
TABLES OF INTEGRAL TRANSFORMS

Volume II

BASED, IN PART, ON NOTES LEFT BY
HARRY BATEMAN

AND COMPILED BY THE
STAFF OF THE BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT
DIRECTOR ARTHUR ERDÉLYI

NEW YORK TORONTO LONDON
MC GRAW-HILL Book COMPANY, INC.

1954

Г. БЕЙТМЕН и А. ЭРДЕЙИ

при участии

В. МАГНУСА, Ф. ОБЕРХЕТТИНГЕРА, Ф. ТРИКОМИ

ТАБЛИЦЫ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ТОМ II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ.
ИНТЕГРАЛЫ
ОТ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Перевод с английского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

АННОТАЦИЯ

«Таблицы интегральных преобразований» состоят из двух томов. Они вышли в США в 1954 г. и являются естественным дополнением и завершением трехтомного издания «Высшие трансцендентные функции» тех же авторов, перевод которого на русский язык вышел в этой же серии в 1965—67 гг. Перевод первого тома «Таблиц интегральных преобразований» вышел в свет в 1969 г.

Настоящая книга представляет собой перевод второго тома «Таблиц интегральных преобразований». Этот том содержит таблицы преобразований Бесселя, Римана—Лиувилля, Вейля, Стильбеса, Гильберта, а также таблицы интегралов от специальных функций.

По полноте охвата материала это издание уникально.

«Таблицы» явятся настольной книгой для физиков теоретиков и экспериментаторов, инженеров-исследователей, математиков-прикладников и др.

ШТАБ ПО ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ ПРОЕКТА БЕЙТМЕНА

Директор
АРТУР ЭРДЕИИ

Руководство штаба:
ВИЛЬГЕЛЬМ МАГНУС, ФРИЦ ОБЕРХЕТТИНГЕР,
ФРАНЦИСКО Г. ТРИКОМИ

Ассистенты:
Д. Бертин, Д. Л. Томсон,
В. Б. Фалкс, Мария А. Вебер,
А. Р. Харви, Е. Л. Уитней

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Стандартные формы интегральных преобразований	9

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ

Глава VIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ

8.1. Общие формулы	12
8.2. Преобразования Ганкеля нулевого порядка; элементарные функции	14
8.3. Преобразования Ганкеля нулевого порядка; высшие трансцендентные функции	19
8.4. Преобразования Ганкеля первого порядка	23

Преобразования Ганкеля порядка ν

8.5. Алгебраические функции и степени с произвольным показателем	26
8.6. Показательные и логарифмические функции	32
8.7. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции	35
8.8. Гиперболические и обратные гиперболические функции	43
8.9. Ортогональные многочлены	44
8.10. Функции Лежандра	46
8.11. Функции Бесселя аргумента kx	48
8.12. Функции Бесселя других аргументов	55
8.13. Модифицированные функции Бесселя аргумента kx	61
8.14. Модифицированные функции Бесселя других аргументов	64
8.15. Функции, родственные функциям Бесселя	69
8.16. Функции параболического цилиндра	71
8.17. Гипергеометрическая функция Гаусса	74
8.18. Выврожденные гипергеометрические функции	76
8.19. Обобщенные гипергеометрические ряды и разрывные функции	79

Глава IX

У-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

9.1. Общие формулы	83
9.2. Алгебраические функции и степени с произвольными показателями	84
9.3. Другие элементарные функции	90
9.4. Высшие трансцендентные функции	91

Глава X

K-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

10.1. Общие формулы	100
10.2. Элементарные функции	101
10.3. Высшие трансцендентные функции	103

Глава XI

H-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

11.1. Общие формулы	119
11.2. Элементарные функции	129
11.3. Высшие трансцендентные функции	123

Глава XII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНТОРОВИЧА — ЛЕБЕДЕВА

12.1. Формулы	130
-------------------------	-----

РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава XIII

ИНТЕГРАЛЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

13.1. Интегралы Римана—Лиувилля	135
13.2. Интегралы Вейля	145

Глава XIV

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛТЬЕСА

14.1. Общие формулы	155
14.2. Элементарные функции	155
14.3. Высшие трансцендентные функции	161
14.4. Обобщенные преобразования Стильтьеса	167

Глава XV

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

15.1. Общие формулы	172
15.2. Элементарные функции	173
15.3. Высшие трансцендентные функции	179

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ВЫСШИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Глава XVI

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

16.1. Многочлены Чебышева	190
16.2. Многочлены Лежандра	194
16.3. Многочлены Гегенбауэра (ультрасферические многочлены)	198
16.4. Многочлены Якоби	201
16.5. Многочлены Эрмита	204
16.6. Многочлены Лагерра	207

Глава XVII

ГАММА-ФУНКЦИЯ, ИЛИ ПО ТИПУ ГАММА-ФУНКЦИИ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

17.1. Гамма-функция	211
17.2. Ψ -функция	217
17.3. Неполные гамма-функции и родственные функции	218

Глава XVIII

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

18.1. Функции Лежандра переменного $\alpha x + \beta$: конечные промежутки интегрирования	221
18.2. Функции Лежандра переменного $\alpha x + \beta$: бесконечные промежутки интегрирования	227
18.3. Функции Лежандра других переменных	231

Глава XIX

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

19.1. Функции Бесселя аргумента x : конечные промежутки интегрирования	236
19.2. Функции Бесселя аргумента x : бесконечные промежутки интегрирования	241
19.3. Функции Бесселя аргументов $\alpha x + \beta$, x^2 , x^{-1}	249
19.4. Функции Бесселя других аргументов	256
19.5. Модифицированные функции Бесселя аргумента x	261
19.6. Модифицированные функции Бесселя других аргументов	267
19.7. Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя переменного порядка	273
19.8. Функции, родственные функциям Бесселя	276

Глава XX

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

20.1. Функции параболического цилиндра	284
20.2. Гипергеометрические ряды Гаусса	287
20.3. Вырожденные гипергеометрические функции	289
20.4. E -функция Мак-Роберта	298
20.5. G -функция Мейера	300

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначения и определения высших трансцендентных функций	304
Цитированная литература	320
Указатель важнейших обозначений	322
Предметный указатель	325

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цели, история и организация «Таблиц интегральных преобразований» были описаны во введении к первому тому. Несколько больше половины данного второго (и последнего) тома составляют таблицы интегральных преобразований, не вошедших в первый том, а остальная часть тома содержит интегралы от высших трансцендентных функций.

Под общим названием «Преобразования Бесселя» мы даем не только хорошо известные преобразования Гаукеля, но и другие преобразования, ядрами которых служат цилиндрические и родственные им функции. Кроме того, даны таблицы интегралов дробного порядка, а также преобразований Гильберта и Стилтеса. Насколько нам известно, не существует достаточно обширных таблиц для всех преобразований, включенных в этот том. Для некоторых из них вообще известно очень мало пар двойственных функций. Перечень преобразований, включенных в оба тома книги, приведен на стр. 9 и 10.

Вторая часть тома содержит различные интегралы от высших трансцендентных функций. Некоторые из этих интегралов не могут быть представлены в виде интегральных преобразований каких-то функций, другие не были включены в таблицы интегральных преобразований и даны здесь. Вообще говоря, интеграл, который может быть записан в виде интегрального преобразования некоторой функции, более вероятно найти в таблицах таких преобразований, чем среди интегралов от высших трансцендентных функций. Эти интегралы расположены в соответствии с видом подынтегральной функции. Мы пользуемся здесь данной на стр. 12 первого тома иерархией функций, причем, как и в первом томе, сложные функции классифицируются в соответствии с «наивысшей» входящей в них функцией. Список определений высших трансцендентных функций дан в Приложении.

Мы выражаем признательность и благодарность тем же людям и организациям, что и в связи с первым томом. Мы благодарим также Джона Б. Джонстона, который читал гранки и оказывал другую ценную техническую помощь.

Исправления ошибок, добавления и предложения об улучшении будут с благодарностью приняты авторами.

А. Эрдгейн

СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Косинус-преобразование Фурье (\mathfrak{F}_c , глава I)

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx.$$

Синус-преобразование Фурье (\mathfrak{F}_s , глава II)

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin(xy) dx.$$

Экспоненциальное преобразование Фурье (\mathfrak{F}_c , глава III)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{-ixy} dx.$$

Преобразование Лапласа (\mathfrak{L} , глава IV)

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Обратное преобразование Лапласа (глава V)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(p) e^{pt} dp.$$

Преобразование Меллина (\mathfrak{M} , глава VI)

$$\int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx.$$

Обратное преобразование Меллина (глава VII)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s) x^{-s} ds.$$

Преобразование Ганкеля (\mathfrak{H}_ν , глава VIII)

$$\int_0^{\infty} f(x) J_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx.$$

Y-преобразование (\mathfrak{Y}_ν , глава IX)

$$\int_0^{\infty} f(x) Y_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx.$$

K-преобразование (\mathfrak{K}_ν , глава X)

$$\int_0^{\infty} f(x) K_\nu(xy) (xy)^{-1/2} dx.$$

H-преобразование (глава XI)

$$\int_0^{\infty} f(x) H_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx.$$

Преобразование Коиторовича — Лебедева (глава XII)

$$\int_0^{\infty} f(x) K_{ix}(y) dx.$$

Интегралы дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля (\mathfrak{R}_μ , глава XIII)

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx.$$

Интегралы дробного порядка в смысле Вейля (\mathfrak{W}_μ , глава XIII)

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx.$$

Преобразование Стильтеса (\mathfrak{S} , глава XIV)

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x+y} dx.$$

Обобщенное преобразование Стильтеса (\mathfrak{S}_ρ , глава XIV)

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{(x+y)^\rho} dx.$$

Преобразование Гильберта (глава XV)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-y} dx.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ,

ИЛИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ЯДРАМИ КОТОРЫХ
ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ
ИЛИ РОДСТВЕННЫЕ ИМ ФУНКЦИИ

ГЛАВА VIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ

Мы называем функцию

$$g(y; \nu) = \mathfrak{F}_\nu \{f(x); y\} = \int_0^\infty f(x) J_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx$$

преобразованием Ганкеля порядка ν функции $f(x)$. Здесь y пробегает положительные значения. Для краткости мы будем часто писать $g(y)$ вместо $g(y; \nu)$. Эта форма преобразования Ганкеля имеет то преимущество, что при $\nu = \pm 1/2$ она приводится соответственно к синус- и косинус-преобразованиям Фурье. Многие авторы определяют преобразование Ганкеля порядка ν функции $f(x)$ формулами

$$\int_0^\infty f(x) J_\nu(xy) x dx$$

или

$$\int_0^\infty f(x) J_\nu [2(xy)^{1/2}] dx.$$

Преобразование Ганкеля обратное самому себе (см. 8.1(1)), а потому для него не требуется таблиц обратных преобразований.

В книге Г. Н. Ватсона (1949) дано детальное доказательство теоремы обращения для преобразования Ганкеля и вычислены преобразования Ганкеля для многих функций. Теория и приложения преобразований Ганкеля описаны во многих книгах по интегралам Фурье, среди которых отметим книги Сиседдона (1955) и Титчмарша (1948).

Из приведенных в этой главе пар преобразований можно вывести новые пары преобразований с помощью методов, указанных во введении к тому I этой книги, а также с помощью общих формул, указанных в п. 8.1. Трикоми (1935) открыл соотношение

$$\mathfrak{F} \{t^{\nu/2-1/4} g [(2t)^{1/2}; \nu]; s\} = s^{-\nu-1} \mathfrak{F} \{t^{\nu/2-1/4} f [(2t)^{1/2}]; s^{-1}\}$$

между преобразованиями Ганкеля и Лапласа. Это соотношение можно использовать, чтобы вычислять преобразования Ганкеля с помощью таблиц преобразований Лапласа и обратных преобразований Лапласа, содержащихся в главах IV и V тома I.

8.1. Общие формулы

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu),$ $y > 0$
(1)	$\int_0^{\infty} g(y) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dy,$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$g(y)$
(2)	$f(ax),$ $a > 0$	$a^{-1} g(a^{-1}y; \nu)$
(3)	$x^m f(x),$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^{1/2-\nu} \times$ $\times \left(\frac{d}{y dy}\right)^m [y^{\nu-1/2+m} g(y; \nu+m)]$
(4)	$x^m f(x),$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^m y^{1/2+\nu} \left(\frac{d}{y dy}\right)^m z,$ где $z = y^{-1/2+m-\nu} g(y; \nu-m)$
(5)	$2\nu x^{-1} f(x)$	$y g(y; \nu-1) + y g(y; \nu+1)$
(6)	$x^{-1} f(x)$	$y^{1/2-\nu} \int_0^y \eta^{\nu-1/2} g(\eta; \nu-1) d\eta$
(7)	$x^{-1} f(x)$	$y^{1/2+\nu} \int_y^{\infty} \eta^{-\nu-1/2} g(\eta; \nu+1) d\eta$
(8)	$x^{-\mu} f(x),$ $\operatorname{Re} \nu + 1 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} y^{1/2-\nu} \times$ $\times \int_0^y \eta^{\nu-\mu+1/2} (y^2 - \eta^2)^{\mu-1} \times$ $\times g(\eta; \nu-\mu) d\eta$
(9)	$x^{-\mu} f(x),$ $\operatorname{Re} \nu - 3/2 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} y^{1/2+\nu} \times$ $\times \int_y^{\infty} \eta^{1/2-\mu-\nu} (\eta^2 - y^2)^{\mu-1} \times$ $\times g(\eta; \nu+\mu) d\eta$
(10)	$2\nu f'(x)$	$(\nu - 1/2) y g(y; \nu+1) -$ $-(\nu + 1/2) y g(y; \nu-1)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu),$ $y > 0$
(11)	$x^{1/2-\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^{\nu+m-1/2} f(x)],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^m g(y; \nu + m)$
(12)	$x^{1/2+\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^{m-\nu-1/2} f(x)],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$(-y)^m g(y; \nu - m)$
(13)	$x^{1/2-\nu} \int_0^x \xi^{\nu-\mu+1/2} (x^2 - \xi^2)^{\mu-1} \times$ $\times f(\xi) d\xi,$ $\operatorname{Re} \nu + 1/2 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu) y^{-\mu} g(y; \nu - \mu)$
(14)	$x^{1/2+\nu} \int_x^{\infty} \xi^{1/2-\mu-\nu} (\xi^2 - x^2)^{\mu-1} \times$ $\times f(\xi) d\xi,$ $\operatorname{Re} \nu + 1 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu) y^{-\mu} g(y; \nu + \mu)$
(15)	$2^{\lambda} \Gamma(\lambda) x^{1/2-\nu} \times$ $\times \int_0^x \xi^{1/2-\lambda-\mu+\nu} (x^2 - \xi^2)^{\mu-1} \times$ $\times f(\xi) d\xi,$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$ $\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re}(\lambda + \mu) - 1/2$	$2^{\mu} \Gamma(\mu) y^{1/2-\nu} \times$ $\times \int_0^y \eta^{1/2-\lambda-\mu+\nu} (y^2 - \eta^2)^{\lambda-1} \times$ $\times g(\eta; \nu - \lambda - \mu) d\eta$
(16)	$2^{\lambda} \Gamma(\lambda) x^{1/2+\nu} \times$ $\times \int_x^{\infty} \xi^{1/2-\lambda-\mu-\nu} (\xi^2 - x^2)^{\mu-1} \times$ $\times f(\xi) d\xi, \operatorname{Re} \lambda > 0$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re}(\lambda - \mu) - 1$	$2^{\mu} \Gamma(\mu) y^{1/2+\nu} \times$ $\times \int_y^{\infty} \eta^{1/2-\lambda-\mu-\nu} (\eta^2 - y^2)^{\lambda-1} \times$ $\times g(\eta; \nu + \lambda + \mu) d\eta$

8.2. Преобразования Ганкеля нулевого порядка; элементарные функции

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(1)	$x^{-1/2}$	$y^{-1/2}$
(2)	$x^{-1/2}, \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$	$y^{1/2} J_0(y) +$ $+ 2^{-1} \pi y^{1/2} [J_1(y) \mathbf{H}_0(y) -$ $- J_0(y) \mathbf{H}_1(y)]$
(3)	$0, \quad 0 < x < 1$ $x^{-1/2}, \quad 1 < x < \infty$	$y^{-1/2} - y^{1/2} J_0(y) +$ $+ 2^{-1} \pi y^{1/2} [J_0(y) \mathbf{H}_1(y) -$ $- J_1(y) \mathbf{H}_0(y)]$
(4)	$x^{1/2} (\alpha^2 + x^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{-1/2} e^{-\alpha y}$
(5)	$x^{1/2} (\alpha^2 - x^2)^{-1/2}, \quad 0 < x < \alpha$ $0, \quad \alpha < x < \infty$	$y^{-1/2} \sin(\alpha y)$
(6)	$0, \quad 0 < x < \alpha$ $x^{1/2} (x^2 - \alpha^2)^{-1/2}, \quad \alpha < x < \infty$	$y^{-1/2} \cos(\alpha y)$
(7)	$x^{1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-3/2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\alpha^{-1} y^{1/2} e^{-\alpha y}$
(8)	$x^{1/2} (x^4 + \alpha^4)^{-1}, \quad \arg \alpha < \pi/4$	$-\alpha^{-2} y^{1/2} \operatorname{kei}_0(\alpha y)$
(9)	$x^{5/2} (x^4 + \alpha^4)^{-1}, \quad \arg \alpha < \pi/4$	$y^{1/2} \operatorname{ker}_0(\alpha y)$
(10)	$x^{5/2} (x^4 - \alpha^4)^{-1}, \quad \alpha > 0$	$2^{-1} y^{1/2} [K_0(\alpha y) - 2^{-1} \pi Y_0(\alpha y)]$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(11)	$x^{-1/2} \frac{(x^2 + \alpha^2)^{1/2} - x}{(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + x}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{-1/2} + 2\alpha^{-2} y^{-5/2} \times$ $\times (\alpha y e^{-\alpha y} + e^{-\alpha y} - 1)$
(12)	$x^{1/2} (x^4 + 2a^2 x^2 + b^4)^{-1/2}, \quad a > b > 0$	$y^{1/2} J_0 [2^{-1/2} (a^2 - b^2)^{1/2} y] \times$ $\times K_0 [2^{-1/2} (a^2 + b^2)^{1/2} y]$
(13)	$x^{1/2} (x^4 + 2a^2 x^2 + b^4)^{-1/2}, \quad b > a > 0$	$y^{1/2} J_0 [2^{-1/2} (b^2 - a^2)^{1/2} y] \times$ $\times K_0 [2^{-1/2} (a^2 + b^2)^{1/2} y]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(14)	$x^{1/2} (b^2 - x^2) (x^1 \pm 2a^2 x^2 + b^4)^{-3/2},$ $0 < a < b$	$2^{-1/2} (b^2 \mp a^2)^{-1/2} y^{3/2} \times$ $\times J_1 [(2^{-1} b^2 \mp 2^{-1} a^2)^{1/2} y] \times$ $\times K_0 [(2^{-1} b^2 \pm 2^{-1} a^2)^{1/2} y]$
(15)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \{ [x + (x^2 - a^2)^{1/2}]^{2n} +$ $+ [x - (x^2 - a^2)^{1/2}]^{2n} \},$ $0 < x < a$ $0,$ $a < x < \infty$	$(-1)^n \pi a^{2n+1/2} y^{1/2} [J_n(2^{-1} a y)]^2$
(16)	$x^{-1/2} (a^2 + x^2)^{-1/2} [(a^2 + x^2)^{1/2} + x]^{2\mu},$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \mu < 3/4$	$y^{1/2} \alpha^{2\mu} K_{\mu}(2^{-1} \alpha y) I_{-\mu}(2^{-1} \alpha y)$
(17)	$x^{1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + (x^2 + \beta^2)^{1/2}]^{\mu+1/2},$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0, \text{Re } \mu < 3/4$	$y^{1/2} (\alpha^2 - \beta^2)^{\mu} K_{\mu} [2^{-1} y (\alpha + \beta)] \times$ $\times I_{-\mu} [2^{-1} y (\alpha - \beta)]$
(18)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x},$ $\text{Re } \alpha > 0$	$y^{1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1/2}$
(19)	$x^{-1/2} (1 - e^{-\alpha x}),$ $\text{Re } \alpha > 0$	$y^{1/2} \text{arsh}(\alpha/y)$
(20)	$x^{n-1/2} e^{-\alpha x},$ $\text{Re } \alpha > 0$	$\frac{n! y^{1/2}}{(\alpha^2 + y^2)^{n/2+1/2}} P_n \left[\frac{\alpha}{(\alpha^2 + y^2)^{1/2}} \right]$
(21)	$x^{2\mu-3/2} e^{-x^2/2},$ $\text{Re } \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu) y^{1/2} {}_1F_1(\mu; 1; -2^{-1} y^2)$
(22)	$x^{-1} \exp(-2\beta x^{1/2}),$ $\text{Re } \beta > 0$	$\pi^{-1} \beta y^{-1/2} K_{1/4}(2^{-1} e^{i\pi/2} \beta^2 y^{-1}) \times$ $\times K_{1/4}(2^{-1} e^{-i\pi/2} \beta^2 y^{-1})$
(23)	$x^{1/2} \exp[-\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0$	$\alpha y^{1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-3/2} \times$ $\times \exp[-\beta (y^2 + \alpha^2)^{1/2}] \times$ $\times [1 + \beta (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$
(24)	$x^{1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0$	$y^{1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1/2} \exp[-\beta (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(25)	$x^{1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [\pm i\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$\pm iy^{1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [\pm i\beta (a^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < a$ $y^{1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-\beta (y^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < y < \infty$
(26)	$\pm ix^{1/2} (b^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [\pm i\alpha (b^2 - x^2)^{1/2}],$ $0 < x < b$ $x^{1/2} (x^2 - b^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-\alpha (x^2 - b^2)^{1/2}],$ $b < x < \infty$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [\pm i\beta (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$
(27)	$x^{-1/2} \ln x$	$-y^{-1/2} \ln (2\gamma y)$
(28)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times \ln [x + (x^2 + a^2)^{1/2}],$ $a > 0$	$y^{1/2} [2^{-1} K_0^2(ay/2) +$ $+ \ln a I_0(ay/2) K_0(ay/2)]$
(29)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times \ln \frac{(x^2 + a^2)^{1/2} + x}{(x^2 + a^2)^{1/2} - x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{1/2} K_0^2(\alpha y/2)$
(30)	$x^{1/2} \ln (1 + \alpha^2 x^{-2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$2y^{-1/2} [y^{-1} - \alpha K_1(\alpha y)]$
(31)	$x^{1/2} \ln [\alpha x^{-1} + (1 + \alpha^2 x^{-2})^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{-3/2} (1 - e^{-\alpha y})$
(32)	$x^{-1/2} \sin(ax),$ $a > 0$	$y^{1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2},$ 0 $0 < y < a$ $a < y < \infty$
(33)	$x^{-3/2} \sin(ax),$ $a > 0$	$2^{-1} \alpha y^{1/2},$ $y^{1/2} \arcsin(a/y),$ $0 < y < a$ $a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(34)	$x^{-1/2} (1+x)^{-1} \sin(1+x)$	$2^{-1} \pi y^{1/2} J_0(y), \quad 1 \leq y < \infty$
(35)	$x^{-1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} \sin(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$y^{1/2} \beta^{-1} \operatorname{sh}(\beta a) K_0(\beta y),$ $a < y < \infty$
(36)	$x^{1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} \sin(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$2^{-1} \pi y^{1/2} e^{-a\beta} I_0(\beta y),$ $0 < y < a$
(37)	$x^{-3/2} e^{-bx} \sin(ax)$	$y^{1/2} \arcsin\left(\frac{2a}{r_1+r_2}\right),$ $r_1^2 = b^2 + (a+y)^2, r_1 > 0$ $r_2^2 = b^2 + (a-y)^2, r_2 > 0$
(38)	$x^{1/2} \sin(2^{-1} a^2 x^2), \quad a > 0$	$a^{-2} y^{1/2} \cos(2^{-1} a^{-2} y^2)$
(39)	$x^{-3/2} \sin(2^{-1} a^2 x^2)$	$2^{-1} y^{1/2} \operatorname{si}(2^{-1} a^{-2} y^2)$
(40)	$x^{-1} \exp(-\alpha x^{1/2}) \sin(\alpha x^{1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$2^{-1} y^{-1/2} \alpha I_{1/4}(2^{-2} a^2 y^{-1}) \times$ $\times K_{1/4}(2^{-2} a^2 y^{-1})$
(41)	$x^{1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin[a(\beta^2 + x^2)^{1/2}],$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$y^{1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \cos[\beta (a^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(42)	$x^{-1/2} \cos(ax), \quad a > 0$	$0,$ $y^{1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2},$ $0 < y < a$ $a < y < \infty$
(43)	$x^{-3/2} [1 - \cos(ax)], \quad a > 0$	$y^{1/2} \operatorname{arch}(a/y),$ $0,$ $0 < y < a$ $a < y < \infty$
(44)	$x^{-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$2^{-1} \beta^{-1} \pi y^{1/2} e^{-a\beta} I_0(\beta y),$ $0 < y < a$
(45)	$x^{1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$y^{1/2} \operatorname{ch}(\beta a) K_0(\beta y),$ $a < y < \infty$
(46)	$x^{-1/2} e^{-bx} \cos(ax)$	$y^{1/2} 2^{-1/2} [(b^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 b^2]^{-1/2} \times$ $\times \{[(b^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 b^2]^{1/2} +$ $+ b^2 + y^2 - a^2\}^{1/2}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(47)	$x^{1/2} \cos(2^{-1} a^2 x^2), \quad a > 0$	$a^{-2} y^{1/2} \sin(2^{-1} a^{-2} y^2)$
(48)	$x^{-3/2} [1 - \cos(2^{-1} a^2 x^2)]$	$-2^{-1} y^{1/2} \text{Ci}(2^{-1} a^{-2} y^2)$
(49)	$x^{-1} \exp(-\alpha x^{1/2}) \cos(\alpha x^{1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$2^{-1} \alpha y^{-1/2} I_{-1/4}(2^{-2} \alpha^2 y^{-1}) \times$ $\times K_{1/4}(2^{-2} \alpha^2 y^{-1})$
(50)	$x^{1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[\alpha (\beta^2 + x^2)^{1/2}],$ $a > 0, \text{Re } \beta > 0$	$-y^{1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin[\beta (a^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < a$ $y^{1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\beta (y^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < y < \infty$
(51)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x} \text{sh}(\alpha x), \quad \text{Re } \alpha > 0$	$2^{-1} y^{1/2} \text{th} [2\alpha y^{-1} + (1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}]$
(52)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x} \text{sh}(\beta x),$ $\text{Re } \alpha > \text{Re } \beta $	$\frac{(\alpha\beta y)^{1/2} (r_2 - r_1)^{1/2}}{r_1 r_2 (r_2 + r_1)^{1/2}},$ $r_1 = [y^2 + (\beta - \alpha)^2]^{1/2},$ $r_2 = [y^2 + (\beta + \alpha)^2]^{1/2}$
(53)	$x^{1/2} \exp(-\alpha x^{-1}) \text{sh}(\alpha x^{-1}), \quad \text{Re } \alpha > 0$	$2\alpha y^{-1/2} J_1(2\alpha^{1/2} y^{1/2}) K_1(2\alpha^{1/2} y^{1/2})$
(54)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x} \text{ch}(\beta x),$ $\text{Re } \alpha > \text{Re } \beta $	$\frac{(\alpha\beta y)^{1/2} (r_2 + r_1)^{1/2}}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)^{1/2}},$ $r_1 = [y^2 + (\beta - \alpha)^2]^{1/2}$ $r_2 = [y^2 + (\beta + \alpha)^2]^{1/2}$
(55)	$x^{1/2} \text{arsh}(\alpha x^{-1}), \quad \text{Re } \alpha > 0$	$y^{-3/2} (1 - e^{-\alpha y})$
(56)	$x^{-1/2} (1 + x^2)^{-1/2} \text{sh}(2\mu \text{arsh } x),$ $ \text{Re } \mu < 1/2$	$\pi^{-1} \sin(\pi\mu) y^{1/2} [K_{\mu}(y/2)]^2$
(57)	$x^{-1/2} (1 + x^2)^{-1/2} \text{ch}(2\mu \text{arsh } x),$ $ \text{Re } \mu < 1/2$	$2^{-1} y^{1/2} K_{\mu}(y/2) \times$ $\times [I_{\mu}(y/2) + I_{-\mu}(y/2)]$

8.3. Преобразования Ганкеля нулевого порядка; высшие трансцендентные функции

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$	
(1)	$x^{1/2} P_n(1-2x^2),$ 0	$0 < x < 1,$ $1 < x < \infty$	$y^{-1/2} J_{2n+1}(y)$
(2)	$x^{5/2} P_n(1-2x^2),$ 0,	$0 < x < 1$ $1 < x < \infty$	$y^{-1/2} (2n+1)^{-1} \times$ $\times [(n+1) J'_{2n+2}(y) - n J'_{2n}(y)]$
(3)	$x^{1/2} \exp(-2^{-1}x^2) L_n(x^2)$		$(-1)^n \exp(-2^{-1}y^2) y^{1/2} L_n(y^2)$
(4)	$x^{1/2} \exp(-2^{-1}\alpha x^2) L_n(2^{-1}\beta x^2),$ $\text{Re } \alpha > 0$		$y^{1/2} \frac{(\alpha-\beta)^n}{\alpha^{n+1}} \exp(-2^{-1}\alpha^{-1}y^2) \times$ $\times L_n\left[\frac{\beta y^2}{2\alpha(\beta-\alpha)}\right]$
(5)	$x^{1/2} \exp(-x^2) L_n(x^2)$		$[n!]^{-1} 2^{-2n-1} y^{2n+1/2} \exp[-2^{-2}y^2]$
(6)	$x^{-1/2} \text{si}(ax),$	$a > 0$	$-y^{-1/2} \arcsin(y/a),$ 0, $0 < y < a$ $a < y < \infty$
(7)	$x^{1/2} \text{si}(a^2x^2),$	$a > 0$	$-2y^{-3/2} \text{si}n(2^{-2}a^{-2}y^2)$
(8)	$x^{1/2} \text{Ci}(a^2x^2),$	$a > 0$	$2y^{-3/2} [1 - \cos(2^{-2}a^{-2}y^2)]$
(9)	$x^{-1/2} \text{Ci}(a^2x^2),$	$a > 0$	$y^{-1/2} [\text{Ci}(2^{-2}a^{-2}y^2) +$ $+ \ln(2^{-2}a^{-2}y^2)]$
(10)	$x^{1/2} (1+x^2)^{-\nu-1} \times$ $\times P_{\nu}[(1-x^2)(1+x^2)^{-1}],$ $\text{Re } \nu > 0$		$[2^{\nu} \Gamma(\nu+1)]^{-2} y^{2\nu+1/2} K_0(y)$
(11)	$x^{1/2} \{P_{\lambda-1/2}[(1+\alpha^2x^2)^{1/2}]\}^2,$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \lambda < 1/4$		$2\pi^{-2} \cos(\lambda\pi) \alpha^{-1} y^{-1/2} \times$ $\times [K_{\lambda}(2^{-1}\alpha^{-1}y)]^2$
(12)	$x^{1/2} P_{\sigma-1/2}[(1+\alpha^2x^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\sigma-1/2}[(1+\alpha^2x^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \sigma > -1/4$		$\alpha^{-1} y^{-1/2} I_{\sigma}(2^{-1}\alpha^{-1}y) K_{\sigma}(2^{-1}\alpha^{-1}y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(13)	$x^{1/2} \left\{ P_{\sigma-1/2}^{\mu} \left[(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2} \right] \right\}^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $ \operatorname{Re} \sigma < 1/4, \operatorname{Re} \mu < 1$	$-i\pi^{-1} y^{-3/2} W_{\mu, \sigma}(y/\alpha) \times$ $\times [W_{\mu, \sigma}(e^{\pi i} y/\alpha) -$ $- W_{\mu, \sigma}(e^{-\pi i} y/\alpha)]$
(14)	$x^{1/2} P_{\sigma-1/2}^{\mu} \left[(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2} \right] \times$ $\times P_{\sigma-1/2}^{-\mu} \left[(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2} \right],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \sigma < 1/4$	$2\pi^{-1} y^{-3/2} \cos(\sigma\pi) \times$ $\times W_{\mu, \sigma}(y/\alpha) W_{-\mu, \sigma}(y/\alpha)$
(15)	$x^{1/2} P_{\sigma-1/2}^{\mu} \left[(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2} \right] \times$ $\times Q_{\sigma-1/2}^{\mu} \left[(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2} \right],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \sigma > -1/4, \operatorname{Re} \mu < 1$	$e^{\mu\pi i} \frac{\Gamma(1/2 + \sigma - \mu)}{\Gamma(1 + 2\sigma)} y^{-3/2} \times$ $\times W_{\mu, \sigma}(y/\alpha) M_{-\mu, \sigma}(y/\alpha)$
(16)	$x^{-3/2} [1 - J_0(\alpha x)],$ $a > 0$	$0,$ $y > a$ $y^{1/2} \ln(a/y),$ $y < a$
(17)	$x^{-1/2} J_0(\alpha x) e^{-\beta x},$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Im} \alpha $	$2\pi^{-1} y^{1/2} K(2\alpha^{1/2} y^{1/2} k^{-1}) k^{-1/2},$ $k = [(\alpha + y)^2 + \beta^2]^{1/2}$
(18)	$x^{-1/2} J_1(\alpha x),$ $a > 0$	$a^{-1} y^{1/2},$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(19)	$x^{-3/2} J_1(\alpha x),$ $a > 0$	$2\pi^{-1} y^{1/2} E(y/a),$ $0 < y < a$ $\frac{2y^{3/2}}{\pi a} \left[E\left(\frac{a}{y}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) K\left(\frac{a}{y}\right) \right],$ $a < y < \infty$
(20)	$x^{1/2} J_{\nu}^2(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2\pi^{-1} y^{-1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[2\nu \arcsin(y/a)],$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(21)	$x^{1/2} J_0(\alpha x) Y_0(\alpha x),$ $a > 0$	$0,$ $0 < y < 2a$ $-2\pi^{-1} y^{-1/2} (y^2 - 4a^2)^{-1/2},$ $2a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(22)	$x^{-1/2} [H_0(ax) - Y_0(ax)],$ $a > 0$	$4\pi^{-1} (a+y)^{-1} y^{1/2} \times$ $\times K[a-y (a+y)^{-1}]$
(23)	$x^{-1/2} \operatorname{ch}(\beta x) K_0(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta $	$y^{1/2} (u+v)^{-1/2} K(k),$ $u = 2^{-1} \{[(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{1/2} +$ $+ \alpha^2 - \beta^2 - y^2\}$ $v = 2^{-1} \{[(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{1/2} -$ $- \alpha^2 + \beta^2 + y^2\}$ $k^2 = v(u+v)^{-1}$
(24)	$x^{-1/2} \operatorname{sh}(\beta x) K_1(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta $	$\alpha^{-1} y^{1/2} [u E(k) - K(k) E(u) +$ $+ K(k) \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u / (\operatorname{cn} u)],$ $\operatorname{cn}^2 u = 2y^2 \{[(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 -$ $- 4\alpha^2\beta^2]^{1/2} - \alpha^2 + \beta^2 + y^2\}^{-1}$ $k^2 = 2^{-1} \{1 - (\alpha^2 - \beta^2 - y^2) \times$ $\times [(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{-1/2}\}$
(25)	$x^{1/2} J_0(\alpha x) K_0(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Im} \alpha $	$y^{1/2} (\beta^4 + \alpha^4 + y^4 - 2\alpha^2 y^2 +$ $+ 2\alpha^2 \beta^2 + 2\beta^2 y^2)^{-1/2}$
(26)	$x^{3/2} J_1(\alpha x) K_0(\beta x)$ $\operatorname{Re} \beta \geq \operatorname{Im} \alpha , \operatorname{Re} \alpha > 0$	$2\alpha y^{1/2} (\alpha^2 + \beta^2 - y^2) \times$ $\times [(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 - 4y^2 \alpha^2]^{-3/2}$
(27)	$x^{1/2} I_0(\alpha x) K_0(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha$	$y^{1/2} (\alpha^4 + \beta^4 + y^4 - 2\alpha^2 \beta^2 +$ $+ 2\alpha^2 y^2 + 2\beta^2 y^2)^{-1/2}$
(28)	$x^{3/2} I_0(\alpha x) K_1(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha $	$2y^{1/2} \beta (\beta^2 + y^2 - \alpha^2) \times$ $\times [(y^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2 \beta^2]^{-3/2}$
(29)	$x^{1/2} I_1(\alpha x) K_1(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha > 0$	$2^{-1} y^{1/2} \alpha^{-1} \beta^{-1} \{(\alpha^2 + \beta^2 + y^2) \times$ $\times [(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2 \beta^2]^{-1/2} - 1\}$
(30)	$x^{1/2} K_{\mu}(\alpha x) I_{\mu}(\beta x)$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta $	$y^{1/2} r_1^{-1} r_2^{-1} (r_2 - r_1)^{\mu} (r_2 + r_1)^{-\mu},$ $r_1 = [y^2 + (\beta - \alpha)^2]^{1/2}$ $r_2 = [y^2 + (\beta + \alpha)^2]^{1/2}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(31)	$x^{-1/2} I_{\mu}(2^{-1}\alpha x) K_{\mu}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu > -1/2$	$\alpha^{-1} y^{1/2} P_{\mu-1/2} [(1+y^2/\alpha^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\mu-1/2} [(1+y^2/\alpha^2)^{1/2}]$
(32)	$x^{1/2} K_0^2(\alpha x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{-1/2} (y^2 + 4\alpha^2)^{-1/2} \ln \frac{(y^2 + 4\alpha^2)^{1/2} + y}{(y^2 + 4\alpha^2)^{1/2} - y}$
(33)	$x^{1/2} K_{\mu}^2(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu < 1$	$\pi 2^{-1-2\mu} \alpha^{-2\mu} \times$ $\times (\sin \mu\pi)^{-1} y^{-1/2} (y^2 + 4\alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times \{ [(y^2 + 4\alpha^2)^{1/2} + y]^{2\mu} -$ $- [(y^2 + 4\alpha^2)^{1/2} - y]^{2\mu} \}$
(34)	$x^{-1/2} J_{\mu}(a^2 x^{-1}) J_{-\mu}(a^2 x^{-1}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \mu < 1/4$	$-\frac{i}{\sin(2\mu\pi) y^{1/2}} \times$ $\times [e^{2\pi i\mu} J_{2\mu}(2ay^{1/2} e^{-\pi i/4}) \times$ $\times J_{-2\mu}(2ay^{1/2} e^{\pi i/4}) -$ $- e^{-2\pi i\mu} J_{2\mu}(2ay^{1/2} e^{\pi i/4}) \times$ $\times J_{-2\mu}(2ay^{1/2} e^{-\pi i/4})]$
(35)	$x^{-1/2} [J_{\mu}^2(a^2 x^{-1}) - J_{-\mu}^2(a^2 x^{-1})],$ $a > 0, \operatorname{Re} \mu < 1/4$	$\frac{1}{y^{1/2} \cos(\mu\pi)} \times$ $\times [J_{2\mu}(2ay^{1/2} e^{\pi i/4}) \times$ $\times J_{2\mu}(2ay^{1/2} e^{-\pi i/4}) -$ $- J_{-2\mu}(2ay^{1/2} e^{\pi i/4}) \times$ $\times J_{-2\mu}(2ay^{1/2} e^{-\pi i/4})]$
(36)	$x^{-1/2} H_{\mu}^{(1)}(a^2 x^{-1}) H_{\mu}^{(2)}(a^2 x^{-1}),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \mu < 1/4$	$16\pi^{-2} \cos(\mu\pi) y^{-1/2} \times$ $\times K_{2\mu}(2ay^{1/2} e^{\pi i/4}) K_{2\mu}(2ay^{1/2} e^{-\pi i/4})$
(37)	$x^{-1/2} J_{\mu}(a^2 x^{-1}) K_{\mu}(a^2 x^{-1}),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \mu > -1/4$	$2y^{-1/2} J_{2\mu}(2ay^{1/2}) K_{2\mu}(2ay^{1/2})$
(38)	$x^{-1/2} J_{\mu}(\alpha x^{1/2}) K_{\mu}(\alpha x^{1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \mu > -1$	$2^{-1} y^{-1/2} I_{\mu/2}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1}) \times$ $\times K_{\mu/2}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1})$
(39)	$x^{-1/2} Y_0(\alpha x^{1/2}) K_0(\alpha x^{1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$2^{-1} \pi^{-1} y^{-1/2} [K_0(2^{-2}\alpha^2 y^{-1})]^2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(40)	$x^{-1/2} Y_{\mu}(\alpha x^{1/2}) K_{\mu}(\alpha x^{1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \mu < 1$	$-\frac{K_{\mu/2}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1})}{2y^{1/2} \cos(\mu\pi/2)} \times$ $\times [\pi^{-1} K_{\mu/2}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1}) +$ $+ \sin(\mu\pi/2) I_{\mu/2}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1})]$
(41)	$x^{-1/2} K_{\mu}(\alpha e^{\pi i/4} x^{1/2}) \times$ $\times K_{\mu}(\alpha e^{-\pi i/4} x^{1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \mu < 1$	$2^{-4}\pi^2 [\cos(\mu\pi/2)]^{-1} \times$ $\times H_{\mu/2}^{(1)}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1}) H_{\mu/2}^{(2)}(2^{-2}\alpha^2 y^{-1})$
(42)	$x^{-1/2} D_n(\alpha x) D_{n+1}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$(-1)^n y^{-1/2} D_n(y/\alpha) D_{n+1}(y/\alpha)$
(43)	$x^{-1} D_{\nu}(\alpha^{1/2} x^{1/2}) D_{-\nu-1}(\alpha^{1/2} x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$2^{-3/2} \pi \alpha^{-1/2} y^{1/2} \times$ $\times P_{-1/4}^{\nu/2+1/4} [(1+4y^2/\alpha^2)^{1/2}] \times$ $\times P_{-1/4}^{-\nu/2-1/4} [(1+4y^2/\alpha^2)^{1/2}]$
(44)	$x^{-3/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha x) M_{-\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re} \kappa < 3/4$	$e^{-i\kappa\pi} \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu+\kappa)} y^{1/2} \times$ $\times P_{\mu-1/2}^{\kappa} [(1+y^2/\alpha^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\mu-1/2}^{\kappa} [(1+y^2/\alpha^2)^{1/2}]$
(45)	$x^{-3/2} W_{k, \mu}(\alpha x) W_{-k, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$2^{-1} \pi \cos(\mu\pi) y^{1/2} \times$ $\times P_{\mu-1/2}^k [(1+y^2/\alpha^2)^{1/2}] \times$ $\times P_{\mu-1/2}^{-k} [(1+y^2/\alpha^2)^{1/2}]$
(46)	$x^{1/2} {}_1F_1(\lambda; 1; -x^2), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$	$[2^{2\lambda-1} \Gamma(\lambda)]^{-1} y^{2\lambda-3/2} \exp(-2^{-2}y^2)$

8.4. Преобразования Ганкеля первого порядка

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_1(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(1)	$x^{-1/2},$ $0, \quad 0 < x < a$ $a < x < \infty$	$y^{-1/2} [1 - J_0(ay)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_1(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(2)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2}, \quad a < x < \infty$	$y^{-1/2} J_0(ay)$
(3)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{Re} a > 0$	$a^{-1} y^{-1/2} (1 - e^{-ay})$
(4)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$a^{-1} y^{-1/2} [1 - \cos(ay)]$
(5)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2}, \quad a < x < \infty$	$a^{-1} y^{-1/2} \sin(ay)$
(6)	$x^{-1/2} e^{-ax}, \quad \operatorname{Re} a > 0$	$y^{-1/2} [1 - \alpha (a^2 + y^2)^{-1/2}]$
(7)	$x^{-1/2} \exp(-2^{-2} \alpha x^2), \quad \operatorname{Re} a > 0$	$y^{-1/2} [1 - \exp(-y^2/a)]$
(8)	$x^{3/2} \exp(-2^{-2} \alpha x^2), \quad \operatorname{Re} a > 0$	$4a^{-2} y^{3/2} \exp(-y^2/a)$
(9)	$x^{-1/2} \exp[-\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$y^{-1/2} [e^{-\beta a} - \alpha (a^2 + y^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\beta (a^2 + y^2)^{1/2}]$
(10)	$x^{-1/2} (\beta^2 + x^2)^{1/2} \times$ $\times \exp[-\alpha (\beta^2 + x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$\frac{e^{-\beta a} - \exp[-\beta (a^2 + y^2)^{1/2}]}{\beta y^{1/2}}$
(11)	$x^{-1/2} \ln x$	$-y^{-1/2} \ln(2^{-1} \gamma y)$
(12)	$x^{-1/2} \ln(a^2 + x^2)$	$2y^{-1/2} [K_0(ay) + \ln a]$
(13)	$x^{-1/2} \ln(1 + x^4)^{1/2}$	$2y^{-1/2} \operatorname{ker}_0 y$
(14)	$x^{-1/2} \sin(ax), \quad a > 0$	$0, \quad 0 < y < a$ $ay^{-1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2}, \quad a < y < \infty$
(15)	$x^{-3/2} e^{-ax} \sin(bx)$	$by^{-1/2} (1 - r),$ $b^2 = \frac{y^2}{1 - r^2} - \frac{a^2}{r^2}$
(16)	$x^{-1/2} \sin(2^{-2} ax^2), \quad a > 0$	$y^{-1/2} \sin(y^2/a)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_1(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(17)	$x^{-1/2} \sin^2(2^{-2}ax^2), \quad a > 0$	$2^{-1}y^{-1/2} \cos(2^{-1}a^{-1}y^2)$
(18)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [b(x^2 + a^2)^{1/2}],$ $\text{Re } a > 0, b > 0$	$\frac{\sin(\alpha b) - \sin[\alpha(b^2 - y^2)^{1/2}]}{\alpha y^{1/2}},$ $0 < y < b$ $\alpha^{-1}y^{-1/2} \sin(\alpha b), \quad b < y < \infty$
(19)	$x^{-1/2} \cos(ax), \quad a > 0$	$y^{-1/2} [1 - a(a^2 - y^2)^{-1/2}], \quad 0 < y < a$ $y^{-1/2}, \quad a < y < \infty$
(20)	$x^{-1/2} \cos(2^{-2}ax^2), \quad a > 0$	$2y^{-1/2} \sin^2(2^{-1}a^{-1}y^2)$
(21)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [b(x^2 + a^2)^{1/2}],$ $\text{Re } a > 0, b > 0$	$\alpha^{-1}y^{-1/2} \{-\cos[\alpha(b^2 - y^2)^{1/2}] +$ $\quad + \cos(\alpha b)\}, \quad 0 < y < b$ $\alpha^{-1}y^{-1/2} \{\cos(\alpha b) -$ $\quad - \exp[-\alpha(y^2 - b^2)^{1/2}]\}, \quad b < y < \infty$
(22)	$x^{-1/2} \text{arctg}(x^2)$	$-2y^{1/2} \text{kei}_0 y$
(23)	$x^{3/2} P_n(1 - 2x^2), \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$	$(2n+1)^{-1} y^{-1/2} [(n+1) J_{2n+2}(y) -$ $\quad - n J_{2n}(y)]$
(24)	$x^{-1/2} [D_n(\alpha x)]^2, \quad \arg \alpha < \pi/4$	$(-1)^{n-1} y^{-1/2} [D_n(y/\alpha)]^2$
(25)	$x^{-1/2} \text{si}(a^2 x^2), \quad a > 0$	$y^{-1/2} [-\text{si}(2^{-2}a^{-2}x^2) - \pi/2]$
(26)	$x^{-1/2} J_0(ax), \quad a > 0$	$0, \quad 0 < y < a$ $y^{-1/2}, \quad a < y < \infty$
(27)	$x^{-3/2} J_0(ax)$	$2\pi^{-1}y^{-1/2} [E(y/a) -$ $\quad - (1 - y^2/a^2) K(y/a)],$ $0 < y < a$ $2\pi^{-1}y^{1/2} E(a/y), \quad a < y < \infty$
(28)	$x^{-5/2} [J_0(ax) - 1], \quad a > 0$	$-2^{-2}y^{3/2} [1 + 2 \ln(a/y)],$ $0 < y < a$ $-2^{-2}y^{1/2}a^2, \quad a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_1(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(29)	$x^{-1/2} J_0(ax) J_0(bx),$ $a, b > 0$	$0,$ $\pi^{-1} y^{-1/2} \arccos \frac{a^2 + b^2 - y^2}{2ab},$ $y^{-1,2},$
(30)	$x^{-5/2} J_1(ax),$ $a > 0$	$\frac{y^{1/2}(y+a)}{\pi} \times$ $\times \left[E\left(\frac{2iy^{1/2}a^{1/2}}{ y-a }\right) - K\left(\frac{2iy^{1/2}a^{1/2}}{ y-a }\right) \right]$
(31)	$x^{-1/2} Y_0(ax),$ $a > 0$	$-\pi^{-1} y^{-1/2} \ln(1 - y^2/a^2), \quad 0 < y < a$
(2)	$x^{1/2} \operatorname{kei}_0 x$	$-2^{-1} y^{-1/2} \operatorname{arctg}(y^2)$
(33)	$x^{-1/2} \operatorname{ker}_0 x$	$2^{-1} y^{-1/2} \ln(1 + y^4)^{1/2}$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ ПОРЯДКА ν

8.5. Алгебраические функции и степени с произвольным показателем

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(1)	$1,$ $0,$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{1/2} y^{-1} \frac{\Gamma(3/4 + \nu/2)}{\Gamma(1/4 + \nu/2)} +$ $+ (\nu - 1/2) J_{\nu}(y) S_{-1/2, \nu-1}(y) -$ $- J_{\nu-1}(y) S_{1/2, \nu}(y)$
(2)	$0,$ $1,$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$	$J_{\nu-1}(y) S_{1/2, \nu}(y) +$ $+ (1/2 - \nu) J_{\nu}(y) S_{-1/2, \nu-1}(y)$
(3)	$x^{-1/2},$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{-1/2}$
(4)	$x^{1/2-\nu},$ $0,$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$	$\frac{2^{1-\nu} y^{\nu-3/2}}{\Gamma(\nu)} - y^{-1/2} J_{\nu-1}(y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(5)	$x^{\nu-1/2},$ $0,$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu-1} y^{1/2-\nu} \pi^{1/2} \Gamma(\nu+1/2) \times$ $\times [J_{\nu}(y) H_{\nu-1}(y) -$ $- H_{\nu}(y) J_{\nu-1}(y)]$
(6)	$x^{\nu+1/2},$ $0,$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{-1/2} J_{\nu+1}(y)$
(7)	$x^{\mu},$ $-\operatorname{Re} \nu - 3/2 < \operatorname{Re} \mu < -1/2$	$2^{\mu+1/2} y^{-\mu-1} \frac{\Gamma(\mu/2+\nu/2+3/4)}{\Gamma(\nu/2-\mu/2+1/4)}$
(8)	$x^{\mu},$ $0,$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -3/2$	$y^{-\mu-1} [(v+\mu-1/2) y J_{\nu}(y) \times$ $\times S_{\mu-1/2, \nu-1}(y) -$ $- y J_{\nu-1}(y) S_{\mu+1/2, \nu}(y) +$ $+ 2^{\mu+1/2} \frac{\Gamma(\mu/2+\nu/2+3/4)}{\Gamma(\nu/2-\mu/2+1/4)}]$
(9)	$x^{\nu-1/2} (x+\alpha)^{-1},$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2, \nu \neq 1/2$ $ \arg \alpha < \pi$	$\frac{\pi \alpha^{\nu} y^{1/2} [H_{-\nu}(\alpha y) - Y_{-\nu}(\alpha y)]}{2 \cos(\nu \pi)}$
(10)	$x^{\rho-3/2} (x+\alpha)^{-\mu-1},$ $\operatorname{Re}(\rho+\nu) > 0$ $\operatorname{Re}(\rho-\mu) < 5/2$ $ \arg \alpha < \pi$	$\frac{y^{1/2} \pi \alpha^{\rho-\mu-1}}{\sin(\rho+\nu-\mu) \pi \Gamma(\mu+1)} \times$ $\times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2^{-1} \alpha y)^{\nu+2m} \Gamma(\tau)}{m! \Gamma(\nu+m+1) \Gamma(\tau-\mu)} - \right.$ $- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2^{-1} \alpha y)^{\mu+1-\rho+m} \Gamma(\mu+m+1)}{m! \Gamma[2^{-1}(\mu+\nu-\rho+m+3)]} \times$ $\left. \times \frac{\sin 2^{-1}(\rho+\nu-\mu-m) \pi}{\Gamma[2^{-1}(\mu-\nu-\rho+m+3)]} \right\},$ $\tau = \rho + \nu + 2m$
(11)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{1/2} I_{\nu/2}(2^{-1} \alpha y) K_{\nu/2}(2^{-1} \alpha y)$
(12)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\alpha^{\nu} y^{1/2} K_{\nu}(\alpha y)$
(13)	$x^{\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$\frac{\pi \alpha^{\nu-1} y^{1/2} [I_{\nu}(\alpha y) - L_{-\nu}(\alpha y)]}{2 \cos(\nu \pi)}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(14)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{-1} \pi \alpha^{-\nu-1} y^{1/2} [J_{\nu}(\alpha y) - L_{\nu}(\alpha y)]$
(15)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{1/2} \pi^{-1/2} \alpha^{\nu+1/2} K_{\nu+1/2}(\alpha y)$
(16)	$x^{1/2-\nu} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} 2^{-1/2} \alpha^{1/2-\nu} [J_{\nu-1/2}(\alpha y) -$ $- I_{\nu-1/2}(\alpha y)]$
(17)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-\nu-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu} \alpha^{-2\nu} y^{1/2+\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} \times$ $\times I_{\nu}(2^{-1}\alpha y) K_{\nu}(2^{-1}\alpha y)$
(18)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-\nu-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} y^{\nu-1/2}}{2^{\nu} e^{\alpha y} \Gamma(\nu+1/2)}$
(19)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-\nu-3/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{\nu+1/2} \pi^{1/2}}{2^{\nu+1} \alpha e^{\alpha y} \Gamma(\nu+3/2)}$
(20)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-\mu-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \mu + 3/2$	$\frac{\alpha^{\nu-\mu} y^{\mu+1/2} K_{\nu-\mu}(\alpha y)}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)}$
(21)	$x^{\lambda-3/2} (x^2 + \alpha^2)^{-\mu-1}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 2 \operatorname{Re} \mu + 7/2$	$\frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\lambda/2 + \nu/2) \Gamma(\mu - \lambda/2 - \nu/2 + 1)}{2^{\nu+1} \alpha^{2\mu-\lambda-\nu+2} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_2(\lambda/2 + \nu/2; \lambda/2 + \nu/2 - \mu,$ $\nu + 1; 2^{-2} y^2 \alpha^2) +$ $+ \frac{y^{2\mu-\lambda+3/2} \Gamma(\lambda/2 + \nu/2 - \mu - 1)}{2^{2\mu-\lambda+3} \Gamma(\nu/2 - \lambda/2 + \mu + 2)} \times$ $\times {}_1F_2(\mu + 1; \mu + 2 + \nu/2 - \lambda/2,$ $\mu + 2 - \lambda/2 - \nu/2; 2^{-2} y^2 \alpha^2)$
(22)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-1} \pi y^{1/2} [J_{\nu/2}(2^{-1}\alpha y)]^2$
(23)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2}, \quad a < x < \infty$	$-2^{-1} \pi y^{1/2} J_{\nu/2}(2^{-1}\alpha y) Y_{\nu/2}(2^{-1}\alpha y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(24)	$x^{1/2-\nu} (a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{1/2-\nu} H_{\nu-1/2}(ay)$
(25)	$x^{\nu-1/2} (a^2 - x^2)^{\nu-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) a^{2\nu} y^{1/2-\nu} \times$ $\times [J_{\nu}(2^{-1}ay)]^2$
(26)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{-\nu-1/2}, \quad a < x < \infty$ $ \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-2^{-\nu-1} a^{-2\nu} \Gamma(1/2 - \nu) y^{\nu+1/2} \pi^{1/2} \times$ $\times J_{\nu}(2^{-1}ay) Y_{\nu}(2^{-1}ay)$
(27)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{-\nu-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $ \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{-\nu} \Gamma(1/2 - \nu) y^{\nu-1/2} \sin(ay)$
(28)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{\nu-1/2}, \quad a < x < \infty$ $ \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{-\nu} \Gamma(1/2 + \nu) y^{-\nu-1/2} \cos(ay)$
(29)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{-\nu-3/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2$	$2^{-1-\nu} \pi^{-1/2} \Gamma(-1/2 - \nu) a^{-1} \times$ $\times \cos(ay) y^{\nu+1/2}$
(30)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\nu-3/2}, \quad a < x < \infty$ $1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$2^{-\nu-1} \pi^{-1/2} a^{-1} \Gamma(\nu - 1/2) y^{1/2-\nu} \times$ $\times \sin(ay)$
(31)	$x^{1/2-\nu} (a^2 - x^2)^{\mu}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1$	$\frac{2^{1-\nu} a^{\mu-\nu+1} s_{\nu+\mu, \mu-\nu+1}(ay)}{y^{\mu+1/2} \Gamma(\nu)}$
(32)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\mu}, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) > 1/2$	$2^{\mu} \Gamma(\mu + 1) a^{1+\mu-\nu} y^{-\mu-1/2} \times$ $\times J_{\nu-\mu-1}(ay)$
(33)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{\mu}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > -1$	$2^{\mu} \Gamma(\mu + 1) y^{-\mu-1/2} a^{\nu+\mu+1} \times$ $\times J_{\nu+\mu+1}(ay)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(34)	$x^{\mu-1/2} (a^2 - x^2)^{\lambda}, \quad 0 < x < a$ 0, $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$\frac{a^{2\lambda + \mu + \nu + 1} y^{\nu + 1/2} B(\lambda + 1, \mu/2 + \nu/2 + 1/2)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 1)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\frac{1 + \mu + \nu}{2}; \nu + 1, \frac{3 + \mu + \nu}{2} + \lambda; -\frac{a^2 y^2}{4}\right)$
(35)	$x^{-\nu-1/2} (a^2 + 2x)^{-1/2} \times$ $\times [(a^2 + 2x)^{1/2} - a]^{2\nu},$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu} \Gamma(\nu + 1/2) \pi^{-1/2} \times$ $\times D_{-\nu-1/2}(ae^{\pi i/4} y^{1/2}) \times$ $\times D_{-\nu-1/2}(ae^{-\pi i/4} y^{1/2})$
(36)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + x]^{\nu-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$2\pi^{-1/2} \alpha^{\nu-3/2} \operatorname{sh}(2^{-1}\alpha y) \times$ $\times K_{\nu-1/2}(2^{-1}\alpha y)$
(37)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + x]^{1-\nu},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} \alpha^{1/2-\nu} \times$ $\times \exp[-2^{-1}\alpha y] I_{\nu-1/2}(2^{-1}\alpha y)$
(38)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} \pm x]^{\mu},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$y^{1/2} \alpha^{\mu} I_{(\nu \mp \mu)/2}(2^{-1}\alpha y) \times$ $\times K_{(\nu \pm \mu)/2}(2^{-1}\alpha y)$
(39)	$x^{-\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} - \alpha]^{\nu},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{-1/2} e^{-\alpha y}$
(40)	$x^{-\mu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + x]^{\mu},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\nu - \mu) > -1$	$\frac{\Gamma(1/2 + \nu/2 - \mu/2)}{\alpha y^{1/2} \Gamma(\nu + 1)} \times$ $\times W_{\mu/2, \nu/2}(\alpha y) M_{-\mu/2, \nu/2}(\alpha y)$
(41)	0, $0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [x + (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\nu+1} + \right.$ $\left. + [x - (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\nu+1} \right\},$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\pi^{1/2} \alpha^{\nu-3/2} \times$ $\times [\sin(2^{-1}\alpha y) J_{\nu+1/2}(2^{-1}\alpha y) +$ $+ \cos(2^{-1}\alpha y) Y_{\nu+1/2}(2^{-1}\alpha y)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(42)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [x + (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\nu-1} + \right.$ $\left. + [x - (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\nu-1} \right\},$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < 5/2$	$\pi^{1/2} a^{\nu-3/2} \times$ $\times [\cos(2^{-1}ay) J_{\nu-1/2}(2^{-1}ay) -$ $- \sin(2^{-1}ay) Y_{\nu-1/2}(2^{-1}ay)]$
(43)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [x + i(a^2 - x^2)^{1/2}]^{\mu} + \right.$ $\left. + [x - i(a^2 - x^2)^{1/2}]^{\mu} \right\},$ $0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$\pi a^{\mu} y^{1/2} J_{(\nu+\mu)/2}(2^{-1}ay) \times$ $\times J_{(\nu-\mu)/2}(2^{-1}ay)$
(44)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [x + (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\mu} + \right.$ $\left. + [x - (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\mu} \right\},$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu < 3/2$	$- 2^{-1} \pi y^{1/2} a^{\mu} [J_{(\nu+\mu)/2}(2^{-1}ay) \times$ $\times Y_{(\nu-\mu)/2}(2^{-1}ay) +$ $+ J_{(\nu-\mu)/2}(2^{-1}ay) Y_{(\nu+\mu)/2}(2^{-1}ay)]$
(45)	$x^{-2\mu-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [a + (a^2 - x^2)^{1/2}]^{2\mu} + \right.$ $\left. + [a - (a^2 - x^2)^{1/2}]^{2\mu} \right\},$ $0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re}(2\mu) < \operatorname{Re} \nu + 1$	$\frac{a^{\nu} B(1/2 + \nu/2 + \mu, 1/2 + \nu/2 - \mu) y^{\nu+1/2}}{\Gamma(1 + \nu)} \times$ $\times {}_1F_1(1/2 + \nu/2 - \mu; \nu + 1; -iay) \times$ $\times {}_1F_1(1/2 + \nu/2 - \mu; \nu + 1; iay)$
(46)	$x^{\mu-1/2} (1 - 2ax + a^2)^{-1/2},$ $0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re}(\nu + \mu + 1/2) > 0$	<p>См. Bose S. K., 1946: Bull. Calcutta Math. Soc. 38, 177 - 180.</p>
(47)	$x^{\nu+5/2} (x^4 + 4\alpha^4)^{-\nu-1/2},$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > 1/6$	$\frac{\pi^{1/2} y^{1/2 + \nu} J_{\nu-1}(\alpha y) K_{\nu-1}(\alpha y)}{2^{3\nu-1} \alpha^{2\nu-2} \Gamma(\nu + 1/2)}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(48)	$x^{\nu+1/2} (x^4 + 4\alpha^4)^{-\nu-1/2},$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{y^{\nu+1/2} \pi^{1/2} J_{\nu}(\alpha y) K_{\nu}(\alpha y)}{\alpha^{2\nu+3} \Gamma(\nu+1/2)}$
(49)	$x^{\nu+1/2} (x^4 \pm 2a^2 x^2 + b^4)^{-1/2} \times$ $\times [b^2 + x^2 +$ $+ (x^4 \pm 2a^2 x^2 + b^4)^{1/2}]^{-2\nu},$ $0 < a < b$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(b^2 \mp a^2)^{-\nu} 2^{\nu} y^{1/2} \times$ $\times K_0[(2^{-1} b^2 \pm 2^{-1} a^2)^{1/2} y] \times$ $\times J_{\nu}[(2^{-1} b^2 \mp 2^{-1} a^2)^{1/2} y]$
(50)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \{ [a + (a^2 - x^2)^{1/2}]^{\nu} +$ $+ [a - (a^2 - x^2)^{1/2}]^{\nu} \}, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2y^{-1/2} \cos(ay - 2^{-1}\nu\pi)$

8.6. Показательные и логарифмические функции

(1)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{1/2-\nu} (\alpha^2 + y^2)^{-1/2} [(\alpha^2 + y^2)^{1/2} - \alpha]^{\nu}$
(2)	$x^{-3/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\nu^{-1} y^{1/2-\nu} [(\alpha^2 + y^2)^{1/2} - \alpha]^{\nu}$
(3)	$x^{m+1/2} e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \nu > -m-2$	$(-1)^{m+1} y^{1/2-\nu} \times$ $\times \frac{a^{m+1}}{a^{m+1}} \left\{ \frac{[(\alpha^2 + y^2)^{1/2} - a]^{\nu}}{(\alpha^2 + y^2)^{1/2}} \right\}$
(4)	$x^{\nu+1/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi^{-1/2} 2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 3/2) \alpha y^{\nu+1/2} \times$ $\times (\alpha^2 + y^2)^{-\nu-3/2}$
(5)	$x^{\nu-1/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu} \pi^{-1/2} \times$ $\times \Gamma(\nu + 1/2) y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-\nu-1/2}$
(6)	$x^{\mu-3/2} e^{-\alpha x},$ $a > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > 0$	$y^{1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-\mu/2} \Gamma(\mu + \nu) \times$ $\times P_{\mu-1}^{-\nu} [a (\alpha^2 + y^2)^{-1/2}]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(7)	$x^{\mu-3/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > 0$	$\frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\mu + \nu)}{2^{\nu} \alpha^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu}{2}, \frac{\mu + \nu + 1}{2};\right.$ $\left. \nu + 1; -\frac{y^2}{\alpha^2}\right) =$ $= \frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\mu + \nu)}{2^{\nu} (\alpha^2 + y^2)^{(\mu+\nu)/2} \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_2F_1\left[\frac{\mu + \nu}{2}, \frac{1 - \mu + \nu}{2};\right.$ $\left. \nu + 1; \frac{y^2}{(\alpha^2 + y^2)}\right]$
(8)	$x^{-1/2} \exp(-\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi^{1/2} y^{1/2}}{2\alpha^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{8\alpha}\right) J_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right)$
(9)	$x^{1/2} \exp(-\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -2$	$\frac{\pi^{1/2} y^{3/2}}{8\alpha^{3/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{8\alpha}\right) \times$ $\times \left[I_{\nu/2-1/2}\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) - I_{\nu/2+1/2}\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) \right]$
(10)	$x^{\nu+1/2} \exp(-\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{\nu+1/2}}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(11)	$x^{\nu-3/2} \exp(-\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$2^{\nu-1} y^{1/2-\nu} \Upsilon\left(\nu, \frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(12)	$x^{\nu+1/2} \exp(\pm i\alpha x^2),$ $\alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{y^{\nu+1/2}}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp\left[\pm i\left(\frac{\nu+1}{2}\pi - \frac{y^2}{4\alpha}\right)\right]$
(13)	$x^{2n+\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1 - 2n$	$2^{2n+\nu+1} n! y^{\nu+1/2} \exp(-y^2) L_n^{\nu}(y^2)$
(14)	$x^{\mu-1/2} \exp(-\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$\frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu/2 + \mu/2 + 1/2)}{2^{\nu+1} \alpha^{(\mu+\nu+1)/2} \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+1; -\frac{y^2}{4\alpha}\right) =$ $= \frac{\Gamma(\nu/2 + \mu/2 + 1/2)}{y^{1/2} \alpha^{\mu/2} \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{8\alpha}\right) M_{\mu/2, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(15)	$x^{-3/2} e^{-\alpha/x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$2y^{1/2} J_{\nu}[(2\alpha y)^{1/2}] K_{\nu}[(2\alpha y)^{1/2}]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(16)	$x^{-3/2} e^{-\alpha/x - \beta x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$2y^{1/2} J_{\nu} \left\{ (2\alpha)^{1/2} [(\beta^2 + y^2)^{1/2} - \beta]^{1/2} \right\} \times$ $\times K_{\nu} \left\{ (2\alpha)^{1/2} [(\beta^2 + y^2)^{1/2} + \beta]^{1/2} \right\}$
(17)	$x^{-1} \exp(-\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) \times$ $\times D_{-\nu-1/2} (2^{-1/2} \alpha e^{\pi i/4} y^{-1/2}) \times$ $\times D_{-\nu-1/2} (2^{-1/2} \alpha e^{-\pi i/4} y^{-1/2})$
(18)	$x^{\nu+1/2} \exp[\alpha(1-x^2)], 0 < x < 1$ $0, 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(2i\alpha)^{-\nu-1} y^{1/2+\nu} [U_{\nu+1}(2i\alpha, y) -$ $-iU_{\nu+2}(2i\alpha, y)]$
(19)	$x^{\nu+1/2} \exp[-\alpha(x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(\pi/2)^{-1/2} \alpha \beta^{\nu+3/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-\nu-3/4} \times$ $\times K_{\nu+3/2} [\beta (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$
(20)	$x^{-1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\alpha(\beta^2 + x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{1/2} I_{\nu/2} \{2^{-1} \beta [(\alpha^2 + y^2)^{1/2} - \alpha]\} \times$ $\times K_{\nu/2} \{2^{-1} \beta [(\alpha^2 + y^2)^{1/2} + \alpha]\}$
(21)	$x^{\nu+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[ia(\beta^2 + x^2)^{1/2}],$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$i2^{-1/2} \pi^{1/2} \beta^{1/2+\nu} \times$ $\times (\alpha^2 - y^2)^{-1/4-\nu/2} y^{1/2+\nu} \times$ $\times H_{-\nu-1/2}^{(1)} [\beta (\alpha^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < \alpha$ $2^{1/2} \pi^{-1/2} \beta^{1/2+\nu} \times$ $\times y^{1/2+\nu} (y^2 - \alpha^2)^{-1/4-\nu/2} \times$ $\times K_{\nu+1/2} [\beta (y^2 - \alpha^2)^{1/2}],$ $\alpha < y < \infty$
(22)	$x^{\nu+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\alpha(\beta^2 + x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(\pi/2)^{-1/2} \beta^{\nu+1/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times K_{\nu+1/2} [\beta (\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(23)	$x^{-\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta]^{\nu} \times$ $\times \exp[-\alpha(x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{\nu+1/2} [\alpha + (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]^{-\nu} \times$ $\times (y^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\beta(y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(24)	$x^{\sigma-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \beta^2)^{1/2} + \beta]^{-\sigma} \times$ $\times \exp[-\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0$ $\text{Re } (\nu + \sigma) > -1$	$\frac{\Gamma(\nu/2 + \sigma/2 + 1/2)}{\beta \Gamma(\nu + 1)} y^{1/2} \times$ $\times M_{\sigma/2, \nu/2} \{\beta [(y^2 + \alpha^2)^{1/2} - \alpha]\} \times$ $\times W_{-\sigma/2, \nu/2} \{\beta [(y^2 + \alpha^2)^{1/2} + \alpha]\}$
<p>Относительно преобразований Ганкеля других функций, содержащих показательную функцию, см. таблицы преобразований Лапласа.</p>		
(25)	$x^{\mu} \ln x,$ $-\text{Re } \nu - 3/2 < \text{Re } \mu < 0$	$\frac{2^{\mu-1/2} \Gamma(\mu/2 + \nu/2 + 3/4)}{\Gamma(\nu/2 - \mu/2 + 1/4)} y^{\mu+1} \times$ $\times [\psi(\mu/2 + \nu/2 + 3/4) +$ $+ \psi(\nu/2 - \mu/2 + 1/4) - \ln(y^2/4)]$

8.7. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

(1)	$x^{-1/2} \sin(ax),$ $a > 0, \text{Re } \nu > -2$	$\cos(2^{-1} \pi \nu) y^{\nu+1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times [a + (a^2 - y^2)^{1/2}]^{-\nu}, \quad 0 < y < a$ $y^{1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2} \sin[\nu \arcsin(a/y)],$ $a < y < \infty$
(2)	$x^{-3/2} \sin(ax),$ $a > 0, \text{Re } \nu > -1$	$\nu^{-1} \sin(2^{-1} \pi \nu) y^{\nu+1/2} \times$ $\times [a + (a^2 - y^2)^{1/2}]^{-\nu}, \quad 0 < y \leq a$ $\nu^{-1} y^{1/2} \sin[\nu \arcsin(a/y)],$ $a < y < \infty$
(3)	$x^{\nu+1/2} \sin(ax),$ $a > 0, -3/2 < \text{Re } \nu < -1/2$	$-2^{1+\nu} \pi^{-1/2} \sin(\nu \pi) \Gamma(\nu + 3/2) a \times$ $\times y^{\nu+1/2} (a^2 - y^2)^{-\nu-3/2},$ $0 < y < a$ $-2^{1+\nu} \pi^{-1/2} \Gamma(\nu + 3/2) \times$ $\times a y^{\nu+1/2} (y^2 - a^2)^{-\nu-3/2},$ $a < y < \infty$
(4)	$x^{\nu-1/2} \sin(ax),$ $a > 0, -1 < \text{Re } \nu < 1/2$	$[\Gamma(1/2 - \nu)]^{-1} \pi^{1/2} 2^{\nu} y^{\nu+1/2} \times$ $\times (a^2 - y^2)^{-\nu-1/2}, \quad 0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(5)	$x^{1/2-\nu} \sin(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $2^{1-\nu} \pi^{1/2} a [\Gamma(\nu - 1/2)]^{-1} y^{1/2+\nu} \times$ $\times (y^2 - a^2)^{\nu-3/2}, \quad a < y < \infty$
(6)	$x^{-\nu+2n+1/2} \sin(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > 2n + 1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $(-1)^n 2^{\nu-2n-2} y^{2n-\nu+3/2} (2n+1)! \times$ $\times \Gamma(\nu-2n-1) [\Gamma(2\nu-2n-1)]^{-1} \times$ $\times (y^2 - a^2)^{\nu-2n-3/2} C_{2n+1}^{\nu-2n-1} (ay^{-1}),$ $a < y < \infty$
(7)	$x^{\mu-3/2} \sin(ax),$ $a > 0, -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$\frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu + \mu) \sin[2^{-1}\pi(\nu + \mu)]}{2^{\nu} a^{\nu+\mu} \Gamma(\nu + 1)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}, \frac{\nu+\mu}{2}; \nu+1; \frac{y^2}{a^2}\right),$ $0 < y < a$ $\frac{2^{\mu} a \Gamma(1/2 + \nu/2 + \mu/2)}{y^{\mu+1/2} \Gamma(1/2 + \nu/2 - \mu/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}, \frac{1+\mu-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{a^2}{y^2}\right),$ $a < y < \infty$
(8)	$x^{\nu-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1} \sin(ax),$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\beta^{\nu-1} \operatorname{sh}(a\beta) y^{1/2} K_{\nu}(\beta y),$ $y \geq a$
(9)	$x^{1/2-\nu} (x^2 + \beta^2)^{-1} \sin(ax),$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{-1} \pi \beta^{-\nu} e^{-a\beta} y^{1/2} I_{\nu}(\beta y),$ $0 < y \leq a$
(10)	$x^{-3/2} e^{-xa \cos \varphi \cos \psi} \sin(xa \sin \psi),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$	$a^{1/2} \nu^{-1} (\sin \varphi)^{1/2} (\operatorname{tg} \varphi/2)^{\nu} \sin(\nu \psi),$ $y = a \sin \varphi$
(11)	$x^{\nu+1/2} e^{-xa \cos \varphi \cos \psi} \sin(xa \sin \psi),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{\nu+1} \pi^{-1/2} \Gamma(\nu + 3/2) \times$ $\times a^{-\nu-3/2} (\sin \varphi)^{\nu+1/2} \times$ $\times (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi)^{-\nu-3/2} \times$ $\times \sin[(\nu + 3/2) \alpha],$ $y = a \sin \varphi$ $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg} \psi \cos \varphi$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(12)	$x^{\nu-1/2} e^{-xa \cos \varphi \cos \psi} \sin(xa \sin \psi),$ $a > 0, \quad 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu} \pi^{-1/2} a^{-\nu-1/2} \times$ $\times \Gamma(\nu+1/2) (\sin \varphi)^{\nu+1/2} \times$ $\times (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi)^{-\nu-1/2} \times$ $\times \sin[(\nu+3/2)\alpha], \quad y = a \sin \varphi$ $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg} \psi \cos \varphi$
(13)	$x^{-1/2} \sin(ax^2),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3$	$-\frac{\pi^{1/2} y^{1/2}}{2a^{1/2}} \sin\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu+1}{4}\pi\right) \times$ $\times J_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right)$
(14)	$x^{1/2} \sin(ax^2),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -4$	$\frac{\pi^{1/2} y^{3/2}}{8a^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu\pi}{4}\right) J_{\nu/2-1/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right) - \right.$ $\left. - \sin\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu\pi}{4}\right) J_{\nu/2+1/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]$
(15)	$x^{\nu+1/2} \sin(ax^2),$ $a > 0, \quad -2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{y^{\nu+1/2}}{2^{\nu+1} a^{\nu+1}} \cos\left(\frac{y^2}{4a} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$
(16)	$x^{\nu+1/2} \sin(ax^2), \quad 0 < x < b$ $0, \quad b < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -2$	$(2a)^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times [\sin(ab^2) U_{\nu+1}(2ab^2, by) -$ $- \cos(ab^2) U_{\nu+2}(2ab^2, by)]$
(17)	$x^{-1} \exp(-ax^{1/2}) \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$i2^{-1/2} \pi^{-1/2} \times$ $\times \Gamma(\nu+1/2) D_{-\nu-1/2}(ay^{-1/2}) \times$ $\times [D_{-\nu-1/2}(ia y^{-1/2}) -$ $- D_{-\nu-1/2}(-ia y^{-1/2})]$
(18)	$x^{\nu+1/2} \sin[a(x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2$	$(\pi/2)^{1/2} a \beta^{\nu+3/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (a^2 - y^2)^{-\nu/2-3/4} \times$ $\times \{ \sin(\nu\pi) J_{\nu+3/2}[\beta(a^2 - y^2)^{1/2}] +$ $+ \cos(\nu\pi) Y_{\nu+3/2}[\beta(a^2 - y^2)^{1/2}] \},$ $0 < y < a$ $-(\pi/2)^{-1/2} a \beta^{\nu+3/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (y^2 - a^2)^{-\nu/2-3/4} \times$ $\times K_{\nu+3/2}[\beta(y^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(19)	$x^{-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0$ $\text{Re } \beta > 0, \quad \text{Re } \nu > -1$	$2^{-1} \pi y^{1/2} \times$ $\times J_{\nu/2} \{2^{-1} \beta [a - (a^2 - y^2)^{1/2}]\} \times$ $\times J_{-\nu/2} \{2^{-1} \beta [a + (a^2 - y^2)^{1/2}]\},$ $0 < y < a$
(20)	$x^{\nu+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [a (\beta^2 + x^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $\text{Re } \beta > 0, \quad -1 < \text{Re } \nu < 1/2$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} \beta^{1/2+\nu} \times$ $\times y^{1/2+\nu} (a^2 - y^2)^{-1/4-\nu/2} \times$ $\times J_{-\nu-1/2} [\beta (a^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(21)	$x^{\nu+1/2} (b^2 + x^2)^{-2} \times$ $\times \sin [a (x^2 + b^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $b > 0, \quad -1 < \text{Re } \nu < 7/2$	$ay^{1/2} b^{\nu} K_{\nu}(yb), \quad y > a$
(22)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [b (a^2 - x^2)^{1/2}],$ $0 < x < a$ $-x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-b (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$ $b > 0, \quad \text{Re } \nu > -1$	$2^{-1} \pi y^{1/2} \times$ $\times J_{\nu/2} \{2^{-1} a [(b^2 + y^2)^{1/2} - b]\} \times$ $\times Y_{\nu/2} \{2^{-1} a [(b^2 + y^2)^{1/2} + b]\}$
(23)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [b (a^2 - x^2)^{1/2}], \quad 0 < x < a$ $-x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-b (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$ $b > 0, \quad \text{Re } \nu > -1$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{\nu+1/2} \times$ $\times (b^2 + y^2)^{-\nu/2-1/4} y^{\nu+1/2}$ $\times Y_{\nu+1/2} [a (b^2 + y^2)^{1/2}]$
(24)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} \sin [b (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$ $b > 0, \quad \text{Re } \nu > 1/2$	$0, \quad 0 < y < b$ $2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{3/2-\nu} b y^{1/2-\nu} \times$ $\times (y^2 - b^2)^{\nu/2-3/4} \times$ $\times J_{\nu-3/2} [a (y^2 - b^2)^{1/2}],$ $b < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(25)	$\frac{x^{1/2-\nu} [(x^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta]^{\nu}}{(x^2 + \beta^2)^{1/2}} \times$ $\times \sin [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \nu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{\nu+1/2}}{[a + (a^2 - y^2)^{1/2}]^{\nu} (a^2 - y^2)^{1/2}} \times$ $\times \cos [\beta (a^2 - y^2)^{1/2} + 2^{-1} \pi \nu],$ $0 < y < a$ $y^{-1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-\beta (y^2 - a^2)^{1/2}] \times$ $\times \sin [\nu \arcsin (a/y)],$ $a < y < \infty$
(26)	$0, \quad 0 < x < c$ $x^{1/2-\nu} (x^2 + b^2)^{-1} \times$ $\times \sin [a (x^2 - c^2)^{1/2}],$ $c < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{-1} \pi y^{1/2} b^{-\nu} \exp [-a (c^2 + b^2)^{1/2}] \times$ $\times I_{\nu}(by),$ $0 < y < a$
<p>Относительно преобразований Ганкеля других функций, содержащих синус, см. таблицы синус-преобразований Фурье.</p>		
(27)	$x^{-3/2} \cos(ax), \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\nu^{-1} \cos(2^{-1} \nu \pi) y^{\nu+1/2} \times$ $\times [a + (a^2 - y^2)^{1/2}]^{-\nu},$ $0 < y \leq a$ $\nu^{-1} y^{1/2} \cos[\nu \arcsin(a/y)],$ $a < y < \infty$
(28)	$x^{\nu+1/2} \cos(ax),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2.$	$2^{1+\nu} \pi^{1/2} a [\Gamma(-1/2 - \nu)]^{-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times (a^2 - y^2)^{-\nu-3/2}, 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(29)	$x^{\nu-1/2} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-2^{\nu} \pi^{-1/2} \sin(\nu \pi) \Gamma(1/2 + \nu) \times$ $\times y^{\nu+1/2} (a^2 - y^2)^{-\nu-1/2}, 0 < y < a$ $2^{\nu} \pi^{-1/2} \Gamma(1/2 + \nu) y^{\nu+1/2} \times$ $\times (y^2 - a^2)^{-\nu-1/2}, a < y < \infty$
(30)	$x^{-\nu-1/2} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $\frac{\pi^{1/2} (y^2 - a^2)^{\nu-1/2}}{2^{\nu} y^{\nu-1/2} \Gamma(\nu + 1/2)},$ $a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{\nu-1} dx, y > 0$
(31)	$x^{-\nu-2n-1/2} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > 2n - 1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $(-1)^n y^{-\nu+2n+1/2} 2^{\nu-2n-1} \times$ $\quad \times \Gamma(\nu-2n) \times$ $\quad \times [\Gamma(2\nu-2n)]^{-1} (2n)! \times$ $\quad \times (y^2 - a^2)^{\nu-2n-1/2} C_{2n}^{\nu-2n} (ay^{-1}),$ $\quad \quad \quad a < y < \infty$
(32)	$x^{\mu-3/2} \cos(ax),$ $a > 0, -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$\frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu+\mu) \cos[2^{-1}\pi(\nu+\mu)]}{2^{\nu} a^{\nu+\mu} \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{y^2}{a^2}\right),$ $\quad \quad \quad 0 < y < a$ $\frac{2^{\mu-1} y^{1/2-\mu} \Gamma(\nu/2+\mu/2)}{\Gamma(1+\nu/2-\mu/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\mu-\nu}{2}; \frac{1}{2}, \frac{a^2}{y^2}\right),$ $\quad \quad \quad a < y < \infty$
(33)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\beta^{\nu} \operatorname{ch}(a\beta) y^{1/2} K_{\nu}(\beta y),$ $\quad \quad \quad y \geq a$
(34)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1} \cos(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{-1} \pi \beta^{-\nu-1} e^{-a\beta} y^{1/2} I_{\nu}(\beta y),$ $\quad \quad \quad 0 < y \leq a$
(35)	$x^{-3/2} e^{-xa} \cos \varphi \cos \psi \times$ $\quad \times \cos(xa \sin \psi), \quad a > 0$ $0 < \varphi, \psi < \pi/2, \operatorname{Re} \nu > 0$	$a^{1/2} \nu^{-1} (\sin \varphi)^{1/2} (\operatorname{tg} \varphi/2)^{\nu} \cos(\nu \psi),$ $\quad \quad \quad y = a \sin \varphi$
(36)	$x^{\nu+1/2} e^{-xa} \cos \varphi \cos \psi \times$ $\quad \times \cos(xa \sin \psi), \quad a > 0$ $0 < \varphi, \psi < \pi/2, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu+1} \pi^{-1/2} \Gamma(\nu+3/2) \times$ $\quad \times a^{-\nu-3/2} (\sin \varphi)^{\nu+1/2} \times$ $\quad \times (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi)^{-\nu-3/2} \times$ $\quad \times \cos[(\nu+3/2)\alpha], \quad y = a \sin \varphi$ $\quad \quad \quad \operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg} \psi \cos \varphi$
(37)	$x^{\nu-1/2} e^{-xa} \cos \varphi \cos \psi \times$ $\quad \times \cos(xa \sin \psi), \quad a > 0$ $0 < \varphi, \psi < \pi/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu} \pi^{-1/2} a^{-\nu-1/2} \Gamma(\nu+1/2) \times$ $\quad \times (\sin \varphi)^{\nu+1/2} \times$ $\quad \times (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi)^{-\nu-1/2} \times$ $\quad \times \cos[(\nu+1/2)\alpha], \quad y = a \sin \varphi$ $\quad \quad \quad \operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg} \psi \cos \varphi$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(38)	$x^{-1/2} \cos(ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi^{1/2} y^{1/2}}{2a^{1/2}} \cos\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu+1}{4} \pi\right) \times$ $\times J_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right)$
(39)	$x^{1/2} \cos(ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -2$	$\frac{\pi^{1/2} y^{3/2}}{8a^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu\pi}{4}\right) \times \right.$ $\times J_{\nu/2+1/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right) +$ $\left. + \sin\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu\pi}{4}\right) J_{\nu/2-1/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]$
(40)	$x^{\nu+1/2} \cos(ax^2), \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{y^{\nu+1/2}}{2^{\nu+1} a^{\nu+1}} \sin\left(\frac{y^2}{4a} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$
(41)	$x^{\nu+1/2} \cos(ax^2), \quad 0 < x < b$ $0, \quad b < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$(2a)^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times [\sin(ab^2) U_{\nu+2}(2ab^2, by) +$ $+ \cos(ab^2) U_{\nu+1}(2ab^2, by)]$
(42)	$x^{-1} \exp[-ax^{1/2}] \cos(ax^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\Gamma(\nu+1/2) D_{-\nu-1/2}(ay^{-1/2})}{2^{1/2} \pi^{1/2}} \times$ $\times \left[D_{-\nu-1/2}\left(\frac{ia}{y^{1/2}}\right) + \right.$ $\left. + D_{-\nu-1/2}\left(-\frac{ia}{y^{1/2}}\right) \right]$
(43)	$x^{\nu+1/2} \cos[a(x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2$	$(\pi/2)^{1/2} a \beta^{\nu+3/2} y^{\nu+1/2} \times$ $\times (a^2 - y^2)^{-\nu/2-3/4} \times$ $\times \{ \cos(\pi\nu) J_{\nu+3/2}[\beta(a^2 - y^2)^{1/2}] -$ $- \sin(\pi\nu) Y_{\nu+3/2}[\beta(a^2 - y^2)^{1/2}] \},$ $0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(44)	$x^{-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[a(x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-1} \pi y^{1/2} \times$ $\times J_{\nu/2} \{ 2^{-1} \beta [a - (a^2 - y^2)^{1/2}] \} \times$ $\times Y_{-\nu/2} \{ 2^{-1} \beta [a + (a^2 - y^2)^{1/2}] \},$ $0 < y < a$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(45)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\frac{\pi^{1/2} \beta^{1/2 + \nu} y^{1/2 + \nu}}{2^{1/2} (a^2 - y^2)^{1/4 + \nu/2}} \times$ $\times Y_{-\nu-1/2} [\beta (a^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < a$ $2^{1/2} \pi^{-1/2} \beta^{1/2 + \nu} y^{1/2 + \nu} (y^2 - a^2)^{-1/4 - \nu/2} \times$ $\times K_{\nu+1/2} [\beta (y^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < y < \infty$
(46)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + b^2)^{-5/2} \times$ $\times \cos [a (x^2 + b^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $b > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$y^{1/2} b^{\nu} K_{\nu}(by), \quad y > a$
(47)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \cos [b (a^2 - x^2)^{1/2}],$ $0, \quad \begin{array}{l} 0 < x < a \\ a < x < \infty \\ \operatorname{Re} \nu > -1 \end{array}$	$2^{-1} \pi y^{1/2} \times$ $\times J_{\nu/2} \{2^{-1} a [(b^2 + y^2)^{1/2} - b]\} \times$ $\times J_{\nu/2} \{2^{-1} a [(b^2 + y^2)^{1/2} + b]\}$
(48)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [b (a^2 - x^2)^{1/2}], \quad 0 < x < a$ $0, \quad \begin{array}{l} a < x < \infty \\ \operatorname{Re} \nu > -1 \end{array}$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{\nu+1/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (b^2 + y^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times J_{\nu+1/2} [a (b^2 + y^2)^{1/2}]$
(49)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [b (x^2 - a^2)^{1/2}], \quad a < x < \infty$ $b > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$0, \quad 0 < y < b$ $2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{1/2-\nu} \times$ $\times y^{1/2-\nu} (y^2 - b^2)^{\nu/2-1/4} \times$ $\times J_{\nu-1/2} [a (y^2 - b^2)^{1/2}], \quad b < y < \infty$
(50)	$x^{1/2-\nu} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta]^{\nu} \times$ $\times \cos [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$-y^{\nu+1/2} [a + (a^2 - y^2)^{1/2}]^{-\nu} \times$ $\times (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [\beta (a^2 - y^2)^{1/2} + 2^{-1} \pi \nu],$ $0 < y < a$ $y^{-1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-\beta (y^2 - a^2)^{1/2}] \times$ $\times \cos [\nu \arcsin (a/y)],$ $a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(51)	$0, \quad 0 < x < c$ $x^{1/2-\nu} (x^2 + b^2)^{-1} (x^2 - c^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [a(x^2 - c^2)^{1/2}], \quad c < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -5/2$	$2^{-1} \pi y^{1/2} b^{-\nu} (c^2 + b^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-a(c^2 + b^2)^{1/2}] I_{\nu}(by),$ $0 < y < a$
<p>Относительно преобразований Ганкеля других функций, содержащих косинус, см. таблицы косинус-преобразований Фурье.</p>		
(52)	$x^{-1/2} (1 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[(\nu - 1) \arccos x],$ $0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\pi^{1/2} \sin(y/2) J_{\nu-1/2}(y/2)$
(53)	$x^{-1/2} (1 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[(\nu + 1) \arccos x],$ $0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi^{1/2} \cos(y/2) J_{\nu+1/2}(y/2)$
(54)	$x^{-1/2} (1 - x^2)^{-1/2} \cos(\mu \arccos x),$ $0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$2^{-1} \pi y^{1/2} J_{(\mu+\nu)/2}(y/2) J_{(\nu-\mu)/2}(y/2)$
(55)	$0, \quad 0 < x < 1$ $x^{1/2} (x^2 - 1)^{-1/2} \cos(\nu \arccos x^{-1}),$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{-1/2} \cos(y - 2^{-1} \nu \pi)$

8.8. Гиперболические и обратные гиперболические функции

(1)	$\frac{2x^{\nu-1/2}}{e^{\pi x} - 1},$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 1/2) y^{\nu+1/2} \times$ $\times \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \pi^2 + y^2)^{-\nu-1/2}$
(2)	$x^{1/2} \frac{x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}(2x) + 2x}$	<p>Относительно этого и подобных интегралов см. Voit M. A., 1935: J. Appl. Phys. 6, 337-375.</p>

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(3)	$\frac{x^{\nu+1/2} \operatorname{sh}(\alpha x)}{\operatorname{sh}(\pi x)},$ $ \operatorname{Re} \alpha < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$2\pi^{-1} y^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\nu+1} \sin(n\alpha) \times$ $\times K_{\nu}(ny)$
Относительно других подобных интегралов см. Weber H., 1873: J. of Math. 75, 75-105.		
(4)	$x^{-1/2} (1+x^2)^{-1/2} \operatorname{sh}(2\mu \operatorname{arsh} x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} \mu < 3/4$	$2^{-1} y^{1/2} [I_{\nu/2-\mu}(y/2) K_{\nu/2+\mu}(y/2) -$ $- I_{\nu/2+\mu}(y/2) K_{\nu/2-\mu}(y/2)]$
(5)	$x^{-1/2} (1+x^2)^{-1/2} \operatorname{ch}(2\mu \operatorname{arsh} x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} \mu < 3/4$	$2^{-1} y^{1/2} [I_{\nu/2-\mu}(y/2) K_{\nu/2+\mu}(y/2) +$ $+ I_{\nu/2+\mu}(y/2) K_{\nu/2-\mu}(y/2)]$
(6)	$0, \quad 0 < x < 1$ $x^{-1/2} (x^2-1)^{-1/2} \times$ $\times \operatorname{ch}[(\nu-1) \operatorname{arch} x],$ $1 < x < \infty$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$2^{-1} \pi^{1/2} [\cos(y/2) J_{\nu-1/2}(y/2)] -$ $- \sin(y/2) Y_{\nu-1/2}(y/2)]$
(7)	$0, \quad 0 < x < 1$ $x^{-1/2} (x^2-1)^{-1/2} \times$ $\times \operatorname{ch}[(\nu+1) \operatorname{arch} x],$ $1 < x < \infty$ $-5/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-2^{-1} \pi^{1/2} [\sin(y/2) J_{\nu+1/2}(y/2) +$ $+ \cos(y/2) Y_{\nu+1/2}(y/2)]$
(8)	$0, \quad 0 < x < 1$ $x^{-1/2} (x^2-1)^{-1/2} \operatorname{ch}(\mu \operatorname{arch} x),$ $1 < x < \infty$ $ \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$-2^{-2} \pi y^{1/2} \times$ $\times [J_{(\nu+\mu)/2}(y/2) Y_{(\nu-\mu)/2}(y/2) +$ $+ J_{(\nu-\mu)/2}(y/2) Y_{(\nu+\mu)/2}(y/2)]$

8.9. Ортогональные многочлены

(1)	$x^{-1/2} (1-x^2)^{-1/2} T_n(x), \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -n-1$	$2^{-1} \pi y^{1/2} \times$ $\times J_{(\nu+n)/2}(y/2) J_{(\nu-n)/2}(y/2)$
(2)	$x^{\nu+1/2} \exp(-x^2) L_n^{\nu}(x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-2n-\nu-1} (n!)^{-1} y^{2n+\nu+1/2} \times$ $\times \exp(-y^2/4)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(3)	$x^{\nu+1/2} \exp(-x^2/2) L_n^{\nu}(x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$(-1)^n \exp(-y^2/2) y^{\nu+1/2} L_n^{\nu}(y^2)$
(4)	$x^{2n+\nu+1/2} \exp(-x^2/2) \times$ $\times L_n^{\nu+n}(x^2/2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{2n+\nu+1/2} \exp(-y^2/2) L_n^{\nu+n}(y^2/2)$
(5)	$x^{\nu+1/2} \exp(-\beta x^2) L_n^{\nu}(\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$2^{-\nu-1} \beta^{-\nu-n-1} (\beta - \alpha)^n y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\beta}\right) L_n^{\nu}\left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha-\beta)}\right]$
(6)	$x^{\nu+1/2} \exp(-\alpha x^2) [L_n^{\nu/2}(\alpha x^2)]^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(2\alpha)^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right) \left[L_n^{\nu/2}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)\right]^2$
(7)	$x^{\nu+1/2} \exp(-\beta x^2) [L_n^{\nu/2}(\alpha x^2)]^2,$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{1/2+\nu}}{\pi n!} \Gamma(n+1+\nu/2) (2\beta)^{-\nu-1} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\beta}\right) \times$ $\times \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l \Gamma(n-l+1/2) \Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+1+\nu/2) (n-l)!} \times$ $\times \left(\frac{2\alpha-\beta}{\beta}\right)^{2l} L_{2l}^{\nu}\left[\frac{\alpha y^2}{2\beta(2\alpha-\beta)}\right]$
(8)	$x^{\nu+1/2} \exp(-\alpha x^2) L_m^{\nu-\sigma}(\alpha x^2) \times$ $\times L_n^{\sigma}(\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(-1)^{m+n} (2\alpha)^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right) L_n^{\sigma-m+n}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) \times$ $\times L_m^{\nu-\sigma+m-n}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(9)	$x^{\nu+1/2} \exp(-x^2) L_n^{\sigma}(x^2) L_n^{\nu-\sigma}(x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \exp(-y^2/4) \times$ $\times L_n^{\sigma}(y^2/4) L_n^{\nu-\sigma}(y^2/4)$
(10)	0, $0 < x < a$ $x^{2n+1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\nu-2n-1/2} \times$ $\times C_{2n}^{\nu-2n}(a/x), \quad a < x < \infty$ $2n - 1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2n + 1/2$	$(-1)^n 2^{2n-\nu+1} \Gamma(2\nu - 2n) \times$ $\times [(2n)! \Gamma(\nu - 2n)]^{-1} \times$ $\times y^{-\nu+2n-1/2} \cos(\alpha y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(11)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{2\nu-\nu+3/2} (x^2 - a^2)^{\nu-2n-3/2} \times$ $\times C_{2n+1}^{\nu-2n-1} (a/x), \quad a < x < \infty$ $2n + 1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2n + 3/2$	$(-1)^n 2^{2n-\nu+2} \Gamma(2\nu - 2n - 1) \times$ $\times [(2n + 1)! \Gamma(\nu - 2n - 1)]^{-1} \times$ $\times y^{-\nu+2n+1/2} \sin(ay)$
(12)	$x^{\nu+1/2} (1 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin[\alpha(1 - x^2)^{1/2}] \times$ $\times C_{2n+1}^{\nu+1/2} [(1 - x^2)^{1/2}], \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(-1)^n 2^{-1/2} \pi^{1/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times C_{2n+1}^{\nu+1/2} [\alpha(y^2 + \alpha^2)^{-1/2}] \times$ $\times J_{\nu+3/2+2n} [(\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(13)	$x^{\nu+1/2} (1 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[\alpha(1 - x^2)^{1/2}] \times$ $\times C_{2n}^{\nu+1/2} [(1 - x^2)^{1/2}], \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(-1)^n 2^{-1/2} \pi^{1/2} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times C_{2n}^{\nu+1/2} [\alpha(y^2 + \alpha^2)^{-1/2}] \times$ $\times J_{\nu+1/2+2n} [(\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$

8.10. Функции Лежандра

(1)	$(x^2 + 2)^{-\nu/2-1/4} P_{\mu}^{-\nu-1/2} (x^2 + 1),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$ $-3/2 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu + 1/2$	$\frac{2^{1/2-\nu} \pi^{-1/2} [K_{\mu+1/2} (2^{-1/2}y)]^2}{\Gamma(\nu + \mu + 3/2) \Gamma(\nu - \mu + 1/2)}$
(2)	$0, \quad 0 < x < a$ $(x^2 - a^2)^{\mu/2-1/4} P_{-1/2+\nu}^{1/2-\mu} (ax^{-1}),$ $a < x < \infty$ $ \operatorname{Re} \mu < 1/2, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{1/2} \pi^{-1/2} y^{-\mu-1/2} \times$ $\times \cos[ay + 2^{-1}(\nu - \mu)\pi]$
(3)	$x^{\nu-1/2} (1 - x^2)^{\nu/2+1/4} \times$ $\times P_{\mu}^{-\nu-1/2} (2x^{-2} - 1), \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $-3/2 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu + 1/2$	$\frac{\Gamma(\nu/2 + \mu + \nu) \Gamma(\nu/2 + \nu - \mu) (2y)^{\nu+1/2}}{(2\pi)^{1/2} [\Gamma(\nu/2 + \nu)]^2} \times$ $\times {}_1F_1(\nu + \mu + 3/2; 2\nu + 2; iy) \times$ $\times {}_1F_1(\nu + \mu + 3/2; 2\nu + 2; -iy)$
(4)	$x^{1/2} (\alpha^2 + x^2)^{-\mu/2} \times$ $\times P_{\mu-1}^{-\nu} [\alpha(\alpha^2 + x^2)^{-1/2}], \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} \mu > 1/2$	$\frac{y^{\mu-3/2} e^{-\alpha y}}{\Gamma(\mu + \nu)}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(5)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{\nu/2} \times$ $\times P_{\nu} \left[\frac{x^2 + 2\alpha^2}{2\alpha (x^2 + \alpha^2)^{1/2}} \right],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$\frac{(2\alpha)^{\nu+1/2} y^{-\nu-1/2}}{\pi \Gamma(-\nu)} [K_{\nu+1/2}(2^{-1}\alpha y)]^2$
(6)	$x^{1/2-\nu} (x^2 + \alpha^2)^{-\nu/2} \times$ $\times P_{\nu-1} \left[\frac{x^2 + 2\alpha^2}{2\alpha (x^2 + \alpha^2)^{1/2}} \right],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{(2\alpha)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} y^{\nu-1/2} I_{\nu-1/2}(2^{-1}\alpha y) \times$ $\times K_{\nu-1/2}(2^{-1}\alpha y)$
(7)	$x^{1/2} \{P_{\mu}^{-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}]\}^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-3/4 < \operatorname{Re} \mu < -1/4, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{2 [K_{\mu+1/2}(2^{-1}\alpha^{-1}y)]^2}{\pi \alpha \Gamma(1 + \mu + \nu/2) \Gamma(\nu/2 - \mu) y^{1/2}}$
(8)	$x^{1/2} (1 + \alpha^2 x^2)^{-1/2} \times$ $\times P_{\mu}^{-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}] \times$ $\times P_{\mu+1}^{-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-7/4 < \operatorname{Re} \mu < -1/4$	$\frac{y^{1/2} K_{\mu+1/2}(2^{-1}\alpha^{-1}y) K_{\mu+3/2}(2^{-1}\alpha^{-1}y)}{\pi \alpha^2 \Gamma'(2 + \nu/2 + \mu) \Gamma'(\nu/2 - \mu)}$
(9)	$x^{1/2} (1 + \alpha^2 x^2)^{-1/2} \times$ $\times P_{\mu}^{-1/2-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}] \times$ $\times P_{\mu}^{1/2-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-5/4 < \operatorname{Re} \mu < 1/4$	$\frac{y^{1/2} [K_{\mu+1/2}(2^{-1}\alpha^{-1}y)]^2}{\pi \alpha^2 \Gamma(\nu/2 + \mu + 3/2) \Gamma'(\nu/2 - \mu + 1/2)}$
(10)	$Q_{\nu-1/2}[(a^2 + x^2) x^{-1}],$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{-1/2} \pi y^{-1/2} \exp[-(a^2 - 1/4)^{1/2} y] \times$ $\times J_{\nu}(y/2)$
(11)	$x^{1/2-\mu} (1 + \alpha^2 x^2)^{-\mu/2-1/4} \times$ $\times Q_{\nu-1/2}^{\mu+1/2}(\pm i\alpha x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-3/4 - 2^{-1} \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu <$ $< 1 + \operatorname{Re} \nu$	$i (2\pi)^{1/2} e^{i\pi(\mu \mp \nu/2 \mp 1/4)} \alpha^{-1} y^{\mu-1/2} \times$ $\times I_{\nu}(2^{-1}\alpha^{-1}y) K_{\mu}(2^{-1}\alpha^{-1}y)$
(12)	$(x^2 + 2)^{-\nu/2-1/4} Q_{\mu}^{\nu+1/2}(x^2 + 1),$ $\operatorname{Re} \nu > -1,$ $\operatorname{Re}(2\mu + \nu) > -5/2$	$2^{-\nu-1/2} \pi^{1/2} e^{(\nu+1/2)\pi i} y^{\nu+1/2} \times$ $\times K_{\mu+1/2}(2^{-1/2}y) I_{\mu+1/2}(2^{-1/2}y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(13)	$x^{-\nu-1/2} Q_{-1/2}^{\nu-1/2} (1 + 2\alpha^2/x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, 0 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$-ie^{i\pi\nu} \pi^{1/2} 2^{-\nu} (y/\alpha)^{\nu-1/2} \times$ $\times I_{\nu-1/2} (2^{-1}\alpha y) K_{\nu-1/2} (2^{-1}\alpha y)$
(14)	$x^{\nu-1/2} (\alpha^2 + x^2)^{1/4+\nu/2} \times$ $\times Q_{\mu}^{\nu+1/2} (1 + 2\alpha^2/x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} (\mu + \nu) > -3/2$ $\operatorname{Re} (\nu - \mu) > -1/2$	$-ie^{i\pi\nu} \pi^{-1/2} 2^{\nu} [\Gamma(3/2 + \mu + \nu)]^2 \times$ $\times \Gamma(1/2 + \nu - \mu) \alpha^{\nu-1/2} y^{-\nu-3/2} \times$ $\times W_{-\mu-1/2, \nu+1/2}(\alpha y) \times$ $\times \left[\frac{\cos(\mu\pi)}{\Gamma(2+2\nu)} M_{\mu+1/2, \nu+1/2}(\alpha y) + \right.$ $\left. + \frac{\sin(\pi\nu)}{\Gamma(\nu+\mu+3/2)} W_{\mu+1/2, \nu+1/2}(\alpha y) \right]$
(15)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{1/4-\nu/2} \times$ $\times Q_{\mu}^{1/2-\nu} (1 + 2\alpha^2/x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu + 3/2$	$\frac{ie^{-i\nu\pi} \pi^{1/2} \Gamma(3/2 + \mu - \nu)}{2^{\nu} \alpha^{\nu+1/2} \Gamma(2\nu)} y^{-\nu-3/2} \times$ $\times M_{\mu+1/2, \nu-1/2}(\alpha y) \times$ $\times W_{-\mu-1/2, \nu-1/2}(\alpha y)$
(16)	$x^{1/2} P_{\mu}^{-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\mu}^{-\nu/2} [(1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \mu > -3/4, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\exp(-2^{-1}\nu\pi i) \Gamma(1 + \mu + \nu/2)}{\alpha \Gamma(1 + \mu - \nu/2) y^{1/2}} \times$ $\times I_{\mu+1/2} \left(\frac{y}{2\alpha} \right) K_{\mu+1/2} \left(\frac{y}{2\alpha} \right)$

8.11. Функции Бесселя аргумента kx

(1)	$x^{-1/2} J_{\nu-1}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$0,$ $a^{\nu-1} y^{-\nu+1/2},$	$0 < y < a$ $a < y < \infty$
(2)	$x^{-3/2} J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$2^{-1} \nu^{-1} a^{-\nu} y^{\nu+1/2},$ $2^{-1} \nu^{-1} a^{\nu} y^{-\nu+1/2},$	$0 < y \leq a$ $a \leq y < \infty$
(3)	$x^{-1/2} J_{\nu+1}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$a^{-\nu-1} y^{\nu+1/2},$ $0,$	$0 < y < a$ $a < y < \infty$
(4)	$x^{-2\lambda-1/2} J_{\nu}(ax),$ $\operatorname{Re} \nu + 1/2 > \operatorname{Re} \lambda > -1/2$ $a > 0$	$\frac{a^{\nu} y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu - \lambda + 1/2)}{2^{2\lambda} (a+y)^{2\nu-2\lambda+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma(\lambda+1/2)} \times$ $\times {}_2F_1 \left[\nu - \lambda + \frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}; \right.$ $\left. 2\nu + 1; \frac{4ay}{(a+y)^2} \right]$	

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(5)	$x^{-1/2} J_{\nu+2n+1}(ax)$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1 - n$	$y^{\nu+1/2} a^{-\nu-1} P_n^{(\nu, 0)}(1 - 2y^2/a^2),$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(6)	$x^{-1/2} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$y^{\nu+1/2} a^{-\nu-1} \frac{\Gamma(\mu/2 + \nu/2 + 1/2)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\mu/2 - \nu/2 + 1/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{y^2}{a^2}\right),$ $0 < y < a$ При $y > a$ переставить места μ и ν .
(7)	$x^{\nu-\mu+1/2} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu$	$\frac{2^{\nu-\mu+1} y^{\nu+1/2}}{\Gamma(\mu-\nu) a^{\mu}} (a^2 - y^2)^{\mu-\nu-1},$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(8)	$x^{\lambda-\nu+1/2} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1$	$0,$ $0 < y < a$ $\frac{2^{\mu-\nu+1} a^{\mu}}{\Gamma(\nu-\mu) y^{\nu-1/2}} (y^2 - a^2)^{\nu-\mu-1},$ $a < y < \infty$
(9)	$x^{-\lambda-1/2} J_{\mu}(ax),$ $a > 0$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) + 1 > \operatorname{Re} \lambda > -1$	$\frac{\Gamma[2^{-1}(\mu + \nu - \lambda + 1)] a^{\lambda-\nu-1} y^{\nu+1/2}}{2^{\lambda} \Gamma(\nu+1) \Gamma[2^{-1}(\lambda + \mu - \nu + 1)]} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu - \lambda + 1}{2}, \frac{\nu - \lambda - \mu + 1}{2}; \nu + 1; \frac{y^2}{a^2}\right),$ $0 < y < a$ $\frac{\Gamma[2^{-1}(\mu + \nu - \lambda + 1)] a^{\mu} y^{\lambda-\mu-1/2}}{2^{\lambda} \Gamma(\mu+1) \Gamma[2^{-1}(\lambda + \nu - \mu + 1)]} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu - \lambda + 1}{2}, \frac{\mu - \lambda - \nu + 1}{2}; \mu + 1; \frac{a^2}{y^2}\right),$ $a < y < \infty$
(10)	$x^{1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1} J_{\nu}(ax),$ $a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{1/2} I_{\nu}(y\beta) K_{\nu}(a\beta), \quad 0 < y < a$ $y^{1/2} I_{\nu}(a\beta) K_{\nu}(y\beta), \quad a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(11)	$x^{1/2-2n} (\beta^2 + x^2)^{-1} J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $\operatorname{Re} \nu > n - 1, n = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^n \beta^{-2n} y^{1/2} I_{\nu}(y\beta) K_{\nu}(a\beta),$ $0 < y < a$ $(-1)^n \beta^{-2n} y^{1/2} I_{\nu}(a\beta) K_{\nu}(y\beta),$ $a < y < \infty$
(12)	$x^{\nu-\mu+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $1 + \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu > -1$	$\beta^{\nu-\mu} y^{1/2} I_{\mu}(a\beta) K_{\nu}(y\beta),$ $a < y < \infty$
(13)	$x^{\nu-\mu+2n+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $\operatorname{Re} \mu - 2n + 1 > \operatorname{Re} \nu > -n - 1$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^n \beta^{\nu-\mu+2n} y^{1/2} I_{\mu}(a\beta) K_{\nu}(y\beta),$ $a < y < \infty$
(14)	$x^{\mu-\nu+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $1 + \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1$	$y^{1/2} \beta^{\mu-\nu} I_{\nu}(y\beta) K_{\mu}(a\beta),$ $0 < y < a$
(15)	$x^{\mu-\nu+2n+1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1} J_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $\operatorname{Re} \nu - 2n + 1 > \operatorname{Re} \mu > -n - 1$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^n \beta^{\mu-\nu+2n} y^{1/2} I_{\nu}(y\beta) K_{\mu}(a\beta),$ $0 < y < a$
(16)	$x^{1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1} J_{\nu-2n}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $\operatorname{Re} \nu > n - 1$	$(-1)^n y^{1/2} I_{\nu}(y\beta) K_{\nu-2n}(a\beta),$ $0 < y < a$
(17)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x} J_{\nu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Im} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1} \beta^{-1/2} Q_{\nu-1/2} \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + y^2}{2\beta y} \right)$
(18)	$x^{\mu-3/2} e^{-\alpha x} J_{\nu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Im} \beta , \operatorname{Re}(\mu + 2\nu) > 0$	$\frac{\beta^{\nu} y^{\nu+1/2} \Gamma(\mu + 2\nu)}{\pi \alpha^{\mu+2\nu} \Gamma(2\nu+1)} \times$ $\times \int_0^{\pi} {}_2F_1 \left(\frac{\mu}{2} + \nu, \frac{\mu+1}{2} + \nu; \right.$ $\left. \nu + 1; -\frac{u^2}{\alpha^2} \right) (\sin \varphi)^{2\nu} d\varphi,$ $u^2 = \beta^2 + y^2 - 2\beta y \cos \varphi$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(19)	$x^{-1} e^{-\alpha x \cos \varphi \cos \psi} J_{\mu}(\alpha x \sin \varphi),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1/2$	$\Gamma(\mu + \nu + 1/2) (\sin \psi)^{1/2} \times$ $\times P_{\nu-1/2}^{-\mu}(\cos \varphi) P_{\mu-1/2}^{-\nu}(\cos \psi),$ $y = a \sin \psi$
(20)	$x^{-1/2} e^{-\beta x} J_{\mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Im} \alpha $ $\operatorname{Re}(\mu + \nu + 1) > 0$	$2\pi^{-1} \alpha^{\mu} \beta y^{\nu+1/2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2\beta}{\cos \theta}\right)^{\mu+\nu} \times$ $\times \left(\frac{\beta^2}{\cos^2 \theta} + y^2 - \alpha^2 + u\right)^{-\mu} \times$ $\times \left(\frac{\beta^2}{\cos^2 \theta} + \alpha^2 - y^2 + u\right)^{-\nu} \times$ $\times \frac{\cos[(\mu - \nu)\theta]}{u \cos^2 \theta} d\theta,$ $u^2 = \left(\frac{\beta^2}{\cos^2 \theta} + \alpha^2 + y^2\right)^2 - 4\alpha^2 y^2$
(21)	$x^{\mu-\nu-1/2} e^{-\alpha x} J_{\mu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Im} \beta , \operatorname{Re} \mu > -1/2$	$\frac{\beta^{\mu} y^{\nu+1/2} \Gamma(\mu + 1/2)}{2^{\nu-\mu} \pi \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\pi} (\sin \varphi)^{2\nu} \times$ $\times [(\alpha + iy \cos \varphi)^2 + \beta^2]^{-\mu-1/2} d\varphi$
(22)	$x^{\lambda-3/2} e^{-\alpha x} J_{\mu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Im} \beta > 0$ $\operatorname{Re}(\lambda + \mu + \nu) > 0$	$\frac{\beta^{\mu} y^{\nu+1/2}}{2^{\lambda+\nu} \Gamma(\nu+1) \alpha^{\mu+\nu+\lambda}} \times$ $\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \mu + \nu + 2m)}{m! \Gamma(\mu + m + 1)} \left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)^m \times$ $\times {}_2F_1(-m, -\mu - m; \nu + 1; y^2 \beta^{-2})$
(23)	$x^{1/2} \exp(-\beta x^2) J_{\nu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{1/2}}{2\beta} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + y^2}{4\beta}\right) I_{\nu}\left(\frac{\alpha y}{2\beta}\right)$
(24)	$x^{\lambda+1/2} \exp(-\alpha x^2) J_{\mu}(\beta x), \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu + \lambda) > -2$	$y^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m + \nu/2 + \mu/2 + \lambda/2)}{m! \Gamma(m + \mu + 1)} \times$ $\times \left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^m {}_2F_1(-m, -\mu - m;$ $\nu + 1, y^2 \beta^{-2})$
(25)	$x^{\lambda} J_{\mu}(\alpha x) \frac{\cos(\beta x)}{\sin(\beta x)}$	См. в главах I и II.

