соответствии с уравнением (6.96) изображающая точка движется в плоскости  $\gamma x(t) = \gamma x(0)$ , где  $x(0)$  — начальное значение. В частности, изображающая точка будет скользить вдоль плоскости переключений  $\gamma x(t) = 0$ , если при  $t = 0$  имело место равенство  $\gamma x(0) = 0$ .

Однородное уравнение, получаемое из (6.96) при  $g = 0$ , совпадает с уравнением (5.115), поэтому заново нужно построить только частное решение уравнения (6.96), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, так как общее решение однородного уравнения дается формулой (5.133) \*). Искомое частное решение определяется по типу второй суммы формулы (2.131). Учитывая введенные по формуле (5.117) обозначения и вид постоянного столбца в уравнении (6.96), запишем искомое частное решение в виде

$$[x(t)]_{\text{част}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_i t} - 1}{\tilde{\lambda}_i} \frac{\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_i \tilde{\Delta}'(\tilde{\lambda}_i)} \left( g - \frac{1}{\gamma h} h\gamma g \right) + \\ + t \frac{\tilde{F}(0)}{\tilde{\Delta}(0)} \left( g - \frac{1}{\gamma h} h\gamma g \right). \quad (6.97)$$

В соответствии с формулами (4.21) можно записать

$$g - \frac{1}{\gamma h} h\gamma g = \left( E - \frac{1}{\beta u} K u \beta K^{-1} \right) g. \quad (6.98)$$

\*.) Решение однородного уравнения в виде (5.133) построено для начального значения  $x(0)$ , удовлетворяющего условию  $\gamma x(0) = 0$ .

Далее непосредственной проверкой устанавливаем

$$\beta K^{-1} \left( E - \frac{1}{\beta u} Ku\beta K^{-1} \right) g = 0. \quad (6.99)$$

Учитывая вторую формулу (5.123) и то обстоятельство, что  $\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}_i) = 0$ , получим

$$\beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} \left( E - \frac{1}{\beta u} Ku\beta K^{-1} \right) g = \beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} g. \quad (6.100)$$

На основании формул (5.123) и только что полученных выражений легко установить соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{\lambda}_i) \left( g - \frac{1}{\gamma h} h\gamma g \right) &= \\ &= -\frac{\tilde{\lambda}_i \Delta(\lambda_i)}{\beta u} K (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} u\beta (\tilde{\lambda}_i E - J)^{-1} K^{-1} g. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Правая часть (6.101) при  $\tilde{\lambda}_n = 0$  обращается в нуль. Правые части выражений (5.125) и (6.101) имеют одинаковую структуру, они отличаются только столбцами  $x(0)$  и  $g$ , стоящими с правой стороны. Поэтому на основании вида формул (4.21), (5.131) и (6.97) можно записать искомое частное решение в виде

$$[x(t)]_{\text{част}} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_i t} - 1}{\tilde{\lambda}_i} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} h\gamma \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} g. \quad (6.102)$$

Объединяя (6.133) и (6.102), получим общее решение уравнения (6.96) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} h\gamma \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} x(0) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_i t} - 1}{\tilde{\lambda}_i} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} h\gamma \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} g. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Это решение построено для начального условия  $x(0)$  удовлетворяющему равенству  $\gamma x(0) = 0$ . Решение (6.103) будет определять скользящее движение до тех пор, пока будут

выполняться неравенства условий (6.6). Эти неравенства по аналогии с формулой (5.134) можно представить в виде

$$\begin{aligned} -1 < \frac{\gamma g}{\gamma h} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_i t} - 1}{\tilde{\lambda}_i} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) g}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} < 1. \quad (6.104) \end{aligned}$$

Если скользящее движение устойчиво и начальное значение  $x(0)$  таково, что условие (6.104) выполняется в интервале  $0 \leq t < \infty$ , то матричная координата положения равновесия получается из (6.103) при  $t \rightarrow \infty$  в виде

$$x_{ct} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_i \Delta(\tilde{\lambda}_i)} h \gamma \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} g. \quad (6.105)$$

Точка с координатой  $x_{ct}$  лежит в плоскости переключений, т. е.  $\gamma x_{ct} = 0$  (см. (5.132)).

Статическое равновесие в зоне скользящего режима можно рассматривать как периодический процесс с бесконечно большой частотой и бесконечно малой амплитудой колебаний. Действительно, релейный управляющий элемент продолжает в этом случае работать в вибрационном режиме быстрых колебаний, а сама система в процессе их не претерпевает изменений в своем положении, причем следует отметить, что например, для систем, нейтрально устойчивых в разомкнутом состоянии, механизм уравновешивания эффекта внешнего возмущения и в этом случае остается прежним. Он аналитически описывается первыми формулами (6.85) и (6.90) при бесконечно малых величинах  $T_1$  и  $T_2$ ,

## § 6.5. Автопилот с релейным сервомотором

Автопилот с релейным сервомотором был описан в § 1.2, а его схема изображена на рис. 1.4. Движение соответствующей системы стабилизации нейтрального самолета определяется уравнениями (1.8). В данном параграфе мы рассмотрим принцип регулирования по углу и угловой скорости, поэтому

уравнения движения запишем в виде

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -h'_1\psi(\sigma) + g'_1, \\ \sigma = \varphi + a_1\dot{\varphi}. \end{array} \right\} \quad (6.106)$$

Полагая

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad (6.107)$$

перепишем уравнения (6.106) в нормальной форме:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -Mx_2 - h'_1\psi(\sigma) + g'_1, \\ \sigma = x_1 + a_1x_2. \end{array} \right\} \quad (6.108)$$

Соответствующие этой системе уравнений матрицы имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -M \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad h = \begin{vmatrix} 0 \\ -h'_1 \end{vmatrix}, \\ g = \begin{vmatrix} 0 \\ g'_1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \|1, a_1\|. \end{array} \right\} \quad (6.109)$$

Матричные и скалярные выражения разомкнутой системы представляются в форме:

характеристическая и присоединенная матрицы

$$\lambda E - P = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + M \end{vmatrix}, \quad F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + M & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}; \quad (6.110)$$

характеристический полином и его корни

$$\Delta(\lambda) = \lambda(\lambda + M), \quad \lambda_1 = -M, \quad \lambda_2 = 0. \quad (6.111)$$

Матричные и скалярные характеристики замкнутой системы имеют вид:

показатель жесткости переключений

$$\gamma h = -a_1 h'_1; \quad (6.112)$$

скалярные коэффициенты

$$\frac{\gamma F(\lambda_1) h}{\Delta'(\lambda_1)} = \frac{(1 - Ma_1) h'_1}{M}, \quad \frac{\gamma F(\lambda_2) h}{\Delta'(\lambda_2)} = -\frac{h'_1}{M}, \quad \frac{\gamma F(\lambda_2) g}{\Delta'(\lambda_2)} = \frac{g'_1}{M}; \quad (6.113)$$

канонические координаты  $z_t$  (6.53)

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{\gamma F(\lambda_1) x}{\Delta'(\lambda_1)} = -\frac{1 - Ma_1}{M} x_2, \\ z_2 &= \frac{\gamma F(\lambda_2) x}{\Delta'(\lambda_2)} = \frac{Mx_1 + x_2}{M}; \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

столбцы

$$\frac{F(\lambda_1) h}{\Delta'(\lambda_1)} = \begin{vmatrix} 1 \\ -M \end{vmatrix} \frac{h'_1}{M}, \quad \frac{F(\lambda_2) h}{\Delta'(\lambda_2)} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \frac{h'_1}{M}. \quad (6.115)$$

Характеристики скользящего режима имеют вид:  
характеристический полином (6.132) и его корни

$$\tilde{\Delta}_*(\lambda) = -(1 + a_1\lambda) h'_1 \quad \tilde{\lambda}_1 = -\frac{1}{a_1}; \quad (6.116)$$

столбец

$$\frac{F(\tilde{\lambda}_1) h}{\Delta(\tilde{\lambda}_1)} = \begin{vmatrix} -1 \\ \frac{1}{a_1} \end{vmatrix} \frac{h'_1 a_1^2}{1 - Ma_1}, \quad \frac{F(\tilde{\lambda}_1) h}{\tilde{\Delta}'_*(\lambda_1)} = -\begin{vmatrix} -1 \\ \frac{1}{a_1} \end{vmatrix} \frac{1}{a_1}; \quad (6.117)$$

скалярные выражения

$$\frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_1) x(0)}{\Delta'(x_1)} = \frac{(1 - Ma_1) x_1(0)}{a_1^2 h'_1}, \quad \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_1) g}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_1)} = 0; \quad (6.118)$$

вспомогательные величины, используемые при анализе структуры разбиения фазового пространства,

$$\gamma P = \begin{vmatrix} 0 & 1 - Ma_1 \end{vmatrix}, \quad \gamma P^2 = \begin{vmatrix} 0 & -M(1 - Ma_1) \end{vmatrix}, \quad (6.119)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma Px &= (1 - Ma_1) x_2, \\ \gamma P^2 x &= -M(1 - Ma_1) x_2, \\ \gamma Ph &= -(1 - Ma_1) h'_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.120)$$

*Фазовая картина*

Состояние рассматриваемой системы определяется положением изображающей точки на фазовой плоскости  $x_1 x_2$ . Переключение управляющего элемента при идеальной релейной характеристике будет происходить при переходе изображающей точки через прямую

$$\gamma x = x_1 + a_1 x_2 = 0. \quad (6.121)$$

Эта прямая разбивает фазовую плоскость на полуплоскости  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ , как это изображено на рис. 6.1. В соответствии с общей теорией (см. § 5.1) направление фазовых

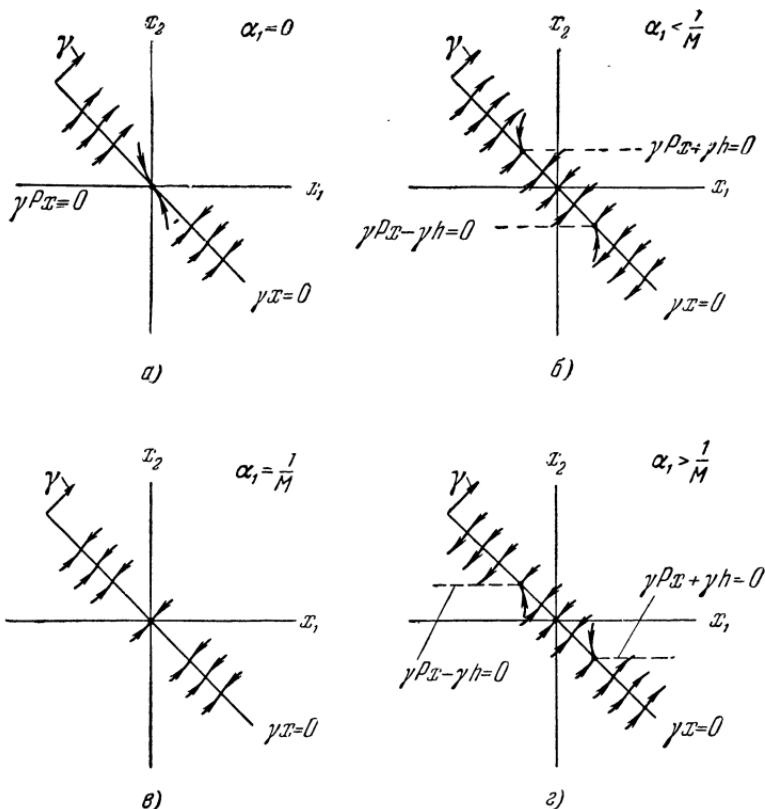


Рис. 6.1. Фазовая плоскость для системы стабилизации с релейным сервоприводом.

