

**МЕТОДЫ
ТЕОРИИ
АВТОМАТИ-
ЧЕСКОГО
УПРАВЛЕ-
НИЯ**

**А.А.ФЕЛЬДБАУМ
А.Г.БУТКОВСКИЙ**

**МЕТОДЫ ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

**А.А.ФЕЛЬДБАУМ
А.Г.БУТКОВСКИЙ**

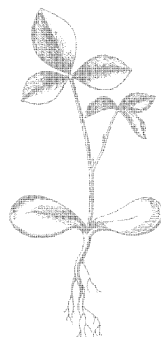


А. А. ФЕЛЬДБАУМ, А. Г. БУТКОВСКИЙ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971



Scan AAW

Методы теории автоматического управления. Ф е л ь д -
б а у м А. А., Б у т к о в с к и й А. Г., Главная редак-
ция физико-математической литературы изд-ва «Наука»,
М., 1971, 744 стр.

В книге систематически изложены методы теории автоматического управления. Рассмотрены общие принципы устройства систем регулирования и управления. Традиционные разделы теории линейных и нелинейных систем рассматриваются под углом зрения новейших методов исследования, разработанных в последнее время. Большое внимание уделено изложению статистических методов исследования управляющих систем и рассмотрению оптимальных как регулярных, так и нерегулярных систем. Рассматриваются новые методы исследования сложных систем управления, в частности систем с распределенными параметрами, а также недавно возникшая проблема финитного управления.

Книга рассчитана на научных и инженерно-технических работников, занятых проектированием систем управления, а также на студентов старших курсов, аспирантов и соискателей, специализирующихся в области технической кибернетики.
Илл. 446. Библ. 379 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

Глава I

Введение

§ 1. Основные понятия и принципы теории автоматических систем	9
§ 2. Типы автоматических систем и основные задачи теории регулирования	16

Глава II

Элементы и схемы систем автоматического регулирования

§ 1. Измерительные элементы (датчики)	27
§ 2. Управляющие органы	37
§ 3. Исполнительные органы	45
§ 4. Примеры систем регулирования. Регулятор температуры	53
§ 5. Регулятор скорости	55
§ 6. Регулятор положения	59
§ 7. Регулятор курса	64

Глава III

Уравнения, элементарные блоки и структурные схемы систем автоматического регулирования

§ 1. Уравнения систем автоматического регулирования	68
§ 2. Передаточные функции	69
§ 3. Элементарные звенья	71
§ 4. Дополнительные примеры элементарных звеньев	88
§ 5. Структурные схемы	94
§ 6. Примеры уравнений и структурных схем систем автоматического регулирования	100

Глава IV

Устойчивость линейных систем автоматического регулирования

§ 1. Понятие устойчивости линейных систем автоматического регулирования	112
§ 2. Необходимое условие устойчивости	115
§ 3. Условия устойчивости систем третьего порядка	116
§ 4. Критерий устойчивости Рауса — Гурвица	119
§ 5. Устойчивость и установившаяся погрешность	122
§ 6. Область устойчивости	125
§ 7. Устойчивость и дополнительные связи	129

*Глава V***Применение преобразований Фурье и Лапласа**

§ 1. Преобразование Фурье и Лапласа	143
§ 2. Основные теоремы операционного исчисления	151
§ 3. Временные характеристики звеньев и систем	154

*Глава VI**** Исследование устойчивости частотными методами**

§ 1. Частотные характеристики	158
§ 2. Критерий устойчивости Михайлова	165
§ 3. Критерий устойчивости Найквиста	167
§ 4. Применение критерия Найквиста для исследования устойчивости и стабилизации систем	172
§ 5. <i>D</i> -разбиение	177
§ 6. Структурная устойчивость	188
§ 7. Устойчивость систем с запаздыванием	191

*Глава VII***Переходные процессы в устойчивых системах**

§ 1. Требования к переходному процессу	201
§ 2. Частотные методы	205
§ 3. Методы распределения корней	209
§ 4. Интегральные методы	217
§ 5. Логарифмические частотные характеристики	228
§ 6. Применение логарифмических характеристик для исследования систем	233

*Глава VIII***Импульсные системы**

§ 1. Основные понятия импульсных систем	239
§ 2. Дискретное преобразование Лапласа	243
§ 3. Устойчивость импульсных систем	258
§ 4. Переходные процессы в импульсных системах	269

*Глава IX***Нелинейные системы**

§ 1. Уравнения нелинейных звеньев и систем	272
§ 2. Уравнение для малых отклонений. Понятие о первом методе Ляпунова	282
§ 3. Исследование нелинейной системы с реле	298
§ 4. Второй метод Ляпунова	312
§ 5. Частотный критерий абсолютной устойчивости Попова	325
§ 6. Методы малого параметра (аналитические варианты)	338
§ 7. Методы малого параметра (графоаналитические варианты)	350

*Глава X***Моделирование автоматических систем**

§ 1. Типы моделей и их назначение	362
§ 2. Структурные схемы моделей	364
§ 3. Звенья электрических моделей	369
§ 4. Схемы электронных моделей линейных систем	382
§ 5. Универсальные нелинейные преобразователи с одним входом (НП-1)	389
§ 6. Специализированные НП-1	396

§ 7. Множительные и делительные звенья	403
§ 8. Универсальные нелинейные преобразователи с двумя входами (НП-2)	416
§ 9. Нелинейные электронные вычислительные устройства	421
§ 10. Пример моделирования системы автоматического регулирования на электрической модели	424

Глава XI

Случайные сигналы в линейных и нелинейных системах

§ 1. Роль случайных сигналов	428
§ 2. Случайные события и случайные величины	433
§ 3. Случайные процессы и их вероятностные характеристики	439
§ 4. Преобразование случайных сигналов линейными системами	455
§ 5. Статистически оптимальные параметры линейных систем	459
§ 6. Статистически оптимальные линейные системы	468
§ 7. Задачи упреждения и сглаживания	480
§ 8. Преобразование случайных сигналов безынерционными нелинейными звеньями	486
§ 9. Преобразование случайных сигналов нелинейной системой с обратной связью	492

Глава XII

Элементы теории информации

§ 1. Количество информации	496
§ 2. Дискретный канал передачи без помех	503
§ 3. Дискретный канал связи с помехами	508
§ 4. Информация в непрерывных сигналах	514

Глава XIII

Элементы теории статистических решений

§ 1. Основные группы теорий и задачи выделения сигналов при наличии шумов	520
§ 2. Элементарные методы статистических решений	527
§ 3. Теория двувальтернативных решений	534
§ 4. Характеристики систем оптимального обнаружения	547

Глава XIV

Теория оптимальных систем

§ 1. Значение теории оптимальных систем	565
§ 2. Классификация оптимальных систем	568
§ 3. Критерии оптимальности	575
§ 4. Постановка задачи оптимального управления	578
§ 5. Динамическое программирование	580
§ 6. Принцип максимума	591
§ 7. Метод фазового пространства. Задача о максимальном быстродействии	609
§ 8. Применение метода динамического программирования	625
§ 9. Применение принципа максимума	637
§ 10. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами	646
§ 11. Принцип максимума для одного класса систем с распределенными параметрами	651

Глава XV

Метод моментов в задачах оптимального управления

§ 1. Метод моментов	657
§ 2. Метод моментов в задачах оптимального управления распределенными системами	673

§ 3. Оптимальное управление распределенной колебательной системой	676
§ 4. Оптимальное управление распределением температуры	684
§ 5. Оптимальное управление двумерной распределенной колебательной системой	689

Глава XVI

Финитное управление

§ 1. Постановка задачи	694
§ 2. Финитное управление системами с сосредоточенными параметрами. Основы метода	696
§ 3. Финитное управление при ударных воздействиях. Обобщенное финитное управление	705
§ 4. Финитное управление, оптимальное по быстродействию	706
§ 5. Синтез финитного управления	708
§ 6. Финитное управление системами с распределенными параметрами	710
§ 7. Финитное управление дискретными линейными системами	717
Литература	723
Именной указатель	734
Предметный указатель	738

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная теория автоматического управления обладает большим арсеналом методов, которые позволяют анализировать и конструировать сложные современные системы управления. Цель настоящей книги — изложить основные методы теории управления на достаточно высоком теоретическом уровне, но вместе с тем вполне доступно для инженера. В первых главах книги изложены современные методы теории линейных систем автоматического управления. После небольшой вводной главы I в главе II рассматриваются основные элементы и схемы систем автоматического регулирования. Глава III посвящена изложению структурного метода в теории автоматического регулирования. Главы IV, V и VI посвящены исследованию устойчивости систем с помощью алгебраических и частотных методов. Глава VII целиком посвящена переходным процессам в устойчивых замкнутых и разомкнутых системах. Методы исследования импульсных и дискретных систем рассмотрены в главе VIII. Большая глава IX посвящена методам исследования нелинейных систем, включая недавно разработанный критерий абсолютной устойчивости Попова. Современная техника систем автоматического регулирования немислима без применения методов электронного моделирования, которые рассмотрены в главе X. Большое внимание в книге уделено статистическим методам исследования систем управления. В главе XI вводятся основные понятия и решаются основные задачи статистической теории управления. Элементы теории информации изложены в главе XII. Основы широко применяемых в настоящее время методов теории статистических решений даны в главе XIII. Много места в книге уделено рассмотрению принципов построения оптимальных систем управления. Основные методы теории оптимизации изложены в главе XIV, где рассмотрены системы с сосредоточенными и распределенными параметрами. Большую популярность в теории оптимального управления получил эффективный метод моментов, в частности L -проблема моментов, разработанная М. Г. Крейном еще в тридцатых годах.

Глава XVI посвящена изложению основных результатов появившейся недавно теории финитного управления сосредоточенными, распределенными и дискретными системами, в которой широко используется мощный аппарат теории целых аналитических функций. В целом по книге следует сделать еще ряд замечаний. Порядок изложения некоторых методов на первый взгляд может показаться несовременным и непоследовательным. Например, изложение операторного метода предшествует изложению преобразования Лапласа, оптимальные статистические системы идут перед главой, посвященной общей теории оптимальных систем. Однако этот порядок, на наш взгляд, целесообразен с методической точки зрения и попутно соответствует истории развития методов.

Для упрощения нумераций формул принято, что каждый параграф имеет свою независимую нумерацию формул. Если внутри параграфа дается ссылка на формулу без указания параграфа и главы, то имеется в виду

формула этого параграфа. В противном случае рядом с формулой указывается параграф и глава, где нужно найти эту формулу.

В тексте книги не дается ссылок на литературу. Вся необходимая литература приведена в конце книги и разбита по главам.

Для облегчения усвоения материала во многих местах книги излагаются в необходимом объеме чисто математические сведения, способствующие пониманию того или иного раздела. В этой связи книга может служить учебным пособием для лиц, начинающих изучать основные методы теории автоматического управления.

Авторы выражают глубокую благодарность В. С. Пугачеву, рецензенту первоначального плана книги, Я. Э. Цыпкину за постоянное внимание к работе. Глубокую благодарность авторы выражают редактору книги Р. Т. Янушевскому, немало потрудившемуся над улучшением рукописи. При оформлении рукописи большую помощь оказала И. П. Щедрина. Авторы выражают ей искреннюю благодарность.

А. Фельдбаум, А. Бутковский

Во время работы над рукописью этой книги наука понесла большую утрату. В январе 1969 года внезапно скончался Александр Аронович Фельдбаум. Эта смерть повлияла на сроки окончания работы. Мне, соавтору Александра Ароновича, которому выпала честь трудиться вместе с ним, пришлось завершать эту работу одному. Я попытался максимально соблюсти и учесть основные идеи и соображения Александра Ароновича относительно структуры книги, ее содержания. Насколько мне это удалось, читатели могут судить сами.

А. Бутковский

Г л а в а I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные понятия и принципы теории автоматических систем

Основная цель автоматизации состоит в том, чтобы исключить непосредственное участие человека в управлении производственными процессами и другого рода техническими объектами.

Автоматизация должна обеспечивать наиболее выгодные, оптимальные режимы работы как отдельных агрегатов, так и всей системы в целом. В автоматизированном производстве человек должен лишь контролировать ход процесса. Конечно, работы по ремонту, настройке и замене оборудования, исследованиям и усовершенствованиям пока еще требуют непосредственного участия человека. Но в обычном, регулярном производственном процессе на каждом отдельном его участке непосредственное участие человека должно быть, как правило, исключено.

Автоматизация не может быть проведена сразу и полностью. Это — длительный процесс, в ходе которого частичная автоматизация отдельных операций будет постепенно расширяться, перерастая в комплексную автоматизацию производства. Однако автоматизация не должна проводиться лишь ради автоматизации. Автоматизация производства должна быть обоснованной и прежде всего с экономической точки зрения.

Необходимыми предпосылками автоматизации являются механизация производства и оснащение производственных процессов измерительными приборами и датчиками.

В развитом механизированном производстве человек управляет работой машин на основе показаний измерительных приборов и датчиков. Но развитие машин-двигателей и машин-орудий, а также измерительных приборов и датчиков неминуемо приводит к тому пределу, когда становится необходимой разработка машин для управления, которые, используя информацию, получаемую от первичных измерительных устройств и датчиков, осуществляют воздействие на машины-орудия, заменяя тем самым человека и на этом участке производственного процесса. С этого момента начинается этап автоматизации.

Необходимость автоматизации различных процессов обусловлена увеличением производительности, скорости движений, размеров и мощности машин, увеличением точности и усложнением характера производственного процесса. Для человека становится затруднительным или даже невозможным достаточно быстро и точно управлять движением машины. Эффективное использование производственных агрегатов, разработка новых высокопроизводительных установок становятся возможными в ряде случаев лишь при переходе от ручного управления к управлению с помощью машин, т. е. при автоматизации.

Мощным стимулом автоматизации является экономия, получаемая от увеличения производительности и улучшения качества продукции автоматизированных агрегатов, а также улучшения условий труда.

Сводится ли к нулю роль человека в автоматизированном производстве? Нисколько; наоборот, она становится еще более ответственной, так как теперь человек управляет сложной системой машин и автоматов. Обслуживание такой системы требует высокой квалификации и умения, но зато и производительность ее несравненно выше, чем производительность неавтоматизированных машин. Труд человека при автоматизации становится квалифицированнее и сложнее, но условия работы существенно улучшаются.

Перед рассмотрением способов автоматизации производственных процессов полезно проанализировать функции управления, выполняемые человеком на неавтоматизированных агрегатах.

При поддержании регулярного хода производственного процесса обычно применяются три вида управления, для которых можно принять следующие названия: а) жесткое управление, б) регулирование, в) настройка.

Жесткое управление включает в себя наиболее простые функции управления, например включение и выключение агрегатов, подачу определенных управляющих импульсов, быть может, по некоторой жесткой программе и т. д. Все эти функции управления представляют собой заранее определенные движения или сигналы, не зависящие от действительного хода производственного процесса или от конкретного состояния агрегата.

При разработке систем жесткого управления возникает ряд сложных задач, специфических для техники управляющих машин. Например, при передаче импульсов на большие расстояния весьма важно по возможности уменьшить эффект помех. Возникают вопросы о том, каким образом хранить сложные программы, как преобразовать управляющие импульсы и т. д. Ряд этих проблем, в сущности, совпадает с основными задачами связи — и не случайно. Действительно, связь можно рассматривать как управление на расстоянии колебаниями мембраны телефона так, чтобы они копировали колебания в микрофонной цепи передатчика, либо управление движением электронного луча в кинескопе приемного телевизора, либо управление буквопечатающим приемным телеграфным аппаратом и т. д. Поэтому ряд основных задач теории связи и теории управления по существу совпадают. Это обстоятельство будет неоднократно подчеркиваться в дальнейшем.

Применение систем жесткого управления принципиально ограничено. Действительно, заранее определенные управляющие действия предпринимаются с целью получить определенный результат в виде надлежащего хода или исхода процесса. Жесткое управление исходит из принципа «одинаковые причины дают одинаковые следствия». Если из предыдущих наблюдений и опытов известно, какое требуется начальное положение шлифовального круга, какая подача и какое время шлифования нужны, чтобы получить деталь требуемого размера, то достаточно при обработке последующих деталей установить все эти величины наперед заданными. Если известно, что определенный состав шихты, определенная температура и давление дутья и т. д. обеспечивают нормальный ход доменной печи, то достаточно установить их равными наперед заданным значениям. Однако при таком способе управления не учитываются дополнительные факторы, которые могут изменить процесс и действие которых заранее предусмотреть большей частью совершенно невозможно:

- а) влияние неточности поддержания заданных входных параметров;
- б) влияние неучтенных «паразитных» возмущений, действующих извне на управляемый объект;
- в) влияние изменения состояния или характеристик управляемого объекта.

Например, износ шлифовального круга, неточное соблюдение величины подачи, зазор и люфты в соединениях и т. д. могут привести к тому, что размер детали начнет отклоняться от требуемого. Небольшое отклонение состава шихты от требуемого, а также изменение состояния доменной печи (например, неравномерный проход газов сквозь толщу шихты вследствие неравномерной загрузки) могут изменить ход доменного процесса. Поэтому для огромного класса процессов жесткое управление, «слепое» и «глухое», не реагирующее на характер действительного хода процесса, неудобно или даже вовсе неприемлемо. Приходится переходить к более сложному виду управления.

Регулирование характеризуется тем, что управляющие сигналы, действующие на управляемый объект, заранее не определены. Их характер определяется конкретным ходом процесса. Задача регулирования заключается в том, чтобы поддерживать требуемые значения показателей какого-либо процесса.

Например, для камерной печи, предназначенной для термообработки металла, такими характерными величинами являются температура в рабочем пространстве печи или температура самого нагреваемого изделия, расход топлива, процентный состав и температура отходящих газов и т. д. Для работы водонапорной башни или насоса важной характеристикой является давление в магистрали и расход воды. В электрической сети характерными ее параметрами являются напряжение источника питания электроэнергии и частота электрических колебаний. В турбине существенным параметром, характеризующим режим ее работы, является, например, число оборотов ротора. Угловое положение оси ствола зенитного орудия, например, азимут этой оси, должно совпадать с угловым положением задающей оси, устанавливаемым прибором ПУАЗО (прибор управления артиллерийским зенитным огнем), независимо от любых факторов. Размер шлифуемой детали после окончания обработки должен быть равен требуемому значению независимо от любых факторов, в том числе от износа шлифовального круга.

В каждом из этих примеров имеется величина, значение которой требуется поддерживать постоянным или изменять надлежащим образом. Эта величина называется *регулируемой величиной*. В случае зенитного орудия — это угловое положение ствола, в случае шлифовального станка — это размер шлифуемой детали, в случае закалочной печи — это температура и т. д. Будем обозначать регулируемую величину буквой X . Требуется установить либо поддерживать регулируемую величину равной некоторому известному значению X_0 , которое назовем установленным или *задающим воздействием* или просто заданием. Установленное значение X_0 может быть:

- а) постоянной величиной; например, требуемый размер детали — постоянная величина;
- б) заранее известной функцией времени; например, изменение температуры закалочной печи должно производиться по определенной программе;
- в) заранее неизвестной функцией времени; например, угловое положение ствола зенитного орудия должно изменяться по некоторым законам в зависимости от произвольного и заранее неизвестного движения цели.

Итак, при регулировании требуется установить равенство

$$X = X_0. \quad (1)$$

Операция установления и поддержания этого равенства называется регулированием. Это — одна из основных и наиболее важных операций управления. В процессе регулирования производится сравнение X и X_0 . Если оказывается, что $X > X_0$, то следует уменьшить X . Если $X < X_0$, то необходимо увеличить значение X .

Настройка является следующим более сложным видом функций управления, выполняемых человеком. Она содержит операции наладки какой-либо управляемой (быть может, даже автоматизированной) системы, приведение ее к нормальному, благоприятному или наилучшему режиму работы. Эти операции могут заключаться в эпизодической или периодической настройке устройства, например, в оптимальной настройке процесса. Эти операции могут заключаться также в непрерывном корректировании параметров автоматической управляющей системы таким образом, чтобы обеспечить наилучший технологический режим при постоянно меняющихся характеристиках управляемого объекта или вообще части системы регулирования и управления.

Основной операцией, производимой при настройке, является поиск. Рассмотрим в качестве примера настройку приемника на какую-либо радиостанцию. Для получения наилучшей настройки необходимо производить

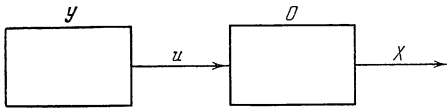


Рис. 1.1.

пробные движения, поворачивая рукоятку настройки. Если при этом слышимость улучшается, то дальнейшее перемещение рукоятки должно осуществляться в том же направлении. Если слышимость ухудшается, то направление дальнейшего перемещения рукоятки

следует изменить на противоположное. Таким образом, путем поиска можно найти заранее неизвестное положение рукоятки, соответствующее максимуму слышимости.

При автоматизации указанных выше функций управления образуются три класса автоматических систем:

- а) системы автоматического жесткого управления (сокращенно САЖУ);
- б) системы автоматического регулирования (сокращенно САР);
- в) системы автоматической настройки (сокращенно САН) или самонастраивающиеся.

Наиболее проста структурная схема САЖУ (рис. 1.1). Управляющее устройство $У$ оказывает управляющее воздействие u на управляемый объект $О$. Воздействие u не зависит от хода процесса в объекте $О$; в частности, оно не зависит, например, от значения какого-либо выходного параметра X этого объекта.

Задача системы автоматического регулирования заключается в автоматическом установлении и поддержании равенства (1). В реальной САР это равенство, вообще говоря, не может осуществляться идеально точно, и поэтому существует некоторая ошибка или *погрешность* x :

$$x = X_0 - X. \quad (2)$$

Задача разработки САР заключается в том, чтобы сделать погрешность x в определенном смысле малой.

Иногда требуется регулировать несколько связанных величин X_1, X_2, \dots, X_n , являющихся, например, параметрами процесса, происходящего в управляемом объекте. Эти величины должны соответственно равняться установленным или задающим значениям $X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n}$. Тогда задача САР может интерпретироваться как задача установления *векторного* равенства

$$X = X_0, \quad (3)$$

где вектор X имеет координаты X_i ($i = 1, \dots, n$), а вектор X_0 — координаты X_{0i} ($i = 1, \dots, n$). В любой реальной системе, вообще говоря, существует вектор погрешности x :

$$x = X_0 - X; \quad (4)$$

поэтому задача разработки САР состоит в том, чтобы сделать вектор x в определенном смысле малым.

Регулирование нескольких величин принципиально не отличается от регулирования одной величины, хотя осуществляется часто более сложными техническими приемами. Поэтому ниже в этой главе рассматривается лишь регулирование одной величины.

Задача САР по существу является задачей двойственной. С одной стороны, величина X должна зависеть от заданной извне величины X_0 (в идеале X должно быть равно X_0). Однако, кроме величины X_0 , на любую физическую систему действует ряд других, нежелательных возмущающих воздействий. Таковы, например, э. д. с. дрейфа в усилителях постоянного тока; силы трения в механизмах; ветер, отклоняющий самолет от заданного курса; момент нагрузки, влияющий на скорость электропривода; произвольно меняющийся ток нагрузки, влияющий на напряжение генератора; изменение температуры внешнего помещения, влияющее на температуру печи, и т. д.

Отметим также, что возмущающим воздействием может служить изменение самого задающего воздействия X_0 , когда оно скачком (почти мгновенно) меняется от одной величины к другой. Например, при перенесении огня зенитного орудия с одной цели на другую оператор наведения мгновенно меняет положение задающей оси с одного угла на другой.

Если бы не возникало возмущающих воздействий, то приведенная однажды в соответствие с заданием регулируемая величина оставалась бы равной заданному значению, и не требовалось бы на объект оказывать никаких регулирующих воздействий. При такой ситуации с регулированием объекта мог бы легко справиться человек, который лишь однажды осуществил бы приведение регулируемой величины в соответствие с заданием. Однако, как правило, на объекты регулирования все время действуют возмущающие воздействия. Поэтому возникает задача освободить человека от трудной (а подчас и непосильной) задачи ручного регулирования и заменить его автоматом (регулятором), который без усталости вполне надежно справлялся бы с задачей регулирования. Таким образом, регулятор осуществляет непрерывную борьбу с помехами и возмущениями, действующими как извне, так и внутри САР. Он поддерживает порядок, противодействует силам, стремящимся отклонить регулируемую величину от заданного значения. Общий путь решения задачи создания САР состоит в применении принципа обратной связи. Рассмотрим простой пример.

Пусть по заданию нужно поддерживать температуру в печи, равную $X_0 = 1000^\circ \text{С}$. Однако если на печь действует внешнее возмущение (например, нагрузка на печь увеличивается за счет увеличения производительности печи — увеличения скорости продвижения металла в печи или увеличения толщины заготовки), то температура в печи, естественно, начинает уменьшаться. Это *снижение* температуры замечает человек-оператор, наблюдая показания измеряющих температуру приборов (милливольтметра или потенциометра с термопарой). Очевидно, чтобы компенсировать падение температуры, нужно увеличить подачу топлива в печь, что и делает оператор, включая привод клапана подачи топлива. Если нагрузка на печь снижается (например, скорость продвижения металла в печи уменьшается), то оператор предпринимает противоположное действие, он *уменьшает* подачу топлива в печь, включая привод клапана подачи топлива.

Из этого очень простого рассмотрения можно сделать весьма важный *принципиальный* вывод, который состоит в следующем. Когда регулируемая величина X (температура) *меньше* задания X_0 , т. е. когда ошибка *отрицательная*: $x = X - X_0 < 0$, то мы увеличиваем регулирующее воздействие (расход топлива), т. е. приращение расхода топлива положительно $\Delta u > 0$. И, наоборот, если $x > 0$, то обязательно $\Delta u < 0$. Таким образом, заметив отклонение регулируемой величины X от задания X_0 , мы начинаем *опять* воз-

действовать на регулируемый объект, давая приращение Δu регулирующему воздействию, *противоположное* по знаку x , т. е.

$$\text{sign } x = - \text{sign } \Delta u, \quad (5)$$

где

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь нужно обратить внимание на знак минус в правой части равенства (5). Поэтому такой тип связи назван *отрицательной обратной связью*. Этот тип регулирования может осуществляться как вручную оператором, так и автоматически.

На рис. 1.2, *a* изображена схема автоматической системы регулирования. Регулируемая величина X , поступающая от регулируемого объекта O ,

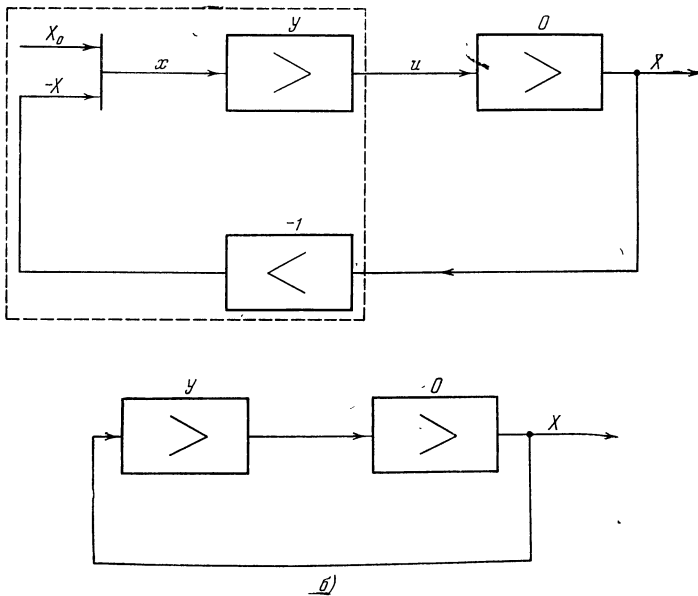


Рис. 1.2.

сравнивается с задающим воздействием X_0 . Определяется погрешность x , и по величине, знаку и тенденции ее изменения управляющее устройство Y автоматически определяет значение регулирующего воздействия u , поступающего на вход регулируемого объекта O . При $X > X_0$, т. е. при $x < 0$, нужно подавать на вход объекта O такое воздействие u , чтобы величина X уменьшалась, а при $X < X_0$ величина X должна увеличиваться. На рис. 1.2, *a* изменение знака величины X условно изображено как прохождение X через усилитель с коэффициентом усиления, равным минус единице. Получение разности $x = X_0 - X$ с обратным знаком условно показано вертикальной чертой, к которой с одной стороны подходят величины X_0 и $-X$ и от которой с другой стороны отходит вырабатываемая разность x . Стрелки внутри блоков указывают направление прохождения сигналов (от входа к выходу).

Схему рис. 1.2, *a* можно начертить более компактно, объединив все блоки, обведенные пунктиром, в одну часть и назвав ее управляющей частью (в более общем смысле, чем управляющее устройство рис. 1.2, *a*, так как она

включает в себя и элементы сравнения). Получаем схему, изображенную на рис. 1.2, б. Здесь не показаны внешние возмущения, которые могут поступать на объект O .

Из рис. 1.2 следует, что САР — это замкнутая система с обратной связью. Именно такой принцип построения системы дает возможность вне зависимости от количества и характера возмущающих воздействий приводить величину X к требуемому значению X_0 . Разумеется, при этом необходимо с достаточной точностью сравнить величины X и X_0 . Наличие замкнутой цепи воздействий есть отличительный признак любой САР, так как замкнутая цепь есть следствие принципа, положенного в основу устройства систем.

Управляющую часть U иногда расчленяют на измерительный блок, сравнивающий X и X_0 и определяющий погрешность x ; управляющий блок, вырабатывающий управляющее воздействие; исполнительный блок, непосредственно воздействующий на регулируемый объект O . Только что описанный принцип регулирования естественно также назвать *регулированием по отклонению*. Действительно, мы начинаем (вручную или автоматически) только тогда изменять регулирующее воздействие, когда налицо будет отклонение регулируемой величины X от задания X_0 , т. е. когда ошибка $x = X - X_0 \neq 0$. Только спустя некоторое время под действием регулирующего воздействия регулируемая величина X снова будет близка к заданному значению X_0 .

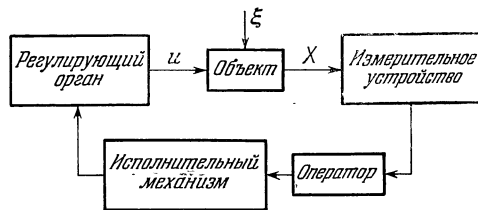


Рис. 1.3.

Однако если мы знаем момент и величину изменения возмущения, т. е. знаем график или функцию во времени изменения возмущения (например, график изменения производительности печи), то мы *в принципе* могли бы заранее так рассчитать изменение регулирующего воздействия (например, рассчитать подачу топлива в печь на основе теплового баланса или вообще теории теплообмена с учетом горения топлива), чтобы вовсе не наступило никакого отклонения X от X_0 , т. е. x равнялось бы нулю на протяжении всего времени управления. Таким образом, изменение регулирующего воздействия в точности компенсировало бы изменение возмущения. Такое регулирование называется *регулированием по возмущению*. Но, очевидно, такой расчет компенсации возмущения иногда даже в принципе бывает очень трудно произвести, так как теоретическое описание процессов, протекающих в объекте, как правило, недостаточно полно и точно, а числовые параметры часто бывают неизвестны. Даже в лучшем случае, если бы теория протекающих в объекте процессов была достаточно точна и все параметры известны, то мы бы должны были иметь в системе вычислительную машину, которая должна была бы достаточно *быстро* (иначе нет смысла ее применять — можно регулировать по отклонению) вычислять управляющие воздействия, которые мы должны подавать на объект. Поэтому принцип регулирования по возмущению имеет ограниченное применение. Но его можно применять в комбинации с принципом регулирования по отклонению. Сочетание этих принципов может значительно улучшить качество процесса регулирования.

На рис. 1.3 приведена общая схема ручного регулирования с участием человека-оператора. Здесь X — регулируемая величина, u — регулирующее (или управляющее) воздействие, ξ — возмущающее воздействие. Однако далеко не все блоки обязательно должны присутствовать во всех системах регулирования. Так, исполнительный механизм присутствует там, где для приведения в действие регулирующего органа требуются значительные усилия или мощности. Таким образом, исполнительный механизм играет роль

некоторого усилителя мощности. Исполнительный механизм используется еще и тогда, когда оператор находится на значительном удалении от регулирующего органа и оказывает на него воздействие посредством вспомогательного механизма, управляемого дистанционно. Однако его присутствие в системах вовсе не обязательно, если регулирующий орган можно привести в движение усилиями мускулов человека. Так, например, шофер автомобиля, регулируя скорость движения машины, воздействует на педаль газа с помощью мускулов ног и открывает подачу топлива в двигатель без каких бы то ни было вспомогательных исполнительных механизмов. Так же не во всех системах должно присутствовать измерительное устройство. При ручном регулировании человек-оператор определяет значение регулируемой величины с помощью своих органов чувств (на глаз, на ощупь, по запаху

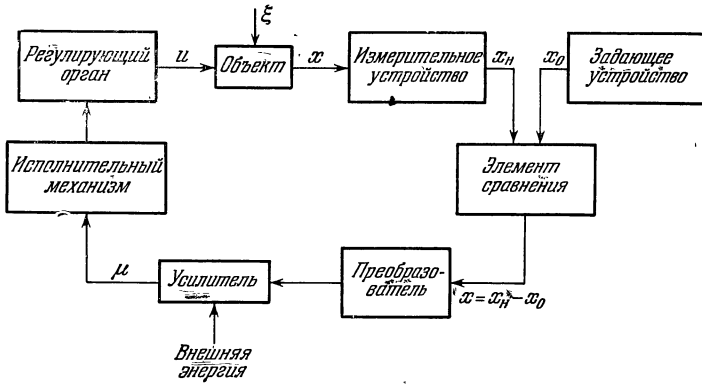


Рис. 1.4.

и т. д.). Однако системы ручного регулирования имеют целый ряд недостатков: 1) они работают ненадежно; 2) не обладают достаточной быстротой реакции; 3) требуют постоянного внимания; 4) требуют обучения и накопления опыта. Поэтому системы автоматического регулирования приобретают особое значение. Они экономят труд людей, освобождают человека от тяжелой однообразной и изнурительной работы, увеличивают производительность и повышают качество работы объекта. Роль человека-оператора состоит лишь в наблюдении, обслуживании, настройке, изменении задания. Общая схема обычной системы автоматического регулирования изображена на рис. 1.4.

§ 2. Типы автоматических систем и основные задачи теории регулирования

Рассмотрим в качестве примера систему, схема которой изображена на рис. 1.5. Пусть имеется некоторая ось AA' , которую назовем задающей. Угол поворота α_0 этой оси задается извне. Величина α_0 в данной системе является задающим воздействием. Задача системы заключается в том, чтобы угол поворота α другой оси BB' , которую назовем приемной, поддерживать равным α_0 .

Величина α_0 может быть любой, заранее не известной функцией времени. Ось BB' должна автоматически следовать за осью AA' . Ниже для простоты рассмотрим случай $\alpha_0 = \text{const}$.

Измерительным блоком системы служит схема, состоящая из двух потенциометров R_A и R_B , движки которых укреплены соответственно на осях AA' и BB' . При $\alpha = \alpha_0$ потенциалы движков U_0 и U равны друг другу. При $\alpha \neq \alpha_0$ возникает напряжение $\Delta U = U_0 - U$ между движками.

Напряжение ΔU приложено к входным зажимам усилителя $У$ с коэффициентом усиления k_0 . На выходе $У$ появляется усиленное напряжение $U_1 = k_0 \Delta U$. Это напряжение вызывает ток I в цепи якоря двигателя $Д$ независимого возбуждения. Обмотка возбуждения $ОВ$ двигателя присоединена к вспомогательному источнику постоянного напряжения. При $I \neq 0$ появляется вращающий момент M на выходном валу (этот момент $M = kI\Phi$, где $k = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности, а $\Phi = \text{const}$ — поток возбуждения). Двигатель через редуктор P вращает приемную ось в таком направлении, чтобы величина α стремилась к α_0 . Вращение будет продолжаться до тех пор, пока напряжение ΔU , а с ним и рассогласование $\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha$ не обратятся в нуль. Тогда и напряжение ошибки $U_1 = k_0 \Delta U$ станет равным нулю, и вращение двигателя прекратится — система придет к состоянию равновесия.

Если знак разности $\alpha_0 - \alpha$, а с ним и знак ΔU станет противоположным, то ток I потечет в противоположном направлении, момент M изменит свой знак и вал двигателя начнет вращаться в обратном направлении.

На первый взгляд может показаться, что создать систему автоматического регулирования чрезвычайно просто. Для этого достаточно только образовать (реализовать) так называемую «отрицательную обратную связь». Полученная при этом замкнутая система будет автоматически все время стараться свести ошибку регулирования к нулю. К сожалению, это мнение ошибочно, и проблемы, связанные с такими системами, оказываются далеко не тривиальными. Так, например, оказывается, что часто при замыкании обратной связью (даже отрицательной) ошибка $x(t)$ в системе со временем не только не стремится к нулю, а, наоборот, неограниченно нарастает, т. е. САР является *неустойчивой*. Поэтому большое внимание в теории автоматического регулирования уделено исследованию условий, при которых САР будет устойчивой.

Таким образом, вопрос об устойчивости — это первый важный вопрос, с которым мы сталкиваемся, когда имеем дело с САР. После того, как вопрос об устойчивости САР решен положительно, и мы знаем, как сделать систему устойчивой, возникают другие вопросы, важнейшим из которых является вопрос о качестве переходного процесса.

Здесь важно выяснить, как быстро САР восстанавливает равновесие в системе после действия возмущения, какой характер носит сам переходный процесс (например, меняет ли знак ошибка $x(t)$, монотонно или нет уменьшается эта ошибка и т. д.).

Вопросы, связанные с характером процессов в САР, подробно разбираются в следующих главах книги. Однако можно и без вычислений представить характер переходного и установившегося режимов САР. Действительно, благодаря инерции и запаздыванию реакций, свойственным любой физической системе, блоки системы не сразу реагируют на пришедшие к их входу сигналы. Рассмотрим снова систему, изображенную на рис. 1.5. Допустим, что из-за наличия момента инерции приемная ось «проскочила» положение, соответствующее нулю рассогласования $\Delta\alpha$; тогда знак $\Delta\alpha$ изменится, например станет отрицательным. Момент M двигателя должен

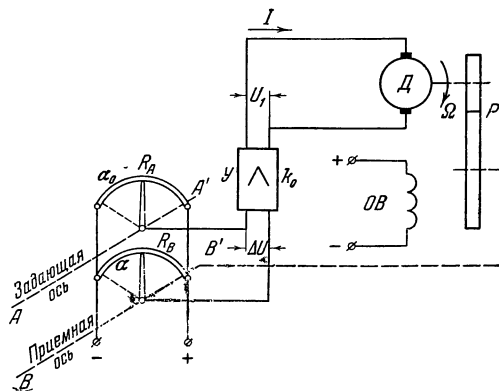


Рис. 1.5.

изменить свой знак, чтобы осуществить вращение в противоположном направлении. Однако из-за запаздывания и инерционности блоков (например, инерционности усилителя) напряжение U_1 некоторое время еще будет сохранять неверный знак, что вызовет движение приемной оси в направлении увеличения абсолютного значения рассогласования. Когда, наконец, момент M изменит свой знак на правильный, рассогласование уже достигнет заметной величины. Теперь начнется торможение вала, накопившего некоторую кинетическую энергию, а затем вращение в надлежащем направлении. Однако опять-таки из-за инерционности и запаздывания звеньев момент M слишком поздно обратится в нуль — лишь после того, как приемная ось пройдет через требуемое положение. Величина $\Delta\alpha$ в итоге все же, быть может, стремясь к нулю, будет изменяться колебательно (рис. 1.6, а).

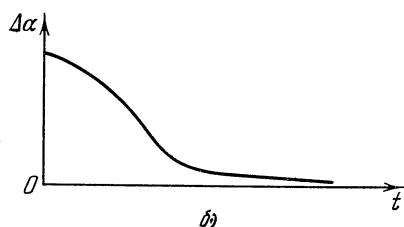
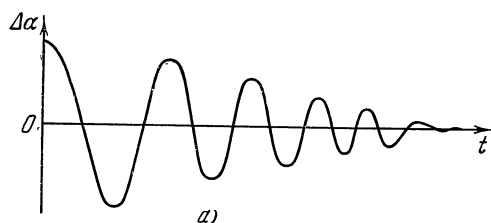


Рис. 1.6.

емной осей. В зависимости от значения рассогласования $\Delta\alpha$ и скорости его изменения $\frac{d}{dt}(\Delta\alpha)$ этот блок подает дополнительный сигнал, который

заставляет момент M двигателя заранее изменить свой знак. Так поступает и любой опытный рулевой, заблаговременно переключив руль в обратную сторону в процессе поворота лодки еще до ее подхода к нужному курсу, чтобы предупредить возможность перехода через требуемое направление курса в противоположную сторону. В этом случае речь может идти об оптимальной, т. е. наилучшей в определенном смысле, системе управления. Изучению такого рода систем посвящены заключительные главы книги.

По окончании процесса, когда система приходит к равновесию, величина $\Delta\alpha$ оказывается теоретически равной нулю. Конечно, при этом выводе мы пренебрегаем рядом реальных факторов, например моментом сухого трения на приемной оси, неточностью измерительного блока и т. д. Такое свойство идеализированной системы объясняется тем, что при любом, сколь угодно малом рассогласовании $\Delta\alpha$ двигатель начинает вращаться, т. е. происходит движение системы. Связь между скоростью Ω вращения двигателя и углом поворота α приемной оси дается очевидным равенством

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Omega}{q}, \quad (7)$$

где q — передаточное число редуктора. Из (7) следует, что при любом, сколь угодно малом значении Ω величина α начинает меняться. Поэтому рав-

размах колебаний будет увеличиваться, то $\Delta\alpha$ вообще не придет к нулю. Система в этом случае оказывается неустойчивой. Для того чтобы обеспечить плавный и быстрый процесс ликвидации рассогласования $\Delta\alpha$ (например, такой процесс, какой изображен на рис. 1.6, б), нужно добавить к схеме устройства, которые осуществляли бы правильное управление двигателем, подавая на него управляющее воздействие с учетом запаздываний, имеющих в системе. Эти устройства называются *дополнительными связями*.

В данной системе можно применить блок, измеряющий, например, скорость вращения приемной оси или разность скоростей передающей и при-

новесие может наступить лишь при $\Omega = 0$, а для этого необходимо, чтобы $\Delta u = 0$, т. е. требуется, чтобы величина $\Delta \alpha$ была равна нулю.

Любое звено, для которого имеет место зависимость между входной величиной Ω и выходной величиной α , указанная формулой типа (7), называется *интегрирующим звеном*. В этом звене выходная величина пропорциональна интегралу от входной.

Системы, в состав которых входят интегрирующие звенья, могут быть астатическими. *Астатической* системой по отношению к данному воздействию обычно называют такую, у которой установившееся значение погрешности не зависит от величины постоянного возмущающего воздействия.

Задающее воздействие X_0 можно условиться считать частным случаем внешнего возмущающего воздействия. В системе, описанной выше, установившееся значение погрешности равно нулю вне зависимости от постоянного значения X_0 . Следовательно, эта система является *астатической по отношению к задающему воздействию*.

Одна и та же система может быть астатической по отношению к одному возмущающему воздействию и не астатической по отношению к другому воздействию, примененному в другой точке. Рассмотрим

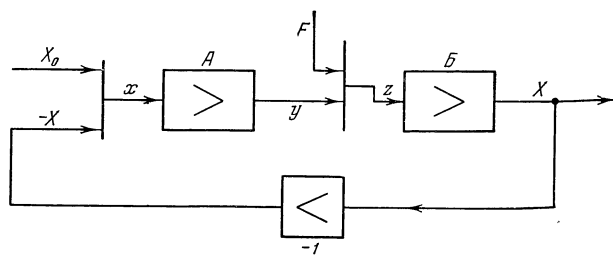


Рис. 1.7.

в качестве примера структурную схему системы, изображенную на рис. 1.7. Пусть X_0 постоянно, A и B — звенья, включенные в тракт системы; F — возмущающее воздействие. Допустим, что звено A интегрирующее, а звено B усилительное, т. е. его выходная величина X прямо пропорциональна входной величине $z = y + F$. Будем подавать на систему различные воздействия $F = \text{const}$ и рассматривать установившееся значение погрешности x . Так как звено A интегрирующее, то любое отклонение x от нуля вызовет изменение выходной величины y . Установившееся состояние системы будет иметь место лишь при $x = 0$. Следовательно, система является астатической по отношению к возмущающему воздействию F (а также по отношению к X_0 , в чем легко убедиться).

Переменим теперь усилительное и интегрирующее звенья местами. Если теперь B — интегрирующее звено, то установившееся состояние системы будет характеризоваться значением $z = 0$, т. е. $y + F = 0$. Следовательно, различным значениям $F = \text{const}$ соответствуют различные установившиеся значения y . Но для получения этих значений нужно подавать на вход усилительного звена A различные величины x . Следовательно, погрешность x будет зависеть от F . Система теперь уже не является астатической по отношению к возмущающему воздействию F . Между тем, как легко убедиться, она остается астатической по отношению к задающему воздействию X_0 .

Рассмотрим теперь другой пример САР.

Пусть требуется поддерживать постоянное значение напряжения U на зажимах генератора G постоянного тока (рис. 1.8). Зажимы генератора A , B приключены к нагрузке. Если бы генератор не был снабжен автоматическим регулятором напряжения, то при колебании тока нагрузки I напряжение U генератора изменялось бы в соответствии с

$$U = E - IR_{я}. \quad (8)$$

Здесь $R_{я}$ — сопротивление цепи якоря генератора, E — э. д. с. генератора.

Из (8) видно, что существует еще ряд факторов, изменение которых влияет на величину U . Пренебрегая влиянием насыщения и гистерезиса в магнитной цепи, а также реакцией якоря, можно приближенно принять величину E пропорциональной I_B :

$$E = k_1 I_B, \quad (9)$$

где $k_1 = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности. Из (8) и (9) следует, что напряжение U зависит от тока возбуждения I_B . Далее из (8) видно, что изменение сопротивления цепи якоря $R_{\text{я}}$ (например, вследствие изменения температуры либо от изменения сопротивлений щеточных контактов) также вызывает изменение напряжения U на зажимах генератора.

Автоматический регулятор напряжения должен поддерживать величину напряжения U генератора неизменной независимо от колебаний указанных

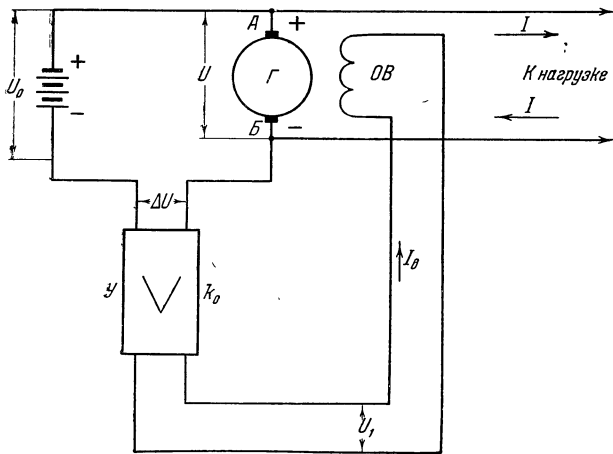


Рис. 1.8.

величин, в том числе и тока нагрузки I . В состав регулятора, как показано на рис. 1.8 входит батарея-источник эталонного (или задающего) напряжения U_0 , с которым автоматически сравнивается регулируемое напряжение U . Разность этих напряжений

$$\Delta U = U_0 - U \quad (10)$$

подается на вход усилителя Y с коэффициентом усиления k_0 . Выходное напряжение усилителя равно

$$U_1 = k_0 \Delta U. \quad (11)$$

Напряжение U_1 можно было бы приложить к вхо-

ду небольшого вспомогательного двигателя, называемого сервомотором, перемещающего движок реостата в цепи обмотки возбуждения OB . В такой замкнутой системе можно было бы осуществить, как это легко показать, автоматическое регулирование напряжения; при этом в положении равновесия осуществлялось бы равенство $\Delta U = 0$ или $U = U_0$. Однако можно упростить схему и, как это показано на рис. 1.8, подать выходное напряжение U_1 усилителя Y непосредственно на обмотку возбуждения OB генератора. Тогда ток возбуждения определится из выражения

$$I_B = \frac{U_1}{R_B} = k_2 U_1, \quad (12)$$

где R_B — сопротивление обмотки возбуждения и $k_2 = \frac{1}{R_B} = \text{const}$.

В этой системе в состоянии равновесия принципиально невозможно обеспечить точно нулевое значение ΔU . Но можно так сконструировать систему, чтобы величина ΔU составляла бесконечно малую часть от U_0 . Погрешностью ΔU можно пренебречь, если она меньше той допустимой погрешности, которая задается техническими условиями, предъявленными к системе регулирования.

Основная идея системы, изображенной на рис. 1.8, состоит в том, что усилитель Y имеет большой коэффициент усиления $k_0 \gg 1$. Тогда даже очень малое напряжение ΔU на его входе достаточно для поддержания большого напряжения U_1 на его выходе, а следовательно, малое значение ΔU обеспе-

чит и нужное в любом режиме значение тока возбуждения I_B . Последнее установится автоматически таким, чтобы величина ΔU была мала, т. е. было приближенно выполнено равенство $U_0 = U$.

Действительно, допустим, что по какой-либо причине — от изменения тока I или от колебаний $R_{\text{я}}$ — напряжение U генератора упало. Тогда возрастут разность ΔU , приложенная к зажимам усилителя, и выходное напряжение U_1 усилителя, что заставит возрасти ток возбуждения I_B генератора. Последнее позволяет увеличить его э. д. с. E , в результате чего увеличится и напряжение U , стремясь к значению U_0 .

Если напряжение U по какой-либо причине изменится в противоположном направлении, то и все указанные выше процессы протекнут в противоположном направлении.

Найдем значение величины U в положении равновесия на основе формул (8)–(12)

$$\begin{aligned} \Delta U = U_0 - U = U_0 - (E - IR_{\text{я}}) &= U_0 - k_1 I_B + IR_{\text{я}} = \\ &= U_0 - k_1 k_2 U_1 + IR_{\text{я}} = U_0 - k_1 k_2 k_0 \Delta U + IR_{\text{я}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Положим

$$k = k_0 k_1 k_2$$

и назовем k коэффициентом усиления системы. Из формулы (12) находим

$$\Delta U = \frac{U_0}{1+k} + \frac{IR_{\text{я}}}{1+k}. \quad (14)$$

Следовательно, при достаточно большом значении k погрешность ΔU может быть сколь угодно малой.

Система, схема которой изображена на рис. 1.8, не содержит интегрирующего звена и является *статической*. Положим в выражении (14) величину $U_0 + IR_{\text{я}} = c$ постоянной.

Отношение

$$\frac{\Delta U}{c} = \frac{1}{1+k} = S \quad (15)$$

называется *коэффициентом статизма* или просто *статизмом* системы. Если статизм достаточно мал, то система удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям. Более общее определение статизма будет дано в § 5 гл. IV.

Статические системы во многих случаях оказываются проще астатических; их часто легче сделать устойчивыми. Но и в этих системах запаздывания и инерционности звеньев могут вызвать неустойчивость. Здесь, так же как и в астатических системах, для стабилизации системы и улучшения процессов требуются дополнительные связи.

Обозначим погрешность ΔU буквой x (см. также формулу (2)). Процесс устранения погрешности $x(t)$ в системе показан на рис. 1.9. Как указано выше, после прихода системы в положение равновесия остается погрешность, которую мы обозначим через x_s . Таким образом, в любой момент времени, пока переходный процесс еще не закончился, полная величина x состоит из двух слагаемых

$$x = x_s + x_d. \quad (16)$$

Слагаемое x_d , обращаясь в нуль по окончании переходного процесса,

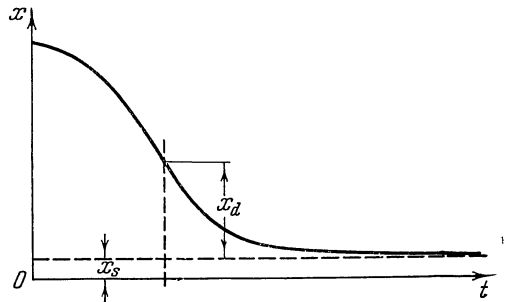


Рис. 1.9.

называется *переходной погрешностью*, а слагаемое x_s , остающееся и в установившемся состоянии, называется *установившейся погрешностью*.

Рассмотрим теперь, какие принципы можно положить в основу классификации САР.

Системы автоматического регулирования можно классифицировать, например, по их назначению или по виду аппаратуры, применяемой для регулирования. САР могут служить для регулирования напряжения генератора, углового положения оси ствола орудия, курса корабля или самолета, скорости вращения ротора двигателя, давления пара, температуры печи, положения фрезы в копировально-фрезерном станке, концентрации какого-либо вещества в растворе и т. д. Аппаратура регуляторов может быть механической, гидравлической, электрической, электронной или комбинированной

(например, электрогидравлической, электропневматической и т. д.)

Однако в любой САР имеется регулируемая величина, и задача системы состоит в том, чтобы осуществить равенство значений регулируемой и задающей (установленной) величин. Так как задача систем автоматического регулиро-

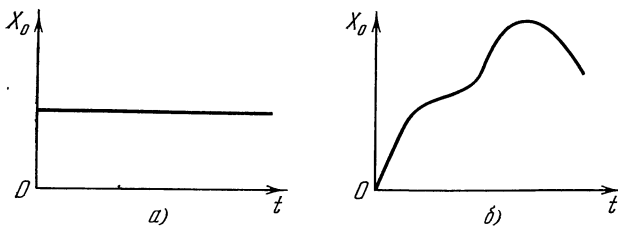


Рис. 1.10.

вания всюду одна и та же, то и принципы их построения остаются одними и теми же при автоматическом регулировании напряжения, скорости вращения, температуры и вообще любых величин. Эти принципы не зависят также от конкретного способа выполнения автоматического регулятора и одинаковы как для электрических, так и для пневматических, гидравлических и иных устройств. Поэтому особенное значение приобретает классификация САР по характеру процессов, происходящих в них. Основные линии такой классификации:

- а) по динамическим свойствам САР в целом;
- б) по динамическим свойствам их звеньев;
- в) по структуре, т. е. по способу построения системы из звеньев;
- г) по характеру рабочих режимов в САР (в основном по виду изменения задающего воздействия X_0 или паразитных воздействий, возмущающих систему).

Так, например, разделение систем на статические и астатические зачастую связано с наличием в определенных местах системы интегрирующих звеньев, обладающих особыми динамическими свойствами. Системы могут различаться также по типу дополнительных связей. Такие разделения идут по линиям б) и в) приведенной классификации. Пункт г) классификации включает в себя разделение по типу изменения во времени задающего воздействия.

Если X_0 постоянно (рис. 1.10), то получаем *систему автоматической стабилизации*.

Если X_0 меняется по какой-либо определенной, заранее заданной программе (рис. 1.10, б), то получаем систему программного регулирования.

Если X_0 может быть произвольной функцией времени, заранее не определенной (может быть задан лишь класс, к которому принадлежит функция X_0), то такая система называется *следающей системой*.

При разработке каждого из этих типов систем могут потребоваться специфические методы расчета; однако приведенная выше классификация по

типу X_0 касается, в сущности, лишь режимов работы, а не самого принципа построения САР.

Назовем переходным процессом зависимость переходной погрешности x от времени. Системы можно классифицировать по типу переходных процессов на устойчивые и неустойчивые. Такая классификация входит в указанный выше п. а).

Как в устойчивых, так и в неустойчивых системах возможны переходные процессы различных типов.

1) Если скорость $\frac{dx}{dt}$ не изменяет своего знака в течение всего переходного процесса, то последний называется *монотонным*. На рис. 1.11, а изображен монотонный переходный процесс в устойчивой системе, а на рис. 1.11, б — монотонный переходный процесс в неустойчивой системе. В последнем случае имеет место так называемая *монотонная неустойчивость*.

2) Если скорость $\frac{dx}{dt}$ хотя бы один раз изменяет свой знак в течение всего переходного процесса, то последний называется *немонотонным* или *колебательным*. Например, переходные процессы на рис. 1.11, в, г являются колебательными процессами в устойчивых системах.

На рис. 1.11, е изображен колебательный процесс в неустойчивой системе; здесь погрешность x не убывает, а даже нарастает со временем. В последнем случае имеет место *колебательная неустойчивость*.

3) Если в устойчивой системе погрешность x изменяет свой знак в течение переходного процесса, то имеет место *перерегулирование*. Если знак x не изменяется, то процесс протекает без перерегулирования. На рис. 1.11, а, б изображены переходные процессы без перерегулирования, а на рис. 1.11, в, г — с перерегулированием. Отсюда следует, что перерегулирование и немонотонность — различные понятия. Например, переходный процесс на рис. 1.11, б немонотонный, но происходит без перерегулирования. Обратный случай не может иметь места, так как все процессы с перерегулированием не являются монотонными. Величину перерегулирования обозначим через Δx .

Эта величина является важным показателем переходного процесса. Часто в качестве технического условия к системе предъявляется требование ограничения Δx некоторой малой величиной, порядка $0,05 \div 0,1$, при отработке начального рассогласования, либо вообще требуется отсутствие перерегулирования в этом режиме. Иногда предъявляется также требование ограничения максимума x или производных $\frac{d^k x}{dt^k}$ некоторыми предельными значениями. Нередко встречается требование ограничения определенным пределом абсолютного значения самой регулируемой величины X или ее производной $\frac{d^i X}{dt^i}$ или линейной комбинации производных различных порядков. Часто требуется ограничение выходных величин X_i каких-либо звеньев САР

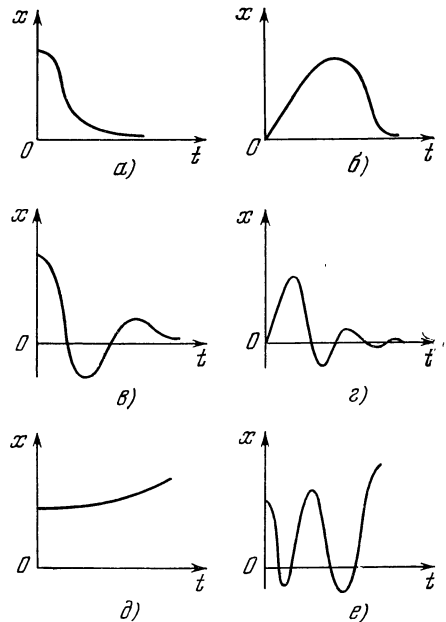


Рис. 1.11.

пределами

$$N_i \leq X_i \leq M_i, \quad (17)$$

где M_i и N_i — некоторые заданные константы.

Важным показателем переходного процесса является так называемое *время регулирования* T_0 (рис. 1.12, а и б), т. е. промежуток времени от начала переходного процесса до того момента, когда погрешность x делается и остается в дальнейшем меньшей по абсолютной величине некоторой заданной малой величины δ . Последнюю можно назвать допустимым отклонением.

На рис. 1.12, а, б показано время регулирования. В качестве технического условия часто предъявляется требование $T_0 < (T_0)_{\max}$, где $(T_0)_{\max}$ — некоторая максимально допустимая величина времени регулирования.

Иногда предъявляется следующее требование: не должно быть больше n пересечений кривой переходного процесса оси абсцисс до попадания

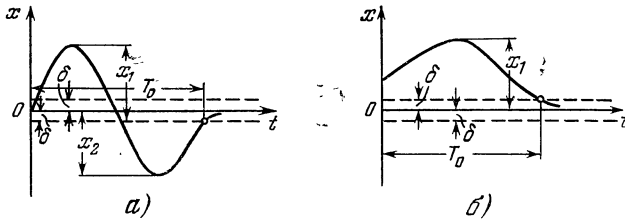


Рис. 1.12.

x в пределы $|x| < \delta$. На рис. 1.12, б число пересечений $n = 0$, на рис. 1.11, а $n = 1$, на рис. 1.11, в $n = 2$. Обычно допустимо

$$0 \leq n \leq 2.$$

Все перечисленные выше требования, предъявляемые к кривым переходных процессов в устойчивых системах, называются иногда условиями надлежащего *качества регулирования*.

Расчеты процессов в системах автоматического регулирования, составляющие ядро теории регулирования, могут быть разделены на три группы:

- 1) исследование установившейся погрешности x_s и обеспечение малого значения этой величины;
- 2) исследование устойчивости и обеспечение ее, т. е. обеспечение условия $x_s \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
- 3) исследование переходных процессов, т. е. функции $x_s(t)$ в устойчивой системе и обеспечение условий надлежащего качества регулирования.

Первая группа расчетов обычно (хотя и не всегда) довольно проста. Значительно большие затруднения представляет исследование устойчивости. Особенно сложным оказывается исследование устойчивости нелинейных систем, т. е. таких систем, у которых уравнения движения нелинейны. В этой области лишь за последние годы достигнуты значительные успехи. Наиболее сложной является третья группа расчетов.

Теория автоматического регулирования является наиболее старым и лучше остальных развитым разделом общей теории управления. Современный этап развития кибернетики как науки об управлении характеризуется началом дальнейшего бурного развития общей теории управления, объединяющим в себе все аспекты управления. Наиболее важными направлениями ее являются теория оптимальных систем управления, систем автоматического приспособления и теория сложных систем.

Теория оптимальных систем занимается вопросами построения автоматических систем, обеспечивающих оптимальные, т. е. наилучшие в опреде-

ленном смысле результаты. Иногда кибернетику определяют как науку об оптимальном (т. е. наилучшем) управлении. Несмотря на то, что теория оптимальных систем находится еще на первом этапе своего развития, она уже сейчас дает в руки инженера методы, позволяющие ему при разработке конкретных систем заменить интуитивный подход научно обоснованной методикой построения оптимальных систем. Толчок развитию теории оптимального управления и планирования дала инженерно-техническая практика и те быстро растущие требования, которые в настоящее время предъявляются к системам управления. Основой теории оптимальных систем в настоящее время служит аппарат вариационного исчисления, а в тех ситуациях, где присутствует «неопределенность», используется, кроме того, аппарат теории вероятностей и математической статистики. Под влиянием требования практики развитие вариационного исчисления привело к новым более общим и мощным методам решения задач оптимизации — таким, как принцип максимума Л. С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана и др. В математической статистике сильное развитие получила теория статистических решений, которая служит мощным аппаратом для принятия оптимальных решений и построения оптимальных систем в условиях неопределенности, связанной с отсутствием полной информации, необходимой для полного расчета оптимальной стратегии.

В любой автоматической системе управляющее устройство решает в общем случае две задачи: 1) на основании приходящей информации «выясняет» свойства и состояние управляемого объекта; 2) на основе этих данных определяет, какие действия необходимы для управления. В простейших системах решение одной из этих задач может отсутствовать или иметь примитивную форму.

Сведения об объекте могут быть получены в готовом виде в качестве информации от человека, добыты наблюдением и, наконец, найдены путем постановки активного эксперимента. Поэтому автоматические системы по способам добывания сведений можно разделить на три типа: 1) системы с полной информацией об управляемом объекте; 2) системы с неполной информацией об объекте и независимым или пассивным ее накоплением в процессе управления; 3) системы с неполной информацией об объекте и активным ее накоплением в процессе управления. Последний тип называется системами дуального управления. Это название связано с тем, что управляющее воздействие должно иметь дуальный (двойственный) характер. С одной стороны, оно должно быть в известной мере изучающим, а с другой стороны, также и направляющим, ведущим объект к требуемому состоянию. Именно дуальность управления является основным физическим фактом, отличающим третий тип оптимальных систем от первых двух. В первом из них дуальное управление не нужно, поскольку управляющее устройство содержит полную информацию об объекте. Во втором типе систем дуальное управление невозможно, ибо информация накапливается путем одного лишь наблюдения и темп ее накопления не зависит от стратегии управления. Таким образом, в третьем типе систем законы управления со сравнительно низким уровнем приспособления к характеру управляемого объекта будут заменяться в этих системах законами управления с более высоким уровнем приспособления, в широкой мере использующими статистически обработанный опыт работы системы в целом. Автоматические устройства такого типа будут применяться для решения сложных задач формирования концепций и теорий, распознавания образов и объектов, построения самонастраивающихся моделей. Таким образом, ученые ставят сейчас перед собой задачу изучения, моделирования и использования самых тонких и сложных способностей человеческого интеллекта и живых организмов вообще. Теория дуального управления в настоящее время находится еще на самой начальной

стадии своего развития. В ней получены лишь отдельные частные результаты, в основном касающиеся дискретных систем. По-видимому, эта теория предполагает включить в себя наиболее содержательный и широкий подход к задачам управления сложными системами; но вместе с тем она является и наиболее трудной для разработки. Эти трудности в основном связаны с тем, что такого рода приспособляющиеся и обучающиеся системы являются сложными нелинейными замкнутыми системами, перерабатывающими статистическую информацию. В этих системах как в фокусе концентрируются многие старые трудные проблемы и возникают новые также не менее трудные задачи. Для решения этих задач инженер-разработчик должен хорошо владеть теорией линейных и нелинейных систем, как непрерывных, так и импульсных, основами теории вероятностей, теории статистических решений, теории информации. При исследовании и создании управляющих систем используются два метода: аналитический и алгоритмический. В начале развития теории автоматического управления, пожалуй, преобладал первый из этих методов. Аналитический метод опирается на математическое описание управляемого объекта в основном с помощью дифференциальных уравнений, с широким использованием математического аппарата, в особенности таких его разделов, как функции комплексного переменного, операционное исчисление, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и т. д. Полученные результаты непосредственно использовались при анализе и синтезе систем управления. При алгоритмическом подходе к решению той или иной задачи автоматического управления разрабатывается лишь алгоритм, т. е. правило, по которому исходные данные перерабатываются в управляющие воздействия на объект управления. При алгоритмическом подходе задача состоит в том, чтобы отыскать такое правило, которое исходные данные перерабатывали бы в требуемый конечный результат. Примерами алгоритмов, применяемых в автоматическом управлении, могут служить алгоритм оптимального управления, алгоритм самонастройки, алгоритм поиска экстремумов функций и т. д. Для конкретной технической реализации алгоритмов широко применяются различного рода *вычислительные* устройства. Вот почему глубокое знание возможностей и устройств вычислительных машин совершенно необходимо каждому специалисту, занимающемуся автоматическим управлением. Так как алгоритмы управления, решающие указанные новые задачи, как правило, достаточно сложные, требуют значительного времени для решения, то первоочередное значение будет иметь развитие новых элементов автоматических систем. Направление развития новых элементов автоматизации характеризуется увеличением их быстродействия и надежности, а также значительным уменьшением веса, габаритов и потребления энергии. Получают широкое применение новые типы элементов на магнитных и полупроводниковых пленках, туннельные диоды и триоды, микромодульные элементы, разнообразные виды криогенной аппаратуры, используемые как запоминающие и логические элементы и основанные на использовании явления сверхпроводимости при низких температурах. Успехи в области микроэлементов делают реальным достижение в ближайшем будущем плотностей порядка 20 тысяч элементов на 1 см^2 , что в значительной мере снимет существующие ограничения на число используемых в устройствах управления элементов и позволит создавать структуры управления, приближающиеся по своим плотностям к биологическим.

Г л а в а II

ЭЛЕМЕНТЫ И СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 1. Измерительные элементы (датчики)

Современная техника располагает огромным арсеналом разнообразных устройств, служащих для измерения любых, как электрических, так и неэлектрических величин электрическими методами. Именно это разнообразие делает необходимой классификацию измерительных органов (или датчиков, как их иногда называют). Поскольку большая часть регуляторов предназначена для регулирования неэлектрических величин, задача измерительного органа заключается не только в том, чтобы измерить данную величину (например, давление, температуру), но также и в том, чтобы преобразовать ее в величину электрическую. Этой электрической величиной может быть любой параметр электрической цепи или любая числовая характеристика, относящаяся к ней: сопротивление, индуктивность, емкость, сила тока, величина напряжения, сдвиг фаз, частота, величина промежутка времени между отдельными импульсами, число импульсов в секунду или число, передаваемое каким-либо импульсным кодом.

Электрические датчики можно классифицировать либо по тем величинам, которые они должны измерять (датчики давления, датчики температуры), либо по тем электрическим величинам, в которые преобразуются измеряемые величины (датчики сопротивления, датчики емкости). Целесообразнее проводить классификацию по второму из этих признаков. Действительно, два емкостных датчика, служащих для измерения различных величин (например, перемещения, давления), сходны между собой и имеют близкие конструктивные и эксплуатационные характеристики. В то же время емкостный и индуктивный датчики, служащие для измерения одной и той же величины, сильно отличаются друг от друга и по схеме, и по конструкции, и по свойствам. Кроме того, многие неэлектрические величины предварительно преобразуются в одну и ту же механическую величину — перемещение; например, давление в барометре преобразуется в перемещение мембраны. Поэтому значительная часть электрических датчиков может быть сконструирована в виде аппаратов, преобразующих перемещение в ту или иную электрическую величину. Приняв классификацию по электрическим величинам, получаем следующие основные типы электрических датчиков: а) датчики сопротивления; б) датчики индуктивности; в) датчики емкости; г) датчики тока; д) датчики напряжения; е) датчики фазы; ж) датчики частоты; з) время-импульсные датчики; и) число-импульсные датчики; к) импульсно-кодовые датчики.

Иногда регулируемая величина проходит несколько стадий преобразования, преобразуясь, например, из механической сначала в величину какой-либо иной формы движения (например, в световую, тепловую и т. д.), а

затем уже в электрическую. Это имеет место, например, в некоторых фотоэлектрических и болометрических датчиках.

Вторая линия классификации связана с характером процесса измерения. Измерение есть операция сравнения данной величины с некоторой определенной величиной того же рода, принятой за эталон. Обычно для сравнения берется не первичный эталон, а вторичный или так называемая мера — переменная эталонированная величина. Например, эталонный конденсатор переменной емкости есть мера.

Набор вторичных эталонов либо мера имеется в любом измерительном приборе. Однако мера может быть разного рода. Рассмотрим в качестве примера измерение постоянного тока обычным амперметром. Сначала градуируем его по электрической мере, а затем производим отсчет величины тока, протекающего через катушку амперметра, по положению стрелки на шкале. В качестве меры в данном случае служит пружина, создающая противодействующий момент. Однако это — механическая мера. Подобного рода измерение, при котором операция сравнения происходит опосредствованно, с помощью меры иного рода, называют *косвенным*. Если же измеряемая величина сравнивается с мерой того же рода, то измерение называют *прямым*.

Измерительные приборы могут различаться по той стадии, на которой происходит процесс сравнения с мерой или, как он иногда называется, процесс компенсации. Рассмотрим пример — измерение размера. С помощью индуктивного датчика (см. ниже) можно преобразовать изменение размера в изменение индуктивности. Последнее можно измерить с помощью *индуктивной меры*, например, в измерительном мосте, осуществляя баланс последнего. Можно также применить метод несбалансированного моста и измерить напряжение диагонали последнего с помощью меры напряжения (например, компенсатора напряжения). Здесь прибавляется преобразование индуктивности в напряжение. Можно, наконец, измерить вольтметром напряжение диагонали моста; здесь прибавляется еще преобразование измеряемой величины в форму механического момента, — и мера является уже механической — роль меры играет пружина прибора. Общая погрешность измерения обусловлена погрешностями при всех преобразованиях величины и погрешностью ее компенсации на последней стадии. Поэтому, вообще говоря, часто бывает целесообразно, насколько можно, уменьшить число стадий преобразований.

Весьма распространенным датчиком является *датчик сопротивления*. Простейшим типом датчиков сопротивления являются контактные датчики. Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.1, а. Шток III соединен с телом, малые перемещения которого требуется измерять, например, с мембраной манометра и т. д. Если шток III находится в некотором среднем положении, то связанный с ним подвижный контакт k_0 находится между двумя неподвижными контактами k_1 и k_2 . При последующем перемещении штока III, например, вверх, замкнется цепь контактов k_0k_1 . При перемещении штока III вниз замкнется цепь контактов k_0k_2 . При замыкании цепей могут быть поданы напряжения на какие-либо сигнальные или управляющие устройства.

Схема рис. 2.1, а в сущности не позволяет измерить перемещение, а лишь указывает наличие перемещения, большего некоторого предела. В схеме многопредельного контактного датчика (рис. 2.1, б) осуществляется индикация превышения нескольких пределов, приближающаяся к измерению величины перемещения. При перемещении штока III из среднего положения, например, кверху, сначала осуществляется замыкание контактов k_0 и k_{11} , затем k_0 и k_{12} и т. д.

Контакты k_{11} , k_{12} , k_{13} укрепляются на пружинах и могут отходить под давлением контакта k_0 кверху от своего основного положения. Эти кон-

такты могут быть присоединены к различным управляющим цепям либо могут замыкать накоротко различные секции одного и того же сопротивления. В последнем случае график тока, протекающего через это сопротивление, в функции перемещения штока *Ш* будет представлять собой ступенчатую кривую. Если количество контактов велико, то подобная кривая даст возможность с известной точностью измерить перемещение штока.

С помощью иного метода — метода вибрирующего контакта (рис. 2.2, *а*) — можно производить непрерывное преобразование механического перемещения в пропорциональную ему электрическую величину. Вибрационный датчик представляет собой электромагнит *1* с массивным якорем *2*, жестко прикрепленным к одному из стержней магнитопровода. На якоре укреплен гибкий наконечник *3*. При протекании переменного тока через катушку электромагнита якорь вибрирует. Если к наконечнику якоря придвигается шток *4*, то отношение периода замкнутого состояния контактов *3* и *4* к периоду разомкнутого состояния будет зависеть от положения штока *4* по отношению к электромагниту. Наконечник якоря соединяют с сеткой электронной лампы, а шток заземляют.

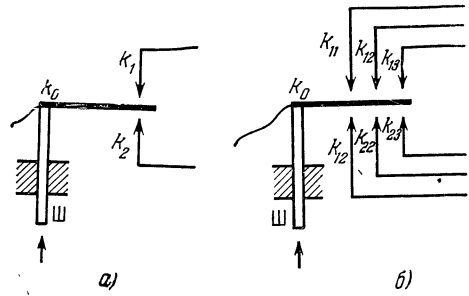


Рис. 2.1.

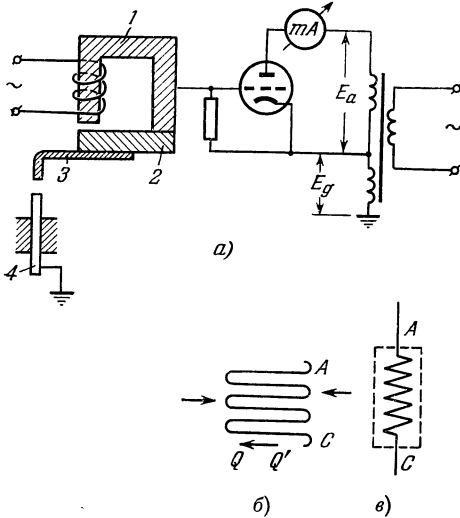


Рис. 2.2.

При протекании переменного тока через катушку электромагнита якорь вибрирует. Если к наконечнику якоря придвигается шток *4*, то отношение периода замкнутого состояния контактов *3* и *4* к периоду разомкнутого состояния будет зависеть от положения штока *4* по отношению к электромагниту. Наконечник якоря соединяют с сеткой электронной лампы, а шток заземляют. При каждом замыкании контактов *3* и *4* лампа запирается, так как на ее сетку попадает напряжение смещения E_g , а последнее отрицательно как раз в те полупериоды, когда анодное напряжение E_a лампы положительно, и последняя может проводить ток. С приближением штока *4* к наконечнику *3* период замкнутого состояния контактов возрастает и, следовательно, среднее значение анодного тока падает; при удалении период замкнутого состояния контактов уменьшается и среднее значение анодного тока возрастает. Таким образом, измеряя среднее значение анодного тока, можно тем самым измерить перемещение штока.

Конструкция вибриционного датчика достаточно проста. Амплитуда колебаний наконечника якоря может быть установлена в пределах от нескольких сотых до десятых долей миллиметра. Погрешность измерения при размахе колебаний, равном 0,05 мм, по данным эксперимента не превосходит 1 микрона, а при размахе 0,3 мм не превосходит 4 микрон.

На рис. 2.2, *б* изображен проволочный тензодатчик, применяемый для измерения механических напряжений на поверхности деталей. Если требуется измерить составляющую напряжения в направлении QQ' (см. рис. 2.2, *б*), то тензодатчик наклеивается на исследуемое место так, чтобы проволочки, из которых он состоит, были расположены в направлении QQ' . Провод

датчика изготавливается из константана, элинвара или изоэластика. Диаметр проволоки выбирается порядка 0,02—0,05 мм. Проволока ровными и частыми петлями укладывается на подкладку из папиросной бумаги и приклеивается к ней. К концам проволоки припаиваются более толстые медные проводники, при помощи которых тензодатчик включается в измерительную схему. Общее сопротивление тензодатчиков выбирают в пределах 100—1000 ом. Проволочный тензодатчик наклеивается на поверхность испытуемой детали при помощи какого-либо клея — целлюлозного, бакелитового и т. д. или при помощи цементирующих составов. После наклейки и просушивания тензодатчик практически сливается с испытуемой деталью в одно целое (будучи изолирован от нее электрически). Если теперь деталь, допустим, подвергается сжимающим силам, действующим по направлению QQ' , то и проволочки датчика подвергаются сжатию по этому же направлению. При сжатии несколько уменьшается длина проволочки l и увеличивается площадь ее поперечного сечения q ; несколько изменяется также и удельное сопротивление ρ . Поскольку величина сопротивления $R = \rho \frac{l}{q}$, то $\ln R = \ln \rho + \ln l - \ln q$. Возьмем дифференциалы от обеих частей этой формулы; заменяя дифференциалы приращениями, что допустимо при малых приращениях, находим

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta q}{q}. \quad (1)$$

Опыт показывает, что величина относительного изменения сопротивления $\Delta R/R$ пропорциональна деформации $\Delta l/l$ на поверхности детали, а последняя в определенных пределах пропорциональна напряжению σ . Итак,

$$\frac{\Delta R}{R} = S \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

где $S = \text{const}$. Величина S колеблется для различных сплавов от 2,1 до 12. Для данного тензодатчика величину S с точностью до долей процента можно считать постоянной и зависимость $\Delta R/R$ от $\Delta l/l$ прямолинейной. При испытании самолетов в полете предварительно наклеивают на несущие плоскости и другие части самолета до тысячи и более тензодатчиков, а затем в процессе полета, переключая мостовую схему с одного тензодатчика на другой, изучают напряжения. Иногда тензодатчики наклеивают на чувствительные элементы манометров, динамометров и т. д., чтобы преобразовать измеряемую ими неэлектрическую величину в электрическую. При малых $\Delta l/l$ величина $\Delta R/R$ и значение напряжения Δu в диагонали мостовой схемы малы; последнее измеряется милливольтами или долями милливольт. Поэтому нередко пользуются усилителями для усиления малых напряжений.

На рис. 2.2, в изображен термометр сопротивления, представляющий собой медную либо железную, никелевую или платиновую проволоку, помещаемую внутри устройства, где необходимо измерить температуру. Так как сопротивление проволоки зависит от температуры, то измерение последней можно свести к измерению сопротивления. Термометры сопротивления применяются обычно в диапазоне температур от 0 до 200—300° С; платиновые сопротивления применяются для измерения температур до 800° С.

Недостатком ряда датчиков сопротивления является наличие электрических контактов, подверженных коррозии и эрозии. В результате надежность подобных датчиков понижается. Другие типы датчиков свободны от этого недостатка. Например, индуктивные датчики не имеют электрических контактов, весьма надежны в эксплуатации и находят широкое применение.

Рассмотрим *индуктивный датчик* для измерения размера детали, принцип устройства которого показан на рис. 2.3, а. Шток III опирается на показанный на фигуре наконечником на контролируемую деталь. Верхний ко-

нец штока давит на якорь $Я$, укрепленный на плоской пружине $П_1$, заменяющей шарнир. Пружина $П_2$ прижимает якорь к штоку. Пусть при некотором эталонном размере детали якорь $Я$ находится посередине между двумя катушками K_1 и K_2 с сердечниками C_1 и C_2 . Тогда зазоры между якорем и сердечниками δ_1 и δ_2 равны $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Поэтому и индуктивности катушек L_1 и L_2 равны $L_1 = L_2 = L$. Если размер детали изменяется, например

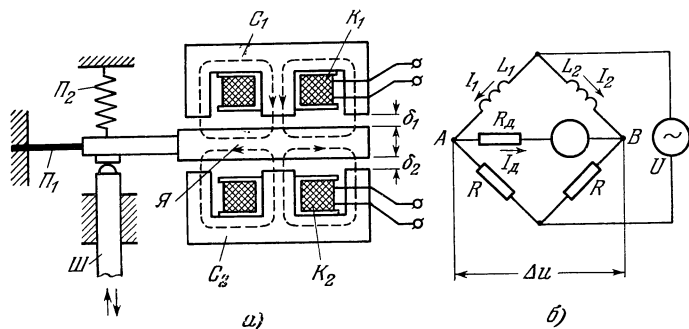


Рис. 2.3.

увеличивается, то якорь поднимается, зазор δ_1 уменьшается, а δ_2 увеличивается, вследствие чего индуктивность L_1 увеличивается, а L_2 уменьшается. Катушки K_1 и K_2 являются двумя плечами мостовой схемы, показанной на рис. 2.3, б. Двама другими плечами служат два равных сопротивления R .

Допустим, что прибор, измеряющий напряжение диагонали Δu , имеет сопротивление R_d . Если $L_1 = L_2$, то мостовая схема находится в равновесии и $\Delta u = 0$. Если же $L_1 \neq L_2$, то мост выходит из равновесия, и показание прибора в диагонали тем больше, чем больше отклонение размера детали от эталонного.

Другим примером индуктивного датчика может служить измерительный орган системы регулирования натяжения полосы в непрерывном прокатном стане. Требуется, чтобы в процессе прокатки натяжение полосы регулировалось автоматически и поддерживалось неизменным либо изменялось по заданному закону. Чрезмерное натяжение может повести к разрыву полосы; в то же время лист, прокатанный при слишком малом натяжении, получается неоднородным и низкого качества. Измерение натяжения полосы осуществляется индуктивным датчиком, конструкция которого показана на рис. 2.4. Полоса нажимает на ролик, установленный на упругой плите. Сила нажатия полосы на ролик, а также деформация плиты являются функцией натяжения полосы.

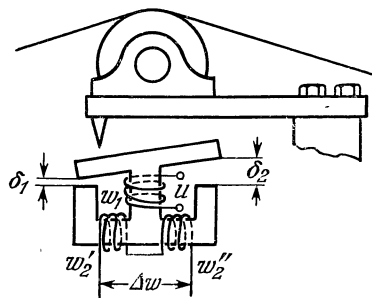


Рис. 2.4.

* Деформация плиты измеряется трехстержневым индукционным датчиком с качающимся вокруг средней точки якорем. Обмотка возбуждения w_1 датчика питается от источника u переменного тока и создает магнитный поток, индуктирующий в двух вторичных дифференциально включенных обмотках w'_2 и w''_2 э. д. с., направленных навстречу друг другу, и результирующая э. д. с. Δu дифференциально включенных обмоток равна нулю. При наличии натяжения равенство зазоров нарушается и появляется напряжение $\Delta u \neq 0$, являющееся примерно линейной функцией натяжения.

К индуктивным датчикам можно отнести также аппараты, в которых используется так называемый магнитоупругий эффект. Если осуществлять давление на сердечник катушки рис. 2.5, то его магнитная проницаемость изменяется. Поэтому меняется и индуктивность катушки, пропорциональная μ . На рис. 2.5, а внешняя сила P , подлежащая измерению, сжимает магнитопровод измерительной катушки. Последний может быть сплошным или шихтованным. Зависимость величины $\Delta\mu/\mu$ в процентах от $\sigma = \frac{P}{S}$ — силы на единицу торцевой поверхности датчика — для одного типа датчика приведена на рис. 2.5, б.

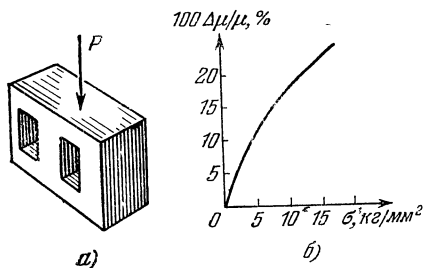


Рис. 2.5.

Емкостные датчики, так же как и индуктивные, бесконтактны. Рассмотрим в качестве примера емкостный датчик для измерения размера детали, изображенный на рис. 2.6. Датчик состоит из двух пластин 1 и 2, разделенных воздушным зазором δ .

Если поверхность пластин равна S см², а δ измеряется в см, то емкость между пластинами

$$C = \frac{S}{4\pi\delta} \text{ см} = \frac{S}{4\pi\delta \cdot 9 \cdot 10^5} \text{ мкф}. \quad (3)$$

Заземленная пластина 2 связана со штоком III, осуществляющим небольшое давление на контролируемую деталь А с помощью пружин А.

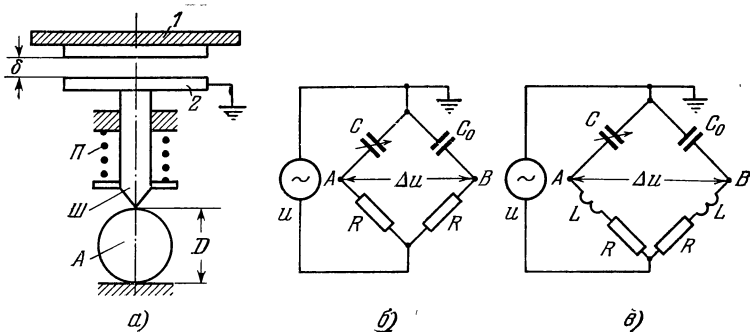


Рис. 2.6.

Если диаметр D детали изменяется на величину $\Delta\delta$, то на такую же величину меняется и величина зазора δ . Считая $\frac{\delta\Delta}{\delta} \ll 1$, можно найти изменение емкости C по формуле для дифференциалов

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial \delta} \Delta \delta = \frac{C}{\delta} \Delta \delta,$$

откуда следует

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \delta}{\delta}. \quad (4)$$

Емкость C включается в схему моста — чаще всего в одну из схем, изображенных на рис. 2.6, б и в. Величина постоянной емкости C_0 выбирается такой, чтобы при некотором эталонном диаметре D_0 контролируемой детали мост находился в равновесии; тогда напряжение в его диагонали $\Delta u = 0$. Если диаметр D отклоняется от значения D_0 , то в диагонали появляется напряжение Δu , пропорциональное при малых отклонениях величине

$\Delta\delta = D - D_0$. Чтобы узнать знак отклонения $\Delta\delta$, необходимо для измерения в цепи диагонали пользоваться так называемыми фазированными или фазочувствительными приборами. В последних знак показания меняется на противоположный, если фаза напряжения Δu изменяется на противоположную (т. е. на 180°).

Схемы с емкостными датчиками питаются, как правило, от источников повышенной частоты. В высокочастотных схемах можно достичь чрезвычайно высокой чувствительности; кроме того, появляется возможность регистрации быстро изменяющихся величин. Однако, как и все высокочастотные схемы, емкостные схемы сложнее низкочастотных индуктивных. Усложнение конструкции датчиков и схем необходимо также для устранения погрешностей, вызываемых температурными изменениями, а также влиянием паразитных емкостей. Поэтому емкостные датчики не получили столь широкого распространения, как индуктивные.

Основным типом датчиков тока являются *фотоэлементы*. Рассмотрим характеристики наиболее распространенных фотоэлементов с внешним фотоэффектом. На рис. 2.7, а показана схема включения фотоэлемента. Светочувствительный катод (фотокатод) K приключается через сопротивление к отрицательному полюсу источника напряжения E ; анод A приключается к положительному полюсу E . Если лучи света попадают на катод, то они выбивают из последнего электроны, которые перемещаются от катода к аноду под действием электростатического поля. Таким образом возникает фототок I_ϕ .