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(26)	$x^{1/2} \sin(ax^2) J_{\nu}(bx),$ $a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -2$	$\frac{y^{1/2}}{2a} \cos\left(\frac{y^2 + b^2}{4a} - \frac{\nu\pi}{2}\right) J_{\nu}\left(\frac{by}{2a}\right)$
(27)	$x^{1/2} \cos(ax^2) J_{\nu}(bx),$ $a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{1/2}}{2a} \sin\left(\frac{b^2 + y^2}{4a} - \frac{\nu\pi}{2}\right) J_{\nu}\left(\frac{by}{2a}\right)$
(28)	$x^{-1/2} [J_0(2^{-1}ax)]^2,$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{-1/2} \left\{ P_{\nu/2-1/2} \left[(1 - a^2/y^2)^{1/2} \right] \right\}^2,$ $a < y < \infty$
(29)	$x^{1/2} [J_{\nu/2}(2^{-1}ax)]^2,$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2\tau^{-1} y^{-1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2}, \quad 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(30)	$x^{1/2-\nu} [J_{\nu}(2^{-1}ax)]^2,$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{2^{1-\nu} y^{\nu-1/2} (a^2 - y^2)^{\nu-1/2}}{\pi^{1/2} a^{2\nu} \Gamma(\nu + 1/2)}, \quad 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(31)	$x^{1/2-\nu} J_{\nu}(ax) J_{\nu}(bx),$ $a, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{[y^2 - (a-b)^2]^{\nu-1/2} [(a+b)^2 - y^2]^{\nu-1/2}}{y^{\nu-1/2} 2^{2\nu-1} \pi^{1/2} (ab)^{\nu} \Gamma(\nu + 1/2)},$ $ a-b < y < a+b$ $0,$ $0 < y < a-b $ или $a+b < y < \infty$
(32)	$x^{1/2} J_{(\nu+n)/2}(ax/2) J_{(\nu-n)/2}(ax/2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2\pi^{-1} y^{-1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} T_n(a^{-1}y),$ $0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(33)	$x^{-1/2} J_{\mu}^2(ax/2), \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \nu + \operatorname{Re} 2\mu > -1$	$(a/2)^{2\mu} y^{-2\mu-1/2} \times$ $\times \frac{\Gamma(1/2 + \nu/2 + \mu)}{[\Gamma(\mu + 1)]^2 \Gamma(1/2 + \nu/2 - \mu)} \times$ $\times \{ {}_2F_1 [1/2 - \nu/2 + \mu, 1/2 + \nu/2 + \mu;$ $\mu + 1; 2^{-1} (1 - (1 - a^2 y^{-2})^{1/2})] \}^2,$ $a < y < \infty$
(34)	$x^{1/2-\mu} J_{\mu}(ax) J_{\nu}(bx),$ $a, b > 0$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > -1/2$	$\frac{y^{\mu-1/2} (\operatorname{sh} u)^{\mu-1/2}}{(2^{-1} \pi^3)^{1/2} a^{\mu} b^{1-\mu}} e^{(\mu-1/2)\pi i} \times$ $\times \sin[(\nu - \mu)\pi] Q_{\nu-1/2}^{\mu-1/2}(\operatorname{ch} u),$ $0 < y < a-b$ $\frac{b^{\mu-1} y^{\mu-1/2}}{(2\pi)^{1/2} a^{\mu}} (\sin v)^{\mu-1/2} P_{\nu-1/2}^{\mu-1/2}(\cos v),$ $ a-b < y < a+b$ $0,$ $0 < y < b-a$ или $a+b < y < \infty$ $2by \operatorname{ch} u = a^2 - b^2 - y^2$ $2by \cos v = b^2 + y^2 - a^2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(35)	$x^{1/2-\nu} J_{\mu}(ax) J_{\mu}(bx),$ $a, b > 0$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$0, \quad 0 < y < a-b $ $\frac{(ab)^{\nu-1}}{(2\pi)^{1/2} y^{\nu-1/2}} (\sin u)^{\nu-1/2} P_{\mu-1/2}^{1/2-\nu}(\cos u),$ $ a-b < y < a+b$ $\frac{(ab)^{\nu-1} (\operatorname{sh} v)^{\nu-1/2}}{(2^{-1}\pi^3)^{1/2} y^{\nu-1/2}} e^{(\nu-1/2)\pi i} \times$ $\times \sin [(\mu-\nu)\pi] Q_{\mu-1/2}^{1/2-\nu}(\operatorname{ch} v),$ $a+b < y < \infty$ $2ab \cos u = a^2 + b^2 - y^2$ $2ab \operatorname{ch} v = y^2 - a^2 - b^2$
(36)	$x^{\rho-\mu-\nu+1/2} J_{\mu}(ax) J_{\rho}(bx),$ $b > a > 0$ $\operatorname{Re} \rho > -1, \operatorname{Re}(\rho-\mu-\nu) < 1/2$	$0, \quad 0 < y < b-a$
(37)	$x^{\rho-\mu-\nu-3/2} J_{\mu}(ax) J_{\rho}(bx),$ $b > a > 0$ $\operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\rho-\mu-\nu) > 5/2$	$\frac{2^{\rho-\mu-\nu-1} y^{\nu+1/2} a^{\mu} \Gamma(\rho)}{b^{\rho} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)},$ $0 < y < b-a$
(38)	$x^{-1/2} J_{\mu}(xa \sin \varphi \cos \psi) J_{\rho}(ax),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re}(\mu+\nu+\rho) > -1$	$\frac{a^{-1/2} \Gamma[2^{-1}(1+\sigma+\rho)]}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1) \Gamma[2^{-1}(1-\sigma+\rho)]} \times$ $\times (\sin \varphi \cos \psi)^{\mu} (\sin \psi \cos \varphi)^{\nu+1/2} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1+\sigma-\rho}{2}, \frac{1+\sigma+\rho}{2}; \mu+1;$ $\sin^2 \varphi\right) {}_2F_1\left(\frac{1+\sigma-\rho}{2}, \frac{1+\sigma+\rho}{2};$ $\nu+1; \sin^2 \psi\right),$ $\sigma = \mu + \nu, y = a \cos \varphi \sin \psi$
(39)	$x^{1/2} J_{\mu}(xa \sin \varphi \cos \psi) J_{\nu-\mu}(ax),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2\pi^{-1} a^{-3/2} \times$ $\times \sin(\mu\pi) (\sin \varphi)^{\mu} (\sin \psi)^{\nu+1/2} \times$ $\times (\cos \varphi)^{1/2-\nu} (\cos \psi)^{-\mu} \times$ $\times [\cos(\varphi+\psi) \cos(\varphi-\psi)]^{-1},$ $y = a \cos \varphi \sin \psi$
(40)	$x^{\lambda} J_{\mu}(ax) J_{\rho}(bx)$	См. Bailey W. N., 1936: Proc. London Math. Soc. (2), 40, 37-48.

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{-1/2} dx, \quad y > 0$
(4)	$x^{(\nu-1/2)/3} \sin(2^{-2}ax^2) \times$ $\times J_{(\nu-1/2)/3}(2^{-2}ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -5/2$	$a^{(\nu-2)/3} y^{(\nu-1/2)/3} \times$ $\times \sin\left(\frac{\nu+1}{6} \pi - \frac{y^2}{4a}\right) \times$ $\times J_{(\nu-1/2)/3}\left(\frac{y^2}{4a}\right)$
(5)	$x^{(\nu-1/2)/3} \cos(2^{-2}ax^2) \times$ $\times J_{(\nu-1/2)/3}(2^{-2}ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$a^{(\nu-2)/3} y^{(\nu-1/2)/3} \times$ $\times \cos\left(\frac{\nu+1}{6} \pi - \frac{y^2}{4a}\right) \times$ $\times J_{(\nu-1/2)/3}\left(\frac{y^2}{4a}\right)$
(6)	$x^{1/2} [J_{\nu/4}(2^{-2}ax^2)]^2,$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$-\frac{y^{1/2}}{a} J_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4a}\right) Y_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4a}\right)$
(7)	$x^{1/2} J_{\nu/4}(2^{-2}ax^2) J_{-\nu/4}(2^{-2}ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -2$	$\frac{y^{1/2}}{a} J_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4a}\right) \left[J_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu}{4}\right) - \right.$ $\left. - Y_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4a}\right) \cos\left(\frac{\pi\nu}{4}\right) \right]$
(8)	$x^{1/2} J_{\nu/4-\mu}(ax^2) J_{\nu/4+\mu}(ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{2}{\pi y^{3/2}} \left[\exp(2^{-2}\nu\pi i) W_{\mu, \nu/4}(u) \times \right.$ $\times W_{-\mu, \nu/4}(u) + \exp(-2^{-2}\nu\pi i) \times$ $\times W_{\mu, \nu/4}(v) W_{-\mu, \nu/4}(v) \left. \right],$ $u = \frac{y^2}{8a} e^{\pi i/2}, \quad v = \frac{y^2}{8a} e^{-\pi i/2}$
(9)	$x^{-1/2} J_{\nu}(ax^{-1}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{-1/2} J_{2\nu}(2a^{1/2}y^{1/2})$
(10)	$x^{-5/2} J_{\nu}(ax^{-1}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$a^{-1} y^{1/2} J_{2\nu}(2a^{1/2}y^{1/2})$
(11)	$x^{-3/2} J_{\nu-1}(ax^{-1}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$a^{-1/2} J_{2\nu-1}(2a^{1/2}y^{1/2})$
(12)	$x^{-2\nu} J_{1/2-\nu}(ax^{-1}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3$	$-\frac{i(a^{-1}y)^{\nu-1/2}}{2 \sin(2\nu\pi)} \times$ $\times [e^{2\nu\pi i} J_{1-2\nu}(u) J_{2\nu-1}(v) -$ $- e^{-2\nu\pi i} J_{2\nu-1}(u) J_{1-2\nu}(v)],$ $u = (ay/2)^{1/2} \exp(2^{-2}\pi i)$ $v = (ay/2)^{1/2} \exp(-2^{-2}\pi i)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(13)	$x^{\nu-3/2} J_{\mu}(x^{-1}),$ $-3/2 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re} \mu + 3/2$	$\frac{\pi y^{\nu+1/2}}{2 \sin [2^{-1}(\mu - \nu - \rho) \pi]} \times$ $\times \left[A {}_0F_3 \left(1 + \nu, 1 + \frac{\rho - \mu + \nu}{2}, \right. \right.$ $\left. \left. 1 + \frac{\mu + \nu + \rho}{2}; \frac{y^2}{16} \right) - \right.$ $\left. - y^{\mu} B {}_0F_3 \left(1 + \mu, 1 + \frac{\mu + \nu - \rho}{2}, \right. \right.$ $\left. \left. 1 + \frac{\mu - \nu - \rho}{2}; \frac{y^2}{16} \right) \right],$ $A^{-1} = 2^{\nu+\rho} \Gamma(1 + \nu) \times$ $\times \Gamma[1 + 2^{-1}(\rho - \mu + \nu)] \times$ $\times \Gamma[1 + 2^{-1}(\rho + \mu + \nu)]$ $B^{-1} = 2^{2\mu-\rho} \Gamma(1 + \mu) \times$ $\times \Gamma[1 + 2^{-1}(\mu + \nu - \rho)] \times$ $\times \Gamma[1 + 2^{-1}(\mu - \nu - \rho)]$
(14)	$x^{1/2} (\beta^2 + x^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \beta}{\beta^2 + x^2}\right) \times$ $\times J_{\nu}\left(\frac{\alpha x}{\beta^2 + x^2}\right),$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{-1/2} e^{-\beta y} J_{2\nu}(2\alpha y^{1/2})$
(15)	$J_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{-1} \alpha y^{-3/2} J_{\nu-1}(2^{-2} \alpha^2 y^{-1})$
(16)	$x^{-1/2} J_{2\nu}(\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{-1/2} J_{\nu}(2^{-2} \alpha^2 y^{-1})$
(17)	$x^{-1/2} e^{-\beta x} J_{2\nu}(2\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{1/2} (y^2 + \beta^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \beta}{\beta^2 + y^2}\right) \times$ $\times J_{\nu}\left(\frac{\alpha y}{\beta^2 + y^2}\right)$
(18)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\mu/2} \times$ $\times J_{\mu}[a(x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu > -1$	$a^{-\mu} y^{\nu+1/2} \beta^{-\mu+\nu+1} \times$ $\times (a^2 - y^2)^{\mu/2 - \nu/2 - 1/2} \times$ $\times J_{\mu-\nu-1}[\beta(a^2 - y^2)^{1/2}], \quad 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(19)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\mu/2-1} \times$ $\times J_{\mu-1}[a(x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(\mu + 2) > \operatorname{Re} \nu > -1$	$(a/2)^{\mu-1} \beta^{\nu} [\Gamma(\mu)]^{-1} y^{1/2} K_{\nu}(\beta y),$ $a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(20)	$x^{\nu-3/2} (x^2 + \beta^2)^{-\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} (\mu + 2) > \operatorname{Re} \nu > 0$	$\beta^{-\mu} 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) y^{1/2-\nu} J_{\mu}(a\beta),$ $a < y < \infty$
(21)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1} (x^2 + \beta^2)^{-\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [c (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, c > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 + \operatorname{Re} \mu$	$\alpha^{\nu} y^{1/2} (\beta^2 - \alpha^2)^{-\mu/2} J_{\mu} [c (\beta^2 - \alpha^2)^{1/2}] \times$ $\times K_{\nu}(c\alpha y), \quad c \leq y < \infty$
(22)	$x^{\nu+2n-3/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1} (x^2 + \beta^2)^{-\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [c (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, c > 0$ $-n < \operatorname{Re} \nu < 4 - 2n + \operatorname{Re} \mu$	$(-1)^{n+1} y^{1/2} \alpha^{\nu+2n-2} (\beta^2 - \alpha^2)^{-\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [c (\beta^2 - \alpha^2)^{1/2}] K_{\nu}(c\alpha y),$ $c < y < \infty$
(23)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times C_{2n+1}^{\nu+1/2} [\beta (x^2 + \beta^2)^{-1/2}] \times$ $\times J_{\nu+3/2+2n} [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(-1)^n 2^{1/2} \pi^{-1/2} a^{-1/2-\nu} y^{\nu+1/2} \times$ $\times (a^2 - y^2)^{-1/2} \sin [\beta (a^2 - y^2)^{1/2}] \times$ $\times C_{2n+1}^{\nu+1/2} [(1 - y^2/a^2)^{1/2}],$ $0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(24)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times C_{2n}^{\nu+1/2} [\beta (x^2 + \beta^2)^{-1/2}] \times$ $\times J_{\nu+1/2+2n} [a (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(-1)^n 2^{1/2} \pi^{-1/2} a^{-1/2-\nu} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [\beta (a^2 - y^2)^{1/2}] \times$ $\times C_{2n}^{\nu+1/2} [(1 - y^2/a^2)^{1/2}], \quad 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(25)	$x^{\nu-3/2} (x^2 + \beta^2)^{-n\mu/2} \times$ $\times \prod_{i=1}^n J_{\mu} [a_i (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $a_i > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $\operatorname{Re} (n\mu + n/2 + 1/2) > \operatorname{Re} \nu > 0$	$2^{\nu-1} \beta^{-n\mu} \Gamma(\nu) y^{1/2-\nu} \prod_{i=1}^n J_{\mu}(a_i \beta),$ $\sum_{i=1}^n a_i < y < \infty$
(26)	$x^{\nu+1/2} \prod_{i=1}^n z_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(a_i z_i),$ $a_i > 0, \operatorname{Re} \beta_i > 0,$ $z_i = (x^2 + \beta_i^2)^{1/2}$ $n/2 + \sum_{i=1}^n \mu_i - 1/2 > \operatorname{Re} \nu > -1$	$0, \quad \sum_{i=1}^n a_i < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(27)	$x^{\nu-3/2} \prod_{i=1}^n z_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(a_i z_i),$ $a_i > 0, \operatorname{Re} \beta_i > 0$ $z_i = (x^2 + \beta_i^2)^{1/2}$ $n/2 + \sum_{i=1}^n \mu_i + 3/2 > \operatorname{Re} \nu > 0$	$2^{\nu-1} \Gamma(\nu) y^{1/2-\nu} \times$ $\times \prod_{i=1}^n [\beta_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(a_i \beta_i)],$ $\sum_{i=1}^n a_i < y < \infty$
(28)	$x^{\nu+1/2} (1-x^2)^{\mu/2} J_{\mu}[\alpha(1-x^2)^{1/2}],$ $0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\alpha^{\mu} y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-(\mu+\nu+1)/2} \times$ $\times J_{\mu+\nu+1}[(\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(29)	$0, \quad 0 < x < c$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - c^2)^{\mu/2} J_{\mu}[a(x^2 - c^2)^{1/2}],$ $c < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1$	$0, \quad 0 < y < a$ $a^{\mu} c^{1+\mu-\nu} y^{-\nu+1/2} \times$ $\times (y^2 - a^2)^{\nu/2-\mu/2-1/2} \times$ $\times J_{\nu-\mu-1}[c(y^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < y < \infty$
(30)	$0, \quad 0 < x < c$ $x^{1/2-\nu} (x^2 + \beta^2)^{-1} (x^2 - c^2)^{\mu/2} \times$ $\times J_{\mu}[a(x^2 - c^2)^{1/2}], \quad c < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \mu < 2 + \operatorname{Re} \nu$	$\beta^{-\nu} (c^2 + \beta^2)^{\mu/2} y^{1/2} \times$ $\times K_{\mu}[a(\beta^2 + c^2)^{1/2}] I_{\nu}(\beta y),$ $0 < y < a$
(31)	$0, \quad 0 < x < c$ $x^{1/2-\nu} (x^2 + \beta^2)^{-1} (x^2 - c^2)^{\mu/2+n-1} \times$ $\times J_{\mu}[a(x^2 - c^2)^{1/2}], \quad c < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $-n < \operatorname{Re} \mu < 4 - 2n + \operatorname{Re} \nu$	$(-1)^{n+1} \beta^{-\nu} (\beta^2 + c^2)^{\mu/2+n-1} y^{1/2} \times$ $\times K_{\mu}[a(\beta^2 + c^2)^{1/2}] I_{\nu}(\beta y),$ $0 < y < a$
(32)	$x^{\nu+2n+1/2} (1-x^2)^{\lambda/2+m} \times$ $\times J_{\lambda}[a(1-x^2)^{1/2}], \quad 0 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re} \nu > -1$	$a^{-\lambda} y^{-\nu+1/2} \left(\frac{d}{a da}\right)^m \left(\frac{d}{y dy}\right)^n z,$ <p>где</p> $z = a^{2\lambda+2m} y^{2\nu+2n} \times$ $\times (a^2 + y^2)^{-(\lambda+\nu+m+n+1)/2} \times$ $\times J_{\lambda+\nu+m+n+1}[(a^2 + y^2)^{1/2}]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(33)	$x^{\rho} (1-x^2)^{\mu} J_{\lambda} [a(1-x^2)^{1/2}],$ $0 < x < 1$ $0,$ $1 < x < \infty$	См. Bailey W. N., 1938: Quart. J. Math. Oxford Series 9, 141-147.
(34)	$x^{1/2} J_{\nu/2} \{2^{-1} a [(x^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta]\} \times$ $\times J_{\nu/2} \{2^{-1} a [(x^2 + \beta^2)^{1/2} + \beta]\},$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2\pi^{-1} y^{-1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos [\beta (a^2 - y^2)^{1/2}], \quad 0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(35)	$x^{1/2} Y_{\nu/2} (2^{-2} ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$-2a^{-1} y^{1/2} H_{\nu/2} (y^2/a)$
(36)	$x^{1/2} J_{\nu/4} (2^{-2} ax^2) Y_{\nu/4} (2^{-2} ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$-2a^{-1} y^{1/2} [J_{\nu/4} (\frac{y^2}{4a})]^2$
(37)	$x^{-1/2} Y_{\nu} (ax^{-1}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-2\pi^{-1} y^{-1/2} [K_{2\nu} (2a^{1/2} y^{1/2}) -$ $-2^{-1} \pi Y_{2\mu} (2a^{1/2} y^{1/2})]$
(38)	$x^{-5/2} Y_{\nu} (ax^{-1}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2y^{1/2} a^{-1} \pi^{-1} [K_{2\nu} (2a^{1/2} y^{1/2}) +$ $+ 2^{-1} \pi Y_{2\nu} (2a^{1/2} y^{1/2})]$
(39)	$x^{-1/2} Y_{2\nu} (2ax^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{2}{y^{1/2} \cos(\nu\pi)} [2^{-1} \cos(\nu\pi) Y_{\nu} (a^2/y) -$ $- Y_{-\nu} (a^2/y) + H_{-\nu} (a^2/y)]$
(40)	$0,$ $x^{1/2-\nu} (x^2 + \beta^2)^{-1} \times$ $\times (x^2 - c^2)^{\mu/2+n-1/2} \times$ $\times Y_{\mu} [a(x^2 - c^2)^{1/2}], \quad c < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $-1/2 - n < \operatorname{Re} \mu < 3 - 2n + \operatorname{Re} \nu$	$(-1)^{n+1} \beta^{-\nu} y^{1/2} (\beta^2 + c^2)^{\mu/2+n-1/2} \times$ $\times K_{\mu} [a(\beta^2 + c^2)^{1/2}] I_{\nu} (\beta y),$ $0 < y < a$
(41)	$x^{1/2} J_{\nu/2} \{2^{-1} a [(x^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta]\} \times$ $\times Y_{\nu/2} \{2^{-1} a [(x^2 + \beta^2)^{1/2} + \beta]\},$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2\pi^{-1} y^{-1/2} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [\beta (a^2 - y^2)^{1/2}], \quad 0 < y < a$ $-2\pi^{-1} y^{-1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-\beta (y^2 - a^2)^{1/2}], \quad a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(42)	$x^{1/2} \left[H_{\nu/4+\mu}^{(1)}(ax^2) H_{\nu/4-\mu}^{(1)}(ax^2) - \right.$ $\left. - H_{\nu/4+\mu}^{(2)}(ax^2) H_{\nu/4-\mu}^{(2)}(ax^2) \right],$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ $\operatorname{Re} (1/2 \pm \mu + \nu/2) > 0$	$\frac{8 \Gamma(1/2 - \mu + \nu/4) \Gamma(1/2 + \mu + \nu/4)}{i\pi [\Gamma(\nu/2 + 1)]^2 y^{3/2}} \times$ $\times M_{\mu, \nu/4} \left(\frac{y^2}{8a} e^{\pi i/2} \right) \times$ $\times M_{\mu, \nu/4} \left(\frac{y^2}{8a} e^{-\pi i/2} \right)$

8.13. Модифицированные функции Бесселя аргумента kx

(1)	$x^{1/2} \exp(-\beta x^2) I_{\nu}(ax),$ $\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{1/2}}{2\beta} \exp\left(-\frac{a^2 - y^2}{4\beta}\right) J_{\nu}\left(\frac{ay}{2\beta}\right)$
(2)	$x^{1/2} K_{\nu}(ax),$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{\nu+1/2}}{a^{\nu} (y^2 + a^2)}$
(3)	$x^{\mu+\nu+1/2} K_{\mu}(ax),$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re}(\nu+1) > \operatorname{Re} \mu $	$\frac{2^{\nu+\mu} \Gamma(\mu + \nu + 1) a^{\mu} y^{\nu+1/2}}{(y^2 + a^2)^{\mu+\nu+1}}$
(4)	$x^{-\lambda-1/2} K_{\mu}(ax),$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re}(\nu - \lambda + 1) > \operatorname{Re} \mu $	$\frac{\Gamma(\tau + \mu) \Gamma(\tau)}{2^{\lambda+1} a^{\nu-\lambda+1} \Gamma(\nu+1) y^{-\nu-1/2}} \times$ $\times {}_2F_1\left(\tau + \mu, \tau; \nu + 1; -\frac{y^2}{a^2}\right),$ $\tau = \frac{\nu - \lambda - \mu + 1}{2}$
(5)	$x^{\lambda} K_{\mu}(ax) \begin{matrix} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{matrix}$	См. в главах I и II.
(6)	$x^{1/2} K_0(ax) J_{\nu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} a > \operatorname{Im} \beta $	$y^{1/2} r_1^{-1} r_2^{-1} (r_2 - r_1)^{\nu} (r_2 + r_1)^{-\nu},$ $r_1 = [\alpha^2 + (\beta - y)^2]^{1/2}$ $r_2 = [\alpha^2 + (\beta + y)^2]^{1/2}$
(7)	$x^{\nu+1/2} J_{\nu}(2^{-1}ax) K_{\nu}(2^{-1}ax),$ $ \arg a < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{a^{2\nu} 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1/2) y^{\nu+1/2}}{\pi^{1/2} (y^4 + a^4)^{\nu+1/2}}$
(8)	$x^{\nu+1/2} J_{\nu}(ax) K_{\nu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Im} a , \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{2^{3\nu} (\alpha\beta)^{\nu} y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu + 1/2)}{\pi^{1/2} [(\alpha^2 + \beta^2 + y^2)^2 - 4\alpha^2 y^2]^{\nu+1/2}}$
(9)	$x^{\nu+1/2} J_{\nu-1}(ax) K_{\nu-1}(ax)$ $ \arg a < \pi/4, 0 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{2^{3\nu-1} a^{2\nu-2} \Gamma(\nu + 1/2) y^{\nu+5/2}}{\pi^{1/2} (y^4 + a^4)^{\nu+1/2}}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(10)	$x^{1/2} J_{\mu}(xa \sin \varphi) \times$ $\times K_{\nu-\mu}(xa \cos \varphi \cos \psi),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(\sin \varphi)^{\mu} (\sin \psi)^{\nu+1/2} \times$ $\times \frac{(\cos \varphi)^{\nu-\mu} (\cos \psi)^{\mu-\nu}}{a^{3/2} (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi)},$ $y = a \sin \psi$
(11)	$x^{\nu+1/2} J_{\mu}(xa \sin \psi) \times$ $\times K_{\mu}(xa \cos \varphi \cos \psi),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$\frac{2^{\nu} \Gamma(\mu + \nu + 1) [\sin \varphi \cos^2(\alpha/2)]^{\nu+1/2}}{a^{\nu+3/2} (\cos \psi)^{2\nu+2}} \times$ $\times P_{\nu}^{-\mu}(\cos \alpha), \quad y = a \sin \varphi,$ $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg} \psi \cos \varphi$
(12)	$x^{\mu+1/2} J_{\nu}(\beta x) K_{\mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Im} \beta $ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$(2\pi)^{-1/2} \times$ $\times \alpha^{\mu} \beta^{-\mu-1} y^{-\mu-1/2} e^{-(\mu+1/2)\pi i} \times$ $\times (\mu^2 - 1)^{-\mu/2-1/4} Q_{\nu-1/2}^{\mu+1/2}(\mu),$ $2\beta y \mu = \alpha^2 + \beta^2 + y^2$
(13)	$x^{-1/2} J_{\mu}(xa \sin \varphi) \times$ $\times K_{\rho}(xa \cos \varphi \cos \psi),$ $a > 0, 0 < \varphi, \psi < \pi/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu + 1) > \operatorname{Re} \rho$	$\frac{(\sin \varphi)^{\mu} (\sin \psi)^{\nu+1/2}}{2a^{1/2} (\cos \varphi \cos \psi)^{\rho}} \times$ $\times \frac{\Gamma(\tau) \Gamma(\tau + \rho)}{\Gamma(1 + \mu) \Gamma(1 + \nu)} \times$ $\times {}_2F_1(\tau, \tau - \nu; \mu + 1; \sin^2 \varphi) \times$ $\times {}_2F_1(\tau, \tau - \mu; \nu + 1; \sin^2 \psi),$ $\tau = \frac{1 + \mu + \nu - \rho}{2} \quad y = a \sin \psi$
(14)	$x^{\rho+\nu-\mu+1/2} J_{\mu}(\alpha x) K_{\rho}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Im} \alpha , \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re} \rho > -1, \operatorname{Re} \mu > -1$ $\operatorname{Re}(\rho + \nu) > -1$	$2^{\rho+\nu-\mu-1} [\Gamma(\mu + 1)]^{-1} \times$ $\times \Gamma(\rho + \nu + 1) \Gamma(\rho + 1) \times$ $\times \Gamma(\nu + 1) \alpha^{\mu-\rho-\nu-2} y^{1/2} \times$ $\times (\operatorname{ch} \sigma - \cos \theta) P_{\rho+\nu-\mu}^{-\rho}(\cos \theta) \times$ $\times P_{\rho+\nu-\mu}^{-\nu}(\operatorname{ch} \sigma),$ $y + i\beta = i\alpha \operatorname{ctg} [2^{-1}(\theta + i\sigma)]$
(15)	$x^{\lambda} J_{\mu}(\alpha x) K_{\rho}(\beta x)$	См. Bailey W. N., 1936: Proc. London Math. Soc. (2), 40, 37—48.

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(16)	$x^{1/2} I_{\nu/2}(\alpha x) K_{\nu/2}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{-1/2} (y^2 + 4\alpha^2)^{-1/2}$
(17)	$x^{\nu+1/2} I_{\nu}(2^{-1}\alpha x) K_{\nu}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{2^{\nu} \alpha^{2\nu} \Gamma(\nu + 1/2)}{\pi^{1/2} (y^2 + \alpha^2)^{\nu+1/2}}$
(18)	$x^{\nu+1/2} I_{\nu}(\alpha x) K_{\nu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{2^{3\nu} (\alpha\beta)^{\nu} y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu + 1/2)}{\pi^{1/2} [(\beta^2 - \alpha^2 - y^2)^2 + 4\alpha^2 y^2]^{\nu+1/2}}$
(19)	$x^{\nu-1/2} I_{\nu-1/2}(2^{-1}\alpha x) K_{\nu-1/2}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, 0 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\frac{\Gamma(\nu) (2\alpha)^{\nu-1}}{y^{\nu-1/2}} P_{-\nu} \left[\frac{2\alpha^2 + y^2}{2\alpha(\alpha^2 + y^2)^{1/2}} \right]$
(20)	$x^{-1/2} I_{\mu}(2^{-1}\alpha x) K_{\mu}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re}(\nu + 2\mu) > -1$	$\frac{e^{i\pi t} \Gamma(\nu/2 + \mu + 1/2)}{\Gamma(\nu/2 - \mu + 1/2) y^{1/2}} \times$ $\times P_{\nu/2-1/2}^{-\mu} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\nu/2-1/2}^{-\mu} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}]$
(21)	$x^{\mu+1/2} I_{\nu}(2^{-1}\alpha x) K_{\mu}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$ $-\operatorname{Re} \nu - 1 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$(\pi/2)^{-1/2} \alpha^{-1} y^{-\mu-1/2} \times$ $\times e^{-(\mu-\nu/2+1/4)\pi i} \times$ $\times (1 + y^2/\alpha^2)^{-\mu/2-1/4} Q_{\nu-1/2}^{\mu+1/2}(iy/\alpha)$
(22)	$x^{\mu+1/2} I_{\nu}(\alpha x) K_{\mu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha $ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$(2\pi)^{-1/2} \alpha^{-\mu-1} \beta^{\mu} y^{-\mu-1/2} \times$ $\times e^{-(\mu-\nu/2+1/4)\pi i} \times$ $\times (\nu^2 + 1)^{-\mu/2-1/4} Q_{\nu-1/2}^{\mu+1/2}(i\nu),$ $2\alpha\beta\nu = \beta^2 - \alpha^2 + y^2$
(23)	$x^{1/2} I_{(\nu-\mu)/2}(2^{-1}\alpha x) \times$ $\times K_{(\nu+\mu)/2}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re}(\nu - \mu) > -2$	$\alpha^{-\mu} y^{-1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [y + (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]^{\mu}$
(24)	$x^{\nu+1/2} I_{\mu}(\beta x) K_{\mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta , \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$	$(2\pi)^{-1/2} (\alpha\beta)^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times e^{-(\nu+1/2)\pi i} \times$ $\times (u^2 - 1)^{-\nu/2-1/4} Q_{\mu-1/2}^{\nu+1/2}(u),$ $2\alpha\beta u = \alpha^2 + \beta^2 + y^2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(25)	$x^{\lambda} I_{\mu}(\alpha x) K_{\rho}(\beta x)$	См. Bailey W. N., 1936: Proc. London Math. Soc. (2), 40, 37—48.
(26)	$x^{-\nu-1/2} [K_{\nu+1/2}(2^{-1}\alpha x)]^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$\pi^{1/2} (2\alpha)^{-\nu-1} \times$ $\times \Gamma(-\nu) y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{\nu/2} \times$ $\times P_{\nu} \left[\frac{2\alpha^2 + y^2}{2\alpha(\alpha^2 + y^2)^{1/2}} \right]$
(27)	$x^{1/2} [K_{\mu}(2^{-1}\alpha x)]^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(\nu/2 \pm \mu) > -1$	$\frac{e^{2\mu\pi i} y^{1/2} \Gamma(1 + \nu/2 + \mu)}{(y^2 + \alpha^2)^{1/2} \Gamma(\nu/2 - \mu)} \times$ $\times Q_{\nu/2}^{-\mu} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\nu/2-1}^{-\mu} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}]$
(28)	$x^{-1/2} [K_{\mu}(2^{-1}\alpha x)]^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(\nu/2 \pm \mu) > -1/2$	$\frac{e^{2\mu\pi i} \Gamma(1/2 + \nu/2 + \mu)}{\Gamma(1/2 + \nu/2 - \mu) y^{1/2}} \times$ $\times \{Q_{\nu/2-1/2}^{-\mu} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}]\}^2$
(29)	$x^{1/2} K_{\mu-1/2}(2^{-1}\alpha x) K_{\mu+1/2}(2^{-1}\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$ $ \operatorname{Re} \mu < 1 + 2^{-1} \operatorname{Re} \nu$	$\frac{e^{2\mu\pi i} \Gamma(\nu/2 + \mu + 1) y^{1/2}}{\Gamma(\nu/2 - \mu) (y^2 + \alpha^2)^{1/2}} \times$ $\times Q_{\nu/2-1/2}^{-\mu+1/2} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}] \times$ $\times Q_{\nu/2-1/2}^{-\mu-1/2} [(1 + \alpha^2/y^2)^{1/2}]$
(30)	$x^{\nu+1/2} K_{\mu}(\alpha x) K_{\mu}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $\operatorname{Re}(\nu \pm \mu) > -1, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi^{1/2} y^{\nu+1/2} \Gamma(\nu + \mu + 1) \Gamma(\nu - \mu + 1)}{2^{3/2} (\alpha\beta)^{\nu+1} (\mu^2 - 1)^{\nu/2+1/4}} \times$ $\times P_{\mu-1/2}^{-\nu-1/2}(\mu),$ $2\alpha\beta\mu = y^2 + \beta^2 + \alpha^2$
(31)	$x^{\lambda} K_{\mu}(\alpha x) K_{\rho}(\beta x)$	См. Bailey W. N., 1936: Proc. London Math. Soc. (2), 41, 215—220.

8.14. Модифицированные функции Бесселя других аргументов

(1)	$x^{1/2-\nu} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times I_{\nu}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(\pi/2)^{-1/2} \alpha^{-1} y^{\nu-1/2} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) D_{-2\nu}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$
-----	--	--

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) I_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(2)	$x^{-\nu-5/2} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times I_{\nu+1}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(\pi/2)^{-1/2} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) D_{-2\nu-3}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$
(3)	$x^{1/2} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) I_{\nu/2}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(2^{-1}\pi\alpha y)^{-1/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha}\right)$
(4)	$x^{\nu/3+1/6} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times I_{\nu/3+1/6}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$\pi^{-1} \alpha^{-\nu/3-2/3} y^{\nu/3+1/6} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right) \times$ $\times K_{\nu/3+1/6}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(5)	$x^{1/6-\nu/3} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times I_{\nu/3-1/6}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\alpha^{\nu/3-2/3} y^{1/6-\nu/3} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right) \times$ $\times I_{\nu/3-1/6}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(6)	$x^{1/2+2\mu-\nu} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times I_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2), \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \nu > 2 \operatorname{Re} \mu + 1/2 > -1/2$	$2^{2\mu-\nu+1/2} (\pi\alpha)^{-1/2} \Gamma(1/2+\mu) \times$ $\times [\Gamma(1/2-\mu+\nu)]^{-1} y^{\nu-2\mu-1/2} \times$ $\times {}_1F_1\left(1/2+\mu; 1/2-\mu+\nu; -\frac{y^2}{2\alpha}\right)$
(7)	$x^{1/2+\nu-2\mu} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times I_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2), \arg \alpha < \pi/4$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \mu + 1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{(3+2\nu-6\mu)/4} \alpha^{-1/2-\nu+\mu} y^{\mu-1} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) W_{k,m}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right),$ $2k = 1/2 + \nu - 3\mu, 2m = -1/2 + \mu - \nu$
(8)	$x^{\lambda} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) I_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $ \arg \alpha < \pi/4$ $-3/2 - \operatorname{Re}(2\mu + \nu) < \operatorname{Re} \lambda < 0$	$(2\pi)^{-1/2} \left(\frac{2}{y}\right)^{\lambda+1} \times$ $\times G_{23}^{21}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \mid \begin{matrix} 1-\mu, 1+\mu \\ h, 1/2, k \end{matrix}\right),$ $h = 3/4 + \lambda/2 + \nu/2,$ $k = 3/4 + \lambda/2 - \nu/2$
(9)	$x^{1/2} K_{\nu/2}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi\alpha^{-1} y^{1/2} [I_{\nu/2}(y^2/\alpha) - L_{\nu/2}(y^2/\alpha)]$
(10)	$x^{3/2} K_{\nu/2+1/2}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2\pi\alpha^{-2} y^{3/2} [I_{\nu/2-1/2}(y^2/\alpha) -$ $- L_{\nu/2-1/2}(y^2/\alpha)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(11)	$x^{\nu/3+1/6} \exp(-2^{-2}\alpha x^2) \times$ $\times K_{\nu/3+1/6}(2^{-2}\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi \alpha^{-\nu/3-2/3} y^{\nu/3+1/6} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha}\right) \times$ $\times I_{\nu/3+1/6}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(12)	$x^{\nu/3+1/6} \exp(2^{-2}\alpha x^2) \times$ $\times K_{\nu/3+1/6}(2^{-2}\alpha x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$\alpha^{-\nu/3-2/3} y^{\nu/3+1/6} \exp\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) \times$ $\times K_{\nu/3+1/6}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(13)	$x^{2\mu+\nu+1/2} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times K_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2), \quad \arg \alpha < \pi/4$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(2\mu + \nu) > -1$	$\pi^{1/2} 2^{\mu} \alpha^{-2\mu-2\nu-2} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \Gamma(1+2\mu+\nu) \times$ $\times [\Gamma(\mu+\nu+3/2)]^{-1} \times$ $\times {}_1F_1\left(1+2\mu+\nu; \mu+\nu+\frac{3}{2}; -\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)$
(14)	$x^{2\mu+\nu+1/2} \exp(2^{-2}\alpha^2 x^2) \times$ $\times K_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$ $-1 < \operatorname{Re}(2\mu + \nu) < -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} \Gamma(1+2\mu+\nu) 2^{3/2-k}}{\Gamma(1/2-\mu)} \times$ $\times \alpha^{-2m} y^{-\mu-1} \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) W_{k,m}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right),$ $2k = -1/2 - 3\mu - \nu, 2m = 1/2 + \mu + \nu$
(15)	$x^{\lambda} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) K_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $ \arg \alpha < \pi/4$ $\operatorname{Re}(\lambda + \nu \pm 2\mu) > -3/2$	$(\pi/2)^{1/2} \left(\frac{2}{y}\right)^{\lambda+1} \times$ $\times G_{23}^{12}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \mid \begin{matrix} 1-\mu, 1+\mu \\ h, 1/2, k \end{matrix}\right),$ $h = 3/4 + \lambda/2 + \nu/2, k = 3/4 + \lambda/2 - \nu/2$
(16)	$x^{\lambda} \exp(2^{-2}\alpha^2 x^2) K_{\mu}(2^{-2}\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-3/2 - \operatorname{Re}(\nu \pm 2\mu) < \operatorname{Re} \lambda < 0$	$(2\pi)^{-1/2} \cos(\mu\pi) (2/y)^{\lambda+1} \times$ $\times G_{23}^{22}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \mid \begin{matrix} 1-\mu, 1+\mu \\ h, 1/2, k \end{matrix}\right),$ $h = 3/4 + \lambda/2 + \nu/2$ $k = 3/4 + \lambda/2 - \nu/2$
(17)	$x^{1/2} I_{\nu/4}(2^{-2}\alpha x^2) K_{\nu/4}(2^{-2}\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{1/2}}{\alpha} I_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) K_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(18)	$x^{1/2} I_{(\nu-\mu)/4}(2^{-1}\alpha x^2) \times$ $\times K_{(\nu+\mu)/4}(2^{-1}\alpha x^2), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\nu - \mu) > -2$	$\frac{2 \Gamma(1/2 + \nu/4 - \mu/4)}{\Gamma(1 + \nu/2)} y^{3/2} W_{\mu/4, \nu/4}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) \times$ $\times M_{-\mu/4, \nu/4}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(19)	$x^{-5/2} K_{\nu}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$i\alpha^{-1} y^{1/2} [e^{v\pi i/2} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} e^{\pi i/4} y^{1/2}) -$ $- e^{-v\pi i/2} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} e^{-\pi i/4} y^{1/2})]$
(20)	$x^{-2\nu-2} K_{1/2-\nu}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$(2\pi)^{1/2} \alpha^{-\nu-1/2} y^{\nu+1/2} \times$ $\times K_{2\nu}(2^{1/2} \alpha^{1/2} y^{1/2}) J_{2\nu}(2^{1/2} \alpha^{1/2} y^{1/2})$
(21)	$K_{-2\nu-1}(2\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi\alpha [H_{-\nu-1}(\alpha^2 y^{-1}) - Y_{-\nu-1}(\alpha^2 y^{-1})]}{4 \cos(\nu\pi) y^{3/2}}$
(22)	$x^{-1/2} K_{2\nu}(2\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi [H_{-\nu}(\alpha^2 y^{-1}) - Y_{-\nu}(\alpha^2 y^{-1})]}{4 \cos(\nu\pi) y^{1/2}}$
(23)	$x^{1/2} J_{\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) K_{\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-1} y^{-3/2} e^{-2\alpha/y}$
(24)	$x^{\nu+1/2} J_{2\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{\nu} \alpha^{\nu+1/2} y^{-2\nu-2} K_{1/2-\nu}(2\alpha/y)$
(25)	$x^{-\nu-1/2} J_{2\nu+1}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) \times$ $\times K_{2\nu+1}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi^{1/2} 2^{-\nu-2} \alpha^{-\nu-1/2} y^{2\nu} [I_{\nu+1/2}(2\alpha/y) -$ $- L_{\nu+1/2}(2\alpha/y)]$
(26)	$x^{-1/2} J_{\mu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) K_{\mu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re}(\nu + \mu) > -1$	$\frac{\Gamma(1/2 + \mu/2 + \nu/2) y^{1/2}}{4\alpha \Gamma(1 + \mu)} W_{-\nu/2, \mu/2} \left(\frac{2\alpha}{y}\right) \times$ $\times M_{\nu/2, \mu/2} \left(\frac{2\alpha}{y}\right)$
(27)	$x^{-1/2} [K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) -$ $- 2^{-1} \pi Y_{2\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2})],$ $\alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$- 2^{-1} \pi y^{-1/2} Y_{\nu}(a/y)$
(28)	$x^{-1/2} K_{\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) Y_{\nu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$- 2^{-2} \alpha^{-1} y^{1/2} W_{\nu/2, \nu/2}(2\alpha/y) \times$ $\times W_{-\nu/2, \nu/2}(2\alpha/y)$
(29)	$x^{-1/2} K_{\mu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) \times$ $\times \{ \sin [2^{-1}(\mu - \nu)\pi] J_{\mu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) +$ $+ \cos [2^{-1}(\mu - \nu)\pi] Y_{\mu}(2\alpha^{1/2} x^{1/2}) \},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\nu \pm \mu) > -1$	$- 2^{-2} \alpha^{-1} y^{1/2} W_{\nu/2, \mu/2}(2\alpha/y) \times$ $\times W_{-\nu/2, \mu/2}(2\alpha/y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(30)	$x^{-1/2} K_{\mu} [(2\alpha x)^{1/2} \exp(2^{-2}\pi i)] \times$ $\times K_{\mu} [(2\alpha x)^{1/2} \exp(-2^{-2}\pi i)],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } (\nu \pm \mu) > -1$	$2^{-2} \alpha^{-1} y^{1/2} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right) \times$ $\times W_{-\nu/2, \mu/2}(\alpha y^{-1} \exp(2^{-1}\pi i)) \times$ $\times W_{-\nu/2, \mu/2}(\alpha y^{-1} \exp(-2^{-1}\pi i))$
(31)	$x^{-\nu-1/2} K_{2\nu+1} [(2\alpha x)^{1/2} \exp(2^{-2}\pi i)] \times$ $\times K_{2\nu+1} [(2\alpha x)^{1/2} \exp(-2^{-2}\pi i)],$ $\text{Re } \alpha > 0, -1 < \text{Re } \nu < 0$	$-\frac{\pi^{1/2} y^{2\nu}}{2^{3/2} \sin(\nu\pi) \alpha^{\nu+1/2}} \times$ $\times [H_{\nu+1/2}(\alpha/y) - Y_{\nu+1/2}(\alpha/y)]$
(32)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\nu/2-1/4} \times$ $\times K_{\nu+1/2} [\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0$ $\text{Re } \nu > -1$	$\pi^{1/2} 2^{-1/2} \alpha^{-\nu-1/2} y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\beta (\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(33)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\nu/2-3/4} \times$ $\times K_{\nu+3/2} [\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0$ $\text{Re } \nu > -1$	$\pi^{1/2} 2^{-1/2} \alpha^{-\nu-3/2} \beta^{-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp[-\beta (\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(34)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-(\nu+1)/4} \times$ $\times K_{(\nu+1)/2} [\alpha (x^2 + \alpha^2)^{1/2}],$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \nu > -1$	$y^{\nu+1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-(\nu+1)/4} \times$ $\times K_{(\nu+1)/2} [\alpha (y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$
(35)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \beta^2)^{-\mu/2} \times$ $\times K_{\mu} [\alpha (x^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad \text{Re } \alpha > 0$ $\text{Re } \beta > 0, \text{Re } \nu > -1$	$\alpha^{-\mu} \beta^{\nu+1-\mu} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{\mu/2-\nu/2-1/2} \times$ $\times K_{\mu-\nu-1} [\beta (\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(36)	$x^{\nu+1/2} (b^2 - x^2)^{\mu/2} \times$ $\times Y_{\mu} [\alpha (b^2 - x^2)^{1/2}],$ $0 < x < b$ $-2\pi^{-1} x^{\nu+1/2} (x^2 - b^2)^{\mu/2} \times$ $\times K_{\mu} [\alpha (x^2 - b^2)^{1/2}],$ $b < x < \infty$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \nu > -1, \text{Re } \mu > -1$	$\alpha^{\mu} b^{\mu+\nu+1} \times$ $\times y^{\nu+1/2} (\alpha^2 + y^2)^{-(\mu+\nu+1)/2} \times$ $\times Y_{\mu+\nu+1} [b (\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$
(37)	$x^{1/2} I_{\nu/2} \{2^{-1}\beta [(\alpha^2 + x^2)^{1/2} - \alpha]\} \times$ $\times K_{\nu/2} \{2^{-1}\beta [(\alpha^2 + x^2)^{1/2} + \alpha]\},$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \beta > 0$ $\text{Re } \nu > -1$	$y^{-1/2} (\beta^2 + y^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\alpha (\beta^2 + y^2)^{1/2}]$

8.15. Функции, родственные функциям Бесселя

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(1)	$H_{\nu-1/2}(ax),$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2^{1/2} \pi^{-1/2} a^{\nu-1/2} y^{1/2-\nu} (a^2 - y^2)^{-1/2},$ $0 < y < a$ $0,$ $a < y < \infty$
(2)	$x^{\lambda} H_{\mu}(ax),$ $-5/2 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re}(\lambda + \mu) < 0$	$2^{\lambda+1/2} y^{-\lambda-1} \times$ $\times G_{33}^{21} \left(\frac{y^2}{a^2} \left \begin{matrix} \frac{1-\mu}{2}, 1-\frac{\mu}{2}, 1+\frac{\mu}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2} \end{matrix} \right. \right)$
(3)	$x^{1/2} H_{\nu/2}(2^{-2}ax^2),$ $a > 0, \quad -2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$-2a^{-1} y^{1/2} Y_{\nu/2}(y^2/a)$
(4)	$x^{\lambda} H_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -2$ $-\operatorname{Re} \nu - 5/2 < \operatorname{Re}(\lambda - \mu) < 1$	$2^{\lambda+1/2} y^{-\lambda-1} \times$ $\times G_{15}^{21} \left(\frac{a^2 y^2}{16} \left \begin{matrix} \frac{1+\mu}{2} \\ h, \frac{1+\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, -\frac{\mu}{2}, k \end{matrix} \right. \right),$ $h = \frac{3}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}, \quad k = \frac{3}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2}$
(5)	$x^{1/2} [H_{-\nu}(ax) - Y_{-\nu}(ax)]$ $ \arg \alpha < \pi, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu$	$2a^{-\nu} \pi^{-1} \cos(\nu\pi) y^{\nu-1/2} (y + a)^{-1}$
(6)	$x^{\lambda} [H_{\mu}(ax) - Y_{\mu}(ax)],$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re}(\lambda + \mu) < 1$ $\operatorname{Re}(\lambda + \nu) + 3/2 > \operatorname{Re} \mu $	$2^{\lambda+1/2} \pi^{-2} \cos(\mu\pi) y^{-\lambda-1} \times$ $\times G_{33}^{23} \left(\frac{y^2}{a^2} \left \begin{matrix} \frac{1-\mu}{2}, 1-\frac{\mu}{2}, 1+\frac{\mu}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2} \end{matrix} \right. \right)$
(7)	$x^{-1/2} [H_{-\nu}(ax^{-1}) - Y_{-\nu}(ax^{-1})],$ $ \arg \alpha < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$4\pi^{-1} \cos(\nu\pi) y^{-1/2} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} y^{1/2})$
(8)	$x^{-3/2} [H_{-\nu-1}(ax^{-1}) -$ $- Y_{-\nu-1}(ax^{-1})],$ $ \arg \alpha < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-4\pi^{-1} a^{-1/2} \cos(\nu\pi) \times$ $\times K_{-2\nu-1}(2\alpha^{1/2} y^{1/2})$
(9)	$x^{2\nu} [H_{\nu+1/2}(ax^{-1}) -$ $- Y_{\nu+1/2}(ax^{-1})],$ $ \arg \alpha < \pi, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < -1/6$	$-2^{3/2} \pi^{-3/2} a^{\nu+1/2} y^{-\nu-1/2} \sin(\nu\pi) \times$ $\times K_{2\nu+1}(2^{1/2} \alpha^{1/2} e^{\pi i/4} y^{1/2}) \times$ $\times K_{2\nu+1}(2^{1/2} \alpha^{1/2} e^{-\pi i/4} y^{1/2})$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(10)	$x^{\lambda} [H_{\mu}(ax^{-1}) - Y_{\mu}(ax^{-1})],$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \lambda < - \operatorname{Re} \mu $ $\operatorname{Re}(\nu - \mu + \lambda) > -5/2$	$2^{\lambda+1/2} \pi^{-2} \cos(\mu\pi) y^{-\lambda-1} \times$ $\times G_{13}^{41} \left(\frac{\alpha^2 y^2}{16} \left \begin{matrix} 1+\mu \\ 2 \end{matrix} \right. \right),$ $h = \frac{3}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}, \quad k = \frac{3}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2}$
(11)	$I_{\nu-1/2}(ax) - L_{\nu-1/2}(ax),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{1/2} \pi^{-1/2} \alpha^{\nu-1/2} y^{1/2-\nu} (y^2 + \alpha^2)^{-1/2}$
(12)	$x^{1/2} [I_{\nu}(ax) - L_{\nu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2$	$2\pi^{-1} \alpha^{\nu+1} y^{-\nu-1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1}$
(13)	$x^{\mu-\nu+1/2} [I_{\mu}(ax) - L_{\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-1 < 2 \operatorname{Re} \mu + 1 < \operatorname{Re} \nu + 1/2$	$\frac{2^{\mu-\nu+1} \alpha^{\mu-1} y^{\nu-2\mu-1/2}}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu-\mu+1/2)} \times$ $\times {}_2F_1(1, 1/2; \nu-\mu+1/2; -y^2/\alpha^2)$
(14)	$x^{\nu-\mu+1/2} [I_{\mu}(ax) - L_{\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2$	$\frac{2^{\nu-\mu+1} \Gamma(3/2+\nu) \alpha^{\mu+1}}{\pi \Gamma(3/2+\mu) y^{\nu+1/2}} \times$ $\times {}_2F_1(1, 3/2+\nu; 3/2+\mu; -\alpha^2/y^2)$
(15)	$x^{\nu-\mu-1/2} [I_{\mu}(ax) - L_{\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{2^{\nu-\mu} \Gamma(1/2+\nu) \alpha^{\mu}}{\pi^{1/2} \Gamma(1+\mu) y^{\nu+1/2}} \times$ $\times {}_2F_1(1/2+\nu, 1/2; 1+\mu; -\alpha^2/y^2)$
(16)	$x^{\lambda} [I_{\mu}(ax) - L_{\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-\operatorname{Re} \nu - 3/2 < \operatorname{Re}(\lambda + \mu) < 0$	$2^{\lambda+1/2} \pi^{-1} y^{-\lambda-1} \times$ $\times G_{33}^{22} \left(\frac{y^2}{\alpha^2} \left \begin{matrix} 1-\frac{\mu}{2}, \frac{1-\mu}{2}, 1+\frac{\mu}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2} \end{matrix} \right. \right)$
(17)	$x^{1/2} [I_{\nu}(ax) - L_{-\nu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$2\pi^{-1} \alpha^{1-\nu} y^{\nu-1/2} \cos(\nu\pi) (y^2 + \alpha^2)^{-1}$
(18)	$x^{\mu-\nu+1/2} [I_{\mu}(ax) - L_{-\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2,$ $\operatorname{Re} \mu > -1$	$\frac{2^{\mu-\nu+1} \alpha^{-\mu-1} y^{\nu-1/2}}{\Gamma(1/2-\mu) \Gamma(1/2+\nu)} \times$ $\times {}_2F_1(1, 1/2+\mu; 1/2+\nu; -y^2/\alpha^2)$
(19)	$x^{\nu-\mu+1/2} [I_{\mu}(ax) - L_{-\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$ $\operatorname{Re}(\nu - \mu) > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) < 1/2$	$2^{2+\nu-\mu} \pi^{-3/2} \cos(\mu\pi) \times$ $\times \Gamma(3/2+\nu-\mu) \alpha^{1-\mu} y^{-5/2+2\mu-\nu} \times$ $\times {}_2F_1(3/2+\nu-\mu, 1; 3/2; -\alpha^2/y^2)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(20)	$x^{\mu+\nu-1/2} [I_{\mu}(ax) - L_{-\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1/2$	$\frac{2^{\mu+\nu} \Gamma(1/2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + \mu) \Gamma(1/2 - \mu)} a^{\mu} y^{-1/2-2\mu-\nu} \times$ $\times {}_2F_1(1/2 + \mu + \nu, 1/2 + \mu; 1 + \mu;$ $-a^2/y^2)$
(21)	$x^{\lambda} [I_{\mu}(ax) - L_{-\mu}(ax)],$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu + \lambda) > -3/2$ $-\operatorname{Re} \nu - 5/2 < \operatorname{Re}(\lambda - \mu) < 1$	$2^{\lambda+1/2} \pi^{-1} \cos(\mu\pi) y^{-\lambda-1} \times$ $\times G_{33}^{22} \left(\begin{matrix} \frac{1+\mu}{2}, 1 - \frac{\mu}{2}, 1 + \frac{\mu}{2} \\ \frac{y^2}{a^2} \\ \frac{3}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{1+\mu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2} \end{matrix} \right)$
(22)	$x^{2\nu} [I_{\nu+1/2}(ax^{-1}) - L_{\nu+1/2}(ax^{-1})],$ $\operatorname{Re} a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{3/2} \pi^{-1/2} y^{-\nu-1/2} a^{\nu+1/2} \times$ $\times J_{2\nu+1} [(2ay)^{1/2}] K_{2\nu+1} [(2ay)^{1/2}]$
(23)	$x^{\nu+1/2} U_{\nu+1}(2a^2\beta, ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(2\beta)^{\nu+1} y^{\nu+1/2} \cos[\beta(a^2 - y^2)],$ $0 < y < a$ 0, $a < y < \infty$
(24)	$x^{\nu+1/2} U_{\nu+2}(2a^2\beta, ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(2\beta)^{\nu+1} y^{\nu+1/2} \sin[\beta(a^2 - y^2)],$ $0 < y < a$ 0, $a < y < \infty$

8.16. Функции параболического цилиндра

(1)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) D_{2\nu-1}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$-\frac{y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2)}{2 \cos(\nu\pi)} \times$ $\times [D_{2\nu-1}(y) - D_{2\nu-1}(-y)]$
(2)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu-1}(x) -$ $- D_{2\nu-1}(-x)\}, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu-1}(y) -$ $- D_{2\nu-1}(-y)\}$
(3)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu-1}(x) -$ $- D_{2\nu-1}(-x)\}, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$-y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu-1}(y) -$ $- D_{2\nu-1}(-y)\}$
(4)	$x^{\nu-1/2} \exp(2^{-2}x^2) D_{2\nu-1}(x),$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{1/2-\nu} \pi \sin(\nu\pi) \Gamma(2\nu) y^{1/2-\nu} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) K_{\nu}(2^{-2}y^2)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(5)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) D_{2\nu+1}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\exp(-2^{-2}y^2) y^{\nu+1/2}}{2 \cos(\nu\pi)} \times$ $\times [D_{2\nu}(y) + D_{2\nu}(-y)]$
(6)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+1}(x) -$ $- D_{2\nu+1}(-x)\}, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu}(y) +$ $+ D_{2\nu}(-y)\}$
(7)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+1}(x) -$ $- D_{2\nu+1}(-x)\}, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$-y^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu}(y) +$ $+ D_{2\nu}(-y)\}$
(8)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) D_{-2\nu}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} y^{1/2-\nu} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) I_{\nu}(2^{-2}y^2)$
(9)	$x^{\nu-1/2} \exp(2^{-2}x^2) D_{-2\nu}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$y^{\nu-1/2} \exp(2^{-2}y^2) D_{-2\nu}(y)$
(10)	$x^{\nu-1/2} \exp(2^{-2}x^2) D_{-2\nu-2}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(2\nu+1)^{-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) D_{-2\nu-1}(y)$
(11)	$x^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) D_{2\mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{2\mu^{-1/2} \Gamma(\nu+1/2) y^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1) \alpha^{1+2\nu}} \times$ $\times {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2}; \nu-\mu+1; -\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)$
(12)	$x^{\nu-1/2} \exp(2^{-2}\alpha^2 x^2) D_{2\mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re}(1/2 - 2\mu)$	$\frac{\Gamma(1/2+\nu) \alpha^{2k_2 m + \mu}}{\Gamma(1/2-\mu) y^{\mu+1}} \exp\left(\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) \times$ $\times W_k, m\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right),$ $2k = 1/2 + \mu - \nu, 2m = 1/2 + \mu + \nu$
(13)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) D_{2\nu}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2)}{2 \cos(\nu\pi)} \times$ $\times [D_{2\nu+1}(y) - D_{2\nu+1}(-y)]$
(14)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu}(x) +$ $+ D_{2\nu}(-x)\}, \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+1}(y) -$ $- D_{2\nu+1}(-y)\}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(15)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu}(x) +$ $+ D_{2\nu}(-x)\}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$-y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+1}(y) -$ $- D_{2\nu+1}(-y)\}$
(16)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) D_{2\nu+2}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$-\frac{y^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}y^2)}{2 \cos(\nu\pi)} \times$ $\times [D_{2\nu+2}(y) + D_{2\nu+2}(-y)]$
(17)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+2}(x) +$ $+ D_{2\nu+2}(-x)\}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 - 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+2}(y) +$ $+ D_{2\nu+2}(-y)\}$
(18)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+2}(x) +$ $+ D_{2\nu+2}(-x)\}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$-y^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \{[1 + 2 \cos(\nu\pi)] D_{2\nu+2}(y) +$ $+ D_{2\nu+2}(-y)\}$
(19)	$x^{\nu+1/2} \exp(2^{-2}x^2) D_{2\nu+2}(x),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < -5/6$	$\pi^{-1} \sin(\nu\pi) \Gamma(2\nu+3) y^{-\nu-3/2} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) K_{\nu+1}(2^{-2}y^2)$
(20)	$x^{\nu+1/2} \exp(2^{-2}x^2) D_{-2\nu-1}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(2\nu+1) y^{\nu-1/2} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) D_{-2\nu-2}(y)$
(21)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}x^2) D_{-2\nu-3}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} y^{-\nu-3/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times I_{\nu+1}(2^{-2}y^2)$
(22)	$x^{\nu+1/2} \exp(2^{-2}x^2) D_{-2\nu-3}(x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$y^{\nu+1/2} \exp(2^{-2}y^2) D_{-2\nu-3}(y)$
(23)	$x^{\nu+1/2} \exp(-2^{-2}\alpha^2x^2) D_{2\mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{2^{\mu} \Gamma(\nu+3/2) y^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu-\mu+3/2) \alpha^{2\nu+2}} \times$ $\times {}_1F_1\left(\nu+\frac{3}{2}; \nu-\mu+\frac{3}{2}; -\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)$
(24)	$x^{\nu+1/2} \exp(2^{-2}\alpha^2x^2) D_{2\mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < 3\pi/4$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < -1/2 - 2 \operatorname{Re} \mu$	$\frac{\Gamma(3/2+\nu) 2^{1/2+m+\mu} \alpha^{2k+1}}{\Gamma(-\mu) y^{\mu+3/2}} \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) W_{k,m}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right),$ $2k = \mu - \nu - 1, 2m = \mu + \nu + 1$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(25)	$x^{\lambda} \exp(-2^{-2}\alpha^2 x^2) D_{\mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4$ $\operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -3/2$	$\frac{2^{-c-3\nu/2}\pi^{1/2} \Gamma(2b) y^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(c+1/2) \alpha^{2b}} \times$ $\times {}_2F_2\left(b, b + \frac{1}{2}; \nu + 1, c + \frac{1}{2}; -\frac{y^2}{2\alpha^2}\right),$ $2b = \lambda + \nu + 3/2, 2c = \lambda - \mu + 3/2$
(26)	$x^{\lambda} \exp(2^{-2}\alpha^2 x^2) D_{\mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < 3\pi/4$ $\operatorname{Re} \mu < -\operatorname{Re} \lambda < \operatorname{Re} \nu + 3/2$	$\frac{2^{\lambda-\mu/2-1/2}\pi^{-1/2}}{\Gamma(-\mu) y^{\lambda+1}} \times$ $\times G_{23}^{2c}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \middle \tau + \nu, -\mu/2, \tau\right),$ $\tau = \frac{3}{4} + \frac{\lambda - \nu}{2}$
(27)	$D_{-1/2-\nu}(\alpha \exp(2^{-2}\pi i) x^{1/2}) \times$ $\times D_{-1/2-\nu}(\alpha \exp(-2^{-2}\pi i) x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{-\nu} \pi^{1/2} [\Gamma(\nu + 1/2)]^{-1} y^{-\nu-1/2} \times$ $\times (\alpha^2 + 2y)^{-1/2} [(\alpha^2 + 2y)^{1/2} - \alpha]^{2\nu}$
(28)	$x^{-1/2} D_{-1/2-\nu}(\alpha \exp(2^{-2}\pi i) x^{-1/2}) \times$ $\times D_{-1/2-\nu}(\alpha \exp(-2^{-2}\pi i) x^{-1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{1/2}\pi^{1/2} [\Gamma(\nu + 1/2)]^{-1} y^{-1} \times$ $\times \exp[-\alpha(2y)^{1/2}]$

8.17. Гипергеометрическая функция Гаусса

(1)	$x^{2\alpha+\nu-1/2} \times$ $\times {}_2F_1(\alpha - \nu - 1/2, \alpha; 2\alpha; -\lambda^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \nu < -1/2, \operatorname{Re} \lambda > 0$ $\operatorname{Re}(\alpha + \nu) > -1/2$	$\frac{i \Gamma(1/2 + \alpha) \Gamma(1/2 + \alpha + \nu)}{\pi^{21-\nu-2\alpha}\lambda^{2\alpha-1}} y^{-\nu-3/2} \times$ $\times W_{1/2-\alpha, -1/2-\nu}(y/\lambda) \times$ $\times [W_{1/2-\alpha, -1/2-\nu}(e^{-i\pi}y/\lambda) -$ $- W_{1/2-\alpha, -1/2-\nu}(e^{i\pi}y/\lambda)]$
(2)	$x^{2\alpha-\nu-1/2} \times$ $\times {}_2F_1(\nu + \alpha - 1/2, \alpha; 2\alpha; -\lambda^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > -1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{2\alpha-\nu} \Gamma(1/2 + \alpha)}{\lambda^{2\alpha-1} \Gamma(2\nu)} y^{\nu-3/2} \times$ $\times M_{\alpha-1/2, \nu-1/2}(y/\lambda) \times$ $\times W_{1/2-\alpha, \nu-1/2}(y/\lambda)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(3)	$x^{\nu+1/2} {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu+1; -\lambda^2 x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \max(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta) - 3/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{\nu-\alpha-\beta+2} \Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} y^{\alpha+\beta-\nu-3/2} \times$ $\times K_{\alpha-\beta}(y/\lambda)$
(4)	$x^{\nu+1/2} \times$ $\times {}_2F_1[\alpha, \beta; 2^{-1}(\beta+\nu)+1; -\lambda^2 x^2],$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \max(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta) - 3/2$	$\frac{\Gamma(\beta/2 + \nu/2 + 1)}{\pi^{1/2} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{y^{\beta-1/2}}{2^{\beta-1-\lambda\nu+\beta+1}} \times$ $\times \left[K_{(\nu-\beta+1)/2} \left(\frac{y}{2\lambda} \right) \right]^2$
(5)	$x^{\nu+1/2} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2 x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \max(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta) - 3/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{\nu+1} \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} y^{-\nu-3/2} \times$ $\times G_{13}^{30} \left(\frac{y^2}{4\lambda^2} \mid \nu+1, \alpha, \beta \right)$
(6)	$x^{\delta-1/2} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2 x^2),$ $-\operatorname{Re} \nu - 1 < \operatorname{Re} \delta <$ $< 2 \max(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta) - 1/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{\delta} \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} y^{-\delta-1/2} \times$ $\times G_{24}^{31} \left(\frac{y^2}{4\lambda^2} \mid \tau+\nu, \alpha, \beta, \tau \right),$ $\tau = \frac{1+\delta-\nu}{2}$
(7)	$x^{-2\alpha-3/2} \times$ $\times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} + \alpha, 1 + \alpha; 1 + 2\alpha; -\frac{4\lambda^2}{x^2} \right),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \lambda > 0$ $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$	$\lambda^{-2\alpha} y^{1/2} I_{\nu/2+\alpha}(\lambda y) K_{\nu/2-\alpha}(\lambda y)$
(8)	$x^{\nu-4\alpha+1/2} \times$ $\times {}_2F_1(\alpha, \alpha+1/2; \nu+1; -\lambda^2 x^{-2}),$ $\operatorname{Re} \alpha - 1 < \operatorname{Re} \nu < 4 \operatorname{Re} \alpha - 3/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\alpha)} 2^{\nu} \lambda^{1-2\alpha} y^{2\alpha-\nu-1/2} \times$ $\times I_{\nu}(2^{-1}\lambda y) K_{2\alpha-\nu-1}(2^{-1}\lambda y)$
(9)	$x^{\delta-1/2} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2 x^{-2}),$ $-1 - \operatorname{Re} \nu - 2 \min(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta) <$ $< \operatorname{Re} \delta < -1/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{\delta} \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} y^{-\delta-1/2} \times$ $\times G_{24}^{22} \left(\frac{\lambda^2 y^2}{4} \mid \tau+\nu, 0, 1-\nu, \tau \right),$ $\tau = \frac{1+\delta-\nu}{2}$
(10)	$x^{\nu+1/2} (1+x)^{-2\alpha} \times$ $\times {}_2F_1 \left[\alpha, \nu + \frac{1}{2}; 2\nu+1; \frac{4x}{(1+x)^2} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \alpha - 3/2$	$\frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\nu-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} 2^{2\nu-2\alpha+1} \times$ $\times y^{2\alpha-2\nu-3/2} J_{\nu}(y)$

8.18. Вырожденные гипергеометрические функции

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(1)	$x^{-1} \exp(-2^{-1}x^2) \times$ $\times M_{\nu/2-1/4, \nu/2+1/4}(x^2),$ $\text{Re } \nu > -1/2$	$(2\nu + 1) 2^{-\nu} y^{\nu-1/2} \text{Erfc}(y/2)$
(2)	$x^{-3/2} \exp(-2^{-1}x^2) \times$ $\times M_{\nu/2+1/2, \nu/2+1/2}(x^2),$ $\text{Re } \nu > -1$	$\frac{\Gamma(\nu+2) y^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+3/2) 2^{\nu}} \text{Erfc}(y/2)$
(3)	$x^{2\mu-\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{3\mu-\nu+1/2, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\text{Re } \mu > -1/2, \text{Re}(4\mu-\nu) > -1/2$	$y^{2\mu-\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times M_{3\mu-\nu+1/2, \mu}(2^{-1}y^2)$
(4)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\nu-\mu, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\text{Re } \nu > -1/2$	$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{2^{\nu-\mu} \Gamma(\nu+1/2)} y^{\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times D_{2\nu-4\mu}(y)$
(5)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\nu-\mu+1, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\text{Re } \nu > -1$	$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2) 2^{\nu-\mu+1}} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) D_{2\nu-4\mu+1}(y)$
(6)	$x^{-\lambda-1} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\lambda+\mu, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\lambda = 2\mu - \nu - 1/2$ $-1 < \text{Re } \nu < 4 \text{Re } \mu$	$\pi^{-1/2} 2^{-5(\mu+\nu/3)} \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(4\mu-\nu)} y^{\lambda+2\mu} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) K_{\lambda}(2^{-2}y^2)$
(7)	$x^{-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \nu/2}(2^{-1}x^2),$ $\text{Re } \nu > -1, \text{Re } \kappa < 1/2$	$\frac{2^{-\kappa} \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\kappa+\nu/2+1/2)} y^{2\kappa-1/2} \times$ $\times \exp(-2^{-1}y^2)$
(8)	$x^{2\mu-\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $-1/2 < \text{Re } \mu < \text{Re}(\kappa+\nu/2) - 1/4$	$\frac{\Gamma(2\mu+1) 2^{\mu-\kappa}}{\Gamma(1/2+\kappa-\mu+\nu) y^{1-\kappa+\mu}} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) M_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2),$ $2\alpha = 1/2 + \kappa + 3\mu - \nu$ $2\beta = -1/2 + \kappa - \mu + \nu$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(9)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re}(\kappa + \mu) - 1/2$	$2^{\alpha-\kappa} \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+\kappa+1/2)} y^{\kappa+\mu-1} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) W_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2),$ $2\alpha = \kappa - 3\mu + \nu + 1/2$ $2\beta = \kappa + \mu - \nu - 1/2$
(10)	$x^{2\rho-1/2} \exp(-2^{-1}\alpha x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \mu}(\alpha x^2),$ $-1 - \operatorname{Re}(\nu/2 + \mu) <$ $< \operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re} \kappa - 1/4$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+\kappa+1/2)} 2^{2\rho} y^{-2\rho-1/2} \times$ $\times G_{23}^{21} \left(\frac{y^2}{4\alpha} \middle \begin{matrix} 1/2 - \mu, 1/2 + \mu \\ 1/2 + \rho + \nu/2, \kappa, 1/2 + \rho - \nu/2 \end{matrix} \right)$
(11)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times W_{3\mu-\nu-1/2, \pm\mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) > -1$	$\pi^{1/2} 2^{\nu-3\mu} y^{4\mu-\nu-1/2} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times I_{\nu-2\mu+1/2}(2^{-2}y^2)$
(12)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(2^{-2}x^2) \times$ $\times W_{\nu-3\mu+1/2, \pm\mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) > -1$ $\operatorname{Re}(3\nu - 8\mu) < -3/2$	$\pi^{-1/2} 2^{\nu-3\mu} \frac{\Gamma(1+\nu-2\mu)}{\Gamma(4\mu-\nu)} y^{4\mu-\nu-1/2} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) K_{\nu-2\mu+1/2}(2^{-2}y^2)$
(13)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(2^{-2}x^2) \times$ $\times W_{3\mu-\nu-1/2, \pm\mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) > -1$ $\operatorname{Re}(\nu - 4\mu) > -1/2$	$y^{\nu-2\mu-1/2} \exp(2^{-2}y^2) \times$ $\times W_{3\mu-\nu-1/2, \pm\mu}(2^{-1}y^2)$
(14)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times W_{\kappa, \pm\mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) > -1$	$\frac{\Gamma(1+\nu-2\mu)}{\Gamma(1+2\beta)} 2^{\beta-\mu} y^{\kappa+\mu-1} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) M_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2),$ $2\alpha = 1/2 + \kappa + \nu - 3\mu$ $2\beta = 1/2 - \kappa + \nu - \mu$
(15)	$x^{\nu-2\mu-1/2} \exp(2^{-2}x^2) \times$ $\times W_{\kappa, \pm\mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\nu - 2\mu) > -1$ $\operatorname{Re}(\kappa - \mu + \nu/2) < -1/4$	$\frac{\Gamma(1+\nu-2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - \kappa)} 2^{\kappa-\alpha} y^{\mu-\kappa-1} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) W_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2),$ $2\alpha = \kappa + 3\mu - \nu - 1/2$ $2\beta = \kappa - \mu + \nu + 1/2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(16)	$x^{2\rho-1/2} \exp(-2^{-1}\alpha x^2) \times$ $\times W_{\kappa, \mu}(\alpha x^2), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(\rho \pm \mu + \nu/2) > -1$	$\frac{\Gamma(1 + \mu + \nu/2 + \rho) \Gamma(1 - \mu + \nu/2 + \rho)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(3/2 - \kappa - \nu/2 + \rho)} \times$ $\times 2^{-\nu-1} \alpha^{-\nu/2-\rho-1/2} y^{\nu+1/2} \times$ $\times {}_2F_2\left(\lambda + \mu, \lambda - \mu; \nu + 1, \right.$ $\left. \frac{1}{2} - \kappa + \lambda; -\frac{y^2}{4\alpha}\right),$ $\lambda = 1 + \nu/2 + \rho$
(17)	$x^{2\rho-1/2} \exp(2^{-1}\alpha x^2) \times$ $\times W_{\kappa, \mu}(\alpha x^2), \quad \arg \alpha < \pi$ $-1 - \operatorname{Re}(\nu/2 \pm \mu) <$ $< \operatorname{Re} \rho < -1/4 - \operatorname{Re} \kappa$	$\frac{2^{2\rho} y^{-2\rho-1/2}}{\Gamma(\nu + \mu - \kappa) \Gamma(1/2 - \mu - \kappa)} \times$ $\times G_{23}^{22}\left(\frac{y^2}{4\alpha} \middle \begin{matrix} 1/2 - \mu, 1/2 + \mu \\ 1/2 + \rho + \nu/2, -\kappa, 1/2 + \rho - \nu/2 \end{matrix}\right)$
(18)	$x^{-1/2} M_{\kappa, \nu/2}(-iax) \times$ $\times M_{-\kappa, \nu/2}(-iax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \kappa < 1/4$	$\frac{a \exp[-2^{-1}(\nu+1)\pi i] [\Gamma(1+\nu)]^2}{\Gamma(1/2 + \kappa + \nu/2) \Gamma(1/2 - \kappa + \nu/2)} \times$ $\times y^{-1/2-2\kappa} (a^2 - y^2)^{-1/2} \times$ $\times \{[a + (a^2 - y^2)^{1/2}]^{2\kappa} +$ $+ [a - (a^2 - y^2)^{1/2}]^{2\kappa}\}, \quad 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(19)	$x^{-1/2} M_{-\mu/2, \nu/2}(\alpha x) \times$ $\times W_{\mu/2, \nu/2}(\alpha x), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re} \mu < 1/2, \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\alpha \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2 - \mu/2 + \nu/2)} y^{-\mu-1/2} \times$ $\times [a + (a^2 + y^2)^{1/2}]^{\mu} (a^2 + y^2)^{-1/2}$
(20)	$x^{2\mu-\nu-1/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha x) M_{-\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(2\mu + 2\kappa - \nu) < 1/2$	$2^{2\mu-\nu+2\kappa} \alpha^{2\kappa} y^{\nu-2\mu-2\kappa-1/2} \times$ $\times \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\nu - \kappa - \mu + 1/2)} \times$ $\times {}_3F_2\left(1/2 - \kappa, 1 - \kappa, 1/2 - \kappa + \mu; \right.$ $\left. 1 - 2\kappa, 1/2 - \kappa - \mu + \nu; -y^2/\alpha^2\right)$
(21)	$x^{2\rho-\nu-5/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha x) \times$ $\times M_{-\kappa, \mu}(\alpha x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\rho + \mu) > 0$ $\operatorname{Re}(2\rho + 2\kappa - \nu) < 5/2$	$\frac{2^{2\rho-\nu-2} \Gamma(2\mu+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \kappa + \mu)} y^{\nu-2\rho+3/2} \times$ $\times G_{44}^{23}\left(\frac{y^2}{\alpha^2} \middle \begin{matrix} 1/2, 0, 1/2 - \mu, 1/2 + \mu \\ \rho - 1/2, -\kappa, \kappa, \rho - \nu - 1/2 \end{matrix}\right)$
(22)	$x^{2\rho-\nu-5/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha x) W_{-\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \mu , \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\rho + \mu) \Gamma(\rho - \mu) \Gamma(2\rho)}{\Gamma(1/2 + \kappa + \rho) \Gamma(1/2 - \kappa + \rho) \Gamma(1 + \nu)} \times$ $\times 2^{-\nu-1} \alpha^{1-2\rho} y^{\nu+1/2} \times$ $\times {}_4F_3\left(\rho, \rho + 1/2, \rho + \mu, \rho - \mu; \right.$ $\left. 1/2 + \kappa + \rho, 1/2 - \kappa + \rho, 1 + \nu; \right.$ $\left. -y^2/\alpha^2\right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(23)	$x^{2\rho - \nu - 5/2} W_{\kappa, \mu}(iax) \times$ $\times W_{\kappa, \mu}(-iax), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(2\rho + 2\kappa - \nu) < 5/2$	$\frac{2^{2\rho - \nu - 2} y^{\nu - 2\rho + 3/2}}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)} \times$ $\times G_{41}^{24} \left(\frac{y^2}{a^2} \middle \begin{matrix} 1/2, 0, 1/2 - \mu, 1/2 + \mu \\ \rho - 1/2, -\kappa, \kappa, \rho - \nu - 1/2 \end{matrix} \right)$
(24)	$x^{-3/2} M_{-\mu, \nu/4}(2^{-1}x^2) \times$ $\times W_{\mu, \nu/4}(2^{-1}x^2), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\Gamma(1 + \nu/2) y^{1/2}}{\Gamma(1/2 + \nu/4 - \mu)} I_{\nu/4 - \mu}(2^{-2}y^2) \times$ $\times K_{\nu/4 + \mu}(2^{-2}y^2)$
(25)	$x^{-3/2} M_{\alpha - \beta, \nu/4 - \gamma}(2^{-1}x^2) \times$ $\times W_{\alpha + \beta, \nu/4 + \gamma}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \beta < 1/8, \operatorname{Re} \nu > -1$ $\operatorname{Re}(\nu - 4\gamma) > -2$	$\frac{\Gamma(1 + \nu/2 - 2\gamma)}{\Gamma(1 + \nu/2 - 2\beta)} y^{-3/2} \times$ $\times M_{\alpha - \gamma, \nu/4 - \beta}(2^{-1}y^2) \times$ $\times W_{\alpha + \gamma, \nu/4 + \beta}(2^{-1}y^2)$
(26)	$x^{1/2} M_{\nu/2, \mu}(2/x) W_{-\nu/2, \mu}(2/x),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > -1/4$	$\frac{4 \Gamma(1 + 2\mu)}{\Gamma(1/2 + \nu/2 + \mu)} y^{-1/2} J_{2\mu}(2y^{1/2}) \times$ $\times K_{2\mu}(2y^{1/2})$
(27)	$x^{1/2} W_{\nu/2, \mu}(2/x) W_{-\nu/2, \mu}(2/x),$ $\operatorname{Re}(\nu \pm 2\mu) > -1$	$-4y^{-1/2} \times$ $\times \{ \sin[(\mu - \nu/2)\pi] J_{2\mu}(2y^{1/2}) +$ $+ \cos[(\mu - \nu/2)\pi] Y_{2\mu}(2y^{1/2}) \} \times$ $\times K_{2\mu}(2y^{1/2})$
(28)	$x^{1/2} W_{-\nu/2, \mu}(ia/x) \times$ $\times W_{-\nu/2, \mu}(-ia/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $ \operatorname{Re} \mu < 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1$	$4\alpha y^{-1/2} [\Gamma(1/2 + \mu + \nu/2) \times$ $\times \Gamma(1/2 - \mu + \nu/2)]^{-1} \times$ $\times K_{\mu}[(2i\alpha y)^{1/2}] K_{\mu}[(-2i\alpha y)^{1/2}]$
(29)	$x^{-1/2} M_{-\mu, \nu/2} \{ \alpha [(\beta^2 + x^2)^{1/2} - \beta] \} \times$ $\times W_{\mu, \nu/2} \{ \alpha [(\beta^2 + x^2)^{1/2} + \beta] \},$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu < 1/4$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$\frac{\alpha \Gamma(1 + \nu) [\alpha^2 + y^2]^{1/2} + \alpha]^{2\mu}}{\Gamma(1/2 + \nu/2 - \mu) y^{1/2 + 2\mu} (\alpha^2 + y^2)^{1/2}} \times$ $\times \exp[-\beta(\alpha^2 + y^2)^{1/2}]$

8.19. Обобщенные гипергеометрические ряды и разные функции

(1)	$x^{\nu + 1/2} {}_1F_1(2\alpha - \nu; \alpha + 1; -2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(4\alpha - 3\nu) > 1/2$	$\frac{2^{\nu - \alpha + 1/2} \Gamma(\alpha + 1)}{\pi^{1/2} \Gamma(2\alpha - \nu)} y^{2\alpha - \nu - 1/2} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) K_{\alpha - \nu - 1/2}(2^{-2}y^2)$
-----	--	---

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(2)	$x^{\alpha-1/2} {}_1F_1\left(\alpha; \frac{1+\alpha+\nu}{2}; -\frac{x^2}{2}\right),$ $\operatorname{Re} \alpha > -1/2, \operatorname{Re}(\alpha + \nu) > -1$	$y^{\alpha-1/2} {}_1F_1\left(\alpha; \frac{1+\alpha+\nu}{2}; -\frac{y^2}{2}\right)$
(3)	$x^{\nu+1/2-2\alpha} \times$ $\times {}_1F_1\left(\alpha; 1+\nu-\alpha; -2^{-1}x^2\right),$ $\operatorname{Re} \alpha - 1 < \operatorname{Re} \nu < 4 \operatorname{Re} \alpha - 1/2$	$\frac{\pi^{1/2} \Gamma(1+\nu-\alpha)}{2^{2\alpha-\nu-1/2} \Gamma(\alpha)} y^{2\alpha-\nu-1/2} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) I_{\alpha-1/2}(2^{-2}y^2)$
(4)	$x^{\nu+1/2} {}_1F_1(\alpha; \beta; -\lambda x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \alpha - 1/2$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^1 \alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha) \lambda^{\alpha/2+\nu/2}} y^{\alpha-3/2} \exp\left(-\frac{y^2}{8\lambda}\right) \times$ $\times W_{\kappa, \mu}\left(\frac{y^2}{4\lambda}\right),$ $2\kappa = \alpha - 2\beta + \nu + 2$ $2\mu = \alpha - \nu - 1$
(5)	$x^{2\beta-\nu-1/2} {}_1F_1(\alpha; \beta; -\lambda x^2),$ $0 < \operatorname{Re} \beta < 3/4 + \operatorname{Re}(\alpha + \nu/2)$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{2\beta-2\alpha-\nu-1} \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + \nu + 1) \lambda^{\alpha}} y^{2\alpha-2\beta+\nu+1/2} \times$ $\times {}_1F_1\left(\alpha; 1 + \alpha - \beta + \nu; -\frac{y^2}{4\lambda}\right)$
(6)	$x^{2\rho-1/2} {}_1F_1(\alpha; \beta; -\lambda x^2),$ $-1 - \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \rho < 1/2 + 2 \operatorname{Re} \alpha$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$\frac{2^{2\rho} \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha) y^{2\rho+1/2}} \times$ $\times G_{23}^{21}\left(\frac{y^2}{4\lambda} \middle \begin{matrix} 1, \beta \\ 1/2, \rho + 1/2, \alpha, 1/2, \rho - \nu/2 \end{matrix}\right)$
(7)	$x^{\nu+1/2} {}_1F_2(\alpha; \beta, \nu+1; -2^{-2}x^2),$ $\operatorname{Re} > -1, \operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} 2^{\nu+1} y^{2\alpha-\nu-3/2} \times$ $\times (1-y^2)^{\beta-\alpha-1}, \quad 0 < y < 1$ $0, \quad 1 < y < \infty$
(8)	$x^{\nu+1/2} (1-x^2)^{\mu-\nu-1} \times$ $\times {}_1F_2\left[\mu+1/2; 2\mu+1, \mu-\nu;$ $-a(1-x^2)\right],$ $0 < x < 1$ $0,$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{2\mu-\nu-1} a^{-\mu} \Gamma(1+\mu) \times$ $\times \Gamma(\mu-\nu) y^{\nu+1/2} \times$ $\times J_{\mu}\left[2^{-1}(y^2+4a^2)^{1/2} + y/2\right] \times$ $\times J_{\mu}\left[2^{-1}(y^2+4a^2)^{1/2} - y/2\right]$
(9)	$x^{\nu+1/2} (1-x^2)^{\mu-3/2} \times$ $\times {}_1F_2\left[1; \frac{\mu}{2}, \frac{\mu+1}{2}; -a^2(1-x^2)^2\right],$ $0 < x < 1$ $0,$ $1 < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{-\mu-2\nu-1} \Gamma(\mu) a^{-\mu-\nu} y^{\nu+1/2} \times$ $\times U_{\nu+\mu}(4a, y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(10)	$x^{\rho-1/2} {}_2F_2\left(\rho, \frac{\rho+m+1}{2}; \frac{\rho-m+1}{2}, \frac{\rho+v+1}{2}; \frac{x^2}{2}\right),$ $\operatorname{Re}(\rho+v+1) > 0, \operatorname{Re} \rho > 1/2$ $\operatorname{Re}(\rho-m+1) > 0$	$(-1)^m y^{\rho-1/2} {}_2F_2\left(\rho, \frac{\rho+m+1}{2}; \frac{\rho-m+1}{2}, \frac{\rho+v+1}{2}; -\frac{y^2}{2}\right)$
(11)	$x^{v+1/2} {}_3F_2(\alpha, \alpha+\beta, \alpha-\beta;$ $\alpha+1/2, v+1; -x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 2^{-1} \operatorname{Re} v + 1/4 > -1/4$ $ \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \alpha - 2^{-1} \operatorname{Re} v - 1/4$	$\frac{2^{v-2\alpha+2} \Gamma(\alpha+1/2) \Gamma(v+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+\beta) \Gamma(\alpha-\beta)} \times$ $\times y^{-2\alpha-v-3/2} [K_{\beta}(2^{-1}y)]^2$
(12)	$x^{v+1/2} {}_3F_2(\beta+\rho, \beta-\rho, 2\beta-v-1;$ $\beta, \beta+1/2; -2^{-2}x^2),$ $ \operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re} \beta - 2^{-1} \operatorname{Re} v - 1/4$ $\operatorname{Re} v > -1, \operatorname{Re}(4\beta-3v) > 5/2$	$\frac{2^{v+3-2\beta} \Gamma(2\beta) y^{2\beta-v-3/2}}{\Gamma(\beta+\rho) \Gamma(\beta-\rho) \Gamma(2\beta-v-1)} \times$ $\times K_{v+1-\beta+\rho}(y) K_{v+1-\beta-\rho}(y)$
(13)	$x^{v+1/2} {}_3F_2(\alpha, \alpha+1/2, 2\alpha-v-1;$ $\alpha+1/2+\kappa, \alpha+1/2-\kappa; -x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} v < 2 \operatorname{Re} \alpha - 1/2$ $\operatorname{Re}(4\alpha-3v) > 5/2$	$\frac{\Gamma(\alpha+1/2+\kappa) \Gamma(\alpha+1/2-\kappa)}{\Gamma(2\alpha) \Gamma(2\alpha-v-1)} 2^{v+1} \times$ $\times y^{2\alpha-v-5/2} W_{\kappa, \alpha-v-1}(y) \times$ $\times W_{-\kappa, \alpha-v-1}(y)$
(14)	$x^{v+1/2} {}_3F_2(v+1/2, v+1/2+\mu,$ $v+1/2-\mu; v+1+\kappa,$ $v+1-\kappa; -x^2),$ $\operatorname{Re} v > -1/2$ $ \operatorname{Re} \mu < 2^{-1} \operatorname{Re} v + 1/4$	$\frac{\Gamma(v+\kappa+1) \Gamma(v-\kappa+1) \pi^{1/2} 2^{1-v}}{\Gamma(v+1/2) \Gamma(v+1/2+\mu) \Gamma(v+1/2-\mu)} \times$ $\times y^{v-3/2} W_{\kappa, \mu}(y) W_{-\kappa, \mu}(y)$
(15)	$x^{v+1/2} {}_3F_2\left(v+\frac{3}{2}, v+1+\mu,$ $v+1-\mu; v+\frac{3}{2}+\kappa,$ $v+\frac{3}{2}-\kappa; -x^2\right),$ $\operatorname{Re} v > -1$ $ \operatorname{Re} \mu < 2^{-1} \operatorname{Re} v + 3/4$	$\frac{\Gamma(v+\kappa+3/2) \Gamma(v-\kappa+3/2) \pi^{1/2} 2^{-v}}{\Gamma(v+3/2) \Gamma(v+1+\mu) \Gamma(v+1-\mu)} \times$ $\times y^{v-1/2} W_{\kappa, \mu}(y) W_{-\kappa, \mu}(y)$
(16)	$x^{v+1/2} \times$ $\times {}_4F_3(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha+\gamma, \alpha-\gamma;$ $\alpha, \alpha+1/2, v+1; -x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} v < 2 \operatorname{Re} \alpha - 1/2$ $ \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \alpha - 2^{-1} \operatorname{Re} v - 1/4$ $ \operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \alpha - 2^{-1} \operatorname{Re} v - 1/4$	$\frac{2^{v-4\alpha+3} \Gamma(2\alpha) \Gamma(v+1) y^{2\alpha-v-3/2}}{\Gamma(\alpha+\beta) \Gamma(\alpha-\beta) \Gamma(\alpha-\gamma) \Gamma(\alpha+\gamma)} \times$ $\times K_{\beta+\gamma}(y/2) K_{\beta-\gamma}(y/2)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(17)	$x^{\nu+1/2} \times$ $\times {}_4F_3(\alpha, \alpha+1/2, \alpha+\mu, \alpha-\mu;$ $1/2+\alpha+\kappa, 1/2+\alpha-\kappa; -x^2),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \alpha - 1/2$ $ \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \alpha - 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 1/4$	$\frac{\Gamma(1/2+\alpha+\kappa) \Gamma(1/2+\alpha-\kappa) \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha+\mu) \Gamma(\alpha-\mu)} \times$ $\times 2^{\nu+1} y^{2\alpha-\nu-3/2} \mathcal{W}_{\kappa, \mu}(y) \mathcal{W}_{-\kappa, \mu}(y)$
(18)	$x^{2\rho-1/2} {}_pF_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p;$ $\beta_1, \dots, \beta_p; -\lambda x^2),$ $-1 - \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \rho < 1/2 + 2 \operatorname{Re} \alpha_r$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, r=1, \dots, p$	$\frac{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_p)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)} 2^{2\rho} y^{-2\rho-1/2} \times$ $\times G_{p+1, p+2}^{p+1, 1} \left(\frac{y^2}{4\lambda} \middle 1, \beta_1, \dots, \beta_p \right),$ $h = 1/2 + \rho + \nu/2, k = 1/2 + \rho - \nu/2$
(19)	$x^{2\rho-1/2} {}_{m+1}F_m(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1};$ $\beta_1, \dots, \beta_m; -\lambda^2 x^2),$ $\operatorname{Re}(2\rho + \nu) > -1, \operatorname{Re} \lambda > 0$ $\operatorname{Re}(\rho - \alpha_r) < 1/4, r=1, \dots, m+1$	$\frac{2^{2\rho} \Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_m)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_{m+1})} y^{2\rho+1/2} \times$ $\times G_{m+1, m+3}^{m+2, 1} \left(z \middle 1, \beta_1, \dots, \beta_m \right),$ $h = 1/2 + \rho + \nu/2, k = 1/2 + \rho - \nu/2$ $z = \frac{y^2}{4\lambda^2}$
(20)	$x^{2\rho-1/2} G_{pq}^{mn} \left(\lambda x^2 \middle \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \right),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \lambda < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re}(\beta_j + \rho + \nu/2) > -1/2$ $j=1, \dots, m$ $\operatorname{Re}(\alpha_j + \rho) < 3/4, j=1, \dots, n$	$\frac{2^{2\rho}}{y^{2\rho+1/2}} \times$ $\times G_{p+2, q}^{m, n+1} \left(\frac{4\lambda}{y^2} \middle h, \alpha_1, \dots, \alpha_p, k \right)$ $h = 1/2 - \rho - \nu/2, k = 1/2 - \rho + \nu/2$
(21)	$x^{\nu+2n-1} [B(a+x, a-x)]^{-1},$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 2a - 2n - 7/2$	0, $\pi \leq y < \infty$
(22)	$x^{\nu+1/2} \operatorname{Erfc}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\alpha^{-\nu} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+2)} y^{-3/2} \exp\left(-\frac{y^2}{8\alpha^2}\right) \times$ $\times M_{\nu/2+1/2, \nu/2+1/2} \left(\frac{y^2}{4\alpha^2} \right)$
(23)	$x^{\nu-1/2} \operatorname{Erfc}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\alpha^{1/2-\nu} \Gamma(\nu+1/2)}{2^{1/2} \Gamma(\nu+3/2)} y \exp\left(-\frac{y^2}{8\alpha^2}\right) \times$ $\times M_{\nu/2-1/4, \nu/2+1/4} \left(\frac{y^2}{4\alpha^2} \right)$
(24)	$x^{-\mu-1/2} s_{\nu+\mu, -\nu+\mu+1}(x),$ $\operatorname{Re} \mu > -1, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2^{\nu-1} \Gamma(\nu) y^{1/2-\nu} (1-y^2)^{\mu},$ 0, $0 < y < 1$ 0, $1 < y < \infty$

Г Л А В А IX

У-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы называем *У-преобразованием порядка ν* функции $f(x)$ функцию

$$\mathfrak{Y}_\nu \{f(x); y\} = \int_0^\infty f(x) Y_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx$$

положительного аргумента y . Формула обращения 9.1 (1) дана Титчмаршем (1948, стр. 280). Обратным преобразованием является *Н-преобразование* (см. главу XI).

Из пар преобразований, данных в этой главе, можно вывести дальнейшие пары преобразований с помощью методов, указанных во введении к первому тому, а также с помощью общих формул из п. 9.1. Кроме того, У-преобразования связаны с преобразованиями Ганкеля соотношением

$$\mathfrak{Y}_\nu \{f(x); y\} = \text{ctg}(\nu\pi) \mathfrak{H}_\nu \{f(x); y\} - \frac{\mathfrak{H}_{-\nu} \{f(x); y\}}{\sin(\nu\pi)},$$

которое является непосредственным следствием соотношения между функциями Бесселя первого и второго рода. Это соотношение можно использовать для вычисления У-преобразований с помощью таблицы преобразований Ганкеля, приведенной в главе VIII.