траекторий, примыкающих к линии переключений (6.121), определяется знаком нижеследующих выражений:

для полуплоскости  $\sigma > 0$

$$\dot{\gamma x} = \gamma P x + \gamma h = (1 - Ma_1) x_2 - a_1 h'_1, \quad (6.122)$$

для полуплоскости  $\sigma < 0$

$$\gamma x = \gamma P x - \gamma h = (1 - Ma_1) x_2 + a_1 h'_1. \quad (6.123)$$

Границей служат прямые

$$\gamma \dot{x} = \gamma Px + \gamma h = (1 - Ma_1)x_2 - a_1h'_1 = 0, \quad (6.124)$$

$$\gamma \dot{x} = \gamma P - \gamma h = (1 - Ma_1)x_2 + a_1h'_1 = 0. \quad (6.125)$$

При  $\gamma \dot{x} > 0$  и  $\gamma \dot{x} < 0$  вектор фазовой скорости составляет соответственно острый и тупой углы с вектором  $\gamma$ ; при  $\gamma \dot{x} = 0$  соответствующий кусок фазовой траектории касается линии переключений. Вектор  $\gamma$  имеет компонентами элементы строки  $\gamma$ ; он перпендикулярен к прямой переключений (6.121) и направлен в сторону полуплоскости  $\sigma > 0$  (см. рис. 6.1).

На рис. 6.1 для различных количественных соотношений между параметрами системы  $a_1$  и  $M$  дана структура разбиения на траектории части фазовой плоскости, прилегающей к линии переключений. По формуле (6.112) при  $a_1 = 0$  имеем  $\gamma h = 0$  и при  $a_1 > 0$  и  $h'_1 > 0$  имеем  $\gamma h < 0$ , поэтому случай, изображенный на рис. 6.1, а, соответствует мягкому переключению, а остальные случаи — жесткому переключению. На рис. 6.1, б и 6.1, г имеем конечные зоны скользящего режима, на рис. 6.1, в вся линия переключений является зоной скользящего режима.

В последнем случае уравнения (6.106) можно записать в виде

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{M} \left[ -h'_1 \psi(\sigma) + g'_1 \right], \quad \sigma = \varphi + \frac{1}{M} \dot{\varphi}. \quad (6.126)$$

Для полноты картины нужно определить характер движения системы в граничных точках зоны скользящего режима, т. е. установить, принадлежат ли граничные точки самой зоне скользящего режима или области нормальных переключений. Этот вопрос решается знаком неравенств в условиях (5.8а) и (5.8б). Образуем выражения

$$\gamma P^2 x + \gamma Ph = -M[(1 - Ma_1)x_2 - a_1h'_1] - h'_1 \quad (6.127)$$

и

$$\gamma P^2 x - \gamma Ph = -M[(1 - Ma_1)x_2 + a_1h'_1] + h'_1. \quad (6.128)$$

Очевидно, при условиях (6.124) и (6.125) выражения (6.127) и (6.128) будут меньше и больше нуля соответственно. Тогда в силу (5.8а) граничные точки будут принадлежать

зоне скользящего режима. Отсюда можно сделать вывод, что скользящее движение протекает изолированно. В процессе такого движения изображающая точка не может покинуть зону скользящего режима. Для системы с мягким переключением имеем одну точку скользящего режима. Этот случай является предельным при  $\alpha_1 \rightarrow 0$ .

Фазовую картину, изображенную на рис. 6.1, легко распространить на случай, когда релейная характеристика имеет петлю типа люфта. Предоставляем читателю выполнить соответствующий чертеж и рекомендуем при этом использовать построение, выполненное на рис. 5.5.

### *Устойчивость регулируемого положения*

Устойчивость исследуется в соответствии с выводами, полученными в конце § 5.6. При  $\alpha_1 > 0$  показатель жесткости переключений  $yh < 0$ , а единственный корень полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  (6.116) меньше нуля; следовательно, регулируемое положение обладает асимптотической устойчивостью. Такой вывод можно подтвердить также для случая мягкого переключения, т. е. для  $\alpha_1 = 0$ . Составим соответствующую линейную систему, положив в (6.106)  $\psi(\sigma) = c\sigma$  при  $c > 0$ .

Характеристическое уравнение такой системы

$$\lambda^2 + M\lambda + ch'_1 = 0 \quad (6.129)$$

имеет корни с отрицательной вещественной частью для любого коэффициента  $c > 0$ .

### *Автоколебания системы*

Рассматриваемая система нейтрально устойчива в разомкнутом состоянии, поэтому в ней, вообще говоря, могут существовать только симметричные автоколебания. На основании общих формул (5.35), (5.36), (5.38), (5.88) и параметров системы (6.111), (6.113) получим:

уравнение периодов

$$-\frac{(1 - Ma_1) h'_1}{M^2} \tanh \frac{MT}{2} + \frac{h'_1}{M} \frac{T}{2} = \sigma_1^*; \quad (6.130)$$

неравенство нормального переключения

$$\frac{(1 - Ma_1) h'_1}{M} \operatorname{th} \frac{MT}{2} > a_1 h'_1; \quad (6.131)$$

начальные координаты точки на линии переключения

$$\left. \begin{aligned} x_1^*(0) &= \left( -\frac{1}{M} \operatorname{th} \frac{MT}{2} + \frac{T}{2} \right) \frac{h'_1}{M}, \\ x_2^*(0) &= \frac{h'_1}{M} \operatorname{th} \frac{MT}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (6.132)$$

преобразованное характеристическое уравнение

$$\left[ \left( 1 - \operatorname{th}^2 \frac{MT}{2} \right) (1 - Ma_1) - 1 \right] v - \operatorname{th} \frac{MT}{2} = 0. \quad (6.133)$$

Производная левой части уравнения (6.130) по  $T$  положительна, поэтому она монотонно растет вместе с  $T > 0$  от нуля до бесконечности. В силу этого обстоятельства уравнение периодов (6.130) имеет только один положительный корень, который обращается в нуль вместе с параметром петли  $\sigma_1^*$ . Таким образом, в системе стабилизации с идеальной релейной характеристикой периодические режимы не возникают, поэтому можно ожидать, что регулируемое положение будет устойчивым в большом.

Существование искомых периодических колебаний при  $\sigma_1^* > 0$  зависит от выполнения неравенства (6.131), которое устанавливает тот факт, что точка с координатами  $x_i^*(0)$  должна лежать вне зоны скользящего режима. При  $a_1 = 0$  это неравенство заведомо выполняется. Этот результат можно было бы предвидеть по рис. 6.1, а. При  $a_1 = 0$  характеристическое уравнение (6.133) имеет отрицательный корень, поэтому периодический режим будет устойчивым. Система будет совершать автоколебания. На фазовой плоскости автоколебательному процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, охватывающая начало координат. Такую замкнутую траекторию называют часто *пределным циклом*. Наружные и внутренние фазовые траектории наматываются на устойчивый предельный цикл. Положение равновесия в этом случае оказывается неустойчивым. Однако в пределе при  $\sigma_1^* = 0$   $x_1^*(0)$  и  $x_2^*(0)$ , определяемые формулами (6.132),

обращаются в нуль вместе с полупериодом  $T$ ; предельный цикл стягивается в начало координат и передает регулируемому положению свою устойчивость.

При  $Ma_1 > 1$  неравенство (6.131) заведомо не выполняется. В этом случае точка с координатами  $x_1^*(0)$ ,  $x_2^*(0)$  будет лежать внутри зоны скользящего режима. Границный случай будет иметь место, когда условие (6.131) обращается

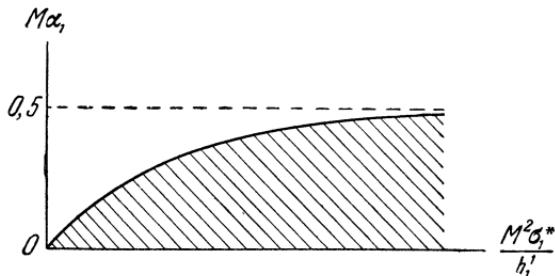


Рис. 6.2. Граница области существования автоколебаний.

в равенство. Исключая из этого равенства и уравнения периодов  $T$ , получим граничное условие в виде

$$(1 - Ma_1) \operatorname{th} \left[ \frac{M^2 \sigma_1^*}{h'_1} + Ma_1 \right] = Ma_1. \quad (6.134)$$

На рис. 6.2 изображена кривая (6.134) в обобщенных параметрах  $Ma_1$  и  $M^2 \sigma_1^* / h'_1$ ; область автоколебаний заштрихована.

### *Свободное скользящее движение*

В соответствии с общими формулами (5.133) и (5.134) и параметрами рассматриваемой системы (6.116) — (6.118) получим процесс скользящего движения

$$\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = -x_1(0) e^{-\frac{t}{\alpha_1}} \begin{vmatrix} -1 \\ \frac{1}{\alpha_1} \end{vmatrix}; \quad (6.135)$$

условие скользящего режима

$$-1 < \frac{(1 - Ma_1) x_1(0)}{a_1^2 h'_1} e^{-\frac{t}{a_1}} < 1, \quad (6.136)$$

Формула (6.135) накладывает ограничение на выбор коэффициента регулирования по скорости, так как чрезмерное увеличение  $a_1$  приводит к затягиванию процесса скользящего движения к положению равновесия.

Неравенства (6.136) подтверждают вывод, сделанный нами раньше при анализе структуры фазовой плоскости системы, так как эти неравенства будут выполняться для любого  $t > 0$ , если они выполнялись для  $t = 0$ .

### *Периодические режимы при постоянном возмущении*

В соответствии с общими формулами (6.85) — (6.88) и параметрами системы (6.111) и (6.113) будем иметь:

уравнения периодов

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} h'_1 &= g'_1, \quad T_1 + T_2 = T', \\ -\frac{(e^{-MT_1} - 1)(e^{-MT_2} - 1)}{M(1 - e^{-MT'})} \frac{(1 - Ma_1) h'_1}{M} + \\ &+ \frac{T_1 T_2}{T'} \frac{h'_1}{M} = \sigma_1^*; \end{aligned} \right\} \quad (6.137)$$

неравенства переключения

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{-MT_2} - 1}{1 - e^{-MT'}} \frac{(1 - Ma_1) h'_1}{M} - \frac{T_2}{T'} \frac{h'_1}{M} &> 0, \\ \frac{e^{-MT_1} - 1}{1 - e^{-MT'}} \frac{(1 - Ma_1) h'_1}{M} - \frac{T_1}{T'} \frac{h'_1}{M} &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.138)$$

Из первого уравнения (6.137) можно выразить  $T_2$  через  $T_1$  в виде

$$T_2 = \frac{h'_1 - g'_1}{h'_1 + g'_1} T_1, \quad h'_1 > g'_1 > 0. \quad (6.139)$$

Второе уравнение (6.137) представим сначала в форме

$$-\frac{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} \operatorname{th} \frac{MT_2}{2}}{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} + \operatorname{th} \frac{MT_2}{2}} (1 - Ma_1) + \frac{\frac{MT_1}{2} \frac{MT_2}{2}}{\frac{MT'}{2}} = \frac{M^2}{2h'_1} \sigma_1^*, \quad (6.140)$$

а затем приведем к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{MT_1}{2} \operatorname{th} \frac{MT_1}{2} \left( \frac{MT_2}{t_2} - \operatorname{th} \frac{MT_2}{2} \right) + \frac{MT_2}{2} \operatorname{th} \frac{MT_2}{2} \left( \frac{MT_1}{2} - \operatorname{th} \frac{MT_1}{2} \right)}{\frac{MT'}{2} \left( \operatorname{th} \frac{MT_1}{2} + \operatorname{th} \frac{MT_2}{2} \right)} + \\ & + \frac{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} \operatorname{th} \frac{MT_2}{2}}{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} + \operatorname{th} \frac{MT_2}{2}} Ma_1 = \frac{M^2}{2h'_1} \sigma_1^*. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Неравенства переключения (6.138) преобразуем к виду