Зависимость фототока от величины светового потока S в вакуумных фотоэлементах прямолинейная. Поэтому можно оценивать чувствительность фотоэлемента величиной $f = \frac{I_\phi}{S}$.

Для фотоэлементов с кислородно-цезиевым катодом $f = 10 \div 15$ микроампер/люмен для сурьмяно-цезиевых катодов $f = 40 \div 60$ мка/лм. Допустимые значения световых потоков имеют верхнюю границу порядка $10^{-3} - 10^{-1}$ люмена. Поэтому величины фототоков могут иметь верхнюю границу порядка микроампер. Если, например, $f = 50$ микроампер/люмен и $S = 10^{-2}$ люмена, то

$$I_\phi = fS = 50 \cdot 10^{-2} = 0,5 \text{ мка.}$$

Пусть сопротивление R_ϕ (см. рис. 2.7, а) равно 10 Мом. Тогда падение напряжения на этом сопротивлении

$$u_\phi = I_\phi R_\phi = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7 = 5 \text{ в.}$$

Это напряжение можно измерить, например, электронным вольтметром.

Зависимость фототока I_ϕ от анодного напряжения фотоэлемента u_2 при $S = \text{const}$ для вакуумного фотоэлемента показана на рис. 2.7, б. При напряжении $u_a > 50$ в фототок практически не зависит от u_a и определяется лишь величиной светового потока S .

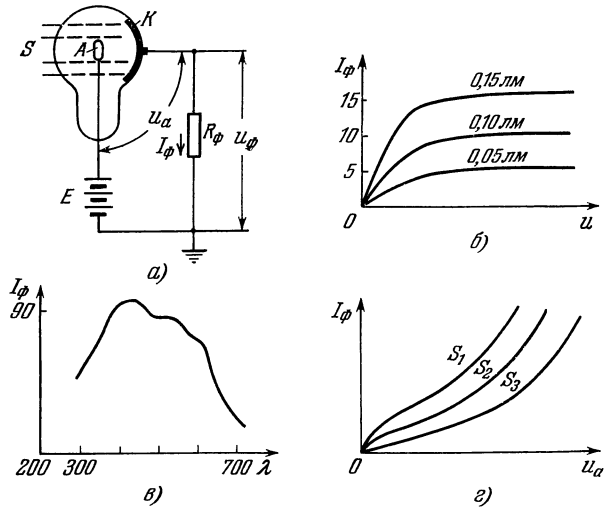


Рис. 2.7.

Зависимость фототока I_{ϕ} от длины волны света, облучающего фотоэлемент, показана для сурьмяно-цезиевого вакуумного фотоэлемента на рис. 2.7, в. Эта зависимость называется спектральной характеристикой фотоэлемента. В данном случае она похожа на спектральную характеристику чувствительности человеческого глаза. Для других типов фотоэлементов спектральная характеристика может иметь иной вид, в частности она может содержать, например, два максимума.

Если наполнить колбу инертным газом (обычно для этой цели применяется аргон), то получим газонаполненный фотоэлемент. При прохождении электронов сквозь толщу газа последний ионизируется и фототок увеличивается вследствие увеличения числа частиц-переносчиков тока в колбе. Поэтому чувствительность газонаполненных фотоэлементов выше, чем вакуумных.

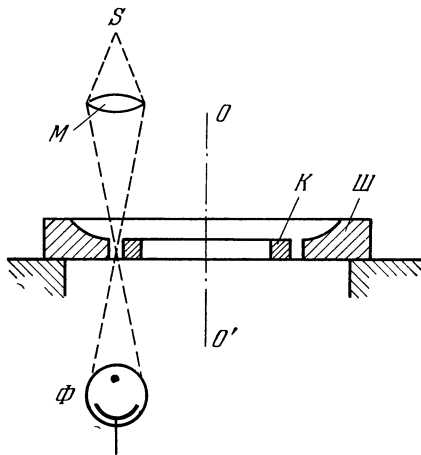


Рис. 2.8.

Ввиду этих недостатков газонаполненные фотоэлементы применяются преимущественно в тех случаях, когда требуется лишь индицировать наличие светового потока, в то время как вакуумные фотоэлементы могут служить и для измерения величины светового потока.

С помощью фотоэлементов можно построить измерительные органы для измерения и регулирования светового потока, прозрачности или мутности, цвета, температуры пламени, а также положения или перемещения тел, величины отверстия, зазора и т. д. Фотоэлектрические измерительные органы могут оказаться наиболее удобными для измерения в труднодоступных местах.

Рассмотрим в качестве примера контроль размера поршневого кольца автомобильного или авиационного двигателя (рис. 2.8). Поршневое кольцо K закладывается в шаблон III , внутренний диаметр которого равен диаметру цилиндра двигателя. Поршневое кольцо должно плотно прилегать к шаблону; зазор не должен ни в одном месте превышать малой величины, например 20 мк . Измерение зазора производится с помощью фотоэлемента. Свет от источника S фокусируется оптической системой M на дуге соприкосновения между шаблоном и кольцом (длина освещаемого участка дуги — порядка нескольких миллиметров). Если в данном месте имеется зазор, то проходящий через последний световой поток попадает на катод фотоэлемента Φ . Соединенная с фотоэлементом электронная схема дает возможность измерять величину фототока, которая тем больше, чем больше величина зазора. Прибор имеет шкалу, проградуированную в микронах зазора. Точность измере-

Она может достигать $250\text{—}300$ микроампер/люмен. Однако газонаполненные фотоэлементы имеют ряд недостатков. Напряжение u_a фотоэлемента нельзя повышать за пределы $220\text{—}240 \text{ в}$, иначе светочувствительный слой может быть разрушен бомбардировкой положительных ионов. Фототок I_{ϕ} заметно зависит от анодного напряжения u_a (см. рис. 2.7, в), а не только от светового потока. При быстром изменении освещенности проявляется инерция фотоэлемента. При периодическом изменении светового потока S с частотой выше $5000\text{—}6000 \text{ гц}$ изменение фототока I_{ϕ} заметно запаздывает и амплитуда колебаний понижается с повышением частоты при постоянстве амплитуды светового потока. Стабильность характеристики газонаполненного фотоэлемента заметно ниже, чем вакуумного.

ния ± 1 мк. Шаблон *III* может вращаться вокруг оси $O - O'$; при этом «прощупываются» все точки окружности поршневого кольца *K*. Советской промышленностью разработаны аппараты, в которых процесс контроля автоматизирован. Если зазор всюду не превышает допустимого, то кольцо автоматически направляется в канал «Годно»; если величина зазора хотя бы в одном месте превосходит допустимую, то кольцо направляется в канал «Брак».

Примером датчика напряжения может служить тахогенератор (рис. 2.9), служащий для измерения числа оборотов в минуту (или угловой скорости) вращающегося вала. Тахогенератор постоянного тока представляет собой миниатюрную машину постоянного тока, чаще всего с постоянными высокостабильными магнитами. Поэтому магнитный поток машины $\Phi = \text{const}$. Так как электродвижущая сила машины E равна $cn\Phi$, где c — постоянная величина, а n — число оборотов в минуту, то $E = \text{const} \cdot n$. Измеряя вольтметром

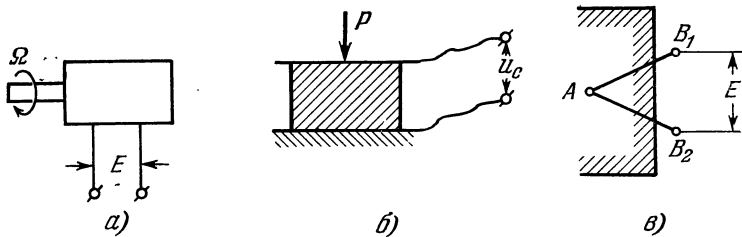


Рис. 2.9.

электродвижущую силу E , можно измерить и число оборотов n или угловую скорость $\Omega = \frac{2\pi n}{60}$. Существуют также тахогенераторы переменного тока. Другим примером датчика напряжения является пьезоэлектрический измеритель давления (рис. 2.9, б). Если вырезать определенным образом пластинку из кристалла кварца и поместить ее между двумя металлическими обкладками, то при упругой механической деформации, например сжатии пластинки, на обкладках появляются заряды, пропорциональные величине деформации, а следовательно, и действующей силы.

Если сила меняет знак (например, из сжимающей становится растягивающей), то и знаки зарядов на обкладках меняются. Количество электричества на каждой из обкладок $q = aP$, где $a = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности, P — действующая сила; величина $a = 0,21 \cdot 10^{-11}$ кулон/ньютон. Так как устройство, изображенное на рис. 2.9, б, является конденсатором, то при появлении зарядов $\pm q$ на его обкладках между ними возникает напряжение $u_c = \frac{q}{C}$, где C — емкость конденсатора. Если, например, емкость $C = 2,5$ нф и $P = 1$ кг, то

$$u_c = \frac{aP}{C} = \frac{0,21 \cdot 10^{-11} \cdot 1}{0,25 \cdot 10^{-12}} = 8,4 \text{ в.}$$

Это напряжение можно измерить электронным вольтметром. При наличии утечки между обкладками электричество будет стекать с них, вследствие чего напряжение u_c со временем будет уменьшаться. Поэтому пьезодатчики применяются лишь для измерения и регистрации быстро меняющихся давлений, например давления газа при взрыве в камере, так как за небольшое время заметной утечки заряда не произойдет. Для правильной работы схемы необходимо тщательно изолировать незаземленную обкладку (одна из обкладок обычно заземляется либо имеет фиксированный потенциал относительно земли).

На рис. 2.9, *в* изображен иной тип датчика напряжений — термопара. Последняя представляет собой два проводника из разных металлов, спаянные в точке *A*. Точки *B*₁ и *B*₂ проводников присоединяются (припаиваются) к проводам, идущим к измерительному прибору. Как известно, при нагреве спая *A* в цепи возникает электродвижущая сила *E*, являющаяся монотон-

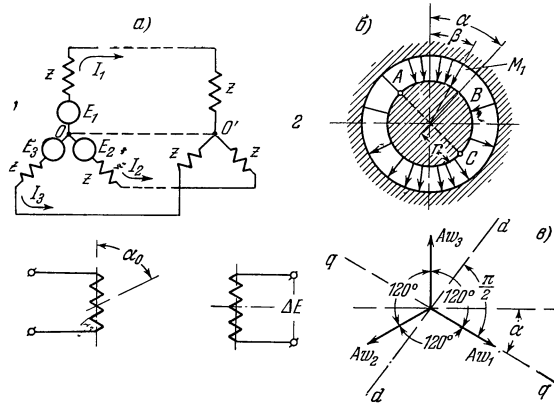


Рис. 2.10.

ной функцией разности температур горячего спая *A* и холодных спаев *B*₁ и *B*₂. Широко применяются пары материалов хромель — алюмель, железо константан, реже (при более низких температурах) медь — константан и т. д. Величина э. д. с. *E* незначительна и при разности температур в 1000° С имеет

порядок десятков милливольт. Измеряя *E*, можно тем самым измерить температуру нагретого спая термопары, помещенного, например, в печь, а следовательно, и температуру внутри печи.

Существуют также различные типы измерителей углового ускорения, являющиеся датчиками напряжений.

Датчиком напряжений является также сельсинная схема. Сельсин, как известно, является небольшой индукционной машиной — часто с трехфазной

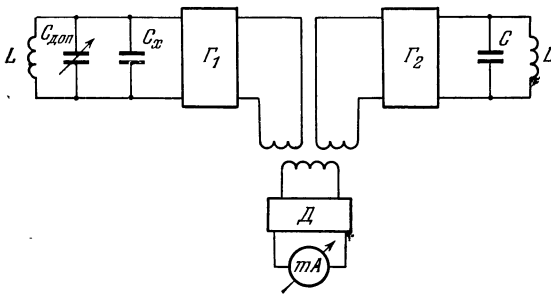


Рис. 2.11.

обмоткой на роторе и однофазной на статоре. Связь обмоток ротора с внешней сетью осуществляется через щетки. Рассмотрим работу схемы, изображенной на рис. 2.10, *а* и содержащей два сельсина 1 и 2, роторы которых соединены между собой. Статор сельсина 1 присоединен к сети переменного тока. Ось ротора сочленяется с задающей осью следящей системы. Сельсин 2 может находиться в отдалении от сельсина 1. Ось его ротора сочленяется с приемной осью. Электродвижущая сила, индуктированная в статоре сельсина 2, является выходной величиной схемы. Покажем, что она равна нулю, если углы поворота задающей оси α_0 и приемной оси α равны друг другу, и отличается от нуля, если $\alpha_0 \neq \alpha$.

На рис. 2.11 изображена схема измерительного органа, работающего на частотном принципе. Допустим, что перемещение какого-либо тела Δb преобразуется в изменение емкости конденсатора *C*_х. Последний включен

в колебательный контур генератора G_1 и частота генератора $f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ определяется, таким образом, перемещением $\Delta\delta$. Здесь C — полная емкость колебательного контура. Генератор G_2 с постоянной емкостью дает колебания частоты f_2 . Сумма колебаний генераторов G_1 и G_2 подается на детектор D ; на выходе детектора включен миллиамперметр mA . Если частоты генераторов f_1 и f_2 равны, то частота биений равна нулю и стрелка миллиамперметра неподвижна. Если же емкость C_x изменяется, то возникают биения, частота которых равна разности частот генераторов G_1 и G_2 . Измеряя частоту биений или подводя ее к нулю изменением емкости дополнительного конденсатора $C_{доп}$, можно измерить изменение емкости ΔC , а следовательно, и перемещение $\Delta\delta$ (см. формулу (4)).

Оценим чувствительность этой схемы. Изменение частоты генератора G_1 можно приближенно выразить с помощью формулы для дифференциалов

$$\Delta f = \frac{df}{dC} \Delta C = \frac{-\Delta C}{2 \cdot 2\pi \sqrt{LC}} = -\frac{f}{2} \frac{\Delta C}{C} = \frac{f}{2} \frac{\Delta\delta}{\delta}. \quad (5)$$

С помощью миллиамперметра или частотомера нетрудно индцировать частоту биений Δf , равную 1 гц. Тогда, если $f = 10^6$ гц (что соответствует длине волны генераторов $\lambda = 300$ м) и $\delta = 1$ мм, получаем из формулы (5)

$$\Delta\delta = 2\delta \frac{\Delta f}{f} = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ мм} = 0,002\mu = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

Об огромной чувствительности этой схемы можно судить хотя бы по тому, что порядок диаметра атома равен 10^{-8} см и индцируемая величина перемещения $\Delta\delta$ соответствует «слою» всего в 20 атомов. Конечно, индикация подобных величин затруднительна и может осуществляться лишь в лабораторных условиях. Небольшие изменения взаимного положения проводов колебательного контура, утечек и т. д. могут изменить частоту генераторов на величину того же порядка. Поэтому в подобных сверхчувствительных схемах требуется тщательная экранировка, жесткая конструкция, стабилизация температуры генераторов и т. д. Индикация изменений в сотые доли микрона в подобной схеме вполне возможна и достаточно надежна в лабораторных условиях.

§ 2. Управляющие органы

В простейших системах автоматического регулирования управляющий орган отсутствует и измерительный орган оказывает непосредственное воздействие на исполнительный орган. Подобные системы называются системами *прямого регулирования*. В настоящее время наибольшее распространение получили системы *непрямого регулирования*, включающие управляющий орган.

Управляющий орган должен, получая сигналы от измерительного органа, преобразовывать их в сигналы иного рода; последние в свою очередь поступают на исполнительный орган.

Преобразование сигналов, производимое управляющим органом, может заключаться в следующем.

1) *Усиление мощности сигнала*. Обычно от измерительного органа поступает небольшая мощность P_1 ; между тем для работы исполнительного органа требуется большая мощность P_2 . Задача управляющего органа в таком случае состоит в усилении мощности. Отношение

$$k_P = \frac{P_2}{P_1} > 1 \quad (1)$$

называется коэффициентом усиления по мощности. Величина k_p достигает миллионов и даже миллиардов в ряде систем автоматического регулирования. Функция усиления — одна из важнейших и иногда единственная функция управляющего органа. Поэтому простые типы управляющих органов представляют собой усилители.

2) *Преобразование формы сигнала.* Иногда для управления исполнительным органом требуется изменять фазу переменного напряжения на его входе; между тем возможен случай, когда на вход управляющего органа поступает постоянное напряжение, величина которого меняется, либо переменное напряжение постоянной фазы, амплитуда которого меняется. В этом случае задача управляющего органа состоит в том, чтобы преобразовать изменение

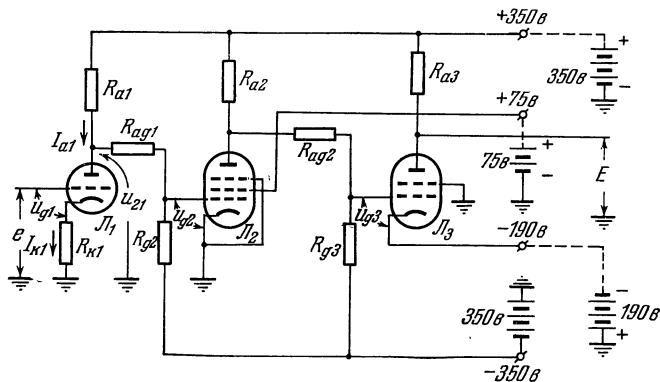


Рис. 2.12.

величины (или амплитуды) входного напряжения в изменение фазы выходного напряжения. Возможны и иные примеры преобразования формы сигнала: преобразование числа импульсов в фазу переменного напряжения, постоянного напряжения — в число импульсов в секунду и т. д.

3) *Получение дополнительных сигналов*, например, пропорциональных первой или второй производным от величины входного сигнала. Эти дополнительные сигналы нередко применяются для обеспечения устойчивости и надлежащих переходных процессов.

4) *Включение различных исполнительных органов* в зависимости от характера входного сигнала — его величины или иных его параметров.

В электрических системах автоматического регулирования наиболее часто применяются следующие типы усилителей:

- а) электронные усилители,
- б) тиратронные усилители,
- в) электромагнитные реле,
- г) магнитные усилители,
- д) электромашинные усилители.

Электронные усилители, как правило, применяются лишь для небольших выходных мощностей — до 150—200 *вт*. Входная мощность в случае, когда первый каскад усилителя работает без сеточных токов, совершенно ничтожна и нередко может не приниматься во внимание (она может быть порядка $10^{-6} \div 10^{-5}$ *вт* или еще меньше). Схемы электронных усилителей переменного тока, известные из курса радиотехники, здесь не приводятся.

Рассмотрим схему усилителя постоянного тока, изображенную на рис. 2.12. Эта схема в несколько упрощенном виде воспроизводит схему усилителя постоянного тока, применяемую в некоторых системах.

Существенным недостатком усилителей постоянного тока является так называемый дрейф выходного напряжения. Пусть входное напряжение $e = 0$ и параметры схемы так подобраны, что при этом установлено значение $E = 0$. С течением времени на выходе схемы появится некоторое напряжение, даже если входное напряжение равно нулю. Причиной дрейфа является нестабильность потенциалов в ламповых каскадах, главным образом в первом каскаде; изменения анодного потенциала u_{a1} этого каскада влияют сильнее, чем изменения анодных потенциалов последующих каскадов, так как изменения u_{a1} подвергаются наибольшему усилению, передаваясь на выход схемы.

Основные причины дрейфа потенциала u_{a1} состоят в нестабильности анодного напряжения, нестабильности напряжения накала лампы; оказывают влияние малые колебания эмиссии, эквивалентные малым колебаниям потенциала катода, а также изменения сопротивлений каскада. Обычно выходное напряжение меняется сравнительно медленно. Появление напряжения $E \neq 0$ при входном напряжении $e = 0$ можно представить себе в виде как бы результата приложения к выходу схемы некоторой эквивалентной электродвижущей силы дрейфа Δe_g . Последняя называется э. д. с. дрейфа, приведенной к входу схемы. Величина Δe_g даже в хорошо налаженных усилителях при питании через электронные стабилизаторы может достигать 2—3 милливольт.

Если даже $\Delta e_g = 1$ мв, то при коэффициенте усиления k , равном 64 000, дрейф выходного напряжения достигает 64 в.

При усилении напряжений порядка милливольт и долей их (э. д. с. термопар иногда имеют такой порядок) схемы типа рис. 2.12 становятся непригодными; необходим переход к иному типу электронного усилителя постоянного тока — усилителю с конвертированием. Входное напряжение подается на конвертор — аппарат, преобразующий постоянное напряжение в переменное; затем полученное переменное напряжение усиливается многокаскадным усилителем переменного тока и детектируется. Детектирование должно быть фазированным (фазочувствительным), т. е. при изменении знака входного напряжения на противоположный должен измениться также и знак выходного напряжения. Поскольку каскады усилителя переменного тока не передают на выход постоянную составляющую напряжения, то отпадают трудности, связанные с дрейфом.

Для преобразования постоянного напряжения в переменное может быть применена любая цепь, содержащая периодически меняющийся параметр — сопротивление, емкость, самоиндукцию или взаимоиндукцию. Возможно также применение магнитных усилителей (см. ниже). Простейший и наиболее распространенный тип конвертора — контактный, который может рассматриваться как частный случай конвертора, основанного на переменном сопротивлении.

На рис. 2.13 изображены два варианта схемы контактного конвертора. В схеме *a* первого варианта периодическое замыкание и размыкание контактов K_1 и K вибратора служит причиной появления переменной составляющей напряжения u_1 между контактами. Контакт K прикреплен к якорю электромагнита, не показанного на рисунке. Катушка электромагнита питается от сети переменного тока, вследствие чего контакт K вибрирует с большой частотой (50—200 гц) между двумя неподвижными контактами K_1 и K_2 . Форма напряжения u_1 показана на рис. 2.13, *в*. Переменная составляющая этого напряжения через переходный конденсатор C_g передается на сопротивление R_g и далее на усилитель переменного тока. Цепь R_1, C_1, R_2, C_2 служит фильтром, предохраняющим схему усилителя от попадания значительных переменных э. д. с., наведенных во входной цепи. Здесь контакт K_2 не используется.

Другой вариант изображен на рис. 2.13, б. Напряжение e через фильтр оказывается попеременно приключенным то к одной, то к другой половине первичной обмотки трансформатора Tr , причем магнитный поток Φ в сердечнике этого трансформатора при переключении контакта K меняет свое направление. Поток Φ в функции времени t показан на рис. 2.13, г. Так как поток является периодической функцией времени, то во вторичной обмотке трансформатора Tr индуцируется переменная э. д. с., которая усиливается усилителем переменного тока. Детектирование часто осуществляется с помощью второго вибратора, якорь которого движется синхронно с якорем первого вибратора (синхронная демодуляция). В схеме, изображенной на рис. 2.13, можно использовать контакт K_2 для периодического замыкания на землю выхода усилителя переменного тока, что также обеспечивает фазочувствительную демодуляцию. На выходе демодулятора ставится фильтр.

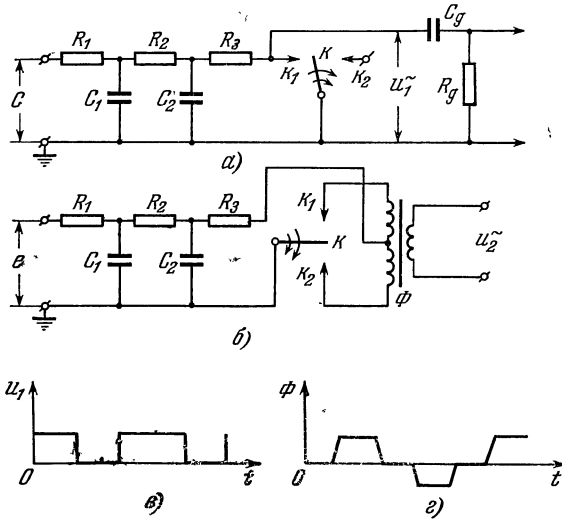


Рис. 2.13.

Для выходных мощностей от ватта до десятков киловатт применяются разнообразные типы электромагнитных реле. Принципиальная схема неполяризованного реле изображена на рис. 2.14, а. Реле представляет собой электромагнит с обмоткой w ; по цепи обмотки может проходить ток i . При достаточной величине i к сердечнику электромагнита притягивается якорь, с которым связан подвижный контакт K другой электрической цепи. Когда якорь притягивается, то контакты K и K_1 замыкаются и по второй цепи может проходить ток I . Реле является усилителем мощности; в первичной цепи — цепи обмотки w — при прохождении тока i расходуется мощность P_1 , а во вторичной цепи при прохождении тока I — мощность P_2 , значительно большая, чем P_1 (обычно большая в несколько сот раз). Таким образом, с помощью источника малой мощности P_1 можно управлять подачей на сопротивление нагрузки значительно большей мощности P_2 . Эскиз конструкции одного из типов реле (типа телефонного реле) показан на рис. 2.15.

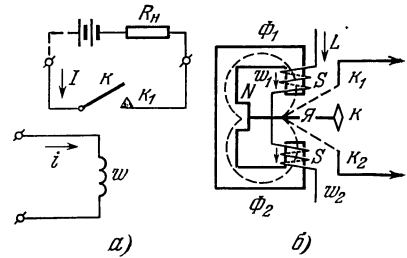


Рис. 2.14.

Здесь входная мощность $P_1 \approx 0,1 \text{ вт}$, P_2 — порядка десятков ватт. Если ток i в обмотке w превысит некоторую определенную величину i_1 , называемую током срабатывания, то электромагнитная сила, притягивающая якорь $Я$ к сердечнику, превысит силу пружины $\Pi_я$, и якорь $Я$ притянется к сердечнику. Новое положение якоря показано пунктиром на рис. 2.15, а. Рычаг P , жестко скрепленный с якорем $Я$, нажимает на контакт K на пружине Π_1 и поднимает его вверх; происходит замыкание контактов K и K_1 вторичной цепи. Процесс срабатывания реле этого типа длится 10—20 мсек.

Если постепенно увеличивать ток i от нуля, то вначале цепь контактов реле разомкнута и ток I равен нулю. При $i = i_1$ контакты замыкаются и ток I скачком возрастает до некоторого значения I_0 . При $i > i_1$ контакты остаются замкнутыми, причем ток I , конечно, не зависит от i . Если теперь уменьшать ток i , то при $i = i_1$ якорь еще не перейдет в прежнее положение (так как сила притяжения больше, чем при непритянутом якоре) и ток I не прекратится. Отпускание реле происходит лишь при некотором токе $i_2 < i_1$, причем для $i < i_2$ контакты разомкнуты и ток I равен нулю. Величина i_2 носит название тока отпускания реле.

Таким образом, характеристика реле (см. рис. 2.15, б) является неоднозначной. Коэффициент

$$\lambda = \frac{i_2}{i_1} \quad (2)$$

называется коэффициентом возврата реле. Его величина может достигать в телефонных реле до 0,5—0,6.

Вместо двух контактов K и K_1 (рис. 2.15, а) может быть применена контактная группа, состоящая из нескольких пар нормально замкнутых или нормально разомкнутых контактов.

На рис. 2.14, б изображена схема другого типа электромагнитного реле — поляризованного. В данном типе реле магнитный поток Φ_1 создается постоянным магнитом и обмоткой w_1 , по которой протекает ток i , а поток Φ_2 — постоянным магнитом и обмоткой w_2 . Поток, создаваемый обмоткой w_1 ,

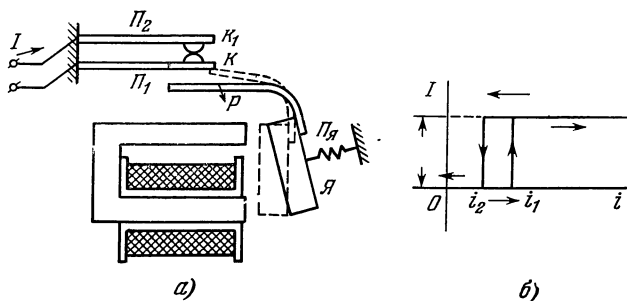


Рис. 2.15.

при определенном направлении совпадает с потоком Φ_1 и увеличивает его; при том же направлении тока i поток, созданный обмоткой w_2 , ослабляет поток Φ_2 . Поэтому сила притяжения якоря $Я$ к верхнему полюсу S становится больше, чем сила притяжения к нижнему, и якорь, притягиваясь кверху, замыкает подвижный контакт K с контактом K_1 . Если же ток меняет свое направление, то поток Φ_2 становится больше, чем Φ_1 и подвижный контакт K замыкается с другим контактом K_2 . Имеются такие типы поляризованных реле, в которых при $i = 0$ контакт K находится в среднем, нейтральном положении. В других типах контакт K может находиться лишь в одном из двух положений, показанных пунктиром на рис. 2.14, б.

Входные мощности P_1 маломощных реле достигают десятых и даже сотых долей милливатта, а время срабатывания реле — нескольких миллисекунд. Для наиболее мощных реле — так называемых контакторов — время срабатывания может измеряться секундами, а выходная мощность P_2 достигает десятков, а в наиболее мощных типах — сотен киловатт.

Наличие контакта, подвергаемого эрозии и коррозии, запылению, возможность оплавления контакта дугой и т. д., является недостатком электромагнитных реле, понижающим их надежность.

За последние годы значительно расширилась область применения магнитных усилителей, в которых отсутствуют контакты. Эти усилители применяются при выходных мощностях от единиц ватт до сотен киловатт. Работа этих усилителей основана на нелинейности кривой намагничивания ферромагнитного материала.

Зависимость индукции B в стали от ампервитков на сантиметр aw изображается кривой намагничивания, показанной на рис. 2.16, а. При больших значениях ампервитков кривая сильно отклоняется от прямой линии, показанной пунктиром; последняя почти совпадает с кривой при малых значениях ампервитков. Зона значительного отклонения от прямой линии называется зоной насыщения. Величина

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{B}{aw} \frac{1}{0,4\pi},$$

как известно, называется проницаемостью. Проницаемость при каждом значении ампервитков пропорциональна тангенсу угла (см. рис. 2.16, а, так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{aw}$). Зависимость μ от aw приведена на рис. 2.16, б, из которой видно, что проницаемость μ уменьшается с увеличением ампервитков. Индуктивность L катушки со сталью пропорциональна величине проницаемости

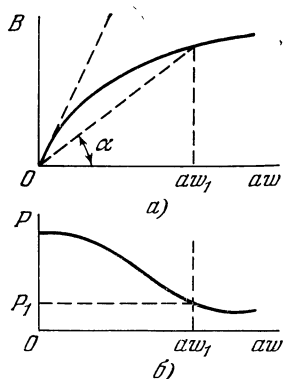


Рис. 2.16.

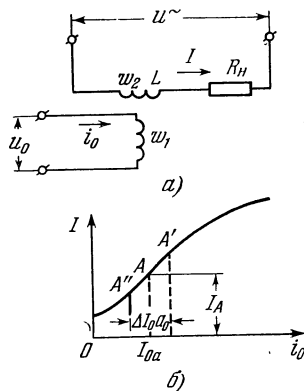


Рис. 2.17.

стали μ . Поэтому, если найти способ изменять число ампервитков, действующих на магнитную цепь катушки, то таким образом можно будет изменять ее индуктивность L .

На рис. 2.17, а показана схема, в которой осуществлено указанным выше образом изменение индуктивности L . Катушка со стальным сердечником, имеющая w_2 витков, включена в цепь переменного тока частоты ω последовательно с сопротивлением нагрузки R_n . По цепи протекает ток I , вследствие чего на сопротивлении R_n рассеивается мощность $P_2 = I^2 R_n$.

На магнитную цепь катушки L действуют еще и ампервитки дополнительной катушки с числом витков w_1 — катушки подмагничивания, по которой протекает *постоянный* ток i_0 (от источника напряжения u_0). Схема в целом отнюдь не является трансформатором; во избежание недоразумения катушка подмагничивания w_1 изображена на рис. 2.17, а, перпендикулярной к катушке переменного тока w_2 .

Вследствие подмагничивания постоянными ампервитками $i_0 w_1$ стальной сердечник насыщается. Индуктивность L катушки w_2 с увеличением тока i_0 уменьшается; поэтому растет ток I , эффективная величина которого (если пренебречь высшими гармониками тока I) может быть выражена формулой

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R + R_n)^2 + (\omega L)^2}}, \quad (3)$$

где R — активное сопротивление катушки w_2 , U — эффективное значение напряжения. Зависимость эффективного значения переменного тока I от величины постоянного тока подмагничивания i_0 показана на рис. 2.17, б.

Затрачивая мощность P_1 в обмотке подмагничивания w_1 , можно управлять значительно ббльшей мощностью P_2 , рассеиваемой в сопротивлении нагрузки R_H . Если выполнить сердечник магнитного усилителя не из обычной трансформаторной стали, а из пермаллоя (сплав из никеля, алюминия и железа), то коэффициент усиления по мощности может быть доведен до нескольких тысяч. Ток I в нагрузке может изменяться от минимального значения I_{\min} до максимального $I_{\max} \approx (8 \div 10) I_{\min}$, вследствие чего мощность $P_2 = I^2 R_H$, потребляемая нагрузкой, регулируется в пределах от $(P_2)_{\min}$ до $(P_2)_{\max} = (64 \div 100) (P_2)_{\min}$.

Конструкция магнитного усилителя весьма проста и не содержит никаких подвижных деталей. Два типа конструкции изображены на рис. 2.18. В конструкции типа рис. 2.18, а на среднем стержне трехстержневого сердечника намотана катушка подмагничивания, а на двух крайних стержнях — две половины катушки переменного тока $w_2/2$, соединяемые последовательно или параллельно. При обходе замкнутого пути по магнитной цепи от одного крайнего стержня к другому ампервитки обеих катушек переменного тока должны складываться. Переменный поток Φ циркулирует по крайним стержням, не заходя в средний стержень; последнее нетрудно усмотреть, если начертить отдельно переменные потоки, получающиеся в среднем стержне

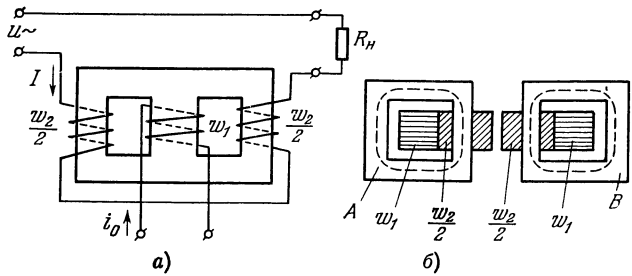


Рис. 2.18.

от каждой из катушек переменного тока, — они вычитаются друг из друга, и результирующий переменный поток в среднем стержне равен нулю. Отсутствие переменного потока в среднем стержне нужно для того, чтобы в катушке подмагничивания w_1 не наводилась э. д. с. переменного тока (последняя может вызвать пробой изоляции катушки подмагничивания либо значительный переменный ток в цепи катушки, что нежелательно или иногда вовсе недопустимо). Между тем постоянный поток Φ_{\pm} , создаваемый обмоткой подмагничивания w_1 , выходя из среднего стержня и разветвляясь, обходит крайние стержни и, следовательно, подмагничивает их, что и требуется для работы магнитного усилителя. Конструкция типа рис. 2.18, б состоит из двух отдельных сердечников A и B, на которых намотаны катушки переменного тока $w_2/2$. Эти сердечники помещены рядом, и поверх катушек переменного тока намотана одна общая катушка подмагничивания w_1 . Переменный ток в катушках $w_2/2$ имеет такое направление, что в каждый момент времени потоки этих катушек Φ_1 и Φ_2 , сцепленные с катушкой w_1 , направлены в противоположные стороны. Поэтому общий переменный магнитный поток, охватываемый катушкой подмагничивания, равен нулю, и в ней не наводится переменная э. д. с. Напряжение U_H можно выпрямить и подать на следующий каскад магнитного усилителя. Подобные многокаскадные магнитные усилители имеют большой коэффициент усиления по мощности k_p . Один каскад усилителя с сердечником из обычной трансформаторной стали имеет коэффициент усиления по мощности порядка 20—50, а с сердечником из пермаллоя — значительно больший. Существуют усилители, у которых в одном каскаде величина k_p достигает нескольких тысяч. Существенным недостатком магнитного усилителя является его инерционность. Действительно, обмотка подмагничивания обычно имеет заметную индуктивность L_0 . Если сопротивление сигнальной обмотки R_0 , то ее постоянная времени $T_0 = L_0/R_0$.

Чем больше коэффициент усиления, тем обычно больше и постоянная времени, которая колеблется от 0,2—1 сек в маломощных до 3—4 сек в мощных усилителях. В специальных маломощных магнитных усилителях удается, однако, достичь постоянных времени в сотые и даже тысячные доли секунды.

Наиболее широкое применение получили электромашинные усилители. Простейшим типом электромашинного усилителя является обычный генератор независимого возбуждения постоянного тока (рис. 2.19).

Входное напряжение u_v подается на обмотку возбуждения, по которой протекает ток $I_v = \frac{u_v}{R_v}$ (где R_v — сопротивление обмотки). Ампервитки возбуждения обуславливают возникновение на клеммах якоря напряжения

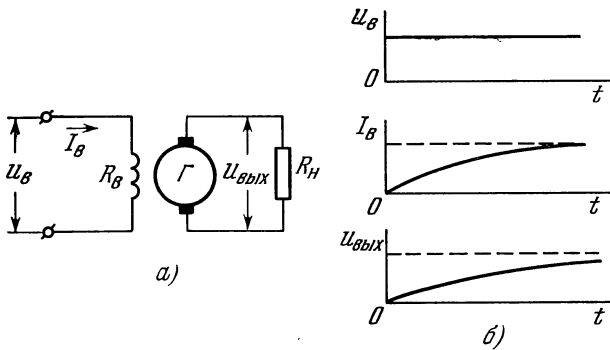


Рис. 2.19.

$u_{вых}$, которое является выходным и приложено к сопротивлению нагрузки R_n . Допустим, что мощность, поглощаемая обмоткой возбуждения, равна 5 *вт*, а мощность, получаемая при этом нагрузкой, равна 100 *вт*. тогда коэффициент усиления по мощности

$$k_p = \frac{100}{5} = 20.$$

Якорь электромашинного усилителя должен вращаться с помощью двигателя, не показанного на рис. 2.19. Энергия последнего преобразуется

в электрическую энергию, поглощаемую нагрузкой.

Электромашинный усилитель обладает инерционностью. Главным источником инерционности является обмотка возбуждения, постоянная времени которой может доходить в мощных усилителях до нескольких секунд.

Если внезапно подать на обмотку возбуждения напряжение (верхний график на рис. 2.19, б), то ток I_v не сразу станет равным своему установившемуся значению u_v/R_v , а будет постепенно нарастать до этого значения. Выходное напряжение $u_{вых}$ (см. рис. 2.19, б) будет при этом также постепенно нарастать, что и указывает на инерционность усилителя. В быстродействующих регуляторах большая инерционность звеньев недопустима. Кроме того, инерционность в звеньях системы регулирования, как будет показано в последующих главах, может стать источником неустойчивости и колебаний в системе регулирования; последние обычно недопустимы.

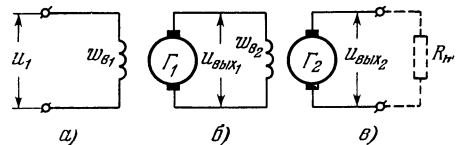


Рис. 2.20.

Если выходная мощность какого-либо электромашинного усилителя оказывается недостаточной для исполнительного органа, то выходное напряжение $u_{вых1}$ усилителя можно подать на обмотку возбуждения другого, более мощного электромашинного усилителя. Таким образом, получается двухкаскадный электромашинный усилитель (рис. 2.20).

Пусть, например, коэффициент усиления по мощности каждого каскада равен 100 (что достижимо в машине постоянного тока); тогда первый каскад усилит входную мощность в 100 раз, второй — еще в 100 раз, и общий коэф-

коэффициент усиления по мощности окажется равным

$$k_p = 100 \times 100 = 10\,000.$$

Недостатком двухкаскадного электромашинного усилителя является относительно большая инерционность, так как в нем присутствуют две обмотки возбуждения (на двух машинах). Кроме того, инерционность двух звеньев нередко более опасна для устойчивости системы, чем инерционность одного звена. Инерционность усилителя определяется в наибольшей мере обмоткой возбуждения второго, более мощного каскада.

§ 3. Исполнительные органы

Имеется большое количество типов исполнительных органов, осуществляющих непосредственное воздействие на объект регулирования. Наиболее широкое распространение получили исполнительные органы в виде двигателей, называемые иногда сервомоторами и применяемые для приведения в движение частей объекта регулирования, открывания клапанов, вентилялей и т. д. Применяются электрические, а также пневматические и гидравлические двигатели.

В случаях, когда требуется переменная скорость исполнительного органа, в качестве сервомоторов применяются следующие основные типы двигателей: 1) двигатели постоянного тока независимого возбуждения с постоянной величиной тока в обмотке возбуждения, управляемые изменением напряжения якоря; 2) двигатели постоянного тока независимого возбуждения с постоянной величиной напряжения на якоре или тока якоря, управляемые изменением тока возбуждения; 3) серийные двигатели постоянного тока с двумя обмотками возбуждения; 4) двухфазные асинхронные двигатели; 5) электромагнитные муфты.

Значительно реже применяются коллекторные двигатели переменного тока. Трехфазные асинхронные двигатели обычно находят применение в тех случаях, когда требуется постоянная скорость движения. Они применяются также как приводы электромагнитных муфт.

Рассмотрим схемы исполнительных органов первой группы, которые можно питать через контакты реле от электронных (при малой мощности), тиратронных, магнитных и электромашинных усилителей.

Схемы соединения с тиратронными усилителями показаны на рис. 2.21. На рис. 2.21, а двухполупериодный тиратронный выпрямитель, составленный по той же схеме, что и обычный электронный выпрямитель, присоединен к цепи якоря двигателя \mathcal{D} . Обмотка возбуждения w_b приключена к источнику постоянного напряжения. В течение первого полупериода анодное напряжение тиратрона T_1 положительно и по цепи тиратрон T_1 — якорь \mathcal{D} — проходит ток I_1 . В течение второго полупериода ток I_2 проходит через

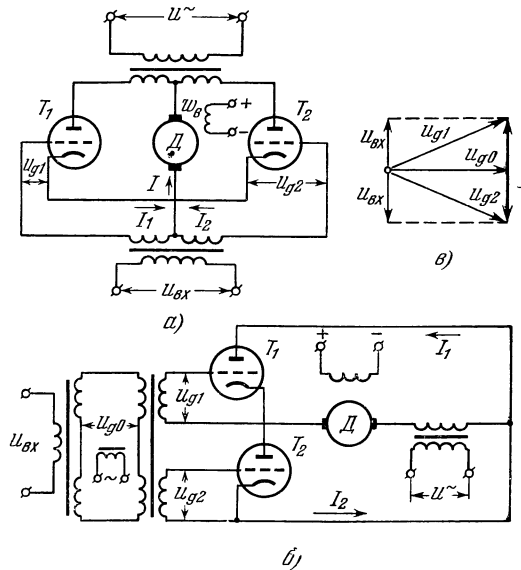


Рис. 2.21.

анодную цепь второго тиратрона T_2 и цепь якоря \mathcal{D} . Так как тиратрон является управляемым выпрямителем, то, изменяя фазы напряжений u_{g1} и u_{g2} , можно сдвигать момент зажигания (иначе угол зажигания) тиратронов T_1 и T_2 от начала полупериода к его концу. При этом постоянная составляющая тока якоря $I_{ср}$ будет изменяться от максимального значения до нуля. Если при некотором заданном значении противо-э. д. с. E якоря двигателя, пропорциональной скорости, уменьшить угол зажигания и тем самым увеличить ток $I_{ср}$, то увеличится вращающий момент двигателя, и якорь начнет разгоняться. При этом противо-э. д. с. увеличится, вследствие чего ток $I_{ср}$ уменьшится. Равновесие наступит тогда, когда противо-э. д. с. будет поддерживать ток на уровне, при котором движущий момент уравновесит момент сопротивления. Следовательно, регулируя угол зажигания, можно изменять скорость двигателя от малых величин до номинального значения. Регулируя таким же устройством ток возбуждения в обмотке w_v , можно увеличить скорость за пределы номинального значения в 3—4 раза.

В схеме, изображенной на рис. 2.21, а, ток проходит через якорь двигателя лишь в одном направлении, и направление вращения поэтому не может быть изменено. В схеме, показанной на рис. 2.21, б, тиратроны включены

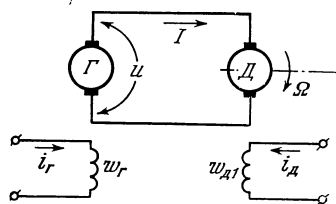


Рис. 2.22.

так, что возможно протекание тока I в обоих направлениях. Когда зажжен тиратрон T_1 , то ток $I = I_1$ протекает в одном направлении. В следующем полупериоде зажигается тиратрон T_2 , и ток $I = I_2$ идет в обратном направлении. Для управления схемой фазы напряжений u_{g1} и u_{g2} на сетках должны сдвигаться одновременно в противоположных направлениях. Если угол зажигания тиратрона T_1 мал, а тиратрона T_2 велик, ток I_1 превысит ток I_2 , и результирующая постоянная составляющая тока $I = I_1 - I_2$ имеет то же направление, что и ток I_1 . Если, наоборот, угол зажигания тиратрона T_1 велик, а тиратрона T_2 мал, то постоянная составляющая тока I имеет то же направление, что и ток I_2 . Поэтому в данной схеме можно плавно регулировать скорость от нуля до максимальной величины и управлять также знаком скорости.

Из рис. 2.21, б видно, что векторы напряжений u_{g1} и u_{g2} могут быть выражены формулами

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{g1} &= \bar{u}_{g0} + \bar{u}_{вх}, \\ \bar{u}_{g2} &= \bar{u}_{g0} - \bar{u}_{вх}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вспомогательное напряжение \bar{u}_{g0} постоянно по амплитуде; вектор этого напряжения сдвинут на 90° по отношению к вектору входного напряжения $\bar{u}_{вх}$ (см. рис. 2.21, в). Отсюда следует, что при увеличении $\bar{u}_{вх}$ фазы напряжений u_{g1} и u_{g2} поворачиваются в противоположных направлениях. Если $\bar{u}_{вх} = 0$, то фазы напряжений \bar{u}_{g1} и \bar{u}_{g2} одинаковы; следовательно, постоянные составляющие токов I_1 и I_2 равны, и результирующая постоянная составляющая тока $I = I_1 - I_2$ равна нулю. При отклонении напряжения $\bar{u}_{вх}$ от нуля скорость двигателя, как указано выше, можно плавно регулировать в обе стороны от нуля.

Для больших мощностей (выше 5 квт) применяют почти исключительно электромашинные усилители. На рис. 2.22 показана широко распространенная схема генератор — двигатель. Скорость двигателя регулируется изменением напряжения u якоря генератора постоянного тока. Изменение u достигается путем изменения тока возбуждения i_r в обмотке возбуждения w_r генератора. Таким образом, можно регулировать скорость двигателя.

вниз от номинального значения в 10—20 раз. Если еще регулировать ток возбуждения i_d двигателя в обмотке возбуждения w_d , то можно *повысить* скорость в 3—4 раза по отношению к номинальной. Направление вращения изменяется при изменении полярности напряжения u генератора G ; последнее достигается изменением полярности тока возбуждения i_r .

В качестве примера применения серийного двигателя рассмотрим принципиальную схему автомата — гирорудевого, направляющего корабль по заранее установленному курсу (рис. 2.23). Ролик C , угловое положение которого соответствует угловому положению компаса (можно представить себе ролик помещенным на одну ось с компасом и сдвинутым относительно него на постоянный угол), скользит по двум контактным полукольцам A и B с изолирующими промежутками D и E . Полукольца неподвижны относительно корпуса корабля и устанавливаются так, что ось DOE параллельна продольной оси корабля. Пока корабль движется по заданному курсу, направление которого «указывается» продольной осью ролика OC , последний занимает показанное пунктиром положение: так как при этом ролик находится на изолирующей промежутке D , то контакт его с каким-либо из полуколец отсутствует. Поэтому цепь двигателя разомкнута. Если же корабль отклонится от курса, то угловое положение ролика C относительно корабля изменится. Ось ролика сдвинется относительно полуколец и окажется под некоторым углом α к оси DOC . Тогда ролик соприкоснется, например, с полукольцом B , и цепь двигателя — его якоря $Я$ и обмотки возбуждения w_1 — замкнется. Якорь двигателя начнет вращаться и переключать руль в такую сторону, чтобы ликвидировать отклонение корабля от курса. При повороте корабля в другую сторону ролик C соприкоснется с полукольцом A , причем замкнется цепь якоря $Я$ и второй обмотки возбуждения w_2 . Концы последней приключены так, что ее магнитный поток противоположен по направлению магнитному потоку, который при той же полярности напряжения u создавался бы обмоткой w_1 . Поэтому якорь будет в этом случае вращаться в сторону, противоположную предыдущей, и переключать руль опять-таки в сторону ликвидации отклонения корабля от заданного курса.

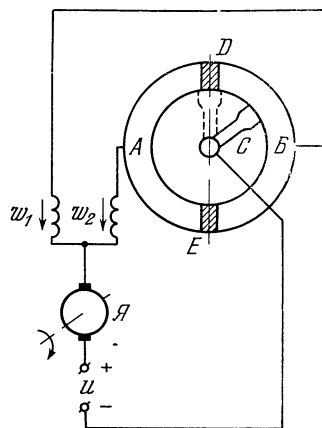


Рис. 2.23.

За последние годы значительно расширилось применение электромагнитных муфт в качестве исполнительных органов. На рис. 2.24, а изображена принципиальная схема электромагнитной муфты. На ведущем валу I , вращающемся с постоянной скоростью, укреплен ферромагнитный сердечник C и катушка K . Если последняя вращается вместе с валом, то ток в нее подается через кольца, не показанные на рисунке. Существуют конструкции, в которых катушка неподвижна. На ведомом валу II укреплен на шпонке ферромагнитный диск D . Если ток в катушке равен нулю, то диск D оттягивается пружиной, не показанной на фигуре, в крайнее правое положение. Когда ток в катушке K достигает достаточно большой величины, сила притяжения электромагнита преодолевает силу пружины и диск притягивается к сердечнику. Для предотвращения прилипания диска к сердечнику и обеспечения необходимого коэффициента трения на сердечнике укреплен немагнитная прокладка $П$, иногда кожаная. Как только диск прижмется к прокладке, силы трения станут вращать вал 2 в ту же сторону, в какую вращается вал 1 . Для питания обмотки муфты требуется мощность, значительно меньшая той, которая передается от вала 1 к валу 2 . Поэтому и постоянная времени

обмотки муфты невелика. Маломощные муфты срабатывают за 10—20 мсек и, таким образом, представляют собой быстродействующие исполнительные органы. В установившемся режиме скорости вращения валов 1 и 2 одинаковы. Однако, применяя вибрационную схему, можно заставить вал 2 вращаться с любой скоростью. Действительно, пусть обмотка муфты включена в течение малого времени τ и выключена в течение остальной части некоторого периода T , также малого, что иллюстрируется рис. 2.24, в. Пренебрежем для простоты инерцией вала 2. Изменение угла поворота α вала 2 в функции времени в таком случае изображено сплошной кривой на рис. 2.24, в. При выключенной муфте угол $\alpha = \text{const}$, если на валу 2 имеется момент сухого трения; при включенной муфте

величина α изменяется со скоростью Ω_m . Очевидно, что результирующее изменение α такое же, как если бы этот угол изменялся со «средней» скоростью

$$\Omega = \Omega_m \frac{\tau}{T}; \quad (2)$$

при этом функция $\alpha(t)$ имеет вид пунктирной прямой ABC . Очевидно, при небольших T можно принять, что скорость вращения действительно выражается формулой (2) (влияние инерции вала, сглаживающее пульсации скорости, способствует поддержанию постоянства скорости, несмотря на наличие пульсирующего момента). Изменяя величину τ/T , можно таким образом изменять скорость вала 2 от нуля до максимального значения.

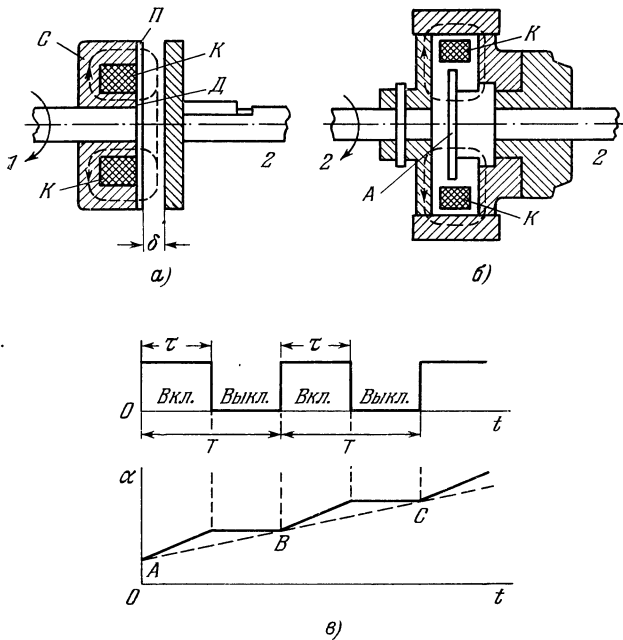


Рис. 2.24.

Существует особая разновидность муфт — магнитно-жидкостные муфты (см. рис. 2.24, б). В этой муфте диск D неподвижен относительно ведомого вала 2. Промежуток между диском D и ферромагнитным сердечником, связанным с валом 1, заполнен жидкостью, обладающей высокой магнитной проницаемостью. В качестве жидкости служит масло, содержащее суспензию из металлических частиц. Когда по обмотке муфты K протекает ток, эти частицы образуют нити, «сцепляющие» диск D и сердечник вала 1. Создается момент, вращающий ведомый вал 2. Этот момент примерно пропорционален току муфты. При рациональной конструкции такой муфты ее характеристики приближаются к характеристикам гидравлических исполнительных механизмов; постоянная времени порядка 10—20 мсек обеспечивается при моментах в десятки ньютонометров, если скорость вала не велика. При больших скоростях работа таких муфт ухудшается.

Практика автоматизации промышленности и транспорта показала эффективность применения комбинированных систем управления, в том числе, например, электрогидравлических, обладающих целым рядом достоинств. Наряду с высокой точностью, быстродействием и малыми габаритами они обладают возможностью использования всех преимуществ как электрических

методов измерения, усиления и преобразования, так и силовых гидравлических и пневматических исполнительных механизмов, развивающих наибольшие усилия на единицу площади их рабочих органов.

Остановимся подробно вначале на гидроприводе. В зависимости от вида устройства, управляющего скоростью гидропривода, исполнительные гидравлические механизмы делятся на три типа: механизмы дроссельного управления, объемного (гидростатического) и струйного. В исполнительных механизмах первого типа скорость двигателя определяется площадью поперечного сечения управляющего дросселя и перепадом давлений на нем. В механизмах объемного управления скорость определяется количеством (объемом) рабочей жидкости, подаваемой, например, насосом в единицу времени.

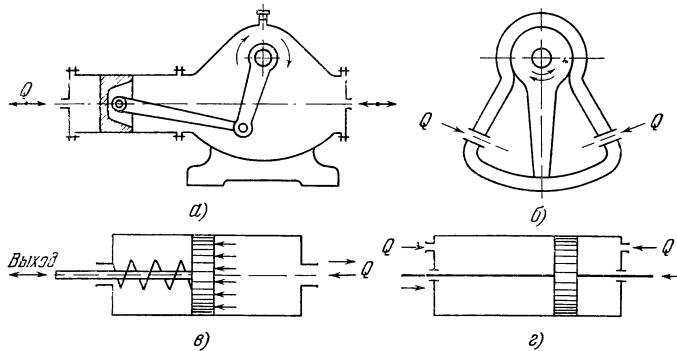


Рис. 2.25.

Наконец, в механизмах струйного типа скорость двигателя определяется отклонением конца струйной трубки и коэффициентом полезного действия преобразования кинетической энергии струи в механическую энергию движущегося поршня.

В качестве силовых двигателей исполнительных механизмов используются гидромоторы, осуществляющие непрерывное вращение выходного вала (рис. 2.25, а), моментные гидроцилиндры, поворачивающие выходной вал на ограниченный угол (рис. 2.25, б), и силовые гидроцилиндры, преобразующие энергию потока жидкости в поступательное перемещение выходного штока (рис. 2.25, в, г).

В системах автоматики преимущественно используются гидравлические исполнительные механизмы с дроссельным управлением (особенно с золотниковым управлением и, кроме того, с соплом — заслонкой), что объясняется простотой их конструкции, малыми габаритами и высоким быстродействием. Исполнительные механизмы с объемным управлением сложны в конструктивном отношении и, как правило, имеют сравнительно небольшое быстродействие. Их применение целесообразно лишь в системах управления с большими выходными мощностями порядка 5 кВт и более. Исполнительные механизмы со струйным управлением имеют очень низкий коэффициент полезного действия и поэтому также применяются довольно редко.

Из сравнительного сопоставления гидравлических элементов с другими элементами, например электрическими, можно выявить и ряд недостатков этих элементов. К таким недостаткам относятся непостоянство расходов жидкости при изменении ее температуры и вязкости, наличие потерь энергии на трение жидкости о внутренние поверхности трубопроводов и на преодоление местных сопротивлений, возможность образования внутренних и наружных утечек жидкости, возможности образования воздушных объемов вследствие проникновения воздуха в жидкость. Однако применением ряда

специальных мер можно устранить или существенно ослабить влияние перечисленных выше недостатков.

На рис. 2.26, *a* изображена принципиальная схема простейшего гидроусилителя с золотником. Шток вместе с буртиками часто называют плунжером золотника. Конструктивные исполнения золотников весьма разнообразны. Буртики и гильза составляют вместе плунжерную пару, изготавливаемую с высокой точностью. Так, радиальный зазор между буртиками и внутренней поверхностью гильзы имеет величину порядка десятка микрон и меньше. Гильза золотника имеет окна, которые расположены симметрично относительно ее продольной оси для того, чтобы уменьшить боковые усилия, действующие на буртик. От источника питания в виде насоса с двигателем жидкость под давлением подается во внутреннюю полость гильзы. Усилитель

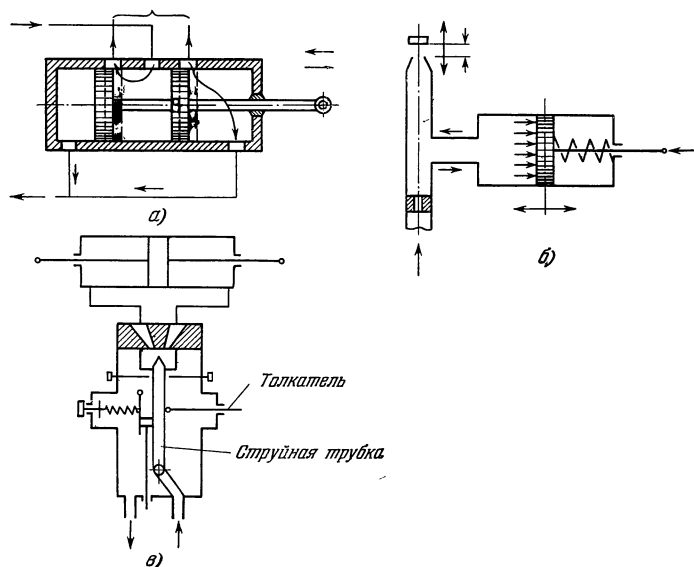


Рис. 2.26

трубопроводами соединяется с исполнительным механизмом, если последний располагается на некотором значительном расстоянии, или внутренними каналами в корпусе в случае объединения усилителя в один конструктивный узел с исполнительным механизмом. Управление всей системы осуществляется с помощью изменения положения штока золотника под действием внешнего усилия, например, от чувствительного элемента или других управляющих элементов системы. В нейтральном положении золотника буртики перекрывают окна в гильзе, и жидкость не проходит к исполнительному механизму, который остается в покое. При смещении штока буртики смещаются с нейтрального положения в ту или другую сторону, открывая окно гильзы. Рабочая жидкость устремляется к исполнительному механизму, приводя его в движение в ту или другую сторону в зависимости от смещения штока. Через другие окна рабочая жидкость поступает от исполнительного механизма на слив. Отклонение буртиков от нейтральной позиции влечет за собой изменение площади проходного сечения окон гильзы и осуществляет дросселирование потока рабочей жидкости. Поэтому усилители с золотником называются усилителями дроссельного типа. Проходные сечения, оборудованные рабочими кромками буртиков и окон, представляют собой местные сопротивления, на преодоление которых затрачивается часть энергии особенно значительная при малых открытиях окон. При постоянном давлении питания усилителя

и постоянной нагрузке на исполнительный механизм расход рабочей жидкости через золотник и, следовательно, скорость перемещения исполнительного механизма зависят от величины открывания окон в гильзе. Чем больше открытие, тем больше расход Q рабочей жидкости, поступающей к рабочему механизму. Для обычных непрофилированных золотников при малых смещениях δ плунжера расход Q прямо пропорционален δ , т. е.

$$Q = k\delta.$$

При больших перемещениях плунжера эта зависимость нарушается и для ее сохранения применяют золотники с профилированными буртиками.

Мощность N потока рабочей жидкости на выходе усилителя определяется по формуле

$$N = p_1Q,$$

где p_1 — давление рабочей жидкости в выходном трубопроводе усилителя.

Другим видом усилителя дроссельного типа является усилитель сопло — заслонка. Этот тип усилителя имеет хорошие статические и динамические характеристики (большой коэффициент усиления, высокое быстродействие) и прост по конструкции и исполнению. Недостатком этого усилителя является неполное использование мощности потока рабочей жидкости, вызванное утечкой через сопло. На рис. 2.26, б изображена принципиальная схема гидравлического усилителя сопло-заслонка. (Кстати, схема пневматического усилителя сопло-заслонка в принципе полностью аналогична гидравлическому усилителю.) Усилитель состоит из дросселя с постоянным проходным сечением, междроссельной камеры, сопла и заслонки. Сопло и заслонка составляют вместе дроссель с переменным проходным сечением.

Рабочая жидкость подается в усилитель от источника питания под постоянным давлением p_0 , протекает через входной дроссель в дроссельную камеру, сопло и через зазор между торцом сопла и заслонкой истекает в атмосферу. Междроссельная камера соединена с рабочей полостью исполнительного механизма. Величина зазора δ зависит от положения заслонки по отношению к торцу сопла. Заслонка может перемещаться с помощью небольшого усилия внешними устройствами, например чувствительным элементом автоматической системы управления. Давление p_1 в междроссельной камере и выходной линии также изменяется, и исполнительный механизм приходит в движение. Подобно усилителю золотникового типа скорость перемещения исполнительного механизма зависит от расхода Q рабочей жидкости, поступающей к нему. При постоянном давлении питания и нагрузке на исполнительный механизм имеется определенная зависимость между расходом Q и зазором δ между соплом и управляющей заслонкой

$$Q = f(\delta).$$

Затрачивая небольшую мощность на перемещение заслонки, можно управлять значительной мощностью N потока выходной жидкости

$$N = p_1Q.$$

Рассмотрим теперь принцип работы усилителя со струйной трубкой, схема которого изображена на рис. 2.26, в. Основу усилителя со струйной трубкой составляет сама струйная трубка, которая одним своим концом закрепляется на поворотной оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, что дает возможность струйной трубке поворачиваться на некоторый относительно большой угол в плоскости чертежа. К этому же концу трубки подводится рабочая жидкость под постоянным давлением от насоса. На другом конце трубки имеется конический насадок, из которого свободно вытекает струя рабочей жидкости. Поворот струйной трубки вокруг оси

осуществляется под действием толкателя, упирающегося в струйную трубку сбоку. Толкатель перемещается под действием небольшого усилия со стороны чувствительного элемента. Иногда струйная трубка находится под воздействием одновременно нескольких элементов, воспринимающих изменения нескольких регулируемых параметров. С противоположной толкателю стороны в струйную трубку упирается также сбоку пружина задатчика, которая уравнивает усилие со стороны толкателя через промежуточный рычаг. Начальное натяжение пружины при помощи винта изменяется, что обеспечивает изменение задающего воздействия.

Напротив конического насадка струйной трубки, из которого вытекает рабочая жидкость, расположена плитка с двумя приемными соплами, входные окна которых находятся в плоскости вращения трубки. Приемные сопла выполнены в виде конусов, расширяющихся в направлении от входных окон. Сопла соединены трубопроводами с исполнительным механизмом.

Действие гидравлического усилителя со струйной трубкой основано на преобразовании кинетической энергии движущейся струи жидкости в потенциальную энергию давления. Рабо-

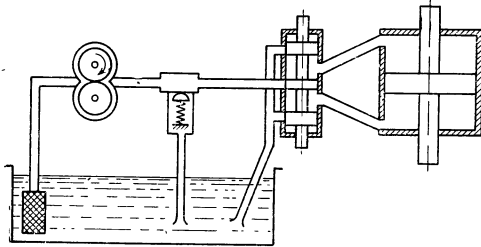


Рис. 2.27.

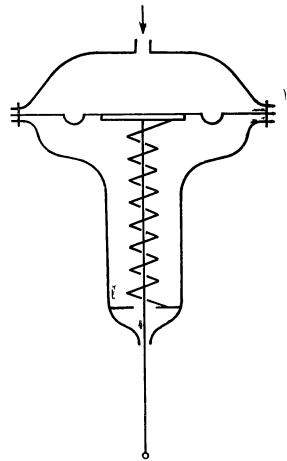


Рис. 2.28.

чая жидкость подается в струйную трубку под давлением $60\text{--}80 \text{ н/см}^2$. При нейтральном положении струйной трубки струя рабочей жидкости симметрична относительно приемных окон и создает в них одинаковое давление, исполнительный механизм не движется; под действием разности усилий, приложенных к трубке со стороны чувствительного элемента и пружины задатчика, струйная трубка отклоняется от среднего (нейтрального) положения. При этом в одном из приемных окон давление возрастает, а в другом падает. Под действием разности этих давлений исполнительный механизм приходит в движение. Аналогично гидравлическим усилителям дроссельного типа и типа сопло—заслонка расход рабочей жидкости Q при постоянной загрузке на исполнительный механизм и постоянное давление жидкости в питающем трубопроводе определяются однозначно смещением δ оси струйной трубки. Преобразование кинетической энергии струи в потенциальную энергию давления в приемных окнах, а затем снова преобразование потенциальной энергии в кинетическую связано со значительными потерями мощности и, следовательно, к значительному снижению коэффициента полезного действия. Низкий к. п. д. является одним из недостатков струйных усилителей.

Одна из распространенных схем питания гидравлических систем управления изображена на рис. 2.27.

Пневматические устройства автоматики также нашли себе широкое применение. Особенно большое значение имеют для регулирования различного рода пожарно- и взрывоопасных технологических процессов, что обу-

словило их широкое использование в химической и нефте-газодобывающей промышленности. Большинство пневматических исполнительных механизмов являются исполнительными механизмами мембранного типа. Основной частью мембранного исполнительного механизма является мембранный привод (рис. 2.28). Главными частями мембранного привода является мембрана из резины, опорный металлический диск, пружина и шток. При увеличении давления воздуха в воздушной камере мембрана прогибается, заставляя двигаться шток, связанный с регулирующим органом. При этом пружина мембранного привода сжимается. При уменьшении давления воздуха, поступающего в воздушную камеру, шток под действием сжатой пружины совершает обратный ход. Обычно полное перемещение штока регулирующего мембранного привода происходит при изменении давления воздуха от 1,5 до $9,5 \text{ н/см}^2$ с отклонением $\pm 0,5 \text{ н/см}^2$.

Мембранный привод имеет линейную характеристику зависимости линейного перемещения штока от давления воздуха в воздушной камере.

§ 4. Примеры систем регулирования. Регулятор температуры

В предыдущих параграфах были рассмотрены принципы построения и отдельные детали устройств автоматического регулирования. В этой главе рассмотрены примеры систем регулирования.

В приведенных ниже примерах отсутствует подробное описание объектов регулирования и основное внимание уделено регуляторам. Поэтому и заголовки параграфов содержат слово «регулятор». Однако для описания работы

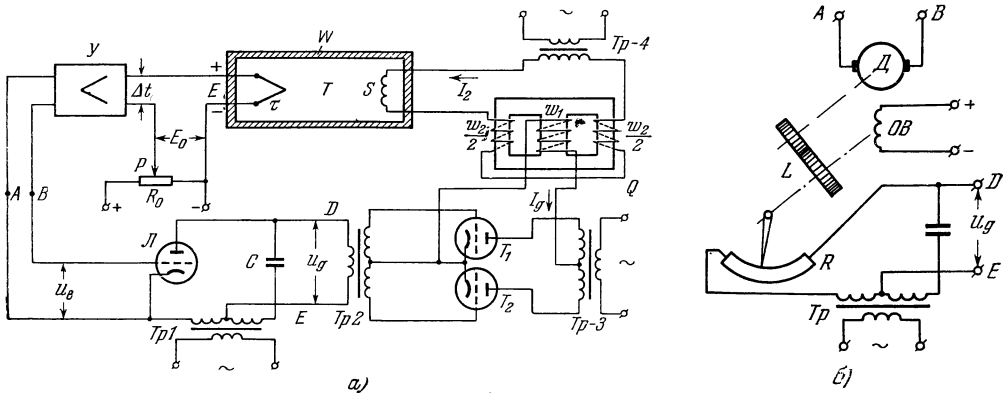


Рис. 2.29.

системы в целом необходимо также знание некоторых свойств и характеристик объектов регулирования. Рассмотрим один из широко распространенных видов регуляторов — регулятор температуры.

Задача построения автоматического регулятора температуры может быть решена различными способами. В частности, можно осуществить как статический, так и астатический регуляторы. На рис. 2.29, а изображена схема статического регулятора температуры печи \tilde{W} с заданной уставкой. Уставка требуемой температуры осуществляется при помощи перемещения движка P потенциометра R_0 . Для нагрева печи служит нагревательная спираль S . Температура T печи измеряется термопарой τ . Термоэлектродвижущая сила E термопары сравнивается с установленным значением напряжения E_0 . Разность $\Delta E = E_0 - E$ этих напряжений подается на вход усилителя постоянного тока с конвертированием; схема подобного усилителя рассмотрена в предыдущем параграфе (см. рис. 2.12). Выходное напряжение

u_B усилителя поступает на сетку лампы L , включенной вместе с конденсатором C в схему фазового моста. Выходное напряжение мостика (между точками D и E) через трансформатор $Tr-2$ подается на сетки тиратронов T_1 и T_2 , включенных по схеме двухполупериодного выпрямления. Постоянная составляющая тока I_g , величина которой зависит от фазы напряжения u_g проходит по обмотке подмагничивания w_1 магнитного усилителя Q . Обмотка переменного тока w_2 магнитного усилителя разделена на две половины, помещенные на крайних стержнях магнитопровода. Эта обмотка включена последовательно с нагревательной спиралью S и питается от сети переменного тока через трансформатор $Tr-4$. На температуру печи оказывают влияние различные факторы: температура и теплоемкость материала или деталей, подлежащих нагреву, закалке или плавке, помещенных в печь; напряжение сети, питающей нагревательную спираль; температура внешнего помещения и т. д. Однако независимо от изменения любых факторов температура печи поддерживается примерно равной некоторому установленному значению. Если, например, температура внешнего помещения T_a уменьшается, то благодаря увеличению потерь тепла сквозь стенки печи уменьшается и температура T печи; следовательно, и термоэлектродвижущая сила E термопары τ также уменьшается. Поэтому разность ΔE , равная $E_0 - E$, увеличивается. Увеличивается и напряжение $u_B = k_1 \Delta E$, где k_1 — коэффициент усиления усилителя. При увеличении u_B проводимость лампы L также увеличится, фаза напряжения u_g приблизится к фазе напряжения сети, являющейся одновременно фазой анодных напряжений тиратронов T_1 и T_2 . В результате ток тиратронов I_B увеличится, что уменьшит индуктивность дросселя насыщения Q и увеличит, следовательно, переменный ток I_a в цепи нагревательной спирали S . Поэтому приток энергии к печи увеличится, что не позволит температуре T заметно уменьшиться. Все же некоторое уменьшение температуры T , хотя и очень малое, произойдет, как это имеет место в любой статической системе регулирования. Действительно, при уменьшении температуры T_a внешнего помещения для поддержания постоянства температуры T необходим увеличенный приток энергии в печь, т. е. увеличение тока I_a . Последнее, однако, возможно лишь при увеличении тока I_g . Однако ток I_g может увеличиться лишь тогда, когда уменьшится фаза напряжения u_g , а последнее является результатом изменения u_B . Следовательно, должна измениться и величина ΔE . Так как $E_0 = \text{const}$, то должна измениться э. д. с. E , зависящая от температуры T . Значит, и температура T не может остаться строго постоянной, а должна несколько измениться. Однако если коэффициенты усиления различных каскадов управляющего органа — электронного усилителя $У$, тиратронного усилителя и магнитного усилителя — велики, то достаточно ничтожного изменения температуры T , чтобы результатом этого изменения явилось значительное изменение тока I_a и притока энергии в печь.

В данном случае относительное изменение температуры $\Delta T/T$ тем меньше, чем больше коэффициент усиления системы.

Допустим, что при некотором номинальном значении T величина э. д. с. термопары равна 20 мв ; если требуется, чтобы статизм не превышал $0,5\%$, то и разность $\Delta E = E_0 - E$ не должна превышать $0,5\%$ от 20 мв , т. е. $0,1 \text{ мв} = 100 \text{ мкв}$. Для управления фазовым мостиком необходимо изменение сеточного напряжения Δu_B лампы L на $3-4 \text{ в}$. Избрав с запасом цифру в 5 в , получаем в результате требуемую величину коэффициента усиления усилителя

$$k_1 = \frac{\Delta u_B}{\Delta E} = \frac{5}{10^{-4}} = 50\,000.$$

Если в фазовом мостике, включенном между точками A и B , C и D (см. рис. 2.29, a), заменить лампу реостатом с приводом от электродвигателя,

изображенными на рис. 2.29, б, то получим астатический регулятор. Если разность $\Delta E = E_0 - E$ не равна нулю, то на выходе усилителя $У$ образуется напряжение u_v , воздействующее на якорь $Я$ двигателя постоянного тока. Обмотка возбуждения $ОВ$ двигателя питается от вспомогательного источника постоянного тока. Якорь двигателя, вращаясь, поворачивает через шестеренную передачу L движок реостата R .

Необходимо выбрать такое направление вращения, чтобы при $\Delta E > 0$ и $u_v > 0$ сопротивление R уменьшалось. Тогда при уменьшении по какой-либо причине температуры T по сравнению с установленным значением T_0 , при котором $E = E_0$ и $\Delta E = 0$, появляется разность $\Delta E > 0$. Сопротивление R при этом начинает уменьшаться, сдвиг фазы напряжения u_g по отношению к фазе напряжения сети уменьшится и ток I_g , а за ним и I_a увеличится. Приток энергии в печь увеличивается до тех пор, пока температура печи не придет к установленному значению T_0 . Лишь тогда ΔE обратится в нуль, якорь двигателя перестанет вращаться и схема «застынет» в положении равновесия. При увеличении температуры T по сравнению с T_0 появляется разность $\Delta E < 0$, и якорь двигателя начинает вращаться в обратную сторону. Следовательно, ток I_a уменьшится, и приток энергии в печь ослабевает до тех пор, пока температура T не возвратится к установленному значению T_0 .

Однако в любой конструкции астатической системы регулирования существует все же некоторая погрешность. На оси двигателя всегда имеется некоторый момент сухого трения. Пока разность температур $\Delta T = T_0 - T$, разность напряжения ΔE и u_v настолько малы, что вращающий момент двигателя меньше момента трения, никакого перемещения движка сопротивления R не произойдет. Приток энергии в печь не изменится, хотя будет иметь место некоторое отклонение температуры T от установленного значения T_0 . Эта неизбежная погрешность ΔT будет тем меньше, чем больше коэффициент усиления усилителя $У$. Если последний достаточно велик, то ничтожные значения разностей ΔT и ΔE вызывают большое напряжение u_v на выходе усилителя $У$, достаточное для преодоления момента трения и разгона двигателя.

§ 5. Регулятор скорости

Схема, изображенная на рис. 2.30, а, служит для регулирования скорости двигателя $Д$ постоянного тока с независимым возбуждением. Обмотка возбуждения w_d питается от вспомогательного источника постоянного напряжения. Регулирование скорости двигателя достигается путем изменения напряжения u , подаваемого на якорь двигателя от электромашинного усилителя $ЭМУ$. Требуется, чтобы скорость двигателя задавалась установкой движка потенциометра R_6 и в дальнейшем поддерживалась постоянной, несмотря на возможные колебания момента M_n нагрузки двигателя. Итак, требуется поддерживать постоянной не одну какую-либо скорость, а любую, какая только будет задана положением движка R_6 — от самых малых скоростей (например, в 10 раз меньших, чем номинальная скорость) до номинальной. Однако и в данном случае задача регулирования остается прежней: требуется поддерживать регулируемую величину равной установленному значению.

Скорость двигателя должна регулироваться в обе стороны от нуля. Если командное напряжение u_a , поступающее от командного потенциометра R_6 , положительно, то скорость должна иметь некоторое определенное направление. Если напряжение u_a отрицательно, то направление вращения должно быть противоположным предыдущему. Обмотка w_k является компенсационной обмоткой электромашинного усилителя $ЭМУ$. Кроме этой обмотки, усилитель имеет еще две обмотки: w_a — командную и w_t — сигнальную.

Измерительным органом является тахогенератор T . Напряжение u_T тахогенератора пропорционально угловой скорости Ω якоря двигателя. Якорь тахогенератора соединен механически с валом якоря двигателя D . Поэтому

$$u_T = k_T \Omega, \tag{1}$$

где k_T — коэффициент пропорциональности. Поскольку Ω — регулируемая величина, а напряжение u_T пропорционально ей, задача регулирования может быть поставлена следующим образом: обеспечить равенство u_T и некоторого установленного значения u_a .

Если сопротивление сигнальной обмотки R_T , а число витков w_T , то величина ее ампервитков

$$Aw_T = I_T w_T = \frac{u_T}{R_T} w_T = \frac{k_T w_T}{R_T} \Omega = \text{const} \cdot \Omega. \tag{2}$$

Ампервитки командной обмотки

$$Aw_a = I_a w_a = \frac{u_a}{R_a} w_a = \text{const} \cdot u_a. \tag{3}$$

Здесь I_a, R_a, w_a — соответственно ток, сопротивление и число витков командной обмотки.

Ампервитки Aw_T и Aw_a направлены навстречу друг другу, и их небольшая разность достаточна для того, чтобы создать необходимое напряжение u на выходе электромашиного усилителя. Если скорость Ω по какой-либо причине возрастает (хотя бы вследствие разгрузки двигателя), то возрастают и ампервитки Aw_T , сигнальной обмотки направленные *против* командных ампервитков Aw_a . При этом уменьшается разность ампервитков возбуждения

$$\Delta Aw = Aw_a - Aw_T, \tag{4}$$

действующая на якорь электромашиного усилителя, вследствие чего уменьшается напряжение u , что приводит в свою очередь к уменьшению скорости Ω .

Примем сначала, что момент нагрузки M_H равен нулю. Тогда при постоянном значении Ω вращающий момент двигателя также равен нулю.

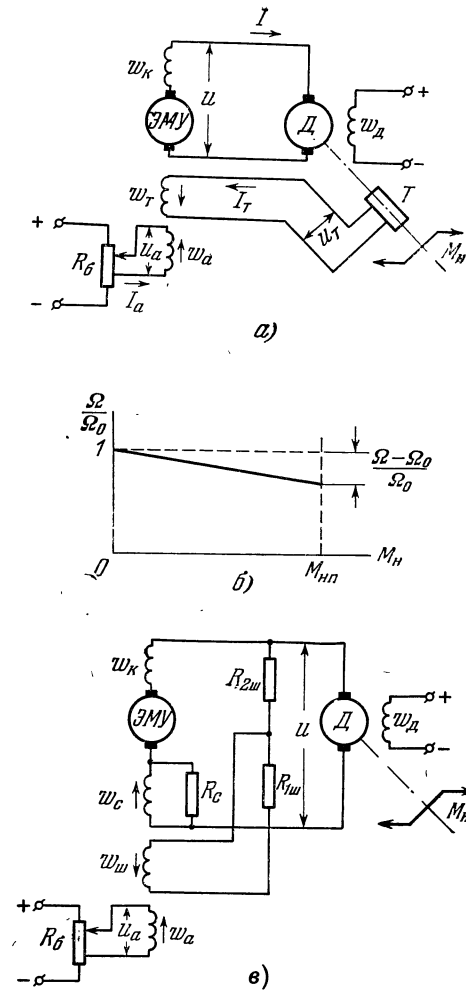


Рис. 2.30.

Следовательно, ток якоря $I = 0$; поэтому противоэлектродвижущая сила якоря двигателя

$$E_M = \lambda \Omega \tag{5}$$

(λ — коэффициент пропорциональности) равна напряжению на якоре u , т. е.

$$u = \lambda \Omega. \tag{6}$$

Примем далее, что электродвижущая сила E_T выходной цепи электромашиного усилителя, равная при нулевом токе I напряжению u , пропор-

циональна суммарным ампервиткам возбуждения ΔAw ¹⁾:

$$E_r = u = \sigma \Delta Aw = \sigma (Aw_a - Aw_r) = \sigma \left(\frac{w_a}{R_a} u_a - \frac{k_r w_r}{R_r} \Omega \right). \quad (7)$$

Сопоставляя формулы (6) и (7), можно определить скорость в режиме холостого хода Ω (индекс «нуль» проставлен, чтобы отличить эту скорость от скорости при работе под нагрузкой):

$$\Omega_0 = \frac{w_a/R_a}{\frac{\lambda}{\sigma} + \frac{k_r w_r}{R_r}} u_a = \zeta u_a, \quad (8)$$

где $\zeta = \text{const}$. Следовательно, устанавливая определенное напряжение u_a на командном потенциометре, можно получить пропорциональную ему скорость Ω_0 .

Пусть теперь момент нагрузки M_H (величина, вообще говоря, переменная) станет отличным от нуля.

Обозначим ток цепи якорей ЭМУ и двигателя D через I , сопротивление цепи якоря ЭМУ через R_r , а цепи якоря двигателя — R_m ; тогда

$$u = E_r - IR_r = E_m + IR_m. \quad (9)$$

При постоянном числе оборотов якоря двигателя справедливо равенство

$$M_d = \vartheta I = M_H, \quad (10)$$

где M_d — вращающий момент двигателя, пропорциональный току I якоря, а ϑ — коэффициент пропорциональности. Определяя отсюда I и подставляя в выражение (9), получаем с учетом формулы (5)

$$E_r = \lambda \Omega + \frac{R_r + R_m}{\vartheta} M_H \quad (11)$$

или, поскольку $E_r = \sigma \cdot \Delta Aw$ (см. формулу (7)),

$$\sigma \left(\frac{w_a}{R_a} u_a - \frac{k_r w_r}{R_r} \Omega \right) = \lambda \Omega + \frac{R_r + R_m}{\vartheta} M_H. \quad (12)$$

Из последнего выражения находим

$$\Omega = \frac{\frac{w_a}{R_a} u_a}{\frac{\lambda}{\sigma} + \frac{k_r w_r}{R_r}} - \frac{R_r + R_m}{\vartheta \left(\lambda + \frac{\sigma k_r w_r}{R_r} \right)} M_H = \zeta u_a - \eta M_H. \quad (13)$$

Сравнивая это равенство с формулой (8), получаем

$$\Omega = \Omega_0 - \eta M_H \quad (14)$$

или

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = 1 - \frac{\eta}{\zeta} \frac{M_H}{u_a}. \quad (15)$$

Итак, если величина M_H отлична от нуля, то скорость Ω уменьшается по сравнению со скоростью холостого хода Ω_0 . Выражение (14) определяет величину статизма системы (см. рис. 2.30, б).

Зависимость относительной величины скорости Ω/Ω_0 от момента нагрузки M_H (см. формулу (15)) изображена в виде наклонной прямой на рис. 2.30, б.

При максимальной величине u_a , равной $u_{a \max}$ и номинальном значении момента нагрузки M_{Hn} относительное падение скорости, согласно формуле (15), дается выражением

$$S = \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0} = \frac{\eta}{\zeta} \frac{M_{Hn}}{u_{a \max}}. \quad (16)$$

1) В действительности зависимость E_r от ΔAw нелинейна в области, где указывается насыщение магнитопровода, и неоднозначна из-за влияния гистерезиса. Однако при ориентировочных расчетах нередко линеаризуют эту зависимость.

Это относительное падение скорости и считается в данном случае мерой статизма. Обычно при регулировании скорости статизм не должен превышать (3—4)%, т. е. $0,03 \div 0,04$. Однако в некоторых типах электропривода скорость требуется поддерживать постоянной со значительно более высокой точностью, доходящей до 0,1—0,2%.

Так как номинальное значение тока

$$I_n = \frac{M_{\text{нп}}}{\phi}, \quad (17)$$

а также

$$\frac{u_a \max w_a}{R_a} = (Aw_a)_{\max}, \quad (18)$$

то формулу (16) можно переписать с учетом выражений для $U_{a \max}$ и $M_{\text{нп}}$ в следующем виде:

$$S = \frac{(R_r + R_m) R_a}{\phi w_a \sigma} \cdot \frac{M_{\text{нп}}}{u_a \max} = \frac{(R_r + R_m) I_n}{\sigma (Aw_a)_{\max}}. \quad (19)$$

Очевидно, статизм тем меньше, чем больше крутизна характеристики σ электромашиного усилителя. Пусть, например, $(Aw_a)_{\max} = 20$ ампервитков, $I_n = 10a$, $R_r + R_m = 30 \text{ ом}$. Допустим, что статизм не должен превышать значения $S = 0,03$. Тогда необходима крутизна σ , не меньшая величины

$$\sigma_{\min} = \frac{(R_r + R_m) I_n}{S (Aw_a)_{\max}} = \frac{3 \cdot 10}{0,03 \cdot 20} = 50 \text{ в/ампервитки}.$$

Схему, изображенную на рис. 2.30, а, можно изменить, обойдясь без тахогенератора. Измененная схема показана на рис. 2.30, в, она основана на том, что противоэлектродвижущая сила двигателя E_m пропорциональна скорости Ω и может служить ее мерилем. Но так как

$$E_m = u - IR_m,$$

то можно создать ампервитки, пропорциональные E_m , как разность ампервитков, пропорциональных u :

$$Aw_{\text{ш}} = k_{\text{ш}} u, \quad (20)$$

и ампервитков, пропорциональных току I :

$$Aw_c = k_c I - k_{\text{ш}} R_m I. \quad (21)$$

Коэффициент k_c должен быть равен $k_{\text{ш}} R_m$.

Если ампервитки Aw_c направлены навстречу $Aw_{\text{ш}}$, то результирующие ампервитки

$$Aw_{\text{т}} = Aw_{\text{ш}} - Aw_c = k_{\text{ш}} (u - IR_m) = k_{\text{ш}} E_m = k_{\text{ш}} \lambda \Omega \quad (22)$$

пропорциональны скорости Ω .

Серийная обмотка w_c , по которой протекает часть тока I , создает ампервитки Aw_c . Шунтовая обмотка $w_{\text{ш}}$ создает ампервитки $Aw_{\text{ш}}$, пропорциональные напряжению u . Для регулирования коэффициентов пропорциональности k_c и $k_{\text{ш}}$ служат шунт R_c и потенциометр $R_{1\text{ш}}, R_{2\text{ш}}$. В остальной схеме и ее работа те же, что и в описанном выше варианте.

Некоторым неудобством второго варианта схемы является необходимость большого количества обмоток управления электромашиного усилителя. Можно уменьшить их число и одновременно увеличить чувствительность схемы, если обмотки $w_{\text{ш}}$ и w_a , разность ампервитков которых (еще и серийные ампервитки) действует на якорь ЭМУ, заменить одной обмоткой, по которой проходит ток, пропорциональный разности командного напряжения u_a и напряжения u' , пропорционального u (рис. 2.31).