9.1. Общие формулы

	$f(x)$	$\int_0^\infty f(x) Y_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu),$ $y > 0$
(1)	$\int_0^\infty g(y) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dy,$ $-1/2 < \text{Re } \nu < 1/2$	$g(y)$
(2)	$f(ax),$ $a > 0$	$a^{-1}g(a^{-1}y; \nu)$
(3)	$x^m f(x),$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^{1/2-\nu} \times$ $\times \left(\frac{d}{y dy}\right)^m [y^{\nu-1/2+m} g(y; \nu+m)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu),$ $y > 0$
(4)	$x^m f(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^m y^{1/2+\nu} \times$ $\times \left(\frac{d}{y dy}\right)^m \left y^{-1/2+m-\nu} g(y; \nu-m) \right $
(5)	$2\nu x^{-1} f(x)$	$y g(y; \nu-1) + y g(y; \nu+1)$
(6)	$2\nu f'(x)$	$(\nu-1/2) y g(y; \nu+1) -$ $- (\nu+1/2) y g(y; \nu-1)$
(7)	$x^{1/2-\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m \left[x^{\nu+m-1/2} f(x) \right],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^m g(y; \nu+m)$
(8)	$x^{1/2+\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m \left[x^{m-\nu-1/2} f(x) \right],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$(-y)^m g(y; \nu-m)$
(9)	$x^{1/2-\nu} \int_0^x \xi^{\nu-\mu+1/2} (x^2-\xi^2)^{\mu-1} \times$ $\times f(\xi) d\xi,$ $\operatorname{Re} \nu + 3/2 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu) y^{-\mu} g(y; \nu-\mu)$
(10)	$x^{-\mu} f(x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \int_y^{\infty} \eta^{1/2-\mu-\nu} (\eta^2-y^2)^{\mu-1} \times$ $\times g(\eta; \nu+\mu) d\eta$

9.2. Алгебраические функции и степени с произвольными показателями

(1)	$x^{-1/2},$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\operatorname{tg}(\nu\pi/2) y^{-1/2}$
(2)	$0,$ $x^{1/2+\nu},$ $0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < -1/2$	$-a^{\nu+1} y^{-1/2} Y_{\nu+1}(ay)$
(3)	$x^{\mu},$ $ \operatorname{Re} \nu - 3/2 < \mu < 0$	$2^{\mu+1/2} \times$ $\times \operatorname{ctg} [2^{-1} (\nu+1/2 - \mu) \pi] y^{-\mu-1} \times$ $\times \frac{\Gamma(3/4 + \nu/2 + \mu/2)}{\Gamma(1/4 + \nu/2 - \mu/2)}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(4)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\mu}, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu < 0$	$ay^{-\mu} [Y_{\nu-1}(ay) S_{\mu+1/2, \nu}(ay) -$ $-(\mu + \nu - 1/2) Y_{\nu}(ay) \times$ $\times S_{\mu-1/2, \nu-1}(ay)]$
(5)	$x^{-1/2} (x + \alpha)^{-1},$ $ \arg \alpha < \pi, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$ $\nu \neq 0, \quad \pm 1/2$	$\frac{\pi y^{1/2} [E_{\nu}(ay) + Y_{\nu}(ay)]}{\sin(\nu\pi)} +$ $+ 2 \operatorname{ctg}(\nu\pi) [J_{\nu}(ay) - J_{\nu}(ay)]$
(6)	$x^{\nu-1/2} (x + \alpha)^{-1}, \quad \arg \alpha < \pi$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$-2^{\nu+1} \pi^{-1} \alpha^{\nu} y^{1/2} \Gamma(\nu + 1) \times$ $\times S_{-\nu-1, \nu}(ay)$
(7)	$x^{-\nu-1/2} (x + \alpha)^{-1}, \quad \arg \alpha < \pi$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\alpha^{-\nu} y^{1/2} \{2^{-1} \pi \operatorname{tg}(\nu\pi) [Y_{\nu}(ay) -$ $- H_{\nu}(ay)] - 2^{1-\nu} \pi^{-1} \cos(\nu\pi) \times$ $\times \Gamma(1 - \nu) S_{\nu-1, \nu}(ay)\}$
(8)	$x^{\mu-1/2} (x - \alpha)^{-1}, \quad \arg \alpha < \pi$ $\operatorname{Re}(\mu \pm \nu) > -1, \quad \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$(2\alpha)^{\mu} \pi^{-1} y^{1/2} \times$ $\times \{\sin[2^{-1} \pi(\mu - \nu)] \times$ $\times \Gamma(1/2 + \mu/2 + \nu/2) \times$ $\times \Gamma(1/2 + \mu/2 - \nu/2) S_{-\mu, \nu}(ay) -$ $- 2 \cos[2^{-1} \pi(\mu - \nu)] \times$ $\times \Gamma(1 + \mu/2 + \nu/2) \times$ $\times \Gamma(1 + \mu/2 - \nu/2) S_{-\mu-1, \nu}(ay)\}$
(9)	$x^{-1/2} (x - a)^{-1},$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\pi y^{1/2} \{\operatorname{ctg}(\nu\pi) [Y_{\nu}(ay) + E_{\nu}(ay)] +$ $+ J_{\nu}(ay) + 2[\operatorname{ctg}(\nu\pi)]^2 \times$ $\times [J_{\nu}(ay) - J_{\nu}(ay)]\}$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(10)	$x^{\nu-1/2} (x - a)^{-1},$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\alpha^{\nu} y^{1/2} [\pi J_{\nu}(ay) - 2^{\nu+1} \pi^{-1} \Gamma(\nu + 1) \times$ $\times S_{-\nu-1, \nu}(ay)]$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(11)	$x^{-\nu-1/2} (x - a)^{-1},$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\alpha^{-\nu} y^{1/2} \{2^{-1} \pi \operatorname{tg}(\nu\pi) [H_{\nu}(ay) -$ $- Y_{\nu}(ay)] + \pi J_{\nu}(ay) -$ $- 2^{1-\nu} \pi^{-1} \cos(\nu\pi) \Gamma(1 - \nu) \times$ $\times S_{\nu-1, \nu}(ay)\}$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(12)	$x^{\mu-1/2} (x-a)^{-1}, \quad a > 0$ $\operatorname{Re}(\mu \pm \nu) > -1, \quad \operatorname{Re} \mu > 3/2$	$\pi a^{\mu} y^{1/2} J_{\nu}(ay) - (2a)^{\mu} \pi^{-1} y^{1/2} \times$ $\times \{ \sin [2^{-1} \pi (\mu - \nu)] \times$ $\times \Gamma(1/2 + \mu/2 + \nu/2) \times$ $\times \Gamma(1/2 + \mu/2 - \nu/2) S_{-\mu, \nu}(ay) +$ $+ 2 \cos [2^{-1} \pi (\mu - \nu)] \times$ $\times \Gamma(1 + \mu/2 + \nu/2) \times$ $\times \Gamma(1 + \mu/2 - \nu/2) S_{-\mu-1, \nu}(ay) \}$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(13)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{y^{1/2}}{\cos(\nu\pi/2)} \left[-\frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_{\nu}(ay) - \right.$ $\left. - \frac{1}{\alpha} K_{\nu}(ay) + \frac{y \sin(\nu\pi/2)}{1-\nu^2} \times \right.$ $\left. \times {}_1F_2\left(1; \frac{3-\nu}{2}, \frac{3+\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y^2}{4}\right) \right]$
(14)	$x^{\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$-\alpha^{\nu-1} y^{1/2} K_{\nu}(ay)$
(15)	$x^{\nu+3/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\alpha^{\nu+1} y^{1/2} K_{\nu}(ay)$
(16)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-5/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\alpha^{-\nu-1} y^{1/2} \{ 2^{-1} \pi \operatorname{tg}(\nu\pi) [L_{\nu}(ay) -$ $- I_{\nu}(ay)] - \frac{K_{\nu}(ay)}{\cos(\nu\pi)} \}$
(17)	$x^{\mu-3/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $ \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu < 7/2$	$2^{\mu-3} \pi^{-1} y^{5/2-\mu} \cos [2^{-1} \pi (\mu - \nu)] \times$ $\times \Gamma(\mu/2 + \nu/2 - 1) \Gamma(\mu/2 - \nu/2 - 1) \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 2 - \frac{\mu+\nu}{2}, 2 - \frac{\mu-\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y^2}{4}\right) -$ $\pi a^{\mu-2} y^{1/2} \operatorname{ctg} [2^{-1} \pi (\mu - \nu)] I_{\nu}(ay)$ $\frac{2 \sin [2^{-1} \pi (\mu + \nu)]}{\alpha^{\mu-2} y^{1/2} K_{\nu}(ay)}$ $\frac{1}{\sin [2^{-1} \pi (\mu - \nu)]}$
(18)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\frac{y^{1/2} K_{\nu/2}(ay/2)}{\pi \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times [K_{\nu/2}(ay/2) + \pi \sin(\nu\pi/2) \times$ $\times I_{\nu/2}(ay/2)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(19)	$x^{1/2+\nu} (x^2 + \alpha^2)^{\mu}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < -2 \operatorname{Re} \mu$	$2^{\nu-1} \pi^{-1} \alpha^{2\mu+2} (1+\mu)^{-1} \Gamma(\nu) y^{1/2-\nu} \times$ $\times {}_1F_2(1; 1-\nu, 2+\mu; 2^{-2} \alpha^2 y^2) -$ $- 2^{\mu} \alpha^{\mu+\nu+1} (\sin \nu \pi)^{-1} \Gamma(\mu+1) \times$ $\times y^{-1/2-\mu} [I_{\mu+\nu+1}(\alpha y) -$ $- 2 \cos(\mu \pi) K_{\mu+\nu+1}(\alpha y)]$
(20)	$x^{1/2-\nu} (x^2 + \alpha^2)^{\mu}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $1/2 + 2 \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{\mu} \alpha^{\mu-\nu+1} y^{-1/2-\mu} [\pi^{-1} \cos(\nu \pi) \times$ $\times \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu) I_{\nu-\mu-1}(\alpha y) -$ $- \frac{2K_{\nu-\mu-1}(\alpha y)}{\sin(\nu \pi) \Gamma(-\mu)}] -$ $- \frac{\alpha^{2\mu+2} \operatorname{ctg}(\nu \pi) y^{1/2+\nu}}{2^{\nu+1} (\mu+1) \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_2(1; \nu+1, \mu+2; 2^{-2} \alpha^2 y^2)$
(21)	$x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1},$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-1} \pi a^{-1} y^{1/2} [J_{\nu}(\alpha y) +$ $+ \operatorname{tg}(\nu \pi/2) \{\operatorname{tg}(\nu \pi/2) [J_{\nu}(\alpha y) -$ $- J_{\nu}(\alpha y)] - E_{\nu}(\alpha y) - Y_{\nu}(\alpha y)\}]$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(22)	$x^{\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{-1},$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$2^{-1} \pi a^{\nu-1} y^{1/2} J_{\nu}(\alpha y)$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(23)	$x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{-1},$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2^{-1} \pi a^{\nu} y^{1/2} J_{\nu}(\alpha y) -$ $- 2^{\nu+1} \pi^{-1} \Gamma(\nu+1) a^{\nu} y^{1/2} \times$ $\times S_{-\nu-1, \nu}(\alpha y)$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(24)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{-1},$ $a > 0, \quad -5/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi y^{1/2}}{2a^{\nu+1} \cos(\nu \pi)} \times$ $\times [J_{-\nu}(\alpha y) + \sin(\nu \pi) \mathbf{H}_{\nu}(\alpha y)]$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.
(25)	$x^{\mu-3/2} (x^2 - a^2)^{-1},$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu < 7/2$	$2^{-1} \pi a^{\mu-2} y^{1/2} J_{\nu}(\alpha y) +$ $+ 2^{\mu-1} \pi^{-1} a^{\mu-2} y^{1/2} \times$ $\times \cos[2^{-1} \pi(\mu-\nu)] \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) S_{1-\mu, \nu}(\alpha y)$ Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$		$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(26)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2},$ 0,	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\nu = 0$	$2^{-1} \pi y^{-1/2} J_0(ay/2) Y_0(ay/2)$
(27)	0, $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2},$	$0 < x < a$ $a < x < \infty$	$2^{-2} \pi y^{1/2} \{ [J_{\nu/2}(ay/2)]^2 - [Y_{\nu/2}(ay/2)]^2 \}$
(28)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2},$ 0,	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{(\pi/2)^{1/2} a^{\nu+1/2}}{\sin(\nu\pi)} \times$ $\times [\cos(\nu\pi) J_{\nu+1/2}(ay) - H_{-\nu-1/2}(y)]$
(29)	0, $x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2},$	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < 1/2$	$(\pi/2)^{1/2} a^{\nu+1/2} J_{\nu+1/2}(ay)$
(30)	$x^{1/2-\nu} (a^2 - x^2)^{-1/2},$ 0,	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < 1$	$(\pi/2)^{1/2} a^{1/2-\nu} \{ \operatorname{ctg}(\nu\pi) [H_{\nu-1/2}(ay) - Y_{\nu-1/2}(ay)] - J_{\nu-1/2}(y) \}$
(31)	$x^{\nu-1/2} (a^2 - x^2)^{\nu-1/2},$ 0,	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2^{\nu-1} \pi^{1/2} a^{2\nu} y^{1/2-\nu} \Gamma(\nu+1/2) \times$ $\times J_{\nu}(ay/2) Y_{\nu}(ay/2)$
(32)	0, $x^{\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{\nu-1/2},$	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{\nu-2} \pi^{1/2} a^{2\nu} y^{1/2-\nu} \Gamma(\nu+1/2) \times$ $\times [J_{\nu}(ay/2) J_{-\nu}(ay/2) - Y_{\nu}(ay/2) Y_{-\nu}(ay/2)]$
(33)	0, $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\nu-1/2},$	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{\nu} \pi^{-1/2} y^{-1/2-\nu} \Gamma(\nu+1/2) \sin(ay)$
(34)	0, $x^{-\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{-\nu-1/2},$	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{-\nu-2} \pi^{1/2} a^{-2\nu} y^{\nu+1/2} \Gamma(1/2-\nu) \times$ $\times \{ [J_{\nu}(ay/2)]^2 - [Y_{\nu}(ay/2)]^2 \}$
(35)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{\mu},$ 0,	$0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1$	$a^{\mu+\nu+1} y^{-\mu-1/2} [2^{\mu} \Gamma(\mu+1) \times$ $\times Y_{\mu+\nu+1}(ay) + 2^{\nu+1} \pi^{-1} \Gamma(\nu+1) \times$ $\times S_{\mu-\nu, \mu+\nu+1}(ay)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(36)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{\mu}, \quad a < x < \infty$ $-2 < 2 \operatorname{Re} \mu < -1/2 - \operatorname{Re} \nu$	$-2^{\mu} a^{\mu+\nu+1} y^{-\mu-1/2} \Gamma(\mu+1) \times$ $\times [\sin(\mu\pi) J_{\mu+\nu+1}(ay) +$ $+ \cos(\mu\pi) Y_{\mu+\nu+1}(ay)]$
(37)	$x^{1/2-\nu} (a^2 - x^2)^{\mu}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu < 1$	$a^{\mu-\nu+1} y^{-\mu-1/2} [2^{1-\nu} \pi^{-1} \cos(\nu\pi) \times$ $\times \Gamma(1-\nu) S_{\mu+\nu, \mu-\nu+1}(ay) -$ $- \frac{2^{\mu} \Gamma(\mu+1) J_{\mu-\nu+1}(ay)}{\sin(\nu\pi)}]$
(38)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\mu}, \quad a < x < \infty$ $-1 < \operatorname{Re} \mu < 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 1/4$	$2^{\mu} a^{\mu-\nu+1} y^{-\mu-1/2} \Gamma(\mu+1) \times$ $\times Y_{\nu-\mu-1}(ay)$
(39)	$x^{2n+\nu+4\mu-1/2} (x^4 + a^4)^{-\mu-1}$	См. Ватсон Г. Н., 1949, стр. 474.
(40)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} - x]^{\mu},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu > -3/2$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\alpha^{\mu} y^{1/2} [\operatorname{ctg}(\nu\pi) I_{\mu/2+\nu/2}(\alpha y/2) \times$ $\times K_{\mu/2-\nu/2}(\alpha y/2) -$ $- \frac{I_{\mu/2-\nu/2}(\alpha y/2) K_{\mu/2+\nu/2}(\alpha y/2)}{\sin(\nu\pi)}]$
(41)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times \{ [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + x]^{\mu} +$ $+ [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} - x]^{\mu} \}, \quad \nu = 0$ $-3/2 < \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$-2\pi^{-1} \alpha^{\mu} y^{1/2} \cos(\mu\pi/2) \times$ $\times [K_{\mu/2}(\alpha y/2)]^2$
(42)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} - \alpha]^{2k},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2 + \operatorname{Re} k$	$-\alpha^{-1} y^{-1/2} W_{-k, \nu/2}(\alpha y) \times$ $\times \left\{ \frac{\Gamma(1/2 + \nu/2 + k)}{\Gamma(\nu+1)} \operatorname{tg}[(\nu/2 - k)\pi] \times \right.$ $\left. \times M_{k, \nu/2}(\alpha y) + \frac{W_{k, \nu/2}(\alpha y)}{\cos[(\nu/2 - k)\pi]} \right\}$
(43)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \{ [x + (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\mu} +$ $+ [x - (x^2 - a^2)^{1/2}]^{\mu} \},$ $a < x < \infty$ $-3/2 < \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$2^{-1} \pi \alpha^{\mu} y^{1/2} [J_{\nu/2+\mu/2}(\alpha y/2) \times$ $\times J_{\nu/2-\mu/2}(\alpha y/2) - Y_{\nu/2+\mu/2}(\alpha y/2) \times$ $\times Y_{\nu/2-\mu/2}(\alpha y/2)]$

9.3. Другие элементарные функции

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(1)	$x^{-1/2} e^{-ax},$ $\operatorname{Re} a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{y^{1/2}}{(y^2 + a^2)^{1/2} \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \left\{ y^{\nu} [(y^2 + a^2)^{1/2} + a]^{-\nu} \cos(\nu\pi) - \right.$ $\left. - y^{-\nu} [(y^2 + a^2)^{1/2} + a]^{\nu} \right\}$
(2)	$x^{\mu-3/2} e^{-ax},$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu $	$-2\pi^{-1} \Gamma(\mu + \nu) y^{1/2} (y^2 + a^2)^{-\mu/2} \times$ $\times Q_{\mu-1}^{-\nu} [a (y^2 + a^2)^{-1/2}]$
(3)	$x^{-1/2} \exp(-ax^2),$ $\operatorname{Re} a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi y}{a}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{y^2}{8a}\right) \times$ $\times \left[\operatorname{tg} \frac{\nu\pi}{2} I_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{8a}\right) + \right.$ $\left. + \frac{1}{\pi \cos(\nu\pi/2)} K_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]$
(4)	$x^{\mu-1/2} \exp(-ax^2),$ $\operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1$	$-\frac{1}{a^{\mu/2} y^{1/2} \cos[2^{-1}(\nu - \mu)\pi]} \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{8a}\right) \left\{ \frac{\Gamma(1/2 + \mu/2 + \nu/2)}{\Gamma(1 + \nu)} \times \right.$ $\times \sin[2^{-1}(\nu - \mu)\pi] \times$ $\left. \times M_{\mu/2, \nu/2} \left(\frac{y^2}{4a}\right) + W_{\mu/2, \nu/2} \left(\frac{y^2}{4a}\right) \right\}$
(5)	$x^{-3/2} e^{-a/x},$ $\operatorname{Re} a > 0$	$2y^{1/2} Y_{\nu} [(2ay)^{1/2}] K_{\nu} [(2ay)^{1/2}]$
(6)	$x^{-1/2} (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\alpha(x^2 + \beta^2)^{-1/2}],$ $\operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\frac{y^{1/2}}{\cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times K_{\nu/2} \{2^{-1}\beta[(y^2 + a^2)^{1/2} - a]\} \times$ $\times \left(\frac{1}{\pi} K_{\nu/2} \left\{ \frac{\beta}{2} [(y^2 + a^2)^{1/2} - a] \right\} + \right.$ $\left. + \sin(\nu\pi/2) \times \right.$ $\left. \times I_{\nu/2} \{2^{-1}\beta[(y^2 + a^2)^{1/2} - a]\} \right)$
(7)	$x^{-1/2} \sin ax^2,$ $a > 0, \quad -3 < \operatorname{Re} \nu < 3$	$-\frac{(\pi y/a)^{1/2}}{4 \cos(\nu\pi/2)} \left[\cos\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{3\nu+1}{4}\pi\right) \times \right.$ $\left. + J_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{8a}\right) - \sin\left(\frac{y^2}{8a} + \frac{\nu-1}{4}\pi\right) \times \right.$ $\left. \times Y_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(8)	$x^{-1/2} \cos ax^2,$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{(\pi y/a)^{1/2}}{4 \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times \left[\sin\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{3\nu+1}{4}\pi\right) J_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right) + \right.$ $\left. + \cos\left(\frac{y^2}{8a} + \frac{\nu-1}{4}\pi\right) Y_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]$
(9)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \sin [b (a^2 - x^2)^{1/2}],$ $0 < x < a$ $- x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp [-b^2 (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$ $b > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-2} \pi y^{1/2} \times$ $\times Y_{\nu/2}^2 \{2^{-1} a [(y^2 + b^2)^{1/2} + b]\} -$ $- 2^{-2} \pi y^{1/2} \times$ $\times J_{\nu/2}^2 \{2^{-1} a [(y^2 + b^2)^{1/2} - b]\}$

Относительно других выражений, содержащих тригонометрические функции, см. таблицы преобразований Фурье (гл. I—III).

9.4. Высшие трансцендентные функции

(1)	$x^{1/2} P_n(1 - 2x^2),$ $0,$ $n = 0, 1, 2, \dots, \nu = 0$ $0 < x < 1$ $1 < x < \infty$	$\pi^{-1} y^{-1/2} [S_{2n+1}(y) + \pi Y_{2n+1}(y)]$
(2)	$x^{\nu-2\mu+2n+3/2} \exp(x^2) \Gamma(\mu, x^2),$ $n - \text{целое}$ $\operatorname{Re}(\nu - \mu + n) > -3/2$ $\operatorname{Re}(-\mu + n) > -3/2$ $\operatorname{Re} \nu < 1/2 - 2n$	$(-1)^n \frac{\Gamma(3/2 - \mu + \nu + n) \Gamma(3/2 - \mu + n)}{y^{1/2} \Gamma(1 - \mu)} \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{8}\right) W_{\mu-\nu/2-n-1, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4}\right)$
(3)	$0,$ $P_{\nu-1/2}(a^{-1}x),$ $0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\left(\frac{a}{2y}\right)^{1/2} [\cos(ay/2) J_{\nu}(ay/2) -$ $- \sin(ay/2) Y_{\nu}(ay/2)]$
(4)	$0,$ $x^{-\mu} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-1/2}^{\mu}(x/a),$ $a < x < \infty$ $-1/4 < \operatorname{Re} \mu < 1$ $\operatorname{Re}(2\mu - \nu) > -1/2$ $0 < x < a$	$2^{-3/2} \pi^{1/2} a^{1-\mu} y^{\mu} \times$ $\times [J_{\nu}(ay/2) J_{\mu-1/2}(ay/2) -$ $- Y_{\nu}(ay/2) Y_{\mu-1/2}(ay/2)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(5)	$0, \quad 0 < x < a$ $(x^2 - a^2)^{\nu/2 - 1/4} P_{\mu}^{1/2 - \nu} (2a^{-2}x^2 - 1),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ $\operatorname{Re} \nu + 2 \operatorname{Re} \mu + 1 < 3/2$	$\pi^{1/2} 2^{\nu-2} a y^{1/2 - \nu} \times$ $\times [J_{\mu+1/2}(ay/2) J_{-\mu-1/2}(ay/2) -$ $- Y_{\mu+1/2}(ay/2) Y_{-\mu-1/2}(ay/2)]$
(6)	$x^{\lambda} J_{\mu}(ax)$	См. 6.8 (37).
(7)	$\sin ax J_{\nu+1/2}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$(\pi \cos \theta)^{-1/2} (2a \sin \theta)^{-1} \times$ $\times \cos[(\nu+1)\theta],$ $y = 2a \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$ $0, \quad 2a < y < \infty$
(8)	$x^{\nu+1/2} [J_{\nu}(ax)]^2,$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$0, \quad 0 < y < 2a$ $\frac{2^{3\nu+1} a^{2\nu}}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \nu)} y^{-\nu-1/2} (y^2 - 4a^2)^{-\nu-1/2},$ $2a < y < \infty$
(9)	$x^{1/2} J_{\nu/2}(ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{1/2}}{4a} \left[Y_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) + \right.$ $\left. + \frac{1}{\cos(\nu\pi/2)} H_{-\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right]$
(10)	$x^{1/2} J_{\nu/2-1/2}(ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$a^{-2} y^{1/2} J_{\nu+1/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right)$
(11)	$x^{1/2} J_{\nu/4}(ax^2) J_{-\nu/4}(ax^2),$ $a > 0, -2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\frac{y^{1/2}}{16a \cos(\nu\pi/4)} \left\{ [1 + 2 \cos(\nu\pi/2)] \times \right.$ $\times \left[J_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{16a}\right) \right]^2 + 2 \sin(\nu\pi/2) \times$ $\times J_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{16a}\right) Y_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{16a}\right) -$ $\left. - \left[Y_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{16a}\right) \right]^2 \right\}$
(12)	$x^{-1/2} J_{\nu}(a^2 x^{-1}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$y^{-1/2} [Y_{2\nu}(2ay^{1/2}) +$ $+ 2\pi^{-1} K_{2\nu}(2ay^{1/2})]$
(13)	$x^{-5/2} J_{\nu}(a^2 x^{-1}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$a^{-2} y^{1/2} [Y_{2\nu}(2ay^{1/2}) -$ $- 2\pi^{-1} K_{2\nu}(2ay^{1/2})]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(14)	$x^{-1/2} Y_{\nu}(a^2 x^{-1}),$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-y^{-1/2} J_{2\nu}(2ay^{1/2})$
(15)	$x^{-5/2} Y_{\nu}(a^2 x^{-1}),$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-a^{-2} y^{1/2} J_{2\nu}(2ay^{1/2})$
(16)	$x^{-3/2} Y_{\nu+1}(a^2 x^{-1}),$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-a^{-1} J_{2\nu+1}(2ay^{1/2})$
(17)	$J_{2\nu-1}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$-\frac{a}{2y^{3/2}} H_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4y}\right)$
(18)	$x^{-1/2} J_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$-y^{-1/2} H_{\nu}\left(\frac{a^2}{4y}\right)$
(19)	$x^{-1/2} Y_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{1}{2y^{1/2}} \left[\frac{1}{\cos(\nu\pi)} J_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4y}\right) + \right.$ $\left. + \frac{1}{\sin(\nu\pi)} H_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4y}\right) - \right.$ $\left. - 2 \operatorname{ctg}(2\nu\pi) H_{\nu}\left(\frac{a^2}{4y}\right) \right]$
(20)	$x^{\nu+2n-1/2} (x^2 + \lambda^2)^{-1} (x^2 + a^2)^{-\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [b (x^2 + a^2)^{1/2}],$ $b > 0$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ $-1/2 - n < \operatorname{Re} \mu < 3 - 2n + \operatorname{Re} \nu$	$(-1)^{n+1} \lambda^{\nu+2n-1} y^{1/2} K_{\nu}(\lambda y) \times$ $\times (\lambda^2 - a^2)^{-\mu/2} I_{\mu} [b (\lambda^2 - a^2)^{1/2}],$ $y > b$
(21)	0, $0 < x < a$ $x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{\mu/2} J_{\mu} [b (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$ $b > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \mu < -\operatorname{Re} \nu$	$-2\pi^{-1} a^{\mu+\nu+1} b^{\mu} y^{\nu+1/2} \cos(\nu\pi) \times$ $\times (b^2 - y^2)^{-(\mu+\nu+1)/2} \times$ $\times K_{\mu+\nu+1} [a (b^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < b$
(22)	0, $0 < x < a$ $x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [b (x^2 - a^2)^{1/2}], \quad a < x < \infty$ $b > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \mu < -\operatorname{Re} \nu$	$-a^{\mu+\nu+1} b^{\mu} y^{\nu+1/2} \times$ $\times (y^2 - b^2)^{-(\mu+\nu+1)/2} \times$ $\times \{\sin(\mu\pi) J_{\mu+\nu+1} [a (y^2 - b^2)^{1/2}] +$ $+ \cos(\mu\pi) Y_{\mu+\nu+1} [a (y^2 - b^2)^{1/2}]\},$ $b < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(23)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [b (x^2 - a^2)^{1/2}], \quad a < x < \infty$ $b > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu$	$-2\pi^{-1} a^{\mu-\nu+1} b^{\mu} y^{1/2-\nu} \times$ $\times (b^2 - y^2)^{-(\mu-\nu+1)/2} \times$ $\times K_{\mu-\nu+1} [a (b^2 - y^2)^{1/2}],$ $0 < y < b$
(24)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [b (x^2 - a^2)^{1/2}], \quad a < x < \infty$ $b > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu$	$a^{\mu-\nu+1} b^{\mu} y^{1/2-\nu} (y^2 - b^2)^{(\nu-\mu-1)/2} \times$ $\times Y_{\nu-\mu-1} [a (y^2 - b^2)], \quad b < y < \infty$
(25)	$x^{1/2} K_{\nu/2} (\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi y^{1/2}}{4\alpha} \left[\frac{1}{\sin(\nu\pi)} L_{-\nu/2} \left(\frac{y^2}{4\alpha} \right) - \right.$ $- \operatorname{ctg}(\nu\pi) L_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{4\alpha} \right) -$ $- \operatorname{tg}(\nu\pi/2) I_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{4\alpha} \right) -$ $\left. - \frac{1}{\pi \cos(\nu\pi/2)} K_{\nu/2} \left(\frac{y^2}{4\alpha} \right) \right]$
(26)	$x^{-1/2} \exp(2^{-1}\alpha x^2) K_0(2^{-1}\alpha x^2),$ $\nu = 0$	$-2^{-1} \pi \alpha^{-1/2} y^{1/2} \exp\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) K_0\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right)$
(27)	$x^{-1/2-2\mu} \exp(2^{-1}\alpha x^2) K_{\mu}(2^{-1}\alpha x^2),$ $\nu = 0, \quad -3/4 < \operatorname{Re} \mu < 1/4$	$- \frac{\alpha^{\mu} \pi^{1/2} \Gamma(1/2 - 2\mu)^2}{y^{1/2} \Gamma(1 - 2\mu)} \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) W_{2\mu, 0}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$
(28)	$x^{-1/2} K_{\nu}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-2y^{-1/2} [\sin(3\nu\pi/2) \operatorname{ker}_{2\nu}(2\alpha^{1/2}y^{1/2}) +$ $+ \cos(3\nu\pi/2) \operatorname{kei}_{2\nu}(2\alpha^{1/2}y^{1/2})]$
(29)	$x^{-5/2} K_{\nu}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -5/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$2\alpha^{-1} y^{1/2} \times$ $\times [\sin(3\pi\nu/2) \operatorname{kei}_{2\nu}(2\alpha^{1/2}y^{1/2}) -$ $- \cos(3\pi\nu/2) \operatorname{ker}_{2\nu}(2\alpha^{1/2}y^{1/2})]$
(30)	$x^{-2\nu} K_{\nu-1/2}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 1/6$	$(2\pi)^{1/2} \alpha^{1/2-\nu} y^{\nu-1/2} Y_{2\nu-1} [(2\alpha y)^{1/2}] \times$ $K_{2\nu-1} [(2\alpha y)^{1/2}]$
(31)	$x^{-2\nu-2} K_{\nu-1/2}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$(2\pi)^{1/2} \alpha^{-1/2-\nu} y^{1/2+\nu} Y_{2\nu} [(2\alpha y)^{1/2}] \times$ $\times K_{2\nu} [(2\alpha y)^{1/2}]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(32)	$x^{2\nu-2} K_{\nu+1/2}(\alpha x^{-1}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{(\pi/2)^{1/2} \alpha^{\nu-1/2} y^{1/2-\nu}}{\sin(\nu\pi)} \times$ $\times K_{2\nu}[(2\alpha y)^{1/2}] \{J_{2\nu}[(2\alpha y)^{1/2}] -$ $- J_{-2\nu}[(2\alpha y)^{1/2}]\}$
(33)	$x^{-1/2} [K_{\mu}(\alpha^2 x^{-1})]^2,$ $ \arg \alpha < \pi/4$ $-1/4 < \operatorname{Re} \mu < 1/4, \nu = 0$	$2\pi y^{-1/2} [\cos(\mu\pi) J_{2\mu}(2\alpha y^{1/2}) -$ $- \sin(\mu\pi) Y_{2\mu}(2\alpha y^{1/2})]$
(34)	$x^{-1/2} K_{2\nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-2^{-2} \pi y^{-1/2} \left[\frac{1}{\cos(\nu\pi)} J_{-\nu}\left(\frac{\alpha^2}{4y}\right) - \right.$ $\left. - \frac{1}{\sin(\nu\pi)} \mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{\alpha^2}{4y}\right) + \right.$ $\left. + \frac{2}{\sin(2\nu\pi)} \mathbf{H}_{\nu}\left(\frac{\alpha^2}{4y}\right) \right]$
(35)	$x^{\nu-1/2} J_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}) K_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2})$ $ \arg \alpha < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{2^{-\nu-1} \pi^{1/2} \alpha^{2\nu-1}}{y^{2\nu} \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \left[\mathbf{L}_{1/2-\nu}\left(\frac{\alpha^2}{2y}\right) - I_{\nu-1/2}\left(\frac{\alpha^2}{2y}\right) \right]$
(36)	$x^{-1/2} \mathbf{H}_{\nu-1}(ax),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-a^{\nu-1} y^{1/2-\nu}, \quad 0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(37)	$x^{\nu-\mu+1/2} \mathbf{H}_{\mu}(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{2^{\nu+1-\mu} y^{\nu+1/2}}{a^{\mu} \Gamma(\mu-\nu)} (a^2 - y^2)^{\mu-\nu-1},$ $0 < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(38)	$x^{-5/2} S_{-\nu-3, \nu}(\alpha^2 x^{-1}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi 2^{-\nu-2} \alpha^{-2} y^{1/2} K_{2\nu}(2\alpha y^{1/2}) \times$ $\times [\Gamma(\nu+2)]^{-1}$
(39)	$x^{\nu-1/2} \exp(2^{-2} \alpha^2 x^2) D_{\nu/2-1/2}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < 3\pi/4$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2/3$	$-\pi^{-1} 2^{3\nu/4+3/4} \alpha^{-\nu} y^{-1/2} \Gamma(\nu+1) \times$ $\times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) \mathbf{W}_{-\nu/2-1/2, \nu/2}\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)$
(40)	$D_{\nu-1/2}(\alpha x^{-1/2}) D_{-\nu-1/2}(\alpha x^{-1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$y^{-1} \exp(-\alpha y^{1/2}) \times$ $\times \sin[\alpha y^{1/2} - 2^{-1}(\nu-1/2)\pi]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(41)	$x^{\nu-m} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \nu/4-m/2}(2^{-1}x^2), \quad m - \text{целое}$ $\text{Re}(2\kappa - \nu) > -m \geq -1,$ $\text{Re } \nu > m - 3/2$	$\frac{(-1)^m 2^{\nu/2-m/2} \Gamma(3/2-m)}{\Gamma(3/4+\kappa-m/2)} (2^{-1}y^2)^{\lambda} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) W_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2),$ $\alpha = \kappa/2 + m/4 + \nu/2 + 5/8,$ $\beta = \kappa/2 + m/4 - \nu/2 - 3/8,$ $\lambda = \kappa/2 + m/4 - 5/8$
(42)	$x^{-m} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \nu/2-m/2+1/4}(2^{-1}x^2),$ $m - \text{целое}, \quad 2 \text{Re } \kappa > -m \geq -1$ $\text{Re } \nu > m - 3/2$	$\frac{(-1)^m \Gamma(\nu-m+3/2) 2^{-m/2}}{\Gamma(\kappa+\nu/2-m/2+3/4)} (2^{-1}y^2)^{\lambda} \times$ $\times \exp(-2^{-2}y^2) W_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2),$ $\alpha = \kappa/2 - 3m/4 + \nu/4 + 5/8,$ $\beta = \kappa/2 + m/4 + \nu/4 - 3/8,$ $\lambda = \kappa/2 + m/4 - \nu/4 - 5/8$
(43)	$x^{2\mu+\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $-1 < 2 \text{Re } \mu < \text{Re}(2\kappa - \nu) + 1/2$ $\text{Re}(2\mu + \nu) > -1$	$\pi^{-1} 2^{\mu+\beta} y^{\kappa-\mu-1} \Gamma(2\mu+1) \times$ $\times \Gamma(1/2 - \mu - \kappa) \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \left\{ \cos(2\mu\pi) \frac{\Gamma(2\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu-\kappa+3/2)} \times \right.$ $\times M_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2) +$ $\left. + \sin[(\mu - \kappa)\pi] W_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2) \right\},$ $2\alpha = 3\mu + \nu + \kappa + 1/2$ $2\beta = \mu + \nu - \kappa + 1/2$
(44)	$x^{2\mu-\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $-1 < 2 \text{Re } \mu < \text{Re}(2\kappa + \nu) + 1/2$ $\text{Re}(2\mu - \nu) > -1$	$\pi^{-1} 2^{\mu+\beta} y^{\kappa-\mu-1} \exp(-2^{-2}y^2) \times$ $\times \Gamma(2\mu+1) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu) \times$ $\times \left\{ \cos[(\nu - 2\mu)\pi] \frac{\Gamma(2\mu - \nu - 1)}{\Gamma(2\beta + 1)} \times \right.$ $\times M_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2) -$ $\left. - \sin[(\nu + \kappa - \mu)\pi] W_{\alpha, \beta}(2^{-1}y^2) \right\},$ $2\alpha = 3\mu - \nu + \kappa + 1/2$ $2\beta = \mu - \nu - \kappa + 1/2$
(45)	$x^{2\lambda} \exp(-2^{-2}x^2) M_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\text{Re}(\kappa - \lambda) > 0$ $\text{Re}(2\lambda + 2\mu \pm \nu) > -5/2$	$\frac{2^{\lambda} \Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu)} \times$ $\times G_{34}^{31} \left(\frac{y^2}{2} \middle -\mu - \lambda, \mu - \lambda, l \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, \quad k = 1/4 - \nu/2$ $l = -1/4 - \nu/2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(46)	$x^{2\lambda} \exp(-2^{-2}x^2) W_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re}(2\lambda \pm 2\mu \pm \nu) > -5/2$	$(-1)^m 2^{\lambda} \times$ $\times G_{34}^{22} \left(\frac{y^2}{2} \mid -\mu - \lambda, \mu - \lambda, l \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, \quad k = 1/4 - \nu/2$ $l = -1/4 - \nu/2$
(47)	$x^{2\lambda} \exp(2^{-2}x^2) W_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re}(\kappa + \lambda) < 0$ $\operatorname{Re}(2\lambda \pm 2\mu \pm \nu) > -5/2$	$2^{\lambda} [\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)]^{-1} \times$ $\times G_{34}^{32} \left(\frac{y^2}{2} \mid -\mu - \lambda, \mu - \lambda, l \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, \quad k = 1/4 - \nu/2$ $l = -1/4 - \nu/2$
(48)	$x^{1/2} W_{\nu/2, \mu}(2/x) W_{-\nu/2, \mu}(2/x),$ $-1/4 < \operatorname{Re} \mu < 1/4$	$4y^{-1/2} K_{2\mu}(2y^{1/2}) \times$ $\times \{ \cos [(\mu - \nu/2)\pi] J_{2\mu}(2y^{1/2}) -$ $- \sin [(\mu - \nu/2)\pi] Y_{2\mu}(2y^{1/2}) \}$
(49)	$x^{\nu+3/2} \times$ $\times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \nu; \frac{3}{2}; -\alpha^2 x^2 \right),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < -1/2$	$\frac{2^{\nu} y^{-\nu-1/2}}{\pi^{1/2} \alpha^2 \Gamma(1/2 - \nu)} K_{\nu} \left(\frac{y}{2\alpha} \right) K_{\nu+1} \left(\frac{y}{2\alpha} \right)$
(50)	$x^{\nu+3/2} \times$ $\times {}_2F_1(1, 2\nu+3/2; \nu+2; -\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{-\nu} \alpha^{-2\nu-3} \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(2\nu+3/2)} \times$ $\times y^{\nu+1/2} \left[K_{\nu} \left(\frac{y}{2\alpha} \right) \right]^2$
(51)	$x^{\nu+3/2} \times$ $\times {}_2F_1(1, \mu + \nu + 3/2; 3/2; -\alpha^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$ $\operatorname{Re}(2\mu + \nu) > -3/2$	$\frac{\pi^{1/2} 2^{-\mu-\nu-1} \alpha^{-\mu-2\nu-3}}{\Gamma(\mu + \nu + 3/2)} \times$ $\times y^{\mu+\nu+1/2} K_{\mu} \left(\frac{y}{\alpha} \right)$
(52)	$x^{\sigma} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \nu - 3/2$ $\operatorname{Re} \sigma < 2 \operatorname{Re} \alpha, \quad \operatorname{Re} \sigma < 2 \operatorname{Re} \beta$	$\frac{\lambda^{-\sigma-1} \Gamma(\gamma)}{2^{1/2} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \times$ $\times G_{35}^{41} \left(\frac{y^2}{4\lambda^2} \mid 1-p, \nu-p, l \right)$ $h = 1/4 + \nu/2, \quad k = 1/4 - \nu/2$ $l = -1/4 - \nu/2, \quad p = 1/2 + \sigma/2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(53)	$x^{\sigma-3/2} {}_pF_{p-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p;$ $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}; -\lambda x^2),$ $ \arg \lambda < \pi, \operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \nu $ $\operatorname{Re} \alpha_j > 2^{-1} \operatorname{Re} \sigma - 3/4$	$\frac{y^{1/2} \Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_{p-1})}{2\lambda^{\sigma/2} \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)} \times$ $\times G_{p+2, p+3}^{p+2, 1} \left(\frac{y^2}{4\lambda} \left \begin{matrix} \beta_0^*, \dots, \beta_{p-1}^*, l \\ h, k, \alpha_1^*, \dots, \alpha_p^* \end{matrix} \right. \right),$ $\alpha_j^* = \alpha_j - \frac{\sigma}{2}, \quad j = 1, \dots, p$ $\beta_0^* = 1 - \frac{\sigma}{2},$ $\beta_j^* = \beta_j - \frac{\sigma}{2}, \quad j = 1, \dots, p-1$ $h = \frac{\nu}{2}, \quad k = -\frac{\nu}{2}, \quad l = -\frac{1+\nu}{2}$
(54)	$x^{\sigma-3/2} \times$ $\times {}_pF_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_p; -\lambda x^2),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \nu $ $\operatorname{Re} \alpha_j > 2^{-1} \operatorname{Re} \sigma - 3/4$ $j = 1, \dots, p$	$\frac{y^{1/2} \Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_p)}{2\lambda^{\sigma/2} \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)} \times$ $\times G_{p+2, p+3}^{p+2, 1} \left(\frac{y^2}{4\lambda} \left \begin{matrix} \beta_0^*, \dots, \beta_p^*, l \\ h, k, \alpha_1^*, \dots, \alpha_p^* \end{matrix} \right. \right),$ $\beta_0^* = 1 - \frac{\sigma}{2}, \quad \alpha_j^* = \alpha_j - \frac{\sigma}{2},$ $\beta_j^* = \beta_j - \frac{\sigma}{2}, \quad j = 1, \dots, p$ $h = \frac{\nu}{2}, \quad k = -\frac{\nu}{2}, \quad l = -\frac{1+\nu}{2}$
(55)	$x^{\sigma-3/2} \times$ $\times {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; -\lambda x^2)$ $p \leq q-1, \operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \nu $	$-\pi^{-1} 2^{\sigma-1} y^{1/2-\sigma} \cos [2^{-1} \pi (\sigma-\nu)] \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right) \times$ $\times {}_{p+2}F_q\left(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2};$ $\beta_1, \dots, \beta_q; -\frac{4\lambda}{y^2}\right)$
(56)	$G_{pq}^{mn} \left(\lambda x^2 \left \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \right. \right),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \lambda < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} \alpha_j < 1, \quad j = 1, \dots, n$ $\operatorname{Re}(\beta_j \pm \nu/2) > -3/4$ $j = 1, \dots, m$	$(2\lambda)^{-1/2} \times$ $\times G_{q+1, p+3}^{n+2, m} \left(\frac{y^2}{4\lambda} \left \begin{matrix} \beta_1', \dots, \beta_q', l \\ h, k, \alpha_1', \dots, \alpha_p' \end{matrix} \right. \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, \quad k = 1/4 - \nu/2$ $l = -1/4 - \nu/2$ $\beta_j' = \frac{1}{2} - \beta_j, \quad \alpha_j' = \frac{1}{2} - \alpha_j$

Г Л А В А X

K-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы называем *K-преобразованием порядка ν* функции $f(x)$ функцию

$$\mathfrak{K}_\nu \{f(x); y\} = \int_0^\infty f(x) K_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx$$

комплексного переменного y . Это преобразование было введено Мейером (С. S. Meijer, 1940), который дал формулу обращения 10.1 (1) и теоремы представления. Преобразование было далее изучено Боасом (Boas, 1942a, 1942b) и Эрдейи (Erdélyi, 1950—51).

В силу соотношений между функциями Бесселя первого и второго рода, с одной стороны, и модифицированными функциями Бесселя K_ν , с другой, *K-преобразование* может быть выражено как линейная комбинация любых двух из преобразований \mathfrak{F}_ν , $\mathfrak{F}_{-\nu}$, \mathfrak{Y}_ν , $\mathfrak{Y}_{-\nu}$. Однако переменное y в преобразованиях Ганкеля и *Y-преобразованиях*, встречающихся в этих выражениях, отрицательно, а лишь немногие преобразования Ганкеля и *Y-преобразования* сходятся для отрицательных (или комплексных) значений y . Обратно,

$$\begin{aligned} \pi \mathfrak{F}_\nu \{f(x); y\} = \\ = \exp[(\nu + 1/2) \pi i/2] \mathfrak{K}_\nu \{f(x); iy\} + \exp[-(\nu + 1/2) \pi i/2] \mathfrak{K}_\nu \{f(x); -iy\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \mathfrak{Y}_\nu \{f(x); y\} = \\ = -\exp[(\nu + 1/2) \pi i/2] \mathfrak{K}_\nu \{f(x); iy\} - \exp[-(\nu - 1/2) \pi i/2] \mathfrak{K}_\nu \{f(x); -iy\}. \end{aligned}$$

С помощью этих соотношений можно вычислять преобразования Ганкеля и *Y-преобразования*, используя таблицы *K-преобразований*. Однако во многих случаях приходится рассматривать *K-преобразования* на границе полуплоскости сходимости n , чтобы обеспечить сходимость, приходится накладывать дополнительные ограничения на параметры. Если $\nu = \pm 1/2$, то *K-преобразование* сводится к преобразованию Лапласа

$$\mathfrak{K}_{\pm 1/2} \{f(x); y\} = (\pi/2)^{1/2} \mathfrak{L} \{f(x); y\}$$

и указанные выше соотношения сводятся к выражениям синус- и косинус-преобразований Фурье через преобразования Лапласа.

Из приведенных в этой главе пар преобразований можно получать новые пары с помощью методов, указанных во введении к первому тому, а также

с помощью общих формул из п. 10.1. Связь с преобразованием Лапласа в любой из двух форм

$$\mathfrak{L}_\nu \{f(x); y\} = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\nu} y^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)} \mathfrak{L} \left\{ \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu-1/2} t^{1/2-\nu} f(t) dt; y \right\}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2,$$

$$\mathfrak{L}_\nu \{f(x); y\} = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\nu} y^{1/2-\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_y^\infty (t^2 - y^2)^{\nu-1/2} \mathfrak{L} \{x^{1/2+\nu} f(x); t\} dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2.$$

может быть использована для вычисления К-преобразований с помощью таблиц преобразований Лапласа, данных в главе IV.

10.1. Общие формулы

	$f(x)$	$\int_0^\infty f(x) K_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu)$
(1)	$\frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(y) I_\nu(xy) (xy)^{1/2} dy$	$g(y)$
(2)	$f(ax), \quad a > 0$	$a^{-1} g(y/a; \nu)$
(3)	$x^m f(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$	$y^{1/2-\nu} \times$ $\times \left(-\frac{d}{y dy}\right)^m y^{m+\nu-1/2} g(y; \nu+m)$
(4)	$x^m f(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$	$y^{1/2+\nu} \times$ $\times \left(-\frac{d}{y dy}\right)^m [y^{m-\nu-1/2} g(y; \nu-m)]$
(5)	$2\nu x^{-1} f(x)$	$y g(y; \nu+1) - y g(y; \nu-1)$
(6)	$x^{-1} f(x)$	$y^{\nu+1/2} \int_y^\infty \eta^{-\nu-1/2} g(\eta; \nu+1) d\eta$
(7)	$x^{-\mu} f(x), \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \int_y^\infty \eta^{1/2-\mu-\nu} (\eta^2 - y^2)^{\mu-1} \times$ $\times g(\eta; \nu+\mu) d\eta$
(8)	$2\nu f'(x)$	$(\nu-1/2) y g(y; \nu+1) +$ $+ (\nu+1/2) y g(y; \nu-1)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu)$
(9)	$x^{1/2-\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^{m+\nu-1/2} f(x)],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^m g(y; \nu + m)$
(10)	$x^{1/2+\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^{m-\nu-1/2} f(x)],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^m g(y; \nu - m)$
(11)	$x^{1/2-\nu} \int_0^x \xi^{\nu-\mu+1/2} (x^2 - \xi^2)^{\mu-1} \times$ $\times f(\xi) d\xi, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu) y^{-\mu} g(y; \nu - \mu)$

10.2. Элементарные функции

(1)	$x^{\rho-1}, \quad \operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \nu - 1/2$	$2^{\rho-3/2} y^{-\rho} \Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\rho}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(2)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\nu+1/2}, \quad a < x < \infty$	$a^{\nu+1} y^{-1/2} K_{\nu+1}(ay), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(3)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\sigma+1/2}, \quad a < x < \infty$	$ay^{-1/2-\sigma} \exp(-\pi\sigma i/2) \times$ $\times [K_{\nu-1}(ay) S_{\sigma+1, \nu}(iay) +$ $+ i(\nu + \sigma) K_{\nu}(ay) S_{\sigma, \nu-1}(iay)],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(4)	$x^{\mu-1/2} (x + \alpha)^{-1}, \quad \arg \alpha < \pi$ $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1$	$2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}\right) y^{1/2-\mu} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}, \right.$ $\left. 1 - \frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y^2}{4}\right) -$ $- 2^{\mu-3} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\right) \alpha y^{3/2-\mu} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}, \right.$ $\left. \frac{3}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y^2}{4}\right) - \frac{\pi \alpha^{\mu} y^{1/2}}{\sin[\pi(\mu - \nu)]} \times$ $\times \left\{ K_{\nu}(\alpha y) + \frac{\pi \cos(\mu\pi) I_{\nu}(\alpha y)}{\sin[\pi(\nu + \mu)]} \right\},$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(5)	$x^{-1/2} (x + \alpha)^{-1}$, $ \arg \alpha < \pi, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi^2 y^{1/2}}{2 [\sin(\nu\pi)]^2} \times$ $\times [I_{\nu}(\alpha y) + I_{-\nu}(\alpha y) -$ $- \exp(-i\nu\pi/2) J_{\nu}(i\alpha y) -$ $- \exp(i\nu\pi/2) J_{-\nu}(i\alpha y)],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(6)	$x^{-1/2} (\alpha^2 + x^2)^{-1/2}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi^2 y^{1/2}}{8 \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times \{ [J_{\nu/2}(\alpha y/2)]^2 + [Y_{\nu/2}(\alpha y/2)]^2 \},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(7)	$x^{-1/2-\nu} (x^2 + \alpha^2)^{-1}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi^2 y^{1/2} [H_{\nu}(\alpha y) - Y_{\nu}(\alpha y)]}{4\alpha^{\nu+1} \cos(\nu\pi)},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(8)	$x^{1/2+\nu} (x^2 + \alpha^2)^{\mu}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) \alpha^{\nu+\mu+1} y^{-1/2-\mu} \times$ $\times S_{\mu-\nu, \mu+\nu+1}(\alpha y), \operatorname{Re} y > 0$
(9)	$x^{\rho-3/2} (x^2 + \alpha^2)^{\mu}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \nu $	$\frac{\alpha^{\rho+2\mu} y^{1/2}}{4 \Gamma(-\mu)} [f(\nu) + f(-\nu)] +$ $+ 2^{2\mu+\rho-2} \Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \mu - \frac{\nu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \mu + \frac{\nu}{2}\right) y^{1/2-\rho-2\mu} \times$ $\times {}_1F_2\left(-\mu; 1 - \mu - \frac{\rho}{2} - \frac{\nu}{2},\right.$ $\left.1 - \mu - \frac{\rho}{2} + \frac{\nu}{2}; -\frac{\alpha^2 y^2}{4}\right),$ $f(\nu) = (\alpha/2)^{\nu} \Gamma(-\nu) \Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\nu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(-\frac{\nu}{2} - \frac{\rho}{2} - \mu\right) y^{\nu} \times$ $\times {}_1F_2\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\nu}{2}; \frac{\rho}{2} + \mu + 1 + \frac{\nu}{2},\right.$ $\left.1 + \nu; -\frac{\alpha^2 y^2}{4}\right), \operatorname{Re} y > 0$
(10)	$[x(\alpha^2 - x^2)]^{\nu-1/2}$, $0,$ $0 < x < \alpha$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} 2^{\nu-1} \alpha^{2\nu} y^{1/2-\nu} \Gamma(\nu + 1/2) \times$ $\times I_{\nu}(\alpha y/2) K_{\nu}(\alpha y/2)$
(11)	$0,$ $[x(x^2 - a^2)]^{\nu-1/2}$, $0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{\nu-1} \alpha^{2\nu} y^{1/2-\nu} \Gamma(\nu + 1/2) \times$ $\times [K_{\nu}(\alpha y/2)]^2, \operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(12)	$x^{1/2-\nu} (a^2 - x^2)^{\mu}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-\nu-2} a^{2\mu+2} y^{\nu+1/2} (\mu+1)^{-1} \times$ $\times \Gamma(-\nu) {}_1F_2(1; \nu+1, \mu+2;$ $2^{-2} a^2 y^2) + \frac{\pi^{2\mu-1} a^{\mu-\nu+1} y^{-\mu-1/2}}{\sin(\nu\pi)} \times$ $\times \Gamma(\mu+1) J_{\mu-\nu+1}(ay)$
(13)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\mu}, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1$	$2^{\mu} a^{\mu-\nu+1} y^{-\mu-1/2} \Gamma(\mu+1) \times$ $\times K_{\mu-\nu+1}(ay), \operatorname{Re} y > 0$
(14)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + a^2)^{1/2} + x]^{-2\mu},$ $\operatorname{Re} a > 0, \nu = 0$	$-2^{-2} \pi a^{-2\mu} y^{1/2} \times$ $\times \{J_{\mu}(2^{-1}ay) \frac{\partial}{\partial \mu} [Y_{\mu}(2^{-1}ay)] -$ $- Y_{\mu}(2^{-1}ay) \frac{\partial}{\partial \mu} [J_{\mu}(2^{-1}ay)]\},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(15)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + a^2)^{1/2} + x]^{-2\mu},$ $\operatorname{Re} a > 0$	$\frac{\pi^2 y^{1/2}}{4a^{2\mu} \sin(\nu\pi)} \times$ $\times [J_{\mu+\nu/2}(2^{-1}ay) Y_{\mu-\nu/2}(2^{-1}ay) -$ $- Y_{\mu+\nu/2}(2^{-1}ay) J_{\mu-\nu/2}(2^{-1}ay)],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(16)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times \{[(x^2 + a^2)^{1/2} + x]^{2\mu} +$ $+ [(x^2 + a^2)^{1/2} - x]^{2\mu}\},$ $\operatorname{Re} a > 0, \nu = 0$	$2^{-2} \pi^2 a^{2\mu} y^{1/2} \{[J_{\mu}(2^{-1}ay)]^2 +$ $+ [Y_{\mu}(2^{-1}ay)]^2\}, \operatorname{Re} y > 0$
(17)	$x^{-1/2} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times \{[(x^2 + a^2)^{1/2} + x]^{2\mu} \times$ $\times \cos[(\nu/2 - \mu)\pi] +$ $+ [(x^2 + a^2)^{1/2} - x]^{2\mu} \times$ $\times \cos[(\nu/2 + \mu)\pi]\}, \operatorname{Re} a > 0$	$2^{-2} \pi^2 a^{2\mu} y^{1/2} [J_{\nu/2+\mu}(2^{-1}ay) \times$ $\times J_{\nu/2-\mu}(2^{-1}ay) +$ $\times Y_{\nu/2+\mu}(2^{-1}ay) Y_{\nu/2-\mu}(2^{-1}ay)],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(18)	$x^{-1/2-2\mu} (x^2 + a^2)^{-1/2} \times$ $\times [(x^2 + a^2)^{1/2} + a]^{2\mu}, \operatorname{Re} a > 0$ $2 \operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-1} a^{-1} y^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2} - \mu\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2} - \mu\right) W_{\mu, \nu/2}(iay) \times$ $\times W_{\mu, \nu/2}(-iay),$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(19)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [x + (x^2 - a^2)^{1/2}]^{2\mu} + \right.$ $\left. + [x - (x^2 - a^2)^{1/2}]^{2\mu} \right\},$ $a < x < \infty$	$a^{2\mu} y^{1/2} K_{\nu/2+\mu}(2^{-1}ay) \times$ $\times K_{\nu/2-\mu}(2^{-1}ay), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(20)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-1/2-2\mu} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \left\{ [a + i(x^2 - a^2)^{1/2}]^{2\mu} + \right.$ $\left. + [a - i(x^2 - a^2)^{1/2}]^{2\mu} \right\},$ $a < x < \infty$	$\pi a^{-1} y^{-1/2} W_{\mu, \nu/2}(ay) W_{-\mu, \nu/2}(ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(21)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x}, \quad \nu = 0$	$y^{1/2} (y^2 - \alpha^2)^{-1/2} \arccos(\alpha/y),$ $\operatorname{Re}(\alpha + y) > 0$ $y (y^2 - \alpha^2)^{-1/2} \arccos(\alpha/y) \rightarrow \pi/2$ при $y \rightarrow \infty$
(22)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x}, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi y^{-1/2}}{\sin(\nu\pi)} \frac{\sin(\nu\theta)}{\sin\theta}, \quad \operatorname{Re}(\alpha + y) > 0$ $\cos\theta = \alpha/y, \quad 0 \rightarrow \pi/2$ при $y \rightarrow \infty$
(23)	$x^{\mu-1} e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1/2$	$\frac{\pi^{1/2} \nu y^{\nu+1/2}}{(\alpha + y)^{\mu+\nu+1/2}} \times$ $\times \frac{\Gamma(\mu + \nu + 1/2) \Gamma(\mu - \nu + 1/2)}{\Gamma(\mu + 1)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\mu + \nu + 1/2, \nu + 1/2; \mu + 1; \frac{\alpha - y}{\alpha + y}\right), \quad \operatorname{Re}(\alpha + y) > 0$
(24)	$x^{-1/2} \exp(-\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{1}{4 \cos(\nu\pi/2)} \left(\frac{\pi y}{\alpha}\right)^{1/2} \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) K_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right)$
(25)	$x^{-1/2-2\mu} \exp(-\alpha x^2), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $2 \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} \nu $	$2^{-1} \alpha^{\mu} y^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2} - \mu\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2} - \mu\right) \exp\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) \times$ $\times W_{\mu, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(26)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \times$ $\times \exp[-\beta (x^2 + \alpha^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{y^{1/2}}{2 \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times K_{\nu/2} \{2^{-1} \alpha [\beta + (\beta^2 - y^2)^{1/2}]\} \times$ $\times K_{\nu/2} \{2^{-1} \alpha [\beta - (\beta^2 - y^2)^{1/2}]\},$ $\operatorname{Re}(y + \beta) > 0$
(27)	$x^{-1} \cos(\alpha x^{1/2}),$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi}{2 \cos(\nu\pi)} \left[D_{\nu-1/2} \left(\frac{\alpha}{2^{1/2} y^{1/2}} \right) \times \right.$ $\times D_{-\nu-1/2} \left(-\frac{\alpha}{2^{1/2} y^{1/2}} \right) +$ $+ D_{\nu-1/2} \left(-\frac{\alpha}{2^{1/2} y^{1/2}} \right) \times$ $\left. \times D_{-\nu-1/2} \left(\frac{\alpha}{2^{1/2} y^{1/2}} \right) \right], \operatorname{Re} y > 0$
(28)	$x^{-1} \exp(-\alpha x^{1/2}) \times$ $\times \cos(\alpha x^{1/2} + \pi/4 - \nu\pi/2),$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$(\pi/2)^{1/2} \Gamma(1/2 - \nu) \times$ $\times D_{\nu-1/2} (\alpha y^{-1/2} e^{\pi i/4}) \times$ $\times D_{\nu-1/2} (\alpha y^{-1/2} e^{-\pi i/4}),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(29)	0, $0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} \sin[\beta (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$	$(\pi/2)^{1/2} a^{3/2-\nu} \times$ $\times \beta y^{1/2-\nu} (y^2 + \beta^2)^{\nu/2-3/4} \times$ $\times K_{\nu-3/2} [a (y^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \beta $
(30)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[\beta (a^2 - x^2)^{-1/2}],$ $0 < x < a$ 0, $a < x < \infty$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\frac{\pi^2 y^{1/2}}{4 \sin(\nu\pi)} [J_{\nu/2}(u) J_{\nu/2}(v) -$ $- J_{-\nu/2}(u) J_{-\nu/2}(v)],$ $u = 2^{-1} a [\beta + (\beta^2 - y^2)^{1/2}],$ $v = 2^{-1} a [\beta - (\beta^2 - y^2)^{1/2}]$
(31)	0, $0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{-1/2} \times$ $\times \cos[\beta (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$	$(\pi/2)^{1/2} a^{1/2-\nu} y^{1/2-\nu} (y^2 + \beta^2)^{\nu/2-1/4} \times$ $\times K_{\nu-1/2} [a (y^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \beta $
(32)	$x^{-1/2} \operatorname{sh}(\alpha x),$ $-2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\frac{\pi y^{1/2} \sin[\nu \arcsin(\alpha/y)]}{2 (y^2 - \alpha^2)^{1/2} \sin(\nu\pi/2)},$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Re} \alpha $

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(33)	$x^{-1/2} \operatorname{ch}(\alpha x),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi y^{1/2} \cos[\nu \arcsin(\alpha/y)]}{2(y^2 - \alpha^2)^{1/2} \cos(\nu\pi/2)},$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Re} \alpha $
(34)	$x^{-3/2} \operatorname{sh}(\alpha x),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi \sin[\nu \arcsin(\alpha/y)]}{2\nu y^{1/2} \cos(\nu\pi/2)},$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Re} \alpha $
(35)	$x^{-1/2} (a^2 - x^2)^{-1/2} \operatorname{ch}[\beta(a^2 - x^2)^{1/2}],$ $0 < x < a$ $0,$ $a < x < \infty$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi^2 y^{1/2}}{4 \sin(\nu\pi/2)} [I_{-\nu/2}(u) I_{-\nu/2}(v) -$ $- I_{\nu/2}(u) I_{\nu/2}(v)],$ $u = 2^{-1} a [(\beta^2 + y^2)^{1/2} + \beta],$ $v = 2^{-1} a [(\beta^2 + y^2)^{1/2} - \beta]$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \beta $

10.3. Высшие трансцендентные функции

(1)	$x^{1/2} P_n(1 - 2x^2),$ $0 < x < 1$ $0,$ $1 < x < \infty$ $\nu = 0, n = 0, 1, 2, \dots$	$y^{-1/2} [(-1)^{n+1} K_{2n+1}(y) +$ $+ 2^{-1} i S_{2n+1}(iy)]$
(2)	$0,$ $0 < x < a$ $x^{-1/2} (x^2 - a^2)^{-1/2} T_n(a/x),$ $a < x < \infty$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$2^{-1} \pi a^{-1} y^{-1/2} W_{n/2, \nu/2}(ay) \times$ $\times W_{-n/2, \nu/2}(ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(3)	$0,$ $0 < x < a$ $x^{\mu} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-1/2}^{\mu}(x/a),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu < 1$	$(\pi/2)^{1/2} y^{-1} \exp(-ay/2) W_{\mu, \nu}(ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(4)	$0,$ $0 < x < a$ $x^{\mu-2} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-1/2}^{\mu}(x/a),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu < 1$	$(\pi/2)^{1/2} a^{-1} \exp(-ay/2) W_{\mu-1, \nu}(ay)$ $\operatorname{Re} y > 0$
(5)	$0,$ $0 < x < a$ $x^{-\mu} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-1/2}^{\mu}(x/a),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu < 1$	$(2\pi)^{-1/2} a^{1-\mu} y^{\mu} K_{\nu}(2^{-1}ay) \times$ $\times K_{\mu-1/2}(2^{-1}ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(6)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\mu-1} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-3/2}^{\mu}(x/a),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu < 1$	$\left(\frac{\pi}{2ay}\right)^{1/2} \exp(-ay/2) W_{\mu-1/2, \nu-1/2}(y)$
(7)	$x^{1/2} (x^2 + a^2)^{\nu/2} P_{\mu}^{\nu}(1 + 2x^2 a^{-2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-\nu} ay^{-\nu-1/2} S_{2\nu, 2\mu+1}(ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(8)	$x^{1/2} (x^2 + a^2)^{\nu/2} \times$ $\times [(\mu - \nu) P_{\mu}^{\nu}(1 + 2x^2 a^{-2}) +$ $+ (\mu + \nu) P_{-\mu}^{\nu}(1 + 2x^2 a^{-2})],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{1-\nu} \mu y^{-\nu-3/2} S_{2\nu+1, 2\mu}(ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(9)	$x^{1/2} (x^2 + a^2)^{\nu/2-1} \times$ $\times [P_{\mu}^{\nu}(1 + 2x^2 a^{-2}) +$ $+ P_{-\mu}^{\nu}(1 + 2x^2 a^{-2})],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{1-\nu} y^{1/2-\nu} S_{2\nu-1, 2\mu}(ay),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(10)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2} (x^2 - a^2)^{-\nu/2} P_{\mu}^{\nu}(2x^2 a^{-2} - 1),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-\nu} ay^{\nu-1/2} K_{\mu+1}(ay), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(11)	$0, \quad 0 < x < a$ $(x^2 - a^2)^{\nu/2-1/4} P_{\mu}^{1/2-\nu}(2x^2 a^{-2} - 1),$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{\nu-1} ay^{1/2-\nu} [K_{\mu+1/2}(2^{-1}ay)]^2,$ $\operatorname{Re} y > 0$
(12)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + a^2)^{1/2-\nu/2} \times$ $\times Q_{1/2-\nu}^{1/2-\nu}(1 + 2a^2 x^{-2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$i e^{-i\pi\nu} \pi^{3/2} 2^{-\nu-3} \times$ $\times \alpha^{1/2-\nu} y^{\nu-1/2} [\Gamma(1-\nu)]^2 \times$ $\times \{ [J_{\nu-1/2}(2^{-1}ay)]^2 +$ $+ [Y_{\nu-1/2}(2^{-1}ay)]^2 \},$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(13)	$x^{-\nu-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{1/4-\nu/2} \times$ $\times Q_{\mu}^{1/2-\nu} (1 + 2\alpha^2 x^{-2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu > -3/2$ $\operatorname{Re} (\mu - \nu) > -3/2$	$i e^{-i\pi\nu} \pi^{1/2} 2^{-\nu-1} \alpha^{-\nu-1/2} \times$ $\times y^{\nu-3/2} [\Gamma(3/2 + \mu - \nu)]^2 \times$ $\times W_{-\mu-1/2, \nu-1/2}(i\alpha y) \times$ $\times W_{-\mu-1/2, \nu-1/2}(-i\alpha y),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(14)	$x^{1/2} P_{\mu}^{\nu} [(1 + x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \nu < 1$	$y^{-1} S_{\nu+1/2, \mu+1/2}(y),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(15)	$x^{1/2} (1 + x^2)^{-1/2} P_{\mu}^{\nu} [(1 + x^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \nu < 1$	$S_{\nu-1/2, \mu+1/2}(y),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(16)	$x^{\mu+\nu+1/2} J_{\mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1$	$2^{\mu+\nu} \alpha^{\mu} y^{\nu+1/2} \Gamma(\mu + \nu + 1) \times$ $\times (y^2 + \alpha^2)^{-\mu-\nu-1},$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \alpha $
(17)	$x^{\sigma+1/2} J_{\mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} (\mu + \sigma) > \operatorname{Re} \nu - 2$	$\frac{2^{\sigma} \alpha^{\mu}}{\Gamma(\mu + 1)} y^{-\sigma-\mu-3/2} \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\mu + \nu + \sigma}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\mu - \nu + \sigma}{2} + 1\right) \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu + \sigma}{2} + 1, \frac{\mu - \nu + \sigma}{2} + 1;$ $\mu + 1; -\frac{\alpha^2}{y^2}\right).$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \alpha $
(18)	$x^{-1/2} [J_{\mu}(\alpha x)]^2,$ $2 \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1$	$2^{-1} \Gamma(\mu + \nu/2 + 1/2) \times$ $\times \Gamma(\mu - \nu/2 + 1/2) y^{-1/2} \times$ $\times \left\{ P_{\nu/2-1/2}^{-\mu} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}] \right\}^2,$ $\operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $
(19)	$x^{1/2} [J_{\mu}(\alpha x)]^2,$ $2 \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 2$	$\Gamma(\mu + \nu/2 + 1) \Gamma(\mu - \nu/2 + 1) \times$ $\times y^{-\nu/2} (1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{-1/2} \times$ $\times P_{\nu/2}^{-\mu} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}] \times$ $\times P_{\nu/2-1}^{-\mu} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(20)	$x^{1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{\mu+1}(\alpha x),$ $2 \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 3$	$\Gamma\left(\mu + \frac{3+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{3-\nu}{2}\right) \times$ $\times y^{-3/2} (1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2} \times$ $\times P_{\nu/2-1/2}^{-\mu} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}] \times$ $\times P_{\nu/2-1/2}^{-\mu-1} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $
(21)	$x^{-1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{-\mu}(\alpha x),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi}{2y^{1/2} \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times P_{\nu/2-1/2}^{\mu} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}] \times$ $\times P_{\nu/2-1/2}^{-\mu} [(1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $
(22)	$x^{1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{-\mu}(\alpha x),$ $-2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$-\frac{\pi}{2y^{3/2} z \sin(\nu\pi/2)} \times$ $\times [(\mu - \nu/2) P_{\nu/2}^{\mu}(z) P_{\nu/2-1}^{-\mu}(z) -$ $-(\nu/2 + \mu) P_{\nu/2-1}^{\mu}(z) P_{\nu/2}^{-\mu}(z)],$ $z = (1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}, \operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $
(23)	$x^{1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{1-\mu}(\alpha x),$ $-3 < \operatorname{Re} \nu < 3$	$\frac{\alpha \Gamma\left(\frac{3+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right)}{y^{5/2} \Gamma(2-\mu) \Gamma(1+\mu)} \times$ $\times {}_4F_3\left(\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}, 1, \frac{3}{2};\right.$ $\left.2-\mu, 1+\mu, 2; -\frac{4\alpha^2}{y^2}\right),$ $\operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $
(24)	$x^{1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{-\mu-1}(\alpha x),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi}{2y^{3/2} z \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times [P_{\nu/2-1/2}^{-\mu}(z) P_{\nu/2-1/2}^{\mu+1}(z) +$ $+ (\nu/2 - 1/2 - \mu) (\nu/2 + 1/2 + \mu) \times$ $\times P_{\nu/2-1/2}^{-\mu-1}(z) P_{\nu/2-1/2}^{\mu}(z)] -$ $-\frac{y^{1/2} \sin(\mu\pi)}{4\pi \cos(\nu\pi/2)},$ $z = (1 + 4\alpha^2 y^{-2})^{1/2}, \operatorname{Re} y > 2 \operatorname{Im} \alpha $

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(25)	$x^{\sigma+1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{\lambda}(\alpha x),$ $\operatorname{Re}(\sigma + \mu + \lambda) > \operatorname{Re} \nu - 2$	$\frac{2^{\sigma} \alpha^{\mu+\lambda} y^{-\mu-\lambda-\sigma-3/2}}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(1+\lambda)} \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\mu+\lambda+\nu+\sigma}{2} + 1\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\mu+\lambda+\sigma-\nu}{2} + 1\right) \times$ $\times {}_4F_3\left(\frac{\mu+\lambda+1}{2}, \frac{\mu+\lambda}{2} + 1, \frac{\mu+\lambda+\nu+\sigma}{2} + 1, \frac{\mu+\lambda-\nu+\sigma}{2} + 1; 1 + \mu, 1 + \lambda, 1 + \mu + \lambda; -\frac{4\alpha^2}{y^2}\right),$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \alpha $
(26)	$x^{\sigma+1/2} J_{\mu}(\alpha x) J_{\lambda}(\beta x)$	См. Bailey W. N., 1936; Proc. London Math. Soc., 40, 37-48; J. London Math. Soc. 11, 16-20.
(27)	$x^{1/2} J_{\nu/2}(ax^2),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi y^{1/2}}{8a \cos(\nu\pi/2)} \times$ $\times \left[\mathbf{H}_{-\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) - \mathbf{Y}_{-\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(28)	$x^{1/2} Y_{\nu/2}(ax^2),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi y^{1/2}}{4a \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \left[\cos(\nu\pi/2) \mathbf{H}_{-\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) - \right.$ $\left. - \sin(\nu\pi/2) \mathbf{J}_{-\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) - \right.$ $\left. - \mathbf{H}_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right], \operatorname{Re} y > 0$
(29)	$x^{1/2} J_{\nu/4}(ax^2) J_{-\nu/4}(ax^2),$ $a > 0, -2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\frac{\pi y^{1/2}}{32a \cos(\nu\pi/4)} \times$ $\times \left\{ \left[\mathbf{J}_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{16a}\right) \right]^2 + \left[\mathbf{Y}_{\nu/4}\left(\frac{y^2}{16a}\right) \right]^2 \right\},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(30)	$x^{1/2} J_{\mu+\nu/4}(ax^2) J_{\mu-\nu/4}(ax^2),$ $a > 0, 4 \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 2$	$\pi^{-1} y^{-3/2} \times$ $\times \Gamma(\mu + \nu/4 + 1/2) \Gamma(\mu - \nu/4 + 1/2) \times$ $\times \mathbf{W}_{-\mu, \nu/4}\left(\frac{y^2}{8a} e^{i\pi/2}\right) \times$ $\times \mathbf{W}_{-\mu, \nu/4}\left(\frac{y^2}{8a} e^{-i\pi/2}\right),$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(31)	$x^{-1/2} J_{\nu}(a/x),$ $a > 0$ $-5/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$y^{-1/2} \exp [2^{-1} i (\nu + 1) \pi] \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{i\pi/4}] +$ $+ y^{-1/2} \exp [-2^{-1} i (\nu + 1) \pi] \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{-i\pi/4}],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(32)	$x^{-5/2} J_{\nu}(a/x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$a^{-1} y^{1/2} \exp (2^{-1} i \nu \pi) \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{i\pi/4}] +$ $+ a^{-1} y^{1/2} \exp (-2^{-1} i \nu \pi) \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{-i\pi/4}],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(33)	$x^{2\nu-2} J_{\nu+1/2}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/3$	$(2\pi)^{1/2} (y/a)^{-\nu+1/2} J_{2\nu} [(2ay)^{1/2}] \times$ $\times K_{2\nu} [(2ay)^{1/2}], \operatorname{Re} y > 0$
(34)	$x^{-2\nu} J_{\nu-1/2}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$(2\pi)^{1/2} (y/a)^{\nu-1/2} K_{2\nu-1} [(2ay)^{1/2}] \times$ $\times \{ \sin (\nu\pi) J_{2\nu-1} [(2ay)^{1/2}] +$ $+ \cos (\nu\pi) Y_{2\nu-1} [(2ay)^{1/2}] \},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(35)	$x^{2\nu} J_{1/2+\nu}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$(2\pi)^{1/2} (y/a)^{-\nu-1/2} J_{1+2\nu} [(2ay)^{1/2}] \times$ $\times K_{1+2\nu} [(2ay)^{1/2}], \operatorname{Re} y > 0$
(36)	$x^{\sigma-1} J_{\mu}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \nu - 2$	$2^{-\sigma-3/2} a^{\sigma} \times$ $\times G_{04}^{30} \left(\frac{a^2 y^2}{4} \middle \frac{\mu-\sigma}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}, \right.$ $\left. \frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\mu+\sigma}{2} \right),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(37)	$x^{-1/2} Y_{\nu}(a/x),$ $a > 0, -5/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$-y^{-1/2} \exp (2^{-1} i \nu \pi) \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{i\pi/4}] -$ $- y^{-1/2} \exp (-2^{-1} i \nu \pi) \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{-i\pi/4}],$ $\operatorname{Re} y > 0,$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(38)	$x^{-\nu/2} Y_{\nu}(a/x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$a^{-1} y^{1/2} \exp [2^{-1} i (\nu + 1) \pi] \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{i\pi/4}] +$ $+ a^{-1} y^{1/2} \exp [-2^{-1} i (\nu + 1) \pi] \times$ $\times K_{2\nu} [2 (ay)^{1/2} e^{-i\pi/4}],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(39)	$x^{2\nu-2} Y_{\nu+1/2}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/3$	$(2\pi)^{1/2} (y/a)^{1/2-\nu} Y_{2\nu} [(2ay)^{1/2}] \times$ $\times K_{2\nu} [(2ay)^{1/2}], \operatorname{Re} y > 0$
(40)	$x^{-2\nu} Y_{\nu-1/2}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\frac{(\pi/2)^{1/2} (y/a)^{\nu-1/2}}{\cos(\nu\pi)} \times$ $\times K_{2\nu-1} [(2ay)^{1/2}] \{J_{2\nu-1} [(2ay)^{1/2}] -$ $- J_{1-2\nu} [(2ay)^{1/2}]\}$
(41)	$x^{2\nu} Y_{\nu+1/2}(a/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu < -1$	$(2\pi)^{1/2} (y/a)^{-\nu-1/2} Y_{2\nu+1} [(2ay)^{1/2}] \times$ $\times K_{2\nu+1} [(2ay)^{1/2}], \operatorname{Re} y > 0$
(42)	$x^{-1/2} J_{\mu}(a/x) Y_{\mu}(a/x),$ $a > 0, \nu = 0$	$-2y^{-1/2} J_{2\mu} (2a^{1/2} y^{1/2}) \times$ $\times K_{2\mu} (2a^{1/2} y^{1/2}), \operatorname{Re} y > 0$
(43)	$x^{-1/2} \{ [J_{\mu}(a/x)]^2 - [Y_{\mu}(a/x)]^2 \},$ $a > 0, \nu = 0$	$4y^{-1/2} Y_{2\mu} (2a^{1/2} y^{1/2}) K_{2\mu} (2a^{1/2} y^{1/2}),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(44)	$J_{2\nu-1}(ax^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi a}{4y^{3/2}} \left[I_{\nu-1} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) - L_{\nu-1} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(45)	$x^{-1/2} J_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi}{2y^{1/2}} \left[I_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) - L_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(46)	$x^{-1/2} Y_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi}{2y^{1/2}} \left[\frac{1}{\sin(2\nu\pi)} L_{-\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) - \right.$ $- \operatorname{ctg}(2\nu\pi) L_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) -$ $- \operatorname{tg}(\nu\pi) I_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) -$ $\left. - \frac{1}{\pi \cos(\nu\pi)} K_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(47)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{1/2-\nu} (x^2 - a^2)^{\mu/2} \times$ $\times J_{\mu} [\beta (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > -1$	$a^{\mu-\nu+1} \beta^{\mu} y^{1/2-\nu} (y^2 + \beta^2)^{(\nu-\mu-1)/2} \times$ $\times K_{\nu-\mu-1} [a (y^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \beta$
(48)	$x^{1/2} K_{\nu}(\alpha x), \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi \alpha^{-\nu} y^{\nu/2}}{2 \sin(\nu\pi)} \frac{\alpha^{2\nu} - y^{2\nu}}{\alpha^2 - y^2},$ $\operatorname{Re}(y + \alpha) > 0$
(4)	$x^{\sigma-3/2} K_{\mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu $	$\frac{2^{\sigma-3} \alpha^{-\nu-\sigma}}{\Gamma(\sigma)} \Gamma\left(\frac{\sigma+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma-\mu+\nu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\sigma+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma-\mu-\nu}{2}\right) y^{\nu+1/2} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{\sigma+\mu+\nu}{2}, \frac{\sigma-\mu+\nu}{2}; \sigma; 1 - \frac{y^2}{\alpha^2}\right),$ $\operatorname{Re}(y + \alpha) > 0$
(50)	$x^{1/2} [2\pi^{-1} K_0(\alpha x) - Y_0(\alpha x)],$ $\nu = 0$	$2\pi^{-1} y^{1/2} [(y^2 + \alpha^2)^{-1} + (y^2 - \alpha^2)^{-1}] \times$ $\times \ln(y/\alpha),$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \alpha , \operatorname{Re}(y + \alpha) > 0$
(51)	$x^{\sigma+1/2} J_{\mu}(\alpha x) K_{\lambda}(\beta x),$ $x^{\sigma+1/2} K_{\mu}(\alpha x) K_{\lambda}(\beta x)$	См. Bailey W. N., 1936: J. London Math. Soc., 11, 16–20; Proc. London Math. Soc. 40, 37–48.
(52)	$x^{1/2} K_{\nu/2}(\alpha x^2),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi y^{1/2}}{8\alpha} \left\{ \frac{1}{\cos(\nu\pi/2)} K_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) + \right.$ $\left. + \frac{\pi}{\sin(\nu\pi)} \left[L_{-\nu/2}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) - \right. \right.$ $\left. \left. - L_{\nu/2}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) \right] \right\}$
(53)	$x^{2\mu+\nu+1/2} \exp(-2^{-1}\alpha x^2) \times$ $\times I_{\mu}(2^{-1}\alpha x^2), \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re}(2\mu + \nu) > -1$	$\pi^{-1/2} 2^{\mu-1/2} \alpha^{-\mu/2-\nu/2-1/4} y^{-\mu-1} \times$ $\times \Gamma(2\mu + \nu + 1) \Gamma(\mu + 1/2) \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) W_{k, m}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right),$ $2k = -3\mu - \nu - 1/2$ $2m = \mu + \nu + 1/2$
(54)	$x^{-1/2} K_{\nu}(\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\pi y^{-1/2} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} y^{1/2}), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(55)	$x^{-5/2} K_{\nu}(\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\pi \alpha^{-1} y^{1/2} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2} y^{1/2}), \quad \operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(56)	$x^{2\nu} K_{\nu+1/2}(\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$(2\pi)^{1/2} (y/\alpha)^{-\nu-1/2} \times$ $\times K_{2\nu+1}[(2\alpha y)^{1/2} e^{i\pi/4}] \times$ $\times K_{2\nu+1}[(2\alpha y)^{1/2} e^{-i\pi/4}], \operatorname{Re} y > 0$
(57)	$x^{2\nu-2} K_{\nu+1/2}(\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$(2\pi)^{1/2} (y/\alpha)^{1/2-\nu} \times$ $\times K_{2\nu}[(2\alpha y)^{1/2} e^{i\pi/4}] \times$ $\times K_{2\nu}[(2\alpha y)^{1/2} e^{-i\pi/4}], \operatorname{Re} y > 0$
(58)	$x^{\sigma-1} K_{\mu}(\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$2^{-\sigma-5/2} \alpha^{\sigma} \times$ $\times G_{04}^{40} \left(\frac{\alpha^2 y^2}{4} \middle \frac{\mu-\sigma}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}, \right.$ $\left. \frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\mu+\sigma}{2} \right)$
(59)	$x^{-1}, [K_{\mu}(\alpha/x)]^2, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \nu = 0$	$2\pi y^{-1/2} K_{2\mu}(2\alpha^{1/2} y^{1/2} e^{i\pi/4}) \times$ $\times K_{2\mu}(2\alpha^{1/2} y^{1/2} e^{-i\pi/4}), \operatorname{Re} y > 0$
(60)	$x^{-1/2} I_{2\nu}(\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi}{2y^{1/2}} \left[I_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) + I_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(61)	$x^{-1/2} [I_{2\nu}(\alpha x^{1/2}) + I_{2\nu}(\alpha x^{1/2})], \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi}{y^{1/2}} I_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(62)	$x^{-1/2} [I_{2\nu}(\alpha x^{1/2}) - I_{2\nu}(\alpha x^{1/2})], \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi}{y^{1/2}} L_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(63)	$x^{-1/2} K_{2\nu}(\alpha x^{1/2}), \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi y^{-1/2}}{4 \cos(\nu\pi)} \left\{ K_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) + \right.$ $\left. + \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \left[L_{-\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) - L_{\nu} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) \right] \right\},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(64)	$x^{\nu+1/2} I_{2\nu}(\alpha x^{1/2}) J_{2\nu}(\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} 2^{-\nu-1} \alpha^{2\nu+1} y^{-2\nu-2} \times$ $\times J_{\nu-1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right), \operatorname{Re} y > 0$
(65)	$x^{\nu-1/2} I_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}) J_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \nu > 0$	$\pi^{1/2} 2^{-\nu} \alpha^{2\nu-1} y^{-2\nu} J_{\nu-1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right),$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(66)	$x^{\nu-1/2} J_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}) Y_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\pi^{1/2} \alpha^{2\nu-1}}{2^{\nu+1} y^{2\nu} \sin(\nu\pi)} \left[H_{1/2-\nu} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) + \right.$ $\left. + \cos(\nu\pi) J_{\nu-1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) + \right.$ $\left. + \sin(\nu\pi) Y_{\nu-1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(67)	$x^{\nu-1/2} J_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}) K_{2\nu-1}(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\pi^{3/2} \alpha^{2\nu-1}}{2^{\nu+2} y^{2\nu} \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \left[H_{1/2-\nu} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) - Y_{1/2-\nu} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(68)	$x^{-\nu-1/2} J_{2\nu+1}(\alpha x^{1/2}) \times$ $\times J_{-2\nu-1}(\alpha x^{1/2}), \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\pi^{1/2} 2^{\nu} \alpha^{-2\nu-1} y^{2\nu} \times$ $\times \left[\cos(\nu\pi) H_{\nu+1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) + \right.$ $\left. + \sin(\nu\pi) J_{\nu+1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(69)	$x^{-\nu-1/2} I_{-2\nu-1}(\alpha x^{1/2}) \times$ $\times J_{2\nu+1}(\alpha x^{1/2}), \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{1/2} 2^{\nu} \alpha^{-2\nu-1} y^{2\nu} \times$ $\times \left[\cos(\nu\pi) H_{\nu+1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) - \right.$ $\left. - \sin(\nu\pi) J_{\nu+1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right) \right],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(70)	$x^{1/2-\nu} [J_{2\nu}(\alpha x^{1/2}) J_{-2\nu}(\alpha x^{1/2}) -$ $- J_{2\nu}(\alpha x^{1/2}) I_{-2\nu}(\alpha x^{1/2})],$ $\operatorname{Re} \nu < 3/2$	$-\pi^{1/2} 2^{\nu} \alpha^{1-2\nu} \sin(\nu\pi) y^{2\nu-2} \times$ $\times J_{\nu+1/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} \right), \operatorname{Re} y > 0$
(71)	$x^{-1/2} K_{\mu}(\alpha x^{1/2}) \times$ $\times [\sin(2^{-1}\mu\pi) J_{\mu}(\alpha x^{1/2}) +$ $+ \cos(2^{-1}\mu\pi) Y_{\mu}(\alpha x^{1/2})],$ $-1 < \operatorname{Re} \mu < 1, \nu = 0$	$-\frac{\pi^2 y^{-1/2}}{16 \cos(2^{-1}\mu\pi)} H_{\mu/2}^{(1)} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right) \times$ $\times H_{\mu/2}^{(2)} \left(\frac{\alpha^2}{4y} \right), \operatorname{Re} y > 0$
(72)	$x^{-1/2} K_{\mu}(\alpha x^{1/2}) \times$ $\times \{ \sin[2^{-1}(\mu-\nu)\pi] J_{\mu}(\alpha x^{1/2}) +$ $+ \cos[2^{-1}(\mu-\nu)\pi] Y_{\mu}(\alpha x^{1/2}) \},$ $ \operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu < 1$	$-2^{-1} \alpha^{-2} y^{1/2} \Gamma \left(\frac{1+\mu-\nu}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1-\mu-\nu}{2} \right) \times$ $\times W_{\nu/2, \mu/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} e^{i\pi/2} \right) \times$ $\times W_{\nu/2, \mu/2} \left(\frac{\alpha^2}{2y} e^{-i\pi/2} \right),$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(73)	$x^{1/2} H_{\nu}(ax), \quad \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$\alpha^{\nu+1} y^{-\nu-1/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \alpha $
(74)	$x^{\mu+\nu+1/2} H_{\mu}(ax), \quad \operatorname{Re} \mu > -3/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -3/2$	$\pi^{-1/2} 2^{\mu+\nu+1} \alpha^{\mu+1} \times$ $\times y^{-2\mu-\nu-5/2} \Gamma(\mu + \nu + 3/2) \times$ $\times {}_2F_1\left(\mu + \nu + \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}; -\frac{\alpha^2}{y^2}\right),$ $\operatorname{Re} y > \operatorname{Im} \alpha $
(75)	$x^{1/2} H_{\nu/2}(ax^2),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -2$	$\frac{y^{1/2} \Gamma(1 + \nu/2)}{2^{1-\nu/2} a \pi} S_{-\nu/2-1, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(76)	$x^{3/2} H_{\nu/2+1/2}(ax^2),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3$	$\frac{2^{\nu/2+1/2} y^{3/2}}{a^2 \pi} \Gamma\left(\frac{3+\nu}{2}\right) \times$ $\times S_{-\frac{\nu+5}{2}, \frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{y^2}{4a}\right), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(77)	$x^{5/2} H_{\nu/2}(ax^2),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3$	$\frac{y^{5/2} \Gamma(2 + \nu/2)}{2^{\nu-1-\nu/2} a^3 \pi} S_{-3-\nu/2, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(78)	$x^{1/2} S_{\mu, \nu/2}(ax^2), \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \mu > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 2$	$\frac{y^{1/2}}{4a} \Gamma(\mu + \nu/2 + 1) \Gamma(\mu - \nu/2 + 1) \times$ $\times S_{-\mu-1, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(79)	$x^{3/2} S_{\mu, \nu/2+1/2}(ax^2), \quad a > 0$ $2 \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 5$	$\frac{y^{3/2}}{8a^2} \left(\mu + \frac{3-\nu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\mu + \frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{3+\nu}{2}\right) \times$ $\times S_{-\mu-2, \nu/2-1/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right), \quad \operatorname{Re} y > 0$
(80)	$x^{5/2} S_{\mu, \nu/2}(ax^2), \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \mu > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 3$	$\frac{y^{5/2}}{16a^3} (2 + \mu + \nu/2) (2 + \mu - \nu/2) \times$ $\times \Gamma(1 + \mu + \nu/2) \Gamma(1 + \mu - \nu/2) \times$ $\times S_{-\mu-3, \nu/2}\left(\frac{y^2}{4a}\right), \quad \operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(81)	$D_{\nu-1/2}(\alpha x^{-1/2}) D_{-\nu-1/2}(\alpha x^{-1/2}),$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$\frac{\pi}{2y} \exp[-\alpha (2y)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} y > 0$
(82)	$x^{2\mu+\nu-1/2} \exp(-2^{-1}\alpha x^2) \times$ $\times M_{\kappa, \mu}(\alpha x^2), \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re}(2\mu + \nu) > -1$	$2^{\mu-\kappa-1/2} \alpha^{1/2-m-\kappa} y^{\mu-1} \times$ $\times \Gamma(2\mu+1) \Gamma(2\mu+\nu+1) \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{8\alpha}\right) W_{k, m}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right),$ $2k = -3\mu - \nu - \kappa - 1/2$ $2m = \mu + \nu - \kappa + 1/2$ $\operatorname{Re} y > 0$
(83)	$x^{-3/2} M_{\kappa, 0}(iax^2) M_{\kappa, 0}(-iax^2),$ $a > 0, \quad \nu = 0$	$\frac{\pi y^{1/2}}{16} \left\{ \left[J_{\kappa}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]^2 + \left[Y_{\kappa}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right]^2 \right\}$
(84)	$x^{-3/2} M_{\kappa, \mu}(iax^2) M_{\kappa, \mu}(-iax^2),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -1/2, \quad \nu = 0$	$ay^{-3/2} [\Gamma(2\mu+1)]^2 W_{-\mu, \kappa}\left(\frac{iy^2}{4a}\right) \times$ $\times W_{-\mu, \kappa}\left(-\frac{iy^2}{4a}\right), \operatorname{Re} y > 0$
(85)	$x^{1/2} W_{\nu/2, \mu}(\alpha/x) W_{-\nu/2, \mu}(\alpha/x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$2\alpha y^{-1/2} K_{2\mu}[(2\alpha y)^{1/2} e^{i\pi/4}] \times$ $\times K_{2\mu}[(2\alpha y)^{1/2} e^{-i\pi/4}], \operatorname{Re} y > 0$
(86)	$x^{\nu+1/2} {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu+1; -\lambda^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu+1} \lambda^{-\alpha-\beta} y^{\alpha+\beta-\nu-3/2} \Gamma(\nu+1) \times$ $\times S_{1-\alpha-\beta, \alpha-\beta}(y/\lambda), \operatorname{Re} y > 0$
(87)	$x^{\nu+2\nu-3/2} \times$ $\times {}_3F_2(1, \alpha, \beta; \gamma, \gamma+\nu; -\lambda^2 x^2),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0$ $\operatorname{Re}(\gamma + \nu) > 0$	$2^{\nu+2\nu-2} \lambda^{-\alpha-\beta} y^{\alpha+\beta-2\nu-\nu+1/2} \times$ $\times \Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+\nu) S_{1-\alpha-\beta, \alpha-\beta}(y/\lambda),$ $\operatorname{Re} y > 0$
(88)	$x^{\mu-3/2} {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p;$ $\beta_1, \dots, \beta_q; -\lambda x^2),$ $p \leq q-1, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu $	$2^{\mu-2} y^{1/2-\mu} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \times$ $\times {}_{p+2}F_q\left(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \frac{\mu+\nu}{2},$ $\frac{\mu-\nu}{2}; \beta_1, \dots, \beta_q; \frac{4\lambda}{y^2}\right),$ $\operatorname{Re} y > 0$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx$
(89)	$x^{\mu-3/2} \times$ $\times E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; ax^{-2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu $	$2^{\mu-2} a^{-\mu} y^{1/2} \times$ $\times E(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+2}; \rho_1, \dots, \rho_q;$ $2^{-2} ay^2),$ $\alpha_{p+1} = \frac{\mu + \nu}{2}, \alpha_{p+2} = \frac{\mu - \nu}{2},$ $\operatorname{Re} y > 0$
(90)	$G_{pq}^{mn} \left(\lambda x^2 \left \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \right. \right),$ $p + q < 2(m + n)$ $ \arg \lambda < (m + n - p/2 - q/2) \pi$ $\operatorname{Re} \beta_j > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 3/4$ $j = 1, \dots, m$	$2^{-3/2} \lambda^{-1/2} \times$ $\times G_{q, p+2}^{n+2, m} \left(\frac{y^2}{4\lambda} \left \begin{matrix} \beta'_1, \dots, \beta'_q \\ h, k, \alpha'_1, \dots, \alpha'_p \end{matrix} \right. \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2$ $\operatorname{Re} y > 0$ $\alpha'_j = \frac{1}{2} - \alpha_j, \beta'_j = \frac{1}{2} - \beta_j$

Г Л А В А X I

Н-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы называем **Н-преобразованием порядка ν** функции $f(x)$ функцию

$$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}(xy) (xy)^{1/2} dx$$

положительного переменного y . Формула обращения 11.1 (1) дана Титчмаршем (1948, стр. 280). **Н-преобразование** обратно **Y-преобразованию** (см. главу IX).

Из пар преобразований, указанных в этой главе, можно получать новые пары преобразований, применяя методы, указанные во введении к первому тому, а также общие формулы из п. 11.1. Кроме того, поскольку **Н-преобразование** при $-1/2 < \text{Re } \nu < 1/2$ обратно **Y-преобразованию**, многие новые формулы могут быть получены из формул, приведенных в главе IX. Очевидно, как с помощью аналитического продолжения получить соответствующие формулы в более широкой области изменения $\text{Re } \nu$.

11.1. Общие формулы

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu),$ $y > 0$
(1)	$\int_0^{\infty} g(y; \nu) Y_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dy,$ $-1/2 < \text{Re } \nu < 1/2$	$g(y; \nu)$
(2)	$f(ax),$ $a > 0$	$a^{-1} g(a^{-1}y; \nu)$
(3)	$x^m f(x),$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$y^{1/2-\nu} \times$ $\times \left(\frac{d}{y dy}\right)^m [y^{\nu-1/2+m} g(y; \nu+m)]$
(4)	$x^{1/2+\nu} \left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^{m-\nu-1/2} f(x)],$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$(-y)^m g(y; \nu-m)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx = g(y; \nu),$ $y > 0$
(5)	$x^{\nu+1/2} \times$ $\times \int_x^{\infty} \xi^{1/2-\nu-\mu} (\xi^2 - x^2)^{\mu-1} f(\xi) d\xi,$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{\mu-1} \Gamma(\mu) y^{-\mu} g(y; \nu + \mu)$
(6)	$x^{-\mu} f(x),$ $\operatorname{Re} \nu + 3/2 > \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{1-\mu} [\Gamma(\mu)]^{-1} y^{1/2-\nu} \times$ $\times \int_0^y \eta^{1/2-\mu+\nu} (y^2 - \eta^2)^{\mu-1} \times$ $\times g(\eta; \nu - \mu) d\eta$

11.2. Элементарные функции

(1)	$x^{-1/2},$ $-2 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$-\operatorname{ctg}(\nu\pi/2) y^{-1/2}$
(2)	$x^{\nu+1/2},$ $0,$ $0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \nu > -3/2$	$a^{\nu+1} y^{-1/2} \mathbf{H}_{\nu+1}(ay)$
(3)	$x^{1/2-\nu},$ $0,$ $0 < x < a$ $a < x < \infty$	$\frac{ay^{\nu-1/2}}{2^{\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu+1/2)}$ $- a^{1-\nu} y^{-1/2} \mathbf{H}_{\nu-1}(ay)$
(4)	$x^{\lambda-1/2},$ $\operatorname{Re} \lambda < 1/2$ $-2 < \operatorname{Re}(\lambda + \nu) < 0$	$2^\lambda y^{-\lambda-1/2} \operatorname{tg} [2^{-1}(\lambda + \nu + 1)\pi] \times$ $\times \frac{\Gamma(1/2 + \lambda/2 + \nu/2)}{\Gamma(1/2 - \lambda/2 + \nu/2)}$
(5)	$x^{\lambda-1/2},$ $0,$ $0 < x < a$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -2$	$\frac{a^{\lambda+\nu+2} y^{\nu+3/2}}{2^\nu \pi^{1/2} \Gamma(\nu+3/2) (\lambda + \nu + 2)} \times$ $\times {}_2F_3 \left(1, \frac{\lambda + \nu}{2} + 1; \frac{3}{2}, \right.$ $\left. \nu + \frac{3}{2}, \frac{\lambda + \nu}{2} + 2; -\frac{a^2 y^2}{4} \right)$
(6)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \nu = 1$	$\frac{\pi y^{1/2}}{2\alpha} [I_1(ay) - L_1(ay)]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(7)	$x^{-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$-\frac{\pi y^{1/2}}{2\alpha \sin(\nu\pi/2)} \mathbf{L}_\nu(\alpha y) +$ $+\frac{y^{3/2} \operatorname{ctg}(\nu\pi/2)}{1-\nu^2} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; \frac{3-\nu}{2}, \frac{3+\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y^2}{4}\right)$
(8)	$x^{\nu+1/2} (x^2 + \alpha^2)^{\mu-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1/2$ $\operatorname{Re}(2\mu + \nu) < 3/2$	$\frac{2^{\mu-1} \pi \alpha^{\mu+\nu} y^{1/2-\mu}}{\Gamma(1-\mu) \cos[(\mu+\nu)\pi]} \times$ $\times [I_{-\mu-\nu}(\alpha y) - \mathbf{L}_{\mu+\nu}(\alpha y)]$
(9)	$x^{1/2-\nu} (x^2 + \alpha^2)^{\mu-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu < 1/2$ $\operatorname{Re}(2\mu - \nu) < 3/2$	$\frac{2^{\mu-1} \pi \alpha^{\mu-\nu} y^{1/2-\mu}}{\Gamma(1-\mu) \cos(\mu\pi)} I_{\nu-\mu}(\alpha y) +$ $+\frac{\alpha^{2\mu+1} y^{\nu+3/2} \Gamma(-1/2-\mu)}{2^{\nu+2} \Gamma(1-\mu) \Gamma(\nu+3/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; \mu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2}; \frac{\alpha^2 y^2}{4}\right)$
(10)	$x^{\lambda-1/2} (x^2 + \alpha^2)^{\mu-1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -2$ $\operatorname{Re}(\lambda + 2\mu) < 5/2$ $\operatorname{Re}(\lambda + 2\mu + \nu) < 2$	$2^{-1/2} [\Gamma(1-\mu)]^{-1} \alpha^{\lambda+2\mu-3/2} \times$ $\times G_{24}\left(\frac{\alpha^2 y^2}{4} \middle l, m, h, k\right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2$ $l = 3/4 + \nu/2, m = 3/4 - \lambda/2$
(11)	$(x^2 + \alpha^2)^{-1/2} [x + (x^2 + \alpha^2)^{1/2}]^{\nu+1},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -2 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$\frac{\pi^{1/2} \alpha^{\nu+1/2}}{y^{1/2} \sin(\nu\pi)} [\operatorname{sh}(\alpha y/2) I_{\nu+1/2}(\alpha y/2) -$ $- \operatorname{ch}(\alpha y/2) I_{-\nu-1/2}(\alpha y/2)]$
(12)	$x^{\nu+1/2} (a^2 - x^2)^{\mu-1}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{\mu-1} a^{\mu+\nu} y^{1/2-\mu} \Gamma(\mu) \mathbf{H}_{\mu+\nu}(ay)$
(13)	$x^{\lambda-1/2} (a^2 - x^2)^{\mu-1}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -2$	$\frac{a^{2\mu+\nu+\lambda} y^{\nu+3/2} \Gamma(\mu) \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu}{2}+1\right)}{2^{\nu+1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu+3/2) \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu}{2}+\mu+1\right)} \times$ $\times {}_2F_3\left(1, \frac{\lambda+\nu}{2}+1; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\lambda+\nu}{2}+\mu+1; -\frac{a^2 y^2}{4}\right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(14)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{-\nu-1/2},$ $a < x < \infty$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-\nu-1} \pi^{1/2} a^{-2\nu} y^{\nu+1/2} \times$ $\times \Gamma(1/2 - \nu) [J_{\nu}(ay/2)]^2$
(15)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^m,$ $a < x < \infty$ $m = 0, 1, 2, \dots$ $\operatorname{Re} \nu < -2m - 1/2$	$(-1)^{m+1} 2^m a^{m+\nu+1} y^{-m-1/2} m! \times$ $\times \mathbf{H}_{\nu+m+1}(ay)$
(16)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\nu+1/2} (x^2 - a^2)^{\mu-1},$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1/2$ $\operatorname{Re}(2\mu + \nu) < 3/2$	$\frac{2^{\mu-1} a^{\mu+\nu} y^{1/2-\mu} \Gamma(\mu)}{\cos[(\mu + \nu)\pi]} \times$ $\times [\sin(\mu\pi) J_{-\mu-\nu}(ay) +$ $+ \cos(\nu\pi) \mathbf{H}_{\mu+\nu}(ay)]$
(17)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{-\nu-1/2} (x^2 - a^2)^{\mu},$ $a < x < \infty$ $-1 < \operatorname{Re} \mu < 0$ $\operatorname{Re} \nu > 2 \operatorname{Re} \mu - 1/2$	$-\pi 2^{2\mu-\nu} y^{\nu-2\mu-1/2} [\Gamma(1/2 - \mu)] \times$ $\times [\Gamma(1/2 + \nu - \mu) \sin(\mu\pi)]^{-1} \times$ $\times {}_1F_2(-\mu; 1/2 - \mu, 1/2 + \nu - \mu;$ $-2^{-2} a^2 y^2)$
(18)	$0, \quad 0 < x < a$ $x^{\lambda-1/2} (x^2 - a^2)^{\mu-1},$ $a < x < \infty$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\lambda + 2\mu) < 5/2$ $\operatorname{Re}(\lambda + 2\mu + \nu) < 2$	$2^{-1/2} \Gamma(\mu) a^{2\mu+\lambda-1/2} \times$ $\times G_{24}^{21} \left(\frac{a^2 y^2}{4} \middle \begin{matrix} l, m \\ l, m-\mu, h, k \end{matrix} \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, \quad k = 1/4 - \nu/2$ $l = 3/4 + \nu/2, \quad m = 3/4 - \lambda/2$
(19)	$x^{\lambda-1/2} e^{-ax},$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -2$	$\frac{y^{\nu+3/2} \Gamma(\lambda + \nu + 2)}{2^{\nu} a^{\lambda+\nu+2} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 3/2)} \times$ $\times {}_3F_2 \left(1, \frac{\lambda + \nu}{2} + 1, \frac{\lambda + \nu + 3}{2}; \right.$ $\left. \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{a^2} \right)$
(20)	$x^{\lambda+1/2} \exp(-ax^2),$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -3$	$2^{-\nu-1} \pi^{-1/2} a^{-(\lambda+\nu+3)/2} y^{\nu+3/2} \times$ $\times \frac{\Gamma(\frac{\lambda+\nu+3}{2})}{\Gamma(\nu+3/2)} \times$ $\times {}_2F_2 \left(1, \frac{\lambda+\nu+3}{2}; \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{4a} \right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(21)	$x^{-\nu-1/2} \sin(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $\pi^{1/2} 2^{-\nu} y^{1/2-\nu} [\Gamma(\nu+1/2)]^{-1} \times$ $\times (y^2 - a^2)^{\nu-1/2}, \quad a < y < \infty$
(22)	$\frac{x^{1/2} \cos[(\nu+1)\theta]}{\sin \theta}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$ $0 < \theta < \pi/2, \quad x = a \cos \theta$ $\operatorname{Re} \nu > -2$	$\pi^{1/2} a^{1/2} \sin(ay/2) J_{\nu+1/2}(ay/2)$

11.3. Высшие трансцендентные функции

(1)	$J_{\nu+1/2}(ax),$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$0, \quad 0 < y < a$ $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{y}{a}\right)^{\nu+1/2} (y^2 - a^2)^{-1/2},$ $a < y < \infty$
(2)	$x^{-1/2} Y_{\nu+1}(ax),$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $-a^{-\nu-1} y^{1/2+\nu}, \quad a < y < \infty$
(3)	$x^{\mu-\nu+1/2} Y_\mu(ax),$ $a > 0, \operatorname{Re}(\nu - \mu) > 0$ $-3/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $\frac{2^{1+\mu-\nu} a^\mu}{\Gamma(\nu-\mu)} y^{1/2-\nu} (y^2 - a^2)^{\nu-\mu-1},$ $a < y < \infty$
(4)	$x^{1/2-\mu} [\sin(\mu\pi) J_{\mu+\nu}(ax) +$ $+ \cos(\mu\pi) Y_{\mu+\nu}(ax)],$ $a > 0, \quad 1 < \operatorname{Re} \mu < 3/2$ $\operatorname{Re} \nu > -3/2, \operatorname{Re}(\nu - \mu) < 1/2$	$0, \quad 0 < y < a$ $\frac{y^{1/2+\nu} (y^2 - a^2)^{\mu-1}}{2^{\mu-1} a^{\mu+\nu} \Gamma(\mu)}, \quad a < y < \infty$
(5)	$x^{\nu+1/2} J_\nu(ax) Y_\nu(ax),$ $a > 0, \quad -3/4 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$\frac{\Gamma(2\nu+3/2) y^{\nu+3/2}}{\pi^{3/2} 2^{\nu+2} a^{2\nu+3} \Gamma(\nu+2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(1, 2\nu + \frac{3}{2}; \nu+2; \frac{y^2}{4a^2}\right),$ $0 < y < 2a$
(6)	$x^{\nu+1/2} \{[J_\nu(ax)]^2 - [Y_\nu(ax)]^2\},$ $a > 0, \quad -3/4 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$0, \quad 0 < y < 2a$ $\frac{2^{3\nu+2} a^{2\nu} y^{-\nu-1/2}}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2-\nu)} (y^2 - 4a^2)^{-\nu-1/2}$ $2a < y < \infty$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(7)	$x^{1/2} \{ [J_{\nu/2}(ax)]^2 - [Y_{\nu/2}(ax)]^2 \},$ $a > 0, \quad 3/2 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$0, \quad 0 < y < 2a$ $4\pi^{-1} y^{-1/2} (y^2 - 4a^2)^{-1/2},$ $2a < y < \infty$
(8)	$x^{1/2} [J_{\nu/2+\mu/2}(ax) J_{\nu/2-\mu/2}(ax) -$ $- Y_{\nu/2+\mu/2}(ax) Y_{\nu/2-\mu/2}(ax)],$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$0, \quad 0 < y < 2a$ $4\pi^{-1} y^{-1/2} (y^2 - 4a^2)^{-1/2} \operatorname{ch}(\mu u),$ $y = 2a \operatorname{ch} u, \quad u > 0$
(9)	$J_{2\nu+1}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$	$-\frac{a}{2y^{3/2}} Y_{\nu+1}\left(\frac{a^2}{4y}\right)$
(10)	$x^{-1/2} J_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 5/4$	$-y^{-1/2} Y_\nu\left(\frac{a^2}{4y}\right)$
(11)	$x^{1/2} \{ [J_{\nu/2}[b(z-\alpha)]]^2 -$ $- [Y_{\nu/2}[b(z+\alpha)]]^2 \},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad b > 0$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1$ $z = (x^2 + \alpha^2)^{1/2}$	$-\frac{4 \sin[\alpha(4b^2 - y^2)^{1/2}]}{\pi y^{1/2} (4b^2 - y^2)^{1/2}}, \quad 0 < y < 2b$ $\frac{4 \exp[-\alpha(y^2 - 4b^2)^{1/2}]}{\pi y^{1/2} (y^2 - 4b^2)^{1/2}},$ $2b < y < \infty$
(12)	$x^{1/2} K_\nu(ax),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$\alpha^{-\nu-1} y^{\nu+3/2} (y^2 + \alpha^2)^{-1}$
(13)	$x^{\mu+\nu+1/2} K_\mu(ax),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -3/2$	$2^{\mu+\nu+1} \pi^{-1/2} \alpha^{-\mu-2\nu-3} \times$ $\times y^{\nu+3/2} \Gamma(\mu + \nu + 3/2) \times$ $\times {}_2F_1\left(1, \mu + \nu + \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{\alpha^2}\right)$
(14)	$x^{\mu-\nu+1/2} K_\mu(ax),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -3/2$	$\frac{2^{\mu-\nu} y^{\nu+3/2} \Gamma(\mu + 3/2)}{\alpha^{\mu+3} \Gamma(\nu + 3/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(1, \mu + \frac{3}{2}; \nu + \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{\alpha^2}\right)$
(15)	$x^{\sigma-1/2} K_\mu(ax), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(\sigma + \nu) > \operatorname{Re} \mu - 2$	$2^\sigma \pi^{-1/2} \alpha^{-\nu-\sigma-2} y^{\nu+3/2} \times$ $\times \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu+\sigma+\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu+\sigma-\mu}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 3/2)} \times$ $\times {}_3F_2\left(1, 1 + \frac{\nu+\sigma+\mu}{2}, 1 + \frac{\nu+\sigma-\mu}{2}; \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{\alpha^2}\right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) H_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(16)	$x^{\sigma-1/2} e^{-\alpha x} K_\nu(\alpha x)$	См. Mohan Brij, 1942: Bull. Calcutta Math. Soc., 34, 55-59.
(17)	$x^{\nu+1/2} [K_\nu(\alpha x)]^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/4$	$\pi^{1/2} 2^{-\nu-3} \alpha^{-2\nu-3} y^{\nu+3/2} \times$ $\times \Gamma(2\nu+3/2) [\Gamma(\nu+2)]^{-1} \times$ $\times {}_2F_1\left(1, 2\nu+\frac{3}{2}; \nu+2; -\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)$
(18)	$x^{1/2} [K_\mu(\alpha x)]^2,$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -3/2 < \operatorname{Re} \mu < 3/2$	$\nu=0$ $-\frac{\pi}{2^{\mu+1} \alpha^{2\mu} y^{1/2} z \cos(\mu\pi)} \times$ $\times [(z+y)^{2\mu} + (z-y)^{2\mu}],$ $z = (y^2 + 4\alpha^2)^{1/2}$
(19)	$x^{-\nu-1/2} K_0(\alpha x) K_1(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$\frac{\pi^{3/2} y^{\nu+3/2}}{2^{\nu+3} \alpha^2 \Gamma(\nu+3/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; -\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)$
(20)	$x^{-\nu-1/2} K_\nu(\alpha x) K_{\nu+1}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{1/2} 2^{-\nu-2} \alpha^{-2} y^{\nu+3/2} \Gamma(1/2-\nu) \times$ $\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\nu; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)$
(21)	$x^{\sigma-3/2} K_\lambda(\alpha x) K_\mu(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re}(\sigma+\nu) > \operatorname{Re} \lambda + \operatorname{Re} \mu $	$\frac{2^{\sigma-3} y^{\nu+3/2} \Gamma\left(\frac{\sigma+\nu+\lambda+\mu}{2}\right)}{\pi^{1/2} \alpha^{\sigma+\nu} \Gamma(\nu+3/2) \Gamma(\sigma+\nu)} \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\sigma+\nu+\lambda-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-\lambda+\mu}{2}\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-\lambda-\mu}{2}\right) \times$ $\times {}_5F_4\left(1, \frac{\sigma+\nu+\lambda+\mu}{2}, \frac{\sigma+\nu+\lambda-\mu}{2}, \frac{\sigma+\nu-\lambda+\mu}{2}, \frac{\sigma+\nu-\lambda-\mu}{2}; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma+\nu+1}{2}; -\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)$
(22)	$x^{\nu+3/2} K_\nu(\alpha x) K_{\nu+1}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -5/4$	$\pi^{1/2} 2^{-\nu-3} \alpha^{-2\nu-4} y^{\nu+3/2} \times$ $\times \Gamma(2\nu+5/2) [\Gamma(\nu+2)]^{-1} \times$ $\times {}_2F_1\left(1, 2\nu+\frac{5}{2}; \nu+2; -\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) H_{\nu}(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(23)	$x^{\sigma-5/2} \exp(-2^{-1}\alpha^2 x^2) \times$ $\times K_{\mu}(2^{-1}\alpha^2 x^2),$ $ \arg \alpha < \pi/4$ $\operatorname{Re}(\sigma + \nu) > 2 \mid \operatorname{Re} \mu \mid$	$2^{-\nu-1} \alpha^{-\nu-\sigma} y^{\nu+3/2} \times$ $\times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\sigma}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\sigma}{2} - \mu\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\sigma}{2}\right)} \times$ $\times {}_3F_3\left(1, \frac{\nu+\sigma}{2} + \mu, \frac{\nu+\sigma}{2} - \mu; \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{\nu+\sigma}{2}; -\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)$
(24)	$x^{1/2} \exp\left(\frac{\alpha^2 x^2}{8}\right) K_{\nu/2}\left(\frac{\alpha^2 x^2}{8}\right),$ $ \arg \alpha < 3\pi/4$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$2\pi^{-1/2} \alpha^{-\nu/2-1} y^{\nu/2-1/2} \times$ $\times \cos(\nu\pi/2) \Gamma(-\nu/2) \times$ $\times \exp\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right) W_{k,m}\left(\frac{y^2}{\alpha^2}\right),$ $k = \nu/4, m = 1/2 + \nu/4$
(25)	$x^{\sigma} \exp(\alpha x^2) K_{\mu}(\alpha x^2),$ $ \arg \alpha < 3\pi/2, \operatorname{Re} \sigma < 1$ $ \operatorname{Re} \mu - 5/2 < \operatorname{Re}(\sigma + \nu) < 1/2$	$\pi^{-1/2} 2^{-1-\sigma/2} \alpha^{-1/2-\sigma/2} \cos(\mu\pi) \times$ $\times G_{34}^{23}\left(\frac{y^2}{8\alpha} \left \begin{matrix} l, \frac{1-\sigma}{2} + \mu, \frac{1-\sigma}{2} - \mu \\ l, -\frac{\sigma}{2}, h, k \end{matrix} \right. \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2,$ $l = 3/4 + \nu/2$
(26)	$K_{2\nu-1}(2\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu+1} \pi^{-1} \alpha y^{-3/2} \Gamma(\nu+1) \times$ $\times S_{-\nu-2, \nu-1}(\alpha^2/y)$
(27)	$x^{-1/2} K_{2\nu}(2\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{\nu} \pi^{-1} y^{-1/2} \Gamma(\nu+1) \times$ $\times S_{-\nu-1, \nu}(\alpha^2/y)$
(28)	$x^{1/2} K_{2\nu}(2\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -2$	$2^{\nu} \pi^{-1} \alpha^2 y^{-5/2} \Gamma(\nu+2) \times$ $\times S_{-\nu-3, \nu}(\alpha^2/y)$
(29)	$x^{\sigma} K_{\mu}(2\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $2 \operatorname{Re}(\sigma + \nu) > \mid \operatorname{Re} \mu \mid - 5$	$2^{2\sigma-1/2} \alpha^{-2\sigma-2} \pi^{-1} \times$ $\times G_{53}^{15}\left(\frac{4y^2}{\alpha^4} \left \begin{matrix} l, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \\ l, h, k \end{matrix} \right. \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2,$ $l = 3/4 + \nu/2$ $2\beta_1 = 1 - \sigma + \mu/2, 2\beta_2 = 1 - \sigma - \mu/2$ $2\beta_3 = -\sigma + \mu/2,$ $2\beta_4 = -\sigma - \mu/2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, \quad y > 0$
(30)	$x^{-1/2} [2\pi^{-1} K_{2\nu}(2ax^{1/2}) +$ $+ Y_{2\nu}(2ax^{1/2})],$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$y^{-1/2} J_\nu(a^2/y)$
(31)	$x^{1/2-\nu} [J_{2\nu}(ax^{1/2}) - J_{-2\nu}(ax^{1/2})] \times$ $\times K_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $ \arg a < \pi/4$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2^\nu \pi^{-1/2} a^{1-2\nu} y^{2\nu-2} \times$ $\times \sin(\nu\pi) K_{\nu+1/2}\left(\frac{a^2}{2y}\right)$
(32)	$x^{1/2} Y_\nu(ax^{1/2}) K_\nu(ax^{1/2}),$ $ \arg a < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$\frac{1}{2y^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2y}\right)$
(33)	$x^{\nu-1/2} Y_{2\nu-1}(ax^{1/2}) K_{2\nu-1}(ax^{1/2}),$ $ \arg a < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1/4$	$\frac{a^{2\nu-1}}{\pi^{1/2} 2^\nu y^{2\nu}} K_{\nu-1/2}\left(\frac{a^2}{2y}\right)$
(34)	$x^{\nu+1/2} Y_{2\nu}(ax^{1/2}) K_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $ \arg a < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -3/4$	$\frac{a^{2\nu+1}}{\pi^{1/2} 2^{\nu+1} y^{2\nu+2}} K_{\nu-1/2}\left(\frac{a^2}{2y}\right)$
(35)	$x^{-1/2} \{ \cos[2^{-1}(\mu-\nu)\pi] J_\mu(ax^{1/2}) -$ $- \sin[2^{-1}(\mu-\nu)\pi] Y_\mu(ax^{1/2}) \} \times$ $\times K_\mu(ax^{1/2}), \arg a < \pi/4$ $\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu - 2$	$a^{-2} y^{1/2} W_{\nu/2, \mu/2}\left(\frac{a^2}{2y}\right) \times$ $\times W_{-\nu/2, \mu/2}\left(\frac{a^2}{2y}\right)$
(36)	$x^{\nu-1/2} K_{2\nu-1}(ax^{1/2} e^{i\pi/4}) \times$ $\times K_{2\nu-1}(ax^{1/2} e^{-i\pi/4}),$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/4$	$\pi^{-1/2} 2^{3\nu-1} y^{-\nu-1/2} \times$ $\times \Gamma(\nu+1) \Gamma(2\nu+1/2) \times$ $\times S_{-3\nu-1/2, \nu-1/2}\left(\frac{a}{2^{1/2} y^{1/2}}\right)$
(37)	$x^{-1/2} \mathbf{H}_\nu(a^2/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$-y^{-1/2} J_{2\nu}(2ay^{1/2})$
(38)	$x^{-3/2} \mathbf{H}_{\nu-1}(a^2/x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$-a^{-1} J_{2\nu-1}(2ay^{1/2})$
(39)	$x^{-1/2} [J_{-\nu}(a^2/x) +$ $+ \sin(\nu\pi) \mathbf{H}_\nu(a^2/x)],$ $a > 0, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$y^{-1/2} [2\pi^{-1} K_{2\nu}(2ay^{1/2}) -$ $- Y_{2\nu}(2ay^{1/2})]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(40)	$x^\sigma S_{\lambda, \mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re}(\lambda + \sigma) < 1$ $\operatorname{Re}(\sigma + \nu) > \operatorname{Re} \mu - 5/2$ $-3/2 < \operatorname{Re}(\lambda + \nu + \sigma) < 1/2$	$\frac{2^{\lambda+\sigma-1/2} \alpha^{-\sigma-1}}{\Gamma(1/2 - \lambda/2 - \mu/2) \Gamma(1/2 - \lambda/2 + \mu/2)} \times$ $\times G_{44}^{24} \left(\frac{y^2}{\alpha^2} \middle \begin{matrix} l, -\frac{\lambda+\sigma}{2}, \frac{1-\sigma+\mu}{2}, \frac{1-\sigma-\mu}{2} \\ l, -\frac{\lambda+\sigma}{2}, h, k \end{matrix} \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2,$ $l = 3/4 + \nu/2$
(41)	$x^{-\nu-1/2} \exp(-2^{-2}x^2) \times$ $\times [D_\mu(x) - D_\mu(-x)],$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -3/2$ $\operatorname{Re} > -1$	$\frac{2^{3/2} \Gamma(\mu/2 + 1/2)}{\Gamma(\mu/2 + \nu + 1)} y^{\mu+\nu+1/2} \sin(\mu\pi/2) \times$ $\times {}_1F_1 \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}; \frac{\mu}{2} + \nu + 1; -\frac{y^2}{2} \right)$
(42)	$x^{2\lambda} \exp(-2^{-2}x^2) M_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re}(2\lambda + 2\mu + \nu) > -7/2$ $\operatorname{Re}(\kappa - \lambda) > 0$ $\operatorname{Re}(2\lambda - 2\kappa + \nu) < -1/2$	$\frac{2^{-\lambda} \Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(1/2 + \kappa + \mu)} \times$ $\times G_{34}^{22} \left(\frac{y^2}{2} \middle \begin{matrix} l, -\mu - \lambda, \mu - \lambda \\ l, \kappa - \lambda - 1/2, h, k \end{matrix} \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2,$ $l = 3/4 + \nu/2$
(43)	$x^{2\lambda} \exp(-2^{-2}x^2) W_{\kappa, \mu}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re}(2\lambda + \nu) > 2 \operatorname{Re} \mu - 7/2$	$2^{1/4-\lambda-\nu/2} \pi^{-1/2} y^{\nu+3/2} \times$ $\times \frac{\Gamma(7/4 + \nu/2 + \lambda + \mu) \Gamma(7/4 + \nu/2 + \lambda - \mu)}{\Gamma(\nu + 3/2) \Gamma(9/4 + \lambda - \kappa - \nu/2)} \times$ $\times {}_3F_3 \left(1, 7/4 + \nu/2 + \lambda + \mu, \right.$ $\left. 7/4 + \nu/2 + \lambda - \mu; \right.$ $\left. 3/2, \nu + 3/2, 9/4 + \lambda - \kappa + \nu/2; -y^2/2 \right)$
(44)	$x^{-1/2} \exp(2^{-1}x^2) \times$ $\times W_{-\nu/2-1/2, \nu/2}(x^2),$ $\operatorname{Re} \nu > -1$	$2^{-\nu-1} y^{\nu+1/2} \pi \exp(2^{-2}y^2) \operatorname{Erfc}(y/2)$
(45)	$x^{-1/2} \exp(2^{-2}x^2) W_{\kappa, \nu/2}(2^{-1}x^2),$ $-3/2 < \operatorname{Re} \nu < -2 \operatorname{Re} \kappa$ $\operatorname{Re} \kappa < 1/4$	$\frac{2^{\kappa/2-\nu/4} y^{\nu/2-\kappa-1/2} \Gamma(-\kappa-\nu/2)}{\Gamma(1/2-\kappa+\nu/2) \Gamma(1/2-\kappa-\nu/2)} \times$ $\times \exp(2^{-2}y^2) W_{k, m}(2^{-1}y^2),$ $2k = \kappa + \nu/2, 2m = \kappa + \nu/2 + 1$
(46)	$x^{2\lambda} \exp(2^{-2}x^2) W_{\kappa, \lambda}(2^{-1}x^2),$ $\operatorname{Re}(2\lambda + \nu) > 2 \operatorname{Re} \mu - 7/2$ $\operatorname{Re}(2\kappa + 2\lambda + \nu) < -1/2$ $\operatorname{Re}(\kappa + \lambda) < 0$	$[2^\lambda \Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)]^{-1} \times$ $\times G_{34}^{23} \left(\frac{y^2}{2} \middle \begin{matrix} l, -\mu - \lambda, \mu - \lambda \\ l, -\kappa - \lambda - 1/2, h, k \end{matrix} \right),$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2,$ $l = 3/4 + \nu/2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) \mathbf{H}_\nu(xy) (xy)^{1/2} dx, y > 0$
(47)	$G_{pq}^{mn} \left(\lambda x^2 \left \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \right. \right),$ $p + q < 2(m + n),$ $ \arg \lambda < (m + n - p/2 - q/2) \pi$ $\operatorname{Re} \alpha_j < \min(1, 3/4 - \nu/2),$ $j = 1, \dots, n$ $\operatorname{Re}(2\beta_j + \nu) > -5/2,$ $j = 1, \dots, m$	$(2\lambda)^{-1/2} \times$ $\times G_{q+1, p+3}^{n+1, m+1} \left(z \left \begin{matrix} l, \beta'_1, \dots, \beta'_q \\ l, \alpha'_1, \dots, \alpha'_p, h, k \end{matrix} \right. \right)$ $h = 1/4 + \nu/2, k = 1/4 - \nu/2,$ $l = 3/4 + \nu/2$ $z = \frac{y^2}{4\lambda}, \alpha'_j = \frac{1}{2} - \alpha_j, \beta'_j = \frac{1}{2} - \beta_j$

Г Л А В А XII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНТОРОВИЧА — ЛЕБЕДЕВА

М. И. Конторович и Н. Н. Лебедев (1938, 1939) вывели пару взаимно-обратных формул

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) K_{ix}(y) dx,$$

$$f(x) = 2\pi^{-2} x \operatorname{sh}(\pi x) \int_0^{\infty} g(y) K_{ix}(y) y^{-1} dy$$

и использовали их для решения некоторых краевых задач. Дальнейшие приложения к краевым задачам были даны Лебедевым и Конторовичем, а математическая теория была развита Лебедевым (1946, 1949). Следует отметить, что функция $K_{ix}(y)$ вещественна, если x вещественно и y положительно. Иная форма соотношений была установлена в отмеченных выше работах. См. также ВТФ, т. II, стр. 87.