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\operatorname{th} \frac{MT_2}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{MT_1}{2} \right)}{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} + \operatorname{th} \frac{MT_2}{2}} (1 - Ma_1) - \frac{T_2}{T_1 + T_2} > 0, \\ & -\frac{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{MT_2}{2} \right)}{\operatorname{th} \frac{MT_1}{2} + \operatorname{th} \frac{MT_2}{2}} (1 - Ma_1) + \frac{T_1}{T_1 + T_2} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.142)$$

Если в левую часть уравнения (6.141) подставить  $T_2$  из (6.139) и заметить, что  $y - \operatorname{th} y > 0$  при  $y > 0$ , то нетрудно установить, что это уравнение будет иметь один положительный корень при  $\sigma_1^* > 0$ , который будет обращаться в нуль вместе с параметром  $\sigma_1^*$ . Таким образом, при  $\sigma_1^* = 0$  периодические режимы не существуют и уравновешивание эффекта постоянного возмущения будет происходить в скользящем режиме. Этот режим мы рассмотрим несколько позже. При  $\sigma_1^* > 0$  и  $Ma_1 > 1$  неравенства (6.142) заведомо не выполняются, но для значения  $a_1 = 0$  эти неравенства удовлетворяются. Последний вывод получается немедленно, если гиперболические тангенсы заменить их аргументами. При  $a_1 = 0$  преобразованное характеристическое уравнение (6.88) имеет

вид

$$p'_0 v + p'_1 = 0, \quad (6.143)$$

где

$$\begin{aligned} p'_0 &= \frac{e^{-MT_1}(e^{-MT_2}-1)^2}{(1-e^{-MT'})^2} \frac{T_1}{2T'} - \frac{e^{-MT_2}(e^{-MT_1}-1)}{(1-e^{-MT'})^2} \frac{T_2}{2T} - \frac{1}{2} \frac{T_1^2 T_2^2}{T'^4}, \\ p'_1 &= -\frac{e^{-MT'}(e^{-MT_1}-1)(e^{-MT_2}-1)}{(1-e^{-MT'})^2} - \\ &- \frac{e^{-MT_1}(1-e^{-2MT_2})}{(1-e^{-MT'})^2} \frac{T_1}{2T'} - \frac{e^{-MT_2}(1-e^{-2MT_1})}{(1-e^{-MT'})^2} \frac{T_2}{2T} - \\ &- \frac{T_1^2 T_2^2}{2T'^4} \frac{1+e^{-MT'}}{1-e^{-MT'}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $p'_0$  и  $p'_1$  имеют один и тот же знак, поэтому соответствующий периодический режим будет устойчивым.

Таким образом, качественно картина получается такой же, как при  $g = 0$ . При малых значениях  $a_1$  возникают устойчивые периодические колебания, их предельный цикл охватывает отрезок скользящего режима, при больших значениях  $a_1$  периодические режимы отсутствуют.

### *Скользящие движения при постоянном внешнем возмущении*

В соответствии с общими формулами (6.103), (6.104) и параметрами системы (6.116) — (6.118) получим для процесса скользящего движения формулу, совпадающую с (6.135), а для неравенств, обусловливающих скользящий режим, выражение

$$-1 < -\frac{g'_1}{h'_1} + \frac{(1-Ma_1)x_1(0)}{a_1^2 h'_1} e^{-\frac{t}{a_1}} < 1. \quad (6.144)$$

При  $t \rightarrow \infty$  изображающая точка асимптотически стремится к началу координат вдоль отрезка скользящего режима. В процессе движения неравенства (6.144) будут выполняться, если они удовлетворились при  $t = 0$ . Таким образом, положение статического равновесия в скользящем режиме совпадает с точкой регулируемого положения. Уравновешивание

постоянного возмущения происходит в системе без статического отклонения от регулируемого положения.

Можно указать на общее правило, при выполнении которого процесс скользящего движения не зависит от величины постоянного внешнего возмущения. Пусть столбцы  $h$  и  $g$ , определяющие соответственно векторы управления и возмущения, отличаются друг от друга на постоянный скалярный множитель. Тогда корни  $\tilde{\lambda}_i$  полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda) = \gamma F(\lambda) h$  будут одновременно являться корнями полинома  $\gamma F(\lambda) g$ . В этом случае вторая сумма в формуле (6.103) обращается в нуль, т. е. обращается в нуль частное решение, обусловленное постоянным возмущением.

Для рассмотренной задачи стабилизации указанное правило выполняется, так как столбцы  $h$  и  $g$  определяются в этом случае формулами (6.109).

## § 6.6. Вынужденные колебания релейных систем

Рассмотрим две системы уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Px + h\psi(\sigma), \\ \sigma = \gamma x - a \sin(\omega t + \varepsilon) \end{array} \right\} \quad (6.145)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Px + h\psi(\sigma) + g' \cos(\omega t + \delta) + g'' \sin(\omega t + \delta), \\ \sigma = \gamma x, \end{array} \right\} \quad (6.146)$$

в которых  $g'$  и  $g''$  суть столбцы постоянных, а  $\omega$ ,  $\varepsilon$  и  $\delta$  — скалярные величины, определяющие амплитуду, круговую частоту и начальную фазу гармонического воздействия и гармонического возмущения.

В релейной системе, движение которой описывается уравнениями (6.145) и (6.146), могут возникать вынужденные режимы периодических колебаний. В отличие от линейного случая, эти колебания могут происходить как с частотой  $\omega$  внешнего гармонического воздействия или возмущения, так и с частотами, являющимися целыми долями частоты  $\omega$ , т. е.  $\omega/2$ ,  $\omega/3$  и т. д. В последнем случае говорят о *субгармонических колебаниях второго рода, третьего рода* и т. д. В релейной системе могут существовать несколько форм вынужденных колебаний, причем то, какая из них фактически

возникнет в системе, зависит от предыстории ее движения или, конкретнее говоря, от начальных условий. С математической стороны определение вынужденного режима колебаний соответствует нахождению периодических решений и анализу их устойчивости.

Из двух рассматриваемых случаев периодические решения имеют более простую форму для уравнений (6.145), поэтому дальнейшее изложение целесообразно провести применительно к этому виду уравнений. Однако полученные таким образом результаты будут носить общий характер, так как уравнения (6.146) нетрудно привести к виду (6.145). Для этой цели можно воспользоваться подстановкой  $z = x - x'$ , где  $x'$  есть частное решение линейной части первого уравнения (6.146), определяющее режим вынужденных колебаний соответствующей линейной системы. Так, например, частное решение  $x''(t)$  указанного уравнения, удовлетворяющее нулевому начальному условию, имеет вид

$$x''(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k \cos \delta - \omega \sin \delta) e^{\lambda_k t} + \lambda_k \cos(\omega t + \delta) + \omega \sin(\omega t + \delta)}{\lambda_k^2 + \omega^2} \frac{F(\lambda_k) g'}{\Delta'(\lambda_k)} + \\ + \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k \sin \delta + \omega \cos \delta) e^{\lambda_k t} - \lambda_k \sin(\omega t + \delta) - \omega \cos(\omega t + \delta)}{\lambda_k^2 + \omega^2} \frac{F(\lambda_k) g''}{\Delta'(\lambda_k)}. \quad (6.147)$$

Частное решение  $x'$  получается из (6.147) отбрасыванием членов, содержащих множители экспоненты  $e^{\lambda_k t}$ . Такая точка зрения была использована Я. З. Цыпкиным при решении задач о вынужденных колебаниях релейных систем [25].

Итак, будем рассматривать уравнение (6.145). Для этих уравнений условия нормального переключения, обеспечивающие переход от  $\psi(\sigma) = -1$  к  $\psi(\sigma) = 1$  и наоборот, представляются соответственно в виде

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x - a \sin(\omega t + \varepsilon) = \sigma_1^*, \\ \gamma P x - \gamma h - a \omega \cos(\omega t + \varepsilon) > 0, \\ \gamma P x + \gamma h - a \omega \cos(\omega t + \varepsilon) > 0 \end{array} \right\} \quad (6.148)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x - a \sin(\omega t + \varepsilon) = -\sigma_1^*, \\ \gamma P x + \gamma h - a \omega \cos(\omega t + \varepsilon) < 0, \\ \gamma P x - \gamma h - a \omega \cos(\omega t + \varepsilon) < 0. \end{array} \right\} \quad (6.149)$$

Скользящий режим определяется условиями

$$\left. \begin{array}{l} \gamma x - a \sin(\omega t + \varepsilon) = 0, \\ \gamma Px + \gamma h - a\omega \cos(\omega t + \varepsilon) < 0, \\ \gamma Px - \gamma h - a\omega \cos(\omega t + \varepsilon) > 0. \end{array} \right\} \quad (6.150)$$

Пусть  $T = \pi/\omega$  — полупериод внешнего гармонического воздействия. Будем искать периодическое решение уравнений (6.145), симметричное на полупериоде  $T$ . Пусть при  $t = t_1$  столбец  $x(t_1)$  и фаза  $\omega t_1 + \varepsilon = \varepsilon_0$  таковы, что удовлетворяются условия (6.148). Примем этот момент за новое начало отсчета времени. При этом уравнения (6.145) формально не изменяются, только в них теперь  $\varepsilon$  нужно заменить на  $\varepsilon_0$  и считать  $\varepsilon_0$  неопределенной величиной, которую мы должны отыскать в процессе построения решения.

Симметричное периодическое решение получается, если при  $t = 0$  столбец  $x(0) = x^*(0)$  и начальная фаза  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^*$  удовлетворяют условиям (6.148), а следующее переключение произойдет в момент  $t = T$  при  $x(T) = -x^*(0)$ . Очевидно, выражение для определения начального условия  $x(0) = x^*(0)$  и формы симметричного периодического решения  $x(t)$  на интервале  $0 \leqslant t \leqslant T$  формально будут совпадать с соответствующими выражениями, полученными в § 5.2 для симметричных автоколебаний. Выражения для условий переключения (6.148) при  $t = 0$  можно получить, если из левых частей уравнения периодов и неравенства переключения вычтем соответственно  $a \sin \varepsilon_0^*$  и  $a \cos \varepsilon_0^*$ .

Так, например, для случая двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  в соответствии с формулами (5.47) и (5.48) получим для условий переключений (6.148) выражения в виде

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h - a \sin \varepsilon_0^* = \sigma_1^* \quad (6.151)$$

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} - \frac{a\pi}{T} \cos \varepsilon_0^* > |\gamma h|. \quad (6.152)$$

При написании этих выражений мы положили  $\omega = \pi/T$ . Для случая простых корней  $\lambda_i$  аналогичные выражения получаются

из (6.151) и (6.152), если в них отбросить слагаемые, соответствующие двойному нулевому корню, а суммирование вести от 1 до  $n$ . Так как при определении вынужденных колебаний полупериод  $T$  задан, то уравнение (6.151) определяет начальную фазу  $\varepsilon_0^*$ . Величина  $\varepsilon_0^*$  физически определяет сдвиг фаз между гармоническим воздействием и вынужденными колебаниями системы.