Действительно, если сопротивление обмотки $w_{аш}$ равно $R_{аш}$, то сумма ампервитков в схеме, изображенной на рис. 2.31, равна величине

$$\sum Aw = I_{аш}w_{аш} + Aw_c = \frac{u_a - u'}{R_{аш}} w_{аш} + Ik_c = \frac{u_a w_{аш}}{R_{аш}} - k_{ш}U + k_c I, \quad (23)$$

где

$$k_{ш} = \frac{w_{аш}}{R_{аш}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (24)$$

Если так подобрать шунт R_c , чтобы удовлетворялось равенство

$$k_c = k_{ш}R_m, \quad (25)$$

то

$$\sum Aw = \frac{w_{аш}}{R_{аш}} u_a - k_{ш}(u - IR_m) = \frac{w_{аш}}{R_{аш}} u_a - k_{ш}\lambda\Omega. \quad (26)$$

Итак, на якорь ЭМУ действует опять-таки разность ампервитков Aw_a , пропорциональных командному напряжению u_a , и ампервитков Aw_t , пропорциональных регулируемой скорости Ω . При достаточно большом значении крутизны характеристики ЭМУ значения $\sum Aw$ будут мало отличаться от нуля; следовательно, как и в предыдущих вариантах, тем самым обеспечивается примерная пропорциональность между u_a и Ω .

Схема, изображенная на рис. 2.31, применялась в качестве привода турели тяжелого пулемета на бомбардировщике. Передвигая маленький движок потенциометра R_6 , можно заставить механизм (вес до 0,5 т) поворачиваться с различной скоростью и следить за целью.

§ 6. Регулятор положения

В различных областях техники требуется регулировать положение какого-либо тела в соответствии с заданной уставкой. Например, в автоматическом потенциометре, устанавливаемом для записи кривой изменения температуры электропечи, координата X регистрирующего пера должна быть пропорциональной напряжению E термопары, помещенной в печи. В этом случае напряжение E , которое может произвольно изменяться, является установленной величиной, а все устройство работает, как регулятор положения X по установленному значению $X_0 = \alpha E$, где α — коэффициент пропорциональности. Таким образом, автоматический потенциометр является примером следящей системы. Если как установленное значение, так и регулируемая величина являются линейными или угловыми координатами каких-либо тел, то подобную систему иногда называют следящим приводом. Примером следящих систем являются также системы управления орудиями, антеннами радиолокационных станций и т. д. Во всех этих системах регулируемой величиной является положение.

В качестве примера следящего привода рассмотрим схему электрического копировально-фрезерного полуавтомата.

Следящий привод в копировально-фрезерном станке устанавливает положение фрезы, обрабатывающей деталь, в соответствии с координатой копира. В качестве копира можно применить готовую «эталонную» деталь. Можно изготовлять копиры из разнообразных материалов: дерева, гипса, картона и т. п.

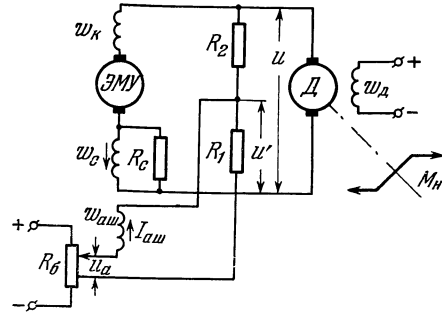


Рис. 2.31.

Принцип устройства копировально-фрезерного станка показан на рис. 2.32. Обрабатываемое изделие I закрепляется на плите $П$. На той же плите закрепляется копир K , контур которого должна воспроизвести деталь. В процессе обработки плита $П$ вместе с изделием и копиром перемещается, например, вправо. Эта горизонтальная подача производится двигателем $Д_2$ и обычно называется задающей. Положение фрезы Φ и связанного механически с ней (неподвижного относительно держателя фрезы) корпуса измерительного органа $ИО$ изменяется двигателем $Д_1$, осуществляющим вертикальную так называемую следящую подачу.

Измерительный орган $ИО$ связан с копировальным пальцем $КП$, положение которого относительно $ИО$ может в некоторых пределах изменяться. Наконечник копировального пальца $КП$ прижимается к копиру. Давление пальца на копир невелико (150—200 г) и не может деформировать последний. Таким образом, координата копировального пальца определяется высотой L_0

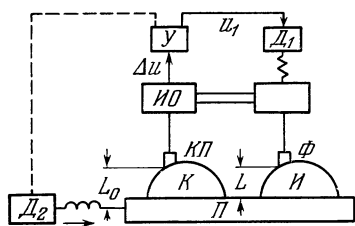


Рис. 2.32.

копира. Если высота нижнего конца фрезы L равна L_0 , то выходное направление u_1 измерительного органа равно нулю. Если же L не равно L_0 , то величина u_1 не равна нулю.

Усиленная усилителем $У$ величина напряжения подается на двигатель $Д_1$, якорь которого начинает вращаться. Следовательно, возникает вертикальная подача фрезы Φ , сводящая рассогласование $L_0 - L$ к нулю (или к малой величине).

По мере перемещения плиты величина L_0 изменяется соответственно контуру копира K . Следящий привод заставляет координату фрезы L воспроизводить координату копира. В таком случае контур обработанного изделия должен быть таким же, как и контур копира. Если обрабатываемый профиль имеет плавные переходы и угол, составленный осью копировального прибора и касательной к профилю, лежит в пределах $45-90^\circ$, то задающая подача может иметь постоянную скорость. В более сложных случаях обработки скорость задающей подачи целесообразно изменять при изменении скорости следящей подачи, с тем чтобы результирующая скорость перемещения фрезы по профилю была постоянна. Мы не будем, однако, рассматривать эти более сложные случаи.

На рис. 2.33 показана схема механизма копировального пальца. Копировальный палец укреплен на шпинделе 1. Внутри шпинделя имеется цилиндрическая полость 2, оканчивающаяся коническим гнездом. Шпиндель этой полостью лежит на шарике 3, жестко связанном тремя винтами с корпусом измерительного органа $ИО$ (см. рис. 2.32). Благодаря шарниру шпиндель прибора при давлении на копировальный палец в осевом направлении может перемещаться вдоль оси копировального прибора и при давлении в радиальном направлении — качаться вокруг его центра (рис. 2.33, б). Второй шарнир, преобразующий радиальные отклонения копировального пальца в осевые перемещения якоря датчика, состоит из гнезда 4, имеющего коническое отверстие с углом 90° на конце шпинделя, шарика 5 и такого же гнезда 6 на планке 7, подвешенной на шарнире (рис. 2.33, а). При отклонениях шпинделя от оси копировального прибора под действием силы, приложенной к копировальному пальцу, гнездо 4 смещается относительно гнезда 6. Зажатый между этими гнездами шарик 5 расклинивает их и отклоняет планку 7. При приложении к копировальному пальцу усилия под углом (рис. 2.33, а) шпиндель одновременно перемещается вдоль и отклоняется в сторону: шарнир суммирует оба перемещения и вновь отклоняет планку 7.

Допустим, что при равенстве координаты L фрезы (и измерительного органа, механически с ней связанного) и координаты L_0 копировального пальца планка 7 горизонтальна. Если теперь L_0 увеличится, то копировальный палец отклонит планку 7 вверх при любом наклоне контура копира. Если же L_0 окажется меньше L , то планка 7 отклонится книзу. На рис. 2.34 показана упрощенная принципиальная схема следящего привода. Планка 7 связана с якорем 8 дифференциального трансформатора, состоящего из двух частей 9 и 10. Каждая из этих частей представляет собой Ш-образный сердечник, на среднем стержне которого имеются две обмотки — первичная и вторичная. Первичные обмотки трансформаторов 9 и 10 соединены последовательно и приключены к сети переменного тока. Вторичные обмотки включены навстречу и присоединены к входу усилителя $У$. Сердечники трансформаторов 9 и 10 укреплены в измерительном органе ИО (рис. 2.32) и их координата однозначно связана с координатой L фрезы. Если $L_0 = L$, то якорь 8 находится посередине между сердечниками 9 и 10. В этом случае напряжения вторичных обмоток трансформаторов равны друг другу и их разность Δu равна нулю. Если же разность $l = L_0 - L$ не равна нулю, то и Δu не равно нулю, причем амплитуда Δu примерно пропорциональна величине $l = L_0 - L$, а фаза изменяется на противоположную (т. е. на 180°), когда знак l меняется на противоположный.

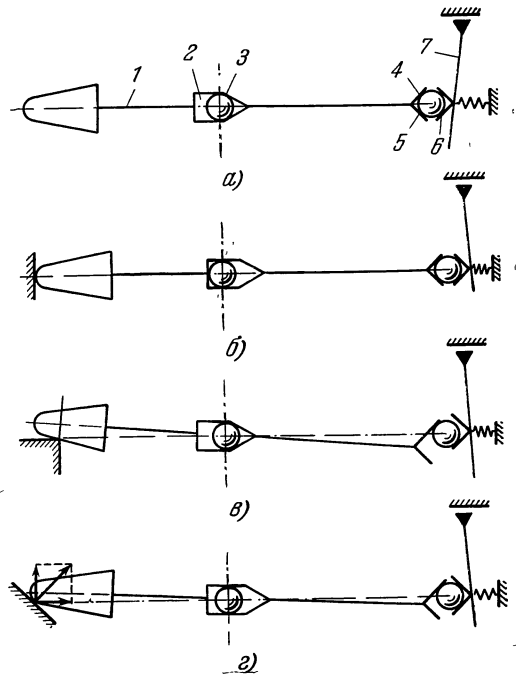


Рис. 2.33.

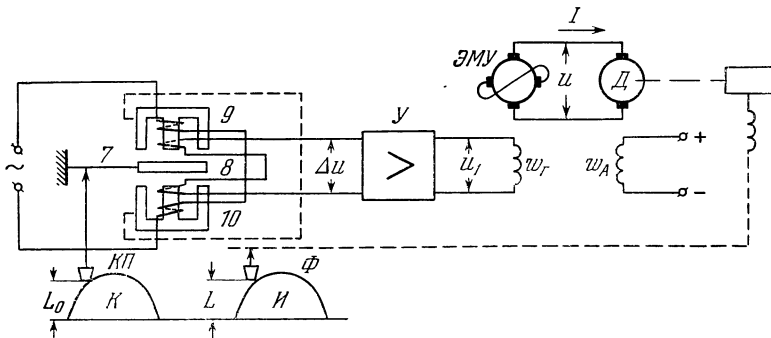


Рис. 2.34.

Напряжение Δu подается на усилитель $У$, где усиливается, а также выпрямляется, причем знак выпрямленного напряжения u_1 изменяется на противоположный, когда фаза напряжения Δu изменяется на 180° . Такое выпрямление называют фазированным или фазочувствительным. Подобные схемы рассмотрены в предыдущих параграфах. Напряжение u_1 подключено

к сигнальной обмотке w_r электромашинного усилителя ЭМУ; выходное напряжение u последнего питает цепь якоря двигателя D_1 независимого возбуждения. Обмотка возбуждения w_d двигателя D приключена к вспомогательному источнику постоянного напряжения. Якорь двигателя D_1 , вращаясь, осуществляет следящую подачу фрезы Φ и связанного с ней корпуса измерительного органа ИО.

Положим

$$l = L_0 - L. \quad (1)$$

Величина Δu , а следовательно и u_1 , пропорциональна l . Положим

$$u_1 = k_1 l, \quad (2)$$

где $k_1 = \text{const}$ ¹⁾.

Если сопротивление сигнальной обмотки электромашинного усилителя ЭМУ равно R_1 , а число витков — w_r , то ампервитки этой обмотки

$$Aw = \frac{u_1}{R_1} w_r = \frac{k_1 w_r}{R_1} l. \quad (3)$$

Примем э. д. с. выходной цепи ЭМУ E_r пропорциональной сигнальным ампервиткам Aw :

$$E_r = \sigma Aw = \frac{\sigma k_1 w_r}{R_1} l. \quad (4)$$

Для простоты пренебрежем моментом нагрузки двигателя D_1 . Пусть R — сопротивление цепи якорей, E_m — противо-э. д. с. двигателя. Ток $I = \frac{E_1 - E_m}{R}$ в цепи якоря в установившемся состоянии должен быть равен нулю, чтобы вращающий момент $M_{вр} = \Phi I$ был равен нулю. Следовательно, величина э. д. с. E_r должна уравниваться противоэлектродвижущей силой якоря двигателя $E_m = \lambda \Omega$, т. е. должно осуществляться равенство

$$\lambda \Omega = E_r. \quad (5)$$

Отсюда находим значение скорости вращения Ω якоря двигателя, учитывая равенство (4):

$$\Omega = \frac{E_r}{\lambda} = \frac{\sigma k_1 w_r}{R_1 \lambda} l. \quad (6)$$

Скорость следящей подачи dL/dt пропорциональна Ω :

$$\frac{dL}{dt} = k_2 \Omega = \frac{\sigma k_1 k_2 w_r}{R_1 \lambda} l = \xi l, \quad (7)$$

где буквой ξ обозначена постоянная величина:

$$\xi = \frac{k_1 k_2 \sigma w_r}{R_1 \lambda}. \quad (8)$$

Величина ξ называется коэффициентом усиления системы. Ее значение выяснится ниже. Отметим пока лишь, что размерность ξ равна сек^{-1} , что вытекает из равенства (7).

Рассмотрим два случая: обработку горизонтального профиля и наклонного (рис. 2.35, а и б). Пусть в первом случае (рис. 2.35, а) контур копира является горизонтальной прямой. Тогда $L_0 = \text{const}$, и задача следящего

¹⁾ Следует указать, что, как видно из рис. 2.33, при разных формах профиля отклонение планки 7, а следовательно, и величина u_1 будут несколько различны при одном и том же l . Следовательно, k_1 несколько меняется; мы будем, однако, пренебрегать этим изменением коэффициента k_1 и считать его постоянной величиной

привода состоит в том, чтобы уравнивать величины L и L_0 . Если величина $l = L_0 - L$ не равна нулю, то возникает следящая подача, причем величина dL/dt , согласно равенству (7), не равна нулю до тех пор, пока l не обратится в нуль. Следовательно, в данном случае теоретически погрешность l ликвидируется полностью и обработка происходит без всякой установившейся ошибки. На самом деле момент сухого трения на валу двигателя D_1 заставит следящую подачу прекратиться тогда, когда рассогласование l еще не дойдет до нуля. Действительно, если l станет достаточно малым, то малая величина E_r см. (4) создаст при $\Omega = 0$ малый ток в цепи якоря $l = \frac{E_r}{R}$, вследствие чего вращающий момент двигателя $M_{вр} = \phi I$ может оказаться меньше момента трения $M_{тр}$, приведенного к валу двигателя. Тогда якорь остановится и величина L станет постоянной, отличающейся от L_0 . Условие $M_{вр} \leq M_{тр}$ в развернутом виде дает $\phi I \ll M_{тр}$, или, согласно (4),

$$\phi \frac{E_r}{R} = \frac{\phi}{R} \frac{\sigma k_1 \omega_r}{R_1} l \ll M_{тр}, \quad (9)$$

откуда можно узнать нескомпенсированную величину l . Если, однако, момент трения мал, то и получающаяся установившаяся погрешность пренебрежимо мала. Если система рассматривается как линейная, т. е. не учитывается момент трения $M_{тр}$, то установившаяся погрешность оказывается равной нулю. Следовательно, данная система является астатической.

Однако не следует думать, что всегда в астатической системе установившаяся погрешность равна нулю. Рассмотрим второй случай (см. рис. 2.35, б), когда контур копира является наклонной прямой. Если угол наклона по отношению к горизонтальному направлению равен α , то при скорости задающей подачи v_0 скорость изменения величины L_0 равна

$$\frac{dL_0}{dt} = v_0 \operatorname{tg} \alpha = A. \quad (10)$$

Очевидно, в установившемся состоянии такой же должна быть и скорость следящей подачи dL/dt .

Однако из равенства (7) видно, что для этого требуется наличие рассогласования

$$l = \frac{1}{\xi} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{\xi} \frac{dL_0}{dt}.$$

Поэтому в данном случае установившаяся погрешность не равна нулю.

$$l = \frac{1}{\xi} \frac{dL_0}{dt} = \frac{A}{\xi}. \quad (11)$$

Чем больше ξ , тем меньше установившаяся погрешность l . Чтобы сделать последнюю достаточно малой, нужно избрать величину ξ достаточно большой.

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\alpha = 45^\circ$ и

$$v_0 = 180 \text{ мм/мин} = 3 \text{ мм/сек.}$$

Тогда

$$A = v_0 \operatorname{tg} \alpha = 3 \text{ мм/сек} \cdot 1 = 3 \text{ мм/сек.}$$

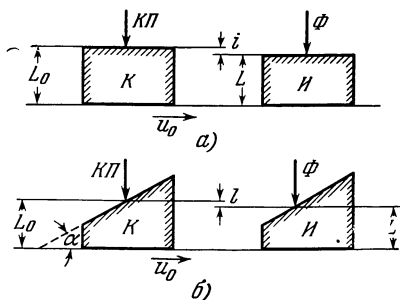


Рис. 2.35.

Если коэффициент усиления $\xi = 300 \text{ сек}^{-1}$, то установившаяся погрешность

$$l = \frac{A}{\xi} = \frac{3}{300} \frac{\text{мм/сек}}{\text{сек}^{-1}} = 0,01 \text{ мм}$$

В большинстве случаев подобная величина погрешности считается достаточно малой.

§ 7. Регулятор курса

В настоящее время регуляторы курса (гирорुлевые на кораблях, автопилоты на самолетах и т. д.) получили широкое распространение. Задача этих регуляторов заключается в том, чтобы вести корабль или самолет по заданному курсу. Требуемая установка курса задается угловым положением некоторой рукоятки относительно стрелки компаса. Угловое положение продольной оси корабля должно совпадать с положением рукоятки; всякое рассогласование между этими осями, возникающее из-за порывов ветра, ударов волн о корабль и т. д., должно ликвидироваться автоматическим регулятором.

Рассмотрим регулирование курса морского корабля. На рис. 2.36, а изображен вид сверху на корабль, идущий по курсу; последний задается осью OO' . В этом случае руль R не должен быть отклонен от оси корабля. Если же по какой-либо причине ось корабля AA' отклонится от оси курса OO' на угол ψ (рис. 2.36, б), то для ликвидации отклонения ψ необходимо отклонение оси

руля R на некоторый угол δ . На рис. 2.36, б показано правильное направление отклонения δ , при котором массы воды, текущей со скоростью v относительно корабля, создают результирующую силу давления P на руль R . Появляется момент $M = Pl$, поворачивающий ось корабля в сторону ликвидации рассогласования ψ . Если ось полуколец является осью корабля, а движок ролика C (рис. 2.37) соединен с осью курса (т. е. с магнитным компасом

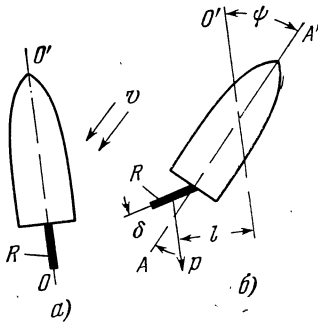


Рис. 2.36.

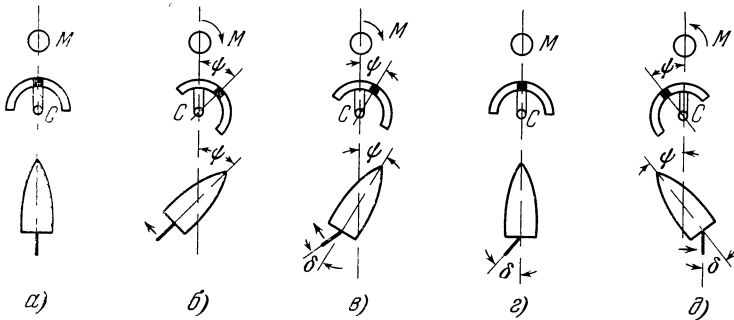


Рис. 2.37.

или гирокомпасом), то при наличии угла рассогласования ψ между этими осями якорь двигателя M начинает вращаться, переключая посредством шестеренной передачи руль. Когда угол рассогласования ψ доходит до нуля, то якорь останавливается и процесс переключки руля (т. е. изменения угла δ) прекращается. Однако в таком устройстве неизбежно возникнут качания.

Чтобы понять их причину, рассмотрим рис. 2.37. Пока ось корабля совпадает с осью курса (рис. 2.37, а), движок C не находится в контакте

ни с одним из полуколец, якорь двигателя M неподвижен, и угол отклонения руля δ равен нулю. Но если угол рассогласования ψ внезапно оказался не равным нулю (рис. 2.37, б), то движок C соприкасается с одним из полуколец, якорь двигателя начинает вращаться и поворачивать руль в направлении, указанном стрелкой. По мере перекадки руля угол δ начинает увеличиваться, вследствие чего рассогласование ψ уменьшается (рис. 2.37, в). Наконец, когда угол рассогласования ψ становится равным нулю (рис. 2.37, г), якорь двигателя останавливается и перекадка руля прекращается. Однако как раз в этот момент угол отклонения руля δ достигает наибольшей величины, и, следовательно, на корабль действует момент, продолжающий поворачивать его в направлении, указанном стрелкой. Поэтому корабль, поворачиваясь дальше, создает вновь угол рассогласования ψ уже в другую сторону (рис. 2.37, д). Этот угол увеличивается до тех пор, пока якорь двигателя M , вращаясь уже в обратную сторону, не выберет весь образовавшийся угол δ .

После этого получим картину, подобную изображенной на рис. 2.37, б, но с отклонением ψ противоположного знака. Очевидно, опять начинается поворот корабля в сторону уменьшения ψ , опять ось корабля перейдет через требуемое положение в противоположную сторону и т. д. Опыт показывает, что возникают незатухающие колебания оси корабля довольно большой величины, что совершенно недопустимо.

Из изложенного выше следует, что качания в данном случае происходят потому, что по достижении кораблем правильного курса остается невыбранным угол поворота руля. Если бы угол поворота руля δ оставался всегда пропорциональным углу рассогласования ψ , то при достижении значения $\psi = 0$ угол δ также оказался бы равным нулю, и колебания (если не учитывать момент инерции корабля) не могли бы возникнуть.

Дополнительным устройством, так называемой жесткой обратной связью, можно достичь пропорциональности углов δ и ψ . На рис. 2.38 показан принцип этого устройства. Ось движка по-прежнему совпадает с осью курса. Однако ось полуколец уже не совпадает с продольной осью корабля. С помощью дополнительной передачи от руля ось полуколец устанавливается по отношению к оси корабля под углом $k_0\delta$, пропорциональным углу поворота руля δ , взятому с обратным знаком. Поэтому угол оси полуколец по отношению к оси курса равен

$$\alpha = \psi - k_0\delta. \quad (1)$$

Следовательно, до тех пор, пока угол α не равен нулю, якорь двигателя будет вращаться в такую сторону, чтобы привести угол α к нулю. Если руль перекадывается достаточно быстро по сравнению со скоростью поворота самого корабля, то всегда будет поддерживаться значение $\alpha \approx 0$, т. е. $\psi = k_0\delta$. Поэтому угол поворота руля теперь будет пропорционален углу рассогласования. При уменьшении угла ψ до нуля (рис. 2.37, г) угол δ также станет равным нулю, и корабль пойдет по курсу. Вследствие наличия инерции как корабля, так и следящих устройств предыдущие рассуждения оказываются приближенными. Часто в регуляторах курса оказывается необходимым устройство более сложных дополнительных связей для достижения устойчивости и требуемых характеристик процесса регулирования.

Проблема регулирования курса самолета сложнее, чем рассмотренная выше аналогичная проблема для морского корабля. В случае самолета имеется не одна, а ряд величин, связанных между собой, которые требуется регулировать.

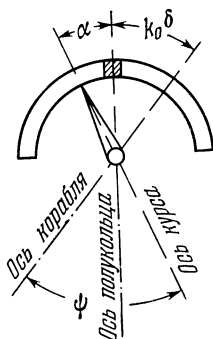


Рис. 2.38.

Для полета по заданному курсу необходимо угол рассогласования между осью курса и продольной осью самолета, так называемый угол рыскания ψ (рис. 2.39, а), поддерживать равным нулю. Необходимо также регулировать угол между продольной осью самолета и горизонтальной плоскостью — угол тангажа γ (рис. 2.39, б), угол

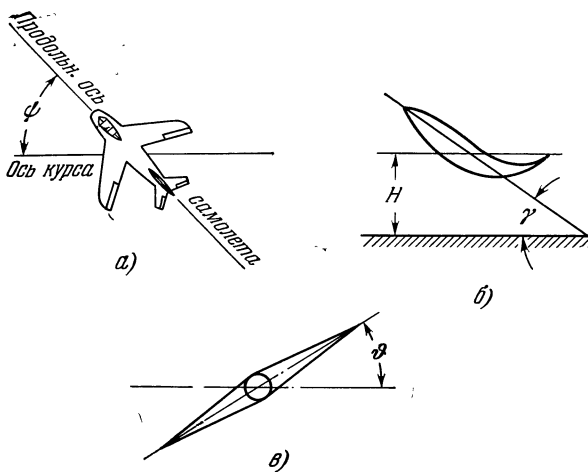


Рис. 2.39.

тангажа γ (рис. 2.39, б), угол между поперечной осью самолета и горизонтальной плоскостью — угол крена ϕ , высоту самолета H , скорость v , сектор газа и мощность, отдаваемую двигателем. Все эти величины взаимно связаны и их автоматическое регулирование производится одним автоматом — автопилотом, состоящим из связанных друг с другом частей — автомата курса, автомата крена и т. д. Однако при небольшом диапазоне изменения этих величин и некоторых дополнительных допущениях можно в первом приближении пренебречь их взаимозависимостью и рассматривать, например, систему регулирования курса отдельно.

Упрощенная принципиальная схема одного из электронных автоматов курса показана на рис. 2.40. Здесь жесткая обратная связь обеспечивается

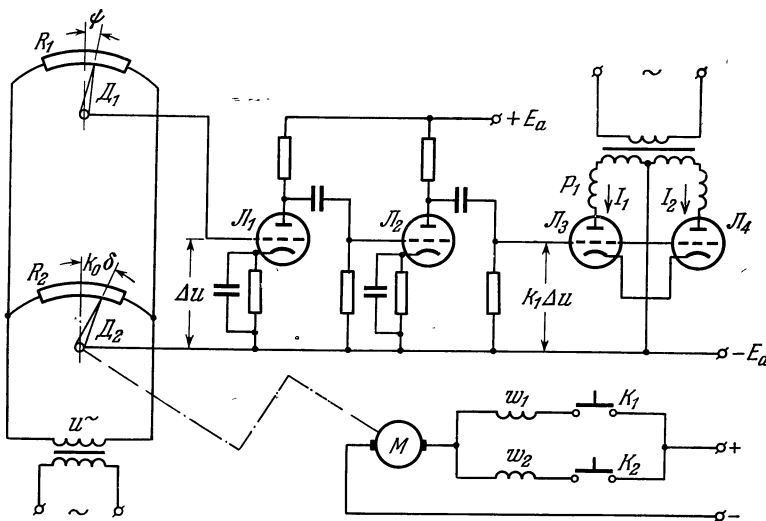


Рис. 2.40.

чисто электрическим способом. Движок D_1 связан с компасом и задает требуемый курс. Ось обмотки потенциометра R_1 совпадает с продольной осью самолета. Таким образом, угол между осями движка и обмотки потенциометра равен углу рыскания ψ . В схему измерительного мостика включен также второй потенциометр R_2 , расположенный у руля направления. Ось движка D_2 связана с осью руля передачи с передаточным числом k_0 , а ось

обмотки потенциометра R_2 — с продольной осью самолета. Поэтому угол между осями движка и обмотки равен $k_0\delta$ и пропорционален углу поворота руля от среднего положения. Амплитуда напряжения Δu на выходе измерительного мостика, как видно из схемы, изображенной на рис. 2.40, пропорциональна разности углов $\alpha = \psi - k_0\delta$. Если $\alpha \neq 0$, то и $\Delta u \neq 0$. Напряжение Δu поступает на вход двухкаскадного усилителя (лампы L_1, L_2). Пусть k_1 — коэффициент усиления усилителя. Тогда усиленное напряжение на выходе усилителя равно $k_1\Delta u$. Это напряжение подается на сетки ламп L_3 и L_4 фазированного электронного вольтметра. Если $\Delta u = 0$, то постоянные составляющие токов I_1 и I_2 , текущих в анодных цепях ламп, равны друг другу. Схема так построена, что эти токи недостаточны для срабатывания электромагнитных реле P_1 и P_2 , обмотки которых включены в анодные цепи. Если же появляется напряжение $k_1\Delta u$ и некоторой фазы, достаточно большое по амплитуде, то один из токов увеличивается (например, I_1), а другой уменьшается, и реле P_1 срабатывает, замыкая цепь двигателя M контактом K_1 . Якорь двигателя, вращаясь, поворачивает руль направления, а с ним и движок D_2 до положения $\Delta u = 0$, т. е. $\alpha = 0$; при этом осуществляется равенство $\psi = k_0\delta$. Если α имеет противоположный знак, то напряжение Δu изменяет по сравнению с предыдущим случаем фазу на противоположную. При этом срабатывает реле P_2 , замыкается контакт K_2 и якорь двигателя вращается в противоположном направлении, так как магнитный поток обмотки w_2 противоположен потоку, созданному в предыдущем случае обмоткой w_1 . Процесс работы схемы в действительности несколько сложнее, чем описано выше, так как вследствие наличия добавочного приспособления реле то замыкается, то размыкается, причем относительное время замыкания тем больше, чем больше разбаланс Δu . Поэтому средняя скорость вращения выходного вала, соединяемого с равномерно вращающимся валом двигателя посредством электромагнитной муфты, управляемой реле P_1 и P_2 , тем больше, чем больше разбаланс.

Г л а в а III

УРАВНЕНИЯ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ БЛОКИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 1. Уравнения систем автоматического регулирования

Системы автоматического регулирования обладают ярко выраженной блочностью своей структуры. Работа всей системы автоматического регулирования в целом определяется взаимодействием отдельных блоков системы. В качестве отдельных блоков в системе можно выделить, например, измерительный элемент, исполнительный механизм, регулирующий орган, сам объект и т. д.

Каждое звено системы характеризуется направленным действием. Оно имеет *вход*, на который воздействует *входной сигнал* $u(t)$, зависящий от времени t . На *выходе* звена под действием входного сигнала появляется *выходной сигнал* $x(t)$. Вообще говоря, связь между функциями $x(t)$ и $u(t)$ может задаваться нелинейным дифференциальным уравнением произвольного порядка n :

$$F(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x', x, u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u', u) = 0, \quad (1)$$

где $F(z_1, z_2, \dots, z_{n+k+2})$ — функция $n+k+2$ аргументов $z_1, z_2, \dots, z_{n+k+2}$. Задав вид функции $u(t)$ и n начальных условий $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$, можно в принципе решить это уравнение и найти ответ (*реакцию*) $x(t)$ данного звена на *входное воздействие* $u(t)$. Уравнение (1) описывает не только переходные, но и установившиеся процессы в звене. Для определения связи между установившимся значением выходной величины x_y и установившимся значением входной величины u_y достаточно приравнять все производные x и u нулю:

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} = \dots = x' = u^{(k)} = u^{(k-1)} = \dots = u' = 0. \quad (2)$$

Тогда уравнение

$$F(0, 0, \dots, 0, x_y, 0, 0, \dots, 0, u_y) = 0 \quad (3)$$

дает искомую зависимость. Разрешив это уравнение относительно x_y , получим статическую характеристику звена

$$x_y = f(u_y). \quad (4)$$

Однако исследование системы автоматического регулирования, имеющей хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением (1), будет сильно усложнено из-за трудностей, связанных с исследованием нелинейных уравнений. Поэтому для начала мы ограничимся рассмотрением лишь частного случая уравнения (1), а именно когда функция F является линейной функцией с постоянными коэффициентами по аргументам z_1, \dots, z_{n+k+2} , т. е. уравнение, связывающее входной сигнал $u(t)$ с выходным сигналом $x(t)$,

является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b_0 u^{(k)} + b_1 u^{(k-1)} + \dots + b_{k-1} u' + b_k u. \quad (5)$$

Отметим, однако, что если блок (или система), описываемый уравнением (1), работает вблизи некоторого известного режима, характеризуемого известной функцией $x_p(t)$, получающейся под действием данного входа $u_p(t)$, т. е. $x_p(t)$ есть решение уравнения

$$F(x_p^n, \dots, x_p, u_p^{(n)}, \dots, u_p) \equiv 0, \quad (6)$$

то около этого режима уравнение (1) можно *линеаризовать*, разложив функцию $F(z_1, \dots, z_{n+k+2})$ в ряд Тейлора и ограничившись лишь его линейными относительно приращений членами Δu и Δx . Таким образом, можно считать, что

$$u(t) = u_p(t) + \Delta u(t), \quad x(t) = x_p(t) + \Delta x(t). \quad (7)$$

Подставив в уравнение $x(t)$, $u(t)$ и учитывая равенство (2), получим

$$F(x_p^{(n)} + \Delta x, \dots, x_p + \Delta x, u_p^{(k)} + \Delta u^{(k)}, \dots, u_p + \Delta u) = 0. \quad (8)$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} \Delta x^{(n)} + \frac{\partial F}{\partial z_2} \Delta x^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}} \Delta x = \frac{\partial F}{\partial z_{n+2}} \Delta u^{(n)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial z_{n+k+2}} \Delta u. \quad (9)$$

Здесь производные $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ вычисляются вдоль известных кривых $x_p(t)$ и $u_p(t)$, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} [x_p(t), u_p(t)] \quad (i = 1, 2, \dots, n+k+2). \quad (10)$$

Уравнение (9) будет уже линейным дифференциальным уравнением относительно Δx , Δu и их производных, но его коэффициенты будут функциями времени. Если функция (10) мало изменяется во времени, то их приближенно можно заменить вообще постоянными величинами. После этого мы приходим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами вида (5).

Итак, будем в этой главе считать, что каждое звено системы автоматического регулирования описывается в общем случае уравнением вида (5).

§ 2. Передаточные функции

Запишем уравнение (5) предыдущего параграфа в виде

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} x + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} x + a_n x = b_0 \frac{d^k}{dt^k} u + \dots + b_k u. \quad (1)$$

Однако запись (1) неудобна, особенно когда мы будем исследовать взаимодействие отдельных звеньев системы при их соединении в различные цепи. Нам удобнее будет записывать связь между входом u и выходом x посредством некоторого оператора, осуществляющего операцию над входной величиной u , чтобы получить выходную величину x . Для этого m -ю производную $\frac{d^m}{dt^m} x$ формально заменим величиной $p^m x$ ($m = 0, 1, 2, \dots$); при этом $p^0 = 1$ означает отсутствие дифференцирования. Тогда выражение (1) можно переписать в виде

$$a_0 p^n x + \dots + a_n x = b_0 p^k u + \dots + b_k u$$

или

$$x = \frac{b_0 p^k + \dots + b_k}{a_0 p^n + \dots + a_n} u. \quad (2)$$

Обозначим

$$W(p) = \frac{b_0 p^k + \dots + b_k}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{K(p)}{D(p)}. \quad (3)$$

Таким образом, функция $W(p)$ равна отношению двух полиномов

$$K(p) = b_0 p^k + \dots + b_k, \quad D(p) = a_0 p^n + \dots + a_n.$$

Заметим, что уравнение

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4)$$

является характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1), а поэтому оно также называется *характеристическим уравнением звена*, а сам полином $D(p)$ называется *характеристическим полиномом звена*.

Функцию $W(p)$ называют *передаточной функцией* или *оператором звена*, движение которого описывается дифференциальным уравнением (1). Таким образом, формула (2) принимает такой *простой* вид:

$$x = W(p) u. \quad (5)$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{x}{u} = W(p). \quad (6)$$

В данном случае букву p не нужно понимать как некоторую переменную, которая может принимать числовые значения (как буквенные символы в формулах обычной алгебры; например, формула $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ справедлива при любых числовых значениях a и b). Здесь букву p нужно понимать как *символ* или *обозначение* операции дифференцирования (соответственно выражение p^m как обозначение m -кратного дифференцирования). Правда, в характеристическом уравнении (4) буква p снова играет роль обычной переменной, которая принимает числовые значения. Единственным оправданием такого «странного» приема является то, что между уравнением (1) и соотношением (5) имеется взаимно однозначное соответствие. По заданному уравнению типа (1) однозначно записывается соотношение (5) и, наоборот, если между функциями u и x задано соотношение в виде (5), то можно немедленно написать дифференциальное уравнение типа (1), смысл которого нам совершенно ясен. В дальнейшем будет дано другое обоснование и интерпретация соотношения (5) на основании преобразования Лапласа.

Запись соотношений между входом u и выходом x в виде (5) дает значительное преимущество при исследовании систем. В замкнутых системах автоматического регулирования имеется сложное взаимодействие блоков: выход одного блока служит входом другого и т. д. Использование понятия оператора звена позволяет без труда находить связи между любыми координатами всей системы на основании знания операторов соответствующих звеньев, составляющих систему.

В заключение рассмотрим в общем виде весьма важное понятие коэффициента передачи в *установившемся* режиме K для блока с произвольной передаточной функцией $W(p)$. Если на вход блока подать *постоянный* входной сигнал $u = u_y$, то или выходной сигнал $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к некоторому установившемуся значению $x_y = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ (тогда по определению

$$k = \frac{x_y}{u_y}$$

и на основании (3) или (1) с учетом равенства нулю производных от u и x

$$k = \frac{b_k}{a_0} = \frac{K(0)}{D(0)} = W(0)$$

или, если $W(p)$ содержит интегрирующие звенья, выходной сигнал будет неограниченно нарастать ($W(0) = \infty$). Предположим, что $W(p)$ содержит m интегрирующих звеньев. Тогда ее можно представить в виде

$$W(p) = \frac{1}{p^m} W_1(p),$$

где выделена передаточная функция $W_1(p)$, не содержащая интегрирующих звеньев. Поэтому $W_1(0) \neq \infty$, и по определению будем считать, что коэффициент передачи k равен

$$k = W_1(0) = p^m W(p) \big|_{p=0}.$$

§ 3. Элементарные звенья

Характерные черты процессов регулирования, например показанных на рис. 1.11, совершенно не зависят ни от физической природы регулируемой величины, ни от физической природы аппаратуры, из которой построена система регулирования. Величина x на рис. 1.7 может быть отклонением напряжения от номинального значения, либо рассогласованием осей в следующем приводе, либо отклонением температуры в электродвигателе от номинального значения и т. д. В данном случае нас не интересует физическая природа величины x ; важен лишь характер процесса регулирования, который может

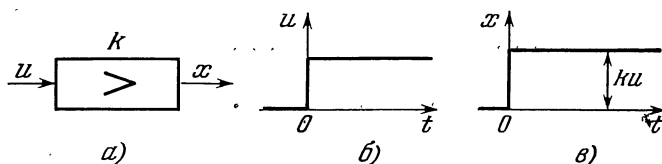


Рис. 3.1.

быть одинаковым у регулятора напряжения и регулятора температуры и различным у двух различных типов регуляторов напряжения. Нужно считать две системы с динамической точки зрения неразличимыми, если они имеют одинаковые процессы регулирования, вне зависимости от их физической природы, технической реализации и т. д. (так, в одной из систем исполнительный орган может быть, например, электрическим, а в другой — пневматическим).

Итак, при изучении систем регулирования с динамической точки зрения в теории регулирования отвлекаются от конкретной физической природы регулируемой величины, от физической природы аппаратуры и интересуются лишь характером процессов регулирования.

Если рассматривать с этой точки зрения звенья систем автоматического регулирования, то можно заметить, что независимо от их физической природы все звенья можно разбить по характеру процессов, происходящих в них, на следующие группы.

Усилительное звено. Будем условно обозначать звено в виде прямоугольника (рис. 3.1, а), к которому подходит входная величина u и от которого отходит выходная величина x . Тип звена однозначно определяется законом, связывающим между собой величины u и x . Для усиительного звена (иногда это звено называют пропорциональным или статическим) этот закон имеет вид

$$x = ku, \quad (1)$$

причем постоянная k может иметь любое действительное значение, как положительное, так и отрицательное. Этот закон связи u и x является наиболее

простым; следовательно, усилительное звено — наиболее простой тип звена. Этот закон состоит в следующем преобразовании: входной сигнал умножается на постоянную величину k , называемую *коэффициентом усиления*.

Можно дать наглядную иллюстрацию свойств этого звена. Пусть до момента $t = 0$ величина u , а следовательно, и x была равна нулю. В момент $t = 0$ величина u мгновенно увеличивается до какого-то конечного значения (см. рис. 3.1, б) и в дальнейшем не изменяется. Таким образом, величина $u(t)$ является ступенчатой функцией. В силу равенства (1) выходная

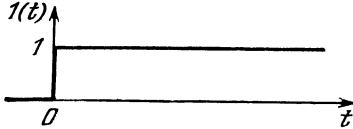


Рис. 3.2.

величина x также является ступенчатой функцией (см. рис. 3.1, в), причем $x = ku$.

Из рис. 3.1 видно, что выходная величина x копирует изменение входной величины без всякого запаздывания или искажения, т. е. в усилительном звене отсутствуют переходные процессы. Поэтому усилительное звено можно назвать еще и *безынерционным*.

В выражении (1) x и u могут иметь различную размерность; следовательно, коэффициент усиления k звена может быть мерной величиной, коэффициент k имеет размерность

$$[k] = \frac{[x]}{[u]}. \quad (1)$$

Соотношение (1) является частным случаем уравнения (1) § 2, когда

$$a_0 = \dots = a_{n-1} = b_0 = \dots = b_{n-1} = 0$$

и

$$a_n = 1, \quad b_n = k.$$

Передачная функция этого звена имеет простой вид

$$W(p) = k.$$

Наряду с уравнением (1) § 2 элементарные звенья мы будем характеризовать видом функции $x(t)$, *реакцией звена* на единичное воздействие $1(t)$ при нулевых начальных условиях, т. е.

$$x^{(n-1)}(t_0) = \dots = x(t_0) = 0. \quad (2)$$

Последнее условие означает, что до момента $t = 0$ звено находилось в покое. Единичная функция $1(t)$ определяется следующим образом (рис. 3.2):

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Реакцию системы на входной сигнал в виде функции $1(t)$ будем называть *переходной функцией* и обозначать $h(t)$, т. е.

$$h(t) = x(t)$$

при условии (2) и $u(t) = 1(t)$.

Рассмотрим некоторые примеры усилительных звеньев. На рис. 3.3, а схематически изображен усилитель постоянного тока; пусть его входное напряжение u_1 , а выходное — u_2 . Величины u_1 и u_2 связаны между собой зависимостью $u_2 = ku_1$. Безразмерная постоянная величина k есть коэффициент усиления звена.

На рис. 3.3, б изображено сопротивление R , на зажимы которого подано напряжение u_2 . Ток в цепи сопротивления I равен u_2/R . Если считать u_2 входной величиной данного звена, а I — выходной величиной, то это звено является усилительным. Действительно, положим $k = 1/R$. Тогда $I = ku_2$, причем в данном случае коэффициент k есть размерная величина.

На рис. 3.3, *в* изображен рычаг. Пусть вертикальная составляющая перемещения его левого конца Δx_1 есть входная величина, а вертикальная составляющая перемещения правого конца Δx_2 — выходная величина. Тогда $\Delta x_2 = k\Delta x_1$ и данное звено является усилительным. Величина k больше или меньше единицы в зависимости от соотношения плеч AO и BO рычага.

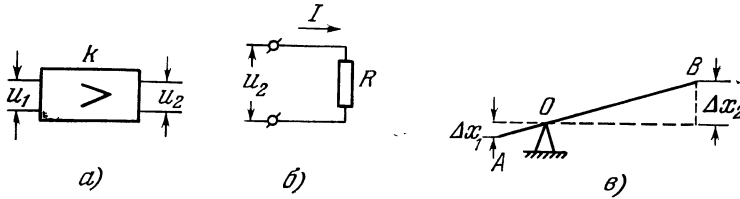


Рис. 3.3.

Интегрирующее звено характеризуется тем, что скорость изменения выходной величины пропорциональна входной величине

$$\frac{dx}{dt} = x' = ku, \tag{3}$$

т. е. выходной сигнал x пропорционален сумме интеграла от входного сигнала u и начального состояния x_0 , т. е. $x(t) = k \int_0^t u(t) dt + x_0$. Это уравнение получается из уравнения (1) § 2 при $a_0 = \dots = a_{n-2} = a_n = b_0 = \dots = b_{n-1} = 0$ и $a_{n-1} = 1, b_n = k$.

Уравнение (3) можно переписать в виде $px = ku$, откуда $\frac{x}{u} = \frac{k}{p}$.

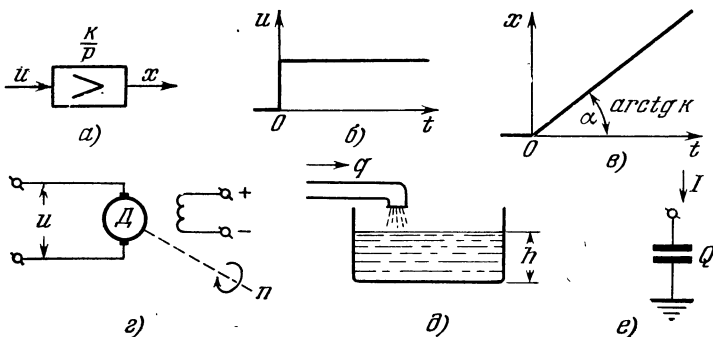


Рис. 3.4.

Таким образом, передаточная функция интегрирующего звена равна

$$W(p) = \frac{k}{p}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что оператор интегрирования обратен оператору дифференцирования и равен p^{-1} . Реакция интегрирующего звена на входной сигнал $1(t)$ имеет вид:

$$h(t) = kt \text{ при } t \geq 0. \tag{5}$$

Таким образом, переходная функция интегрирующего звена имеет вид наклонной прямой, исходящей из нуля под углом α , причем $tg \alpha = k$ (рис. 3.4, *в*).

Отсюда видно, что единственный параметр интегрирующего звена можно определить экспериментально, подавая на вход интегрирующего звена единичное воздействие и измеряя угол наклона α прямой к оси t . Примером интегрирующего звена может служить электрический двигатель, а также емкость, наполняющаяся жидкостью, или электрическая емкость, «наполняющаяся» электрическим зарядом $Q = kI$ (рис. 3.4, g, δ, e).

Заметим еще, что интегрирующее звено не может находиться в состоянии равновесия при любом постоянном значении входного сигнала. При любом сколь угодно малом отличном от нуля постоянном входном сигнале выходной сигнал $x(t)$ может делаться через достаточно большое время сколь угодно большим. Единственным положением равновесия этого звена является то, при котором входной сигнал u в точности равен нулю. Если входной сигнал рассматривать как возбуждающее воздействие на звено, то в этом случае интегрирующее звено можно также назвать астатическим звеном.

А п е р и о д и ч е с к о е з в е н о. Уравнение этого звена имеет вид

$$T \frac{dx}{dt} + x = ku, \quad (6)$$

T — постоянная времени аperiodического звена $T \geq 0$, имеет размерность времени ($[T] = [время]$); k — коэффициент усиления аperiodического звена или статический коэффициент передачи. Он показывает отношение постоянной выходной величины x_y к постоянной входной величине u_y

$$k = \frac{x_y}{u_y}.$$

Его размерность

$$[k] = \frac{[x_y]}{[u_y]}.$$

Звено, описываемое уравнением (6), при $T < 0$ называется неустойчивым аperiodическим звеном. Передаточная функция аperiodического звена имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (7)$$

Очевидно, что рассмотренные выше усилительное и интегрирующее звенья являются предельными (частными) случаями аperiodического звена. Аperiodическое звено превращается в усилительное при $T = 0$ (т. е. когда постоянная времени мала и ею можно пренебречь). Аperiodическое звено можно считать интегрирующим, когда постоянная времени T очень велика по сравнению с единицей. В этом случае уравнение аperiodического звена можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} x = \frac{k}{T} u. \quad (8)$$

Тогда множитель $1/T$ будет мал и им можно пренебречь, а уравнение (8) будет совпадать с уравнением интегрирующего звена с коэффициентом, равным $k_1 = \frac{k}{T}$.

Чтобы найти переходную функцию аperiodического звена, надо решить следующее уравнение:

$$T \frac{dx}{dt} + x = k \cdot 1(t)$$

при начальном условии

$$x(0) = 0. \quad (9)$$

(Звено находится в покое до момента приложения единичного воздействия.) Так как нас интересует это уравнение при $t \geq 0$, то задача сводится к решению уравнения

$$T \frac{dx}{dt} + x = k.$$

Подробно приведем решение этого уравнения. Найдем сначала *полное* решение этого уравнения. Полное решение складывается из суммы произвольного *частного* решения этого уравнения $x_{\text{ч}}(t)$ (которое может и не удовлетворять начальному условию $x(0) = 0$) и *общего* решения $x_{\text{об}}(t)$ однородного уравнения, зависящего от произвольной постоянной c , т. е.

$$x_{\text{п}}(t) = x_{\text{ч}}(t) + x_{\text{об}}(t).$$

Легко видеть, что частное решение имеет вид

$$x_{\text{ч}}(t) = k.$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$$T \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Для определения общего решения этого уравнения надо составить характеристическое уравнение $Tr + 1 = 0$; корень этого уравнения $p = -\frac{1}{T}$ является действительным числом. Общее решение будет поэтому иметь вид

$$x_{\text{об}}(t) = ce^{pt} = ce^{-\frac{t}{T}}.$$

Следовательно, полное решение

$$x_{\text{п}}(t) = x(t) = k + ce^{-\frac{t}{T}}.$$

Постоянная c находится из начального условия

$$x(0) = k + c = 0.$$

Отсюда $c = -k$ и, следовательно, искомое решение, удовлетворяющее (9), имеет вид

$$x(t) = h(t) = k(\alpha - e^{-\frac{t}{T}}) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (10)$$

Так как $T \geq 0$, то при $t \rightarrow \infty$ это решение асимптотически стремится к установившемуся значению $x_{\text{у}} = k$. Ясно, что при $T < 0$ функция $h(t)$ стремится к бесконечности, т. е. звено неустойчиво. На рис. 3.5, б изображен

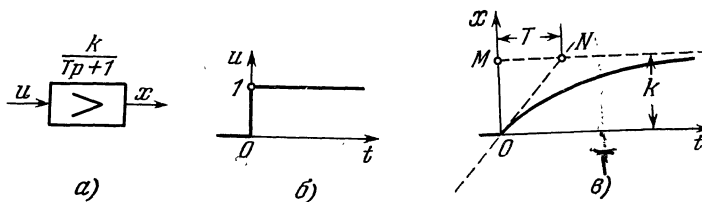


Рис. 3.5.

график переходной функции. Такой процесс называется аperiodическим, что объясняет название этого звена. Заметим здесь, что, как видно из рис. 3.4, в, переходная функция интегрирующего звена существенно отличается от переходных функций двух типов звеньев, рассмотренных ранее. В усилительном и инерционном звеньях *установившееся* значение выходной величины x постоянно, если при $t > 0$ величина $u = \text{const}$. Между

тем в интегрирующем звене при $u = \text{const} \neq 0$ установившееся значение x_y растет пропорционально времени. Действительно, согласно закону (5) *скорость* изменения выходной величины (а не сама выходная величина) пропорциональна входной величине. Это свойство обуславливает принципиальное отличие систем, содержащих интегрирующие звенья, от систем, не содержащих этих звеньев. Если в точке O провести касательную к кривой $h(t)$ до пересечения с асимптотой $x = x_y = k$ в точке N , то

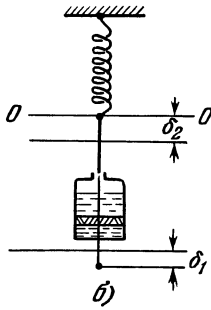
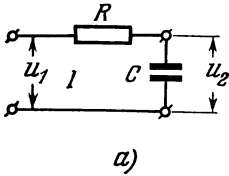


Рис. 3.6.

длина отрезка MN равна постоянной времени T . Ясно, что чем больше постоянная времени, тем более затянута переходный процесс в звене, тем *медленнее* кривая $h(t)$ будет стремиться к своему установившемуся значению k . Чем больше T , тем более инерционным считается звено. Посмотрим, сколько понадобится времени t_1 , чтобы функция $h(t)$ отличалась от своего предельного (асимптотического) значения k не более чем на $n\%$, т. е. чтобы кривая $h(t)$ вошла в полосу ширины 2ε около прямой $h(t) = k$. Искомое значение t_1 определяется из уравнения

$$k - \varepsilon = k(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}).$$

Полагая $\varepsilon = \frac{n}{100}k$, находим

$$k = \frac{n}{100}k = k(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}).$$

Сокращая на k , приходим к уравнению

$$e^{-\frac{t_1}{T}} = \frac{n}{100}.$$

Логарифмируя, находим

$$t_1 = T \ln \frac{100}{n}.$$

Например, при $n = 10\%$ величина $t_1 = 2,3 T$.

В качестве примера аperiodического звена можно привести RC -цепочку (рис. 3.6, а), если за входное воздействие принять напряжение u_1 , а за выходной сигнал u_2 . Тогда связь между u_1 и u_2 дается уравнением

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1.$$

Здесь постоянная времени $T = RC$, а коэффициент $k = 1$. Если емкость измерять в мкф , а сопротивление в Мом , то размерность $[T] = [R] \cdot [C] = \text{мкф} \cdot \text{Мом} = \text{сек}$.

Коэффициент k в силу одинаковой природы входного и выходного сигналов безразмерен и равен в данном случае единице.

Другим примером аperiodического звена является нагрев «тонкого» тела в камерной печи. Тело является «тонким» в теплотехническом смысле, если критерий Био $Bi < 0,25$. Действительно, если обозначить температуру печи через $\theta(t)$ (входное воздействие), а температуру нагреваемого тела —

через $\theta(t)$ (выходной сигнал), то поток тепла q определяется по закону теплопередачи Ньютона следующим образом:

$$q = \alpha (\theta_{\text{п}} - \theta),$$

где α — коэффициент теплообмена между греющей средой и материалом. С другой стороны, скорость подъема температуры тела пропорциональна потоку тепла q на это тело

$$\frac{d\theta}{dt} = kq, \quad \text{где } k = \frac{1}{cG},$$

и c — теплоемкость, а G — все тела. Из последних уравнений, включая величину потока q , находим

$$cG \frac{d\theta}{dt} = \alpha (\theta_{\text{п}} - \theta)$$

или

$$T \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_{\text{п}},$$

где постоянная времени $T = \frac{cG}{\alpha}$ называется постоянной времени нагрева тела.

Другим примером аperiodического звена является гидромеханическая система, изображенная на рис. 3.6, б. Связь между перемещением δ_1 и δ_2 описывается уравнением $T \frac{d\delta_2}{dt} + \delta_2 = \delta_1$. Здесь постоянная времени зависит от коэффициента упругости пружины, вязкости жидкости и размеров и вида отверстий в поршне. Эта зависимость в общем случае может быть сложной, и ее трудно вычислить теоретически. Однако постоянную времени T легко определить из экспериментально найденной кривой переходного процесса $h(t)$. Как было отмечено выше, постоянная времени блока $T = MN$ (рис. 3.5). Коэффициент k определяется также из экспериментальной кривой. Он равен предельному значению, к которому стремится $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Примером аperiodического звена может также служить мембранный исполнительный механизм (рис. 3.7), если за входной сигнал принять давление P , а за выходной — перемещение штока δ .

К о л е б а т е л ь н о е з в е н о. Колебательное звено описывается уравнением

$$T_0 \frac{d^2x}{dt^2} + T \frac{dx}{dt} + x = ku. \quad (11)$$

Коэффициент $T_0 > 0$ имеет размерность квадрата времени ($[T] = [\text{время}]^2$), $T > 0$ имеет размерность времени ($[T] = [\text{время}]$), параметр k имеет размерность $[x]/[u]$ и называется статическим коэффициентом усиления колебательного звена. Он равен

$$k = \frac{x_y}{u_y},$$

где x_y и u_y — соответственно установившиеся значения входного и выходного сигналов.

Передаточная функция колебательного звена имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{T_0 p^2 + T p + 1}. \quad (12)$$

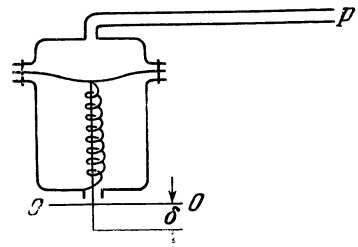


Рис. 3.7.

Найдем переходную функцию $h(t)$ этого звена. Для этого нужно решить уравнение

$$\begin{aligned} T_0 \frac{d^2x}{dt^2} + T \frac{dx}{dt} + x &= k, \\ x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Как и при решении соответствующего уравнения для апериодического звена, найдем сначала *частное* решение этого уравнения

$$x_{\text{ч}}(t) = k.$$

Чтобы найти общее решение, составим характеристическое уравнение

$$T_0 p^2 + T p + 1 = 0, \quad (14)$$

корни которого равны

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-T \pm \sqrt{T^2 - 4T_0}}{2T_0} = -\alpha \pm j\omega, \\ \alpha &= \frac{T}{2T_0} > 0, \quad \omega = \frac{\sqrt{|T^2 - 4T_0|}}{2T_0} > 0. \end{aligned}$$

Величина ω называется собственной частотой колебаний колебательного звена, α называется коэффициентом затухания колебательного звена. Чем больше α , тем быстрее происходит уменьшение амплитуды колебаний переходной функции. Уравнение колебательного звена совпадает с уравнением осциллятора с возмущающей силой. Пусть на осциллятор с постоянным коэффициентом трения γ и собственной частотой ω_0 действует возмущающая сила $f(t)$ на интервале времени (t_0, t) . Уравнение движения этого осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (15)$$

Величину $d_0 = \frac{\gamma}{2\omega_0}$ называют постоянной затухания. Решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad (16)$$

где A и φ определяются начальными условиями $x(t_0) = x_0$ и $\frac{dx(t_0)}{dt} = x_1$ и $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ (рассматривается случай *истинно* колебательного звена, т. е. корни характеристического уравнения комплексные)

$$\gamma = \frac{T}{2T_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{T_0}.$$

Если $t_0 = 0$ и $x(0) = A \cos \varphi$, то

$$x(t) = -A e^{-\gamma t} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

и

$$x(0) = -A \frac{1}{\omega} \sin \varphi - \gamma A \cos \varphi.$$

Для колебательного звена должно выполняться условие отрицательности дискриминанта

$$\Delta = T^2 - 4T_0 < 0$$

или

$$2\sqrt{T_0} > T.$$

При этом условии корни характеристического уравнения будут комплексными и решение уравнения будет действительно «колеблющимся». Случай $T^2 - 4T_0 \geq 0$ неинтересен, так как при нулевых начальных условиях и $f(t) = 1(t)$ решение получается аperiodическим. В этом случае звено с таким уравнением, как будет ясно из дальнейшего, можно заменить двумя аperiodическими звеньями, соединенными последовательно. В случае $\Delta < 0$ колебательное звено не сводится к простейшим звеньям. Полное решение уравнения (15) имеет вид

$$x_{\text{п}}(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + c_2 e^{\alpha t} \cos \omega t + k.$$

Постоянные c_1 и c_2 находятся из начальных условий (13). Используя первое условие, находим $x(0) = k + c_2 = 0$; отсюда $c_2 = -k$. Чтобы использовать

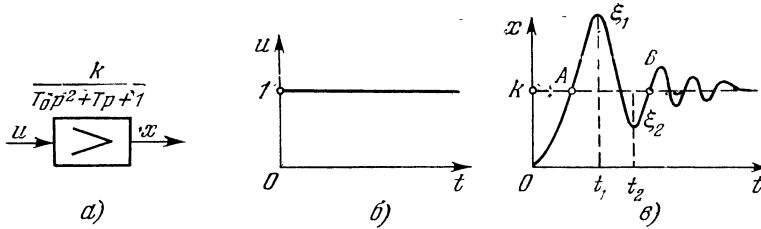


Рис. 3.8.

второе уравнение (13), продифференцируем полное решение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha c_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + \omega c_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + \alpha c_2 e^{\alpha t} \cos \omega t - \omega c_2 e^{\alpha t} \sin \omega t.$$

Тогда получим

$$\frac{dx(0)}{dt} = \omega c_1 - \alpha k = 0.$$

Отсюда

$$c_1 = k \frac{\alpha}{\omega}.$$

Таким образом, искомое $h(t)$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} h(t) &= k + k \frac{\alpha}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t - k e^{\alpha t} \cos \omega t = \\ &= k \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \right] = k \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi} \sin(\omega t + \varphi) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} = \sin \varphi.$$

При $t \rightarrow \infty$ это решение стремится асимптотически к установившемуся значению $h_{\text{у}}(t) = k$ (ибо $\alpha < 0$). На рис. 3.8, в изображен график переходной функции. Кривая носит явно выраженный колебательный характер возле положения равновесия $x = x_{\text{у}} = k$ с постоянной частотой, равной ω (период также постоянен и равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Это условие равновесия точно такое же, как и в усилительном и аperiodическом звеньях. Следовательно, после окончания переходного процесса усилительное, аperiodическое и колебательное звенья по величине выходного сигнала неотличимы друг от друга. Из рассмотрения величины $\Delta = T^2 - 4T_0$ легко установить, что для случая $\Delta > 0$ нет надобности вводить специальное наименование для рассматриваемого звена, так как в этом случае звено с уравнением (11) можно представить

в виде цепочки из двух инерционных звеньев (рис. 3.9). Действительно, рассмотрим эту цепочку, в которой x_1 — выходная величина первого звена —

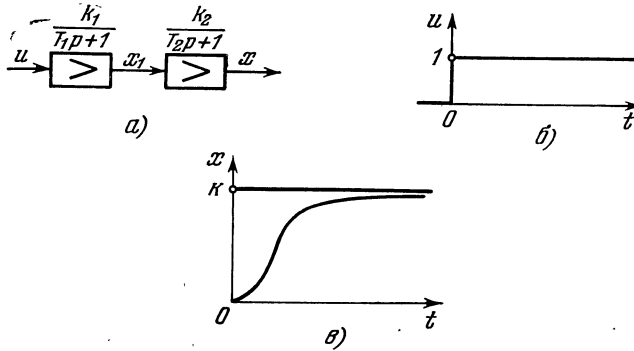


Рис. 3.9.

является входной величиной второго. Пусть T_1 и k_1 — параметры первого звена, а T_2 и k_2 — второго. Уравнения звеньев имеют вид

$$\left. \begin{aligned} k_1 u &= x_1 + T_1 \frac{dx_1}{dt}, \\ k_2 x_1 &= x_2 + T_2 \frac{dx_2}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

Исключаем отсюда промежуточную величину x_1 , подставляя ее из второго уравнения в первое. Тогда связь между u и x принимает форму уравнения

$$\frac{k_1 k_2}{T_1 T_2} u = \frac{x}{T_1 T_2} + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (18)$$

Обозначим

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) приводится к виду уравнения (11). Однако так как среднее арифметическое $(T_1 + T_2)/2$ чисел T_1 и T_2 больше их среднего геометрического $\sqrt{T_1 T_2}$, то величина $\gamma = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} > 1$. Поэтому корни характеристического уравнения (14) будут действительными, и решение имеет вид суммы экспонент

$$x = ku + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}. \quad (20)$$

Переходная функция для данного случая изображена на рис. 3.9, в. Как видно из рисунка, она качественно отличается от переходной функции колебательного звена.

В качестве примера колебательного звена можно рассмотреть RC -цепочку (рис. 3.10), если за входной сигнал принять напряжение u_1 , а за выходной сигнал u_2 на емкости C . Уравнение связи между u_1 и u_2 задается уравнением

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1.$$

Здесь $LC = T_0$, $RC = T$, $k = 1$.

Другим примером колебательного звена является гидромеханическое устройство, изображенное на рис. 3.10, б, которое отличается от устройства, изображенного на рис. 3.6, б, лишь наличием существенной инертной массы.

Уравнение, связывающее перемещение δ_1 (входное воздействие) с перемещением δ_2 (выходное воздействие), имеет вид

$$T_0 \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} + T \frac{d\delta_2}{dt} + \delta_2 = \delta_1.$$

Такие системы служат обычно для демпфирования механических колебаний (например, подвеска автомобилей).

Имея экспериментальную кривую переходного процесса (рис. 3.8, в), легко по графику найти величину периода $AB = \frac{2\pi}{\omega}$ и, следовательно, величину собственной частоты колебаний звена. Из уравнения (17) легко видеть, что отношение $\beta = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, которое определяется из кривой переходного процесса, равно

$$\beta = \frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}} = e^{\alpha(t_2 - t_1)},$$

где $t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, следовательно, $\alpha = \frac{\omega \ln \beta}{2\pi}$. Коэффициент k определяется как установившееся значение переходной функции $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Итак, все параметры системы можно определить из экспериментально снятой кривой переходного процесса.

Дифференцирующее звено. Дифференцирующее звено описывается уравнением

$$x = k \frac{du}{dt}, \quad (21)$$

т. е. выходной сигнал x пропорционален производной входного сигнала u с коэффициентом пропорциональности k . Передаточная функция этого звена равна

$$W(p) = kp. \quad (22)$$

Переходная функция дифференцирующего звена уже не является функцией в обычном смысле этого слова. В данном случае переходная функция $h(t)$ есть производная от единичной функции $1(t)$. Производная от $1(t)$ равна везде нулю, за исключением точки 0, где $1(t)$ имеет разрыв 1-го рода и, следовательно, производная в этой точке будет бесконечно большой (т. е. не равна никакому конечному числу, что и указывает на отсутствие обычной производной, которая всегда должна быть равна конечному числу). Однако все же считают, что производная от функции $1(t)$ существует и равна так называемой δ -функции, т. е.

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t). \quad (23)$$

Единственное, что мы должны потребовать от этой «необычной» функции (она называется в математике обобщенной функцией), чтобы ее интеграл (по определенно производной!) совпадал с $1(t)$. Итак, δ -функция определяется так:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0 \text{ и } t < 0, \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases} \quad (24)$$

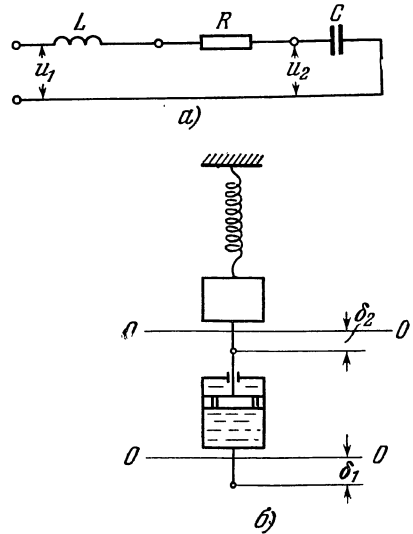


Рис. 3.10.

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1(t). \quad (25)$$

Приблизительно δ -функцию можно представить как очень узкий прямоугольный импульс ширины ϵ и высоты $1/\epsilon$ около начала координат (рис. 3.11), так что его площадь (интеграл) равна единице. Это приближение δ -функции будем обозначать через $r(t, \epsilon)$. Таким образом, δ -функцию можно рассматривать как предел функции $r(t, \epsilon)$ при $\epsilon > 0$:

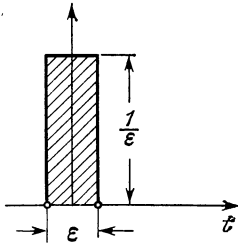


Рис. 3.11.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r(t, \epsilon) = \delta(t). \quad (26)$$

Существуют и другие приближенные представления δ -функции. Например, δ -функцию можно представить в виде треугольной кривой $\rho(t, \epsilon)$ ширины ϵ и высоты $2/\epsilon$ (рис. 3.12). Площадь такого сигнала равна единице. Поэтому δ -функцию можно рассматривать как предел функции $\rho(t, \epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho(t, \epsilon) = \delta(t). \quad (27)$$

Кроме того, δ -функцию можно представить как предел некоторых функций, заданных *аналитически* (в виде формул). Например,

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at^2}. \quad (28)$$

Отметим еще одно свойство δ -функции. Пусть $f(t)$ — обычная непрерывная функция, тогда

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{при } t_0 \in [a, b], \\ 0 & \text{при } t_0 \notin [a, b], \end{cases} \quad (29)$$

где $a \leq t_0 \leq b$. Примером дифференцирующего звена является конденсатор C , в котором активное сопротивление $R = 0$, если входным сигналом считать напряжение U , а выходным сигналом — ток I . Уравнение, связывающее ток I и напряжение U , имеет вид

$$I = \frac{C dU}{dt},$$

Статистический коэффициент передачи такого дифференцирующего звена равен $k = C$. Дифференцирующее звено можно получить *обращением* интегрирующего звена, потому что, как легко видеть, уравнения, описывающие интегрирующее и дифференцирующее звенья, совпадают с точностью до перемены обозначений входного и выходного сигналов. Поэтому другим примером дифференцирующего звена может служить двигатель (рис. 3.13), в котором за входной сигнал принят угол φ поворота его вала, а за выходной сигнал — напряжение U . В этом случае двигатель будет работать в режиме генератора, а с точки зрения элементарного звена будет дифференцирующим звеном.

Реальное дифференцирующее звено. Идеальных дифференцирующих звеньев в природе не существует, поскольку не существует

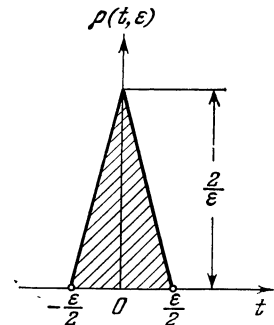


Рис. 3.12.

безынерционных систем. Поэтому более реально звено, осуществляющее операцию дифференцирования приближенно; оно имеет уравнение

$$T \frac{dx}{dt} + x = k \frac{du}{dt}. \quad (30)$$

Здесь $T \geq 0$ называется постоянной времени реального дифференцирующего звена, k — коэффициент усиления или статический коэффициент передачи. Передаточная функция этого звена имеет вид

$$W(p) = \frac{kp}{Tp+1}. \quad (31)$$

Примером реального дифференцирующего звена является электрическая RC -цепочка (рис. 3.6); если за входной сигнал принять напряжение u_1 , а за выходной — ток I , тогда уравнение, связывающее u_1 и I , имеет вид

$$RC \frac{dI}{dt} + I = C \frac{du_1}{dt}, \\ T = RC, \quad k = C.$$

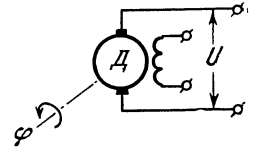


Рис. 3.13.

Найдем переходную функцию реального дифференцирующего звена. Искомая функция есть решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$T \frac{dx}{dt} + x = k \frac{d1(t)}{dt} = \delta(t)$$

при нулевом условии начальном $x(t) = 0$ при $t \leq 0$. Из-за наличия δ -функции уравнения такого типа решать непосредственно затруднительно. Проинтегрируем обе части уравнения от $-\infty$ до t . Получим

$$T \int_{-\infty}^t \frac{dx}{d\tau}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = k \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = k1(t). \quad (32)$$

Введем новую функцию

$$z(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Отсюда с учетом равенства

$$\frac{dz(t)}{dt} = x(t)$$

уравнение (32) примет вид

$$T \frac{dz}{dt} + z = k.$$

Отсюда видно, что $z(t)$ совпадает с переходной функцией аperiodического звена (рис. 3.6). Поэтому из (10) сразу находим

$$z(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Возвращаясь к исходной функции $x(t)$, получим, что переходная функция реального дифференцирующего звена равна

$$x(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (33)$$

График этой функции изображен на рис. 3.14. Отсюда видно, что переходная функция реального дифференцирующего звена имеет разрыв при $t = 0$; при $t \rightarrow \infty$ функция $x(t) \rightarrow 0$.

З в е н о з а п а з д ы в а н и я. Уравнение для звена запаздывания описывается простым соотношением

$$x(t) = u(t - \tau), \quad \tau \geq 0. \quad (34)$$

Это означает, что звено запаздывания осуществляет операцию сдвига входного сигнала $u(t)$ на время τ «назад». Выходной сигнал равен входному сигналу, но сдвинутому на время τ в прошлое (рис. 3.15, а). Реакция $h(t)$ звена запаздывания на единичное входное воздействие $1(t)$ (рис. 3.15, б) определяется равенством

$$h(t) = 1(t - \tau). \quad (35)$$

Чтобы найти передаточную функцию

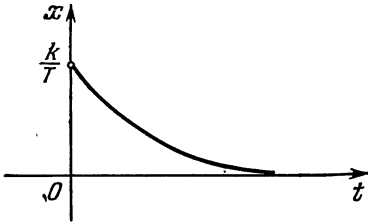


Рис. 3.14.

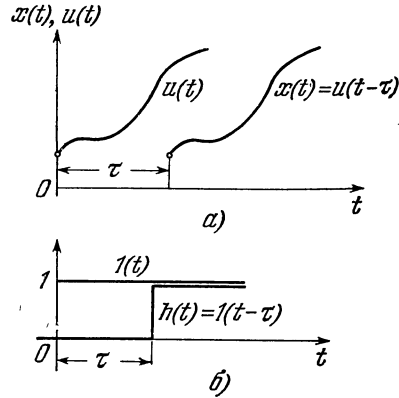


Рис. 3.15.

звена запаздывания, разложим функцию $u(t - \tau)$ в ряд Тейлора по τ_n . Получим

$$u(t - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u^{(k)}(t) (-1)^k \tau^k$$

(здесь считается, что $0! = 1$ и $u^{(0)}(t) = u(t)$). Но

$$u^{(k)} = p^k u.$$

Поэтому

$$u(t - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k (-1)^k \tau^k u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p\tau)^k}{k!} u(t) = e^{-p\tau} u(t).$$

Окончательно

$$x(t) = e^{-p\tau} u(t).$$

Отсюда передаточная функция звена запаздывания равна

$$W(p) = e^{-p\tau}. \quad (36)$$

Примером звена запаздывания может служить магнитофон с лентой или магнитный барабан (рис. 3.16, а). Время запаздывания τ здесь, очевидно, равно

$$\tau = \frac{l}{v},$$

где v — скорость лентопротяжки и l — расстояние между записывающей и считывающей головкой. На рис. 3.16, б изображена схема магнитного барабана, вращающегося с угловой скоростью ω . Время запаздывания τ в этих звеньях можно менять с помощью изменения v и ω , а также с помощью изменения l и φ .

Естественными звеньями запаздывания служат различные системы передачи сигналов в системах связи, материалов и энергии в системах транспортировки (транспортные запаздывания), в которых естественно ограничены скорости распределения и передвижения. Например, имеется запаздывание электромагнитного сигнала в системе связи со спутниками и космическими кораблями; запаздывание в распределении давления газа в длинных трубопроводах; запаздывание имеется в передаче материалов с помощью

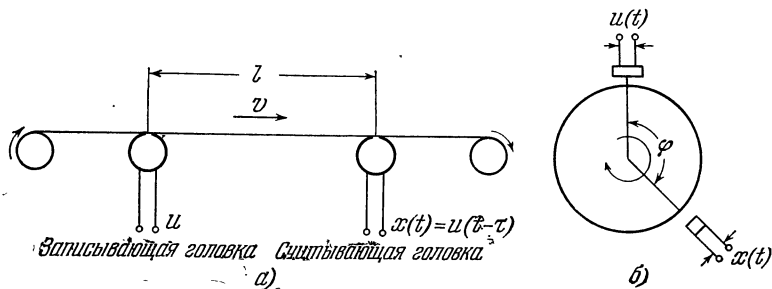


Рис. 3.16.

транспортеров и т. д. Правда, в этих системах, помимо «чистого» запаздывания, может быть и затухание сигнала (уменьшение амплитуды в определенное число раз).

В заключение этого раздела заметим, что в литературе наряду с термином «звена» иногда используется термин «блока»; блок запаздывания, аperiodический блок и т. д.

Мы также будем пользоваться обеими этими терминами.

Суммирующее звено. Иногда применяют также понятие суммирующего звена с выходной величиной x и входными величинами u_1, u_2, \dots, u_m , причем

$$x = u_1 + u_2 + \dots + u_m. \tag{37}$$

Будем иногда обозначать на схемах суммирующее звено не кружком, а вертикальной чертой, к которой с одной стороны подходят входные величины u_1, u_2, \dots, u_m , а с другой стороны отходит выходная величина x .

Звенья с распределенными параметрами. Рассмотренные выше звенья относятся к так называемым звеньям с *сосредоточенными* параметрами. В них мы абстрагировались от того физического факта, что в любой реальной системе сигналы распространяются не только во времени, но и в пространстве. В этих звеньях связь между входными и выходными сигналами описывалась *обыкновенными* дифференциальными уравнениями. Входящие в них функции $u(t)$ и $x(t)$ зависят только от одной независимой переменной t (времени). Состояние этих звеньев описывается функциями, также зависящими лишь от одной независимой переменной. Однако во многих реальных системах и объектах весьма существенным является тот факт, что состояние их в каждый момент времени не может быть описано функциями, зависящими только от одной независимой переменной (например, времени t). В этих объектах существенно то, что они имеют пространственную протяженность. Состояние таких объектов описывается в каждый момент времени t не с помощью отдельных чисел, а с помощью функций распределения. Идеализированное описание этих систем с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений уже невозможно. Такие объекты, как правило, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными уравнениями, а подчас более сложными функциональными уравнениями.

Рассмотрим простой пример звена с распределенными параметрами. Пусть имеется изолированный с боков круглый стержень конечной длины l , который в разрезе изображен на рис. 3.17, а.

Предположим, что входным сигналом является температура торца A , которую мы будем обозначать через $u(t)$. Эта температура может меняться во времени. Предположим далее, что торец B поддерживается при постоянной температуре, равной нулю. В качестве выходного сигнала $x(t)$ мы будем рассматривать температуру стержня в некоторой промежуточной точке на расстоянии $l_1 < l$ от торца A .

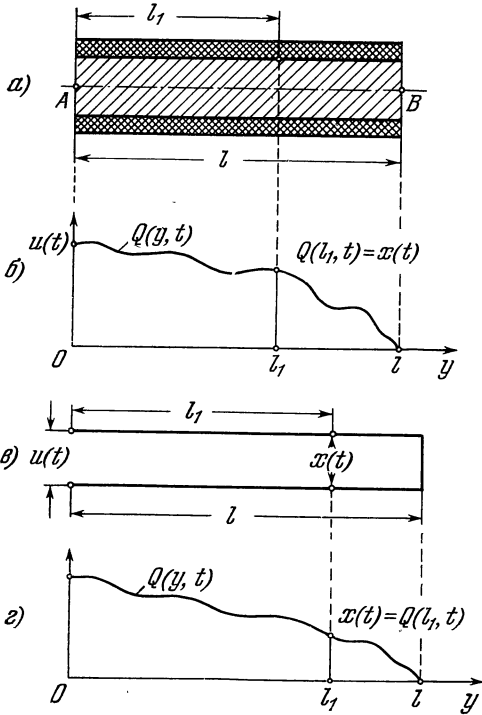


Рис. 3.17.

Тогда тепловое состояние стержня будет описываться функцией $Q(y, t)$, которая показывает, какова температура стержня Q в точке y ($0 \leq y \leq l$) в момент времени t .

Функция $Q(y, t)$ называется функцией распределения (в данном случае температурного) (рис. 3.17, б). На этом примере объекта с распределенными параметрами хорошо видно, что температурное состояние стержня уже не может быть описано одним числом или каким-нибудь конечным набором чисел. Мы видим, что оно описывается функцией распределения. По условию мы имеем

$$Q(0, t) = u(t), \quad (38)$$

$$Q(l, t) = 0, \quad (39)$$

и интересующий нас выходной сигнал $x(t)$ равен

$$Q(l_1, t) = x(t). \quad (40)$$

Из теории теплопроводности известно, что функция распределения $Q(y, t)$ внутри отрезка $[0, l]$

должна удовлетворять уравнению теплопроводности (уравнение Фурье)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \quad (0 \leq y \leq l, t \geq 0). \quad (41)$$

Здесь a является коэффициентом температуропроводности.

На концах отрезка $[0, l]$ функция $Q(y, t)$ удовлетворяет условиям (38), (39), которые поэтому называются краевыми или граничными условиями.

Для однозначного определения динамики изменения распределения температуры $Q(y, t)$ во все последующие моменты времени $t > 0$ необходимо еще задать начальные условия, т. е. распределение температуры вдоль стержня в начальный момент времени $t = 0$ и

$$Q(y, 0) = Q_0(y) \quad (0 \leq y \leq l), \quad (42)$$

где $Q_0(y)$ — известная функция от y . В частности, $Q_0(y)$ может тождественно равняться нулю:

$$Q_0(y) = 0 \quad (0 \leq y \leq l).$$

Уравнение (41) в обязательной связи с граничными условиями (38), (39) и начальным условием (42) гарантирует существование однозначного реше-

ния $Q(y, t)$. Для того чтобы найти передаточную функцию между входным сигналом $u(t)$ и выходным сигналом $x(t) = Q(l_1, t)$, заменим оператор дифференцирования по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ на p в уравнении (41). Получим

$$pQ = a \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}. \quad (43)$$

Функция Q остается зависящей от y , и она, как мы видим, должна удовлетворять *обыкновенному* дифференциальному уравнению по y с граничными условиями (38), (39) и нулевым начальным условием. Это уравнение второго порядка, и его легко решить обычными методами. Легко проверить, что это решение имеет вид

$$Q = \frac{\sin j \sqrt{\frac{p}{a}} (l-y)}{\sin j \sqrt{\frac{p}{a}} l} u \quad (j = \sqrt{p-1}). \quad (44)$$

Отсюда передаточная функция между u и x равна

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{\sin j \sqrt{\frac{p}{a}} (l-l_1)}{\sin j \sqrt{\frac{p}{a}} l} = \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} (l-l_1)} - e^{\sqrt{\frac{p}{a}} (l-l_1)}}{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} l} - e^{\sqrt{\frac{p}{a}} l}}. \quad (45)$$

Формула (45) показывает, что передаточная функция для звеньев с распределенными параметрами уже не является дробно рациональной функцией от аргумента p , как это имело место для звеньев со сосредоточенными параметрами (см. формулу (3)).

Другим примером звена с распределенными параметрами может служить так называемая длинная электрическая линия длины l (рис. 3.17, в), на одном конце A которой имеется источник напряжения, а другой конец B замкнут накоротку. В качестве входного сигнала этого звена будем рассматривать напряжение $u(t)$ на конце A , а в качестве выходного сигнала — напряжение $x(t)$ на расстоянии l_1 , от конца A .

Пусть распределение напряжений вдоль длинной линии описывается функцией $Q(y, t)$, т. е. Q есть электрическое напряжение в точке y ($0 \leq y \leq l$) в момент времени t , $t \geq 0$. Внутри отрезка $[0, l]$ функция $Q(y, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \quad (0 < y < l, t > 0), \quad (46)$$

где a — скорость распространения волн напряжения вдоль линии. Скорость a может быть вычислена по формуле

$$a = 1/\sqrt{LC}, \quad (47)$$

где L и C — индуктивность и емкость на единицу длины линии. По условию функция распределения $Q(y, t)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$Q(0, t) = u(t), \quad (48)$$

$$Q(l, t) = 0. \quad (49)$$

Для однозначного определения распределения напряжения $Q(y, t)$ необходимо еще задать начальные условия: начальное распределение напряжений вдоль линий и начальное распределение скоростей изменения напряжений

$$Q(y, 0) = Q_0(y) \quad (0 \leq y \leq l), \quad (50)$$

$$\left. \frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = Q_1(y) \quad (0 \leq y \leq l). \quad (51)$$

Здесь $Q_0(y)$ и $Q_1(y)$ — известные функции.

Уравнение (46) с граничными и начальными условиями (48), (49), (50), (51) обеспечивают однозначное определение распределения $Q(y, t)$ во все моменты времени $t > 0$.

Для определения передаточной функции между входным сигналом $u(t)$ и выходным сигналом $x(t) = Q(l_1, t)$ поступим аналогично рассмотренному выше примеру. Заменяем оператор дифференцирования по времени $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ на p^2 в уравнении (46). Получим

$$p^2 Q = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}. \quad (52)$$

Решая это уравнение, как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной y с граничными условиями по y (48), (49) и нулевыми начальными условиями, получим

$$Q = \frac{\sin j \frac{p}{a} (l-y)}{\sin j \frac{p}{a} l}. \quad (53)$$

Отсюда искомая передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{\sin j \frac{p}{a} (l-y)}{\sin j \frac{p}{a} l} = \frac{e^{-\frac{p}{a}(l-l_1)} - e^{-\frac{p}{a}(l-l_1)}}{e^{-\frac{p}{a}l} - e^{-\frac{p}{a}l}}. \quad (54)$$

§ 4. Дополнительные примеры элементарных звеньев

Рассмотрим еще несколько примеров звеньев в системах автоматического регулирования. Пусть входной величиной звена является напряжение u_B на обмотке возбуждения генератора постоянного тока Γ (рис. 3.18, а). Сопротивление цепи обмотки возбуждения R_B , коэффициент самоиндукции — L_B . Выходной величиной звена будет электродвижущая

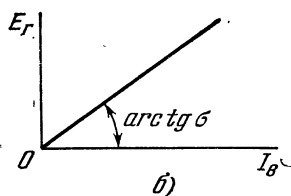
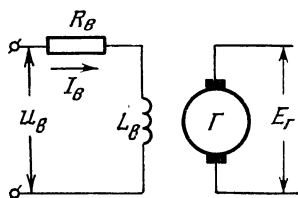


Рис. 3.18.

сила E_Γ генератора Γ . Пренебрегая гистерезисом и влиянием насыщения, примем характеристику холостого хода прямолинейной (рис. 3.18, б), т. е. положим $E_\Gamma = \sigma I_B$, где $\sigma = \text{const}$. Уравнение звена примет вид

$$U_B = I_B R_B + \alpha_B \frac{dI_B}{dt} = E_\Gamma \frac{R_B}{\sigma} + \frac{L_B}{\sigma} \frac{dE_\Gamma}{dt}.$$

Приведем это уравнение к стандартному виду, положив

$$\frac{\sigma}{R_B} = k_1, \quad \frac{L_B}{R_B} = T_1.$$

Тогда

$$k_1 U_B = E_\Gamma + T_1 \frac{dE_\Gamma}{dt}. \quad (1)$$

Получим закон связи, характерный для инерционного звена.

Рассмотрим другой пример. Пусть входная величина — напряжение U — подается на зажимы цепи якоря двигателя постоянного тока D независимого возбуждения (рис. 3.19). Для наглядности омическое сопротивление всей цепи якоря и индуктивности L этой цепи показаны на рис. 3.19, а в виде отдельных элементов. Обмотка возбуждения двигателя OB приключена к источнику постоянного тока. В таком случае вращающий момент двигателя

$M_{вр} = \vartheta I$, где I — ток в цепи якоря; ϑ — коэффициент пропорциональности. Пренебрегая влиянием поперечной реакции якоря при насыщении магнитной цепи машины, считаем, что поток возбуждения постоянен.

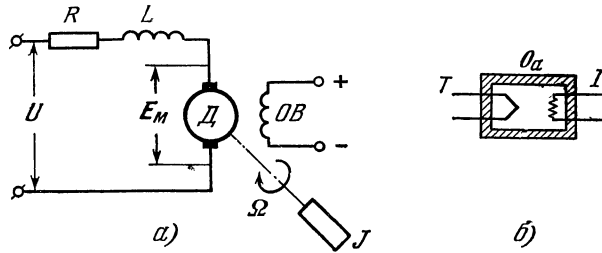


Рис. 3.19.

В цепи якоря необходимо учесть противоэлектродвижущую силу $E_m = \lambda \Omega$, где Ω — угловая скорость вала двигателя и λ — коэффициент пропорциональности.