В этой главе мы даем краткий список интегралов, соответствующих первой из указанных формул. Интегралы, соответствующие второй формуле, могут быть вычислены с помощью таблицы, приведенной в главе X. Мы считаем y положительным, хотя некоторые из приведенных ниже интегралов справедливы и при комплексных значениях y .

12.1. Формулы

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{ix}(y) dx, \quad y > 0$
(1)	$x \sin(\alpha x), \quad \operatorname{Im} \alpha < \pi/2$	$2^{-1} \pi y \operatorname{sh} \alpha \exp(-y \operatorname{ch} \alpha)$
(2)	$\cos \alpha x, \quad \operatorname{Im} \alpha < \pi/2$	$2^{-1} \pi \exp(-y \operatorname{ch} \alpha)$
(3)	$x \operatorname{th}(\pi x) P_{-1/2+ix}(z)$	$(2^{-1} \pi y)^{1/2} e^{-zy}$
(4)	$x \operatorname{th}(\pi x) K_{ix}(\beta), \quad \arg \beta < \pi$	$2^{-1} \pi (\beta y)^{1/2} (\beta + y)^{-1} \exp(-\beta - y)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{ix}(y) dx, \quad y > 0$
(5)	$x \operatorname{sh}(\pi x) K_{2ix}(\alpha)$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$\frac{\pi^{3/2} \alpha}{2^{5/2} y^{1/2}} \exp\left(-y - \frac{\alpha^2}{8y}\right)$
(6)	$x \sin(\pi x/2) K_{ix/2}(\alpha)$ $ \arg \alpha < \pi/2$	$\frac{\pi^{3/2} y}{2^{1/2} \alpha^{1/2}} \exp\left(-\alpha - \frac{y^2}{8\alpha}\right)$
(7)	$\operatorname{ch}(\alpha x) K_{ix}(\beta),$ $ \operatorname{Re} \alpha + \arg \beta < \pi$	$2^{-1} \pi K_0[(y^2 + \beta^2 + 2\beta y \cos \alpha)^{1/2}]$
(8)	$x(x^2 + n^2)^{-1} \operatorname{sh}(\pi x) K_{ix}(a)$ $a > 0, n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$2^{-1} \pi^2 I_n(y) K_n(a), \quad 0 < y < a$ $2^{-1} \pi^2 I_n(a) K_n(y), \quad a < y < \infty$
(9)	$x \operatorname{sh}(\pi x) K_{ix}(\alpha) K_{ix}(\beta),$ $ \arg \alpha + \arg \beta < \pi/2$	$\frac{\pi^2}{4} \exp\left[-\frac{y}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha\beta}{y^2}\right)\right]$
(10)	$x \operatorname{sh}(\pi x/2) K_{ix/2}(\alpha) K_{ix/2}(\beta),$ $ \arg \alpha + \arg \beta < \pi$	$\frac{\pi^2 y}{2z} \exp\left[-\frac{(\alpha + \beta)z}{2(\alpha\beta)^{1/2}}\right],$ $z = (y^2 + 4\alpha\beta)^{1/2}$
(11)	$x \operatorname{sh}(\pi x) K_{ix/2+\lambda}(a) K_{ix/2-\lambda}(a),$ $a > 0$	$0, \quad 0 < y < 2a$ $\frac{\pi^2 y}{2^{2\lambda+1} a^{2\lambda} z} [(y+z)^{2\lambda} + (y-z)^{2\lambda}],$ $2a < y < \infty$ $z = (y^2 - 4a^2)^{1/2}$
(12)	$x \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma(\lambda + ix) \times$ $\times \Gamma(\lambda - ix) K_{ix}(\alpha),$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \lambda > 0$	$2^{\nu-1} \pi^{3/2} (\alpha y)^\lambda (y + \alpha)^{-\lambda} \times$ $\times \Gamma(\lambda + 1/2) K_\lambda(y + \alpha)$
(13)	$x \operatorname{sh}(2\pi x) \Gamma(\lambda + ix) \times$ $\times \Gamma(\lambda - ix) K_{ix}(a),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \lambda < 1/2$	$\frac{2^\lambda \pi^{1/2}}{\Gamma(1/2 - \lambda)} \left(\frac{\alpha y}{ y - a }\right)^\lambda K_\lambda(y - a)$
(14)	$x \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma(\lambda + ix/2) \times$ $\times \Gamma(\lambda - ix/2) K_{ix}(\alpha),$ $ \arg \alpha < \pi/2, \operatorname{Re} \lambda > 0$	$2\pi^2 \left(\frac{\alpha y}{2z}\right)^{2\lambda} K_{2\lambda}(z),$ $z = (y^2 + \alpha^2)^{1/2}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) K_{ix}(y) dx, \quad y > 0$
(15)	$\frac{x \operatorname{th}(\pi x) K_{ix}(\alpha)}{\Gamma(3/4 + ix/2) \Gamma(3/4 - ix/2)}$ $ \arg \alpha < \pi/2$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \alpha y}{y^2 + \alpha^2} \right)^{1/2} \exp[-(y^2 + \alpha^2)^{1/2}]$
(16)	$x \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma(\lambda + ix) \Gamma(\lambda - ix) \times$ $\times P_{-1/2+ix}^{1/2-\lambda}(\beta) K_{ix}(\alpha),$ $ \arg \alpha < \pi/2$ $ \arg(\beta - 1) < \pi$ $\operatorname{Re} \lambda > 0$	$2^{-1/2} \pi^{3/2} (\alpha y/z)^\lambda (\beta^2 - 1)^{\lambda/2 - 1/4} K_\lambda(z),$ $z = (y^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta y)^{1/2}$

Г Л А В А XIII

ИНТЕГРАЛЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Мы называем

$$g(y; \mu) = \mathfrak{R}_\mu \{f(x); y\} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx \quad (*)$$

интегралом Римана — Лиувилля (дробного) порядка μ от функции $f(x)$, а

$$h(y; \mu) = \mathfrak{B}_\mu \{f(x); y\} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_y^\infty f(x) (x-y)^{\mu-1} dx \quad (**)$$

интегралом Вейля (дробного) порядка μ от функции $f(x)$. Вообще μ и y рассматриваются как комплексные переменные, причем путем интегрирования для преобразования (*) является отрезок $x = yt$, $0 < t < 1$, а для преобразования (**) — луч $x = yt$, $t > 1$, или $x = y + t$, $t > 0$.

Многие авторы обозначают $g(y; \mu)$ через $I_\mu^- f$ или $I_+^\mu f$, а $h(y; \mu)$ через $K_\mu^+ f$ или $K_-^\mu f$. Интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_y^a f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$$

иногда обозначают $I_\mu^- f$. Путем замены переменного его можно выразить в виде $\mathfrak{R}_\mu \{f(a-x); a-y\}$. С другой стороны, если положить $f(x) = 0$ при $x > a$, его можно записать в виде $\mathfrak{B}_\mu \{f(x); y\}$.

Производные дробного порядка α могут быть определены формулами

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathfrak{R}_{n-\alpha} \{f(t); x\}, \quad n-1 < \operatorname{Re} \alpha < n,$$

$$D_\infty^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathfrak{B}_{n-\alpha} \{f(t); x\}, \quad n-1 < \operatorname{Re} \alpha < n,$$

так что таблицы интегралов дробного порядка можно использовать для вычисления производных дробного порядка.

В списке литературы указаны избранные книги и работы, содержащие информацию по теории интегралов и производных дробного порядка. В работе Харди и Литтлвуда (Hardy and Littlewood, 1928) содержатся

дальнейшие ссылки. Насколько нам известно, не существует достаточно обширных таблиц интегралов дробного порядка, хотя почти во всех таблицах интегралов встречается много интегралов такого вида.

Расширение операторов \mathfrak{R}_μ и \mathfrak{B}_μ было введено Кобером (Kober, 1940) и Эрдеи (Erdélyi, 1940). Кобер (Kober, 1941b) рассмотрел также интегралы комплексного порядка. Интегрирование по частям дробного порядка по конечному отрезку выражается формулой

$$\int_0^a g_1(x; \mu) f_2(a-x) dx = \int_0^a f_1(a-x) g_2(x; \mu) dx$$

и было изучено Янгом и Лоувом (Young and Love, 1938). Для бесконечного промежутка формула имеет вид

$$\int_0^\infty f_1(x) g_2(x; \mu) dx = \int_0^\infty h_1(x; \mu) f_2(x) dx$$

и была изучена Кобером (Kober, 1940). В этих формулах $g_{1,2} = \mathfrak{R}f_{1,2}$ и $h_1 = \mathfrak{B}f_1$.

Операторы \mathfrak{R}_μ и \mathfrak{B}_μ связаны соотношениями с операторами дифференцирования и интегрирования, а также друг с другом. Мы укажем некоторые из этих соотношений. Остальные будут перечислены в списке общих формул в пп. 13.1 и 13.2.

$$g(x; 1) - \int_0^x f(t) dt, \quad h(x; 1) = \int_x^\infty f(t) dt,$$

$$\frac{d}{dx} g(x; \mu) = g(x; \mu - 1), \quad -\frac{d}{dx} h(x; \mu) = h(x; \mu - 1),$$

$$\mathfrak{R}_\mu \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{R}_{\mu+\nu}, \quad \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{B}_{\mu+\nu}.$$

Функции $g(x; \mu)$ и $h(x; \mu)$ можно рассматривать как μ раз взятый интеграл с постоянным пределом 0 в случае g и ∞ в случае h и переменным вторым пределом.

Связи между интегралами дробного порядка и другими интегральными преобразованиями выражаются следующими формулами:

$$\mathfrak{L}\{g(t; \mu); p\} = p^{-\mu} \mathfrak{L}\{f(t); p\},$$

$$\mathfrak{F}_e\{h(x; \mu); y\} = e^{\mu\pi i/2} y^{-\mu} \mathfrak{F}_e\{f(x); y\},$$

$$\mathfrak{M}\{g(x; \mu); s\} = \frac{\Gamma(1-s-\mu)}{\Gamma(1-s)} \mathfrak{M}\{f(x); s+\mu\},$$

$$\mathfrak{M}\{h(x; \mu); s\} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\mu)} \mathfrak{M}\{f(x); s+\mu\}.$$

Эти формулы могут быть использованы для вычисления интегралов дробного порядка при помощи таблиц преобразований Фурье, Лапласа, Меллина и их обращений. Эти формулы могут быть также использованы для того, чтобы вывести из известной пары, например преобразований Фурье, новую пару преобразований с помощью интегрирования дробного порядка.

Связь между интегралами дробного порядка и преобразованиями Лапласа была изучена Дёчем (Doetsch, 1937, стр. 293—305) и Уиддером (Widder,

1941. стр. 70—75). Дёч изучил также интегральное уравнение Абеля $g = \mathfrak{E}_\mu f$. Относительно связи между интегралами дробного порядка и преобразованиями Фурье см. Кобер (Kober, 1941a, лемма 3). Относительно связи между интегралами дробного порядка и преобразованиями Меллина см. Кобер (Kober, 1940). Относительно связи между интегралами дробного порядка и преобразованиями Ганкеля см. Эрдейи и Кобер (Erdélyi and Kober, 1940) и Эрдейи (Erdélyi, 1940); см. также 8.1 (13)—8.1 (16). Относительно приложений интегрирования дробного порядка к теории тригонометрических рядов см. Зигмунд (1965, т. II, стр. 209 и сл.).

Интегралы дробного порядка встречаются в выражениях решений линейных дифференциальных уравнений через определенные интегралы. В этом контексте интегралы дробного порядка часто называют *преобразованиями Эйлера* (см., например, Айнс, 1939, стр. 258 и далее). $\mathfrak{E}_\mu f$ является преобразованием Эйлера первого рода, а $\mathfrak{S}_\mu f$ преобразованием Эйлера второго рода функции f .

М. Рисс (M. Riesz, 1949) развил теорию интегрирования дробного порядка для функций многих переменных; она была применена Риссом и другими для решения дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, Vaker and Copson, 1950, гл. I, § 7).

Из формул для интегралов дробного порядка, приведенных в этой главе, могут быть получены новые формулы для таких интегралов с помощью общих методов, перечисленных во введении к первому тому, с помощью общих формул, установленных выше и в пп. 13.1, 13.2, а также с помощью указанных выше связей между интегрированием дробного порядка и другими интегральными преобразованиями.

13.1. Интегралы Римана — Лиувилля

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x)(y-x)^{\mu-1} dx = g(y; \mu)$
(1)	$f(ax)$	$a^{-\mu} g(ay; \mu)$
(2)	$f(a/x)$	$a y^{\mu-1} \mathfrak{S}_\mu \{t^{-\mu-1} f(t); a/y\}$ Относительно таблиц см. п. 13.2.
(3)	$f'(x)$	$g(y; \mu - 1) - \frac{f(0) y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$
(4)	$\int_0^x f(t) dt$	$g(y; \mu + 1)$
(5)	$g(x; \nu)$	$g(y; \mu + \nu)$
(6)	1,	$\frac{y^\mu}{\Gamma(\mu + 1)}$ $\text{Re } \mu > 0$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(7)	$x^{\nu-1}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} y^{\mu+\nu-1}$
(8)	$(x+a)^\nu, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{a^\nu y^\mu}{\Gamma(\mu+1)} {}_2F_1(1, -\nu; 1+\mu; -y/a),$ $ \arg(y/a) < \pi$
(9)	$x^{\nu-1} (x+a)^\lambda, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{a^\lambda y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_2F_1(-\lambda, \nu; \mu+\nu; -y/a),$ $ \arg y/a < \pi$
(10)	$x^{\nu-1} (x^2+a^2)^\lambda, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{a^{2\lambda} y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_3F_2\left(-\lambda, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}; -\frac{y^2}{a^2}\right), \operatorname{Re}(y/a) > 0$
(11)	$x^{\nu-1} (x^k+a^k)^\lambda, \quad k=1, 2, \dots$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{a^{k\lambda} y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_{k+1}F_k\left(-\lambda, \frac{\nu}{k}, \frac{\nu+1}{k}, \dots, \frac{\nu+k-1}{k}; \frac{\mu+\nu}{k}, \frac{\mu+\nu+1}{k}, \dots, \frac{\mu+\nu+k-1}{k}; -\frac{y^k}{a^k}\right),$ $ \arg(y/a) < \pi/k$
(12)	$x^{-1/2} (x+2)^{-1/2} \left\{ [(x+2)^{1/2} + x^{1/2}]^{2\nu} + [(x+2)^{1/2} - x^{1/2}]^{2\nu} \right\},$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu+1/2} \pi^{1/2} [y(y+2)]^{\mu/2-1/4} \times$ $\times P_{\nu-1/2}^{-\mu}(y+1), \quad \arg y < \pi$
(13)	$x^{\mu-1} e^{\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} (y/a)^{\mu-1/2} \exp(\alpha y/2) \times$ $\times I_{\mu-1/2}(\alpha y/2)$
(14)	$x^{\nu-1} e^{\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} y^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu+\nu; \alpha y)$
(15)	$x^{\nu-1} \exp(\alpha x^k), \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$ $k=2, 3, 4, \dots$	$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} y^{\mu+\nu-1} \times$ $\times {}_kF_k\left(\frac{\nu}{k}, \frac{\nu+1}{k}, \dots, \frac{\nu+k-1}{k}; \frac{\mu+\nu}{k}, \frac{\mu+\nu+1}{k}, \dots, \frac{\mu+\nu+k-1}{k}; \alpha y^k\right)$

	$f(x)$		$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(16)	$x^{-\mu-1} \exp(-a/x),$	$\operatorname{Re} \mu > 0$	$\alpha^{-\mu} y^{\mu-1} \exp(-a/y),$ $ \arg y < \pi$
(17)	$x^{-2\mu} \exp(-a/x),$	$\operatorname{Re} \mu > 0$	$(\pi y)^{-1/2} \alpha^{1/2-\mu} \exp\left(-\frac{\alpha}{2y}\right) \times$ $\times K_{\mu-1/2}\left(\frac{\alpha}{2y}\right), \operatorname{Re}(\alpha/y) > 0$
(18)	$x^{\nu-1} \exp(-a/x),$	$\operatorname{Re} \mu > 0$	$\alpha^{\nu/2-1/2} y^{-\nu} \exp\left(-\frac{\alpha}{2y}\right) W_{\kappa, \nu/2}\left(\frac{\alpha}{y}\right),$ $\kappa = 1/2 - \mu - \nu/2, \operatorname{Re}(\alpha/y) > 0$
(19)	$\exp(\alpha x^{1/2}),$	$\operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{y^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} + \pi^{1/2} (\alpha/2)^{1/2-\mu} y^{\mu/2+1/4} \times$ $\times [I_{\mu+1/2}(\alpha y^{1/2}) + L_{\mu+1/2}(\alpha y^{1/2})]$
(20)	$x^{-1/2} \exp(\alpha x^{1/2})$		$\pi^{1/2} (\alpha/2)^{1/2-\mu} y^{\mu/2-1/4} \times$ $\times [I_{\mu-1/2}(\alpha y^{1/2}) + L_{\mu-1/2}(\alpha y^{1/2})]$
(21)	$x^{\nu-1} \exp(\alpha x^{1/2}),$	$\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{y^{\mu+1} \nu^{-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\nu; \frac{1}{2}, \mu+\nu; \frac{\alpha^2 y}{4}\right) +$ $+ \frac{\alpha y^{\mu+1} \nu^{-1/2} \Gamma(\nu+1/2)}{2 \Gamma(\mu+\nu+1/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\nu+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \mu+\nu+\frac{1}{2}; \frac{\alpha^2 y}{4}\right)$
(22)	$x^{-3/2} \exp(-\alpha x^{-1/2}),$	$\mu = 1$	$2\alpha^{-1} \exp(-\alpha y^{-1/2})$
(23)	$x^{-\mu-1/2} \exp(-\alpha x^{-1/2}),$	$\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu+1/2} \pi^{-1/2} \alpha^{1/2-\mu} y^{\mu/2-3/4} \times$ $\times K_{\mu-1/2}(\alpha y^{-1/2}), \operatorname{Re}(\alpha y^{-1/2}) > 0$
(24)	$x^{\nu-1} \ln x,$	$\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times [\ln y + \psi(\nu) - \psi(\mu+\nu)]$
(25)	$x^{\mu-1} \sin(\alpha x),$	$\operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} (y/\alpha)^{\mu-1/2} \sin(\alpha y/2) J_{\mu-1/2}(\alpha y/2)$
(26)	$x^{\nu-1} \sin(\alpha x),$	$\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{2i \Gamma(\mu+\nu)} [{}_1F_1(\nu; \mu+\nu; i\alpha y) -$ $- {}_1F_1(\nu; \mu+\nu; -i\alpha y)]$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(27)	$\sin(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} \alpha^{1/2-\mu} y^{\mu/2+1/4} J_{\mu-1/2}(\alpha y^{1/2})$
(28)	$x^{-1/2} \sin(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} 2^{\mu-1/2} \alpha^{1/2-\mu} y^{\mu/2-1/4} H_{\mu-1/2}(\alpha y^{1/2})$
(29)	$x^{\nu-1} \sin(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\alpha y^{\mu+\nu-1/2} \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\mu+\nu+1/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\nu+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \mu+\nu+\frac{1}{2}; -\frac{\alpha^2 y}{4}\right)$
(30)	$x^{-\mu-1/2} \sin(\alpha x^{-1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1, a > 0$	$2^{\mu-1} \pi^{1/2} \alpha^{1/2-\mu} y^{\mu/2-3/4} J_{1/2-\mu}(\alpha y^{-1/2}),$ $ \arg y < \pi$
(31)	$x^{\mu-1} \cos(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} (y/\alpha)^{\mu-1/2} \cos(\alpha y/2) J_{\mu-1/2}(\alpha y/2)$
(32)	$x^{\nu-1} \cos(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{2 \Gamma(\mu+\nu)} [{}_1F_1(\nu; \mu+\nu; i\alpha y) +$ $+ {}_1F_1(\nu; \mu+\nu; -i\alpha y)]$
(33)	$\cos(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{y^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} - 2^{\mu-1/2} \alpha^{1/2-\mu} \pi^{1/2} \times$ $\times y^{\mu/2+1/4} H_{\mu+1/2}(\alpha y^{1/2})$
(34)	$x^{-1/2} \cos(\alpha y^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} \alpha^{1/2-\mu} y^{\mu/2-1/4} J_{\mu-1/2}(\alpha y^{1/2})$
(35)	$x^{\nu-1} \cos(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\nu; \frac{1}{2}, \mu+\nu; -\frac{\alpha^2 y}{4}\right)$
(36)	$x^{-\mu-1/2} \cos(\alpha x^{-1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1, a > 0$	$-2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} \alpha^{1/2-\mu} y^{\mu/2-3/4} \times$ $\times Y_{1/2-\mu}(\alpha y^{-1/2}), \quad \arg y < \pi$
(37)	$P_n(1-\gamma x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{n! y^{\mu}}{\Gamma(\mu+n+1)} P_n^{(\mu, -\mu)}(1-\gamma y)$
(38)	$x^{\nu-1} P_n(1-\gamma x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\nu) y^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_3F_2(-n, \mu+1, \nu; 1, \mu+\nu; 2^{-1} \gamma y)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(39)	$x^{\lambda-1/2} C_n^\lambda (1-\gamma x),$ $\operatorname{Re} \lambda > -1, \lambda \neq 0, -1/2$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1/2)} \times$ $\times y^{\lambda+\mu-1/2} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-\gamma y),$ $\alpha = \lambda + \mu - 1/2, \beta = \lambda - \mu - 1/2$
(40)	$x^{\nu-1} C_n^\lambda (1-\gamma x),$ $2\lambda \neq 0, -1, -2, \dots$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\nu)}{n! \Gamma(\mu+\nu)} y^{\mu+\nu-1} \times$ $\times {}_3F_2(-n, n+2\lambda, \nu; \lambda+1/2;$ $\mu+\nu; 2^{-1}\gamma y)$
(41)	$x^{\nu-1} C_{2n}^\lambda (\gamma x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$(-1)^n \frac{(\lambda)_n \Gamma(\nu)}{n! \Gamma(\mu+\nu)} y^{\mu+\nu-1} \times$ $\times {}_3F_2(-n, n+\lambda, \nu; 1/2, \mu+1; \gamma^2 y)$
(42)	$x^{\nu-1} C_{2n+1}^\lambda (\gamma x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$2(-1)^n \gamma y^{\mu+\nu-1/2} \times$ $\times \frac{(\lambda)_{n+1} \Gamma(\nu+1/2)}{n! \Gamma(\mu+\nu+1/2)} \times$ $\times {}_3F_2(-n, n+\lambda+1, \nu+1/2;$ $3/2, \mu+\nu+1/2; \gamma^2 y)$
(43)	$x^\alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(1-\gamma x),$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)} y^{\alpha+\mu} \times$ $\times P_n^{(\alpha+\mu, \beta-\mu)}(1-\gamma y)$
(44)	$x^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(\gamma x-1),$ $\operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+\mu+n+1)} y^{\beta+\mu} \times$ $\times P_n^{(\alpha-\mu, \beta+\mu)}(\gamma y-1)$
(45)	$x^{-\beta-\mu-n-1} (1-2^{-1}\gamma x)^\beta \times$ $\times P_n^{(\alpha, \beta)}(1-\gamma x),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < -\operatorname{Re} \beta - n$	$\frac{\Gamma(-\beta-\mu-n)}{\Gamma(-\beta-\mu)} y^{-\beta-n-1} \times$ $\times (1-2^{-1}\gamma y)^{\beta+\mu} P_n^{(\alpha, \beta+\mu)}(1-\gamma y)$
(46)	$x^{\lambda-1} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-\gamma x),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\lambda)}{n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\lambda+\mu)} y^{\lambda+\mu-1} \times$ $\times {}_3F_2(-n, n+\alpha+\beta+1, \lambda;$ $\alpha+1, \lambda+\mu; 2^{-1}\gamma y)$
(47)	$x^{\lambda-1} P_n^{(\alpha, \beta)}(\gamma x-1),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$(-1)^n \frac{\Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\lambda)}{n! \Gamma(\beta+1) \Gamma(\lambda+\mu)} y^{\lambda+\mu-1} \times$ $\times {}_3F_2(-n, n+\alpha+\beta+1, \lambda;$ $\beta+1, \lambda+\mu; 2^{-1}\gamma y)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(48)	$x^{\lambda-1} (1-2^{-1}\gamma x)^{\beta} P_n^{\alpha, \beta} (1-\gamma x),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(\lambda)}{n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\lambda+\mu)} y^{\lambda+\mu-1} \times$ $\times {}_3F_2(\alpha+n+1, -\beta-n, \lambda;$ $\alpha+1, \lambda+\mu; 2^{-1}\gamma y)$
(49)	$x^{\alpha} L_n^{\alpha}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)} y^{\alpha+\mu} L_n^{\alpha+\mu}(\beta y)$
(50)	$x^{\lambda-1} L_n^{\alpha}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\lambda)}{n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\lambda+\mu)} y^{\lambda+\mu-1} \times$ $\times {}_2F_2(-n, \lambda; \alpha+1, \lambda+\mu; \beta y)$
(51)	$x^{\lambda-1} e^{-\beta x} L_n^{\alpha}(\beta x),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\lambda)}{n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\lambda+\mu)} y^{\lambda+\mu-1} \times$ $\times {}_2F_2(\alpha+n+1, \lambda;$ $\alpha+1, \lambda+\mu; -\beta y)$
(52)	$[x(1+2^{-1}\gamma x)]^{-\lambda/2} P_{\nu}^{\lambda}(1+\gamma x),$ $\operatorname{Re} \lambda < 1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$(2/\gamma)^{\mu/2} [y(1+2^{-1}\gamma y)]^{\mu/2-\lambda/2} \times$ $\times P_{\nu}^{\lambda-\mu}(1+\gamma y), \arg \gamma y < \pi$
(53)	$x^{\kappa+\lambda/2-1} (1+2^{-1}\gamma x)^{-\lambda/2} \times$ $\times P_{\nu}^{\lambda}(1+\gamma x),$ $\operatorname{Re} \kappa > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{(\gamma/2)^{-\lambda/2} \Gamma(\kappa)}{\Gamma(1-\lambda) \Gamma(\kappa+\mu)} y^{\kappa+\mu-1} \times$ $\times {}_2F_2(-\nu, 1+\nu, \kappa;$ $1-\lambda, \kappa+\mu; -2^{-1}\gamma y),$ $ \gamma y < 1$
(54)	$[x(1-x)]^{-\lambda/2} P_{\nu}^{\lambda}(1-2x),$ $\operatorname{Re} \lambda < 1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$[y(1-y)]^{\mu/2-\lambda/2} P_{\nu}^{\lambda-\mu}(1-2y),$ $0 < y < 1$
(55)	$x^{\kappa+\lambda/2-1} (1-x)^{-\lambda/2} P_{\nu}^{\lambda}(1-2x),$ $\operatorname{Re} \kappa > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\kappa) y^{\kappa+\mu-1}}{\Gamma(\kappa+\mu) \Gamma(1-\lambda)} \times$ $\times {}_3F_2(-\nu, 1+\nu, \kappa; 1-\lambda, \kappa+\mu; y),$ $0 < y < 1$
(56)	$x^{\lambda-1} J_{\nu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > 0$	$\frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\lambda+\mu+\nu)} (\alpha/2)^{\nu} \times$ $\times y^{\lambda+\mu+\nu-1} {}_2F_3\left(\frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{\lambda+\nu+1}{2};$ $\nu+1, \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}, \frac{\lambda+\mu+1+\nu+1}{2}; -\frac{\alpha^2 y^2}{4}\right)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(57)	$x^\nu e^{\pm i\alpha x} J_\nu(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{(2\alpha)^\nu y^{\mu+2\nu} \Gamma(\nu+1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\mu+2\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_1(\nu+1/2; \mu+2\nu+1; \pm 2i\alpha y)$
(58)	$x^{\lambda-\nu-1} e^{\pm i\alpha x} J_\nu(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{2^{-\nu} \alpha^\nu y^{\lambda+\mu-1} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu) \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_2F_2(\lambda, \nu+1/2; \lambda+\mu,$ $2\nu+1; \pm 2i\alpha y)$
(59)	$x^{-1/2} J_{2\nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} [J_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2})]^2$
(60)	$x^{\nu/2-1/2} J_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = \nu+1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{2y}{\alpha}\right)^\nu [J_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2})]^2$
(61)	$x^{\nu/2-1/2} J_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = \nu-1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$(\alpha/2)^{1-\nu} \pi^{1/2} y^{\nu-1/2} J_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2}) \times$ $\times J_{\nu-1}(2^{-1}\alpha y^{1/2})$
(62)	$x^{-\nu/2-1/2} J_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2 - \nu, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{\alpha}{2y}\right)^\nu J_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2}) J_{-\nu}(2^{-1}\alpha y^{1/2})$
(63)	$x^{\nu/2} J_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^\mu \alpha^{-\mu} y^{\mu/2+\nu/2} J_{\mu+\nu}(\alpha y^{1/2})$
(64)	$x^{-\nu/2} J_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{2^{2-\nu} \alpha^{-\mu} y^{\mu/2-\nu/2}}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} \times$ $\times s_{\mu+\nu-1, \mu-\nu}(\alpha y^{1/2})$
(65)	$x^{\lambda-\nu/2-1} J_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\alpha^\nu y^{\lambda+\mu-1} \Gamma(\lambda)}{2^\nu \Gamma(\lambda+\mu) \Gamma(\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_2(\lambda; \nu+1, \lambda+\mu; -2^{-2}\alpha^2 y)$
(66)	$x^{\lambda-\nu-1} [J_\nu(\alpha x^{1/2})]^2,$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$ Относительно многих частных случаев см. Bailey W. N., 1938; Quart. J. Math. Oxford Ser., 9, 141-147.	$\frac{(\alpha/2)^{2\nu} y^{\lambda+\mu-1} \Gamma(\lambda)}{[\Gamma(\nu+1)]^2 \Gamma(\lambda+\mu)} \times$ $\times {}_2F_3(\lambda, \nu+1/2; \lambda+\mu,$ $\nu+1, 2\nu+1; -\alpha^2 y)$
(67)	$x^{\lambda-1} J_\nu(\alpha x^{1/2}) J_{-\nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\lambda) \sin(\nu\pi)}{\nu\pi \Gamma(\lambda+\mu)} y^{\lambda+\mu-1} \times$ $\times {}_2F_3(1/2, \lambda; 1+\nu, 1-\nu,$ $\lambda+\mu; -\alpha^2 y)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(68)	$x^{-1/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\pi^{1/2} \operatorname{ctg}(\nu\pi) \left[J_{\nu/2} (2^{-1} \alpha y^{1/2}) \right]^2 -$ $\frac{\pi^{1/2} \left[J_{-\nu/2} (2^{-1} \alpha y^{1/2}) \right]^2}{\sin(\nu\pi)}$
(69)	$x^{\nu/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{2^{1/2} y^{\nu/2+1/1}}{\alpha^{1/2} \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \left[\cos(\nu\pi) J_{\nu+1/2}(\alpha y^{1/2}) - \right.$ $\left. - H_{-\nu-1/2}(\alpha y^{1/2}) \right]$
(70)	$x^{-\nu/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2, \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{2^{1/2} y^{1/4-\nu/2}}{\alpha^{1/2} \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \left[\cos(\nu\pi) H_{\nu-1/2}(\alpha y^{1/2}) - \right.$ $\left. - J_{1/2-\nu}(\alpha y^{1/2}) \right]$
(71)	$x^{\nu/2-1/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{2y}{\alpha} \right)^\nu J_\nu(2^{-1} \alpha y^{1/2}) Y_\nu(2^{-1} \alpha y^{1/2}).$
(72)	$x^{-\nu/2-1/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2 - \nu, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{\alpha}{2y} \right)^\nu J_{-\nu}(2^{-1} \alpha y^{1/2}) Y_\nu(2^{-1} \alpha y^{1/2})$
(73)	$x^{\nu/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\left(\frac{2}{\alpha} \right)^\mu y^{\mu/2+\nu/2} \operatorname{ctg}(\nu\pi) J_{\mu+\nu}(\alpha y^{1/2}) +$ $+ \frac{2\nu+2y^{\mu/2+\nu/2} \Gamma(\nu+1)}{\pi \alpha^\mu \Gamma(\mu)} \times$ $\times S_{\mu-\nu-1, \mu+\nu}(\alpha y^{1/2})$
(74)	$x^{\nu/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\left(\frac{2}{\alpha} \right)^\mu y^{\mu/2+\nu/2} Y_{\mu+\nu}(\alpha y^{1/2}) +$ $+ \frac{2\nu+2y^{\mu/2+\nu/2} \Gamma(\nu+1)}{\pi \alpha^\mu \Gamma(\mu)} \times$ $\times S_{\mu-\nu-1, \mu+\nu}(\alpha y^{1/2})$
(75)	$x^{-\nu/2} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{y^{\mu/2-\nu/2} \operatorname{ctg}(\nu\pi)}{2^{\nu-2} \alpha^\mu \Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} \times$ $\times S_{\mu+\nu-1, \mu-\nu}(\alpha y^{1/2}) -$ $\frac{2^\mu y^{\mu/2-\nu/2} J_{\mu-\nu}(\alpha y^{1/2})}{\alpha^\mu \sin(\nu\pi)}$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(76)	$x^{\lambda-1} Y_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu , \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{-\nu} \alpha^\nu y^{\lambda+\mu+\nu/2-1} \operatorname{ctg}(\nu\pi) \times$ $\times \frac{\Gamma(\lambda+\nu/2)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(\lambda+\mu+\nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2(\lambda+\nu/2; 1+\nu, \lambda+\mu+\nu/2;$ $-2^{-2}\alpha^2 y) - \frac{2^\nu y^{\lambda+\mu-\nu/2-1}}{\alpha^\nu \sin(\nu\pi)} \times$ $\times \frac{\Gamma(\lambda-\nu/2)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\lambda+\mu-\nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2(\lambda-\nu/2; 1-\nu,$ $\lambda+\mu-\nu/2; -2^{-2}\alpha^2 y)$
(77)	$x^\nu e^{\pm\alpha x} I_\nu(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{(2\alpha)^\nu y^{\mu+2\nu} \Gamma(\nu+1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\mu+2\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_1(\nu+1/2; \mu+2\nu+1; \pm 2\alpha y)$
(78)	$x^{\lambda-1} e^{\pm\alpha x} I_\nu(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > 0$	$\frac{(\alpha/2)^\nu y^{\lambda+\mu+\nu-1} \Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda+\mu+\nu)} \times$ $\times {}_2F_2(\nu+1/2, \lambda+\nu; 2\nu+1,$ $\mu+\lambda+\nu; \pm 2\alpha y)$
(79)	$x^{-1/2} I_{2\nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\mu=1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} [I_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2})]^2$
(80)	$x^{\nu/2-1/2} I_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu=\nu+1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{2y}{\alpha}\right)^\nu [I_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2})]^2$
(81)	$x^{\nu/2-1/2} I_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu=\nu-1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$(\alpha/2)^{1-\nu} \pi^{1/2} y^{\nu-1/2} I_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2}) \times$ $\times I_{\nu-1}(2^{-1}\alpha y^{1/2})$
(82)	$x^{-\nu/2-1/2} I_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu=1/2-\nu, \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{\alpha}{2y}\right)^\nu I_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2}) I_{-\nu}(2^{-1}\alpha y^{1/2})$
(83)	$x^{\nu/2} I_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2^\mu \alpha^{-\mu} y^{\mu/2+\nu/2} I_{\mu+\nu}(\alpha y^{1/2})$
(84)	$x^{\lambda-\nu/2-1} I_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\alpha^\nu y^{\lambda+\mu-1} \Gamma(\lambda)}{2^\nu \Gamma(\nu+1) \Gamma(\lambda+\mu)} \times$ $\times {}_1F_2(\lambda; \nu+1, \lambda+\mu; 2^{-2}\alpha^2 y)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(85)	$x^{-1/2} K_{2\nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = 1/2, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{I_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2}) + I_{-\nu}(2^{-1}\alpha y^{1/2})}{2 \cos(\nu\pi)} \times$ $\times K_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2})$
(86)	$x^{\nu/2-1/2} K_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{1/2} (2y/\alpha)^\nu I_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2}) K_\nu(2^{-1}\alpha y^{1/2})$
(87)	$x^{\lambda-1} K_\nu(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu , \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\nu-1} \alpha^{-\nu} y^{\lambda+\mu-\nu/2-1} \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\lambda-\nu/2)}{\Gamma(\lambda+\mu-\nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\lambda-\frac{\nu}{2}; 1-\nu, \lambda+\mu-\frac{\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y}{4}\right) +$ $+ 2^{1-\nu} \alpha^\nu y^{\lambda+\mu+\nu/2-1} \times$ $\times \frac{\Gamma(-\nu) \Gamma(\lambda+\nu/2)}{\Gamma(\lambda+\mu+\nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(\lambda+\frac{\nu}{2}; 1+\nu, \lambda+\mu+\frac{\nu}{2}; \frac{\alpha^2 y}{4}\right)$
(88)	$x^{\nu/2} H_\nu(\gamma x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \nu > -3/2, \operatorname{Re} \mu > 0$	$(\gamma/2)^{-\mu} y^{\mu/2+\nu/2} H_{\mu+\nu}(\gamma y^{1/2})$
(89)	$x^{\lambda-\nu/2-3/2} H_\nu(\gamma x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\Gamma(\lambda) \gamma^{\nu+1} y^{\lambda+\mu-1}}{2^\nu \pi^{1/2} \Gamma(\nu+3/2) \Gamma(\lambda+\mu)} \times$ $\times {}_2F_3\left(1, \lambda; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \lambda+\mu; -\frac{\gamma^2 y}{4}\right)$
(90)	$x^{\nu/2} L_\nu(\gamma x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$(\gamma/2)^{-\mu} y^{\mu/2+\nu/2} L_{\mu+\nu}(\gamma y^{1/2})$
(91)	$x^{\lambda-\nu/2-3/2} L_\nu(\gamma x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\gamma^{\nu+1} y^{\lambda+\mu-1} \Gamma(\lambda)}{2^\nu \pi^{1/2} \Gamma(\nu+3/2) \Gamma(\lambda+\mu)} \times$ $\times {}_2F_3\left(1, \lambda; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \lambda+\mu; \frac{\gamma^2 y}{4}\right)$
(92)	$x^{\lambda-\nu/2-1/2} s_{\frac{1}{2}, \nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re} \mu > 0$	$\frac{\alpha^\nu y^{\lambda+\mu} \Gamma(\lambda+1)}{(\alpha-\nu+1)(\alpha+\nu+1) \Gamma(\lambda+\mu+1)} \times$ $\times {}_2F_3\left(1, \lambda+1; \frac{\alpha-\nu+3}{2}, \frac{\alpha+\nu+3}{2}, \lambda+\mu+1; -\frac{\alpha^2 y}{4}\right)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (y-x)^{\mu-1} dx$
(93)	$x^{\kappa-\mu-1} e^{-\alpha x/2} W_{\kappa, \lambda}(\alpha x),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \kappa - \operatorname{Re} \lambda + 1/2$	$\frac{y^{\kappa-1}}{e^{\alpha y/2} \cos[(\kappa-\mu-\lambda)\pi]} \times$ $\times \left\{ \sin(\mu\pi) \frac{\Gamma(\kappa-\mu+\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda+1)} \times \right.$ $\times M_{\kappa-\mu, \lambda}(\alpha y) +$ $\left. + \cos[(\kappa-\lambda)\pi] W_{\kappa-\mu, \lambda}(\alpha y) \right\}$
(94)	$x^{\nu-1} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p;$ $\nu, b_2, \dots, b_q; \alpha x),$ $p \leq q+1$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_pF_q(a_1, \dots, a_p;$ $\mu+\nu, b_2, \dots, b_q; \alpha y),$ $ \alpha y < 1, \text{ если } p = q+1 \}$
(95)	$x^{\nu-1} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p;$ $b_1, \dots, b_q; \alpha x),$ $p \leq q+1$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{y^{\mu+\nu-1} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_{p+1}F_{q+1}(\nu, a_1, \dots, a_p;$ $\mu+\nu, b_1, \dots, b_q; \alpha y),$ $ \alpha y < 1, \text{ если } p = q+1$
(96)	$G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $p \leq q, \operatorname{Re} \mu > 0$ $\operatorname{Re} b_j > -1, j = 1, \dots, m$	$y^\mu G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left(\alpha y \left \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, -\mu \end{matrix} \right. \right),$ $ \alpha y < 1, \text{ если } p = q$
(97)	$G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $p+q < 2(m+n), \operatorname{Re} \mu > 0$ $\operatorname{Re} b_j > -1, j = 1, \dots, m$	$y^\mu G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left(\alpha y \left \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, -\mu \end{matrix} \right. \right),$ $ \arg \alpha y < (m+n-p/2-q/2)\pi$

13.2. Интегралы Вейля

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^\infty f(x) (x-y)^{\mu-1} dx =$ $= h(y; \mu)$
(1)	$f(\alpha x)$	$\alpha^{-\mu} h(\alpha y; \mu)$
(2)	$f(\alpha/x)$	$\alpha y^{\mu-1} \mathfrak{R}_\mu \{ \tilde{t}^{-\mu-1} f(\tilde{t}); \alpha/y \}$ Относительно таблиц см. п. 13.1.
(3)	$f'(x)$	$-h(y; \mu-1)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^y f(x) (x-y)^{\mu-1} dx =$ $= h(y, \mu)$
(4)	$\int_x^{\infty} f(t) dt$	$h(y; \mu + 1)$
(5)	$h(x; \nu)$	$h(y; \mu + \nu)$
(6)	$x^{-\lambda}, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda - \mu)}{\Gamma(\lambda)} y^{\mu - \lambda}$
(7)	$(x + \alpha)^{-\lambda}, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda - \mu)}{\Gamma(\lambda)} (y + \alpha)^{\mu - \lambda},$ $ \arg(y/\alpha) < \pi$
(8)	$x^{-\lambda} (x + \alpha)^{\nu}, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re}(\lambda - \nu)$	$y^{\mu + \nu - \lambda} \frac{\Gamma(\lambda - \mu - \nu)}{\Gamma(\lambda - \nu)} \times$ $\times {}_2F_1(-\nu, \lambda - \mu - \nu; \lambda - \nu; -\alpha/y),$ $ \arg(\alpha/y) < \pi \text{ или } \alpha/y < 1$
(9)	$x^{-\lambda} (x^2 + \alpha^2)^{\nu}, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re}(\lambda - 2\nu)$	$\frac{\Gamma(\lambda - \mu - 2\nu)}{\Gamma(\lambda - \mu)} y^{\mu - \lambda + 2\nu} \times$ $\times {}_3F_2\left(-\nu, \frac{\lambda - \mu}{2} - \nu, \frac{1 + \lambda - \mu}{2} - \nu; \right.$ $\left. \frac{\lambda}{2} - \nu, \frac{1 + \lambda}{2} - \nu; -\frac{\alpha^2}{y^2}\right),$ $ y > \alpha \text{ или } \operatorname{Re}(\alpha/y) > 0$
(10)	$(x^2 - 1)^{-1/2} [(x + 1)^{1/2} - (x - 1)^{1/2}]^{2\nu}, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < 1 + \operatorname{Re} \nu$	$2^{\nu + 1/2} \pi^{-1/2} e^{(\mu - 1/2)\pi i} \times$ $\times (y^2 - 1)^{\mu/2 - 1/2} Q_{\nu - 1/2}^{\mu/2 - \mu}(y),$ $ \arg(y - 1) < \pi$
(11)	$e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$\alpha^{-\mu} e^{-\alpha y}, \quad \operatorname{Re}(\alpha y) > 0$
(12)	$x^{\mu-1} e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{-1/2} (y/\alpha)^{\mu-1/2} \exp(-2^{-1}\alpha y) \times$ $\times K_{\mu-1/2}(2^{-1}\alpha y), \quad \operatorname{Re}(\alpha y) > 0$
(13)	$x^{-\lambda} e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$\alpha^{\nu-1/2} y^{-\nu-1/2} \exp(-2^{-1}\alpha y) \times$ $\times W_{\kappa, \nu}(\alpha y),$ $2\kappa = 1 - \lambda - \mu, \quad 2\nu = \lambda - \mu$ $\operatorname{Re}(\alpha y) > 0$
(14)	$x^{-2\mu} \exp(\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$(\pi/y)^{1/2} \alpha^{1/2 - \mu} \exp\left(\frac{\alpha}{2y}\right) I_{\mu-1/2}\left(\frac{\alpha}{2y}\right)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(15)	$x^{-\lambda} \exp(\alpha/x),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda - \mu)}{\Gamma(\lambda)} y^{\mu-\lambda} {}_1F_1(\lambda - \mu; \lambda; \alpha/y)$
(16)	$\exp(-\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu+1/2} \pi^{-1/2} \alpha^{1/2-\mu} \times$ $\times y^{\mu/2+1/4} K_{\mu+1/2}(\alpha y^{1/2}),$ $\operatorname{Re}(\alpha y^{1/2}) > 0$
(17)	$x^{-1/2} \exp(-\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu+1/2} \pi^{-1/2} \alpha^{1/2-\mu} \times$ $\times y^{\mu/2-1/4} K_{\mu-1/2}(\alpha y^{1/2}),$ $\operatorname{Re}(\alpha y^{1/2}) > 0$
(18)	$x^{-\lambda} \ln x,$ $0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda - \mu)}{\Gamma(\lambda)} y^{\mu-\lambda} \times$ $\times [\ln y + \psi(\lambda) - \psi(\lambda - \mu)]$
(19)	$\sin(ax),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1$	$a^{-\mu} \sin(ay + 2^{-1}\mu\pi)$
(20)	$x^{\mu-1} \sin(ax),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$2^{-1} \pi^{1/2} (y/a)^{\mu-1/2} \times$ $\times [\cos(2^{-1}ay) J_{1/2-\mu}(2^{-1}ay) -$ $- \sin(2^{-1}ay) Y_{1/2-\mu}(2^{-1}ay)]$
(21)	$x^{-2\mu} \sin(\alpha/x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\left(\frac{\pi}{y}\right)^{1/2} \alpha^{1/2-\mu} \sin\left(\frac{\alpha}{2y}\right) J_{\mu-1/2}\left(\frac{\alpha}{2y}\right)$
(22)	$\sin(ax^{1/2}),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} a^{1/2-\mu} y^{\mu/2+1/4} Y_{-1/2-\mu}(\alpha y^{1/2})$
(23)	$x^{-1/2} \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1$	$2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} a^{1/2-\mu} y^{\mu/2-1/4} J_{1/2-\mu}(\alpha y^{1/2})$
(24)	$\cos(ax),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1$	$a^{-\mu} \cos(ay + 2^{-1}\mu\pi)$
(25)	$x^{\mu-1} \cos(ax),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$-2^{-1} \pi^{1/2} (y/a)^{\mu-1/2} \times$ $\times [\sin(2^{-1}ay) J_{1/2-\mu}(2^{-1}ay) +$ $+ \cos(2^{-1}ay) Y_{1/2-\mu}(2^{-1}ay)]$
(26)	$x^{-2\mu} \cos(\alpha/x),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\left(\frac{\pi}{y}\right)^{1/2} \alpha^{1/2-\mu} \cos\left(\frac{\alpha}{2y}\right) J_{\mu-1/2}\left(\frac{\alpha}{2y}\right)$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(27)	$\cos(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} a^{1/2-\mu} y^{\mu/2+1/4} J_{-1/2-\mu}(ay^{1/2})$
(28)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < 1$	$-2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} a^{1/2-\mu} y^{\mu/2-1/4} Y_{1/2-\mu}(ay^{1/2})$
(29)	$Q_\nu(x), \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < 1 + \operatorname{Re} \nu$	$e^{\mu\pi i} (y^2 - 1)^{\mu/2} Q_\nu^{-\mu}(y),$ $ \arg(y-1) < \pi$
(30)	$(x^2 - 1)^{\lambda/2} Q_\nu^{-\lambda}(x),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1 + \operatorname{Re}(\nu - \lambda)$	$e^{\mu\pi i} (y^2 - 1)^{\lambda/2+\mu/2} Q_\nu^{-\lambda-\mu}(y),$ $ \arg(y-1) < \pi$
(31)	$x^{-\nu} e^{iax} J_\nu(ax),$ $a > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 + \operatorname{Re} \nu$	$\frac{\exp(2^{-1}i\mu\pi) (2a)^{\nu-\mu} \Gamma(1/2 - \mu + \nu)}{\pi^{1/2} \Gamma(1 - \mu + 2\nu)} \times$ $\times {}_1F_1(1/2 - \mu + \nu; 1 - \mu + 2\nu; 2uiy),$ $y > 0$
(32)	$x^{\nu/2-1/2} J_\nu(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\frac{\pi^{1/2}}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^\nu \left[J_\nu\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) Y_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) + \right.$ $\left. + J_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) Y_\nu\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) \right], \quad y > 0$
(33)	$x^{\nu/2-1/2} J_{-\nu}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\pi^{1/2} \left(\frac{2y}{a}\right)^\nu J_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) Y_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right)$ $y > 0$
(34)	$x^{-\nu/2} J_\nu(ax^{1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 2^{-1} \operatorname{Re} \nu + 3/4$	$2^\mu a^{-\mu} y^{\mu/2-\nu/2} J_{\nu-\mu}(ay^{1/2}),$ $y > 0$
(35)	$x^{-\nu/2} J_{-\nu}(ax^{1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 2^{-1} \operatorname{Re} \nu + 3/4$	$2^\mu a^{-\mu} y^{\mu/2-\nu/2} [\cos(\nu\pi) J_{\nu-\mu}(ay^{1/2}) -$ $- \sin(\nu\pi) Y_{\nu-\mu}(ay^{1/2})], \quad y > 0$
(36)	$x^\lambda J_\nu(ax^{1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/4 - \operatorname{Re} \lambda$	$2^{2\lambda} a^{-2\lambda} y^\mu \times$ $\times G_{13}^{20}\left(\frac{a^2 y}{4} \mid -\mu, \lambda + \nu/2, \lambda - \nu/2\right),$ $y > 0$
(37)	$x^{-\nu} [J_\nu(ax^{1/2})]^2,$ $\mu = \nu - 1/2, \quad \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$\pi^{-1/2} a^{-\nu} y^{-\nu/2-1/2} \mathbf{H}_\nu(2ay^{1/2}),$ $y > 0$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(38)	$x^{\nu/2-1/2} Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi^{1/2}}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} \left[J_{\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) J_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) - \right.$ $\left. - Y_{\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) Y_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) \right],$ $y > 0$
(39)	$x^{\nu/2} Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 3/4 - 2^{-1} \operatorname{Re} \nu$	$2^{\mu} a^{-\mu} y^{\mu/2+\nu/2} \times$ $\times [\cos(\nu\pi) Y_{-\mu-\nu}(ay^{1/2}) -$ $- \sin(\nu\pi) J_{-\mu-\nu}(ay^{1/2})],$ $y > 0$
(40)	$x^{-\nu/2} Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 2^{-1} \operatorname{Re} \nu + 3/4$	$2^{\mu} a^{-1/\mu} y^{\mu/2-\nu/2} Y_{\nu-\mu}(ay^{1/2}),$ $y > 0$
(41)	$x^{-\nu} J_{\nu}(ax^{1/2}) Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0$ $\mu = \nu - 1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$-\pi^{-1/2} a^{-\nu} y^{-\nu/2-1/2} J_{\nu}(2ay^{1/2})$
(42)	$x^{-\nu} [Y_{\nu}(ax^{1/2})]^2,$ $\mu = \nu - 1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$\pi^{-1/2} a^{-\nu} y^{-\nu/2-1/2} [H_{\nu}(2ay^{1/2}) -$ $- 2Y_{\nu}(2ay^{1/2})], \quad y > 0$
(43)	$x^{\nu/2-1/2} H_{\nu}^{(1)}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} i}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} H_{\nu}^{(1)}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) \times$ $\times H_{-\nu}^{(1)}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right), \quad \operatorname{Im}(ay^{1/2}) > 0$
(44)	$x^{\nu/2-1/2} H_{-\nu}^{(1)}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} i}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} \left[H_{-\nu}^{(1)}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) \right]^2,$ $\operatorname{Im}(ay^{1/2}) > 0$
(45)	$x^{-\nu/2} H_{\nu}^{(1)}(ax^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu} a^{-\mu} y^{\mu/2-\nu/2} H_{\nu-\mu}^{(1)}(ay^{1/2}),$ $\operatorname{Im}(ay^{1/2}) > 0$
(46)	$x^{\nu/2-1/2} H_{\nu}^{(2)}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} i}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} H_{\nu}^{(2)}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) \times$ $\times H_{-\nu}^{(2)}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right), \quad \operatorname{Im}(ay^{1/2}) < 0$
(47)	$x^{\nu/2-1/2} H_{-\nu}^{(2)}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} i}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} \left[H_{-\nu}^{(2)}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) \right]^2,$ $\operatorname{Im}(ay^{1/2}) < 0$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(48)	$x^{-\nu/2} H_{\nu}^{(2)}(ax^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{\mu} a^{-\mu} y^{\mu/2-\nu/2} H_{\nu-\mu}^{(2)}(ay^{1/2}),$ $\operatorname{Im}(ay^{1/2}) < 0$
(49)	$x^{-\nu} e^{-ax} I_{\nu}(ax),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 + \operatorname{Re} \nu$	$\frac{(2a)^{\nu-\mu} \Gamma(1/2-\mu+\nu)}{\pi^{1/2} \Gamma(1-\mu+2\nu)} \times$ $\times {}_1F_1(1/2-\mu+\nu; 1-\mu+2\nu; -2ay),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$
(50)	$x^{-\lambda} e^{-ax} I_{\nu}(ax),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 + \operatorname{Re} \lambda$	$\pi^{-1/2} (2a)^{\lambda} y^{\mu} \times$ $\times G_{23}^{21}(2ay \mid -\mu, \nu-\lambda, -\nu-\lambda),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$
(51)	$x^{-\mu-1/2} e^{-ax} K_{\nu}(ax),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} (2a)^{-1/2} y^{-1} e^{-ay} W_{-\mu, \nu}(2ay),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$
(52)	$x^{-\nu} e^{ax} K_{\nu}(ax),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 + \operatorname{Re} \nu$	$\frac{\pi^{1/2} y^{\mu/2-\nu-1/2} \Gamma(1/2-\mu+\nu)}{(2a)^{\mu/2+1/2} \Gamma(1/2+\nu)} \times$ $\times e^{ay} W_{\mu/2, \nu-\mu/2}(2ay),$ $ \arg(ay) < 3\pi/2$
(53)	$x^{-\nu} e^{-ax} K_{\nu}(ax),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} (2a)^{-\mu/2-1/2} y^{\mu/2-\nu-1/2} \times$ $\times e^{-ay} W_{-\mu/2, \nu-\mu/2}(2ay),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$
(54)	$x^{-\lambda} e^{ax} K_{\nu}(ax),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 + \operatorname{Re} \lambda$	$\pi^{-1/2} (2a)^{\lambda} y^{\mu} \cos(\nu\pi) \times$ $\times G_{23}^{31}(2ay \mid -\mu, \nu-\lambda, -\nu-\lambda),$ $ \arg(ay) < 3\pi/2$
(55)	$x^{-\lambda} e^{-ax} K_{\nu}(ax),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$\pi^{1/2} (2a)^{\lambda} y^{\mu} \times$ $\times G_{23}^{30}(2ay \mid -\mu, \nu-\lambda, -\nu-\lambda),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$
(56)	$x^{-1/2} K_{2\nu}(ax^{1/2}),$ $\mu - 1/2$	$\pi^{-1/2} [K_{\nu}(2^{-1}ay^{1/2})]^2, \operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(57)	$x^{\nu/2-1/2} K_{\nu}(ax^{1/2}),$ $\mu - \nu + 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi^{-1/2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} \left[K_{\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right)\right]^2,$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(58)	$x^{\nu/2-1/2} K_{\nu}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu - 1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$\pi^{-1/2} (2/a)^{\nu-1} y^{\nu-1/2} \times$ $\times K_{\nu}(2^{-1}ay^{1/2}) K_{\nu-1}(2^{-1}ay^{1/2}),$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(59)	$x^{-\nu/2} K_{\nu}(ax^{1/2}) \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{1/2} a^{-\mu} y^{\mu/2-\nu/2} K_{\nu-\mu}(ay^{1/2}),$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(60)	$x^{-\lambda} K_{\nu}(ax^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \mu > 0$	$2^{-2\lambda-1} a^{2\lambda} y^{\mu} \times$ $\times G_{13}^{30} \left(\frac{a^2 y}{4} \middle \begin{matrix} 0 \\ -\mu, \nu/2-\lambda, -\nu/2-\lambda \end{matrix} \right),$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(61)	$x^{-\nu} I_{\nu}(ax^{1/2}) K_{\nu}(ax^{1/2}),$ $\mu = \nu - 1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$2^{-1} \pi^{1/2} a^{-\nu} y^{-\nu/2-1/2} \times$ $\times [I_{\nu}(2ay^{1/2}) - L_{\nu}(2ay^{1/2})],$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(62)	$x^{-\nu} [K_{\nu}(ax^{1/2})]^2,$ $\mu = \nu - 1/2, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$\pi^{1/2} a^{-\nu} y^{-\nu/2-1/2} K_{\nu}(2ay^{1/2}),$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(63)	$x^{\mu/2} H_{-\mu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$\left(\frac{2y}{a}\right)^{\mu} [Y_{-2\mu}(ay^{1/2}) +$ $+ \frac{2}{\pi} S_{0,2\mu}(ay^{1/2})], \quad y > 0$
(64)	$x^{\nu/2-1/2} H_{-\nu}(ax^{1/2}), \quad a > 0$ $\mu = \nu + 1/2, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\pi^{1/2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} \left[J_{-\nu} \left(\frac{ay^{1/2}}{2} \right) \right]^2,$ $y > 0$
(65)	$x^{\nu/2} H_{\nu}(ax^{1/2}), \quad a > 0$ $\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1/2$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu/2) < 3/4$	$\frac{(2/a)^{\mu} y^{\nu/2+\mu/2}}{\cos[(\mu + \nu)\pi]} [\cos(\nu\pi) H_{\mu+\nu}(ay^{1/2}) +$ $+ \sin(\mu\pi) J_{-\mu-\nu}(ay^{1/2})],$ $y > 0$
(66)	$x^{\mu/2} [H_{-\mu}(ax^{1/2}) - Y_{-\mu}(ax^{1/2})],$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$\frac{2}{\pi} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\mu} S_{0,2\mu}(ay^{1/2}),$ $ \arg(ay^{1/2}) < \pi$
(67)	$x^{\nu/2-1/2} [H_{-\nu}(ax^{1/2}) - Y_{-\nu}(ax^{1/2})],$ $\mu = \nu + 1/2, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi^{1/2}}{2} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} \left\{ \left[J_{\nu} \left(\frac{ay^{1/2}}{2} \right) \right]^2 + \right.$ $\left. + \left[Y_{\nu} \left(\frac{ay^{1/2}}{2} \right) \right]^2 \right\},$ $ \arg(ay^{1/2}) < \pi$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(68)	$x^{\nu/2} [H_{\nu}(ax^{1/2}) - Y_{\nu}(ax^{1/2})],$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 - \operatorname{Re} \nu$	$\frac{(2/a)^{\mu} \cos(\nu\pi)}{\cos[(\mu+\nu)\pi]} y^{\nu/2+\mu/2} \times$ $\times [H_{\mu+\nu}(ay^{1/2}) - Y_{\mu+\nu}(ay^{1/2})],$ $ \arg(ay^{1/2}) < \pi$
(69)	$x^{\nu/2-1/2} [I_{-\nu}(ax^{1/2}) - L_{-\nu}(ax^{1/2})],$ $\mu = \nu + 1/2, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{2}{\pi^{1/2}} \left(\frac{2y}{a}\right)^{\nu} I_{-\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right) K_{\nu}\left(\frac{ay^{1/2}}{2}\right),$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(70)	$x^{\nu/2} [I_{-\nu}(ax^{1/2}) - L_{\nu}(ax^{1/2})],$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 - \operatorname{Re} \nu$	$\frac{\cos(\nu\pi)}{\cos[(\mu+\nu)\pi]} \left(\frac{2}{a}\right)^{\mu} y^{\mu/2+\nu/2} \times$ $\times [I_{-\mu-\nu}(ay^{1/2}) - L_{\mu+\nu}(ay^{1/2})],$ $\operatorname{Re}(ay^{1/2}) > 0$
(71)	$x^{\nu/2} S_{\lambda, \nu}(ax^{1/2}),$ $0 < 2 \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re}(\lambda + \nu)$	$\frac{\Gamma(1/2 - \lambda/2 - \mu - \nu/2)}{\Gamma(1/2 - \lambda/2 - \nu/2)} a^{-\mu} y^{\mu/2+\nu/2} \times$ $\times S_{\lambda+\mu, \mu+\nu}(ay^{1/2}),$ $ \arg(ay^{1/2}) < \pi$
(72)	$x^{\lambda-1/2} \exp(2^{-1}ax) W_{\kappa, \lambda}(ax),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2 - \operatorname{Re}(\kappa + \lambda)$	$\frac{\Gamma(1/2 - \kappa - \lambda - \mu)}{\Gamma(1/2 - \kappa - \lambda)} a^{-\mu/2} y^{\mu/2+\lambda-1/2} \times$ $\times \exp(2^{-1}ay) W_{\kappa+\mu/2, \lambda+\mu/2}(ay),$ $ \arg(ay) < 3\pi/2$
(73)	$x^{\kappa-\mu-1} \exp(-2^{-1}ax) W_{\kappa, \lambda}(ax),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$y^{\kappa-1} \exp(-2^{-1}ay) W_{\kappa-\mu, \lambda}(ay),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$
(74)	$x^{\lambda-1/2} \exp(-2^{-1}ax) W_{\kappa, \lambda}(ax),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$a^{-\mu/2} y^{\mu/2+\lambda-1/2} \exp(-2^{-1}ay) \times$ $\times W_{\kappa-\mu/2, \lambda-\mu/2}(ay), \operatorname{Re}(ay) > 0$
(75)	$x^{-\rho} \exp(2^{-1}ax) W_{\kappa, \lambda}(ax),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re}(\rho - \kappa)$	$\frac{y^{\mu-\rho}}{\Gamma(1/2 + \lambda - \kappa) \Gamma(1/2 - \lambda - \kappa)} \times$ $\times G_{23}^{31}(ay \mid \rho - \mu, 1 + \kappa, \rho,$ $\quad \quad \quad \rho - \mu, 1/2 + \lambda, 1/2 - \lambda),$ $ \arg(ay) < 3\pi/2$
(76)	$x^{-\rho} \exp(-2^{-1}ax) W_{\kappa, \lambda}(ax),$ $\operatorname{Re} \mu > 0$	$y^{\mu-\rho} G_{23}^{30}(ay \mid \rho - \mu, \rho, 1 - \kappa,$ $\quad \quad \quad \rho - \mu, 1/2 + \lambda, 1/2 - \lambda),$ $\operatorname{Re}(ay) > 0$

	$f(x)$	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_y^{\infty} f(x) (x-y)^{\mu-1} dx$
(77)	$x^{-\lambda} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -\alpha/x),$ $0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda, p \leq q+1$	$\frac{\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(\lambda)} y^{\mu-\lambda} \times$ $\times {}_{p+1}F_{q+1}(\lambda-\mu, a_1, \dots, a_p; \lambda, b_1, \dots, b_q; -\alpha/y),$ $ y > \alpha $ или $ \arg(\alpha/y) < \pi,$ если $p = q+1$
(78)	$G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $p \geq q$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} a_j$ $j = 1, \dots, n$	$y^\mu G_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left(\alpha y \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, 0 \\ -\mu, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $ \alpha y > 1,$ если $p = q$
(79)	$G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $p+q < 2(m+n)$ $0 < \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} a_j$ $j = 1, \dots, n$	$y^\mu G_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left(\alpha y \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, 0 \\ -\mu, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $ \arg(\alpha y) < (m+n-p/2-q/2)\pi$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛТЬЕСА

Мы называем функцию

$$g(y) = \mathfrak{S}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx$$

преобразованием Стильтьеса функции $f(x)$. Здесь интегрирование ведется по положительной вещественной полуоси, а y является комплексным переменным, изменяющимся в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Преобразования Стильтьеса являются итерированными преобразованиями Лапласа

$$\mathfrak{S}\{f(x); y\} = \mathfrak{L}\{\mathfrak{L}\{f(x); t\}; y\}.$$

Поэтому информацию относительно преобразований Стильтьеса можно найти в трудах по преобразованиям Лапласа, в частности в книгах Уиддера (Widder, 1941, гл. VIII) и Титчмарша (1948, пп. 11.8 и 11.9). Преобразования Стильтьеса связаны также с проблемой моментов для полубесконечного промежутка (Shohat and Tamarkin, 1943) и, следовательно, с некоторыми цепными дробями.

Мы даем также краткий список обобщенных преобразований Стильтьеса порядка ρ

$$g(y; \rho) = \mathfrak{S}_{\rho}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-\rho} dx,$$

где x и y имеют тот же смысл, что и выше, а ρ — комплексный параметр. Обобщенные преобразования Стильтьеса различных порядков связаны друг с другом, а также с преобразованием Стильтьеса с помощью интегрирования дробного порядка

$$\Gamma(\rho) \mathfrak{W}_{\rho-1} \mathfrak{S}_{\rho} = \mathfrak{S},$$

$$\Gamma(\rho) \mathfrak{W}_{\mu} \mathfrak{S}_{\rho} = \Gamma(\rho - \mu) \mathfrak{S}_{\rho - \mu}.$$

Из приведенных в нижеследующих таблицах пар преобразований могут быть получены дальнейшие интегралы с помощью методов, указанных во введении к первому тому, общих формул, указанных в таблицах, а также путем применения приведенных выше формул и таблиц преобразований Лапласа и интегралов дробного порядка.

14.1. Общие формулы

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x)(x+y)^{-1} dx = g(y), \arg y < \pi$
(1)	$f(x)$	$g(y)$
(2)	$xf(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) dx - yg(y)$
(3)	$(x+a)^{-1} f(x),$	$ \arg a < \pi$
		$(y-a)^{-1} [g(a) - g(y)]$
(4)	$\frac{f(x) - f(a)}{x-a},$	$a > 0$
		$(y+a)^{-1} [2^{-1} g(ae^{i\pi}) +$ $+ 2^{-1} g(ae^{-i\pi}) -$ $- f(a) \ln(y/a) - g(y)]$
(5)	$g(xe^{i\pi}) - g(xe^{-i\pi})$	$2\pi i g(y)$
(6)	$f(ax),$	$a > 0$
		$g(ay)$
(7)	$x^{-1} f(a/x),$	$a > 0$
		$y^{-1} g(a/y)$
(8)	$f(x^{1/2})$	$g(iy^{1/2}) + g(-iy^{1/2})$
(9)	$f'(x)$	$-y^{-1} f(0) - g'(y)$

14.2. Элементарные функции

(1)	$-1,$ $1,$	$2n < x < 2n+1$ $2n+1 < x < 2n+2$ $n = 0, 1, 2, \dots$
		$\ln \left\{ \frac{y}{2} \left[\frac{\Gamma(y/2)}{\Gamma(y/2 + 1/2)} \right]^2 \right\}$
(2)	$(\alpha+x)^{-1},$	$ \arg \alpha < \pi$
		$(\alpha-y)^{-1} \ln(\alpha/y)$
(3)	$\frac{1}{\alpha^2+x^2},$	$\operatorname{Re} \alpha > 0$
		$\frac{1}{\alpha^2+y^2} \left[\frac{\pi y}{2\alpha} - \ln \left(\frac{y}{\alpha} \right) \right]$
(4)	$\frac{x}{\alpha^2+x^2},$	$\operatorname{Re} \alpha > 0$
		$\frac{1}{\alpha^2+y^2} \left[\frac{\pi \alpha}{2} + y \ln \left(\frac{y}{\alpha} \right) \right]$
(5)	$x^{\nu},$	$-1 < \operatorname{Re} \nu < 0$
		$-\frac{\pi y^{\nu}}{\sin(\pi \nu)}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \arg y < \pi$	
(6)	$\frac{x^\nu}{\alpha+x},$ $ \arg \alpha < \pi, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi (\alpha^\nu - y^\nu)}{(\alpha-y) \sin(\nu\pi)}$	
(7)	$\frac{x^\nu}{\alpha^2+x^2},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\frac{\pi}{\alpha^2+y^2} \left[\frac{\alpha^{\nu-1} y}{2 \cos(\nu\pi/2)} + \frac{\alpha^\nu}{2 \sin(\nu\pi/2)} - \frac{y^\nu}{\sin(\nu\pi)} \right]$	
(8)	$\frac{x^\nu - \alpha^\nu}{x-\alpha},$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi}{\alpha+y} \left[\frac{y^\nu}{\sin(\nu\pi)} - \alpha^\nu \operatorname{ctg}(\nu\pi) + \frac{\alpha^\nu}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{y}\right) \right]$	
(9)	$x^{\nu-1} (\alpha+x)^{1-\mu},$ $ \arg \alpha < \pi, 0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu$	$\frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\mu-\nu) y^{\nu-1}}{\Gamma(\mu) \alpha^{\mu-1}} \times$ $\times {}_2F_1(\mu-1, \nu; \mu; 1-y/\alpha)$	
(10)	$x^{-\rho} (\alpha+x)^{-\sigma},$ $ \arg \alpha < \pi$ $-\operatorname{Re} \sigma < \operatorname{Re} \rho < 1$	$\frac{\pi (\alpha-y)^{-\sigma} I_{1-y/\alpha}(\sigma, \rho)}{y^\rho \sin(\rho\pi)}$	
(11)	$e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$-e^{\alpha y} \operatorname{Ei}(-\alpha y)$	
(12)	$e^{-\alpha x},$ $0,$	$0 < x < b$ $b < x < \infty$	$e^{\alpha y} [\operatorname{Ei}(-ab-\alpha y) - \operatorname{Ei}(-\alpha y)]$
(13)	$0,$ $e^{-\alpha x},$	$0 < x < b$ $b < x < \infty$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$-e^{\alpha y} \operatorname{Ei}(-ab-\alpha y)$
(14)	$x^n e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$(-1)^{n+1} y^n e^{\alpha y} \operatorname{Ei}(-\alpha y) +$ $+ \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} (r-1)! \alpha^{-r} y^{n-r}$	
(15)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$\pi y^{-1/2} e^{\alpha y} \operatorname{Erfc}(\alpha^{1/2} y^{1/2})$	
(16)	$x^{1/2} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$\pi^{1/2} \alpha^{-1/2} - \pi y^{1/2} e^{\alpha y} \operatorname{Erfc}(\alpha^{1/2} y^{1/2})$	
(17)	$x^{-\nu} e^{-\alpha x},$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$\Gamma(1-\nu) y^{-\nu} e^{\alpha y} \Gamma(\nu, \alpha y)$	

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \arg y < \pi$
(18)	$x^{-1} (1 - e^{-\alpha x}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$y^{-1} [\ln(\alpha y) - e^{\alpha y} \operatorname{Ei}(-\alpha y)]$
(19)	$x^{\nu-1} e^{-\alpha/x}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu < 1$	$\Gamma(1-\nu) y^{\nu-1} e^{\alpha/y} \Gamma(\nu; \alpha/y)$
(20)	$\exp(-\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$2 \cos(\alpha y^{1/2}) \operatorname{ci}(\alpha y^{1/2}) -$ $- 2 \sin(\alpha y^{1/2}) \operatorname{si}(\alpha y^{1/2})$
(21)	$x^{-1/2} \exp(-\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$-2y^{-1/2} [\sin(\alpha y^{1/2}) \operatorname{ci}(\alpha y^{1/2}) +$ $+ \cos(\alpha y^{1/2}) \operatorname{si}(\alpha y^{1/2})]$
(22)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > -1$	$\Gamma(2\lambda+1) y^{\lambda} [\exp(i\alpha y^{1/2} + \lambda\pi i) \times$ $\times \Gamma(-2\lambda, i\alpha y^{1/2}) +$ $+ \exp(-i\alpha y^{1/2} - \lambda\pi i) \times$ $\times \Gamma(-2\lambda, -i\alpha y^{1/2})]$
(23)	$[\exp(\alpha x^{1/2}) - 1]^{-1}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\ln(\alpha y^{1/2}) - (2\alpha y^{1/2})^{-1} - \psi(\alpha y^{1/2})$
(24)	$(\alpha + x)^{-1} \ln x, \quad \arg \alpha < \pi$	$2^{-1} (y - \alpha)^{-1} [(\ln y)^2 - (\ln \alpha)^2]$
(25)	$(\alpha + x)^{-1} \ln(x/\alpha), \quad \arg \alpha < \pi$	$\frac{1}{2(y-\alpha)} \left[\ln\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right]^2$
(26)	$(x - \alpha)^{-1} \ln(x/\alpha), \quad \alpha > 0$	$2^{-1} (y + \alpha)^{-1} \{\pi^2 + [\ln(y/\alpha)]^2\}$
(27)	$x^{-1/2} \ln(\alpha x + \beta),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$2\pi y^{-1/2} \ln(\alpha^{1/2} y^{1/2} + \beta^{1/2})$
(28)	$x^{\nu} \ln x, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 0$	$-\frac{\pi y^{\nu} [\ln y - \pi \operatorname{ctg}(\nu\pi)]}{\sin(\nu\pi)}$
(29)	$x^{\nu} (\alpha + x)^{-1} \ln x,$ $ \arg \alpha < \pi, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\frac{\pi}{(y-\alpha) \sin(\nu\pi)} [\alpha^{\nu} \ln \alpha - y^{\nu} \ln y -$ $- \pi \operatorname{ctg}(\nu\pi) (\alpha^{\nu} - y^{\nu})]$
(30)	$x^{\nu} (\alpha + x)^{-1} \ln(x/\alpha),$ $ \arg \alpha < \pi, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi}{(y-\alpha) \sin(\nu\pi)} [y^{\nu} \ln(y/\alpha) +$ $+ \pi \operatorname{ctg}(\nu\pi) (\alpha^{\nu} - y^{\nu})]$
(31)	$\sin(\alpha x), \quad \alpha > 0$	$-\sin(\alpha y) \operatorname{ci}(\alpha y) - \cos(\alpha y) \operatorname{si}(\alpha y)$

	$f(x)$		$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \arg y < \pi$
(32)	$x^{1/2} \sin(ax),$ $a > 0$		$\pi y^{1/2} [\sin(ay) -$ $- 2^{1/2} \sin(ay + \pi/4) C(ay) +$ $+ 2^{1/2} \cos(ay + \pi/4) S(ay)] -$ $- 2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{-1/2}$
(33)	$x^{-1/2} \sin(ax),$ $a > 0$		$\pi y^{-1/2} [2^{1/2} \sin(ay + \pi/4) C(ay) -$ $- 2^{1/2} \cos(ay + \pi/4) S(ay) -$ $- \sin(ay)]$
(34)	$x^{-\nu} \sin(ax),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 2$		$2^{-1} i \Gamma(1-\nu) y^{-\nu} \times$ $\times [e^{-iay} \Gamma(\nu, -iay) -$ $- e^{iay} \Gamma(\nu, iay)]$
(35)	$0,$ $(x^2 - a^2)^{-1/2} \sin(bx),$ $0 < x < a$ $a < x < \infty$		См. Erdélyi Arthur, 1939; Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 6, 94— 104.
(36)	$\sin(ax^{1/2}),$ $a > 0$		$\pi \exp(-ay^{1/2})$
(37)	$x^{-1} \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0$		$\pi y^{-1} [1 - \exp(-ay^{1/2})]$
(38)	$x^{-1/2} \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0$		$y^{-1/2} [\exp(-ay^{1/2}) \bar{\text{Ei}}(ay^{1/2}) -$ $- \exp(ay^{1/2}) \text{Ei}(-ay^{1/2})]$
(39)	$x^{\lambda} \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0, -3/2 < \operatorname{Re} \lambda < 1/2$		$-\frac{\pi y^{\lambda} \operatorname{sh}(ay^{1/2})}{\cos(\lambda\pi)} -$ $- a^{-2\lambda} \Gamma(2\lambda) \sin(\lambda\pi) \times$ $\times [{}_1F_1(1; 1-2\lambda; ay^{1/2}) +$ $+ {}_1F_1(1; 1-2\lambda; -ay^{1/2})]$
(40)	$(x+\beta)^{-1} \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0, \arg \beta < \pi$		$\pi (y-\beta)^{-1} [\exp(-\alpha\beta^{1/2}) -$ $- \exp(-ay^{1/2})]$
(41)	$x^{-\beta} \sin(ax^{1/2} + \beta\pi),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \beta < 1$		$\pi y^{-\beta} \exp(-ay^{1/2})$
(42)	$\sin(ax^{1/2} - bx^{-1/2}),$ $a, b > 0$		$\pi \exp(-ay^{1/2} - by^{-1/2})$
(43)	$x^{-1/2} [\sin(ax^{1/2})]^2,$ $a > 0$		$2^{-1} \pi y^{-1/2} [1 - \exp(-2ay^{1/2})]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \arg y < \pi$
(44)	$x^{-1/2} \sin(ax^{1/2}) \sin(bx^{1/2}),$ $a > 0, b > 0$	$2^{-1} \pi y^{-1/2} \{ \exp[- a-b y^{1/2}] - \exp[-(a+b)y^{1/2}] \}$
(45)	$x^{-1/2} \sin(ax^{1/2}) \sin(bx^{1/2}),$ $a \geq b > 0$	$\pi y^{-1/2} \exp(-ay^{1/2}) \operatorname{sh}(by^{1/2})$
(46)	$\ln(\beta x) \sin(ax^{1/2}),$ $a > 0, \arg \beta < \pi$	$\pi [\ln(\beta y) \exp(-ay^{1/2}) - \exp(ay^{1/2}) \operatorname{Ei}(-ay^{1/2}) - \exp(-ay^{1/2}) \operatorname{Ei}(ay^{1/2})]$
(47)	$x^{-1/2} \ln \sin(ax^{1/2}) ,$ $a > 0$	$\pi y^{-1/2} \ln [1/2 - 2^{-1} \exp(-2ay^{1/2})]$
(48)	$\cos(ax),$ $a > 0$	$\cos(ay) \operatorname{ci}(ay) - \sin(ay) \operatorname{si}(ay)$
(49)	$x^{-1} [\cos(bx) - \cos(ax)],$ $a, b > 0$	$y^{-1} [-\operatorname{ci}(by) \cos(by) + \operatorname{si}(by) \sin(by) + \operatorname{ci}(ay) \cos(ay) - \operatorname{si}(ay) \sin(ay) + \ln(ab^{-1})]$
(50)	$x^{1/2} \cos(ax),$ $a > 0$	$2^{-1/2} \pi^{1/2} a^{-1/2} - \pi y^{1/2} [\cos(ay) - 2^{1/2} \cos(ay + \pi/4) C(ay) - 2^{1/2} \sin(ay + \pi/4) S(ay)]$
(51)	$x^{-1/2} \cos(ax),$ $a > 0$	$\pi y^{-1/2} [\cos(ay) - 2^{1/2} \cos(ay + \pi/4) C(ay) - 2^{1/2} \sin(ay + \pi/4) S(ay)]$
(52)	$x^{-\nu} \cos(ax),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$2^{-1} \Gamma(1-\nu) y^{-\nu} [e^{iay} \Gamma(\nu, iay) + e^{-iay} \Gamma(\nu, -iay)]$
(53)	0, $0 < x < a$ $(x^2 - a^2)^{-1/2} \cos(bx),$ $a < x < \infty$	См. Erdélyi Arthur, 1939: Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 6, 94-104.
(54)	$\cos(ax^{1/2}),$ $a > 0$	$-\exp(-ay^{1/2}) \overline{\operatorname{Ei}}(ay^{1/2}) - \exp(ay^{1/2}) \operatorname{Ei}(-ay^{1/2})$
(55)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2}),$ $a > 0$	$\pi y^{-1/2} \exp(-ay^{1/2})$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x)(x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(56)	$x^\lambda \cos(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \lambda < 1/2$	$-\frac{\pi y^\lambda \operatorname{ch}(ay^{1/2})}{\sin(\lambda\pi)} -$ $-a^{-2\lambda} \cos(\lambda\pi) \Gamma(2\lambda) \times$ $\times [{}_1F_1(1; 1-2\lambda; ay^{1/2}) +$ $+ {}_1F_1(1; 1-2\lambda; -ay^{1/2})]$
(57)	$x^{-1/2} (x+\beta)^{-1} \cos(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad \arg \beta < \pi$	$\pi (y-\beta)^{-1} [\beta^{-1/2} \exp(-a\beta^{1/2}) -$ $-y^{-1/2} \exp(-ay^{1/2})]$
(58)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2} - bx^{1/2}),$ $a, b > 0$	$\pi y^{-1/2} \exp(-ay^{1/2} - by^{1/2})$
(59)	$x^{-3/2} [\cos(ax^{1/2}) - \cos(bx^{1/2})],$ $a > 0, \quad b > 0$	$\pi y^{-3/2} [(b-a)y^{1/2} +$ $+ \exp(-by^{1/2}) - \exp(-ay^{1/2})]$
(60)	$x^{-1/2} [\cos(ax^{1/2})]^2, \quad a > 0$	$2^{-1} \pi y^{-1/2} [1 - \exp(-2ay^{1/2})]$
(61)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2}) \cos(bx^{1/2}),$ $a > 0, \quad b > 0$	$2^{-1} \pi y^{-1/2} \{\exp(- a-b y^{1/2}) +$ $+ \exp[-(a+b)y^{1/2}]\}$
(62)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2}) \cos(bx^{1/2}),$ $a \geq b > 0$	$\pi y^{-1/2} \exp(-ay^{1/2}) \operatorname{ch}(by^{1/2})$
(63)	$\frac{x^{-1/2}}{[\beta \sin(ax^{1/2})]^2 + [\gamma \cos(ax^{1/2})]^2},$ $ \arg(\beta/\gamma) < \pi$	$\frac{\pi y^{-1/2} [2^{-1}(\beta/\gamma - \gamma/\beta) \operatorname{sh}(2ay^{1/2}) - 1]}{[\beta \operatorname{sh}(ay^{1/2})]^2 - [\gamma \operatorname{ch}(ay^{1/2})]^2}$
(64)	$\frac{\sin(2ax^{1/2})}{[\beta \sin(ax^{1/2})]^2 + [\gamma \cos(ax^{1/2})]^2},$ $ \arg(\beta/\gamma) < \pi$	$\frac{\pi [(\beta - \gamma)/(\beta + \gamma) - \exp(-2ay^{1/2})]}{[\beta \operatorname{sh}(ay^{1/2})]^2 - [\gamma \operatorname{ch}(ay^{1/2})]^2}$
(65)	$x^{-1/2} \ln(\beta x) \cos(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad \arg \beta < \pi$	$\pi y^{-1/2} [\ln(\beta y) \exp(-ay^{1/2}) +$ $+ \exp(ay^{1/2}) \operatorname{Ei}(-ay^{1/2}) -$ $- \exp(-ay^{1/2}) \bar{\operatorname{Ei}}(ay^{1/2})]$
(66)	$x^{-1/2} \ln \cos(ax^{1/2}) , \quad a > 0$	$\pi y^{-1/2} \ln [1/2 + 2^{-1} \exp(-2ay^{1/2})]$
(67)	$x^{-1/2} \ln [1 + 2\beta \cos(ax^{1/2}) + \beta^2],$ $a > 0, \quad \beta < 1$	$2\pi y^{-1/2} \ln [1 + \beta \exp(-ay^{1/2})]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(68)	$x^{-1/2} \ln \{ [b \sin(ax^{1/2})]^2 + [c \cos(ax^{1/2})]^2 \},$ $a, b, c > 0$	$2\pi y^{-1/2} \ln [b \operatorname{sh}(ay^{1/2}) + c \operatorname{ch}(ay^{1/2})] - 2\pi a$
(69)	$[\cos(ax^{1/2})]^n \sin(nax^{1/2}),$ $a > 0, n = 1, 2, \dots$	$2^{-n} \pi \{ [1 + \exp(-2ay^{1/2})]^n - 1 \}$
(70)	$x^{-1/2} \ln [\operatorname{tg}(ax^{1/2})], \quad a > 0$	$\pi y^{-1/2} \ln [\operatorname{th}(ay^{1/2})]$
(71)	$x^{-1/2} \ln \{ 1 + [b \operatorname{tg}(ax^{1/2})]^2 \},$ $a, b > 0$	$2\pi y^{-1/2} \ln [1 + b \operatorname{th}(ay^{1/2})]$
(72)	$x^{-1/2} \ln \{ 1 + [b \operatorname{ctg}(ax^{1/2})]^2 \},$ $a, b > 0$	$2\pi y^{-1/2} \ln [1 + b \operatorname{cth}(ay^{1/2})]$
(73)	$\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi x^{1/2})}$	$-y^{-1/2} + \psi(2^{-1}y^{1/2} + 1/2) - \psi(2^{-1}y^{1/2})$
(74)	$\frac{1}{x^{1/2} \operatorname{ch}(\pi x^{1/2})}$	$y^{-1/2} [\psi(2^{-1}y^{1/2} + 3/4) - \psi(2^{-1}y^{1/2} + 1/4)]$
(75)	$\frac{x^{-1/2} \sin(ax^{1/2})}{\operatorname{sh}(bx^{1/2})},$ $\frac{x^{-1/2} \cos(ax^{1/2})}{\operatorname{ch}(bx^{1/2})},$ $\frac{x^{-1/2} \cos(ax^{1/2})}{c + \operatorname{ch}(bx^{1/2})}$	См. Ramanujan Srinivasa, 1914; Messenger of Math. 44, 75-85.