Обозначим найденное периодическое решение через  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{\sigma}(t)$ . Исследование устойчивости этого решения проведем по Ляпунову. Для этой цели составим уравнения возмущенного движения в первом приближении. Искомые уравнения получаются формальным варьированием исходных дифференциальных уравнений в окрестности функций  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{\sigma}(t)$ . В матричной форме это уравнение получается из (5.1) в виде

$$\dot{\delta x} = P \delta x + h \left[ \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} \right]_{\tilde{\sigma}(t)} \gamma \delta x, \quad (6.153)$$

где, как и прежде,  $\delta x$  обозначает вариацию столбца  $x$ . Далее можно записать равенство

$$\left[ \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} \right]_{\tilde{\sigma}(t)} = \frac{\dot{\tilde{\psi}}(t)}{\tilde{\sigma}(t)}, \quad (6.154)$$

где  $\tilde{\psi}(t) = \psi[\tilde{\sigma}(t)]$  есть симметричная периодическая функция, равная 1 на интервале  $0 < t < T$ , равная  $-1$  на интервале  $T < t < 2T$  и т. д. Очевидно, функцию  $\tilde{\psi}(t)$  можно представить в виде ряда

$$\tilde{\psi}(t) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \delta(t - mT), \quad (6.155)$$

где  $\delta(t)$  обозначает импульсивную функцию Дирака.

Если использовать фильтрующее свойство функции  $\delta(t)$  \*),

---

\*) Фильтрующее свойство функции Дирака в неинтегральной форме можно записать в виде

$$f(t) \delta(t - t_a) = \frac{f(t_a - 0) + f(t_a + 0)}{2} \delta(t - t_a).$$

где  $f(t)$  может быть как скалярной, так и матричной функцией.

то на основании (6.154) и (6.155) второе слагаемое правой части уравнения (6.153) можно представить в виде

$$2h\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{\delta x(mT-0)}{\dot{\tilde{\sigma}}(mT-0)} + \frac{\delta x(mT+0)}{\dot{\tilde{\sigma}}(mT+0)} \right] \delta(t-mT). \quad (6.156)$$

Таким образом, в уравнении (6.153) второе слагаемое определяет последовательность импульсивных воздействий, накладываемых на систему в дискретные равноотстоящие моменты времени  $t = mT$ . Подобная задача встречалась нам в § 4.7. В соответствии с проведенными там рассуждениями можно сказать, что между двумя последовательными импульсивными воздействиями, т. е. в интервале времени  $mT+0 \leq t \leq (m+1)T-0$  изменение вариаций  $\delta x$  происходит в соответствии с уравнением

$$\dot{\delta x} = P \delta x. \quad (6.157)$$

При переходе в следующий интервал вариация  $\delta x$  мгновенно меняется на величину скачка

$$\begin{aligned} \delta x(mT+0) - \delta x(mT-0) &= \\ &= (-1)^m h\gamma \left[ \frac{\delta x(mT-0)}{\dot{\tilde{\sigma}}(mT-0)} + \frac{\delta x(mT+0)}{\dot{\tilde{\sigma}}(mT+0)} \right], \end{aligned} \quad (6.158)$$

который равен интенсивности соответствующего импульсивного воздействия. Равенство (6.158) равносильно каждому из равенств

$$\delta x(mT+0) - \delta x(mT-0) = \frac{(-1)^m 2h\gamma \delta x(mT-0)}{\dot{\tilde{\sigma}}(mT-0)} \quad (6.159)$$

и

$$\delta x(mT+0) - \delta x(mT-0) = \frac{(-1)^m 2h\gamma \delta x(mT+0)}{\dot{\tilde{\sigma}}(mT+0)}. \quad (6.160)$$

Формулы (6.159) и (6.160) легко получить, если последовательно разрешить уравнение (6.158) сначала относительно  $\delta x(mT+0)$ , а затем относительно  $\delta x(mT-0)$  и воспользоваться очевидным равенством

$$\dot{\tilde{\sigma}}(mT+0) - \dot{\tilde{\sigma}}(mT-0) = (-1)^m 2\gamma h. \quad (6.161)$$

Соответствующие обратные матрицы просто находятся непосредственным применением формулы (4.137). Для конеч-

ных точек указанного выше интервала времени получаем из решения уравнения (6.157) выражение

$$\delta x [(m+1)T - 0] = KM(T)K^{-1}\delta x(mT + 0), \quad (6.162)$$

которое с помощью формулы (6.159) преобразуем к виду

$$\delta x [(m+1)T - 0] = KM(T)K^{-1} \left[ E + \frac{(-1)^m 2h\gamma}{\tilde{\sigma}(mT - 0)} \right] \delta x(mT - 0). \quad (6.163)$$

Скалярная величина  $(-1)^m \tilde{\sigma}(mT - 0)$  не зависит от номера  $m$ , поэтому ее можно, например, вычислить, положив  $m = 0$ . Из уравнений (6.145) для периодического решения можно получить выражение

$$\tilde{\sigma}(-0) = \gamma K J K^{-1} x_0^* - \gamma h - a \frac{\pi}{T} \cos \varepsilon_0^*, \quad (6.164)$$

где  $J$  — каноническая форма матрицы  $P$ ,  $x_0^*$  определяется формулой (5.20), а  $\omega$  выражено через  $T$ . Если предположить на минуту, что  $J^{-1}$  существует, то, представив матрицу  $N(T)$  по формуле (2.110) и воспользовавшись формулой (5.20), приведем (6.164) к виду

$$\tilde{\sigma}(-0) = -2\gamma KM(T)[M(T) + E]^{-1}K^{-1}h - a \frac{\pi}{T} \cos \varepsilon_0^*. \quad (6.165)$$

Эта формула остается справедливой и для случая, когда среди корней  $\lambda_i$  есть равные нулю \*). Таким образом, (6.163) представляет собой разностное уравнение с постоянной операторной матрицей  $P^*$ , которую с учетом формул

\*) В предыдущих главах мы избегали проводить преобразования с использованием матрицы  $J^{-1}$ , которая не существует, если хотя бы один из корней  $\lambda_i$  равен нулю. Поэтому в получаемых выражениях  $N(T)$  не представлялась по формуле (2.110). Однако в § 2.5 было показано, что для нулевых корней  $\lambda_i$  матрица  $N(T)$  получается из формулы (2.110) с помощью предельного перехода. Этот факт мы использовали при распространении формулы (6.165) на случаи нулевых корней  $\lambda_i$ . В частности, аналогичным путем можно показать, что матрицу (5.57) можно привести к виду  $S(T) = 2M(T)[M(T) + E]^{-1}$ .

(4.21) и (6.165) можно представить в виде

$$P^* = K \left\{ M(T) - \frac{M(T) u \beta}{\beta M(T) [M(T+E)]^{-1} + \frac{\alpha \pi}{T} \cos \varepsilon_0^*} \right\} K^{-1}. \quad (6.166)$$

Периодическое решение  $\tilde{x}(t)$  будет асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения матрицы (6.166) будут по модулю меньше единицы, и неустойчиво, если хотя бы один корень по модулю будет больше единицы.

В § 5.5 мы в явной форме чередовали знаки вариаций  $\delta x(mT)$ , что равносильно замене в характеристическом уравнении  $\lambda$  на  $-\lambda$ . Чтобы сохранить преемственность результатов, запишем характеристическое уравнение матрицы (6.166) в виде

$$\det \left\{ \lambda E + M(T) - \frac{M(T) u \beta}{\beta M(T) [M(T+E)]^{-1} u + \frac{\alpha \pi}{2} \cos \varepsilon_0^*} \right\} = 0. \quad (6.167)$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись в преобразовании уравнения, (5.61) к форме (5.65), приведем характеристическое уравнение (6.167) к виду

$$\{\det [\lambda E + M(T)]\} \left\{ 1 - \frac{\beta [\lambda E + M(T)]^{-1} M(T) u}{\beta M(T) [M(T+E)]^{-1} u + \frac{\alpha \pi}{2T} \cos \varepsilon_0^*} \right\} = 0. \quad (6.168)$$

Если воспользоваться тождеством \*)

$$\begin{aligned} & \beta M(T) [M(T+E)]^{-1} u - \beta [\lambda E + M(T)]^{-1} M(T) u = \\ & = \beta \{E - [M(T) + E + \lambda E - \lambda E] [\lambda E + M(T)]^{-1}\} \times \\ & \quad \times M(T) [M(T+E)]^{-1} u, \end{aligned} \quad (6.169)$$

\*) Все фигурирующие здесь квадратные матрицы перестановочные.

то характеристическое уравнение (6.168) можно преобразовать к виду

$$\{\det [\lambda E + M(T)]\} \left\{ (\lambda - 1)\beta [\lambda E + M(T)]^{-1} M(T) \times \right. \\ \left. \times [M(T) + E]^{-1} u + \frac{a\pi}{2T} \cos \varepsilon_0^* \right\} = 0. \quad (6.170)$$

Дробно-рациональная функция  $W^*(\lambda)$ , соответствующая уравнению (6.18), представляется в форме (см. § 4.3)

$$W^*(\lambda) = - \frac{\beta [\lambda E + M(T)]^{-1} M(T) u}{\beta M(T) [M(T) + E]^{-1} u + \frac{a\pi}{2T} \cos \varepsilon_0^*}. \quad (6.171)$$

Прежде всего сделаем одно замечание принципиального характера. Очевидно, при  $a = 0$  из (6.170) получаем уравнение

$$\{\det [\lambda E + M(T)]\} (\lambda - 1)\beta [\lambda E + M(T)]^{-1} \times \\ \times M(T) [M(T) + E]^{-1} u = 0, \quad (6.172)$$

от распределения корней которого относительно единичного круга зависит устойчивость собственных периодических колебаний системы. Один из корней уравнения (6.172) заведомо равен единице, поэтому по теории Ляпунова этот случай является критическим, в котором нельзя судить об устойчивости движения по уравнениям первого приближения.

Заметим, что остальные  $n - 1$  корней уравнения (6.172) совпадают с корнями уравнения (5.68)\*). Когда все корни уравнения (5.68) по модулю меньше единицы, собственные периодические колебания устойчивы, а соответствующий предельный цикл асимптотически устойчив. Этот результат был получен в § 5.3 из анализа точечного преобразования плоскости переключений в окрестности инвариантной точки.

Из сравнения двух различных подходов к анализу устойчивости автоколебаний можно сделать следующий вывод. Устойчивость собственных периодических колебаний релейной системы не зависит от корня уравнения (6.172), заведомо равного единице; устойчивость имеет место, если остальные  $n - 1$  корень этого уравнения меньше единицы по абсолютной величине.

---

\* ) См. сноску на стр. 296.

Этот факт является общим для анализа устойчивости периодических решений автономных систем. Общая теорема была доказана А. А. Андроновым и А. А. Виттом еще в 1933 г., распространение этой теоремы на системы с разрывными характеристиками в общем случае было выполнено М. А. Айзermanом и Ф. Р. Гантмахером. Уравнения возмущенного движения в вариациях с использованием импульсивной функции Дирака в теории релейных систем впервые были построены Я. З. Цыпкиным.

Приведем выражения (6.170) и (6.171) к форме, более удобной в практических приложениях. Для этой цели используем процедуру вычислений, которая была применена в § 5.3 для преобразования выражений (5.68) и (5.69a) к виду (5.89) и (5.87) соответственно. Тогда получим

$$v^2 \prod_{j=1}^{n-2} \left( v - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \right) \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\lambda_i T}{2}}{v - \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{v} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \frac{T}{2v^2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} + a \frac{2\pi}{T} \cos \varepsilon_0^* \right\} = 0 \quad (6.173)$$

и

$$W^*(\lambda) = -\frac{1}{a} \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i T}}{\lambda + e^{\lambda_i T}} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \frac{1}{\lambda + 1} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \right. \\ \left. + \frac{T\lambda}{(\lambda - 1)^2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} \right\}, \quad (6.174)$$

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \right) \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h + \right. \\ \left. + \frac{T}{2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} + a \frac{\pi}{T} \cos \varepsilon_0^* \right\}. \quad (6.175)$$

Выражения (6.173) — (6.175) представлены для случая, когда  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$ . Таким образом, процедура вычисления симметричного периодического решения с полупериодом  $T$  будет состоять в следующем. Зададим амплитуду  $a$  и частоту  $\omega = \pi/T$  внешнего гармонического воздействия. По формуле (6.151) определяем начальные фазы  $\varepsilon_0^*$  и отбираем те из них,

которые удовлетворяют неравенству (6.152). После этого строим аргумент управления  $\sigma(t)$  и проверяем, выполняется ли в интервале  $0 \leq t \leq T$  неравенство  $\sigma(t) > -\sigma_1^*$ , которое гарантирует от дополнительных переключений. Выражение для  $\sigma(t)$  получается из второго уравнения (6.145), если в него подставить  $\varepsilon = \varepsilon_0^*$  и  $x(t)$  по формуле (5.49). Устойчивость определяется по условиям Гурвица, составленным для преобразованного характеристического уравнения (6.173) или по принципу аргумента для функции (6.174). Определение и отбор начальных фаз  $\varepsilon_0^*$  можно выполнить с помощью графических построений.