Пусть J — момент инерции вращающейся системы, приведенный к валу двигателя. Применяя второй закон Кирхгофа для цепи якоря, находим

$$U - E_m = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

или

$$U - \lambda \Omega = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Уравнение движения вала двигателя при пренебрежении моментом нагрузки можно записать в следующем виде:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_{вр} = \vartheta I. \quad (3)$$

Выходной величиной звена будем считать скорость Ω . Исключая из уравнений (2) и (3) величину I , находим связь между u и Ω :

$$L \frac{d^2\Omega}{dt^2} + R \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\lambda\vartheta}{J} \Omega = \frac{\vartheta}{J} U. \quad (4)$$

Разделив обе части уравнения (57) на L , положив

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda\vartheta}{LJ}} \quad \text{и} \quad d_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{J}{L\lambda\vartheta}}, \quad k = \frac{1}{\lambda},$$

можно привести это уравнение к виду (11) § 3. Если $d_0 < 1$, то данное звено будет колебательным. Условие

$$d_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{J}{L\lambda\vartheta}} < 1$$

выполняется редко и лишь для специальных двигателей с уменьшенным моментом инерции J . Обычно же $d_0 > 1$, и звено двигателя можно представить в виде цепочки из двух инерционных звеньев.

Рассмотрим вновь уравнение (4) для того случая, когда можно пренебречь величиной L ввиду ее малости. Полагая $L = 0$, находим

$$\frac{RJ}{\lambda\vartheta} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{\lambda} U. \quad (5)$$

Положим

$$T_{эм} = \frac{RJ}{\lambda\vartheta}, \quad k_1 = \frac{1}{\lambda}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (59) принимает вид

$$T_{эм} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k_1 U. \quad (7)$$

Это уравнение инерционного звена с коэффициентом усиления k_1 и постоянной времени $T_{эм}$. Последняя носит название электромеханической постоянной времени, так как зависит от электрических и механических параметров.

В расчетах, связанных с двигателями, часто вводят также электрическую постоянную времени цепи якоря. Для выяснения смысла этой величины рассмотрим уравнение (2) при заторможенном якоре двигателя, т. е. при $\Omega = 0$.

Если в рассматриваемом звене считать U входной величиной, а I — выходной, то эти величины оказываются связанными уравнением

$$\frac{1}{R} U = I + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}. \quad (8)$$

Положим

$$\frac{L}{R} = T_э, \quad \frac{1}{R} = k_2. \quad (9)$$

При этих обозначениях уравнение (8) можно переписать в следующем виде:

$$T_э \frac{dI}{dt} + I = k_2 U. \quad (10)$$

Получаем уравнение инерционного звена с постоянной времени, которая называется электрической постоянной времени.

Уравнение (4), служащее для исследования наиболее общего случая, можно переписать в виде

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\lambda\phi}{RJ} \frac{R}{L} \Omega = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda\phi}{RJ} \frac{R}{L} U. \quad (11)$$

С учетом введенных обозначений это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{1}{T_э} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{T_э T_{эм}} \Omega = k_1 \frac{1}{T_э T_{эм}} U \quad (12)$$

или

$$T_э T_{эм} \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_{эм} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k_1 U. \quad (13)$$

Отсюда видно, что при $T_э \rightarrow 0$ уравнение (13) вырождается в (7).

Из уравнения (7) можно найти собственную частоту

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_э T_{эм}}}. \quad (14)$$

Вводя постоянную затухания d_0 , получаем, согласно уравнению (12), $2d_0\omega_0 = \frac{1}{T_э}$, откуда

$$d_0 = \frac{1}{T_э} \frac{1}{2\omega_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_{эм}}{T_э}}. \quad (15)$$

Данное звено может быть колебательным в том случае, когда $d_0 < 1$ или

$$T_{эм} < 4T_э. \quad (16)$$

На практике обычно величина $T_э$ мала и неравенство (16) не имеет места. Поэтому данное звено представляется в виде цепочки из двух инерционных звеньев. Сопоставляя формулы (19) § 3 и (14), получаем выражения для постоянных времени T_1 и T_2 этих звеньев

$$T_1 T_2 = T_э T_{эм}, \quad T_1 + T_2 = T_{эм}. \quad (17)$$

Следовательно, T_1 и T_2 оказываются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - T_{эм}z + T_{э}T_{эм} = 0. \quad (18)$$

Поэтому значения T_1 и T_2 равны

$$T_1 = \frac{T_{эм}}{2} + \sqrt{\frac{T_{эм}^2}{4} - T_{э}T_{эм}}, \quad T_2 = \frac{T_{эм}}{2} - \sqrt{\frac{T_{эм}^2}{4} - T_{э}T_{эм}}. \quad (19)$$

Если $T_{э} \rightarrow 0$, то $T_1 \rightarrow T_{эм}$, а $T_2 \rightarrow 0$, т. е. второе инерционное звено вырождается в усилительное; остается лишь одно инерционное звено с постоянной времени $T_{эм}$. Это звено, как было указано выше, характеризуется уравнением (7).

Если $T_{э}$, увеличиваясь, стремится к $T_{эм}/4$, то в пределе постоянные времени обоих инерционных звеньев становятся равными $T_{эм}/2$, как это следует из формулы (19). При $T_{э} > T_{эм}/4$ звено становится уже колебательным.

Из приведенных выше формул видно, что, пренебрегая малой постоянной времени T_2 , можно вместо цепочки из двух инерционных звеньев рассматривать лишь одно инерционное звено. Таким образом, характер звена зависит от учета его параметров и допустимой при решении данной конкретной задачи идеализации.

Иногда уравнение звена можно еще более упростить. Допустим, например, что в системе наряду с рассматриваемым звеном имеется какое-либо другое со значительно большей постоянной времени. В таком случае иногда при решении конкретной задачи, поставленной для всей системы, можно пренебречь не только $T_{э}$, но и величиной $T_{эм}$, если она мала по сравнению с другой постоянной времени. Тогда уравнение (7) принимает простой вид

$$\Omega = k_1 U, \quad (20)$$

т. е. данное звено представляется в виде усилительного звена. Уравнение (20) можно получить из общего уравнения (4), положив $L = 0$ и $R = 0$. Поэтому нельзя утверждать, что двигатель есть инерционное звено либо цепочка из инерционных звеньев и т. д. Характер идеализации зависимостей конкретного аппарата, а следовательно, и тип звена, которое он представляет, определяется конкретными условиями рассматриваемой задачи.

Вид звена определяется также тем, какие величины приняты в качестве входной и выходной. Рассмотрим тот же пример двигателя независимого возбуждения, но на этот раз в качестве входной величины примем ток I якоря. Выходной величиной пусть будет по-прежнему угловая скорость Ω . Для этого случая из уравнения (3) получаем

$$I = \frac{J}{\vartheta} \frac{d\Omega}{dt} = T_m \frac{d\Omega}{dt}. \quad (21)$$

Это — уравнение интегрирующего звена с коэффициентом усиления $\varepsilon = \frac{1}{T_m}$. Величина T_m носит название механической постоянной времени. Если $I = \text{const} = I_n$, где I_n — номинальное значение тока якоря, то скорость Ω , возрастая от нуля достигает номинального значения Ω_n спустя промежуток времени, равный, согласно уравнению (21), величине

$$t_m = T_m \frac{\Omega_n}{J_n}. \quad (22)$$

Эта величина иногда называется временем разбега.

В качестве следующего примера рассмотрим электропечь (рис. 3.19, б), являющуюся регулируемым объектом. Температуру печи θ можно измерить, например, с помощью термопары T . Приток тепла в печи осуществляется нагревательным сопротивлением R , по которому протекает ток I . Таким образом, ток I является входной величиной данного звена, а температура θ — выходной величиной. Пусть далее θ_a — температура внешнего помещения.

Выясним характер данного звена с динамической точки зрения. При этом примем упрощающие допущения: считаем, что все части печи имеют одну и ту же температуру θ , что, вообще говоря, справедливо лишь приближенно; изучению подлежат лишь небольшие отклонения тока I от некоторой постоянной величины I_0 , т. е.

$$I = I_0 + i,$$

где i может быть как положительно, так и отрицательно и $i \leq I_0$.

Энергия $I^2 R dt$, поступающая в печь от нагревательного сопротивления за бесконечно малый промежуток времени dt , расходуется, во-первых, на нагревательные печи, и во-вторых, на внешнее излучение. Пусть теплоемкость печи равна P дж/град. Чтобы нагреть печь на один градус, необходимо затратить P дж. При нагреве на $d\theta$ градусов затрачивается $P d\theta$ дж. Потери энергии на излучение в одну секунду пропорциональны излучающей поверхности S печи и разности температур $(\theta - \theta_a)$. Поэтому они равны $\nu S (\theta - \theta_a)$, где ν — коэффициент пропорциональности — так называемый коэффициент излучения, имеющий размерность $вт/см^2град$. За время dt потеря энергии на излучение равна $\nu S (\theta - \theta_a) dt$.

Отсюда, согласно закону сохранения энергии, получаем

$$I^2 R dt = \rho d\theta + \nu S (\theta - \theta_a) dt$$

или

$$(I_0 + i)^2 R = \rho \frac{d\theta}{dt} + \nu S (\theta - \theta_a). \quad (23)$$

Так как $i \leq I_0$, то $(I_0 + i)^2 \approx I_0^2 + 2iI_0$ (пренебрегаем членом i^2). Поэтому уравнение (23) можно переписать в следующем виде:

$$I_0^2 R + 2iI_0 R = \rho \frac{d\theta}{dt} + \nu S (\theta - \theta_a). \quad (24)$$

Допустим, что при некоторой температуре θ_0 печи и токе $I = I_0$ приток энергии в печь идет целиком на излучение наружу. Тогда температура печи не меняется, величина $\frac{d\theta}{dt}$ равна нулю, а из уравнения (24) для этого частного случая находим

$$I_0^2 R = \nu S (\theta_0 - \theta_a). \quad (25)$$

Уравнение (25) соответствует, очевидно, установившемуся режиму при $I = I_0$, когда температура печи достигла некоторого постоянного значения θ_0 и далее не меняется. Величину θ_0 можно найти из выражения (25). Подставив значение $I_0^2 R$ из (25) в левую часть уравнения (24), получаем

$$2iI_0 R = \rho \frac{d\theta}{dt} + \nu S (\theta - \theta_0). \quad (26)$$

Обозначим превышение температуры θ над θ_0 через φ :

$$\varphi = \theta - \theta_0. \quad (27)$$

Так как $\theta_0 = \text{const}$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (28)$$

Подставив выражения (27) и (28) в уравнение (26), находим

$$2I_0 R i = \rho \frac{d\varphi}{dt} + \nu S \varphi. \quad (29)$$

Если, наконец, разделить обе части равенства (29) на νS , то уравнение приобретает вид

$$\frac{\rho}{\nu S} \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \frac{2I_0 R}{\nu S} i. \quad (30)$$

Если теперь положим

$$\frac{\rho}{\nu S} = T, \quad \frac{2I_0 R}{\nu S} = k, \quad (31)$$

то уравнение (30) можно написать в виде

$$T \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = ki. \quad (32)$$

Это — уравнение инерционного звена.

Следовательно, если рассматривать отклонения i и φ от постоянных установившихся значений I_0 и θ_0 соответственно как входную и выходную величины, то данное звено является инерционным.

Рассмотрим, наконец, случай, когда выходной величиной звена двигателя является угол поворота α оси, соединенной шестеренной передачей, с передаточным отношением q , с валом двигателя (рис. 3.20). Угловая скорость Ω_0 связана с Ω соотношением

$$\Omega_0 = \frac{\Omega}{q}.$$

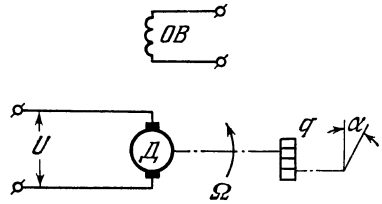


Рис. 3.20.

Пусть входной величиной является напряжение U , поданное в цепь якоря. Пренебрежем электрической и электромеханической постоянными времени.

Так как

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega_0 = \frac{\Omega}{q}, \quad (33)$$

то, подставляя значение $\Omega = k_1 U$ из (20), находим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{k_1 u}{q} = \xi U, \quad (34)$$

где $\xi = \frac{k_1}{q}$. Получаем уравнение интегрирующего звена. Действительно, при включении постоянного напряжения U на входе звена якорь начинает равномерно вращаться, и угол α растет пропорционально времени.

Уравнения звеньев, полученные выше, все линейны и имеют постоянные коэффициенты. Однако эти уравнения получены в результате упрощения и идеализации действительных зависимостей. При выводе уравнения генератора пришлось пренебречь магнитным насыщением и гистерезисом магнитной цепи машины. При выводе уравнения двигателя не учитывался момент сухого трения. При выводе уравнения печи рассматривались лишь малые отклонения тока нагревательного сопротивления от некоторого постоянного значения. Более точный учет реальных зависимостей приводит к нелинейным уравнениям. Однако исследование нелинейных систем, описываемых этими уравнениями, несравненно сложнее, чем рассмотрение линейных систем. Кроме того, опыт показывает, что нередко линейзация зависимостей, замена нелинейной зависимости приближенно воспроизводящей ее линейной не оказывает значительного влияния на итоги исследования. Этим объясняется широкое применение упрощенных методов исследования линеаризованных систем. Не всегда, однако, линейзация системы законна. Иногда игнорирование нелинейного характера зависимости приводит не только к количественным расхождениям между теорией и экспериментами, но и к невозможности объяснить качественные отличия наблюдаемых явлений от теоретически предсказанных. Эти вопросы рассматриваются в дальнейших главах книги.

§ 5. Структурные схемы

Отдельные блоки САР могут быть соединены друг с другом в различных комбинациях. Одним из видов соединения системы блоков является *последовательное соединение n блоков*

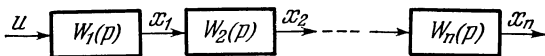


Рис. 3.21.

в этом случае выход первого блока является входом второго блока, выход второго блока является входом третьего и т. д.

Найдем передаточную функцию $W(p)$, связывающую выход системы x_n со входом u . Для каждого блока системы имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= W_1(p) u, \\ x_2 &= W_2(p) x_1, \\ &\dots \\ x_n &= W_n(p) x_{n-1}. \end{aligned}$$

Исключая последовательно все промежуточные переменные, найдем

$$x_n = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p) u = \prod_{i=1}^n W_i(p) u.$$

Легко видеть, что искомая передаточная функция

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p) = \frac{\prod_{i=1}^n K_i(p)}{\prod_{i=1}^n D_i(p)}. \tag{1}$$

Отсюда видно, что

$$K(p) = \prod_{i=1}^n K_i(p),$$

а характеристический полином последовательного соединения блоков равен также произведению характеристических полиномов каждого блока цепи, т. е.

$$D(p) = \prod_{i=1}^n D_i(p).$$

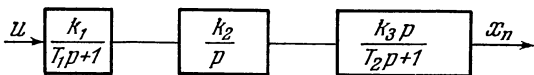


Рис. 3.22.

Из уравнения (1) легко получить дифференциальное уравнение движения выходной координаты x_n под действием входной координаты u

$$D(p) x_n = K(p) u, \prod_{i=1}^n D_i(p) x_n = \prod_{i=1}^n K_i(p) u. \tag{2}$$

Таким образом, задача определения дифференциального уравнения движения всей цепи сводится к алгебраической операции перемножения полиномов.

Пример. Найти уравнение движения системы, изображенной на рис. 3.22.

В соответствии с (2) имеем

$$(T_1 p + 1) p (T_2 p + 1) x_3 = k_1 k_2 k_3 p u,$$

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] x_3 = k_1 k_2 k_3 p u,$$

или

$$T_1 T_2 \frac{d^3 x_3}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \frac{dx_3}{dt} = k_1 k_2 k_3 \frac{du}{dt}.$$

Другим видом соединения блоков является *параллельное соединение n блоков*, когда на вход всех n блоков действует один и тот же входной сигнал u , а выходной сигнал x равен *сумме* выходных сигналов каждого блока (рис. 3.23).

Имеем

$$x_1 = W_1(p) u,$$

$$x_2 = W_2(p) u,$$

$$\dots$$

$$x_n = W_n(p) u.$$

Отсюда складывая почленно все эти равенства, получим

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n W_i(p) u \quad (3)$$

и, следовательно, передаточная функция системы параллельно соединенных блоков имеет вид

$$\frac{x}{u} = W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

Найдем передаточную функцию системы из параллельно соединенных статического и аperiodического звеньев (рис. 3.24).

По формуле (3) имеем

$$\frac{x_1}{u} = W(p) = k_1 + \frac{k_2}{Tp+1} = \frac{k_1 Tp + k_1 + k_2}{Tp+1}.$$

Пусть $k_1 = -k_2$, тогда

$$W(p) = \frac{k_1 Tp}{Tp+1} = \frac{k_3 p}{Tp+1}, \quad (4)$$

где $k_3 = k_1 T$. Этот пример показывает, что реально дифференцирующий

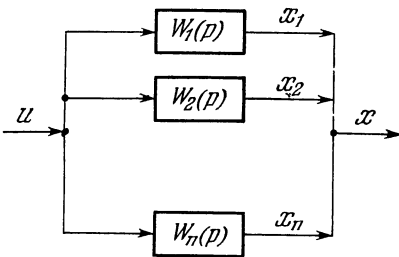


Рис. 3.23.

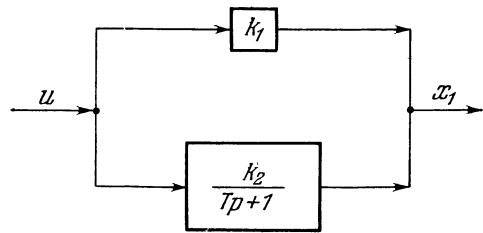


Рис. 3.24.

блок можно получить путем параллельного соединения статического и аperiodического блоков без непосредственного использования дифференцирующего блока.

Часто последовательные соединения блоков образуют *замкнутый контур*, когда входной сигнал подается на какой-либо блок и, пройдя цепочку звеньев, снова поступает на вход этого же блока. Важным типом соединения блоков является *антипараллельное соединение двух* блоков, имеющих произвольные передаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Антипараллельное соединение этих блоков изображено на рис. 3.25. Выход блока $W_1(p)$ обозначается через x и подается на вход блока $W_2(p)$, а выход последнего суммируется (посредством суммирующего звена) со входом u . Здесь уже входной сигнал u рассматривается как вход системы блоков, соединенных антипа-

раллельно. Выходом этой системы будем считать выходной сигнал x блока $W_1(p)$. Выразим теперь передаточную функцию $W(p)$ всей системы через $W_1(p)$ и $W_2(p)$, считая u входом, а x — выходом. Имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= W_1(p) x_2, \\ x_2 &= u + x_1, \\ x_1 &= W_2(p) x. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Исключая из этого уравнения последовательно один за другим промежуточные переменные x_1, x_2 , получим

$$x = W_1(p) [u + W_2(p) x],$$

откуда

$$x - W_1(p) W_2(p) x = W_1(p) u$$

или окончательно

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_2(p) W_1(p)}. \quad (6)$$

Таким образом, передаточная функция $W(p)$ антипараллельного соединения равна

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_2(p) W_1(p)}. \quad (7)$$

Это одна из основных формул структурного метода в теории автоматического регулирования, и ее надо хорошо помнить и понимать. Антипараллельное

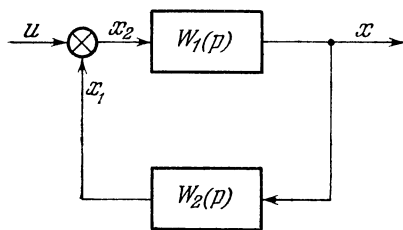


Рис. 3.25.

соединение блоков $W_1(p)$ и $W_2(p)$ можно рассматривать как *замкнутую систему с обратной связью*. Действительно, с помощью блока $W_2(p)$ выходной сигнал x подается *обратно на вход* блока с передаточной функцией $W_1(p)$, и образуется замкнутый контур прохождения сигналов. Поэтому блок $W_2(p)$ называют *блоком обратной связи*, а канал связи от x через $W_2(p)$ к u называют *каналом обратной связи*. Блок $W_1(p)$ называют *блоком прямой связи*, а канал от u до x — *каналом*

прямой связи. Обратная связь называется *отрицательной*, если коэффициент передачи блока $W_2(p)$ в установившемся режиме *отрицателен*. Обратная связь называется *положительной*, если статический коэффициент передачи k блока $W_2(p)$ *положителен*. Например, если $W_2(p) = \frac{-5}{2p+1}$, то $k = -5$ и связь является отрицательной. В другом случае, если, например, $W_2(p) = \frac{6p^2+1}{3p^3+2p}$, то $k = \frac{1}{2}$ и связь будет положительной.

Рассмотрим один простой пример антипараллельного соединения звеньев: $W_1(p) = \frac{k_1}{p}$ и $W_2(p) = k_2$. Иными словами, посмотрим, как изменится передаточная функция интегрирующего звена $W_1(p) = \frac{k_1}{p}$, если его охватить статической обратной связью, т. е. усилительным звеном $W_2(p) = k_2$ (рис. 3.26, а). По формуле (7) имеем

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{\frac{k_1}{p}}{1 - k_2 \frac{k_1}{p}} = \frac{k_1}{p - k_2 k_1} = \frac{\frac{1}{k_2}}{1 - \frac{1}{k_2 k_1} p}.$$

Если обозначить $T = -\frac{1}{k_1 k_2}$ и $k = \frac{1}{k_2}$, то связь между u и x в этом случае осуществляется так же, как в апериодическом звене

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{k}{Tp+1}.$$

Для того чтобы постоянная времени T этого звена была положительна, очевидно, надо потребовать, чтобы коэффициенты k_1 и k_2 имели *разные знаки*. В противном случае и $T < 0$ и апериодическое звено превратится в неустойчивое, положение равновесия которого возможно лишь при $u = 0$.

В дальнейшем этот вопрос будет рассмотрен подробнее.

Сделаем еще одно важное замечание.

Формула (7) для передаточной функции антипараллельного соединения справедлива для любой замкнутой системы с произвольными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ в канале прямой и обратной связи.

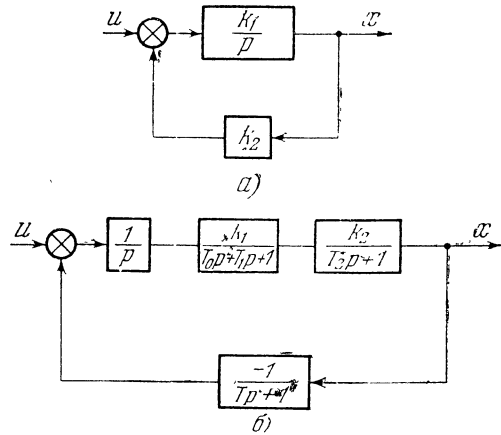


Рис. 3.26.

Пусть $W_1(p) = \frac{K_1(p)}{D_1(p)}$ и $W_2(p) = \frac{K_2(p)}{D_2(p)}$; тогда по формуле (7) имеем

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{\frac{K_1(p)}{D_1(p)}}{1 - \frac{K_1(p)}{D_1(p)} \cdot \frac{K_2(p)}{D_2(p)}} = \frac{K_1(p) D_2(p)}{D_1(p) D_2(p) - K_1(p) K_2(p)}$$

или

$$[D_1(p) D_2(p) - K_1(p) K_2(p)] x = K_1(p) D_2(p) u.$$

Отсюда характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$D_1(p) D_2(p) - K_1(p) K_2(p) = 0. \tag{8}$$

Видно, что полиномы с индексами 1 и 2 входят равноправно, от их перемены уравнение (8) не изменится. Следовательно, характеристическое уравнение системы не зависит от того, в каком месте действует входной сигнал u и в каком месте рассматривается выходной сигнал x , т. е. характеристическое уравнение отражает внутреннее свойство системы, не зависящее от того, что мы считаем входным и выходным сигналами. Из формулы (8) видно, что для того, чтобы получить характеристическое уравнение любой замкнутой одноконтурной системы, надо перемножить все полиномы знаменателей и перемножить все полиномы числителя, а результаты сложить.

Пусть, в частности, $W_2(p) = -1$, тогда

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)} = \frac{K_1(p)}{D_1(p) + K_1(p)}.$$

Следовательно, уравнение движения замкнутой системы с выходной координатой x и входным воздействием u имеет вид

$$[D_1(p) + K_1(p)] x = K_1(p) u,$$

отсюда видно, что $K_1(p) + D_1(p)$ есть характеристический полином и, следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$D_1(p) + K_1(p) = 0.$$

Рассмотрим пример составления передаточной функции замкнутой САР, изображенной на рис. 3.26, б. В этом случае

$$W_1(p) = \frac{k_1 k_2}{p(T_0 p^2 + T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}; \quad W_2(p) = \frac{-k}{T p + 1}.$$

Используя формулу (7), получим

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_2(p)W_1(p)} = \frac{\frac{k_1 k_2}{p(T_0 p^2 + T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}}{\left[1 + \frac{k_1 k_2 k}{p(T_0 p^2 + T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T p + 1)}\right]}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$p(T_0 p^2 + T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T p + 1) + k k_1 k_2 = 0.$$

Как мы видели выше, интегрирующее звено является неустойчивым звеном в том смысле, что выходной сигнал интегратора x не будет изменяться тогда и только тогда, когда входной сигнал $u = 0$.

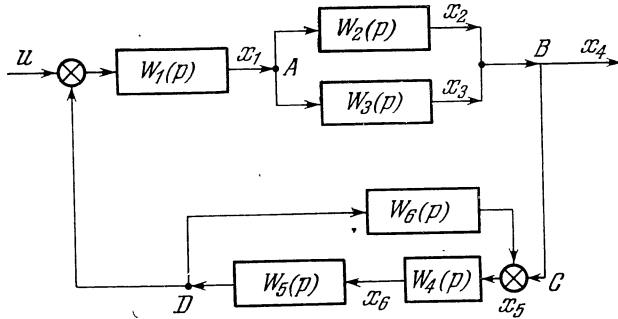


Рис. .273.

Рассмотрим пример на составление передаточной функции $W(p)$ от u и x_4 сложной замкнутой структурной схемы САР, имеющей внутренние петли

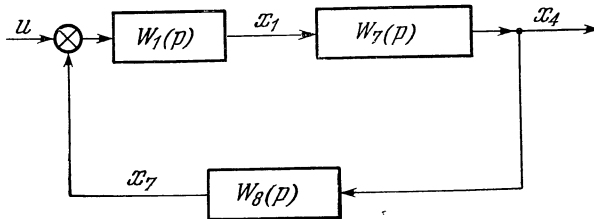


Рис. 3.28.

прямых и обратных связей (рис. 3.27). Сначала вычислим передаточную функцию между точками A и B, получим по формуле для параллельного соединения блоков

$$W_7(p) = W_2(p) + W_3(p).$$

Далее вычислим передаточную функцию между точками С и D, где имеется местная обратная связь

$$W_8(p) = \frac{W_4(p) W_5(p)}{1 - W_4(p) W_5(p) W_6(p)} .$$

После этого схема, изображенная на рис. 3.27, превратится в схему, изображенную на рис. 3.28.

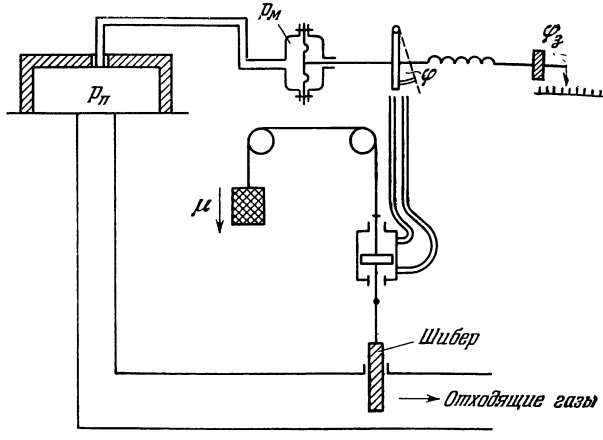


Рис. 3.29.

Снова применим формулу (7), получим искомую передаточную функцию

$$\frac{x_4}{u} = W(p) = \frac{W_1(p) W_7(p)}{1 - W_1(p) W_7(p) W_8(p)} .$$

Найдем для примера передаточную функцию системы регулирования давления в печи P_п (рис. 3.29) (сигнал задания φ₃).

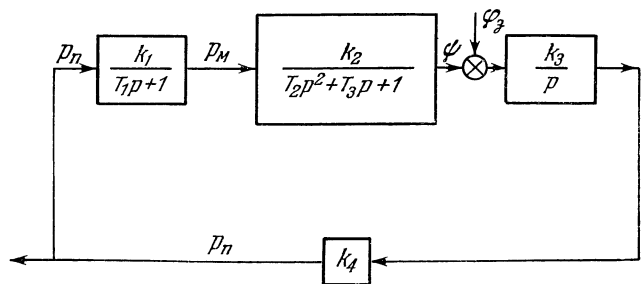


Рис. 3.30.

Структурная схема системы регулирования изображена на рис. 3.30. Применяя формулу (7), получим

$$\frac{P_{п}}{P_3} = W(p) = \frac{\frac{k_3 k_4}{p}}{1 - \frac{k_3 k_4}{p} \cdot \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)}} = \frac{k_3 k_4}{p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1) - k_1 k_2 k_3 k_4} .$$

§ 6. Примеры уравнений и структурных схем систем автоматического регулирования

Установившаяся погрешность. Любую систему автоматического регулирования можно представить составленной из описанных в § 3 этой главы звеньев. Пока рассматриваются лишь линейные системы автоматического регулирования. При подобном представлении получаем структурную схему системы регулирования. Рассмотрим в качестве примера следующую систему, схема которой изображена на рис. 3.31. Пусть имеется некоторая ось CC' , которую назовем задающей. Угол поворота α_0 этой оси задается извне и является установленной величиной. Задачи следящей системы заключаются в том, чтобы угол поворота α другой оси DD' , которую назовем приемной, равнялся α_0 . Величина α_0 может быть, вообще говоря,

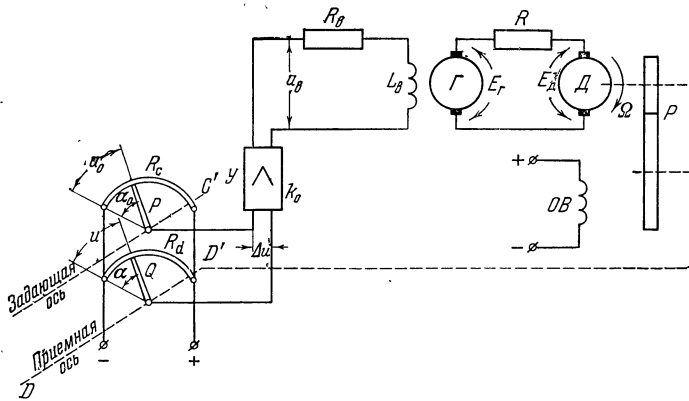


Рис. 3.31.

любой функцией времени. Ось DD' должна автоматически следовать за осью CC' . В качестве измерительного органа системы автоматического регулирования на схеме, изображенной на рис. 3.31, применена цепь, состоящая из двух потенциометров R_c и R_d , движки которых укреплены на осях CC' и DD' . Если $\alpha = \alpha_0$, то потенциалы движков u_0 и u равны друг другу, и их разность Δu — напряжение между движками P и Q — равна нулю. Если же $\alpha \neq \alpha_0$, то $\Delta u = u_0 - u \neq 0$. Напряжение Δu приложено к входным зажимам усилителя Y с коэффициентом усиления k_0 . На выходе усилителя образуется напряжение $u_b = k_0 \Delta u$, вызывающее ток I_b в обмотке возбуждения генератора G . В свою очередь появление электродвижущей силы генератора E_g вызывает ток I в цепи якоря двигателя D независимого возбуждения. Последний через шестеренную передачу с передаточным числом q вращает приемную ось до тех пор, пока Δu не обратится в нуль. Тогда напряжение u_b станет равно нулю, и система придет к состоянию равновесия.

Уравнения, связывающие между собой величины u_b , E_g , I и Ω были написаны выше, в § 4. Пренебрежем индуктивностью в цепи якоря, которая обычно бывает достаточно мала, и положим $L = 0$, $u = \beta \alpha$, $u_0 = \beta \alpha_0$ (где $\beta = \text{const}$), а также обозначим

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= x, & \frac{1}{\lambda} &= k_2, \\ \frac{RI}{\Phi \lambda} &= T_2, & \frac{\beta}{q} &= \xi_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Тогда можно привести всю систему уравнений к «стандартному» виду

$$\left. \begin{aligned} x &= u_0 - u, \\ u_B &= k_0 x, \\ k_1 u_B &= E_r + T_1 \frac{dE_r}{dt}, \\ k_2 E_r &= \Omega + T_2 \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{du}{dt} &= \xi_0 \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

На основании этих уравнений можно начертить структурную схему системы регулирования. Первое из уравнений (2) означает, что величина x равна разности двух величин u_0 и u , что условно изображено на рис. 3.32, а. Второе

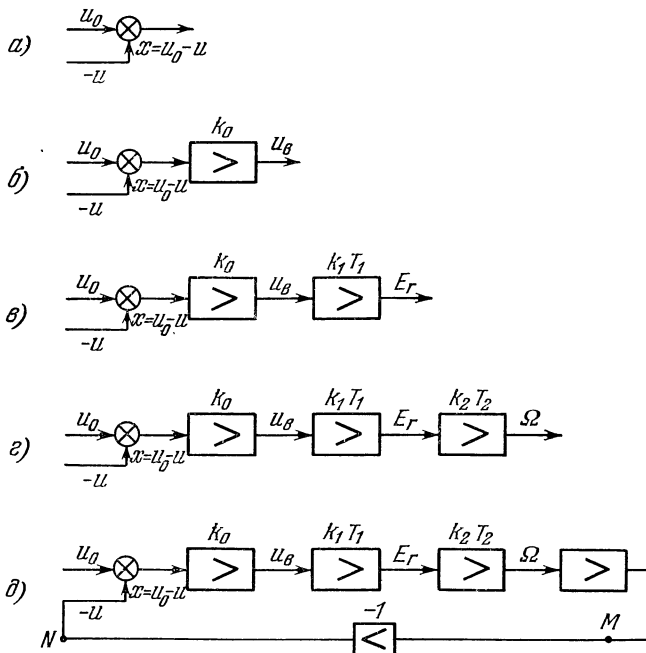


Рис. 3.32.

из уравнений есть уравнение усилительного звена с коэффициентом усиления k_0 , на вход которого подана величина x , а на выходе имеется величина u_B . Следовательно, чтобы изобразить на схеме величину u_B , нужно добавить прямоугольник, изображающий на структурной схеме усилительное звено (рис. 3.32, б). Третье из уравнений (2) есть уравнение инерционного звена с входной величиной u_B и выходной E_r . Прибавляя к схеме инерционное звено, получаем картину, изображенную на рис. 3.32, в. Четвертое из уравнений (2) — тоже уравнение инерционного звена с входной величиной E_r и выходной Ω . Добавляя это звено, получаем рис. 3.32, г. Наконец, последнее из уравнений (2) есть уравнение интегрирующего звена. Добавляем это звено к структурной схеме и замечаем, что его выходная величина есть та самая величина, которая подается на вход структурной схемы. Поэтому выходную величину тракта u нужно подать, начертив линию MN , обратно на вход системы (рис. 3.32, д). Так как на вход системы подается $-u$,

то величину u нужно провести через усилитель с коэффициентом усиления -1 , так называемый инвертор.

Таким образом, система действительно оказывается состоящей из замкнутой цепочки звеньев. Если все звенья расположены последовательной цепочкой, так, как это изображено на рис. 3.32, ∂ , то структурную схему называют *одноконтурной*. В схеме рис. 3.32, ∂ присутствует, помимо усилительного и инерционных звеньев, интегрирующее звено. Назовем системы, у которых в одноконтурной структурной схеме имеются интегрирующие звенья, *астатическими*. Таким образом, исследуемая следящая система является астатической. Ниже будет показано, что при $u_0 = \text{const}$ у нее отсутствует погрешность в установившемся режиме.

Чтобы найти уравнение движения, написанное для погрешности $\Delta u = x$, нужно исключить из уравнений (2) остальные переменные. Подставим в последнее из этих уравнений значение $u = u_0 - x$ из первого уравнения; затем найденное значение из последнего подставим в предпоследнее уравнение

$$\Omega = \frac{1}{\xi_0} \frac{du}{dt} = \frac{1}{\xi_0} \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{dx}{dt} \right).$$

Тогда из предпоследнего уравнения найдем

$$\begin{aligned} E_{\Gamma} &= \frac{1}{k_2} \left[\Omega + T_2 \frac{d\Omega}{dt} \right] = \frac{1}{k_2} \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) + \frac{T_2}{\xi_0} \left(\frac{d^2u_0}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{k_2 \xi_0} \left[\frac{du_0}{dt} - \frac{dx}{dt} + T_2 \left(\frac{d^2u_0}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставив значение E_{Γ} в третье снизу уравнение (2), находим

$$\begin{aligned} u_{\text{в}} &= \frac{1}{k_1} \left(E_{\Gamma} + T_1 \frac{dE_{\Gamma}}{dt} \right) = \frac{1}{k_1 k_2 \xi_0} \left[\frac{du_0}{dt} - \frac{x}{dt} + T_2 \left(\frac{d^2u_0}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + T_1 \left(\frac{d^2u_0}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) + T_1 T_2 \left(\frac{d^3u_0}{dt^3} - \frac{d^3x}{dt^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение выражение $u_{\text{в}} = k_0 x$ из второго сверху уравнения (2), преобразовав полученное уравнение для x и положив

$$\xi = \xi_0 k_0 k_1 k_2, \quad (3)$$

приходим к уравнению

$$T_1 T_2 \frac{d^3x}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \xi x = \frac{du_0}{dt} + (T_1 + T_2) \frac{d^2u_0}{dt^2} + T_1 T_2 \frac{d^3u_0}{dt^3}. \quad (4)$$

Это уравнение движения системы. Оно имеет третий порядок. Величина ξ называется коэффициентом усиления астатической системы.

Найдем из уравнения (4) установившуюся погрешность для различных режимов, т. е. при различных $u_0 = f(t)$. Пусть, например, $u_0(t)$ есть ступенчатая функция. Тогда $u_0 = \text{const}$ при $t > 0$ и все производные $\frac{du_0}{dt}$,

$\frac{d^2u_0}{dt^2}$, $\frac{d^3u_0}{dt^3}$ в правой части уравнения (4) обращаются в нуль. После окончания переходного процесса обратятся в нуль и производные $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$ и уравнение (4) для установившейся погрешности x_s примет вид

$$\xi x_s = 0, \quad \text{т. е.} \quad x_s = 0.$$

Итак, когда u_0 — ступенчатая функция, то установившаяся погрешность равна нулю. Если до начального момента времени система находилась в покое (система находится в покое тогда, когда все ее звенья находятся в покое), то этот режим иногда называют *режимом обработки начального рассогласования*.

Установившаяся погрешность не равна, однако, нулю в режиме работы равномерного движения, т. е. тогда, когда задающая ось равномерно вращается. Пусть $u_0 = At$, где $A = \text{const}$. Тогда $\frac{du_0}{dt} = A, \frac{d^2u_0}{dt^2} = 0$ и т. д.; после переходного процесса, когда производные погрешности x обратятся в нуль, получим из уравнения (4) выражение для установившейся погрешности x_s

$$\xi x_s = A,$$

откуда

$$x_s = \frac{A}{\xi}. \tag{5}$$

Отсюда ясно, что для уменьшения установившейся погрешности x_s необходимо увеличивать коэффициент усиления системы ξ . Пусть, например,

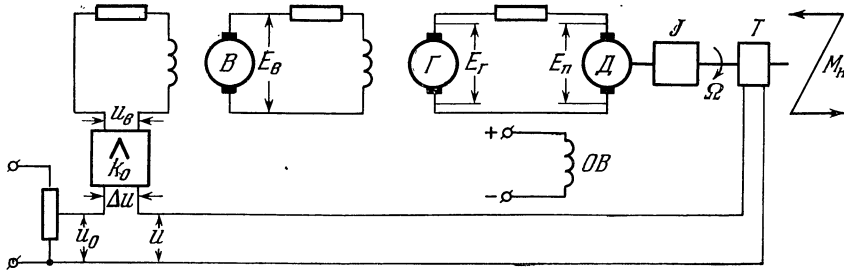


Рис. 3.33.

в угловых единицах $A = 30^\circ/\text{сек}$; если требуется погрешность $x_s \leq 0,1^\circ$, то величина ξ должна, согласно уравнению (5), удовлетворять неравенству

$$\xi \geq \frac{A}{x_s} = \frac{30^\circ/\text{сек}}{0,1^\circ} = 300 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Величина ξ имеет размерность $1/\text{сек}$.

Рассмотрим в качестве другого примера систему регулятора скорости, схема которой изображена на рис. 3.33. Задача состоит в том, чтобы скорость Ω вала двигателя независимого возбуждения D устанавливалась положением движка потенциометра R_0 и не зависела при определенном положении движка «ни от каких» факторов, в том числе и от переменного момента нагрузки M_n на валу двигателя. В качестве измерительного органа служит тахогенератор T , на зажимах которого при вращении его якоря с угловой скоростью Ω появляется напряжение $u = k_6\Omega$ (k_6 — коэффициент пропорциональности). Это напряжение сравнивается с напряжением u_0 , поступающим от командного потенциометра (u_0 — установленная величина для u). Разность $\Delta u = u_0 - u$ поступает на вход усилителя с коэффициентом усиления k_0 . Усиленное напряжение приложено к зажимам обмотки возбуждения возбудителя u_B . Цепь обмотки возбуждения возбудителя имеет омическое сопротивление R_B и индуктивность L_B . Электродвижущую силу E_B возбудителя будем считать пропорциональной току возбуждения I_B . Следовательно, $E_B = \sigma_B I_B$. Электродвижущая сила E_B вызывает ток I_B в обмотке возбуждения генератора G , питающего цепь якоря двигателя D (пусть омическое сопротивление этой цепи R_r и индуктивность L_r). Примем, что электродвижущая сила генератора $E_r = \sigma_r I_r$, где $\sigma_r = \text{const}$.

Предположим, что вследствие какой-либо причины (например, увеличения момента нагрузки M_n) скорость Ω уменьшается, тогда уменьшается и u_1 , вследствие чего на входе усилителя увеличивается напряжение $\Delta u = u_0 - u$. Это увеличение вызывает увеличение тока возбуждения I_B ,

увеличение электродвижущей силы возбудителя E_B , что увеличивает ток I_Γ и электродвижущую силу генератора E_Γ . Поэтому увеличивается ток I в цепи якоря двигателя, что вызывает увеличение вращающего момента $M_{вр} = \Phi I$ и ускорение вала. Следовательно, скорость Ω должна увеличиться, и ее уменьшение, имевшее место в начальный момент, может быть почти скомпенсировано.

Уравнения, связывающие величины, показанные на рис. 3.33, имеют, как это было показано выше, такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= x = u_0 - u, \quad u_B = k_0 x, \\ u_B &= I_B R_B + L_B \frac{dI_B}{dt}, \\ E_B &= \sigma_B I_B, \quad E = I_\Gamma R_\Gamma + L_\Gamma \frac{dI_\Gamma}{dt}, \\ E_\Gamma &= \sigma_\Gamma I_\Gamma, \quad E_\Gamma - \lambda \Omega = IR, \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= \Phi I - M_H, \quad u = k_0 \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Рассмотрим сначала группу из двух уравнений, входящих в состав (6),

$$\left. \begin{aligned} E_\Gamma - \lambda \Omega &= IR, \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= \Phi I - M_H. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Второе из этих уравнений есть уравнение интегрирующего звена, на вход которого подана разность $I - \frac{M_H}{\Phi}$. Действительно, это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Phi}{J} \left(I - \frac{M_H}{\Phi} \right) = \xi_0 \left(I - \frac{M_H}{\Phi} \right).$$

Поэтому могло бы показаться, что в состав структурной схемы входит интегрирующее звено и исследуемая система является астатической. Однако

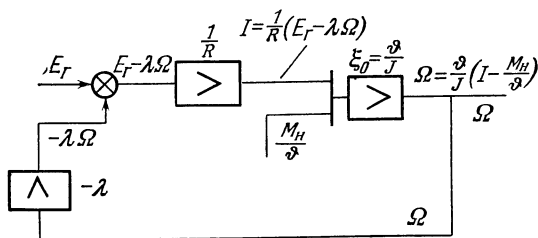


Рис. 3.34.

необходимо учесть, что астатической называется лишь такая система, у которой интегрирующее звено входит в *одноконтурную* структурную схему. Рассмотрим участок структурной схемы, соответствующий уравнениям (7). Первое уравнение есть уравнение усилительного звена, на вход которого подается разность $E_\Gamma - \lambda \Omega$. Между тем Ω есть входная величина последующего звена, описываемого вторым из уравнений (7). Поэтому структурная схема имеет вид, изображенный на рис. 3.34, и не является простой цепочкой последовательно соединенных звеньев, т. е. структурная схема системы не является одноконтурной схемой. Необходимо преобразовать структурную схему системы к эквивалентной одноконтурной схеме и лишь после этого

произвести суждение о характере системы. Чтобы показать, как производится это преобразование в данном примере, рассмотрим участок структурной схемы, показанный на рис. 3.34. Преобразовать этот участок к одноконтурной схеме можно, обратившись к уравнениям (7) и исключив из них промежуточную величину — ток I . Подставляя значение I из первого уравнения во второе, получаем

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Phi \left(\frac{E_{\Gamma} - \lambda\Omega}{R} \right) - M_{\text{H}}$$

или

$$\frac{JR}{\Phi\lambda} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{E_{\Gamma}}{\lambda} - \frac{R}{\Phi\lambda} M_{\text{H}}. \quad (8)$$

Положив

$$T_3 = \frac{JR}{\Phi\lambda}, \quad k_3 = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{R}{\Phi\lambda} = k'_{\text{H}}. \quad (9)$$

приведем уравнение (8) к виду

$$T_3 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k_3 E_{\Gamma} - k'_{\text{H}} M_{\text{H}}. \quad (10)$$

Это — уравнение инерционного звена, на вход которого подана величина $k_3 E_{\Gamma} - k'_{\text{H}} M_{\text{H}}$ с коэффициентом усиления, равным единице, и постоянной времени T_3 . Следовательно, после преобразования оказалось, что на данном участке в одноконтурной схеме нет интегрирующего звена.

Полагаем далее

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{\text{B}}} = k_1, \quad \frac{I_{\text{B}}}{R_{\text{B}}} = T_1, \\ \sigma_{\text{B}} = k_4, \quad \sigma_{\Gamma} = k_5, \\ \frac{1}{R_{\Gamma}} = k_2, \quad \frac{L_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} = T_2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В этих обозначениях уравнения системы приводятся к стандартному виду

$$\left. \begin{aligned} x = u_0 - u, \quad u_{\text{B}} = k_0 x, \quad k_1 u_{\text{B}} = I_{\text{B}} + T_{\text{B}} \frac{dI_{\text{B}}}{dt}, \\ E_{\text{B}} = k_4 I_{\text{B}}, \quad k_2 E_{\text{B}} = I_{\Gamma} + T_2 \frac{dI_{\Gamma}}{dt}, \\ E_{\Gamma} = k_5 I_{\Gamma}, \quad k_3 E_{\Gamma} - k'_{\text{H}} M_{\text{H}} = \Omega + T_3 \frac{d\Omega}{dt}, \\ u = k_6 \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из уравнений (12) три являются уравнениями инерционных звеньев, а остальные — уравнениями усилительных звеньев. Все эти звенья соединены последовательно. Так как интегрирующих звеньев в этой цепочке нет, то система не является астатической. Система без интегрирующих звеньев в одноконтурной структурной схеме является *статической*.

Структурная схема, построенная согласно уравнениям (12), показана на рис. 3.35. Из структурной схемы видно, что возмущающие силы приложены в двух местах системы. Вообще говоря, любое из звеньев системы может быть подвергнуто действию возмущающих сил, и наиболее полная схема содержала бы возмущающие силы на входе каждого звена. Исключая из уравнений (12) все переменные, кроме x и возмущающих сил, и полагая

$$k = k_0 k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6, \quad k_{\text{H}} = k'_{\text{H}} k_6,$$

приходим к уравнению системы

$$\begin{aligned}
 T_1 T_2 T_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{dx}{dt} + (1 + k) x = \\
 = T_1 T_2 T_3 \frac{d^3 u_0}{dt^3} + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \frac{d^2 u_0}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{du_0}{dt} + \\
 + u_0 + k_4 M_H + (T_1 + T_2) k_H \frac{dM_H}{dt} + T_1 T_3 k_H \frac{d^2 M_H}{dt^2}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Величина k называется коэффициентом усиления системы. Как видно из последующего изложения, она играет весьма важную роль как расчетный параметр.

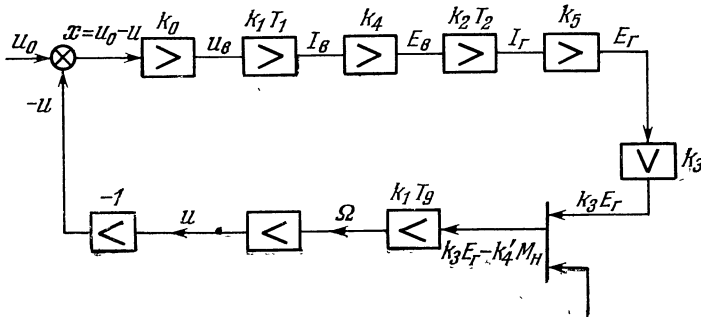


Рис. 3.35.

Пусть при $t > 0$ величины $u_0 = \text{const}$ и $M_H = \text{const}$. Тогда установившаяся погрешность x_s , согласно уравнению (13), может быть выражена следующей формулой:

$$(1 + k) x_s = u_0 + k_H M_H \quad (14)$$

или

$$x_s = \frac{u_0}{1+k} + \frac{k_H M_H}{1+k}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что в статической системе установившаяся погрешность при постоянных возмущающих силах не равна нулю; при изменении момента M_H будет меняться и погрешность x_s , т. е. при постоянном положении движка потенциометра R_0 будет несколько изменяться и скорость Ω , пропорциональная u . Это изменение можно сделать достаточно малым, если коэффициент усиления системы k принять достаточно большим (тогда, согласно формуле (15), x_s мал). Таким образом, статические системы обладают принципиально неустранимой погрешностью x_s при постоянных значениях возмущающих сил — так называемой статической погрешностью, пропорциональной коэффициенту, который называется коэффициентом статизма:

$$s = \frac{1}{1+k}.$$

Однако это не является препятствием для применения статических систем, так как при увеличении k погрешность x_s может быть доведена до вполне приемлемой малой величины.

Обратимся к уравнению (15) и рассмотрим сначала режим холостого хода двигателя при $M_H = 0$. Тогда второе слагаемое в формуле (14) исчезает и остается лишь первое слагаемое, которое обозначим через x_{s1} ,

$$x_{s1} = \frac{u_0}{1+k}. \quad (16)$$

Если бы регулятор был идеальным, т. е. если бы коэффициент усиления k был равен бесконечности, то погрешность x_{s1} была бы равна нулю и напряжения u_0 и u были бы равны друг другу. Так как u пропорционально регулируемой величине Ω , то зависимость Ω от u_0 можно заменить зависимостью u от u_0 . Эта зависимость — характеристика идеального регулятора — показана слева на рис. 3.36. Характеристика идеального регулятора соответствует уравнению $u = u_0$ и поэтому является биссектрисой прямого угла — прямая AO . В действительности имеет место погрешность x_{s1} , определяемая формулой (16). Так как $u = u_0 - x_{s1}$, то характеристика реального регулятора изображается прямой BO , лежащей ниже AO , причем разность ординат AO и BO равна $\frac{u_0}{1+k}$.

На первый взгляд кажется, что характеристика BO не имеет никаких принципиальных недостатков по сравнению с AO , и если исходить лишь из условий холостого хода, можно выбрать коэффициент усиления k малым.

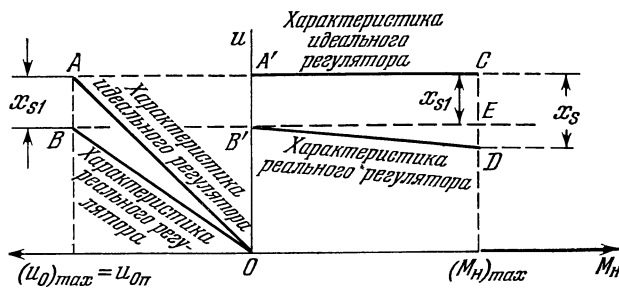


Рис. 3.36.

Действительно, характеристика BO дает однозначное соответствие между регулируемой величиной Ω (или пропорциональным ей напряжением u) и установленной величиной u_0 . Однако параметры звеньев системы подвержены колебаниям. Поэтому будет колебаться и величина k . Если значение k мало и x_{s1} (отрезок AB на рис. 3.36) представляет собой не очень малую величину, то колебание k вызовет смещение или колебание характеристики реального регулятора, и зависимость u от u_0 не будет точной. Если же коэффициент k достаточно велик, то отрезок AB очень мал; тогда даже большое процентное колебание величины k не вызовет заметного смещения характеристики регулятора. Независимость характеристики регулятора от колебания параметров системы является весьма важным достоинством систем автоматического регулирования.

Введем теперь момент нагрузки M_H . На правой части рис. 3.36 изображена зависимость x_s от M_H при $u_0 = \text{const}$. Вид этой зависимости ясен из формулы (15), где теперь следует учесть, кроме первого, еще второе слагаемое

$$x_{s2} = \frac{k_H M_H}{1+k}. \quad (17)$$

Если бы регулятор был идеальным, т. е. $k = \infty$, то погрешность x_{s2} была бы равна нулю; характеристикой идеального регулятора явилась бы горизонтальная прямая $A'C$ (см. рис. 3.36). Однако в реальной системе даже на холостом ходу ($M_H = 0$) величина u изображается не отрезком AO , а отрезком OB . Кроме того, при $M_H \neq 0$ существует второе слагаемое погрешности x_{s2} , пропорциональное M_H . Поэтому характеристика реального регулятора изобразится наклонной прямой $B'D$. Отрезок CD есть погрешность x_s ; как видно из рис. 3.36, он является суммой x_{s1} и x_{s2} . Величина x_{s1} носит название погрешности по уставке, а x_{s2} — погрешности по нагрузке.

Обычно требуется, чтобы отношение

$$s_1 = \frac{x_{s1}}{u_{0п}},$$

где $u_{0п}$ — максимальное значение u_0 не превышало допустимой величины. Точно так же отношение

$$s_2 = \frac{x_{s2}}{u_{0п}}$$

не должно превышать допустимой величины при максимальном значении M_n .

Величины s_1 и s_2 называются соответственно статизмом по уставке и статизмом по нагрузке.

Общий статизм $s = s_1 + s_2$ есть отношение $x_s/u_{0п}$ при указанных выше условиях.

Рассмотрим в качестве последнего примера схему регулятора курса, показанную на рис. 3.37. Пусть ось движка потенциометра R_1 указывает направление курса, а ось обмотки потенциометра R_1 совпадает с продольной осью самолета. Тогда отклонение самолета от заданного курса на угол ψ

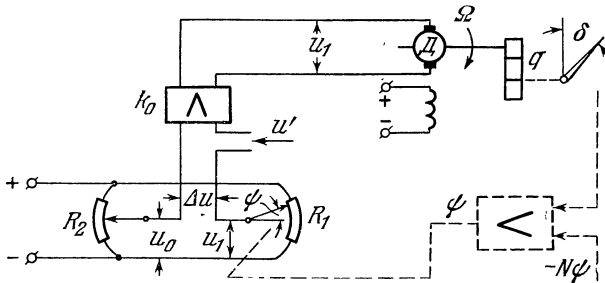


Рис. 3.37.

создает отклонение движка потенциометра R_1 на угол от среднего положения. В идеальном случае угол ψ должен быть равным нулю и движок потенциометра R_1 должен находиться точно посередине обмотки. Поэтому установленное значение u_0 для выходного напряжения u_1 потенциометра R_1 может быть получено от потенциометра R_2 , приключенного к тому же источнику напряжения, при-

чем движок потенциометра R_2 должен находиться точно посередине обмотки. Разность этих напряжений $\Delta u = u - u_0$ поступает на вход усилителя с коэффициентом усиления k_0 . К входу того же усилителя приложено еще вспомогательное напряжение u' , смысл введения которого выяснится ниже. Выходное напряжение усилителя u' приложено к зажимам якоря двигателя независимого возбуждения D . Будем пренебрегать индуктивностью цепи якоря и моментом инерции на валу двигателя D . Поэтому можно положить $\Omega = k_1 u_1$. Через шестеренную передачу с передаточным отношением (на замедление) q вал двигателя соединен с валом руля направления, угол поворота которого обозначен через δ . Поворот руля направления создает момент, в первом приближении равный $\rho\delta$, где $\rho = \text{const}$, и действующий на самолет. Пусть момент инерции самолета относительно вертикальной оси J и момент вязкого трения (демпфирования) в воздушной среде относительно той же оси, пропорциональной угловой скорости поворота, равен $-N \frac{d\psi}{dt}$. Тогда уравнение движения для вращения самолета вокруг вертикальной оси имеет вид

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} = -N \frac{d\psi}{dt} - \rho\delta. \tag{18}$$

При $\delta > 0$ момент руля действует в направлении уменьшения, создавая отрицательное ускорение $\frac{d^2\psi}{dt^2} < 0$.

Положим $\Delta u = x$. Поскольку величина x пропорциональна углу ψ , можно положить $x = k_3\psi$, где $k_3 = \text{const}$. Совокупность уравнений системы имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -N \frac{d\psi}{dt} - \rho\delta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{\Omega}{q}, \quad \Omega = k_1 u_1, \\ u_1 &= k_0(x + u'), \quad x = k_3\psi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Пусть

$$\frac{1}{q} = \xi_0, \quad T = \frac{J}{N}, \quad k_2 = \frac{\rho}{N}. \quad (20)$$

Тогда уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} T \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} &= -k_2\delta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \xi_0\Omega, \quad \Omega = k_1 u_1, \\ u_1 &= k_0(x + u'), \quad x = k_3\psi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Чтобы выяснить, каким звеньям соответствует первое из уравнений (21), положим $\frac{d\psi}{dt} = \varphi$. Тогда это уравнение разобьется на совокупность двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} T \frac{d\varphi}{dt} + \varphi &= -k_2\delta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Получаем уравнение цепочки, состоящей из двух последовательно соединенных звеньев: инерционного с постоянной времени T и коэффициентом усиления k_2 и интегрирующего звена с уравнением $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi$. Поскольку в системе уравнений присутствует еще k_3 одно уравнение интегрирующего звена $\frac{d\delta}{dt} = \xi_0\Omega$, данная система является астатической и содержит два интегрирующих звена.

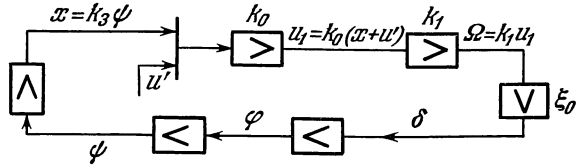


Рис. 3.38.

Структурная схема системы показана на рис. 3.38. На структурной схеме не изображены напряжения u_0 и u , а прямо показана их разность $x = u - u_0$. Поскольку одно из звеньев имеет отрицательный коэффициент усиления $-k_2$, необходимая отрицательная связь в системе обеспечена. Исключим из уравнений (21) все переменные, кроме x и u' . Для этого удобнее всего продифференцировать первое уравнение, подставив в него x из последнего уравнения, затем подставив вместо $d\delta/dt$ значение из второго уравнения, вместо Ω — значение из третьего уравнения, вместо u_1 — значение из четвертого уравнения.

Полагая

$$\xi = k_0 k_1 k_2 k_3 \xi_0, \quad (23)$$

находим

$$T \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \xi(x + u') = 0. \quad (24)$$

Если положить здесь $u' = 0$, то получим уравнение регулятора курса без дополнительных связей

$$T \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \xi x = 0. \tag{25}$$

В этом уравнении коэффициент при dx/dt равен нулю. Как будет показано в следующей главе, в этом случае уравнение (25) описывает движение неустойчивой системы. Любая система без дополнительных связей с последовательным соединением двух интегрирующих звеньев будет неустойчивой. Для достижения устойчивости необходимо введение дополнительных связей, пример чего был приведен в предыдущей главе.

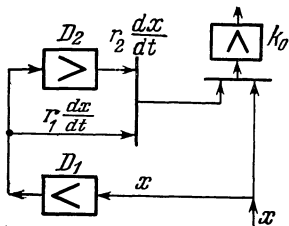


Рис. 3.39.

Дополнительные связи можно вводить различными способами. Разберем два способа.

Жесткая обратная связь. Пусть дополнительное напряжение пропорционально

$$u' = -r\delta. \tag{26}$$

Здесь $r = \text{const}$. Для получения u' можно, например, соединить механически с осью руля движок потенциометра R_2 (см. рис. 3.37) и, таким образом, передать на вход усилителя k_0 дополнительное напряжение, пропорциональное δ . Из первого и последнего уравнений (21) находим

$$\delta = \frac{T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}}{k_2 k_3}. \tag{27}$$

Тогда, согласно выражению (26),

$$u' = \frac{r}{k_2 k_3} \left(T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \right). \tag{28}$$

Подставив это выражение в уравнение (24), получим

$$T \frac{d^3x}{dt^3} + \left(1 + \xi \frac{r}{k_2 k_3} T \right) \frac{d^2x}{dt^2} + \xi \frac{r}{k_2 k_3} \frac{dx}{dt} + \xi x = 0. \tag{29}$$

Как будет показано в следующей главе, можно, подбирая надлежащее значение r , сделать систему устойчивой.

Введение производных. Как указывалось в предыдущих параграфах, существуют звенья, позволяющие получить сигнал, пропорциональный производной от входной величины. С точки зрения динамической такие устройства являются дифференцирующими звеньями. Если подать на подобное звено D_1 величину x (рис. 3.39), то на его выходе получим величину $r_1 \frac{dx}{dt}$, где $r_1 = \text{const}$. Подав, в свою очередь, эту величину на вход второго дифференцирующего звена D_2 , получим на выходе последнего величину $r_2 \frac{d^2x}{dt^2}$.

Сумму выходных величин

$$u' = r_1 \frac{dx}{dt} + r_2 \frac{d^2x}{dt^2} \tag{30}$$

подадим в сумме с напряжением x на вход усилителя k_0 . Подставив выражение для u' из (30) в уравнение (24), получим

$$T \frac{d^3x}{dt^3} + (1 + \xi r_2) \frac{d^2x}{dt^2} = \xi r_1 \frac{dx}{dt} + \xi x = 0. \tag{31}$$

Подбором значений r_1 и r_2 можно не только достичь устойчивости (устойчивости можно добиться и при $r_2 = 0$), но и обеспечить более благоприятные характеристики, например более плавный переходный процесс, чем в первом

случае. Однако устройство для получения производных сложнее, чем приспособление для жесткой обратной связи.

Рассмотрим еще один пример астатической системы, содержащей одно интегрирующее звено в одноконтурной структурной схеме (рис. 3.40, а). Без ограничения общности рассуждений можно расположить интегрирующее звено последним в цепочке. Цепочка звеньев иногда называется трактом схемы. Рассмотрим сначала установившийся режим при возмущающей силе u , имеющей вид ступенчатой функции. Предположим сначала, что $u_y \neq 0$. Тогда $x_{n-1} = k_1 k_2 \dots k_{n-1} u_y \neq 0$. Так как для выходной величины интегрирующего звена справедлива формула

$$\frac{dx}{dt} = \xi x_{n-1} = \xi_0 k_1 k_2 \dots k_{n-1} u_y = \xi u_y, \quad (32)$$

то при $u_y \neq 0$ величина x будет изменяться и, вопреки предположению, установившееся ее значение не будет достигнуто. При достижении установившегося значения x и при значении $dx/dt = 0$ обязательно должно быть $u_y = 0$. Следовательно, как уже об этом говорилось, в астатической системе не существует установившейся погрешности в режиме отработки начального расогласования, т. е. при постоянном значении x .

Рассмотрим теперь установившийся режим при $u = At$ (см. рис. 3.40, б). Регулируемая величина, копируя движение установленной величины u , в идеальной системе также должна быть равна At . Однако, как следует из формулы (32), при $dx/dt = A$ должна обязательно существовать не равная нулю установившаяся погрешность

$$u_y = \frac{(dx/dt)_{уст}}{\xi} = \frac{A}{\xi}.$$

Следовательно, величина x должна отставать от u на величину x_s , достаточную для того, чтобы выходная величина тракта x менялась с той же скоростью, что и u .

Иначе говоря, для получения определенной скорости изменения выходной величины должно существовать не равное нулю расогласование на входе и в этом режиме для астатической системы с одним интегрирующим звеном погрешность x_s отлична от нуля. Читателю предоставляется самому показать, что для сведения этой величины к нулю необходимо поместить два интегрирующих звена в структурной схеме.

Из рассмотрения системы на рис. 3.40 можно вывести важное следствие: безразлично, в каком порядке расположены звенья в одноконтурной схеме — коэффициент усиления не меняется при изменении расположения звеньев. Можно далее изменить коэффициенты усиления звеньев самым различным образом, лишь бы только их произведение, т. е. коэффициент усиления системы, оставалось постоянным; при подобном изменении величина погрешности не меняется. Это правило, как увидим ниже, справедливо не только для установившихся, но и для переходных процессов. Последнее можно усмотреть на приведенных выше примерах; например, в уравнении (4) фигурирует в качестве коэффициента только ξ — коэффициент усиления системы, а не его множители ξ_0, k_1 и т. д.

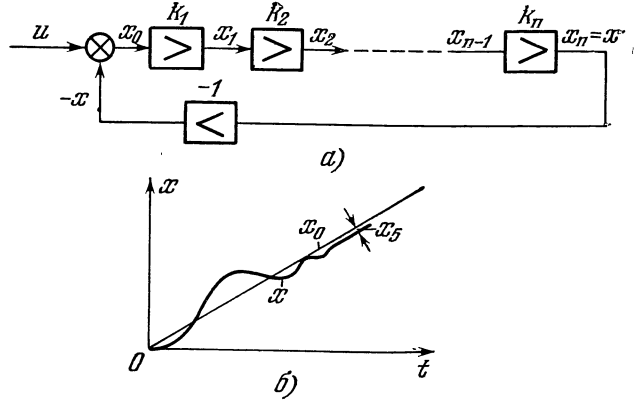


Рис. 3.40.

Г л а в а IV

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 1. Понятие устойчивости линейных систем автоматического регулирования

Основное условие нормального функционирования системы автоматического регулирования состоит в требовании устойчивости ее переходного процесса. Термин *устойчивость* настолько выразителен, что он говорит сам за себя. Однако точное определение устойчивости неэлементарно. «Интуитивное» понятие устойчивости, на котором мы остановимся в настоящей

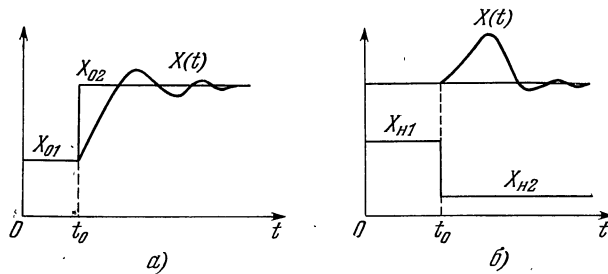


Рис . 4.1.

главе, большей частью соответствует линейным стационарным системам. Более строгие определения даются дальше — при рассмотрении нелинейных систем.

Устойчивость линейных систем определяется свойствами самой системы и не зависит от характера действующих на нее возмущений. Устойчивость или неустойчивость системы характеризуется расположением корней ее характеристического уравнения.

Для физической трактовки понятия устойчивости линейных систем рассмотрим ступенчатое воздействие, приложенное к одной из точек тракта системы, и исследуем существование установившегося режима системы, т. е. существование

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_y. \quad (1)$$

На рис. 4.1, а изображен устойчивый процесс регулирования при возмущении по заданию, а на рис. 4.1, б — устойчивый процесс регулирования при возмущении по нагрузке.

Если рассматривать величину ошибки $x = X_0 - X$, то условие (1) можно записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_y. \quad (2)$$

При этом рис. 4.1, *a* будет соответствовать рис. 4.2, *a*, а рис. 4.1, *б* будет соответствовать рис. 4.2, *б*.

Неустойчивый же процесс характеризуется тем, что величина ошибки $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ не стремится вообще ни к какому установившемуся значению x_y . Такой процесс в установившемся режиме может носить или ярко

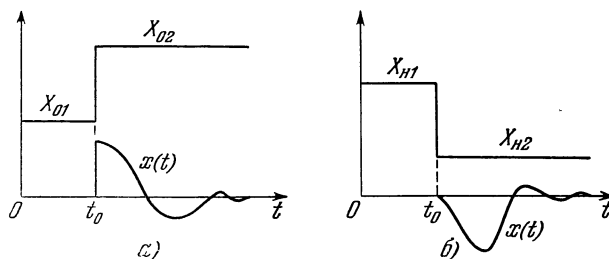


Рис. 4.2.

выраженный колебательный характер (рис. 4.3, *a*), или вообще расходиться (рис. 4.3, *б*).

Итак, рассмотрим линейную систему с входной возмущающей величиной u и выходной величиной X . Величина u может быть либо нагрузкой,

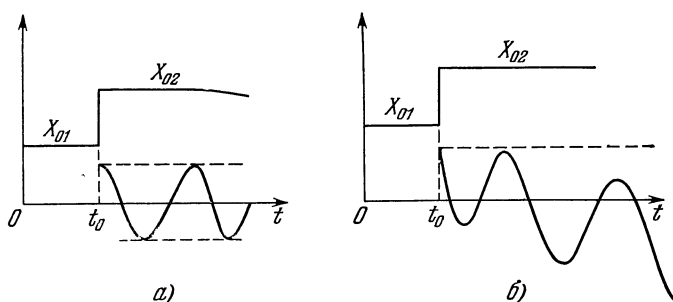


Рис. 4.3.

либо заданием, а X — регулируемой координатой. Тогда наиболее общее уравнение движения такой системы имеет вид

$$a_0 X^{(n)} + a_1 X^{(n-1)} + \dots + a_n X = b_0 u^{(k)} + b_1 u^{(k-1)} + \dots + b_n (u). \quad (3)$$

Требуется установить, будет ли данная система устойчивой? Иными словами, надо исследовать решение этого уравнения. Прямой метод решения этого вопроса состоит в нахождении решения дифференциального уравнения (3). Решение этого уравнения можно представить в виде суммы

$$X = x_{\text{ч}} + x_{\text{об}},$$

где $x_{\text{ч}}$ есть произвольное частное решение этого уравнения с правой частью (в качестве такого решения можно взять решение для установившегося режима) и $x_{\text{об}}$ есть общее решение соответствующего (3) однородного уравнения, т. е. уравнения (3) с тождественно равной нулю правой частью.

Последнее решение часто называют собственным решением уравнения (3). Так как часто возмущение $u = \text{const}$ при $t > t_0$, то $x_{\text{ч}}$ также будет постоянной величиной и, следовательно, устойчивость системы будет полностью определяться решением $x_{\text{об}}$ соответствующего однородного уравнения:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0. \quad (4)$$

Заметим, что решение этого уравнения не зависит от параметров b_0, b_1, \dots, b_k правой части уравнения (3) и от характера изменения возмущающего воздействия $u(t)$. Таким образом, устойчивость есть некоторое внутреннее свойство системы, *не зависящее от внешних воздействий* на нее.

Общее решение соответствующего (3) однородного уравнения можно записать в виде

$$x_{об}(t) = \sum_{i=1}^n c_i g_i(t) e^{p_i t}, \quad (4a)$$

где c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) есть произвольные постоянные, определяемые заданием n начальных условий; p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — корни соответствующего характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (5)$$

а $g_i(t)$ — полином от t , степень которого меньше кратности соответствующего корня p_i . В тех случаях, когда все корни p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) различны, решение $x_{об}$ можно записать в виде

$$x_{об}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}. \quad (6)$$

В общем случае корень p_i комплексный, т. е. имеет вид

$$p_i = \alpha_i + j\omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а соответствующее ему слагаемое при отсутствии кратных корней в (4a) имеет вид

$$c_i g_i(t) e^{p_i t} = c_i g_i(t) e^{p_i t} = c_i g_i(t) e^{\alpha_i t} (\cos \omega t + j \sin \omega t). \quad (7)$$

Отсюда видно, что если $\alpha_i < 0$, то $c_i e^{p_i t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и наоборот, для того чтобы $c_i e^{p_i t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы $\alpha_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Поэтому для устойчивости системы необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные (строго!) действительные части¹⁾.

Как видно из формулы (4a), для общего решения однородного уравнения время переходного процесса определяется величиной η , равной расстоянию ближайшего корня до мнимой оси (рис. 4.4). Это условие имеет простой геометрический смысл. Если корни характеристического уравнения изображать соответствующими точками на комплексной плоскости, то ясно, что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения лежали в левой полу-

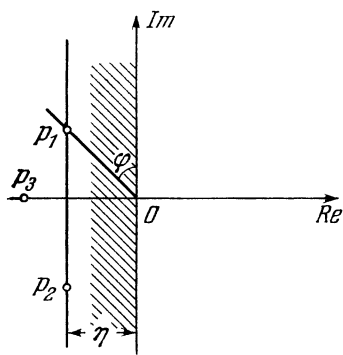


Рис. 4.4.

плоскости (строго слева от мнимой оси). Таким образом, чтобы определить устойчива данная система или нет, вообще говоря, вовсе нет необходимости в точности знать действительные части всех корней p_i и уметь их вычислять. Вполне достаточно располагать лишь сведениями о знаке действительных частей этих корней. Поэтому далее мы рассмотрим простые критерии, которые по виду характеристического уравнения позволили бы судить об устойчивости системы.

¹⁾ Требование стремления к нулю составляющих решения однородного уравнения соответствует так называемой *асимптотической устойчивости*.

§ 2. Необходимое условие устойчивости

Можно легко указать необходимый признак устойчивости системы. Для устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными. (Мы всегда считаем $a_0 > 0$.) Это условие можно назвать тривиальным. Действительно, пусть p_1, p_2, \dots, p_n — корни характеристического уравнения устойчивой системы. Характеристическое уравнение (5) § 1 можно записать в виде

$$a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n) = 0. \quad (1)$$

Если $p_i = \alpha_i$ — действительный корень, то в силу устойчивости системы $\alpha_i < 0$. Тогда в сомножителе $p - p_i = p - \alpha_i$ в уравнении (1) все коэффициенты положительны. Если $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ — комплексный корень и $\alpha_i < 0$ в силу устойчивости системы, то должен существовать корень $p_k = \alpha_i - j\omega_i$, комплексно сопряженный с p_i (так как характеристическое уравнение имеет действительные коэффициенты). Тогда пара сомножителей

$$(p - p_i) (p - p_k) = (p + \alpha + j\omega) (p + \alpha - j\omega) = (p + \alpha)^2 + \omega^2 \quad (2)$$

также будет иметь положительные коэффициенты. Отсюда следует, что после раскрытия скобок в выражении (1) и приведения его к виду (5) § 1 все коэффициенты будут положительными.

Таким образом, если система регулирования устойчива, то все коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n характеристического уравнения обязаны быть строго положительными. Если хотя бы один из коэффициентов характеристического уравнения будет отрицательным или равным нулю, то можно сразу сказать, что система неустойчива. Таким образом, неположительность хотя бы одного коэффициента характеристического уравнения гарантирует неустойчивость системы, однако обратное, вообще говоря, неверно, т. е. положительность всех коэффициентов характеристического уравнения еще не гарантирует устойчивости этой системы. Положительность всех коэффициентов характеристического уравнения есть необходимое и достаточное условие лишь для систем первого и второго порядков. Уже для системы третьего порядка положительность коэффициентов характеристического уравнения недостаточна для устойчивости системы.

Рассмотрим эти случаи, начиная с системы первого порядка

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = 0. \quad (3)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 p + a_1 = 0, \quad (4)$$

откуда единственный действительный корень этого уравнения равен

$$p_i = -\frac{a_1}{a_0}. \quad (5)$$

Так как мы будем считать коэффициент a_0 при старшем числе p^n характеристического уравнения всегда положительным $a_0 > 0$, то $p < 0$ тогда и только тогда, когда и $a_1 > 0$. Следовательно, условие устойчивости для уравнения (3) можно записать в форме

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0. \quad (6)$$

Здесь необходимым и достаточным условием устойчивости системы является положительный знак всех коэффициентов уравнения.

Пусть начальное значение $x(0) = x_0$; тогда решение уравнения (3) принимает вид

$$x(t) = x_0 e^{p_1 t} = x_0 e^{-\frac{a_1 t}{a_0}}. \quad (7)$$

Это — экспонента, асимптотически стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \quad (8)$$

Полагаем и здесь $a_0 > 0$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0. \quad (9)$$

Решение этого уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}. \quad (10)$$

Требуется найти условия, при которых корни p_1 и p_2 характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Разберем сначала случай комплексно сопряженных корней уравнения (9). Как видно из выражения (10), в этом случае

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0. \quad (11)$$

Действительная часть корней p_1 и p_2 равна $-a_1/2a_0$; она отрицательна, если $a_1 > 0$. Далее, из неравенства (11) следует, что в данном случае $a_2 > 0$. Следовательно, для случая комплексно сопряженных корней положительные знаки всех коэффициентов уравнения (9) являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости. Это справедливо и для случая действительных корней. В самом деле, пусть

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0 \quad (12)$$

и корни $p_{1,2}$ уравнения (9) действительны. Если бы было $a_1 < 0$, то один из корней (см. (10)) был бы наверняка положительным. Поэтому должно удовлетворяться условие $a_1 > 0$. Однако и при этом условии один из корней, а именно

$$\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0},$$

будет отрицателен лишь тогда, когда подкоренное выражение меньше, чем a_1^2 , т. е. тогда, когда $a_0 a_2 > 0$. Отсюда следует $a_2 > 0$. Итак, все коэффициенты должны быть положительными.

§ 3. Условия устойчивости систем третьего порядка

Рассмотрим теперь систему регулирования, движение которой описывается уравнением третьего порядка

$$a_0 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3 x = 0. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (2)$$

Общее решение уравнения третьей степени известно, но оно весьма громоздко и в случае действительных корней теряет практическое значение. Однако существует способ, который позволяет, не решая характеристического уравнения, установить знаки действительных частей его корней, что и необходимо для выяснения вопроса об устойчивости. Условия положительности коэффициентов уравнения являются в данном случае необходимыми,

хотя и недостаточными условиями устойчивости; требуется добавление еще одного условия, к выводу которого мы сейчас перейдем.

При исследовании уравнения (2) ограничимся поэтому практически интересным случаем положительных коэффициентов уравнения

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0. \quad (3)$$

Характеристические уравнения с положительными коэффициентами обладают важным свойством; эти уравнения не имеют действительных положительных корней. Действительно, если все коэффициенты уравнения (5) § 1 положительны, то любое действительное положительное значение p , подставленное в левую часть уравнения, не может обратиться в нуль и, следовательно, не является корнем уравнения. Поэтому при условии (2) невозможна аperiodическая неустойчивость. Однако может возникнуть колебательная неустойчивость. В частности, при некотором соотношении коэффициентов система может оказаться на «пороге неустойчивости», когда пара комплексно сопряженных корней находится на мнимой оси. При этом корнем характеристического уравнения является чисто мнимое число

$$p = j\omega, \quad (4)$$

где $j = \sqrt{-1}$ и ω — действительное число.

Найдем условие, при соблюдении которого уравнение (2) имеет чисто мнимый корень, а система находится на «пороге неустойчивости». Подставляя выражение (4) в уравнение (2), получаем, учитывая, что $p^2 = \omega^2$ и $p^3 = -j\omega^3$,

$$-ja_0\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3 = 0$$

или

$$(a_3 - a_1\omega^2) + j\omega(a_2 - a_0\omega^2) = 0. \quad (5)$$

Это равенство эквивалентно двум равенствам — отдельно для действительной и мнимой частей, так как оно удовлетворяется лишь при условии

$$a_2 - a_0\omega^2 = 0$$

и

$$a_3 - a_1\omega^2 = 0.$$

Определяя ω^2 из этих двух равенств, находим $\omega^2 = \frac{a_1}{a_0}$ и $\omega^2 = \frac{a_3}{a_1}$, откуда следует

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_3}{a_1}$$

или

$$a_1a_2 - a_0a_3 = 0. \quad (6)$$

Это и есть условие «порога неустойчивости». Можно доказать также и обратное утверждение: если справедливо равенство (4), то уравнение (2) имеет чисто мнимый корень вида (4). Для доказательства следует повторить все рассуждения, которые привели к равенству (6) в обратном порядке.

Из приведенных выше рассуждений следует также, что в тех случаях, когда равенство (6) не удовлетворяется, а удовлетворяются неравенства

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \quad (7)$$

или

$$a_1a_2 - a_0a_3 < 0, \quad (8)$$

не существует чисто мнимых корней уравнения (2). Следовательно, в этих случаях корни находятся где-либо в левой или правой полуплоскостях комплексного переменного, но не на мнимой оси.

Вся совокупность возможных значений коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) делится на две области, из которых одна характеризуется соблюдением неравенства (7), а другая — неравенства (8). Перейти из одной области в другую путем непрерывного изменения коэффициентов можно, лишь пройдя через границу, разделяющую области и характеризуемую равенством (6). В то же время от одной из совокупностей значений a_i , характеризуемой, например, неравенством (7), можно перейти путем непрерывного изменения коэффициентов к любой другой совокупности, характеризуемой тем же неравенством, не пересекая границу области, т. е. так, что в течение всего перехода соотношение (7) между коэффициентами a_i сохраняется. Аналогичное замечание можно сделать и о совокупностях коэффициентов, характеризуемых неравенством (8).

Покажем, что при соблюдении условия (7) система устойчива, а при соблюдении условия (8) — неустойчива.

Дадим сначала коэффициентам a_i частные значения, удовлетворяющие неравенству (7), например:

$$a_0 > 0, \quad a_1 = 3aa_0, \quad a_2 = 3a^2a_0, \quad a_3 = a^3a_0, \quad (9)$$

где $a = \text{const} > 0$. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$a_0(p + a)^3 = 0;$$

откуда его корни

$$p_1 = p_2 = p_3 = -a < 0. \quad (10)$$

Если при одном частном значении совокупности значений коэффициентов a_i (9) система оказалась устойчивой, то она будет устойчивой и при любых значениях a_i , удовлетворяющих, как и значения (9), неравенству (7). Действительно, от значений (7) можно перейти к любым другим значениям коэффициентов, удовлетворяющих неравенству (7), не переходя через границу, характеризуемую равенством (6). При непрерывном изменении коэффициентов a_i корни характеристического уравнения, являющиеся непрерывными функциями коэффициентов a_i , также непрерывно изменяют свое положение на комплексной плоскости, так сказать, «ползут» по комплексной плоскости. В начале изменения все корни (см. равенство (10)) находились в левой полуплоскости. В течение всего процесса изменения коэффициентов никогда не осуществляется равенство (6), следовательно, пара комплексно сопряженных корней не оказывается на мнимой оси. Отсюда следует, что в течение всего изменения коэффициентов корни «ползают» в левой полуплоскости и не перебираются в правую полуплоскость. Поэтому и после перехода к другим значениям коэффициентов, удовлетворяющим неравенству (7), все корни нового уравнения находятся в левой полуплоскости. Итак, система при условии (7) устойчива. Дадим теперь коэффициентам частные значения, удовлетворяющие неравенству (8), например:

$$a_0 > 0, \quad a_1 = a_0a, \quad a_2 = 4a^2a_0, \quad a_3 = 30a^3a_0. \quad (11)$$

Здесь $a = \text{const} > 0$. Корни соответствующего уравнения

$$p_1 = -3a, \quad p_{2,3} = a(1 \pm 3j). \quad (12)$$

Корни $p_{2,3}$ находятся в правой полуплоскости. Поэтому система неустойчива. Перейдем от значений коэффициентов (11) к любым другим значениям, характеризуемым неравенством (8), с помощью непрерывного изменения коэффициентов без перехода через границу (6). Рассуждая так же, как выше, можно убедиться в том, что и для нового решения пара комплексно сопряженных корней находится в правой полуплоскости. Следовательно, система неустойчива, если удовлетворяется условие (8).

Итак, для уравнения третьего порядка с *положительными* коэффициентами необходимым и достаточным условием устойчивости системы является соблюдение неравенства (7). Это последнее условие словесно можно формулировать еще и так: произведение «внутренних» коэффициентов (a_1, a_2 характеристического уравнения (2)) должно быть больше произведения «внешних» коэффициентов (a_0, a_3 того же уравнения (2)).

§ 4. Критерий устойчивости Рауса — Гурвица

Раусом и Гурвицем независимо друг от друга и в несколько различной форме даны неравенства, соблюдение которых является необходимым и достаточным условием устойчивости системы любого порядка. Система неравенств Гурвица строится следующим образом. Допустим, что $a_0 > 0$ и построим квадратную матрицу с n -строками и n -столбцами (таблицу) Рауса — Гурвица из коэффициентов уравнения (5) § 1

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Мнемоническое правило для составления этой матрицы следующее. В *первом* столбце выписываются все *нечетные* коэффициенты характеристического уравнения, начиная с a_1 . Затем каждая строка матрицы дописывается последовательно коэффициентами с уменьшающимися номерами вплоть до a_0 , после чего дописываются нули так, чтобы общее количество элементов в строке равнялось n . Например, третья строка матрицы должна начинаться с нечетного коэффициента a_5 и выглядеть следующим образом:

$$\underbrace{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 0 0 \dots 0}_n.$$

Если, например, уравнение имеет четвертый порядок, то для него $a_i = 0$ при $i > 4$ и соответствующие коэффициенты надо заменять нулями. Пусть n — порядок уравнения (5) § 1; система устойчива только в том случае, когда n диагональных миноров матрицы (1) положительны. Эти определители легко найти, отчеркивая их справа и снизу, как показано штриховыми чертами в определителе (1). Определители Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \tag{2}$$

и т. д.

Нетрудно показать, что при $a_i > 0$ для уравнений третьего и четвертого порядков условием устойчивости служит только неравенство $\Delta_{n-1} > 0$, т. е. достаточно проверить знак только у $(n - 1)$ -го определителя Гурвица. Например, для уравнения

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 \tag{3}$$

при $a_i > 0$ условие устойчивости имеет вид

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0. \tag{4}$$

Это условие совпадает с (7) § 3. Действительно, нет необходимости в проверке всех трех определителей Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , так как Δ_2 наверняка больше нуля, а $\Delta_3 = a_3\Delta_2$ (поскольку $a_5 = a_4 = 0$). Таким образом, если $\Delta_2 > 0$, то и $\Delta_3 > 0$.

Для уравнения четвертого порядка

$$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0 \quad (5)$$

при положительных значениях коэффициентов имеется лишь одно условие устойчивости — положительный знак предпоследнего определителя Гурвица.

Действительно, пусть

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_3a_0) - a_4a_1^2 > 0. \quad (6)$$

Определитель

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

так как коэффициенты положительны. Последний определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4\Delta_3 > 0,$$

если $\Delta_3 > 0$. Далее, из выражения (6) следует, что определитель Δ_3 может быть положителен лишь тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Но это и есть определитель Δ_2 . Поэтому специальной проверки Δ_2 не нужно. Достаточно для исследования устойчивости проверить лишь справедливость неравенства (6). Аналогичным путем можно показать, что для уравнений пятого порядка при $a_i > 0$ достаточно проверить соблюдение неравенств $\Delta_4 > 0$ и $\Delta_2 > 0$.

При порядке уравнения, большем четвертого-пятого, удобнее пользоваться методом Рауса, который приводится ниже без доказательства. Построим таблицу (матрицу):

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \dots \\ d_0 & d_2 & d_4 & \dots \\ c_1 & c_3 & c_5 & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Здесь a_0, a_1, a_2, \dots — коэффициенты характеристического уравнения (5) § 1. Другие коэффициенты — b_i, c_i, d_i и т. д. — находятся по рекуррентным формулам, приведенным ниже.