14.3. Высшие трансцендентные функции

(1)	$\operatorname{ci}(ax), \quad a > 0$	$\frac{[\operatorname{ci}(ay)]^2 + [\operatorname{si}(ay)]^2}{2}$
(2)	$J_\nu(ax), \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{\pi [J_\nu(ay) - Y_\nu(ay)]}{\sin(\nu\pi)}$
(3)	$x^\nu J_\nu(ax), \quad a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\frac{\pi y^\nu [H_{-\nu}(ay) - Y_{-\nu}(ay)]}{2 \cos(\nu\pi)}$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(4)	$x^{\nu+1} J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2^{\nu} \pi^{-1/2} a^{-\nu-1} \Gamma(\nu + 1/2) +$ $+ \frac{\pi y^{\nu+1} [Y_{-\nu}(ay) - H_{-\nu}(ay)]}{2 \cos(\nu\pi)}$
(5)	$x^{-\nu} J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$2^{-1} \pi y^{-\nu} [H_{\nu}(ay) - Y_{\nu}(ay)] -$ $- \frac{2^{1-\nu} y^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} S_{\nu-1, \nu}(ay)$
(6)	$x^{\lambda} J_{\nu}(ax), \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda < 3/2$ $\operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -1$	$-\frac{\pi y^{\lambda} J_{\nu}(ay)}{\sin[(\lambda + \nu)\pi]} +$ $+ \frac{2^{\lambda-1} a^{-\lambda} \Gamma(\lambda/2 + \nu/2)}{\Gamma(1 - \lambda/2 + \nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 1 - \frac{\lambda + \nu}{2}, 1 - \frac{\lambda - \nu}{2}; -\frac{a^2 y^2}{4}\right) -$ $- \frac{2^{\lambda-2} a^{1-\lambda} y \Gamma(\lambda/2 + \nu/2 - 1/2)}{\Gamma(3/2 - \lambda/2 + \nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; \frac{3 - \lambda - \nu}{2}, \frac{3 - \lambda + \nu}{2}; -\frac{a^2 y^2}{4}\right)$
(7)	$x^{\nu} \sin(ax) J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi y^{\nu}}{2 \cos(\nu\pi)} [\cos(ay - \nu\pi) J_{\nu}(ay) +$ $+ \sin(ay - \nu\pi) Y_{\nu}(ay)]$
(8)	$x^{\nu} \cos(ax) J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi y^{\nu}}{2 \cos(\nu\pi)} [\sin(ay - \nu\pi) J_{\nu}(ay) -$ $- \cos(ay - \nu\pi) Y_{\nu}(ay)]$
(9)	$x^{\nu} \cos(ax + \beta) J_{\nu}(ax),$ $a > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi y^{\nu}}{2 \cos(\nu\pi)} [\sin(ay - \nu\pi - \beta) J_{\nu}(ay) -$ $- \cos(ay - \nu\pi - \beta) Y_{\nu}(ay)]$
(10)	$x^{\nu/2+k} J_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad k = 0, 1, 2$ $-k - 1 < \operatorname{Re} \nu < -2k + 3/2$	$2(-1)^k y^{\nu/2+k} K_{\nu}(ay^{1/2})$
(11)	$x^{\nu/2+k-1/2} J_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad k = 0, 1, 2$ $-k - 1/2 < \operatorname{Re} \nu < -2k + 5/2$	$\frac{(-1)^k \pi y^{\nu/2+k-1/2}}{\cos(\nu\pi)} \times$ $\times [I_{\nu}(ay^{1/2}) - L_{-\nu}(ay^{1/2})]$
(12)	$x^{k-\nu/2-1/2} J_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ $\operatorname{Re} \nu > 2k - 5/2$	$\pi y^{k-\nu/2-1/2} [I_{\nu}(ay^{1/2}) - L_{\nu}(ay^{1/2})]$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(13)	$x^{\lambda} J_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \nu/2) > -1$ $\operatorname{Re} \lambda < 3/4$	$\left(\frac{2}{a}\right)^{2\lambda} \frac{\Gamma(\lambda + \nu/2)}{\Gamma(1 - \lambda + \nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 1 - \lambda - \frac{\nu}{2}, 1 - \lambda + \frac{\nu}{2}; \frac{a^2 y}{4}\right) -$ $-\frac{\pi y^{\lambda} I_{\nu}(ay^{1/2})}{\sin[(\lambda + \nu/2)\pi]}$
(14)	$\sin(ax^{1/2}) J_0(bx^{1/2}),$ $0 < b < a$	$\pi \exp(-ay^{1/2}) I_0(by^{1/2})$
(15)	$x^{-1/2} \sin(ax^{1/2}) J_0(bx^{1/2}),$ $0 < a < b$	$2y^{-1/2} \operatorname{sh}(ay^{1/2}) K_0(by^{1/2})$
(16)	$\cos(ax^{1/2}) J_0(bx^{1/2}),$ $0 < a < b$	$2 \operatorname{ch}(ay^{1/2}) K_0(by^{1/2})$
(17)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2}) J_0(bx^{1/2}),$ $0 < b < a$	$\pi y^{-1/2} \exp(-ay^{1/2}) I_0(by^{1/2})$
(18)	$x^{\nu/2-1/2} \sin(ax^{1/2}) J_{\nu}(bx^{1/2}),$ $0 < a < b, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2y^{\nu/2-1/2} \operatorname{sh}(ay^{1/2}) K_{\nu}(by^{1/2})$
(19)	$x^{-\nu/2} \sin(ax^{1/2}) J_{\nu}(bx^{1/2}),$ $0 < b < a, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$\pi y^{-\nu/2} \exp(-ay^{1/2}) I_{\nu}(by^{1/2})$
(20)	$x^{\nu/2} \cos(ax^{1/2}) J_{\nu}(bx^{1/2}),$ $0 < a < b, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2y^{\nu/2} \operatorname{ch}(ay^{1/2}) K_{\nu}(by^{1/2})$
(21)	$x^{-\nu/2-1/2} \cos(ax^{1/2}) J_{\nu}(bx^{1/2}),$ $0 < b < a, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$\pi y^{-\nu/2-1/2} \exp(-ay^{1/2}) I_{\nu}(by^{1/2})$
(22)	$[J_{\nu}(ax)]^2,$ $a > 0$	$2 I_{\nu}(ay^{1/2}) K_{\nu}(ay^{1/2})$
(23)	$J_{\nu}(ax^{1/2}) J_{\nu}(bx^{1/2}),$ $a, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$2 I_{\nu}(ay^{1/2}) K_{\nu}(by^{1/2}), \quad b > a$ $2 I_{\nu}(by^{1/2}) K_{\nu}(ay^{1/2}), \quad b < a$
(24)	$x^{\nu/2-\mu/2} J_{\nu}(bx^{1/2}) J_{\mu}(ax^{1/2}),$ $0 < a < b$ $2 + \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu > -1$	$2y^{\nu/2-\mu/2} I_{\mu}(ay^{1/2}) K_{\nu}(by^{1/2})$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \arg y < \pi$
(25)	$x^{\lambda} J_{\mu}(ax^{1/2}) J_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \lambda < 1$ $\operatorname{Re}(2\lambda + \mu + \nu) > -2$	$a^{-2\lambda} \pi^{-1/2} G_{35}^{23} \left(a^2 y \left \begin{matrix} 0, \lambda, \lambda + 1/2 \\ 0, \rho, q, r, s \end{matrix} \right. \right),$ $\rho = \lambda + \mu/2 + \nu/2, q = \lambda + \mu/2 - \nu/2$ $r = \lambda - \mu/2 + \nu/2, s = \lambda - \mu/2 - \nu/2$
(26)	$x^{\mu/2+n} (x+\gamma)^{-\nu/2} J_{\mu}(ax^{1/2}) \times$ $\times J_{\nu}[b(x+\gamma)^{1/2}],$ $a > b > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ $-1 - n < \operatorname{Re} \mu < 2 - 2n + \operatorname{Re} \nu$	$2(-1)^n y^{\mu/2+n} (y-\gamma)^{-\nu/2} \times$ $\times K_{\mu}(ay^{1/2}) I_{\mu}[b(y-\gamma)^{1/2}]$
(27)	$x^{-1/2} [\sin(ax) J_{\nu}(ax) +$ $+ \cos(ax) Y_{\nu}(ax)],$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi}{y^{1/2} \cos(\nu\pi)} [-\sin(ay) J_{\nu}(ay) +$ $+ \cos(ay) Y_{\nu}(ay)]$
(28)	$x^{-1/2} [\cos(ax) J_{\nu}(ax) -$ $- \sin(ax) Y_{\nu}(ax)],$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$\frac{\pi}{y^{1/2} \cos(\nu\pi)} [\cos(ay) J_{\nu}(ay) +$ $+ \sin(ay) Y_{\nu}(ay)]$
(29)	$x^{\lambda} Y_{\nu}(ax),$ $-1 + \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 3/2$	$-\frac{\pi \operatorname{ctg}(\nu\pi) y^{\lambda}}{\sin[(\nu+\lambda)\pi]} J_{\nu}\left(\frac{ay}{2}\right) -$ $-\frac{\pi y^{\lambda}}{\sin(\nu\pi) \sin[(\nu-\lambda)\pi]} J_{-\nu}\left(\frac{ay}{2}\right) -$ $-2^{\lambda-1} \pi^{-1} a^{-\lambda} \cos[2^{-1}(\lambda-\nu)\pi] \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu}{2}\right) \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 1-\frac{\lambda-\nu}{2}, 1-\frac{\lambda+\nu}{2}; -\frac{a^2 y^2}{4}\right) +$ $+ 2^{\lambda-2} \pi^{-1} a^{1-\lambda} y \sin\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\pi\right) \times$ $\times \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-1}{2}\right) \times$ $\times {}_1F_2\left(1; \frac{3-\lambda+\nu}{2}, \frac{3-\lambda-\nu}{2}; -\frac{a^2 y^2}{4}\right)$
(30)	$x^{\nu/2-1/2} Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$-2y^{\nu/2-1/2} K_{\nu}(ay^{1/2})$
(31)	$x^{\nu/2+1/2} Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, -3/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2y^{\nu/2+1/2} K_{\nu}(ay^{1/2})$
(32)	$x^{\lambda} Y_{\nu}(ax^{1/2}),$ $-1 + 2^{-1} \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 3/4$	$y^{\lambda} G_{24}^{31} \left(\frac{a^2 y}{4} \left \begin{matrix} -\lambda, -\frac{\nu+1}{2} \\ -\lambda, -\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu+1}{2} \end{matrix} \right. \right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(33)	$x^{\lambda-1} \{ \cos [(\lambda - \nu/2) \pi] J_{\nu}(ax^{1/2}) + \sin [(\lambda - \nu/2) \pi] Y_{\nu}(ax^{1/2}) \},$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \lambda < 7/2$	$-2y^{\lambda-1} K_{\nu}(ay^{1/2})$
(34)	$x^{\mu/2+n-1/2} (x+\gamma)^{-\nu/2} Y_{\mu}(ax^{1/2}) \times$ $\times J_{\nu}[b(x+\gamma)^{1/2}],$ $a > b > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ $-1/2 - n < \operatorname{Re} \mu < 3 - 2n + \operatorname{Re} \nu$	$2(-1)^{n+1} y^{\mu/2+n-1/2} (y-\gamma)^{-\nu/2} \times$ $\times K_{\mu}(ay^{1/2}) I_{\nu}[b(y-\gamma)^{1/2}]$
(35)	$x^{\lambda-1} (x+\gamma)^{-\mu/2} J_{\mu}[b(x+\gamma)^{1/2}] \times$ $\times \{ \cos [(\lambda - \nu/2) \pi] J_{\nu}(ax^{1/2}) +$ $+ \sin [(\lambda - \nu/2) \pi] Y_{\nu}(ax^{1/2}) \},$ $a > b > 0$ $ \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \lambda < 4 + \operatorname{Re} \mu$	$-2y^{\lambda-1} (y-\gamma)^{-\mu/2} \times$ $\times I_{\mu}[b(y-\gamma)^{1/2}] K_{\nu}(ay^{1/2})$
(36)	$x^{\nu} e^{-\alpha x} I_{\nu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{y^{\nu} e^{\alpha y} K_{\nu}(\alpha y)}{\cos(\nu\pi)}$
(37)	$x^{\lambda} e^{-\alpha x} I_{\nu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda < 1/2$ $\operatorname{Re}(\lambda + \nu) > -1$	$\pi^{-1/2} y^{\lambda} G_{23}^{22} \left(2\alpha y \left \begin{matrix} -\lambda, 1/2 \\ -\lambda, \nu, -\nu \end{matrix} \right. \right)$
(38)	$x^{\lambda} e^{\alpha x} K_{\nu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < 3\pi/2$ $\operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi^{-1/2} \cos(\nu\pi) y^{\lambda} \times$ $\times G_{23}^{32} \left(2\alpha y \left \begin{matrix} -\lambda, 1/2 \\ -\lambda, \nu, -\nu \end{matrix} \right. \right)$
(39)	$x^{-1/2} e^{-\alpha x} K_{\nu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi e^{\alpha y} K_{\nu}(\alpha y)}{y^{1/2} \cos(\nu\pi)}$
(40)	$x^{\lambda} e^{-\alpha x} K_{\nu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} \nu > -1$	$\pi^{1/2} y^{\lambda} G_{23}^{31} \left(2\alpha y \left \begin{matrix} -\lambda, 1/2 \\ -\lambda, \nu, -\nu \end{matrix} \right. \right)$
(41)	$x^{-\nu/2-1/2} K_{\nu}(ax^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi^2}{2y^{\nu/2+1/2} \cos(\nu\pi)} \times$ $\times [H_{\nu}(ay^{1/2}) - Y_{\nu}(ay^{1/2})]$
(42)	$x^{\lambda} K_{\nu}(ax^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 1$	$2^{2\lambda+1} y^{\lambda} \Gamma(1+\lambda+\nu/2) \times$ $\times \Gamma(1+\lambda-\nu/2) S_{-2\lambda-1, \nu}(ay^{1/2})$
(43)	$x^{-1/2} [2\pi^{-1} K_0(ax^{1/4}) - Y_0(ax^{1/4})],$ $ \arg \alpha < \pi/4$	$4y^{-1/4} \ker(ay^{1/4})$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(44)	$x^{\nu/2} H_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi y^{\nu/2} [I_{-\nu}(ay^{1/2}) - L_{\nu}(ay^{1/2})]}{\cos(\nu\pi)}$
(45)	$x^{-\nu/2} H_{\nu}(ax^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$\pi y^{-\nu/2} [I_{\nu}(ay^{1/2}) - L_{\nu}(ay^{1/2})]$
(46)	$x^{\lambda} H_{\nu}(ax^{1/2}), \quad a > 0, \operatorname{Re} \lambda < 3/4$ $-1/2 < \operatorname{Re}(\lambda + \nu/2) < 1/2$	$\frac{\pi}{\cos[(\lambda + \nu/2)\pi]} \times$ $\times \left[\frac{(2/a)^{2\lambda}}{\Gamma(1-\lambda + \nu/2)\Gamma(1-\lambda - \nu/2)} \times \right.$ $\times {}_1F_2(1; 1-\lambda + \nu/2, 1-\lambda - \nu/2;$ $\left. 2^{-2}a^2y) - y^{\lambda} L_{\nu}(ay^{1/2}) \right]$
(47)	$x^{-1/2} [\cos(2^{-1}\nu\pi) J_{\nu}(ax^{1/2}) +$ $+ \sin(2^{-1}\nu\pi) H_{\nu}(ax^{1/2})],$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\pi y^{-1/2} [I_{\nu}(ay^{1/2}) - L_{\nu}(ay^{1/2})]$
(48)	$x^{-1/2} [I_{\nu}(ax^{1/2}) - L_{\nu}(ax^{1/2})],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 2$	$\frac{\pi [H_{\nu}(ay^{1/2}) + E_{\nu}(ay^{1/2})]}{\alpha \sin(\nu\pi/2)}$
(49)	$x^{\lambda} [I_{\nu}(ax^{1/2}) - L_{\nu}(ax^{1/2})],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-2 < \operatorname{Re}(2\lambda + \nu) < 1$	$\frac{y^{\lambda}}{\pi} G_{24}^{32} \left(\frac{\alpha^2 y}{4} \mid -\lambda, \nu/2 + 1/2, -\nu/2 \right)$
Относительно других интегралов, содержащих функции Бесселя, см. Г. Н. Ватсон (1949), в частности пп. 13.5—13.55.		
(50)	$x^{\mu-1/2} \exp(-\alpha x/2) M_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-1/2 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \kappa + 1/2$	$\Gamma(2\mu + 1) \Gamma(\kappa - \mu + 1/2) y^{\mu-1/2} \times$ $\times \exp(\alpha x/2) W_{-\kappa, \mu}(\alpha x)$
(51)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha x/2) M_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $-3/2 - \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda < \operatorname{Re} \kappa$	$\frac{\Gamma(2\mu + 1) y^{\lambda}}{\Gamma(\kappa + \mu + 1/2)} \times$ $\times G_{23}^{22} \left(\alpha x \mid -\lambda, \mu + 1/2, 1/2 - \mu \right)$
(52)	$x^{\lambda} \exp(\alpha x/2) W_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < 3\pi/2$ $\operatorname{Re}(\kappa + \lambda) < 0$ $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \mu - 3/2$	$y^{\lambda} [\Gamma(1/2 + \mu - \kappa) \Gamma(1/2 - \mu - \kappa)]^{-1} \times$ $\times G_{23}^{32} \left(\alpha y \mid -\lambda, 1/2 + \mu, 1/2 - \mu \right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-1} dx, \quad \arg y < \pi$
(53)	$x^{\kappa-1} \exp(-\alpha x/2) W_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \kappa > \operatorname{Re} \mu - 1/2$	$\Gamma(\kappa + \mu + 1/2) \Gamma(\kappa - \mu + 1/2) y^{\kappa-1} \times$ $\times \exp(\alpha y/2) W_{-\kappa, \mu}(\alpha y)$
(54)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha x/2) W_{\lambda, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \mu - 3/2$	$y^{\lambda} G_{23}^{31}(\alpha y \mid -\lambda, 1-\kappa, -\mu)$
(55)	$G_{pq}^{mn}(\alpha x \mid a_1, \dots, a_p,$ $b_1, \dots, b_q),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \alpha < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1, \quad j=1, \dots, n$ $\operatorname{Re} b_j > -1, \quad j=1, \dots, m$	$G_{p+1, q+1}^{m+1, n+1}(\alpha y \mid 0, a_1, \dots, a_p,$ $0, b_1, \dots, b_q)$
(56)	$G_{pq}^{mn}(\alpha x^2 \mid a_1, \dots, a_p,$ $b_1, \dots, b_q),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \alpha < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1, \quad j=1, \dots, n$ $\operatorname{Re} b_j > -1/2, \quad j=1, \dots, m$	$\frac{1}{2\pi} G_{p+2, q+2}^{m+2, n+2}(\alpha y^2 \mid 0, 1/2, a_1, \dots, a_p,$ $0, 1/2, b_1, \dots, b_q)$

14.4. Обобщенные преобразования Стильтьеса

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-\rho} dx = g(y; \rho),$ $ \arg y < \pi$
(1)	$f(x)$	$g(y; \rho)$
(2)	$x f(x)$	$g(y; \rho-1) - y g(y; \rho)$
(3)	$f(ax), \quad a > 0$	$a^{\rho-1} g(ay; \rho)$
(4)	$x^{\rho-2} f(ax), \quad a > 0$	$a^{\rho-1} y^{-\rho} g(a/y)$
(5)	$f'(x)$	$\rho g(y; \rho+1) - y^{-\rho} f(0)$
(6)	$\int_0^x f(t) dt$	$(\rho-1)^{-1} g(y; \rho-1), \quad \operatorname{Re} \rho > 1$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-\rho} dx, \quad \arg y < \pi$
(7)	$[\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^x f(t) (x-t)^{\mu-1} dt,$ $0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \rho$	$\frac{\Gamma(\rho-\mu)}{\Gamma(\rho)} g(y; \rho-\mu)$
(8)	$x^{\nu-1}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\rho-\nu)}{\Gamma(\rho)} y^{\nu-\rho}, \quad \operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \nu$
(9)	$x^{\nu-1} (\alpha+x)^{-\mu},$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\mu-\nu+\rho) y^{\nu-\rho}}{\Gamma(\mu+\rho) \alpha^{\mu}} \times$ $\times {}_2F_1(\mu, \nu; \mu+\rho; 1-y/\alpha),$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re}(\nu-\mu)$
(10)	$e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\alpha^{\rho-1} e^{\alpha y} \Gamma(1-\rho, \alpha y)$
(11)	$x^{-\rho} e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \rho < 1$	$\pi^{-1/2} \Gamma(1-\rho) (\alpha/y)^{\rho-1/2} \times$ $\times \exp(\alpha y/2) K_{\rho-1/2}(\alpha y/2)$
(12)	$x^{\lambda} e^{-\alpha x}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > -1$	$\Gamma(\lambda+1) \alpha^{\rho/2-\lambda/2-1} y^{\lambda/2-\rho/2} \times$ $\times \exp(\alpha y/2) W_{k,m}(\alpha y),$ $2k = -\lambda - \rho, 2m = \lambda - \rho + 1$
(13)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha/x), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\Gamma(\rho-\lambda-1) \alpha^{\lambda/2} y^{-\lambda/2-1} \times$ $\times \exp\left(\frac{\alpha}{2y}\right) W_{k,m}\left(\frac{\alpha}{y}\right),$ $k = \lambda/2 - \rho + 1, m = \lambda/2 + 1/2$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \lambda + 1$
(14)	$x^{-1/2} \exp(-\alpha x^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$	$\pi^{1/2} (2\alpha^{-1} y^{1/2})^{1/2-\rho} \Gamma(1-\rho) \times$ $\times [H_{1/2-\rho}(\alpha y^{1/2}) - Y_{1/2-\rho}(\alpha y^{1/2})]$
(15)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > -1$	$\frac{y^{\lambda-\rho+1}}{\pi^{1/2} \Gamma(\rho)} G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2 y}{4} \mid \begin{matrix} -\lambda \\ \rho-\lambda-1, 0, 1/2 \end{matrix}\right)$
(16)	$\sin(\alpha x^{1/2}), \quad \alpha > 0$	$\frac{2\pi^{1/2} y^{1/2}}{\Gamma(\rho)} \left(\frac{2y^{1/2}}{\alpha}\right)^{1/2-\rho} K_{\rho-1/2}(\alpha y^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \rho > 1/2$
(17)	$x^{\lambda} \sin(\alpha x^{1/2}),$ $\alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > -1/2$	$\frac{\pi^{1/2} y^{\lambda-\rho+1}}{\Gamma(\rho)} G_{13}^{21}\left(\frac{\alpha^2 y}{4} \mid \begin{matrix} -\lambda \\ \rho-\lambda-1, 1/2, 0 \end{matrix}\right),$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \lambda + 1/2$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-\rho} dx, \quad \arg y < \pi$
(18)	$x^{-1/2} \cos(ax^{1/2}), \quad a > 0$	$\frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\rho)} \left(\frac{2y^{1/2}}{a}\right)^{1/2-\rho} K_{\rho-1/2}(ay^{1/2}),$ $\text{Re } \rho > 0$
(19)	$x^{\lambda} \cos(ax^{1/2}), \quad a > 0, \text{Re } \lambda > -1$	$\frac{\pi^{1/2} y^{\lambda-\rho+1}}{\Gamma(\rho)} G_{13}^{21} \left(\frac{a^2 y}{4} \left \begin{matrix} -\lambda \\ \rho-\lambda-1, 0, 1/2 \end{matrix} \right. \right),$ $\text{Re } \rho > \text{Re } \lambda + 1/2$
(20)	$x^{\nu/2} J_{\nu}(ax^{1/2}), \quad a > 0, \text{Re } \nu > -1$	$\frac{a^{\rho-1}}{2^{\rho} \Gamma(\rho)} y^{\nu/2-\rho/2+1/2} K_{\nu-\rho+1}(ay^{1/2}),$ $\text{Re } \rho > 2^{-1} \text{Re } \nu + 1/4$
(21)	$x^{\lambda} J_{\nu}(ax^{1/2}), \quad a > 0, \text{Re } (\lambda + \nu/2) > -1$	$\frac{2^{2\lambda} y^{1-\rho}}{a^{2\lambda} \Gamma(\rho)} \times$ $\times G_{13}^{21} \left(\frac{a^2 y}{4} \left \begin{matrix} 0 \\ \rho-1, \lambda+\nu/2, \lambda-\nu/2 \end{matrix} \right. \right),$ $\text{Re } \rho > \text{Re } \lambda + 1/4$
(22)	$x^{\nu} e^{-ax} I_{\nu}(ax), \quad \text{Re } a > 0, \text{Re } \nu > -1/2$	$\frac{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\rho-\nu-1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\rho)} (2a)^{\rho/2-1} \times$ $\times y^{\nu-\rho/2} e^{ay} W_{k,m}(2ay),$ $k = 1/2 - \rho/2, m = 1/2 - \rho/2 + \nu$ $\text{Re } \rho > \text{Re } \nu + 1/2$
(23)	$x^{\lambda} e^{-ax} I_{\nu}(ax), \quad \text{Re } a > 0, \text{Re } (\lambda + \nu) > -1$	$\frac{y^{\lambda+1-\rho}}{\pi^{1/2} \Gamma(\rho)} G_{23}^{22} \left(2ay \left \begin{matrix} -\lambda, 1/2 \\ \rho-\lambda-1, \nu, -\nu \end{matrix} \right. \right),$ $\text{Re } \rho > \text{Re } \lambda + 1/2$
(24)	$x^{\lambda} e^{\alpha x} K_{\nu}(ax) \quad \arg \alpha < 3\pi/2$ $\text{Re } \lambda > \text{Re } \nu - 1$	$\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^{1/2} \Gamma(\rho)} y^{\lambda+1-\rho} \times$ $\times G_{23}^{32} \left(2ay \left \begin{matrix} -\lambda, 1/2 \\ \rho-\lambda-1, \nu, -\nu \end{matrix} \right. \right),$ $\text{Re } \rho > \text{Re } \lambda + 1/2$
(25)	$x^{\rho-3/2} e^{-ax} K_{\nu}(ax), \quad \text{Re } a > 0, \text{Re } \rho > \text{Re } \nu + 1/2$	$\frac{\pi^{1/2} \Gamma(\rho+\nu-1/2) \Gamma(\rho-\nu-1/2)}{(2a)^{1/2} y \Gamma(\rho)} \times$ $\times e^{\alpha y} W_{1-\rho, \nu}(2ay)$
(26)	$x^{\lambda} e^{-ax} K_{\nu}(ax), \quad \text{Re } a > 0, \text{Re } \lambda > \text{Re } \nu - 1$	$\frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\rho)} y^{\lambda+1-\rho} \times$ $\times G_{23}^{31} \left(2ay \left \begin{matrix} -\lambda, 1/2 \\ \rho-\lambda-1, \nu, -\nu \end{matrix} \right. \right)$

	$f(x)$	$\int_0^{\infty} f(x) (x+y)^{-\rho} dx, \quad \arg y < \pi$
(27)	$x^{\lambda} K_{\nu}(\alpha x^{1/2}),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \lambda > 2^{-1} \mid \operatorname{Re} \nu \mid - 1$	$\frac{y^{\lambda-\rho+1}}{2 \Gamma(\rho)} \times$ $\times G_{13}^{31} \left(\frac{\alpha^2 y}{4} \mid_{\rho-\lambda-1, \nu/2, -\nu/2}^{-\lambda} \right)$
(28)	$x^{\mu-1/2} \exp(-\alpha x/2) M_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu > -1/2$	$\Gamma(2\mu+1) \Gamma(\kappa+\rho-\mu-1/2) \times$ $\times [\Gamma(\rho)]^{-1} \alpha^{\rho/2-1/2} y^{\lambda+1/2-\rho/2} \times$ $\times \exp(\alpha y/2) W_{k, m}(\alpha y),$ $k = 1/2 - \rho/2 - \kappa, m = 1/2 - \rho/2 + \mu$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re}(\mu - \kappa) + 1/2$
(29)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha x/2) M_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \mu) > -3/2$	$\frac{\Gamma(2\mu+1) y^{\lambda+\rho+1}}{\Gamma(\rho) \Gamma(\kappa+\mu+1/2)} \times$ $\times G_{23}^{22} \left(\alpha y \mid_{\rho-\lambda-1, 1/2+\mu, 1/2-\mu}^{-\lambda, 1-\kappa} \right),$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re}(\lambda - \kappa) + 1$
(30)	$x^{\lambda} \exp(\alpha x/2) W_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $ \arg \alpha < 3\pi/2$ $\operatorname{Re} \lambda > \mid \operatorname{Re} \mu \mid - 3/2$	$\frac{y^{\lambda-\rho+1}}{\Gamma(\rho) \Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu)} \times$ $\times G_{23}^{32} \left(\alpha y \mid_{\rho-\lambda-1, 1/2+\mu, 1/2-\mu}^{-\lambda, 1+\kappa} \right),$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re}(\lambda + \kappa) + 1$
(31)	$x^{\kappa+\rho-2} \exp(-\alpha x/2) W_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \rho > \mid \operatorname{Re} \mu \mid - \operatorname{Re} \kappa + 1/2$	$\Gamma(\kappa+\rho+\mu-1/2) \times$ $\times \Gamma(\kappa+\rho-\mu-1/2) [\Gamma(\rho)]^{-1} \times$ $\times y^{\kappa-1} \exp(\alpha y/2) W_{1-\kappa-\rho, \mu}(\alpha y)$
(32)	$x^{\lambda} \exp(-\alpha x/2) W_{\kappa, \mu}(\alpha x),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0$ $\operatorname{Re} \lambda > \mid \operatorname{Re} \mu \mid - 3/2$	$\frac{y^{\lambda+1-\rho}}{\Gamma(\rho)} \times$ $\times G_{23}^{31} \left(\alpha y \mid_{\rho-\lambda-1, 1/2+\mu, 1/2-\mu}^{-\lambda, 1-\kappa} \right)$
(33)	$G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \mid_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p} \right),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \alpha < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} b_j > -1, j=1, \dots, m$	$\frac{y^{1-\rho}}{\Gamma(\rho)} \times$ $\times G_{p+1, q+1}^{m+1, n+1} \left(\alpha y \mid_{\rho-1, b_1, \dots, b_q}^{0, a_1, \dots, a_p} \right),$ $\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} a_j, j=1, \dots, n$

Г Л А В А XV

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

Мы называем функцию

$$g(y) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$$

преобразованием Гильберта функции $f(x)$. Здесь x и y — вещественные переменные и

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{y-\varepsilon} + \int_{y+\varepsilon}^{\infty} \right)$$

— главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}$ в смысле Коши.

Относительно теории преобразований Гильберта см. главу V книги Титчмарша (1948) и указанные там ссылки. На стр. 321 приводятся ссылки на литературу, вышедшую после опубликования книги Титчмарша. Конечное преобразование Гильберта

$$g(y) = \pi^{-1} \int_a^b f(x) (x-y)^{-1} dx$$

и его приложения к теории крыла были рассмотрены Трикоми (Tricomi 1951 a, b) и Никкелем (Nickel, 1951, 1953). Второй из авторов дает ссылки на более ранние работы по этому вопросу.

В указанных выше соотношениях $g(x)$ называют функцией, сопряженной к $f(x)$. Это отношение является *косовзаимным*, т. е. сопряженным к $g(x)$ является $-f(x)$. Относительно связи между преобразованиями Гильберта и интегралами Фурье см. Титчмарш (1948) и Кобер (Kober, 1942, 1943 a, b). Связь с преобразованиями Лапласа устанавливается, если заметить, что, формально, мнимая часть преобразования Лапласа, вычисленного вдоль прямой, параллельной мнимой оси, сопряжена с вещественной частью этого же преобразования, вычисленного вдоль той же прямой. Формулы

$$g(y) = \pi^{-1} \mathfrak{S} \{ f(x); -y \} - (2\pi)^{-1} \mathfrak{S} \{ f(-x); |y| e^{i\pi} \} - \\ - (2\pi)^{-1} \mathfrak{S} \{ f(-x); |y| e^{-i\pi} \}, \quad -\infty < y < 0, \\ g(y) = (2\pi)^{-1} \mathfrak{S} \{ f(x); y e^{i\pi} \} + (2\pi)^{-1} \mathfrak{S} \{ f(x); y e^{-i\pi} \} - \\ - \pi^{-1} \mathfrak{S} \{ f(-x); y \}, \quad 0 < y < \infty,$$

позволяют свести вычисление преобразования Гильберта к использованию таблиц преобразования Стилтеса (см. гл. XIV).

С преобразованиями Гильберта связаны преобразования

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{ctg} [2^{-1}(x-y)] dx,$$

$$\int_0^{\pi} f(x) (\cos x - \cos y)^{-1} dx.$$

Они сводятся к преобразованиям Гильберта путем замены переменной.

Из приведенных здесь пар преобразований могут быть получены дальнейшие пары преобразований с помощью методов, указанных во введении к первому тому, общих формул, указанных в п. 15.1, и использования связей с другими интегральными преобразованиями.

15.1. Общие формулы

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx = g(y)^*$
(1)	$f(x)$	$g(y)$
(2)	$g(x)$	$-f(y)$
(3)	$f(a+x),$ a — вещественное	$g(a+y)$
(4)	$f(ax),$ $a > 0$	$g(ay)$
(5)	$f(-ax),$ $a > 0$	$-g(-ay)$
(6)	$xf(x)$	$yg(y) + \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
(7)	$(x+\alpha)f(x)$	$(y+\alpha)g(y) + \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
(8)	$f'(x)$	$g'(y)$

*) y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

15.2. Элементарные функции

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(1)	1	0
(2)	0, $-\infty < x < a$ 1, $a < x < b$ 0, $b < x < \infty$	$\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{b-y}{a-y} \right $
(3)	0, $-\infty < x < a$ x^{-1} , $a < x < \infty$ $a > 0$	$\frac{1}{\pi y} \ln \left \frac{a}{a-y} \right $, $y \neq 0, y \neq a$
(4)	x^{-1} , $-\infty < x < a$ 0, $a < x < b$ x^{-1} , $b < x < \infty$ $a < 0 < b$	$\frac{1}{\pi y} \ln \left \frac{(y-a)b}{a(b-y)} \right $, $y \neq 0, a, b$
(5)	0, $-\infty < x < a$ x^{-2} , $a < x < \infty$ $a > 0$	$\frac{1}{\pi y^2} \ln \left \frac{a}{a-y} \right - \frac{1}{\pi a y}$, $y \neq 0, y \neq a$
(6)	$(x+a)^{-1}$, $\operatorname{Im} \alpha > 0$	$i(y+\alpha)^{-1}$
(7)	$(x+a)^{-1}$, $\operatorname{Im} \alpha < 0$	$-i(y+\alpha)^{-1}$
(8)	0, $-\infty < x < 0$ $(ax+b)^{-1}$, $0 < x < \infty$ $a, b > 0$	$\frac{1}{\pi (ay+b)} \ln \left \frac{b}{ay} \right $, $y \neq -b/a, y \neq 0$
(9)	0, $-\infty < x < 0$ $(ax+b)^{-2}$, $0 < x < \infty$ $a, b > 0$	$\frac{1}{\pi (ay+b)^2} \ln \left \frac{b}{ay} \right - \frac{1}{\pi b (ay+b)}$, $y \neq 0, y \neq -b/a$
(10)	$(x^2 + \alpha^2)^{-1}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$-\frac{y}{\alpha (y^2 + \alpha^2)}$
(11)	$\frac{x}{x^2 + \alpha^2}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}$
(12)	$\frac{\lambda x + \mu \alpha}{x^2 + \alpha^2}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$	$\frac{\lambda \alpha - \mu y}{y^2 + \alpha^2}$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(13)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}, \quad 0 < x < \infty$ $a, b > 0$	$\frac{cy+d}{\pi (ay+b)^2} \ln \left \frac{b}{ay} \right - \frac{ad-bc}{\pi ab (ay+b)},$ $y \neq 0, y \neq -b/a$
(14)	$(a-x)^{1/2} - (b-x)^{1/2}, \quad -\infty < x < a$ $-(b-x)^{1/2}, \quad a < x < b$ $0, \quad b < x < \infty$	$0, \quad -\infty < y < a$ $(y-a)^{1/2}, \quad a < y < b$ $(y-a)^{1/2} - (y-b)^{1/2}, \quad b < y < \infty$
(15)	$0, \quad -\infty < x < a$ $(x-a)^{1/2}, \quad a < x < b$ $(x-a)^{1/2} - (x-b)^{1/2}, \quad b < x < \infty$	$(b-y)^{1/2} - (a-y)^{1/2}, \quad -\infty < y < a$ $(b-y)^{1/2}, \quad a < y < b$ $0, \quad b < y < \infty$
(16)	$ a-x ^{1/2} - b-x ^{1/2}, \quad a > 0, b > 0$	$(b-y)^{1/2} - (a-y)^{1/2}, \quad -\infty < y < a$ $(b-y)^{1/2} - (y-a)^{1/2}, \quad a < y < b$ $(y-a)^{1/2} - (y-b)^{1/2}, \quad b < y < \infty$
(17)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $(ax+b)^{-1/2}, \quad 0 < x < \infty$ $a, b > 0$	$2\pi^{-1} (-ay-b)^{-1/2} \times$ $\times \operatorname{arctg} \left\{ \left[- (ay+b)/b \right]^{1/2} \right\},$ $-\infty < y < -b/a$ $2\pi^{-1} b^{-1}, \quad y = -b/a$ $\frac{1}{(ay+b)^{1/2}} \ln \left \frac{b^{1/2} + (ay+b)^{1/2}}{b^{1/2} - (ay+b)^{1/2}} \right ,$ $-b/a < y < \infty$
(18)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$-\pi^{-1} a - y/2 - \pi^{-1} (y^2 - a^2)^{1/2} \times$ $\times \operatorname{arccos} (-a/y), \quad -\infty < y < -a$ $-\pi^{-1} a - y/2 + \pi^{-1} (a^2 - y^2)^{1/2} \times$ $\times \ln \left \frac{a + (a^2 - y^2)^{1/2}}{-y} \right , \quad -a < y < a$ $-\pi^{-1} a - y/2 + \pi^{-1} (y^2 - a^2)^{1/2} \times$ $\times \operatorname{arccos} (-a/y), \quad a < y < \infty$ $0 < \operatorname{arccos} (-a/y) < \pi$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(19)	$0, \quad -\infty < x < -a$ $(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad -a < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$-y - (y^2 - a^2)^{1/2}, \quad -\infty < y < -a$ $-y, \quad -a < y < a$ $-y + (y^2 - a^2)^{1/2}, \quad a < y < \infty$
(20)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $(a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$\frac{\arccos(-a/y)}{\pi(y^2 - a^2)^{1/2}}, \quad -\infty < y < -a$ $\frac{1}{\pi(a^2 - y^2)^{1/2}} \ln \left \frac{a + (a^2 - y^2)^{1/2}}{-y} \right ,$ $\quad -a < y < a$ $-\frac{\arccos(-a/y)}{\pi(y^2 - a^2)^{1/2}}, \quad a < y < \infty$ $0 < \arccos(-a/y) < \pi$
(21)	$0, \quad -\infty < x < -a$ $(a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad -a < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$(y^2 - a^2)^{-1/2}, \quad -\infty < y < -a$ $0, \quad -a < y < a$ $-(y^2 - a^2)^{-1/2}, \quad a < y < \infty$
(22)	$0, \quad -\infty < x < a$ $(x^2 - a^2)^{-1/2}, \quad a < x < \infty$ $a > 0$	$\frac{1}{\pi(y^2 - a^2)^{1/2}} \ln \left \frac{-y + (y^2 - a^2)^{1/2}}{a} \right ,$ $\quad -\infty < y < -a$ $\frac{1}{\pi(a^2 - y^2)^{1/2}} \arccos(-y/a),$ $\quad -a < y < a$ $\frac{1}{\pi(y^2 - a^2)^{1/2}} \ln \left \frac{-y + (y^2 - a^2)^{1/2}}{a} \right ,$ $\quad a < y < \infty$ $0 < \arccos(-y/a) < \pi$
(23)	$-(x^2 - a^2)^{-1/2}, \quad -\infty < x < -a$ $0, \quad -a < x < a$ $(x^2 - a^2)^{-1/2}, \quad a < x < \infty$	$0, \quad -\infty < y < -a$ $(a^2 - y^2)^{-1/2}, \quad -a < y < a$ $0, \quad a < y < \infty$
(24)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $(a-x)^{1/2} (a+x)^{-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left \frac{a-y}{a+y} \right ^{1/2} \arccos\left(-\frac{a}{y}\right),$ $\quad -\infty < y < -a$ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{a-y}{a+y}\right)^{1/2} \ln \left \frac{a + (a^2 - y^2)^{1/2}}{-y} \right ,$ $\quad -a < y < a$ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{y-a}{y+a}\right)^{1/2} \arccos\left(-\frac{a}{y}\right),$ $\quad a < y < \infty$ $0 < \arccos(-a/y) < \pi$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(25)	$0, \quad -\infty < x < -a$ $(a-x)^{1/2} (a+x)^{-1/2}, \quad -a < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$-1 + (a-y)^{1/2} y+a ^{-1/2}, \quad -\infty < y < -a$ $-1, \quad -a < y < a$ $-1 + (y-a)^{1/2} (y+a)^{-1/2}, \quad a < y < \infty$
(26)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $(a+x)^{1/2} (a-x)^{-1/2}, \quad 0 < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left \frac{a+y}{a-y} \right ^{1/2} \arccos \left(-\frac{a}{y} \right), \quad -\infty < y < -a$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{a+y}{a-y} \right)^{1/2} \ln \left \frac{a+(a^2-y^2)^{1/2}}{-y} \right , \quad -a < y < a$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{y+a}{y-a} \right)^{1/2} \arccos \left(-\frac{a}{y} \right), \quad a < y < \infty$ $0 < \arccos(-a/y) < \pi$
(27)	$0, \quad -\infty < x < -a$ $x(a-x)^{1/2} (a+x)^{-1/2}, \quad -a < x < a$ $0, \quad a < x < \infty$	$a-y+y \left \frac{a-y}{a+y} \right ^{1/2}, \quad -\infty < y < -a$ $a-y, \quad -a < y < a$ $a-y+y \left(\frac{y-a}{y+a} \right)^{1/2}, \quad a < y < \infty$
(28)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\nu-1}, \quad 0 < x < \infty$ $0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{(-y)^{\nu-1}}{\sin(\nu\pi)}, \quad -\infty < y < 0$ $-\operatorname{ctg}(\nu\pi) y^{\nu-1}, \quad 0 < y < \infty$
(29)	$ x ^{\nu-1}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-\operatorname{ctg}(\nu\pi/2) \operatorname{sgn} y y ^{\nu-1}$
(30)	$\operatorname{sgn} x x ^{\nu-1}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\operatorname{tg}(\nu\pi/2) y ^{\nu-1}$
(31)	$0, \quad -\infty < x < a$ $(x-a)^{\nu} (b-x)^{-\nu}, \quad a < x < b$ $0, \quad b < x < \infty$ $ \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{1}{\sin(\nu\pi)} \left[1 - \left(\frac{a-y}{b-y} \right)^{\nu} \right], \quad -\infty < y < a$ $\frac{1}{\sin(\nu\pi)} \left[1 - \cos(\nu\pi) \left(\frac{y-a}{b-y} \right)^{\nu} \right], \quad a < y < b$ $\frac{1}{\sin(\nu\pi)} \left[1 - \left(\frac{y-a}{y-b} \right)^{\nu} \right], \quad b < y < \infty$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(32)	$0, \quad -\infty < x < a$ $(x-a)^{\nu-1} (b-x)^{-\nu}, \quad a < x < b$ $0, \quad b < x < \infty$ $0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{1}{(b-y) \sin(\nu\pi)} \left \frac{a-y}{b-y} \right ^{\nu-1},$ $-\infty < y < a \text{ или } b < y < \infty$ $-(y-a)^{\nu-1} (b-y)^{-\nu} \operatorname{ctg}(\nu\pi),$ $a < y < b$
(33)	$0, \quad -\infty < x < a$ $(x-a)^{\rho-1} (b-x)^{\sigma-1},$ $a < x < b$ $0, \quad b < x < \infty$ $\operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re} \sigma > 0$	$\frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma) (b-a)^{\rho+\sigma-1}}{(b-y) \pi \Gamma(\rho+\sigma)} \times$ $\times {}_2F_1\left(1, \sigma; \rho+\sigma; \frac{b-a}{b-y}\right),$ $-\infty < y < a \text{ или } b < y < \infty$ $(y-a)^{\rho-1} (b-y)^{\sigma-1} \operatorname{ctg}(\sigma\pi) -$ $-\frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma-1)}{\pi \Gamma(\rho+\sigma-1)} (b-a)^{\rho+\sigma-2} \times$ $\times {}_2F_1\left(2-\rho-\sigma, 1; 2-\sigma; \frac{b-y}{b-a}\right),$ $a < y < b$
(34)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\nu-1} (x+a)^{1-\mu}, \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \mu$	$\frac{\Gamma(\mu-\nu) \Gamma(\nu) (-y)^{\nu-1}}{\pi \Gamma(\mu) a^{\mu-1}} \times$ $\times {}_2F_1\left(\mu-1, \nu; \mu; 1+y/a\right),$ $-\infty < y < 0$ $y^{\nu-1} (y+a)^{1-\mu} \operatorname{ctg}[(\mu-\nu)\pi] -$ $-\frac{\Gamma(\mu-\nu-1) \Gamma(\nu) a^{1-\mu+\nu}}{(y+a) \pi \Gamma(\mu-1)} \times$ $\times {}_2F_1\left(2-\mu, 1; 2-\mu+\nu; \frac{a}{y+a}\right),$ $0 < y < \infty$
(35)	$\exp(-a x), \quad a > 0$	$\pi^{-1} \operatorname{sgn} y [\exp(a y) \operatorname{Ei}(-a y) - \exp(-a y) \bar{\operatorname{Ei}}(a y)]$
(36)	$\operatorname{sgn} x \exp(-a x), \quad a > 0$	$-\pi^{-1} [\exp(a y) \operatorname{Ei}(-a y) + \exp(-a y) \bar{\operatorname{Ei}}(a y)]$
(37)	$0, \quad -\infty < x < a$ $e^{-bx}, \quad a < x < \infty$ $b > 0$	$-\pi^{-1} e^{-by} \operatorname{Ei}(by-ab),$ $-\infty < y < a$ $-\pi^{-1} e^{-by} \bar{\operatorname{Ei}}(by-ab),$ $a < y < \infty$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(38)	$e^{iax}, \quad a > 0$	$i e^{ia y}$
(39)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $\exp(-ax^{1/2}), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0$	$2\pi^{-1} \cos(a y ^{1/2}) \operatorname{ci}(a y ^{1/2}) -$ $-2\pi^{-1} \sin(a y ^{1/2}) \operatorname{si}(a y ^{1/2}),$ $-\infty < y < 0$ $-\pi^{-1} \exp(ay^{1/2}) \operatorname{Ei}(-ay^{1/2}) -$ $-\pi^{-1} \exp(-ay^{1/2}) \overline{\operatorname{Ei}}(ay^{1/2}),$ $0 < y < \infty$
(40)	$\ln \left \frac{b-x}{x-a} \right , \quad a < b$	$0, \quad -\infty < y < a$ $-\pi, \quad a < y < b$ $0, \quad b < y < \infty$
(41)	$\frac{1}{x} \ln \left \frac{1+ax}{1-bx} \right , \quad a > 0, b > 0$	$-\pi y^{-1}, \quad -\infty < y < -a^{-1}$ $0, \quad -a^{-1} < y < b^{-1}$ $-\pi y^{-1}, \quad -b^{-1} < y < \infty$
(42)	$\ln \left \frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} \right , \quad 0 < a < b$	$-\pi, \quad -b < y < -a$ $\pi, \quad a < y < b$ $0 \quad \text{в остальных случаях}$
(43)	$\sin(ax), \quad a > 0$	$\cos(ay)$
(44)	$\frac{\sin(ax)}{x}, \quad a > 0$	$\frac{\cos(ay) - 1}{y}$
(45)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $\sin(ax^{1/2}), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0$	$\exp(-a y ^{1/2}), \quad -\infty < y < 0$ $\cos(ay^{1/2}), \quad 0 < y < \infty$
(46)	$\operatorname{sgn} x \sin(a x ^{1/2}), \quad a > 0$	$\cos(a y ^{1/2}) + \exp(-a y ^{1/2})$
(47)	$\cos(ax), \quad a > 0$	$-\sin(ay)$
(48)	$\frac{1 - \cos(ax)}{x}, \quad a > 0$	$\frac{\sin(ay)}{y}$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

15.3. Высшие трансцендентные функции

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(1)	$e^{-ax} \operatorname{Ei}(ax), \quad -\infty < x < 0$ $e^{-ax} \overline{\operatorname{Ei}}(ax), \quad 0 < x < \infty$	$0, \quad -\infty < y < 0$ $\pi e^{-ay}, \quad 0 < y < \infty$
(2)	$\operatorname{ci}(a x), \quad a > 0$	$\operatorname{sgn} y \operatorname{si}(a y)$
(3)	$\operatorname{sgn} x \operatorname{si}(a x), \quad a > 0$	$\operatorname{Ci}(a y)$
(4)	$\cos(ax) \operatorname{ci}(a x) -$ $-\sin(a x) \operatorname{si}(a x),$ $a > 0$	$\operatorname{sgn} y \cos(ay) \operatorname{si}(a y) +$ $+\sin(ay) \operatorname{ci}(a y)$
(5)	$\sin(ax) \operatorname{ci}(a x) +$ $+\operatorname{sgn} x \cos(ax) \operatorname{si}(a x),$ $a > 0$	$\sin(a y) \operatorname{si}(a y) -$ $-\cos(ay) \operatorname{ci}(a y)$
(6)	$0, \quad -\infty < x < 1, \quad 1 < x < \infty$ $P_n(x), \quad -1 < x < 1$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$-2\pi^{-1} Q_n(y), \quad -\infty < y < -1, \quad 1 < y < \infty$ $-2\pi^{-1} Q_n(y), \quad -1 < y < 1$
(7)	$0, \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty$ $(1-x^2)^{-1/2} T_n(x), \quad -1 < x < 1$ $n = 1, 2, \dots$	$U_{n-1}(y), \quad -1 < y < 1$
(8)	$0, \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty$ $(1-x^2)^{1/2} U_n(x), \quad -1 < x < 1$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$-T_{n+1}(y), \quad -1 < y < 1$
(9)	$0, \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty$ $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$ $-1 < x < 1$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$	$-2\pi^{-1} (y-1)^\alpha (y+1)^\beta Q_n^{(\alpha, \beta)}(y),$ $-\infty < y < -1, \quad 1 < y < \infty$ $-2\pi^{-1} (1-y)^\alpha (y+1)^\beta Q_n^{(\alpha, \beta)}(y),$ $-1 < y < 1$
(10)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $J_\nu(ax), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$	$\frac{J_\nu(-ay) - J_\nu(-ay)}{\sin(\nu\pi)}, \quad -\infty < y < 0$ $\frac{J_\nu(-ay) - \cos(\nu\pi) J_\nu(ay)}{\sin(\nu\pi)}, \quad 0 < y < \infty$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(11)	$-J_{-\nu}(-ax), \quad -\infty < x < 0$ $J_{\nu}(ax), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-Y_{-\nu}(-ay), \quad -\infty < y < 0$ $-Y_{\nu}(ay), \quad 0 < y < \infty$
(12)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\nu} J_{\nu}(ax), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2^{-1} y ^{\nu} [\operatorname{tg}(\nu\pi) \operatorname{sgn} y J_{\nu}(a y) -$ $-Y_{\nu}(a y) - \frac{\operatorname{sgn} y H_{-\nu}(a y)}{\cos(\nu\pi)}]$
(13)	$ x ^{\nu} J_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\operatorname{sgn} y y ^{\nu} [\operatorname{tg}(\nu\pi) J_{\nu}(a y) -$ $- \frac{H_{-\nu}(a y)}{\cos(\nu\pi)}]$
(14)	$\operatorname{sgn} x x ^{\nu} J_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$- y ^{\nu} Y_{\nu}(a y)$
(15)	$ x ^{-\nu} J_{\nu}(a x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$-\operatorname{sgn} y y ^{-\nu} H_{\nu}(a y)$
(16)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\lambda} J_{\nu}(ax), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0$ $-1 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 3/2$	$\frac{2^{\lambda-1} \Gamma(\lambda/2 + \nu/2)}{\pi a^{\lambda} \Gamma(1 - \lambda/2 + \nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 1 - \frac{\lambda + \nu}{2}, 1 - \frac{\lambda - \nu}{2}; -\frac{a^2 y^2}{4}\right) +$ $+ \frac{2^{\lambda-2} y \Gamma(\lambda/2 + \nu/2 - 1/2)}{\pi a^{\lambda-1} \Gamma(\lambda/2 - \lambda/2 + \nu/2)} \times$ $+ {}_1F_2\left(1; \frac{3 - \lambda - \nu}{2}, \frac{3 - \lambda + \nu}{2}; -\frac{a^2 y^2}{4}\right) -$ $- h(y) y ^{\lambda} J_{\nu}(a y),$ $h(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sin[(\lambda + \nu)\pi]}, & -\infty < y < 0 \\ \operatorname{ctg}[(\lambda + \nu)\pi], & 0 < y < \infty \end{cases}$
(17)	$\sin(ax) J_1(ax), \quad a > 0$	$\cos(ay) J_1(ay)$
(18)	$\sin(ax) J_n(bx),$ $0 < b < a, n = 0, 1, 2, \dots$	$\cos(ay) J_n(by)$
(19)	$\cos(ax) J_1(ax), \quad a > 0$	$-\sin(ay) J_1(ay)$
(20)	$\cos(ax) J_n(bx),$ $0 < b < a, n = 0, 1, 2, \dots$	$-\sin(ay) J_n(by)$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Кошн.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(21)	$\operatorname{sgn} x x ^{\nu} \sin(a x - \pi\nu) \times$ $\quad \times J_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$ y ^{\nu} \cos(a y - \pi\nu) J_{\nu}(a y)$
(22)	$ x ^{\nu} \cos(a x - \pi\nu) J_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\operatorname{sgn} y y ^{\nu} \sin(a y - \pi\nu) J_{\nu}(a y)$
(23)	$ x ^{-\nu} \sin(ax) J_{\nu}(a x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$	$ y ^{-\nu} \cos(ay) J_{\nu}(a y)$
(24)	$ x ^{-\nu} \cos(ax) J_{\nu}(a x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > 1/2$	$- y ^{-\nu} \sin(ay) J_{\nu}(a y)$
(25)	$ x ^{1/2} J_{\nu-1/4}(a x) J_{-\nu-1/4}(a x),$ $a > 0$	$-\operatorname{sgn} y y ^{1/2} J_{1/4+\nu}(a y) \times$ $\quad \times J_{1/4-\nu}(a y)$
(26)	$\operatorname{sgn} x x ^{1/2} J_{1/4+\nu}(a x) \times$ $\quad \times J_{1/4-\nu}(a x), a > 0$	$ y ^{1/2} J_{\nu-1/4}(a y) J_{-\nu-1/4}(a y)$
(27)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\nu/2} J_{\nu}(ax^{1/2}), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2\pi^{-1} (-y)^{\nu/2} K_{\nu}[a(-y)^{1/2}], \quad -\infty < y < 0$ $-y^{\nu/2} Y_{\nu}(ay^{1/2}), \quad 0 < y < \infty$
(28)	$ x ^{\nu/2} J_{\nu}(a x ^{1/2}),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$-\operatorname{sgn} y y ^{\nu/2} [2\pi^{-1} K_{\nu}(a y ^{1/2}) +$ $\quad + Y_{\nu}(a y ^{1/2})]$
(29)	$\operatorname{sgn} x x ^{\nu/2} J_{\nu}(a x ^{1/2}),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2\pi^{-1} y ^{\nu/2} K_{\nu}(a y ^{1/2}) -$ $\quad - y ^{\nu/2} Y_{\nu}(a y ^{1/2})$
(30)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\nu/2-1/2} J_{\nu}(ax^{1/2}), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$\frac{ y ^{\nu/2-1/2}}{\cos(\nu\pi)} [I_{\nu}(a y ^{1/2}) -$ $\quad - L_{-\nu}(a y ^{1/2})], \quad -\infty < y < 0$ $y^{\nu/2-1/2} [\operatorname{tg}(\nu\pi) J_{\nu}(ay^{1/2}) -$ $\quad - \frac{H_{-\nu}(ay^{1/2})}{\cos(\nu\pi)}], \quad 0 < y < \infty$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(31)	$ x ^{\nu/2-1/2} J_{\nu}(a x ^{1/2}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$\operatorname{sgn} y y ^{\nu/2-1/2} \times$ $\times \{i\operatorname{tg}(\nu\pi) J_{\nu}(a y ^{1/2}) +$ $+ \frac{1}{\cos(\nu\pi)} [L_{-\nu}(a y ^{1/2}) -$ $- H_{-\nu}(a y ^{1/2}) - I_{\nu}(a y ^{1/2})]\}$
(32)	$\operatorname{sgn} x x ^{\nu/2-1/2} J_{\nu}(a x ^{1/2}),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2$	$i y ^{\nu/2-1/2} \{i\operatorname{tg}(\nu\pi) J_{\nu}(a y ^{1/2}) +$ $+ \frac{1}{\cos(\nu\pi)} [I_{\nu}(a y ^{1/2}) -$ $- L_{-\nu}(a y ^{1/2}) - H_{-\nu}(a y ^{1/2})]\}$
(33)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{-\nu/2-1/2} J_{\nu}(ax^{1/2}), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -5/2$	$ y ^{-\nu/2-1/2} \times$ $\times [I_{\nu}(a y ^{1/2}) - L_{\nu}(a y ^{1/2})],$ $-\infty < y < 0$ $-y^{-\nu/2-1/2} H_{\nu}(ay^{1/2}), \quad 0 < y < \infty$
(34)	$ x ^{-\nu/2-1/2} J_{\nu}(a x ^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -5/2$	$\operatorname{sgn} y y ^{-\nu/2-1/2} [L_{\nu}(a y ^{1/2}) -$ $- H_{\nu}(a y ^{1/2}) - I_{\nu}(a y ^{1/2})]$
(35)	$\operatorname{sgn} x x ^{-\nu/2-1/2} J_{\nu}(a x ^{1/2}),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -5/2$	$ y ^{-\nu/2-1/2} [I_{\nu}(a y ^{1/2}) -$ $- L_{\nu}(a y ^{1/2}) - H_{\nu}(a y ^{1/2})]$
(36)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\lambda} J_{\nu}(ax^{1/2}), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0$ $-1 - 2^{-1} \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 3/4$	$\frac{2^{2\lambda} \Gamma(\lambda+\nu/2)}{\pi a^{2\lambda} \Gamma(1-\lambda+\nu/2)} \times$ $\times {}_1F_2\left(1; 1-\lambda-\frac{\nu}{2}, 1-\lambda+\frac{\nu}{2};\right.$ $\left.-\frac{a^2 y}{4}\right) - h(y),$ $h(y) = \frac{ y ^{\lambda} I_{\nu}(a y ^{1/2})}{\sin[(\lambda+\nu/2)\pi]},$ $-\infty < y < 0$ $h(y) = y^{\lambda} \operatorname{ctg}[(\lambda+\nu/2)\pi] \times$ $\times J_{\nu}(a y ^{1/2}), \quad 0 < y < \infty$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(37)	$0, \quad -a < x < a$ $\operatorname{sgn} x (x^2 - a^2)^{\nu/2} J_{\nu} [b (x^2 - a^2)^{1/2}],$ $-\infty < x < -a \text{ или } a < x < \infty$ $a > 0, b > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$2\pi^{-1} (a^2 - y^2)^{\nu/2} K_{\nu} [b (a^2 - y^2)^{1/2}],$ $-a < y < a$ $-(y^2 - a^2)^{\nu/2} Y_{\nu} [b (y^2 - a^2)^{1/2}],$ $-\infty < y < -a \text{ или } a < y < \infty$
(38)	$Y_{-\nu}(-ax), \quad -\infty < x < 0$ $Y_{\nu}(ax), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$-J_{-\nu}(-ay), \quad -\infty < y < 0$ $J_{\nu}(ay), \quad 0 < y < \infty$
(39)	$\sin(\nu\pi/2) J_{\nu}(a x) +$ $+ \cos(\nu\pi/2) Y_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\operatorname{sgn} y [\cos(\nu\pi/2) Y_{\nu}(a y) -$ $- \sin(\nu\pi/2) J_{\nu}(a y)]$
(40)	$\operatorname{sgn} x [\sin(\nu\pi/2) Y_{\nu}(a x) -$ $- \cos(\nu\pi/2) J_{\nu}(a x)],$ $a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\cos(\nu\pi/2) Y_{\nu}(a y) +$ $+ \sin(\nu\pi/2) J_{\nu}(a y)$
(41)	$ x ^{\nu} Y_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$	$\operatorname{sgn} y y ^{\nu} J_{\nu}(a y)$
(42)	$\operatorname{sgn} x x ^{-\mu} \{ \sin [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times Y_{\nu}(a x) -$ $- \cos [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] J_{\nu}(a x) \},$ $a > 0$ $-1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} \nu $	$ y ^{-\mu} \{ \cos [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times Y_{\nu}(a y) +$ $+ \sin [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] J_{\nu}(a y) \}$
(43)	$ x ^{-\mu} \{ \sin [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times J_{\nu}(a x) +$ $+ \cos [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] Y_{\nu}(a x) \},$ $a > 0$ $-3/2 < \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} \nu $	$\operatorname{sgn} y y ^{-\mu} \times$ $\times \{ \cos [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] J_{\nu}(a y) -$ $- \sin [2^{-1}(\mu + \nu)\pi] Y_{\nu}(a y) \}$
(44)	$\operatorname{sgn} x x ^{-\mu} \times$ $\times \{ \cos [a x - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times J_{\nu}(b x) +$ $+ \sin [a x - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times Y_{\nu}(b x) \},$ $a < b, -3/2 < \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} \nu $	$ y ^{-\mu} \{ \sin [a y - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times J_{\nu}(b y) -$ $- \cos [a y - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times Y_{\nu}(b y) \}$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(45)	$ x ^{-\mu} \times$ $\times \{ \cos [a x - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times Y_{\nu}(b x) -$ $- \sin [a x - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times J_{\nu}(b x) \},$ $a < b, \quad -3/2 < \operatorname{Re} \mu < 1 - \operatorname{Re} \nu $	$\operatorname{sgn} y y ^{-\mu} \times$ $\times \{ \sin [a y - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times Y_{\nu}(b y) +$ $+ \cos [a y - 2^{-1}(\mu + \nu)\pi] \times$ $\times J_{\nu}(b y) \}$
(46)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $x^{\mu} \{ \cos [(\mu - \nu/2)\pi] J_{\nu}(ax^{1/2}) +$ $+ \sin [(\mu - \nu/2)\pi] Y_{\nu}(ax^{1/2}) \},$ $0 < x < \infty$ $a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu - 1 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$	$2\pi^{-1} y ^{\mu} K_{\nu}(a y ^{1/2}), \quad -\infty < y < 0$ $y^{\mu} \{ \sin [(\mu - \nu/2)\pi] J_{\nu}(ay^{1/2}) -$ $- \cos [(\mu - \nu/2)\pi] Y_{\nu}(ay^{1/2}) \},$ $0 < y < \infty$
(47)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $e^{-ax} I_0(ax), \quad 0 < x < \infty$ $a > 0$	$\pi^{-1} e^{-ay} K_0(a y)$
(48)	$\exp(-a x) I_0(ax), \quad a > 0$	$-2\pi^{-1} \operatorname{sh}(ay) K_0(a y)$
(49)	$\operatorname{sgn} x \exp(-a x) I_0(ax),$ $a > 0$	$2\pi^{-1} \operatorname{ch}(ay) K_0(a y)$
(50)	$0, \quad -\infty < x < -a$ $(a^2 - x^2)^{\nu/2} e^{-bx} J_{\nu}[b(a^2 - x^2)^{1/2}],$ $-a < x < a$ $2(x^2 - a^2)^{\nu/2} \cos(\nu\pi) e^{-bx} \times$ $\times I_{\nu}[b(x^2 - a^2)^{1/2}], \quad a < x < \infty$ $a > 0, \quad b > 0$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$2\pi^{-1} (y^2 - a^2)^{\nu/2} e^{-by} \times$ $\times K_{\nu}[b(y^2 - a^2)^{1/2}],$ $-\infty < y < -a$ $-(a^2 - y^2)^{\nu/2} e^{-by} \times$ $\times Y_{\nu}[b(a^2 - y^2)^{1/2}],$ $-a < y < a$ $2(y^2 - a^2)^{\nu/2} e^{-by} \times$ $\times \{ \pi^{-1} K_{\nu}[b(y^2 - a^2)^{1/2}] +$ $+ \sin(\nu\pi) I_{\nu}[b(y^2 - a^2)^{1/2}] \},$ $a < y < \infty$
(51)	$e^{ax} K_0(a x), \quad a > 0$	$\pi e^{ay} I_0(ay), \quad -\infty < y < 0$ $0, \quad 0 < y < \infty$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(52)	$\operatorname{sh}(ax) K_0(a x),$ $a > 0$	$2^{-1} \pi \exp(-a y) I_0(ay)$
(53)	$\operatorname{ch}(ax) K_0(a x),$ $a > 0$	$-2^{-1} \pi \operatorname{sgn} y \exp(-a y) I_0(ay)$
(54)	$ x ^{-\nu} e^{ax} K_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$\frac{\pi e^{ay}}{2 \cos(\nu\pi) y ^{\nu}} \times$ $\times [I_{\nu}(a y) + I_{-\nu}(a y)],$ $-\infty < y < 0$ $-\pi \operatorname{tg}(\nu\pi) y^{-\nu} e^{ay} K_{\nu}(ay),$ $0 < y < \infty$
(55)	$ x ^{-\nu} \operatorname{sh}(ax) K_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 > \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{1}{ y ^{\nu}} \left[\frac{\pi \exp(-a y) I_{\nu}(a y)}{2 \cos(\nu\pi)} - \right.$ $\left. - \operatorname{tg}(\nu\pi) \operatorname{sh}(a y) K_{\nu}(a y) \right]$
(56)	$ x ^{-\nu} \operatorname{ch}(ax) K_{\nu}(a x),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$-\frac{\operatorname{sgn} y}{ y ^{\nu}} \left[\frac{\pi \exp(-a y) I_{\nu}(a y)}{2 \cos(\nu\pi)} + \right.$ $\left. + \operatorname{tg}(\nu\pi) \operatorname{ch}(ay) K_{\nu}(a y) \right]$
(57)	$ x ^{2\nu} \exp(-ax^2) [K_{\nu}(ax^2) +$ $+ \pi \sin(\nu\pi) I_{\nu}(ax^2)],$ $a > 0, -1/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$	$-\pi \cos(\nu\pi) \operatorname{sgn} y y ^{2\nu} \times$ $\times \exp(-ay^2) I_{\nu}(ay^2)$
(58)	$\operatorname{sgn} x x ^{2\nu} \exp(-ax^2) I_{\nu}(ax^2),$ $a > 0, -1/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	$ y ^{2\nu} \exp(-ay^2) \times$ $\times \left[\frac{K_{\nu}(ay^2)}{\pi \cos(\nu\pi)} + \operatorname{tg}(\nu\pi) I_{\nu}(ay^2) \right]$
(59)	$\operatorname{sgn} x x ^{-\nu} H_{\nu}(a x),$ $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/2$	$ y ^{-\nu} J_{\nu}(a y)$
(60)	$0, \quad -\infty < x < 0$ $G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $0 < x < \infty$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \alpha < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1, \quad j=1, \dots, n$ $\operatorname{Re} b_j > -1, \quad j=1, \dots, m$	$\pi^{-1} G_{tu}^{rs} \left(\alpha y \left \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ 0, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $-\infty < y < 0$ $(-1)^k G_{vw}^{rs} \left(\alpha y \left \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p, j \\ 0, b_1, \dots, b_q, i \end{matrix} \right. \right),$ $0 < y < \infty$ $j = 1/2 + k, r = m + 1,$ $s = n + 1, t = p + 1, u = q + 1,$ $v = p + 2, \omega = q + 2$ $k - \text{целое}$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

	$f(x)$	$\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x-y)^{-1} dx$
(61)	$G_{pq}^{mn} \left(\alpha x^2 \left \begin{array}{l} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \alpha < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1, \quad j=1, \dots, n$ $\operatorname{Re} b_j > -1/2, \quad j=1, \dots, m$	$\operatorname{sgn} y G_{vw}^{rs} \left(\alpha y^2 \left \begin{array}{l} 1/2, a_1, \dots, a_p, 1 \\ 1/2, b_1, \dots, b_q, 1 \end{array} \right. \right),$ $r=m+1, s=n+1, v=p+2,$ $\omega=q+2$
(62)	$x G_{pq}^{mn} \left(\alpha x^2 \left \begin{array}{l} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right),$ $p+q < 2(m+n)$ $ \arg \alpha < (m+n-p/2-q/2)\pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1/2, \quad j=1, \dots, n$ $\operatorname{Re} b_j > -1, \quad j=1, \dots, m$	$ y G_{vw}^{rs} \left(\alpha y^2 \left \begin{array}{l} -1/2, a_1, \dots, a_p, 0 \\ -1/2, b_1, \dots, b_q, 0 \end{array} \right. \right),$ $r=m+1, s=n+1, v=p+2,$ $\omega=q+2$

y вещественно, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ВЫСШИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Эта часть книги содержит в основном интегралы, которые не вошли в таблицы глав I—XV.

ГЛАВА XVI ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

В этой главе мы даем список интегралов, содержащих классические ортогональные многочлены. Относительно теории этих многочленов см. ВТФ, т. II, главу X и указанную там литературу, в особенности книгу Сеге. Обозначения, принятые в данной главе для многочленов Эрмита, отличаются от использованных в ВТФ.

Из указанных здесь формул могут быть получены выражения для других интегралов путем применения методов, указанных во введении к первому тому, применения формулы Родрига (см. ниже) с последующим многократным интегрированием по частям, применения производящих функций (см. ниже), а также путем использования таблиц, данных в других главах этой книги, и применения соотношений (см. ниже) между различными системами ортогональных многочленов и между этими многочленами и функциями Лежандра, гипергеометрическими рядами, вырожденными гипергеометрическими функциями.

Многочлены Чебышева.

$$\begin{aligned} T_n(x) - (-1)^n T_n(-x) &= \cos(n\theta), & x = \cos \theta, \\ &= \frac{(1-x^2)^{1/2}}{2^n (1/2)_n} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x^2)^{n-1/2}], \\ &= {}_2F_1\left(-n, n; 1/2; \frac{1-x}{2}\right), \\ &= 2^{-1} n \lim_{\nu \rightarrow 0} \Gamma(\nu) C_n^\nu(x) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_n(x) - (-1)^n U_n(-x) &= \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}, & x = \cos \theta, \\ &= \frac{(n+1)(1-x^2)^{-1/2}}{2^{n+1} (1/2)_{n+1}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x^2)^{n+1/2}], \\ &= (n+1) {}_2F_1\left(-n, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \\ &= C_n^1(x) = \frac{(n+1)!}{2 (1/2)_{n+1}} P_n^{(1/2, 1/2)}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) z^n &= \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^n &= (1-2xz+z^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Относительно других производящих функций см. ВТФ, т. II, стр. 187.

Многочлены Лежандра.

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= (-1)^n P_n(-x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n [(x^2 - 1)^n], \\
 &= {}_2F_1(-n, n+1; 1; 1/2 - x/2), \\
 &= \frac{2^n (1/2)_n}{n!} x^n {}_2F_1(-n/2, 1/2 - n/2; 1/2; x^{-2}), \\
 &= C_n^{1/2}(x) = P_n^{(0, 0)}(x), \\
 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n &= (1 - 2xz + z^2)^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Относительно связи с функциями Лежандра см. ВТФ, т. I, стр. 151 и далее; относительно других гипергеометрических рядов, выражающих многочлены Лежандра, см. ВТФ, т. I, стр. 128—139 ($\mu = 0$, $\nu = n$) и т. II, стр. 181, а относительно других производящих функций см. ВТФ, т. II, стр. 183.

Относительно определения присоединенных многочленов Лежандра и их свойств см. ВТФ, т. I, стр. 149 и далее.

Многочлены Гегенбауэра. Эти многочлены называют также *ультрасферическими* многочленами и обозначают $P_n^{(\nu)}(x)$.

$$\begin{aligned}
 C_n^{\nu}(x) &= (-1)^n C_n^{\nu}(-x), \\
 &= \frac{2^{\nu-1/2} \Gamma(2\nu+n) \Gamma(\nu+1/2)}{n! \Gamma(2\nu)} (x^2-1)^{1/4-\nu/2} P_{n+\nu-1/2}^{1/2-\nu}(x), \\
 &= \frac{(2\nu)_n (1-x^2)^{1/2-\nu}}{2^n n! (\nu+1/2)_n} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n [(1-x^2)^{n+\nu-1/2}], \\
 &= \frac{(2\nu)_n}{n!} {}_2F_1(-n, n+2\nu; \nu+1/2; 1/2-x/2), \\
 &= \frac{2^n (\nu)_n}{n!} (x-1)^n {}_2F_1\left(-n, \frac{1}{2}-n-\nu; 1-2n-2\nu; \frac{2}{1-x}\right), \\
 &= \frac{(2\nu)_n}{(\nu+1/2)_n} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(x); \\
 C_{2n}^{\nu}(x) &= (-1)^n \frac{(\nu)_n}{n!} {}_2F_1(-n, n+\nu; 1/2; x^2), \\
 &= \frac{(\nu)_n}{(1/2)_n} P_n^{(\nu-1/2, -1/2)}(2x^2-1); \\
 C_{2n+1}^{\nu}(x) &= (-1)^n \frac{(\nu)_{n+1}}{n!} 2x {}_2F_1(-n, n+\nu+1; 3/2; x^2), \\
 &= \frac{(\nu)_{n+1}}{(1/2)_{n+1}} x P_n^{(\nu-1/2, 1/2)}(2x^2-1); \\
 \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x) z^n &= (1-2xz+z^2)^{-\nu},
 \end{aligned}$$

Относительно связи с функциями Лежандра и других гипергеометрических разложений см. ВТФ, т. I, стр. 177 и далее, стр. 128—139, т. II, стр. 177. Относительно других производящих функций см. ВТФ, т. II, стр. 178.

Многочлены Якоби.

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x), \\
 &= \frac{(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta}}{2^n n!} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \\
 &= \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right), \\
 &= (-1)^n \binom{n+\beta}{n} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \beta+1; \frac{1+x}{2}\right), \\
 &= \binom{n+\alpha}{n} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, -n-\beta; \alpha+1; \frac{x-1}{x+1}\right), \\
 &= \binom{n+\beta}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, -n-\alpha; \beta+1; \frac{x+1}{x-1}\right);
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) z^n = 2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1-z+R)^{-\alpha} (1+z+R)^{-\beta},$$

$$R = (1-2xz+z^2)^{1/2}$$

Другие разложения могут быть получены из этих с помощью преобразований, указанных в ВТФ, т. I, п. 2.9.

Многочлены Эрмита.

$$\begin{aligned}
 He_n(x) &= (-1)^n He_n(-x) = 2^{-n/2} H_n(2^{-1/2}x), \\
 &= \exp(2^{-1}x^2) \left(-\frac{d}{dx}\right)^n [\exp(-2^{-1}x^2)], \\
 &= x^n {}_2F_0\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; -\frac{2}{x^2}\right), \\
 &= 2^{n/2+1/4} x^{-1/2} \exp(2^{-2}x^2) W_{n/2+1/4, -1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right), \\
 &= \exp(2^{-2}x^2) D_n(x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 He_{2n}(x) &= (-2)^n (1/2)_n {}_1F_1(-n; 1/2; 2^{-1}x^2), \\
 &= (-2)^n n! L_n^{-1/2}(2^{-1}x^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 He_{2n+1}(x) &= (-2)^n (3/2)_n x {}_1F_1(-n; 3/2; 2^{-1}x^2), \\
 &= (-2)^n n! x L_n^{1/2}(2^{-1}x^2),
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp(-2^{-1}z^2 + xz).$$

Относительно других производящих функций см. ВТФ, т. II, стр. 194.

Многочлены Лагерра.

$$\begin{aligned}
 L_n^\alpha(x) &= \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [e^{-x} x^{n+\alpha}], \\
 &= \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x), \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!} x^n {}_2F_0(-n, -\alpha-n; -1/x), \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!} x^{-\alpha/2-1/2} \exp(x/2) W_{1/2+\alpha/2+n, \alpha/2}(x); \\
 \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n &= (1-z)^{-\alpha-1} \exp \frac{xz}{z-1}.
 \end{aligned}$$

Относительно других производящих функций см. ВТФ, т. II, стр. 190.

16.1. Многочлены Чебышева

Интегралы в этом пункте могут быть выражены как интегралы от тригонометрических функций.

В этом пункте m и n — неотрицательные целые числа.

(1)	$ \int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} (1+x)^\alpha T_n(x) dx = \frac{2^{\alpha+2n+1/2} \pi^{1/2} (n!)^2 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+3/2)}{(2n)! \Gamma(\alpha+n+3/2) \Gamma(\alpha-n+3/2)}, $	$\operatorname{Re} \alpha > -1$
(2)	$ \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta T_n(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1} (n!)^2 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{(2n)! \Gamma(\alpha+\beta+2)} \times $	$\times {}_3F_2(-n, n, \alpha+1; 1/2, \alpha+\beta+2; 1), \operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$
(3)	$ \int_{-1}^1 (x-y)^{-1} (1-x^2)^{-1/2} T_n(x) dx = \pi U_{n-1}(y), $	$-1 < y < 1$
(4)	$ \int_{-1}^1 \sin(xyz) \cos[(1-x^2)^{1/2} (1-y^2)^{1/2} z] T_{2n+1}(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = $	$= (-1)^n \pi T_{2n+1}(y) J_{2n+1}(z)$
(5)	$ \int_{-1}^1 \cos(xyz) \cos[(1-x^2)^{1/2} (1-y^2)^{1/2} z] T_{2n}(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = $	$= (-1)^n \pi T_{2n}(y) J_{2n}(z)$
(6)	$ \int_{-1}^1 [T_n(x)]^2 dx = 1 - (4n^2 - 1)^{-1} $	

$$(6') \quad \int_0^1 (1-x^2)^{-1/2} x^m T_n(x) dx = 2^{-m-1} \pi \left(\frac{m}{m-n} \right)$$

$$(7) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} [T_0(x)]^2 dx = \pi$$

$$(8) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} [T_n(x)]^2 dx = \pi/2, \quad n \neq 0$$

$$(9) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_m(x) T_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

$$(10) \quad \int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} (1+x)^{m-n-3/2} T_m(x) T_n(x) dx = 0, \quad m > n$$

$$(11) \quad \int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} (1+x)^{m+n-3/2} T_m(x) T_n(x) dx = \\ = \frac{\pi(2m+2n-2)!}{2^{m+n}(2m-1)!(2n-1)!}, \quad m+n \neq 0$$

$$(12) \quad \int_{-1}^1 (1+x)^{-1/2} (1-x)^{\alpha-1} T_m(x) T_n(x) dx = \frac{\pi^{1/2} 2^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha) \Gamma(n-\alpha+1/2)}{\Gamma(1/2-\alpha) \Gamma(\alpha+n+1/2)} \times \\ \times {}_4F_3(-m, m, \alpha, \alpha+1/2; 1/2, \alpha+n+1/2, \alpha-n+1/2; 1), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(13) \quad \int_0^1 x^{-1/2} (1-x^2)^{-1/2} e^{-2\alpha/x} T_n(x) dx = \pi^{1/2} D_{n-1/2}(2\alpha^{1/2}) D_{-n-1/2}(2\alpha^{1/2}), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(14) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_n(1-x^2y) dx = 2^{-1} \pi [P_n(1-y) + P_{n-1}(1-y)]$$

$$(15) \quad \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{-n} T_{2n}[(1+x^2)^{-1/2}] dx}{\operatorname{ch}(\pi x/2)} = (-1)^{n+1} \frac{2\pi^{2n}}{(2n)!} (2^{n-1} - 1) B_{2n}$$

$$(16) \int_0^{\infty} \frac{(1+x^2)^{-n/2} T_n [(1+x^2)^{-1/2}]}{\operatorname{ch} (\pi x/2)} dx = 2^{1-n} (1-2^{1-n}) \zeta(n)$$

$$(17) \int_0^{\infty} (1+x^2)^{1/2-n} [\operatorname{ch} (\pi x/2)]^{-2} T_{2n-1} [(1+x^2)^{-1/2}] dx = \\ = 2 (-1)^{n+1} \pi^{2n-1} \frac{2n-1}{(2n)!} B_{2n}$$

$$(18) \int_0^{\infty} (1+x^2)^{-n/2} [\operatorname{ch} (\pi x/2)]^{-2} T_n [(1+x^2)^{-1/2}] dx = \pi^{-1} n 2^{1-n} \zeta(n+1)$$

$$(19) \int_0^{\infty} \frac{(\alpha^2+x^2)^{-n/2} T_n [\alpha (\alpha^2+x^2)^{-1/2}]}{\operatorname{ch} (\pi x/2)} dx = \\ = 2^{1-2n} \left[\zeta \left(n, \frac{\alpha+1}{4} \right) - \zeta \left(n, \frac{\alpha+3}{4} \right) \right] = 2^{1-2n} \Phi \left(-1, n, \frac{\alpha+1}{2} \right), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(20) \int_0^{\infty} (\alpha^2+x^2)^{-n/2} [\operatorname{ch} (\pi x/2)]^{-2} T_n [\alpha (\alpha^2+x^2)^{-1/2}] dx = \\ = \pi^{-1} n 2^{1-n} \zeta \left(n+1, \frac{\alpha+1}{2} \right), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(21) \int_{-1}^1 (1-x)^{1/2} (1+x)^\alpha U_n(x) dx = \\ = \frac{\pi^{1/2} 2^{\alpha+2n+3/2} [(n+1)!]^2 \Gamma(\alpha+1/2) \Gamma(\alpha+1)}{(2n+2)! \Gamma(\alpha+n+3/2) \Gamma(\alpha-n+1/2)}, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1$$

$$(22) \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta U_n(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+2n+2} [(n+1)!]^2 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{(2n+2)! \Gamma(\alpha+\beta+2)} \times \\ \times {}_3F_2(-n, n+1, \alpha+1; 3/2, \alpha+\beta+2; 1), \quad \operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$$

$$(23) \int_{-1}^1 (x-y)^{-1} (1-x^2)^{-1/2} U_n(x) dx = -\pi T_{n+1}(y), \quad -1 < y < 1$$

$$(24) \int_{-1}^1 \cos(xyz) \sin[(1-x^2)^{1/2} (1-y^2)^{1/2} z] U_{2n}(x) dx = \\ = (-1)^n \pi (1-y^2)^{1/2} U_{2n}(y) J_{2n+1}(z)$$

(25)	$\int_{-1}^1 \sin(xyz) \sin[(1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}z] U_{2n+1}(x) dx =$ $= (-1)^n \pi (1-y^2)^{1/2} U_{2n+1}(y) J_{2n+2}(z)$	
(26)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} (1+x)^{1/2} [U_n(x)]^2 dx = (n+1) \pi$	
(27)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} [U_n(x)]^2 dx = \pi/2$	
(28)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} U_m(x) U_n(x) dx = 0,$	$m \neq n$
(29)	$\int_{-1}^1 (1-x)(1+x)^{1/2} U_m(x) U_n(x) dx = \frac{2^{3/2}(m+1)(n+1)}{(m+n+3/2)(m+n+5/2)[1-4(m-n)^2]}$	
(30)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{1/2} (1+x)^{m-n-1/2} U_m(x) U_n(x) dx = 0,$	$m > n$
(31)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{1/2} (1+x)^{m+n+3/2} U_m(x) U_n(x) dx = \frac{\pi(2m+2n+2)!}{2^{2m+n+2}(2m+1)!(2n+1)!}$	
(32)	$\int_{-1}^1 (1+x)^{1/2} (1-x)^{\alpha-1} U_m(x) U_n(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} 2^{\alpha-1/2} (m+1)(n+1) \Gamma(\alpha) \Gamma(n-\alpha+3/2)}{\Gamma(3/2-\alpha) \Gamma(3/2+\alpha+n)} \times$ $\times {}_4F_3(-m, m+2, \alpha, \alpha-1/2; 3/2, \alpha+n+3/2, \alpha-n-1/2; 1),$	$\operatorname{Re} \alpha > 0$
(33)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} U_{2n}(xz) dx = \pi P_n(2z^2-1)$	
(34)	$\int_{-1}^1 U_n[x(1-y^2)^{1/2}(1-z^2)^{1/2}+yz] dx = \frac{2}{n+1} U_n(y) U_n(z)$	

(35)	$\int_0^{\infty} \frac{x U_{2n-1} [(1+x^2)^{-1/2}]}{(1+x^2)^{n+1/2} (e^{\pi x} + 1)} dx = \frac{1}{2(2n-1)} + \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$	
(36)	$\int_0^{\infty} \frac{x U_n [(1+x^2)^{-1/2}]}{(1+x^2)^{n/2+1} (e^{\pi x} + 1)} dx = \frac{1}{2n} - 2^{-n-1} \zeta(n+1)$	
(37)	$\int_0^{\infty} \frac{x U_{2n-1} [(1+x^2)^{-1/2}]}{(1+x^2)^{n+1/2} (e^{2\pi x} - 1)} dx = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n}}{4(2n)!} B_{2n} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4n-2}$	
(38)	$\int_0^{\infty} \frac{x U_n [(1+x^2)^{-1/2}]}{(1+x^2)^{n/2+1} (e^{2\pi x} - 1)} dx = \frac{1}{2} \zeta(n+1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$	
(39)	$\int_0^{\infty} \frac{x U_n [a(\alpha^2 + x^2)^{-1/2}]}{(\alpha^2 + x^2)^{n/2+1} (e^{\pi x} + 1)} dx = \frac{\alpha^{-n}}{2n} - 2^{-n-1} \zeta\left(n+1, \frac{\alpha+1}{2}\right),$	$\text{Re } \alpha > 0$
(40)	$\int_0^{\infty} \frac{x U_n [a(\alpha^2 + x^2)^{-1/2}]}{(\alpha^2 + x^2)^{n/2+1} (e^{2\pi x} - 1)} dx = \frac{1}{2} \zeta(n+1, \alpha) - \frac{\alpha^{-n-1}}{4} - \frac{\alpha^{-n}}{2n},$	$\text{Re } \alpha > 0$

16.2. Многочлены Лежандра

См. также многочлены Гегенбауэра, функции Лежандра, гипергеометрические ряды.

В этом пункте m и n — неотрицательные целые числа.

(1)	$\int_0^1 x^\lambda P_{2m}(x) dx = \frac{(-1)^m (-\lambda/2)_m}{2^{(1/2 + \lambda/2)_{m+1}}},$	$\text{Re } \lambda > -1$
(2)	$\int_0^1 x^\lambda P_{2m+1}(x) dx = \frac{(-1)^m (1/2 - \lambda/2)_m}{2^{(1 + \lambda/2)_{m+1}}},$	$\text{Re } \lambda > -2$
(3)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} P_n(x) dx = \frac{2^{n/2}}{2n+1}$	

(4)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} P_{2m}(x) dx = \pi \left[\frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} \right]^2$	
(5)	$\int_{-1}^1 x (1-x^2)^{-1/2} P_{2m+1}(x) dx = \pi \frac{(\frac{1}{2})_m (\frac{1}{2})_{m+1}}{m! (m+1)!}$	
(6)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta-1} P_n(x) dx =$ $= \frac{2^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} {}_3F_2(-n, 1+n, \alpha; 1, \alpha+\beta; 1),$ $\text{Re } \alpha > 0, \text{ Re } \beta > 0$	
(7)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} P_n(x) dx = 2 Q_n(z),$	z в разрезанной плоскости
(8)	$\int_{-1}^1 x (z-x)^{-1} P_0(x) dx = 2 Q_1(z),$	z в разрезанной плоскости
(9)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} x^{n+1} P_n(x) dx = 2z^{n+1} Q_n(z) - \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!},$	z в разрезанной плоскости
(10)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} x^m P_n(x) dx = 2z^m Q_n(z),$	$m \leq n, z$ в разрезанной плоскости
(11)	$\int_{-1}^1 (a^2 + b^2 - 2abx)^{-1/2} \sin [\lambda (a^2 + b^2 - 2abx)^{1/2}] P_n(x) dx =$ $= \pi (ab)^{-1/2} J_{n+1/2}(a\lambda) J_{n+1/2}(b\lambda), \quad a, b > 0$	
(12)	$\int_{-1}^1 (a^2 + b^2 - 2abx)^{-1/2} \cos [\lambda (a^2 + b^2 - 2abx)^{1/2}] P_n(x) dx =$ $= \pi (ab)^{-1/2} J_{n+1/2}(a\lambda) Y_{n+1/2}(b\lambda), \quad 0 \leq a \leq b$	

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси.

(13)	$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = (n + 1/2)^{-1}$	
(14)	$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0,$	$m \neq n$
(15)	$\int_{-1}^1 (1+x)^{m+n} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2^{m+n+1} [(m+n)!]^4}{(m!n!)^2 (2m+2n+1)!}$	
(16)	$\int_{-1}^1 (1+x)^{m-n-1} P_m(x) P_n(x) dx = 0,$	$m > n$
(17)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha-1} P_m(x) P_n(x) dx =$ $= \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(n+\alpha+1)} {}_4F_3(-m, m+1, \alpha, \alpha; 1, \alpha+n+1, \alpha-n; 1),$	$\text{Re } \alpha > 0$
(18)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} P_m(x) P_n(x) dx = 2 P_m(z) Q_n(z),$	$m \leq n, z$ в разрезанной плоскости
(19)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} P_n(x) P_{n+1}(x) dx = 2 P_{n+1}(z) Q_n(z) - 2(n+1)^{-1},$	z в разрезанной плоскости
(20)	$\int_{-1}^1 x (z-x)^{-1} [P_n(x)]^2 dx = 2z P_n(z) Q_n(z) - 2(2n+1)^{-1},$	z в разрезанной плоскости
(21)	$\int_{-1}^1 x (z-x)^{-1} P_m(x) P_n(x) dx = 2z P_m(z) Q_n(z),$	$m < n, z$ в разрезанной плоскости

Относительно других подобных интегралов см. MacRobert T. M., 1948: Proc. Glasgow Math. Assoc., 1, 10-12.

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной осью.

(22)	$\int_0^1 x^{2\mu-1} P_n(1-2x^2) dx = \frac{(-1)^n [\Gamma(\mu)]^2}{2 \Gamma(\mu+n) \Gamma(\mu-n)},$	$\operatorname{Re} \mu > 0$
(23)	$\int_0^1 x (\alpha^2 + x^2)^{-1/2} P_n(1-2x^2) dx = \frac{[\alpha + (\alpha^2 + 1)^{1/2}]^{-2n-1}}{2n+1},$	$\operatorname{Re} \alpha > 0$
(24)	$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^m(x) dx.$	См. Shabde N. G., 1940: Bull. Calcutta Math. Soc., 32, 121–128.
(25)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} (1-x^2)^{m/2} P_n^m(x) dx = 2^m (z^2-1)^{m/2} Q_n^m(z),$	$m \leq n$, z в разрезанной плоскости
(26)	$\int_{-1}^1 x^k (z-x)^{-1} (1-x^2)^{m/2} P_n^m(x) dx = 2^m z^k (z^2-1)^{m/2} Q_n^m(z),$	$m \leq n$, $k = 0, 1, \dots, n-m$, z в разрезанной плоскости
(27)	$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$	$m \leq n$
(28)	$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0,$	$k \neq n$
(29)	$\int_{-1}^1 P_n^m(x) Q_k^m(x) dx = (-1)^m \frac{1-(-1)^{k+n}}{(n-k)(n+k+1)} \frac{(k+m)!}{(k-m)!}$	
(30)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1} P_n^m(x) P_n^k(x) dx = 0,$	$k \neq m$
(31)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}$	

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси.

$$(32) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{m/2} P_k^m(x) P_l^m(x) P_n^m(x) dx =$$

$$= (-1)^m \pi^{-3/2} \frac{(k+m)! (l+m)! (n+m)! (s-m)!}{(k-m)! (l-m)! (n-m)! (s-k)!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(m+1/2) \Gamma(t-k+1/2) \Gamma(t-l+1/2) \Gamma(t-n+1/2)}{(s-l)! (s-n)! \Gamma(s+3/2)},$$

$$2s = k+l+n+m, \quad 2t = k+l+n-m \text{ четно}$$

$$l \geq m, \quad m \leq k-l-m \leq n \leq k+l+m$$

$$(33) \int_{-1}^1 P_l^p(x) P_m^q(x) P_n^r(x) dx.$$

См. Gaunt J. A., 1929: Philos. Trans. Royal Soc., A 228, 151—196.

16.3. Многочлены Гегенбауэра (ультрасферические многочлены)

См. также многочлены Якоби, функции Лежандра, гипергеометрические ряды.

В этом пункте m и n — натуральные числа.

$$(1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} C_n^\nu(x) dx = 0, \quad n > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(2) \int_0^1 x^{n+2\rho} (1-x^2)^{\nu-1/2} C_n^\nu(x) dx = \frac{(2\nu)_n (2\rho+1)_n \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\rho+1/2)}{2^{n+1} n! \Gamma(n+\nu+\rho+1)},$$

$$\operatorname{Re} \rho > -1/2$$

$$(3) \int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-1/2} (1+x)^\beta C_n^\nu(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\beta+\nu+1/2} \Gamma(\beta+1) \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(2\nu+n) \Gamma(\beta-\nu+3/2)}{n! \Gamma(2\nu) \Gamma(\beta-\nu-n+3/2) \Gamma(\beta+\nu+n+3/2)},$$

$$\operatorname{Re} \beta > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(4) \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta C_n^\nu(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \Gamma(n+2\nu)}{n! \Gamma(2\nu) \Gamma(\alpha+\beta+2)} \times$$

$$\times {}_3F_2(-n, n+2\nu, \alpha+1; \nu+1/2, \alpha+\beta+2; 1),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} \beta > -1$$

(5)	$\int_{-1}^1 x^m (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\nu-1/2} C_n^\nu(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} 2^{3/2-\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-(\nu-1/2)\pi i} z^m (z^2-1)^{\nu/2-1/4} Q_{n+\nu-1/2}^{\nu-1/2}(z),$ $m \leq n, \operatorname{Re} \nu > -1/2, z \text{ в разрезанной плоскости}$
(6)	$\int_{-1}^1 x^{n+1} (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\nu-1/2} C_n^\nu(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} 2^{3/2-\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-(\nu-1/2)\pi i} z^{n+1} (z^2-1)^{\nu/2-1/4} Q_{n+\nu-1/2}^{\nu-1/2}(z) - \frac{\pi 2^{1-2\nu-n} n!}{\Gamma(\nu) \Gamma(\nu+n+1)},$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2, z \text{ в разрезанной плоскости}$
(7)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} e^{i\alpha x} C_n^\nu(x) dx = \frac{\pi 2^{1-\nu} \Gamma(2\nu+n)}{n! \Gamma(\nu)} \alpha^{-\nu} J_{\nu+n}(\alpha),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$
(8)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} [C_n^\nu(x)]^2 dx = \frac{\pi 2^{1-2\nu} \Gamma(2\nu+n)}{n! (n+\nu) [\Gamma(\nu)]^2},$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$
(9)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-3/2} (1+x)^{\nu-1/2} [C_n^\nu(x)]^2 dx = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\nu-1/2) \Gamma(2\nu+n)}{n! \Gamma(\nu) \Gamma(2\nu)},$ $\operatorname{Re} \nu > 1/2$
(10)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-1/2} (1+x)^{2\nu-1} [C_n^\nu(x)]^2 dx = \frac{2^{3\nu-1/2} [\Gamma(2\nu+n)]^2 \Gamma(2n+\nu+1/2)}{(n!)^2 \Gamma(2\nu) \Gamma(3\nu+2n+1/2)},$ $\operatorname{Re} \nu > 0$
(11)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{3\nu+2n-3/2} (1+x)^{\nu-1/2} [C_n^\nu(x)]^2 dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} [\Gamma(\nu+1/2)]^2 \Gamma(\nu+2n+1/2) \Gamma(2\nu+2n) \Gamma(3\nu+2n-1/2)}{2^{2\nu+2n} n! \Gamma(\nu+n+1/2) \Gamma(2\nu)^2 \Gamma(2\nu+2n+1/2)},$ $\operatorname{Re} \nu > 1/6$
(12)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) dx = 0,$ $m \neq n, \operatorname{Re} \nu > -1/2$

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси.

(13)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-1/2} (1+x)^{\nu+m-n-3/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) dx =$ $= (-1)^m \frac{2^{2-2\nu-m+n} \pi^{3/2} \Gamma(2\nu+n) \Gamma(\nu-1/2+m-n) \Gamma(1/2-\nu+m-n)}{m! (n-m)! [\Gamma(\nu)]^2 \Gamma(1/2+\nu+m) \Gamma(1/2-\nu-n) \Gamma(1/2+m-n)}, \operatorname{Re} \nu > 1/2$
(14)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{2\nu-1} (1+x)^{\nu-1/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) dx =$ $= \frac{2^{3\nu-1/2} \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(2\nu+m) \Gamma(2\nu+n) \Gamma(\nu+1/2+m+n) \Gamma(1/2-\nu+n-m)}{m! n! \Gamma(2\nu) \Gamma(1/2-\nu) \Gamma(\nu+1/2+n-m) \Gamma(3\nu+1/2+m+n)},$ <p style="text-align: right;">$\operatorname{Re} \nu > 1/2$</p>
(15)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-1/2} (1+x)^{3\nu+m+n-3/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) dx =$ $= \frac{2^{4\nu+m+n-1} [\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(2\nu+m+n)]^2 \Gamma(\nu+m+n+1/2) \Gamma(3\nu+m+n-1/2)}{\Gamma(\nu+m+1/2) \Gamma(\nu+n+1/2) \Gamma(2\nu+m) \Gamma(2\nu+n) \Gamma(4\nu+2m+2n)},$ <p style="text-align: right;">$\operatorname{Re} \nu > 1/6$</p>
(16)	$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^{\nu-1/2} C_m^\mu(x) C_n^\nu(x) dx =$ $= \frac{2^{\alpha+\nu+1/2} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\nu-\alpha+n-1/2) \Gamma(2\mu+m) \Gamma(2\nu+n)}{m! n! \Gamma(\nu-\alpha-1/2) \Gamma(\nu-\alpha+n+3/2) \Gamma(2\mu) \Gamma(2\nu)} \times$ $\times {}_4F_3(-m, m+2\mu, \alpha+1, \alpha-\nu+3/2; \mu+1/2, \nu+\alpha+n+3/2, \alpha-\nu-n+3/2; 1),$ <p style="text-align: right;">$\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \nu > -1/2$</p>
(17)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\nu-1/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} 2^{1/2-\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-(\nu-1/2)\pi i} (z^2-1)^{\nu/2-1/4} C_m^\nu(z) Q_{n+\nu-1/2}^{\nu-1/2}(z),$ <p style="text-align: center;">$m \leq n, \operatorname{Re} \nu > -1/2, z$ в разрезанной плоскости</p>
(18)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x) C_k^\nu(x) dx.$ <p style="text-align: center;">См. Hsü Hsien-Yü, 1938: Duke Math. J. 4, 374-383.</p>
(19)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu/2-1} C_{2n}^\nu(\alpha x) dx = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+1/2)} C_n^{\nu/2}(2\alpha^2-1), \operatorname{Re} \nu > 0$

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной осн.

(20)	$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1} C_n^\nu (\cos \alpha \cos \beta + x \sin \alpha \sin \beta) dx =$ $= \frac{2^{2\nu-1} n! \Gamma(\nu)^2}{\Gamma(2\nu+n)} C_n^\nu (\cos \alpha) C_n^\nu (\cos \beta), \quad \operatorname{Re} \nu > 0$
(21)	$\int_0^1 x^{2\nu} (1-x^2)^{\sigma-1} C_n^\nu (1-x^2y) dx = \frac{(2\nu)_n \Gamma(\nu + 1/2) \Gamma(\sigma)}{2\Gamma(n+\nu+\sigma+1/2)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-y),$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2, \quad \operatorname{Re} \sigma > 0, \quad \alpha = \nu + \sigma - 1/2, \quad \beta = \nu - \sigma - 1/2$

16.4. Многочлены Якоби

См. также гипергеометрические ряды.

В этом пункте m и n — неотрицательные целые числа.

(1)	$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{2^{\alpha+\sigma+1} \Gamma(\sigma+1) \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\sigma-\beta+1)}{n! \Gamma(\sigma-\beta-n+1) \Gamma(\alpha+\sigma+n+2)},$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} \sigma > -1$
(2)	$\int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{2^{\beta+\rho+1} \Gamma(\rho+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\alpha-\rho+n)}{n! \Gamma(\alpha-\rho) \Gamma(\beta+\rho+n+2)},$ $\operatorname{Re} \rho > -1, \quad \operatorname{Re} \beta > -1$
(3)	$\int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(\rho+1) \Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\rho+\sigma+2)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} \times$ $\times {}_3F_2(-n, \alpha+\beta+n+1, \rho+1; \alpha+1, \rho+\sigma+2; 1),$ $\operatorname{Re} \rho > -1, \quad \operatorname{Re} \sigma > -1$
(4)	$\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx =$ $= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2) (z-1)^{n+1}} \times$ $\times {}_2F_1\left(n+1, \alpha+n+1; \alpha+\beta+2n+2; \frac{2}{1-z}\right),$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} \beta > -1, \quad z \text{ в разрезанной плоскости}$
(5)	$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} \beta > -1$

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной осн.

$$(6) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta} [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \alpha \Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > -1$

$$(7) \int_{-1}^1 (1-x)^{2\alpha} (1+x)^{\beta} [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx =$$

$$= \frac{2^{4\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1/2) [\Gamma(\alpha+n+1)]^2 \Gamma(\beta+2n+1)}{\pi^{1/2} (n!)^2 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(2\alpha+\beta+2n+2)}, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1/2, \operatorname{Re} \beta > -1$$

$$(8) \int_{-1}^1 (1-x)^{2\alpha+\beta+2n} (1+x)^{\beta} [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx =$$

$$= \frac{2^{2\alpha+2\beta+2n+1} \Gamma(\beta+2n+1) [\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)]^2 \Gamma(2\alpha+\beta+2n+1)}{[n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)]^2 \Gamma(2\alpha+2\beta+4n+2)},$$

$\operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re}(2\alpha+\beta) > -1$

$$(9) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0,$$

$m \neq n, \operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$

$$(10) \int_{-1}^1 (1-x)^{\rho} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\rho, \beta)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\rho+\beta+1} \Gamma(\rho+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n! \Gamma(\rho+\beta+2n+2) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

$\operatorname{Re} \rho > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$

$$(11) \int_{-1}^1 (1-x)^{\rho-1} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\rho, \beta)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\rho+\beta} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\rho)}{n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\rho+\beta+n+1)}, \quad \operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \rho > 0$$

$$(12) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \sigma)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\sigma+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+m+n+1) \Gamma(\sigma+m+1) \Gamma(\sigma-\beta+1)}{m! (n-m)! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\sigma+m+n+2) \Gamma(\sigma-\beta-n+1)},$$

$\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \sigma > -1$

$$(13) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta+\sigma} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \sigma)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+\sigma+1} \Gamma(\alpha+m+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\beta+\sigma+1) \Gamma(\sigma+m+1)}{m! n! \Gamma(\alpha+\beta+\sigma+m+n+2) \Gamma(\beta-m+n+1) \Gamma(\sigma+m-n+1)},$$

$$\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re}(\beta+\sigma) > -1$$

$$(14) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\alpha+\beta+\sigma+m+n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \sigma)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{2\alpha+\beta+\sigma+m+n+1} \Gamma(\alpha+\beta+\sigma+m+n+1) \Gamma(\alpha+\sigma+m+n+1)}{m! n! (\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\sigma+n+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha+m+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+m+n+1)}{\Gamma(2\alpha+\beta+\sigma+2m+2n+2)}, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re}(\alpha+\beta+\sigma) > -1$$

$$(15) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\sigma+m-n-1} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \sigma)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\sigma+m-n} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\sigma+m-n) \Gamma(\sigma-\beta+m-n)}{n! (n-m)! \Gamma(\alpha+\sigma+m+1) \Gamma(\beta-m+n+1) \Gamma(\sigma-\beta+2m-2n)},$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \sigma > n-m$$

$$(16) \int_{-1}^1 (1-x)^{\rho} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\rho, \beta)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\beta+\rho+1} \Gamma(\alpha+\beta+m+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\rho+m+1) \Gamma(\alpha-\rho-m+n)}{n! (n-m)! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\beta+\rho+m+n+2) \Gamma(\alpha-\rho)},$$

$$\operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \rho > -1$$

$$(17) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+\rho} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\rho, \beta)}(x) dx =$$

$$= \frac{(-1)^{m+n} 2^{\alpha+\beta+\rho+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\alpha+\rho+1) \Gamma(\beta+m+n+1) \Gamma(\rho+m+1)}{m! n! \Gamma(\alpha-m+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+\rho+m+n+2) \Gamma(\rho+m-n+1)},$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\rho) > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$$

$$(18) \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+\beta+\rho+m+n} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\rho, \beta)}(x) dx =$$

$$= \frac{(-1)^{m+n} 2^{\alpha+\beta+\rho+m+n+1} \Gamma(\alpha+\beta+m+n+1)}{m! n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\rho+m+n+1) \Gamma(\beta+m+n+1) \Gamma(\beta+\rho+m+n+1)}{\Gamma(\alpha+2\beta+\rho+2m+2n+2) \Gamma(\beta+\rho+m+1)},$$

$$\operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re}(\alpha+\beta+\rho) > -1$$

(19)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\rho+m-n-1} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\rho, \beta)}(x) dx =$ $= \frac{2^{\beta+\rho+m-n} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\rho+m-n) \Gamma(\alpha-\rho-2m+2n+1)}{n! (n-m)! \Gamma(\alpha-m+n+1) \Gamma(\alpha-\rho-m+n+1) \Gamma(\beta+\rho+m+1)},$ <p style="text-align: right;">$\operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \rho > n-m$</p>
(20)	$\int_{-1}^1 (1-x)^{\tau} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\rho, \sigma)}(x) dx =$ $= \frac{2^{\beta+\tau+1} \Gamma(\alpha-\tau+n) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\rho+m+1) \Gamma(\tau+1)}{m! n! \Gamma(\rho+1) \Gamma(\alpha-\tau) \Gamma(\beta+\tau+n+2)} \times$ $\times {}_4F_3(-m, \rho+\sigma+m+1, \tau+1, \tau-\alpha+1; \rho+1, \beta+\tau+n+2, \tau-\alpha-n+1; 1), \operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \tau > -1$

16.5. Многочлены Эрмита

См. также многочлены Лагерра, функции параболического цилиндра, вырожденные гипергеометрические функции.

В этом пункте m и n — неотрицательные целые числа.

(1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \operatorname{He}_{2n}(x) dx = (-1)^n \Gamma(n + 1/2)$
(2)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2^{-1}(x-y)^2] \operatorname{He}_n(x) dx = (2\pi)^{1/2} y^n$
(3)	$\int_{-\infty}^{\infty} (x \pm ic)^{\nu} \exp(-2^{-1}x^2) \operatorname{He}_n(x) dx =$ $= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} (2\pi)^{1/2} \exp[\pm 2^{-1}\pi(\nu-n)i + 2^{-2}c^{-2}] D_{\nu-n}(c)$
(4)	$\int_0^{\infty} x^{-1} (x^2 + \alpha^2)^{-1} \exp(-2^{-1}x^2) \operatorname{He}_{2n+1}(x) dx =$ $= (-1)^n (\pi/2)^{1/2} \alpha^{-2} [2^n n! - (2n+1)! \exp(2^{-2}\alpha^2) D_{-2n-2}(\alpha)]$
(5)	$\int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \sin(\beta x) \operatorname{He}_{2n+1}(x) dx = (-1)^n (\pi/2)^{1/2} \beta^{2n+1} \exp(-2^{-1}\beta^2)$
(6)	$\int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \cos(\beta x) \operatorname{He}_{2n}(x) dx = (-1)^n (\pi/2)^{1/2} \beta^{2n} \exp(-2^{-1}\beta^2)$

(7)	$\int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \operatorname{sh}(\beta x) \operatorname{He}_{2n+1}(x) dx = (\pi/2)^{1/2} \beta^{2n+1} \exp(2^{-1}\beta^2)$
(8)	$\int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \operatorname{ch}(\beta x) \operatorname{He}_{2n}(x) dx = (\pi/2)^{1/2} \beta^{2n} \exp(2^{-1}\beta^2)$
(9)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) [\operatorname{He}_n(x)]^2 dx = (2\pi)^{1/2} n!$
(10)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \operatorname{He}_m(x) \operatorname{He}_n(x) dx = (-1)^{m/2-n/2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right),$ $m+n \text{ четно}$
(11)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \operatorname{He}_m(x) \operatorname{He}_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$
(12)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) \operatorname{He}_m(x) \operatorname{He}_n(x) dx =$ $= \alpha^{-m-n-1} (1-2\alpha^2)^{m/2+n/2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \times$ $\times {}_2F_1\left(-m, -n; \frac{1-m-n}{2}; \frac{\alpha^2}{2\alpha^2-1}\right), \quad \operatorname{Re} \alpha^2 > 0,$ $m+n \text{ четно}$
(13)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2^{-1}(x-y)^2] \operatorname{He}_m(x) \operatorname{He}_n(x) dx =$ $= (2\pi)^{1/2} m! y^{n-m} L_n^{n-m}(-y^2), \quad m \leq n$
(14)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \operatorname{He}_k(x) \operatorname{He}_m(x) \operatorname{He}_n(x) dx =$ $= \pi^{-1} \Gamma(s-k) \Gamma(s-m) \Gamma(s-n), \quad k+m+n \text{ четно}, \quad 2s = k+m+n+1$
(15)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \operatorname{He}_k(x) \operatorname{He}_m(x) \operatorname{He}_n(x) dx = \frac{(2\pi)^{1/2} k! m! n!}{(s-k)! (s-m)! (s-n)!},$ $k+m+n = 2s \text{ четно}$

$$(16) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) \text{He}_m(x) \text{He}_n(x) \text{He}_k(x) \dots dx.$$

См. Busbridge I. W., 1948: J. London Math. Soc. 23, 135—141.

$$(17) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2^{-1}(x-y)^2] \text{He}_n(\alpha x) dx = (2\pi)^{1/2} (1-\alpha^2)^{n/2} \text{He}_n \left[\frac{\alpha y}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right]$$

$$(18) \int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \sin(\beta x) \text{He}_{2n+1}(\alpha x) dx = \\ = (-1)^n (\pi/2)^{1/2} (\alpha^2 - 1)^{n+1/2} \exp(-2^{-1}\beta^2) \text{He}_{2n+1} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} \right]$$

$$(19) \int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \cos(\beta x) \text{He}_{2n}(\alpha x) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} (1-\alpha^2)^n \exp(-2^{-1}\beta^2) \text{He}_{2n} \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} \right]$$

$$(20) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) H_m(\alpha x) H_n(x) dx = 0, \quad m < n$$

$$(21) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) H_{2m+n}(\alpha x) H_n(x) dx = \pi^{1/2} \frac{(2m+n)!}{m! 2^{m-1/2}} (\alpha^2 - 1)^m \alpha^n$$

$$(22) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2^{-1}(\alpha^2 + \beta^2)x^2] \text{He}_m(\alpha x) \text{He}_n(\beta x) dx = \\ = (-1)^{m/2-n/2} 2^{m/2+n/2+1/2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \alpha^n \beta^m (\alpha^2 + \beta^2)^{-m-n-1/2}, \\ \text{Re}(\alpha^2 + \beta^2) > 0, \quad m+n \text{ четно}$$

$$(23) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \text{He}_m(\alpha x) \text{He}_n(\beta x) dx = \\ = 2^{1/2-m/2-n/2} \pi^{1/2} n! (\alpha^2 - 1)^{-m/2} (\beta^2 - 1)^{-n/2} (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^{m/2+n/2} P_{m+n}^n(z), \\ \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$$

$$(24) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda^2 x^2) \text{He}_m(\alpha x) \text{He}_n(\beta x) dx = 0, \quad m+n \text{ нечетно}$$

(25)	$\int_{-\infty}^{\infty} x^{\rho} \exp(-x^2) \text{He}_{2n}(\alpha x) \text{He}_{2n}(\beta x) dx.$ <p>См. Buchholz Herbert, 1953: Die konfluente hypergeometrische Funktion. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Sec. 13.</p>
(26)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2^{-1}(x-y)^2] \text{He}_m(\alpha x) \text{He}_n(\alpha x) dx =$ $= (2\pi)^{1/2} \sum_{k=0}^{\min(m, n)} k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} (1-\alpha^2)^{m/2+n/2-k} \text{He}_{m+n-2k} \left[\frac{\alpha y}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right]$
(27)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda^2 x^2) \text{He}_m(\alpha x) \text{He}_n(\beta x) \text{He}_k(\gamma x) dx = 0, \quad m+n+k \text{ нечетно}$
(28)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda^2 x^2) \text{He}_k(\alpha x) \text{He}_m(\beta x) \text{He}_n(\gamma x) \dots dx.$ <p>См. Bailey W. N., 1948: J. London Math. Soc. 23, 291-297; Lord R. D., 1949: J. London Math. Soc. 24, 101-112.</p>
(29)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp(-\lambda^2 x^2) \text{He}_k(\alpha x) \text{He}_m(\beta x) \text{He}_n(\gamma x) \dots dx.$ <p>См. Appell Paul and M. J. Kampé de Fériet, 1926: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite, Gauthier-Villars, стр. 343; Erdélyi Arthur, 1936: Math. Z. 40, 693-702.</p>
(30)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) \text{He}_m(x+y) \text{He}_n(x+z) dx =$ $= (2\pi)^{1/2} m! z^{n-m} L_m^{n-m}(-yz), \quad m \leq n$
(31)	$\int_0^{\pi} (\cos x)^n \text{He}_{2n} \left[\alpha \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x} \right)^{1/2} \right] dx = \frac{(-1)^n \pi (2n)!}{2^n (n!)^2} [\text{He}_n(\alpha)]^2$

16.6. Многочлены Лагерра

См. также вырожденные гипергеометрические функции.
В этом пункте m и n — неотрицательные целые числа.

(1)	$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+n+1) \Gamma(\beta)}{n! \Gamma(\alpha-\beta+1)}, \quad \text{Re } \beta > 0$
-----	--

(2)	$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_n^{\alpha}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!},$	$\operatorname{Re} \alpha > 0$
(3)	$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_m^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(x) dx = 0,$	$m \neq n, \operatorname{Re} \alpha > -1$
(4)	$\int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta} e^{-x} L_m^{\alpha}(x) L_n^{\beta}(x) dx = (-1)^{m+n} \binom{\alpha+m}{n} \binom{\beta+n}{m},$	$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > -1$
(5)	$\int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-\alpha-1} L_n^{\alpha}(xy) dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+n+1)} L_n^{\beta}(y),$	$\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha > -1$
(6)	$\int_0^{\infty} x^{\nu} e^{-x} L_n^{\alpha}(\lambda x) L_n^{\alpha}(\mu x) dx.$	См. Buchholz Herbert, 1953: Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Sec. 12.
(7)	$\int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} L_m^{\alpha}(xy) L_n^{\beta}[(1-x)y] dx =$ $= \frac{(m+n)! \Gamma(\alpha+m+1) \Gamma(\beta+n+1)}{m! n! \Gamma(\alpha+\beta+m+n+2)} L_{m+n}^{\alpha+\beta+1}(y),$	$\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1$
(8)	$\int_{-\infty}^{\infty} x^{m-n} \exp[-2^{-1}(x-y)^2] L_n^{m-n}(x^2) dx =$ $= \frac{(2\pi)^{1/2}}{n!} i^{n-m} \operatorname{He}_n(iy) \operatorname{He}_m(iy)$	
(9)	$\int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) [L_n^{-1/4}(2^{-1}x^2)]^2 \cos(xy) dx =$ $= (\pi/2)^{1/2} \exp(-2^{-1}y^2) [L_n^{-1/4}(2^{-1}y^2)]^2$	
(10)	$\int_0^{\infty} x \exp(-2^{-1}x^2) [L_n^{1/4}(2^{-1}x^2)]^2 \sin(xy) dx =$ $= (\pi/2)^{1/2} y \exp(-2^{-1}y^2) [L_n^{1/4}(2^{-1}y^2)]^2$	

$$(11) \int_0^{\infty} x \exp(-2^{-1}x^2) L_n^{\alpha}(2^{-1}x^2) L_n^{1/2-\alpha}(2^{-1}x^2) \sin(xy) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} y \exp(-2^{-1}y^2) L_n^{\alpha}(2^{-1}y^2) L_n^{1/2-\alpha}(2^{-1}y^2)$$

$$(12) \int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) L_n^{\alpha}(2^{-1}x^2) L_n^{-1/2-\alpha}(2^{-1}x^2) \cos(xy) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} \exp(-2^{-1}y^2) L_n^{\alpha}(2^{-1}y^2) L_n^{-\alpha-1/2}(2^{-1}y^2)$$

$$(13) \int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) L_n(2^{-1}x^2) \text{He}_{2n+1}(x/2) \sin(xy) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} \exp(-2^{-1}y^2) L_n(2^{-1}y^2) \text{He}_{2n+1}(y/2)$$

$$(14) \int_0^{\infty} \exp(-2^{-1}x^2) L_n(2^{-1}x^2) \text{He}_{2n}(x/2) \cos(xy) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} \exp(-2^{-1}y^2) L_n(2^{-1}y^2) \text{He}_{2n}(y/2)$$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x} L_{m_1}^{\alpha_1}(\lambda_1 x) \dots L_{m_n}^{\alpha_n}(\lambda_n x) dx.$$

См. Erdélyi Arthur, 1936: Math. Z. 40, 693—702.