Перепишем (6.151) и (6.152) в виде

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h = \sigma_1^* + a \sin \varepsilon_0^* \quad (6.176)$$

и

$$\frac{T}{\pi} \left[ -\sum_{i=1}^{n-2} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} - |\gamma h| \right] > a \cos \varepsilon_0^*. \quad (6.177)$$

В этих выражениях заменим  $T$  на  $\tau$  и  $\varepsilon_0^*$  на  $\varepsilon_0$  и будем считать их переменными, изменяющимися в интервалах  $0 \leq \tau < \infty$  и  $0 \leq \varepsilon_0 \leq 2\pi$ . Для каждого из выражений (6.176) и (6.177) построим на одном чертеже графики функций, стоящих в их обеих частях. В частности, левая часть (6.176) определяет кривую, которую в § 5.4 мы называли кривой периодов и обозначали через  $\sigma^*(\tau)$ . По аналогии левую часть (6.177) обозначим через  $\sigma^{**}(\tau)$ . Как пользоваться полученными чертежами, поясним на конкретном примере.

#### *Вынужденные колебания в системе стабилизации курса нейтрального самолета*

Рассмотрим релейную систему стабилизации с учетом инерции сервомотора. Исследование автоколебаний такой системы было выполнено в § 5.5. Для рассматриваемой системы стабилизации кривые периодов приведены на рис. 5.2 в различных областях изменения ее параметров.

На одном чертеже с кривыми периодов построим одну волну смещенной синусоиды  $\sigma_1^* + a \sin \varepsilon_0$ . Тогда получим картину, изображенную на рис. 6.3. Путь, по которому определяется начальная фаза периодического решения  $\varepsilon_0^*$ , указан

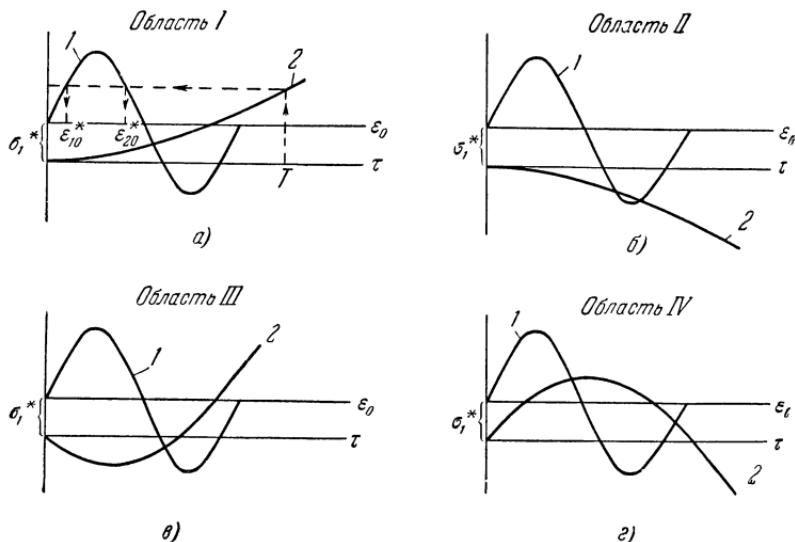


Рис. 6.3. Графическое определение начальной фазы вынужденного периодического режима: 1 — кривая  $\sigma_1^* + a \sin \varepsilon_0$ ; 2 — кривая периодов  $\sigma^*(T)$ .

для примера на рис. 6.3, а пунктирными отрезками со стрелками. Задаваясь полупериодом  $\tau = T$ , находим по кривой 2 ординату  $\sigma^*(T)$ , а затем по кривой 1 начальные фазы — их в этом случае будет две —  $\varepsilon_{10}^*$  и  $\varepsilon_{20}^*$ , соответствующие ординате  $\sigma^*(T)$ .

Функция  $\sigma^{**}(\tau)$  получается из левой части неравенства (5.102), если в ней заменить  $T$  на  $\tau$  и умножить на  $\tau/\pi$ . По результатам анализа неравенства (5.102), проведенного в § 5.5, можно заключить, что во всех четырех областях  $\sigma^{**}(\tau)$  будет монотонно возрастающей функцией  $\tau$ .

На рис. 6.4 изображены кривая  $\sigma^{**}(\tau)$  и одна волна смещенной синусоиды  $a \cos \varepsilon_0$ . Начальная фаза  $\varepsilon_0^*$  будет определять

периодическое решение, если соответствующая ордината кривой 1 будет лежать ниже кривой 2. В частности, в случае, изображенном на рис. 6.4, только для начальной фазы  $\varepsilon_{20}^*$  удовлетворяется неравенство (6.158).

По графикам рис. 6.3 и 6.4 можно наглядно проследить многообразие возможных периодических решений. Укажем лишь на одно обстоятельство. При  $\sigma_1^* = 0$  для любой нерезонансной частоты гармонического воздействия всегда существует такое значение  $a_{kp}$ , что при  $a < a_{kp}$  периодических

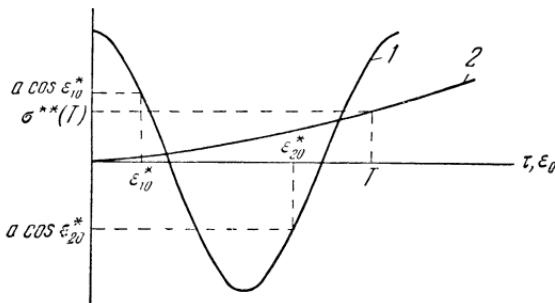


Рис. 6.4. Графическое определение направления переключений: 1 — кривая  $a \cos \varepsilon_0$ ; 2 — кривая  $\sigma^{**}(T)$ .

решений не существует. В резонансном случае, когда частоты собственных периодических колебаний и гармонического воздействия равны или мало отличаются друг от друга, периодические решения существуют для малых значений амплитуд  $a$ . При выполнении условий устойчивости периодическим решениям соответствуют вынужденные периодические колебания системы.

Характеристическое уравнение весьма просто получается из (6.173), если воспользоваться коэффициентами (5.104) преобразованного характеристического уравнения (5.103), полученным нами ранее для исследования устойчивости собственных колебаний рассматриваемой системы стабилизации, а также иметь в виду корни  $\lambda_i$ , определяемые по формулам (4.226). Искомое характеристическое уравнение можно представить в виде

$$p_0 v^4 + p_1 v^3 + p_2 v^2 + p_3 v + p_4 = 0, \quad (6.178)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= a \frac{\pi}{T} \cos \varepsilon_0^*, \\ p_1 &= p'_0 + a \frac{\pi}{T} \cos \varepsilon_0^* \left( \operatorname{th} \frac{MT}{2} + \operatorname{th} \frac{T}{2\theta} \right), \\ p_2 &= p'_1 + a \frac{\pi}{T} \cos \varepsilon_0^* \operatorname{th} \frac{MT}{2} \operatorname{th} \frac{T}{2\theta}, \\ p_3 &= p'_2, \quad p_4 = p'_3, \end{aligned} \right\} \quad (6.179)$$

причем в формулах (6.179) коэффициенты  $p'_i$  определяются соотношениями (5.104). В § 5.5 было установлено, что в области IV при  $\sigma_1^* = 0$ , т. е. для идеальной релейной характеристики, существует неустойчивое периодическое решение уравнений (5.96). Как было там показано, в этом случае два коэффициента  $p'_0$  и  $p'_3$  характеристического уравнения (5.103) имеют разные знаки:  $p'_0 > 0$ ,  $p'_3 < 0$ . Заметим, что период собственных колебаний системы при  $\sigma_1^* = 0$  имеет конечную величину, которая в соответствии с уравнением (5.98) определяется внутренними параметрами системы и не зависит от максимальной скорости сервомотора  $h'_2$ . Поэтому из формул (6.179) для резонансного случая можно заключить, что при достаточно малых амплитудах  $a$  знаки коэффициентов  $p_1$  и  $p'_0$  совпадают и всегда  $p_4 = p'_3$ . Таким образом, имеем  $p_1 > 0$  и  $p_4 < 0$ , что указывает на неустойчивость вынужденных периодических колебаний.

В области III при тех же условиях существуют автоколебания. В этом случае имеют место неравенства (5.106). Все коэффициенты  $p'_i < 0$  и  $\Delta'_2 = p'_1 p'_2 - p'_0 p'_3 > 0$ . При малых  $a$  коэффициенты  $p_i$  отрицательны вместе с  $p'_{i-1}$  для  $i = 1, 2, 3, 4$ . Тогда вынужденные колебания могут быть устойчивыми только при  $p_0 < 0$ , а это возможно только при таких сдвигах фазы  $\varepsilon_0^*$ , для которых  $\cos \varepsilon_0^* < 0$ . При  $\cos \varepsilon_0^* < 0$  условие устойчивости сводится к выполнению одного неравенства Гурвица

$$\Delta_3 = p_1 p_2 p_3 - p_0 p_3^2 - p_1^2 p_4 < 0, \quad (6.180)$$

устанавливающего отрицательность предпоследнего определителя Гурвица для уравнения (5.178).

В соответствии с формулами (6.180)  $\Delta_3$  можно представить в виде

$$\Delta_3 = p'_0(p'_1p'_2 - p'_0p'_3) + af_1 \cos \varepsilon_0^* + a^2f_2 \cos^2 \varepsilon_0^*, \quad (6.181)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — некоторые конечные выражения параметров системы. Из формулы (6.181) непосредственно устанавливаем, что при малом значении  $a$  имеет место неравенство (6.180). Таким образом, в данном случае вынужденные колебания будут устойчивы.

Следовательно, при резонансе знаки устойчивости вынужденных и собственных колебаний совпадают, когда в систему вводится гармонический сигнал малой мощности. На этой основе можно стабилизировать период выходных колебаний некоторой автоколебательной системы, так как их можно синхронизировать внешним сигналом малой мощности, но высокой стабильности частоты.