Составим из основной матрицы (7) вспомогательные матрицы, имеющие лишь по две соседние строки основной матрицы. Составляя эти матрицы, каждый раз будем подниматься на одну строку вверх.

Получим

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{cccc} c_0 & c_2 & c_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \end{array} \right|; \\ \left| \begin{array}{cccc} b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{cccc} c_1 & c_3 & c_5 & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots \end{array} \right|; \\ \left| \begin{array}{cccc} b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{cccc} d_0 & d_2 & d_4 & \dots \\ c_1 & c_3 & c_5 & \dots \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad (8)$$

и т. д.

Миноры каждой предыдущей матрицы, включающие первый столбец, образуют последовательность искомых коэффициентов верхней строки следующей матрицы:

$$\left. \begin{array}{l} b_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}, \quad b_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ a_0 & a_6 \end{vmatrix}, \\ b_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_5 = \begin{vmatrix} b_0 & b_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \\ c_0 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}, \quad c_4 = \begin{vmatrix} b_1 & b_7 \\ b_0 & b_6 \end{vmatrix}, \\ c_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} c_0 & c_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix} \dots \end{array} \right\} \quad (9)$$

и т. д.

Условием устойчивости является положительность элементов первых столбцов всех матриц, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \\ c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_0 > 0, \quad d_1 > 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

и т. д. Число отрицательных знаков в этих выражениях (10) равно числу корней характеристического уравнения, расположенных в правой полуплоскости.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$p^6 + 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1 = 0.$$

Коэффициенты $a_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, 6$).

Коэффициенты b_i, c_i, d_i имеют в данном случае значения

$$\begin{aligned} b &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 6 \cdot 15 - 20 \cdot 1 = 70 > 0, \\ b_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 84 > 0, \\ b_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ a_0 & a_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0, \\ b_1 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 84 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 546 > 0, \\ b_3 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 384 > 0, \end{aligned}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 546 & 384 \\ 70 & 84 \end{vmatrix} = 18984 > 0,$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 546 & 0 \\ 70 & 6 \end{vmatrix} = 3276 > 0,$$

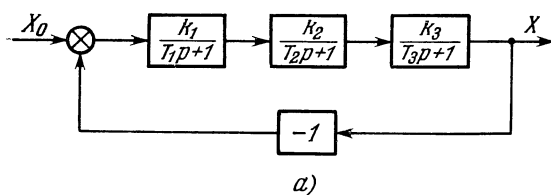
$$c_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18984 & 3276 \\ 546 & 384 \end{vmatrix} = 7289856 - 1788696 > 0,$$

$$d_0 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_0 & 3276 \end{vmatrix} > 0.$$

Семь коэффициентов $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, d_0$ положительны. Следовательно, рассматриваемая система шестого порядка устойчива. Проверка устойчивости той же системы с помощью определителей Гурвица потребовала бы преобразования определителей высокого порядка, причем лишь после сложных преобразований удалось бы свести цифровые подсчеты к тем же, какие делаются при применении критерия Рауса. Поэтому при проверке устойчивости систем высокого порядка предпочтительнее пользоваться критерием устойчивости в форме Рауса.

§ 5. Устойчивость и установившаяся погрешность

Как было указано выше, к системе автоматического регулирования предъявляются требования устойчивости переходного процесса и точности (малости ошибки) в установившемся режиме. Однако эти два требования находятся в довольно тесной связи друг с другом. Для иллюстрации этой связи рассмотрим в качестве примера работу системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 4.5, а. Дифференциальное уравнение для



изменения во времени регулируемой координаты X в этой системе имеет вид

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k] X = k X_0, \quad (1)$$

или

$$T_1 T_2 T_3 \frac{d^3 X}{dt^3} + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \frac{d^2 X}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{dX}{dt} + (1 + k) X = k X_0, \quad (2)$$

где $k = k_1 k_2 k_3$.

Пусть на вход системы подается ступенчатая функция $X_0 = c$. Если система устойчива,

то после окончания переходного процесса регулируемая координата X примет некоторое установившееся постоянное значение $X = X_y$. Так как в установившемся режиме все производные от X равны нулю, то из уравнения (2) получаем $(1 + k) X_y = k C$, откуда

$$X_y = \frac{k}{1+k} C. \quad (3)$$

Таким образом, установившееся значение регулируемой координаты отличается от заданного значения C .

Если ввести погрешность установившегося значения x_s , то можно записать

$$x_s = C - X_y = C - \frac{k}{1+k} C = \frac{C}{1+k}. \quad (4)$$

Тогда относительная погрешность s установившегося значения, которую называют коэффициентом статизма или просто статизмом, равна

$$s = \frac{x_s}{C} = \frac{1}{1+k}. \quad (5)$$

Как уже отмечалось раньше, системы, у которых в установившемся режиме (когда все производные по времени от регулируемой координаты равны нулю) существует установившаяся погрешность x_s , называются *статическими*. В статической системе принципиально необходимо наличие некоторого статизма, так как для получения конечной величины X_y на выходе системы необходима хотя и малая, но отличная от нуля величина ошибки x_y . Системы, в которых такая погрешность отсутствует, называются *астатическими системами*. Легко видеть, что для того, чтобы система стала астатической, достаточно, чтобы в замкнутом контуре структурной схемы системы присутствовало *интегрирующее звено*. Например, система, изображенная на рис. 4.5, б, будет астатической. Действительно, легко получить, что уравнение для X будет иметь вид

$$T_1 T_2 \frac{d^3 X}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dX}{dt} + kX = kX_0, \quad (6)$$

где $k = k_1 k_2$. И после отработки ступенчатого входного сигнала $X_0 = C$ будем иметь

$$X_y = C, \quad (7)$$

т. е. установившаяся погрешность равна нулю:

$$x_s = X_y - C = 0. \quad (8)$$

Таким образом, чем больше статизм s в статической системе, тем больше установившаяся погрешность регулируемой величины x_s . Из формулы (5) видно, что для того, чтобы уменьшить установившуюся погрешность в статической системе, необходимо сделать общий коэффициент усиления системы k как можно большим. Например, чтобы получить установившуюся относительную погрешность s менее 0,01 (т. е. меньше 1%), необходимо выбрать $k > 99$. Однако при достаточно большом коэффициенте усиления k система может стать неустойчивой. Действительно, как показано в § 3 этой главы, нетривиальное требование устойчивости для рассматриваемой системы третьего порядка состоит в том, чтобы выполнялось условие

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + k) > 0. \quad (9)$$

Отсюда должно выполняться условие

$$\frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (T_1 + T_2 + T_3)}{T_1 T_2 T_3} - 1 > k.$$

Таким образом, предельное значение коэффициента усиления системы $k = k_{\text{пр}}$ равно

$$\begin{aligned} k_{\text{пр}} &= \frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (T_1 + T_2 + T_3)}{T_1 T_2 T_3} = \\ &= 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}, \end{aligned}$$

т. е. $k_{\text{пр}}$ зависит от постоянных времени отдельных звеньев системы T_1 , T_2 , T_3 . Например, в случае $T_1 = T_2 = T_3$ коэффициент k достигает $k_{\text{пр}} = 8$, т. е. для устойчивости системы необходимо, чтобы $k = k_1 k_2 k_3 < 8$, что находится в противоречии с требованием малости величины статизма s .

Итак, существует *конфликт* между требованием устойчивости и малой установившейся погрешностью. Разрешение этого конфликта — одна из основных задач конструирования систем автоматического регулирования. В принципе этот конфликт в рассмотренном выше примере можно устранить путем *увеличения* интервала между постоянными времени T_1 , T_2 и T_3 (разности постоянные времени). Пусть $T_1 = T_2 = T = \text{const}$ есть неизменные параметры системы, а $T_3 = \alpha T$, где коэффициент α может быть любым в пределах от 0 до ∞ . Тогда

$$k_{\text{пр}} = 4 + \frac{2}{\alpha} + 2\alpha = 4 + 2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (10)$$

График этой кривой изображен на рис. 4.6, а. Из этого графика видно, что для того, чтобы получить устойчивую систему с данным коэффициентом статизма $s = 1\%$, т. е. чтобы $k > k_{\text{пр}} = 99$, достаточно сделать α или меньше α_1 , или больше величины α_2 . Иными словами, надо достаточно далеко разнести

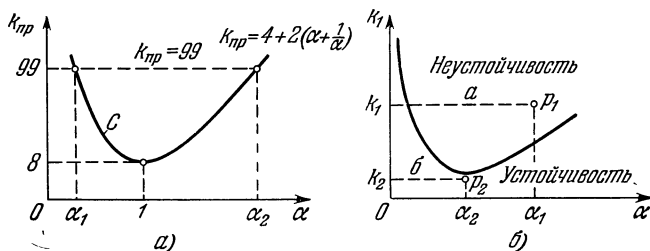


Рис. 4.6.

(отдалить в ту или иную сторону) постоянную времени T_3 от других постоянных времени T_1 и T_2 , равных T . Заметим также, что величина $k_{\text{пр}}$ зависит лишь от отношения постоянных времени.

График, изображенный на рис. 4.6, а, можно также трактовать несколько иначе. Действительно, рассмотрим плоскость, на которой введем прямоугольную систему координат. На оси абсцисс будем откладывать величину параметра α , а на оси ординат вместо $k_{\text{пр}}$ будем откладывать величину параметра k (коэффициента усиления прямого канала системы). Эту плоскость мы можем называть плоскостью параметров системы автоматического регулирования (т. е. тех параметров, которые не фиксированы). Тогда настройка системы, характеризующаяся значением пары k и α , определяется соответствующей точкой этой плоскости с координатами k и α . Кривая C , описываемая уравнением $k = 4 + 2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$, соответствующим (10), делит (разбивает) всю плоскость на две области: область a выше этой кривой и область b , лежащую ниже этой кривой. Тогда из предыдущего следует, что если точка $p_i(k_i, \alpha_i)$ лежит выше кривой C , то система регулирования с параметрами k_i и α_i будет неустойчивой. Если точка $p_2(k_2, \alpha_2)$ лежит ниже кривой C , то система с параметрами k_2 и α_2 будет устойчивой. Таким образом, область a является областью неустойчивости, а область b является областью устойчивости системы автоматического регулирования. Если система имеет большое число изменяемых параметров, например три, то необходимо рассматривать уже пространство трех измерений, по осям которого отложены эти параметры. В этом случае область устойчивости отделяется от области неустойчивости уже поверхностью.

Предельные значения коэффициентов характерны и для астатических систем. Действительно, для следящей системы, движение которой описывается уравнением (4) § 6 гл. III, можно найти переходную погрешность,

решая однородное уравнение

$$T_1 T_2 \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \xi x = 0. \quad (11)$$

Условие устойчивости, согласно неравенству (4) § 4, можно записать в виде

$$T_1 + T_2 - T_1 T_2 \xi > 0,$$

т. е.

$$\xi < \xi_{\text{пр}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (12)$$

Коэффициент усиления $\xi_{\text{пр}}$ имеет, как видно из формулы (12) и как указывалось выше, размерность сек^{-1} . Чтобы *увеличить* $\xi_{\text{пр}}$, необходимо *уменьшить* постоянные времени инерционных звеньев системы. Здесь также возможен конфликт между условием устойчивости (12) и условием точности, т. е. малой установившейся погрешности в режиме отработки равномерного движения. Действительно, из формулы (5) § 6 гл. III находим

$$\xi \geq \frac{A_{\text{max}}}{(x_s)_{\text{доп}}}, \quad (13)$$

где $(x_s)_{\text{доп}}$ — допустимая погрешность. Условия (12) и (13) могут противоречить друг другу.

Можно увеличить $\xi_{\text{пр}}$, изменяя постоянные времени. Однако почти всегда непосредственное изменение постоянных времени оказывается невозможным. Как показано в последующих главах, необходимым является добавление к системе новых устройств — дополнительных связей, позволяющих достичь устойчивости при большом коэффициенте усиления.

§ 6. Область устойчивости

Чтобы представить более наглядно условие устойчивости (12) § 5, полезно перейти к относительным единицам. Перейдем в уравнении (6) § 5 к новому аргументу τ — относительному времени, связанному с временем t соотношением

$$\tau = \frac{t}{T_1}. \quad (1)$$

Значения производных можно представить в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T_1} \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{T_1} \frac{dx}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T_1^2} \cdot \frac{d^2 x}{d\tau^2}.$$

Аналогично

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{1}{T_1^3} \frac{d^3 x}{d\tau^3}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (4) § 5, умножая обе части на T_1 и вводя обозначения

$$\beta = \frac{T_2}{T_1}, \quad \chi = \xi T_1, \quad (2)$$

приходим к уравнению в относительных единицах

$$\beta \frac{d^3 x}{d\tau^3} + (1 + \beta) \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + \chi x = 0. \quad (3)$$

β называется относительной постоянной времени, χ — относительным или безразмерным коэффициентом усиления. Условие устойчивости для

уравнения (3) имеет вид

$$1 + \beta - \beta\chi > 0, \quad (4)$$

или

$$\chi < \chi_{\text{пр}} = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Это условие можно вывести из неравенства (12) § 5, используя обозначения (2). Условие устойчивости в форме (4) приобретает весьма простой вид. Так как в условии (4) фигурируют всего два параметра — β и χ , то оно допускает простую графическую интерпретацию.

Рассмотрим плоскость, на которой β и χ являются декартовыми координатами (рис. 4.7). Проведем на этой плоскости кривую $\chi_{\text{пр}} = 1 + \frac{1}{\beta}$, которая является гиперболой, сдвинутой вверх на единицу. Назовем плоскость (χ, β) плоскостью параметров. Каждой точке на плоскости параметров соответствует совокупность значений χ и β . Например, точке N соответствуют значения $\chi = \chi_1$ и $\beta = \beta_1$. Таким образом, избрав определенные значения параметров, можно поставить в соответствие реальной системе точку на плоскости параметров — так называемую изображающую точку. Совокупность точек, для которых системы, им соответствующие, устойчивы, называется *областью устойчивости*.

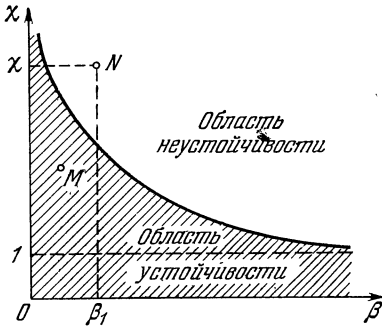


Рис. 4.7.

Совокупность изображающих точек для неустойчивых систем называется *областью неустойчивости*. Рассмотрим точку N . Так как эта точка лежит выше гиперболы $\chi_{\text{пр}} = 1 + \frac{1}{\beta}$, то для нее $\chi_1 > \chi_{\text{пр}}$; следовательно, система с параметрами χ_1 и β_1 неустойчива, т. е. точка N и вообще все точки выше гиперболы принадлежат к области неустойчивости. Аналогичным образом

нетрудно показать, что точка M и все вообще точки, лежащие ниже гиперболы, принадлежат к области устойчивости. Область устойчивости отделяется от области неустойчивости *границей области устойчивости*, т. е. кривой $\chi = 1 + \frac{1}{\beta}$. Эта кривая носит название гиперболы Вышнеградского, впервые построившего ее для системы, сходной с рассматриваемой.

Если число параметров больше двух (например, три, четыре и т. д.), то следует говорить не о плоскости параметров, а о пространстве параметров — трехмерном, четырехмерном и т. д. Значения параметров являются декартовыми координатами пространства параметров. Совокупность изображающих точек для устойчивых систем и здесь называется областью устойчивости, совокупность изображающих точек для неустойчивых систем называется областью неустойчивости. Границей области устойчивости является некоторая поверхность. Относительно этой поверхности можно высказать важное утверждение, для доказательства которого необходимо привлечь теорему о том, что значения корней характеристического уравнения являются *непрерывными функциями* значений коэффициентов уравнения. В свою очередь коэффициенты уравнения будем считать непрерывными функциями параметров системы. Следовательно, значения корней — непрерывные функции значений параметров.

Представим себе p -мерное пространство параметров $m_1, m_2, m_3, \dots, m_p$. На рис. 4.8 изображено трехмерное пространство и в нем область устойчивости, покрытая штриховкой. Пусть вначале параметры системы таковы,

что изображающая точка M_1 находится внутри области устойчивости. Если непрерывно изменять параметры, то изображающая точка, перемещаясь, будет занимать положения M_2, M_3, \dots . При изменении значений параметров будут изменяться и корни; следует представить себе, что точки, соответствующие им на комплексной плоскости, непрерывно и без скачков перемещаются. Однако пока изображающая точка M находится внутри области устойчивости, все корни расположены в левой полуплоскости. Если бы изображающая точка находилась в области неустойчивости (например, в положении M_5), то обязательно существовали бы корни в правой полуплоскости. Когда изображающая точка M оказывается на границе области устойчивости (в положении M_4),

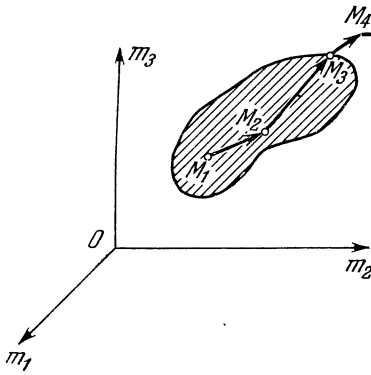


Рис. 4.8.

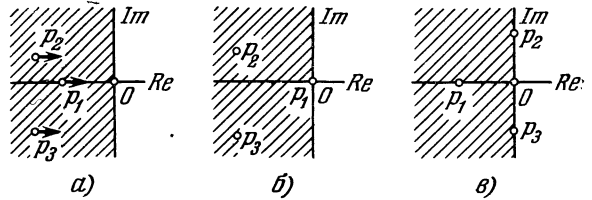


Рис. 4.9.

какие-либо корни, переходя из левой полуплоскости в правую, оказываются на мнимой оси. При этом возможны два случая (рис. 4.9):

а) на мнимой оси оказывается действительный корень p_1 (рис. 4.9, б). Так как $p_1 = 0$, то, следовательно, при этом характеристическое уравнение должно иметь корень, равный нулю;

б) на мнимой оси оказывается пара комплексно сопряженных корней p_2 и p_3 . При этом характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни $p = \pm j\omega$.

В случае а), подставив значение $p = 0$ в уравнение (5) § 1, находим

$$a_n = 0. \tag{5}$$

В случае б), подставляя значение $p = j\omega$ в уравнение (5) § 1, находим

$$a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n = 0. \tag{6}$$

Приравнявая нулю отдельно действительную и мнимую составляющие левой части выражения (6), находим для нечетных n :

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 \omega^{n-1} + \dots + (-1)^q a_{n-2q} \omega^{2q} + \dots + a_{n-4} \omega^4 - a_{n-2} \omega^2 + a_n = 0; \tag{7}$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} a_0 \omega^{n-1} + \dots + (-1)^q a_{n-2q-1} \omega^{2q} + \dots + a_{n-5} \omega^4 - a_{n-3} \omega^2 + a_{n-1} = 0;$$

для четных n :

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} a_1 \omega^{n-2} + \dots + (-1)^q a_{n-2q-1} \omega^{2q} + \dots + a_{n-5} \omega^4 - a_{n-3} \omega^2 + a_{n-1} = 0; \tag{8}$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} a_0 \omega^n + \dots + (-1)^q a_{n-2q} \omega^{2q} + \dots + a_{n-4} \omega^4 - a_{n-2} \omega^2 + a_n = 0.$$

Рассмотрим, например, случай нечетных n , так как для случая четных n рассуждение повторяется. Для того чтобы исключить неизвестное ω из (7), нужно приравнять нулю результат этих двух уравнений (см., например, К у р о ш, Высшая алгебра, «Наука», 1965). Составляя по известному

правилу результат, находим

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \left. \begin{matrix} \frac{n-1}{2} \\ \text{строк} \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 & (-1)^{\frac{n-3}{2}} a_3 & \dots & a_{n-4} & -a_{n-2} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 & \dots & -a_{n-6} & a_{n-4} & -a_{n-2} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & & & & \dots & -a_{n-2} & a_n & & \end{matrix} \\ = & \left. \begin{matrix} \frac{n-1}{2} \\ \text{строк} \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_0 & (-1)^{\frac{n-3}{2}} a_2 & \dots & -a_{n-3} & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 & \dots & -a_{n-3} & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & & & & \dots & -a_{n-3} & a_{n-1} \end{matrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Выведа за знак определителя множитель (-1) сначала от четных строк, а затем от четных столбцов, можно заменить этот знакопеременный определитель определителем с положительными коэффициентами. Затем, переставляя строки между собой, а потом меняя столбцы на строки, можно придать определителю следующий вид:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_n & \dots & 0 & & & & & & \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} & & 0 & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & & & \dots & a_{n-2} & a_n & & & & & & & & \\ 0 & & & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 & & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & & \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} = 0. \tag{9}$$

Итак, Δ_r есть не что иное, как предпоследний определитель Гурвица Δ_{n-1} . Следовательно, когда пара комплексно сопряженных корней пересекает мнимую ось, определитель Δ_{n-1} обращается в нуль.

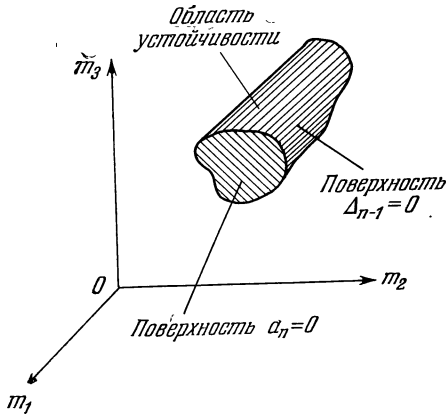


Рис. 4.10.

Выражения (5) и (9) можно рассматривать как уравнения некоторых поверхностей в пространстве параметров системы. Пересекая эти поверхности, изображающая точка M выходит за пределы области устойчивости. Так как этот выход может происходить только двумя способами: либо через поверхность (5), либо через поверхность (9), то, следовательно, область устойчивости ограничена только двумя данными поверхностями. Последнее наглядно иллюстрируется рис. 4.10, на котором изображены обе поверхности, «охватывающие» область устойчивости.

При выходе из области устойчивости через поверхность $a_n = 0$ возникает один положительный корень характеристического уравнения — тот самый, который перешел через мнимую ось в точке O (см. рис. 4.9). Следовательно, соответствующее слагаемое в решении (6) § 1 получает вид Ce^{at} , где $a > 0$.

Очевидно, в данном случае возникает *монотонная* неустойчивость. Если же изображающая точка переходит в область неустойчивости через поверхность $\Delta_{n-1} = 0$, то возникают два комплексно сопряженных корня $p_{1,2} = a \pm j\omega$, которым соответствуют два слагаемых в решении (6) § 1 вида

$$C_1 e^{(a+j\omega)t} + C_2 e^{(a-j\omega)t} = e^{at} (P \sin \omega t + Q \cos \omega t),$$

где P и Q — действительные числа. Получаем колебания с возрастающей амплитудой, т. е. *колебательную* неустойчивость.

Так как в уравнениях систем автоматического регулирования все коэффициенты обычно положительны, то возможна лишь колебательная неустойчивость. Последняя как раз и возникает, когда коэффициент усиления превышает предельное значение и определитель Δ_{n-1} меняет знак.

Изложенное выше указывает на особую роль определителя Δ_{n-1} . До перехода через границу области устойчивости все определители, в том числе Δ_{n-1} были положительны. На границе устойчивости Δ_{n-1} меняет знак, в то время как остальные определители, вообще говоря, еще положительны. Однако из сказанного отнюдь не следует, что всякий раз, когда Δ_{n-1} обращается в нуль, система находится на границе области устойчивости. Обращение Δ_{n-1} в нуль — необходимое, но недостаточное условие для границы неустойчивости, а положительный знак Δ_{n-1} , как указывалось, является необходимым, но еще недостаточным условием устойчивости. Лишь в том случае, когда для какой-либо точки M пространства параметров известно, что она находится внутри области устойчивости (т. е. все $\Delta_i > 0$), можно, изменяя параметры, утверждать, что, пока $\Delta_{n-1} > 0$, имеет место устойчивость. Тогда же, когда Δ_{n-1} обращается в нуль, а затем меняет знак, система приходит к границе области устойчивости, и далее становится неустойчивой.

§ 7. Устойчивость и дополнительные связи

Рассмотрим структурную схему системы автоматического регулирования с оператором $W_0(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p)$, где $W_1(p)$, $W_2(p)$ и $W_3(p)$ — операторы частей системы (рис. 4.11). Эти части сами могут являться сложными системами звеньев. Если в целях обеспечения устойчивости или для удовлетворения иных требований в систему вводится некоторая дополнительная часть, то она называется *дополнительной связью*. Дополнительные связи называются также *стабилизирующими устройствами* или *корректирующими цепями*. Дополнительные звенья могут приключаться к основным частям системы последовательно, параллельно и антипараллельно.

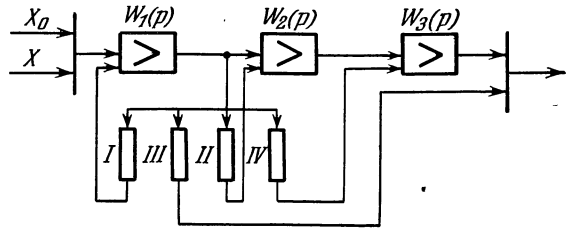


Рис. 4.11.

Дополнительная связь параллельного типа является звеном, на вход которого подается какая-либо выходная величина m -го звена системы x_m ; выход дополнительной связи x'_{n-1} приключается ко входу n -го звена системы совместно с основной входной величиной x_{n-1} . Таким образом, общая входная величина для n -го звена $x_{n-1} + x'_{n-1}$. На рис. 4.11 показаны различные возможные способы параллельного приключения звена дополнительной связи к цепочке последовательно соединенных основных звеньев системы.

Выход звена I подключен ко входу звена $W_1(p)$. Как уже отмечали, если воздействие с помощью дополнительной связи I передается назад по тракту

системы, то звено I называется звеном *обратной связи*. Звено II, падающее воздействие с выхода звена $W_1(p)$ на вход следующего звена, является *звеном прямой связи*. Точно так же и звенья III и IV называются прямыми связями. Так как в реальных системах предшествующие звенья обладают меньшей мощностью, чем последующие, то связи типа III и IV обычно не применяются.

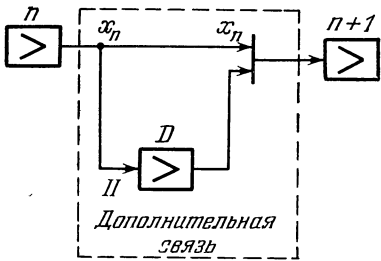


Рис. 4.12.

В общем случае оператор звена параллельной дополнительной связи имеет вид

$$W_d(p) = \frac{Q_d(p)}{P_d(p)}, \tag{1}$$

где $Q_d(p)$ и $P_d(p)$ — многочлены от p .

Если $W_d(p) = K_d = \text{const}$, т. е. дополнительная связь является усилительным звеном, то она называется *идеальной жесткой связью*.

Если $W_d(p) = \lambda p$, т. е. является дифференцирующим звеном, то связь называется

идеальной гибкой связью. Звено связи с оператором $W_d(p) = \frac{ap}{1+bp}$ называется *реальной гибкой связью*.

Если гибкая связь приключена так, как звено II на рис. 4.12, то она носит название *форсирующей связи*. В этом случае можно представить себе эту связь совместно с основным воздействием x_n как некоторое звено, на вход которого подается величина x_n , а на выходе оказывается величина

$$x_n + x'_n = x_n + \lambda p x_n = x_n (1 + \lambda p).$$

Следовательно, оператор подобного звена имеет вид в случае идеальной форсирующей связи

$$W(p) = 1 + \lambda p. \tag{2}$$

Это звено D является примером *последовательной дополнительной связи*, включаемой последовательно в тракт системы. Оператор $W_r(p)$ любой последовательной связи может иметь сколь угодно сложный вид; однако дополнительное звено должно пропускать постоянное по величине воздействие. Поэтому при единичной функции, поданной на вход дополнительного звена, установившееся значение его выходной величины $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} W_r(p) = [W_r(p)]_{p=0}$ не равно нулю. Оператор (2) удовлетворяет этому ограничению.

Для любой параллельной дополнительной связи $W_d(p)$ при заданном операторе $W_0(p)$ основной цепи можно найти эквивалентную ей последовательную связь $W_r(p)$. Действительно, оператор системы, изображенной на рис. 4.13, а, имеет вид

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p) W_d(p)}. \tag{3}$$

Между тем, оператор системы с последовательным дополнительным звеном $W_r(p)$ (см. рис. 4.13, б) равен

$$W(p) = W_0(p) W_r(p). \tag{4}$$

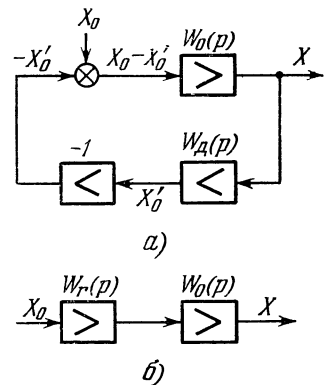


Рис. 4.13.

Если схемы рис. 4.13, а и б эквивалентны, то, приравняв правые части выражений (3) и (4), находим

$$W_r(p) = \frac{1}{1 + W_0(p) W_d(p)}. \quad (5)$$

Наоборот, по заданному оператору последовательной связи можно найти эквивалентную ей параллельную связь. Решая уравнение (5) относительно $W_d(p)$, получаем

$$W_d(p) = \frac{1 - W_r(p)}{W_0(p) W_r(p)}. \quad (6)$$

На рис. 4.14, а изображена схема, часто применяемая для получения форсирующей связи. Пусть X_0 и X — входное и выходное напряжения, i_c — ток

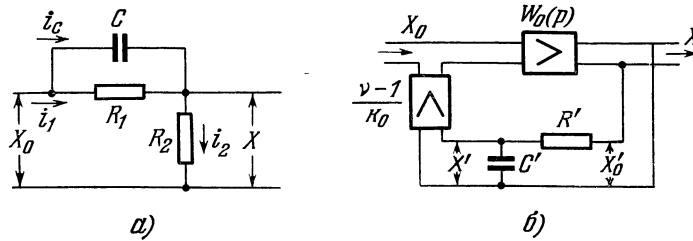


Рис. 4.14.

в цепи конденсатора с емкостью C , i_1 — ток в цепи сопротивления R_1 , i_2 — ток в цепи сопротивления R_2 . Уравнения Кирхгофа для цепи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_c &= i_2, & i_c &= CR_1 \frac{di_1}{dt}, \\ X_0 &= i_1 R_1 + x, & i_2 R_2 &= x. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Написав те же уравнения в операторной форме (формально заменяя оператор дифференцирования символом p), находим (если в начальный момент звено находилось в покое, т. е. $i_1 = 0$ при $t = 0$)

$$\left. \begin{aligned} I_c(p) &= CR_1 p I_1(p), \\ X_0(p) &= I_1(p) R_1 + X(p). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Исключая из этих уравнений все переменные, кроме $X(p)$ и $X_0(p)$, находим оператор звена

$$W_r(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + CR_1 p}{1 + C \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} p} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1 + pT_r}{1 + pT_q}, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1, \\ T_r &= CR_1, & T_q &= \frac{T_r}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Оператор (10) отличается от оператора идеальной форсирующей связи (2) и называется оператором *реальной форсирующей связи*. Найдём эквивалентный ему оператор обратной связи, шунтирующей, например, усилительное звено с оператором $W_0(p) = k_0 = \text{const}$. По формуле (6) находим

$$W_d(p) = \frac{1 - \frac{1}{v} \frac{1 + pT_r}{1 + pT_q}}{k_0 \frac{1}{v} \frac{1 + pT_r}{1 + pT_q}} = \frac{v - 1}{k_0 (1 + pT_r)} = \frac{k}{1 + pT_r}, \quad (11)$$

где $k = \frac{\nu-1}{k_0}$. Это — оператор инерционного звена. Подобное звено можно получить, например, с помощью схемы, состоящей из емкости C' и сопротивления R' (рис. 4.14, б). В цепи обратной связи включен также усилитель с коэффициентом усиления $k = \frac{\nu-1}{k_0}$. Действительно, соотношение между изображениями X'_0 и X' входного и выходного напряжений схемы $C'R'$:

$$X_0(p) = X'(p) + I(p)R' = X'(p) + R'C'pX'(p),$$

откуда оператор звена

$$\frac{X'(p)}{X'_0(p)} = \frac{1}{1+R'C'p} = \frac{1}{1+pT_r},$$

где $T_r = R'C'$.

На рис. 4.15, а показана другая схема, применяемая для целей стабилизации и иногда называемая связью «с интегралом». Уравнения для этой

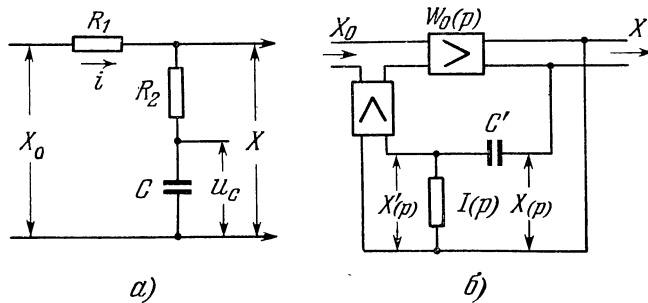


Рис. 4.15.

схемы, написанные для изображений при $(u_C)_{t=0} = 0$, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} X(p) &= X_0(p) - R_1 I(p), \\ X(p) &= R_2 I(p) + \frac{I(p)}{Cp}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Отсюда находим выражение для оператора звена

$$W(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{1+R_2Cp}{1+(R_1+R_2)Cp} = \frac{1+T_r p}{1+T_q p}, \quad (13)$$

где

$$T_r = R_2 C, \quad T_q = (R_1 + R_2) C > T_r. \quad (14)$$

Если постоянная времени T_q достаточно велика, то для больших значений p (что соответствует малым значениям t в выражении для оригинала оператор $W(p)$ можно приближенно записать, пренебрегая единицей в знаменателе, в следующем виде:

$$W(p) = \frac{1+T_r p}{1+T_q p} \approx \frac{1}{T_q p} + \frac{T_r}{T_q}.$$

В таком случае звено эквивалентно интегрирующему, параллельно соединенному с усилительным звеном. Отсюда видно, что название «связь с интегралом» имеет определенный смысл. Эквивалентное параллельное звено имеет оператор, согласно формуле (6), при $W_0(p) = k_0 = \text{const}$

$$W_d(p) = \frac{p(T_q - T_r)}{k_0(1+pT_r)}. \quad (15)$$

Подобное звено может быть осуществлено в виде схемы, показанной на рис. 4.15, б и состоящей из емкости C' сопротивления R' и усилителя с коэффициентом усиления $k = \frac{T_g - T_r}{k_0 T_r}$. Действительно, уравнения для этой схемы

$$C' p (X'_0 - X') = I(p) = \frac{X'(p)}{R'}$$

Отсюда

$$W_{\text{д}}(p) = \frac{X'(p)}{X'_0(p)} = \frac{R' C' p}{1 + R' C' p}$$

и

$$W_{\text{д}}(p) = k \frac{R' C' p}{1 + R' C' p} = \frac{T_g - T_r}{k_0} \cdot \frac{p}{1 + p T_r}, \tag{16}$$

если выбрано $R' C' = T_r$. Звено с оператором (16) является звеном реальной гибкой связи, которое в данном случае оказалось эквивалентным последовательной «связи с интегралом».

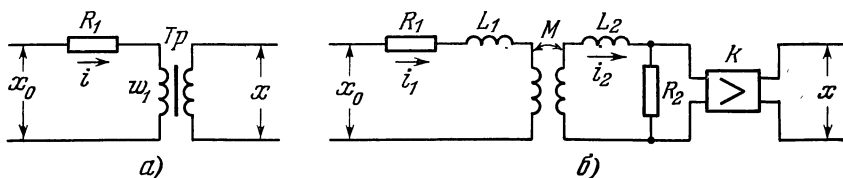


Рис. 4.16.

Пусть усилительное звено с коэффициентом усиления k_0 шунтируется звеном гибкой реальной связи с оператором $\frac{p T_r}{1 + p T_r}$. Тогда при $k_0 \rightarrow \infty$ выражение для оператора подобного соединения при конечных значениях p стремится к некоторому пределу

$$W(p) = \frac{k_0}{1 + \frac{k_0 p T_r}{1 + p T_r}} = \frac{k_0 (1 + p T_r)}{1 + p (1 + k_0) T_r} \rightarrow \frac{1}{p T_r} + 1,$$

т. е. опять-таки получаем звено, подающее интеграл вперед.

Гибкую обратную связь можно создать также при помощи схемы с трансформатором (рис. 4.16). На рис. 4.16, а изображена схема, содержащая большое сопротивление R_1 , включенное последовательно с первичной обмоткой w трансформатора Tp . Электродвижущая сила x , индуктированная во вторичной обмотке, является выходной величиной звена.

Если сопротивление R_1 достаточно велико, то ток в первичной цепи приближенно равен

$$i_1 \approx \frac{x_0}{R_1}.$$

Пусть M — коэффициент взаимной индукции между первичной и вторичной обмотками. Тогда

$$x = -M \frac{di_1}{dt} \approx -\frac{M}{R_1} \frac{dx_0}{dt},$$

т. е. схема представляет собой дифференцирующее звено.

Рассмотрим эту схему более детально. На рис. 4.16, б изображена эквивалентная схема, на которой L_1 и L_2 — индуктивности рассеяния первичной и вторичной обмоток трансформатора ¹⁾. В этой схеме не учтены потери в меди

¹⁾ Не следует путать индуктивность рассеяния с полной индуктивностью трансформатора.

обмоток и в стальном сердечнике трансформатора. Трансформатор нагружен на большое сопротивление R_2 . Напряжение на этом сопротивлении приключено ко входу усилителя с коэффициентом усиления k . Выходное напряжение x усилителя является выходной величиной звена.

Уравнения схемы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= ki_2 R_2, \\ x_0 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right), \\ 0 &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Те же уравнения можно переписать в операторном виде

$$\left. \begin{aligned} X_0(p) &= i_1(p) R_1 + L_1 p i_1(p) + M p [i_1(p) + i_2(p)], \\ 0 &= i_2(p) R_2 + L_2 p i_2(p) + M p [i_1(p) + i_2(p)], \\ X(p) &= k i_2(p) R_2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из этих уравнений находим

$$W(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{-kR_2 p M}{p^2 [L_1 L_2 + M(L_1 + L_2)] + p [L_1 R_2 + L_2 R_1 + M(R_1 + R_2)] + R_1 R_2}. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что структурная схема звена представляет собой последовательное соединение идеального дифференцирующего звена с оператором $-\mu p$ и звена второго порядка.

Если трансформатор близок к идеальному и его индуктивностями рассеяния L_1 и L_2 можно пренебречь, то при $L_1 \approx 0$, $L_2 \approx 0$ выражение (19) приобретает вид

$$W(p) = \frac{-pkR_2 M}{pM(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{-pk_r}{1 + pT_r}, \quad (20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_r &= \frac{kM}{R_1}, \\ T_r &= M \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Структурную схему звена в этом случае можно представить в виде последовательного соединения идеального дифференцирующего звена с оператором $-pk_r$ и «паразитного» инерционного звена с оператором $\frac{1}{1 + pT_r}$. Если теперь сопротивления R_1 и R_2 становятся бесконечно большими, а величина k_r остается постоянной (для этого требуется, чтобы и $k \rightarrow \infty$), то в пределе $T_r \rightarrow \rightarrow 0$ и получаем идеальное дифференцирующее звено с оператором $-pk_r$.

Рассмотрим эффект, производимый обратной связью с оператором $W_d(p)$ (см. рис. 4.12), шунтирующей различного типа звенья с оператором $K_0(p)$. Пусть сначала $W_d(p) = k_d = \text{const}$ (отрицательная жесткая обратная связь) и $W_0(p) = \frac{k}{1 + pT}$, т. е. звено с оператором $W_0(p)$ инерционное. Оператор системы, изображенной на рис. 4.13, а, имеет вид

$$W(p) = \frac{\frac{k}{1 + pT}}{1 + \frac{k k_d}{1 + pT}} = \frac{\frac{k}{1 + k k_d}}{1 + p \frac{T}{1 + k k_d}} = \frac{k'}{1 + pT'}, \quad (22)$$

где

$$k' = \frac{k}{1 + kk_d} < k, \quad T' = \frac{T}{1 + kk_d} < T.$$

Следовательно, шунтирование инерционного звена отрицательной жесткой обратной связью уменьшает как коэффициент усиления, так и постоянную времени звена.

Так как для достижения устойчивости необходимо изменять постоянные времени системы, то отсюда ясно, что жесткая отрицательная обратная связь может использоваться для стабилизации системы.

Если жесткая отрицательная обратная связь с оператором

$$W_d(p) = k_d = \text{const}$$

шунтирует интегрирующее звено с оператором ξ/p , то результирующий оператор

$$W(p) = \frac{\xi/p}{1 + \frac{k_d \xi}{p}} = \frac{1/k_d}{1 + p \frac{1}{k_d \xi}}. \quad (23)$$

Это — оператор инерционного звена. Следовательно, произошло преобразование не только параметров, но и типа звена.

Рассмотрим результат шунтирования жесткой отрицательной обратной связью цепочки из двух инерционных звеньев с оператором

$$W_0(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Результирующий оператор

$$W(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2) \left[1 + \frac{kk_d}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)} \right]} = \frac{\frac{k}{1 + kk_d}}{1 + p \frac{T_1 + T_2}{1 + kk_d} + p^2 \frac{T_1 T_2}{1 + kk_d}}. \quad (24)$$

Если обозначим

$$\frac{T_1 T_2}{1 + kk_d} = T'_1 T'_2, \quad \frac{T_1 + T_2}{1 + kk_d} = T'_1 + T'_2, \quad (25)$$

то неизвестные T'_1 и T'_2 являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - \frac{T_1 + T_2}{1 + kk_d} z + \frac{T_1 T_2}{1 + kk_d} = 0.$$

Эти корни равны

$$z_{1,2} = \frac{T_1 + T_2 \pm \sqrt{(T_1 + T_2)^2 + 4(1 + kk_d)T_1 T_2}}{2(1 + kk_d)}. \quad (26)$$

При $k_d = 0$ корни z_1 и z_2 равны соответственно T_1 и T_2 . При увеличении k_d корни начинают сближаться — больший из них уменьшается, а меньший увеличивается. Наконец, они становятся равными друг другу при

$$1 + kk_d = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}. \quad (27)$$

Тогда

$$z_1 = z_2 = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}}. \quad (28)$$

Эта величина меньше среднего геометрического T_1 и T_2 . Если k_d больше значения, полученного из (27), то корни квадратного уравнения становятся

комплексно сопряженными. Это означает, что звено, эквивалентное рассматриваемой схеме, является колебательным.

Таким образом, при шунтировании двух звеньев получается система с оператором

$$W(p) = \frac{k}{1 + kk_d} \frac{1}{1 + p(T'_1 + T'_2) + p^2 T'_1 T'_2} = \frac{k}{1 + kk_d} \cdot \frac{1}{(1 + p_1 T'_1)(1 + p T'_2)}. \quad (29)$$

Это — оператор цепочки, состоящей из двух последовательно соединенных инерционных звеньев с постоянными времени T'_1 и T'_2 . Так как увеличение k_d сближает эти постоянные времени, то иногда целесообразно стабилизировать систему путем шунтирования сразу двух инерционных звеньев.

Рассмотрим астатическую систему, состоящую из последовательно соединенных двух инерционных звеньев с постоянными времени T_1 и T_2 и одного интегрирующего звена. Оператор разомкнутой системы без дополнительных связей имеет вид

$$W_0(p) = \frac{\xi}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (30)$$

Пусть задана установившаяся динамическая погрешность при обработке равномерного движения $X_0 = At$. Тем самым задается требуемый минимальный коэффициент усиления $\xi \geq \frac{A}{x_S}$. Если, например, X_0 и x_S — величины угла, $A = 30$ град/сек и задано $x_S \leq 0,1$ град, то

$$\xi \geq \frac{30}{0,1} \text{ град/сек} \cdot \text{град} = 300 \text{ 1/сек.}$$

Этот коэффициент усиления может оказаться больше предельного значения $\xi_{\text{пр}}$. Пусть, например, $T = 0,25$ сек, $T_2 = 0,1$ сек. Из условия $K_0(p) + 1 = 0$ находим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p(1 + pT_1)(1 + pT_2) + \xi = 0$$

или

$$p^3 T_1 T_2 + p^2 (T_1 + T_2) + p + \xi = 0. \quad (31)$$

Условие устойчивости имеет вид

$$(T_1 + T_2) - T_1 T_2 \xi > 0,$$

откуда предельное значение коэффициента усиления

$$\xi_{\text{пр}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (32)$$

Подставляя в эту формулу значения T_1 и T_2 , данные выше, находим $\xi_{\text{пр}} = 14$. Следовательно, при заданном коэффициенте усиления система должна стать неустойчивой. Необходимо наложение дополнительных связей для ее стабилизации.

Рассмотрим сначала стабилизацию с помощью идеальной отрицательной гибкой обратной связи. На рис. 4.17 изображена замкнутая цепь системы автоматического регулирования. Возмущающие силы не показаны, так как в линейной системе они не оказывают никакого влияния на устойчивость. Дополнительная связь с оператором $W_d(p) = \lambda p$ шунтирует два инерционных звена. Оператор $W(p)$ части системы, очерченной пунктиром на рис. 4.17, равен, согласно формуле антипараллельного соединения,

$$W'(p) = \frac{\frac{k_1 k_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}}{1 + \frac{\lambda p k_1 k_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}} = \frac{k_1 k_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2) + \lambda k_1 k_2 p}. \quad (33)$$

Общий оператор разомкнутой системы

$$W(p) = W'(p) \cdot \frac{\xi_0}{p} = \frac{\xi}{p [(1+pT_1)(1+pT_2) + \lambda k_1 k_2 p]}, \quad (34)$$

где $\xi = \xi_0 k_1 k_2$. Из условия $W(p) + 1 = 0$ находим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p^3 T_1 T_2 + p^2 (T_1 + T_2 + \sigma) + p + \xi_0^2 = 0, \quad (35)$$

где $\sigma = \lambda k_1 k_2$. Условие устойчивости имеет вид

$$T_1 + T_2 + \sigma - T_1 T_2 \xi > 0$$

или

$$\sigma > T_1 T_2 \xi - (T_1 + T_2). \quad (36)$$

Следовательно, увеличив σ настолько, чтобы удовлетворялось условие (36), можно добиться устойчивости.

При указанных выше значениях параметров система будет устойчива, если

$$\begin{aligned} \sigma > \sigma_{\min} &= T_1 T_2 \xi - (T_1 + T_2) = \\ &= 0,1 \cdot 0,25 \cdot 300 - (0,1 + 0,25) = \\ &= 7,15. \end{aligned}$$

Следует избрать $\sigma = q\sigma_{\min}$, где q не менее 2—3, чтобы система находилась не на границе области устойчивости, а где-либо внутри ее. Величина q называется запасом устойчивости по коэффициенту обратной связи.

Вычисления усложняются, если стабилизация осуществляется с помощью реальной отрицательной гибкой обратной связи с оператором

$$W_{\text{д}}(p) = \frac{k_{\text{д}} T_{\text{д}} p}{1 + p T_{\text{д}}}. \quad (37)$$

Пусть, например, $T_{\text{д}} = 0,1$ сек. Требуется найти значение $k_{\text{д}}$, обеспечивающее устойчивость системы. Оператор $W'(p)$ в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} W'(p) &= \frac{k_1 k_2}{(1+pT_1)(1+pT_2)} = \\ &= \frac{k_1 k_2}{1 + \frac{k_1 k_2}{(1+pT_1)(1+pT_2)} \cdot \frac{k_{\text{д}} T_{\text{д}} p}{1+pT_{\text{д}}}} = \\ &= \frac{k_1 k_2 (1+pT_{\text{д}})}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_{\text{д}}) + k_1 k_2 k_{\text{д}} T_{\text{д}} p}. \end{aligned} \quad (38)$$

Общий оператор разомкнутой системы

$$W(p) = W'(p) \cdot \frac{\xi_0}{p} = \frac{\xi (1+pT_{\text{д}})}{[(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_{\text{д}}) + k_1 k_2 k_{\text{д}} T_{\text{д}} p] p}, \quad (39)$$

где $\xi = \xi_0 k_1 k_2$.

Характеристическое уравнение принимает вид

$$p (1 + pT_1) (1 + pT_2) (1 + pT_{\text{д}}) + k_1 k_2 k_{\text{д}} T_{\text{д}} p^2 + \xi (1 + pT_{\text{д}}) = 0$$

или

$$p^4 T_1 T_2 T_{\text{д}} + p^3 (T_1 T_2 + T_1 T_{\text{д}} + T_2 T_{\text{д}}) + p^2 (T_1 + T_2 + T_{\text{д}} + \sigma) + p (1 + \xi T_{\text{д}}) + \xi = 0,$$

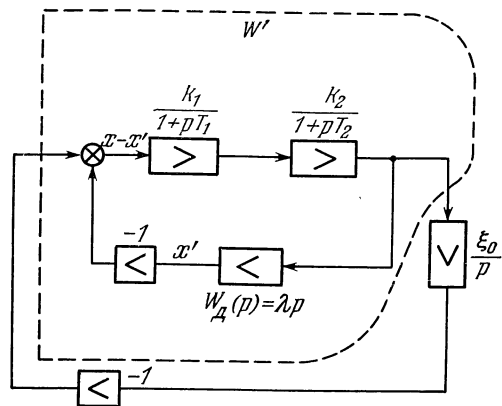


Рис. 4.17.

где $\sigma = k_1 k_2 k_D T_D$. Условие устойчивости, сводящееся в данном случае к неравенству $\Delta_3 > 0$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 - a_4 a_1^2 > 0. \quad (40)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 T_D, \\ a_1 &= T_1 T_2 + T_1 T_D + T_2 T_D, \\ a_2 &= T_1 + T_2 + T_D + \sigma, \\ a_3 &= 1 + \xi T_D, \\ a_4 &= \xi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

При увеличении σ увеличивается коэффициент a_2 . При достаточно большом значении a_2 можно удовлетворить неравенству (40), следовательно, обеспечить устойчивость системы. Подставляя данные выше значения T_1 , T_2 , T_D и ξ в равенстве (41), находим для рассматриваемого примера: $a_1 a_2 a_3 = 0,837 + 0,186\sigma$; $a_0 a_3^2 = 2,4$; $a_4 a_1^2 = 1,08$. Условие устойчивости

$$\Delta_3 = 0,837 - 2,4 - 1,08 + 0,186\sigma = -2,543 + 0,186\sigma > 0,$$

откуда

$$\sigma > \sigma_{\min} = \frac{2,543}{0,186} = 13,7.$$

Следовательно, и с помощью реальной гибкой обратной связи может быть достигнута устойчивость. Здесь, однако, требуется несколько большее значение коэффициента обратной связи σ , чем в случае идеальной связи.

Систему с оператором (30) можно стабилизировать и с помощью последовательно включаемой форсирующей связи. Для случая идеальной связи с оператором $W(p) = 1 + \lambda p$ общий оператор разомкнутой системы равен

$$W_1(p) = W_r(p) W(p) = \frac{\xi(1 + \lambda p)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}. \quad (42)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p(1 + pT_1)(1 + pT_2) + \xi(1 + \lambda p) = 0$$

или

$$p^3 T_1 T_2 + p^2 (T_1 + T_2) + p(1 + \xi\lambda) + \xi = 0. \quad (43)$$

Условие устойчивости имеет вид

$$(T_1 + T_2)(1 + \xi\lambda) - T_1 T_2 \xi > 0$$

или

$$1 + \xi \left(\lambda - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \right) > 0. \quad (44)$$

Этому условию можно удовлетворить при достаточно большом ξ . Интересно, что при

$$\lambda > \lambda_{\min} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (45)$$

система устойчива, каково бы ни было значение коэффициента усиления ξ . Для рассматриваемого примера

$$\lambda_{\min} = \frac{0,1 - 0,25}{0,1 + 0,25} = \frac{1}{14} = 0,715.$$

Условие (45) может обеспечить устойчивость при любом значении ξ лишь в том случае, когда в системе отсутствуют какие-либо дополнительные, не учтенные предыдущим расчетом постоянные времени. Если имеются

малые не равные нулю дополнительные постоянные времени, то система имеет предельное значение коэффициента усиления, но весьма большое по величине.

Систему можно стабилизировать также и с помощью реальной форсирующей связи с оператором $W_r(p) = \frac{1}{\nu} \frac{1+pT_r}{1+pT_q}$. Общий оператор разомкнутой системы

$$W(p) = W_r(p) W_0(p) = \frac{\xi(1+pT_r)}{p(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_q)}, \quad (46)$$

где $\xi = \frac{\xi_0 k_1 k_2}{\nu}$. Характеристическое уравнение замкнутой системы после преобразований принимает вид

$$p^4 T_1 T_2 T_q + p^3 (T_1 T_2 + T_1 T_q + T_2 T_q) + p^2 (T_1 + T_2 + T_q) + p(1 + \xi T_r) + \xi = 0. \quad (47)$$

Из условия устойчивости (40) видно, что граница устойчивости определяется равенством

$$a_1 a_2 a_3 - a_4 a_3^2 - a_0 a_3^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно a_3 , находим корни

$$(a_3)_{1,2} = a_1 \cdot \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0 a_4}}{2a_0}. \quad (48)$$

Пусть T_1 , T_2 и ξ заданы и требуется выбрать значения T_q и T_r , причем значение $\nu = \frac{T_r}{T_q}$ нельзя сделать большим некоторой определенной величины.

Подставляя в формулу (48) значения из уравнения (47), получаем выражение

$$\xi T_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_q} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) [T_1 + T_2 + T_q \pm \sqrt{(T_1 + T_2 + T_q)^2 + 4\xi T_1 T_2 T_q}] - 1. \quad (49)$$

Подставляя сюда значения T_q и определяя T_r , можно построить кривую $T_r = f(T_q)$ на плоскости (T_r, T_q) (рис. 4.18), являющуюся границей области устойчивости. При малых T_q оба корня действительны. При больших T_q корни могут оказаться комплексно сопряженными. Поэтому устойчивость может быть достигнута лишь при не слишком больших T_q . Область весьма больших T_q не нужно исследовать, так как она на практике не встречается. Пересекая кривую прямой линией $\nu = \frac{T_r}{T_q} = \text{const}$, можно определить, при каких значениях ν и T_r система будет устойчивой. Если из начала координат O провести касательную к кривой $T_r = f(T_q)$, то ее угловой коэффициент $\text{tg } \alpha = \nu_{\min}$. При $\nu < \nu_{\min}$ невозможно достичь устойчивости в данной системе, каково бы ни было значение T_r .

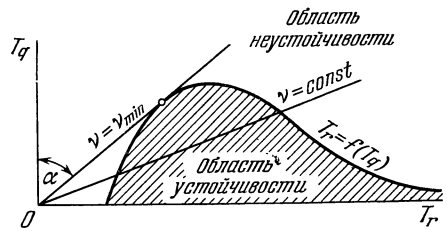


Рис. 4.18.

В главе III было введено некоторое число типов элементарных звеньев. Однако, в сущности, не все эти звенья являются элементарными. Выше было показано, что шунтирование интегрирующего звена усилительным дает возможность получить инерционное звено (см. уравнение (23)). Значит, инерционное звено можно заменить схемой, состоящей из интегрирующего и усилительного звеньев. Далее, из уравнений (24)—(26) видно, что, шунтируя два инерционных звена усилительным звеном, можно получить колебательное звено. Значит, и это звено можно рассматривать как составное.

Наконец, имея усилительное звено с *бесконечно большим* коэффициентом усиления и интегрирующее звено, можно получить дифференцирующее звено. Действительно, шунтируя усилительное звено с коэффициентом усиления k_0 отрицательной обратной связью в виде интегрирующего звена, получаем оператор соединения следующего вида:

$$W(p) = \frac{k_0}{1 + k_0 \frac{\xi}{p}} = \frac{\frac{p}{\xi}}{1 + p \frac{1}{k_0 \xi}}. \tag{50}$$

Это — оператор реального дифференцирующего звена. Если $k_0 \rightarrow \infty$, то в пределе получаем оператор p/ξ идеального дифференцирующего звена, которое естественно включить в состав элементарных звеньев. С известной точки зрения представляется целесообразным оставить также и инерционное и колебательное звенья в составе элементарных звеньев.

Какова бы ни была схема устойчивой разомкнутой (или замкнутой) системы автоматического регулирования обычного типа, ее оператор может быть представлен в виде частного двух многочленов от p :

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \\ &= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^l \prod_{i=1}^{i=r} (p + a_i) \prod_{i=1}^{i=s} (p^2 + 2d_{0i} \omega_{0i} p + \omega_{0i}^2)}. \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь l — число нулевых корней уравнения $P(p) = 0$, r — число отрицательных корней ($-a_i$), а s — число пар комплексно сопряженных корней,

причем каждая пара получается как решение уравнения $p^2 + 2d_{0i} \omega_{0i} p + \omega_{0i}^2 = 0$ ($d_{0i} < 1$). Числитель выражения можно представить в виде суммы выходных величин m дифференцирующих звеньев (рис. 4.19, а) либо в виде произведения множителей такого же типа, как и в знаменателе, что в данном случае соответствует форсирующим звеньям первого и второго порядков. Эта схема последовательно соединена со

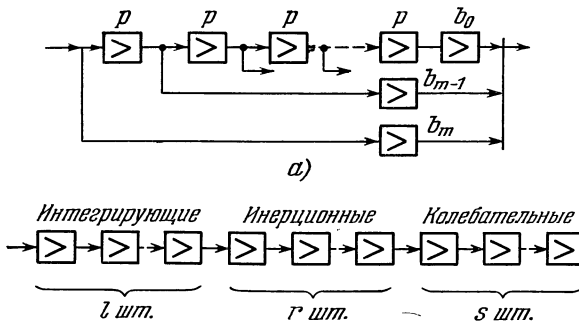


Рис. 4.19.

схемой, изображаемой оператором $1/P(p)$, а последняя, как видно из равенства (51), представляется в виде одноцепочечной схемы последовательно соединенных l интегрирующих, r инерционных и s колебательных звеньев (рис. 4.19, б). Порядок, в котором расположены звенья, безразличен. Таким образом, только лишь путем введения инерционных и колебательных звеньев можно добиться сведения *любой* структурной схемы устойчивой системы к эквивалентной одноконтурной схеме. Между тем суждения на основе этой эквивалентной схемы весьма важны; например, наличие интегрирующих звеньев в этой схеме указывает на то, что система астатическая. Поэтому (существенно также, что эти звенья часто встречаются на практике) инерционные и колебательные звенья включены в список «элементарных» звеньев.

Приведение сложной структурной схемы к эквивалентной одноцепочечной или вообще более простой схеме весьма важно также для упрощения рас-

четов, производимых над системой. Равенство (51) показывает, что это приведение всегда принципиально возможно. Что касается практических приемов такого приведения, то они могут быть различными. Рассмотрим на примере, как можно упростить сложную структурную схему.

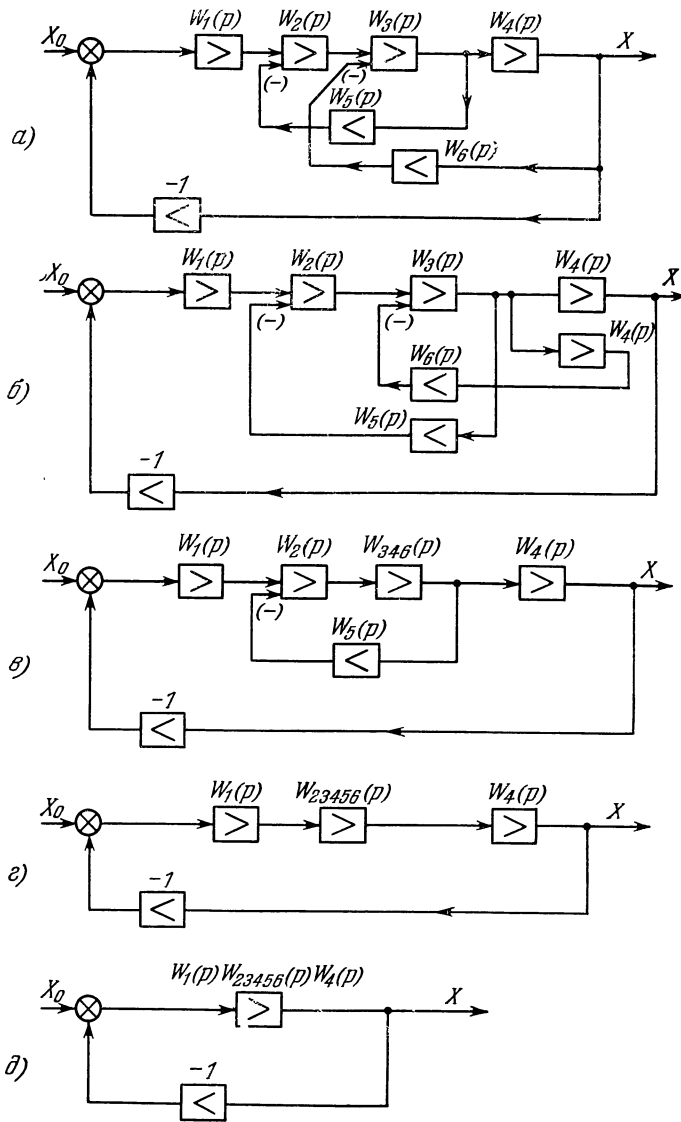


Рис. 4.20.

На рис. 4.20, *a* показана структурная схема с двумя «перекрещивающимися» обратными связями с операторами $W_5(p)$ и $W_6(p)$. Операторы других звеньев системы — $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$, $W_4(p)$. Регулируемая величина X с выхода системы подается с обратным знаком на ее вход. Изменение знака на противоположный показано на рис. 4.20 как прохождение величины X через усилительное звено с коэффициентом усиления, равным -1 . Чтобы написать оператор разомкнутой системы, удобно применить следующий прием: заменим звено с оператором $W_4(p)$ двумя идентичными звеньями с одинаковыми входными величинами (рис. 4.20, *б*). В таком случае и выход-

ные величины этих звеньев будут одинаковы и равны X . Поэтому входную величину для звена с оператором $W_6(p)$ можно будет взять с выхода одного из идентичных звеньев, а на усилитель с коэффициентом усиления -1 подать выходную величину другого звена (см. рис. 4.20, б). Теперь становится очевидным, что звено с оператором $W_3(p)$, шунтированное последовательно соединенными звеньями с операторами $W_4(p)$ и $W_6(p)$, можно заменить одним звеном с оператором

$$W_{346}(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p)W_4(p)W_6(p)}. \quad (52)$$

Соответствующая упрощенная структурная схема показана на рис. 4.20, в. Теперь ее можно еще упростить, заменив последовательное соединение звеньев с операторами $W_2(p)$ и $W_{346}(p)$, шунтированное звеном с оператором $W_5(p)$, одним звеном с оператором

$$W_{23456}(p) = \frac{W_2(p)W_{346}(p)}{1 + W_2(p)W_{346}(p)W_5(p)}. \quad (53)$$

В результате этой замены схема упрощается, приобретая вид, показанный на рис. 5.20, г. Последовательно соединенные звенья в тракте системы можно заменить одним звеном с оператором

$$W(p) = W_1(p)W_{23456}(p)W_4(p). \quad (54)$$

В итоге преобразований получаем простую структурную схему, изображенную на рис. 4.20, д. Как видно из формул (52), (53) и (54), оператор $W(p)$ разомкнутой системы будет иметь вид отношения двух многочленов, если такой вид имеют операторы звеньев, показанные на рис. 4.20, а.

Г л а в а V

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА

§ 1. Преобразования Фурье и Лапласа

В § 2 гл. III мы описали прием, с помощью которого каждому элементарному блоку или системе блоков, описывающейся линейным дифференциальным уравнением, ставится в соответствие передаточная функция $W(p)$, где p означало некоторую «символическую» переменную или оператор. Такой до некоторой степени эвристический прием имел то удобство, что в терминах передаточных функций можно легко описывать сколь угодно сложные системы, состоящие из отдельных блоков. Однако единственным обоснованием этого приема было то, что существовало взаимно однозначное соответствие между дифференциальным уравнением, описывающим систему, и ее передаточной функцией. В этой главе мы дадим более последовательное и глубокое обоснование метода передаточных функций, основанное на использовании преобразования Лапласа.

Чтобы быть последовательными, мы сначала рассмотрим другое преобразование — преобразование Фурье, которое тесным образом связано с преобразованием Лапласа.

Пусть $f(t)$ является произвольной кусочно-непрерывной функцией, имеющей кусочно-непрерывную первую производную. Функция $f(t)$ определена на отрезке $[-T/2, T/2]$, а на всю остальную ось продолжается периодически. Таким образом, $f(t)$ — периодическая функция с периодом T .

Как известно, эта функция может быть всюду на оси, кроме возможных точек разрыва, представлена в форме ряда Фурье

$$f(t) = \frac{2}{T} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) \right], \quad (1)$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$) равны

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, & a_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt, \\ b_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Представим ряд Фурье в комплексном виде. Пользуясь формулами

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

получим

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t &= \frac{a_n}{2} (e^{j\frac{2\pi n}{T} t} + e^{-j\frac{2\pi n}{T} t}) - j \frac{b_n}{2} (e^{j\frac{2\pi n}{T} t} - e^{-j\frac{2\pi n}{T} t}) = \\ &= e^{j\frac{2\pi n}{T} t} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) + e^{-j\frac{2\pi n}{T} t} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем функцию от n по формуле

$$\begin{aligned} \psi \left(\frac{2\pi n}{T} \right) = a_n - jb_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt - j \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T} t} dt. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда выражение (3) можно записать следующим образом:

$$a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t = \frac{\psi(j\omega)}{2} e^{j\omega t} + \frac{\psi(-j\omega)}{2} e^{-j\omega t} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

где $\omega = \frac{2\pi n}{T}$.

Из этого можно заключить, что ряд (1) можно записать в виде

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \psi(\omega) e^{j\omega t}, \quad (6)$$

где ω пробегает значения $\dots, -\frac{2\pi n}{T}, \dots, -\frac{2\pi}{T}, 0, \frac{2\pi}{T}, \dots, \frac{2\pi n}{T}, \dots$

Из формулы (4) следует

$$\psi(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

Функция $\psi(\omega)$ называется ^(от)частотным спектром функции $f(t)$, заданной на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Так как ряд (6) представляет функцию $f(t)$ также и на всей числовой оси $[-\infty, \infty]$ как периодическую функцию с периодом T , то функцию $\psi(\omega)$ можно также называть частотным спектром периодической функции $f(t)$, определенной на всей оси $[-\infty, \infty]$. Как видно, функция $\psi(\omega)$ является решетчатой функцией, определенной лишь в точках $\omega = \frac{2\pi n}{T}$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому говорят, что периодическая с периодом T функция $f(t)$, определенная на $[-\infty, \infty]$, имеет *дискретный спектр* (в физике это эквивалентно линейчатому спектру), в отличие от сплошного спектра *непериодических* функций $f(t)$, определенных на $[-\infty, \infty]$. Последнее понятие будет рассмотрено ниже.

Если заданная функция $f(t)$ не является периодической функцией, то выражение для нее также можно получить на основании формулы (6), устремляя период T к бесконечности. Положим $\frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$. Тогда $\Delta\omega \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Величина $\Delta\omega$ есть разность смежных частот

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega.$$

Следовательно, при увеличении периода частоты гармонических составляющих (или просто гармоник) приближаются друг к другу, образуя в пределе *сплошной спектр*.

При $T \rightarrow \infty$ из (6) получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{j\omega t} \Delta\omega.$$

Переходя к пределу, будем иметь

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (8)$$

где в силу (7)

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9)$$

Таким образом, мы показали, что, вообще говоря, непериодическая функция $f(t)$, определенная на всей оси t , может быть представлена в форме интеграла (8), который называется *интегралом Фурье*.

Можно представить себе, что функция $f(t)$ образуется суперпозицией синусоидальных колебаний всех частот, причем амплитуды этих колебаний даются формулой (9). Функция $\psi(\omega)$ ($0 \leq \omega \leq \infty$) называется *непрерывным частотным спектром функции $f(t)$* . Этот спектр в отличие от дискретного, рассмотренного выше, является *плотным*, т. е. он определен во всех точках ω из $[-\infty, \infty]$. Интеграл (9) можно рассматривать как некоторое преобразование (или оператор), который функции $f(t)$ ставит в соответствие функцию $\psi(\omega)$, называемую *изображением Фурье функции $f(t)$* . При этом саму функцию $f(t)$ называют *оригиналом*. Зная изображение $\psi(\omega)$, можно найти оригинал $f(t)$ по формуле (8), которая называется *обратным преобразованием Фурье*. Таким образом, формулы (8) и (9) задают соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. Эти формулы всегда справедливы, если фигурирующие в них интегралы *существуют*. Однако это условие, к сожалению, далеко не всегда имеет место. Для существования интеграла (9), т. е. для существования изображения, достаточно, чтобы существовал интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (10)$$

т. е. интеграл от абсолютной величины $f(t)$ был конечным. Такие функции в математике называют интегрируемыми на всей оси t . Аналогично для существования оригинала $f(t)$ (очевидно, что интегралы (9) и (8) отличаются лишь знаком в показателе экспоненты и постоянным коэффициентом) также достаточно интегрируемость $\psi(\omega)$ на всей вещественной оси ω .

Между тем легко видеть, что условие (10) не выполняется для ряда довольно простых, но важных в теории автоматического регулирования функций. Например, для ступенчатой (единичной) функции $1(t)$ условие (10) не выполняется, так как площадь графика этой функции стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Точно так же условие (10) не удовлетворяется и для функции $f(t) = At$ и т. д.

Однако если понимать функцию в несколько более широком смысле, например как обобщенную, то можно определить преобразование Фурье и для более широкого класса функций, для которых условие (10) не выполняется. С обобщенными функциями мы уже встречались. Простейшим примером обобщенной функции является δ -функция (см. гл. III). Можно показать, что преобразование Фурье от единицы, т. е. $f(t) \equiv 1$ при $-\infty \leq t \leq \infty$, есть $2\pi\delta(\omega)$, а преобразование Фурье функции $f(t) = 1(t)$ есть $\frac{1}{j\omega}$ и т. д.

Существует еще один путь, который помогает определить преобразование Фурье, не выходя из класса обычных функций (необобщенных). Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$|f(t)| < Me^{-\alpha t} \quad (11)$$

для каких-либо постоянных $M > 0$, $\alpha > 0$, а, как правило, только с такими функциями и приходилось иметь дело, то для функции $f(t) e^{-ct}$, где $c > \alpha$, уже будет выполняться условие (10) и, следовательно, существует преобразование Фурье. Функции, удовлетворяющие условию (11), называются функциями экспоненциального типа. Кроме того, ограничимся классом функции $f(t)$, которые тождественно равны нулю при $t < 0$. Тогда для функции

$$f_1(t) = f(t) e^{-ct}$$

будет выполнено условие (10) и можно найти ее частотный спектр

$$\int_0^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c+j\omega)t} dt. \quad (12)$$

Положим $p = c + j\omega$, тогда получим функцию $\varphi(p)$ от комплексного переменного p

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (13)$$

Формула (13) каждой функции $f(t)$ экспоненциального типа ставит в соответствие функцию $\varphi(p)$ комплексного переменного p . Преобразование, определяемое формулой (14), называется *преобразованием Лапласа*.

Найдем теперь формулу обращения для преобразования Лапласа, которая по изображению восстанавливала бы оригинал. Так как при фиксированном c функция $\varphi(p) = \varphi(c + j\omega)$ можно рассматривать как результат преобразования Фурье функции $f_1(t) = f(t) e^{-ct}$, то, применяя к функции $\varphi(c + j\omega)$ обратное преобразование Фурье, получим

$$f_1(t) = f(t) e^{-ct} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{j} e^{ct}$, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varphi(p) e^{pt} dp. \quad (14)$$

Интегрирование в выражении (14) ведется снизу вверх вдоль всей прямой, параллельной мнимой оси, отстоящей от нее справа на расстоянии c . Заметим, что интегрирование может вестись для любого $c > 0$, при этом все полюсы функции комплексного переменного должны будут лежать левее прямой интегрирования, так как интеграл (12) существует (т. е. конечен) при любом $c > \alpha$.

Интеграл (14) имеет большое принципиальное значение, так как позволяет по заданному изображению $\varphi(p)$ находить оригинал $f(t)$. Выражение (14) интегрируется в комплексной плоскости методами вычетов, которых мы не будем касаться. Ознакомиться с этими методами можно в специальных курсах по теории функций комплексного переменного. Впрочем, для большого числа обычно встречающихся функций нет надобности каждый раз непосредственно пользоваться интегралом (14), так как имеются весьма полные таблицы, по которым, зная изображение $\varphi(p)$, можно легко найти его оригинал $f(t)$. Для более подробного ознакомления с операторным исчислением

читатель может обратиться к существующим курсам (см. литературу к этой главе).

Практически вместо преобразования Лапласа, определяемого формулой (13), иногда удобнее пользоваться *преобразованием Карсона* или, как его называют иногда, еще преобразованием *Карсона — Лапласа*. Преобразование Карсона определяется формулой

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (15)$$

Из этой формулы видно, что преобразование Карсона отличается от преобразования Лапласа лишь множителем p .

Зная преобразование Лапласа $\varphi(p)$ функции $f(t)$, можно легко найти преобразование Карсона $F(p)$ той же функции $f(t)$:

$$F(p) = p\varphi(p),$$

и, наоборот, зная $F(p)$, функцию $\varphi(p)$ можно найти по формуле

$$\varphi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Поэтому формула обращения для преобразования Карсона — Лапласа легко получается из формулы (14):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (16)$$

Тот факт, что $F(p)$ есть преобразование Лапласа — Карсона функции $f(t)$ и, наоборот, что $f(t)$ есть оригинал изображения $F(p)$, записывается следующим образом:

$$F(p) \rightarrow f(t), \quad f(t) \rightarrow F(p). \quad (17)$$

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $f(t)$ является ступенчатой функцией

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ m & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Подставив значение $f(t) = m$ в подынтегральное выражение (15), находим $F(p)$:

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} m dt = mp \left[\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} = m. \quad (19)$$

Если, например, $m = 1$, то $F(p) = 1$. Функция $f(t)$, определяемая (18) при $m = 1$, называется *единичной*. Следовательно, *изображение единичной функции есть единица*.

Рассмотрим другой пример. Пусть $f(t) = e^{-at}$.

Подставляя e^{-at} в выражение (15), находим

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \frac{p}{p+a}. \quad (20)$$

Замечательное свойство преобразования Лапласа заключается в том, что изображение производной от функции $f(t)$ очень просто связано с изображением самой функции $F(p)$. Действительно, пусть изображением функции $f(t)$ является некоторая функция $F(p)$. Спрашивается, как найти изображение функции $\frac{df}{dt}$?

Чтобы найти ответ, подставляем функцию $\frac{df}{dt}$ в подынтегральное выражение (15) и интегрируем по частям

$$\frac{df}{dt} \rightarrow p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df}{dt} dt = p [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Первый член полученного выражения равен $-pf(0)$, так как $e^{-pt} f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Здесь $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$. Второй член представляет собой не что

иное, как $p \left(p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right) = pF(p)$. Следовательно,

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - pf(0). \quad (21)$$

Если начальное значение функции равно нулю, то изображение производной получается просто умножением на p изображения функции

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p). \quad (22)$$

Пользуясь формулой (21), можно легко найти и изображение второй производной

$$\frac{d^2f}{dt^2} \rightarrow p \left[\text{изображение } \frac{df}{dt} \right] - p \left[\frac{df}{dt}(0) \right]$$

или, согласно формуле (21),

$$\frac{d^2f}{dt^2} \rightarrow p [pF(p) - pf(0)] - pf^{(1)}(0) = p^2F(p) - p^2f(0) - pf^{(1)}(0). \quad (23)$$

Здесь принято сокращенное обозначение $f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}$. Если начальные значения функции и ее производной нули, то формула (23) упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2f}{dt^2} \rightarrow p^2F(p). \quad (24)$$

Аналогичным путем нетрудно вывести общую формулу для n -й производной

$$\frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k} f^{(k)}(+0), \quad (25)$$

где

$$f^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k f}{dt^k} \quad \text{при } t > 0 \text{ и } t \rightarrow 0,$$

а

$$f^{(0)}(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad \text{при } t > 0 \text{ и } t \rightarrow 0.$$

Если начальные значения функции и ее производных до $(n-1)$ -й включительно — нули, то из выражения (25) следует

$$\frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p). \quad (26)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt \rightarrow \Phi(p).$$

Из определения интеграла следует

$$\frac{d\psi}{dt} = f(t), \quad \psi(0) = 0.$$

Поэтому на основании условия (26) можно написать

$$F(p) = p\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Для оператора Лапласа — Карсона справедливы также очевидные теоремы:

1) Если

$$f(t) \rightarrow F(p),$$

то

$$af(t) \rightarrow aF(p).$$

2) Если

$$f_1(t) \rightarrow F_1(p) \quad \text{и} \quad f_2(t) \rightarrow F_2(p),$$

то

$$f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F_1(p) + F_2(p).$$

Приведенные две теоремы определяют линейный оператор. Следовательно, оператор Лапласа — Карсона является линейным оператором.

В пользу введенных понятий нетрудно убедиться, рассмотрев операторный способ решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть требуется, например, найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = e^{-3t}. \quad (27)$$

Для упрощения примем, что начальные значения функции $x(0)$ и ее первой производной $\frac{dx}{dt}(0) = x'(0)$ равны нулю. Умножим обе части уравнения (27) на pe^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до ∞ . Получим выражение

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^2x}{dt^2} dt + 3p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dx}{dt} dt + 2p \int_0^{\infty} e^{-pt} x dt = p \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-3t} dt. \quad (28)$$

Теперь обозначим

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt.$$

Это — пока еще неизвестное изображение неизвестной нам функции $x(t)$. В выражении (28) первый член левой части есть изображение второй производной, т. е. $p^2F(p) - p^2x(0) - px'(0)$; точно так же второй член есть умноженное на три изображение первой производной, т. е. $pF(p) - px(0)$. Правая часть представляет собой изображение функции e^{-3t} , т. е. $\frac{p}{p+3}$. Следовательно, уравнение (28) можно переписать в виде

$$p^2F(p) - p^2x(0) - px^{(1)}(0) + 3[pF(p) - px(0)] + 2F(p) = \frac{p}{p+3}. \quad (29)$$

или, так как $x(0) = x^{(1)}(0) = 0$,

$$p^2F(p) + 3pF(p) + 2F(p) = \frac{p}{p+3}.$$

Из этого уравнения нетрудно найти $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p}{(p+3)(p^2+3p+2)} = \frac{p}{(p+3)(p+2)(p+1)}. \quad (30)$$

Итак, задача решения дифференциального уравнения (27) при помощи операторов свелась к задаче решения алгебраического уравнения (29). Однако его решение (30) дает нам еще не саму функцию $x(t)$, а ее изображение $F(p)$. Чтобы по изображению найти оригинал, представим выражение (30) в следующем виде:

$$F(p) = \frac{p}{(p+3)(p+2)(p+1)} = p \frac{A}{p+3} + p \frac{B}{p+2} + p \frac{C}{p+1}. \quad (31)$$

Находя A , B и C по правилам, известным из алгебры (общая формула для их определения дается ниже), получаем

$$F(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p+1} - \frac{p}{p+2}. \quad (32)$$

Так как $\frac{p}{p+\alpha}$ есть изображение функции $e^{-\alpha t}$, то очевидно, что выражение (32) есть изображение функции

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t} - e^{-2t}. \quad (33)$$

Тем самым найдено решение уравнения. Нетрудно убедиться в том, что, согласно заданным начальным условиям, для выражения (33) справедливы равенства

$$x(0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

Если начальные условия не равны нулю, то из формулы (29) можно найти

$$F(p) = \frac{p}{(p+3)(p+1)(p+2)} + p \frac{x^{(1)}(0) + 3x(0)}{(p+1)(p+2)} + p^2 \frac{x(0)}{(p+1)(p+2)}.$$

По этому изображению можно найти оригинал тем же путем, каким найден оригинал (33).

Итак, при решении уравнений операторным методом нужно произвести следующие операции:

1) вместо уравнения нужно написать его операторное изображение, так же как уравнение (29) выведено из (27);

2) найти изображение $F(p)$ искомой функции из полученного алгебраического уравнения;

3) по заданному изображению $F(p)$ найти оригинал $x(t)$.

Чтобы по заданному изображению было удобно найти оригинал, всевозможные наиболее часто встречающиеся функции и их изображения объединены в таблицы. Найдем, например, изображение функции $\sin \beta t = \frac{1}{2j} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t})$.

$$\begin{aligned} F(p) &= p \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin \beta t \, dt = \frac{p}{2j} \int_0^{\infty} e^{-pt} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \, dt = \\ &= \frac{p}{2j} \left(\frac{1}{p-j\beta} - \frac{1}{p+j\beta} \right) = \frac{p\beta}{p^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Находя таким же образом изображения других простых функций, можно составить следующую таблицу.

Оригинал	$e^{-\alpha t}$	$\sin \beta t$	$\cos \beta t$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	t	t^n
Изображение	$\frac{p}{p+\alpha}$	$\frac{p\beta}{p^2+\beta^2}$	$\frac{p^2}{p^2+\beta^2}$	$\frac{p\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{n!}{p^n}$

§ 2. Основные теоремы операционного исчисления

Для удобства приложений операторного метода имеют большое значение некоторые теоремы, которые мы докажем с помощью иногда не вполне строгих приемов.

Т е о р е м а р а з л о ж е н и я. Допустим, что изображение функции имеет форму

$$F(p) = p \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (1)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — многочлены от p .

Требуется найти оригинал этого изображения.

Пусть выражение (1) удовлетворяет следующим ограничениям:

а) степень многочлена $A(p)$ меньше степени $B(p)$;

б) корни уравнения $B(p) = 0$ — они называются корнями многочлена $B(p)$ — все различны, т. е. среди них нет двух равных друг другу.

Примем также, что коэффициент при наивысшей степени p в выражении $B(p)$ равен единице. Этого всегда можно достичь, умножая числитель и знаменатель дроби на некоторое число. Если корни $B(p)$ равны p_1, p_2, \dots, p_n , то выражение для $B(p)$, согласно основной теореме алгебры, можно записать в виде

$$B(p) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots (p - p_n). \quad (2)$$

Следовательно, знаменатель выражения (1) представляет собой произведение вида (2). Представим теперь $\frac{A(p)}{B(p)}$ в следующем виде:

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p-p_i}, \quad (3)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n — пока еще неизвестные коэффициенты. Их, например A_1 , однако, можно найти, умножая обе части уравнения (3) на $(p - p_1)$. Тогда

$$\frac{A(p)(p-p_1)}{B(p)} = A_1 + \frac{A_2(p-p_1)}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n(p-p_1)}{p-p_n}. \quad (4)$$

Если в этой формуле устремить p к значению p_1 , то все члены в правой части, кроме A_1 , пропадут и получим

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{A(p)(p-p_1)}{B(p)} = \frac{\lim_{p \rightarrow p_1} [A(p)]}{\lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{B(p)}{p-p_1} \right]} = \frac{[A(p)]_{p=p_1}}{[B'(p)]_{p=p_1}}. \quad (5)$$

Здесь в знаменателе произведен предельный переход по известному правилу Лопиталья, поскольку $\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{B(p)}{p-p_1} = \frac{0}{0}$, и поэтому

$$\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{B(p)}{p-p_1} = \frac{\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{d}{dp} B(p)}{\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{d}{dp} (p-p_1)} = [B'(p)]_{p=p_1}.$$

Аналогично можно найти формулу и для любого другого A_i :

$$A_i = \left[\frac{A(p)}{B'(p)} \right]_{p=p_i}. \quad (6)$$

Согласно формуле (3)

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p-p_i}$$

является оригиналом этого изображения

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{A(p)}{B'(p)} \right]_{p=p_i} e^{p_i t}. \quad (7)$$

В формуле (7) и заключается теорема разложения. Очевидно, для определения $x(t)$ нужно знать p_i , т. е. найти корни уравнения $B(p) = 0$.

Если в частном случае один из корней равен нулю, например $p_1 = 0$, то $B(p) = pB_1(p)$, где многочлен $B_1(p)$ уже не имеет корней, равных нулю.

Тогда

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{pB_1(p)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}. \quad (8)$$

Отсюда, умножая на p и устремляя p к нулю, находим

$$A_1 = \left[\frac{A(p)}{B_1(p)} \right]_{p=0} = \frac{A(0)}{B_1(0)}. \quad (9)$$

Остальные A_i находим по прежней формуле (6).

Теперь

$$F(p) = A_1 + \frac{A_2 p}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n p}{p-p_n},$$

откуда, так как оригинал от постоянного выражения равен ступенчатой функции той же величины, находим при $t > 0$

$$x(t) = A_1 + \sum_{i=2}^n A_i e^{p_i t} = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{i=2}^n \left[\frac{A(p)}{B'(p)} \right]_{p=p_i} e^{p_i t}. \quad (10)$$

Случай кратных корней здесь не рассматривается.

Т е о р е м а с м е щ е н и я. Пусть $x(t) \rightarrow F(p)$. Каково изображение функции $x(t-a)$?

При ответе учитываем, что $x(t-a) = 0$ при $t < a$, так как $x(t) = 0$ при $t < 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} x(t-a) \rightarrow p \int_0^{\infty} x(t-a) e^{-pt} dt &= p \int_{-a}^{\infty} x(\tau) e^{-p(a+\tau)} d\tau = \\ &= p \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-p(a+\tau)} d\tau = e^{-ap} F(p). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, сдвигу графика функции вправо на величину a (см. рис. 5.1, а и б) соответствует умножение изображения $F(p)$ функции $x(t)$ на e^{-ap} .

Т е о р е м а о б у с т а н о в и в ш е м с я з н а ч е н и и. Если установившееся значение функции $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ есть постоянная величина, то ее можно найти по простой формуле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p), \quad (12)$$

где $f(t) \rightarrow F(p)$. Для вывода этой формулы рассмотрим выражение (25) предыдущего параграфа, из которого следует

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = F(p) - f(+0). \quad (13)$$

Устремляя p к нулю в обеих частях выражения, получаем в пределе

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \int_0^{\infty} d\left(\frac{f}{1}\right) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) - f(+0),$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) - f(+0).$$

Из последнего выражения следует равенство (12).

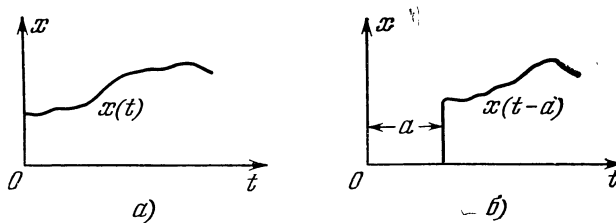


Рис. 5.1.

Теорема о начальном значении. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$f(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p). \quad (14)$$

Рассмотрим опять формулу (13) и представим интеграл [в ее левой части в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^M \frac{df}{dt} e^{-pt} dt + \int_M^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt, \quad (15)$$

где $M > 0$. По теореме о среднем значении, если $0 < \theta < 1$, справедливо равенство

$$\int_0^M \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = \left[\frac{df}{dt} \right]_{t=\theta M} \int_0^M e^{-pt} dt = \left[\frac{df}{dt} \right]_{t=\theta M} \cdot \frac{1}{p} (1 - e^{-pM}).$$

Пусть M фиксировано. Тогда из предыдущего выражения следует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = 0.$$

Второй интеграл дает также в пределе нуль, так как

$$\left| \int_M^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt \right| < e^{-pM} \left| \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt \right| = e^{-pM} [f(\infty) - f(+0)].$$

Очевидно, при $p \rightarrow \infty$ левая часть выражения стремится к нулю. Следовательно, для всего интеграла имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = 0. \quad (16)$$

Из формулы (13) с учетом (16) при $p \rightarrow \infty$ сразу следует равенство (14).
Теорема свертки.