Г Л А В А XVII

ГАММА-ФУНКЦИЯ, НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ И РОДСТВЕННЫЕ ИМ ФУНКЦИИ

Относительно этих функций см. ВТФ, т. I, главу I и т. II, главу IX. Данные ниже выражения для неполных гамма-функций и родственных функций через вырожденные гипергеометрические функции служат для вычисления интегралов, содержащих эти функции. Поэтому здесь мы дадим лишь небольшую выборку из интегралов, содержащих неполные гамма-функции и их частные случаи.

Функции ошибок и интегралы Френеля.

$$\begin{aligned} \operatorname{Erf}(x) &= \pi^{-1/2} \gamma(1/2, x^2), \\ &= 2\pi^{-1/2} x {}_1F_1(1/2; 3/2; -x^2), \\ &= 2\pi^{-1/2} x \exp(-x^2) {}_1F_1(1; 3/2; x^2), \\ &= 2\pi^{-1/2} x^{-1/2} \exp(-2^{-1}x^2) M_{-1/4, 1/4}(x^2), \\ &= 1 - \operatorname{Erfc}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Erfc}(x) &= \pi^{-1/2} \Gamma(1/2, x^2), \\ &= 2^{1/2} \pi^{-1/2} \exp(-2^{-1}x^2) D_{-1}(2^{1/2}x), \\ &= \pi^{-1/2} x^{-1} \exp(-x^2) {}_2F_0(1, 1/2; -x^{-2}), \\ &= \pi^{-1/2} x^{-1/2} \exp(-2^{-1}x^2) W_{-1/4, 1/4}(x^2), \\ &= 1 - \operatorname{Erf}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) \pm i S(x) &= 2^{-1/2} e^{\pm \pi i/4} \operatorname{Erf}(e^{\mp \pi i/4} x^{1/2}), \\ &= 2^{1/2} \pi^{-1/2} x^{1/2} {}_1F_1(1/2; 3/2; \pm ix). \end{aligned}$$

Интегральная экспонента и родственные функции.

$$\begin{aligned} -\operatorname{Ei}(-x) &= E_1(x) = \Gamma(0, x), \\ &= x^{-1} e^{-x} {}_2F_0(1, 1; -x^{-1}), \\ &= x^{-1/2} e^{-x/2} W_{-1/2, 0}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Ei}}(x) &= 2^{-1} [\operatorname{Ei}(x + i0) + \operatorname{Ei}(x - i0)], \\ &= x^{-1} e^x {}_2F_0(1, 1; x^{-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ci}(x) \pm i \text{si}(x) &= -\text{ci}(x) \pm i \text{si}(x), \\
 &= \text{Ei}(\pm ix) = -\Gamma(0, \mp ix), \\
 &= \mp ix^{-1} e^{\pm ix} {}_2F_0(1, 1; \mp ix^{-1}), \\
 &= -x^{-1/2} e^{\pm \pi i/4 \pm xi/2} W_{-1/2, 0}(\mp ix).
 \end{aligned}$$

Неполные гамма-функции.

$$\begin{aligned}
 \gamma(\alpha, x) &= \alpha^{-1} x^\alpha {}_1F_1(\alpha; \alpha + 1; -x), \\
 &= \alpha^{-1} x^{\alpha/2-1/2} e^{-x/2} M_{\alpha/2-1/2, \alpha/2}(x), \\
 &= \Gamma(\alpha) - \Gamma(\alpha, x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha, x) &= x^{\alpha-1} e^{-x} {}_2F_0(1, 1-\alpha; -x^{-1}), \\
 &= x^{\alpha/2-1/2} e^{-x/2} W_{\alpha/2-1/2, \alpha/2}(x), \\
 &= \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x).
 \end{aligned}$$

17.1. Гамма-функция

(1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) dx = 0,$	$\text{Re}(\alpha+\beta) < 1 \text{ и либо } \text{Im} \alpha < 0 < \text{Im} \beta, \text{ либо } \text{Im} \beta < 0 < \text{Im} \alpha$
(2)	$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) dx = i\pi 2^{1-\alpha-\beta} \Gamma(\alpha+\beta),$	$\text{Re}(\alpha+\beta) < 1, \quad \text{Im} \alpha, \text{Im} \beta < 0$
(3)	$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) dx = -i\pi 2^{1-\alpha-\beta} \Gamma(\alpha+\beta),$	$\text{Re}(\alpha+\beta) < 1, \quad \text{Im} \alpha, \text{Im} \beta > 0$
(4)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} dx = 0,$	$\text{Im} \alpha \neq 0, \text{Re}(\alpha-\beta) < -1$
(5)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)},$	$\text{Re}(\alpha+\beta) > 1$
(6)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} \exp[(2\pi n + \pi - 2\theta)xi] dx = 0,$	$\text{Re}(\beta-\alpha) > 0$
	$-\pi/2 < 0 < \pi/2, \quad n - \text{целое}, \quad (n + 1/2) \text{Im} \alpha > 0$	

$$(7) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) \exp[2(\pi n + \theta)xi] dx =$$

$$= 2\pi i \Gamma(\alpha+\beta) (2 \cos \theta)^{-\alpha-\beta} \exp[(\beta-\alpha)\theta i] \times$$

$$\times [\eta_n(\beta) \exp(2n\pi\beta i) - \eta_n(-\alpha) \exp(-2n\pi\alpha i)],$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 1, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad n - \text{целое},$$

$$\eta_n(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } (1/2 - n) \operatorname{Im} \xi > 0 \\ \operatorname{sgn}(1/2 - n), & \text{если } (1/2 - n) \operatorname{Im} \xi < 0 \end{cases}$$

$$(8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} \exp[(2\pi n + \pi - 2\theta)xi] dx =$$

$$= 2\pi i \operatorname{sgn}(n + 1/2) \frac{(2 \cos \theta)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \exp[-(2\pi n + \pi - \theta)\alpha i + \theta(\beta-1)i],$$

$$\operatorname{Re}(\beta-\alpha) > 0, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad n - \text{целое}, \quad (n + 1/2) \operatorname{Im} \alpha < 0$$

$$(9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx) dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1, \quad c > \pi$$

$$(10) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx) dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = \frac{[2 \cos(c/2)]^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \sin[2^{-1}c(\beta-\alpha)],$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1, \quad 0 < c < \pi$$

$$(11) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{\sin(\pi x)} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = 0,$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1, \quad n - \text{целое}$$

$$(12) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi x]}{\sin(\pi x)} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)},$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1, \quad n - \text{целое}$$

$$(13) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx) dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1, \quad c > \pi$$

$$(14) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx) dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} = \frac{[2 \cos(c/2)]^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \cos[2^{-1}c(\beta-\alpha)],$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1, \quad 0 \leq c < \pi$$

(15)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x) e^{ixx} dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)}, \quad P(x) - \text{многочлен.}$ <p>См. Ramanujan Srinivasa, 1920: Quart. J. Math. 48, 294—310.</p>
(16)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x) \exp[(2\pi n + \theta)x] dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)} =$ $= \frac{[2 \cos(\theta/2)]^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \exp[2^{-1} \theta(\beta-\alpha)i] \int_0^1 \Phi(t) \exp(2\pi n t i) dt,$ <p>$\text{Re}(\alpha+\beta) > 1, -\pi < \theta < \pi, n - \text{целое}, \Phi(x+1) = \Phi(x)$</p>
(17)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x) e^{ixc} dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x)}, \quad \Phi(x) - \text{периодическая функция, имеющая}$ <p style="text-align: center;">вещественный период.</p> <p>См. Ramanujan Srinivasa, 1920: Quart. J. Math. 48, 294—310.</p>
(18)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+x) \Gamma(\delta+x)}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta+x)} dx = 0,$ <p style="text-align: right;">$\text{Re}(\alpha+\beta-\gamma-\delta) > 1, \text{Im} \gamma, \text{Im} \delta > 0$</p>
(19)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+x) \Gamma(\delta+x)}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta+x)} dx = \frac{\pm 2\pi^2 i \Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta-1)}{\sin[\pi(\gamma-\delta)] \Gamma(\alpha-\gamma) \Gamma(\alpha-\delta) \Gamma(\beta-\gamma) \Gamma(\beta-\delta)},$ <p style="text-align: right;">$\text{Re}(\alpha+\beta-\gamma-\delta) > 1, \text{Im} \gamma, \text{Im} \delta < 0$ \pm в соответствии с $\text{Im} \gamma \geq \text{Im} \delta$</p>
(20)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+x+1) dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) \Gamma(\gamma+x)} = \frac{\pi \exp[\pm 2^{-1} \pi(\delta-\gamma)i]}{\Gamma(\beta+\gamma-1) \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta+1}{2}\right)},$ <p style="text-align: right;">$\text{Re}(\beta+\gamma) > 1, \delta = \alpha - \beta - \gamma + 1, \text{Im} \delta \neq 0$ \pm в соответствии с $\text{Im} \delta \geq 0$</p>
(21)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) \Gamma(\gamma+x) \Gamma(\delta-x)} =$ $= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-3)}{\Gamma(\alpha+\beta-1) \Gamma(\beta+\gamma-1) \Gamma(\gamma+\delta-1) \Gamma(\delta+\alpha-1)},$ <p style="text-align: right;">$\text{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 3$</p>
(22)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x) dx}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) \Gamma(\gamma+x) \Gamma(\delta-x)} = \frac{\sin[2^{-1} \pi(\beta-\alpha)]}{2 \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right) \Gamma(\alpha+\delta-1)},$ <p style="text-align: right;">$\alpha+\delta = \beta+\gamma, \text{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2$</p>

(23)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x) dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta-x)} = \frac{\cos[2^{-1}\pi(\beta-\alpha)]}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma(\alpha+\delta-1)},$ $\alpha+\delta=\beta+\gamma, \operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2$
(24)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x) dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta-x)} =$ $= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-3)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\beta+\gamma-1)\Gamma(\gamma+\delta-1)\Gamma(\delta+\alpha-1)} \int_0^1 \Phi(t) dt,$ $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 3, \Phi(x+1) = \Phi(x)$
(25)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x) dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta-x)} = \int_0^1 \frac{\Phi(t) \cos[2^{-1}\pi(2t+\alpha-\beta)] dt}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma(\alpha+\delta-1)},$ $\alpha+\delta=\beta+\gamma, \operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2, \Phi(x+1) = -\Phi(x)$
(26)	$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+kx)\Gamma(\delta-kx)]^{-1} \exp(\pi cxi) dx = 0,$ $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2, c, k \text{ вещественны, } c > k + 1$
<p>Относительно других интегралов такого вида см. Ramanujan Srinivasa, 1920: Quart. J. Math. 48, 294-310.</p>	
(27)	$\int_0^{\infty} \Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix) ^2 dx = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(a)\Gamma(a+1/2)\Gamma(b)\Gamma(b+1/2)\Gamma(a+b)}{2\Gamma(a+b+1/2)},$ $a > 0, b > 0$
(28)	$\int_0^{\infty} \left \frac{\Gamma(a+ix)}{\Gamma(b+ix)} \right ^2 dx = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(a)\Gamma(a+1/2)\Gamma(b-a-1/2)}{2\Gamma(b)\Gamma(b-1/2)\Gamma(b-a)},$ $0 < a < b - 1/2$
(29)	$(2\pi i)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s-x-\lambda)\Gamma(\lambda+\mu-s+1/2)\Gamma(\lambda-\mu-s+1/2)z^s ds =$ $= \Gamma(1/2-x-\mu)\Gamma(1/2-x+\mu)z^\lambda e^{z/2} W_{x,\mu}(z),$ $\operatorname{Re}(x+\lambda) < 0, \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\mu - 1/2, \arg z < 3\pi/2$

(30)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \mu - s + 1/2) \Gamma(\lambda - \mu - s + 1/2)}{\Gamma(\lambda - \kappa - s + 1)} z^s ds = z^\lambda e^{-z/2} W_{\kappa, \mu}(z)$ $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \mu - 1/2, \arg z < \pi/2$
(31)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\kappa - \lambda + s) \Gamma(\lambda + \mu - s + 1/2)}{\Gamma(\mu - \lambda + s + 1/2)} z^s ds = \frac{\Gamma(\kappa + \mu + 1/2)}{\Gamma(2\mu + 1)} z^\lambda e^{-z/2} M_{\kappa, \mu}(z),$ $\operatorname{Re}(\kappa - \lambda) > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \mu) > -1/2, \arg z < \pi/2$
(32)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha + s) \Gamma(\beta + s) \Gamma(\gamma - s) \Gamma(\delta - s) ds =$ $= \frac{\Gamma(\alpha + \gamma) \Gamma(\alpha + \delta) \Gamma(\beta + \gamma) \Gamma(\beta + \delta)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta)},$ $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \delta > 0$
(33)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{\Gamma(1/2 - s)}{\Gamma(s)} \right]^2 z^s ds = z^{1/2} [2\pi^{-1} K_0(4z^{1/4}) - Y_0(4z^{1/4})],$ $z > 0$
(34)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds = G_{pq}^{mn} \left(z \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $p + q < 2(m + n), \arg z < (m + n - p/2 - q/2) \pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1, j = 1, \dots, n, \operatorname{Re} b_j > 0, j = 1, \dots, m$
(35)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds = G_{pq}^{mn} \left(z \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$ $p + q \leq 2(m + n), \arg z \leq (m + n - p/2 - q/2) \pi$ $\operatorname{Re} a_j < 1, j = 1, \dots, n, \operatorname{Re} b_j > 0, j = 1, \dots, m$ $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j \right) > p/2 - q/2 + 1$
<p>Относительно других интегралов этого типа см. п. 7.3.</p>	

Пустое произведение считается равным единице.

$$(36) \int_0^1 \sin(2\pi nx) \ln[\Gamma(a+x)] dx = \\ = - (2n\pi)^{-1} [\ln a + \cos(2n\pi a) \operatorname{ci}(2n\pi a) - \sin(2n\pi a) \operatorname{si}(2n\pi a)], \\ a > 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(37) \int_0^1 \cos(2\pi nx) \ln[\Gamma(a+x)] dx = \\ = - (2n\pi)^{-1} [\sin(2n\pi a) \operatorname{ci}(2n\pi a) + \cos(2n\pi a) \operatorname{si}(2n\pi a)], \\ a > 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(38) \int_0^1 \exp(2\pi nxi) \ln[\Gamma(a+x)] dx = \\ = (2n\pi i)^{-1} [\ln a - \exp(-2\pi nai) \operatorname{Ei}(2n\pi ia)], \quad a > 0, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(39) \int_0^1 \ln[\Gamma(x)] dx = 2^{-1} \ln(2\pi)$$

$$(40) \int_0^1 \ln[\Gamma(a+x)] dx = a \ln a - a + 2^{-1} \ln(2\pi), \quad a \geq 0$$

$$(41) \int_0^n \ln[\Gamma(a+x)] dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a+k) \ln(a+k) - na + \\ + 2^{-1} n \ln(2\pi) - 2^{-1} n(n-1), \quad a \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(42) \int_0^1 \sin(2\pi nx) \ln[\Gamma(x)] dx = (2\pi n)^{-1} \ln(2\pi \gamma n), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(43) \int_0^1 \sin[(2n+1)\pi x] \ln[\Gamma(x)] dx = \\ = -\frac{1}{(2n+1)\pi} \left[\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2n+1} \right], \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(44) \int_0^1 \cos(2\pi nx) \ln[\Gamma(x)] dx = \frac{1}{4n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

17.2. ψ -ФУНКЦИЯ

(1)	$\int_0^1 \psi(a+x) dx = \ln a,$	$a > 0$
(2)	$\int_0^1 e^{2n\pi xi} \psi(a+x) dx = e^{-2n\pi ai} \text{Ei}(2n\pi ai),$	$a > 0, n = \pm 1, \pm 2, \dots$
(3)	$\int_0^1 \sin(2n\pi x) \psi(x) dx = -\pi/2,$	$n = 1, 2, \dots$
(4)	$\int_0^1 \sin(2n\pi x) \psi(a+x) dx =$ $= \sin(2n\pi a) \text{ci}(2n\pi a) + \cos(2n\pi a) \text{si}(2n\pi a),$	$a \geq 0, n = 1, 2, \dots$
(5)	$\int_0^1 \cos(2n\pi x) \psi(a+x) dx =$ $= \sin(2n\pi a) \text{si}(2n\pi a) - \cos(2n\pi a) \text{ci}(2n\pi a),$	$a > 0, n = 1, 2, \dots$
(6)	$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} [C + \psi(1+x)] dx = -\frac{\pi \zeta(\alpha)}{\sin(\pi\alpha)},$	$1 < \text{Re } \alpha < 2$
(7)	$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} [\ln x - \psi(1+x)] dx = \frac{\pi \zeta(\alpha)}{\sin(\pi\alpha)},$	$0 < \text{Re } \alpha < 1$
(8)	$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} [\ln(1+x) - \psi(1+x)] dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left[\zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha-1} \right],$	$0 < \text{Re } \alpha < 1$
(9)	$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} [(1+x)^{-1} - \psi'(1+x)] dx = -\frac{\pi\alpha [\zeta(1+\alpha) - \alpha^{-1}]}{\sin(\pi\alpha)},$	$-1 < \text{Re } \alpha < 1$
(10)	$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} [x^{-1} - \psi'(1+x)] dx = -\frac{\pi\alpha \zeta(1+\alpha)}{\sin(\pi\alpha)},$	$-2 < \text{Re } \alpha < 0$

(11)	$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} \psi^{(n)}(1+x) dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) \sin \pi \alpha} \zeta(\alpha+n),$ $n = 1, 2, \dots, \quad \psi^{(n)}(z) = \frac{d^n \psi}{dz^n}, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$
(12)	$\int_0^{\infty} [\psi(x+1) - \ln x] \cos(2\pi xy) dx = 2^{-1} [\psi(y+1) - \ln y]$

17.3. Неполные гамма-функции и родственные функции

(1)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} \operatorname{Erfc}(\alpha x) dx = \frac{\Gamma(\rho/2 + 1/2)}{\pi^{1/2} \rho \alpha^{\rho}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \rho > 0$
(2)	$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp(\beta^2 x^2) \operatorname{Erfc}(\alpha x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\pi^{1/2} \nu \alpha^{\nu}} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{\nu}{2} + 1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right),$ $\operatorname{Re} \nu > 0, 0, \operatorname{Re} \beta^2 < \operatorname{Re} \alpha^2$
(3)	$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \sin(\beta x) \operatorname{Erfc}(\alpha x) dx =$ $= \frac{\Gamma(1 + \nu/2) \beta}{\pi^{1/2} (\nu+1) \alpha^{\nu+1}} {}_2F_2\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2} + 1; \frac{3}{2}, \frac{\nu+3}{2}; -\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$
(4)	$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \cos(\beta x) \operatorname{Erfc}(\alpha x) dx =$ $= \frac{\Gamma(1/2 + \nu/2)}{\pi^{1/2} \nu \alpha^{\nu}} {}_2F_2\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\nu}{2} + 1; -\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right), \operatorname{Re} \nu > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0$
(5)	$\int_0^{\infty} e^{\beta x} \operatorname{Erfc}(\alpha^{1/2} x^{1/2}) dx = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\alpha^{1/2}}{(\alpha - \beta)^{1/2}} - 1 \right], \quad 0, \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \alpha$
(6)	$\int_0^{\infty} \sin(\beta x) \operatorname{Erfc}(\alpha^{1/2} x^{1/2}) dx = \frac{1}{\beta} - \left(\frac{\alpha/2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^{1/2} [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - \alpha]^{-1/2},$ $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Im} \beta $

$$(7) \int_0^{\infty} \cos(\beta x) \operatorname{Erfc}(\alpha^{1/2} x^{1/2}) dx = \left(\frac{\alpha/2}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^{1/2} [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + \alpha]^{-1/2},$$

$\operatorname{Re} \alpha > |\operatorname{Im} \beta|$

$$(8) \int_0^{\infty} \sin(\beta x) \operatorname{Erf}(\alpha^{1/2} x^{-1/2}) dx = -b^{-1} \exp[-(2\alpha b)^{1/2}] \cos[(2\alpha b)^{1/2}] + b^{-1},$$

$\operatorname{Re} \alpha > 0, b > 0$

$$(9) \int_0^{\infty} \cos(\beta x) \operatorname{Erf}(\alpha^{1/2} x^{-1/2}) dx = b^{-1} \exp[-(2\alpha b)^{1/2}] \sin[(2\alpha b)^{1/2}],$$

$\operatorname{Re} \alpha > 0, b > 0$

$$(10) \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(2vt) \exp[(\alpha \operatorname{ch} t)^2] \operatorname{Erfc}(\alpha \operatorname{ch} t) dt = \frac{\exp(2^{-1}\alpha^2) K_\nu(\alpha^2)}{2 \cos(\nu\pi)},$$

$\operatorname{Re} \alpha > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$

Относительно интегралов, содержащих произведения функций ошибок и других вырожденных гипергеометрических функций, см. Вокс Philipp, 1939: *Compositio Math.* 7, 123–134. Отметим, что функция, которую Бок обозначает Erfc , в наших обозначениях равна $2^{-1}\pi^{1/2}\operatorname{Erfc}$.

$$(11) \int_0^a e^x \operatorname{Ei}(-x) dx = -\ln(\alpha\gamma) + e^a \operatorname{Ei}(-a)$$

$$(12) \int_0^c e^{-\beta x} \operatorname{Ei}(-\alpha x) dx =$$

$$= -\beta^{-1} \{ e^{-\beta c} \operatorname{Ei}(-\alpha c) + \ln(1 + \beta/\alpha) - \operatorname{Ei}[-(\alpha + \beta)c] \}$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^\nu e^x \operatorname{Ei}(-x) dx = \frac{\pi \Gamma(\nu + 1)}{\sin(\pi\nu)},$$

$-1 < \operatorname{Re} \nu < 0$

$$(14) \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x} \operatorname{Ei}(-\alpha x) dx = -\frac{\Gamma(\nu)}{\nu(\alpha + \beta)^\nu} {}_2F_1\left(1, \nu; \nu + 1; \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right),$$

$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$

Относительно других интегралов, содержащих $-\operatorname{Ei}(-x) = E_1(x)$, см. LeCaine J., 1948: National Research Council of Canada, Division of Atomic Energy, Document No. MT-131 (NRC 1553), стр. 45 и след. и Busbridge I. W., 1950: *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 1, 176–184.

$$(15) \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-\beta x} \gamma(v, \alpha x) dx = \frac{\alpha^v \Gamma(\mu+v)}{v(\alpha+\beta)^{\mu+v}} {}_2F_1\left(1, \mu+v; v+1; \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right),$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(\mu+v) > 0$$

$$(16) \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-\beta x} \Gamma(v, \alpha x) dx = \frac{\alpha^v \Gamma(\mu+v)}{\mu(\alpha+\beta)^{\mu+v}} {}_2F_1\left(1, \mu+v; \mu+1; \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right),$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0, \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\mu+v) > 0$$

$$(17) \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \gamma(v, \alpha x^2) dx = 2^{1-v} \beta^{-1} \Gamma(2v) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) D_{-2v}\left[\frac{\beta}{(2\alpha)^{1/2}}\right],$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, v \neq 0, \operatorname{Re} v > -1/2$$

$$(18) \int_0^{\infty} x^{1-2v} \exp(\alpha x^2) \sin(bx) \Gamma(v, \alpha x^2) dx =$$

$$= \pi^{1/2} 2^{-v} \alpha^{v-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}-v\right) \exp\left(\frac{b^2}{8\alpha}\right) D_{2v-2}\left[\frac{b}{(2\alpha)^{1/2}}\right],$$

$$|\arg \alpha| < 3\pi/2, 0 < \operatorname{Re} v < 1$$

Относительно других интегралов, содержащих

$$E_n(x) = x^{n-1} \Gamma(1-n, x),$$

см. LeCaine J., 1948: National Research Council of Canada, Division of Atomic Energy, Document No. MT-131 (NRC 1553), стр. 45 и след., а также Busbridge I. W., 1950: Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 1, 176-184.

$$(19) \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \gamma(v, \alpha x^{1/2}) dx = 2^{-v/2} \alpha^v \beta^{-v/2-1} \Gamma(v) \exp\left(\frac{\alpha^2}{8\beta}\right) D_{-v}\left[\frac{\alpha}{(2\beta)^{1/2}}\right],$$

$$\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} v > 0$$

Г Л А В А XVIII

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Относительно теории этих функций см. ВТФ, т. I, главу III и указанную там литературу, в особенности книги Гобсона, Уиттекера и Ватсона, Мак-Роберта (MacRobert). Многочисленные разложения функций Лежандра в гипергеометрические ряды перечислены в ВТФ, т. I, стр. 128—139. Эти разложения можно использовать для преобразования интегралов, содержащих функции Лежандра, в интегралы, содержащие гипергеометрические функции.

18.1. Функции Лежандра переменного $\alpha x + \beta$: конечные промежутки интегрирования

(1)	$\int_0^1 x^{\lambda-1} P_\nu(x) dx = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(1/2 + \lambda/2 - \nu/2) \Gamma(1 + \lambda/2 + \nu/2)}, \quad \text{Re } \lambda > 0$
(2)	$\int_0^1 x^{\lambda-1} P_\nu^m(x) dx = \frac{(-1)^m \pi^{1/2} \Gamma(\lambda/2) \Gamma(1+m+\nu)}{\Gamma(1/2+m/2) \Gamma(1+\lambda/2+m) \Gamma(1-m+\nu)} \times$ $\times {}_3F_2\left(\frac{m+\nu+1}{2}, \frac{m-\nu}{2}, \frac{m}{2}+1; m+1, \frac{\lambda+m}{2}+1; 1\right),$ <p style="text-align: right;">$\text{Re } \lambda > 0, m = 0, 1, 2, \dots$</p>
(3)	$\int_0^1 x^{\lambda-1} P_\nu^\mu(x) dx = \frac{\pi^{1/2} 2^{\mu-1} \Gamma(\lambda/2)}{\Gamma(1/2-\mu/2) \Gamma(1+\lambda/2-\mu/2)} \times$ $\times {}_3F_2\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, 1-\frac{\mu}{2}; 1-\mu, \frac{\lambda-\mu}{2}+1; 1\right),$ <p style="text-align: right;">$\text{Re } \lambda > 0, \text{Re } \mu < 2$</p>
(4)	$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x^2)^{m/2} P_\nu^m(x) dx =$ $= \frac{(-1)^m \pi^{1/2} \Gamma(\lambda) \Gamma(1+m+\nu)}{\Gamma(1/2 + \lambda/2 + m/2 - \nu/2) \Gamma(1 + \lambda/2 + m/2 + \nu/2) \Gamma(1-m+\nu)},$ <p style="text-align: right;">$\text{Re } \lambda > 0, m = 0, 1, 2, \dots$</p>

$$(5) \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x^2)^{-\mu/2} P_v^\mu(x) dx = \frac{\pi^{1/2} 2^{\mu-\lambda} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(1/2 + \lambda/2 - \mu/2 - \nu/2) \Gamma(1 + \lambda/2 - \mu/2 + \nu/2)},$$

$\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu < 1$

$$(6) \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x^2)^\kappa P_v^\mu(x) dx = \frac{2^{\mu-1} \Gamma(1+\kappa-\mu/2) \Gamma(\lambda/2)}{\Gamma(1-\mu) \Gamma(1+\kappa+\lambda/2-\mu/2)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, 1+\kappa-\frac{\mu}{2}; 1-\mu, 1+\frac{\lambda-\mu}{2}+\kappa; 1\right),$$

$\operatorname{Re}(\kappa-\mu/2) > -1, \operatorname{Re} \lambda > 0$

$$(7) \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x^2)^{-\mu/2} \sin(\alpha x) P_v^\mu(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} 2^{\mu-\lambda-1} \Gamma(\lambda+1) \alpha}{\Gamma[1+2^{-1}(\lambda-\mu-\nu)] \Gamma[2^{-1}(3+\lambda-\mu+\nu)]} \times$$

$$\times {}_2F_3\left(\frac{1+\lambda}{2}, 1+\frac{\lambda}{2}; \frac{3}{2}, 1+\frac{\lambda-\mu-\nu}{2}, \frac{3+\lambda-\mu+\nu}{2}; -\frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$\operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re} \mu < 1$

$$(8) \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x^2)^{-\mu/2} \cos(\alpha x) P_v^\mu(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} 2^{\mu-\lambda} \Gamma(\lambda)}{\Gamma[1+2^{-1}(\lambda-\mu+\nu)] \Gamma[2^{-1}(1+\lambda-\mu-\nu)]} \times$$

$$\times {}_2F_3\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}, 1+\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}; -\frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu < 1$

$$(9) \int_0^1 (1-x^2)^{-1} [P_v^{n-\nu}(x)]^2 dx = -\frac{n!}{2(n-\nu) \Gamma(1-n+2\nu)},$$

$n = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{Re} \nu > n$

$$(10) \int_0^1 P_\lambda(x) P_\nu(x) dx = 2 [\pi(\lambda-\nu)(\lambda+\nu+1)]^{-1} \times$$

$$\times [A \sin(2^{-1}\lambda\pi) \cos(2^{-1}\nu\pi) - A^{-1} \cos(2^{-1}\lambda\pi) \sin(2^{-1}\nu\pi)],$$

$$A = \frac{\Gamma(1/2+\nu/2) \Gamma(1+\lambda/2)}{\Gamma(1/2+\lambda/2) \Gamma(1+\nu/2)}$$

$$(11) \int_0^1 P_\nu(x) Q_\lambda(x) dx = [(\lambda-\nu)(\lambda+\nu+1)]^{-1} \{A^{-1} \cos[2^{-1}(\nu-\lambda)\pi] - 1\},$$

$$A = \frac{\Gamma(1+\lambda/2) \Gamma(1/2+\nu/2)}{\Gamma(1/2+\lambda/2) \Gamma(1+\nu/2)}$$

$$(12) \int_0^1 Q_\lambda(x) Q_\nu(x) dx = [(\lambda - \nu)(\lambda + \nu + 1)]^{-1} \{ \psi(\nu + 1) - \psi(\lambda + 1) - \\ - 2^{-1} \pi (A - A^{-1}) \sin [2^{-1}(\lambda + \nu) \pi] + 2^{-1} \pi (A + A^{-1}) \sin [2^{-1}(\lambda - \nu) \pi] \}, \\ A = \frac{\Gamma(1 + \lambda/2) \Gamma(1/2 + \nu/2)}{\Gamma(1/2 + \lambda/2) \Gamma(1 + \nu/2)}$$

$$(13) \int_0^1 [P_\nu^\mu(x)]^2 dx, \int_0^1 P_\nu^\mu(x) Q_\nu^\mu(x) dx.$$

См. Barnes E. W., 1908: Quart. J. Math. 39, 97–204. Отметим, что применяемое Бернсом определение функций Лежандра второго рода отличается от используемого в этой книге.

$$(14) \int_0^1 P_\nu^m(x) P_\lambda^m(x) dx.$$

См. Shabde N. G., 1937: Bull. Calcutta Math. Soc. 29, 33–40.

$$(15) \int_{-1}^1 (1+x)^{\lambda-1} P_\nu(x) dx = \frac{2^\lambda [\Gamma(\lambda)]^2}{\Gamma(\lambda + \nu + 1) \Gamma(\lambda - \nu)}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(16) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-1} P_\nu^\mu(x) dx = \\ = \frac{\pi 2^\mu \Gamma(\lambda + \mu/2) \Gamma(\lambda - \mu/2)}{\Gamma(\lambda + \nu/2 + 1/2) \Gamma(\lambda - \nu/2) \Gamma(-\mu/2 + \nu/2 + 1) \Gamma(-\mu/2 - \nu/2 + 1/2)}, \\ 2 \operatorname{Re} \lambda > |\operatorname{Re} \mu|$$

$$(17) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\mu/2} (z-x)^{-1} P_{\mu+n}^\mu(x) dx = 2 e^{-i\mu\pi} (z^2 - 1)^{-\mu/2} Q_{\mu+n}^\mu(z), \\ n = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{Re} \mu + n > -1, \\ z \text{ пробегает разрезанную комплексную плоскость}$$

$$(18) \int_{-1}^1 (1-x)^{-\mu/2} (1+x)^{\mu/2-1/2} (z+x)^{\mu-1/2} P_\nu^\mu(x) dx = \\ = \frac{2 e^{-2\mu\pi i} \Gamma(1/2 + \mu)}{\pi^{1/2} \Gamma(\mu - \nu) \Gamma(\mu + \nu + 1)} (z-1)^\mu Q_\nu^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] Q_{-\nu-1}^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right], \\ -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1, \\ z \text{ пробегает разрезанную комплексную плоскость}$$

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси.

$$(19) \int_{-1}^1 (1-x)^{-\mu/2-1} (1+x)^{\mu/2-1/2} (z+x)^{\mu-1/2} \times \\ \times \left[(v-\mu) P_v^\mu(x) - (v+\mu) P_{v-1}^\mu(x) \right] dx = \frac{e^{-2\mu\pi i} \Gamma(\mu+1/2) (z-1)^\mu}{(\pi/2)^{1/2} \Gamma(\mu+v) \Gamma(\mu-v) (z+1)^{1/2}} \times \\ \times \left\{ Q_v^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] Q_{-v}^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] + Q_{v-1}^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] Q_{-v-1}^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \\ -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 0, \\ z \text{ пробегает разрезанную комплексную плоскость}$$

$$(20) \int_{-1}^1 (1-x)^{-\mu/2} (1+x)^{\mu/2-1/2} (z+x)^{\mu-3/2} P_v^\mu(x) dx = \\ = - \frac{\Gamma(\mu-1/2) (z-1)^{\mu-1/2} (z+1)^{-1/2}}{\pi^{1/2} e^{2\mu\pi i} \Gamma(\mu+v) \Gamma(\mu-v-1)} \times \\ \times \left\{ Q_v^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] Q_{-v-1}^{\mu-1} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] + Q_v^{\mu-1} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] Q_{-v-1}^\mu \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \\ -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1, \\ z \text{ пробегает разрезанную комплексную плоскость}$$

$$(21) \int_{-1}^1 (1-x)^{-\mu/2} (1+x)^{\mu/2+v-1} \exp\left(-\frac{1-x}{1+x} y\right) P_v^\mu(x) dx = \\ = 2^v y^{\mu/2+v-1/2} e^{y/2} W_{\mu/2-v-1/2, \mu/2}(y), \quad \operatorname{Re} y > 0$$

$$(22) \int_{-1}^1 P_\nu(x) P_\lambda(x) dx = \frac{4 \sin(\nu\pi) \sin(\lambda\pi) [\Psi(\nu+1) - \Psi(\lambda+1)] + 2\pi \sin|(\lambda-\nu)\pi|}{\pi^2 (\lambda-\nu) (\lambda+\nu+1)}$$

$$(23) \int_{-1}^1 [P_\nu(x)]^2 dx = \frac{\pi^2 - 2 [\sin(\nu\pi)]^2 \Psi'(\nu+1)}{\pi^2 (\nu+1/2)}$$

$$(24) \int_{-1}^1 P_\nu(x) P_\lambda(x) (1+x)^{\lambda+\nu} dx = \frac{2^{\lambda+\nu+1} [\Gamma(\lambda+\nu+1)]^\mu}{[\Gamma(\lambda+1) \Gamma(\nu+1)]^2 \Gamma(2\lambda+2\nu+2)}, \\ \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1$$

$$(25) \int_{-1}^1 P_\nu(x) Q_\nu(x) dx = - \frac{\sin(2\nu\pi) \Psi'(\nu+1)}{\pi(2\nu+1)}$$

Комплексная z -плоскость разрезана вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси.

(26)	$\int_{-1}^1 P_\nu(x) Q_\lambda(x) dx = [(\nu - \lambda)(\nu + \lambda + 1)]^{-1} \{1 - \cos[(\lambda - \nu)\pi] - 2\pi^{-1} \sin(\nu\pi) \cos(\lambda\pi) [\psi(\nu + 1) - \psi(\lambda + 1)]\}$
(27)	$\int_{-1}^1 [Q_\nu(x)]^2 dx = \frac{2^{-1}\pi^2 - [1 + \{\cos(\nu\pi)\}^2] \psi'(\nu + 1)}{2\nu + 1}$
(28)	$\int_{-1}^1 Q_\nu(x) Q_\lambda(x) dx = [(\lambda - \nu)(\lambda + \nu + 1)]^{-1} \{2^{-1}\pi \sin[(\lambda - \nu)\pi] + [\psi(\nu + 1) - \psi(\lambda + 1)] [1 + \cos(\lambda\pi) \cos(\nu\pi)]\}$
(29)	$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{m/2 - M - 1/2} \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\nu/2} P_\mu^M(x) P_\lambda^M(x) dx.$ <p>См. Shabde N. G., 1940: Bull. Calcutta Math. Soc. 32, 121-128.</p>
(30)	$\int_{-1}^1 P_\lambda^\sigma(x) P_\mu^\sigma(x) P_\nu^\tau(x) dx.$ <p>См. Gaunt J. A., 1929: Philos. Trans. Royal Soc. 228, 151-196.</p>
(31)	$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda - 1} (1 - a^2 x^2)^{\mu/2} P_\nu(ax) dx =$ $= \frac{\pi 2^\mu \Gamma(\lambda)}{\Gamma(1/2 + \lambda) \Gamma(1/2 - \mu/2 - \nu/2) \Gamma(1 - \mu/2 + \nu/2)} \times$ $\times {}_2F_1\left(-\frac{\mu - 1}{2}, \frac{1 - \mu + \nu}{2}; \frac{1}{2} + \lambda; a^2\right),$ <p style="text-align: right;">Re $\lambda > 0$, $-1 < a < 1$</p>
(32)	$\int_0^1 x^{-\mu/2 - 1/2} (1 - x)^{-\mu - 1/2} (1 + \alpha x)^{\mu/2} P_\nu^\mu(1 + 2\alpha x) dx =$ $= \pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \mu) \alpha^{\mu/2} \{P_\nu^\mu[(1 + \alpha)^{1/2}]\}^2, \quad \text{Re } \mu < 1/2, \arg \alpha < \pi$
(33)	$\int_0^1 x^{-\mu/2 - 1/2} (1 - x)^{-\mu - 3/2} (1 + \alpha x)^{\mu/2} P_\nu^\mu(1 + 2\alpha x) dx =$ $= \pi^{1/2} \Gamma(-\mu - 1/2) (1 + \alpha)^{-1/2} \alpha^{\mu/2 + 1/2} P_\nu^{\mu+1}[(1 + \alpha)^{1/2}] P_\nu^\mu[(1 + \alpha)^{1/2}],$ <p style="text-align: right;">Re $\mu < -1/2$, $\arg \alpha < \pi$</p>

$$(34) \quad \int_0^1 x^{\mu/2-1/2} (1-x)^{\mu-1/2} (1+\alpha x)^{-\mu/2} P_v^\mu (1+2\alpha x) dx = \\ = \pi^{1/2} \Gamma(1/2 + \mu) \alpha^{-\mu/2} P_v^{-\mu} [(1+\alpha)^{1/2}] P_v^{-\mu} [(1+\alpha)^{1/2}], \\ \operatorname{Re} \mu > -1/2, \quad |\arg \alpha| < \pi$$

$$(35) \quad \int_0^1 x^{\mu/2-1/2} (1-x)^{\mu-3/2} (1+\alpha x)^{-\mu/2} P_v^\mu (1+2\alpha x) dx = \\ = 2^{-1} \pi^{1/2} \Gamma(\mu - 1/2) (1+\alpha)^{-1/2} \alpha^{1/2-\mu/2} \{ P_v^{1-\mu} [(1+\alpha)^{1/2}] P_v^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] + \\ + (\mu + \nu) (1 - \mu + \nu) P_v^{-\mu} [(1+\alpha)^{1/2}] P_v^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] \}, \\ \operatorname{Re} \mu > 1/2, \quad |\arg \alpha| < \pi$$

$$(36) \quad \int_0^1 x^{-\mu/2-1} (1-x)^{-\mu-1/2} (1+\alpha x)^{\mu/2-1/2} [(1-\nu-\mu) P_{\nu-1}^{\mu-1} (1+2\alpha x) + \\ + (1+\nu-\mu) P_\nu^{\mu-1} (1+2\alpha x)] dx = \\ = 2\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \mu) (1+\alpha)^{-1/2} \alpha^{\mu/2+1/2} P_\nu^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] P_{\nu-1}^\mu [(1+\alpha)^{1/2}], \\ \operatorname{Re} \mu < 1/2, \quad |\arg \alpha| < \pi$$

$$(37) \quad \int_0^1 x^{-\mu/2-1} (1-x)^{-\mu-1/2} (1+\alpha x)^{\mu/2-1/2} [P_{\nu-1}^{1-\mu} (1+2\alpha x) - \\ - P_\nu^{1-\mu} (1+2\alpha x)] dx = \pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \mu) (1+\alpha)^{-1/2} \alpha^{\mu/2+1/2} \times \\ \times \{ (\mu - \nu) P_\nu^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] P_{\nu-1}^{-\mu} [(1+\alpha)^{1/2}] - \\ - (\mu + \nu) P_{\nu-1}^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] P_\nu^{-\mu} [(1+\alpha)^{1/2}] \}, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2, \quad |\arg \alpha| < \pi$$

$$(38) \quad \int_0^1 x^{-\mu/2-1/2} (1-x)^{-\mu-1/2} (1+\alpha x)^{\mu/2} Q_\nu^\mu (1+2\alpha x) dx = \\ = \pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \mu) \alpha^{\mu/2} P_\nu^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] Q_\nu^\mu [(1+\alpha)^{1/2}], \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2, \quad |\arg \alpha| < \pi$$

$$(39) \quad \int_0^1 x^{-\mu/2-1/2} (1-x)^{-\mu-3/2} (1+\alpha x)^{\mu/2} Q_\nu^\mu (1+2\alpha x) dx = \\ = 2^{-1} \pi^{1/2} \Gamma(-\mu - 1/2) (1+\alpha)^{-1/2} \alpha^{\mu/2+1/2} \times \\ \times \{ P_\nu^{\mu+1} [(1+\alpha)^{1/2}] Q_\nu^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] + P_\nu^\mu [(1+\alpha)^{1/2}] Q_\nu^{\mu+1} [(1+\alpha)^{1/2}] \}, \\ \operatorname{Re} \mu < -1/2, \quad |\arg \alpha| < \pi$$

18.2. Функции Лежандра переменного $\alpha x + \beta$: бесконечные промежутки интегрирования

(1)	$\int_0^{\infty} (x^2 - 1)^{\mu/2} \sin(ax) P_{\nu}^{\mu}(x) dx =$ $= \frac{2^{\mu} \pi^{1/2} a^{-\mu-1/2}}{\Gamma(1/2 - \mu/2 - \nu/2) \Gamma(1 - \mu/2 + \nu/2)} S_{\mu+1/2, \nu+1/2}(a),$ $a > 0, \operatorname{Re} \mu < 3/2, \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1$
(2)	$\int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{\lambda-1} P_{\nu}^{\mu}(x) dx = \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\lambda - \mu/2) \Gamma(1 - \lambda + \nu/2) \Gamma(1/2 - \lambda - \nu/2)}{\Gamma(1 - \mu/2 + \nu/2) \Gamma(1/2 - \mu/2 - \nu/2) \Gamma(1 - \lambda - \mu/2)},$ $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \mu, \operatorname{Re}(1 - 2\lambda - \nu) > 0, \operatorname{Re}(2 - 2\lambda + \nu) > 0$
(3)	$\int_1^{\infty} x^{-\rho} (x^2 - 1)^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x) dx = \frac{2^{\rho+\mu-2} \Gamma\left(\frac{\rho+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho+\mu-\nu-1}{2}\right)}{\pi^{1/2} \Gamma(\rho)},$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re}(\rho + \mu + \nu) > 0, \operatorname{Re}(\rho + \mu - \nu) > 1$
(4)	$\int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x) dx = \frac{2^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \Gamma(-\lambda - \mu - \nu) \Gamma(1 - \lambda - \mu + \nu)}{\Gamma(1 - \mu + \nu) \Gamma(-\mu - \nu) \Gamma(1 - \lambda - \mu)},$ $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \mu + \nu) < 0, \operatorname{Re}(\lambda + \mu - \nu) < 1$
(5)	$\int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x) dx =$ $= - \frac{2^{\lambda-\mu} \sin(\nu\pi) \Gamma(\lambda - \mu) \Gamma(-\lambda + \mu - \nu) \Gamma(1 - \lambda + \mu + \nu)}{\pi \Gamma(1 - \lambda)},$ $\operatorname{Re}(\lambda - \mu) > 0, \operatorname{Re}(\mu - \lambda - \nu) > 0, \operatorname{Re}(\mu - \lambda + \nu) > -1$
(6)	$\int_1^{\infty} (x-1)^{-\mu/2} (x+1)^{\mu/2-1/2} (z+x)^{\mu-1/2} P_{\nu}^{\mu}(x) dx =$ $= \pi^{1/2} \frac{\Gamma(-\mu - \nu) \Gamma(1 - \mu + \nu)}{\Gamma(1/2 - \mu)} (z-1)^{\mu} \left\{ P_{\nu}^{\mu} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}^2,$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) < 0, \operatorname{Re}(\mu - \nu) < 1, \arg(z+1) < \pi$
(7)	$\int_1^{\infty} (x-1)^{-\mu/2} (x+1)^{\mu/2-1/2} (z+x)^{\mu-3/2} P_{\nu}^{\mu}(x) dx =$ $= \pi^{1/2} \frac{\Gamma(1 - \mu - \nu) \Gamma(2 - \mu + \nu)}{\Gamma(3/2 - \mu)} (z-1)^{\mu-1/2} (z+1)^{-1/2} \times$ $\times P_{\nu}^{\mu} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] P_{\nu}^{\mu-1} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1, \operatorname{Re}(\mu - \nu) < 2, \arg(1+z) < \pi$

$$(8) \int_1^{\infty} (x-1)^{-\mu/2-1} (x+1)^{\mu/2-1/2} (z+x)^{\mu-1/2} \left[(v-\mu) P_v^{\mu}(x) - (v+\mu) P_{v-1}^{\mu}(x) \right] dx = (2\pi)^{1/2} \frac{\Gamma(1-\mu-v) \Gamma(1-\mu+v)}{\Gamma(1/2-\mu)} (z-1)^{\mu} (z+1)^{-1/2} \times \\ \times P_v^{\mu} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right] P_{v-1}^{\mu} \left[\left(\frac{1+z}{2} \right)^{1/2} \right], \\ \operatorname{Re} \mu < 0, \operatorname{Re} \mu < 1 - |\operatorname{Re} v|, |\arg(z+1)| < \pi$$

$$(9) \int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{\mu/2} (x+z)^{-\rho} P_v^{\mu}(x) dx = \\ = \frac{2^{\lambda+\mu-\rho} \Gamma(\lambda-\rho) \Gamma(\rho-\lambda-\mu-v) \Gamma(\rho-\lambda-\mu+v+1)}{\Gamma(1-\mu+v) \Gamma(-\mu-v) \Gamma(1+\rho-\lambda-\mu)} \times \\ \times {}_3F_2(\rho, \rho-\lambda-\mu-v, \rho-\lambda-\mu+v+1; \rho-\lambda+1, \rho-\lambda-\mu+1; 1/2-z/2) + \\ + \frac{\Gamma(\rho-\lambda) \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\rho) \Gamma(1-\mu)} 2^{\mu} (z+1)^{\lambda-\rho} \times \\ \times {}_2F_2(\lambda, -\mu-v, 1-\mu+v; 1-\mu, 1-\rho+\lambda; 1/2+z/2), \operatorname{Re} \lambda > 0 \\ \operatorname{Re}(\rho-\lambda-\mu-v) > 0, \operatorname{Re}(\rho-\lambda-\mu+v+1) > 0, |\arg(z+1)| < \pi$$

$$(10) \int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{-\mu/2} (x+z)^{-\rho} P_v^{\mu}(x) dx = \\ = \frac{\sin(\nu\pi) \Gamma(\lambda-\mu-\rho) \Gamma(\rho-\lambda+\mu-v) \Gamma(\rho-\lambda+\mu+v+1)}{2^{\rho-\lambda+\mu}\pi \Gamma(1+\rho-\lambda)} \times \\ \times {}_3F_2(\rho, \rho-\lambda+\mu-v, \rho-\lambda+\mu+v+1; 1+\rho-\lambda, 1+\rho-\lambda+\mu; 1/2+z/2) + \\ + \frac{\Gamma(\lambda-\mu) \Gamma(\rho-\lambda+\mu)}{\Gamma(\rho) \Gamma(1-\mu)} (z+1)^{\lambda-\rho-\mu} \times \\ \times {}_3F_2(\lambda-\mu, -v, v+1; 1+\lambda-\mu-\rho, 1-\mu; 1/2+z/2), \operatorname{Re}(\lambda-\mu) > 0 \\ \operatorname{Re}(\rho-\lambda+\mu-v) > 0, \operatorname{Re}(\rho-\lambda+\mu+v+1) > 0, |\arg(z+1)| < \pi$$

$$(11) \int_1^{\infty} e^{-ax} (x^2-1)^{-\mu/2} P_v^{\mu}(x) dx = 2^{1/2} \pi^{-1/2} \alpha^{\mu-1/2} K_{\nu+1/2}(\alpha), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu < 1$$

$$(12) \int_1^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\mu/2} e^{-ax} P_v^{\mu}(x) dx = \alpha^{-1} W_{\mu, \nu+1/2}(2\alpha), \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu < 1$$

$$(13) \int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{\mu/2} e^{-ax} P_v^{\mu}(x) dx = \\ = \frac{\alpha^{-\lambda-\mu} e^{-\alpha}}{\Gamma(1-\mu+v) \Gamma(-\mu-v)} G_{23}^{31} \left(2\alpha \left| \begin{matrix} 1+\mu, 1 \\ \lambda+\mu, -v, 1+v \end{matrix} \right. \right), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(14) \int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{-\mu/2} e^{-\alpha x} Q_v^{\mu}(x) dx = \\ = 2^{-1} e^{\mu\pi i} \alpha^{\mu-\lambda} e^{-\alpha} G_{23}^{22} \left(2\alpha \left| \begin{matrix} 1-\mu, 1 \\ \lambda-\mu, \nu+1, -\nu \end{matrix} \right. \right), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} (\lambda - \mu) > 0$$

$$(15) \int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{-\mu/2} e^{-\alpha x} P_v^{\mu}(x) dx = \\ = -\pi^{-1} \sin(\nu\pi) \alpha^{\mu-\lambda} e^{-\alpha} G_{23}^{31} \left(2\alpha \left| \begin{matrix} 1, 1-\mu \\ \lambda-\mu, 1+\nu, -\nu \end{matrix} \right. \right), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \mu$$

$$(16) \int_1^{\infty} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta x)^{-1/2} \exp[-(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta x)^{1/2}] P_{\nu}(x) dx = \\ = 2\pi^{-1} (\alpha\beta)^{-1/2} K_{\nu+1/2}(\alpha) K_{\nu+1/2}(\beta), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$$

$$(17) \int_1^{\infty} (x^2-1)^{-\mu/2} \exp(\alpha^2 x^2) \operatorname{Erfc}(\alpha x) P_v^{\mu}(x) dx = \\ = \pi^{-1} 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \alpha^{\mu-3/2} \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) W_{1/4, -\mu/2, 1/4+\nu/2}(\alpha^2), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} (\mu + \nu) > -1, \operatorname{Re} (\mu - \nu) > 0$$

$$(18) \int_1^{\infty} Q_{\nu}(x) dx = [\nu(\nu+1)]^{-1}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(19) \int_1^{\infty} P_{\nu}(x) Q_{\lambda}(x) dx = [(\lambda-\nu)(\lambda+\nu+1)]^{-1}, \\ \operatorname{Re} (\lambda - \nu) > 0, \operatorname{Re} (\lambda + \nu) > -1$$

$$(20) \int_1^{\infty} [Q_{\nu}(x)]^2 dx = (2\nu+1)^{-1} \psi'(\nu+1), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(21) \int_1^{\infty} Q_{\nu}(x) Q_{\lambda}(x) dx = \frac{\psi(\lambda+1) - \psi(\nu+1)}{(\lambda-\nu)(\lambda+\nu+1)}, \quad \operatorname{Re} (\lambda + \nu) > -1$$

$$(22) \int_1^{\infty} [Q_{\nu}^{\mu}(x)]^2 dx.$$

См. Barnes E. W., 1908: Quart. J. Math. 39, 97—204. Отметим, что применяемое Бернсом определение функций Лежандра второго рода отличается от используемого в этой книге.

$$(23) \int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{\lambda-1} Q_v^{\mu}(x) dx =$$

$$= e^{\mu\pi i} \frac{\Gamma(1/2 + \nu/2 + \mu/2) \Gamma(1 - \lambda + \nu/2) \Gamma(\lambda + \mu/2) \Gamma(\lambda - \mu/2)}{2^{2\lambda - \mu} \Gamma(1 + \nu/2 - \mu/2) \Gamma(1/2 + \lambda + \nu/2)},$$

$$|\operatorname{Re} \mu| < 2 \operatorname{Re} \lambda < \operatorname{Re} \nu + 2$$

$$(24) \int_1^{\infty} (x-1)^{\lambda-1} (x^2-1)^{\mu/2} e^{-\alpha x} Q_v^{\mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{2 \Gamma(\nu - \mu + 1)} e^{\mu\pi i} \alpha^{-\lambda - \mu} e^{-\alpha} G_{23}^{22} \left(2\alpha \left| \begin{matrix} 1 + \mu, 1 \\ \lambda + \mu, \nu + 1, -\nu \end{matrix} \right. \right),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re}(\lambda + \mu) > 0$$

$$(25) \int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{\lambda-1} (\alpha^2 x^2 - 1)^{\mu/2} P_v^{\mu}(\alpha x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(1 - \lambda - \mu/2 + \nu/2) \Gamma(1/2 - \lambda - \mu/2 - \nu/2)}{\Gamma(1 - \mu/2 + \nu/2) \Gamma(1/2 - \nu/2 - \mu/2) \Gamma(1 - \lambda - \mu)} \times$$

$$\times 2^{\mu-1} \alpha^{\mu - \nu - 1} {}_2F_1 \left(\frac{1 - \mu + \nu}{2}, 1 - \lambda - \frac{\mu - \nu}{2}; 1 - \lambda - \mu; 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re}(\nu - \mu - 2\lambda) > -2, \operatorname{Re}(2\lambda + \mu + \nu) < 1$$

$$(26) \int_1^{\infty} x^{\mu-1} Q_v(\alpha x) dx = e^{\mu\pi i} \Gamma(\mu) \alpha^{-\mu} (\alpha^2 - 1)^{\mu/2} Q_v^{-\mu}(\alpha),$$

$$|\arg(\alpha - 1)| < \pi, \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\nu - \mu) > -1$$

$$(27) \int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{\lambda-1} (\alpha^2 x^2 - 1)^{-\mu/2} Q_v^{\mu}(\alpha x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\mu + \nu + 1}{2}\right) \Gamma(\lambda) \Gamma\left(1 - \lambda + \frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 3/2)} 2^{\mu-2} e^{\mu\pi i} \alpha^{-\mu - \nu - 1} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{\mu + \nu + 1}{2}, 1 - \lambda + \frac{\mu + \nu}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \alpha^{-2} \right),$$

$$|\arg(\alpha - 1)| < \pi, \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re}(2\lambda - \mu - \nu) < 2$$

$$(28) \int_1^{\infty} x^{-\mu/2 - 1/2} (x-1)^{-\mu - 1/2} (1 + \alpha x)^{\mu/2} Q_v^{\mu}(1 + 2\alpha x) dx =$$

$$= \pi^{-1/2} e^{-\mu\pi i} \Gamma(1/2 - \mu) \alpha^{\mu/2} \left\{ Q_v^{\mu}[(1 + \alpha)^{1/2}] \right\}^2,$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu < 1/2, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$$

$$(29) \int_1^{\infty} x^{-\mu/2-1/2} (x-1)^{-\mu-1/2} (1+ax)^{\mu/2} Q_v^{\mu}(1+2ax) dx =$$

$$= -\pi^{-1/2} e^{-\mu\pi i} \Gamma(-\mu-1/2) \alpha^{\mu/2+1/2} (1+\alpha^2)^{-1/2} \times$$

$$\times Q_v^{\mu+1}[(1+\alpha)^{1/2}] Q_v^{\mu}[(1+\alpha)^{1/2}],$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu < -1/2, \operatorname{Re}(\mu+v+2) > 0$$

$$(30) \int_1^{\infty} (x-1)^{\mu-1} P_v(ax) Q_{\lambda}(ax) dx, \quad \int_1^{\infty} (x-1)^{\mu-1} Q_v(ax) Q_{\lambda}(ax) dx.$$

См. Shabde N. G., 1937: Bull. Calcutta Math. Soc. 29, 33–40.

18.3. Функции Лежандра других переменных

$$(1) \int_a^{\infty} P_v(2x^2a^{-2}-1) \sin(bx) dx =$$

$$= -\frac{\pi a}{4 \cos(v\pi)} \left\{ \left[J_{v+1/2}\left(\frac{ab}{2}\right) \right]^2 - \left[J_{-v-1/2}\left(\frac{ab}{2}\right) \right]^2 \right\},$$

$$a, b > 0, -1 < \operatorname{Re} v < 0$$

$$(2) \int_a^{\infty} P_v(2x^2a^{-2}-1) \cos(bx) dx =$$

$$= -2^{-2} \pi a \left[J_{v+1/2}(2^{-1}ab) J_{-v-1/2}(2^{-1}ab) - Y_{v+1/2}(2^{-1}ab) Y_{-v-1/2}(2^{-1}ab) \right],$$

$$a, b > 0, -1 < \operatorname{Re} v < 0$$

$$(3) \int_0^{\infty} (\alpha+x)^{-\mu-v-2} P_{\mu}\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\right) P_v\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\right) dx =$$

$$= \frac{\alpha^{-\mu-v-1} [\Gamma(\mu+v+1)]^4}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(v+1)^2 \Gamma(2\mu+2v+2)},$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re}(\mu+v) > -1$$

$$(4) \int_0^1 x^{-1} \cos(ax) P_v(2x^{-2}-1) dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2 \sin(v\pi)} {}_1F_1(v+1; 1; ai) {}_1F_1(v+1; 1; -ai),$$

$$a > 0, -1 < \operatorname{Re} v < 0$$

$$(5) \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-\beta x} Q_{-1/2}(1+2x^{-2}) dx = \frac{\pi^2}{\alpha} \{ [J_0(\beta/2)]^2 + [Y_0(\beta/2)]^2 \}, \quad \operatorname{Re} \beta > 0$$

$$(6) \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-ax} Q_{\nu} (1 + 2x^{-2}) dx = 2^{-1} [\Gamma(\nu + 1)]^2 a^{-1} \times \\ \times W_{-\nu-1/2, 0}(ai) W_{-\nu-1/2, 0}(-ai), \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} (x^2 + a^2)^{\nu/2} e^{-\beta x} P_{\nu}^{\mu} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right] dx = \\ = \frac{2^{-\nu-2} a^{\lambda+\nu}}{\pi \Gamma(-\mu-\nu)} G_{21}^{32} \left(\frac{a^2 \beta^2}{4} \left| \begin{matrix} 1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2} \\ \lambda + \mu + \nu, \lambda - \mu + \nu \end{matrix} \right. \right), \\ a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(8) \int_0^{\infty} x^{1/2} \sin(bx) [P_{\nu}^{-1/4}(y)]^2 dx = \frac{(\pi/2)^{-1/2} a^{-1} b^{-1/2}}{\Gamma(5/4 + \nu) \Gamma(1/4 - \nu)} \left[K_{\nu+1/2} \left(\frac{b}{2a} \right) \right]^2, \\ \operatorname{Re} a > 0, b > 0, -5/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{1/2} \sin(bx) P_{\nu}^{-1/4}(y) Q_{\nu}^{-1/4}(y) dx = \\ = \frac{(\pi/2)^{1/2} \exp(-\pi i/4) \Gamma(\nu + 5/4)}{a b^{1/2} \Gamma(\nu + 5/4)} I_{\nu+1/2} \left(\frac{b}{2a} \right) K_{\nu+1/2} \left(\frac{b}{2a} \right), \\ \operatorname{Re} a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -5/4$$

$$(10) \int_0^{\infty} x^{1/2} y^{-1} \sin(bx) P_{\nu}^{-1/4}(y) P_{\nu-1}^{-1/4}(y) dx = \\ = \frac{(2\pi)^{-1/2} a^{-2} b^{1/2}}{\Gamma(5/4 + \nu) \Gamma(5/4 - \nu)} K_{\nu-1/2} \left(\frac{b}{2a} \right) K_{\nu+1/2} \left(\frac{b}{2a} \right), \\ \operatorname{Re} a > 0, b > 0, -5/4 < \operatorname{Re} \nu < 5/4$$

$$(11) \int_0^{\infty} x^{1/2} y^{-1} \sin(bx) P_{\nu}^{1/4}(y) P_{\nu}^{-3/4}(y) dx = \frac{(2\pi)^{-1/2} a^{-2} b^{1/2}}{\Gamma(7/4 + \nu) \Gamma(3/4 - \nu)} \left[K_{\nu+1/2} \left(\frac{b}{2a} \right) \right]^2, \\ \operatorname{Re} a > 0, b > 0, -7/4 < \operatorname{Re} \nu < 3/4$$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{1/2} \cos(bx) [P_{\nu}^{1/4}(y)]^2 dx = \frac{a^{-1} (2^{-1} \pi b)^{-1/2}}{\Gamma(3/4 + \nu) \Gamma(-1/4 - \nu)} \left[K_{\nu+1/2} \left(\frac{b}{2a} \right) \right]^2, \\ \operatorname{Re} a > 0, b > 0, -3/4 < \operatorname{Re} \nu < -1/4$$

$$y = (1 + a^2 x^2)^{1/2}$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^{1/2} \cos(bx) P_{\nu}^{1/4}(y) Q_{\nu}^{1/4}(y) dx = \\ = \frac{(\pi/2)^{1/2} \exp(\pi i/4) \Gamma(\nu + 3/4)}{ab^{1/2} \Gamma(\nu + 5/4)} I_{\nu+1/2}\left(\frac{b}{2a}\right) K_{\nu+1/2}\left(\frac{b}{2a}\right), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -3/4$$

$$(14) \int_0^{\infty} x^{1/2} y^{-1} \cos(bx) P_{\nu}^{-1/4}(y) P_{\nu}^{3/4}(y) dx = \frac{(2\pi)^{-1/2} a^{-2} b^{1/2}}{\Gamma(5/4 + \nu) \Gamma(3/4 - \nu)} \left[K_{\nu+1/2}\left(\frac{b}{2a}\right) \right]^2, \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad b > 0, \quad -5/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{1/2} y^{-1} \cos(bx) P_{\nu}^{1/4}(y) P_{\nu-1}^{1/4}(y) dx = \\ = \frac{(2\pi)^{-1/2} a^{-2} b^{1/2}}{\Gamma(3/4 + \nu) \Gamma(3/4 - \nu)} K_{\nu-1/2}\left(\frac{b}{2a}\right) K_{\nu+1/2}\left(\frac{b}{2a}\right), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad b > 0, \quad -3/4 < \operatorname{Re} \nu < 3/4$$

$$(16) \int_0^a \left[\frac{\sin(a-x)}{\sin x} \right]^{\kappa} P_{\nu}^{-\mu}(\cos x) P_{\nu}^{-\kappa}[\cos(a-x)] \frac{dx}{\sin x} = \\ = \frac{2^{\kappa} \Gamma(\mu - \kappa) \Gamma(\kappa + 1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\kappa + \mu + 1)} (\sin a)^{\kappa} P_{\nu}^{-\mu}(\cos a), \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \kappa > -1/2$$

$$(17) \int_0^a (\sin x)^{\rho} [\sin(a-x)]^{\sigma} P_{\nu}^{\mu}(\cos x) P_{\kappa}^{\lambda}[\cos(a-x)] dx.$$

Относительно этого интеграла и многих частных случаев см. Bailey W. N., 1931: Proc. Cambridge Philos. Soc. 27, 184–189 и 381–386.

$$(18) \int_0^{\infty} \cos(ax) P_{\nu}(\operatorname{ch} x) dx = \\ = -\frac{\sin(\nu\pi)}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{1+\nu+ia}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu-ia}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu+ia}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu-ia}{2}\right), \\ a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 0$$

$$(19) \int_0^{\infty} P_{-x-1/2}(\cos \theta) dx = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)}, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$(20) \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\cos \theta) dx = \frac{1}{\sin(\theta/2)}, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$y = (1 + \alpha^2 x^2)^{1/2}$$

(21)	$\int_0^{\infty} \cos(bx) P_{-\frac{1}{2}+ix}^{\mu}(\operatorname{ch} a) dx = \begin{cases} 0, & 0 < a < b \\ \frac{(\pi/2)^{1/2} (\operatorname{sh} a)^{\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu) (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b)^{\mu+1/2}}, & 0 < b < a \end{cases}$	$0 < a < b$ $0 < b < a$
(22)	$\int_0^{\infty} x^{-1} \operatorname{th}(\pi x) P_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch} a) dx = 2 e^{-a/2} K(e^{-a}),$	$a > 0$
(23)	$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{th}(\pi x)}{\alpha^2 + x^2} P_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch} b) dx = Q_{\alpha-1/2}(\operatorname{ch} b),$	$\operatorname{Re} \alpha > 0$
(24)	$\int_0^{\infty} \cos(bx) \Gamma(\mu + ix) \Gamma(\mu - ix) P_{-\frac{1}{2}+ix}^{\frac{1}{2}-\mu}(\operatorname{ch} a) dx =$ $= \frac{(\pi/2)^{1/2} \Gamma(\mu) (\operatorname{sh} a)^{\mu-1/2}}{(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b)^{\mu}}, \quad a, b > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$	$a, b > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$

Г Л А В А XIX

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Относительно функций Бесселя и родственных им функций см. ВТФ т. II, главу VII и указанную там литературу, в особенности книги Ватсона (основной трактат по данному вопросу), Грея и Метьюза, Мак-Лаклана (Mc Lachlan, второе, пересмотренное издание) и Вейрха (Weyrich). Интегралы, содержащие функции Бесселя, встречаются почти в каждой главе этой книги, и ядра преобразований, перечисленных в главах VIII—XII, являются функциями Бесселя. Данная глава содержит в основном интегралы, которые не попали в предыдущие главы, но некоторые из приведенных выше интегралов включены здесь, чтобы облегчить ссылки.

Функции Бесселя являются частными случаями вырожденных гипергеометрических функций, и выражения, которые указаны ниже, могут быть использованы для того, чтобы привести интегралы, содержащие функции Бесселя, к интегралам, содержащим гипергеометрические функции.

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1(\nu+1; -2^{-2}z^2), \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} {}_1F_1(\nu+1/2; 2\nu+1; 2iz), \\ &= \frac{z^{-1/2} \exp[-2^{-1}(\nu+1/2)\pi i]}{2^{2\nu+1/2} \Gamma(\nu+1)} M_{0,\nu}(2iz); \end{aligned}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = (2^{-1}\pi z)^{-1/2} \exp[-2^{-1}(\nu+1/2)\pi i] W_{0,\nu}(-2iz),$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = (2^{-1}\pi z)^{-1/2} \exp[2^{-1}(\nu+1/2)\pi i] W_{0,\nu}(2iz);$$

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1(\nu+1; \frac{z^2}{4}), \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} {}_1F_1(\nu+1/2; 2\nu+1; 2z), \\ &= \frac{z^{-1/2} 2^{-2\nu-1/2}}{\Gamma(\nu+1)} M_{0,\nu}(2z); \end{aligned}$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} W_{0,\nu}(2z),$$

$$H_\nu(z) = \frac{2(z/2)^{\nu+1}}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu+3/2)} {}_1F_2\left(1; \nu+3/2; 3/2; -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$L_\nu(z) = \frac{2(z/2)^{\nu+1}}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu+3/2)} {}_1F_2\left(1; \nu+3/2, 3/2; \frac{z^2}{4}\right),$$

$$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu+\nu+3}{2}, \frac{\mu-\nu+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right).$$

Выражения различных комбинаций функций Бесселя через G -функцию Мейера приведены в Приложении. Многие интегралы, содержащие функции Бесселя, могут быть получены путем выбора частных значений параметров в небольшом числе известных сейчас интегралов, содержащих G -функцию. Далее, в приведенных ниже таблицах многие весьма общие интегралы, содержащие функции Бесселя, выражены через вырожденные гипергеометрические функции или G -функции. Для частных значений параметров эти выражения заметно упрощаются. Во многих случаях эти частные случаи не отмечены особо, и тем, кто будет пользоваться таблицами, придется самим выполнить соответствующие преобразования. Необходимые для этого формулы даны в Приложении.

19.1. Функции Бесселя аргумента x : конечные промежутки интегрирования

(1)	$\int_0^a J_\nu(x) dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{\nu+2n+1}(a),$	$\operatorname{Re} \nu > -1$
(2)	$\int_0^a x^\nu J_\nu(x) dx =$ $= 2^{\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) a [J_\nu(a) \mathbf{H}_{\nu-1}(a) - \mathbf{H}_\nu(a) J_{\nu-1}(a)],$	$\operatorname{Re} \nu > -1/2$
(3)	$\int_0^a x^{\nu+1} J_\nu(x) dx = a^{\nu+1} J_{\nu+1}(a),$	$\operatorname{Re} \nu > -1$
(4)	$\int_0^a x^{1-\nu} J_\nu(x) dx = \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} - a^{1-\nu} J_{\nu-1}(a)$	
(5)	$\int_0^a x^\mu J_\nu(x) dx = (\mu + \nu - 1) a J_\nu(a) S_{\mu-1, \nu-1}(a) -$ $- a J_{\nu-1}(a) S_{\mu, \nu}(a) + 2^\mu \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)},$	$\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$
(6)	$\int_0^a (a-x)^{-1/2} J_\nu(x) dx = \pi (a/2)^{1/2} J_{\nu/2+1/4}(a/2) J_{\nu/2-1/4}(a/2),$	$\operatorname{Re} \nu > -1$
(7)	$\int_0^a x^{-\nu} (a^2 - x^2)^{-\nu-1/2} J_\nu(x) dx =$ $= \pi^{1/2} 2^{-\nu-1} a^{-2\nu} \Gamma(1/2 - \nu) J_\nu(c/2) J_{-\nu}(a/2),$	$\operatorname{Re} \nu < 1/2.$

Относительно подобных интегралов см. пп. 8.5 и 13.1.

$$(8) \int_0^a x^0 (a^2 - 2abx + b^2)^{-1/2} J_\nu(x) dx.$$

См. Bose S. K., 1946: Bull. Calcutta Math. Soc. 38, 177—180.

$$(9) \int_0^a x^\nu \sin x J_\nu(x) dx = \frac{a^{\nu+1}}{2\nu+1} \sin a J_\nu(a) - \cos a J_{\nu+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(10) \int_0^a \sin(a-x) J_{2n}(x) dx = \\ = a J_{2n+1}(a) + (-1)^n 2n \left[\cos a - J_0(a) - 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m J_{2m}(a) \right], \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(11) \int_0^a \sin(a-x) J_{2n+1}(x) dx = \\ = a J_{2n+2}(a) + (-1)^n (2n+1) \left[\sin a - 2 \sum_{m=0}^n (-1)^m J_{2m+1}(a) \right], \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(12) \int_0^a \sin(a-x) J_\nu(x) dx = a J_{\nu+1}(a) - 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n+2}(a), \\ \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(13) \int_0^a x^{-1} \sin(a-x) J_\nu(x) dx = 2\nu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(14) \int_0^a x^{-3/2} \sin(a-x) J_\nu(x) dx = (\nu^2 - 1/4)^{-1} a^{1/2} J_\nu(a), \quad \operatorname{Re} \nu > 1/2$$

$$(15) \int_0^a x^\nu \sin(a-x) J_\nu(x) dx = \frac{a^{\nu+1}}{2\nu+1} J_{\nu+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(16) \int_0^a x^\lambda \sin(a-x) J_\nu(x) dx = \\ = 2a^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\nu-\lambda)_{2n}}{(\nu+\lambda+1)_{2n+2}} (\nu+2n+1) J_{\nu+2n+1}(a), \quad \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1.$$

См. также Bailey W. N., 1930: Proc. London Math. Soc. (2), 31, 200—208.

$$(17) \int_0^a (a^2 - x^2)^{-1/2} \sin(\beta x) J_\nu(x) dx = \\ = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a\beta) J_{\nu/2+n+1/2}(a/2) J_{\nu/2-n+1/2}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -2$$

$$(18) \int_0^a x^{\nu+1} \sin[2^{-1}\beta(a^2 - x^2)] J_\nu(x) dx = \beta^{-\nu-1} U_{\nu+2}(u^2\beta, a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(19) \int_0^a x^{\nu+1} \sin[b(a^2 - x^2)^{1/2}] J_\nu(x) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} a^{\nu+3/2} b(1+b^2)^{-\nu/2-3/4} J_{\nu+3/2}[a(1+b^2)^{1/2}], \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(20) \int_0^a x^\nu \cos x J_\nu(x) dx = \frac{a^{\nu+1}}{2\nu+1} [\cos a J_\nu(a) + \sin a J_{\nu+1}(a)], \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(21) \int_0^a \cos(a-x) J_{2n}(x) dx = \\ = a J_{2n}(a) - (-1)^n 2n \left[\sin a - 2 \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m J_{2m+1}(a) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(22) \int_0^a \cos(a-x) J_{2n+1}(x) dx = a J_{2n+1}(a) + \\ + (-1)^n (2n+1) \left[\cos a - J_0(a) - 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m J_{2m}(a) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(23) \int_0^a \cos(a-x) J_\nu(x) dx = a J_\nu(a) - 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(24) \int_0^a x^{-1} \cos(a-x) J_\nu(x) dx = \nu^{-1} J_\nu(a) + 2\nu^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n}(a), \\ \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(25) \int_0^a x^\nu \cos(a-x) J_\nu(x) dx = \frac{a^{\nu+1}}{2\nu+1} J_\nu(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(26) \int_0^a x^\lambda \cos(a-x) J_\nu(x) dx =$$

$$= \frac{a^{\lambda+1} J_\nu(a)}{\lambda + \nu + 1} + 2a^{\lambda+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\nu - \lambda)_{2n-1}}{(\nu + \lambda + 1)_{2n+1}} (\nu + 2n) J_{\nu+2n}(a),$$

$$\text{Re } (\lambda + \nu) > -1.$$

См. также Bailey W. N., 1930: Proc. London Math. Soc. (2), 31, 200-208.

$$(27) \int_0^a (a^2 - x^2)^{-1/2} \cos(\beta x) J_\nu(x) dx = 2^{-1} \pi J_0(a\beta) [J_{\nu/2}(a/2)]^2 +$$

$$+ \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(a\beta) J_{\nu/2+2n}(a/2) J_{\nu/2-2n}(a/2), \quad \text{Re } \nu > -1$$

$$(28) \int_0^a x^{\nu+1} \cos[2^{-1}\beta(a^2 - x^2)] J_\nu(x) dx = \beta^{-\nu-1} U_{\nu+1}(a^2\beta, a), \quad \text{Re } \nu > -1$$

$$(29) \int_0^a x (a^2 - x^2)^{-1/2} \cos[\beta(a^2 - x^2)^{1/2}] J_0(x) dx = (\beta^2 + 1)^{-1/2} \sin[a(\beta^2 + 1)^{1/2}]$$

$$(30) \int_0^a (a^2 - x^2)^{-1/2} \cos[\beta(a^2 - x^2)^{1/2}] J_\nu(x) dx =$$

$$= 2^{-1} \pi J_{\nu/2}(2^{-1} a e^u) J_{\nu/2}(2^{-1} a e^{-u}), \quad \beta = \text{sh } u, \quad \text{Re } \nu > -1$$

$$(31) \int_0^a x^{\mu-1} P_n(x/a) J_\nu(x) dx, \quad \int_0^a x^{\mu-1} P_n(x/a) J_\mu(x) J_\nu(x) dx.$$

См. Bose S. K., 1946: Bull. Calcutta Math. Soc. 38, 177-180.

$$(32) \int_0^a x^{\mu-1} P_n(2x^2 a^{-2} - 1) J_\nu(x) dx =$$

$$= \frac{2^{-\nu-1} a^{\mu+\nu} [\Gamma(\mu/2 + \nu/2)]^2}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\mu/2 + \nu/2 + n + 1) \Gamma(1/2 + \nu/2 - n)} \times$$

$$\times {}_2F_3\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu}{2}; \nu+1, \frac{\mu+\nu}{2} + n + 1, \frac{\mu+\nu}{2} - n; -\frac{a^2}{4}\right),$$

$$\text{Re } (\mu + \nu) > 0.$$

Относительно частных случаев см. Bose B. N., 1944: Bull. Calcutta Math. Soc. 36, 125-132.

$$(33) \int_0^a x^{1/2-\mu} (a^2 - x^2)^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x/a) J_{\nu+1/2}(x) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} a^{1-\mu} J_{1/2-\mu}(a/2) J_{\nu+1/2}(a/2), \quad \operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re}(\mu - \nu) < 2$$

$$(34) \int_0^a x^{1/2} (a^2 - x^2)^{-\nu/2-1/4} P_{\mu}^{\nu+1/2}(2x^2 a^{-2} - 1) J_{\nu}(x) dx = \\ = \pi^{1/2} 2^{-\nu-1} a J_{\mu+1/2}(a/2) J_{-\mu-1/2}(a/2), \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(35) \int_0^a J_{\nu}(x) J_1(x) dx = 1/2 - 2^{-1} [J_0(a)]^2$$

$$(36) \int_0^a J_n(x) J_{n+1}(x) dx = 1/2 - 2^{-1} [J_0(a)]^2 - \sum_{m=1}^n [J_m(a)]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(37) \int_0^a J_{\nu}(x) J_{\nu+1}(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} [J_{\nu+n+1}(a)]^2, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(38) \int_0^a x^{\sigma-1} (a^2 - x^2)^{\sigma-1} J_{\mu}(x) J_{\nu}(x) dx.$$

См. Bailey W. N., 1938: Quart. J. Math. Oxford Ser. 9, 141-147.

$$(39) \int_0^a x P_n(1 - 2x^2 a^{-2}) [J_0(x)]^2 dx = \frac{a^2}{2(2n+1)} \{ [J_n(a)]^2 + [J_{n+1}(a)]^2 \}, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(40) \int_0^a x^{2\nu+1} P_n(2x^2 a^{-2} - 1) [J_{\nu}(x)]^2 dx.$$

См. Bose B. N., 1944: Bull. Calcutta Math. Soc. 36, 125-132.

$$(41) \int_a^b \frac{dx}{x [J_{\nu}(x)]^2} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{Y_{\nu}(b)}{J_{\nu}(b)} - \frac{Y_{\nu}(a)}{J_{\nu}(a)} \right]$$

$$(42) \int_a^b \frac{dx}{x J_{\nu}(x) J_{-\nu}(x)} = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \ln \left[\frac{J_{-\nu}(a) J_{\nu}(b)}{J_{\nu}(a) J_{-\nu}(b)} \right]$$

(43)	$\int_0^a x^\nu Y_\nu(x) dx = 2^{\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) a [Y_\nu(a) H_{\nu-1}(a) - H_\nu(a) Y_{\nu-1}(a)],$	$\operatorname{Re} \nu > -1/2$
(44)	$\int_0^a x^{\nu+1} Y_\nu(x) dx = a^{\nu+1} Y_{\nu+1}(a) + 2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 1),$	$\operatorname{Re} \nu > -1$
(45)	$\int_0^a x^{1-\nu} Y_\nu(x) dx = \frac{\operatorname{ctg}(\nu\pi)}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} - a^{1-\nu} Y_{\nu-1}(a),$	$\operatorname{Re} \nu < 1$
(46)	$\int_a^b Y_\nu(x) dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} [Y_{\nu+2n+1}(b) - Y_{\nu+2n+1}(a)]$	
(47)	$\int_0^a (a^2 - x^2)^{-1/2} \cos[\beta(a^2 - x^2)^{1/2}] Y_{2\nu}(x) dx =$ $= 2^{-2} \pi [J_\nu(u) Y_\nu(v) + J_\nu(v) Y_\nu(u)] -$ $- 2^{-2} \pi \operatorname{tg}(\nu\pi) [J_\nu(u) J_\nu(v) + Y_\nu(u) Y_\nu(v)],$ $u = 2^{-1} a [(\beta^2 + 1)^{1/2} + \beta], \quad v = 2^{-1} a [(\beta^2 + 1)^{1/2} - \beta], \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$	
(48)	$\int_0^a x P_n(1 - 2x^2 a^{-2}) J_0(x) Y_0(x) dx =$ $= \frac{a^2}{2(2n+1)} [J_n(a) Y_n(a) + J_{n+1}(a) Y_{n+1}(a)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$	
(49)	$\int_a^b \frac{dx}{x [Y_\nu(x)]^2} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{J_\nu(a)}{Y_\nu(a)} - \frac{J_\nu(b)}{Y_\nu(b)} \right]$	
(50)	$\int_a^b \frac{dx}{x J_\nu(x) Y_\nu(x)} = \frac{\pi}{2} \ln \left[\frac{J_\nu(a) Y_\nu(b)}{J_\nu(b) Y_\nu(a)} \right]$	

19.2. Функции Бесселя аргумента x : бесконечные промежутки интегрирования

(1)	$\int_0^{\infty} J_\nu(x) dx = 1,$	$\operatorname{Re} \nu > -1$
-----	------------------------------------	------------------------------

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(x)}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\pi [J_{\nu}(\alpha) - J_{\nu}(\alpha)]}{\alpha \sin(\nu\pi)}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(3) \int_0^{\infty} x^{-1} (\alpha^2 + x^2)^{-1/2} [J_0(x) - 1] dx = \alpha^{-1} [\operatorname{Ei}(-\alpha) - \ln(\nu\alpha)], \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(4) \int_0^{\infty} x [(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)]^{-1/2} [(x^2 + \alpha^2)^{1/2} + (x^2 + \beta^2)^{1/2}]^{-2\nu} J_0(x) dx = \\ = [\alpha^2 - \beta^2]^{-\nu} I_{\nu}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) K_{\nu}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \nu > -3/4$$

$$(5) \int_0^{\infty} x^{\nu} (x^4 - a^4)^{-1} J_0(x) dx = 2^{-1} K_0(a) - 2^{-2} \pi Y_0(a), \quad a > 0$$

$$(6) \int_0^{\infty} x^{\nu} (e^{\alpha x} - 1)^{-1} J_{\nu}(x) dx = 2^{\nu} \pi^{-1/2} \Gamma(\nu + 1/2) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha^2 n^2)^{-\nu - 1/2}, \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{-1} \exp\left(-\frac{2\alpha}{x}\right) J_{\nu}(x) dx = 2 J_{\nu}(2\alpha^{1/2}) K_{\nu}(2\alpha^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(8) \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu}}{x + \beta} \sin(x + \beta) J_{\nu}(x) dx = \frac{\pi \beta^{\nu} J_{-\nu}(\beta)}{2 \cos(\nu\pi)}, \quad |\arg \beta| < \pi, |\operatorname{Re} \nu| < 1/2$$

$$(9) \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu}}{x + \beta} \cos(x + \beta) J_{\nu}(x) dx = -\frac{\pi \beta^{\nu} Y_{-\nu}(\beta)}{2 \cos(\nu\pi)}, \quad |\arg \beta| < \pi, |\operatorname{Re} \nu| < 1/2$$

$$(10) \int_0^{\infty} x^{1/4} \sin(2ax^{1/2}) J_{-1/4}(x) dx = \pi^{1/2} a^{3/2} J_{3/4}(a^2), \quad a > 0$$

$$(11) \int_0^{\infty} x^{1/4} \sin(2ax^{1/2}) J_{3/4}(x) dx = \pi^{1/2} a^{3/2} J_{-1/4}(a^2), \quad a > 0$$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{1/4} \cos(2ax^{1/2}) J_{1/4}(x) dx = \pi^{1/2} a^{3/2} J_{-3/4}(a^2), \quad a > 0$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^{1/4} \cos(2ax^{1/2}) J_{-3/4}(x) dx = \pi^{1/2} a^{3/2} J_{1/4}(a^2), \quad a > 0$$

$$(14) \int_0^{\infty} x^{-1/4} e^{-\alpha x} \sin(2\beta x^{1/2}) J_{-1/4}(x) dx = \\ = \pi^{1/2} \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + 1} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + 1}\right) J_{-1/4}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2 + 1}\right), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{-1/4} e^{-\alpha x} \sin(2\beta x^{1/2}) J_{1/4}(x) dx = \\ = \pi^{1/2} \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + 1} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + 1}\right) J_{1/4}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2 + 1}\right), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(16) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \sin x \sin(4ax^{1/2}) J_0(x) dx = (\pi/2)^{1/2} \cos(a^2 + \pi/4) J_0(a^2), \quad a > 0$$

$$(17) \int_0^{\infty} x^{-1/3} \sin x \sin(4ax^{1/2}) J_{1/3}(x) dx = \\ = -2^{-2/3} \pi^{1/2} a^{1/3} [\sin(a^2 + \pi/12) J_{1/3}(a^2) + \cos(a^2 + \pi/12) Y_{1/3}(a^2)], \quad a > 0$$

$$(18) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \sin x \cos(4ax^{1/2}) J_0(x) dx = \\ = -2^{-3/2} \pi^{1/2} [\cos(a^2 - \pi/4) J_0(a^2) - \sin(a^2 - \pi/4) Y_0(a^2)], \quad a > 0$$

$$(19) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \sin x \cos(4ax^{1/2}) J_{-1/3}(x) dx = \\ = -2^{-3/2} \pi^{1/2} a^{1/3} \sin(a^2 - \pi/12) J_{-1/3}(a^2), \quad a > 0$$

$$(20) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \cos x \sin(4ax^{1/2}) J_0(x) dx = (\pi/2)^{1/2} \cos(a^2 - \pi/4) J_0(a^2), \quad a > 0$$

$$(21) \int_0^{\infty} x^{-1/3} \cos x \sin(4ax^{1/2}) J_{1/3}(x) dx = \\ = 2^{-5/2} \pi^{1/2} a^{1/3} [\cos(a^2 + \pi/12) J_{1/3}(a^2) - \sin(a^2 + \pi/12) Y_{1/3}(a^2)], \quad a > 0$$

$$(22) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \cos x \cos(4ax^{1/2}) J_0(x) dx = \\ = -2^{-3/2} \pi^{1/2} [\sin(a^2 - \pi/4) J_0(a^2) + \cos(a^2 - \pi/4) Y_0(a^2)], \quad a > 0$$

$$(23) \int_0^{\infty} x^{-1/3} \cos x \cos(4ax^{1/2}) J_{-1/3}(x) dx = \\ = 2^{-3/2} \pi^{1/2} a^{1/2} \cos(u^2 - \pi/12) J_{-1/3}(a^2), \quad a > 0$$

$$(24) \int_0^{\infty} x^{-\rho} J_{\mu}(x) J_{\nu}(x) dx = \\ = \frac{2^{-\rho} \Gamma(\rho) \Gamma[2^{-1}(\mu + \nu - \rho + 1)]}{\Gamma[2^{-1}(\rho + \mu + \nu + 1)] \Gamma[2^{-1}(\rho - \mu + \nu + 1)] \Gamma[2^{-1}(\rho + \mu - \nu + 1)]}, \\ 0 < \operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re}(\mu + \nu) + 1$$

$$(25) \int_0^{\infty} x^{1-2\nu} [J_{\nu}(x)]^4 dx = \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(2\nu)}{2\pi \Gamma(\nu + 1/2)^2 \Gamma(3\nu)}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(26) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} [J_{\nu}(x)]^2 dx = I_{\nu}(a) K_{\nu}(a), \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(27) \int_0^{\infty} (x^2 + a^2)^{-1/2} J_{\mu}(x) J_{\nu}(x) dx. \\ \text{См. Bouwkamp C. S., 1950: Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 53, 654-661.}$$

$$(28) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (x^2 + a^2)^{-\sigma} J_{\mu}(x) J_{\nu}(x) dx. \\ \text{См. Ватсон Г. Н., 1949, стр. 479.}$$

$$(29) \int_0^{\infty} x^{\mu+\nu} e^{-ax} J_{\mu}(x) J_{\nu}(x) dx. \\ \text{См. Ватсон Г. Н., 1949, стр. 427.}$$

$$(30) \int_0^{\infty} \sin(2ax) [J_{\nu}(x)]^2 dx = \begin{cases} 2^{-1} P_{\nu-1/2}(1-2a^2), & 0 < a < 1 \\ \pi^{-1} \cos(\nu\pi) Q_{\nu-1/2}(2a^2-1), & a > 1 \end{cases} \\ \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(31) \int_0^{\infty} \sin(2ax) [x^{\nu} J_{\nu}(x)]^2 dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{a^{-2\nu} \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)}{2\pi^{1/2} \Gamma(1 - \nu)} {}_2F_1(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2}; 1 - \nu; a^2), & 0 < a < 1 \\ \frac{a^{-4\nu-1} \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)}{2 \Gamma(1 + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - 2\nu)} {}_2F_1(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2} + 2\nu; 1 + \nu; a^{-2}), & a > 1 \end{cases}$$

$$-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(32) \int_0^{\infty} \cos(2ax) [J_{\nu}(x)]^2 dx =$$

$$= \begin{cases} \pi^{-1} Q_{\nu-1/2}(1 - 2a^2), & 0 < a < 1 \\ -\pi^{-1} \sin(\nu\pi) Q_{\nu-1/2}(2a^2 - 1), & a > 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(33) \int_0^{\infty} \cos(2ax) [x^{\nu} J_{\nu}(x)]^2 dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{a^{-2\nu} \Gamma(\nu)}{2\pi^{1/2} \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} {}_2F_1(\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1 - \nu; a^2) + \\ + \frac{\Gamma(-\nu) \Gamma(\frac{1}{2} + 2\nu)}{2\pi \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} {}_2F_1(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2} + 2\nu; 1 + \nu; a^2), & 0 < a < 1 \\ -\frac{\sin(\nu\pi) a^{-4\nu-1} \Gamma(\frac{1}{2} + 2\nu)}{\Gamma(1 + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} {}_2F_1(\frac{1}{2} + \nu, \frac{1}{2} + 2\nu; 1 + \nu; a^{-2}), & a > 1 \end{cases}$$

$$-1/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(34) \int_a^{\infty} (x^2 - a^2)^{-1/2} J_{\nu}(x) dx = -2^{-1} \pi J_{\nu/2}(a/2) Y_{\nu/2}(a/2),$$

$$\operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(35) \int_a^{\infty} x^{-1} (x^2 - a^2)^{-1/2} J_0(x) dx = -\operatorname{si}(a)$$

$$(36) \int_a^{\infty} x^{1/2} P_{\nu-1/2}(x/a) J_{\nu}(x) dx =$$

$$= - (a/2)^{-1/2} [\cos(a/2) Y_{\nu}(a/2) + \sin(a/2) J_{\nu}(a/2)],$$

$$-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(37) \int_a^{\infty} x^{1/2-\mu} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-1/2}^{\mu}(x/a) J_{\nu}(x) dx =$$

$$= -2^{-3} \pi^{1/2} a^{1-\mu} [J_{\mu-1/2}(a/2) Y_{\nu}(a/2) + Y_{\mu-1/2}(a/2) J_{\nu}(a/2)],$$

$$-1/4 < \operatorname{Re} \mu < 1, |\operatorname{Re} \nu| < 1/2 + 2 \operatorname{Re} \mu$$

$$(38) \int_a^{\infty} x^{\nu} (x^2 - a^2)^{\lambda/2 - 1/2} P_{\lambda}^{\lambda-1}(x/a) J_{\nu}(x) dx = \\ = \frac{2^{\lambda+\nu} a^{\nu} \Gamma(1/2 + \nu)}{\pi^{1/2} \Gamma(1 - \lambda)} S_{\lambda-\nu, \lambda+\nu}(a), \\ \operatorname{Re} \nu < 5/2, \operatorname{Re}(2\lambda + \nu) < 3/2$$

$$(39) \int_a^{\infty} x^{1/2} (x^2 - a^2)^{\nu/2 - 1/4} P_{\mu}^{1/2-\nu}(2x^2 a^{-2} - 1) J_{\nu}(x) dx = \\ = - \frac{2^{\nu-2} \pi^{1/2} a}{\cos(\mu\pi)} \{ [J_{\mu+1/2}(a/2)]^2 - [J_{-\mu-1/2}(a/2)]^2 \}, \\ \operatorname{Re} \nu > -1/2, \operatorname{Re} \nu - 3/2 < 2 \operatorname{Re} \mu < 1/2 - \operatorname{Re} \nu$$

$$(40) \int_a^{\infty} x^{1-2\nu} (x^2 - a^2)^{\nu-3/2} [J_{\nu}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(\nu - 1/2)}{2\pi^{1/2} a^{\nu+1}} \mathbf{H}_{\nu}(2a), \\ \operatorname{Re} \nu > 1/2$$

$$(41) \int_a^{\infty} x^{2\nu+1} (a^2 - x^2)^{-\nu-3/2} \{ [J_{\nu}(x)]^2 + [J_{-\nu}(x)]^2 \} dx = \\ = \pi^{-1/2} a^{\nu-1} \Gamma(-\nu - 1/2) \sin(\nu\pi) J_{\nu}(2a), \operatorname{Re} \nu < -1/2$$

$$(42) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[a(x+\beta)]}{x+\beta} J_0(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a (1-u^2)^{-1/2} \cos(\beta u) du, & 0 \leq a \leq 1 \\ \pi J_0(\beta), & 1 \leq a < \infty \end{cases}$$

$$(43) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x+\beta} \sin[a(x+\beta)] J_0(x) dx = 0, \quad 0 \leq a < 1$$

$$(44) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[a(x+\beta)]}{x^{\nu}(x+\beta)} J_{\nu+2n}(x) dx = \pi \beta^{-\nu} J_{\nu+2n}(\beta), \quad 1 \leq a < \infty \\ n = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{Re} \nu > -3/2$$

$$(45) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[a(x+\beta)]}{x+\beta} [J_{n+1/2}(x)]^2 dx = \pi [J_{n+1/2}(\beta)]^2, \quad 2 \leq a < \infty \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(46) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [a(x+\beta)]}{x+\beta} J_{n+1/2}(x) J_{-n-1/2}(x) dx = \pi J_{n+1/2}(\beta) J_{-n-1/2}(\beta),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, 2 \leq a < \infty$$

$$(47) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [a(x+\beta)]}{x^{2\nu}(x+\beta)} [J_{\nu+n}(x)]^2 dx = \pi \beta^{-2\nu} [J_{\nu+n}(\beta)]^2,$$

$$2 \leq a < \infty$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(48) \int_0^{\infty} Y_{\nu}(x) dx = -\operatorname{tg}(\nu\pi/2)$$

$$-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$$

$$(49) \int_0^{\infty} x^{\rho} (x^2 + a^2)^{-\mu} Y_{\nu}(x) dx =$$

$$= \frac{a^{\rho-2\mu}}{\Gamma(\mu)} G_{24}^{31} \left(\frac{a^2}{4} \left| \begin{array}{c} 1 - \frac{\rho}{2}, -\frac{\nu}{2} \\ \mu - \frac{\rho}{2}, \frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{array} \right. \right),$$

$$|\operatorname{Re} \nu| - 1 < \operatorname{Re} \rho < 2 \operatorname{Re} \mu + 1/2$$

$$(50) \int_0^{\infty} x^{-1} \exp\left(-\frac{2a}{x}\right) Y_{\nu}(x) dx = 2 Y_{\nu}(2a^{1/2}) K_{\nu}(2a^{1/2}),$$

$$\operatorname{Re} a > 0$$

$$(51) \int_0^{\infty} x^{-1} \sin\left(\frac{a}{2x}\right) [\sin x J_0(x) + \cos x Y_0(x)] dx = \pi J_0(a^{1/2}) Y_0(a^{1/2}),$$

$$a > 0$$

$$(52) \int_0^{\infty} x^{-1} \cos\left(\frac{a}{2x}\right) [\sin x Y_0(x) - \cos x J_0(x)] dx = \pi J_0(a^{1/2}) Y_0(a^{1/2}),$$

$$a > 0$$

$$(53) \int_0^{\infty} x^{1/4} \sin(2ax^{1/2}) Y_{3/4}(x) dx = -\pi^{1/2} a^{3/2} \mathbf{H}_{-1/4}(a^2),$$

$$a > 0$$

$$(54) \int_0^{\infty} x^{1/4} \cos(2ax^{1/2}) Y_{1/4}(x) dx = -\pi^{1/2} a^{3/2} \mathbf{H}_{-3/4}(a^2),$$

$$a > 0$$

$$(55) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \sin x \cos(4ax^{1/2}) Y_0(x) dx = \\ = 2^{-3/2} \pi^{1/2} [3 \sin(a^2 - \pi/4) J_0(a^2) - \cos(a^2 - \pi/4) Y_0(a^2)], \\ a > 0$$

$$(56) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \cos x \cos(4ax^{1/2}) Y_0(x) dx = \\ = -2^{-3/2} \pi^{1/2} [3 \cos(a^2 - \pi/4) J_0(a^2) + \sin(a^2 - \pi/4) Y_0(a^2)], \\ a > 0$$

$$(57) \int_0^{\infty} J_{\nu+n}(x) Y_{\nu-n}(x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(58) \int_0^{\infty} e^{-2ax} J_0(x) Y_0(x) dx = \frac{K[a(a^2+1)^{-1/2}]}{\pi(a^2+1)^{1/2}}, \quad \operatorname{Re} a > 0$$

$$(59) \int_0^{\infty} x^{2\nu+1} \exp(-ax^2) J_{\nu}(x) Y_{\nu}(x) dx = \\ = -2^{-1} \pi^{-1/2} a^{-3\nu/2-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2a}\right) W_{\nu/2, \nu/2}\left(\frac{1}{a}\right), \\ \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(60) \int_0^{\infty} \sin(2ax) J_0(x) Y_0(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ -\frac{K[(1-a^2)^{1/2}]}{\pi a}, & a > 1 \end{cases}$$

$$(61) \int_0^{\infty} \cos(2ax) J_0(x) Y_0(x) dx = \begin{cases} -\pi^{-1} K(a), & 0 < a < 1 \\ -(\pi a)^{-1} K(a^{-1}), & a > 1 \end{cases}$$

$$(62) \int_0^{\infty} \cos(2ax) [Y_0(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi^{-1} K[(1-a^2)^{1/2}], & 0 < a < 1 \\ 2(\pi a)^{-1} K[(1-a^2)^{1/2}], & a > 1 \end{cases}$$

(63)	$\int_0^{\infty} x^{1-2\nu} \sin(2ax) J_{\nu}(x) Y_{\nu}(x) dx =$ $= -\frac{\Gamma(3/2 - \nu) a}{2 \Gamma(2\nu - 1/2) \Gamma(2 - \nu)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} - \nu, \frac{3}{2} - 2\nu; 2 - \nu; a^2\right),$ $0 < \operatorname{Re} \nu < 3/2, 0 < a < 1$
(64)	$\int_0^{\infty} x^{1-2\nu} \sin(2ax) \{J_{\nu}(x)\}^2 - \{Y_{\nu}(x)\}^2 dx =$ $= \frac{\sin(2\nu\pi) \Gamma(3/2 - \nu) \Gamma(2 - 2\nu) a}{\pi \Gamma(2 - \nu)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} - \nu, \frac{3}{2} - 2\nu; 2 - \nu; a^2\right),$ $0 < \operatorname{Re} \nu < 3/4, 0 < a < 1$
(65)	$\int_0^{\infty} x^{2-2\nu} \sin(2ax) [J_{\nu}(x) J_{\nu-1}(x) - Y_{\nu}(x) Y_{\nu-1}(x)] dx =$ $= -\frac{\sin(2\nu\pi) \Gamma(3/2 - \nu) \Gamma(5/2 - 2\nu) a}{\pi \Gamma(2 - \nu)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} - \nu, \frac{5}{2} - 2\nu; 2 - \nu; a^2\right),$ $1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/4, 0 < a < 1$
(66)	$\int_0^{\infty} x^{2-2\nu} \sin(2ax) [J_{\nu}(x) Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu}(x) J_{\nu-1}(x)] dx =$ $= -\frac{\Gamma(3/2 - \nu) a}{\Gamma(2\nu - 3/2) \Gamma(2 - \nu)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} - \nu, \frac{5}{2} - 2\nu; 2 - \nu; a^2\right),$ $1/2 < \operatorname{Re} \nu < 5/2, 0 < a < 1$
(67)	$\int_0^{\infty} x^{1/2-\mu} (x^2 - a^2)^{-\mu/2} P_{\nu-1/2}^{\mu}(x/a) Y_{\nu}(x) dx =$ $= 2^{-3/2} \pi^{1/2} a^{1-\mu} [J_{\nu}(a/2) J_{\mu-1/2}(a/2) - Y_{\nu}(a/2) Y_{\mu-1/2}(a/2)],$ $-1/4 < \operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re}(2\mu - \nu) > -1/2$

19.3. Функции Бесселя аргументов $\alpha x + \beta$, x^2 , x^{-1}

(1)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} J_{\mu}(ax) J_{\nu}(bx) dx =$ $= \frac{2^{\rho-1} a^{\mu} b^{-\mu-\rho} \Gamma(\mu/2 + \nu/2 + \rho/2)}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(1 - \mu/2 + \nu/2 - \rho/2)} {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu + \rho}{2}, \frac{\mu - \nu + \rho}{2}; \mu + 1; \frac{a^2}{b^2}\right),$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu + \rho) > 0, \operatorname{Re} \rho < 2, 0 < a < b$
-----	---

$$(2) \int_0^{\infty} x^{1/2} (x^2 + \lambda^2)^{-1/2} J_{\mu}(ax) J_{\nu}(bx) dx.$$

См. Bouwkamp C. S., 1950: Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 53, 654—661.

$$(3) \int_0^{\infty} x^{1+\nu} [J_{\nu}(ax)]^2 J_{\nu}(2bx) dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\Gamma(1/2 + \nu)}{2\pi^{3/2}} \sin(\nu\pi) a^{2\nu} b^{-\nu-1} (b^2 - a^2)^{-\nu-1/2}, & 0 < a < b \\ \frac{\Gamma(1/2 + \nu)}{2\pi^{3/2}} a^{2\nu} b^{-\nu-1} (a^2 - b^2)^{-\nu-1/2}, & 0 < b < a \\ -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2 \end{cases}$$

$$(4) \int_0^{\infty} x^{1+\nu} J_{\nu}(ax) J_{-\nu}(ax) J_{\nu}(2bx) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < a < b \\ \frac{a^{2\nu} b^{-\nu-1}}{2\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \nu)} (a^2 - b^2)^{-\nu-1/2}, & 0 < b < a \\ -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2 \end{cases}$$

$$(5) \int_0^{\infty} x J_{\nu/2-1/4}(ax) J_{\nu/2+1/4}(ax) J_{\nu}(2bx) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < a < b \\ 2^{-3/2} \pi^{-1} a^{-1/2} b^{-1} (a-b)^{-1/2}, & 0 < b < a \\ \operatorname{Re} \nu > -1 \end{cases}$$

$$(6) \int_0^{\infty} x^{1+\nu} J_{\mu}(ax) J_{-\mu}(ax) J_{\nu}(2bx) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < a < b \\ \frac{(a^2 - b^2)^{-\nu/2-1/4}}{2\pi^{1/2} ab^{1/2}} P_{\mu}^{\nu+1/2} (2b^2 a^{-2} - 1), & 0 < b < a \\ -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2 \end{cases}$$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} J_{\lambda}(ax) J_{\mu}(ax) J_{\nu}(2bx) dx =$$

$$= \frac{a^{\lambda+\mu} b^{-\lambda-\mu-\rho} \Gamma(\lambda/2 + \mu/2 + \nu/2 + \rho/2)}{2^{\lambda+\mu} \Gamma(\lambda+1) \Gamma(\mu+1) \Gamma(1-\lambda/2 - \mu/2 + \nu/2 - \rho/2)} \times$$

$$\times {}_4F_3 \left(\frac{\lambda+\mu+1}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2} + 1, \frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2}, \frac{\lambda+\mu-\nu+\rho}{2}; \right.$$

$$\left. \lambda+1, \mu+1, \lambda+\mu+1; \frac{a^2}{b^2} \right),$$

$$\operatorname{Re}(\lambda + \mu + \nu + \rho) > 0, \quad 0 < a < b$$

(8)	$\int_0^{\infty} x^{1-\nu} J_{\nu}(ax) J_{\nu}(bx) J_{\nu}(cx) dx =$ $= \begin{cases} \frac{2^{\nu-1} \Delta^{2\nu-1}}{\pi^{1/2} (abc)^{\nu} \Gamma(\nu+1/2)}, & \text{если существует треугольник со} \\ & \text{сторонами } a, b, c; \Delta - \text{площадь} \\ & \text{этого треугольника,} \\ 0, & \text{если } a, b, c \text{ не являются сто-} \\ & \text{ронами некоторого треуголь-} \\ & \text{ника} \end{cases}$	<p>если существует треугольник со сторонами a, b, c; Δ — площадь этого треугольника,</p> <p>если a, b, c не являются сторонами некоторого треугольника</p> <p style="text-align: right;">$a, b, c > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$</p>
(9)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} J_{\lambda}(ax) J_{\mu}(bx) J_{\nu}(cx) dx =$ $= \frac{2^{\rho-1} a^{\lambda} b^{\mu} c^{-\lambda-\mu-\rho} \Gamma(\lambda/2 + \mu/2 + \nu/2 + \rho/2)}{\Gamma(\lambda+1) \Gamma(\mu+1) \Gamma(1-\lambda/2 - \mu/2 + \nu/2 - \rho/2)} \times$ $\times F_4\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+\rho}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2}; \lambda+1, \mu+1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right),$ <p style="text-align: center;">$\operatorname{Re}(\lambda + \mu + \nu + \rho) > 0, \operatorname{Re} \rho < 5/2, a, b, c > 0, c > a + b.$</p> <p>Относительно частных случаев см. Ватсон Г. Н., 1949, п. 13.46; Bailey W. N., 1936: Proc. London Math. Soc. (2), 40, 37—48.</p>	
(10)	$\int_0^{\infty} x^{1-2\nu} [J_{\nu}(ax) J_{\nu}(bx)]^2 dx =$ $= \frac{a^{2\nu-1} b^{-1} \Gamma(\nu)}{2\pi \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(2\nu+1/2)} {}_2F_1\left(\nu, 1/2 - \nu, 2\nu + 1/2; \frac{a^2}{b^2}\right),$ <p style="text-align: right;">$\operatorname{Re} \nu > 0, 0 < a < b$</p>	
(11)	$\int_0^{\infty} x^{1-\nu} [J_{\nu}(x) Y_{-\nu}(x) + Y_{\nu}(x) J_{-\nu}(x)] J_{\nu}(2ax) dx =$ $= \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ \frac{a^{\nu-1} (a^2 - 1)^{\nu-1/2}}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu+1/2)}, & a > 1 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">$-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1$</p>	
(12)	$\int_0^{\infty} x^{\mu+1} [J_{\nu}(x) Y_{\mu}(x) + J_{\mu}(x) Y_{\nu}(x)] J_{\nu}(2ax) dx =$ $= \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ -\frac{a^{-\mu-1} (a^2 - 1)^{-\mu/2-1/4}}{\pi^{1/2} 2^{\mu+1/2}} P_{\nu-1/2}^{\mu+1/2}(a), & a > 1 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">$-1 < \operatorname{Re} \mu < 1/2, \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$</p>	
(13)	$\int_0^{\infty} x^{1+\mu} Y_{\mu}(ax) J_{\nu}(bx) J_{\nu}(cx) dx = 0,$	<p style="text-align: right;">$0 < b < c, 0 < a < c - b$</p>

$$(14) \int_0^{\infty} x J_{\nu}^2(ax) J_{\nu}(bx) Y_{\nu}(bx) dx = \begin{cases} 0, & 0 < a < b \\ -(2\pi ab)^{-1}, & -0 < b < a \end{cases}$$

$\operatorname{Re} \nu > -1/2$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{2\nu+1} J_{\nu}(ax) Y_{\nu}(ax) J_{\nu}(bx) Y_{\nu}(bx) dx =$$

$$= \frac{a^{2\nu} \Gamma(3\nu+1)}{2\pi b^{4\nu+2} \Gamma(1/2-\nu) \Gamma(2\nu+3/2)} {}_2F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, 3\nu+1; 2\nu + \frac{3}{2}; \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$0 < a < b, -1/3 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$

$$(16) \int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(ax) Y_{\nu}(bx) - J_{\nu}(bx) Y_{\nu}(ax)}{x \{ [J_{\nu}(bx)]^2 + [Y_{\nu}(bx)]^2 \}} dx = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu},$$