### § 6.7. Скользящий режим при гармоническом воздействии

Скользящий режим возникает при выполнении условий (6.150). Неравенства, фигурирующие в этих условиях, можно переписать в виде

$$\gamma h < \gamma Px - a\omega \cos(\omega t + \varepsilon) < -\gamma h. \quad (6.182)$$

Доопределим управляющую функцию в зоне скользящего режима по формуле

$$\psi(\sigma) = -\frac{1}{\gamma h} \gamma Px + \frac{a\omega}{\gamma h} \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (6.183)$$

Тогда уравнение скользящего движения запишется в виде

$$\dot{x} = Px - \frac{1}{\gamma h} h \gamma Px + \frac{a\omega}{\gamma h} h \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (6.184)$$

Пусть начало отсчета времени совпадает с началом скользящего движения. Тогда в соответствии с первым равенством (6.150)

$$\gamma x(0) = a \sin \varepsilon, \quad (6.185)$$

где  $\varepsilon$  — начальная фаза гармонического воздействия, соответствующая вновь выбранному началу отсчета времени \*). Частное решение уравнения (6.184), удовлетворяющее нулевому начальному условию, можно записать с учетом формул (5.115) — (5.117), (6.145) — (6.147) и (6.185) в виде

$$\begin{aligned} [x(t)]_{\text{част}} &= \\ &= \frac{a\omega}{\gamma h} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\tilde{\lambda}_i \cos \varepsilon - \omega \sin \varepsilon) e^{\tilde{\lambda}_i t} - \tilde{\lambda}_i \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon)}{\tilde{\lambda}_i (\tilde{\lambda}_i^2 + \omega^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i) h}{\tilde{\Delta}'(\tilde{\lambda}_i)} + \frac{-\sin \varepsilon + \sin(\omega t + \varepsilon)}{\omega} \frac{\tilde{F}(0) h}{\tilde{\Delta}(0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.186)$$

На основании формулы (5.123), равенства (6.185) и по аналогии с рассуждениями, приведенными в §§ 5.6 и 6.4, не трудно установить соотношения

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{\lambda}_i) x(0) &= \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h}{\gamma h} a \sin \varepsilon - \frac{\tilde{\lambda}_i F(\tilde{\lambda}_i) h \gamma F(\tilde{\lambda}_i)}{\gamma h \Delta(\tilde{\lambda}_i)} x(0), \\ \tilde{F}(\tilde{\lambda}_i) h &= F(\tilde{\lambda}_i) h, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (6.187)$$

Объединим общее решение однородного уравнения (6.184), определяемое выражением (5.133), с частным решением (6.186). Тогда, принимая во внимание формулы (6.187) и выполняя очевидные сокращения, получим для общего решения уравнения (6.184) выражение в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i t} \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h \gamma}{\Delta(\tilde{\lambda}_i)} \frac{F(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'(\tilde{\lambda}_i)} x(0) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h}{\tilde{\lambda}_i \tilde{\Delta}'(\tilde{\lambda}_i)} a \sin \varepsilon + \\ &\quad + a\omega \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\tilde{\lambda}_i \cos \varepsilon - \omega \sin \varepsilon) e^{\tilde{\lambda}_i t} - \tilde{\lambda}_i \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon)}{\tilde{\lambda}_i (\tilde{\lambda}_i^2 + \omega^2)} \times \\ &\quad \times \frac{F(\tilde{\lambda}_i) h}{\tilde{\Delta}'(\tilde{\lambda}_i)} + \frac{F(0) h}{\tilde{\Delta}(0)} a \sin(\omega t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (6.188)$$

\* ) Строго говоря, здесь нужно писать  $\varepsilon_0$ , так как  $\varepsilon$  определяет начальную фазу по отношению к опорному моменту отсчета времени. Величина  $\varepsilon_0$  находится простым переходом к новому началу отсчета времени, т. е. из уравнения

$$\omega t_{\text{нов}} + \varepsilon_0 = \omega t_{\text{опор}} + \varepsilon.$$

Если умножить обе части равенства (6.188) слева на строку  $\gamma$  и учесть, что  $\tilde{\lambda}_i$  суть корни полинома  $\tilde{\Delta}_*(\lambda)$  (5.132), то получим

$$\gamma x(t) = a \sin(\omega t + \varepsilon)^*). \quad (6.189)$$

Условия (6.182), при которых будет существовать скользящий режим, можно привести к виду

$$\begin{aligned} -1 &< \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\gamma F(\tilde{\lambda}_i) x(0)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\Delta(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_i \tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} a \sin \varepsilon - \\ &- a \omega \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\tilde{\lambda}_i \cos \varepsilon - \omega \sin \varepsilon) e^{\tilde{\lambda}_i t} - \tilde{\lambda}_i \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon)}{\tilde{\lambda}_i (\tilde{\lambda}_i^2 + \omega^2)} \times \\ &\times \frac{\Delta(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} - \frac{\Delta(0)}{\tilde{\Delta}'_*(0)} a \sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{a \omega}{\gamma h} \cos(\omega t + \varepsilon) < 1. \quad (6.190) \end{aligned}$$

### *Скользящий режим в системе стабилизации с релейным сервомотором*

Уравнения движения системы и все необходимые для расчета матричные и скалярные выражения даются формулами (6.106) — (6.118). Учитывая эти соотношения, получим из (6.188), что общее движение системы в скользящем режиме протекает в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| &= -x_1(0) e^{t/\alpha_1} \left\| \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{\alpha_1} \end{array} \right\| - a e^{t/\alpha_1} \sin \varepsilon \left\| \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{\alpha_1} \end{array} \right\| - \\ &- \frac{a \omega \left[ \left( -\frac{1}{\alpha_1} \cos \varepsilon - \omega \sin \varepsilon \right) e^{-t/\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon) \right]}{\left( \frac{1}{\alpha_1^2} + \omega^2 \right)} \times \\ &\times \left\| \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{\alpha_1} \end{array} \right\| + a \sin(\omega t + \varepsilon) \left\| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (6.191) \end{aligned}$$

---

\*) То есть первое равенство (6.150) выполняется тождественно.

Аналогичным образом из (6.190) можно получить для данной задачи условия существования скользящего режима в виде

$$\begin{aligned} -1 < & -\frac{x_1(0)(1-M\alpha_1)}{\alpha_1^2 h'_1} e^{-t/\alpha_1} - \frac{a(1-M\alpha_1)}{\alpha_1^2 h'_1} e^{-t/\alpha} \sin \varepsilon - \\ & - \frac{a\omega(1-M\alpha_1) \left[ \left( -\frac{1}{\alpha_1} \cos \varepsilon - \omega \sin \varepsilon \right) e^{-t/\alpha_1} + \right.}{\alpha_1^2 h'_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + \omega^2 \right)} \\ & \quad \left. + \frac{1}{\alpha_1} \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon) \right] + \\ & + \frac{a\omega}{\alpha_1 h'_1} \cos(\omega t + \varepsilon) < 1. \quad (6.192) \end{aligned}$$

В установившемся режиме будем иметь

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = & -\frac{a\omega \left[ \frac{1}{\alpha_1} \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon) \right]}{\frac{1}{\alpha_1^2} + \omega^2} \begin{vmatrix} -1 \\ \frac{1}{\alpha_1} \end{vmatrix} + \\ & + a \sin(\omega t + \varepsilon) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (6.193) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -1 < & -\frac{a\omega}{\alpha_1^2 h'_1 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + \omega^2 \right)} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \cos(\omega t + \varepsilon) + \omega \sin(\omega t + \varepsilon) \right] + \\ & + \frac{a\omega}{\alpha_1 h'_1} \cos(\omega t + \varepsilon) < 1. \quad (6.194) \end{aligned}$$

В частности, условия скользящего режима (6.194) будут задомо выполняться, если коэффициент  $h'_1$  будет удовлетворять неравенству

$$h'_1 > \frac{a\omega}{\alpha_1} \sqrt{\left( 1 - \frac{1-M\alpha_1}{\alpha_1^2 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + \omega^2 \right)} \right)^2 + \frac{\omega^2 (1-M\alpha_1)^2}{\alpha_1^2 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + \omega^2 \right)^2}}. \quad (6.195)$$



и

$$\gamma' = \|\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_m\|, \quad \gamma'' = \|\gamma''_1 \gamma''_2 \dots \gamma''_m\|. \quad (7.3)$$

Величины  $h'_i$ ,  $g'_i$ ,  $\gamma'_i$  и  $\gamma''_i$  являются постоянными, переменные  $y_i$  определяют координаты системы. Матрица

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C \quad (7.4)$$

является характеристической для линейной части уравнений (7.1), а ее определитель

$$\varphi\Delta(\lambda) = \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) \quad (7.5)$$

— характеристическим полиномом линейной части уравнений (7.1) или разомкнутой системы при  $g' = 0$ . Корни  $\varphi\Delta(\lambda)$  обозначаются через  $\lambda_i$  \*). Присоединенная матрица  $\Phi(\lambda)$  для характеристической матрицы (7.4) удовлетворяет, очевидно, уравнениям

$$\varphi^{-1}(\lambda) \Phi(\lambda) = \Phi(\lambda) \varphi^{-1}(\lambda) = \varphi\Delta(\lambda) E_m. \quad (7.6)$$

Матрицы  $\varphi(\lambda)$  и  $\Phi(\lambda)$  — квадратные матрицы  $m$ -го порядка, нижний индекс у единичной матрицы указывает ее порядок. В дальнейшем будем предполагать, что матрица (7.4) не является особой, т. е. ее определитель (7.5) не равен тождественно нулю. Кроме того, будем предполагать, что определитель коэффициентов при старших производных переменных  $y_i$  не равен нулю. Последнее условие гарантирует возможность приведения исходной системы уравнений к нормальной форме.

Процесс приведения к нормальной форме был описан в § 1.4. Чтобы иметь возможность использовать результаты, полученные в предыдущих разделах, необходимо систему (7.1) привести сначала к нормальной форме (4.2), а затем определить матричные и скалярные величины, фигурирующие в вычислительных формулах.

Но можно поставить как бы обратную задачу, т. е. представить вычислительные формулы через параметры уравнений (7.1), т. е. через столбец  $h'$ , строки  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , присоединенную матрицу  $\Phi(\lambda)$  и, естественно, корни  $\lambda_i$ , которые, как уже указывалось, инвариантны к форме записи уравнений.

\*) Корни  $\lambda_i$  не зависят от формы представления уравнений; характеристические  $\Delta(\lambda)$  и  $\varphi\Delta(\lambda)$  полиномы могут отличаться на постоянный множитель.

## ГЛАВА VII

# СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### § 7.1. Постановка задачи

До сих пор считалось, что возмущенное движение системы регулирования около стационарного состояния определяется дифференциальными уравнениями первого порядка, представленными в нормальной форме (1.15). Такая форма уравнений оказалась наиболее простой и удобной для проведения соответствующих исследований. Однако в большинстве случаев исходные уравнения движения рассматриваемого класса систем имеют вид (1.12). Эти уравнения в матричной форме можно записать в виде

$$\left. \begin{array}{l} (AD^2 + BD + C)y = h'\psi(\sigma) + g', \\ \sigma = (\gamma' + D\gamma'')y, \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

где  $D$  обозначает оператор дифференцирования  $d/dt$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — квадратные матрицы постоянных

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}, \quad (7.2)$$

$y$ ,  $h'$ ,  $g'$  — столбцы, а  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  — строки, определяемые формулами

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix}, \quad h' = \begin{vmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_m \end{vmatrix}, \quad g' = \begin{vmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \vdots \\ g'_m \end{vmatrix},$$

сделанных предположениях приведем уравнение (7.1) к нормальной форме (4.2). В соответствии с общей процедурой разрешим сначала первое уравнение относительно старших производных. Тогда получим

$$\ddot{y} = -A^{-1}B\dot{y} - A^{-1}Cy + A^{-1}h'\psi(\sigma) + A^{-1}g'. \quad (7.8)$$

Введем обозначения

$$x = \begin{vmatrix} x' \\ x'' \end{vmatrix}, \quad x' = y, \quad x'' = \dot{y}. \quad (7.9)$$

Тогда с учетом (7.8) будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}' = x'', \\ \dot{x}'' = -A^{-1}Cx' - A^{-1}Bx'' + A^{-1}h'\psi(\sigma) + A^{-1}g', \end{array} \right\} \quad (7.10)$$

откуда получим

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{x}' \\ \dot{x}'' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & E_m \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ x'' \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} 0 \\ A^{-1}h' \end{vmatrix} \psi(\sigma) + \begin{vmatrix} 0 \\ A^{-1}g' \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Второе уравнение (7.1) можно представить в форме

$$\sigma = \|\gamma'\gamma''\| \begin{vmatrix} x' \\ x'' \end{vmatrix}. \quad (7.12)$$

Из (7.9), (7.11) и (7.12) матрицы, фигурирующие в уравнениях (4.2), можно записать в виде блочных матриц

$$P = \begin{vmatrix} 0 & E_m \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{vmatrix} \quad (7.13)$$

и

$$h = \begin{vmatrix} 0 \\ A^{-1}h' \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} 0 \\ A^{-1}g' \end{vmatrix}, \quad \gamma = \|\gamma'\gamma''\|. \quad (7.14)$$

Квадратные матрицы, столбцы и строки, фигурирующие в виде

блоков в (7.13) и (7.14), имеют соответственно размерность  $m \times m$ ,  $m \times 1$  и  $1 \times m$ .