Есть еще одно важное свойство преобразования Лапласа, которое имеет вид

$$F_1(p) F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad \text{или} \quad \int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \rightarrow F_1(p) F_2(p). \quad (17)$$

Докажем это. Действительно, так как $f_1(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, то $f_1(t-\tau) = 0$ при $\tau > t$, следовательно,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t-\tau) dt \right] f_2(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_2(\tau) \left[\int_0^{\infty} e^{-p(t-\tau)} f_1(t-\tau) dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

Но интеграл в квадратных скобках не зависит от τ , так как $f_1(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$. Поэтому, вводя $\xi = t - \tau$, вынося его за интеграл по $d\tau$, получим

$$A = \int_0^{\infty} e^{p\tau} f_2(\tau) d\tau \cdot \int_0^{\infty} e^{-p\xi} f_1(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_2(\tau) d\tau \cdot \int_0^{\infty} e^{-p\xi} f_1(\xi) d\xi = F_1(p) F_2(p),$$

что требовалось доказать.

§ 3. Временные характеристики звеньев и систем

Линейные системы обладают тем замечательным свойством, что, зная реакцию линейной системы (при нулевых начальных условиях $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$) на *какое-либо* данное воздействие $f(t)$, можно найти реакцию линейной системы на *любое* другое входное воздействие $f(t)$. Таким образом, линейную систему можно полностью охарактеризовать реакцией линейной системы на *стандартные* входные воздействия в виде *ступенчатой единичной функции* $1(t)$, *единичного импульса* $\delta(t)$ или δ -функции (см. § 3 гл. III). В дальнейшем в этом разделе мы будем пользоваться «приближенным» представлением δ -функции в виде прямоугольного импульса $I(t)$

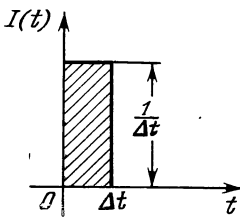


Рис. 5.2.

с площадью равной единице (ибо $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$), ширины Δt и высоты $1/\Delta t$ (рис. 5.2), т. е.

$$I(t) = \begin{cases} 1/\Delta t & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta t, \\ 0 & \text{при } t > \Delta t, t < 0. \end{cases}$$

Пусть реакция линейной системы на единичное входное воздействие $1(t)$ (при нулевых начальных условиях) характеризуется переходной функцией $h(t)$.

Тогда легко показать, что реакция линейной системы $K(t)$ на входное возмущающее воздействие в виде δ -функции есть производная по времени от реакции системы на единичную функцию,

$$K(t) = h'(t).$$

Действительно, по определению ступенчатой переходной функции $h(t)$ имеем, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению, описывающему движение системы или отдельного блока, т. е.

$$a_0 h^{(n)} + a_1 h^{(n-1)} + \dots + a_n h = 1(t).$$

Дифференцируя это уравнение по времени t , получим

$$a_0 (h')^n + a_1 (h')^{n-1} + \dots + a_n h' = \delta(t),$$

т. е. мы видим, что функция $h'(t) = K(t)$ действительно есть реакция нашей системы на входное воздействие в виде δ -функции. Ответ или реакция линейной системы $K(t)$ при нулевых начальных условиях на входное воздействие в виде δ -функции (единичного импульса) называется *весовой функцией* линейной системы или *функцией веса* линейной системы, или *импульсной переходной функцией*. Пусть, например, нам известна весовая функция $K(t)$ системы. Как определить реакцию $x(t)$ этой системы на произвольное входное воздействие $f(t)$? Представим функцию $f(t)$ как сумму узких прямоугольных импульсов с высотой $f(\tau_i)$ и шириной Δt (рис. 5.3):

$$f(t) = \sum_{i=1}^N I_i(t), \quad I_i(t) = \begin{cases} f(\tau_i) & \text{при } t_i \leq t < t_i + \Delta t = t_{i+1}, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < t_i, t_{i+1} < t. \end{cases}$$

Площадь каждого импульса равна $f(\tau_i) \Delta t$. Тогда реакция $x(t)$ приближенно представится как сумма

$$x(t) = \sum_{i=1}^n K(t - \tau_i) f(\tau_i) \Delta t.$$

Отсюда видно, что переходная функция $K(t - \tau)$ в известной степени характеризует значимость (весомость) входного импульса, возникающего в момент времени τ , среди других импульсов, участвующих в формировании выходного сигнала в момент времени t ($t > \tau$), чем и объясняется ее название — *функция веса*. Устремляя Δt к нулю, получим, что

$$x(t) = \int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau. \tag{1}$$

Этот интеграл называется иногда интегралом *Дюамеля* или *интегралом свертки* (двух функций $K(t)$ и $f(t)$). Эта формула позволяет вычислить реакцию линейной системы на произвольное входное воздействие $f(t)$, если известна функция $K(t)$. Таким образом, ответ $K(t)$ линейной системы на воздействие $\delta(t)$ полностью характеризует линейную систему.

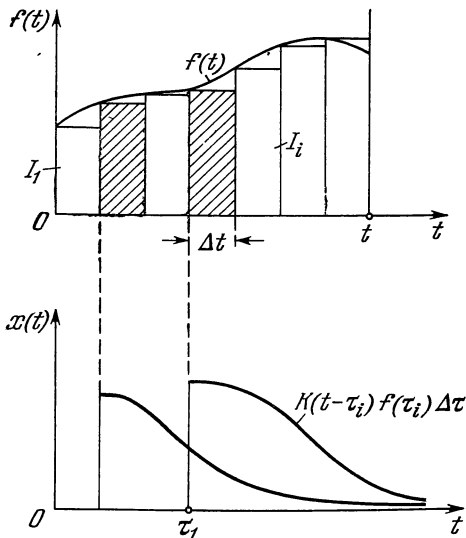


Рис. 5.3.

Формулу (1), связывающую входной и выходной сигналы системы при нулевых начальных условиях, можно представить и через переходную функцию $h(t)$. Для этого достаточно проинтегрировать правую часть (1) по частям и вспомнить, что

$$K(t) = h'(t) \quad (2)$$

или

$$h(t) = \int_0^t K(\tau) d\tau + h(0). \quad (3)$$

Выполнив интегрирование (1) с учетом (3), получим

$$x(t) = f(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)f'(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Пусть дано дифференциальное уравнение, описывающее систему или отдельное звено с входным воздействием u и выходным x :

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_nx = b_0u^{(k)} + \dots + b_k(u), \quad n > k.$$

Передаточная функция $W(p)$ такой системы u и x равна

$$W(p) = \frac{b_0p^k + \dots + b_k}{a_0p^n + \dots + a_n}.$$

Теперь к обеим частям дифференциального уравнения применим преобразование Лапласа, получим

$$R(p)X(p) - N(p) = Q(p)U(p) - M(p).$$

Здесь

$$R(p) = a_0p^n + \dots + a_n, \quad Q(p) = b_0p^k + \dots + b_k,$$

и $N(p)$ и $M(p)$ — соответственно полиномы от p степени n и k с коэффициентами, зависящими от $(n-1)$ и $(k-1)$ производных $x(t)$ и $u(t)$ при $t=0$. Отсюда

$$X(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}U(p) + \frac{N(p) - M(p)}{R(p)}.$$

Если начальные условия равны нулю, то $N(p)$ и $M(p)$ равны нулю. В этом случае

$$X(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}U(p),$$

и следовательно,

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{Q(p)}{R(p)} = W(p).$$

Таким образом, мы нашли обоснование передаточной функции $W(p)$, определенной ранее формально на основе операционного метода.

Обратно, пусть нам известна передаточная функция системы $W(p)$, тогда

$$\frac{X(p)}{U(p)} = W(p) \quad (5)$$

или $X(p) = W(p)U(p)$. Пусть оригинал функции $W(p)$ есть $K(t)$. Тогда по теореме свертки

$$x(t) = \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (6)$$

что совпадает с формулой (1). На основании (6) формулы можно дать интерпретацию передаточной функции $W(p)$. Действительно, сравнивая формулы

(1), (5) и (6), легко видеть, что передаточная функция $W(p)$ есть преобразование Лапласа импульсной (весовой) переходной функции линейной системы. Заметим, что до сих пор функция $W(p)$ определялась на основе некоторого *символического* исчисления и имела смысл некоторой функции от p , которая получается из дифференциального уравнения, связывающего две функции $u(t)$ и $x(t)$,

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^k u}{dt^k} + b_1 \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}} + \dots + b_k u \quad (7)$$

путем формальной замены символа произвольной d/dt на переменную p

$$a_0 p^n x + a_1 p^{n-1} x + \dots + a_n x = b_0 p^k u + b_1 p^{k-1} u + \dots + b_k u$$

и формального вычисления отношения

$$\frac{x}{u} = W(p) = \frac{b_0 p^k + \dots + b_k}{a_0 p^n + \dots + a_n}. \quad (8)$$

Таким образом, единственный смысл соотношения (8) состоял в том, что, проделывая все операции в обратном порядке, мы приходим к дифференциальному уравнению (7), которое имеет совершенно четкий математический смысл. Таким образом, смысл передаточной функции в этом случае состоял в том, что существует взаимно однозначное соответствие между дифференциальным уравнением (7) и соотношением (8).

Теперь же мы получили иную интерпретацию передаточной функции $W(p)$. Смысл этой функции состоит в том, что она с помощью соотношения (5) *связывает два изображения по Лапласу* — входного воздействия $U(p)$ и выходного сигнала $X(p)$. Точнее, на основании (5) можно сказать, что *передаточная функция системы $W(p)$ есть отношение изображения выходной величины этой системы к изображению входной величины при условии, что система в начальный момент времени (в момент начала действия входного сигнала) находилась в покое*, т. е. выходная величина $x(t)$ и все ее производные были равны нулю. Однако метод преобразования Лапласа также дает возможность учесть и наличие ненулевых начальных условий функции $x(t)$. Таким образом, зная реакцию $x(t)$ линейной системы на произвольный входной сигнал $f(t)$ при нулевых начальных условиях, мы теперь можем найти реакцию этой системы на любой другой заданный входной сигнал $f_1(t)$ (при нулевых начальных условиях). Действительно, из формулы (5) имеем, что передаточная функция системы равна

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)}.$$

Зная $W(p)$, можно найти изображение по Лапласу $X_1(p)$ реакции системы на входной сигнал $f_1(t)$. Действительно,

$$X_1(p) = W(p) F_1(p) = \frac{X(p)}{F(p)} \cdot F_1(p).$$

Для определения $x_1(t)$ остается взять обратное преобразование Лапласа.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТОТНЫМИ МЕТОДАМИ

§ 1. Частотные характеристики

Если на вход некоторой системы, имеющей передаточную функцию $W(p)$, подать гармоническое входное воздействие, то и выходная координата, вообще говоря, через некоторое время в установившемся режиме также начнет изменяться по строго гармоническому закону, но с измененной амплитудой и фазой. Гармоническим сигналом называется сигнал $x(t)$ вида

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Частным случаем такого сигнала может быть

$$x(t) = \sin \omega t, \quad x(t) = \cos \omega t. \quad (2)$$

Гармонический сигнал может быть записан и в комплексной форме

$$x(t) = B e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (3)$$

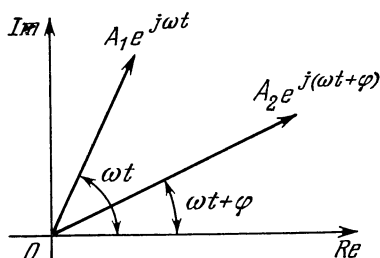


Рис. 6.1.

Для того чтобы уяснить смысл частотной характеристики системы, надо понять следующие два положения: если на вход системы

подать гармонический сигнал $u(t) = A_1 \sin \omega t$, то выход системы также будет меняться по гармоническому закону $x(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$; величины A_2 и φ при неизменной амплитуде A_1 входного сигнала зависят от частоты ω .

Очевидно, что каждой фиксированной частоте входного гармонического сигнала будет соответствовать свое определенное значение амплитуды выходного сигнала и свой определенный сдвиг фазы.

Пусть система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u, \quad (4)$$

а входное воздействие u меняется по гармоническому закону. Для удобства мы его будем записывать в комплексной форме. На комплексной плоскости входной сигнал изобразится в виде вектора длины A_1 , который вращается против часовой стрелки вокруг начала координат с частотой ω (рис. 6.1):

$$u(t) = A_1 e^{j\omega t}. \quad (5)$$

Тогда выходная координата x также может быть представлена на комплексной плоскости в виде вектора длины $A_2(\omega)$, зависящей от частоты ω , который вращается против часовой стрелки вокруг начала координат с той же частотой ω , но отставая от вектора u на угол (по фазе) $\varphi(\omega)$, причем этот сдвиг фазы также зависит от частоты ω , т. е.

$$x(t) = A_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}. \quad (6)$$

Математически это означает, что функция $x(t)$, определенная выражением (6), есть *частное* решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (4). Это решение соответствует *вынужденной* составляющей полного решения этого уравнения, полученной под действием вынуждающей правой части уравнения (4). Подставляя (5) и (6) в уравнение (4), получим

$$a_0(j\omega)^n A_2(\omega) e^{j(\omega t + \theta(\omega))} + a_1(j\omega)^{n-1} A_2(\omega) e^{j(\omega t + \theta(\omega))} + \dots + a_n A_2(\omega) e^{j(\omega t + \theta(\omega))} = b_0(j\omega)^m A_1 e^{j\omega t} + \dots + b_m A_1 e^{j\omega t}. \quad (7)$$

Отсюда легко находим

$$\begin{aligned} \frac{x(t, \omega)}{u(t, \omega)} &= \frac{A_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{A_1 e^{j\omega t}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= \frac{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{K(j\omega)}{D(j\omega)} = W(j\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь входной и выходной гармонические сигналы обозначены соответственно через $x(t, \omega)$ и $u(t, \omega)$, чтобы подчеркнуть их зависимость от частоты ω .

Функция (8) называется *комплексной частотной характеристикой системы* с передаточной функцией $W(p)$ или *комплексным коэффициентом усиления* или (*комплексной*) *амплитудно-фазовой (частотной) характеристикой*. Соотношение (8) показывает, что можно легко получить комплексную частотную характеристику системы, зная передаточную функцию системы $W(p)$ и полагая в выражении для $W(p)$ аргумент $p = j\omega$. Таким образом, мы видим, что если $W(p)$ есть преобразование Лапласа от импульсной переходной функции системы $K(t)$, то комплексная частотная характеристика $W(j\omega)$ есть преобразование Фурье от $K(t)$. Таким образом, чтобы найти комплексную частотную характеристику системы $W(j\omega)$, надо в передаточной функции $W(p)$ этой системы аргумент p заменить на $j\omega$. Полученная при этом функция в соответствии с (8) является отношением выходного гармонического сигнала к входному гармоническому сигналу в комплексном виде в зависимости от частоты гармонических сигналов ω . Представим функцию $W(j\omega)$ в полярных координатах:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (9)$$

или

$$\frac{x(t, \omega)}{u(t, \omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10)$$

где

$$A(\omega) = |W(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega). \quad (11)$$

Функция $A = A(\omega)$ называется *амплитудной частотной характеристикой системы* и представляет собой *отношение* амплитуды установившегося выходного гармонического сигнала к амплитуде выходного гармонического сигнала при частоте входного сигнала, равной ω .

Функция $\varphi = \varphi(\omega)$ называется *фазовой частотной характеристикой системы*. Она показывает, на сколько выходной сигнал $x(t)$ при данной частоте ω сдвинут по фазе (углу) относительно входного сигнала $u(t)$.

Как комплекснозначную функцию действительного переменного ω функции $W(j\omega)$ можно представить в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (12)$$

т. е. $P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и $Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$. Из соотношения (10) получим

$$\frac{x(t, \omega)}{u(t, \omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (13)$$

Функция $P = P(\omega)$ называется *вещественной частотной характеристикой системы* с передаточной функцией $W(p)$, а $Q = Q(\omega)$ называется *мнимой частотной характеристикой*.

При каждом фиксированном ω значение функции $W(j\omega)$ однозначно определяет точку на комплексной плоскости с декартовыми координатами $P(\omega)$, $Q(\omega)$ или полярными координатами $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Поэтому легко видеть, что амплитудная, фазовая, вещественная и мнимая частотные характеристики

выражаются друг через друга посредством следующих соотношений (рис. 6.2):

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad (14)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega), \quad (15)$$

и, наоборот,

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (16)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (17)$$

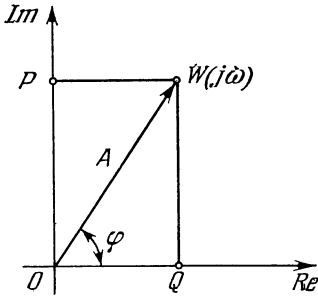


Рис. 6.2.

Эти соотношения по сути дела есть формулы перехода от полярных координат к прямоугольным и, наоборот, от прямоугольных координат к полярным.

Функция $P(\omega)$, вообще говоря, не независима от $Q(\omega)$, а функция $A(\omega)$ не независима от $\varphi(\omega)$, и наоборот. Системы, в которых функция $P(\omega)$ однозначно определяет $Q(\omega)$ и наоборот, а также функция $A(\omega)$ однозначно определяет $\varphi(\omega)$ и наоборот, называются *минимально-фазовыми системами*. Для этих систем имеют место следующие соотношения:

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \quad (18)$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \quad (19)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

Прологарифмировав равенство (10), получим

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega).$$

Если взять некоторую новую систему с передаточной функцией $\ln W(j\omega)$, то для нее справедливы формулы (18) и (19), т. е.

$$\ln A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \quad (20)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(\xi)}{\xi - \omega} d\xi. \quad (21)$$

Таким образом, для минимально-фазовых систем, зная какую-либо одну частотную характеристику, можно однозначно определить все другие характеристики. Однако для того, чтобы система с заданной частотной характери-

стикой была *физически реализуема*, нужно, чтобы соответствующая ей импульсная переходная функция была равна нулю при $t < 0$, где $t = 0$ — момент начала действия входного импульса. Это объясняется тем, что физически реализуемая система не может реагировать на входной сигнал (импульс) до момента начала его действия.

Для того чтобы произвольной амплитудной частотной характеристике соответствовала физически реализуемая система, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\xi)|}{1 + \xi^2} d\xi$$

сходился, т. е. имел определенное конечное значение.

Легко показать (проделайте это сами!), что $P(\omega)$ есть четная функция аргумента ω , а $Q(\omega)$ — нечетная функция, т. е. $P(\omega) = P(-\omega)$ и $Q(-\omega) = -Q(\omega)$. Из соотношений (16) и (17) следует, что $A(\omega)$ есть четная, а $\varphi(\omega)$ — нечетная функция аргумента ω . Поэтому достаточно знать эти функции лишь при неотрицательных значениях аргумента ω .

Комплексную частотную характеристику системы $W(j\omega)$ можно изобразить на комплексной плоскости в виде годографа вектора $W(j\omega)$ в зависимости лишь от частоты ω , которая играет роль параметра, изменяющегося от $-\infty$ до ∞ . Заметим также, что в противоположность векторам $x(t, \omega)$ и $u(t, \omega)$ вектор $W(j\omega)$ в силу (8) уже не зависит от времени t . Часть годографа $W(j\omega)$, соответствующая изменению ω от 0 до $-\infty$, будет в силу вышесказанного симметрична части годографа, соответствующего изменению ω от 0 до $+\infty$ относительно действительной оси. Поэтому на графике всегда изображают лишь годограф, соответствующий изменению ω от 0 до $+\infty$. Определим для примера различные частотные характеристики интегрирующего и аperiodического блоков.

И н т е г р и р у ю щ и й б л о к. Передаточная функция интегрирующего блока

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Полагая $p = j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega} = + \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}; \quad P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}.$$

Таким образом, годограф вектора $W(j\omega)$ для интегрирующего блока при изменении ω от 0 до $+\infty$ перемещается вдоль *отрицательной части мнимой оси* от $-\infty$ до 0 (рис. 6.3). Амплитуда выходного гармонического сигнала уменьшается с ростом частот ω по гиперболическому закону. Фаза выходного сигнала не изменяется от частоты, т. е. фаза выходного сигнала на любой частоте сдвинута по отношению к фазе входного сигнала на $-\frac{\pi}{2}$ радиан или -90° . Знак минус указывает на то, что вектор, изображающий входной сигнал, *отстает* от вектора входного сигнала на 90° . Графики функций $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ изображены на рис. 6.4, а, б, в, г соответственно.

А п е р и о д и ч е с к о е з в е н о. Передаточная функция аperiodического звена имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Следовательно, имеем

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{-k(Tj\omega - 1)}{(T\omega)^2 + 1} = \frac{k}{(T\omega)^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{(T\omega)^2 + 1} = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} e^{-j \arctg T\omega}.$$

Отсюда получим

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega,$$

$$P(\omega) = \frac{k}{(T\omega)^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{(T\omega)^2 + 1}.$$

Годограф вектора $W(j\omega)$ изображен на рис. 6.5. Легко показать (докажите это), что годограф $W(j\omega)$ при ω , изменяющейся от 0 до ∞ , представляет собой *полуокружность* радиуса $k/2$ с центром в точке $(k/2, 0)$. Функции $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$ изображены на рис. 6.6, а, б, в, г соответственно.

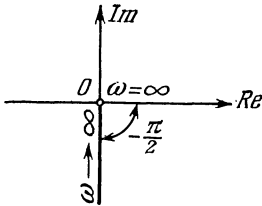


Рис. 6.3.

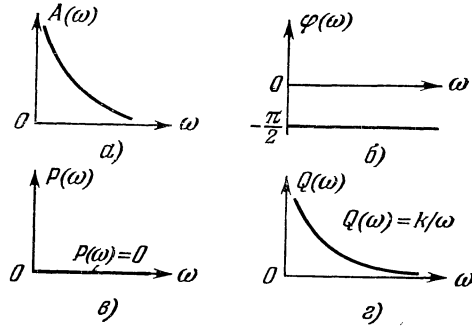


Рис. 6.4.

Частотные характеристики системы могут определяться не только на основании знания передаточной функции системы $W(p)$ или на основании знания дифференциальных уравнений движения системы. Они также могут быть определены и экспериментально, что имеет большое практическое значение, так как на практике далеко не всегда известны передаточные функции и уравнения движения объекта. Для этой цели необходимо ко входу

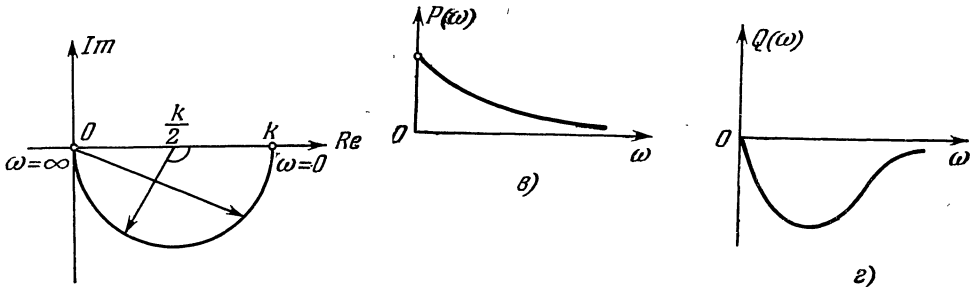


Рис. 6.5.

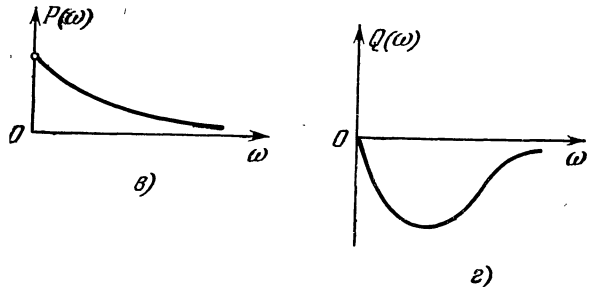


Рис. 6.6.

приложить гармоническое воздействие известной частоты ω , например, полагая $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$. После затухания собственной составляющей

в системе *устанавливаются* вынужденные колебания той же частоты ω , т. е. $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Замеряя амплитуды A_1 и A_2 и фазы φ_1 и φ_2 колебаний входа и выхода системы, можно, беря отношение амплитуды A_2/A_1 и разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$, определить *одну* точку амплитудной и соответственно фазовой характеристики, соответствующей данной частоте. Увеличивая частоту ω входного сигнала от 0 и выше, мы сможем построить всю частотную характеристику.

Заметим еще, что формула (21) может быть представлена в более удобном для вычисления виде

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL}{d\lambda} \ln \operatorname{cth} \left| \frac{\lambda}{2} \right| d\lambda, \quad (22)$$

где

$$L(n) = \ln A(n), \quad \lambda = \ln \frac{n}{\omega}.$$

Функция

$$\ln \operatorname{cth} \left| \frac{\lambda}{2} \right| = \ln \left| \frac{n+\omega}{n-\omega} \right|$$

очень быстро убывает при удалении n/ω от единицы. Поэтому величина интеграла (22) определяется главным образом теми значениями производной $\frac{dL}{d\lambda}$, которые находятся в окрестности точки $n = \omega$. Следовательно, наиболее существенное влияние на величину сдвига фазы $\varphi(\omega)$ при данной частоте ω оказывает наклон графика функции логарифма амплитудной характеристики вблизи этого значения частоты, или, иными словами, наклон логарифмической амплитудной характеристики.

Проведем теперь сравнение минимально-фазовой системы или звена с неминимально-фазовой.

В общем случае передаточная функция системы имеет вид

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)},$$

где $Q(p)$ — полином степени m и $P(p)$ — полином степени n , причем $m \leq n$. Полагаем, что система устойчивая, т. е. корни уравнения $P(p) = 0$ лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$). Система может быть как разомкнутой, так и замкнутой (в последнем случае полином $P(p)$ должен быть заменен полиномом $H(p) = P(p) + Q(p)$, от чего дальнейшие рассуждения не изменяются, если только сказанное относительно $P(p)$ перенести на $H(p)$).

Сравнению подлежат две системы с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$, выбранными таким образом, что их амплитудные частотные характеристики одинаковы, т. е.

$$W_1(\omega) = W_2(\omega), \quad \text{где } W_1(\omega) = |W_1(j\omega)| \text{ и } W_2(\omega) = |W_2(j\omega)|.$$

Положим, что

$$W_1(p) = \frac{Q_1(p)}{P(p)}, \quad W_2(p) = \frac{Q_2(p)}{P(p)}.$$

Если $W_1(p)$ принадлежит минимально-фазовой системе, то все корни уравнения $Q_1(p)$ (нули функции $W_1(p)$) должны лежать в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$). Все или часть нулей передаточной функции $W_2(p)$, принадлежащей неминимально-фазовой системе, лежат в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} p > 0$).

Рассмотрим простейший случай, когда $Q_1(p) = (p+a)Q_0(p)$ и $Q_2(p) = (p-a)Q_0(p)$, где a — положительное вещественное число и $Q_0(p)$ — полином, все корни которого лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$). Это значит, что все корни полинома $Q_1(p)$ лежат в левой полуплоскости, тогда

как один из вещественных корней полинома $Q_2(p)$ лежит в правой полуплоскости в точке $p = a$ на вещественной оси. Следовательно,

$$W_1(p) = \frac{(p+a)Q_0(p)}{P(p)}, \quad W_2(p) = \frac{(p-a)Q_0(p)}{P(p)},$$

откуда

$$W_2(p) = W'(p)W_1(p), \quad W'(p) = \frac{p-p}{p+a}.$$

Последнее выражение показывает, что в данном случае неминимально-фазовая система может быть представлена в виде последовательного соединения минимально-фазовой системы и звена с передаточной функцией $W'(p)$ ¹⁾.

Комплексный коэффициент передачи такого звена равен

$$W'(j\omega) = \frac{j\omega - a}{j\omega + a} = \frac{a - j\omega}{a + j\omega} e^{j\pi}. \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что амплитудная частотная характеристика звена удовлетворяет условию

$$A'(\omega) = |W'(j\omega)| = 1,$$

т. е. рассматриваемое звено сохраняет амплитуду гармонической выходной величины равной амплитуде входной величины при любой частоте. При этом

$$|W_2(j\omega)| = |W'(j\omega)W_1(j\omega)| = |W_1(j\omega)|,$$

т. е. исходное предположение о равенстве амплитудных частотных характеристик обеих сравниваемых систем выполняется.

Из формулы (*) следует, что фазовая частотная характеристика определяется выражением

$$\varphi'(\omega) = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}.$$

Фазовый угол $\varphi'(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ меняется в интервале от π до 0. Для пояснения на рис. 6.7, а приведена амплитудно-фазовая характеристика звена, т. е. годограф вектора $W'(j\omega)$.

Таким образом, включение звена с переходной функцией $W'(p)$ приводит к добавлению положительного сдвига фазы $\varphi'(\omega)$, который при $\omega \rightarrow \infty$ равен π и уменьшается

по мере возрастания частоты (или, что то же, — к добавлению отрицательного сдвига фазы, который при $\omega \rightarrow 0$ равен $-\pi$ и при возрастании частоты растет по абсолютному значению до -2π).

Звенья, у которых только фазовая частотная характеристика зависит от частоты, широко применяются на практике для корректирования фазовых

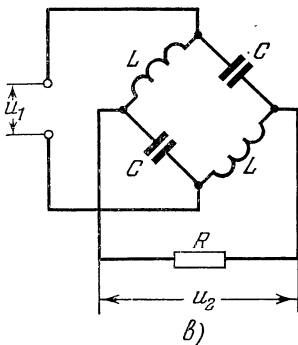
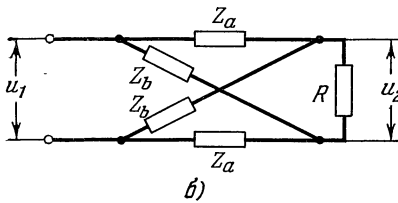
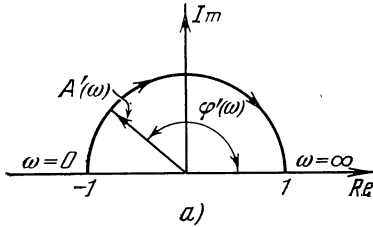


Рис. 6.7.

1) Обратное представление $\left[W_1(p) = \frac{1}{W'(p)} W_2(p) \right]$ невозможно, так как звено с передаточной функцией $\frac{1}{W'(p)} = \frac{p+a}{p-a}$ неустойчиво.

характеристик цепей, для фильтрации отдельных гармоник, для повышения устойчивости и т. д.

Комплексные коэффициенты передачи типа $W'(j\omega)$ можно получить с помощью так называемых «скрещенных» схем, вид которых изображен на рис. 6.7, б.

Это по существу мостовая схема. Воспользовавшись теоремой Тевенена нетрудно показать, что при условии $R^2 = Z_a Z_b$ имеет место соотношение

$$\frac{-u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = W'(j\omega) = \frac{1 - \frac{Z_a}{R}}{1 + \frac{Z_a}{R}}.$$

Так, например, для простого реактивного моста, приведенного на рис. 6.7, в при условии, что $R = \sqrt{L/C}$ (ибо $Z_a = \frac{1}{j\omega C}$ и $Z_b = j\omega L$), получаем

$$W'(j\omega) = \frac{j\omega CR - 1}{j\omega CR + 1}.$$

§ 2. Критерий устойчивости Михайлова

Критерий Рауса — Гурвица для систем высокого порядка становится громоздким. Наглядная оценка влияния изменения параметров на устойчивость при пользовании этим критерием затруднена. А. В. Михайлов впервые вывел частотный критерий устойчивости, носящий его имя, позволяющий оценить устойчивость системы на основании годографа некоторой функции. Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы регулирования

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = \\ = a_0 \prod_{i=1}^n (p - p_i) = 0, \end{aligned}$$

где p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — корни исходного уравнения.

Обозначим характеристический многочлен системы (левую часть характеристического уравнения) через $H(p)$:

$$H(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n).$$

Рассмотрим комплексную плоскость (рис. 6.8), на которой точками отмечены корни p_1, \dots, p_n . Пусть первые k из этих корней лежат справа от мнимой оси и остальные ($n - k$) — слева от мнимой оси. Пусть теперь независимая переменная p функции $H(p)$ меняется вдоль мнимой оси от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. $p = j\omega$, где $-\infty \leq \omega \leq \infty$.

Пусть точка p_i лежит справа от мнимой оси. Построим разность $p - p_i = j\omega - p_i$, которая изобразится на чертеже вектором DA . При изменении ω от $\omega = -\infty$ до $\omega = \infty$ вектор DA повернется вокруг точки D на угол $-\pi$. (Направленное вращение по часовой стрелке будем считать отрицательным.) Таким образом, если корень p_0 лежит *справа* от мнимой оси, то приращение аргумента числа $p - p_i$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно $-\pi$. Если корень p лежит *слева* от мнимой оси, то приращение аргумента

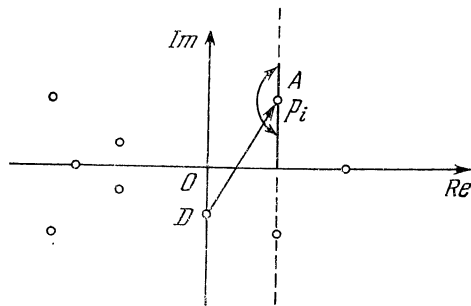


Рис. 6.8.

числа $p - p_i$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно π . Но приращение аргумента функции $f(p)$ равно

$$\Delta \arg H(p) = \Delta \arg (p - p_1) + \Delta \arg (p - p_2) + \dots + \Delta \arg (p - p_n).$$

Отсюда при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ имеем

$$\Delta \arg H(j\omega) = -k\pi + (n - k)\pi = (n - 2k)\pi.$$

$$-\infty \leq \omega \leq \infty$$

Но необходимое и достаточное условие устойчивости есть $k = 0$. Поэтому для

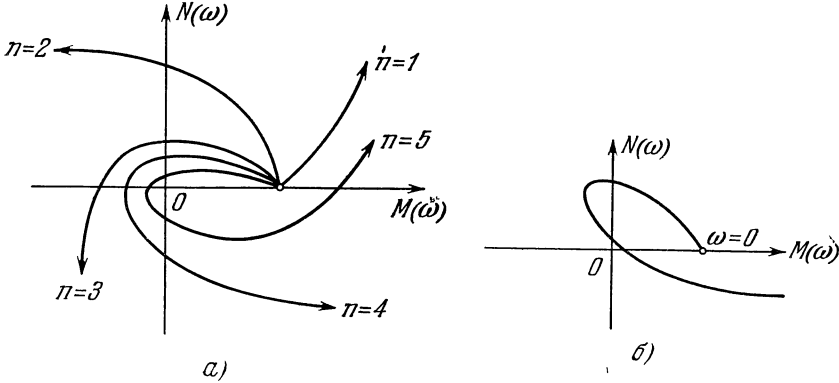


Рис. 6.9.

устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta \arg H(j\omega) = n\pi.$$

$$-\infty \leq \omega \leq \infty$$

Так как $H(j\omega)$ сопряжено с $H(-j\omega)$, т. е. $H(j\omega) = H(-j\omega)$, то годограф $H(j\omega)$ будет симметричен годографу $H(-j\omega)$ относительно действительной оси Re ; отсюда

$$\Delta \arg H(j\omega) = 2\Delta \arg H(j\omega),$$

$$-\infty \leq \omega \leq \infty \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

и, следовательно, для устойчивости САР необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Delta \arg H(j\omega) = \frac{\pi n}{2}.$$

$$0 \leq \omega \leq \infty$$

Таким образом, для устойчивости САР соответственно первого, второго, третьего и т. д. порядков $n = (1, 2, 3 \dots)$ годограф $H(j\omega)$ должен иметь вид, изображенный на рис. 6.9, а. Здесь предполагается, что $H(j\omega) = M(\omega) + jN(\omega)$, где $M(\omega)$ и $N(\omega)$ — действительные функции от ω . Годограф неустойчивой системы для $n = 4$ изображен на рис. 6.9, б. Как видно из рис. 6.9, а, годограф устойчивой системы имеет такой вид, что действительная $M(\omega)$ и мнимая $N(\omega)$ части функции $H(j\omega)$ должны строго по очереди обращаться в нуль, причем действительная часть $M(\omega)$ должна обращаться в нуль $n/2$ раз, если n — четное, и $\frac{n+1}{2}$ раз, если n — нечетное число, т. е. $M(\omega)$ должна иметь при $\omega \geq 0$ соответственно $n/2$ или $\frac{n-1}{2}$ корней. Мнимая часть $N(\omega)$ должна обращаться в нуль $n/2$ раз, если n — четное, и $\frac{n+1}{2}$ раз, если n — нечетное число, т. е. $N(\omega)$ при $\omega \geq 0$ должно иметь соответственно или $n/2$ или $\frac{n+1}{2}$ корней. На рис. 6.10 изображены

графики $M(\omega)$ и $N(\omega)$ для устойчивой системы четвертого порядка ($n = 4$). На рис. 6.11 изображены графики $M(\omega)$ и $N(\omega)$ для неустойчивой системы. Таким образом, можно условие перемежаемости корней функций $M(\omega)$

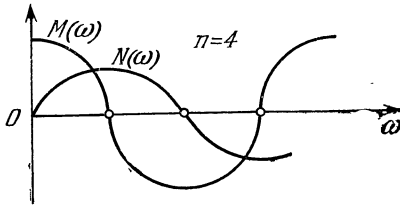


Рис. 6.10.

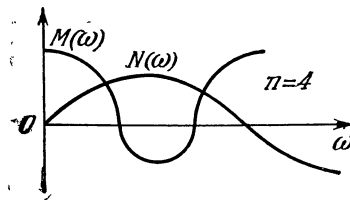


Рис. 6.11.

и $N(\omega)$ принять за новый критерий устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни функций $M(\omega)$ и $N(\omega)$ строго перемежались. Этот критерий иногда называется критерием перемежаемости корней и является простым следствием из критерия Михайлова.

§ 3. Критерий устойчивости Найквиста

Замыкание системы регулирования может существенно изменить ее свойство. Напомним, что под замыканием разомкнутой системы понимается подача на вход этой системы выходного сигнала с обратным знаком. На рис. 6.12, а и б изображены разомкнутая система и соответствующая ей замкнутая система. Например, если разомкнутая система устойчива, то это еще не означает, что она будет устойчивой в замкнутом состоянии, и, наоборот, если система неустойчива в разомкнутом состоянии, то это еще не означает, что она будет неустойчивой в замкнутом состоянии. Здесь могут представиться самые различные случаи.

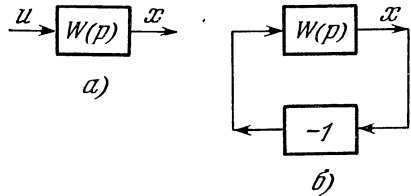


Рис. 6.12.

В 1932 г. американский ученый Найквист вывел критерий, который дает необходимые и достаточные условия устойчивости статических систем с обратной связью. Критерий Найквиста формулируется следующим образом: если характеристическое уравнение разомкнутой системы n -го порядка имеет k корней в правой полуплоскости и $n - k$ корней в левой полуплоскости ($k = 0, 1, \dots, n$), то для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы годограф комплексной частотной характеристики разомкнутой системы охватывал точку $(-1, j0)$ на угол $k\pi$.

Здесь, однако, требуется уточнить, что мы будем понимать под термином годограф комплексной частотной характеристики *охватывает* точку $(-1, j0)$. Годографы, с которыми нам обычно приходится иметь дело, имеют некоторое начало при $\omega = 0$ и конец при $\omega = \infty$. Проведем из точки $A(-1, j0)$ к некоторой точке годографа B вектор \overline{AB} . Заставим теперь мысленно точку B пробежать весь годограф, от начала ($\omega = 0$) до конца ($\omega = \infty$). При этом аргумент вектора \overline{AB} получит приращение $\Delta\varphi$. Тогда мы считаем, что годограф охватывает точку $A(-1, j0)$ на угол $\Delta\varphi$.

Если $\Delta\varphi = 0$, то мы говорим, что годограф *не охватывает* точки $(-1, j0)$. На рис. 6.13, а годограф не охватывает точки $(-1, j0)$, на рис. 6.13, б годограф охватывает на угол 2π , а на рис. 6.13, в — на угол 6π .

Доказательство справедливости критерия Найквиста дадим на основании критерия Михайлова. По доказанному выше критерию Михайлова

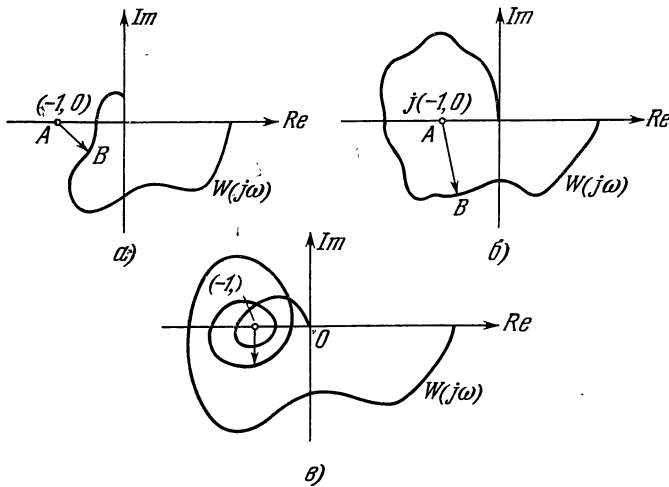


Рис. 6.13.

для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента вектора

$$H(j\omega) = K(j\omega) + D(j\omega)$$

(где $H(p)$ — характеристический многочлен замкнутой системы) при изменении частоты ω от 0 до ∞ равнялось $n \frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg H(j\omega) = \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg (K(j\omega) + D(j\omega)) = n \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

где n — порядок уравнения. Иными словами, в этом случае годограф вектора $H(j\omega)$ должен проходить через n квадрантов. Здесь

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)}, \quad (2)$$

где $K(p)$ и $D(p)$ — полиномы от p , причем степень полинома $K(p)$ не больше степени полинома $D(p)$. Характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет вид

$$D(p) = 0.$$

Но так как по условию k корней лежит в правой полуплоскости, то в силу критерия Михайлова

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(j\omega) = (n - 2k) \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$J(p) = 1 + W(p) = \frac{K(p) + D(p)}{D(p)}. \quad (4)$$

Так как приращение аргумента годографа $W(j\omega)$ этой функции равно разности приращения аргумента числителя и знаменателя, то с учетом еще (1), (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg J(j\omega) &= \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg [K(j\omega) + D(j\omega)] - \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(j\omega) = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2k) \frac{\pi}{2} = k\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, для устойчивости рассматриваемой системы необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента годографа $J(j\omega)$ было равно $k\pi$. Графически это означает, что годограф $J(j\omega)$ охватывает начало координат на угол $k\pi$. Но функция $J(p)$ связана с передаточной функцией разомкнутой системы $W(p)$ соотношением (4). Из этого соотношения следует, что годограф $W(j\omega)$ смещен по отношению к годографу $J(j\omega)$ влево на расстояние, равное единице. Отсюда получаем, что годограф $W(j\omega)$ должен охватывать точку $(-1, j0)$ на угол $k\pi$. Так как частотную характеристику разомкнутой системы получить как теоретически, так и экспериментально довольно просто, то критерий Найквиста дает удобный метод для исследования выбора параметров системы, при которых она устойчива. Например, из рис. 6.14 видно, что особенность системы, годограф которой изображен на нем, состоит в том, что она может стать неустойчивой не только при увеличении коэффициента усиления разомкнутой системы, но и при его уменьшении.

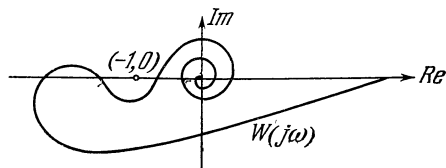


Рис. 6.14.

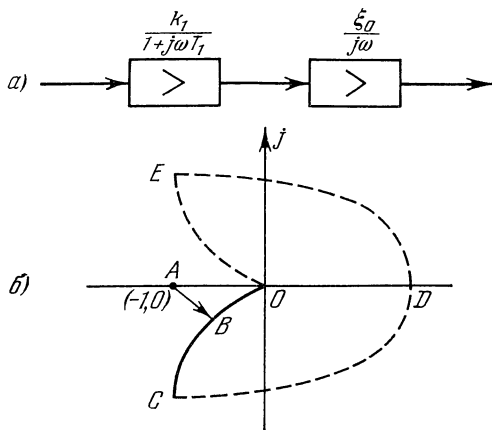


Рис. 6.15.

советским ученым Я. З. Цыпкиным. Дадим формулировку и доказательство этого критерия для систем с одним интегрирующим звеном в тракте. В этом случае амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы уходит в бесконечно удаленную точку при $\omega \rightarrow \infty$. Действительно, рассмотрим для примера систему второго порядка, тракт которой изображен на рис. 6.15.

Разомкнутая система представляет собой последовательное соединение инерционного звена (с параметрами k_1 и T_1) и интегрирующего звена (с параметром ξ_0). Комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы выражается формулой

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{1 + j\omega T_1} \cdot \frac{\xi_0}{j\omega} = \frac{\xi}{(1 + j\omega T_1) j\omega}, \tag{5}$$

где $\xi = k_1 \xi_0$ — коэффициент усиления системы. Амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая выражению (5), приведена в виде сплошной кривой OC на рис. 6.15, б. При $\omega \rightarrow 0$ модуль вектора $K(j\omega)$ неограниченно увеличивается, а сам этот вектор приближается к чисто мнимой величине $\xi/j\omega$.

Для того чтобы применить к такой системе критерий Найквиста, необходимо дополнить ее амплитудно-фазовую характеристику двумя вспомо-

Таким образом, мы доказали критерий Найквиста для случая, когда разомкнутая система устойчива или неустойчива, т. е. некоторое число корней лежит в правой полуплоскости. Однако нами еще не охвачен тот случай, когда некоторое число корней разомкнутой системы лежит строго на мнимой оси. В частности, к такого рода системам относятся астатические системы с одним или несколькими интегрирующими звеньями. Распространение критерия Найквиста на этот случай было сделано

гательными кривыми (рис. 6.15, б) — кривой OE , симметричной амплитудно-фазовой характеристике OC относительно действительной оси, и другой CDE бесконечно большого радиуса, проходящей в правой полуплоскости.

В результате образуется замкнутый контур $OBCDEO$. Затем следует обвести концом вспомогательного вектора AB вдоль всего этого контура. Безразлично, откуда начать этот обход; нужно лишь закончить его в той же точке, откуда он был начат. Приращение аргумента вектора AB при таком обходе дает ответ на вопрос об устойчивости замкнутой системы.

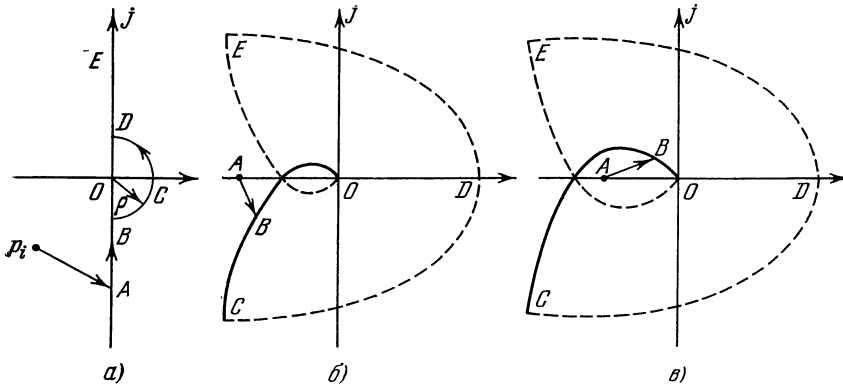


Рис. 6.16.

Так же, как и в случае статических систем, равенство нулю приращения аргумента означает, что замкнутая система устойчива. Если же приращение аргумента вектора AB отличается от нуля, то замкнутая система неустойчива.

Передаточная функция разомкнутой системы, в которой имеются l последовательно соединенных интегрирующих звеньев, имеет вид

$$W(p) = \frac{K(p)}{p^l D(p)}. \quad (6)$$

В частности, для системы с одним интегрирующим звеном в тракте $l = 1$ выражение для $W(p)$ можно записать в виде

$$W(p) = \frac{K(p)}{pD(p)}. \quad (7)$$

В этом случае

$$1 + W(p) = 1 + \frac{K(p)}{pD(p)} = \frac{pD(p) + K(p)}{pD(p)} = \frac{H(p)}{pD(p)}, \quad (8)$$

где $H(p)$ — характеристический многочлен замкнутой системы. Считая, что корни уравнения $D(p) = 0$ лежат в левой полуплоскости, найдем результирующий угол поворота вектора $1 + W(p)$ при изменении p от $-j\infty$ до $j\infty$. Знаменатель выражения (8) имеет корень, равный нулю и лежащий на мнимой оси. Поэтому при $p = j\omega$ и параметре ω , стремящемся к нулю, вектор $p = j\omega$ в знаменателе обращается в нуль, что не позволяет определить угол поворота этого вектора при $-\infty < \omega < \infty$. Чтобы избавиться от этого затруднения, обойдем точку 0 по полуокружности малого радиуса ρ (рис. 6.16, а). Все изменение величины ω разбивается при этом на три интервала:

$$1) \quad p = j\omega; \quad -\infty < \omega < -\rho.$$

При изменении ω на этом интервале угол поворота вектора $p = j\omega$ равен нулю, а угол поворота вектора $(p - p_i)$, где p_i лежит в левой полуплоскости, сколь угодно близко к $\frac{\pi}{2} + \alpha$, если радиус ρ достаточно мал. Здесь $\alpha \leq 0$ — угол, составляемый вектором p_i с осью абсцисс. Конец вектора $(p - p_i)$ скользит по прямой AB .

2) $p = \rho e^{j\varphi}$, $\rho = \text{const}$, а φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. При этом конец вектора p , а также конец вектора $(p - p_i)$ скользит по полуокружности BCD малого радиуса ρ в направлении, указанном стрелкой. Если радиус ρ достаточно мал, то угол поворота $(p - p_i)$ также сколь угодно мал. Между тем вектор $p = \rho e^{j\varphi}$ поворачивается на угол, равный π .

3) $p = j\omega$, $\rho < \omega < \infty$. На этом интервале угол поворота вектора $p = j\omega$ равен нулю, а угол поворота вектора $(p - p_i)$ близок к $\frac{\pi}{2} - \alpha$, если радиус ρ достаточно мал.

Из рис. 6.16, а видно, что общий угол поворота вектора $(p - p_i)$ равен π , если p_i лежит в левой полуплоскости, и $-\pi$, если p_i находится в правой полуплоскости. Отсюда следует, что результирующий угол поворота вектора $H(p)$ равен $n\pi$, если замкнутая система устойчива, и не равен $n\pi$, если эта система неустойчива. Между тем угол поворота вектора полинома $(n - 1)$ -й степени $D(p)$ равен $(n - 1)\pi$, так как принято, что все его корни лежат в левой полуплоскости. Выше было показано, что общий угол поворота вектора p в знаменателе выражения (8) равен π . Следовательно, результирующий угол поворота вектора $1 + W(p)$ равен нулю, если замкнутая система устойчива, и отличается от нуля, если она неустойчива.

Рассмотрим, по какой кривой скользит конец вектора $1 + W(p)$, если конец вектора p скользит по линии $ABCDE$. На интервалах, где $p = j\omega$, справедливо равенство

$$1 + W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{j\omega D(j\omega)}. \quad (9)$$

Следовательно, при $0 < \omega < \infty$ конец вектора $1 + W(p)$ скользит по амплитудно-фазовой характеристике $W(j\omega)$ (сплошная кривая на рис. 6.16, б). Если же ω изменяется в интервале $-\infty < \omega < 0$, то в числителе и знаменателе левой части выражения (9) члены с четными степенями ω не меняют знак, а с нечетными — меняют. Но члены с четными степенями ω сосредоточены, как легко видеть, в действительной части многочлена $H(j\omega)$ или $D(j\omega)$, а члены с нечетными степенями — в мнимой части. Поэтому знаки мнимых частей в числителе и знаменателе изменяются на обратные по сравнению с предыдущим случаем, вследствие чего новое комплексное число сопряжено прежнему. Поэтому $W(-j\omega) = W^*(j\omega)$, где W^* — вектор, сопряженный вектору W , и кривая $W(-j\omega)$ есть зеркальное отображение кривой $W(j\omega)$ относительно оси абсцисс (пунктирная кривая OE на рис. 6.16, б). По этой кривой и перемещается конец вектора $1 + W(j\omega)$ при $-\infty < \omega < \infty$.

Наконец, при $p = \rho e^{j\varphi}$ и малом $\rho \rightarrow 0$ вектор

$$1 + W(p) = \frac{H(\rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi} D(\rho e^{j\varphi})} = \frac{\rho e^{j\varphi} D(\rho e^{j\varphi}) + K(\rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi} D(\rho e^{j\varphi})} \rightarrow \frac{K(0)}{\rho e^{j\varphi} D(0)} = \frac{e^{-j\varphi}}{\rho} \cdot \text{const}. \quad (10)$$

Следовательно, при неизменном ρ и угле φ , меняющемся на интервале BCD (рис. 6.16, а) от $-\pi/2$ до $\pi/2$, конец вектора $1 + W(p)$, как видно из (10), скользит по дуге бесконечно большого радиуса const/ρ ; угол вектора $1 + W(p)$ меняется от $\pi/2$ до $-\pi/2$. Следовательно, конец вектора $1 + W(p)$ скользит по полуокружности бесконечно большого радиуса, соединяющей «окончание» кривой $W(j\omega)$ при $\omega = -\rho \rightarrow -0$ с «окончанием» кривой $W(j\omega)$ при $\omega = +\rho \rightarrow +0$.

Итак, при изменении p по линии $ABCDE$ (рис. 6.16, *a*) конец вектора $1 + W(p)$ скользит по кривой $OBCDEO$ (рис. 6.16, *б*). Направление обхода этой кривой безразлично. Важно лишь, что результирующий угол поворота вектора $1 + W(p)$ равен нулю, если замкнутая система устойчива, и отличается от него, если замкнутая система неустойчива.

Например, для характеристик, изображенных на рис. 6.15, *б* и 6.16, *б*, приращение аргумента вектора AB равно нулю. Следовательно, соответствующие им замкнутые системы устойчивы. На рис. 6.16, *в* приращение аргумента отличается от нуля (оно равно 4π при обходе вдоль замкнутого контура). Поэтому соответствующая данной характеристике замкнутая система неустойчива.

При исследовании устойчивости можно ограничиться проведением конца вектора \overline{AB} по «половине» замкнутой кривой, т. е. по пути OB между точками O и D . Формулировка критерия останется неизменной.

В результате аналогичного вывода для системы с l интегрирующими звеньями и передаточной функцией (5) получается то же правило. Разница заключается лишь в том, что дуга бесконечно большого радиуса, соединяющая «окончания» амплитудно-фазовой характеристики и ее отражения, имеет угол $l\pi$. Следует учесть, что эту дугу нужно вести от «окончания» амплитудно-фазовой характеристики в положительном направлении. Формулировка критерия Найквиста и в этом случае остается неизменной.

§ 4. Применение критерия Найквиста для исследования устойчивости и стабилизации систем

Критерий Найквиста удобно применять для исследования устойчивости систем с обратной связью, особенно систем высокого порядка. Действительно, наглядность, присущая графо-аналитическим методам, и единообразие метода исследования независимо от порядка системы особенно ценны в случае систем высокого порядка. Начертить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы часто значительно проще, чем найти аналогичную или какую-либо иную частотную характеристику для замкнутой системы. Особенно просто определение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы в том случае, когда последняя представляет последовательное соединение звеньев. Наконец, можно снять экспериментально амплитудно-фазовые характеристики звеньев, а по ним построить характеристику всей замкнутой системы, что особенно удобно при отсутствии сведений об уравнениях реальных звеньев.

Пользуясь критерием Найквиста, можно исследовать влияние параметров системы на ее устойчивость. Рассмотрим пример статической системы третьего порядка с тремя инерционными звеньями. Структурная схема разомкнутой системы показана на рис. 6.17, *a*. Комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы дается формулой

$$W(j\omega) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)(j\omega T_3 + 1)}. \quad (1)$$

Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой системы при различных значениях коэффициента усиления k изображены на рис. 6.17, *б*. Все они могут быть образованы из одной «отправной» характеристики изменением масштаба.

Удобнее заменить вычерчивание характеристики измененного масштаба обратным изменением единицы масштаба. Тогда достаточно раз навсегда начертить одну характеристику и уменьшать размер отрезка OA , равного единице (см. рис. 6.17, *б*), во столько же раз, во сколько увеличивается

коэффициент усиления. На рис. 6.18, *a* показано, как при этом движется точка *A*. При малом значении коэффициента усиления *k* системы масштаб единицы *OA* велик и точка *A* находится в положении *A*₁. При этом амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает критическую точку *A*₁; следовательно, замкнутая система устойчива.

При увеличении коэффициента усиления *k* масштаб единицы уменьшается и точка *A* движется вправо. При некотором значении $k = k_{\text{пр}}$

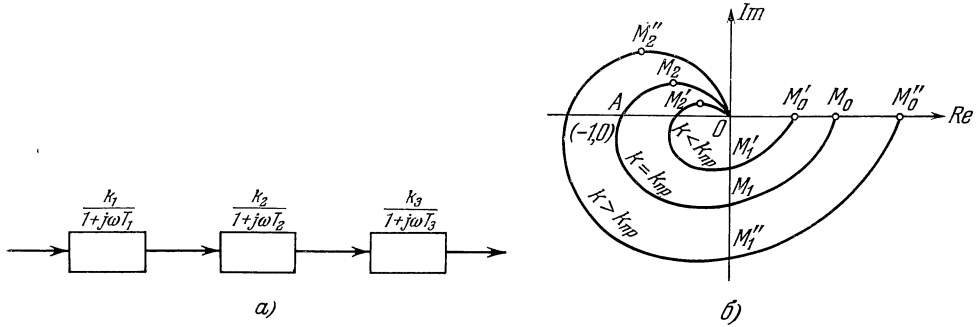


Рис. 6.17.

критическая точка оказывается в положении *A*₂; в этом случае система находится на границе устойчивости. При $k > k_{\text{пр}}$ точка *A* перемещается вправо (положение *A*₃) и система оказывается неустойчивой. Итак, с помощью

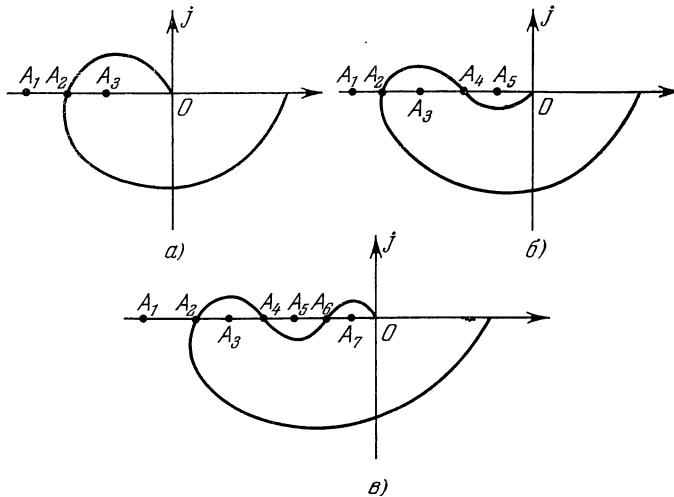


Рис. 6.18.

критерия Найквиста весьма наглядно усматривается наличие предельного коэффициента усиления $k_{\text{пр}}$ в системе.

Влияние коэффициента усиления на устойчивость можно исследовать таким способом для систем любого порядка. Между тем подобное исследование с помощью аналитического критерия Рауса — Гурвица весьма затруднительно, и получаемые при этом громоздкие формулы трудно обозримы. В качестве примера рассмотрим систему высокого порядка, имеющую амплитудно-фазовую характеристику «с клювом» (рис. 6.18, *б*). При малом значении коэффициента усиления *k* критическая точка находится в положении *A*₁ и замкнутая система устойчива. Если увеличивать *k*, то

критическая точка, передвигаясь вправо, приходит в положение A_2 (при $k = k_{\text{пр}1}$) — границу устойчивости. Дальнейшее увеличение коэффициента усиления (критическая точка в положении A_3) приводит к неустойчивости. Если, однако, увеличить k до некоторого значения $k = k_{\text{пр}2}$, при котором критическая точка приходит в положение A_4 , то система вновь оказывается на границе устойчивости. Если, наконец, осуществляется условие $k > k_{\text{пр}2}$ (критическая точка в положении A_5), то система устойчива.

Итак, система неустойчива при

$$k_{\text{пр}1} < k < k_{\text{пр}2} \quad (2)$$

и устойчива как при малых $k < k_{\text{пр}1}$, так и при достаточно больших $k > k_{\text{пр}2}$. Эта система имеет два предельных значения $k_{\text{пр}1}$ и $k_{\text{пр}2}$ коэффициента усиления k . Наличие двух предельных значений k в системе высокого порядка было бы сравнительно трудно обнаружить аналитически.

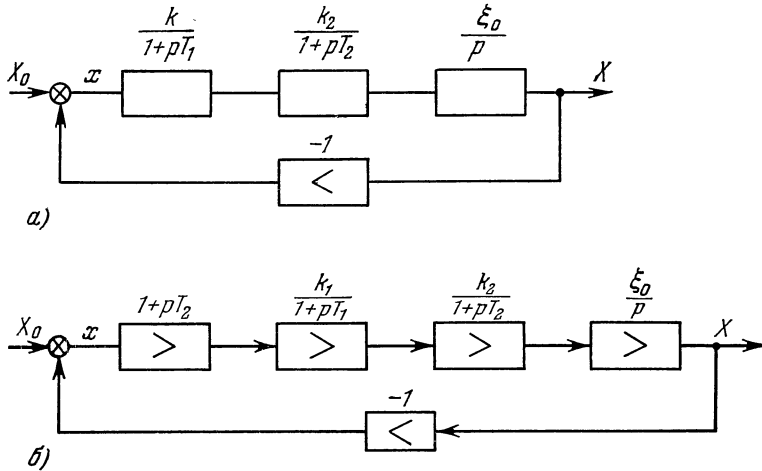


Рис. 6.19.

Между тем графическое построение на рис. 6.18, б позволяет весьма просто установить наличие этого факта.

В системе возможно и большее число предельных значений k .

Рассмотрим амплитудно-фазовую характеристику, изображенную на рис. 6.18, в. Замкнутая система устойчива при $k < k_{\text{пр}1}$ (точка A_1), приходит на границу устойчивости при $k = k_{\text{пр}1}$ (точка A_2), неустойчива при дальнейшем увеличении k (точка A_3) и вновь приходит на границу устойчивости при $k = k_{\text{пр}2}$ (точка A_4). Если еще увеличить k , то система становится устойчивой (точка A_5), затем при $k = k_{\text{пр}3}$ (точка A_6) приходит на границу устойчивости и, наконец, при $k > k_{\text{пр}3}$ (точка A_7) вновь становится устойчивой.

Основным путем разрешения конфликта между точностью и устойчивостью системы является изменение структуры системы, наложение дополнительных связей. Дополнительные связи необходимы как для стабилизации системы, так и для получения требуемого качества регулирования. Подробные сведения о типах и методах расчета параметров дополнительных связей содержатся в специальных курсах теории автоматического регулирования, электронной техники и т. д. Здесь мы ограничимся лишь некоторыми примерами, иллюстрирующими эффект введения дополнительных связей.

Рассмотрим следующую систему, структурная схема которой изображена на рис. 6.19, а. Выше было показано, что система становится неустой-

чивой при большом значении коэффициента усиления ξ . С целью стабилизации системы введем в ее тракт последовательно включенное дополнительное идеальное форсирующее звено с передаточной функцией

$$W_r(p) = 1 + pT_r. \tag{3}$$

На рис. 6.19, б изображена структурная схема следящей системы с введенным в нее дополнительным звеном.

Напишем выражение для передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = (1 + pT_r) \frac{k_1}{1 + pT_1} \cdot \frac{k_2}{1 + pT_2} \cdot \frac{\xi_0}{p} = \frac{\xi(1 + pT_r)}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)p}, \tag{4}$$

где $\xi = k_1 k_2 \xi_0$ — по-прежнему коэффициент усиления системы. Приравнявая нулю сумму числителя и знаменателя выражения, находим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$(1 + pT_1)(1 + pT_2)p + \xi(1 + pT_r) = 0 \tag{5}$$

или в развернутом виде

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + \xi T_r) p + \xi = 0. \tag{6}$$

Единственное условие устойчивости системы имеет вид

$$(T_1 + T_2)(1 + \xi T_r) - T_1 T_2 \xi > 0 \tag{7}$$

или

$$(T_1 + T_2) + [(T_1 + T_2) T_r - T_1 T_2] \xi > 0. \tag{8}$$

Уже из неравенства (7) видно, что при достаточно большом значении T_r можно добиться устойчивости системы даже в том случае, когда коэффициент усиления ξ велик. Из того же неравенства, записанного в форме (8), следует, что при выполнении условия

$$T_r > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \tag{9}$$

устойчивость обеспечена вообще при любом значении ξ . Итак, подбирая достаточно большое значение постоянной времени T_r форсирующего звена, можно стабилизировать рассматриваемую систему.

Выясним, как сказывается добавление идеального форсирующего звена на амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы. На рис. 6.20 пунктиром показана амплитудно-фазовая характеристика при отсутствии форсирующего звена и достаточно большом значении ξ . Пусть ей соответствует комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы

$$W_0(j\omega) = \frac{\xi}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)j\omega}. \tag{10}$$

При добавлении форсирующего звена получаем комплексный коэффициент передачи

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)(1 + j\omega T_r) = W_0(j\omega) + j\omega T_r W_0(j\omega) = W_0(j\omega) + \Delta W(j\omega). \tag{11}$$

Из этой формулы видно, что $W(j\omega)$ образуется из $W_0(j\omega)$ путем прибавления вектора

$$\Delta W(j\omega) = j\omega T_r W_0(j\omega), \tag{12}$$

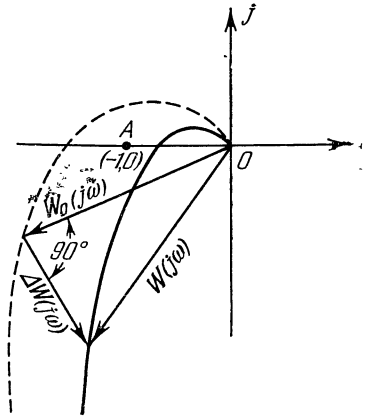


Рис. 6.20.

сдвинутого по отношению к $W_0(j\omega)$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (см. рис. 6.20). В результате вся амплитудно-фазовая характеристика в целом поворачивается, деформируясь при этом, *против* часовой стрелки. При достаточно большом угле поворота она уже не охватывает критическую точку A . Такое положение, показанное в виде сплошной кривой, соответствует устойчивой замкнутой системе.

Одну и ту же систему можно стабилизировать различными способами. Например, на рис. 6.21, *а* изображена рассмотренная выше следящая система, в которую с целью стабилизации введена идеальная гибкая отрицательная обратная связь. Так называют идеальное дифференцирующее звено,

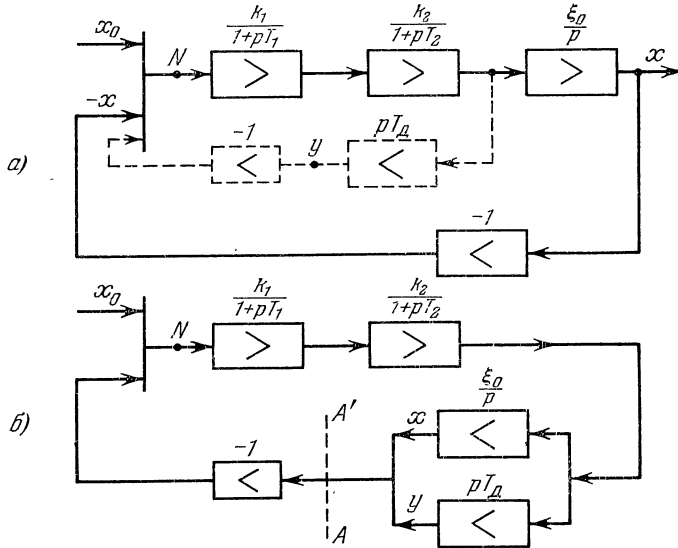


Рис. 6.21.

включенное антипараллельно некоторым основным звеньям системы. Это звено показано пунктиром на рис. 6.21, *а*. Связь называется *отрицательной*, так как в ее цепи имеется инвертор.

Для нахождения характеристического уравнения системы удобно преобразовать ее структурную схему, объединив два инвертора, как это показано на рис. 6.21, *б*. От такого объединения ничто не изменится. Действительно, в схеме рис. 6.21, *а* в точке N на вход тракта подавалась сумма $x_0 - x - y$, где y — выход звена гибкой обратной связи. На схеме рис. 6.21, *б* в точке N имеем сумму $x_0 + (-1)(x + y)$, т. е. ту же сумму. Разомкнув схему рис. 6.21, *б* в сечении AA' и замечая, что звенья с передаточными функциями ξ_0/p и pT_d соединены параллельно, можно написать выражение для передаточной функции разомкнутой цепи (от точки N до сечения AA')

$$W(p) = \frac{k_1}{1+pT_1} \cdot \frac{k_2}{1+pT_2} \cdot \left[\frac{\xi_0}{p} + pT_d \right] = \frac{k_1 k_2 (\xi_0 + p^2 T_d)}{(1+pT_1)(1+pT_2)p} = \frac{\xi_0 + p^2 \rho}{(1+pT_1)(1+pT_2)p}, \tag{13}$$

где

$$\rho = k_1 k_2 T_d. \tag{14}$$

Приравнивая нулю сумму числителя и знаменателя формулы (13), находим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$(1 + pT_1)(1 + pT_2)p + p^2\rho + \xi = 0 \tag{15}$$

или в развернутом виде

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 + \rho) p^2 + p + \xi = 0. \quad (16)$$

Условие устойчивости для этой системы принимает вид

$$T_1 + T_2 + \rho - T_1 T_2 \xi > 0. \quad (17)$$

Из этого неравенства видно, что оно удовлетворяется при подборе достаточно большой величины ρ , что соответствует подбору достаточно большой постоянной времени T_d гибкой обратной связи — см. (14). Следовательно, гибкая обратная связь может стабилизировать рассматриваемую систему.

Следует отметить, что в данной системе, как это можно показать, гибкая отрицательная обратная связь, стабилизируя систему, замедляет переходные процессы в ней, что сказывается неблагоприятно на качестве регулирования.

§ 5. D-разбиение

В 1948 г. советским ученым Ю. И. Неймарком был предложен метод, при помощи которого можно рассмотреть все указанные ранее критерии устойчивости с единой точки зрения. Метод Неймарка также с успехом применяется для исследования устойчивости и для доказательства ряда важных теорем. Он представляет собой обобщение и развитие метода, примененного еще Вышнеградским для нахождения области устойчивости системы третьего порядка (см. гл. IV). Сходный метод в менее развитой форме предлагался также А. А. Соколовым, М. В. Мееровым.

Допустим, что в системе n -го порядка имеется m каких-либо изменяемых параметров. Построим m -мерное пространство параметров. На рис. 6.22 показано для примера трехмерное ($m = 3$) пространство параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Определенная точка, например точка M_1 , в этом пространстве соответствует определенным значениям параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а следовательно, определенным значениям коэффициентов характеристического уравнения. При этом n корней уравнения также имеют некоторые фиксированные значения.

Предположим, что k из этих корней лежит в левой полуплоскости, а остальные $(n - k)$ корней — в правой полуплоскости. Совокупность точек M , характеризуемых тем, что k корней находятся в левой полуплоскости, а $(n - k)$ — в правой, образует в пространстве параметров область, которую обозначим $D(k, n - k)$. Если в частном случае $k = n$, то эта область является областью устойчивости.

Все пространство параметров может быть разделено на $n + 1$ областей типа $D(k, n - k)$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Подобное разбиение пространства параметров Неймарк назвал D -разбиением. Одна из областей, на которые разбивается пространство параметров, а именно $D(n, 0)$, является областью устойчивости (см., например, рис. 6.22).

Если изменять значения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то изображающая точка M движется по некоторой траектории. При этом и корни характеристического уравнения движутся по комплексной плоскости. (Считаем, что корни являются непрерывными функциями параметров.) Если точка попадает на границу D -области (точка M_2 на рис. 6.22), то при этом по крайней

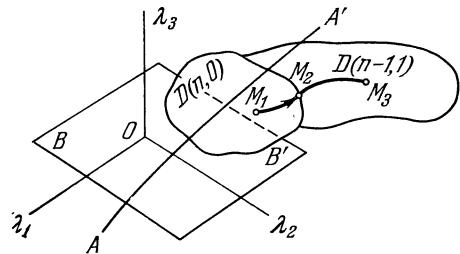


Рис. 6.22.

мере один корень оказывается на мнимой оси. При переходе, например, из области $D(n, 0)$ в область $D(n-1, 1)$ один корень, очевидно, переходит из левой полуплоскости в правую.

Любая точка, находящаяся на границе, отделяющей друг от друга две области D -разбиения, соответствует такому расположению корней, когда имеется корень на мнимой оси $p = j\omega$ (ω — действительное число). Подставив в характеристическое уравнение выражение $p = j\omega$ и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую составляющие характеристического многочлена, можно получить два уравнения. Исключив из этих уравнений ω , получим уравнение гиперповерхности в пространстве параметров, являющейся границей D -разбиения. Таким образом, получение D -разбиения сравнительно просто.

Построив D -разбиение, получаем не только область устойчивости, но и все другие области $D(k, n-k)$. Таким образом, определение D -разбиения есть более общая операция, чем нахождение области устойчивости. Однако найти D -разбиение в ряде случаев проще, чем выделить область устойчивости. Поэтому метод Неймарка сводится к нахождению D -разбиения, а затем уже к выяснению вопроса о том, какая из полученных D -областей является областью устойчивости.

Если D -разбиение уже произведено, то можно выяснить влияние какого-либо параметра на устойчивость. Пусть, например, $\lambda_2 = \text{const}$ и $\lambda_3 = \text{const}$. Прямая AA' (см. рис. 6.22), параллельная оси λ_1 , есть тогда геометрическое место точек, соответствующих различным значениям λ_1 . Узнав точки пересечения этой прямой с D -областями, можно, например, исследовать влияние изменения λ_1 на устойчивость. Исследование влияния изменения двух параметров, например λ_1 и λ_2 при $\lambda_3 = \text{const}$, сводится к исследованию сечения пространства параметров плоскостью BB' (см. рис. 6.22). На этой плоскости получаются линии ее пересечения с D -областями, в частности область устойчивости на плоскости BB' параметров λ_1 и λ_2 .

Рассмотрим сначала влияние изменения одного параметра на устойчивость. Пусть некоторые из коэффициентов характеристического уравнения зависят *линейно* от изменяемого параметра τ . Тогда характеристическое уравнение можно записать в следующем виде:

$$Q(p) + \tau R(p) = 0. \quad (1)$$

Здесь $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены от p .

Границу D -разбиения можно получить, подставив в уравнение (1) вместо p выражение $j\omega$. Временно примем, что параметр τ — комплексное число (на самом деле обычно мы интересуемся лишь действительными значениями параметра), т. е.

$$\tau = x + jy, \quad (2)$$

где x и y — действительные числа. Подставив $p = j\omega$ в уравнение (1) и решив его относительно τ , получим

$$\tau = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}. \quad (3)$$

Задавая теперь значения ω в интервале $-\infty < \omega < +\infty$, можно начертить геометрическое место концов векторов — годограф τ согласно формуле (3). Достаточно начертить согласно этой формуле лишь часть кривой (часть 1 на рис. 6.23, б) в интервале $0 \leq \omega < +\infty$. Вторая часть кривой (часть 2 на рис. 6.23, б) для интервала $0 \geq \omega > -\infty$ симметрична первой части кривой относительно оси абсцисс. Действительно, при изменении знака ω на обратный действительные части многочленов $Q(j\omega)$ и $R(j\omega)$, содержащие четные степени ω , не меняют знака, а мнимые части,

содержащие нечетные степени ω , меняют знак. Следовательно, числитель и знаменатель выражения (3), а поэтому и вся дробь в целом при перемене знака ω становится комплексно сопряженной прежнему значению.

На рис. 6.23, б показано, что годограф τ разбивает комплексную плоскость с координатами x и y на ряд областей — I, II, III и IV. Так получается D-разбиение плоскости комплексного переменного τ . Остается узнать, какая из этих областей является областью устойчивости. Если удастся найти где-либо на плоскости точку (скажем, точку M), соответствующую устойчивой системе, то, следовательно, и вся область, в которой находится эта точка (область I на рис. 6.23, б), есть область устойчивости. Значительную помощь при опознавании области устойчивости оказывает также данное Неймарком правило штриховки, которое ниже приводится с известным пояснением, но без строгого доказательства.

Представим себе сначала, что величина p принимает значение $j\omega$ при $-\infty < \omega < +\infty$, т. е. конец вектора p скользит по мнимой оси на p -плоскости от $-j\infty$ до $+j\infty$ (рис. 6.23, а). При этом левая полуплоскость, заштрихованная на рис. 6.23, остается слева от годографа вектора p . Если какой-либо корень уравнения при изменении параметра пересекает мнимую ось, переходя с заштрихованной стороны на незаштрихованную, то в правой полуплоскости становится больше на один корень (очевидно, в левой — меньше).

Годограф вектора τ на τ -плоскости (рис. 6.23, б) является отображением мнимой оси p -плоскости. При этом малому отрезку мнимой оси на p -плоскости (интервал $\omega_1 < \omega < \omega_2$) соответствует малый участок кривой — годографа вектора τ , а малой площадке, например, слева от этого отрезка мнимой оси соответствует некоторая малая область слева от участка кривой τ (если двигаться по участку от $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$). Штриховка годографа τ , аналогичная штриховке мнимой оси на p -плоскости, может быть получена следующим образом. Идя от $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$, нужно наносить штриховку слева от годографа τ . Если теперь изображающая точка на τ -плоскости перемещается через границу D-разбиения от заштрихованной к незаштрихованной стороне, то при этом один корень переходит из левой полуплоскости в правую. Следовательно, происходит переход из области $D(k, n-k)$ в область $D(k-1, n-k+1)$.

На рис. 6.23, б нанесена штриховка. При переходе изображающей точки из положения M_1 в положение M_2 , согласно указанному выше, один корень переходит в правую полуплоскость. При переходе в положение M_3 в правой полуплоскости становится больше еще на один корень. Следовательно, область IV характеризуется числом корней в правой полуплоскости, большим на два, чем аналогичное число корней для области I.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть разомкнутая система содержит три последовательно соединенных инерционных звена с постоянными времени T_1, T_2, T_3 ; коэффициент усиления равен k . Тогда оператор разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)}. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3) + k = 0. \quad (5)$$

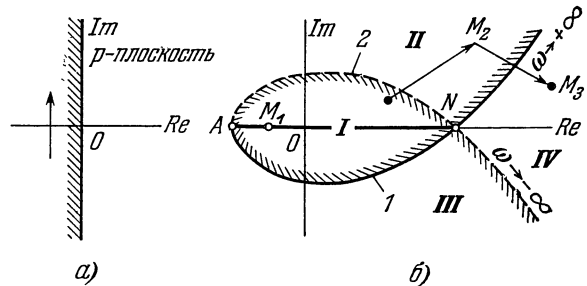


Рис. 6.23.

Исследуем влияние коэффициента усиления k системы на устойчивость. Сравнивая уравнения (1) и (5), находим

$$Q(p) = (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3), \quad R(p) = 1. \quad (6)$$

Подставляя $p = j\omega$ и решая уравнение (5) относительно параметра k , получаем

$$k = -(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3). \quad (7)$$

Считая k комплексным числом, строим годограф k согласно уравнению (7) при $-\infty < \omega < +\infty$. Получаем кривую, изображенную на рисунке 6.23, б. Значению $\omega = 0$ соответствует точка A ; согласно формуле (7) при этом $k = -1$. Ввиду симметрии двух частей кривой, соответствующих значениям $\omega > 0$ и $\omega < 0$, их пересечение находится на действительной оси. После проведения штриховки выясняется, что единственным кандидатом на область устойчивости является область I , поскольку все остальные области характеризуются большим числом корней в правой полуплоскости, чем область I . Это можно и непосредственно усмотреть, ибо точка O внутри области I соответствует устойчивой системе. Действительно, для точки O величина $k = 0$. Подстановка этого значения в уравнение (5) дает устойчивую систему (корни характеристического уравнения равны $-1/T_1, -1/T_2, -1/T_3$).

Разумеется, мы интересуемся лишь действительными значениями k , лежащими на оси абсцисс. Система устойчива, если k не выходит за пределы отрезка AN , жирно начерченного на рис. 6.23, б. (При $k > 0$ отрезком устойчивости является отрезок ON .) Из этой фигуры видно, что предельным значением k является отрезок $ON = k_{пр}$. При $k > k_{пр}$ система становится неустойчивой, так как изображающая точка попадает в область IV , характеризующуюся двумя корнями в правой полуплоскости.

Рассмотрим теперь влияние в той же системе на устойчивость одной из постоянных времени, например T_1 . Полагая $p = j\omega$ и решая уравнение (5) относительно параметра T_1 , находим

$$T_1 = -\frac{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) + k}{j\omega(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = \frac{j}{\omega} \left[1 + \frac{k}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} \right] = \frac{j}{\omega} z = x + jy. \quad (8)$$

Обозначим буквой z двучлен в квадратной скобке и преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} z &= 1 + k \frac{(1 - j\omega T_2)(1 - j\omega T_3)}{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)} = \\ &= \frac{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2) + k(1 - \omega^2 T_2 T_3)}{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)} - kj\omega \frac{T_2 + T_3}{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), можно видеть, что действительная часть T_1 будет положительна и равна $\frac{k(T_2 + T_3)}{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)} = x$. Следовательно, с ростом ω величина x будет монотонно уменьшаться от $k(T_2 + T_3)$ до нуля. Мнимая же часть, равная, как видно из формул (8) и (9), величине

$$y = \frac{(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2) + k(1 - \omega^2 T_2 T_3)}{\omega(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}, \quad (10)$$

изменяется от $+\infty$ при $\omega = +0$ до $+0$ при $\omega = +\infty$. При достаточно малых и достаточно больших значениях ω величина $y > 0$, но при некоторых значениях ω мнимая составляющая y может стать отрицательной. Годограф T_1 в этом случае пойдет так, как показано на рис. 6.24 (сплошная кривая при $0 \leq \omega < +\infty$), пунктирная — при $0 \geq \omega > -\infty$). Действительно, числитель выражения (10) может обратиться в нуль при значе-

ниях ω , удовлетворяющих равенству

$$(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2) + k(1 - \omega^2 T_2 T_3) = 0. \quad (11)$$

Корни этого уравнения

$$\omega_{1,2} = \frac{kT_1 T_2 - (T_1^2 + T_2^2) \pm \sqrt{(T_1^2 + T_2^2 - kT_1 T_2)^2 - 4(1+k)T_1^2 T_2^2}}{2T_1^2 T_2^2}. \quad (12)$$

При достаточно больших значениях k подкоренное выражение равно примерно $[k^2 - 4(1+k)]T_1^2 T_2^2$ и положительно. Поэтому ω_1 и ω_2 действительны и соответствуют точкам A и B на рис. 6.24.

На этой фигуре при $\omega \rightarrow +\infty$ кривая уходит в бесконечно удаленную точку комплексной плоскости и там встречается с другой ветвью. Поэтому штриховку нужно проводить, учитывая, что обе ветви кривой встречаются в бесконечно удаленной точке, где штриховка пунктирной кривой продолжается в виде сплошной кривой. После проведения штриховки выясняется, что области I и II являются частями области устойчивости. Поэтому отрезок равновесия на действительной оси распадается на два отрезка, жирно начерченных на рис. 6.24. Итак, система может быть сделана устойчивой как при достаточно малых, так и при достаточно больших значениях T_1 . Это очевидно и из физических соображений. Действительно, при достаточно малых значениях T_1 система близка к системе второго порядка, заведомо устойчивой. При достаточно больших значениях T_1 остальные постоянные времени пренебрежимо малы по сравнению с T_1 ; вследствие чего система близка к системе первого порядка, содержащей лишь звено с постоянной времени T_1 . Разумеется, при стабилизации путем увеличения T_1 переходные процессы в системе замедляются, что обычно невыгодно или даже неприемлемо.

Рассмотрим систему, содержащую цепочку из $m + s$ последовательно соединенных звеньев; из них m инерционных, s колебательных. Оператор разомкнутой системы можно записать в виде

$$W(p) = \frac{\prod_{l=1}^{l=s} \omega_{0l}^2 k}{\prod_{i=1}^{i=m} (1 + pT_i) \prod_{l=1}^{l=s} (p^2 + 2d_{0l}\omega_{0l}p + \omega_{0l}^2)}, \quad (13)$$

где $k = \text{const}$ — коэффициент усиления системы, T_i — постоянные времени инерционных звеньев, d_{0l} и ω_{0l} — постоянные затухания и собственные частоты колебательных звеньев. Уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\prod_{i=1}^{i=m} (1 + T_i p) \cdot \prod_{l=1}^{l=s} (p^2 + 2d_{0l}\omega_{0l}p + \omega_{0l}^2) + \prod_{l=1}^{l=s} \omega_{0l}^2 k = 0. \quad (14)$$

Запишем характеристический многочлен в виде $R(p) + k \prod_{l=1}^{l=s} \omega_{0l}^2$ и будем временно считать k комплексным числом. Из уравнения (14) находим

$$k \prod_{l=1}^{l=s} \omega_{0l}^2 = -R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega). \quad (15)$$

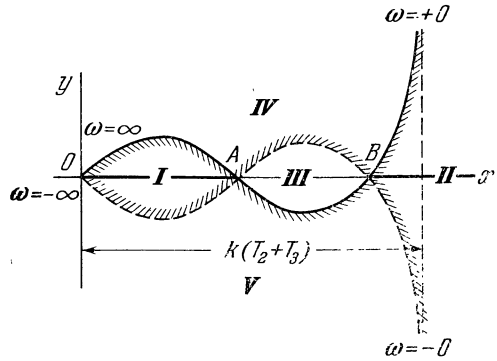


Рис. 6.24.

Выясним характер годографа $R(j\omega)$ при $0 \leq \omega < +\infty$. Аргумент выражения $R(j\omega)$ монотонно возрастает. Действительно, для каждого сомножителя типа $1 + j\omega T_i$ его аргумент $\varphi_i = \text{arctg } \omega T_i$ растет монотонно с увеличением ω (рис. 6.25). Точно так же возрастает монотонно угол ψ_i каждого сомножителя вида

$$(j\omega)^2 + 2d_{0i}\omega_{0i}j\omega + \omega_{0i}^2 = (\omega_{0i}^2 - \omega^2) + 2d_{0i}\omega_{0i}j\omega \quad (16)$$

(рис. 6.25, а). Следовательно, монотонно возрастает и аргумент всего произведения $R(j\omega)$. Если порядок системы n , то, как нетрудно видеть, общее приращение аргумента $R(j\omega)$ равно $n\pi$ при $-\infty < \omega < +\infty$. Однако модуль $R(j\omega)$ может изменяться и немонотонно, так как модули сомножителей, соответствующих колебательным звеньям могут изменяться немонотонно (рис. 6.25, б)

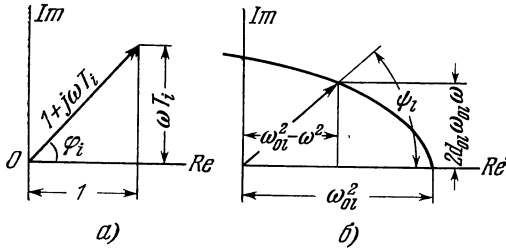


Рис. 6.25.