$0 < b < a$

Относительно других интегралов такого вида см. п. 6.8.

$$(17) \int_0^{\infty} \frac{[J_{\nu}(ax) Y_{\nu}(bx) - J_{\nu}(bx) Y_{\nu}(ax)]}{[J_{\nu}(bx)]^2 + [Y_{\nu}(bx)]^2} \times$$

$$\times [J_{\nu+1}(cx) Y_{\nu}(bx) - J_{\nu}(bx) Y_{\nu+1}(cx)] dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{b^{2\nu}}{a^{\nu} c^{\nu+1}}, & 0 < b < c < a \\ \frac{a^{\nu}}{c^{\nu+1}} - \frac{b^{2\nu}}{a^{\nu} c^{\nu+1}}, & 0 < b < a < c \end{cases}$$

$$(18) \int_0^{\infty} \frac{[J_{\nu}(ax) Y_{\nu}(bx) - J_{\nu}(bx) Y_{\nu}(ax)]}{[J_{\nu}(bx)]^2 + [Y_{\nu}(bx)]^2} \times$$

$$\times [J_{\nu+1}(ax) Y_{\nu}(bx) - J_{\nu}(bx) Y_{\nu+1}(ax)] dx = \frac{1}{2a} - \frac{b^{2\nu}}{a^{2\nu+1}},$$

$0 < b < a$

$$(19) \int_0^{\infty} \frac{J_0(ax) Y_0(bx) - J_0(bx) Y_0(ax)}{[J_0(bx)]^2 + [Y_0(bx)]^2} \frac{x dx}{\lambda^2 + x^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{K_0(a\lambda)}{K_0(b\lambda)},$$

$\operatorname{Re} \lambda > 0, 0 < b < a$

$$(20) \int_0^{\infty} \frac{J_0(ax) Y_0(bx) - J_0(bx) Y_0(ax)}{[J_0(bx)]^2 + [Y_0(bx)]^2} \frac{x dx}{c^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{J_0(ac) J_0(bc) + Y_0(ac) Y_0(bc)}{[J_0(bc)]^2 + [Y_0(bc)]^2}, \quad 0 < b < a, \quad c > 0$$

$$(21) \int_0^a J_\nu(x) J_{-\nu}(a-x) dx = \sin a, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$$

$$(22) \int_0^a J_\nu(x) J_{1-\nu}(a-x) dx = J_0(a) - \cos a, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 2$$

$$(23) \int_0^a J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{\mu+\nu+2m+1}(a),$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(24) \int_0^a x^{-1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx = \mu^{-1} J_{\mu+\nu}(a), \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(25) \int_0^a x^{\lambda-1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx =$$

$$= 2^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\lambda + \mu + m) (\lambda)_m}{m! \Gamma(\mu + m + 1)} J_{\lambda+\mu+\nu+2m}(a),$$

$$\operatorname{Re}(\lambda + \mu) > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(26) \int_0^a x^{-1} (a-x)^{-1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx = (\mu^{-1} + \nu^{-1}) a^{-1} J_{\mu+\nu}(a),$$

$$\operatorname{Re} \mu > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(27) \int_0^a x^{\lambda-1} (a-x)^{-1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx =$$

$$= \frac{2^\lambda}{\nu a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\lambda + \mu + m) (\lambda)_m}{m! \Gamma(\mu + m + 1)} (\lambda + \mu + \nu + 2m) J_{\lambda+\mu+\nu+2m}(a),$$

$$\operatorname{Re}(\lambda + \mu) > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(28) \int_0^a x^\mu (a-x)^\nu J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx = \frac{\Gamma(\mu + 1/2) \Gamma(\nu + 1/2)}{2^{1/2} \pi^{1/2} \Gamma(\mu + \nu + 1)} a^{\mu+\nu+1/2} J_{\mu+\nu+1/2}(a),$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1/2, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(29) \int_0^a x^\mu (a-x)^{\nu+1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu + 1/2) \Gamma(\nu + 3/2)}{2^{1/2} \pi^{1/2} \Gamma(\mu + \nu + 2)} a^{\mu+\nu+3/2} J_{\mu+\nu+1/2}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} \mu > -1/2$$

$$(30) \int_0^a x^\mu (a-x)^{-\mu-1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx = \frac{2^\mu \Gamma(\mu + 1/2) \Gamma(\nu - \mu)}{\pi^{1/2} \Gamma(\mu + \nu + 1)} a^\mu J_\nu(a),$$

$$\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1/2$$

$$(31) \int_0^a x^{\sigma-1} (a-x)^{\sigma-1} J_\mu(x) J_\nu(a-x) dx,$$

$$\int_0^a x^{\sigma-1} (a-x)^{\sigma-1} J_\lambda(bx) J_\mu(cx) J_\nu(a-x) dx.$$

Относительно этих интегралов и их частных случаев см. Bailey W. N., 1930: Proc. London Math. Soc. (2), 30, 422—424 и 31, 200—208; Rutgers J. G., 1931: Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 44, 75—85.

$$(32) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_\mu[a(x+y)] J_\nu[a(x+z)]}{(x+y)^\mu (x+z)^\nu} dx = \frac{(2\pi/a)^{1/2} \Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu + 1/2) \Gamma(\nu + 1/2)} \frac{J_{\mu+\nu-1/2}[a(y-z)]}{(y-z)^{\mu+\nu-1/2}},$$

$$a > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > 0$$

$$(33) \int_0^\infty x^2 J_{2\nu}(2ax) J_{\nu-1/2}(x^2) dx = 2^{-1} a J_{\nu+1/2}(a^2),$$

$$a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(34) \int_0^\infty x^2 J_{2\nu}(2ax) J_{\nu+1/2}(x^2) dx = 2^{-1} a J_{\nu-1/2}(a^2),$$

$$a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(35) \int_0^\infty x^2 J_{2\nu}(2ax) Y_{\nu+1/2}(x^2) dx = -2^{-1} a H_{\nu-1/2}(a^2),$$

$$a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(36) \int_0^\infty x J_0(4ax) [J_0(x^2)]^2 dx = -2^{-2} J_0(a^2) Y_0(a^2),$$

$$a > 0$$

$$(37) \int_0^\infty x J_0(4ax) J_0(x^2) Y_0(x^2) dx = -2^{-2} [J_0(a^2)]^2,$$

$$a > 0$$

$$(38) \int_0^{\infty} x^{(\nu+2)/3} \sin(x^2) J_{(\nu+1/2)/3}(x^2) J_{\nu}(4ux) dx =$$

$$= -\frac{a^{(\nu-1)/3}}{8} \left[J_{(\nu+1/2)/3}(a^2) \sin\left(a^2 + \frac{\nu-1}{6}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + Y_{(\nu+1/2)/3}(a^2) \cos\left(a^2 + \frac{\nu-1}{4}\pi\right) \right], \quad -5/2 > \operatorname{Re} \nu < -1,$$

$$(39) \int_0^{\infty} x^{(\nu+2)/3} \cos(x^2) J_{(\nu+1/2)/3}(x^2) J_{\nu}(2ux) dx =$$

$$= \frac{a^{(\nu-1)/3}}{8} \left[J_{(\nu+1/2)/3}(a^2) \cos\left(a^2 + \frac{\nu-1}{6}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + Y_{(\nu+1/2)/3}(a^2) \sin\left(a^2 + \frac{\nu-1}{6}\pi\right) \right], \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(40) \int_0^{\infty} x \sin(ax^2) J_{\nu}(bx^2) J_{2\nu}(2cx) dx =$$

$$= \begin{cases} 2^{-1} h \sin(ac^2 h) J_{\nu}(bc^2 h), & 0 < a < b \\ 2^{-1} k \cos(ac^2 k) J_{\nu}(bc^2 k), & 0 < b < a \end{cases}$$

$$\operatorname{Re} \nu > -1, \quad h = (b^2 - a^2)^{-1/2}, \quad k = (a^2 - b^2)^{-1/2}$$

$$(41) \int_0^{\infty} x \cos(ax^2) J_{\nu}(bx^2) J_{2\nu}(2cx) dx =$$

$$= \begin{cases} 2^{-1} h \cos(ac^2 h) J_{\nu}(bc^2 h), & 0 < a < b \\ 2^{-1} k \sin(ac^2 k) J_{\nu}(bc^2 k), & 0 < b < a \end{cases}$$

$$\operatorname{Re} \nu > -1/2, \quad h = (b^2 - a^2)^{-1/2}, \quad k = (a^2 - b^2)^{-1/2}$$

$$(42) \int_0^a \frac{x^2}{a^2 - x^2} J_{1/4}(x) J_{-1/4}(x) J_{2\nu}(2a^2 - 2x^2) dx =$$

$$= \frac{a}{4\nu} J_{\nu+1/4}(a^2) J_{\nu-1/4}(a^2), \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(43) \int_0^{\infty} J_{\nu}\left(\frac{x}{a}\right) J_{\nu+1}\left(\frac{b}{x}\right) \frac{dx}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} J_{2\nu+1}\left(\frac{2b^{1/2}}{a^{1/2}}\right), \quad a, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(44) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} J_{\mu}(ax) J_{\nu}(bx^{-1}) dx =$$

$$= 2^{\rho-1} a^{-\rho} G_{04}^{20}\left(\frac{a^2 b^2}{16} \mid \frac{\nu}{2}, \frac{\rho+\mu}{2}, \frac{\rho-\mu}{2}, -\frac{\nu}{2}\right),$$

$$a, b > 0, \operatorname{Re}(\rho - \nu) < 3/2, \operatorname{Re}(\rho + \mu) > -3/2$$

$$(45) \quad \int_0^{\infty} J_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Y_{\nu} \left(\frac{x}{b} \right) dx = b \left[\frac{2}{\pi} K_{2\nu} \left(\frac{2a^{1/2}}{b^{1/2}} \right) + Y_{2\nu} \left(\frac{2a^{1/2}}{b^{1/2}} \right) \right],$$

$$a, b > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(46) \quad \int_0^{\infty} J_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Y_{\nu} \left(\frac{x}{b} \right) \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a} \left[\frac{2}{\pi} K_{2\nu} \left(\frac{2a^{1/2}}{b^{1/2}} \right) - Y_{2\nu} \left(\frac{2a^{1/2}}{b^{1/2}} \right) \right],$$

$$a, b > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(47) \quad \int_0^{\infty} Y_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Y_{\nu} \left(\frac{x}{b} \right) dx = -b J_{2\nu} \left(\frac{2a^{1/2}}{b^{1/2}} \right),$$

$$a, b > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

19.4. Функции Бесселя других аргументов

$$(1) \quad \int_0^{\infty} x^{\nu+1} y^{\mu} J_{\nu}(ax) J_{\mu}(by) dx =$$

$$= \begin{cases} a^{\nu} b^{\mu} (\beta/h)^{\mu+\nu+1} [\sin(\nu\pi) Y_{\mu+\nu+1}(\beta h) - \\ \quad - \cos(\nu\pi) J_{\mu+\nu+1}(\beta h)], & 0 < a < b \\ -2\pi^{-1} a^{\nu} b^{\mu} (\beta/k)^{\mu+\nu+1} \sin(\mu\pi) K_{\mu+\nu+1}(\beta k), & 0 < b < a \end{cases}$$

$$a, b > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(2) \quad \int_0^{\infty} x^{\nu+1} y^{\mu} J_{\nu}(ax) Y_{\mu}(by) dx =$$

$$= \begin{cases} -a^{\nu} b^{\mu} (\beta/h)^{\mu+\nu+1} [\sin(\nu\pi) J_{\mu+\nu+1}(\beta h) + \cos(\nu\pi) Y_{\mu+\nu+1}(\beta h)], & 0 < a < b \\ -2\pi^{-1} a^{\nu} b^{\mu} (\beta/k)^{\mu+\nu+1} \cos(\mu\pi) K_{\mu+\nu+1}(\beta k), & 0 < b < a \end{cases}$$

$$a, b > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} x^{\nu+1} y^{-\mu} J_{\nu}(ax) Y_{\mu}(by) dx =$$

$$= \begin{cases} a^{\nu} b^{-\mu} (\beta/h)^{\nu-\mu+1} Y_{\mu-\nu-1}(\beta h), & 0 < a < b \\ -2\pi^{-1} a^{\nu} b^{-\mu} (\beta/k)^{\nu-\mu+1} K_{\mu-\nu-1}(\beta k), & 0 < b < a \end{cases}$$

$$a, b > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$y = (x^2 + \beta^2)^{1/2}, \quad h = (b^2 - a^2)^{1/2}, \quad k = (a^2 - b^2)^{1/2}$$

$$(4) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} y^{-\mu} (x^2 + \lambda^2)^{-1} \left[\cos\left(\frac{\rho-\nu}{2} \pi\right) J_{\nu}(ax) + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{\rho-\nu}{2} \pi\right) Y_{\nu}(ax) \right] J_{\mu}(by) dx = \\ = -\lambda^{\rho-2} \frac{J_{\mu} [b (\beta^2 - \lambda^2)^{1/2}]}{(\beta^2 - \lambda^2)^{\mu/2}} K_{\nu}(a\lambda), \quad 0 < b < a \\ |\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re} \mu + 4, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [a(x+\lambda)]}{x+\lambda} \frac{J_{\nu}(by)}{y^{\nu}} dx = \pi \frac{J_{\nu} [b (\beta^2 + \lambda^2)^{1/2}]}{(\beta^2 + \lambda^2)^{\nu/2}}, \quad 0 < b < a, \operatorname{Re} \nu > -3/2$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [a(x-z)]}{x-z} \frac{J_{\nu} [a(x^2 - 2bx \cos \theta + b^2)^{1/2}]}{(x^2 - 2bx \cos \theta + b^2)^{\nu/2}} dx = \\ = \pi \frac{J_{\nu} [a(z^2 - 2bz \cos \theta + b^2)^{1/2}]}{(z^2 - 2bz \cos \theta + b^2)^{\nu/2}}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \left(\frac{a+bx}{ax+b}\right)^{\nu} J_{2\nu} [x^{-1/2} (a+bx)^{1/2} (ax+b)^{1/2}] dx = \\ = -\pi [J_{\nu+\rho}(a) Y_{\nu-\rho}(b) + J_{\nu-\rho}(b) Y_{\nu+\rho}(a)], \\ a, b > 0, -3/4 < \operatorname{Re} \rho < 3/4$$

$$(8) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \left(\frac{a+bx}{ax+b}\right)^{\nu} Y_{2\nu} [x^{-1/2} (a+bx)^{1/2} (ax+b)^{1/2}] dx = \\ = \pi [J_{\nu+\rho}(a) J_{\nu-\rho}(b) - Y_{\nu+\rho}(a) Y_{\nu-\rho}(b)], \\ a, b > 0, -3/4 < \operatorname{Re} \nu < 3/4$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \left(\frac{a+bx}{ax+b}\right)^{\nu} H_{\nu}^{(2)} [x^{-1/2} (a+bx)^{1/2} (ax+b)^{1/2}] dx = \\ = -i\pi H_{\nu+\rho}^{(2)}(a) H_{\nu-\rho}^{(2)}(b), \quad a, b > 0, -3/4 < \operatorname{Re} \nu < 3/4$$

$$(10) \int_0^{\infty} \operatorname{ch} x \cos (2a \operatorname{sh} x) J_{\nu}(be^x) J_{\nu}(be^{-x}) dx = \\ = \begin{cases} 2^{-1} (b^2 - a^2)^{-1/2} J_{2\nu} [2(b^2 - a^2)^{1/2}], & 0 < a < b \\ 0, & 0 < b < a \\ \operatorname{Re} \nu > -1 \end{cases}$$

$$y = (x^2 + \beta^2)^{1/2}$$

(11)	$\int_0^{\infty} \operatorname{ch} x \cos (2a \operatorname{sh} x) Y_{\nu} (be^x) Y_{\nu} (be^{-x}) dx =$ $= \begin{cases} -2^{-1} (b^2 - a^2)^{-1/2} J_{2\nu} [2 (b^2 - a^2)^{1/2}], & 0 < a < b \\ 2\pi^{-1} \cos (\nu\pi) (a^2 - b^2)^{-1/2} K_{2\nu} [2 (a^2 - b^2)^{1/2}], & 0 < b < a \\ & -1 < \operatorname{Re} \nu < 1 \end{cases}$
(12)	$\int_0^{\infty} \operatorname{ch} x \sin (2a \operatorname{sh} x) [J_{\nu} (be^x) Y_{\nu} (be^{-x}) - Y_{\nu} (be^x) J_{\nu} (be^{-x})] dx =$ $= \begin{cases} 0, & 0 < a < b \\ -2\pi^{-1} \cos (\nu\pi) (a^2 - b^2)^{-1/2} K_{2\nu} [2 (a^2 - b^2)^{1/2}], & 0 < b < a \\ & -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2 \end{cases}$
(13)	$\int_0^{\pi} \sin (2\mu x) J_{2\nu} (2\alpha \sin x) dx = \pi \sin (\mu\pi) J_{\nu-\mu} (\alpha) J_{\nu+\mu} (\alpha), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$
(14)	$\int_0^{\pi} \cos (2\mu x) J_{2\nu} (2\alpha \sin x) dx = \pi \cos (\mu\pi) J_{\nu-\mu} (\alpha) J_{\nu+\mu} (\alpha), \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$
(15)	$\int_0^{\pi/2} \cos (2nx) J_0 (2\alpha \sin x) dx = 2^{-1} \pi [J_n (\alpha)]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
(16)	$\int_0^{\pi/2} \cos (2nx) Y_0 (2\alpha \sin x) dx = 2^{-1} \pi J_n (\alpha) Y_n (\alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots$
(17)	$\int_0^{\pi} [\operatorname{tg} (x/2)]^{-2\kappa} e^{-\beta \cos x} J_{2\nu} (\alpha \sin x) dx =$ $= \frac{\Gamma (1/2 + \kappa + \nu) \Gamma (1/2 - \kappa + \nu)}{\alpha \{\Gamma (2\nu + 1)\}^2} M_{\kappa, \nu} [\beta + (\beta^2 - \alpha^2)^{1/2}] M_{\kappa, \nu} [\beta - (\beta^2 - \alpha^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \nu + 1/2 > \operatorname{Re} \kappa $
(18)	$\int_0^{\pi/2} \cos (2\beta \cos x) J_{2\nu} (2\alpha \sin x) dx =$ $= 2^{-1} \pi J_{\nu} [(\beta^2 + \alpha^2)^{1/2} + \beta] J_{\nu} [(\beta^2 + \alpha^2)^{1/2} - \beta], \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$
(19)	$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\nu+1} \cos (\beta \cos x) J_{\nu} (\alpha \sin x) dx =$ $= 2^{-1/2} \pi^{1/2} \alpha^{\nu} (\alpha^2 + \beta^2)^{-\nu/2-1/4} J_{\nu+1/2} [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}], \quad \operatorname{Re} \nu > -1$

(20)	$\int_0^{\pi/2} \sin(2x) P_n(\cos 2x) J_\nu(\alpha \sin x) dx = 2\alpha^{-1} J_{2n+1}(\alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots$
(21)	$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\nu+1} \cos(\alpha \cos \theta \cos x) C_{2n}^{\nu+1/2}(\cos x) J_\nu(\alpha \sin \theta \sin x) dx =$ $= (-1)^n 2^{-1/2} \pi^{1/2} (\sin \theta)^\nu \alpha^{-1/2} C_{2n}^{\nu+1/2}(\cos \theta) J_{\nu+2n+1/2}(\alpha),$ $n = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$
(22)	$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\nu+1} \sin(\alpha \cos \theta \cos x) C_{2n+1}^{\nu+1/2}(\cos x) J_\nu(\alpha \sin \theta \sin x) dx =$ $= (-1)^n 2^{-1/2} \pi^{1/2} (\sin \theta)^\nu \alpha^{-1/2} C_{2n+1}^{\nu+1/2}(\cos \theta) J_{\nu+2n+3/2}(\alpha),$ $n = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$
(23)	$\int_0^{\pi/2} \cos(2\mu x) J_{2\nu}(2\alpha \cos x) dx = 2^{-1} \pi J_{\nu+\mu}(\alpha) J_{\nu-\mu}(\alpha) \quad \operatorname{Re} \nu \geq -1/2$
(24)	$\int_0^{\pi/2} \cos(2\mu x) Y_{2\nu}(2\alpha \cos x) dx =$ $= 2^{-1} \pi \operatorname{ctg}(2\nu\pi) J_{\nu+\mu}(\alpha) J_{\nu-\mu}(\alpha) - \frac{\pi J_{\mu-\nu}(\alpha) J_{-\mu-\nu}(\alpha)}{2 \sin(2\nu\pi)},$ $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$
(25)	$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\mu+1} (\cos x)^{\nu+1} J_\mu(\alpha \sin x) J_\nu(\beta \cos x) dx =$ $= \alpha^\mu \beta^\nu (\alpha^2 + \beta^2)^{-(\mu+1/2)/2} J_{\mu+\nu+1}[(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}],$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1$
(26)	$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\rho (\cos x)^\sigma J_\mu(\alpha \sin x) J_\nu(\beta \sin x) dx,$ $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\rho (\cos x)^\sigma J_\mu(\alpha \sin x) J_\nu(\beta \cos x) dx.$ <p>См. Bailey W. N., 1938: Quart. J. Math. Oxford Ser. 9, 141—147.</p>
(27)	$\int_0^\pi (\sin x)^{2\nu} \frac{J_\nu(\omega)}{\omega^\nu} dx = 2^\nu \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) \frac{J_\nu(\alpha)}{\alpha^\nu} \frac{J_\nu(\beta)}{\beta^\nu},$ $\omega = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$

$$(28) \int_0^{\pi} (\sin x)^{2\nu} \frac{Y_{\nu}(\omega)}{\omega^{\nu}} dx = 2^{\nu} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) \frac{J_{\nu}(\alpha)}{\alpha^{\nu}} \frac{Y_{\nu}(\beta)}{\beta^{\nu}},$$

$$\omega = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x)^{1/2}, \quad |\alpha| < |\beta|, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(29) \int_0^{\pi} (\sin x)^{2\nu} C_n^{\nu}(\cos x) \frac{J_{\nu}(\omega)}{\omega^{\nu}} dx = \frac{\pi \Gamma(2\nu + n)}{2^{\nu-1} n! \Gamma(\nu)} \frac{J_{\nu+n}(\alpha)}{\alpha^{\nu}} \frac{J_{\nu+n}(\beta)}{\beta^{\nu}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(30) \int_0^{\pi} (\sin x)^{2\nu} C_n^{\nu}(\cos x) \frac{Y_{\nu}(\omega)}{\omega^{\nu}} dx = \frac{\pi \Gamma(2\nu + n)}{2^{\nu-1} n! \Gamma(\nu)} \frac{J_{\nu+n}(\alpha)}{\alpha^{\nu}} \frac{Y_{\nu+n}(\beta)}{\beta^{\nu}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x)^{1/2}, \quad |\alpha| < |\beta|, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(31) \int_0^{\infty} e^{-2\mu x} Y_{2\nu}(2a \operatorname{sh} x) dx = \operatorname{ctg}(2\nu\pi) I_{\mu+\nu}(a) K_{\mu-\nu}(a) - \frac{I_{\mu-\nu}(a) K_{\mu+\nu}(a)}{\sin(2\nu\pi)},$$

$$a > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -3/2, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(32) \int_0^{\infty} [\operatorname{cth}(x/2)]^{-2\kappa} \{ \sin[(\mu - \kappa)\pi] J_{2\mu}(a \operatorname{sh} x) +$$

$$+ \cos[(\mu - \kappa)\pi] Y_{2\mu}(a \operatorname{sh} x) \} dx = -a^{-1} W_{\kappa, \mu}(a) W_{-\kappa, \mu}(a),$$

$$a > 0, \quad \operatorname{Re} \kappa > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2$$

$$(33) \int_0^{\infty} \operatorname{sh} x [\operatorname{th}(x/2)]^{\nu} e^{-\beta \operatorname{ch} x} J_{\nu}(\alpha \operatorname{sh} x) dx =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \left[\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + \beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \right]^{-\nu/2} \exp[-(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}],$$

$$\operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Re} \alpha|, \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(34) \int_0^{\infty} [\operatorname{cth}(x/2)]^{2\kappa} e^{-\beta \operatorname{ch} x} J_{2\mu}(\alpha \operatorname{sh} x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu)}{\alpha \Gamma(2\mu + 1)} M_{-\kappa, \mu}[(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta] W_{\kappa, \mu}[(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + \beta],$$

$$\operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Re} \alpha|, \quad \operatorname{Re}(\mu - \kappa) > -1/2$$

$$(35) \int_0^{\infty} [\operatorname{cth}(x/2)]^{2\kappa} e^{-\beta \operatorname{ch} x} Y_{2\mu}(\alpha \operatorname{sh} x) dx =$$

$$= -\frac{W_{\kappa, \mu}(h) W_{-\kappa, \mu}(k)}{\alpha \cos[(\mu + \kappa)\pi]} - \frac{\operatorname{tg}[(\mu + \kappa)\pi] \Gamma(1/2 - \kappa + \mu)}{\alpha \Gamma(2\mu + 1)} W_{\kappa, \mu}(h) M_{-\kappa, \mu}(k),$$

$$h = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + \beta, \quad k = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - \beta$$

$$\operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Re} \alpha|, \quad \operatorname{Re} \kappa < 1/2 - |\operatorname{Re} \mu|$$

(36)	$\int_0^{c\infty} (\operatorname{sh} x)^{\mu+1} (\operatorname{ch} x)^{\nu+1} J_{\mu}(a \operatorname{sh} x) H_{\nu}^{(2)}(b \operatorname{ch} x) dx =$ $= \begin{cases} -e^{-\mu\pi i} a^{\mu} b^{\nu} h^{-\mu-\nu-1} H_{\mu+\nu+1}^{(2)}(h), & 0 < a < b \\ 2i\pi^{-1} e^{\nu\pi i} a^{\mu} b^{\nu} k^{-\mu-\nu-1} K_{\mu+\nu+1}(k), & 0 < b < a \end{cases}$ $h = (b^2 - a^2)^{1/2}, \quad k = (a^2 - b^2)^{1/2}$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 0$
(37)	$\int_0^{\infty} (\operatorname{sh} x)^{\mu+1} (\operatorname{ch} x)^{1-\nu} J_{\mu}(a \operatorname{sh} x) I_{\nu}^{(2)}(b \operatorname{ch} x) dx =$ $= \begin{cases} a^{\mu} b^{-\nu} h^{\nu-\mu-1} H_{\nu-\mu-1}^{(2)}(h), & 0 < a < b \\ 2i\pi^{-1} a^{\mu} b^{-\nu} k^{\nu-\mu-1} K_{\nu-\mu-1}(k), & 0 < b < a \end{cases}$ $h = (b^2 - a^2)^{1/2}, \quad k = (a^2 - b^2)^{1/2},$ $\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1$
(38)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(2\kappa x - \beta \operatorname{th} x)}{\operatorname{ch} x} J_{2\mu}\left(\frac{a}{\operatorname{ch} x}\right) dx =$ $= \frac{\Gamma(1/2 + \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa + \mu)}{\alpha [\Gamma(2\mu + 1)]^2} M_{\kappa, \mu}(h) M_{\kappa, \mu}(k),$ $h + k = 2\beta, \quad hk = a^2, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \kappa - 1/2$

19.5. Модифицированные функции Бесселя аргумента x

Относительно интегралов, содержащих $\operatorname{ber}_{\nu} x$, $\operatorname{bei}_{\nu} x$, $\operatorname{ker}_{\nu} x$, $\operatorname{kei}_{\nu} x$ и подобные им функции, см. McLachlan N. W., 1955: Bessel functions for engineers, Oxford, Second edition.

(1)	$\int_0^a I_{\nu}(x) dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{\nu+2n+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$
(2)	$\int_0^a x^{\nu} I_{\nu}(x) dx = 2^{\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) a [I_{\nu}(a) L_{\nu-1}(a) - L_{\nu}(a) I_{\nu-1}(a)],$ $\operatorname{Re} \nu > -1/2$
(3)	$\int_0^a x^{\nu+1} I_{\nu}(x) dx = a^{\nu+1} I_{\nu+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$
(4)	$\int_0^a x^{1-\nu} I_{\nu}(x) dx = a^{1-\nu} I_{\nu-1}(a) - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}$

(5)	$\int_0^a x^\nu (a^2 - x^2)^{\nu-1/2} I_\nu(x) dx = 2^{-\nu-1} \pi^{1/2} a^{2\nu} \Gamma(\nu + 1/2) [I_\nu(a/2)]^2$
(6)	$\int_0^a x^{\nu+1} (a^2 - x^2)^{\sigma-1} I_\nu(x) dx = 2^{\sigma-1} a^{\nu+\sigma} \Gamma(\sigma) I_{\nu+\sigma}(a),$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \sigma > 0$
(7)	$\int_0^a x^{\rho-1} (a^2 - x^2)^{\sigma-1} I_\nu(x) dx =$ $= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}\right) \Gamma(\sigma) a^{\nu+\rho+2\sigma-2}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2} + \sigma\right)} {}_1F_2\left(\frac{\nu+\rho}{2}; \nu+1, \frac{\nu+\rho}{2} + \sigma; \frac{a^2}{4}\right),$ $\operatorname{Re}(\rho + \nu) > 0, \operatorname{Re}(\sigma) > 0$
(8)	$\int_0^a x^{n+1} \exp(-x^2) I_n(2ax) dx =$ $= 2^{-2} a^n [\exp(a^2) - \exp(-a^2)] \sum_{r=-n}^n I_r(2a^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$
(9)	$\int_0^a x^{\nu+1} y^{-1} \cos y I_\nu(x) dx = \frac{\pi^{1/2} a^{2\nu+1}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 1/2)}, \quad y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \operatorname{Re} \nu > -1$
(10)	$\int_0^a y^{-1} \operatorname{ch}(y \operatorname{sh} t) I_{2\nu}(x) dx = 2^{-1} \pi I_\nu(2^{-1} a e^t) I_\nu(2^{-1} a e^{-t}),$ $y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \operatorname{Re} \nu > -1/2$
(11)	$\int_0^a e^{-x} P_n(1 - 2xa^{-1}) I_0(x) dx = \frac{ae^{-a}}{2n+1} [I_n(a) + I_{n+1}(a)]$
(12)	$\int_0^a x^\mu e^{-x} P_\nu(1 - 2x/a) I_\mu(x) dx.$ См. Bose B. N., 1948: Bull. Calcutta Math. Soc. 40, 8-14.
(13)	$\int_0^\infty x^{-1/3} e^{-x} \sin(4ax^{1/2}) I_{1/3}(x) dx = (2\pi)^{-1/2} a^{1/3} \exp(-a^2) K_{1/3}(a^2), \quad a > 0$

(14)	$\int_0^{\infty} x^{-\nu} e^{-x} \sin(4ax^{1/2}) I_{\nu}(x) dx =$ $= (2^{3/2}a)^{\nu-1} \exp(-a^2) W_{1/2-3\nu/2, 1/2-\nu/2}(2a^2), \quad a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$
(15)	$\int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} \cos(4ax^{1/2}) I_0(x) dx = (2\pi)^{-1/2} \exp(-a^2) K_0(a^2), \quad a > 0$
(16)	$\int_0^{\infty} x^{-\nu-1/2} e^{-x} \cos(4ax^{1/2}) I_{\nu}(x) dx =$ $= 2^{3\nu/2-1} a^{\nu-1} \exp(-a^2) W_{-3\nu/2, \nu/2}(2a^2), \quad a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2$
(17)	$\int_a^{\infty} (x^2 - a^2)^{-1/2} T_n(ax^{-1}) K_{2\mu}(x) dx = \frac{\pi}{2a} W_{n/2, \mu}(a) W_{-n/2, \mu}(a),$ $n = 0, 1, 2, \dots$
(18)	$\int_0^{\infty} (1 + x/\alpha)^{\mu} e^{-x} P_{\nu}^{-2\mu}(1 + 2x/\alpha) I_{\mu}(x) dx = 0,$ $-1/2 < \operatorname{Re} \mu < 0, \quad -1/2 + \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu < -1/2 - \operatorname{Re} \mu$
(19)	$\int_0^{\infty} (x + \alpha)^{-\mu} e^{-x} P_{\nu}^{-2\mu}(1 + 2x/\alpha) I_{\mu}(x) dx =$ $= \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu + \nu + 1/2) \Gamma(\mu - \nu - 1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(2\mu + \nu + 1) \Gamma(2\mu - \nu)} e^{\alpha} W_{1/2-\mu, 1/2+\nu}(2\alpha),$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu + 1/2 $
(20)	$\int_a^{\infty} x^{1-n} \exp(-x^2) I_n(2ax) dx =$ $= 2^{-2} a^{-n} \left[\exp(a^2) - \exp(-a^2) \sum_{r=1}^{n-1} I_r(2a^2) \right], \quad n = 1, 2, \dots$
(21)	$\int_0^a x^{\nu} K_{\nu}(x) dx =$ $= 2^{\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2) a [K_{\nu}(a) L_{\nu-1}(a) + L_{\nu}(a) K_{\nu-1}(a)], \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$
(22)	$\int_0^a x^{\nu+1} K_{\nu}(x) dx = 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) - a^{\nu+1} K_{\nu+1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu > -1$

$$(23) \int_0^a x^{1-\nu} K_\nu(x) dx = 2^{-\nu} \Gamma(1-\nu) - a^{1-\nu} K_{\nu-1}(a), \quad \operatorname{Re} \nu < 1$$

$$(24) \int_0^a x^\mu (a^2 - x^2)^{\mu-1/2} K_\mu(x) dx = 2^{\mu-1} \pi^{1/2} a^{2\mu} \Gamma(\mu + 1/2) I_\mu(a/2) K_\mu(a/2), \\ \operatorname{Re} \mu > -1/2$$

$$(25) \int_0^a y^{-1} \operatorname{ch}(y \operatorname{sh} t) K_{2\nu}(x) dx = \\ = \frac{\pi^2}{4 \sin(\nu\pi)} [I_{-\nu}(ac') I_{-\nu}(ae^{-t}) - I_\nu(ae^t) I_\nu(ae^{-t})], \\ y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(26) \int_0^a x J_\nu(\lambda x) K_\nu(x) dx = \\ = (x^2 + \lambda^2)^{-1} [(\lambda/x)^\nu + \lambda a J_{\nu+1}(\lambda a) K_\nu(x a) - \lambda a J_\nu(\lambda a) K_{\nu+1}(x a)], \\ \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(27) \int_0^a x^{2\nu+1} P_\mu(1 - 2x^2 a^{-2}) I_\nu(x) K_\nu(x) dx. \\ \text{См. Bose B. N., 1948: Bull. Calcutta Math. Soc. 40, 8-14.}$$

$$(28) \int_0^a x^{2\nu+1} P_n[(1 - x^2 a^{-2})^{1/2}] I_\nu(x) K_\nu(x) dx. \\ \text{См. Bose B. N., 1944: Bull. Calcutta Math. Soc. 37, 125-132.}$$

$$(29) \int_0^\infty x^{-1/2} (x + \alpha)^{-1} e^{-x} K_\nu(x) dx = \frac{\pi e^\alpha}{\alpha^{1/2} \cos(\nu\pi)} K_\nu(\alpha), \\ |\arg \alpha| < \pi, \quad |\operatorname{Re} \nu| < 1/2$$

$$(30) \int_0^\infty x^{-1/4} \exp(-2\alpha x^{1/2}) K_{1/4}(x) dx = \\ = \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{1/2} K_{1/4}(\alpha^2) + 2^{-1} \pi^{3/2} \alpha^{1/2} [L_{-1/4}(\alpha^2) - L_{1/4}(\alpha^2)]$$

$$(31) \int_0^\infty x^{-1/2} y^{-1} e^{-y} K_\nu(x) dx = \frac{\pi^{3/2} \alpha^{-1/2} K_\nu(\alpha)}{\Gamma(3/4 + \nu/2) \Gamma(3/4 - \nu/2) \cos(\nu\pi)}, \\ y = (x^2 + \alpha^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

(32)	$\int_0^{\infty} x^{-1/2} y^{-1} e^{-y} K_{\nu}(x) dx = \frac{\pi P_{\nu-1/2}(-\cos \varphi) K_{\nu}(\alpha)}{\alpha^{1/2} \cos(\nu\pi)},$ $y = (x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x \cos \varphi)^{1/2}, \quad \arg \alpha + \operatorname{Re} \varphi < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$	
(33)	$\int_0^{\infty} x^{-3/2} (1 + \alpha^2/x)^{-1/2} \exp[-(\beta + x)(1 + \alpha^2/x)^{1/2}] K_{\nu}(x) dx =$ $= 4\alpha^{-1} K_{\nu}(\beta) K_{2\nu}(2\alpha\beta^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\alpha\beta) > 0$	
(34)	$\int_0^{\infty} x \sin\left(\frac{a}{2x}\right) K_0(x) dx = 2^{-1} \pi a J_1(a^{1/2}) K_1(a^{1/2}),$	$a > 0$
(35)	$\int_0^{\infty} x \cos\left(\frac{a}{2x}\right) K_0(x) dx = -2^{-1} \pi a Y_1(a^{1/2}) K_1(a^{1/2}),$	$a > 0$
(36)	$\int_0^{\infty} x^{-1/3} e^x \sin(4ax^{1/2}) K_{1/3}(x) dx = (\pi/2)^{1/2} a^{1/3} \exp(a^2) K_{1/3}(a^2),$	$a > 0$
(37)	$\int_0^{\infty} x^{-1/3} e^{-x} \sin(4ax^{1/2}) K_{1/3}(x) dx = 2^{-1/2} \pi^{3/2} a^{1/3} \exp(-a^2) I_{1/3}(a^2)$	
(38)	$\int_0^{\infty} x^{-\nu} e^x \sin(4ax^{1/2}) K_{\nu}(x) dx =$ $= (2^{3/2} a)^{\nu-1} \pi \frac{\Gamma(3/2 - 2\nu)}{\Gamma(1/2 + \nu)} \exp(a^2) W_{3\nu/2-1/2, 1/2-\nu/2}(2a^2),$	$a > 0, 0 < \operatorname{Re} \nu < 3/4$
(39)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-3/2} e^{-x} \sin(4ax^{1/2}) K_{\nu}(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} \alpha \Gamma(\rho + \nu) \Gamma(\rho - \nu)}{2^{\rho-2} \Gamma(\rho + 1/2)} {}_2F_2(\rho + \nu, \rho - \nu; 3/2, \rho + 1/2; -2a^2),$	$\operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \nu $
(40)	$\int_0^{\infty} x^{-1/2} e^x \cos(4ax^{1/2}) K_0(x) dx = (\pi/2)^{1/2} \exp(a^2) K_0(a^2),$	$a > 0$
(41)	$\int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} \cos(4ax^{1/2}) K_0(x) dx = 2^{-1/2} \pi^{3/2} \exp(-a^2) I_0(a^2)$	

(42)	$\int_0^{\infty} x^{-\nu-1/2} e^{-x} \cos(4ax^{1/2}) K_{\nu}(x) dx =$ $= 2^{3\nu/2-1} \pi a^{\nu-1} \frac{\Gamma(1/2-2\nu)}{\Gamma(1/2+\nu)} \exp(a^2) W_{3\nu/2, -\nu/2}(2a^2),$ $a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$
(43)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x} \cos(4ax^{1/2}) K_{\nu}(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\rho+\nu) \Gamma(\rho-\nu)}{2^{\rho} \Gamma(\rho+1/2)} {}_2F_2(\rho+\nu, \rho-\nu; 1/2, \rho+1/2; -2a^2), \operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \nu $
(44)	$\int_0^{\infty} x^{n+2\nu-1/2} \exp[-(1+a)x] L_n^{2\nu}(ax) K_{\nu}(x) dx =$ $= \frac{\pi^{1/2} \Gamma(n+\nu+1/2) \Gamma(n+3\nu+1/2)}{2^{n+2\nu+1/2} n! \Gamma(2\nu+1)} {}_2F_1(n+\nu+1/2, n+3\nu+1/2; 2\nu+1; -a/2),$ $\operatorname{Re} a > -2, \operatorname{Re}(n+\nu) > -1/2, \operatorname{Re}(n+3\nu) > -1/2$
(45)	$\int_a^{\infty} x^{-\nu} (x^2 - a^2)^{1/4-\nu/2} P_{\mu}^{\nu-1/2}(2a^2 x^{-2} - 1) K_{\nu}(x) dx =$ $= \pi^{1/2} 2^{-\nu} a^{-1/2-\nu} W_{\mu+1/2, \nu-1/2}(a) W_{-\mu-1/2, \nu-1/2}(a), \operatorname{Re} \nu < 3/2$
(46)	$\int_0^{\infty} x^{-1} \exp\left(\frac{a^2}{2x} - x\right) \operatorname{Erfc}\left[\frac{a}{(2x)^{1/2}}\right] K_{\nu}(x) dx =$ $= \frac{\pi^{5/2}}{4 \cos(\nu\pi)} \{[J_{\nu}(a)]^2 + [Y_{\nu}(a)]^2\}, \operatorname{Re} a > 0, -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$
(47)	$\int_0^{\infty} J_{\mu}(x) K_{\nu}(x) x^{\mu-\nu+1} dx = 2^{-1} \Gamma(\mu - \nu + 1),$ $\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re}(\mu - \nu) > -1$
(48)	$\int_0^{\infty} e^{-2ax} I_0(x) K_0(x) dx =$ $= \begin{cases} 2^{-1} K[(1-a^2)^{1/2}], & 0 < a < 1 \\ (2a)^{-1} K[(1-a^{-2})^{1/2}], & 1 < a < \infty \end{cases}$
(49)	$\int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) [I_{\nu}(x) + I_{-\nu}(x)] K_{\nu}(x) dx = a e^a K_{\nu}(a),$ $\operatorname{Re} a > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$

(50)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} \sin(2\alpha x) K_{\mu}(x) K_{\nu}(x) dx =$ $= \frac{2^{\rho-1} \alpha}{\Gamma(\rho+1)} \Gamma\left(\frac{\rho+\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho+\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\mu-\nu+1}{2}\right) \times$ $\times {}_4F_3\left(\frac{\rho+\mu+\nu+1}{2}, \frac{\rho+\mu-\nu+1}{2}, \frac{\rho-\mu+\nu+1}{2}, \frac{\rho-\mu-\nu+1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{\rho+1}{2}, \frac{\rho}{2}+1; -\alpha^2\right), \quad \operatorname{Re} \alpha < 1, \operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu - 1$
(51)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} \cos(2\alpha x) K_{\mu}(x) K_{\nu}(x) dx =$ $= \frac{2^{\rho-3}}{\Gamma(\rho)} \Gamma\left(\frac{\rho+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\mu-\nu}{2}\right) \times$ $\times {}_4F_3\left(\frac{\rho+\mu+\nu}{2}, \frac{\rho+\mu-\nu}{2}, \frac{\rho-\mu+\nu}{2}, \frac{\rho-\mu-\nu}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\rho}{2}, \frac{\rho+1}{2}; -\alpha^2\right),$ $ \operatorname{Re} \alpha < 1, \operatorname{Re} \rho > \operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu $
(52)	$\int_0^{\infty} x^3 \cos\left(\frac{x^2}{2a}\right) Y_1(x) K_1(x) dx = -a^3 K_0(a), \quad a > 0$

19.6. Модифицированные функции Бесселя других аргументов

(1)	$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{2a}\right) K_{2\nu}(x e^{i\pi/4}) K_{2\nu}(x e^{-i\pi/4}) dx =$ $= \frac{\Gamma(1/4+\nu) \Gamma(1/4-\nu)}{8a^{1/2} \pi^{-1/2}} W_{1/4, \nu}(a e^{i\pi/2}) W_{1/4, \nu}(a e^{-i\pi/2}),$ $a > 0, -1/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$
(2)	$\int_0^{\infty} x^{-1/2} I_{\nu}(x) K_{\nu}(x) K_{\mu}(2x) dx =$ $= \frac{\Gamma(1/4+\mu/2) \Gamma(1/4-\mu/2) \Gamma(1/4+\nu+\mu/2) \Gamma(1/4+\nu-\mu/2)}{4 \Gamma(3/4+\nu+\mu/2) \Gamma(3/4+\nu-\mu/2)},$ $ \operatorname{Re} \mu < 1/2, 2 \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu - 1/2$
(3)	$\int_0^{\infty} [J_0(ax) Y_1(bx) + 2\pi^{-1} I_0(ax) K_1(bx)] dx = 0, \quad 0 < a < b$
(4)	$\int_0^{\infty} x^{\rho} [Y_{\mu}(ax) \pm 2\pi^{-1} K_{\mu}(ax)] [Y_{\nu}(bx) \pm 2\pi^{-1} K_{\nu}(bx)] dx.$ <p>См. Dixon A. L. and W. L. Ferrar, 1930: Quart. J. Math. Oxford Ser. 1, 122-145.</p>

$$(5) \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(cx) K_1(ax) J_0(bx) dx, \quad \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(cx) K_0(ax) J_0(bx) dx.$$

См. Watson G. N., 1928: J. London Math. Soc. 3, 22—27.

$$(6) \int_0^{\infty} x J_0(ax) I_0(\beta x) K_0(\gamma x) dx = [(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4\beta^2\gamma^2]^{-1/2},$$

$\operatorname{Re} \gamma > |\operatorname{Im} \alpha| + |\operatorname{Re} \beta|$

$$(7) \int_0^{\infty} x J_0(ax) I_1(\beta x) K_1(\gamma x) dx =$$

$$= \frac{1}{2\beta\gamma} \{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) [(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4\beta^2\gamma^2]^{1/2} - 1\},$$

$\operatorname{Re} \gamma > |\operatorname{Im} \alpha| + |\operatorname{Re} \beta|$

$$(8) \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} J_{\mu}(ax) J_{\nu}(\beta x) K_{\rho}(\gamma x) dx =$$

$$= \frac{2^{\lambda-2} \alpha^{\mu} \beta^{\nu} \gamma^{-\lambda-\mu-\nu}}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)} \Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu-\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2}\right) \times$$

$$\times F_4\left(\frac{\lambda+\mu+\nu-\rho}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2}; \mu+1, \nu+1; -\frac{\alpha^2}{\gamma^2}, -\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right),$$

$\operatorname{Re}(\lambda + \mu + \nu) > |\operatorname{Re} \rho|, \operatorname{Re} \gamma > |\operatorname{Im} \alpha| + |\operatorname{Im} \beta|$

$$(9) \int_0^{\infty} x [J_0(ax) K_0(bx)]^2 dx = \frac{\pi}{8ab} - \frac{1}{4ab} \arcsin\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right), \quad a, b > 0$$

$$(10) \int_0^{\infty} J_{\nu}(ax) J_{\nu}(bx) K_{\nu}(ax) K_{\nu}(bx) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \frac{2^{2\nu-3} a^{2\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\nu+1}{2}\right)}{b^{4\nu+2} \pi^{1/2} \Gamma(\nu+1)} {}_2F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, \frac{3\nu+1}{2}; 2\nu+1; 1 - \frac{a^4}{b^4}\right),$$

$0 < a < b, \operatorname{Re} \nu > -1/3$

Относительно других интегралов такого типа см. п. 6.8.

$$(11) \int_0^{\infty} x^{-\mu} e^x P_{\nu}^{2\mu}(1 + 2x/\alpha) K_{\mu}(x + \alpha) dx =$$

$$= \pi^{-1/2} 2^{\mu-1} \cos(\mu\pi) \Gamma(\mu + \nu + 1/2) \Gamma(\mu - \nu + 1/2) W_{1/2-\mu, 1/2+\nu}(2\alpha),$$

$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \nu + 1/2|$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{-\mu/2} (x+a)^{-1/2} e^{-x} P_{\nu-1/2}^{\mu} \left(\frac{a-x}{a+x} \right) K_{\nu}(a+x) dx = \\ = (\pi/2)^{1/2} a^{-\mu/2} \Gamma(\mu, 2a), \quad a > 0, \operatorname{Re} \mu < 1$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^{\mu-1} (x+\beta)^{-\mu} I_{\mu}(x+\beta) K_{\nu}(x) dx.$$

См. MacRobert T. M., 1950: Functions of a complex variable. Macmillan, стр. 379.

$$(14) \int_0^{\infty} x^{\mu-1} |x-b|^{-\mu} K_{\mu}(|x-b|) K_{\nu}(x) dx = \\ = \pi^{-1/2} (2b)^{-\mu} \Gamma(1/2 - \mu) \Gamma(\mu + \nu) \Gamma(\mu - \nu) K_{\nu}(b), \\ b > 0, \operatorname{Re} \mu < 1/2, \operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \nu|$$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{\mu-1} (x+\beta)^{-\mu} K_{\mu}(x+\beta) K_{\nu}(x) dx = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\mu + \nu) \Gamma(\mu - \nu)}{2^{1/2} \beta^{\mu} \Gamma(\mu + 1/2)} K_{\nu}(\beta), \\ |\arg \beta| < \pi, \operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \nu|$$

$$(16) \int_0^{\infty} x^{1+2\nu} J_{2\nu-1}(2\alpha x) K_{2\nu-1}(2\alpha x) J_{\nu}(x^2) dx = \pi^{-1/2} 2^{\nu-2} \alpha^{2\nu-1} K_{\nu-1/2}(2\alpha^2), \\ |\arg \alpha| < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(17) \int_0^{\infty} x^{1-2\nu} J_{2\nu+1}(2\alpha x) K_{2\nu+1}(2\alpha x) J_{\nu}(x^2) dx = \\ = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\nu-3} \alpha^{-2\nu-1}}{\sin(\nu\pi)} [I_{\nu+1/2}(2\alpha^2) - L_{\nu+1/2}(2\alpha^2)], \quad |\arg \alpha| < \pi/4, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(18) \int_0^{\infty} x^{1-2\nu} Y_{2\nu+1}(2\alpha x) K_{2\nu+1}(2\alpha x) J_{\nu}(x^2) dx = \\ = \pi^{1/2} 2^{-\nu-3} \alpha^{-2\nu-1} \operatorname{ctg}(\nu\pi) \left[I_{\nu+1/2}(2\alpha^2) - L_{\nu+1/2}(2\alpha^2) + \frac{2 K_{\nu+1/2}(2\alpha^2)}{\pi \cos(\nu\pi)} \right], \\ |\arg \alpha| < \pi/4, -1 < \operatorname{Re} \nu < 0$$

$$(19) \int_0^{\infty} x^{3-2\nu} K_{2\nu}(2\alpha x) [\cos(\nu\pi) J_{2\nu}(2\alpha x) - \sin(\nu\pi) Y_{2\nu}(2\alpha x)] J_{\nu}(x^2) dx = \\ = \pi^{-1/2} 2^{-\nu-1} \alpha^{1-2\nu} K_{\nu+1/2}(2\alpha^2), \quad |\arg \alpha| < \pi/4, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$$

- (20)
$$\int_0^{\infty} x J_{\nu}(x^2) [\sin(\nu\pi) J_{\nu}(x^2) - \cos(\nu\pi) Y_{\nu}(x^2)] J_{4\nu}(4ax) dx =$$

$$= 2^{-2} J_{\nu}(a^2) J_{-\nu}(a^2), \quad a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$
- (21)
$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} K_{\mu}(ax) J_{\nu}(bx^{-1}) dx = 2^{\rho-2} a^{-\rho} G_{04}^{30} \left(\frac{\alpha^2 b^2}{16} \left| \frac{\nu}{2}, \frac{\rho+\mu}{2}, \frac{\rho-\mu}{2}, -\frac{\nu}{2} \right. \right),$$

$$b > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 3/2$$
- (22)
$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} K_{\mu}(ax) Y_{\nu}(bx^{-1}) dx =$$

$$= (-1)^{m+1} 2^{\rho-2} a^{-\rho} G_1^{40} \left(\frac{\alpha^2 b^2}{16} \left| \frac{1-\nu}{2} - m, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{\rho+\nu}{2}, \frac{\rho-\mu}{2}, \frac{1-\nu}{2} - m \right. \right),$$

$$m - \text{целое}, \quad b > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 3/2$$
- (23)
$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(ax) K_{\nu}(\beta x^{-1}) dx = \pi a^{-1} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2}\beta^{1/2}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$$
- (24)
$$\int_0^{\infty} x^{2\nu-1/2} K_{1/2-\nu}(ax) K_{\nu}(\beta x^{-1}) dx =$$

$$= (2\pi)^{1/2} a^{-\nu-1/2} \beta^{\nu} K_{2\nu}[(2\alpha\beta)^{1/2} e^{\pi i/4}] K_{2\nu}[(2\alpha\beta)^{1/2} e^{-\pi i/4}],$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$$
- (25)
$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} K_{\mu}(ax) K_{\nu}(\beta x^{-1}) dx =$$

$$= 2^{\rho-3} a^{-\rho} G_{04}^{40} \left(\frac{\alpha^2 \beta^2}{16} \left| \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{\rho+\mu}{2}, \frac{\rho-\mu}{2} \right. \right), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$$
- (26)
$$\int_0^{\infty} x^{-2} [K_{\nu}(ax)]^2 J_0(bx^{-1}) dx =$$

$$= -2\pi b^{-1} K_{2\nu}(2\alpha^{1/2}b^{1/2}) [\sin(\nu\pi) J_{2\nu}(2\alpha^{1/2}b^{1/2}) + \cos(\nu\pi) Y_{2\nu}(2\alpha^{1/2}b^{1/2})],$$

$$b > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, -1/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/4$$
- (27)
$$\int_0^a x^{\mu+1} y^{-\mu-2} J_{\mu}(x) I_{\nu}(y) dx = \frac{\Gamma(\nu/2 - \mu/2) (a/2)^{\mu}}{\Gamma(\nu/2 + \mu/2 + 1)} J_{\nu}(a),$$

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1$$

$$(28) \int_0^a x^{2\nu} y^{-2\nu-1} J_{2\nu-1}(2x) K_{2\mu}(2y) dx =$$

$$= -2^{-2} \Gamma(1/2 + \mu - \nu) \Gamma(1/2 - \mu - \nu) a^{2\nu-1} \times$$

$$\times \{ \sin [(\mu - \nu) \pi] J_{2\mu}(2a) + \cos [(\mu - \nu) \pi] Y_{2\mu}(2a) \},$$

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1/2 - |\operatorname{Re} \mu|$$

$$(29) \int_0^a x^{1-3\nu} y^{2\nu-1} J_{-3\nu}(2x) I_\nu(y) I_{\nu-1}(y) dx = \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{2\pi^{1/2} a^{2\nu}} J_\nu(a) J_{-\nu}(a),$$

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1/3$$

$$(30) \int_0^a x^{1-2\nu} y^{2\nu-3/2} I_{-\nu}(x) K_\nu(x) J_{2\nu-3/2}(2y) dx =$$

$$= -2^{-2} \Gamma(1/2 - \nu) a^{\nu-1} Y_\nu(2a),$$

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad 1/4 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(31) \int_0^a x J_\lambda(2x) I_\lambda(2x) J_\mu(2y) I_\mu(2y) dx = \frac{a^{2\lambda+2\mu+2}}{2 \Gamma(\lambda+1) \Gamma(\mu+1) \Gamma(\lambda+\mu+2)} \times$$

$$\times {}_1F_4\left(\frac{\lambda+\mu+1}{2}; \lambda+1, \mu+1, \lambda+\mu+1, \frac{\lambda+\mu+3}{2}; -a^4\right),$$

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \mu > -1$$

$$(32) \int_0^a x^{\kappa-1/2} (a-x)^{-\kappa-1/2} e^{-x \operatorname{sh} t} I_{2\mu}[x^{1/2}(a-x)^{1/2}] dx =$$

$$= \frac{2 \Gamma(1/2 + \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa + \mu)}{a [\Gamma(2\mu + 1)]^2} M_{\kappa, \mu}(2^{-1} a e^t) M_{-\kappa, \mu}(2^{-1} a e^{-t}),$$

$$\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \kappa| - 1/2$$

$$(33) \int_0^\infty x^{\nu-1} (\alpha^2 + x^2)^{-\nu/2} K_\nu[(\alpha^2 + x^2)^{1/2}] K_\mu(x) dx =$$

$$= 2^{\nu-2} \alpha^{-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) K_\mu(\alpha),$$

$$\operatorname{Re} \nu > |\operatorname{Re} \mu|, \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$(34) \int_0^\infty x^{\nu-1} y^{-\nu} K_\nu(y) K_\mu(x) dx =$$

$$= 2^{-1/2} \pi^{1/2} \beta^{1/2-\nu} c^{-1/2} \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) P_{\mu-\nu}^{1/2-\nu}(a/c) K_\mu(c),$$

$$y = [(x + \alpha)^2 + \beta^2]^{1/2}, \quad c = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$$

$$\operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Im} \alpha|, \operatorname{Re} \nu > |\operatorname{Re} \mu|$$

(35)	$\int_0^{\infty} x^{-\kappa-1/2} (\alpha+x)^{\kappa-1/2} K_{2\mu} [x^{1/2} (\alpha+x)^{1/2}] dx =$ $= \alpha^{-1} \Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu) W_{\kappa, \mu} (2^{-1} \alpha e^{i\pi/2}) W_{\kappa, \mu} (2^{-1} \alpha e^{-i\pi/2}),$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \kappa + \operatorname{Re} \mu < 1/2$
(36)	$\int_0^{\infty} x^{-1/2} (\alpha+x)^{-1/2} e^{-x \operatorname{ch} t} K_{\nu} [x^{1/2} (\alpha+x)^{1/2}] dx =$ $= \frac{\exp(2^{-1} \alpha \operatorname{ch} t)}{2 \cos(\nu\pi/2)} K_{\nu/2} (2^{-2} \alpha e^t) K_{\nu/2} (2^{-2} \alpha e^{-t}),$ $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$
(37)	$\int_0^{\infty} x^{-\kappa-1/2} (\alpha+x)^{\kappa-1/2} \exp(-\beta x) K_{2\mu} [x^{1/2} (\alpha+x)^{1/2}] dx =$ $= \alpha^{-1} e^{\alpha\beta/2} \Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu) W_{\kappa, \mu}(z_1) W_{\kappa, \mu}(z_2),$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \kappa + \operatorname{Re} \mu < 1/2$ $z_1, z_2 = 2^{-1} \alpha [\beta \pm (\beta^2 - 1)^{1/2}]$
(38)	$\int_0^{\infty} x^{\rho-1} \left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha x + \beta} \right)^{\nu} K_{2\nu} [x^{-1/2} (\alpha + \beta x)^{1/2} (\alpha x + \beta)^{1/2}] dx = 2 K_{\nu+\rho}(\alpha) K_{\nu-\rho}(\beta),$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$
(39)	$\int_0^{\pi/2} \cos [(\mu - \nu) x] I_{\mu+\nu} (2\alpha \cos x) dx = 2^{-1} \pi I_{\mu}(\alpha) I_{\nu}(\alpha),$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$
(40)	$\int_0^{\pi/2} \cos [(\mu - \nu) x] K_{\mu+\nu} (2\alpha \cos x) dx =$ $= \frac{\pi}{2 \sin [(\mu + \nu) \pi]} [I_{-\mu}(\alpha) I_{-\nu}(\alpha) - I_{\mu}(\alpha) I_{\nu}(\alpha)], \quad -1 < \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1$
(41)	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\kappa x)}{\cos x} K_{2\mu} \left(\frac{\alpha}{\cos x} \right) dx = \frac{\pi}{2\alpha} W_{\kappa, \mu}(\alpha) W_{-\kappa, \mu}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$
(42)	$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}(2\mu x) K_{2\nu} (2\alpha \operatorname{ch} x) dx = 2^{-1} K_{\mu+\nu}(\alpha) K_{\mu-\nu}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$

(43)	$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2\kappa x)}{\operatorname{ch} x} J_{2\mu} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{ch} x} \right) dx = \frac{\Gamma(1/2 + \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa + \mu)}{2\alpha [\Gamma(2\mu + 1)]^2} M_{\kappa, \mu}(\alpha) M_{-\kappa, \mu}(\alpha),$ $ \operatorname{Re} \kappa - \operatorname{Re} \mu < 1/2$
(44)	$\int_0^{\infty} (\operatorname{sh} x)^{\mu+1} (\operatorname{ch} x)^{-2\mu-3/2} P_{\nu}^{-\mu} [\operatorname{ch}(2x)] J_{\mu-1/2} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{ch} x} \right) dx =$ $= \frac{2^{\mu-1/2} \Gamma(\mu-\nu) \Gamma(\mu+\nu+1)}{\pi^{1/2} \alpha^{\mu+3/2} \Gamma(\mu+1)^2} M_{\nu+1/2, \mu}(\alpha) M_{-\nu-1/2, \mu}(\alpha),$ $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu, \operatorname{Re} \mu > -\operatorname{Re} \nu - 1$
(45)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho x} \left(\frac{\alpha + \beta e^x}{\alpha e^x + \beta} \right)^{\nu} K_{2\nu} [(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} x)^{1/2}] dx = 2K_{\nu+\rho}(\alpha) K_{\nu-\rho}(\beta),$ $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$

19.7. Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя переменного порядка

(1)	$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\nu-x}(\alpha) J_{\mu+x}(\alpha) dx = J_{\mu+\nu}(2\alpha),$ $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$
(2)	$\int_{-\infty}^{\infty} a^{-\mu-x} b^{-\nu+x} e^{cx} J_{\mu+x}(a) J_{\nu-x}(b) dx =$ $= \begin{cases} \left[\frac{2 \cos(c/2)}{a^2 e^{-ci/2} + b^2 e^{ci/2}} \right]^{\mu/2 + \nu/2} \exp[2^{-1} c(\nu - \mu)i] \times \\ \times J_{\mu+\nu} \left\{ [2 \cos(c/2) (a^2 e^{-ci/2} + b^2 e^{ci/2})]^{1/2} \right\}, & -\pi < c < \pi \\ 0, & c \geq \pi \text{ или } c \leq -\pi \\ & \operatorname{Re}(\mu + \nu) > 1 \end{cases}$
(3)	$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\lambda+x}(\alpha) J_{\lambda-x}(\alpha) J_{\mu+x}(\alpha) J_{\nu-x}(\alpha) dx =$ $= \frac{\Gamma(\kappa + \lambda + \mu + \nu + 1)}{\Gamma(\kappa + \lambda + 1) \Gamma(\lambda + \mu + 1) \Gamma(\mu + \nu + 1) \Gamma(\nu + \kappa + 1)} \times$ $\times {}_1F_3 \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu + \nu + 1}{2}, \frac{\kappa + \lambda + \mu + \nu + 1}{2}, \frac{\kappa + \lambda + \mu + \nu}{2} + 1, \frac{\kappa + \lambda + \mu + \nu}{2} + 1; \right.$ $\left. \kappa + \lambda + \mu + \nu + 1, \kappa + \lambda + 1, \lambda + \mu + 1, \mu + \nu + 1, \nu + \kappa + 1; -4\alpha^2 \right),$ $\operatorname{Re}(\kappa + \lambda + \mu + \nu) > -1$
<p>Относительно аналогичных интегралов см. т. I, стр. 61 и далее и стр. 118.</p>	

(4)	$\int_0^{\infty} J_x(xz) J_{-x}(xz) \cos(\pi x) dx = 2^{-2} (1 - z^2)^{-1/2},$	$ z < 1$
(5)	$\int_0^{\infty} [J_x(xz) J_{-x}(xz) \cos(\pi x) - 1] x^{-2} dx = -2^{-1} \pi^2$	
(6)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{ix}(a) dx}{\operatorname{ch}(\pi x/2)} = 2 \sin a,$	$a > 0$
(7)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{ix}(a) dx}{\operatorname{sh}(\pi x/2)} = -2i \cos a,$	$a > 0$
(8)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi x/2} \cos(bx)}{\operatorname{sh}(\pi x)} J_{ix}(a) dx = -i \exp(ia \operatorname{ch} b),$	$a, b > 0$
(9)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cxi} [J_{v-ix}(a) Y_{v+ix}(b) + Y_{v-ix}(a) J_{v+ix}(b)] dx = -2 (h/k)^{2v} J_{2v}(hk),$ $a, b > 0, c - \text{вещественное}, h = (ae^{c/2} + be^{-c/2})^{1/2}, k = (ae^{-c/2} + be^{c/2})^{1/2}$	
(10)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cxi} [J_{v-ix}(a) J_{v+ix}(b) - Y_{v-ix}(a) Y_{v+ix}(b)] dx = 2 (h/k)^{2v} Y_{2v}(hk),$ $a, b > 0, c - \text{вещественное}, h = (ae^{c/2} + be^{-c/2})^{1/2}, k = (ae^{-c/2} + be^{c/2})^{1/2}$	
(11)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cxi} H_{v-ix}^{(2)}(a) H_{v+ix}^{(2)}(b) dx = 2i (h/k)^{2v} H_{2v}^{(2)}(hk),$ $c - \text{вещественное}, h = (ae^{c/2} + be^{-c/2})^{1/2}, k = (ae^{-c/2} + be^{c/2})^{1/2}$	$a, b > 0,$
(12)	$\int_0^{\infty} \frac{\{ [J_{ix}(a)]^2 + [Y_{ix}(a)]^2 \} dx}{\operatorname{ch}(\pi x)} = -Y_0(2a) + H_0(2a),$	$a > 0$
(13)	$\int_0^{\infty} x e^{\pi x} \operatorname{th}(\pi x) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b) dx = -\frac{2(ab)^{1/2}}{\pi(a+b)} \exp[-ik(a+b)],$	$a, b > 0$

$$(14) \int_0^{\infty} x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma(\nu + ix) \Gamma(\nu - ix) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b) dx = \\ = i2^{\nu} \pi^{1/2} \Gamma(1/2 + \nu) (ab)^{\nu} (a+b)^{-\nu} K_{\nu}(a+b), \quad a, b > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(15) \int_0^{\infty} x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \operatorname{ch}(\pi x) \Gamma(\nu + ix) \Gamma(\nu - ix) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b) dx = \\ = \frac{i\pi^{1/2} 2^{\nu}}{\Gamma(1/2 - \nu)} (b-a)^{-\nu} H_{\nu}^{(2)}(b-a), \quad 0 < a < b, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(16) \int_0^{\infty} x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma\left(\frac{\nu + ix}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - ix}{2}\right) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b) dx = \\ = i\pi 2^{2-\nu} (ab)^{\nu} (a^2 + b^2)^{-\nu/2} H_{\nu}^{(2)}[(a^2 + b^2)^{1/2}], \quad a, b > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(17) \int_0^{\infty} x e^{\pi x} \operatorname{th}(\pi x) P_{-1/2+ix}(-\cos \varphi) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b) dx = -\frac{2(ab)^{1/2}}{\pi R} e^{-iR}, \\ a, b > 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad R = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)^{1/2}$$

$$(18) \int_0^{\infty} x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma(\nu + ix) \Gamma(\nu - ix) P_{-1/2+ix}^{1/2-\nu}(-\cos \varphi) \times \\ \times H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b) dx = i(2\pi)^{1/2} (\sin \varphi)^{\nu-1/2} (ab)^{\nu} R^{-\nu} H_{\nu}^{(2)}(R), \\ a, b > 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad R = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)^{1/2}, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(19) \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(\pi x/2) K_{ix}(a) dx = \pi/2, \quad a > 0$$

$$(20) \int_0^{\infty} x \operatorname{sh}(\pi x/2) K_{ix}(a) dx = \pi a/2, \quad a > 0$$

$$(21) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ix+iy}(a) K_{ix+iz}(b) dx = \pi K_{iy-iz}(\alpha + \beta), \quad |\arg \alpha| + |\arg \beta| < \pi$$

$$(22) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi x} K_{ix+iy}(a) K_{ix+iz}(b) dx = \pi e^{-\pi z} K_{iy-iz}(a-b), \quad a > b > 0$$

$$(23) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho x} K_{\nu+ix}(a) K_{\nu-ix}(b) dx = \pi \left(\frac{\alpha + \beta e^{\rho}}{\alpha e^{\rho} + \beta}\right)^{\nu} K_{2\nu}(\omega), \\ |\arg \alpha| + |\arg \beta| + |\operatorname{Im} \rho| < \pi, \quad \omega = (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{ch} \rho)^{1/2}$$

$$(24) \int_{-\infty}^{\infty} \exp [(\pi - \gamma) x] K_{ix+iy}(a) K_{ix+iz}(b) dx = \pi e^{-\beta y - \alpha z} K_{iy-iz}(c),$$

где $0 < \gamma < \pi$, $a, b, c > 0$ и α, β, γ — углы треугольника со сторонами a, b, c

$$(25) \int_{-\infty}^{\infty} (n + \nu + ix)^{-1} \sin[(\nu + ix)\pi] K_{\nu+ix}(a) K_{\nu-ix}(b) dx =$$

$$= \begin{cases} \pi^2 I_n(a) K_{n+2\nu}(b), & 0 < a < b \\ \pi^2 K_{n+2\nu}(a) I_n(b), & 0 < b < a \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$(26) \int_0^{\infty} \sin(bx) \operatorname{sh}(\pi x) [K_{ix}(a)]^2 dx = 2^{-2} \pi^2 J_0[2a \operatorname{sh}(b/2)], \quad a, b > 0$$

$$(27) \int_0^{\infty} \cos(bx) \operatorname{ch}(\pi x) [K_{ix}(a)]^2 dx = -2^{-2} \pi^2 Y_0[2a \operatorname{sh}(b/2)], \quad a, b > 0$$

$$(28) \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(\rho x) K_{\nu+ix}(a) K_{\nu-ix}(a) dx = 2^{-1} \pi K_{2\nu}[2a \cos(\rho/2)],$$

$2|\arg a| + |\operatorname{Re} \rho| < \pi$

$$(29) \int_{-\infty}^{\infty} (\nu - 1/2 + ix) \Gamma(1/2 - ix) \Gamma(2\nu - 1/2 + ix) P_{\nu-1/2}^{1/2-\nu}(\cos \varphi) \times$$

$$\times I_{\nu-1/2+ix}(a) K_{\nu-1/2+ix}(b) dx = (2\pi)^{1/2} (\sin \varphi)^{\nu-1/2} (ab/\omega)^{\nu} K_{\nu}(\omega),$$

$\omega = (a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi)^{1/2}$

Относительно подобных интегралов см. также главу XII.

19.8. Функции, родственные функциям Бесселя

$$(1) \int_0^{\infty} x J_{\nu}(ax) [J_{\nu}(x) - J_{\nu}(x)] dx = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi a(a+1)}, \quad a > 0$$

$\operatorname{Re} \nu > -1$

$$(2) \int_0^{\infty} x^{-\nu-1} H_{\nu}(x) dx = \frac{2^{-\nu-1} \pi}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \operatorname{Re} \nu > -3/2$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} x^{-\nu-1} \frac{\sin [a(x+\lambda)]}{x+\lambda} H_{\nu}(x) dx = \pi \lambda^{-\nu-1} H_{\nu}(\lambda), \quad a \geq 1, \quad \operatorname{Re} \nu > 5/2$$

$$(4) \int_0^{\infty} x^{1-\mu-\nu} J_{\nu}(x) H_{\mu}(x) dx = \frac{(2\nu-1) 2^{-\mu-\nu}}{(\mu+\nu-1) \Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu+1/2)},$$

$$\operatorname{Re} \nu > 1/2, \quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) > 1$$

$$(5) \int_0^{\infty} [\cos(\nu\pi/2) J_{\nu}(x) + \sin(\nu\pi/2) H_{\nu}(x)] \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} [I_{\nu}(\alpha) - L_{\nu}(\alpha)],$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2$$

$$(6) \int_a^{\infty} x^{1/2} (x^2 - a^2)^{-1/4 - \nu/2} P_{\mu}^{\nu+1/2} (2x^2 a^{-2} - 1) [H_{\nu}(x) - Y_{\nu}(x)] dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} a \cos(\nu\pi)}{2^{\nu+2} \sin(\mu\pi)} \{ [Y_{\nu}(a/2)]^2 - [J_{\nu}(a/2)]^2 \}, \quad -1 < \operatorname{Re} \mu < 0, \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} K_{\mu}(ax) K_{\nu}(ax) H_{\lambda}(x) dx$$

См. Mohan B., 1942: Bull. Calcutta Math. Soc. 34, 55-59.

Относительно других интегралов, содержащих функции Бесселя и функции Струве, см. McLachlan N. W. and A. L. Meyers, 1936: Philos. Mag. 21, 425-448.

$$(8) \int_0^{\infty} x^{-\mu-\nu} H_{\mu}(x) H_{\nu}(x) dx = \frac{2^{-\mu-\nu} \pi^{1/2} \Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\mu+\nu+1/2)},$$

$$\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0$$

$$(9) \int_0^{\pi/2} \cos[(\nu+1)x] H_{\nu}(a \cos x) dx = \pi^{1/2} a^{-1/2} \sin(a/2) J_{\nu+1/2}(a/2),$$

$$\operatorname{Re} \nu > -2$$

$$(10) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\nu x)}{\cos x} \left[H_{2\nu}\left(\frac{a}{\cos x}\right) - Y_{2\nu}\left(\frac{a}{\cos x}\right) \right] dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} a^{-1}}{\Gamma(2\nu+1/2)} W_{\nu,\nu}(ae^{i\pi/2}) W_{\nu,\nu}(ae^{-i\pi/2}), \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(11) \int_0^{\infty} \exp[(\nu + 1)x] H_{\nu}(a \operatorname{sh} x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} a^{-1/2}}{\sin(\nu\pi)} [\operatorname{sh}(a/2) I_{\nu+1/2}(a/2) - \operatorname{ch}(a/2) I_{-\nu-1/2}(a/2)],$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad -2 < \operatorname{Re} \nu < 0$$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{-1} \cos(2ax^{-1}) [J_0(x) - L_0(x)] dx = 2 J_0(2a^{1/2}) K_0(2a^{1/2}), \quad a > 0$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^{\nu-1/2} \exp[-(1+\alpha)x] K_0(\alpha x) L_{\nu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} [\Gamma(\nu+1/2)]^2}{(2\alpha)^{\nu+1/2} \Gamma(\nu+1)} P_{\nu-1/2}(1+\alpha^{-1}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(14) \int_0^a x P_n(1-2x^2a^{-2}) [J_0(x) - L_0(x)] dx = (-1)^n a [J_{2n+1}(a) - L_{2n+1}(a)],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(15) \int_a^{\infty} x^{1/2} (x^2 - a^2)^{-1/4 - \nu/2} P_{\mu}^{\nu+1/2}(2x^2a^{-2} - 1) [I_{-\nu}(x) - L_{\nu}(x)] dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} a \cos(\nu\pi)}{2^{\nu+1} \sin(2\mu\pi)} \{ [I_{\nu}(a/2)]^2 - [I_{-\nu}(a/2)]^2 \}, \quad -1 < \operatorname{Re} \mu < 0, \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(16) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\nu x)}{\cos x} \left[I_{2\nu}\left(\frac{a}{\cos x}\right) - L_{2\nu}\left(\frac{a}{\cos x}\right) \right] dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} a^{-1}}{\Gamma(2\nu+1)} W_{\nu, \nu}(\alpha) M_{-\nu, \nu}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \nu < 1/2$$

$$(17) \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} s_{\mu, \nu}(x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda-\mu} \Gamma\left(1-\frac{\lambda+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\lambda-\nu}{2}\right)},$$

$$-\operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda + 1 < 5/2$$

$$(18) \int_0^{\infty} x^{-\mu-1} \cos(ax) s_{\mu, \nu}(x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 2^{\mu-1/2} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) (1-a^2)^{\mu/2+1/4} P_{\nu-1/2}^{-\mu-1/2}(a), & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$(19) \int_0^{\infty} x^{-\mu} J_{\nu}(ax) s_{\mu+\nu, \mu-\nu+1}(x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) a^{-\nu} (1-a^2)^{\mu}, & 0 < a < 1 \\ & \operatorname{Re} \nu > -1 \end{cases}$$

$$(20) \int_0^{\infty} x^{\nu} K_{1-2\nu}(ax^{1/2}e^{i\pi/4}) K_{1-2\nu}(ax^{1/2}e^{-i\pi/4}) s_{\mu, \nu}(x) dx =$$

$$= 2^{2\mu+2\nu-2} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{\mu+3\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right) S_{-\mu-2\nu-1/2, 1/2-\nu}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi/4, \operatorname{Re}(\mu-\nu) > -3, \operatorname{Re}(\mu+3\nu) > -1$$

$$(21) \int_0^{\pi/2} \cos[(\mu+1)x] s_{\mu, \nu}(\alpha \cos x) dx =$$

$$= 2^{\mu-2} \pi \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) J_{(\mu+\nu+1)/2}(\alpha/2) J_{(\mu-\nu+1)/2}(\alpha/2),$$

$$\operatorname{Re} \mu > -2$$

$$(22) \int_0^{\infty} \exp[(\mu+1)x] s_{\mu, \nu}(a \operatorname{sh} x) dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-2} \pi \Gamma(\rho) \Gamma(\sigma)}{\sin(\mu\pi)} [I_{\rho}(a/2) I_{\sigma}(a/2) - I_{-\rho}(a/2) I_{-\sigma}(a/2)],$$

$$2\rho = \mu + \nu + 1, 2\sigma = \mu - \nu + 1, a > 0, -2 < \operatorname{Re} \mu < 0$$

$$(23) \int_0^{\infty} x^{-\mu} \sin(ax) S_{\mu, \nu}(x) dx =$$

$$= 2^{-\mu-1/2} \pi^{1/2} \Gamma\left(1 - \frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\mu-\nu}{2}\right) (a^2-1)^{\mu/2-1/4} P_{\nu-1/2}^{\mu-1/2}(a),$$

$$a > 1, \operatorname{Re} \mu < 1 - |\operatorname{Re} \nu|$$

$$(24) \int_0^a x^{(\nu-\mu-1)/2} (a^2-x^2)^{(\nu-\mu-2)/4} P_{\nu-1/2}^{(\mu-\nu+2)/2}(x/a) S_{\mu, \nu}(x) dx =$$

$$= 2^{\mu-8/2} \pi^{1/2} a^{(\nu-\mu)/2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-3\nu+3}{4}\right) \cos[2^{-1}(\mu-\nu)\pi] \times$$

$$\times [J_{\nu}(a/2) Y_{-(\mu-\nu+1)/2}(a/2) - Y_{\nu}(a/2) J_{-(\mu-\nu+1)/2}(a/2)],$$

$$\operatorname{Re}(\mu-\nu) < 0, -1 < \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 1, \operatorname{Re}(\mu-3\nu) < 1$$

$$(25) \int_a^{\infty} x^{1/2} (x^2 - a^2)^{-\beta/2} P_{\nu}^{\beta}(x/a) S_{\mu, 1/2}(x) dx =$$

$$= \frac{a^{1/2} \Gamma\left(\frac{\beta - \mu + \nu}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\beta - \mu - \nu}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\pi^{1/2} 2^{3/2 - \beta + \mu} \Gamma(1/2 - \mu)} S_{\mu - \beta + 1, \nu + 1/2}(a),$$

$\operatorname{Re} \beta < 1, \operatorname{Re}(\mu + \nu - \beta) < -1/2, \operatorname{Re}(\mu - \nu - \beta) < 1/2$

$$(26) \int_a^{\infty} x (x^2 - a^2)^{-\nu/2} P_{\lambda}^{\nu}(2x^2 a^{-2} - 1) S_{\mu, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{a \Gamma\left(\frac{\nu - \mu - 1}{2} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2} + \lambda\right)}{2 \Gamma\left(\frac{1 - \mu - \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 - \mu + \nu}{2}\right)} S_{\mu - \nu + 1, 2\lambda + 1}(a),$$

$\operatorname{Re} \nu < 1, \operatorname{Re}(\mu - \nu + \lambda) < -1, \operatorname{Re}(\mu - \nu - \lambda) < 0$

$$(27) \int_a^{\infty} x^{-\nu} (x^2 - a^2)^{1/4 - \nu/2} P_{\mu/2 - \nu/2}^{\nu - 1/2}(2a^2 x^{-2} - 1) S_{\mu, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} 2^{\mu - \nu} \Gamma\left(\frac{3\nu - \mu - 1}{2}\right)}{a^{\nu + 1/2} \Gamma\left(\frac{1 + \nu - \mu}{2}\right)} W_{\rho, \sigma}(ae^{i\pi/2}) W_{\rho, \sigma}(ae^{-i\pi/2}),$$

$\rho = 2^{-1}(\mu + 1 - \nu), \sigma = \nu - 1/2$
 $\operatorname{Re}(\mu - \nu) < 0, \operatorname{Re} \nu < 3/2, \operatorname{Re}(3\nu - \mu) > 1$

$$(28) \int_0^{\infty} x^{1 - \mu - \nu} J_{\nu}(ax) S_{\mu, -\mu - 2\nu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} a^{\nu - 1} \Gamma(1 - \mu - \nu)}{2^{\mu + 2\nu} \Gamma(\nu + 1/2)} (a^2 - 1)^{(\mu + \nu - 1)/2} P_{\mu + \nu}^{\mu + \nu - 1}(a),$$

$a > 1, \operatorname{Re} \nu > -1/2, \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 1$

$$(29) \int_0^{\pi/2} \cos(2\mu x) S_{2\mu - 1, 2\nu}(a \cos x) dx = \frac{\pi 2^{2\mu - 3} a^{2\mu}}{\Gamma(1 - \mu - \nu) \Gamma(1 - \mu + \nu) \sin(2\nu\pi)} \times$$

$$\times [J_{\mu + \nu}(a/2) Y_{\mu - \nu}(a/2) - J_{\mu - \nu}(a/2) Y_{\mu + \nu}(a/2)],$$

$\operatorname{Re} \mu > -2, -1 < \operatorname{Re} \nu < 1$

$$(30) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\mu x)}{\cos x} S_{2\mu, 2\nu}\left(\frac{a}{\cos x}\right) dx = \frac{\pi 2^{2\mu - 1}}{a} W_{\mu, \nu}(ae^{i\pi/2}) W_{\mu, \nu}(ae^{-i\pi/2}),$$

$|\arg a| < \pi, \operatorname{Re} \mu < 1$

(31)	$\int_0^{\infty} (\operatorname{sh} x)^{1/2} \operatorname{ch} (\nu x) S_{\mu, 1/2} (\alpha \operatorname{ch} x) dx =$ $= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu + \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu - \nu}{2}\right)}{2^{\mu + 1/2} \alpha^{1/2} \Gamma(1/2 - \mu)} S_{\mu + 1/2, \nu} (\alpha),$ $ \arg \alpha < \pi, \operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu < 1/2$	
(32)	$\int_0^{\infty} x^{2\nu-1} U_{\nu} (\omega, x) dx = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) \omega^{\nu} \cos (\omega/2),$	$\operatorname{Re} \nu > 0$
(33)	$\int_0^{\infty} x^{2\nu-3} U_{\nu} (\omega, x) dx = 2^{\nu-2} \Gamma(\nu-1) \omega^{\nu-1} \sin (\omega/2),$	$\operatorname{Re} \nu > 1$
(34)	$\int_0^{\infty} x^{1-\nu} \sin (ax/2) U_{\nu} (x, z) dx =$ $= \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 2^{-1} \pi (1-a)^{\nu/2-1} z^{2-\nu} J_{\nu-2} [z(1-a)^{1/2}], & 0 < a < 1 \end{cases}$	
(35)	$\int_0^{\infty} x^{-\nu} \cos (ax/2) U_{\nu} (x, z) dx =$ $= \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 2^{-1} \pi (1-a)^{\nu/2-1/2} z^{1-\nu} J_{\nu-1} [z(1-a)^{1/2}], & 0 < a < 1 \end{cases}$	
(36)	$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} J_{\nu/2-1} \left(\frac{x^2}{2\omega}\right) U_{\nu} (\omega, x) dx = \frac{\omega^{\nu}}{2(\nu-1)} J_{\nu/2} \left(\frac{\omega}{2}\right),$	$\operatorname{Re} \nu > 1$
(37)	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [a(x+z)]}{x+z} U_{\nu} (\omega, x) dx = \pi U_{\nu} (\omega, z),$	$a > 1$

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Большинство высших трансцендентных функций, рассмотренных в главах XVI—XIX, являются частными случаями гипергеометрических функций. В этой главе мы дадим список гипергеометрических функций, не вошедших в главы XVI—XIX, а также обобщенных гипергеометрических функций. Интегралы, приведенные в пп. 20.4 и 20.5, являются ключевыми, и из них можно вывести громадное число интегралов, содержащих частные случаи гипергеометрических функций. Относительно частных случаев E -функции и G -функции см. Приложение. Мы не приводим в этой главе интегралов, содержащих обобщенные гипергеометрические ряды ${}_pF_q$, так как

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) &= \\ &= \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} E(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -x^{-1}) = \\ &= \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} G_{q+1, p}^p \left(-\frac{1}{x} \middle| \begin{matrix} 1, b_1, \dots, b_q \\ a_1, \dots, a_p \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Такие интегралы могут быть выведены из указанных в пп. 20.4 и 20.5. Ввиду большой важности интегралов, содержащих E -функции и G -функции, мы повторяем здесь интегралы от этих функций, приведенные в предыдущих главах, и в некоторых случаях указываем уточненные условия справедливости формул.

Функции параболического цилиндра. Относительно теории этих функций см. ВТФ, т. II, главу VIII и указанную там литературу. См. также книгу Buchholz Herbert, 1953: Die konfluente hypergeometrische Funktion. Springer-Verlag.

$$\begin{aligned} D_\nu(z) &= 2^{\nu/2+1/4} z^{-1/2} W_{\nu/2+1/4, \pm 1/4} \left(\frac{z^2}{2} \right) = \\ &= \frac{2^{-\nu-1} z^\nu}{\pi^{1/2} \Gamma(-\nu)} \exp \left(-\frac{z^2}{4} \right) E \left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2} : : \frac{z^2}{2} \right) = \\ &= 2^{\nu/2} \exp \left(\frac{z^2}{4} \right) G_{12}^{20} \left(\frac{z^2}{2} \middle| \begin{matrix} 1/2 - \nu/2 \\ 0, 1/2 \end{matrix} \right) = \\ &= \frac{2^{-\nu/2-1}}{\pi^{1/2} \Gamma(-\nu)} \exp \left(-\frac{z^2}{4} \right) G_{12}^{21} \left(\frac{z^2}{2} \middle| \begin{matrix} 1 + \nu/2 \\ 0, 1/2 \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Другие выражения через G -функцию и выражения для произведений функций параболического цилиндра могут быть выведены с помощью формул, приведенных в Приложении.

Гипергеометрические ряды Гаусса. Относительно теории этих рядов см. ВТФ, т. I, главу II и указанную там литературу в особенности монографии Гурса, Кампе де Ферье (Kampé de Fériét), Клейна (Klein), Сноу (Snow) и главу XIV книги Уиттекера и Ватсона.

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} E(a, b; c; -x^{-1}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} G_{22}^{21} \left(-\frac{1}{x} \left| \begin{matrix} 1, c \\ a, b \end{matrix} \right. \right).$$

Вычисление интегралов, содержащих гипергеометрические ряды Гаусса, часто облегчается благодаря применению формул преобразования; относительно этих формул см. ВТФ, т. I, пп. 2.9 и 2.11.

Вырожденные гипергеометрические функции. Относительно теории этих функций см. ВТФ, т. I, главу VI и указанную там литературу, в особенности главу XVI книги Уиттекера и Ватсона, а также Трикоми (Tricomi F. G., 1952: *Lezioni sulle funzioni ipergeometriche confluenti*, Torino, Gheroni) и Бухгольца (Buchholz Herbert, 1953: *Die konfluente hypergeometrische Funktion*, Springer-Verlag).

$$\begin{aligned} M_{\kappa, \mu}(z) &= z^{\mu+1/2} e^{-z/2} {}_1F_1(1/2 - \kappa + \mu; 2\mu + 1; z) = \\ &= z^{\mu+1/2} e^{z/2} {}_1F_1(1/2 + \kappa + \mu; 2\mu + 1; -z) = \\ &= \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu)} z^{\mu+1/2} e^{-z/2} E(1/2 - \kappa + \mu; 2\mu + 1; -z^{-1}) = \\ &= \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2 + \kappa + \mu)} z^{\mu+1/2} e^{z/2} E(1/2 + \kappa + \mu; 2\mu + 1; z^{-1}) = \\ &= \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2 + \kappa + \mu)} e^{z/2} G_{12}^{11} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - \kappa \\ 1/2 + \mu, 1/2 - \mu \end{matrix} \right. \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\kappa, \mu}(z) &= \frac{z^{\kappa} e^{-z/2}}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)} E(1/2 - \kappa + \mu, 1/2 - \kappa - \mu; : z) = \\ &= \frac{e^{-z/2}}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)} G_{12}^{21} \left(z \left| \begin{matrix} 1 + \kappa \\ 1/2 + \mu, 1/2 - \mu \end{matrix} \right. \right) = \\ &= e^{z/2} G_{12}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - \kappa \\ 1/2 + \mu, 1/2 - \mu \end{matrix} \right. \right). \end{aligned}$$

Относительно других выражений через G -функцию и выражений для произведений вырожденных гипергеометрических функций см. Приложение.

E -функция Мак-Роберта. Краткое введение в теорию этой функции содержится в ВТФ, т. I, пп. 5.2—5.2.2, а более детальное изложение теории можно найти в книге MacRobert T.M., 1950: *Functions of a complex variable*. Macmillan, Приложение V и Разные примеры III. См. также работы Мак-Роберта, указанные на стр. 286 ВТФ, т. I, и дальнейшие работы Мак-Роберта и его учеников в Proc. Glasgow Math. Ass. т. I, 1953.

$$E(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = G_{q+1, p}^{p, 1} \left(z \left| \begin{matrix} 1, b_1, \dots, b_q \\ a_1, \dots, a_p \end{matrix} \right. \right).$$

Многие высшие трансцендентные функции и некоторые их комбинации являются частными случаями E -функции; часть соответствующих формул приведена в Приложении.

G -функция Мейера. Относительно теории этой функции см. ВТФ, т. I, пп. 5.3—5.6 и работы Мейера, перечисленные на стр. 286 ВТФ, т. I, а также дальнейшие работы Мейера, помещенные в Proc. Nederl. Akad. Wetensch.

Следует отметить, что очень многие интегралы, содержащие специальные функции, могут быть сведены к интегралам от G -функции. Примеры этого и необходимые формулы приведены в работах Мейера. Часть соответствующих формул приведена в Приложении.

20.1. Функции параболического цилиндра

См. также вырожденные гипергеометрические функции, E -функцию, G -функцию.

(1)	$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{3x^2}{4}\right) D_{\nu}(x) dx = 2^{-\nu/2} \Gamma(\nu) \cos(2^{-2}\nu\pi),$	$\operatorname{Re} \nu > 0$
(2)	$\int_0^{\infty} x^{\nu} \exp\left(-\frac{3x^2}{4}\right) D_{\nu-1}(x) dx = 2^{-\nu/2-1} \Gamma(\nu) \sin(2^{-2}\nu\pi),$	$\operatorname{Re} \nu > -1$
(3)	$\int_0^a x^{2\nu-1} (a^2 - x^2)^{\lambda-1} \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) D_{-2\lambda-2\nu}(x) dx =$ $= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(2\nu)}{\Gamma(2\lambda+2\nu)} 2^{\lambda-1} a^{2\lambda+2\nu-2} \exp\left(\frac{a^2}{4}\right) D_{-2\nu}(a),$	$\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$
(4)	$\int_a^{\infty} x^{\nu} (x-a)^{\mu/2-\nu/2-1} \exp[-2^{-2}(x-a)^2] D_{\mu}(x) dx =$ $= 2^{\mu-\nu-2} a^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) D_{\nu}(a),$	$\operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0$
(5)	$\int_{-\infty}^{\infty} (x-ia)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) D_n(x) dx =$ $= -(2\pi)^{1/2} (-i)^n n! \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right) D_{-n-1}(\alpha),$	$n = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{Re} \alpha > 0$
(6)	$\int_0^{\infty} x^{\nu} (x^2 + \alpha^2)^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) D_{\nu}(x) dx =$ $= (\pi/2)^{1/2} \alpha^{\nu-1} \Gamma(\nu+1) \exp\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) D_{-\nu-1}(\alpha),$	$\operatorname{Re} \alpha > 0, 0 < \operatorname{Re} \nu < 1$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{\nu-1} (x^2 + a^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) D_{\nu}(x) dx = \\ = a^{\nu-1} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{a^2}{4}\right) D_{-\nu}(a), \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(8) \int_0^{\infty} x^{2\rho-1} \sin(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) D_{2\nu}(x) dx = \\ = 2^{\nu-\rho-1/2} \pi^{1/2} a \frac{\Gamma(2\rho+1)}{\Gamma(\rho-\nu+1)} {}_2F_2\left(\rho + \frac{1}{2}, \rho + 1; \frac{3}{2}, \rho - \nu + 1; -\frac{a^2}{2}\right), \\ \operatorname{Re} \rho > -1/2$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{2\rho-1} \sin(ax) \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) D_{2\nu}(x) dx = \frac{2^{\rho-\nu-2}}{\Gamma(-2\nu)} G_{23}^{22}\left(\frac{a^2}{2} \left| \begin{matrix} 1/2 - \rho, 1 - \rho \\ -\rho - \nu, 1/2, 0 \end{matrix} \right.\right), \\ a > 0, \operatorname{Re} \rho > -1/2, \operatorname{Re}(\rho + \nu) < 1/2$$

$$(10) \int_0^{\infty} x^{2\rho-1} \cos(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) D_{2\nu}(x) dx = \\ = \frac{2^{\nu-\rho} \Gamma(2\rho) \pi^{1/2}}{\Gamma(\rho - \nu + 1/2)} {}_2F_2\left(\rho, \rho + 1/2; 1/2, \rho - \nu + 1/2; -\frac{a^2}{2}\right), \quad \operatorname{Re} \rho > 0$$

$$(11) \int_0^{\infty} x^{2\rho-1} \cos(ax) \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) D_{2\nu}(x) dx = \\ = \frac{2^{\rho-\nu-2}}{\Gamma(-2\nu)} G_{23}^{22}\left(\frac{a^2}{2} \left| \begin{matrix} 1/2 - \rho, 1 - \rho \\ -\rho - \nu, 0, 1/2 \end{matrix} \right.\right), \quad a > 0, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\rho + \nu) < 1/2$$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{\nu-1/2} \exp[-(x+a)^2] I_{\nu-1/2}(2ax) D_{\nu}(2x) dx = \\ = 2^{-1} \pi^{-1/2} \Gamma(\nu) a^{\nu-1/2} D_{-\nu}(2a), \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^{\nu-3/2} \exp[-(x+a)^2] I_{\nu-3/2}(2ax) D_{\nu}(2x) dx = \\ = 2^{-1} \pi^{-1/2} \Gamma(\nu) a^{\nu-3/2} D_{-\nu}(2a), \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > 1$$

$$(14) \int_0^{\infty} [D_{\nu}(x)]^2 dx = (\pi/2)^{1/2} \Gamma(\nu + 1) + \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/2} \Gamma(\nu)} \left[\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \right]$$

$$(15) \int_0^{\infty} D_{\nu}(x) D_{\mu}(x) dx = \frac{\pi^{2(\mu+\nu+1)/2}}{\mu-\nu} \left[\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \right]$$

$$(16) \int_0^{\infty} J_0(xy) D_{\nu}(x) D_{\nu-1}(-x) dx = y^{-1} [D_{\nu}(y) D_{\nu-1}(y) + 2^{-1} D_{\nu}(y) D_{\nu-1}(-y) + 2^{-1} D_{\nu}(-y) D_{\nu-1}(y)], \quad y > 0$$

$$(17) \int_0^{\infty} J_0(xy) D_{\nu}(x) D_{\nu-1}(x) dx = \frac{1}{2y} [D_{\nu}(y) D_{\nu-1}(-y) - D_{\nu}(-y) D_{\nu-1}(y)]$$

$$(18) \int_0^{\infty} J_0(xy) D_{\nu}(-x) D_{\nu-1}(x) dx = y^{-1} [2^{-1} D_{\nu}(y) D_{\nu-1}(-y) + 2^{-1} D_{\nu}(-y) D_{\nu-1}(y) - D_{\nu}(y) D_{\nu-1}(y)]$$

$$(19) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{-\nu} (\cos x)^{-\mu-2} D_{\nu}(\alpha \sin x) D_{\mu}(\alpha \cos x) dx = -(\pi/2)^{1/2} (\mu+1)^{-1} D_{\mu+\nu+1}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \nu < 1, \operatorname{Re} \mu < -1$$

$$(20) \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(2\mu x) \exp[-(\alpha \operatorname{sh} x)^2] D_{2\kappa}(2\alpha \operatorname{ch} x) dx = 2^{\kappa-3/2} \pi^{1/2} \alpha^{-1} W_{\kappa, \mu}(2\alpha^2), \quad \operatorname{Re} \alpha^2 > 0$$

$$(21) \int_0^{\infty} \operatorname{ch}(2\mu x) \exp[(\alpha \operatorname{sh} x)^2] D_{2\kappa}(2\alpha \operatorname{ch} x) dx = \frac{\Gamma(\mu-\kappa)\Gamma(-\mu-\kappa)}{2^{\kappa+5/2} \alpha \Gamma(-2\kappa)} W_{\kappa+1/2, \mu}(2\alpha^2), \quad |\arg \alpha| < 3\pi/4, \operatorname{Re} \kappa + |\operatorname{Re} \mu| < 0$$

$$(22) \int_0^{\infty} \cos(ax) D_{x-1/2}(\beta) D_{-x-1/2}(\beta) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\cos a} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\beta^2 \cos a}{2}\right), & -\pi/2 < a < \pi/2 \\ 0, & a < -\pi/2 \text{ или } a > \pi/2 \end{cases}$$

20.2. Гипергеометрические ряды Гаусса

См. также функции Лежандра, E-функцию и G-функцию.

$$(1) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha/2) \Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha-\gamma+1) \Gamma(\gamma-\alpha/2-\beta)}{\Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+\alpha/2-\beta) \Gamma(\gamma-\alpha/2)},$$

$$\operatorname{Re} \alpha + 1 > \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re}(\gamma - \alpha/2 - \beta) > 0$$

$$(2) \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\beta-\gamma-n} {}_2F_1(-n, \beta; \gamma; x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\rho) \Gamma(\beta-\gamma+1) \Gamma(\gamma-\rho+n)}{\Gamma(\gamma+n) \Gamma(\gamma-\rho) \Gamma(\beta-\gamma+\rho+1)},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\beta - \gamma) > n - 1$$

$$(3) \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\beta-\rho-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) dx = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\rho) \Gamma(\beta-\rho) \Gamma(\gamma-\alpha-\rho)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\gamma-\rho)},$$

$$\operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\beta - \rho) > 0, \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \rho) > 0$$

$$(4) \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\rho-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) dx = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\rho) \Gamma(\gamma+\rho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha) \Gamma(\gamma+\rho-\beta)},$$

$$\operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\gamma + \rho - \alpha - \beta) > 0$$

$$(5) \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\gamma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma)}{\Gamma(\rho+\sigma)} {}_3F_2(\alpha, \beta, \rho; \gamma, \rho+\sigma; 1),$$

$$\operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re} \sigma > 0, \operatorname{Re}(\gamma + \sigma - \alpha - \beta) > 0$$

$$(6) \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\rho-1} (1-zx)^{-\sigma} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\rho) \Gamma(\gamma+\rho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha) \Gamma(\gamma+\rho-\beta)} (1-z)^\gamma \times$$

$$\times {}_3F_2\left(\rho, \sigma, \gamma+\rho-\alpha-\beta; \gamma+\rho-\alpha, \gamma+\rho-\beta; \frac{z}{1-z}\right),$$

$$\operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\gamma + \rho - \alpha - \beta) > 0, |\arg(1-z)| < \pi$$

$$(7) \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; xz) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma)}{\Gamma(\rho+\sigma)} {}_3F_2(\alpha, \beta, \rho; \gamma, \rho+\sigma; z),$$

$$\operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re} \sigma > 0, |\arg(1-z)| < \pi$$

$$(8) \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\rho-1} e^{-xz} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) dx = \\ = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\rho) \Gamma(\gamma + \rho - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma + \rho - \alpha) \Gamma(\gamma + \rho - \beta)} e^{-z} {}_2F_2(\rho, \gamma + \rho - \alpha - \beta; \gamma + \rho - \alpha, \gamma + \rho - \beta; z), \\ \operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\gamma + \rho - \alpha - \beta) > 0$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{\gamma-1} (1+x)^{-\sigma} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -x) dx = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \gamma + \sigma) \Gamma(\beta - \gamma + \sigma)}{\Gamma(\sigma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + \sigma)}, \\ \operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re}(\alpha - \gamma + \sigma) > 0, \operatorname{Re}(\beta - \gamma + \sigma) > 0$$

$$(10) \int_0^{\infty} x^{\gamma-1} (x+z)^{-\sigma} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -x) dx = \\ = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + \sigma) \Gamma(\beta - \gamma + \sigma) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + \sigma) \Gamma(\sigma)} {}_2F_1(\alpha - \gamma + \sigma, \beta - \gamma + \sigma; \alpha + \beta - \gamma + \sigma; 1-z), \\ \operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re}(\alpha - \gamma + \sigma) > 0, \operatorname{Re}(\beta - \gamma + \sigma) > 0, |\arg z| < \pi$$

$$(11) \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\delta-\gamma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; xz) {}_2F_1[\delta - \alpha, \delta - \beta; \delta - \gamma; (1-x)\zeta] dx = \\ = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\delta - \gamma)}{\Gamma(\delta)} (1-\zeta)^{2\alpha-\delta} {}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; z + \zeta - z\zeta), \\ 0 < \operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \delta, |\arg(1-z)| < \pi, |\arg(1-\zeta)| < \pi$$

$$(12) \int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^{\varepsilon-1} (1-xz)^{-\delta} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; xz) \times \\ \times {}_2F_1\left[\delta, \beta - \gamma; \varepsilon; \frac{(1-x)z}{1-xz}\right] dx = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\gamma + \varepsilon)} {}_2F_1(\alpha + \delta, \beta; \gamma + \varepsilon; z), \\ \operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \varepsilon > 0, |\arg(z-1)| < \pi$$

$$(13) \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} {}_2F_1(\alpha, \beta; 1/2; -x^2) dx = \lambda^{\alpha+\beta-1} S_{1-\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(14) \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} {}_2F_1(\alpha, \beta; 3/2; -x^2) dx = \lambda^{\alpha+\beta-2} S_{1-\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{\gamma-1} (x+y)^{-\alpha} (x+z)^{-\beta} e^{-x} {}_2F_1\left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}\right] dx = \\ = \Gamma(\gamma) (xy)^{-1/2-\mu} e^{y/2+z/2} W_{\kappa, \mu}(y) W_{\lambda, \mu}(z), \\ 2\kappa = 1 - \alpha + \beta - \gamma, \quad 2\lambda = 1 + \alpha - \beta - \gamma, \quad 2\mu = \alpha + \beta - \gamma, \\ \operatorname{Re} \gamma > 0, |\arg y| < \pi, |\arg z| < \pi$$

$$(16) \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-2\nu-1} (x+1)^{-\nu} e^{xz} K_{\nu} [(x+1)z] {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-2\nu; -x) dx =$$

$$= \pi^{-1/2} \cos(\nu\pi) \Gamma(1/2-\alpha+\nu) \Gamma(1/2-\beta+\nu) \Gamma(\nu) (2z)^{-1/2-\nu/2} W_{\nu/2, (\beta-\alpha)/2}(2z),$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta-2\nu) > 0, \operatorname{Re}(1/2-\alpha+\nu) > 0, \operatorname{Re}(1/2-\beta+\nu) > 0,$$

$$|\arg z| < 3\pi/2, \nu = \alpha + \beta - 2\nu$$

20.3. Вырожденные гипергеометрические функции

См. также E -функция, G -функция.