Характеристическая матрица для матрицы (7.13) имеет вид \*)

$$\lambda E - P = \begin{vmatrix} \lambda E_m & -E_m \\ A^{-1}C & \lambda E_m + A^{-1}B \end{vmatrix}. \quad (7.15)$$

Преобразуем эту матрицу к треугольному виду. Тогда получим

$$\begin{aligned} (\lambda E - P) & \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & E_m \\ 0 & E_m \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \lambda E_m & 0 \\ A^{-1}C & \lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Матрицу, стоящую в правой части (7.16), можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda E_m & 0 \\ A^{-1}C & \lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \lambda E_m & 0 \\ 0 & \lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ (\lambda^2 E + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} A^{-1}C & E_m \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Для квазидиагональных матриц и треугольных матриц с одинаковыми блочными элементами на главной диагонали обратные матрицы находятся элементарно. Применяя к (7.16) и (7.17) правило обращения произведения матриц и выполняя соответствующую подстановку, получим

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} E_m & -E_m \\ 0 & E_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} E_m \end{vmatrix} (\lambda E - P)^{-1} = \\ & = \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ -(\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} A^{-1}C & E_m \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} \lambda^{-1} E_m & 0 \\ 0 & (\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

---

\*)  $E$  без нижнего индекса обозначает здесь единичную матрицу  $n \times n$ .

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} (\lambda E - P)^{-1} &= \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & E_m \\ 0 & E_m \end{vmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{vmatrix} E_m \\ -(\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} A^{-1}C \end{vmatrix}^0 \times \\ &\quad \times \begin{vmatrix} \lambda^{-1} E_m & 0 \\ 0 & (\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Выполняя умножение, получим

$$\begin{aligned} (\lambda E - P)^{-1} &= \\ &= \begin{vmatrix} \lambda^{-1} E_m - \lambda^{-1} (\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} A^{-1}C & (\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} \\ -(\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} A^{-1}C & \lambda (\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Далее, имея в виду тождества

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 E_m + \lambda A^{-1}B + A^{-1}C)^{-1} &= (\lambda^2 A + \lambda B + C)^{-1} A, \\ C &= (\lambda^2 A + \lambda B + C) - (\lambda^2 A + \lambda B), \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

приведем выражения (7.20) к виду

$$\begin{aligned} (\lambda E - P)^{-1} &= \\ &= \begin{vmatrix} (\lambda^2 A + \lambda B + C)^{-1} (\lambda A + B) & (\lambda^2 A + \lambda B + C)^{-1} A \\ -(\lambda^2 A + \lambda B + C)^{-1} C & \lambda (\lambda^2 A + \lambda B + C)^{-1} A \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Если рассмотреть определители обеих частей равенства (7.16), то нетрудно установить, что

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - P) = {}_{\Phi}\Delta(\lambda) \det A^{-1}. \quad (7.23)$$

Имеют место выражения

$$\left. \begin{aligned} (\lambda E - P)^{-1} &= \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \\ (\lambda^2 A + \lambda B + C)^{-1} &= \frac{\Phi(\lambda)}{{}_{\Phi}\Delta(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Подставляя в (7.22) соответствующие матрицы из (7.24) и

сокращая на скалярную величину  $\Delta(\lambda)$ , получим выражение

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi(\lambda)(\lambda A + B) & \Phi(\lambda) A \\ -\Phi(\lambda) C & \lambda\Phi(\lambda) A \end{vmatrix} \det A^{-1}, \quad (7.25)$$

которое устанавливает связь между присоединенными матрицами  $F(\lambda)$  и  $\Phi(\lambda)$ . В некоторых случаях может оказаться удобнее запись этого выражения в форме

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi(\lambda)(\lambda A + B) & \Phi(\lambda) A \\ -{}_{\varphi}\Delta(\lambda) E_m + \lambda\Phi(\lambda) (\lambda A + B) & \lambda\Phi(\lambda) A \end{vmatrix} \det A^{-1}, \quad (7.26)$$

которая получается, если в (7.25) выразить  $C$  по второй формуле (7.21) и учесть (7.4) и (7.6).

Формулы (7.25) и (7.26), устанавливающие непосредственную связь между присоединенными матрицами  $F(\lambda)$  и  $\Phi(\lambda)$ , дают возможность решить поставленную выше задачу.

### § 7.3. Представление конечных результатов через исходные параметры

Полученные в предыдущих разделах вычислительные формулы содержат столбцы и скалярные выражения нескольких типов. Поставленная задача будет решена, если представить эти выражения через матричные и скалярные величины (7.2) — (7.6).

Так, по формулам (7.14), (7.25) и (7.26) образуем столбцы

$$F(\lambda) h = \begin{vmatrix} \Phi(\lambda) h' \\ \lambda\Phi(\lambda) h' \end{vmatrix} \det A^{-1}, \quad (7.27)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{F(\lambda) h}{\Delta_\sigma(\lambda)} = \begin{vmatrix} \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi(\lambda) h'}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)} \\ \lambda \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi(\lambda) h'}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)} + \frac{\Phi(\lambda) h'}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)} \end{vmatrix} \quad (7.28)$$

и скалярные выражения

$$\gamma F(\lambda) h = (\gamma' + \lambda\gamma'') \Phi(\lambda) h' \det A^{-1}, \quad (7.29)$$

$$\gamma \left[ \frac{d}{d\lambda} \frac{F(\lambda) h}{\Delta_\sigma(\lambda)} \right] h = (\gamma' + \lambda\gamma'') \left[ \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi(\lambda) h'}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)} \right] h' + \frac{\gamma'' \Phi(\lambda) h'}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)}. \quad (7.30)$$

По формулам (7.9) и (7.26) получим выражения для столбца

$$\begin{aligned} F(\lambda) x(0) &= \\ &= \left\| \begin{array}{c} \Phi(\lambda)[(\lambda A + B)y(0) + A\dot{y}(0)] \\ -\varphi\Delta(\lambda)y(0) + \lambda\Phi(\lambda)[(\lambda A + B)y(0) + A\dot{y}(0)], \end{array} \right\| \det A^{-1}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

из которого образуем выражение (см. (2.58))

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{F(\lambda)x(0)}{\Delta_\sigma(\lambda)} &= \\ &= \left\| \begin{array}{c} \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi(\lambda)[(\lambda A + B)y(0) + A\dot{y}(0)]}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)} \\ -q_\sigma(\lambda - \lambda_\sigma)^{q_\sigma-1}y(0) + \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda\Phi(\lambda)[(\lambda A + B)y(0) + A\dot{y}(0)]}{\varphi\Delta_\sigma(\lambda)} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (7.32)$$

По формулам (7.14) и (7.31) определяем скалярное выражение

$$\begin{aligned} \gamma F(\lambda)x(0) &= \det A^{-1} \{(\gamma' + \lambda\gamma'')\Phi(\lambda) \times \\ &\times [(\lambda A + B)y(0) + A\dot{y}(0)] - \varphi\Delta(\lambda)\gamma''y(0)\}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

И, наконец, по формулам (7.14) определяем выражение для показателя жесткости переключений в виде

$$\gamma h = \gamma'' A^{-1} h'. \quad (7.34)$$

Вычислительные формулы скалярного типа выражаются через исходные параметры уравнений (7.1) путем непосредственной подстановки в них скалярных величин (7.29), (7.30), (7.33) и (7.34) при соответствующих значениях параметра  $\lambda$ .

Для нахождения столбца  $y$  нужно в соответствующих формулах, определяющих столбец  $x$ , выделить первые  $m$  строк. Эта операция сводится к тому, что в конечных формулах остаются только верхние блочные элементы, фигурирующие в правых частях тождеств (7.27), (7.28), (7.31) и (7.33).

Рассмотрим для образца два примера. Формулы (5.47) — (5.49) и (5.89) определяют автоколебательный режим релейной системы, когда среди корней  $\lambda_i$  есть один двойной

корень, равный нулю. Через новые исходные параметры эти формулы выражаются в виде:

уравнение периодов \*)

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{(\gamma' + \lambda_i \gamma'') \Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} - \\ - \frac{T}{2} \gamma \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' - \frac{T}{2} \frac{\gamma'' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} = \sigma_1^*; \quad (7.35)$$

неравенства нормального переключения

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{(\gamma' + \lambda_i \gamma'') \Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \frac{\gamma' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} > |\gamma'' A^{-1} h'|; \quad (7.36)$$

процесс периодического колебания на полупериоде

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i t}}{\lambda_i} \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2} \frac{\Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} - \frac{T}{2} \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' - \\ - \frac{tT}{2} \frac{\Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} \frac{\Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} + \\ + t \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' + \frac{t^2}{2} \frac{\Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (7.37)$$

преобразованное характеристическое уравнение

$$v^2 \prod_{j=1}^{n-1} \left( v - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \right) \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\lambda_i T}{2}}{v - \operatorname{th} \frac{\lambda_i T}{2}} \frac{(\gamma' + \lambda_i \gamma'') \Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{v} \gamma' \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' + \frac{1}{v} \frac{\gamma'' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} + \frac{T}{2v^2} \frac{\gamma' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right\} = 0. \quad (7.38)$$

Формулы (5.132) — (5.134) определяют собственное скользящее движение релейной системы. Через новые исходные параметры эти формулы выражаются в виде:

\*) Здесь и ниже в соответствии с формулами (2.58) обозначено

$$\left[ \frac{\Phi(\lambda)}{\varphi \Delta_\sigma(\lambda_\sigma)} \right]^{(1)} = \left[ \frac{d}{d\lambda} \frac{\Phi(\lambda)}{\varphi \Delta_\sigma(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_\sigma} \quad \text{при } \sigma = n-1 \quad \text{и } \lambda_\sigma = 0.$$

характеристический полином

$$\varphi \tilde{\Delta}_*(\lambda) = (\gamma' + \lambda \gamma'') \Phi(\lambda) h'; \quad (7.39)$$

процесс скользящего движения

$$y(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\Phi(\tilde{\lambda}_i)}{\varphi \Delta'(\tilde{\lambda}_i)} h' (\gamma' + \tilde{\lambda}_i \gamma'') \frac{\Phi(\tilde{\lambda}_i)}{\varphi \tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} \times \\ \times [(\tilde{\lambda}_i A + B)y(0) + A\dot{y}(0)] - \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{\Phi(\tilde{\lambda}_i)}{\varphi \tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} h' \gamma'' y(0); \quad (7.40)$$

условия скользящего режима

$$-1 < \sum_{i=1}^{n-1} e^{\tilde{\lambda}_i t} \frac{(\gamma' + \tilde{\lambda}_i \gamma'') \Phi(\tilde{\lambda}_i) [(\tilde{\lambda}_i A + B)y(0) + A\dot{y}(0) - \varphi \Delta'(\tilde{\lambda}_i) \gamma'' y(0)]}{\varphi \tilde{\Delta}'_*(\tilde{\lambda}_i)} < 1. \quad (7.41)$$