Из (16) получаем значение квадрата модуля подобного сомножителя

$$(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4d_{0i}^2\omega_{0i}^2\omega^2 = \omega_{0i}^4 + 2\omega_{0i}^2(2d_{0i}^2 - 1)\omega^2 + \omega^4. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что модуль будет увеличиваться монотонно, если $2d_{0i}^2 - 1 \geq 0$, т. е. $d_{0i} \geq 0,707$. Подобное соотношение часто имеет место на практике.

Ограничимся рассмотрением лишь таких колебательных звеньев, для которых $d_{0i} \geq 0,707$. В этом случае модуль $R(j\omega)$ наверняка возрастает при увеличении ω . Следовательно, годограф имеет вид спирали, показанной на рис. 6.26. При $\omega = 0$

выражение $R(j\omega)$ обращается в $\prod_{i=1}^{l=s} \omega_{0i}^2$. (На рисунке 6.26 для примера показан случай $n = 6$.) После штриховки выясняется, что областью устойчивости является область I , что, впрочем, очевидно, поскольку точка начала координат O' соответствует устойчивой системе. Поэтому отрезком устойчивости является отрезок MON , а единственное предельное значение коэффициента усиления системы дается формулой

$$k_{пр} = ON = |R(j\omega)|_{\text{arg } R(j\omega) = \pi}, \quad (18)$$

т. е. $k_{пр}$ равно значению $R(j\omega)$ при аргументе этого вектора, равном π . Итак, система, тракт которой составлен из любого числа последовательно соединенных инерционных и колебательных (при $d_{0i} \geq 0,707$) звеньев, имеет лишь один предельный коэффициент усиления.

Отметим, что годограф Михайлова получается из кривой, изображенной на рис. 6.26, изменением знака и перемещением кривой на величину k вправо.

Критерии Найквиста и Михайлова вытекают из частных случаев D -разбиения. Кратко укажем на связь этих критериев с методом Неймарка. Пусть, например, оператор разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}. \quad (19)$$

Примем, что степень $Q(p)$ меньше степени $R(p)$, и разомкнутая система устойчива, т. е. корни $R(p)$ лежат в левой полуплоскости.

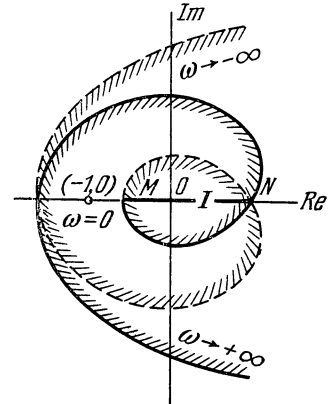


Рис. 6.26.

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы может быть представлено в виде

$$Q(p) + R(p) = 0. \tag{20}$$

Заменим это уравнение более общим

$$Q(p) - \tau R(p) = 0. \tag{21}$$

Если в частном случае $\tau = -1$, то уравнение (21) превращается в (20). Найдем τ из уравнения (21)

$$\tau = \frac{Q(p)}{R(p)} = W(p). \tag{22}$$

Начертим кривую D -разбиения по параметру τ , считая его комплексным (рис. 6.27, а). Эта кривая совпадает с амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы. Нанеся штриховку, убеждаемся, что кандидатом на область устойчивости является область I . Она действительно

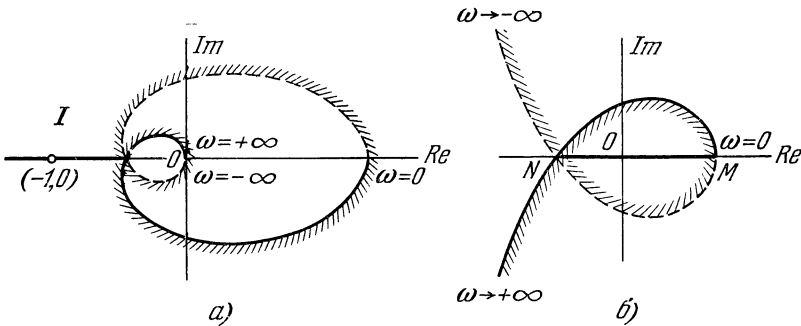


Рис. 6.27.

является таковой, поскольку при $\tau = -\infty$ уравнение (21) (после деления на τ) превращается в $R(p) = 0$, т. е., согласно принятому выше допущению, соответствует устойчивой системе. Следовательно, точка $\tau = -\infty$ принадлежит отрезку устойчивости, начерченному жирно на рис. 6.27, а. Поэтому, если точка $(-1, j0)$, соответствующая значению $\tau = -1$, принадлежит отрезку устойчивости, то уравнение (20) соответствует устойчивой системе. Отсюда следует, что замкнутая система устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$.

Аналогичным образом можно найти и связь с критерием Михайлова. Рассмотрим вместо уравнения замкнутой системы $H(p) = 0$ более общее уравнение

$$H(p) - \tau = 0. \tag{23}$$

В частном случае при $\tau = 0$ это уравнение превращается в характеристическое уравнение замкнутой системы. D -разбиение по параметру $\tau = H(j\omega)$ показано на рис. 6.27, б для характерного частного случая (при $n = 3$). Его часть при $\omega \geq 0$ совпадает с годографом Михайлова. Если после штриховки выясняется, что точка O , соответствующая значению $\tau = 0$, принадлежит отрезку равновесия NM , то система устойчива. Можно показать, что при этом приращение аргумента вектора $\tau = H(j\omega)$ равно $n\pi$, если ω изменяется в интервале $-\infty < \omega < +\infty$.

Пусть в уравнение системы входят два параметра τ и ν . Требуется построить D -разбиение в плоскости этих параметров. Допустим, что параметры τ и ν входят линейно в характеристическое уравнение; тогда

последнее может быть представлено в следующем виде:

$$\tau Q(p) + \nu P(p) + R(p) = 0. \quad (24)$$

Положим $p = j\omega$. Пусть

$$\left. \begin{aligned} Q(j\omega) &= Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ P(j\omega) &= P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ R(j\omega) &= R_1(\omega) + jR_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Подставив выражения (25) в уравнение (24) и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую составляющие левой части уравнения, получим два равенства

$$\left. \begin{aligned} \tau Q_1(\omega) + \nu P_1(\omega) + R_1(\omega) &= 0, \\ \tau Q_2(\omega) + \nu P_2(\omega) + R_2(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из этих двух уравнений можно найти τ и ν :

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & P_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \nu = \frac{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (27)$$

Формулы (27) дают уравнение кривой границы D -разбиения на плоскости (τ, ν) в параметрическом виде. Изменяя параметр ω от $-\infty$ до $+\infty$, можно, таким образом, получить D -разбиение (рис. 6.28).

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix} \quad (28)$$

равен нулю при некотором значении ω , то уравнения (26) уже не являются линейно независимыми и вырождаются в одно лишь уравнение.

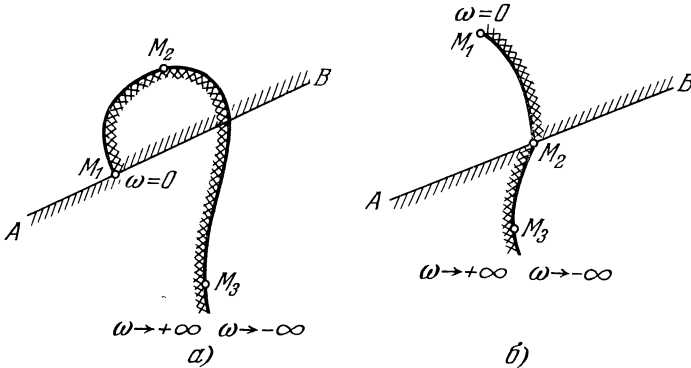


Рис. 6.28.

При подобном исключительном значении ω (обычно это имеет место при $\omega = 0$ или $\omega = \infty$) получаем не точку на плоскости (τ, ν) , а целую прямую. На рис. 6.28 показаны линии $M_1M_2M_3$ границы D -разбиения и прямая AM_1B , соответствующая исключительному значению ω . На рис. 6.28, а для примера $\omega = 0$; на рис. 6.28, б исключительное значение ω не равно нулю.

Линии $M_1M_2M_3$ и AM_1B делят плоскость на D -области. При распознавании области устойчивости полезно пользоваться штриховкой. Правило

штриховки в данном случае несколько видоизменяется: штриховку ведут слева от кривой, идя от значения $\omega = -\infty$ в случае, когда $\Delta > 0$. Если же $\Delta < 0$, то штриховку производят справа от кривой.

Обычно при $\omega < 0$ и $\omega > 0$ проходится одна и та же кривая ($M_3M_2M_1$ на рис. 6.24), но в противоположных направлениях. Если в точке $\omega = 0$ определитель Δ меняет знак (рис. 6.28, а), то, идя от M_3 к M_1 , штрихуют слева, а затем, идя обратно по кривой, штрихуют уже справа. Следовательно, получается двойная штриховка по одну сторону от кривой, что означает приращение двух корней в правой комплексной полуплоскости при переходе с заштрихованной стороны на незаштрихованную.

Прямые, соответствующие исключительным значениям ω , также штрихуются. Эта штриховка должна быть согласована со штриховкой кривой (см. рис. 6.28) так, чтобы внутренние стороны угла в точке стыка M_1 оказались полностью заштрихованными. Сторона, с которой заштрихована прямая, меняется при переходе точки M_2 .

В некоторых случаях величина Δ обращается в нуль, но Δ не меняет знака. Тогда прямая вовсе не штрихуется.

В качестве примера рассмотрим влияние на устойчивость параметров T_1 и k в уравнении (5). Для этого нужно начертить кривую границы D -разбиения на плоскости (T_1, k) . Сравнивая уравнения (5) и (24) (считаем $\tau = T_1$, $\nu = k$), находим

$$\begin{aligned} Q(j\omega) &= j\omega(1 + T_2j\omega)(1 + T_3j\omega) = -\omega^2(T_2 + T_3) + j\omega(1 - \omega^2T_2T_3); \\ R(j\omega) &= (1 + T_2j\omega)(1 + T_3j\omega) = 1 - \omega^2T_2T_3 + j\omega(T_2 + T_3); \\ P(j\omega) &= 1 + j\cdot 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} Q_1(\omega) &= -\omega^2(T_2 + T_3), & Q_2(\omega) &= -T_2T_3\omega^3 + \omega, \\ R_1(\omega) &= 1 - \omega^2T_2T_3, & R_2(\omega) &= \omega(T_2 + T_3), \\ P_1(\omega) &= 1; & P_2(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Далее вычисляем значения

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} Q_1 & P_1 \\ Q_2 & P_2 \end{vmatrix} = T_2T_3\omega^3 - \omega, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -R_1 & P_1 \\ -R_2 & P_2 \end{vmatrix} = \omega(T_2 + T_3), \\ \Delta_2 &= \omega \{ \omega^3(T_2T_3)^2 + \omega^2[(T_2 + T_3)^2 - T_2T_3] - \omega T_2T_3 + 1 \}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Находим уравнение границы D -разбиения в параметрическом виде

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{T_2 + T_3}{T_2T_3\omega^2 - 1}, \\ k &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\omega^3(T_2T_3)^2 + \omega^2[(T_2 + T_3)^2 - T_2T_3] - \omega T_2T_3 + 1}{T_2T_3\omega^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

При $\omega \rightarrow +\infty$ величина T_1 стремится к нулю, а $k \rightarrow +\infty$. При $\omega > \frac{1}{T_2T_3}$ и $\omega \rightarrow \frac{1}{T_2T_3}$ величина $T_1 \rightarrow +\infty$ и $k \rightarrow +\infty$. Затем при $\omega < \frac{1}{T_2T_3}$ величина T_1 делается отрицательной; однако ход кривой в левой полуплоскости (T_1, k) не представляет интереса. Кривая при $+\infty > \omega > \frac{1}{T_2T_3}$ изображена на рис. 6.29. При $\omega < 0$ та же кривая проходится в обратном направлении. Поэтому на ней нанесена двойная штриховка.

Прямые, соответствующие исключительным значениям ω , найдем из равенства $\Delta = 0$, т. е.

$$\omega (T_2 T_3 \omega^2 - 1) = 0. \quad (32)$$

Корни этого уравнения

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{T_2 T_3}}. \quad (33)$$

Значению $\omega_1 = 0$ соответствует прямая $k = -1$. Прямая $k = -1$ также изображена на рис. 6.29. Она пересекается с основной кривой в бесконечно удаленной точке. Значению $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{T_2 T_3}}$ соответствует $T_1 = \infty$, т. е. бесконечно удаленная точка.

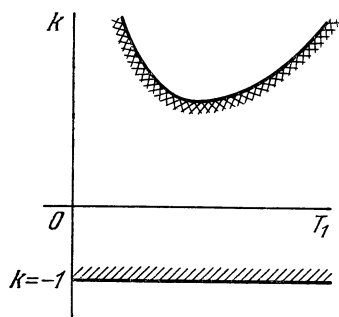


Рис. 6.29.

Область устойчивости при $T_1 > 0$ лежит между основной кривой и прямой $k = -1$ (см. рис. 6.29), поскольку при $k = 0$ система наверняка устойчива (см. уравнение (5)).

Подобным же образом можно находить границу D -разбиения и в том случае, когда изменяемые параметры входят нелинейно в уравнение системы, т. е. характеристическое уравнение при $p = j\omega$ принимает вид

$$f(j\omega, \tau, \nu) = 0.$$

Это уравнение распадается на два, если приравнять нулю отдельно действительную и мнимую составляющие f :

$$f_1(\omega, \tau, \nu) = 0, \quad f_2(\omega, \tau, \nu) = 0. \quad (34)$$

Полученные равенства дают уравнение границы D -разбиения в параметрическом виде.

Роль определителя Δ в данном случае играет якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tau} & \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tau} & \frac{\partial f_2}{\partial \nu} \end{vmatrix}.$$

Знак этого якобиана в данной точке кривой определяет штриховку по указанному выше правилу.

При помощи методов Михайлова и Неймарка получены интересные результаты о возможности увеличения предельного значения коэффициента усиления при наложении дополнительных связей в виде производных. Рассмотрим некоторые из этих результатов. Пусть одноцепочечная схема разомкнутой системы состоит из любого числа инерционных и колебательных звеньев и не более чем одного интегрирующего звена. Тогда оператор разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{D(p)}, \quad (35)$$

где $D(p)$ — многочлен. Например, если число интегрирующих звеньев в системе $l = 0$, то $W(p)$ имеет вид выражения (13).

Характеристическое уравнение замкнутой системы может быть написано в виде

$$D(p) + k = 0. \quad (36)$$

Если теперь последовательно в цепочку звеньев включается идеальное форсирующее звено с оператором $(1 + \rho p)$, где $\rho = \text{const}$, то оператор разомкнутой системы принимает вид

$$W(p) = \frac{k(1 + \rho p)}{D(p)}. \tag{37}$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы в этом случае запишется в следующем виде:

$$D(p) + k + k\rho p = 0 \tag{38}$$

или

$$H(p) = D(p) + k + Rp = 0, \tag{39}$$

где $R = k\rho$.

Начертим годограф Михайлова для уравнения (36). Удобно начертить годограф $D(j\omega)$ (годограф $H(j\omega)$ при $k=0$), а затем передвигать этот годограф вправо на нужную величину k . Подобные годографы построены на рис. 6.30, а и б для случаев $l=0$ и $l=1$. Величину k_{np} легко получить

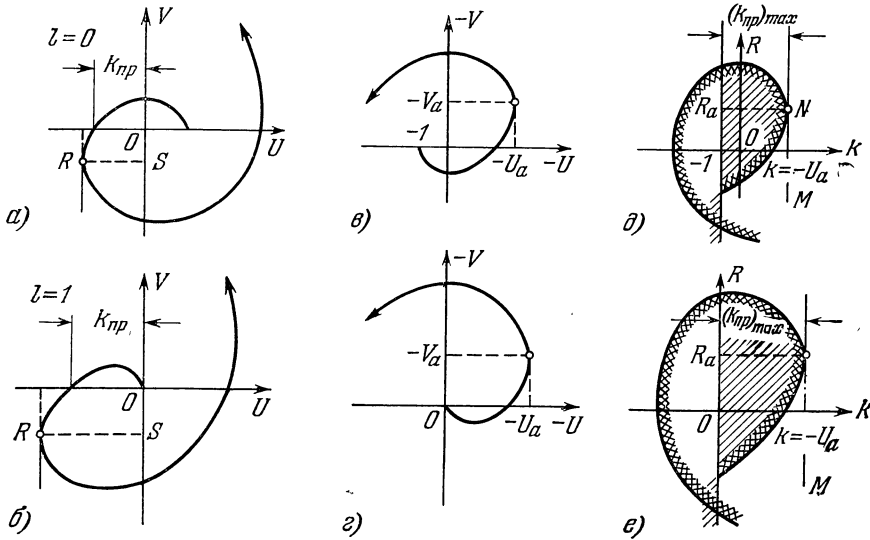


Рис. 6.30.

из рис. 6.30, а и б. При построении ограничимся случаем, когда колебательные звенья «сильно затемированы» и их постоянные затухания $d_0 \geq 0,707$. Тогда годограф $D(j\omega)$ имеет вид спирали без самопересечения, как это показано выше (см., например, рис. 6.26 и относящиеся к нему пояснения). Для случая $l=0$ годограф при $\omega=0$ начинается от точки $(+1, 0)$, а для случая $l=1$ — от точки $(0, 0)$. Пусть

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \tag{40}$$

Построим D-разбиение плоскости (k, ρ) либо (k, R) . Для этого положим в уравнении (39) $p = j\omega$. Если учесть выражение (40), то получим два равенства:

$$k = -U(\omega), \quad R = -\frac{V(\omega)}{\omega}. \tag{41}$$

Итак, чтобы построить кривую границы D-разбиения, нужно предварительно построить кривую $D(j\omega)$. Это сделано на рис. 6.30, в и г.

Затем нужно, сохранив абсциссы без изменения, разделить ординаты точек на ω . Это деформирует кривую, но не делает ее самопересекающейся, так как $V(\omega)$ растет быстрее, чем первая степень ω . Поэтому качественно кривая останется той же; лишь начальная точка (деление на нуль!) изменит свою ординату. (Весьма важно, что абсциссы не изменяются.) Получаем кривые, изображенные на рис. 6.30, *д* и *е*.

Так как при $R = 0$ и $k = 0$ система устойчива, то, если провести еще особую прямую (здесь это, как легко показать, вертикальная прямая, проходящая через точку $\omega = 0$), получим область устойчивости в виде заштрихованной на рис. 6.30, *д* и *е* части плоскости. Отсюда видно, что наибольшее значение $k_{\text{пр}}$ равно расстоянию до оси ординат прямой MN , касательной к кривой D -разбиения. Это значение

$$(k_{\text{пр}})_{\text{max}} = |U_a|, \quad (42)$$

где U_a может быть взято из годографа $D(j\omega)$. Подобное значение может быть получено при $R = R_a = \frac{|V_a|}{\omega_a}$. Так как $R = k\rho$, то соответствующее значение ρ может быть получено из выражения

$$\rho = \frac{R}{k} = \left| \frac{V_a}{\omega_a U_a} \right|. \quad (43)$$

Отсюда следует, что с помощью первой производной можно увеличить $k_{\text{пр}}$ лишь до максимального значения RS (см. рис. 6.30, *а* и *б*), которое сразу видно из годографа $D(j\omega)$. Из рис. 6.30 видно, что оптимальное значение R и $\rho = R/k$ всегда положительно.

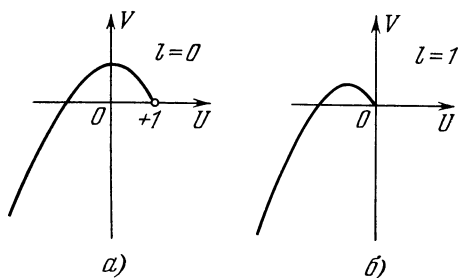


Рис. 6.31.

Из рис. 6.30 можно также видеть, что при слишком большом значении R и ρ система может оказаться неустойчивой. Исключением является система третьего порядка. Если построить для нее годограф Михайлова (рис. 6.31), то оказывается, что здесь можно достичь любого, сколько угодно большого значения $k_{\text{пр}}$, если взять достаточно большое значение R .

Здесь $k_{\text{пр}}$ монотонно растет с ростом ρ (при $\rho > 0$), достигая бесконечности, как нетрудно показать, при конечном значении $\rho = \rho_0$. Если $\rho > \rho_0$, то система устойчива при любом коэффициенте усиления.

При порядке системы $n > 3$ чрезмерно большое значение ρ может сделать систему неустойчивой.

§ 6. Структурная устойчивость

Выше уже встречались так называемые *структурно-неустойчивые* системы, т. е. системы, которые не могут стать устойчивыми ни при каких комбинациях значений их параметров. Наоборот, *структурно-устойчивыми* называются такие системы, которые при каких-либо значениях их параметров могут стать устойчивыми. Оказывается, что в ряде случаев по виду структурной схемы можно решить, является система структурно-устойчивой или структурно-неустойчивой. Ниже разбираются некоторые из подобных ситуаций.

Прежде всего введем некоторые новые типы звеньев. До сих пор рассматривались лишь устойчивые звенья. Но принципиально возможно по-

явление в эквивалентной одноцепочечной схеме и неустойчивых или находящихся на границе устойчивости звеньев. Действительно, разомкнутая система регулирования может быть неустойчивой, что, однако, не исключает возможности стабилизации замкнутой системы. Если разомкнутая система неустойчива или находится на границе устойчивости, то ее характеристическое уравнение имеет корни, находящиеся в правой полуплоскости или на мнимой оси. Значит, знаменатель оператора разомкнутой системы может содержать множители типа $1 - pT$ или

$$1 - 2 \frac{d_0}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}, \quad \text{где } T > 0, \quad \omega_0 > 0 \quad \text{и} \quad 0 \leq d_0 < 1.$$

Если в эквивалентной одноцепочечной схеме содержатся интегрирующие звенья, то знаменатель оператора разомкнутой системы содержит и множители p , т. е. имеет корни, также находящиеся на мнимой оси. Поэтому и в данном случае следует считать, что разомкнутая система находится на границе устойчивости или, как иногда говорят, *нейтральна*.

В связи с указанными выше возможными значениями корней знаменателя целесообразно ввести некоторые новые звенья. Назовем звено с оператором

$$W(p) = \frac{k}{1 - pT}, \quad (1)$$

где $k \geq 0$, $T > 0$, неустойчивым инерционным звеном, а звено с оператором

$$W(p) = \frac{k}{1 - 2 \frac{d_0}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \quad (2)$$

где $1 > d_0 \geq 0$, $\omega_0 > 0$, $k \geq 0$, — неустойчивым колебательным звеном

Если в частном случае в равенстве (2) величина $d_0 = 0$, то такое звено имеющее оператор

$$W(p) = \frac{k}{1 + \frac{p^2}{\omega^2}}, \quad (3)$$

часто называют консервативным звеном.

С помощью критерия Михайлова можно показать, что одноцепочечная система, состоящая из цепочки последовательно включенных инерционных, колебательных и интегрирующих звеньев, будет после замыкания структурно-неустойчивой:

1) если она содержит более одного интегрирующего звена или неустойчивого инерционного звена;

2) если число содержащихся в ней неустойчивых колебательных (или консервативных) звеньев таково, что степень характеристического уравнения не превосходит $4r$, т. е. если имеет место условие

$$n \leq 4r; \quad (4)$$

3) если система содержит одно интегрирующее и одно неустойчивое инерционное звено.

Система, содержащая лишь устойчивые инерционные и колебательные звенья (т. е. звенья ранее рассмотренных типов), структурно-устойчива, т. е. может быть найдено такое сочетание значений параметров, при котором система устойчива.

Справедливость последнего утверждения вытекает из рассмотрения уравнения (14) § 5 замкнутой системы. Очевидно, что при $0 < d_{01} < 0,707$ годограф Михайлова для $k = 0$ хотя и может иметь самопересечения, но соответствует устойчивой системе. Действительно, модуль $R(j\omega)$ (см. равенство (15) § 5) ни при каком значении ω не обращается в нуль, а аргумент

монотонно возрастает при увеличении ω . Следовательно, вектор $H(j\omega)$ совершает при $k = 0$ и $0 < \omega < \infty$ поворот на $n \frac{\pi}{2}$, это и должно иметь место, так как разомкнутая система устойчива.

Отсюда следует, что, например, при достаточно малом положительном значении k , когда годограф совершит малый сдвиг вправо, вектор $H(j\omega)$ по-прежнему будет поворачиваться на угол $n \frac{\pi}{2}$ при $0 < \omega < \infty$, т. е. система окажется устойчивой. Следовательно, система структурно-устойчива.

Допустим теперь, что разомкнутая система содержит q интегрирующих звеньев, а остальные звенья устойчивые инерционные или колебательные. Тогда оператор разомкнутой системы имеет вид (сравнить с (13) § 5)

$$W(p) = \frac{\xi \prod_{i=1}^{l=s} \omega_{0i}^2}{p^q \prod_{i=1}^{i=m} (1 + pT_i) \prod_{l=1}^{l=s} (p^2 + 2d_{0l}\omega_{0l}p + \omega_{0l}^2)}, \quad (5)$$

а уравнение замкнутой системы получим в виде

$$H(p) = p^q \prod_{i=1}^{i=m} (1 + pT_i) \prod_{l=1}^{l=s} (p^2 + 2d_{0l}\omega_{0l}p + \omega_{0l}^2) + \xi \prod_{l=1}^{l=s} \omega_{0l}^2 = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим годограф Михайлова при $q = 1$ и $\xi = 0$. При $\omega = 0$ вектор $H(j\omega)$ также равен нулю, но при увеличении ω модуль $H(j\omega)$ становится

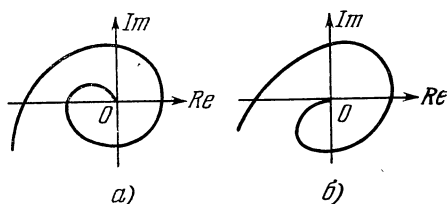


Рис. 6.32.

отличным от нуля, а аргумент монотонно увеличивается от своего начального значения $\pi/2$. Годограф имеет форму, изображенную на рис. 6.32, а (самопересечение может иметь место, но это в данном случае не влияет на результат рассуждений). Из этой фигуры видно, что при достаточно малых положительных значениях ξ весь годограф сдвигается чуть вправо и система становится устойчивой. Следовательно,

система с *одним* интегрирующим звеном структурно-устойчива.

Аналогичным способом можно доказать, что система, содержащая в одноцепочечной схеме *любое* количество устойчивых инерционных и колебательных звеньев и *одно* неустойчивое инерционное звено, структурно-устойчива.

Пусть теперь в одноконтурной схеме, кроме любого числа устойчивых инерционных и колебательных звеньев, будут два интегрирующих звена. Тогда в уравнении замкнутой системы (5) следует положить $q = 2$. При $\xi = 0$ и $\omega = 0$ вектор $H(j\omega)$ также равен нулю, а при увеличении ω модуль $H(j\omega)$ становится отличным от нуля, а аргумент монотонно растет от своего начального значения $+\pi$. Таким образом, годограф Михайлова в данном случае имеет форму, изображенную на рис. 6.32, б. Из этой фигуры видно, что никаким сдвигом годографа вправо (если положить $\xi > 0$) не удастся добиться такого положения годографа, чтобы вектор $H(j\omega)$ обходил n квадрантов. Следовательно, эта система структурно-неустойчива.

Сходным образом доказывается, что одноконтурная система, содержащая одно неустойчивое инерционное и одно интегрирующее звено, а также любое число интегрирующих или неустойчивых инерционных звеньев, больше единицы, будет структурно-неустойчивой.

Сходными, но несколько более сложными рассуждениями можно показать, что систему без интегрирующих звеньев с одним неустойчивым колеба-

тельным звеном (или консервативным звеном) можно сделать устойчивой лишь в том случае, если порядок системы выше 4. Если в системе два неустойчивых колебательных звена, то она может быть сделана устойчивой лишь, если ее порядок выше 8, и т. д. Вообще такая система структурно-неустойчива, если удовлетворяется неравенство (4). Отметим, что основные результаты по структурной устойчивости линейных систем получены М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером.

Рассмотрим простой пример. Пусть в системе имеется устойчивое инерционное звено с оператором $\frac{k_1}{1+pT_1}$ и консервативное звено с оператором $\frac{k_2}{1+T_2^2p^2}$.

Тогда общее уравнение замкнутой системы можно написать в виде

$$(1 + pT_1)(1 + T_2^2p^2) + k_1k_2 = 0$$

или

$$T_1T_2^2p^3 + T_2^2p^2 + T_1p + (k_1k_2 + 1) = 0. \quad (7)$$

Условием устойчивости схемы служит

$$T_1T_2^2 - T_1T_2^2(k_1k_2 + 1) > 0 \quad (8)$$

или

$$-T_1T_2^2k_1k_2 > 0.$$

Но этому неравенству невозможно удовлетворить ни при каких (положительных) значениях параметров. Следовательно, данная система структурно-неустойчива.

Если схема многоконтурная, то ее для исследования нужно предварительно привести к одноконтурной, а затем повторить указанные операции.

§ 7. Устойчивость систем с запаздыванием

Системами с запаздыванием называются системы, структурные схемы которых содержат хотя бы одно звено запаздывания, описанное в § 3 гл. III. Напомним, что звено запаздывания характеризуется следующей зависимостью между входной величиной $u(t)$ и выходной величиной $x(t)$ вида

$$x(t) = u(t - \tau), \quad (1)$$

где τ является постоянной величиной и называется временем запаздывания. Остановимся более подробно на свойствах звена запаздывания.

Система с запаздыванием может приближенно рассматриваться как система, состоящая из последовательного соединения большого числа инерционных звеньев с малыми постоянными времени. Действительно, пусть система состоит из n последовательно включенных равных друг другу инерционных звеньев с постоянными времени ΔT . Положим $\Delta T = \frac{\tau}{n}$. Тогда оператор разомкнутой системы при коэффициенте усиления, равном для простоты единице, имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{(1+p\Delta T)^n} = \frac{1}{\left(1+p\frac{\tau}{n}\right)^n}. \quad (2)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то в пределе получаем $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\right)$ величину $W(p) = e^{-p\tau}$, т. е. оператор звена с запаздыванием.

Уже при $n = 8-10$ переходная функция системы с оператором (2) мало отличается от переходной функции звена с запаздыванием. Поэтому

сложные системы с большим количеством звеньев можно иногда заменять в целях приближенного исследования более простыми системами, содержащими звенья с запаздыванием.

Звено с запаздыванием является одним из простейших типов систем с распределенными параметрами. Например, идеальная длинная линия без потерь с распределенными индуктивностью и емкостью является также звеном с запаздыванием.

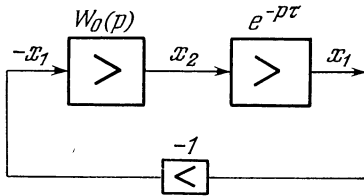


Рис. 6.33.

Рассмотрим замкнутую систему регулирования, содержащую одно звено с запаздыванием. Такую систему можно представить в виде двух последовательно соединенных звеньев: части системы с оператором $W(p)$, не содержащей звена с запаздыванием, и звена с запаздыванием (рис. 6.33).

Оператор $W(p)$ может быть сколь угодно сложным, но всегда является дробно-рациональной функцией p , в то время как оператор $e^{-p\tau}$ звена с запаздыванием является трансцендентной функцией p . В замкнутой системе регулирования на вход звена с оператором $W(p)$ подается с обратным знаком величина x_1 — выходная величина звена с запаздыванием.

Уравнения свободного движения для системы, изображенной на рисунке 6.33, имеют в общем случае вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2(t - \tau), \\ b_0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \dots + b_n x_2 &= -c_0 \frac{d^m x_1}{dt^m} - c_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} - \dots - c_m x_1 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $m < n$, коэффициенты b_1 и c_1 постоянные и характеризуют оператор $W(p)$

$$W(p) = \frac{x_2(p)}{-x_1(p)} = \frac{c_0 p^m + c_1 p^{m-1} + \dots + c_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{Q(p)}{R(p)}. \quad (4)$$

Уравнения (3) можно решить тем же способом, что и линейные уравнения для систем с сосредоточенными параметрами. Предположим существование решения в форме

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ae^{pt}, \\ x_2 &= Be^{pt}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где p — еще неизвестное число. Подставим предполагаемое решение (5) в уравнения (3) и сократим на e^{pt} . Тогда получим равенства

$$\left. \begin{aligned} A &= Be^{-p\tau}, \\ [b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n] B &= -[c_0 p^m + c_1 p^{m-1} + \dots + c_m] A \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} A &= Be^{-p\tau}, \\ R(p) B &= -Q(p) A. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из первого уравнения (7) находим $\frac{A}{B} = e^{-p\tau}$, а из второго уравнения

$\frac{A}{B} = -\frac{R(p)}{Q(p)}$. Следовательно,

$$-\frac{R(p)}{Q(p)} = e^{-p\tau} \quad (8)$$

или

$$R(p) + e^{-p\tau} Q(p) = 0. \quad (9)$$

Следовательно, решение (5) будет иметь место только тогда, когда p удовлетворяет трансцендентному уравнению (9) с действительными коэффициентами. Последнее является для системы с запаздыванием характеристическим уравнением. Отметим, что уравнение (9) получается элементарно на основе использования преобразования Лапласа.

Уравнение (9) имеет *конечное* множество действительных корней, так как кривая $-\frac{R(p)}{Q(p)}$ и экспонента $e^{p\tau}$ при действительном p пересекаются в конечном числе точек. Однако уравнение (9) имеет, вообще говоря, *бесконечное* множество комплексно сопряженных корней.

Рассмотрим, например, частный случай, когда $W_0(p) = \frac{1}{p}$, т. е. в системе, кроме звена с запаздыванием, имеется лишь интегрирующее звено. В данном случае $Q(p)=1$, $R(p)=p$, и характеристическое уравнение имеет вид

$$p + e^{-p\tau} = 0. \quad (10)$$

Для отыскания комплексно сопряженных корней этого уравнения положим $p = \alpha + j\omega$. Тогда уравнение (10), если применить формулу Эйлера $e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau$, можно написать в следующем виде:

$$\alpha + j\omega + e^{-\alpha\tau} (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) = 0, \quad (11)$$

откуда следуют два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau, \\ \omega &= e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Деля первое из уравнений почленно на второе, находим

$$\alpha = -\frac{\omega}{\operatorname{tg} \omega\tau}. \quad (13)$$

Введем вспомогательную переменную $\omega\tau = \theta$. Подставляя значение α из (13) во второе из уравнений (12), получаем уравнение для определения θ

$$e^{-\theta \operatorname{ctg} \theta} = \tau \frac{\sin \theta}{\theta}. \quad (14)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество действительных корней, в чем нетрудно убедиться, например, следующим способом. Рассмотрим отдельно левую и правую части уравнения, т. е. кривые

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= e^{-\theta \operatorname{ctg} \theta}, \\ z_2 &= \tau \frac{\sin \theta}{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При $\theta = 2n\pi + 0$ ($n = 1, 2, \dots$) обе функции равны нулю; это значение не дает еще корней, лежащих в какой-либо конечной области комплексной плоскости, так как при $\theta = \omega\tau = 2n\pi$ значение $|\alpha|$ из выражения (13) обращается в ∞ . Однако кривые $z_1(\theta)$ и $z_2(\theta)$ пересекаются в интервалах $2n\pi < \theta < (2n+1)\pi$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz_1}{d\theta}\right)_{\theta=2n\pi+0} &= -\left[e^{-\frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta - \theta}{\sin^2 \theta}}\right]_{\theta=2n\pi+0} = 0, \\ \left(\frac{dz_2}{d\theta}\right)_{\theta=2n\pi+0} &= \tau \left[\frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}\right]_{\theta=2n\pi+0} = \frac{\tau}{n\pi} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\left(\frac{dz_2}{d\theta}\right)_{\theta=2n\pi+0} > \left(\frac{dz_1}{d\theta}\right)_{\theta=2n\pi+0}$. В интервале $2n\pi < \theta < (2n+1)\pi$ функция z_1 , будучи непрерывной, принимает сколь угодно большие значения при $\theta \rightarrow (2n+1)\pi - 0$, а функция z_2 остается меньшей $\tau/2n\pi$, также будучи непрерывной в этом интервале.

Так как функции z_1 и z_2 равны друг другу при $\theta = 2n\pi + 0$, то они должны пересекаться в этом интервале. Легко показать, что в каждом интервале имеется лишь одна точка пересечения: поскольку, однако, число интервалов бесконечно, то бесконечно и число действительных корней уравнения (14). Так как функции $\theta \operatorname{ctg} \theta$ и $\sin \theta / \theta$ четны, то каждому действительному положительному корню уравнения (14) θ_i соответствует равный ему по модулю отрицательный корень. Подставив значение ω в выражение (13), получаем соответствующее значение $\alpha < 0$. Таким образом, уравнение (10) имеет бесконечное множество комплексно сопряженных корней.

Так как $e^{-p\tau} = 1 - p\tau + \frac{p^2\tau^2}{2!} - \frac{p^3\tau^3}{3!} + \dots$, то уравнение (9) можно рассматривать как уравнение «бесконечной степени».

Общее решение системы уравнений (3), очевидно, имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{p_i t}. \quad (16)$$

где p_i — корни характеристического уравнения (9), а c_i — постоянные, значения которых находятся из начальных условий. Так как для системы (13) имеется конечное число начальных условий, то постоянные c_i связаны между собой, на чем мы здесь останавливаться не будем.

Если система устойчива, то $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для этого, как видно из выражения (16), необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения находились в левой полуплоскости комплексного переменного.

Как показал Я. З. Цыпкин, критерий Найквиста может быть распространен и на системы с запаздыванием. Рассмотрим разомкнутую систему с запаздыванием. Если разомкнуть систему, изображенную на рис. 6.33, то оператор разомкнутой системы примет вид

$$W(p) = W_0(p) e^{-p\tau} = \frac{Q(p)}{R(p)} e^{-p\tau}. \quad (17)$$

Рассмотрим вектор $1 + W(p)$. Подставив значение $W(p)$ из (17), находим

$$1 + W(p) = 1 + \frac{Q(p)}{R(p)} e^{-p\tau} = \frac{R(p) + Q(p) e^{-p\tau}}{R(p)}. \quad (18)$$

Рассмотрим доказательство для того случая, когда разомкнутая система устойчива и нет полюсов оператора разомкнутой системы, находящихся на мнимой оси. Найдем условие, при котором все корни числителя выражения (18), являющиеся корнями характеристического уравнения (9), находятся в левой полуплоскости. Нули функции $1 + W(p)$ являются корнями числителя, а полюсы — корнями знаменателя выражения (18).

Рассмотрим приращение аргумента выражения $1 + W(p)$ в том случае, когда путь, который проходит конец вектора p , является замкнутой кривой, состоящей из мнимой оси ABC и дуги бесконечно большого радиуса CDA . Общее приращение аргумента

$$\Delta \arg [1 + W(p)] = \Delta \arg_{ABC} + \Delta \arg_{CDA}, \quad (19)$$

где $\Delta \arg_{ABC}$ — приращение аргумента при движении p по прямой ABC , а $\Delta \arg_{CDA}$ — приращение аргумента при движении $-p$ по дуге CDA . При движении по дуге $p = re^{j\varphi}$, причем φ меняется в пределах $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$. Тогда вектор $1 + W(p)$ может быть изображен в следующем виде:

$$[1 + W(p)]_{CDA} = \frac{R(re^{j\varphi}) + Q(re^{j\varphi}) e^{-re^{j\varphi}\tau}}{R(re^{j\varphi})}. \quad (20)$$

При $r \rightarrow \infty$ выражение

$$Q(re^{j\varphi})e^{-re^{j\varphi}\tau} = Q(re^{j\varphi})e^{-r(\cos\varphi + j\sin\varphi)\tau} = e^{-r\cos\varphi\tau}e^{-jr\sin\varphi\tau}Q(re^{j\varphi}) \rightarrow 0,$$

так как экспонента $e^{-r\cos\varphi\tau}$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{|Q(re^{j\varphi})|}$, а модуль $|e^{-jr\sin\varphi\tau}| = 1$. Поэтому в пределе в формуле (20) получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [1 + W(p)]_{CDA} = 1,$$

откуда следует $\Delta \arg_{CDA} = 0$.

Если замкнутая система устойчива и корни $R(p)$ лежат в левой полуплоскости, то внутри контура $ABCD$ не содержится ни нулей, ни полюсов функции $1 + W(p)$, и, следовательно, общее приращение аргумента (19) равно нулю.

Так как $\Delta \arg_{CDA} = 0$, то из выражения (19) следует, что

$$\Delta \arg_{ABC} = 0,$$

так как угол поворота вектора $1 + W(j\omega)$ при параметре ω , изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$, равен нулю, если система устойчива, и отличен от нуля, если система неустойчива.

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием наиболее удобно воспользоваться методом Я. З. Цыпкина, изложенным ниже. Рассмотрим передаточную функцию замкнутой системы

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

Если положить

$$W_0(j\omega) = |W_0(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}, \tag{21}$$

то

$$W(j\omega) = |W_0(j\omega)|e^{j[\theta(\omega) - \omega\tau]}. \tag{22}$$

Из формулы (22) можно усмотреть, что в результате прибавления к системе с оператором $W_0(p)$ дополнительного звена запаздывания все векторы характеристики $W_0(j\omega)$, не изменяя своего модуля, поворачиваются по часовой стрелке на углы $\omega\tau$, пропорциональные частоте ω .

Рассмотрим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы $W_0(j\omega)$, изображенную в виде сплошной кривой на рис. 6.34. Прибавление к системе последовательно включенного звена с запаздыванием сдвигает все векторы характеристики по часовой стрелке. При некотором значении запаздывания τ характеристика может деформироваться настолько, что новая кривая $W(j\omega)$ пройдет через точку $(-1, 0)$, т. е. система окажется на границе устойчивости (пунктирная кривая на рис. 6.34). При этом для одного из векторов характеристики становится справедливым равенство $W(j\omega_{кр}) = -1 = -1e^{-j(\pi + 2\pi n)}$, где $\omega_{кр}$ — соответствующая этому вектору частота.

Из формулы (22) следует для этой частоты соотношение

$$\theta(\omega) - \omega\tau = -\pi - 2\pi n, \tag{23}$$

откуда

$$\tau_{кр} = \frac{\theta(\omega) + \pi(1 + 2n)}{\omega} \quad (n = 0, 1, 2 \dots). \tag{24}$$

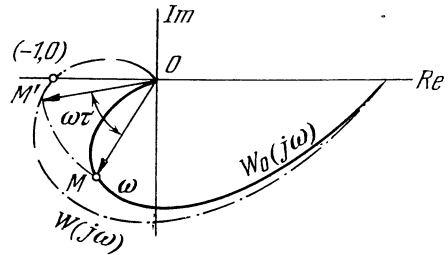


Рис. 6.34.

Так как векторы $W(j\omega)$ поворачиваются по отношению к векторам $W_0(j\omega)$ на угол $\omega\tau$, не изменяя своего модуля, то попасть после поворота в точку $(-1, 0)$ может лишь тот вектор, который до поворота имел модуль, равный единице. Нетрудно узнать, какие векторы могут попасть в точку $(-1, 0)$. Для этого необходимо начертить окружность радиуса, равного единице, с центром в начале координат O (рис. 6.35). Точки пересечения окружности с амплитудно-фазовой характеристикой $W_0(j\omega)$ определяют те «подозрительные» векторы, которые имеют модуль, равный единице, и поэтому могут попасть после поворота в точку $(-1, 0)$. На рис. 6.35 изображен случай, когда имеется лишь одна точка пересечения M . Пусть частота, соответствующая этой точке, равна ω_M , а аргумент вектора OM равен $\theta(\omega_M)$. Из формулы (24) получаем значение

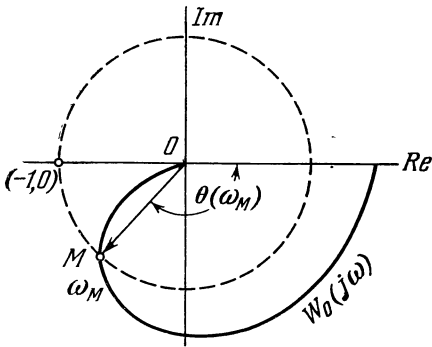


Рис. 6.35.

наименьшего запаздывания $\tau_{кр1}$, которое поворачивает вектор OM до совмещения с действительной осью, когда конец вектора окажется в точке $(-1, 0)$,

$$\tau_{кр1} = \frac{\theta(\omega_M) + \pi}{\omega_M} . \tag{25}$$

Очевидно, при $\tau < \tau_{кр1}$ вектор OM еще не дойдет до точки $(-1, 0)$, и система будет устойчивой. Соответствующая амплитудно-фазовая характеристика изображена на рис. 6.36, а. При $\tau = \tau_{кр1}$ вектор OM примет положение,

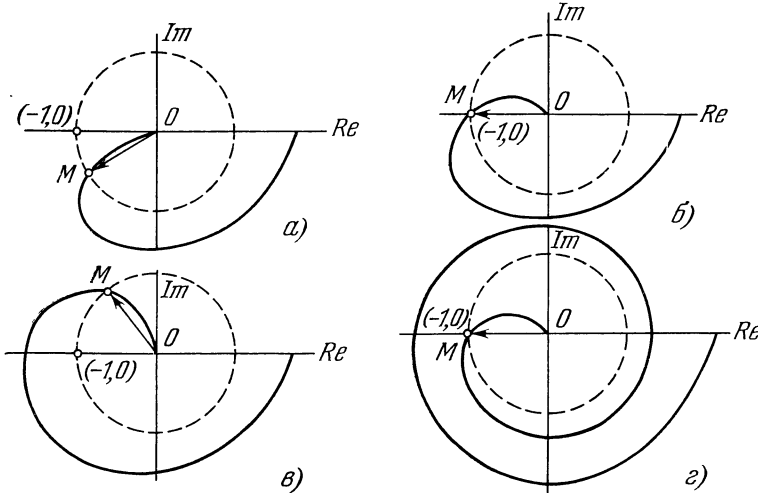


Рис. 6.36.

соответствующее рис. 6.36, б, следовательно, система окажется на границе устойчивости. При $\tau > \tau_{кр1}$ амплитудно-фазовая характеристика будет охватывать точку $(-1, 0)$, и система окажется неустойчивой (рис. 6.36, в).

Из формулы (24) следует, что существует бесконечное множество критических значений времени запаздывания $\tau_{кр}$, при которых конец вектора OM будет совпадать с точкой $(-1, 0)$. Пусть, например, τ увеличивается от значения $\tau_{кр}$ и, наконец, доходит до величины, соответствующей $n=1$

в формуле (24):

$$\tau_{кр2} = \frac{\theta(\omega_M) + 3\pi}{\omega_M} . \tag{26}$$

Так как все векторы характеристики $W_0(j\omega)$ при повороте не меняют своего модуля, то характеристика $W(j\omega)$ примет вид, изображенный на рис. 6.36, и система как при $\tau_{кр1} < \tau < \tau_{кр2}$, так и при $\tau > \tau_{кр2}$ окажется неустойчивой. Следовательно, из всех критических значений $\tau_{кр}$ только одно $\tau_{кр1}$ соответствует границе устойчивости. Условие устойчивости для системы с амплитудно-фазовой характеристикой, изображенной на рис. 6.35, имеет поэтому вид

$$\tau < \tau_{кр1} . \tag{27}$$

Это условие справедливо для таких характеристик, при которых $|[W(j\omega)]_{\omega=0}| > 1$ и имеется лишь одна точка пересечения характеристики с окружностью модуля, равного единице. При этом, как и для всех обычного типа характеристик,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W(j\omega)| = 0 .$$

Если частота ω , соответствующая некоторому вектору характеристики, достаточно велика, то при данном значении запаздывания τ угол поворота вектора может стать сколь угодно большим. Поэтому для любого конечного значения τ амплитудно-фазовая характеристика образует бесконечно большое число витков спирали.

Рассмотрим другой тип амплитудно-фазовой характеристики при коэффициенте усиления $|W(j\omega)| < 1$ и двух точках пересечения характеристики с окружностью модуля, равного единице (рис. 6.37). Из рассмотрения рис. 6.37 следует, что система оказывается на границе устойчивости при величине запаздывания

$$\tau_{кр1} = \frac{\theta_1 + \pi}{\omega_1} , \tag{28}$$

когда вектор OM_1 после поворота оказывается на действительной оси.

Если τ становится больше $\tau_{кр}$, то амплитудно-фазовая характеристика занимает положение, изображенное на рис. 6.38, а, и система становится неустойчивой. Если далее увеличивать τ , то второй из векторов, имеющих модуль, равный единице, — вектор OM_2 — поворачивается до тех пор, пока его конец не совпадает с точкой $(-1, 0)$. Это произойдет при значении запаздывания

$$\tau_{кр2} = \frac{\theta_2 + \pi}{\omega_2} . \tag{29}$$

Если далее увеличивать τ , то амплитудно-фазовая характеристика займет положение, изображенное на рис. 6.38, б, и система вновь станет устойчивой. Далее, когда вектор OM_1 повернется на угол $\omega_1\tau_{кр1} + 2\pi$, его конец опять совместится с точкой $(-1, 0)$ при $\tau = \tau_{кр3}$. При дальнейшем увеличении τ амплитудно-фазовая характеристика примет положение, изображенное на рис. 6.38, в, и система опять станет неустойчивой. Таким образом, в данном случае, при монотонном увеличении τ , система оказывается то устойчивой, то неустойчивой. Получается так называемое чередование интервалов или полос устойчивости и неустойчивости. Интервалы, в которых система устойчива: $0 < \tau < \tau_{кр1}$, $\tau_{кр2} < \tau_{кр3}$ и т. д. Эти интервалы

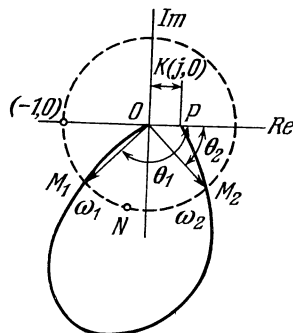


Рис. 6.37.

изображены на рис. 6.39, причем интервалы, соответствующие неустойчивой системе, заштрихованы. Число полос устойчивости и неустойчивости, вообще говоря, конечно. Действительно, частота ω_1 , соответствующая точке M_1 , больше частоты ω_2 , соответствующей точке M_2 . Поэтому при одном

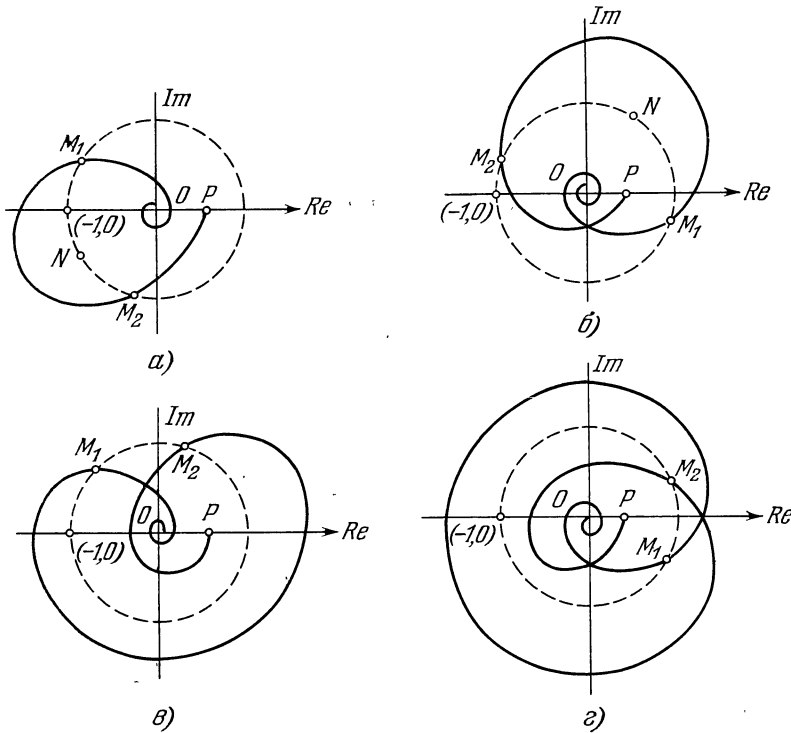


Рис. 6.38.

и том же запаздывании τ угол поворота $\omega_1\tau$ вектора OM_1 больше, чем угол поворота $\omega_2\tau$ вектора OM_2 .

Следовательно, точка M_1 при увеличении τ быстрее бежит по окружности модуля, равного единице, чем точка M_2 . Поэтому при некотором значении τ точка M_1 перегонит точку M_2 и окажется впереди нее (рис. 6.38). При дальнейшем увеличении τ точка $(-1, 0)$ окажется всегда охваченной амплитудно-фазовой характеристикой, и система будет неустойчивой; чередование полос устойчивости и неустойчивости прекратится.

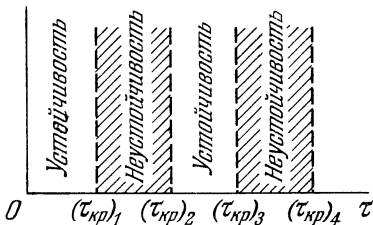


Рис. 6.39.

Если дуга M_1NM_2 (рис. 6.37) достаточно мала, то разность частот ω_1 и ω_2 также достаточно мала, а необходима достаточно большая величина τ для того, чтобы точка M_1 перегнала точку M_2 . Поэтому при такой

форме амплитудно-фазовой характеристики возможно сколь угодно большое число полос устойчивости и неустойчивости.

Простую физическую интерпретацию явления чередования полос устойчивости и неустойчивости можно получить, рассмотрев пример идеального генератора с обратной связью, подаваемой через звено с запаздыванием (рис. 6.40). Допустим, что генератор при запаздывании, равном нулю, гене-

рирует синусоидальные колебания частоты ω . Если запаздывание $\tau = 0$, то $x_0 = x$, и выходная величина генератора x без сдвига фазы приложена к его входу; следовательно, имеется положительная обратная связь, которая и приводит к генерации. Если теперь увеличивать τ , то при некотором его значении τ_1 величина x на выходе звена с запаздыванием будет запаздывать по отношению к величине x на полпериода. В этом случае величина x_0 будет иметь обратную фазу по отношению к величине x и, следовательно, обратная связь окажется отрицательной. Система не будет генерировать и станет устойчивой.

Будем далее увеличивать запаздывание τ . При $\tau = \tau_2$, когда запаздывание равно периоду колебания, сдвиг фаз между x и x_0 оказывается опять

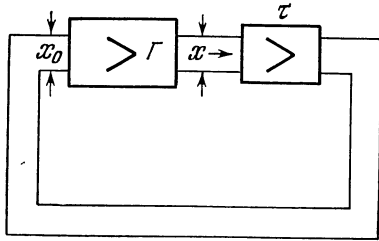


Рис. 6.40.

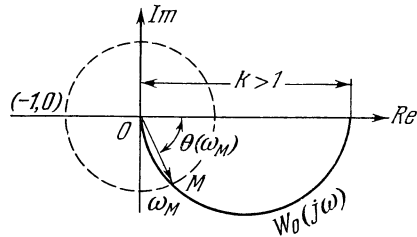


Рис. 6.41.

равным нулю, и система будет неустойчивой. Так получается чередование интервалов устойчивости или неустойчивости.

Рассмотрим пример определения области устойчивости для системы с запаздыванием. Пусть система состоит из инерционного звена с оператором $W_0(p) = \frac{k}{1+pT}$, соединенного последовательно с звеном запаздывания (оператор $e^{-p\tau}$). Примем, что коэффициент усиления $k > 1$. Комплексный коэффициент усиления «обычной» части разомкнутой системы, если положить $\omega T = \kappa$, равен

$$W_0(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k}{1+j\kappa} = \frac{k}{\sqrt{1+\kappa^2}} e^{-j \arctg \kappa}. \tag{30}$$

Величина $\kappa = \omega T$ может быть названа относительной частотой. Амплитудно-фазовая характеристика $W_0(j\omega)$ является полуокружностью (рис. 6.41) и имеет одну точку пересечения с окружностью модуля, равного единице. Поэтому условие устойчивости имеет вид неравенства (27)

$$\tau < \tau_{кр1} = \frac{\theta(\omega_M) + \pi}{\omega_M}.$$

Найдем ω_M и $\theta(\omega_M)$ по рис. 7.41. Модуль вектора OM равен единице; следовательно, для $\kappa_M = T\omega_M$ справедливо равенство

$$\frac{k}{\sqrt{1+\kappa_M^2}} = 1,$$

откуда

$$\kappa_M = \sqrt{k^2 - 1}. \tag{31}$$

Далее из формул (30) и (31) следует

$$\theta(\omega_M) = - \arctg \kappa_M = - \arctg \sqrt{k^2 - 1}. \tag{32}$$

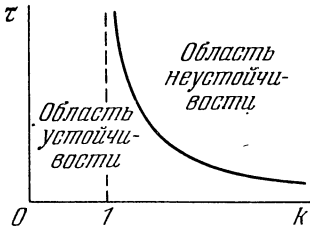
Подставляя эти значения в выражение для $\tau_{кр}$, находим

$$\tau_{кр1} = \frac{-\operatorname{arctg} \sqrt{k^2 - 1} + \pi}{\sqrt{k^2 - 1}} T. \quad (33)$$

Следовательно, условие устойчивости имеет вид

$$\tau < \frac{-\operatorname{arctg} \sqrt{k^2 - 1} + \pi}{\sqrt{k^2 - 1}} T. \quad (34)$$

Из этого условия видно, что даже система первого порядка при наличии дополнительного запаздывания может стать неустойчивой. Чтобы найти область устойчивости, начертим на плоскости (k, τ) кривую (33) (рис. 6.42). Из формулы (33) следует, что при $k > 1$ и $k \rightarrow 1$ величина $\tau_{кр1} \rightarrow \infty$. Когда $k < 1$, то, как это видно из рис. 6.42, система всегда устойчива. Если же $k \rightarrow \infty$, то $\operatorname{arctg} \sqrt{k^2 - 1} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и приближенно



$$\tau_{кр1} \approx \frac{\frac{1}{2} \pi}{k}. \quad (35)$$

Рис. 6.42.

Следовательно, при больших k кривая близка к гиперболе. Кривая $\tau_{кр1} = f(k)$ отграничивает на плоскости (τ, k) область устойчивости от области неустойчивости (см. рис. 6.42). Из рис. 6.42 видно, что при больших коэффициентах усиления достаточно небольшого времени запаздывания для того, чтобы система стала неустойчивой.

Глава VII

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В УСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМАХ

§ 1. Требования к переходному процессу

При построении систем управления необходимо обеспечить выполнение следующих требований: устойчивости, определенного поведения системы в установившемся режиме, а также требования к переходному процессу.

Например, усилители в радиоустановках, блоки вычислительных устройств, системы автоматического регулирования и т. д. обычно должны быть устойчивыми. В качестве примера требований к установившемуся процессу можно привести требование малой погрешности в установившемся

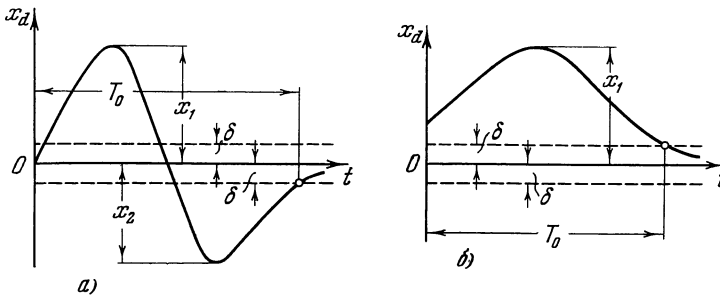


Рис. 7.1.

режиме работы следящей системы (см. гл. III). Однако в большинстве установок необходимо также удовлетворить определенным требованиям, предъявляемым к переходным процессам в них. В общих чертах эти требования сводятся к обеспечению быстроты и плавного протекания переходных процессов, к отсутствию резких выбросов и резко колебательного характера движений. Необходимо, однако, уточнить эти требования, придав им количественную формулировку.

Рассмотрим переходную составляющую x_d какого-либо процесса в устойчивой системе. В последней обеспечено условие

$$x_d \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (1)$$

На рис. 7.1 показаны примеры переходных процессов в системе при различных начальных условиях.

Введем понятия *величины перехода* (перерегулирования в системах автоматического регулирования) и *времени переходного процесса* (времени регулирования в системах автоматического регулирования). За количественную меру величины перехода Δx принимают отношение абсолютной величины максимального отклонения отрицательного знака x_2 к максималь-

ному отклонению положительного знака x_1 величины x_d . Итак,

$$\Delta x = \frac{x_2}{x_1}. \quad (2)$$

Если знак величины x_d не меняется, то процесс происходит без пере-регулирования. Величина Δx является важным показателем переходного процесса. Часто в качестве технического условия к системе предъявляется требование ограничения Δx некоторой малой величиной (например, порядка $0,05 \div 0,1$) при воздействии ступенчатой функции на систему. Иногда вообще требуют отсутствия перехода либо ограничения максимумов x_1 и x_2 некоторыми предельными значениями.

Другим важным показателем переходного процесса является так называемое *время переходного процесса* T_0 . Это — промежуток времени от начала переходного процесса до того момента, когда величина x_d достигает значения (и в дальнейшем остается) меньшего по абсолютной величине некоторой заданной величины δ . Последнюю можно считать допустимым отклонением. На рис. 7.1 показано время переходного процесса T_0 . В качестве технического условия часто предъявляется требование $T_0 < (T_0)_{\max}$, где $(T_0)_{\max}$ — некоторая максимально допустимая величина (при определенной заданной форме входного воздействия, поступающего на систему).

Совокупность требований, предъявляемых к переходному процессу, иногда называется условиями *качества* переходного процесса (условиями *качества регулирования* в системах автоматического регулирования). В настоящее время существуют три способа формулировки требований, предъявляемых к протеканию переходного процесса.

Первый способ заключается в задании некоторых допустимых пределов для показателей переходного процесса, либо в задании качественных характеристик кривой $x_d(t)$. Например, можно потребовать, чтобы время переходного процесса T_0 было меньше некоторой предельно допустимой величины $(T_0)_{\max}$. Можно потребовать, чтобы переход Δx вовсе отсутствовал, либо был меньше некоторого максимума (Δx_{\max}). Можно потребовать, чтобы процесс был монотонным. Все подобные требования относятся к самой кривой $x_d(t)$ без привлечения каких-либо других кривых для сравнения.

Первый способ формулировки не всегда удобен из-за следующих причин:

- а) Затруднительность вычисления показателей переходного процесса: времени T_0 , величины перехода Δx или максимального отклонения $|x_d|_{\max}$.
- б) Величина T_0 является весьма сложной функцией параметров системы, обладающей даже разрывами первого рода, причем эта непрерывность не имеет физической связи с динамическими свойствами системы, а связана с условностью выбора порога δ допустимого отклонения.
- в) Само задание допустимых значений T_0 и Δx еще не определяет все важные черты переходного процесса.
- г) Показатели переходного процесса существенно зависят от начальных условий для x_d , а следовательно, от характера внешнего воздействия на систему. Если требуется удовлетворить определенным требованиям при нескольких типах воздействий, то для каждого из них необходимо отдельно найти показатели переходного процесса. В этом случае громоздкость вычислений еще более возрастает.

При *втором способе* формулировки требований к переходному процессу задаются не какими-либо отдельными показателями переходного процесса $x_d(t)$, а требуют близости кривой $x_d(t)$ к некоторой заданной кривой $x_d^*(t)$, которая по каким-либо соображениям считается допустимой или благоприятной, либо требуют близости к одной из семейства кривых. При таком подходе иногда оказывается возможным упростить расчеты и избежать введения функций типа T_0 , зависимость которых от параметров системы сложна и содержит разрывы.

Как при первом, так и при втором способе формулировки требований часто остается в тени весьма важный вопрос: *почему* именно данные показатели T_0 и Δx либо данные типы кривых $x_d^*(T)$ являются в том или ином конкретном случае благоприятными или допустимыми. Иногда обоснование выбора этих величин или функций настолько очевидно, что не остается существенной возможности для произвола. Однако в большинстве случаев мотивировка выбора недостаточно четко вскрывается при первом и втором способах формулировки требований. Эти способы формулировки оказываются совсем неподходящими, если требуется выжать из системы максимум того, что она может дать. В этом случае улучшение показателей переходного процесса ограничивается в конечном итоге тем, что ряд координат системы или их функции не могут выйти за определенные предельные значения. Так, например, ток якоря двигателя или генератора в следящей системе не должен превышать допустимую величину во избежание чрезмерного искрения на коллекторе, перегрева якоря или слишком больших динамических усилий. Этот ток пропорционален вращающему моменту, т. е. (при отсутствии момента нагрузки) второй производной регулируемой величины — угла поворота x приемной оси. Следовательно, модуль второй производной от x должен быть ограничен, т. е.

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} \right| \leq M_2, \quad (3)$$

где $M_2 = \text{const}$. В ряде устройств и скорость вращения ротора двигателя должна быть ограничена по модулю, откуда следует

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| \leq M_1, \quad (4)$$

где $M_1 = \text{const}$. В схемах, содержащих электронный усилитель, выходное напряжение последнего $x_{\text{вых}}$ не может или не должно превзойти некоторой предельной величины x_{max}

$$|x_{\text{вых}}| \leq x_{\text{max}}. \quad (5)$$

Вообще в любой системе ее координаты x_i не могут или не должны выходить за некоторые допустимые пределы, т. е. должны быть соблюдены условия

$$A_i \leq x_i \leq B_i, \quad (6)$$

где A_i и B_i — заданные величины.

При *третьем способе* формулировки требуется, чтобы какой-либо показатель или критерий переходного процесса принимал экстремальное значение (например, процесс заканчивался возможно быстрее, либо величина $|x_d|_{\text{max}}$ была минимальна) при условии соблюдения ограничений (6), наложенных на координаты системы. При формулировке требований должны быть заданы определенные начальные условия либо некоторая область начальных условий (т. е. любые начальные условия в пределах некоторой области), а также класс задающих либо возмущающих воздействий, приложенных к системе. Третий способ формулировки требований наилучшим образом соответствует тем естественным ограничениям быстроты переходного процесса, максимального значения величины x_d и других показателей, характеризующих переходный процесс, которые имеются в конкретных системах. Он является наиболее приемлемым и часто единственно возможным при разработке *оптимальных систем*, т. е. систем, наилучших в том или ином смысле.

Изучению таких систем будут посвящены последующие главы этой книги.

Иногда требуется, определив переходный процесс в заданной системе, узнать, удовлетворяет ли он предъявляемым требованиям. Однако такая

задача — задача анализа — нетипична. Чаще требуется решить активную задачу — так подобрать параметры системы, чтобы удовлетворить предъявляемым требованиям. Нередко система заранее вообще не задана и требуется создать такую систему (или ее часть), чтобы предъявляемые к ней требования удовлетворялись. Именно эта задача — задача синтеза — в настоящее время становится важнейшей. Эта задача является, однако, наиболее трудной. Поэтому ниже будут рассмотрены главным образом задачи, связанные с анализом и выбором параметров. Однако ряд понятий и методов исследования, вводимых с целью анализа, необходим и при синтезе систем.

Единственный точный теоретический метод изучения всех деталей кривой переходного процесса состоит в вычислении этой кривой и изображении ее в виде графика $x_d(t)$. Для определения $x_d(t)$ в линейной системе нужно вычислить корни характеристического уравнения, определить постоянные интегрирования из начальных условий и затем начертить кривую $x_d(t)$, по которой можно определить показатели переходного процесса. Для того чтобы выяснить влияние параметров системы на показатели переходного процесса, необходимо построить ряд кривых для различных комбинаций параметров системы. В общем случае невозможно получить аналитическое соотношение между временем переходного процесса или величиной перехода Δx и параметрами системы. Поэтому нет возможности выяснить влияние параметров без промежуточных, часто весьма громоздких и «слепых» числовых подсчетов. Даже найдя в результате ряда проб удовлетворительные значения параметров, нельзя быть уверенным в отсутствии каких-либо иных, более благоприятных сочетаний значений параметров. Таким образом, сложная и громоздкая вычислительная работа все же не дает возможности решить задачу до конца, найти наиболее благоприятную, с какой-либо точки зрения, комбинацию значений параметров.

К тому же обычно вовсе не требуется знание всех деталей кривой $x_d(t)$. Таким образом, решение уравнения движения, снабжая нас сведениями о всех этих деталях, дает по существу больше того, что требуется для расчета.

Задача о качестве переходного процесса может рассматриваться как естественное обобщение задачи устойчивости. В задаче об устойчивости требовалось так выбрать значения параметров системы, чтобы она была устойчива, т. е. чтобы время T_0 переходного процесса было конечным. Для решения вопроса об устойчивости излишне построение кривой переходного процесса; необходимо лишь знание некоторых его черт. При исследовании качества переходного процесса требуется узнать детальнее ряд черт; однако и здесь построение кривой переходного процесса в большинстве случаев излишне.

Из изложенного выше следует, что метод решения уравнения движения, дающий для задачи о качестве переходного процесса, с одной стороны, слишком мало, а с другой стороны — слишком много, является неподходящим. Здесь целесообразен иной подход в виде косвенных методов исследования, который изложен ниже.

Непосредственное построение переходного процесса полезно при поверочных расчетах. Для этого удобно применить известные в математической и технической литературе приближенные методы построения либо воспроизвести переходный процесс на вычислительном устройстве непрерывного или дискретного действия. Ниже методы построения переходного процесса не рассматриваются.

В общем случае, как уже было указано, невозможно установить непосредственную аналитическую зависимость между параметрами системы и показателями переходного процесса. Однако можно найти некоторые выражения промежуточного характера, позволяющие «перевести мост» между параметрами системы и показателями переходного процесса. Эти

выражения носят название *косвенных критериев*. Они связаны, с одной стороны, с параметрами системы, а с другой стороны — с показателями переходного процесса. Эти взаимоотношения характеризуются схемой, изображенной на рис. 7.2.

Для того чтобы косвенные критерии могли успешно применяться, должны быть соблюдены два условия:

а) Связь косвенных критериев с параметрами системы должна быть простой. Значения косвенных критериев в функции параметров системы должны определяться сравнительно простыми способами, без решения характеристического уравнения и построения кривой $x_d(t)$.



Рис. 7.2.

б) Связь косвенных критериев с показателями переходного процесса должна быть явственной. Косвенные критерии должны определенным образом характеризовать некоторые важные черты переходного процесса. Желательно, чтобы значения косвенных критериев позволяли сделать какие-либо точные, строгие заключения о характере переходного процесса.

Имеются следующие основные группы косвенных критериев:

- а) частотные критерии;
- б) критерии распределения корней;
- в) интегральные критерии.

Не следует рассматривать каждую из групп косвенных критериев как совершенно изолированную. Так как все они связаны с переходным процессом, то существует и связь между различными группами критериев. Эта связь, а также связь косвенных критериев с переходным процессом имеет характер неравенств, как указано ниже.

§ 2. Частотные методы

Частотные характеристики позволяют исследовать не только устойчивость систем, но и характер переходных процессов в устойчивых системах. Действительно, они дают возможность определить Фурье-изображение выходной величины системы по заданному Фурье-изображению входной величины. Между тем знания Фурье-изображения или частного спектра функции в принципе достаточно для определения всех свойств оригинала — функции времени. Весьма важно уметь узнавать ряд свойств оригинала непосредственно по характеру Фурье-изображения.

Рассмотрим комплексный коэффициент передачи $W(j\omega)$ некоторой системы

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (1)$$

Здесь функция $A(\omega)$ — амплитудная частотная характеристика системы, а $\varphi(\omega)$ — ее фазовая частотная характеристика, $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — действительная и мнимая частотные характеристики. Особенно важна характеристика $A(\omega)$. На рис. 7.3 показана для примера кривая $A(\omega)$ для системы автоматического регулирования, в которой требуется поддерживать равенство между входной и выходной величинами системы. Таким образом, идеальное значение $A(\omega)$ равно единице для любых частот входных воздействий. Это значение показано пунктиром на рис. 7.3. В любой реальной системе

кривая $A(\omega)$, близкая к единице при малых частотах ω , начинает заметно отличаться от единицы при более высоких частотах (см. сплошную кривую на рис. 7.3). В ряде систем при приближении $A(\omega)$ к некоторому значению $\omega = \omega_m$ величина $A(\omega)$ возрастает до значения $A_m > 1$, а затем быстро спадает при дальнейшем увеличении ω . При $\omega > \omega'_m$ величина $A(\omega) < 1$. Частоту ω'_m , называемую иногда *частотой среза*, считают меритом полосы частот, пропускаемых системой, так как при $\omega > \omega'_m$ величина $A(\omega)$ обычно быстро падает. Максимум A_m амплитудной частотной характеристики и ширина ω'_m полосы частот, пропускаемых системой, являются важными косвенными критериями, по которым можно судить о поведении систем при переходных процессах. В результате изучения ряда примеров выяснилось, что

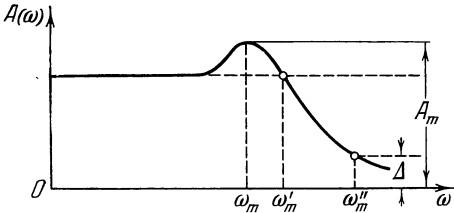


Рис. 7.3.

обычно при высоте резонансного пика A_m , превышающей $1,2 \div 1,3$, в переходном процессе выявляются заметные и слабо затухающие колебания частоты, близкой к ω_m . Поэтому величины A_m обычно ограничивают условием

$$A_m \leq 1,2 \div 1,3. \tag{2}$$

Далее, чем шире полоса частот, пропускаемых системой, тем быстрее, при прочих равных условиях, проис-

ходящие в ней процессы. Для доказательства этого положения учтем, что передаточная функция $W(p)$ системы есть *LK*-изображение (изображение Лапласа — Карсона) переходной функции $h(t)$, т. е.

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt. \tag{3}$$

Изображение функции $h(t/a)$, очевидно, выражается формулой

$$p \int_0^{\infty} h\left(\frac{t}{a}\right) e^{-pt} dt = ap \int_0^{\infty} h\left(\frac{\tau}{a}\right) e^{-ap\left(\frac{\tau}{a}\right)} \frac{d\tau}{a} = ap \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-a\tau p} d\tau = W(ap). \tag{4}$$

Здесь $\tau = \frac{t}{a}$. Заменяя p через $j\omega$, находим, что переходной функции $h(t/a)$ соответствует комплексный коэффициент передачи

$$W(aj\omega) = A(a\omega) e^{j\varphi(a\omega)}. \tag{5}$$

Теперь сопоставим переходные функции $h(t)$ и $h(t/a)$ с соответствующими им амплитудными частотными характеристиками $A(\omega)$ и $A(a\omega)$ (рис. 7.4). Пусть, например, $a > 1$. Тогда кривая $h(t/a)$ имеет ту же форму, что $h(t)$, но процесс совершается в a раз медленнее (ср. рис. 7.4, а и б). Между тем кривая $A(a\omega)$, имея ту же форму, что и кривая $A(\omega)$, сжата в масштабе $a : 1$ вдоль оси абсцисс. Из рис. 7.4 видно, что при сжатии частотной характеристики процессы в системе замедляются и, наоборот, при ее расширении процессы убыстряются.

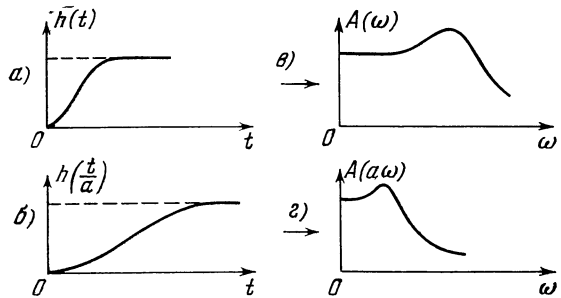


Рис. 7.4.

Существуют методы, позволяющие сравнительно быстро, используя небольшое количество вычислений, начертить примерный вид амплитудной

и фазовой характеристик системы. Эти характеристики строятся обычно в логарифмических координатах (метод логарифмических частотных характеристик). Изменяя параметры системы, можно в ряде случаев подобрать их так, чтобы частота среза ω'_m была не менее заданной величины (что обеспечивает достаточную быстроту протекания переходных процессов), а резонансный пик A_m не превышал предела (2) (что в обычных системах обеспечивает не слишком колебательный характер переходного процесса).

Связь частотных критериев с параметрами системы обычно выражается не слишком сложными формулами или графиками. Значительно сложнее связь между этими критериями и переходным процессом. Определение этой связи усложняется вследствие того, что проще строить характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$; между тем связь с переходным процессом более непосредственно проявляется у характеристик $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. Найдем эту связь. Можно показать, что входной сигнал $x_0(t)$, имеющий вид единичной функции, может быть представлен выражением

$$x_0(t) = 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Если $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ — комплексный коэффициент передачи системы, то каждая из гармоник входного сигнала $\frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$ обусловит соответствующую гармонику выходного сигнала $\frac{A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]}{\pi \omega} d\omega$. Таким образом, входному сигналу в виде единичной функции будет соответствовать выходной сигнал — переходная функция в виде

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega. \quad (6)$$

Связь между характеристиками имеет вид равенств

$$A(\omega) \cos \varphi(\omega) = P(\omega), \quad A(\omega) \sin \varphi(\omega) = Q(\omega). \quad (7)$$

Пусть, кроме того, при $\omega = 0$ величина $W(j\omega) = 1$, причем $\varphi(0) = 0$. Тогда $Q(0) = 0$ и $P(\omega) = A(\omega)$. Учитывая эти равенства и уравнения (7), можно переписать (6) в виде

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega) \cos \varphi(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega) \sin \varphi(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega = \\ &= \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как при $t < 0$ переходная функция $h(t) = 0$, а

$$\sin(-\omega t) = -\sin \omega t, \quad \cos(-\omega t) = \cos \omega t,$$

то из (8) следует при подстановке $-t$ вместо t

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (9)$$

Из уравнений (3) и (4) можно найти переходную функцию $h(t)$, выраженную через $Q(\omega)$ либо через $P(\omega)$. Например, исключая $Q(\omega)$, находим

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (10)$$

Пользуясь этим уравнением или уравнением, связывающим $h(t)$ и $Q(\omega)$, которое также легко находится из равенств (8) и (9), можно установить ряд оценок $h(t)$ по известным $P(\omega)$ или $Q(\omega)$.

Пусть, например, $P(\omega) > 0$ и $P(\omega) < P(0)$ при $\omega > 0$. Представим интеграл (10) в виде бесконечной суммы

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/t} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/t}^{2\pi/t} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega + \dots \quad (11)$$

Этот ряд знакопеременный, так как знаки его членов определяются знаком $\sin \omega t$ на заданном интервале интегрирования. Но из теории рядов известно, что сумма сходящегося знакопеременного ряда не превышает по величине значения его первого члена. Следовательно,

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/t} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \leq \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\pi/t} \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega. \quad (12)$$

Интеграл в этом выражении после подстановки $\omega t = y$, $d\omega = \frac{dy}{t}$ приводится к виду

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy = 1,85. \quad (13)$$

Из (12) и (13) находим

$$h(t) \leq \frac{2P(0)}{\pi} 1,85 = 1,18P(0). \quad (14)$$

Пусть, в частности, у замкнутой системы автоматического регулирования значение $P(0) = A(0) \approx 1$. Кроме того, в системе $h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \approx 1$, поскольку в установившемся состоянии выходная величина примерно равна входной единичной функции. Тогда величина перехода равна

$$\Delta h = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} = \frac{h_{\max} - 1}{1} \leq \frac{1,18 - 1}{1} = 0,18,$$

т. е. величина перехода меньше 18%. Итак, если $P(\omega) > 0$ и $P(\omega) < P(0)$, то гарантирована величина перехода, меньшая 18%. Если при этом $P(\omega)$ еще и монотонная функция ω , то переходный процесс аperiodический.

Используя формулу (10), можно непосредственно определить переходный процесс. Действительно, пусть функция $P(\omega)$ разложена на некоторые элементарные составляющие

$$P(\omega) = P_1(\omega) + \dots + P_n(\omega). \quad (15)$$

Тогда соответственно

$$h(t) = h_1(t) + \dots + h_n(t),$$

где

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_i(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

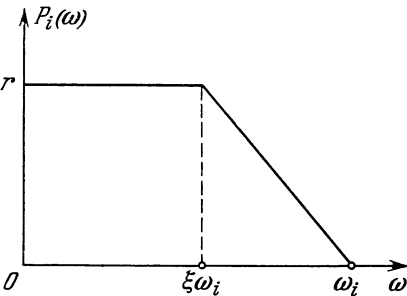


Рис. 7.5.

Пусть функция $P_i(\omega)$ имеет вид стандартной трапеции, изображенной на рис. 7.5. Тогда в этом случае

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\xi} \frac{1}{\omega} \sin \omega t \, d\omega + \int_{\xi}^1 \frac{1-\omega+\xi}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \right] = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Si } \xi + \frac{1}{1-\xi} \left[\text{Si } t - \text{Si } \xi + \frac{\cos t - \cos \xi}{t} \right] \right\}, \quad (16)$$

где $\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz$ — функция, называемая интегральным синусом.

По формуле (15) для различных ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) составлены таблицы и графики функции $h_0(\xi, t)$.

Если граничная частота ω_i и высота r не равны единице, то соответствующая функция будет равна

$$h_i(t) = r_i h_0(\xi_i, \omega_i t).$$

Всякую кривую $P(\omega)$ можно представить в виде суммы составляющих по формуле (16), где каждая составляющая имеет трапецеидальный вид (рис. 7.6). Поэтому переходная функция системы также может быть представлена как сумма

$$h(t) = \sum_{i=1}^n r_i h_0(\xi_i, \omega_i t).$$

§ 3. Методы распределения корней

Ограничимся рассмотрением входных воздействий $x_0(t)$, изображение Лапласа которых имеет вид

$$X_0(p) = \frac{M_2(p)}{N_2(p)}. \quad (1)$$

Здесь $M_2(p)$ и $N_2(p)$ — многочлены от p , причем корни многочлена $N_2(p)$ находятся в левой полуплоскости комплексной переменной. Этот класс воздействий практически охватывает все интересные для применений случаи.

Пусть передаточная функция устойчивой системы выражается формулой

$$W(p) = \frac{M_1(p)}{N_1(p)}, \quad (2)$$

где $M_1(p)$ и $N_1(p)$ — многочлены от p , причем корни $N_1(p)$ лежат в левой полуплоскости. Тогда формула для изображения $\bar{X}(p)$ выходной величины $x(t)$ системы принимает вид

$$X(p) = W(p) X_0(p) = \frac{M_2(p)}{N_2(p)} \cdot \frac{M_1(p)}{N_1(p)} = \frac{M(p)}{N(p)}. \quad (3)$$

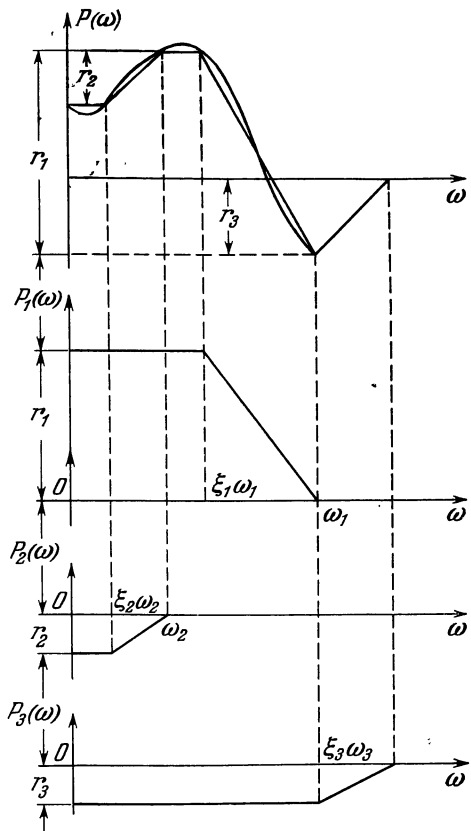


Рис. 7.6.

Здесь $M(p)$ и $N(p)$ — многочлены от p , причем корни многочлена $N(p)$ находятся в левой полуплоскости. Оригинал $x(t)$ этого изображения определяется многочленами $M(p)$ и $N(p)$, а последние задаются с точностью до постоянного множителя их нулями, т. е. корнями уравнений

$$M(p) = 0, \quad N(p) = 0. \quad (4)$$

Так, например, передаточная функция разомкнутой системы автоматического регулирования со звеньями, передаточные функции которых

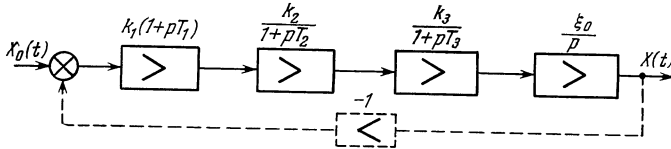


Рис. 7.7.

приведены в виде формул на рис. 7.7, определяется выражением

$$W(p) = \frac{k(1+pT_1)}{p(1+pT_2)(1+pT_3)}, \quad (5)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 \xi_0$. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_a(p) = \frac{k(1+pT_1)}{p(1+pT_2)(1+pT_3) + k(1+pT_1)}. \quad (6)$$

Если входное воздействие $x_0(t)$ — единичная функция, то ее LK — изображение $X_0(p) = 1$, и выражение (6) является изображением выходной функции, т. е. регулируемой величины $X(t)$.

Нули числителя в этом примере известны (единственный нуль равен $-1/T_1$). Полюсы же этого выражения, т. е. нули знаменателя, неизвестны. Так как многочлен, находящийся в знаменателе, является характеристическим, то его нули — это корни характеристического уравнения. Чтобы найти их, необходимо решить характеристическое уравнение; однако, как было выяснено раньше, такая процедура слишком громоздка и неудобна.

Методы распределения корней дают возможность, если известны нули изображения $X(p)$, а также некоторые сведения о расположении полюсов этого изображения на комплексной плоскости, узнать некоторые черты переходного процесса.

Оказывается, если полюсы $X(p)$ (т. е. корни уравнения $N(p) = 0$) распределены в определенных областях на комплексной плоскости, то, даже не зная самих величин полюсов, можно гарантировать соблюдение определенных условий для переходного процесса. При этом необходимо также определение или оценка нулей многочлена $M(p)$, т. е. нулей изображения $X(p)$; однако эта операция облегчается тем, что нули часто бывают известны или легко определяются, см., например, выражение (6).

Если система устойчива, то все нули многочлена $N(p)$ находятся в левой полуплоскости комплексного переменного. Чтобы получить более детальные сведения о переходном процессе, необходимо уточнить местонахождение нулей многочлена $N(p)$. Оказывается, можно, не решая характеристического уравнения и не находя его корней, для данной системы определить в левой полуплоскости некоторую область, внутри которой расположены корни уравнения $N(p) = 0$. Например, можно найти величину η — абсолютную величину действительной составляющей корня, расположенного ближе остальных к мнимой оси (рис. 7.8, а). Все корни, очевидно, находятся в заштрихованной части комплексной плоскости слева от пунктирной вертикальной линии. Величина η называется *затуханием* или *степенью*

устойчивости системы. Чем больше η , тем, вообще говоря, быстрее затухает переходный процесс.

Можно также, не решая характеристического уравнения, определить величину угла 2φ , соответствующего сектору, заштрихованному на рис. 7.8, б. Все корни лежат внутри этого вектора, причем, быть может, имеются корни и на его границе. Величина $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ носит название *колебательности*.

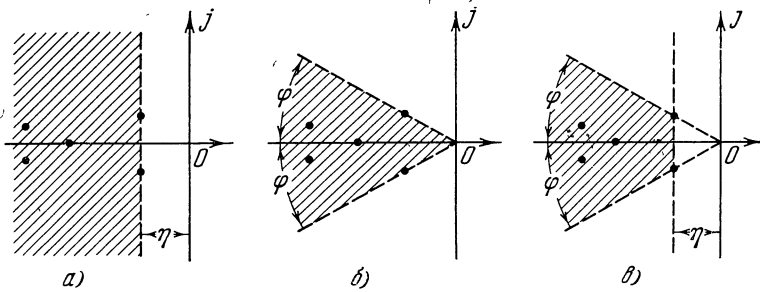


Рис. 7.8.