Относительно частных случаев вырожденных гипергеометрических функций см. также пп. 16.5, 16.6, 17.3, 20.1 и главу XIX.

$$(1) \int_0^a x^{\beta-1} (a-x)^{\gamma-1} {}_1F_1(\alpha; \beta; x) {}_1F_1(\alpha; \beta+\gamma; a-x) dx = \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} a^{\beta+\gamma-1} {}_1F_1(\alpha; \beta+\gamma; a),$$

$$\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0$$

$$(2) \int_0^a x^{\beta-1} (a-x)^{\delta-1} {}_1F_1(\alpha; \beta; x) {}_1F_1(\gamma; \delta; a-x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\delta)}{\Gamma(\beta+\delta)} a^{\beta+\delta-1} {}_1F_1(\alpha+\gamma; \beta+\delta; a), \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \delta > 0$$

$$(3) \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\sigma-\beta-1} {}_1F_1(\alpha; \beta; \lambda x) {}_1F_1(\sigma-\alpha; \sigma-\beta; \mu(1-x)) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\sigma-\beta)}{\Gamma(\sigma)} e^{\lambda} {}_1F_1(\alpha; \sigma; \mu-\lambda) \quad 0 < \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \sigma$$

$$(4) \int_0^{\infty} \cos(ax) {}_1F_1(\nu+1; 1; ix) {}_1F_1(\nu+1; 1; -ix) dx =$$

$$= \begin{cases} -a^{-1} \sin(\nu\pi) P_{\nu}(2a^{-2}-1), & 0 < a < 1 \\ 0, & 1 < a < \infty \\ -1 < \operatorname{Re} \nu < 0 \end{cases}$$

$$(5) \int_0^a x^{-1} (a-x)^{\kappa-1} e^{(a-x)/2} M_{\kappa, \mu}(x) dx = \frac{\Gamma(\kappa) \Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\kappa+\mu+1/2)} \pi^{1/2} a^{\kappa-1/2} I_{\mu}(a/2),$$

$$\operatorname{Re} \kappa > 0, \operatorname{Re} \mu > -1/2$$

$$(6) \int_0^a x^{\kappa-1} (a-x)^{\lambda-1} e^{a \cdot x^{1/2}} M_{\kappa+\lambda, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\kappa+\mu+1/2)}{\Gamma(\kappa+\lambda+\mu+1/2)} a^{\kappa+\lambda-1} M_{\kappa, \mu}(a),$$

$$\operatorname{Re}(\kappa+\mu) > -1/2, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(7) \int_0^a x^{\mu-1/2} (a-x)^{\nu-1/2} M_{\kappa, \mu}(x) M_{\lambda, \nu}(a-x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1) \Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(2\mu+2\nu+2)} a^{\mu+\nu} M_{\kappa+\lambda, \mu+\nu+1/2}(a),$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re} \nu > -1/2$$

$$(8) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} [x^{1/2} + (\alpha+x)^{1/2}]^{2\sigma} e^{-x/2} M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= -\frac{\sigma \Gamma(2\mu+1) \alpha^{\sigma}}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2+\kappa+\mu)} G_{34}^{23} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 1/2, 1, 1-\kappa+\rho \\ 1/2+\mu+\rho, -\sigma, \sigma, 1/2-\mu+\rho \end{matrix} \right. \right),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re}(\mu+\rho) > -1/2, \operatorname{Re}(\kappa-\rho-\sigma) > 0$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (\alpha+x)^{-1/2} [x^{1/2} + (\alpha+x)^{1/2}]^{2\sigma} e^{-x/2} M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1) \alpha^{\rho}}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2+\kappa+\mu)} G_{34}^{23} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 0, 1/2, 1/2-\kappa+\rho \\ -\sigma, \rho+\mu, \rho-\mu, \sigma \end{matrix} \right. \right),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re}(\rho+\mu) > -1/2, \operatorname{Re}(\kappa-\rho-\sigma) > -1/2$$

$$(10) \int_0^{\infty} x^{-\mu-1/2} e^{-x/2} \sin(2ax^{1/2}) M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \pi^{1/2} a^{\kappa+\mu-1} \frac{\Gamma(3-2\mu)}{\Gamma(1/2+\kappa+\mu)} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) W_{\rho, \sigma}(a^2),$$

$$a > 0, \operatorname{Re}(\kappa+\mu) > 0, 2\rho = \kappa - 3\mu + 1, 2\sigma = \kappa + \mu - 1$$

$$(11) \int_0^{\infty} x^{-1/2} (\alpha+x)^{\mu} e^{-x/2} P_{\nu}^{-2\mu} (1+2x/\alpha) M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= -\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi \Gamma(\nu)} \Gamma(2\mu+1) \Gamma(\kappa-\mu+\nu+1/2) \Gamma(\kappa-\mu-\nu-1/2) e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$\rho = 1/2 - \kappa + \mu, \sigma = 1/2 + \nu$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re}(\kappa-\mu) > |\operatorname{Re} \nu + 1/2|$$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{-1/2} (\alpha+x)^{-\mu} e^{-x/2} P_{\nu}^{-2\mu} (1+2x/\alpha) M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1) \Gamma(\kappa+\mu+\nu+1/2) \Gamma(\kappa+\mu-\nu-1/2)}{\Gamma(\kappa+\mu+1/2) \Gamma(2\mu+\nu+1) \Gamma(2\mu-\nu)} e^{\alpha/2} W_{1/2-\kappa-\mu, 1/2+\nu}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re}(\kappa+\mu) > |\operatorname{Re} \nu + 1/2|$$

$$(13) \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x/2} P_{\nu}^{-2\mu} [(1+x/\alpha)^{1/2}] M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1) \Gamma(\kappa+\nu/2) \Gamma(\kappa-\nu/2-1/2)}{2^{2\mu} \alpha^{1/4} \Gamma(\kappa+\mu+1/2) \Gamma(\mu+\nu/2+1/2) \Gamma(\mu-\nu/2)} e^{\alpha/2} W_{3/4-\kappa, 1/4+\nu/2}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \kappa > 2^{-1} \operatorname{Re} \nu - 1/2, \operatorname{Re} \kappa > -2^{-1} \operatorname{Re} \nu$$

$$(14) \int_0^{\infty} x^{\mu - \kappa/4 - \nu/2 - 1/2} (\alpha + x)^{\nu/2} e^{-x/2} Q_{\mu - \kappa + 3/2}^{\nu} (1 + 2x/\alpha) M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{e^{\nu\pi i} \Gamma(1 + 2\mu - \nu) \Gamma(1 + 2\mu) \Gamma(\sigma/2 - \kappa + \mu + \nu)}{2 \Gamma(1/2 + \kappa + \mu)} \alpha^{(\kappa + 2\mu - 2\nu + 5)/4} e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re}(2\mu - \nu) > -1$$

$$2\rho = 1/2 - \kappa - \mu + 2\nu, \quad 2\sigma = \kappa - 3\mu - 3/2$$

$$(15) \int_0^{\infty} x^{(\kappa + \mu + \nu)/2 - 1} (\alpha + x)^{-1/2} e^{-x/2} Q_{\kappa - \mu - \nu - 1}^{1 - \kappa + \mu - \nu} [(1 + x/\alpha)^{1/2}] M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= e^{(1 - \kappa + \mu - \nu)\pi i} 2^{\mu - \kappa - \nu} \alpha^{(\kappa + \mu - 1)/2} \frac{\Gamma(1/2 - \nu) \Gamma(1 + 2\mu) \Gamma(\kappa + \mu + \nu)}{\Gamma(\kappa + \mu + 1/2)} e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re}(\kappa + \mu + \nu) > 0$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \quad \rho = 1/2 - \kappa - \nu/2, \quad \sigma = \mu + \nu/2$$

$$(16) \int_0^{\infty} x^{\nu - 1/2} e^{-x/2} Q_{2\kappa - 2\nu - 3}^{2\mu - 2\nu} [(1 + x/\alpha)^{1/2}] M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= e^{2(\mu - \nu)\pi i} 2^{2\mu - 2\nu - 1} \alpha^{(\kappa + \mu - 1)/2} e^{\alpha/2} \frac{\Gamma(2\mu + 1) \Gamma(\nu + 1) \Gamma(\kappa + \mu - 2\nu - 1/2)}{\Gamma(\kappa + \mu + 1/2)} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re}(\kappa + \mu - 2\nu) > 1/2$$

$$2\rho = 1 - \kappa + \mu - 2\nu, \quad 2\sigma = \kappa - \mu - 2\nu - 2$$

$$(17) \int_0^{\infty} x^{\kappa - 3/2} \exp[-2^{-1}(\alpha + 1)x] K_{\nu}(\alpha x/2) M_{\kappa, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\kappa) \Gamma(\kappa + 2\nu)}{\alpha^{\kappa + \nu} \Gamma(\kappa + \nu + 1/2)} {}_2F_1(\kappa, \kappa + 2\nu; 2\nu + 1; -\alpha^{-1}),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \kappa > 0, \operatorname{Re}(\kappa + 2\nu) > 0$$

$$(18) \int_0^{\infty} x^{-1/2} J_{\nu}(ax^{1/2}) K_{\nu/2 - \mu}(x/2) M_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{a \Gamma(\kappa + \nu/2 + 1)} W_{(\kappa - \mu)/2, \kappa/2 - \nu/4} \left(\frac{a^2}{2}\right) M_{(\kappa + \mu)/2, \kappa/2 + \nu/4} \left(\frac{a^2}{2}\right),$$

$$a > 0, \operatorname{Re} \kappa > -1/4, \operatorname{Re} \mu > -1/2, \operatorname{Re} \nu > -1$$

$$(19) \int_0^{\infty} x^{\rho - 1} e^{-x/2} M_{\gamma + \rho, \beta + \rho + 1/2}(x) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda/x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2\rho) \Gamma(2\beta + 2\rho) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\beta + \gamma + 2\rho)} \lambda^{\beta/2 + \rho - 1/2} e^{\lambda/2} W_{\kappa, \mu}(\lambda),$$

$$|\arg \lambda| < \pi, \operatorname{Re}(\beta + \rho) > 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta + 2\rho) > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0$$

$$\kappa = 1/2 - \alpha - \beta/2 - \rho, \quad \mu = \beta/2 + \rho$$

$$(20) \int_0^{\infty} x^{2\lambda-1} (\alpha+x)^{-\mu-1/2} e^{-x/2} M_{\kappa, \mu}(\alpha+x) dx =$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda-\mu-1/2} \Gamma(2\lambda) \Gamma(2\mu+1) \Gamma(\kappa+\mu-2\lambda+1/2)}{\Gamma(\kappa+\mu+1/2) \Gamma(1-2\lambda+2\mu)} M_{\kappa-\lambda, \mu-\lambda}(\alpha),$$

$\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re}(\kappa+\mu-2\lambda) > -1/2$

$$(21) \int_0^a x^{-\kappa-\lambda-1} (a-x)^{\lambda-1} e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(1/2-\kappa-\lambda+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\lambda-\mu)}{a^{\kappa+1} \Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu)} W_{\kappa+\lambda, \mu}(a),$$

$\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re}(\kappa+\lambda) < 1/2 - |\operatorname{Re} \mu|$

$$(22) \int_0^{\infty} W_{\kappa, \mu}(x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^{3/2} \alpha^{\kappa}}{\Gamma(3/4-\kappa/2+\mu/2) \Gamma(3/4-\kappa/2-\mu/2) \cos(\mu\pi)},$$

$-1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$

$$(23) \int_0^{\infty} x^{\kappa+2\mu-1} e^{-3x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx = \frac{\Gamma(\kappa+\mu+1/2) \Gamma[2^{-2}(2\kappa+6\mu+5)]}{(\kappa+3\mu+1/2) \Gamma[2^{-2}(2\mu-2\kappa+3)]},$$

$\operatorname{Re}(\kappa+\mu) > -1/2, \operatorname{Re}(\kappa+3\mu) > -1/2$

$$(24) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} [x^{1/2} + (\alpha+x)^{1/2}]^{2\sigma} e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= -\pi^{-1/2} \sigma \alpha^{\sigma} G_{34}^{32} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 1/2, 1, 1-\kappa+\rho \\ 1/2+\mu+\rho, 1/2-\mu+\rho, -\sigma, \sigma \end{matrix} \right. \right),$$

$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2$

$$(25) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} [x^{1/2} + (\alpha+x)^{1/2}]^{2\sigma} e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= -\frac{\sigma \pi^{-1/2} \alpha^{\sigma}}{\Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu)} G_{34}^{33} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 1/2, 1, 1+\kappa+\rho \\ 1/2+\mu+\rho, 1/2-\mu+\rho, -\sigma, \sigma \end{matrix} \right. \right),$$

$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2, \operatorname{Re}(\kappa+\rho+\sigma) < 0$

$$(26) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (\alpha+x)^{-1/2} [x^{1/2} + (\alpha+x)^{1/2}]^{2\sigma} e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{-1/2} \alpha^{\sigma}}{\Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu)} G_{34}^{33} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 0, 1/2, 1/2+\kappa+\rho \\ -\sigma, \rho+\mu, \rho-\mu, \sigma \end{matrix} \right. \right),$$

$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2, \operatorname{Re}(\kappa+\rho+\sigma) < 1/2$

$$(27) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (\alpha+x)^{-1/2} [x^{1/2} + (\alpha+x)^{1/2}]^{2\sigma} e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \pi^{-1/2} \alpha^{\sigma} G_{34}^{32} \left(\alpha \mid \begin{matrix} 0, 1/2, 1/2 - \kappa + \rho \\ -\sigma, \rho + \mu, \rho - \mu, \sigma \end{matrix} \right),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2$$

$$(28) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \sin(cx^{1/2}) e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\mu+\rho) \Gamma(1-\mu+\rho) c}{\Gamma(3/2 - \kappa + \rho)} {}_2F_2 \left(1 + \mu + \rho, 1 - \mu + \rho; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} - \kappa + \rho; -\frac{c^2}{4} \right),$$

$$\operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1$$

$$(29) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \sin(cx^{1/2}) e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)} G_{23}^{22} \left(\frac{c^2}{4} \mid \begin{matrix} 1/2 + \mu - \rho, 1/2 - \mu - \rho \\ 1/2, -\kappa - \rho, 0 \end{matrix} \right),$$

$$c > 0, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1, \operatorname{Re}(\kappa + \rho) < 1/2$$

$$(30) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \cos(cx^{1/2}) e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2 + \mu + \rho) \Gamma(1/2 - \mu + \rho)}{\Gamma(1 - \kappa + \rho)} {}_2F_2 \left(\frac{1}{2} + \mu + \rho, \frac{1}{2} - \mu + \rho; \frac{1}{2}, 1 - \kappa + \rho; -\frac{c^2}{4} \right),$$

$$\operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2$$

$$(31) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \cos(cx^{1/2}) e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)} G_{23}^{22} \left(\frac{c^2}{4} \mid \begin{matrix} 1/2 + \mu - \rho, 1/2 - \mu - \rho \\ 0, -\kappa - \rho, 1/2 \end{matrix} \right),$$

$$c > 0, \operatorname{Re} \rho > |\operatorname{Re} \mu| - 1/2, \operatorname{Re}(\kappa + \rho) < 1/2$$

$$(32) \int_0^{\infty} x^{-1/2 - \mu/2 - \nu} (\alpha+x)^{\mu/2} e^{-x/2} P_{\kappa+\nu-3/2}^{\mu} (1+2x\alpha^{-1}) W_{\kappa, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma(3/2 - \kappa - \mu - \nu)} \alpha^{-1/4 + \kappa/2 - \nu/2} e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$2\rho = 1/2 + 2\mu + \nu - \kappa, 2\sigma = \kappa + 3\nu - 3/2$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re}(\mu + 2\nu) < 1$$

$$(33) \int_0^{\infty} x^{-1/2 - \mu/2 - \nu} (\alpha+x)^{-\mu/2} e^{-x/2} P_{\kappa+\mu+\nu-3/2}^{\mu} (1+2x\alpha^{-1}) W_{\kappa, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma(3/2 - \kappa - \mu - \nu)} \alpha^{-1/4 + \kappa/2 - \nu/2} e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$2\rho = 1/2 - \kappa + \nu, 2\sigma = \kappa + 2\mu + 3\nu - 3/2$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re}(\mu + 2\nu) < 1$$

$$(34) \int_0^{\infty} x^{-1/2-\mu/2-\nu} e^{-x/2} P_{2\kappa+\mu+2\nu-3}^{\mu} [(1+x/\alpha)^{1/2}] W_{\kappa, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\mu} \Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma(\rho/2-\kappa-\mu-\nu)} \alpha^{-1/2+\kappa/2-\nu/2} e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$2\rho = 1-\kappa+\mu+\nu, \quad 2\sigma = \kappa+\mu+3\nu-2$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \quad \operatorname{Re} \mu < 1, \quad \operatorname{Re}(\mu+2\nu) < 1$$

$$(35) \int_0^{\infty} x^{-1/2-\mu/2-\nu} (\alpha+x)^{-1/2} e^{-x/2} P_{2\kappa+\mu+2\nu-2}^{\mu} [(1+x/\alpha)^{1/2}] W_{\kappa, \nu}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\mu} \Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma(\rho/2-\kappa-\mu-\nu)} \alpha^{-1/2+\kappa/2-\nu/2} e^{\alpha/2} W_{\rho, \sigma}(\alpha),$$

$$2\rho = \mu+\nu-\kappa, \quad 2\sigma = \kappa+\mu+3\nu-1, \quad |\arg \alpha| < \pi, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

$$(36) \int_0^{\infty} x^{-\kappa-3/2} \exp[-2^{-1}(\alpha-1)x] K_{\mu}(\alpha x/2) W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{\pi \Gamma(-\kappa) \Gamma(2\mu-\kappa) \Gamma(-2\mu-\kappa)}{\Gamma(1/2-\kappa) \Gamma(1/2+\mu-\kappa) \Gamma(1/2-\mu-\kappa)} 2^{2\kappa+1} \alpha^{\kappa-\nu} \times$$

$$\times {}_2F_1(-\kappa, 2\mu-\kappa; -2\kappa; 1-\alpha^{-1}), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \kappa < 2 \operatorname{Re} \mu < -\operatorname{Re} \kappa$$

$$(37) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x/2} J_{\lambda+\nu}(\alpha x^{1/2}) J_{\lambda-\nu}(\alpha x^{1/2}) W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{(\alpha/2)^{2\lambda} \Gamma(1/2+\lambda+\mu+\rho) \Gamma(1/2+\lambda-\mu+\rho)}{\Gamma(1+\lambda+\nu) \Gamma(1+\lambda-\nu) \Gamma(1+\lambda-\kappa+\rho)} \times$$

$$\times {}_4F_4(1+\lambda, 1/2+\lambda, 1/2+\lambda+\mu+\rho, 1/2+\lambda-\mu+\rho;$$

$$1+\lambda+\nu, 1+\lambda-\nu, 1+2\lambda, 1+\lambda-\kappa+\rho; -\alpha^2),$$

$$|\operatorname{Re} \mu| < \operatorname{Re}(\lambda+\rho)+1/2$$

$$(38) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x/2} I_{\lambda+\nu}(\alpha x^{1/2}) K_{\lambda-\nu}(\alpha x^{1/2}) W_{\kappa, \mu}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{1/2}} G_{45}^{\alpha^2} \left(\alpha^2 \left| \begin{matrix} 0, 1/2, 1/2+\mu-\rho, 1/2-\mu-\rho \\ \lambda, \nu, -\lambda, -\nu, \kappa-\rho \end{matrix} \right. \right),$$

$$|\operatorname{Re} \mu| < \operatorname{Re}(\lambda+\rho)+1/2, \quad |\operatorname{Re} \mu| < \operatorname{Re}(\nu+\rho)+1/2$$

$$(39) \int_0^{\infty} x^{-1} M_{\kappa, \mu}(x) W_{\lambda, \mu}(x) dx = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{(\kappa-\lambda) \Gamma(1/2+\mu-\lambda)},$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1/2, \quad \operatorname{Re}(\kappa-\lambda) > 0$$

$$(40) \int_0^{\infty} x^{-1} W_{\kappa, \mu}(x) W_{\lambda, \mu}(x) dx = \\ = \frac{1}{(\kappa - \lambda) \sin(2\mu\pi)} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \lambda - \mu)} - \frac{1}{\Gamma(1/2 - \kappa - \mu) \Gamma(1/2 - \lambda + \mu)} \right], \\ -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/2$$

$$(41) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} W_{\kappa, \mu}(x) W_{-\kappa, \mu}(x) dx = \frac{\Gamma(\rho+1) \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2} - \mu\right)}{2 \Gamma(1 + \rho/2 + \kappa) \Gamma(1 + \rho/2 - \kappa)}, \\ \operatorname{Re} \rho > 2 |\operatorname{Re} \mu| - 1$$

$$(42) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} W_{\kappa, \mu}(x) W_{\lambda, \nu}(x) dx = \frac{\Gamma(1 + \mu + \nu + \rho) \Gamma(1 - \mu + \nu + \rho) \Gamma(-2\nu)}{\Gamma(1/2 - \lambda - \nu) \Gamma(3/2 - \kappa + \nu + \rho)} \times \\ \times {}_3F_2(1 + \mu + \nu + \rho, 1 - \mu + \nu + \rho, 1/2 - \lambda + \nu; 1 + 2\nu, 3/2 - \kappa + \nu + \rho; 1) + \\ + \frac{\Gamma(1 + \mu - \nu + \rho) \Gamma(1 - \mu - \nu + \rho) \Gamma(2\nu)}{\Gamma(1/2 - \lambda + \nu) \Gamma(3/2 - \kappa - \nu + \rho)} \times \\ \times {}_3F_2(1 + \mu - \nu + \rho, 1 - \mu - \nu + \rho, 1/2 - \lambda - \nu; 1 - 2\nu, 3/2 - \kappa - \nu + \rho; 1), \\ |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho + 1$$

$$(43) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp[-2^{-1}(\alpha + \beta)x] M_{\kappa, \mu}(\alpha x) W_{\lambda, \nu}(\beta x) dx = \\ = \frac{\Gamma(1 + \mu + \nu + \rho) \Gamma(1 + \mu - \nu + \rho)}{\Gamma(3/2 - \lambda + \mu + \rho)} \alpha^{\mu+1/2} \beta^{-\mu-\rho-1/2} \times \\ \times {}_3F_2(1/2 + \kappa + \mu, 1 + \mu + \nu + \rho, 1 + \mu - \nu + \rho; \\ 2\mu + 1, 3/2 - \lambda + \mu + \rho; -\alpha/\beta), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(\rho + \mu) > |\operatorname{Re} \nu| - 1$$

$$(44) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp[2^{-1}(\alpha + \beta)x] W_{\kappa, \mu}(\alpha x) W_{\lambda, \nu}(\beta x) dx = \\ = \beta^{-\rho} [\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu) \Gamma(1/2 - \lambda + \nu) \Gamma(1/2 - \lambda - \nu)]^{-1} \times \\ \times G_{33}^{33}\left(\frac{\beta}{\alpha} \mid 1/2 + \mu, 1/2 - \mu, 1 + \lambda + \rho, \right. \\ \left. 1/2 + \nu + \rho, 1/2 - \nu + \rho, -\kappa\right), \\ |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho + 1, \operatorname{Re}(\kappa + \lambda + \rho) < 0$$

$$(45) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp[-2^{-1}(\alpha - \beta)x] W_{\kappa, \mu}(\alpha x) W_{\lambda, \nu}(\beta x) dx = \\ = \frac{\beta^{-\rho}}{\Gamma(1/2 - \lambda + \nu) \Gamma(1/2 - \lambda - \nu)} G_{33}^{23}\left(\frac{\beta}{\alpha} \mid 1/2 + \mu, 1/2 - \mu, 1 + \lambda + \rho, \right. \\ \left. 1/2 + \nu + \rho, 1/2 - \nu + \rho, \kappa\right), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho + 1$$

$$(46) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp[-2^{-1}(\alpha + \beta)x] W_{\kappa, \mu}(\alpha x) W_{\lambda, \nu}(\beta x) dx =$$

$$= \beta^{-\rho} G_{33}^{22} \left(\frac{\beta}{\alpha} \left| \begin{matrix} 1/2 + \mu, 1/2 - \nu, 1 - \lambda + \rho \\ 1/2 + \nu + \rho, 1/2 - \nu + \rho, \kappa \end{matrix} \right. \right),$$

$$\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0, \quad |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho + 1$$

$$(47) \int_0^{\infty} x^{2\lambda-1} (\alpha + x)^{-\mu-1/2} e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x) dx =$$

$$= \Gamma(2\lambda) \alpha^{\lambda-\mu-1/2} W_{\kappa-\lambda, \mu-\lambda}(\alpha), \quad |\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(48) \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} (\alpha + x)^{\kappa-\lambda-1} e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x) dx = \Gamma(\lambda) \alpha^{\kappa-1} W_{\kappa-\lambda, \mu}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

$$(49) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (\alpha + x)^{-\sigma} e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x) dx =$$

$$= \Gamma(\rho) \alpha^{\rho} e^{\alpha/2} G_{23}^{30} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 0, 1 - \kappa - \sigma \\ -\rho, 1/2 + \mu - \sigma, 1/2 - \mu - \sigma \end{matrix} \right. \right), \quad |\arg \alpha| < \pi, \operatorname{Re} \rho > 0$$

$$(50) \int_0^{\infty} x^{2\lambda-1} (\alpha + x)^{-\mu-1/2} e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda) \Gamma(1/2 - \kappa + \mu - 2\lambda)}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu)} \alpha^{\lambda-\mu-1/2} W_{\kappa+\lambda, \mu-\lambda}(\alpha),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \quad 0 < 2 \operatorname{Re} \lambda < 1/2 - \operatorname{Re}(\kappa + \mu)$$

$$(51) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (\alpha + x)^{-\sigma} e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho) \alpha^{\rho} e^{-\alpha/2}}{\Gamma(1/2 - \kappa + \mu) \Gamma(1/2 - \kappa - \mu)} G_{23}^{31} \left(\alpha \left| \begin{matrix} \kappa - \sigma + 1, 0 \\ -\rho, 1/2 + \mu - \sigma, 1/2 - \mu - \sigma \end{matrix} \right. \right),$$

$$|\arg \alpha| < \pi, \quad 0 < \operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re}(\sigma - \kappa)$$

$$(52) \int_0^{\infty} x^{\tau-1} (\alpha + x)^{-\lambda} {}_2F_1(\rho, \sigma; \tau; -x/\alpha) e^{\pm x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x) dx.$$

Выразить $W_{\kappa, \mu}$ через G -функцию и найти соответствующий интеграл в п. 20.5.

Интегралы, содержащие произведения $e^{\pm x/2} W_{\kappa, \mu}(\alpha + x)$ и функции Лежандра.

Выразить $W_{\kappa, \mu}$ через G -функцию, а функцию Лежандра — через гипергеометрическую функцию и найти соответствующий интеграл в п. 20.5.

$$(53) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{x} \right) \right] W_{\kappa, \mu} \left(\frac{x}{\alpha} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{\beta}{x} \right) dx = \\ = \pi^{1/2} 2^{1/2-2\kappa} (\alpha\beta)^{1/4} \exp \left[-\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/2} \right] W_{2\kappa-1/2, 2\mu} \left[2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/2} \right], \\ \text{Re } \alpha > 0, \text{ Re } \beta > 0$$

$$(54) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{x} \right) \right] W_{\kappa, \mu} \left(\frac{x}{\alpha} \right) W_{\lambda, \nu} \left(\frac{\beta}{x} \right) dx = \\ = \beta^{\rho} G_{24}^{40} \left(\frac{\beta}{\alpha} \mid \begin{matrix} 1-\kappa, 1-\lambda-\rho \\ 1/2+\mu, 1/2-\mu, 1/2+\nu-\rho, 1/2-\nu-\rho \end{matrix} \right), \quad \text{Re } \alpha > 0, \text{ Re } \beta > 0$$

$$(55) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{\beta}{x} \right) \right] W_{\kappa, \mu} \left(\frac{x}{\alpha} \right) W_{\lambda, \nu} \left(\frac{\beta}{x} \right) dx = \\ = \frac{\beta^{\rho}}{\Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu)} G_{24}^{41} \left(\frac{\beta}{\alpha} \mid \begin{matrix} 1+\kappa, 1-\lambda-\rho \\ 1/2+\mu, 1/2-\mu, 1/2+\nu-\rho, 1/2-\nu-\rho \end{matrix} \right), \\ |\arg \alpha| < 3\pi/2, \text{ Re } \beta > 0, \text{ Re } (\kappa+\rho) < -|\text{Re } \nu| - 1/2$$

$$(56) \int_0^{\infty} x^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{x} \right) \right] W_{\kappa, \mu} \left(\frac{x}{\alpha} \right) W_{\kappa, \mu} \left(\frac{\beta}{x} \right) dx = \\ = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(-\kappa-\mu) \Gamma(-\kappa+\mu) (\alpha\beta)^{1/4}}{2^{1/2+2\kappa} \Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu)} \exp \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/2} \right] W_{2\kappa+1/2, 2\mu} \left[2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/2} \right], \\ |\arg \alpha| < 3\pi/2, |\arg \beta| < 3\pi/2, \text{ Re } \kappa < -|\text{Re } \mu|$$

$$(57) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{x} \right) \right] W_{\kappa, \mu} \left(\frac{x}{\alpha} \right) W_{\lambda, \nu} \left(\frac{\beta}{x} \right) dx = \\ = \frac{\beta^{\rho}}{\Gamma(1/2-\kappa+\mu) \Gamma(1/2-\kappa-\mu) \Gamma(1/2-\lambda+\nu) \Gamma(1/2-\lambda-\nu)} \times \\ \times G_{24}^{42} \left(\frac{\beta}{\alpha} \mid \begin{matrix} 1+\kappa, 1+\lambda-\rho \\ 1/2+\mu, 1/2-\mu, 1/2+\nu-\rho, 1/2-\nu-\rho \end{matrix} \right), \\ |\arg \alpha| < 3\pi/2, |\arg \beta| < 3\pi/2 \\ \text{Re } (\lambda-\rho) < 1/2 - |\text{Re } \mu|, \text{ Re } (\kappa+\rho) < 1/2 - |\text{Re } \nu|$$

$$(58) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\rho x i} \Gamma(1/2+\nu+ix) \Gamma(1/2+\nu-ix) M_{l, \nu}(2\alpha) dx = \\ = 2^{1/2-\nu} \pi \beta^{\nu+1/2} (\text{ch } \rho)^{-2\nu-1} \exp(-\alpha \text{th } \rho) \Gamma(2\nu+1), \\ |\text{Im } \rho| < \pi/2, \text{ Re } \nu > -1$$

$$(59) \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(1/2 + \nu + \mu + x) \Gamma(1/2 + \nu + \mu - x) \Gamma(1/2 + \nu - \mu + x) \Gamma(1/2 + \nu - \mu - x) \times \\ \times M_{\mu+ix, \nu}(\alpha) M_{\mu-ix, \nu}(\beta) dx = \\ = \frac{2\pi (\alpha\beta)^{\nu+1/2} [\Gamma(2\nu+1)]^2 \Gamma(2\nu+2\mu+1) \Gamma(2\nu-2\mu+1)}{(\alpha+\beta)^{2\nu+1} \Gamma(4\nu+2)} M_{2\mu, 2\nu+1/2}(\alpha+\beta), \\ \text{Re } \nu > |\text{Re } \mu| - 1/2$$

$$(60) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\rho x i} \Gamma(1/2 + \nu + ix) \Gamma(1/2 + \nu - ix) M_{ix, \nu}(\alpha) M_{ix, \nu}(\beta) dx = \\ = \frac{2\pi (\alpha\beta)^{1/2}}{\text{ch } \rho} \exp[-(\alpha+\beta) \text{th } \rho] J_{2\nu}\left(\frac{2\alpha^{1/2}\beta^{1/2}}{\text{ch } \rho}\right), \quad |\text{Im } \rho| < \pi/2, \text{Re } \nu > -1/2$$

$$(61) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{ix, 0}(\alpha) W_{-ix, 0}(\beta) dx}{\text{ch}(\pi x)} = 2 \frac{(\alpha\beta)^{1/2}}{\alpha+\beta} \exp[-2^{-1}(\alpha+\beta)]$$

$$(62) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(ix) \Gamma(2\kappa + ix) W_{\kappa+ix, \kappa-1/2}(\alpha) W_{-\kappa-ix, \kappa-1/2}(\beta) dx = \\ = 2\pi^{1/2} \Gamma(2\kappa) (\alpha\beta)^{\kappa} (\alpha+\beta)^{1/2-2\kappa} K_{2\kappa-1/2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Относительно многих интегралов по параметрам см. Buchholz Herbert, 1953: Die konfluente hypergeometrische Funktionen. Springer-Verlag, глава VI.

20.4. E-функция Мак-Роберта

См. также п. 20.5.

$$(1) \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\beta-1} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; xz) dx.$$

См. MacRobert T. M., 1953: Proc. Glasgow Math. Assoc. 1, 118.

$$(2) \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\beta-1} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; x^{-m}z) dx = \\ = \Gamma(\gamma-\beta) m^{\beta-\gamma} E(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+m}; \rho_1, \dots, \rho_{q+m}; z) \\ \alpha_{p+k} = \frac{\beta+k-1}{m}, \quad \rho_{q+k} = \frac{\gamma+k-1}{m}, \quad k=1, \dots, m \\ \text{Re } \gamma > \text{Re } \beta > 0, \quad m=1, 2, \dots$$

$$(3) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (1+x)^{-\sigma} E[\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; (1+x)z] dx = \\ = \Gamma(\rho) E(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \sigma - \rho; \rho_1, \dots, \rho_q, \sigma; z), \quad \operatorname{Re} \sigma > \operatorname{Re} \rho > 0$$

$$(4) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-xz} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; xz) dx = \\ = \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} [E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; 1 - \beta, \rho_1, \dots, \rho_q; e^{\pm i\pi} z) - \\ - z^{-\beta} E(\alpha_1 + \beta, \dots, \alpha_p + \beta; 1 + \beta, \rho_1 + \beta, \dots, \rho_q + \beta; e^{\pm i\pi} z)], \\ p \geq q + 1, \operatorname{Re}(\alpha_r + \beta) > 0, r = 1, \dots, p, |\arg z| < \pi. \\ \text{При } p \leq q \text{ результат справедлив, если интеграл сходится.}$$

$$(5) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-xz} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; x^{-m}z) dx = \\ = (2\pi)^{1/2-m} m^{\beta-1/2} E(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+m}; \rho_1, \dots, \rho_q; m^{-m}z), \\ \operatorname{Re} \beta > 0, m = 1, 2, \dots, \alpha_{p+k} = (\beta + k - 1)/m, k = 1, \dots, m$$

$$(6) \int_{-1}^1 (1-x)^{-\alpha} (1-x^2)^{-\mu/2} P_{n-\mu}^{\mu}(x) E[\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; (1-x)z] dx. \\ \text{См. MacRobert T. M., 1953: Proc. Glasgow Math. Assoc. 1, 111-114.}$$

$$(7) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} J_{\nu}(x) E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; x^{-2m}z) dx = \\ = (2\pi)^{-m} (2m)^{\beta-1} \{ \exp[2^{-1}\pi(\beta - \nu - 1)i] \times \\ \times E[\alpha_1, \dots, \alpha_{p+2m}; \rho_1, \dots, \rho_q; (2m)^{-2m}z e^{-m\pi i}] + \\ + \exp[-2^{-1}\pi(\beta - \nu - 1)i] E[\alpha_1, \dots, \alpha_{p+2m}; \rho_1, \dots, \rho_q; (2m)^{-2m}z e^{m\pi i}] \}, \\ \operatorname{Re}(\beta + \nu) > 0, \operatorname{Re}(2\alpha_r m - \beta) > -3/2, r = 1, \dots, p \\ \alpha_{p+k} = \frac{\beta + \nu + 2k - 2}{2m}, \alpha_{p+m+k} = \frac{\beta - \nu + 2k - 2}{2m} \\ m = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, m$$

$$(8) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} K_{\nu}(x) E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; x^{-2m}z) dx = \\ = (2\pi)^{1-m} 2^{\beta-2m} m^{\beta-1} E[\alpha_1, \dots, \alpha_{p+2m}; \rho_1, \dots, \rho_q; (2m)^{-2m}z], \\ \alpha_{p+k} = \frac{\beta + \nu + 2k - 2}{2m}, \alpha_{p+m+k} = \frac{\beta - \nu + 2k - 2}{2m} \\ \operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Re} \nu|, m = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, m$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^x K_\nu(x) F(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; z/x) dx.$$

См. Ragab F. M., 1953: Proc. Glasgow Math. Assoc. 1, 192—195.

$$(10) \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(x) E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; x^{-m}z) dx =$$

$$= (2\pi)^{1/2-m/2} m^{\beta+\kappa-1/2} E(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+2m}; \rho_1, \dots, \rho_{q+m}; m^{-m}z),$$

$$\text{Re } \beta > |\text{Re } \mu| - 1/2, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\alpha_{p+k} = (\beta + k + \mu - 1/2)/m, \quad \alpha_{p+m+k} = (\beta - \mu + k - 1/2)/m$$

$$\rho_{q+k} = (\beta - \kappa + k)/m, \quad k = 1, \dots, m$$

$$(11) \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; xy) E(\beta_1, \dots, \beta_r; \sigma_1, \dots, \sigma_s; xz) dx,$$

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} E(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; xy) E(\beta_1, \dots, \beta_r; \sigma_1, \dots, \sigma_s; z/x) dx.$$

См. Ragab F. M., 1953: Proc. Glasgow Math. Assoc. 1, 192—195.

20.5. G-функция Мейера

$$(1) \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\tau-1} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= \Gamma(\sigma) G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left(\alpha \left| \begin{matrix} 1-\rho, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1-\rho-\sigma \end{matrix} \right. \right).$$

Первое множество условий справедливости формулы:

$$p + q < 2(m + n), \quad |\arg \alpha| < (m + n - p/2 - q/2)\pi,$$

$$\text{Re}(\rho + b_j) > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{Re } \sigma > 0.$$

Второе множество условий справедливости формулы:

$$p + q \leq 2(m + n), \quad |\arg \alpha| \leq (m + n - p/2 - q/2)\pi,$$

$$\text{Re}(\rho + b_j) > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{Re } \sigma > 0,$$

$$\text{Re} \left[\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + (p - q)(\rho - 1/2) \right] > -1/2.$$

Третье множество условий справедливости формулы:

$$p < q \text{ (или } p \leq q \text{ и } |\alpha| < 1),$$

$$\text{Re}(\rho + b_j) > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{Re } \sigma > 0$$

$$(2) \int_1^{\infty} x^{-\rho} (x-1)^{\tau-1} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \\ = \Gamma(\sigma) G_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left(\alpha \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \rho \\ \rho-\sigma, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right).$$

Первое множество условий справедливости формулы:

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi, \\ \operatorname{Re}(\rho-\sigma-a_j) > -1, \quad j=1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} \sigma > 0.$$

Второе множество условий справедливости формулы:

$$p+q \leq 2(m+n), \quad |\arg \alpha| \leq (m+n-p/2-q/2)\pi, \\ \operatorname{Re}(\rho-\sigma-a_j) > -1, \quad j=1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} \sigma > 0,$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + (q-p)(\rho-\sigma+1/2) \right] > -1/2.$$

Третье множество условий справедливости формулы:

$$q < p \quad (\text{или } q \leq p \text{ и } |\alpha| > 1), \\ \operatorname{Re}(\rho-\sigma-a_j) > -1, \quad j=1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} \sigma > 0$$

$$(3) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j+\rho) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j-\rho)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j-\rho) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j+\rho)} \alpha^{\rho}, \\ p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi \\ - \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} b_j < \operatorname{Re} \rho < 1 - \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} a_j$$

$$(4) \int_0^{\infty} x^{\rho-1} (x+\beta)^{-\sigma} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \\ = \frac{\beta^{\rho-\sigma}}{\Gamma(\sigma)} G_{p+1, q+1}^{m+1, n+1} \left(\alpha \beta \left| \begin{matrix} 1-\rho, a_1, \dots, a_p \\ \sigma-\rho, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right).$$

Первое множество условий справедливости формулы:

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad |\arg \beta| < \pi, \\ \operatorname{Re}(\rho+b_j) > 0, \quad j=1, \dots, m, \quad \operatorname{Re}(\rho-\sigma+a_j) < 1, \quad j=1, \dots, n.$$

Второе множество условий справедливости формулы:

$$p \leq q, \quad p+q \leq 2(m+n), \quad |\arg \alpha| \leq (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad |\arg \beta| < \pi, \\ \operatorname{Re}(\rho+b_j) > 0, \quad j=1, \dots, m, \quad \operatorname{Re}(\rho-\sigma+a_j) < 1, \quad j=1, \dots, n,$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j - (q-p)(\rho-\sigma-1/2) \right] > 1.$$

Третье множество условий справедливости формулы:

$$p \geq q, \quad p+q \leq 2(m+n), \quad |\arg \alpha| \leq (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad |\arg \beta| < \pi, \\ \operatorname{Re}(\rho+b_j) > 0, \quad j=1, \dots, m, \quad \operatorname{Re}(\rho-\sigma+a_j) < 1, \quad j=1, \dots, n,$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + (p-q)(\rho-1/2) \right] > 1$$

$$(5) \int_0^{\infty} x^{-\rho} e^{-\beta x} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \beta^{\rho-1} G_{p+1, q}^{m, n+1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \left| \begin{matrix} \rho, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad |\arg \beta| < \pi/2$$

$$\operatorname{Re}(b_j - \rho) > -1, \quad j=1, \dots, m$$

$$(6) \int_0^{\infty} e^{-\beta x} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x^2 \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \pi^{-1/2} \beta^{-1} G_{p+2, q}^{m, n+2} \left(\frac{4\alpha}{\beta^2} \left| \begin{matrix} 0, 1/2, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad |\arg \beta| < \pi/2$$

$$\operatorname{Re} b_j > -1/2, \quad j=1, \dots, n$$

$$(7) \int_0^{\infty} \sin(cx) G_{pq}^{mn} \left(\alpha x^2 \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \pi^{1/2} c^{-1} G_{p+2, q}^{m, n+1} \left(\frac{4\alpha}{c^2} \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p, 1/2 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad c > 0$$

$$\operatorname{Re} b_j > -1, \quad j=1, \dots, m, \quad \operatorname{Re} a_j < 1/2, \quad j=1, \dots, n$$

$$(8) \int_0^{\infty} \cos(cx) G_{pq}^{mn} \left(\alpha x^2 \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx = \pi^{1/2} c^{-1} G_{p+2, q}^{m, n+1} \left(\frac{4\alpha}{c^2} \left| \begin{matrix} 1/2, a_1, \dots, a_p, 0 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi, \quad c > 0$$

$$\operatorname{Re} b_j > -1/2, \quad j=1, \dots, m, \quad \operatorname{Re} a_j < 1/2, \quad j=1, \dots, n$$

$$(9) \int_0^{\infty} x^{-\rho} J_{\nu}(2x^{1/2}) G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= G_{p+2, q}^{m, n+1} \left(\alpha \left| \begin{matrix} \rho - \nu/2, a_1, \dots, a_p, \rho + \nu/2 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi$$

$$-3/4 + \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re} \rho < 1 + 2^{-1} \operatorname{Re} \nu + \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} b_j$$

$$(10) \int_0^{\infty} x^{-\rho} Y_{\nu}(2x^{1/2}) G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= G_{p+3, q+1}^{m, n+2} \left(\alpha \left| \begin{matrix} \rho - \nu/2, \rho + \nu/2, a_1, \dots, a_p, \rho + 1/2 + \nu/2 \\ b_1, \dots, b_q, \rho + 1/2 + \nu/2 \end{matrix} \right. \right),$$

$$p+q < 2(m+n), \quad |\arg \alpha| < (m+n-p/2-q/2)\pi$$

$$-3/4 + \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re} \rho < \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} b_j + 2^{-1} |\operatorname{Re} \nu| + 1$$

$$(11) \int_0^{\infty} x^{-\rho} K_{\nu}(2x^{1/2}) G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= 2^{-1} G_{p+2, q}^{m, n+2} \left(\alpha \left| \begin{matrix} \rho - \nu/2, \rho + \nu/2, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p + q < 2(m + n), \quad |\arg \alpha| < (m + n - p/2 - q/2) \pi$$

$$\operatorname{Re} \rho < 1 - 2^{-1} |\operatorname{Re} \nu| + \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} b_j$$

$$(12) \int_0^{\infty} x^{-\rho} H_{\nu}(2x^{1/2}) G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= G_{p+3, q+1}^{m+1, n+1} \left(\alpha \left| \begin{matrix} \rho - 1/2 - \nu/2, a_1, \dots, a_p, \rho + \nu/2, \rho - \nu/2 \\ \rho - 1/2 - \nu/2, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$$p + q < 2(m + n), \quad |\arg \alpha| < (m + n - p/2 - q/2) \pi$$

$$\max \left(-\frac{3}{4}, \operatorname{Re} \frac{\nu-1}{2} \right) + \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re} \rho < \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} b_j + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \nu + \frac{3}{2}$$

$$(13) \int_1^{\infty} x^{-\rho} (x-1)^{\sigma-1} {}_2F_1(x + \sigma - \rho, \lambda + \sigma - \rho; \sigma; 1-x) \times$$

$$\times G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= \Gamma(\sigma) G_{p+2, q+2}^{m+2, n} \left(\alpha \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \lambda + \sigma - \rho, \rho \\ x, \lambda, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right).$$

Первое множество условий справедливости формулы:

$$p + q < 2(m + n), \quad |\arg \alpha| < (m + n - p/2 - q/2) \pi,$$

$$\operatorname{Re} \sigma > 0, \quad \operatorname{Re} x \geq \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} a_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Второе множество условий справедливости формулы:

$$p + q \leq 2(m + n), \quad |\arg \alpha| \leq (m + n - p/2 - q/2) \pi,$$

$$\operatorname{Re} \sigma > 0, \quad \operatorname{Re} x \geq \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} a_j - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + (q-p)(x + 1/2) \right] > -1/2,$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + (q-p)(\lambda + 1/2) \right] > -1/2$$

$$(14) \int_0^{\infty} G_{pq}^{mn} \left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) G_{rs}^{kl} \left(\beta x \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_r \\ d_1, \dots, d_s \end{matrix} \right. \right) dx =$$

$$= \alpha^{-1} G_{q+r, p+s}^{k+n, l+m} \left(\frac{\beta}{\alpha} \left| \begin{matrix} -b_1, \dots, -b_m, c_1, \dots, c_r, -b_{m+1}, \dots, -b_q \\ -a_1, \dots, -a_n, d_1, \dots, d_s, -a_{n+1}, \dots, -a_p \end{matrix} \right. \right).$$

Относительно (пяти) множеств условий справедливости формулы см. Meijer C. S., 1941: Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 44, 82—92.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСШИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Через ВТФ I обозначаются ссылки на первый том книги «Высшие трансцендентные функции» тех же авторов, а через ВТФ II — на второй том этой книги.

Общие замечания. Большинство обозначений объяснено там, где они встречаются. Обозначения, встречающиеся несколько раз на одной странице, объясняются внизу страницы.

Как правило, вещественные переменные и параметры обозначаются латинскими буквами, а комплексные переменные и параметры — греческими буквами. Исключения делаются для традиционных обозначений (таких, например, как y в главе XIV). Буквы m, n обычно обозначают целые числа.

Через $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ обозначены соответственно вещественная и мнимая части комплексной величины z .

Через $|z|, \arg z$ — соответственно модуль и аргумент (фаза) комплексной величины.

Главное значение в смысле Коши. Если подынтегральная функция имеет особенность в точке $c, a < c < b$, то главным значением в смысле Коши интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

называют

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right], \quad \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Пустая сумма интерпретируется как нуль, а пустое произведение — как единица. $\sum_{n=a}^b, \prod_{n=a}^b$ пусты, если $b < a$.

Через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x .

$$\begin{aligned} (a)_v &= \Gamma(a+v)/\Gamma(a), \\ (a)_0 &= 1, \\ (a)_n &= a(a+1)\dots(a+n-1), & n = 1, 2, \dots, \\ (a)_n &= (-1)^n (1-a-n)_n, & n - \text{целое}, \\ (a)_{-n} &= (-1)^n / (1-a)_n, & n - \text{целое}. \end{aligned}$$

Биномиальные коэффициенты

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)};$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Постоянная Эйлера — Маскерони

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m 1/n - \ln m \right) = 0,5772156649 \dots,$$

$$\gamma = e^C.$$

Заметим, что в ВТФ и многих других книгах вместо C пишут γ .

Ортогональные многочлены. См. также ВТФ II, гл. 10 и стр. 187—190 настоящего тома.

Многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Многочлены Гегенбауэра

$$C_n^\nu(x) = \frac{(-2)^n (v)_n}{n! (n+2v)_n} (1-x^2)^{1/2-\nu} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\nu-1/2}.$$

Многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sin(\arccos x)}.$$

Многочлены Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}].$$

Многочлены Лагерра

$$L_n^\alpha(z) = \frac{e^z z^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}),$$

$$L_n^0(z) = L_n(z).$$

Многочлены Эрмита

$$He_n(x) = (-1)^n \exp(2^{-1}x^2) \frac{d^n}{dx^n} [\exp(-2^{-1}x^2)],$$

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} [\exp(-x^2)].$$

Многочлены Шарлье

$$p_n(x; a) = n! a^{-n} L_n^{x-n}(a).$$

Гамма-функция и родственные ей функции. См. также ВТФ I, гл. 1
Гамма-функция

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Логарифмическая производная от гамма-функции

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad \psi'(z) = \frac{d\psi}{dz} \quad \text{и т. д.}$$

Бета-функция

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Дилогарифм Эйлера

$$L_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = - \int_0^z \frac{\ln(1-z)}{z} dz.$$

Неполные гамма-функции. См. «Вырожденные гипергеометрические функции».

Неполная бета-функция. См. «Гипергеометрические функции».

Дзета-функция Римана и родственные функции

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

$$\xi(t) = -2^{-1} (t^2 + 1/4) \pi^{-it/2 - 1/4} \Gamma(it/2 + 1/4) \zeta(it + 1/2),$$

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-z}, \quad \Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(v+n)^s}.$$

Функции Лежандра. См. также ВТФ I, гл. 3. Относительно выражений для произведений функций Лежандра через гипергеометрические функции см. Meijer C. S. 1936: Math. Ann. 112, 469–489 и Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 39, 394–403 и 519–527; 1938: Nieuw Arch. Wiskunde (2), 19, 207–234.

$$P_v^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} {}_2F_1(-v, v+1; 1-\mu; 1/2 - z/2),$$

$$Q_v^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i} \pi^{1/2} \Gamma(\mu+v+1)}{2^{v+1} \Gamma(v+3/2)} z^{-\mu-v-1} (z^2-1)^{\mu/2} {}_2F_1\left(\frac{\mu+v+1}{2}, \frac{\mu+v+2}{2}; v+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right),$$

z изменяется в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси.

$$P_v^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\mu/2} {}_2F_1(-v, v+1; 1-\mu; 1/2 - x/2), \quad -1 < x < 1,$$

$$Q_v^\mu(x) = 2^{-1} e^{-i\mu\pi} \left[\exp(-2^{-1}\mu\pi i) Q_v^\mu(x+i0) + \exp(2^{-1}\mu\pi i) Q_v^\mu(x-i0) \right],$$

$$-1 < x < 1,$$

$$P_v(z) = P_v^0(z), \quad Q_v(z) = Q_v^0(z).$$

Функции Бесселя и родственные функции. См. также ВТФ II, гл. 7 и стр. 235—236 настоящего тома.

Функции Бесселя

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)},$$

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi},$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i Y_\nu(z),$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - i Y_\nu(z),$$

$$Ii_\nu(x) = \int_{\infty}^x J_\nu(t) \frac{dt}{t}.$$

Модифицированные функции Бесселя

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}.$$

Функции Кельвина и родственные им функции

$$\begin{aligned} \operatorname{ber}_\nu(z) + i \operatorname{bei}_\nu(z) &= J_\nu [z \exp(3\pi i/4)], \\ \operatorname{ber}_\nu(z) - i \operatorname{bei}_\nu(z) &= J_\nu [z \exp(-3\pi i/4)], \\ \operatorname{ker}_\nu(z) + i \operatorname{kei}_\nu(z) &= K_\nu [z \exp(\pi i/4)], \\ \operatorname{ker}_\nu(z) - i \operatorname{kei}_\nu(z) &= K_\nu [z \exp(-\pi i/4)], \\ \operatorname{ber}(z) &= \operatorname{ber}_0(z), \quad \operatorname{bei}(z) = \operatorname{bei}_0(z), \\ \operatorname{ker}(z) &= \operatorname{ker}_0(z), \quad \operatorname{kei}(z) = \operatorname{kei}_0(z). \end{aligned}$$

Отметим, что определение функций $\operatorname{ker}_\nu(z)$ и $\operatorname{kei}_\nu(z)$ отличается от данного в ВТФ II, п. 7.2.3.

$$\begin{aligned} X_\nu^{(b)}(z) &= \operatorname{ber}_\nu^2(z) + \operatorname{bei}_\nu^2(z), \\ V_\nu^{(b)}(z) &= [\operatorname{ber}'_\nu(z)]^2 + [\operatorname{bei}'_\nu(z)]^2, \\ W_\nu^{(b)}(z) &= \operatorname{ber}_\nu(z) \operatorname{bei}'_\nu(z) - \operatorname{bei}_\nu(z) \operatorname{ber}'_\nu(z), \\ 2^{-1} Z_\nu^{(b)}(z) &= \operatorname{ber}_\nu(z) \operatorname{bei}'_\nu(z) + \operatorname{bei}_\nu(z) \operatorname{ber}'_\nu(z). \end{aligned}$$

Многочлены Неймана

$$O_0(x) = \frac{1}{x}; \quad O_n(x) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\leq n/2} \frac{n(n-m-1)!}{m! (x/2)^{n-2m+1}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$O_{-n}(x) = (-1)^n O_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Функции Ангера – Вебера

$$J_\nu(z) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta,$$

$$E_\nu(z) = \pi^{-1} \int_0^\pi \sin(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

Функции Струве

$$H_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu+2m+1}}{\Gamma(m+3/2) \Gamma(\nu+m+3/2)} = \frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(3/2) \Gamma(\nu+3/2)} {}_1F_2\left(1; 3/2, \nu+3/2; -z^2/4\right) =$$

$$= 2^{1-\nu} \pi^{-1/2} [\Gamma(\nu+1/2)]^{-1} s_{\nu, \nu}(z);$$

$$L_\nu(z) = \exp[-2^{-1}(\nu+1)\pi i] H_\nu[z \exp(i\pi/2)].$$

Функции Ломмеля

$$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$S_{\mu, \nu}(z) = s_{\mu, \nu}(z) + 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \times$$

$$\times \left[\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right) J_\nu(z) - \cos\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right) Y_\nu(z) \right].$$

Функции Ломмеля двух переменных

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z),$$

$$V_\nu(w, z) = \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right) + U_{2-\nu}(w, z).$$

Гипергеометрические функции. См. также ВТФ I, гл. 2, 4.
Обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_mF_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_m)_k}{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_n)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрический ряд Гаусса. Его часто (например, в ВТФ I, гл. 2) обозначают через $F(a, b; c; z)$.

${}_1F_1(a; c; z)$ — вырожденный гипергеометрический ряд Куммера. Его часто (например, в ВТФ I, гл. 6) обозначают через $\Phi(a; c; z)$.

${}_mF_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z)$ часто записывают в виде

$${}_mF_n \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{matrix} ; z \right].$$

Неполная бета-функция

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = p^{-1} x^p {}_2F_1(p, 1-q; p+1; x);$$

$$I_x(p, q) = \frac{B_x(p, q)}{B_1(p, q)},$$

$$S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; z) = \sum_{h=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(b_j - b_h)}{4 \prod_{j=n+1}^n \Gamma(1 + b_h - b_j)} z^{1+2b_h} \times \\ \times {}_0F_3(1 + b_h - b_1, \dots, *, \dots, 1 + b_h - b_4; (-1)^n z^2).$$

Штрих в \prod' и звездочка в ${}_0F_3$ означают, что опускается член, содержащий $b_h - b_h$. При $n=1$ произведение \prod в числителе, а при $n=4$ — в знаменателе заменяется единицей.

Вырожденные гипергеометрические функции. См. также ВТФ I, гл. 6 и ВТФ II, гл. 8 и 9. См. также Гипергеометрические функции, Ортогональные многочлены, E-функцию, G-функцию.

Функции Уиттекера

$$M_{\kappa, \mu}(z) = z^{1/2+\mu} e^{-z/2} {}_1F_1(1/2 + \mu - \kappa; 2\mu + 1; z),$$

$$W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu) M_{\kappa, \mu}(z)}{\Gamma(1/2 - \mu - \kappa)} + \frac{\Gamma(2\mu) M_{\kappa, -\mu}(z)}{\Gamma(1/2 + \mu - \kappa)}.$$

Функции параболического цилиндра

$$D_\nu(z) = 2^{\nu/2+1/4} z^{-1/2} W_{\nu/2+1/4, 1/4}(2^{-1}z^2),$$

$$D_n(z) = (-1)^n \exp(2^{-2}z^2) \frac{d^n}{dz^n} [\exp(-2^{-1}z^2)].$$

Функция Бейтмена

$$k_{2\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} W_{\nu, 1/2}(2z).$$

Интегральная экспонента и родственные функции

$$-Ei(-x) = E_1(x) = \int_x^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} = \Gamma(0, x), \quad -\pi < \arg x < \pi,$$

$$Ei^+(x) = Ei(x+i0), \quad Ei^-(x) = Ei(x-i0), \quad x > 0,$$

$$\overline{Ei}(x) = 2^{-1} [Ei^+(x) + Ei^-(x)], \quad x > 0.$$

Последняя функция в ВТФ II, п. 9.7 обозначается $E^*(x)$.

$$\operatorname{li}(z) = \int_0^z \frac{dt}{\ln t} = \operatorname{Ei}(\ln z),$$

$$\operatorname{si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2i} [\operatorname{Ei}(ix) - \operatorname{Ei}(-ix)],$$

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \pi/2 + \operatorname{si}(x),$$

$$\operatorname{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = -\operatorname{ci}(x) = 2^{-1} [\operatorname{Ei}(ix) + \operatorname{Ei}(-ix)].$$

Функции ошибок и родственные функции

$$\operatorname{Erf}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right),$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt = 1 - \operatorname{Erf}(x) = (\pi x)^{-1/2} \exp(-2^{-1}x^2) W_{-1/4, 1/4}(x^2)$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = \pi^{-1/2} \Gamma(1/2, x^2),$$

$$\operatorname{Erfc}(x\sqrt{\pm i}) = \sqrt{\pm 2i} [C(x^2) \mp i S(x^2)].$$

Эти функции отличаются множителем $2\pi^{-1/2}$ от функций, введенных в ВТФ II, п. 9.9.

$$C(x) = 2^{-1/2}\pi^{-1/2} \int_0^x t^{-1/2} \cos t dt,$$

$$S(x) = 2^{-1/2}\pi^{-1/2} \int_0^x t^{-1/2} \sin t dt.$$

Неполные гамма-функции

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \alpha^{-1} x^\alpha {}_1F_1(\alpha; \alpha+1; -x),$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x) = x^{(\alpha-1)/2} e^{-x/2} W_{(\alpha-1)/2, \alpha/2}(x).$$

Частные случаи функций Уиттекера

$$\begin{aligned}
 M_{-1/4, 1/4}(x) &= 2^{-1} \pi^{-1/2} x^{1/4} e^{x/2} \text{Erfi}(x^{1/2}), \\
 M_{.i+1/4, -1/4}(x) &= \frac{(-2)^{-n}}{(\frac{1}{2})_n} x^{1/4} e^{-x/2} \text{He}_{2n}[(2x)^{1/2}], \\
 M_{n+3/4, 1/4}(x) &= \frac{(-1)^n 2^{-n-1/2}}{(\frac{3}{2})_n} x^{1/4} e^{-x/2} \text{He}_{2n+1}[(2x)^{1/2}], \\
 M_{0, \mu}(x) &= 2^{2\mu} \Gamma(\mu+1) x^{1/2} I_{\mu}(x/2); \\
 M_{0, \mu}(\pm ix) &= 2^{2\mu} \Gamma(\mu+1) e^{\pm \mu \pi i/2} x^{1/2} J_{\mu}(x/2), \\
 M_{\mu+1/2, \mu}(x) &= x^{\mu+1/2} e^{-x/2}, \\
 M_{-\mu-1/2, \mu}(x) &= x^{\mu+1/2} e^{x/2}, \\
 M_{\mu-1/2, \mu}(x) &= 2\mu x^{1/2-\mu} e^{x/2} \gamma(2\mu, x), \\
 M_{\mu+n+1/2, \mu}(x) &= \frac{n!}{(2\mu+1)_n} x^{\mu+1/2} e^{-x/2} L_n^{2\mu}(x); \\
 W_{-1/2, 0}(x) &= -x^{1/2} e^{x/2} \text{Ei}(-x), \\
 W_{-1/4, \pm 1/4}(x) &= \pi^{1/2} x^{1/4} e^{x/2} \text{Erfc}(x^{1/2}), \\
 W_{n/2+1/4, \pm 1/4}(x) &= 2^{-n/2} x^{1/4} e^{-x/2} \text{He}_n[(2x)^{1/2}], \\
 W_{\mu, \pm 1/4}(x) &= 2^{-\mu} (2x)^{1/4} D_{2\mu-1/2}[(2x)^{1/2}], \\
 W_{0, \mu}(x) &= (x/\pi)^{1/2} K_{\mu}(x/2), \\
 W_{0, \mu}(ix) &= \frac{(\pi x)^{1/2}}{2} \exp[-(\nu/2 + 1/4)\pi i] H_{\mu}^{(2)}(x/2), \\
 W_{0, \mu}(-ix) &= \frac{(\pi x)^{1/2}}{2} \exp[(\nu/2 + 1/4)\pi i] H_{\mu}^{(1)}(x/2), \\
 W_{\mu+1/2, \pm \mu}(x) &= x^{\mu+1/2} e^{-x/2}, \\
 W_{\mu-1/2, \pm \mu}(x) &= x^{1/2-\mu} e^{x/2} \Gamma(2\mu, x), \\
 W_{\mu+n+1/2, \pm \mu}(x) &= (-1)^n n! x^{\mu+1/2} e^{-x/2} L_n^{2\mu}(x).
 \end{aligned}$$

E-функция Мак-Роберта. См. также ВТФ I, гл. 5.

Если $p \geq q + 1$,

$$\begin{aligned}
 E(p; \alpha_r; q; \rho_s; x) &= \sum_{r=1}^p \frac{\prod_{s=1}^p \Gamma(\alpha_s - \alpha_r)}{\prod_{t=1}^q \Gamma(\rho_t - \alpha_r)} \Gamma(\alpha_r) x^{\alpha_r} \times \\
 &\times {}_{q+1}F_{p-1}(\alpha_r, \alpha_r - \rho_1 + 1, \dots, \alpha_r - \rho_q + 1; \alpha_r - \alpha_1 + 1, \dots, *, \dots \\
 &\dots, \alpha_r - \alpha_p + 1; (-1)^{p-q} x),
 \end{aligned}$$

где $|x| < 1$ при $p = q + 1$.

Если $p \leq q + 1$, то

$$E(p; \alpha_r : q; \rho_s : x) = \frac{\prod_{r=1}^p \Gamma(\alpha_r)}{\prod_{s=1}^q \Gamma(\rho_s)} {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; -1/x),$$

где $x \neq 0$ и $|x| > 1$ при $p = q + 1$. Если $p > q + 1$, последнее соотношение дает асимптотическое разложение для E -функции при больших значениях x .

$$E(\alpha : : x) = \Gamma(\alpha) (1 + x^{-1})^{-\alpha},$$

$$E(\nu + 1 : x) = x^{\nu/2} J_\nu(2x^{-1/2}),$$

$$E(1/2 + \nu, 1/2 - \nu : : 2x) = \frac{(2\pi x)^{1/2} e^{\nu} K_\nu(x)}{\cos(\nu\pi)},$$

$$E(\alpha, \beta : : x) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) x^{-k} e^{x/2} W_{k, m}(x),$$

$$k = 2^{-1}(1 - \alpha - \beta), \quad m = 2^{-1}(\alpha - \beta),$$

$$E\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1}{2} : \alpha + \beta : \frac{x^2}{4}\right) =$$

$$= \pi^{1/2} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) (x/2)^{-2k} W_{k, m}(ix) W_{k, m}(-ix),$$

$$k = 2^{-1}(1 - \alpha - \beta), \quad m = 2^{-1}(\alpha - \beta).$$

G-функция Мейера. См. также ВТФ I, гл. V.

$$G_{p, q}^{m, n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{L} \int \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds,$$

где L — путь, отделяющий полюсы функции $\Gamma(b_1 - s) \dots \Gamma(b_m - s)$ от полюсов $\Gamma(1 - a_1 + s) \dots \Gamma(1 - a_n + s)$. Более подробное определение см. в ВТФ I, п. 5.3.

Из формул, содержащих G -функцию, при частных значениях параметров получаются многие интегралы, содержащие функции Бесселя, функции Лежандра и другие высшие трансцендентные функции. Следующие два списка дают выражения для некоторых частных видов G -функций через хорошо известные высшие трансцендентные функции и, наоборот, выражения высших трансцендентных функций через G -функции. Эти списки не полны. См. также ВТФ I, п. 5.6.

Частные случаи G -функции

$$G_{02}^{10}(x | a, b) = x^{(a+b)/2} J_{a-b}(2x^{1/2}),$$

$$G_{02}^{20}(x | a, b) = 2x^{(a+b)/2} K_{a-b}(2x^{1/2}),$$

$$G_{12}^{11} \left(x \left| \begin{matrix} 1/2 \\ b, -b \end{matrix} \right. \right) = \pi^{1/2} e^{-x/2} I_b(x/2),$$

$$G_{12}^{11} \left(x \left| \begin{matrix} a \\ b, c \end{matrix} \right. \right) = \frac{\Gamma(1 - a + b)}{\Gamma(1 + b - c)} x^b {}_1F_1(1 - a + b; 1 + b - c; -x),$$

$$G_{12}^{20} \left(x \left| \begin{matrix} 1/2 \\ b, -b \end{matrix} \right. \right) = \pi^{-1/2} e^{-x/2} K_b(x/2),$$

$$G_{12}^{20}(x \mid a \mid b, c) = x^{(b+c-1)/2} e^{-x/2} W_{k, m}(x),$$

$$k = 2^{-1}(1 + b + c) - a, \quad m = b/2 - c/2,$$

$$G_{12}^{21}(x \mid b, -b) = \frac{\pi^{1/2}}{\cos b\pi} e^{x/2} K_b(x/2),$$

$$G_{12}^{21}(x \mid b, c) = \Gamma(b - a + 1) \Gamma(c - a + 1) x^{(b+c-1)/2} e^{x/2} W_{k, m}(x),$$

$$k = a - 2^{-1}(b + c + 1), \quad m = b/2 - c/2,$$

$$G_{04}^{10}(x \mid a, b, 2b - a, b + 1/2) = \pi^{-1/2} x^b I_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}) J_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}),$$

$$G_{04}^{10}(x \mid a, a + 1/2, b, 2a - b) = \frac{1}{2\pi^{1/2} \cos(b-a)\pi} \times$$

$$\times x^a [J_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}) I_2(b-a) (2^{3/2} x^{1/4}) + I_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}) J_2(b-a) (2^{3/2} x^{1/4})],$$

$$G_{04}^{10}(x \mid a + 1/2, a, b, 2a - b) = 2^{-1} \pi^{-1/2} [\sin(a-b)\pi]^{-1} \times$$

$$\times x^a [J_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}) I_2(b-a) (2^{3/2} x^{1/4}) - I_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}) J_2(b-a) (2^{3/2} x^{1/4})],$$

$$G_{04}^{20}(x \mid a, a + 1/2, b, b + 1/2) = x^{(a+b)/2} J_2(a-b) (4x^{1/4}),$$

$$G_{04}^{20}(x \mid a, -a, 0, 1/2) = -\pi^{1/2} (\sin 2a\pi)^{-1} \times$$

$$\times [J_{2a}(z e^{\pi i/4}) J_{2a}(z e^{-\pi i/4}) - J_{-2a}(z e^{\pi i/4}) J_{-2a}(z e^{-\pi i/4})], \quad z = 2^{3/2} x^{1/4},$$

$$G_{04}^{20}(x \mid 0, 1/2, a, -a) = \pi^{1/2} i^{-1} (\sin 2a\pi)^{-1} \times$$

$$\times [e^{2a\pi i} J_{2a}(z e^{-\pi i/4}) J_{-2a}(z e^{\pi i/4}) - e^{-2a\pi i} J_{2a}(z e^{\pi i/4}) J_{-2a}(z e^{-\pi i/4})],$$

$$z = 2^{3/2} x^{1/4},$$

$$G_{04}^{30}(x \mid 3a - 1/2, a, -a - 1/2, a - 1/2) =$$

$$= 2\pi^{1/2} (\cos 2a\pi)^{-1} x^{a-1/2} K_{4a} (2^{3/2} x^{1/4}) [J_{4a} (2^{3/2} x^{1/4}) + J_{-4a} (2^{3/2} x^{1/4})],$$

$$G_{04}^{30}(x \mid 0, a - 1/2, -a - 1/2, -1/2) =$$

$$= 4\pi^{1/2} x^{-1/2} K_{2a} (2^{3/2} x^{1/4}) [J_{2a} (2^{3/2} x^{1/4}) \cos a\pi - Y_{2a} (2^{3/2} x^{1/4}) \sin a\pi],$$

$$G_{04}^{30}(x \mid -1/2, a - 1/2, -a - 1/2, 0) =$$

$$= -4\pi^{1/2} x^{-1/2} K_{2a} (2^{3/2} x^{1/4}) [J_{2a} (2^{3/2} x^{1/4}) \sin a\pi + Y_{2a} (2^{3/2} x^{1/4}) \cos a\pi],$$

$$G_{04}^{30}(x \mid a, b + 1/2, b, 2b - a) = \pi^{1/2} 2^{1/2} x^b K_{2(a-b)} (2^{3/2} x^{1/4}) J_2(a-b) (2^{3/2} x^{1/4}),$$

$$G_{04}^{40}(x \mid a, a + 1/2, b, b + 1/2) = 4\pi x^{(a+b)/2} K_{2(a-b)} (4x^{1/4}),$$

$$G_{04}^{40}(x \mid a, a + 1/2, b, 2a - b) = 2^3 \pi^{1/2} x^a K_{2(b-a)} (2^{3/2} x^{1/4} e^{\pi i/4}) K_{2(b-a)} (2^{3/2} x^{1/4} e^{-\pi i/4}),$$

$$G_{04}^{n0}(x \mid a, b, c, d) = x^{-1/2} S_n(a, b, c, d; x^{1/2}), \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

$$G_{13}^{11}(x \mid a, 0, -a) = \pi^{1/2} J_a^2(x^{1/2}),$$

$$G_{13}^{11}(x \mid 0, a, -a) = \pi^{1/2} J_a(x^{1/2}) J_{-a}(x^{1/2}),$$

$$G_{13}^{11}(x \mid a, b, a - 1/2) = x^{a/2 + b/2 - 1/4} H_{a-b-1/2}(2x^{1/2}),$$

$$G_{13}^{20}(x \mid a, b, a - 1/2) = x^{a/2 + b/2} Y_{b-a}(2x^{1/2}),$$

$$G_{13}^{20}(x \mid b, a, 2a - b) = -\pi^{1/2} x^a J_{b-a}(x^{1/2}) Y_{b-a}(x^{1/2}),$$

$$G_{13}^{20}(x \mid a, -a, 0) = \pi^{1/2} 2^{-1} (\sin a\pi)^{-1} [J_{-a}^2(x^{1/2}) - J_a^2(x^{1/2})],$$

$$\begin{aligned}
G_{13}^{21} \left(x \left| \begin{array}{c} 1/2 \\ a, 0, -a \end{array} \right. \right) &= 2\pi^{1/2} I_a(x^{1/2}) K_a(x^{1/2}), \\
G_{13}^{21} \left(x \left| \begin{array}{c} 1/2 \\ a, -a, 0 \end{array} \right. \right) &= \pi^{3/2} (\sin 2a\pi)^{-1} [I_{-a}^2(x^{1/2}) - I_a^2(x^{1/2})], \\
G_{13}^{21} \left(x \left| \begin{array}{c} a+1/2 \\ a+1/2, b, a \end{array} \right. \right) &= \frac{\pi x^{(a+b)/2}}{\cos(a-b)\pi} [I_{b-a}(2x^{1/2}) - L_{a-b}(2x^{1/2})], \\
G_{13}^{21} \left(x \left| \begin{array}{c} a+1/2 \\ a, a+1/2, b \end{array} \right. \right) &= \pi x^{(a+b/2)} [I_{a-b}(2x^{1/2}) - L_{a-b}(2x^{1/2})], \\
G_{13}^{30} \left(x \left| \begin{array}{c} a+1/2 \\ a+b, a-b, a \end{array} \right. \right) &= 2\pi^{-1/2} x^a K_b^2(x^{1/2}), \\
G_{13}^{31} \left(x \left| \begin{array}{c} a+1/2 \\ a+1/2, -a, a \end{array} \right. \right) &= \frac{\pi^2}{\cos 2a\pi} [H_{2a}(2x^{1/2}) - Y_{2a}(2x^{1/2})], \\
G_{13}^{31} \left(x \left| \begin{array}{c} a \\ a, b, -b \end{array} \right. \right) &= 2^{-2a+2} \Gamma(1-a-b) \Gamma(1-a+b) S_{2a-1, 2b}(2x^{1/2}), \\
G_{13}^{31} \left(x \left| \begin{array}{c} a+1/2 \\ b, 2a-b, a \end{array} \right. \right) &= \pi^{5/2} 2^{-1} [\cos(b-a)\pi]^{-1} x^a H_{b-a}^{(1)}(x^{1/2}) H_{b-a}^{(2)}(x^{1/2}), \\
G_{22}^{12} \left(x \left| \begin{array}{c} -c_1, -c_2 \\ a-1, -b \end{array} \right. \right) &= \frac{\Gamma(a+c_1)\Gamma(a+c_2)}{\Gamma(a+b)} x^{a-1} {}_2F_1(a+c_1, a+c_2; a+b; -x), \\
G_{24}^{12} \left(x \left| \begin{array}{c} a+1/2, a \\ b+a, a-c, a+c, a-b \end{array} \right. \right) &= \pi^{1/2} x^a J_{b+c}(x^{1/2}) J_{b-c}(x^{1/2}), \\
G_{24}^{22} \left(x \left| \begin{array}{c} a, a+1/2 \\ b, c, 2a-c, 2a-b \end{array} \right. \right) &= 2\pi^{1/2} x^a I_{b+c-2a}(x^{1/2}) K_{b-c}(x^{1/2}), \\
G_{24}^{30} \left(x \left| \begin{array}{c} 0, 1/2 \\ a, b, -b, -a \end{array} \right. \right) &= i2^{-2} \pi^{1/2} [H_{a-b}^{(1)}(x^{1/2}) H_{a+b}^{(1)}(x^{1/2}) - H_{a-b}^{(2)}(x^{1/2}) H_{a+b}^{(2)}(x^{1/2})], \\
G_{24}^{31} \left(x \left| \begin{array}{c} 1/2+a, 1/2-a \\ 0, 1/2, b, -b \end{array} \right. \right) &= \frac{\pi^{1/2} \Gamma(1/2-a+b) x^{-1/2}}{\Gamma(1+2a)} W_{a,b}(2x^{1/2}) M_{-a,b}(2x^{1/2}), \\
G_{24}^{40} \left(x \left| \begin{array}{c} 1/2+a, 1/2-a \\ 0, 1/2, b, -b \end{array} \right. \right) &= \pi^{1/2} x^{-1/2} W_{a,b}(2x^{1/2}) W_{-a,b}(2x^{1/2}), \\
G_{24}^{40} \left(x \left| \begin{array}{c} a, a+1/2 \\ b+c, b-c, b+1/2+c, b+1/2-c \end{array} \right. \right) &= \pi^{1/2} 2^{-k} x^{b-1/4} \exp(-x^{1/2}) W_{k, 2c}(2x^{1/2}), \\
& k = 1/2 + 2b - 2c, \\
G_{24}^{40} \left(x \left| \begin{array}{c} a, a+1/2 \\ a+b, a+c, a-c, a-b \end{array} \right. \right) &= 2\pi^{-1/2} x^a K_{b+c}(x^{1/2}) K_{b-c}(x^{1/2}), \\
G_{24}^{41} \left(x \left| \begin{array}{c} 0, 1/2 \\ a, b, -b, -a \end{array} \right. \right) &= \\
&= \frac{-2^{-2} \pi^{5/2}}{i \sin a\pi \sin b\pi} [e^{-b\pi i} H_{a-b}^{(1)}(x^{1/2}) H_{a+b}^{(2)}(x^{1/2}) - e^{b\pi i} H_{a+b}^{(1)}(x^{1/2}) H_{a-b}^{(2)}(x^{1/2})], \\
G_{24}^{41} \left(x \left| \begin{array}{c} 1/2, 0 \\ a, b, -b, -a \end{array} \right. \right) &= \\
&= \frac{2^{-2} \pi^{5/2}}{\cos a\pi \cos b\pi} [e^{-b\pi i} H_{a-b}^{(1)}(x^{1/2}) H_{a+b}^{(2)}(x^{1/2}) + e^{b\pi i} H_{a+b}^{(1)}(x^{1/2}) H_{a-b}^{(2)}(x^{1/2})], \\
G_{24}^{41} \left(x \left| \begin{array}{c} 1/2+a, 1/2-a \\ 0, 1/2, b, -b \end{array} \right. \right) &= \\
&= x^{-1/2} \pi^{1/2} \Gamma(1/2+b-a) \Gamma(1/2-b-a) W_{a,b}(2ix^{1/2}) W_{a,b}(-2ix^{1/2}), \\
G_{24}^{42} \left(x \left| \begin{array}{c} a, a+1/2 \\ b+c, b-c, b+1/2+c, b+1/2-c \end{array} \right. \right) &= \\
&= 2^{b+1} \pi^{3/2} \Gamma(1-2a+2b+2c) \Gamma(1-2a+2b-2c) \times \\
& \quad \times x^{b-1/4} \exp(x^{1/2}) W_{k, 2c}(2x^{1/2}), \quad k = 2a-2b-1/2,
\end{aligned}$$

$$G_{44}^{14} \left(x \left| \begin{matrix} a-1, -c_1, -c_2, -c_3 \\ -b_1, -b_2, -b_3, -b_4 \end{matrix} \right. \right) = \frac{\prod_{h=1}^4 \Gamma(a+b_h)}{3} x^{a-1} \times \\ \times {}_4F_3(a+b_1, a+b_2, a+b_3, a+b_4; a+c_1, a+c_2, a+c_3; -x),$$

$$G_{pq}^{1p} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(1+b_1-a_j)}{\prod_{j=2}^q \Gamma(1+b_1-b_j)} x^{b_1} {}_pF_{q-1}(1+b_1-a_1, \dots, 1+b_1-a_p; \\ 1+b_1-b_2, \dots, 1+b_1-b_q; -x), \quad p \leq q,$$

$$G_{pq}^{1n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1+b_1-a_j) x^{b_1}}{\prod_{j=2}^q \Gamma(1+b_1-b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j-b_1)} \times \\ \times {}_pF_{q-1}(1+b_1-a_1, \dots, 1+b_1-a_p; 1+b_1-b_2, \dots, 1+b_1-b_q; -x), \\ p \leq q,$$

$$G_{pq}^{q1} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \\ = x^{a_1-1} E(1-a_1+b_1, \dots, 1-a_1+b_q; 1-a_1+a_2, \dots, 1-a_1+a_p; x).$$

Функции, выражающиеся через G -функцию

$$x^\mu J_\nu(x) = 2^\mu G_{02}^{10} (2^{-2} x^2 \mid \nu/2 + \mu/2, \mu/2 - \nu/2), \\ x^\mu J_\nu(x) = 4^\mu G_{04}^{20} (4^{-4} x^4 \mid \nu/4 + \mu/4, \nu/4 + \mu/4 + 1/2, \mu/4 - \nu/4, 1/2 + \mu/4 - \nu/4), \\ x^\mu Y_\nu(x) = 2^\mu G_{13}^{20} \left(2^{-2} x^2 \mid \begin{matrix} \mu/2 - \nu/2 - 1/2 \\ \mu/2 - \nu/2, \mu/2 + \nu/2, \mu/2 - \nu/2 - 1/2 \end{matrix} \right), \\ x^\mu K_\nu(x) = 2^{\mu-1} G_{02}^{20} (2^{-2} x^2 \mid \mu/2 + \nu/2, \mu/2 - \nu/2), \\ x^\mu K_\nu(x) = \\ = 4^{\mu-1} \pi^{-1} G_{04}^{40} (4^{-4} x^4 \mid \nu/4 + \mu/4, 1/2 + \nu/4 + \mu/4, -\nu/4 + \mu/4, 1/2 - \nu/4 + \mu/4), \\ e^{-x} I_\nu(x) = \pi^{-1/2} G_{12}^{11} \left(2x \mid \begin{matrix} 1/2 \\ \nu, -\nu \end{matrix} \right), \\ e^{-x} K_\nu(x) = \pi^{1/2} G_{12}^{20} \left(2x \mid \begin{matrix} 1/2 \\ \nu, -\nu \end{matrix} \right), \\ e^x K_\nu(x) = \pi^{-1/2} \cos \nu\pi G_{12}^{21} \left(2x \mid \begin{matrix} 1/2 \\ \nu, -\nu \end{matrix} \right), \\ x^\mu H_\nu(x) = 2^\mu G_{13}^{11} \left(2^{-2} x^2 \mid \begin{matrix} 1/2 + \nu/2 + \mu/2 \\ 1/2 + \nu/2 + \mu/2, \mu/2 - \nu/2, \mu/2 + \nu/2 \end{matrix} \right), \\ H_\nu(x) - Y_\nu(x) = \pi^{-2} \cos \nu\pi G_{13}^{31} \left(2^{-2} x^2 \mid \begin{matrix} 1/2 + \nu/2 \\ 1/2 + \nu/2, -\nu/2, \nu/2 \end{matrix} \right),$$

$$\begin{aligned}
x^\mu [I_\nu(x) - L_\nu(x)] &= \pi^{-1} 2^\mu G_{13}^{21} \left(2^{-2} x^2 \left| \begin{matrix} \mu/2 + \nu/2, & \mu/2 + \nu/2 + 1/2 \\ \mu/2 + \nu/2, & \mu/2 - \nu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
x^\mu [I_{-\nu}(x) - L_\nu(x)] &= \pi^{-1} 2^\mu \cos \nu\pi G_{13}^{21} \left(2^{-2} x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + \nu/2 + \mu/2 \\ \mu/2 + \nu/2, & \mu/2 - \nu/2, & \mu/2 + \nu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
S_{\mu, \nu}(x) &= 2^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma(1/2 - \mu/2 - \nu/2) \Gamma(1/2 - \mu/2 + \nu/2)} G_{13}^{31} \left(2^{-2} x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + \mu/2 \\ \mu/2 + \nu/2, & \nu/2, & -\nu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
J_\nu^2(x) &= \pi^{-1/2} G_{13}^{11} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 \\ \nu, & 0, & -\nu \end{matrix} \right. \right), \\
J_\nu(x) J_{-\nu}(x) &= \pi^{-1/2} G_{13}^{11} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 \\ 0, & \nu, & -\nu \end{matrix} \right. \right), \\
x^\sigma J_\mu(x) J_\nu(x) &= \pi^{-1/2} G_{24}^{12} \left[x^2 \left| \begin{matrix} \mu + \nu + \sigma, & \nu + \sigma - \mu, & \mu + \sigma - \nu \\ \frac{\mu + \nu + \sigma}{2}, & \frac{\nu + \sigma - \mu}{2}, & \frac{\mu + \sigma - \nu}{2} \end{matrix} \right. \right], \\
x^\mu I_\nu(x) J_\nu(x) &= \pi^{1/2} 2^{3\mu/2} G_{04}^{10} \left(\frac{x^4}{64} \left| \begin{matrix} \mu/4 + \nu/2, & \mu/4 - \nu/2, & \mu/4 \\ \mu/4, & \mu/4 + 1/2 \end{matrix} \right. \right), \\
I_\nu(x) J_{-\nu}(x) &= \pi^{1/2} \cos(2^{-1} \nu\pi) G_{04}^{10} \left(\frac{x^4}{64} \left| \begin{matrix} 1/2, & \nu/2, & -\nu/2 \\ 0, & 1/2, & \nu/2, & -\nu/2 \end{matrix} \right. \right) - \\
&\quad - \pi^{1/2} \sin(2^{-1} \nu\pi) G_{04}^{10} \left(\frac{x^4}{64} \left| \begin{matrix} 1/2, & 0, & \nu/2, & -\nu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
x^\mu J_\nu(x) Y_\nu(x) &= -\pi^{-1/2} G_{13}^{20} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + \mu/2 \\ \nu + \mu/2, & \mu/2, & \mu/2 - \nu \end{matrix} \right. \right), \\
I_\nu(x) K_\nu(x) &= 2^{-1} \pi^{-1/2} G_{13}^{21} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 \\ \nu, & 0, & -\nu \end{matrix} \right. \right), \\
x^\mu K_\nu(x) J_\nu(x) &= \pi^{-1/2} 2^{3\mu/2 - 1/2} G_{04}^{30} \left(\frac{1}{64} x^4 \left| \begin{matrix} \mu/4 + \nu/2, & \mu/4 + 1/2, & \mu/4 \\ \mu/4, & \mu/4 - \nu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
x^\sigma I_\nu(x) K_\mu(x) &= 2^{-1} \pi^{-1/2} G_{24}^{22} \left[x^2 \left| \begin{matrix} \nu + \mu + \sigma, & \nu + \sigma - \mu, & \mu + \sigma - \nu \\ \frac{\nu + \mu + \sigma}{2}, & \frac{\nu + \sigma - \mu}{2}, & \frac{\mu + \sigma - \nu}{2} \end{matrix} \right. \right], \\
x^\mu H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) &= \pi^{-5/2} 2 \cos \nu\pi G_{13}^{31} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + \mu/2 \\ \mu/2 + \nu, & \mu/2 - \nu, & \mu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
x^\mu K_\nu^2(x) &= 2^{-1} \pi^{1/2} G_{13}^{30} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + \mu/2 \\ \nu + \mu/2, & -\nu + \mu/2, & \mu/2 \end{matrix} \right. \right), \\
x^\sigma K_\nu(x) K_\mu(x) &= 2^{-1} \pi^{1/2} G_{24}^{40} \left[x^2 \left| \begin{matrix} \nu + \mu + \sigma, & \nu + \sigma - \mu, & \mu + \sigma - \nu \\ \frac{\nu + \mu + \sigma}{2}, & \frac{\nu + \sigma - \mu}{2}, & \frac{\mu + \sigma - \nu}{2} \end{matrix} \right. \right], \\
x^{2\mu} K_{2\nu}(xe^{\pi i/4}) K_{2\nu}(xe^{-\pi i/4}) &= \\
&= 2^{3\mu-3} \pi^{-1/2} G_{04}^{40} \left(\frac{1}{64} x^4 \left| \begin{matrix} \mu/2, & \mu/2 + 1/2, & \mu/2 + \nu, & \mu/2 - \nu \end{matrix} \right. \right), \\
x^l e^{-x/2} M_{k, m}(x) &= \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(1/2 + k + m)} G_{12}^{11} \left(x \left| \begin{matrix} 1-k+l \\ 1/2 + l + m, & 1/2 + l - m \end{matrix} \right. \right), \\
x^l e^{-x/2} W_{k, m}(x) &= G_{12}^{20} \left(x \left| \begin{matrix} l-k+1 \\ m+l+1/2, & l-m+1/2 \end{matrix} \right. \right), \\
x^l e^{x/2} W_{k, m}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1/2 + m - k) \Gamma(1/2 - m - k)} G_{12}^{21} \left(x \left| \begin{matrix} k+l+1 \\ l-m+1/2, & m+l+1/2 \end{matrix} \right. \right), \\
e^{-x/2} W_{k, m}(x) &= \pi^{-1/2} x^{1/2} 2^{k-1/2} G_{24}^{40} \left(2^{-2} x^2 \left| \begin{matrix} 1/4 - k/2, & 3/4 - k/2 \\ 1/2 + m/2, & 1/2 - m/2, & m/2, & -m/2 \end{matrix} \right. \right),
\end{aligned}$$

$$e^x W_{k, m}(2x) = \frac{x^{1/2 2 - (k+1)\pi - 8/2}}{\Gamma(1/2 + m - k) \Gamma(1/2 - m - k)} G_{24}^{42} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/4 + k/2, 3/4 + k/2 \\ m/2, 1/2 + m/2, -m/2, 1/2 - m/2 \end{matrix} \right. \right),$$

$$W_{k, m}(x) M_{-k, m}(x) = \frac{\pi^{-1/2} \Gamma(1 + 2m)}{\Gamma(1/2 - k + m)} G_{24}^{31} \left(2^{-2} x^2 \left| \begin{matrix} 1 + k, 1 - k \\ 1/2, 1, 1/2 + m, 1/2 - m \end{matrix} \right. \right),$$

$$x^l W_{k, m}(2ix) W_{k, m}(-2ix) = \frac{x\pi^{-1/2}}{\Gamma(1/2 + m - k) \Gamma(1/2 - m - k)} G_{24}^{41} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + l/2 + k, 1/2 + l/2 - k \\ l/2, 1/2 + l/2, l/2 + m, l/2 - m \end{matrix} \right. \right),$$

$$W_{k, m}(x) W_{-k, m}(x) = \pi^{-1/2} G_{24}^{40} \left(2^{-2} x^2 \left| \begin{matrix} k + 1, -k + 1 \\ 1/2, 1, m + 1/2, -m + 1/2 \end{matrix} \right. \right),$$

$${}_2F_1(a, b; c; -x) = \frac{\Gamma(c) x}{\Gamma(a) \Gamma(b)} G_{22}^{12} \left(x \left| \begin{matrix} -a, -b \\ -1, -c \end{matrix} \right. \right),$$

$${}_4F_3(a, b, c, d; e, f, l; -x) = \frac{\Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(l)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c) \Gamma(d)} x G_{44}^{14} \left(x \left| \begin{matrix} -a, -b, -c, -d \\ -1, -e, -f, -l \end{matrix} \right. \right),$$

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} x G_{p, q+1}^{1, p} \left(x \left| \begin{matrix} -a_1, \dots, -a_p \\ -1, -b_1, \dots, -b_q \end{matrix} \right. \right),$$

$p \leq q + 1,$

$$E(p; \alpha_r; q; \beta_s; x) = G_{q+1, p}^{p, 1} \left(x \left| \begin{matrix} 1, \beta_1, \dots, \beta_q \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \end{matrix} \right. \right).$$

Относительно других специальных функций, выражающихся через G -функцию, в частности комбинаций функций Лежандра, а также комбинаций обобщенных гипергеометрических рядов, см. С. С. Meijer, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 43 (1940), 198—210 и 366—378; 44 (1941), 82—92, 186—194, 298—307, 435—451, 590—605, 1062—1070; 49 (1946), 227—235, 344—356, 457—469, 632—641, 765—772, 936—943, 1063—1072, 1164—1175; 55 (1952), 369—379, 483—487; 56 (1953), 43—49, 187—193.

Гипергеометрические ряды от многих переменных. См. также ВТФ, гл. 5. Гипергеометрические ряды от двух переменных. Во всех двойных суммах m и n меняются от 0 до ∞ .

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum \frac{(\alpha)_m (\alpha')_n (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^m y^n,$$

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n,$$

$$\Phi_2(\beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum \frac{(\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n,$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(\beta, \gamma; x, y) &= \sum \frac{(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \\ \Psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y) &= \sum \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^m y^n, \\ \Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma'; x, y) &= \sum \frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^m y^n, \\ \Xi_1(\alpha, \alpha', \beta, \gamma; x, y) &= \sum \frac{(\alpha)_m (\alpha')_n (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \\ \Xi_2(\alpha, \beta, \gamma; x, y) &= \sum \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n.\end{aligned}$$

Относительно других гипергеометрических рядов от двух переменных см. ВТФ I, п. 5.7.1.

Гипергеометрические ряды от многих переменных. Все суммирования ведутся от 0 до ∞ .

$$\begin{aligned}F_A(\alpha; \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n) &= \\ &= \sum \frac{(\alpha)_{m_1 + \dots + m_n} (\beta_1)_{m_1} \dots (\beta_n)_{m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \dots (\gamma_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \\ \Phi_2(\beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; z_1, \dots, z_n) &= \sum \frac{(\beta_1)_{m_1} \dots (\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1 + \dots + m_n} m_1! \dots m_n!} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \\ \Psi_2(\alpha; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n) &= \sum \frac{(\alpha)_{m_1 + \dots + m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \dots (\gamma_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}.\end{aligned}$$

Эллиптические функции и интегралы. См. также ВТФ III, гл. 13. Полные эллиптические интегралы

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = 2^{-1} \pi {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; k^2),$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi = 2^{-1} \pi {}_2F_1(-1/2, 1/2; 1; k^2).$$

Тета-функции

$$\theta_0(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(v - 1/2 + n)^2 \tau^{-1}],$$

$$\theta_1(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[-i\pi(v - 1/2 + n)^2 \tau^{-1}],$$

$$\theta_2(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[-i\pi(v + n)^2 \tau^{-1}],$$

$$\theta_3(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(v + n)^2 \tau^{-1}],$$

$$\theta_4(v | \tau) = \theta_0(v | \tau).$$

Указанные здесь ряды связаны с определениями, данными в ВТФ II, равенства 13.19 (10) — (13), при помощи мнимого преобразования Якоби, см. ВТФ III, равенства 13.22 (8).

Модифицированные тета-функции

$$\hat{\theta}_0(v | \tau) = \hat{\theta}_4(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-i\pi(v + 1/2 + n)^2 \tau^{-1}] - \sum_{n=-1}^{-\infty} \exp[-i\pi(v + 1/2 + n)^2 \tau^{-1}] \right\},$$

$$\hat{\theta}_1(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp[-i\pi(v - 1/2 + n)^2 \tau^{-1}] - \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n \exp[-i\pi(v - 1/2 + n)^2 \tau^{-1}] \right\},$$

$$\hat{\theta}_2(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp[-i\pi(v + n)^2 \tau^{-1}] - \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n \exp[-i\pi(v + n)^2 \tau^{-1}] \right\},$$

$$\hat{\theta}_3(v | \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-i\pi(v + n)^2 \tau^{-1}] - \sum_{n=-1}^{-\infty} \exp[-i\pi(v + n)^2 \tau^{-1}] \right\}.$$

Различные функции. См. также ВТФ III, гл. 18.

$$\mu(x, a) = \int_0^{\infty} \frac{x^s s^a}{\Gamma(s+1)} ds,$$

$$\nu(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} ds,$$

$$\nu(x, a) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)} ds = \int_a^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} ds.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

К главе VIII

- Tricomi F., 1935, *Rend. dei Lincei* 6, 22, 564—571.
Ватсон Г., 1949, Теория бесселевых функций, т. I, ИЛ.
Снеддон И., 1955, Преобразования Фурье, ИЛ.
Титчмарш Е., 1948, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат.

К главе IX

- Титчмарш Е., 1948, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат.
Ватсон Г., 1949, Теория бесселевых функций, т. I, ИЛ.

К главе X

- Boas R. P., 1942 a, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 28, 21—24.
Boas R. P., 1942 b, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, 286—294.
Erdélyi A., 1950—51, *Rend. Sem. Mat. Univ. Torino* 10, 217—234.
Meijer C. S., 1940, *Proc. Amsterdam. Wet.* 43, 599—608 и 702—711.

К главе XI

- Титчмарш Е., 1948, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат.

К главе XII

- Бейтмен Г. и Эрдейи А., 1966, Высшие трансцендентные функции, т. 2, «Наука».
Конторович М. И. и Лебедев Н. Н., 1938, *ЖЭТФ* 8, 1192—1206.
Конторович М. И. и Лебедев Н. Н., 1939, *Физический журнал* I, 229—241.
Лебедев Н. Н. и Конторович М. И., 1939, *ЖЭТФ* 9, 729—741.
Лебедев Н. Н., 1946, *ДАН СССР* 52, 655—658.
Лебедев Н. Н., 1949, *ДАН СССР* 65, 621—624.
Лебедев Н. Н., 1949, *Прикладная математика и механика* 13, 465—476.
Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С., 1955, *Сборник задач по математической физике*, Гостехиздат.

К главе XIII

- Вакер В. В., Сорпсон Е. Т., 1950, *The mathematical theory of Huygens' principle*, Oxford, Clarendon Press.
Doetsch G., 1937, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin, Springer,

- Erdélyi A., 1940, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 11*, 293—303.
 Erdélyi A. and Kober Hermann, 1940, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 11*, 212—221.
 Hardy C. H., 1918, *Messenger of Math.* 47, 145—150.
 Hardy C. H. and Littlewood J. E., 1925, *Proc. London Math. Soc.* (2), 24, XXXVII—XLI.
 Hardy C. H. and Littlewood J. E., 1928, *Math. Z.* 27, 565—606.
 Hardy C. H. and Littlewood J. E., 1932, *Math. Z.* 34, 403—439.
 Kober H., 1940, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 11*, 193—211.
 Kober H., 1941 a, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 12*, 78—85.
 Kober H., 1941 b, *Trans. Amer. Math. Soc.* 50, 160—174.
 Kuttner B., 1953, *Proc. London Math. Soc.* (3), 3, 480—497.
 Love E. R., 1938, *Proc. London Math. Soc.* (2), 44, 363—397.
 Riesz M., 1949, *Acta Math.* 81, 1—223.
 Weyl H., 1917, *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich* 62, 296—302.
 Widder D. V., 1941, *The Laplace transform.*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
 Young L. C. and Love E. R., 1938, *Proc. London Math. Soc.* (2), 44, 1—28.
 Айнс Э. Л., 1939, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ДНТВУ.
 Зигмунд А., 1965, Тригонометрические ряды, т. 1 и 2, «Мир».
 Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е. и Полиа Г., 1948, Неравенства, ИЛ.

К главе XIV

- Shohat J. A. and Tamarkin J. D., 1943, *The problem of moments*, Amer. Math. Soc., New York.
 Widder D. V., 1941, *The Laplace transform.*, Princeton University Press, Princeton, N. J.
 Титчмарш Е., 1948, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат.

К главе XV

- Cossar J., 1939, *Proc. London Math. Soc.* (2), 45, 369—381.
 Kober H., 1942, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, 421—426.
 Kober H., 1943 a, *J. London Math. Soc.* 18, 66—71.
 Kober H., 1943 b, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 14, 49—54.
 Nickel K., 1951, *Math. Z.* 54, 81—96.
 Nickel K., 1953, *Math. Z.* 58, 49—62.
 Tricomi F. C., 1951 a, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 2, 199—211.
 Tricomi F. C., 1951 b, *Z. angew. Math. Physik* 2, 402—406.
 Титчмарш Е., 1948, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат.

К главе XIX

- Ватсон Г., 1949, Теория бесселевых функций, т. I, ИЛ.

УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинский алфавит

- $(a)_n, (a)_{-n} - 304$
 $(a)_v = \Gamma(a+v)/\Gamma(a) - 304$
 $\arg z$ — аргумент (фаза) комплексной величины z 304
 $\text{bei}(z), \text{bei}_v(z), \text{ber}(z), \text{ber}_v(z)$ — функции Кельвина 307
 C — постоянная Эйлера — Маскерони 305
 $C(x)$ — интеграл Френеля 210, 310
 $C_n^v(x)$ — многочлены Гегенбауэра 188, 305
 $\text{Ci}(x), \text{ci}(x)$ — интегральный косинус 211, 310
 $D_0^\alpha f(x), D_\infty^\alpha f(x)$ — производные дробного порядка 133
 $D_v(z), D_n(z)$ — функции параболического цилиндра 282, 309
 $E(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$ — E -функции Мак-Роберта 283
 $E(k)$ — полный эллиптический интеграл 318
 $E(p; a_r; q; p_s; x), E(\alpha; :x), E(:v+1; x), E(1/2+v, 1/2-v; :2x), E(\alpha, \beta; :x), E\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \alpha+\beta: \frac{x^2}{4}\right)$ — E -функции Мак-Роберта 311, 312
 $E_1(x), E^*(x)$ — интегральные экспоненты 309, 310
 $E_v(z)$ — функция Анжера — Вебера 308
 $-\text{Ei}(-x), \text{Ei}^+(x), \text{Ei}^-(x), \text{Ei}(\nu)$ — интегральные экспоненты 210, 309
 $\text{Eri}(x), \text{Eri}_c(x)$ — функция ошибок 210, 310
 ${}_1F_1(a; c; z)$ — вырожденный гипергеометрический ряд Куммера 308
 ${}_2F_1(a, b; c; z), F(a, b; c; z)$ — гипергеометрический ряд Гаусса 283, 308
 $F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y), F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y), F_3(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma; x, y), F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y)$ — гипергеометрические ряды от двух переменных 317
 $F_A(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n)$ — гипергеометрический ряд от многих переменных 318
 ${}_mF_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z), {}_mF_n\left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{matrix}; z\right]$ — обобщенный гипергеометрический ряд 282, 308
 $\mathfrak{F}_c, \mathfrak{F}_e, \mathfrak{F}_s$ — преобразования Фурье 9
 $G_{pq}^{mn}\left(\alpha \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right)$ — функция Г-Мейера 300, 312
 $H_v^{(1)}(z), H_v^{(2)}(z)$ — функции Бесселя третьего рода 235, 307
 $H_v(z)$ — функция Струве 235, 308
 $\text{He}_n(x), H_n(x)$ — многочлены Эрмита 189, 305
 \mathfrak{H}_v — преобразование Ганкеля 10, 11
 $\text{Im } z$ — мнимая часть комплексной величины z 304

- $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода 235, 307
 $I_x(p, q)$ — неполная бета-функция 309
 $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода 235, 307
 $J_\nu(z)$ — функция Ангера—Вебера 308
 $Ji_\nu(x)$ — интегральная функция Бесселя 307
 $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 318
 $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода 235, 307
 $k_{2\nu}(z)$ — функция Бейтмена 309
 $kei(z)$, $kei_\nu(z)$, $ker(z)$, $ker_\nu(z)$ — модифицированные функции Кельвина 307
 \mathbb{K}_ν — K -преобразование 10, 99
 $L_2(z)$ — дилогарифм Эйлера 306
 $L_n^\alpha(z)$, $L_n^0(z)$ — многочлены Лагерра 190, 305
 $L_\nu(z)$ — модифицированная функция Струве 235, 308
 $li(z)$ — интегральный логарифм 310
 \mathfrak{L} — преобразование Лапласа 9
 $M_{\kappa, \mu}(z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера 283, 309
 \mathfrak{M} — преобразование Меллина 9
 $O_n(x)$, $O_{-n}(x)$ — многочлены Неймана 307
 $P_n(x)$ — многочлены Лежандра 188, 305
 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлены Якоби 189, 305
 $P_n^{(\nu)}(x)$ — многочлены Гегенбауэра 188
 $P_\nu^{\mu}(z)$, $P_\nu(z)$, $P_\nu^{\mu}(x)$ — функции Лежандра 306
 $p_n(x; a)$ — многочлены Шарлье 305
 $Q_\nu^{\mu}(z)$, $Q_\nu(z)$, $Q_\nu^{\mu}(x)$ — функции Лежандра второго рода 306
 $Re z$ — вещественная часть комплексной величины z 304
 \mathfrak{R}_n — интегралы дробного порядка в смысле Римана — Лнувилля 10, 133
 $S(x)$ — интеграл Френеля 210, 310
 $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; z)$ — неполная бета-функция 309
 $S_{\mu, \nu}(z)$, $s_{\mu, \nu}(z)$ — функции Ломмеля 235, 308
 $Si(x)$, $si(x)$ — интегральный синус 310
 \mathfrak{S} — преобразование Стильтеса 10, 154
 \mathfrak{S}_p — обобщенное преобразование Стильтеса 10, 154
 $T_n(x)$ — многочлены Чебышева 187, 305
 $U_n(x)$ — многочлены Чебышева 187, 305
 $U_\nu(w, z)$ — функция Ломмеля двух переменных 308
 $V_\nu^{(b)}(z)$ — 307
 $V_\nu(w, z)$ — функция Ломмеля двух переменных 308
 $W_\nu^{(b)}(z)$ — 307
 $W_{\kappa, \mu}(z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера 283, 309
 \mathfrak{W}_μ — интегралы дробного порядка в смысле Вейля 10, 133
 $[x]$ — целая часть x 304
 $X_\nu^{(b)}(z)$ — 307
 $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя 307
 \mathfrak{Y}_ν — Y -преобразование 10, 83
 $|z|$ — модуль комплексной величины z 304
 $Z_\nu^{(b)}(z)$ — 307

Греческий алфавит

$\binom{\alpha}{\beta}$ — биномиальные коэффициенты
305

$B(x, y)$ — бета-функция 306

$B_x(p, q)$ — неполная бета-функция 309

$\Gamma(z)$ — гамма-функция 306

$\Gamma(\alpha, x)$, $\gamma(\alpha, x)$ — неполные гамма-функции 211, 310

γ — постоянная Эйлера — Маскерони 305

$\zeta(s)$, $\zeta(z, a)$ — дзета-функции Римана 306

$\theta_0(v | \tau)$, $\theta_1(v | \tau)$, $\theta_2(v | \tau)$, $\theta_3(v | \tau)$,
 $\theta_4(v, \tau)$ — тета-функции 318

$\hat{\theta}_0(v, \tau)$, $\hat{\theta}_1(v, \tau)$, $\hat{\theta}_2(v, \tau)$, $\hat{\theta}_3(v, \tau)$,
 $\hat{\theta}_4(v, \tau)$ — модифицированные тета-функции 319

$\mu(x, a)$ 319

$\nu(x)$, $\nu(x, a)$ 319

$\Phi(a; c; z)$ — вырожденный гипергеометрический ряд Куммера 308

$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma; x, y)$, $\Phi_2(\beta, \beta', \gamma; x, y)$,
 $\Phi_3(\beta, \gamma; x, y)$ — гипергеометрические ряды от двух переменных 317, 318

$\Phi_2(\beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; z_1, \dots, z_n)$ — гипергеометрический ряд от многих переменных 318

$\Psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y)$, $\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma'; x, y)$ — гипергеометрические ряды от двух переменных 318

$\Psi_2(\alpha; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n)$ — гипергеометрический ряд от многих переменных 318

$\psi(z)$ — логарифмическая производная от гамма-функции 303

$\xi(t)$ — дзета-функция 306

$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta, \gamma; x, y)$, $\Xi_2(\alpha, \beta, \gamma; x, y)$ — гипергеометрические ряды от двух переменных 318

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Ангера — Вебера функции** 308
- Бейтмена функция** 309
- Бесселя преобразования** 11
— функции 235, 307
— — модифицированные 307
- Бета-функция** 306
— неполная 306, 309
- Биномиальные коэффициенты** 305
- Вейля интегралы** дробного порядка 10, 133, 145
- ВТФ** 304
- Гамма-функция** 306
— неполная 211, 306, 310
- Ганкеля преобразования** 10, 11, 14, 23, 26
- Гаусса гипергеометрический ряд** 283, 287, 308
- Гегенбауэра многочлены** 188, 305
- Гильберта преобразования** 10, 171
- Гипергеометрическая функция** 282, 308
— — вырожденная 283, 289, 309
- Гипергеометрический ряд Гаусса** 283, 287, 308
— — двух переменных 317
— — Куммера вырожденный 308
— — многих переменных 318
— — обобщенный 308
- Главное значение интеграла** в смысле Коши 304
- Дзета-функция Римана** 306
- Дилогарифм Эйлера** 306
- Е-функция** Мак-Роберта 283, 298, 311, 312
- Г-функция** Мейсера 283, 300, 312
— —, частные случаи 312—315
- Н-преобразование** 10, 119
—, — высшие трансцендентные функции 123
—, — общие формулы 119
— порядка ν 119
—, — элементарные функции 120
- Интегралы Вейля** дробного порядка 10, 133, 145
— дробного порядка 133, 135
— — —, связь с другими преобразованиями 134
— Римана — Лиувилля дробного порядка 10, 133, 135
—, — содержащие вырожденные гипергеометрические функции 289
—, — гамма-функции 211
—, — гипергеометрические ряды Гаусса 287
—, — многочлены Гегенбауэра 198
—, — — Лагерра 207
—, — — Лежандра 194
—, — — Чебышева 190
—, — — Эрмита 204
—, — — Якоби 201
—, — модифицированные функции Бесселя 261, 267, 273
—, — неполные гамма-функции 218
—, — ортогональные многочлены 187
—, — функции Бесселя 236, 241, 249, 256, 273
—, — — Лежандра 221, 227, 231
—, — — параболического цилиндра 284
—, — — родственные функциям Бесселя 276
—, — Е-функцию Мак-Роберта 298
—, — G-функцию Мейера 300
—, — Ф-функцию 217
— Френеля 210, 310
- Интегральная экспонента** 210, 309
- Интегральный косинус** 310

- Интегральный логарифм 310
— синус 310
- Кельвина функции 307
Конторовича — Лебедева преобразование 130
Косинус-преобразование Фурье 9
Куммера вырожденный гипергеометрический ряд 308
К-преобразование 10
—, высшие трансцендентные функции 106
—, общие формулы 100
— порядка ν 99
—, элементарные функции 101
- Лагерра многочлены 190, 305
Лапласа обратное преобразование 9
— преобразование 9, 154
Лежандра многочлены 188, 305
— функции 306
Логарифмическая производная от гамма-функции 306
Ломмеля функции 308
— — двух переменных 308
- Мак-Роберта E -функция 311, 312
Мейера G -функция 312—317
Меллина обратное преобразование 9
— преобразование 9
Многочлены Гегенбауэра 188, 305
— Лагерра 190, 305
— Лежандра 188, 305
— Неймана 307
— ультрасферические 188
— Чебышева 187, 305
— Шарлье 305
— Эрмита 189, 305
— Якоби 189, 305
- Неймана многочлены 307
- Ортогональные многочлены 305
Отношение косообразное 171
- Постоянная Эйлера — Маскерони 305
Преобразование Бесселя 11
— Ганкеля 10
— — нулевого порядка, высшие трансцендентные функции 19
— — —, элементарные функции 14
— —, общие формулы 12
— — первого порядка 23
— — порядка ν 11
- Преобразование Ганкеля порядка ν , алгебраические функции 26
— — —, вырожденные гипергеометрические функции 76
— — —, гипергеометрическая функция Гаусса 74
— — —, гипергеометрические функции 43
— — —, логарифмические функции 35
— — —, модифицированные функции Бесселя 61, 64
— — —, обобщенные гипергеометрические ряды 79
— — —, обратные гиперболические функции 44
— — —, — тригонометрические функции 43
— — —, ортогональные многочлены 44
— — —, показательные функции 32
— — —, тригонометрические функции 35, 39
— — —, функции Бесселя 48, 55
— — —, — Лежандра 46
— — —, — параболического цилиндра 71
— — —, —, родственные функциям Бесселя 69
— —, связь с преобразованиями Лапласа 11
— —, — с Y -преобразованием 83
— Гильберта 10, 171
— —, высшие трансцендентные функции 179
— —, общие формулы 172
— —, элементарные функции 173
— Конторовича — Лебедева 10, 130
— Лапласа 9, 154
— — обратное 9
— Меллина 9
— — обратное 9
— Стильтеса 10, 154
— —, высшие трансцендентные функции 161
— — обобщенное 10, 154, 167
— —, общие формулы 155
— —, элементарные функции 155
— Фурье 9
— Эйлера 135
- Производные дробного порядка 133
- Римана дзета-функция 306
Римана — Лиувилля интегралы дробного порядка 133, 135

- Синус-преобразование Фурье 9
 Стильеса обобщенные преобразования 10, 154, 167
 — преобразования 10, 154
 Струве функции 308
- Тета-функции** 318
 — модифицированные 319
- Уиттекера функции** 309, 311
- Френеля интегралы** 210, 310
 Функции Ангера — Вебера 308
 — Бесселя 235, 307
 — — модифицированные 307
 —, выражающиеся через G -функции Мейсера 315—317
 — гипергеометрические 308
 — Кельвина 307
 — Лежандра 306
 — Ломмеля 308
 — — двух переменных 308
 — параболического цилиндра 282, 284, 309
 — Струве 308
 — эллиптические 318
 Функция Бейтмена 309
 — ошибок 210, 310
 — Уиттекера 309
 — —, частные случаи 311
- Фурье косинус-преобразование 9
 — синус-преобразование 9
 — экспоненциальное преобразование 9
- Чебышева многочлены** 187, 305
- Шарлье многочлены** 305
- Эйлера дилогарифм** 306
 — преобразования 135
 Эйлера — Маскерони постоянная 305
 Экспоненциальное преобразование Фурье 9
 Эллиптические функции 318
 Эллиптический интеграл полный 318
 Эрмита многочлены 189, 305
- Якоби многочлены** 189, 305
- Y-преобразование** 10
 —, высшие трансцендентные функции 91
 —, общие формулы 83
 — порядка ν 83
 —, связь с преобразованием Ганкеля 83
 —, элементарные функции 84, 90

Г. Бейтмен и А. Эрдейи

Таблицы интегральных преобразований.
Преобразования Бесселя.
Интегралы от специальных функций

(Серия: «Справочная математическая библиотека»)

М., 1970 г., 328 стр.

Редакторы: *Н. Х. Розов* и *А. Э. Рыбкин*

Техн. редактор *В. С. Никифорова*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 24/IX 1969 г. Подписано к печати 4/III 1970 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 20,5. Усл. печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 24,72. Тираж 19 000 экз. Цена книги 1 р. 42 к. Заказ № 328.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.