В формулах, определяющих автоколебательные режимы, фигурируют матричные и скалярные выражения при значениях  $\lambda = \lambda_i$ . Принимая во внимание формулы (4.22), (4.51), (7.23), (7.29) и (7.30), получим скалярные тождества для простых корней  $\lambda_i$  в виде

$$\beta_i u_i = \gamma k_i \alpha_i h = \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} = \frac{(\gamma' + \lambda_i \gamma'') \Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)}, \quad (7.42)$$

для двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \beta_{n-1} u_{n-1} + \beta_n u_n &= \gamma (k_{n-1} \alpha_{n-1} + k_n \alpha_n) h = \\ &= \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h = \gamma' \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' + \frac{\gamma'' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)}, \\ \beta_n u_{n-1} &= \gamma k_n \alpha_{n-1} h = \frac{\gamma F(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} = \frac{\gamma' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Если далее составить из  $m$  первых элементов столбцов  $k_i$  столбцы  $k_i^{(m)}$  размерности  $m \times 1$ , а из первых  $m$  строк матриц  $F(\lambda_i)$  прямоугольные матрицы  $F^{(m)}(\lambda_i)$  размерности  $m \times n$ , то на основании формул (2.64), (2.65а), (7.27) и (7.28) нетрудно установить тождества

для простых корней  $\lambda_i$  в виде

$$k_i^{(m)} \alpha_i h = \frac{F^{(m)}(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} = \frac{\Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)}; \quad (7.44)$$

для двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} (k_{n-1}^{(m)} \chi_{n-1} + k_n^{(m)} \chi_n) h &= \\ &= \left[ \frac{F^{(m)}(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h = \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' \\ k_n^{(m)} \chi_{n-1} h &= \frac{F^{(m)}(0) h}{\Delta_{n-1}(0)} = \frac{\Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

И, наконец, из формулы (4.21) и (7.34) устанавливаем скалярное тождество

$$\beta u = \gamma h = \gamma'' A^{-1} h'. \quad (7.46)$$

Напомним, что в процессе выкладок мы многие соотношения представляли сначала через элементы специальных матриц  $\beta$ ,  $u$ ,  $\chi_i$  и  $k_i$ . Формулы (7.42) — (7.46) позволяют эти соотношения выражать через исходные параметры на любой стадии их формирования.

Наконец, возникает такой вопрос. Нельзя ли освободиться от ограничений при использовании полученных соотношений. Эти ограничения сводились к тому, что матрица  $A$  считалась неособой. Можно показать, что соотношения (7.42) — (7.45) сохраняют свой смысл при более общих предположениях. Достаточно предположить, что определитель, составленный из коэффициентов при старших производных системы (7.1) не равен нулю.

Соответствующее доказательство можно получить посредством сравнения решений одних и тех же дифференциальных уравнений, представленных в различной форме, если эти решения получаются независимо друг от друга. При этом, естественно, учитывается их единственность. Так, например, решение уравнений (7.1) при  $\varphi(\sigma) = 1$  и заданных начальных условиях  $u(0)$  и  $\dot{u}(0)$  можно получить методами операционного исчисления, построенного на базе преобразования Лапласа. Тождество (7.46) в общем случае, т. е. при условии  $\det A = 0$ , теряет смысл.

Если использовать последнее тождество (2.73) и последующее замечание для кратных корней, а также равенства (7.42) и (7.43), то можно получить соотношения в виде

$$\beta u = \gamma h = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{(\gamma' + \lambda_i \gamma'') \Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} \quad (7.47)$$

или для случая одного двойного нулевого корня  $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  в виде

$$\begin{aligned}\beta u - \gamma h &= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\gamma F(\lambda_i) h}{\Delta'(\lambda_i)} + \gamma \left[ \frac{F(0)}{\Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h = \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(\gamma' + \lambda_i \gamma'') \Phi(\lambda_i) h'}{\varphi \Delta'(\lambda_i)} + \gamma' \left[ \frac{\Phi(0)}{\varphi \Delta_{n-1}(0)} \right]^{(1)} h' + \frac{\gamma'' \Phi(0) h'}{\varphi \Delta_{n-1}(0)}. \quad (7.48)\end{aligned}$$

Эти формулы выражают показатель жесткости переключений, скалярную величину  $\beta u - \gamma h$  независимо от того, будет ли матрица  $A$  особой или нет.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айзerman M. A., Гантмахер Ф. Р., Устойчивость по линейному приближению периодического решения систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Прикладная математика и механика, т. XXI, вып. 5, 1957.
2. Андронов А. А., Бутин Н. Н., Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора. Собр. трудов А. А. Андронова, Изд-во АН СССР, 1956.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
4. Беля К. К., Нелинейные колебания в системах автоматического регулирования и управления, Машгиз, 1962.
5. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
6. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
7. Джури Э., Импульсные системы автоматического регулирования. Перев. с англ., Физматгиз, 1963.
8. Долголенко Ю. В., Скользящие режимы в релейных системах непрямого регулирования. Труды II Всесоюзного совещания по автоматическому регулированию, т. I, Изд-во АН СССР, 1955.
9. Жуковский Н. Е., Теория регулирования хода машин, Изд-во МВТУ, 1909.
10. Кузин Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления, Машгиз, 1962.
11. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики. Перев. с нем., Гостехиздат, 1933.
12. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, 1962.
13. Летов А. М., Состояние проблемы устойчивости в теории автоматического регулирования. Труды II Всесоюзного совещания по автоматическому регулированию, т. I, Изд-во АН СССР, 1955.
14. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи в теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
15. Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1950.
16. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

17. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат 1952.
18. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
19. Неймарк Ю. И., О периодических движениях релейных систем. Сб. памяти А. А. Андронова.
20. Ольденбург Р. и Сарториус Г., Динамика автоматического регулирования. Перев. с нем., Госэнергоиздат, 1949.
21. Пospelов Г. С., Вибрационная линеаризация релейных систем автоматического регулирования. Труды II Всесоюзного совещания по автоматическому регулированию, т. I, Изд-во АН СССР, 1955.
22. Ройтенберг Я. Н., Некоторые задачи управления движением, Физматгиз, 1963.
23. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического регулирования, Физматгиз, 1960.
24. Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложение к дифференциальным уравнениям и динамике. Перев. с англ., ИЛ, 1950.
25. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
26. Цыпкин Я. З., Теория импульсных систем. Физматгиз, 1958.
27. Цыпкин Я. З. и Бромберг П. В., О степени устойчивости линейных систем. Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1945.
28. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.
29. Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Перев. с нем., ОНТИ, 1936.
30. Бромберг П. В., Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования, Оборонгиз, 1953.
31. Бромберг П. В., Системы регулирования с разрывными характеристиками при постоянном внешнем воздействии, Оборонгиз, 1954.
32. Biharg H., Rollstabilität eines um seine Langsache freien Flugzeugs bei automatisch gesteuerten intermittierenden konstanten Querruddermomenten Luftfahrtforschung, B. 18, № 9, 1941, Ss. 317—326.
33. Cotton E., Sur la notion de nombre caractéristique de Liapunoff. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, v. XXXVI, 1919, p. 127.
34. Oppelt W., Die Flugzeugssteuerung im Geraeausflug. Luftfahrtforschung, B. 14, № 4/5, 1937.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автопилот** 15, 23  
**Аргумент дискретный** 58  
— **управления** 9  
**Ассоциативный закон** 40
- Вековое уравнение** 73
- Годограф вектора** 117  
**Гурвица определитель** 114  
— **проблема** 112  
— **условия** 214
- Движение асимптотически устойчивое** 90  
— **возмущенное** 78  
— **дискретное** 102  
— **невозмущенное** 78  
— **непрерывное** 102  
**Диагональная матрица** 39  
**Дискретное время** 77  
**Дискретный аргумент** 56  
**Дискриминант формы** 73  
**Дистрибутивный закон** 40
- Единица матричная** 43  
**Единичная матрица** 40  
**Единичный косой ряд** 44
- Импульсивная функция** 160  
**Импульсная система** 8  
**Инвариантная точка преобразования** 78
- Квадратная матрица** 38  
**Клетки Жордана** 50  
**Коммутативный закон** 40  
**Косой ряд** 44  
— **единичный** 44  
**Коэффициент устойчивости** 134
- Кривая периодов** 213  
**Критическое значение параметра** 125
- Матрица Гурвица** 114  
— **диагональная** 39  
— **квадратная** 38  
— **неособая** 39, 48  
— **порядка  $n$**  38  
— **симметричная** 39  
— **квазидиагональная** 47, 49  
— **коагулированная** 46  
— **обратная** 42, 48  
— **операторная линейной системы** 101, 136  
— **ортогональная** 42  
— **преобразующая** 49  
— **присоединенная** 41  
— **прямоугольная** 38  
— **размерности  $m \times n$**  38  
— **разомкнутой системы регулирования** 98  
— **ранга единицы** 41  
— **характеристическая** 46
- Матрица-столбец** 39  
**Матрица-строка** 39  
**Матрицы перестановочные** 41, 47  
— **подобные** 46  
—, **равенство** 39  
—, **ранг** 41  
—, **сложение** 40  
—, **транспонирование** 39, 41  
—, **умножение** 40
- Матричный экспоненциал** 62
- Нормальная форма уравнений в конечных разностях** 59
- Объект регулирования** 11  
**Операторная матрица системы** 101

- Определенно-положительная форма 73  
 Определитель Гурвица 114  
 Оценка затухания 138
- Переключение** 183  
 Помехозащищенные системы 8  
 Принцип аргумента 114, 115  
 Проблема Гурвица 112  
 Производная матрицы 53  
 Производящая функция 59  
 Прямоугольная матрица 38  
 Пучок форм 75  
 — регулярный 76
- Равенство** матриц 39  
 Разностные уравнения 58  
 Ранг матрицы 41  
 Реакция системы на внешнее возмущение 157  
 — на воздействие вида  $t^k e^{a_0 t}$  154  
 — на гармоническое воздействие 153  
 — на задающее воздействие 151  
 — на единичное воздействие 153  
 — на экспоненциальное воздействие 153  
 Регулятор 11
- Симметричная матрица 39  
 Система замкнутая 13  
 — импульсная 8, 98  
 — непрямого регулирования 12, 181  
 — помехозащищенная 8
- Система прерывистого регулирования 28  
 — с сосредоточенными параметрами 11  
 Скользящее движение 186  
 Сложение матриц 40  
 Собственные значения матрицы 46  
 Степень матрицы 43  
 — элементарного делителя 50  
 Субгармонические колебания 291  
 Субматрица 39
- Теорема** Сильвестра 74  
 Транспонированная матрица 39
- Умножение** матриц 40  
 Уравнения периодов 194  
 — разностные 58  
 Условия Гурвица 214  
 — нормального переключения 197  
 — переключения 183  
 Устойчивость в большом 233  
 — в малом 233
- Функция** импульсивная 160  
 — Ляпунова 86, 134, 135  
 — производящая 59  
 — управляющая 9
- Характеристическая матрица 46  
 Характеристические числа матрицы 46  
 — — — кратные 107  
 — — — простые 105  
 Характеристический полином 46
- Экспоненциал матричный 62

*Павел Владимирович Бромберг*

Матричные методы в теории релейного  
и импульсного регулирования

(Серия: «Теоретические основы технической  
кибернетики»)

М., 1967 г., 324 стр. с илл.

Редактор *Д. С. Фурманов*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *О. А. Сигал*

---

Сдано в набор 25/XII 1966 г. Подписано к печати  
14/III 1967 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 10,13.  
Условн. печ. л. 17,01. Уч.-изд. л. 16,62.  
Тираж 10 000 экз. Т-01819. Цена книги 1 р. 25 к.  
Заказ № 476.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Измайловский проспект, 29.

16:25 p.