Как затухание, так и колебательность являются косвенными критериями переходного процесса. Совокупность η и μ определяет заштрихованную на рис. 7.8, в область, в которой находятся корни.

Рассмотрим метод определения затухания η . Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид

$$H(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{7}$$

Произведем замену переменной

$$\xi = p + \lambda, \tag{8}$$

где ξ — новая переменная, а $\lambda > 0$ — некоторое положительное число. Очевидно, мнимая ось для новой системы координат, связанной с новой переменной ξ , сдвинута на величину λ влево от старого положения мнимой оси. Подставим p из (8) в (7). Тогда уравнение примет вид

$$H(\xi - \lambda) = a_0 (\xi - \lambda)^n + \dots + a_n = 0 \tag{9}$$

или

$$H(\xi - \lambda) = b_0 \xi^n + b_1 \xi^{n-1} + \dots + b_n = 0. \tag{10}$$

Значения новых коэффициентов b_i характеристического уравнения для новой переменной ξ удобно найти, разлагая функцию $H(\xi - \lambda)$ в ряд Тейлора по ξ . Очевидно, этот ряд состоит из $(n + 1)$ членов, так как $H(\xi - \lambda)$ — многочлен. Итак,

$$H(\xi - \lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{H^{(n-k)}(-\lambda)}{(n-k)!} \xi^{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k \xi^{n-k}. \tag{11}$$

Здесь принято обозначение

$$H^{(n-k)}(-\lambda) = \left[\frac{d^{n-k} H(p)}{dp^{(n-k)}} \right]_{p=-\lambda}. \tag{12}$$

Сравнивая члены в правой и средней частях выражения (11), находим

$$b_k = \frac{H^{(n-k)}(-\lambda)}{(n-k)!}. \tag{13}$$

Например,

$$b_n = H(-\lambda) = a_0 (-\lambda)^n + a_1 (-\lambda)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (-\lambda) + a_n. \tag{14}$$

Переход от «старой» переменной p к «новой» переменной ξ , как указано выше, означает сдвиг мнимой оси *влево* на величину λ . Очевидно, что при этом корни нового уравнения получатся из корней старого сдвигом вправо на величину λ (рис. 7.9, а), т. е. они приблизятся к мнимой оси. Действительно, если некоторое число p обращает уравнение (7) в нуль, то уравнение (9) обратится в нуль при значении ξ_i , определяемом из выражения $p_i = \xi_i - \lambda$, т. е. $\xi_i = p_i + \lambda$.

Будем непрерывно увеличивать значение λ от нуля. Чем больше λ , тем больше сдвиг корней нового уравнения направо. При достаточно большом значении λ какой-либо из корней доходит до мнимой оси. Это будет

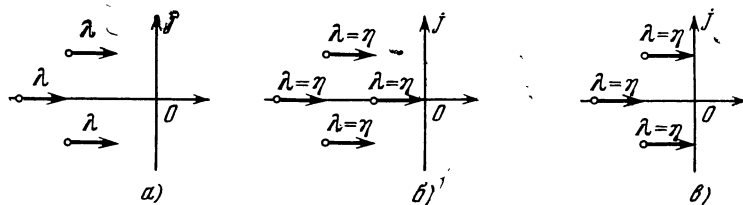


Рис. 7.9.

как раз тогда, когда $\lambda = \eta$, где η — минимальное из расстояний от корней «старого» уравнения до мнимой оси (рис. 7.8, б и в). Здесь возможны два случая.

а) Корень, раньше других дошедший до мнимой оси, действителен (рис. 7.9, в). В этом случае он равен нулю и новое уравнение (10) имеет корень, равный нулю. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы свободный член $b_n(\eta)$ нового уравнения обратился в нуль, т. е.

$$b_n(\eta) = H(-\eta) = a_0(-\eta)^n + a_1(-\eta)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (15)$$

б) До мнимой оси прежде остальных доходит пара комплексно сопряженных корней (рис. 7.9, в). В этом случае уравнение (10) имеет пару чисто мнимых корней, т. е. система с таким уравнением как бы находится на «границе устойчивости». А в этом случае, как можно строго доказать, обращается в нуль предпоследний определитель Гурвица Δ_{n-1} для новой системы, т. е. имеет место равенство

$$\Delta_{n-1}(\eta) = 0. \quad (16)$$

Какой из двух случаев имеет место в конкретном примере? Узнать это можно, увеличивая параметр η от нуля в выражениях $b_n(\eta)$ и $\Delta_{n-1}(\eta)$.

Первое из этих выражений, которое обратится в нуль, как раз и соответствует значению η , равному затуханию. Таким образом, затухание η есть наименьший из положительных действительных корней уравнений (15) и (16). Можно выразить это правило и так: затухание η есть наименьший положительный корень уравнения

$$\Delta_{n-1}(\eta) \cdot b_n(\eta) = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим пример системы третьего порядка с характеристическим уравнением

$$H(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (18)$$

Положив $p = \xi - \lambda$, переходим к уравнению

$$b_0 \xi^3 + b_1 \xi^2 + b_2 \xi + b_3 = 0, \quad (19)$$

в котором b_i являются функциями λ . Вычисление, например, по формулам (13) дает

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= a_0, & b_1 &= -3a_0\lambda + a, \\ b_2 &= 3a_0\lambda^2 - 2a_1\lambda + a_2, & b_3 &= -a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Предпоследний определитель здесь Δ_2 . Уравнение $\Delta_2 = 0$ имеет вид

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = 8a_0^2\lambda^3 + 8a_0a_1\lambda^2 - 2(a_1^2 + a_0a_2)\lambda + (a_1a_2 - a_0a_3) = 0. \quad (21)$$

Уравнение $b_3 = 0$, согласно (20), запишем в виде

$$-a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (22)$$

Задавшись конкретными значениями коэффициентов a_i , можно найти значение наименьшего положительного корня отдельно для уравнений (21) и (22). Однако удобнее производить исследование так, чтобы вообще не было

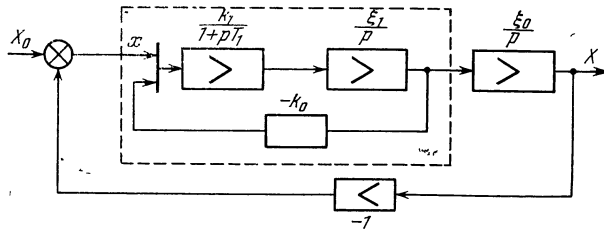


Рис. 7.10.

надобности решать уравнения. К тому же при исследовании обычно ставится вовсе не задача определения затухания для заданной системы. Как правило, задача ставится иначе; нужно так подобрать параметры системы, чтобы затухание было больше некоторой определенной заданной величины.

Рассмотрим следующую систему, структурная схема которой показана на рис. 7.10.

В этой схеме, помимо общей отрицательной обратной связи через инвертор -1 , имеется еще и местная отрицательная обратная связь с коэффициентом усиления $-k_0$, охватывающая инерционное звено с передаточной функцией $\frac{k_1}{1+pT_1}$ и интегрирующее звено с передаточной функцией ξ_1/p . Сложное звено, обведенное пунктирной линией на рис. 7.10, имеет передаточную функцию $W'(p)$, выражаемую формулой антипараллельного соединения:

$$W'(p) = \frac{\frac{k_1\xi_1}{(1+pT_1)p}}{1+k_0\frac{k_1\xi_1}{(1+pT_1)p}} = \frac{k_1\xi_1}{(1+pT_1)p+k_0k_1\xi_1}. \quad (23)$$

Следовательно, общая передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{\xi_0}{p} W'(p) = \frac{\xi_0 k_1 \xi_1}{p [(1+pT_1)p + k_0 k_1 \xi_1]} = \\ &= \frac{\xi_0}{k_0} \cdot \frac{1}{\frac{p}{k_0 k_1 \xi_1} \left[\frac{T_1}{k_0 k_1 \xi_1} p^2 + \frac{1}{k_0 k_1 \xi_1} p + 1 \right]}. \end{aligned} \quad (24)$$

Положим $\xi' = k_0 k_1 \xi_1$ и перейдем в формуле (24) от переменного p к новому переменному q по формуле

$$q = \frac{p}{\xi'} . \quad (25)$$

Можно показать, что такой переход эквивалентен переходу для оригиналов к новому масштабу времени $\tau = \xi' t$, что, впрочем, не играет роли в последующем изложении.

Для новой переменной q формула (24) приобретает вид

$$W(q) = \frac{\chi}{q(\beta q^2 + q + 1)} , \quad (26)$$

причем здесь положено

$$\chi = \frac{\xi_0}{k_0} , \quad \beta = T_1 k_0 k_1 \xi_1 = T_1 \xi' . \quad (27)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы находим, приравняв нулю сумму числителя и знаменателя выражения (26). Получаем

$$\beta q^3 + q^2 + q + \chi = 0 . \quad (28)$$

Условие устойчивости имеет вид

$$1 - \beta\chi > 0 . \quad (29)$$

Уравнение (28) есть частный случай уравнения (18), если заменить p на q , причем

$$a_0 = \beta, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = \chi . \quad (30)$$

Тогда равенства (21) и (22) можно переписать в следующем виде, заменив уже здесь λ на η ,

$$\left. \begin{aligned} 8\beta^3\eta^3 - 8\beta\eta^2 + 2(1 + \beta)\eta + (\beta\chi - 1) &= 0, \\ \beta\eta^3 - \eta^2 + \eta - \chi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Рассмотрим плоскость параметров (β, χ) (рис. 7.11). Согласно условию устойчивости (29) границей области устойчивости является гипербола $\beta\chi = 1$. Область ниже этой гиперболы представляет собой область устойчивости (ср. с рис. 4.6 и 4.7).

Начертим внутри области устойчивости линии, соответствующие постоянному значению затухания $\eta = \eta_0$. Значением η_0 задаемся. Если подставить заданное значение $\eta = \eta_0$ в уравнение (31), то получим зависимости

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{1}{\beta} + \left[\left(-8\beta^2\eta_0^3 + 8\eta_0^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \eta_0 \right) \right] , \\ \chi &= \beta\eta_0^3 - \eta_0^2 + \eta_0 . \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Начертим две кривые зависимости χ от β , соответствующие двум уравнениям (32) на плоскости χ, β . Вторая из этих линий является прямой. Пересекаясь друг с другом, эти линии выделяют две области — внутреннюю и внешнюю, отделенные друг от друга замкнутой составной кривой. Нетрудно убедиться в том, что на самой этой замкнутой кривой затухание $\eta = \eta_0$; во внутренней ее области $\eta > \eta_0$, а во внешней области $\eta < \eta_0$. Замкнутые кривые для ряда значений $\eta = \eta_0$ показаны на рис. 7.11.

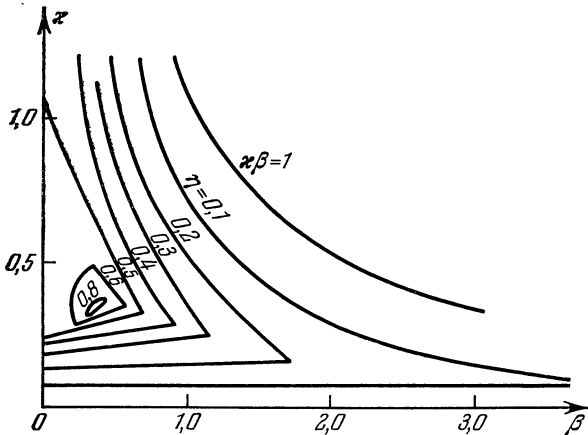


Рис. 7.11.

Рассматривая полученное разбиение области устойчивости на подобласти, можно установить, в каком направлении следует изменить параметры, чтобы добиться требуемого либо наибольшего возможного значения затухания η . Например, из кривых рис. 7.11 видно, что наибольшее значение затухания $\eta = 1$ получается лишь в одной точке плоскости (β, χ) , при $\beta = \frac{1}{3}$ и $\chi = \frac{1}{3}$. Те значения параметров, при которых η максимально, называют иногда оптимальными значениями (в смысле максимума затухания).

Существуют различные варианты применения методов распределения корней. Например, иногда задаются значениями корней. Так как последние связаны известными формулами Виета с коэффициентами характеристического уравнения, то удается таким путем связать

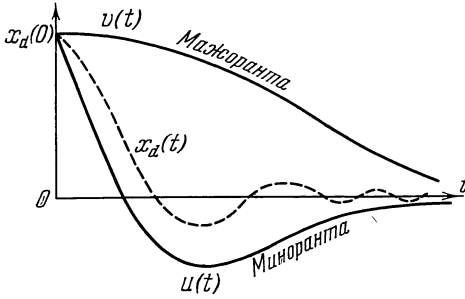


Рис. 7.12.

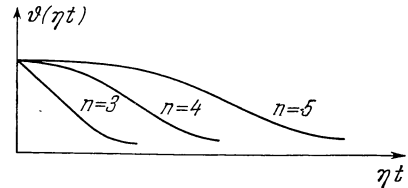


Рис. 7.13.

значения корней с параметрами системы. В графо-аналитических вариантах методов распределения корней используют годографы движения корней на комплексной плоскости при изменении какого-либо параметра системы, например коэффициента усиления (см. литературу к данной главе).

Все указанные выше методы касаются первой части задачи — связи между корнями многочленов и параметрами системы. Значительно сложнее вторая часть задачи — исследование связи между распределением корней и характером переходного процесса.

Пусть, например, входное воздействие представляет собой единичную функцию и его ЛК-изображение $X_0(p) = 1$. Вместо нулей и полюсов изображения $X(p)$ можно говорить о корнях характеристического уравнения $N(p) = 0$ и о начальных условиях для переходной составляющей $x_d(t)$ погрешности $x(t) = x_0(t) - x_d(t)$, так как их совокупность вполне определяет решение $x_d(t)$. Оказывается, что по значениям косвенных критериев η и μ можно определить две кривые: *мажоранту* $v(t)$ и *миноранту* $u(t)$, «окаймляющие» сверху и снизу кривую переходного процесса, причем

$$u(t) \leq x_d(t) \leq v(t). \tag{33}$$

Эти кривые изображены на рис. 7.12. Если кривые $u(t)$ и $v(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, то по ним можно *оценить сверху* время переходного процесса T_0 , а также переход Δx . Например, для начальных условий

$$(x_d)_{t=0} = 1, \quad \left(\frac{d^k x_d}{dt^k}\right)_{t=0} = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1) \tag{34}$$

доказано (в предположении, что имеется не более одной пары комплексно сопряженных корней, как чаще всего и бывает), что

$$|x_d| \leq e^{-\eta t} \left[1 + \eta t + \dots + \frac{\eta^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \vartheta(\eta t). \tag{35}$$

Кривые $\vartheta(\eta t)$ раз навсегда начерчены в функции относительного времени $\tau = \eta t$, и по ним можно оценить сверху время переходного процесса. На рис. 7.13 показаны эти кривые для $n = 3, 4, 5$.

Далее для тех же начальных условий доказано, что переход Δ ограничен условием

$$\Delta \leq e^{-\pi/\mu}, \tag{36}$$

где μ — колебательность. Таким образом, зная колебательность μ , можно оценить сверху значение перехода. Итак, начертив кривые $\eta = \text{const}$ (см. пример рис. 7.11) и $\mu = \text{const}$ в плоскости параметров, можно выбрать такие значения параметров, при которых гарантировано, что время переходного процесса $T_0 < T_{0m}$, а переход $\Delta < \Delta_m$, где T_{0m} и Δ_m — некоторые заданные значения.

Рассмотрим пример. Пусть дифференциальное уравнение системы, изображенной на рис. 6.18, а, в безразмерной форме имеет вид

$$\beta \frac{d^3 x_d}{d\tau^3} + (1 + \beta) \frac{d^2 x_d}{d\tau^2} + \frac{dx_d}{d\tau} + \chi x_d = 0, \tag{37}$$

где $\tau = \frac{1}{T_1}$ — безразмерное время, $\beta = \frac{T_2}{T_1}$ — относительная постоянная времени и $\chi = \xi T_1$ — относительный коэффициент усиления.

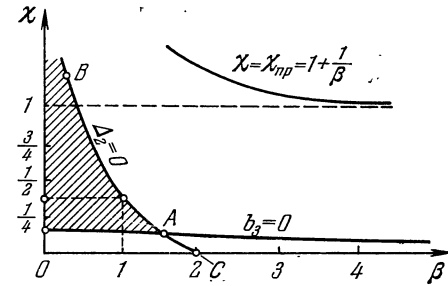


Рис. 7.14.

Требуется найти такие значения параметров β и χ , при которых затухание $\eta > 0,25$ и оценить при этих условиях время переходного процесса, если $T_1 = 0,1 \text{ сек}$.

Решение. Характеристическое уравнение системы

$$\beta p^3 + (1 + \beta) p^2 + p + \chi = 0. \tag{38}$$

Полагая $\lambda = \eta$, запишем уравнения (15) и (16):

$$\Delta_2 = -8\beta^2 \eta^3 + 8\beta(1 + \beta)\eta^2 - 2[(1 + \beta)^2 + \beta]\eta + (1 + \beta - \beta\chi) = 0 \tag{39}$$

и

$$b_3 = -\beta\eta^3 + (1 + \beta)\eta^2 - \eta + \chi = 0. \tag{40}$$

Подставляя значение $\eta = 0,25$, преобразуем уравнение (39) к виду

$$\chi = \frac{1}{2\beta} \left(1 - \frac{\beta^2}{4} \right), \tag{41}$$

а уравнение (40) — к виду

$$\chi = \frac{3}{16} \left(1 - \frac{\beta}{4} \right). \tag{42}$$

Изобразим зависимость (41) и (42) на плоскости параметров (β, χ) (рис. 7.14). Линия $\chi = \chi_{\text{пр}} = 1 + \frac{1}{\beta}$ (см. уравнение (15)) служит границей области устойчивости. В заштрихованной области затухание $\eta > 0,25$, а на отрезках AB и AC величина $\eta = 0,25$.

Уравнение (38) написано для относительного времени

$$\tau = \frac{t}{T_1}. \tag{43}$$

Для $n = 3$ при пороге допустимого отклонения $\varepsilon = 0,1$ (эту величину нужно отложить по оси ординат) находим из рис. 7.13. оценку сверху времени переходного процесса: $\eta\tau_{\text{max}} = 5,2$. Следовательно, относительное время

$$\tau_{\text{max}} = \frac{5,2}{\eta} = \frac{5,2}{0,25} = 20,8,$$

а истинное время

$$t_{\max} = \tau_{\max} \cdot T_1 = 20,8 \cdot 0,1 = 2,08 \text{ сек.}$$

Итак, при $\eta \leq 0,25$ гарантируется время переходного процесса t , меньшее 2,08 сек.

§ 4. Интегральные методы

На рис. 7.15, а изображен график $x_d(t)$ для случая монотонного переходного процесса. Площадь, заштрихованная на этом рисунке, может быть вычислена как интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} x_d dt. \tag{1}$$

Эту площадь можно считать косвенным критерием переходного процесса, $x_d(t)$. Пусть, например, форма кривой $x_d(t)$ остается той же, но меняется лишь масштаб вдоль оси t . Тогда чем быстрее протекает переходный процесс, тем меньше интеграл I_1 . Поэтому естественно считать, вообще говоря, лучшим тот процесс, для которого интеграл I_1 меньше.

Важно подчеркнуть, что величину I_1 можно найти весьма простым путем, без решения характеристического уравнения. Действительно, L -изображение $L[x_d(t)]$ функции $x_d(t)$, для определения которого не требуется решения характеристического уравнения, дается формулой

$$L[x_d(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} x_d(t) dt. \tag{2}$$

Положим здесь $p = 0$, находим

$$I_1 = \int_0^{\infty} x_d(t) dt = \{L[x_d(t)]\}_{p=0}. \tag{3}$$

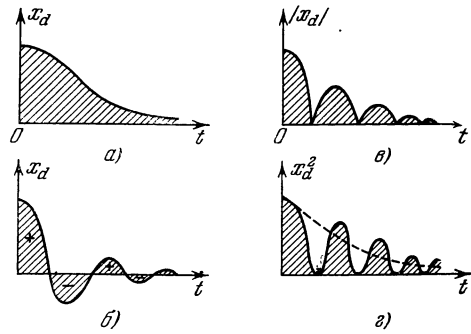


Рис. 7.15.

Таким образом, интеграл I_1 можно найти в общем виде как функцию коэффициентов уравнения либо как функцию параметров системы.

Можно найти формулу для I_1 и иным способом. Рассмотрим дифференциальное уравнение для переходного процесса $x_d(t)$

$$a_0 \frac{d^n x_d}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_d}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x_d = 0. \tag{4}$$

Проинтегрируем обе части уравнения в пределах от 0 до ∞ :

$$a_0 \int_0^{\infty} \frac{d^n x_d}{dt^n} dt + a_1 \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1} x_d}{dt^{n-1}} dt + \dots + a_n \int_0^{\infty} x_d dt = 0. \tag{5}$$

Так как интеграл от k -й производной есть $(k - 1)$ -я производная, а последний член левой части равен $a_n \cdot I_1$, то уравнение (5) можно переписать в следующем виде:

$$a_0 \{ [x_d^{(n-1)}]_{\infty} - [x_d^{(n-1)}]_0 \} + a_1 \{ [x_d^{(n-2)}]_{\infty} - [x_d^{(n-2)}]_0 \} + \dots + \dots + a_{n-1} \{ [x_d]_{\infty} - [x_d]_0 \} + a_n I_1 = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$x_d^{(k)} = \frac{d^k x_d}{dt^k}, \quad [x_d^{(k)}]_\infty = [x_d^{(k)}]_{t=\infty}, \quad [x_d^{(k)}]_0 = [x_d^{(k)}]_{t=0}. \quad (7)$$

Так как система устойчива, то значения x_d , $\frac{dx_d}{dt}$ и т. д. при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Поэтому значения этих величин при $t = \infty$ исчезают из уравнения (6). Находя I_1 из (6), приходим к формуле

$$I_1 = \frac{a_0 [x_d^{(n-1)}]_0 + a_1 [x_d^{(n-2)}]_0 + \dots + a_{n-1} [x_d]_0}{a_n}. \quad (8)$$

Таким образом, интеграл I_1 является сравнительно простой функцией коэффициентов a_i уравнения системы и начальных условий. Следовательно, можно было бы находить такие значения параметров системы, которые минимизируют значение I_1 , и считать, что эти значения являются в известном смысле наилучшими, оптимальными. Однако если переходный процесс протекает с переходом (рис. 7.15, б), то наряду с положительными участками площади, обозначенными знаком «+», имеются также и отрицательные участки, помеченные знаком «-». В этом случае величина интеграла I_1 уже не может служить удовлетворительным критерием качества переходного процесса. Минимизируя эту величину, можно прийти к процессу, в котором малое значение I_1 получается за счет того, что значительные положительные участки площади почти компенсируются близкими к ним по величине отрицательными участками. Таким образом, процесс получается резко колебательным и совершенно неудовлетворительным по своему характеру. Поэтому критерий I_1 имеет сравнительно узкую область применения, ограниченную условием заведомого отсутствия переходов через ось абсцисс.

Целесообразнее оценивать качество переходного процесса по площади кривой абсолютного значения $|x_d|$ (рис. 7.15, в), т. е. по интегралу

$$I_0 = \int_0^\infty |x_d| dt. \quad (9)$$

Однако этот интеграл в общем случае нельзя вычислить без предварительного решения характеристического уравнения и построения кривой $x_d(t)$, ввиду чего он не нашел сколько-нибудь значительного применения.

Удобнее производить оценку качества переходного процесса по площади, ограниченной кривой x_d^2 (рис. 7.15, г), т. е. по интегралу

$$I_2 = \int_0^\infty x_d^2 dt. \quad (10)$$

Этот интеграл можно вычислить, не решая характеристического уравнения и не находя кривой $x_d(t)$. Предлагались также критерии видов

$$I_{t_1} = \int_0^\infty t x_d(t) dt, \quad I_{t_2} = \int_0^\infty t^2 x_d^2(t) dt, \quad I_{t_{1,2}} = \int_0^\infty t x_d^2(t) dt. \quad (11)$$

Рассмотренные выше интегральные критерии имеют существенный недостаток: зная величину какого-либо интеграла, в общем случае нельзя высказать строгие суждения о характере переходного процесса. Мало того, нельзя, например, даже утверждать, что процесс, для которого интеграл меньше, будет обязательно лучшим. Сравним для примера две кривые $x_d^2(t)$: сплошную и пунктирную на рис. 7.15, г. Время переходного процесса для пунктир-

ной кривой то же или чуть меньше, чем для сплошной; кроме того, пунктирная кривая монотонно и плавно протекает, а поэтому более приемлема, чем сплошная кривая. Между тем интеграл I_2 меньше для сплошной кривой. Если сама кривая $x_d(t)$ не строится, а лишь вычисляется значение I_2 , причем лучшей считается та кривая, для которой величина I_2 меньше, то можно прийти к ошибочному выбору параметров. Выбор параметров, минимизирующих значение I_2 , приводит нередко к резко колебательным процессам в системе. Поэтому и критерий I_2 не получил широкого распространения.

Недостатки указанных выше критериев обусловили появление иного интегрального критерия

$$I_V = \int_0^{\infty} V dt. \quad (12)$$

Здесь V — квадратичная форма от переменных, характеризующих состояние системы, например от величины x_d и ее производных. Примером квадратичной формы может явиться функция

$$V = x_d^2 + \gamma_1 \left(\frac{dx_d}{dt} \right)^2 + \dots + \gamma_n \left(\frac{d^n x_d}{dt^n} \right)^2. \quad (13)$$

Интеграл I_V называется обобщенным интегральным критерием. В простейшем случае интеграл I_V принимает вид

$$I_V = \int_0^{\infty} \left[x_d^2 + T^2 \left(\frac{dx_d}{dt} \right)^2 \right] dt, \quad (14)$$

где $T = \text{const}$. Физический смысл критерия I_V , например в той простейшей его форме, которая дана выражением (14), состоит в следующем. Выбирая параметры так, чтобы минимизировать интеграл I_V , мы запрещаем длительное существование значительных отклонений x_d (иначе составляющая $\int_0^{\infty} x_d^2 dt$ интеграла I_V будет велика), но также запрещаем и длительное существование больших значений производных $\frac{dx_d}{dt}$ (иначе составляющая $\int_0^{\infty} \left(\frac{dx_d}{dt} \right)^2 dt$ интеграла I_V будет велика). Таким образом, получается не только быстрый, но и плавный (без больших значений производных, т. е. без резких колебаний) переходный процесс.

Чем больше значение T в выражении (14), тем больше роль второго слагаемого; тем более плавные, но зато и более медленные процессы получаются при подборе параметров системы, дающих минимум критерию I_V .

Если $X_d(j\omega)$ — Фурье-изображение переходного процесса $x_d(t)$, то, согласно формуле Рэйли, имеет место зависимость

$$I_2 = \int_0^{\infty} [x_d(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_d(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X_d(j\omega)|^2 d\omega. \quad (15)$$

Итак, интеграл I_2 можно определить, вычисляя площадь кривой $|X_d(j\omega)|^2$ — квадрата амплитудного частотного спектра переходного процесса. Между тем последний можно найти, не решая предварительно характеристическое уравнение. Сходным путем можно найти и интеграл I_V . Однако существуют более удобные методы нахождения этих интегралов.

Эти методы приводят к формулам, в которых интеграл I_V и в частном случае интеграл I_2 представляется в виде дробно-рациональной функции коэффициентов дифференциального уравнения и квадратичной формы от начальных условий.

Рассмотрим уравнения устойчивой системы, записанные в каноническом виде (любое уравнение n -го порядка можно заменить n уравнениями первого порядка и привести его к каноническому виду)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k. \quad (16)$$

Здесь a_{ik} — действительные постоянные величины, а x_1, \dots, x_n — координаты системы. Пусть квадратичная форма V под интегралом (12) задана в следующем виде:

$$V(t) = \sum_{k=1}^n A_k x_k^2, \quad (17)$$

где $A_k > 0$. Это не наиболее общий вид квадратичной формы, так как здесь отсутствуют слагаемые типа $A_{ij} x_i x_j$ ($i \neq j$). Однако можно показать, что формула (17) охватывает все представляющие интерес случаи.

Пусть, далее, имеется вторая квадратичная форма W , связанная с квадратичной формой V соотношением

$$\frac{dW}{dt} = -V. \quad (18)$$

Как найти форму W , будет показано ниже. Общее выражение для этой квадратичной формы запишем в виде

$$W = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} x_i x_j, \quad (19)$$

где x_i и x_j — координаты системы (см. (16)). Коэффициенты B_{ij} неизвестны, и их требуется найти. В устойчивой системе все $x_j \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$W_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} W = 0. \quad (20)$$

Зная форму W , легко найти интеграл I_V . Действительно,

$$I_V = \int_0^\infty V dt = \int_{t=0}^{t=\infty} -\frac{dW}{dt} dt = - \int_{t=0}^{t=\infty} dW = [W]_\infty^0 = (W)_0 - (W)_\infty = (W)_0. \quad (21)$$

Итак, интеграл I_V равен начальному значению (в момент $t=0$) квадратичной формы W , т. е., согласно (14), выражению (19)

$$I_V = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} x_{i0} x_{j0}, \quad (22)$$

где x_{i0} и x_{j0} — начальные значения соответствующих переменных, которые известны, коль скоро известны начальные условия.

Покажем на простом примере, как определяются коэффициенты B_{ij} формы W , знание которых необходимо для вычисления интеграла по формуле (22). Пусть тракт системы автоматического регулирования состоит из последовательно соединенных интегрирующего и инерционного звеньев. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{\xi_0}{p} \cdot \frac{k_1}{1+pT} = \frac{\xi}{p(1+pT)}, \quad (23)$$

где $\xi = k_1 \xi_0$. Характеристическое уравнение замкнутой системы получаем, приравнявая нулю сумму числителя и знаменателя выражения (23)

$$Tp^2 + p + \xi = 0. \quad (24)$$

Следовательно, уравнение для переходной погрешности x_d имеет вид

$$T \frac{d^2 x_d}{dt^2} + \frac{dx_d}{dt} + \xi x_d = 0. \quad (25)$$

Для упрощения выкладок перейдем теперь к относительному времени

$$\tau = \frac{t}{T}. \quad (26)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_d}{dt} &= \frac{dx_d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx_d}{d\tau} \frac{1}{T}, \\ \frac{d^2 x_d}{dt^2} &= \frac{d^2 x_d}{d\tau^2} \frac{1}{T^2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

то, подставив эти выражения в уравнение (25), приходим к уравнению для относительного времени

$$\frac{d^2 x_d}{d\tau^2} + \frac{dx_d}{d\tau} + \chi x_d = 0, \quad (28)$$

где

$$\chi = \xi T. \quad (29)$$

Уравнение (28) можно заменить двумя уравнениями первого порядка. Положим, например,

$$\left. \begin{aligned} x_d &= x_1, \\ \frac{dx_d}{d\tau} &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Тогда уравнение (28) принимает вид

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -\chi x_1 - x_2. \quad (31)$$

Второе из уравнений (30) и уравнение (31) дают как раз требуемую совокупность уравнений:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -\chi x_1 - x_2. \quad (32)$$

Пусть, например, требуется произвести расчет с помощью квадратичной формы

$$V = x_1^2 + \gamma x_2^2 = x_d^2 + \gamma \left(\frac{dx_d}{d\tau} \right)^2. \quad (33)$$

Следовательно, требуется найти интеграл

$$I_V = \int_0^{\infty} V d\tau = \int_0^{\infty} \left[x_d^2 + \gamma \left(\frac{dx_d}{d\tau} \right)^2 \right] d\tau. \quad (34)$$

Здесь γ — какая-либо заданная величина. Вспомогательная квадратичная форма W может быть в данном случае записана в виде

$$W = B_{11} x_1^2 + 2B_{12} x_1 x_2 + B_{22} x_2^2. \quad (35)$$

Коэффициенты B_{11} , B_{12} и B_{22} этой формы пока еще неизвестны. Найдя их и зная начальные условия

$$x_1 = (x_d)_{\tau=0}, \quad x_2 = \left(\frac{dx_d}{d\tau} \right)_{\tau=0}, \quad (36)$$

можно вычислить интеграл I_V по формуле (22)

$$I_V = \int_0^{\infty} V d\tau = B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1x_2 + B_{22}x_2^2. \quad (37)$$

Чтобы найти B_{ij} , запишем выражение (18) в развернутом виде, учитывая, что W есть функция двух переменных x_1 и x_2 (см. (35)), а последние зависят от времени τ . Поэтому

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{d\tau}, \quad (38)$$

и выражение (18) можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} = -V. \quad (39)$$

Подставим сюда $\frac{dx_1}{d\tau}$, $\frac{dx_2}{d\tau}$ и V из формул (32) и (33), а также учтем, что согласно (35) частные производные функции W равны

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2(B_{11}x_1 + B_{12}x_2), \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 2(B_{12}x_1 + B_{22}x_2). \quad (40)$$

После подстановки всех этих выражений в (39) найдем

$$2(B_{11}x_1 + B_{12}x_2)x_2 + 2(B_{12}x_1 + B_{22}x_2)(-\gamma x_1 - x_2) = -x_1^2 - \gamma x_2^2. \quad (41)$$

В этом выражении нужно так подобрать B_{ij} , чтобы равенство было справедливо для любых значений x_1 и x_2 . Так как и справа и слева в этом равенстве находятся многочлены от x_1 и x_2 , то оно обратится в тождество лишь при условии равенства соответствующих коэффициентов в правой и левой частях. Приравнявая коэффициенты при x_1^2 , x_2^2 и x_1x_2 в двух частях равенства (41), получаем три уравнения:

$$-2\gamma B_{12} = -1, \quad 2B_{12} - 2B_{22} = -\gamma, \quad 2B_{11} - 2B_{12} - 2\gamma B_{22} = 0. \quad (42)$$

Из этих уравнений можно найти три неизвестных: B_{11} , B_{12} , B_{22} , которые оказываются равными

$$B_{12} = \frac{1}{2\gamma}, \quad B_{22} = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2\gamma}, \quad B_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 + \gamma \right). \quad (43)$$

Пусть для примера начальные условия (36) имеют конкретные значения

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0. \quad (44)$$

Тогда из равенств (33), (37) и (43) находим

$$I_V = \int_0^{\infty} (x_1^2 + \gamma x_2^2) d\tau = B_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 + \gamma \right). \quad (45)$$

В частном случае при $\gamma = 0$ получаем

$$I_2 = \int_0^{\infty} x_1^2 d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right). \quad (46)$$

В формуле (46) для I_V можно так подобрать значение параметра γ , чтобы минимизировать это выражение. Условие

$$\frac{\partial I_V}{\partial \gamma} = 0 \quad (47)$$

в развернутом виде сводится к равенству

$$-\frac{1}{\gamma^2} + \gamma = 0. \quad (48)$$

Отсюда находим оптимальное значение $\chi_{\text{опт}}$, дающее минимум интегралу (45):

$$\chi_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \tag{49}$$

Минимизация интеграла I_2 ($\gamma = 0$) дает значение $\chi_{\text{опт}} = \infty$, что соответствует чрезмерно колебательному процессу.

Всю изложенную выше методику вывода формул можно распространить на уравнения любого порядка. Можно также раз навсегда решить систему уравнений типа (42) для любого порядка и получить общие расчетные формулы для коэффициентов B_{ij} в формуле (22) для интеграла I_V . Формулы выведены для уравнения n -го порядка (4), причем переменные x_1, x_2, \dots, x_n в формуле (17) имеют следующий смысл:

$$x_1 = x_d; \quad x_2 = \frac{dx_d}{dt}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{d^{n-1}x_d}{dt^{n-1}}. \tag{50}$$

В формулах (19) и (22) коэффициенты $B_{ij} = B_{ji}$. Оказывается, далее, что все коэффициенты B_{ik} , у которых $k < n$, можно выразить через коэффициенты B_{jn} , у которых последним индексом служит n , по формулам

$$\left. \begin{aligned} B_{1,k} &= \frac{A_1 a_{n-k}}{2a_n} + B_{k+1,n} \frac{a_n}{a_0}, \\ B_{j,n-1} &= \sum_{m=0}^{m=l} (-1)^m B_{j-m,n} \frac{a_{l-m}}{a_0} - (-1)^l \sum_{m=0}^{m=l-1} (-1)^m B_{n-m,n} \frac{a_{n-j+l-m}}{a_0}. \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

В этих формулах следует считать $B_{kn} = 0$ при $k < 1$ и $a_k = 0$ при $k > n$.

В свою очередь величины B_{kn} можно найти по формулам

$$B_{kn} = \frac{\Delta_k}{\Delta} \frac{a_0}{2}, \tag{52}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \tag{53}$$

(можно показать, что определитель Δ — это последний из определителей Гурвица), а Δ_k получается из Δ заменой k -го столбца в определителе Δ столбцом

$$(-1)^{k+1} A_1, \quad (-1)^{k+2} A_2, \quad \dots, \quad (-1)^{k+n} A_n. \tag{54}$$

Найдем в качестве примера значение интеграла I_V для системы с характеристическим уравнением (28) § 3 при начальных условиях

$$x_{d0} = 1, \quad \left(\frac{dx_d}{d\tau}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2x_d}{d\tau^2}\right)_0 = 0. \tag{55}$$

Пусть для этой системы требуется определить интеграл

$$I_V = \int_0^\infty \left\{ x_d^2 + T'^2 \left(\frac{dx_d}{d\tau}\right)^2 + 0,25T'^4 \left(\frac{d^2x_d}{d\tau^2}\right)^2 \right\} d\tau. \tag{56}$$

Коэффициенты A_i для этого интеграла равны

$$A_1 = 1, \quad A_2 = T'^2, \quad A_3 = 0,25T'^4, \tag{57}$$

а коэффициенты характеристического уравнения имеют значения, определяемые равенствами (30) § 3. Из формул (22), (45), (49), (52), (53) следует

$$I_V = B_{11} = \frac{A_1 a_2}{2a_3} + B_{23} \frac{a_3}{a_0} = \frac{a_2}{2a_3} + \frac{0,25T'^4 a_3^2 + T'^2 a_1 a_3 + a_1^2}{2(a_2 a_1 - a_0 a_3)}. \tag{58}$$

Подставляя сюда значения a_i из (56), находим

$$I_V = \frac{1}{2\chi} + \frac{0,25T^4\chi^2 + T^2\chi + 1}{2(1-\beta\chi)}. \tag{59}$$

В силу условия устойчивости (28) § 3 знаменатель последней дроби в этом выражении положителен, и интеграл I_V имеет конечное значение.

Критерий I_V принципиально отличается от критериев I_0, I_1, I_2 тем, что дает возможность по величине I_V составить строгое суждение о некоторых чертах переходного процесса. Для любой конкретной квадратичной формы V под знаком интеграла I_V и определенных начальных условий можно найти некоторую кривую $x_d(t)$, дающую минимальное значение интегралу I_V . Эта кривая находится по законам вариационного исчисления и называется *экстремалью*. Например, для интеграла (36) при начальном значении $x_{d0} = 1$ экстремаль представляет собой экспоненту

$$x_d^*(t) = e^{-t/T}. \tag{60}$$

При $x_d(t) = x_d^*(t)$ интеграл I_V принимает минимальное значение $I_V^* = T$.

Наличие экстремали не объясняет, однако, в чем принципиальное отличие обобщенного интегрального критерия I_V от интегралов I_0, I_1, I_2 . Ведь,

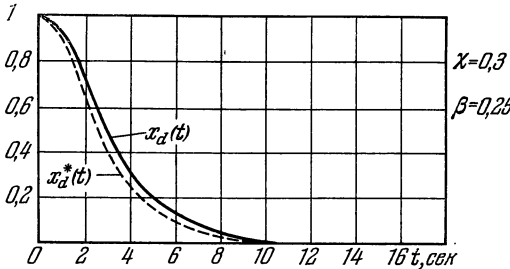


Рис. 7.16.

например, и для интеграла I_2 существует экстремаль. Очевидно, что его наименьшее значение, равное нулю, достигается в том случае, когда эта экстремаль имеет вид $x_d^*(t) \equiv 0$ при $t > 0$.

Принципиальное развитие между I_V и I_2 заключается в следующем: сколь бы ни был мал интеграл I_2 , все же нельзя утверждать, что в любой момент времени значение x_d достаточно мало. Между тем, если значение интеграла I_V

достаточно близко к минимальному значению I_V^* , то функция $x_d(t)$ в любой момент времени сколь угодно близка к экстремали $x_d^*(t)$.

Таким образом, подбирая параметры так, чтобы минимизировать I_V и сделать его близким к I_V^* , можно утверждать, что кривая $x_d(t)$ близка к экстремали $x_d^*(t)$ (рис. 7.16); причем нет надобности в вычислении и построении самой кривой $x_d(t)$. Достаточно лишь знать величины I_V и I_V^* . Последняя величина, а также кривая $x_d^*(t)$ вычисляются раз навсегда и соответствуют тому типу благоприятных или допустимых кривых, к которому требуется приблизить переходный процесс в рассчитываемой системе.

Обозначим

$$\varepsilon_V = I_V - I_V^* > 0 \tag{61}$$

и

$$\delta_V = \frac{I_V - I_V^*}{I_V^*} > 0. \tag{62}$$

Можно показать, что в любой момент времени справедливо неравенство

$$|u| = |x_d(t) - x_d^*(t)| < \sqrt{w\varepsilon_V} = \sqrt{\varepsilon_V I_V^* \delta_V}, \tag{63}$$

где постоянная величина w может быть найдена для любой квадратичной формы V (или для любого интеграла I_V). Например, для интеграла (14) величина $w = \frac{1}{T}$ и

$$|u| < \sqrt{\frac{\varepsilon_V}{T}}. \tag{64}$$

Пусть, например, экстремаль x_d^* должна быть решением уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 x_d^*}{dt^2} + 2d_0 \omega_0 \frac{dx_d^*}{dt} + \omega_0^2 x_d^* = 0, \quad (65)$$

где d_0 и ω_0 заданы. Положим

$$\omega_0 = \frac{1}{T_0}, \quad d_0 = \sqrt{\frac{\sigma+1}{2}}. \quad (66)$$

Тогда, как можно показать, интеграл I_V для соответствующей экстремали имеет вид

$$I_V = \int_0^{\infty} \left\{ x_d^2 + \gamma_1 \left(\frac{dx_d}{dt} \right)^2 + \gamma_2 \left(\frac{d^2 x_d}{dt^2} \right)^2 \right\} dt, \quad (67)$$

где

$$\gamma_1 = 2\sigma T_0^2, \quad \gamma_2 = T_0^4. \quad (68)$$

Например, при начальных условиях $(x_d)_0 = 1$, $\left(\frac{dx_d}{dt} \right)_0 = 0$ (метод применим при любых начальных условиях, и эти условия даны лишь для примера) минимальное значение интеграла I_V равно

$$I_V^* = T_0 \cdot \sqrt{2(1+\sigma)}. \quad (69)$$

Здесь также справедлива оценка (63), причем в данном случае величина w может быть вычислена по формуле

$$w = \frac{3\sqrt{3}}{2T_0 [2\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 3}] \sqrt{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 3}}}. \quad (70)$$

Например, при $d_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $\sigma = 0$, и из (67), (68) следует, что при том интеграл I_V принимает вид

$$I_V = \int_0^{\infty} \left\{ x_d^2 + T_0^4 \left(\frac{d^2 x_d}{dt^2} \right)^2 \right\} dt, \quad (71)$$

а из формулы (63), (69) и (70) в этом случае получается оценка

$$(u)^2 = (x_d - x_d^*)^2 < \frac{3(I_V - T_0 \sqrt{2})}{2\sqrt[4]{3}T_0}. \quad (72)$$

Если положим $d_0 = 1$, т. е. $\sigma = 1$, то оба корня характеристического уравнения экстремали становятся равными $-1/T_0$, и решение уравнения (65) можно записать в виде

$$x_d^*(t) = e^{-t/T_0} \left(1 + \frac{t}{T_0} \right). \quad (73)$$

Соответствующий интеграл I_V , согласно формулам (67) и (68), запишем в виде

$$I_V = \int_0^{\infty} \left\{ x_d^2 + 2T_0^2 \left(\frac{dx_d}{dt} \right)^2 + T_0^4 \left(\frac{d^2 x_d}{dt^2} \right)^2 \right\} dt. \quad (74)$$

Подстановка

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \frac{dx_d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx_d}{d\tau}, \quad \frac{d^2 x_d}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 x_d}{d\tau^2} \quad (75)$$

переводит этот интеграл в

$$I_V = \int_0^{\infty} \left\{ x_d^2 + T_0^2 \left(\frac{dx_d}{d\tau} \right)^2 + 0,25T_0^4 \left(\frac{d^2x_d}{d\tau^2} \right)^2 \right\} d\tau. \quad (76)$$

Этот интеграл тождествен интегралу (56) с заменой T_0 на T' . Следовательно, для интеграла (56) получаем экстремаль в виде (73), где нужно заменить t на τ согласно выражению (75), а также T_0 на T' :

$$x_d^*(\tau) = e^{\frac{\tau\sqrt{2}}{T'}} \left(1 + \frac{\tau\sqrt{2}}{T'} \right). \quad (77)$$

Минимальная величина интеграла I_V при $\sigma = 1$, согласно (69), выражается формулой

$$I_V^* = 2T'. \quad (78)$$

Из (29) и (78) следует, что относительное отклонение δ_V интеграла I_V от I_V^* равно

$$\delta_V = \frac{I_V - I_V^*}{I_V^*} = \frac{1}{4\chi T'} + \frac{0,25T'^4\chi^2 + T'^2\chi + 1}{4T'(1-\beta\chi)} - 1. \quad (79)$$

До сих пор мы не фиксировали величину T' . При увеличении T' экстремали (77), имеющие одну и ту же форму, растягиваются во времени, и переходный процесс $x_d^*(t)$ идет медленнее. Поэтому, если мы хотим добиться более быстрого процесса, следовало бы выбрать меньшее значение T' . Однако при слишком малом T' величина δ_V увеличивается; это означает, что переходный процесс $x_d(t)$ в реальной системе не может быть достаточно близким к слишком быстро затухающей экстремали. Следует так подобрать постоянную T' и изменяемый параметр χ системы (считаем относительную постоянную времени β заданной и фиксированной), чтобы при возможно меньшем значении T' обеспечить малую величину δ_V , т. е. близость процесса $x_d(t)$ к экстремали $x_d^*(t)$. Можно, например, при каждом значении χ находить «наиболее близкую» к процессу $x_d(t)$ экстремаль $x_d^*(t)$, подбирая такое значение T' , при котором δ_V минимально. Из условия

$$\frac{\partial \delta_V}{\partial T'} = 0 \quad (80)$$

находим связь между χ и T' в виде уравнения

$$\frac{3}{4}\chi^3 T'^4 + \chi^2 T'^2 - \{\chi(1-\beta) + 1\} = 0. \quad (81)$$

Из этого биквадратного уравнения получаем

$$T'^2 = \frac{-\chi^2 + \sqrt{\chi^4 + 3\chi^3 \{1 + \chi(1-\beta)\}}}{1,5\chi^3}. \quad (82)$$

Подставив это выражение в равенство (79), можно найти δ_V в функции одного лишь параметра χ и так подобрать последний, чтобы минимизировать δ_V . Если при $\beta = 0,25$ избрать, например, $\chi = 0,3$, то из уравнения (52) получим $T' = 2,12$, интеграл I_V окажется равным $I_V = 5,21$, а $I_V^* = 4,24$. Отсюда $\delta_V = 0,23$. Эта величина может уже считаться небольшой; подбором χ можно достичь еще меньшего значения δ_V ; однако при этом T' несколько увеличивается.

Можно приближенно рассчитать время переходного процесса по экстремали $x_d^*(T)$, т. е. по кривой (77) (эта кривая может быть начерчена в функции $\frac{\tau\sqrt{2}}{T'}$ раз навсегда).

Для примера на рис. 7.16 изображена действительная кривая $x_d(t)$ решения уравнения исследуемой системы при $\beta = 0,25$ и $\chi = 0,3$. Рядом построена пунктирная кривая (77) при $\frac{T'}{\sqrt{2}} = \frac{2,12}{1,414} = 1,5$, т. е.

$$x_d^*(t) = e^{-\tau/1,5} \left(1 + \frac{\tau}{1,5}\right). \quad (83)$$

Как видно из рисунка, кривые $x_d(t)$ достаточно близки.

Итак, обобщенный интегральный критерий I_V дает возможность, во-первых, положить в основу расчета ту кривую $x_d^*(t)$, к которой желательно приблизиться (второй метод формулировки требований к переходному процессу), и, во-вторых, установить, насколько удалось приблизиться к желаемой кривой. При этом не требуется находить саму кривую $x_d(t)$ переходного процесса.

Рассмотрим пример. Для системы, описываемой уравнением (37) § 3 при $\beta = 1$ и начальных условиях (34) § 3 подобрать χ так, чтобы минимизировать интеграл

$$I_V = \int_0^{\infty} \left[x_d^2 + T^2 \left(\frac{dx_d}{dt} \right)^2 \right] d\tau. \quad (84)$$

Оценить сверху приближение к экстремали $e^{-\tau/T}$ интеграла (84).

Решение. Согласно формулам (56), (57), (58)

$$I_V = B_{11} = \frac{a_{n-1}}{2a_n} + \frac{a_n}{2} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_2}{2a_3} + \frac{a_3}{2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (85)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_0a_3), \quad (86)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & -1 & 0 \\ a_1 & +T^2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_3T^2 + a_1), \quad (87)$$

и так как $a_0 = \beta$, $a_1 = 1 + \beta$, $a_2 = 1$, $a_3 = \chi$, то

$$I_V = \frac{a_2}{2a_3} + \frac{1}{2} \frac{a_1(a_3T^2 + a_1)}{a_1a_2 - a_0a_3} = \frac{1}{2\chi} + \frac{1}{2} \frac{(1+\beta)(\chi T^2 + 1 + \beta)}{1 + \beta - \beta\chi}. \quad (88)$$

Интересно отметить, что $\chi \rightarrow \chi_{пр}$ и при $\chi \rightarrow 0$ величина $I_V \rightarrow \infty$. Существует значение χ , дающее минимум I_V .

Из условия $\frac{\partial I_V}{\partial \chi}$ находим оптимальное значение χ . Оно является корнем уравнения

$$[4(1 + T^2) - 1] \chi^2 + 4\chi - 4 = 0. \quad (89)$$

Отсюда

$$\chi_{\text{опт}} = \frac{-2 + 4\sqrt{1+T^2}}{3+4T^2}. \quad (90)$$

Относительная разность (в данном случае $I_V^* = T$) равна

$$\delta_V = \frac{I_V - I_V^*}{I_V^*} = \frac{I_V}{I_V^*} - 1 = \frac{1}{2\chi T} + \frac{2 + \chi T^2}{T(2 - \chi)} - 1. \quad (91)$$

Исследование этой формулы с учетом (90) показывает, что с увеличением постоянной T (более медленно затухающая экстремаль $e^{-\tau/T}$) величина δ_V уменьшается. Поэтому нужно выбрать не слишком большое значение T , при котором значение δ_V достаточно мало. Например, положив $T = 4$,

находим

$$\chi_{\text{опт}} = \frac{-2 + 4\sqrt{1+16}}{3+4\cdot 16} = 0,217.$$

При этом

$$\delta_V = \frac{1}{2\cdot 0,217\cdot 4} + \frac{2+0,217\cdot 16}{4(2-0,217)} = 0,345.$$

Это значение несколько велико. Положим $T = 6$. Тогда

$$\chi_{\text{опт}} = \frac{-2 + 4\sqrt{1+36}}{3+4\cdot 36} = 0,15$$

и

$$\delta_V = \frac{1}{2\cdot 0,15\cdot 6} + \frac{2+0,15\cdot 36}{6(2-0,15)} - 1 = 0,225.$$

Это значение можно считать достаточно малым. Поэтому принимаем $\chi_{\text{опт}} = 0,15$. При этом кривая $x_d(t)$ достаточно близка к экстремали $e^{-t/T}$ где $T = 6$.

§ 5. Логарифмические частотные характеристики

Процесс построения амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) разомкнутой системы можно существенно ускорить, если перейти к логарифмическим масштабам и ввести так называемые логарифмические частотные характеристики звеньев и систем. При использовании метода логарифмических частотных характеристик вычисления сокращаются до минимума. Поэтому данный метод часто применяется при практических расчетах.

Метод логарифмических частотных характеристик возник при проектировании электронных усилителей с обратной связью, а затем был перенесен на системы автоматического регулирования и при этом усовершенствован.

Пусть комплексный коэффициент передачи какого-либо звена или системы имеет вид

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1)$$

Рассмотрим главное значение логарифма этого выражения

$$\ln W(j\omega) = \ln A + j\varphi = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \quad (2)$$

Назовем кривую $\ln A(\omega)$, начерченную в функции частоты ω , логарифмической амплитудной характеристикой (сокращенно ЛАХ). Обычно на графике откладывают не $\ln A(\omega)$, а пропорциональную этому выражению величину

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \cdot 0,434 \ln A(\omega), \quad (3)$$

где \lg — логарифм при основании 10. Формула (3) дает характеристику $A(\omega)$ в децибелах.

Логарифмические характеристики последовательного соединения звеньев получаются путем сложения соответствующих характеристик звеньев. Действительно, пусть комплексные коэффициенты передачи $W_1(j\omega)$ и $W_2(j\omega)$ последовательно соединенных звеньев имеют вид

$$W_1(j\omega) = A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}, \quad W_2(j\omega) = A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}. \quad (4)$$

Тогда логарифм комплексного коэффициента передачи $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ последовательного соединения принимает вид

$$\begin{aligned} \ln W(j\omega) &= \ln A(\omega) + j\varphi(\omega) = \ln [W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)] = \\ &= \ln W_1(j\omega) + \ln W_2(j\omega) = [\ln A_1(\omega) + \ln A_2(\omega)] + \\ &\quad + j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)], \end{aligned} \quad (5)$$

откуда следует

$$\ln A(\omega) = \ln A_1(\omega) + \ln A_2(\omega), \quad \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \quad (6)$$

Операция сложения ЛАХ звеньев производится весьма просто графически и не требует вычислений.

При применении логарифмических частотных характеристик можно воспользоваться чрезвычайно простым приближенным видом ЛАХ некоторых элементарных звеньев, что также упрощает расчет.

Комплексному коэффициенту передачи интегрирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{\xi}{j\omega} = \frac{\xi}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (7)$$

соответствует ЛАХ

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{\xi}{\omega} = 20 \lg \xi - 20 \lg \omega. \quad (8)$$

Фазовая характеристика $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} = \text{const}$. Из формулы (8) видно, что в данном случае ЛАХ имеет постоянную составляющую $20 \lg \xi = \text{const}$ и слагаемое $-20 \lg \omega$. Если по оси абсцисс отложить $\lg \omega$, то второе слагаемое будет линейно зависеть от абсциссы. Следовательно, график для второго слагаемого является наклонной прямой.

Если $\omega_2 = 10\omega_1$, то

$$\begin{aligned} 20 \lg \omega_2 &= 20 \lg 10\omega_1 = \\ &= 20 \lg 10 + 20 \lg \omega_1 = \\ &= 20 + 20 \lg \omega_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, приращение ординаты второго слагаемого равно 20 дБ при увеличении частоты в 10 раз. Интервал между частотами, отличающимися в 10 раз, называется *декадой*. Поэтому приращение второго слагаемого равно 20 децибелам на *декаду* и обозначается 20 дБ/дек .

На рис. 7.17, а показаны графики первого и второго слагаемых формулы (8), а также и $L(\omega)$ в функции частоты ω (кривая $L(\omega)$ показана при $\xi = 10$, т. е. $\lg \xi = 1$). При этом по оси абсцисс откладывается $\lg \omega$, но в соответствующих точках проставляются не значения $\lg \omega$, а значения самой частоты ω . Кривая $L(\omega)$ проходит при $\omega = 1$ через точку с ординатой $20 \lg \xi$ и является прямой с наклоном -20 дБ/дек . При изменении ξ эта прямая перемещается вверх или вниз.

На рис. 7.17, б показана фазовая частотная характеристика интегрирующего звена. По оси абсцисс нанесена такая же логарифмическая шкала частот, как и на рис. 7.17, а.

Для инерционного звена ЛАХ имеет вид

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \left| \frac{k}{1 + j\omega T} \right| = \\ &= 20 \lg k - 20 \lg |1 + j\omega T| = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

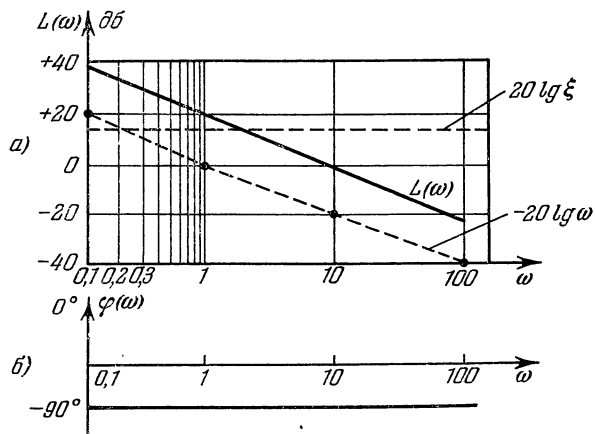


Рис. 7.17.

В областях достаточно низких и достаточно высоких частот можно заменить это выражение более простыми. При $\omega \ll 1/T$ справедливо приближение $\sqrt{1 + (\omega T)^2} \approx 1$ и

$$L(\omega) \approx 20 \lg k = \text{const.} \tag{11}$$

При $\omega \gg 1/T$ справедливо приближение $\sqrt{1 + (\omega T)^2} \approx \omega T$ и

$$L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T. \tag{12}$$

Если для частот $\omega < 1/T$ применить аппроксимацию (11), а для частот $\omega > 1/T$ — аппроксимацию (12), то график $L(\omega)$ приближенно изобразится ломаной с точкой сопряжения отрезков прямых при $\omega = 1/T$ (рис. 7.18, а).

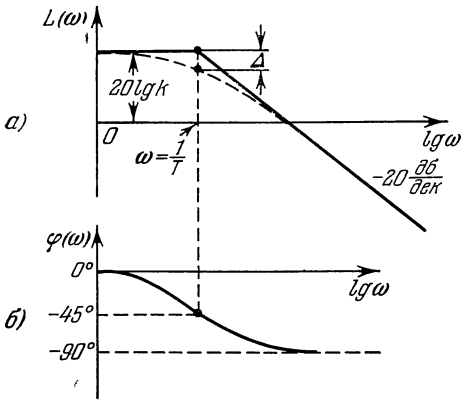


Рис. 7.18.

Точная кривая ЛАХ изображена пунктиром и заметно отличается от ломаной лишь «закруглением» при значениях ω , близких к $1/T$. Оказывается, что при $\omega = 1/T$ поправка Δ равна -3 дб . Воспользовавшись этим условием, можно провести «закругление» на глаз. Однако при менее точных расчетах оказывается достаточным приближенное представление ЛАХ в виде ломаной. На рис. 7.18, б показана фазовая частотная характеристика инерционного звена. При $\omega = 1/T$ величина $\varphi(\omega)$

равна -45° , что нетрудно получить из формулы

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T. \tag{13}$$

Для колебательного звена

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \left| \frac{k}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + 2 \frac{d_0}{\omega_0} j\omega + 1} \right| =$$

$$= 20 \lg \left| \frac{k}{T_0^2 (j\omega)^2 + 2d_0 T_0 j\omega + 1} \right| = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + (2d_0 T_0 \omega)^2}, \tag{14}$$

где

$$T_0 = \frac{1}{\omega_0}. \tag{15}$$

Рассмотрим частный случай $k = 1$, когда первое слагаемое (14) обращается в нуль. Если $k \neq 1$, то соответствующую кривую можно получить, добавляя к полученной ниже кривой слагаемое $20 \lg k$. При $k = 1$ из (14) находим

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + (2d_0 T_0 \omega)^2}. \tag{16}$$

Для области низких частот ($\omega \ll 1/T_0$) можно принять аппроксимацию

$$L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{1} = 0. \tag{17}$$

Для области высоких частот ($\omega \gg 1/T_0$), где $T_0^2 \omega^2 \gg 1$ и $(2d_0 T_0 \omega)^2 \ll \ll (T_0^2 \omega^2)^2$, можно принять

$$L(\omega) \approx -20 \lg (T_0 \omega)^2 = -2 \cdot 20 \lg T_0 \omega = -40 \lg T_0 \omega. \tag{18}$$

Итак, приближенно график ЛАХ изображается в виде ломаной (рис. 7.19, а). Левый отрезок ломаной представляет собой горизонтальную прямую, а правый имеет наклон -40 дб/дек . Частота сопряжения отрезков

$\omega_0 = 1/T_0$. Точные ЛАХ отличаются от асимптотической кривой рис. 7.19, а. Поправка Δ , которую следует добавить к асимптотической кривой для получения точной ЛАХ, показана на рис. 7.19, б в функции от $\frac{\omega}{\omega_0} = \omega T_0$ для различных значений d_0 . При $0,38 \leq d_0 \leq 0,7$ значения Δ не превосходят по абсолютной величине 3 дБ и поэтому могут не учитываться при приближенных расчетах.

Фазовая частотная характеристика колебательного звена выражается формулой

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2d_0 T_0 \omega}{1 - T_0^2 \omega^2}. \quad (19)$$

На частоте сопряжения $\omega_0 = 1/T$ величина $\varphi(\omega) = -90^\circ$.

Точные ЛАХ и фазовые частотные характеристики колебательного звена приведены на рис. 7.20 в функции от $\omega T_0 = \omega/\omega_0$.

Воспользовавшись изложенными выше методами, нетрудно построить ЛАХ и фазовую характеристику разомкнутой системы, состоящей из ряда последовательно соединенных звеньев. Пусть, например, разомкнутая система состоит из двух инерционных и одного интегрирующего звеньев, соединенных последовательно. Ее комплексный коэффициент передачи

$$W(j\omega) = \frac{\xi}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}. \quad (20)$$

Тогда ЛАХ определяется из выражения

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{\xi}{\omega \sqrt{1+(\omega T_1)^2} \cdot \sqrt{1+(\omega T_2)^2}} = \\ &= 20 \lg \xi - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1+(\omega T_1)^2} - 20 \lg \sqrt{1+(\omega T_2)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Построив график для отдельных слагаемых, нетрудно затем построить и график для всего выражения (21). Однако еще проще построить сразу общий график ЛАХ, руководствуясь следующей методикой.

1. Найдем сначала так называемые *сопрягающие частоты системы*. В данном примере сопрягающие частоты $\omega_1 = 1/T_1$ и $\omega_2 = 1/T_2$. Пусть, для определенности, $1 < \omega_1 < \omega_2$. Отложим эти частоты на оси абсцисс (рис. 7.21).

2. Проведем низкочастотную асимптоту ЛАХ. В статических системах это горизонтальная прямая (см., например, рис. 7.18, а и 7.19, а). В астатической системе с одним интегрирующим звеном эта прямая имеет наклон -20 дБ/дек из-за наличия второго слагаемого в формуле (21) (см. также рис. 7.17, а и б). Положение этой прямой определяется тем, что при $\omega = 1$ ордината равна $20 \lg \xi$. При $\omega < \omega_1$ ЛАХ остальных звеньев можно еще не принимать во внимание, т. е. оба последних слагаемых формулы (21) можно считать равными нулю.

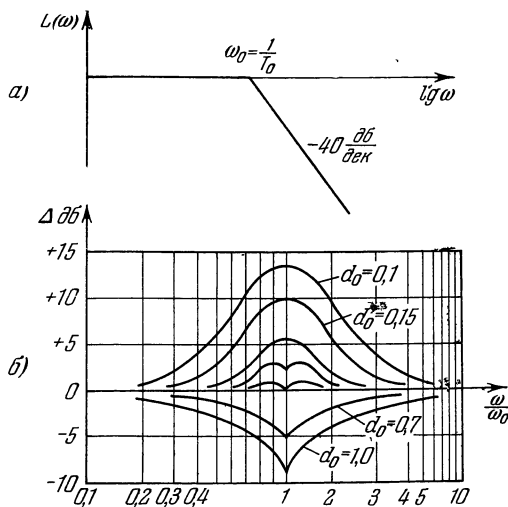


Рис. 7.19.

3. При прохождении слева направо каждой из частот сопряжения ω_c характеристика испытывает приращение наклона на -20 дб/дек , если

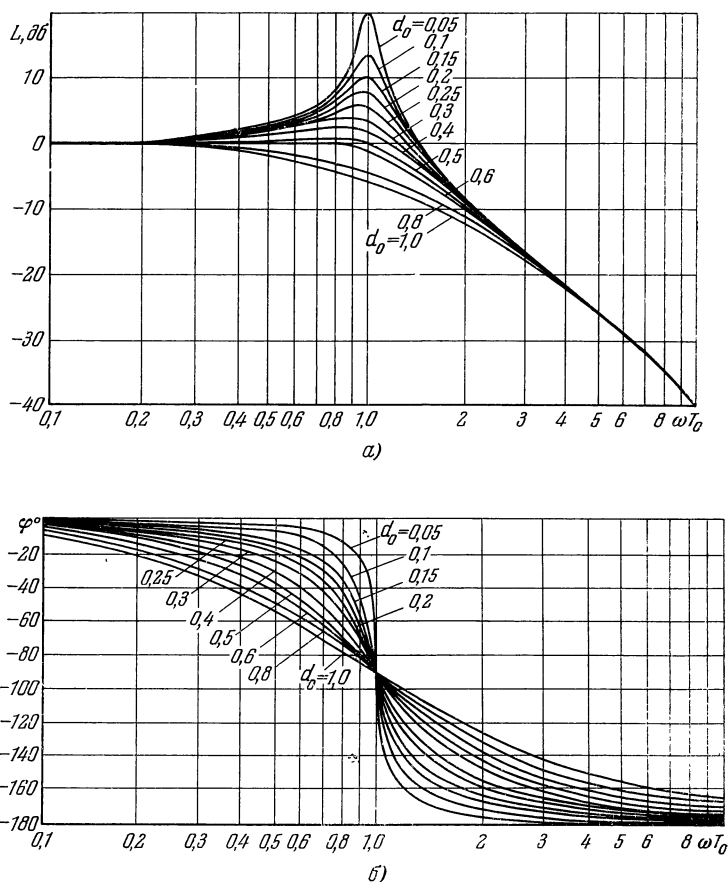


Рис. 7.20.

сопрягающая частота принадлежит сомножителю, расположенному в знаменателе передаточной функции, и на 20 дб/дек , если этот сомножитель находится в числителе передаточной функции.

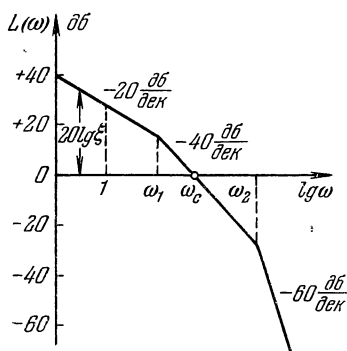


Рис. 7.21.

Например, после прохождения частоты ω_1 (см. рис. 7.21) нужно уже учесть предпоследнее слагаемое формулы (21), и наклон ЛАХ достигает -40 дб/дек . При $\omega > \omega_2$ следует учитывать все слагаемые формулы, и наклон ЛАХ становится равным -60 дб/дек . Фазовая частотная характеристика системы (ФЧХ) строится как сумма фазовых характеристик звеньев, что также почти не требует подсчетов. Таким образом, можно весьма быстро построить ЛАХ и ФЧХ разомкнутой системы.

На рис. 7.21 буквой ω_c обозначена частота, соответствующая $L(\omega) = 0$, т. е. $W(j\omega) = 1$.

§ 6. Применение логарифмических характеристик для исследования систем

Построив характеристики разомкнутой системы, можно, пользуясь ими, начертить частотные характеристики замкнутой системы и судить по этим характеристикам о системе. Можно, однако, судить о процессах в замкнутой системе и непосредственно по частотным характеристикам разомкнутой системы. Подробное изложение методов расчета систем с помощью логарифмических частотных характеристик связано с практическими приемами стабилизации и достижения нужного качества систем и поэтому выходит за рамки этой книги. Ниже рассмотрены лишь некоторые расчетные приемы, полезные при исследовании систем.

Для вывода правила суждения об устойчивости рассмотрим рис. 7.22. Воспользуемся формулировкой критерия устойчивости Найквиста. Сравним

рис. 7.22, а, на котором изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, с рис. 7.22, б и в, где показаны соответствующие логарифмические характеристики для той же системы. Каждому положительному переходу сверху вниз АФХ на рис. 7.22, а через ось абсцисс соответствует переход снизу вверх через линию $\varphi(\omega) = -180^\circ$ на характеристике $\varphi(\omega)$, который мы также назовем положительным.

Каждому отрицательному переходу АФХ через ось абсцисс соответствует переход $\varphi(\omega)$ через линию $\varphi = -180^\circ$ сверху вниз, который мы назовем отрицательным. Так как отрезок оси абсцисс слева от А на рис. 7.22, а характеризуется значениями $|W(j\omega)| > 1$ и $\ln |W(j\omega)| > 0$, то на рис. 7.22, б этому отрезку соответствуют значения $L(\omega) > 0$. Поэтому сформулированный выше критерий устойчивости можно выразить в виде следующего правила. Если разность между числами положительных и отрицательных переходов фазовой частотной характеристики $\varphi(\omega)$ через линию $\varphi = -180^\circ$ равна нулю в диапазоне частот, на котором $L(\omega) > 0$, то замкнутая система устойчива. В противном случае замкнутая система неустойчива.

Например, если ЛАХ разомкнутой системы имеет вид сплошной кривой $L(\omega)$ на рис. 7.22, б, то на участке $0 < \omega < \omega_c$ фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ имеет два перехода противоположных знаков через линию $\varphi = -180^\circ$. Поэтому замкнутая система устойчива. Если увеличить коэффициент усиления, то ЛАХ поднимается кверху; допустим, что в этом случае кривая займет положение $L_1(\omega)$. Тогда при $L_1(\omega) > 0$ кривая $\varphi(\omega)$ будет иметь один положительный и два отрицательных перехода; следовательно, замкнутая система неустойчива. В рассматриваемой системе неустойчивость может возникнуть и при уменьшении коэффициента усиления. Действительно, пусть при этом ЛАХ опустится и займет положение $L_2(\omega)$. Теперь при $L_2(\omega) > 0$ фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ имеет лишь один переход через линию $\varphi = -180^\circ$. Поэтому замкнутая система неустойчива.

Рассмотрение логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы позволяет определить также *запас устойчивости по амплитуде и по фазе* (рис. 7.23). Если увеличить в σ раз коэффициент усиления системы, то

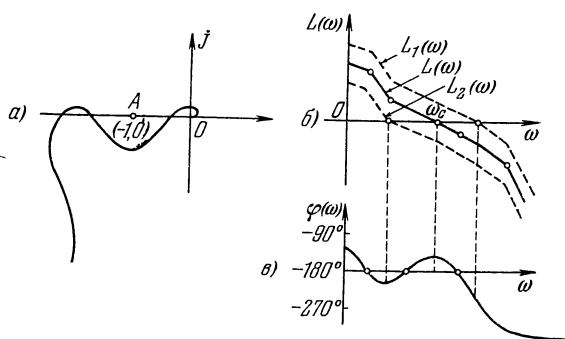


Рис. 7.22.

ее ЛАХ, представлявшая собой первоначально кривую $L(\omega)$, поднимется на $20 \lg \sigma$ и займет положение, обозначенное $L_1(\omega)$. При этом система будет находиться на границе устойчивости. Поэтому для точки B , соответствующей сдвигу фаз $\varphi = -180^\circ$, значение $W(j\omega)$ будет равно единице, а значение $L_1(\omega) = 0$. Отрезок BC , очевидно, равен σ дБ. Отсюда получается простое правило для определения σ . Найдем точку C по ЛАХ, соответствующую фазе

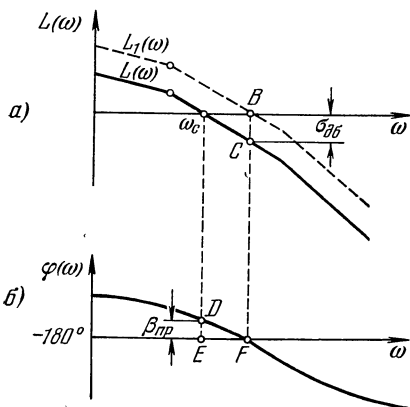


Рис. 7.23.

$\varphi(\omega) = -180^\circ$, и проведем перпендикуляр BC к оси абсцисс. Длина этого перпендикуляра равна *запасу устойчивости по амплитуде* σ , выраженному в децибелах.

Разность $\beta_{\text{пр}} = -180^\circ - \varphi$ при $\omega = \omega_c$ называется *запасом устойчивости по фазе*. Эта величина также без труда определяется как отрезок DE (рис. 7.23, б).

Из формулы (10) § 2 видно, что переходная функция замкнутой системы может быть достаточно просто получена, если известна ее вещественная частотная характеристика этой системы. Кроме того, ряд свойств замкнутой системы³ можно выяснить из рассмотрения ее амплитудной и фазовой характеристик. Обозначим через $P_3(\omega)$ и $Q_3(\omega)$ действительную и мнимую

частотные характеристики замкнутой системы, а через $A_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$ — ее амплитудную и фазовую частотные характеристики. Эти характеристики нетрудно найти по амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотным характеристикам разомкнутой системы. Действительно, комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1)$$

и комплексный коэффициент передачи замкнутой системы

$$\begin{aligned} W_3(j\omega) &= A_3(\omega) e^{j\varphi_3(\omega)} = P_3(\omega) + jQ_3(\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = \\ &= \frac{A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{1 + A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}} = \frac{A(\omega)}{e^{-j\varphi(\omega)} + A(\omega)} = \\ &= \frac{A(\omega)}{A(\omega) + \cos \varphi(\omega) - j \sin \varphi(\omega)} = \frac{A(\omega) [A(\omega) + \cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)]}{[A(\omega) + \cos \varphi(\omega)]^2 + \sin^2 \varphi(\omega)} = \\ &= \frac{A(\omega) [A(\omega) + \cos \varphi(\omega)]}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1} + j \frac{A(\omega) \sin \varphi(\omega)}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда следуют формулы

$$P_3(\omega) = \frac{A(\omega) [A(\omega) + \cos \varphi(\omega)]}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}, \quad (3)$$

$$A_3(\omega) = |W_3(\omega)| = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3(\omega) = \frac{Q_3(\omega)}{P_3(\omega)} = \frac{\sin \varphi(\omega)}{A(\omega) + \cos \varphi(\omega)}. \quad (5)$$

По этим формулам построены номограммы. Пользуясь P -номограммой (рис. 7.24), можно найти $P_3(\omega)$, воспользовавшись $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Номограмма построена по формуле (3). По оси абсцисс отложен угол $\varphi(\omega)$ в *градусах*, а по оси ординат — $A(\omega)$ в *децибелах*, так как эта величина получается

из ЛАХ. На рис. 7.24 проведены линии $P_3(\omega) = \text{const}$. Соответствующее значение $P_3(\omega)$ нанесено на кривой. Чтобы узнать $P_3(\omega)$, необходимо отложить по осям координат заданные значения $\varphi(\omega)$ и $A(\omega)$ и узнать значение P , соответствующее точке на плоскости, с заданными координатами.

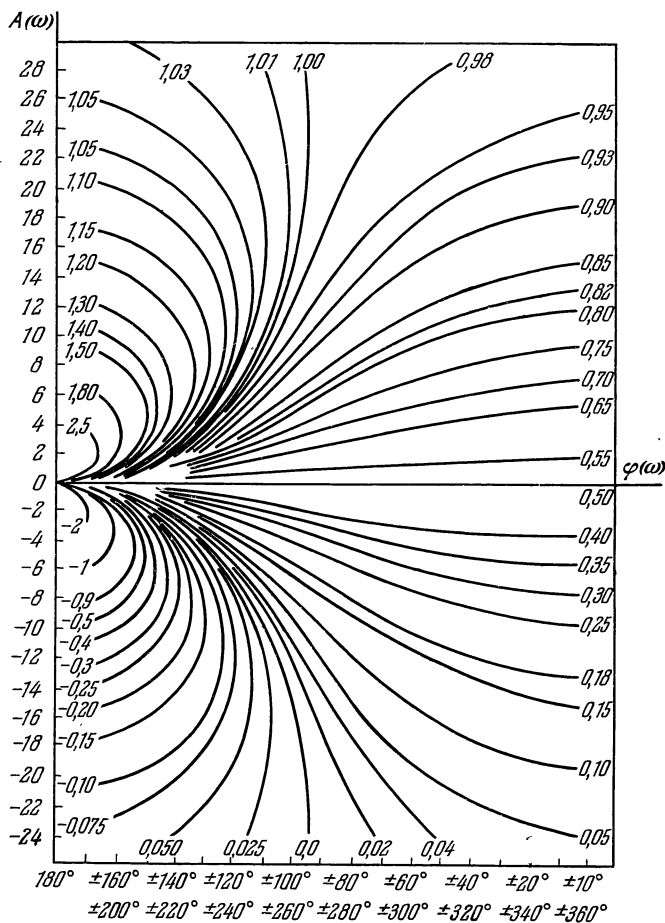


Рис. 7.24.

Из формулы (3) видно, что $P_3(\omega)$ есть функция от $\cos \varphi(\omega)$. Следовательно, поскольку $\cos \varphi = \cos (360^\circ - \varphi)$, величина $P_3(\omega)$ одна и та же для углов, равноотстоящих от 180° . Кроме того, поскольку $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, величина $P_3(\omega)$ не зависит от знака φ и одна и та же, например, для $\varphi = +20^\circ$ и $\varphi = -20^\circ$. Поэтому по оси абсцисс (внизу рис. 7.24) нанесены две группы значений градусов: $\pm \varphi$ и $\pm (360^\circ - \varphi)$.

На рис. 7.25 изображены номограммы A_3 и φ_3 , построенные, согласно уравнениям (4) и (5), на одной и той же плоскости.

Кривые $A_3(\omega) = \text{const}$ представляют собой серию линий, идущих вверх при увеличении φ . Кривые $\varphi_3(\omega)$ — это серия линий, идущих книзу. На каждой линии написано соответствующее значение $A_3(\omega)$ или $\varphi_3(\omega)$. Из формулы (5) следует, что знаки $\varphi(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$ должны быть одинаковыми. Поэтому нужно выбирать такой же знак φ_3 , отсчитанного по номограмме, какой имеется у угла φ . При $A(\omega) > 1$, т. е. $20 \lg A(\omega) > 0$, на верхней половине номограммы, как легко показать, величина $|\varphi_3| < \frac{2}{\pi}$, и следует

брать то значение φ_3 , которое нанесено на соответствующей кривой $\varphi_3(\omega) = \text{const}$. Если же $A(\omega) < 1$, т. е. $20 \lg A(\omega) < 0$, что соответствует нижней половине номограммы, то $|\varphi_3| < \pi$, если $|\varphi| < \pi$, и $|\varphi_3| > \pi$, если $|\varphi| > \pi$. Поэтому при $|\varphi| > \pi$ необходимо, отсчитывая координату φ по нижнему ряду значений на оси абсцисс, находить значение φ_3 , равное 360° минус то значение, которое нанесено на соответствующей линии

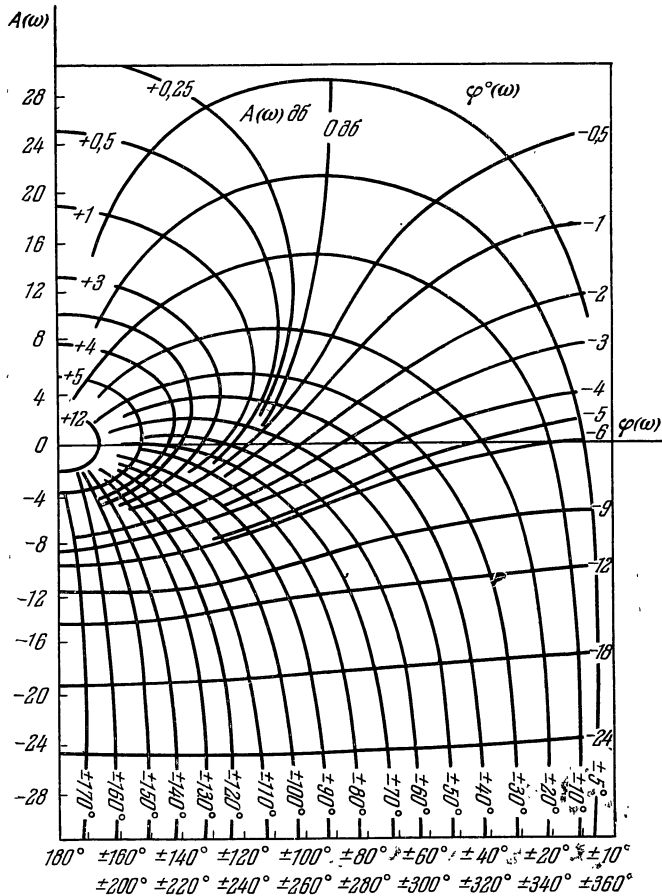


Рис. 7.25.

$\varphi_3(\omega) = \text{const}$. Например, если $A(\omega) = -10 \text{ дБ}$ и $\varphi(\omega) = +320^\circ$, то по номограмме рис. 7.25 находим $A_3(\omega) = -12 \text{ дБ}$ и $\varphi_3(\omega) = +(360^\circ - 30^\circ) = 330^\circ$. Если же $A(\omega) = -10 \text{ дБ}$ и $\varphi(\omega) = -330^\circ$, то $A_3(\omega) = 12 \text{ дБ}$ по-прежнему, но $\varphi_3(\omega) = -330^\circ$.

Указанное выше правило для определения $\varphi_3(\omega)$ легко получается из выражения (2). Действительно,

$$W_3(j\omega) = \frac{A(\omega)}{e^{-j\varphi(\omega)} + A(\omega)} = \frac{A(\omega)}{r e^{-j\varphi_3(\omega)}} = \frac{A(\omega)}{r} e^{+j\varphi_3(\omega)}, \quad (6)$$

где r — модуль знаменателя, а $-\varphi_3$ — его аргумент, причем $\varphi_3(\omega)$ — аргумент $W_3(j\omega)$. Следовательно, $-\varphi_3$ есть аргумент знаменателя:

$$-\varphi_3(\omega) = \text{Arg} \{A(\omega) + e^{-j\varphi(\omega)}\}, \quad (7)$$

или, что одно и то же,

$$\varphi_3(\omega) = \text{Arg} \{A(\omega) + e^{j\varphi(\omega)}\}. \quad (8)$$

На рис. 7.26 показаны два случая векторной диаграммы, соответствующей формуле (8). На диаграмме отложена сумма действительного положительного числа $A(\omega)$ и комплексного вектора $e^{j\varphi(\omega)}$. Последний имеет модуль, равный единице. Аргумент суммы равен $\varphi_3(\omega)$, как следует из формулы (8). На рис. 7.26, а показан случай, когда $A(\omega) > 1$. Из рассмотрения диаграммы

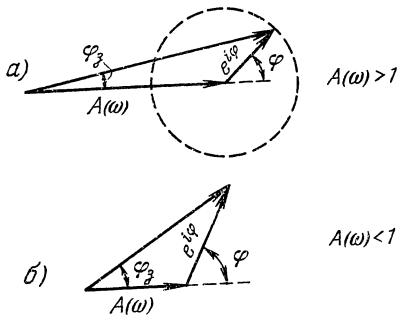


Рис. 7.26.

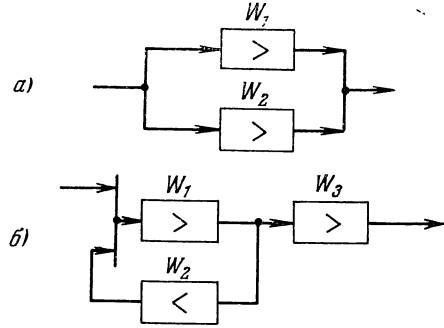


Рис. 7.27.

видно, что знаки φ и φ_3 совпадают, причем абсолютная величина φ_3 всегда меньше 90° . Если же $A(\omega) < 1$ (рис. 7.26, б), то при $|\varphi| > \pi$ величина $|\varphi_3| > \pi$, причем знаки их также совпадают.

Номограммы для определения A_3 и φ_3 можно применить не только для построения частотных характеристик замкнутой системы. В самом тракте разомкнутой системы могут встретиться местные параллельные соединения или обратные связи.

В случае местного параллельного соединения (см. рис. 7.27, а) общий комплексный коэффициент передачи

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) = W_1(j\omega) \left[1 + \frac{W_2(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right]. \quad (9)$$

Обозначим

$$\frac{W_2(j\omega)}{W_1(j\omega)} = W_0(j\omega). \quad (10)$$

Тогда

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) [1 + W_0(j\omega)]. \quad (11)$$

Зная логарифмические частотные характеристики звеньев W_1 и W_2 , нетрудно найти соответствующие характеристики $20 \lg |W_0(j\omega)|$ и $\text{Arg} \{W_0(j\omega)\}$ для величины $W_0(j\omega)$. Оказывается, что для определения аналогичных характеристик множителя формулы (11), находящегося в квадратной скобке, можно воспользоваться номограммами рис. 7.25.

Действительно,

$$W^*(j\omega) = 1 + W_0(j\omega) = \frac{1 + \frac{1}{\frac{1}{W_0(j\omega)}}}{\frac{1}{W_0(j\omega)}} = \frac{1 + W'(j\omega)}{W'(j\omega)} = \left[\frac{W'(j\omega)}{1 + W'(j\omega)} \right]^{-1} = [W_3(j\omega)]^{-1}, \quad (12)$$

где

$$W'(j\omega) = \frac{1}{W_0(j\omega)}. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) показывают, каким образом можно, зная $[A_0]_{\partial\delta}$ и φ_0 для характеристики $W_0(j\omega)$, получить $[A^*]_{\partial\delta}$ и φ^* для характеристики $W^*(j\omega)$. Сначала определяются $[A']_{\partial\delta}$ и φ для $W'(j\omega)$ по очевидным формулам

$$[A']_{\partial\delta} = -[A_0]_{\partial\delta}, \quad \varphi' = -\varphi_0. \quad (14)$$

Поскольку $W_3(j\omega)$ получается из $W'(j\omega)$ таким же путем, каким $W_3(j\omega)$ получается из $W(j\omega)$ в формуле (2), для получения A_3 и φ_3 частотных характеристик W_3 можно применить номограммы рис. 7.25, введя туда, согласно формуле (14), не A_0 и φ_0 , а $-A_0$ и $-\varphi_0$. Получив A_3 и φ_3 , можно затем найти A^* и φ^* , исходя из выражения (12):

$$[A^*]_{\partial\delta} = -A_3, \quad \varphi^* = -\varphi_3. \quad (15)$$

Теми же номограммами можно воспользоваться, если требуется определить величину

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{1 + W_0(j\omega)}, \quad (16)$$

которая может встретиться в расчетах.

Действительно, если имеется местная обратная связь (рис. 7.27, б), то для комплексного коэффициента передачи разомкнутой цепи справедлива формула

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)} W_3(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + W_0(j\omega)} \right) W_1(j\omega) W_3(j\omega), \quad (17)$$

где

$$W_0(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega). \quad (18)$$

Сомножитель в скобке формулы (17) представляет собой выражение (16). В этом случае, вводя $W'(j\omega)$ по формуле (13), преобразуем выражение (16)

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{W'(j\omega)}} = \frac{W'(j\omega)}{1 + W'(j\omega)}, \quad (19)$$

т. е. получаем такую же связь между $W'(j\omega)$ и $W^*(j\omega)$, какая отражается формулой (2). Отсюда следует, что, найдя предварительно характеристики для $W'(j\omega)$ по формулам (14), можно затем воспользоваться номограммами A_3 и φ_3 (см. рис. 7.25) для получения A^* и φ^* частотных характеристик:

$$[A^*]_{\partial\delta} = A_3, \quad \varphi^* = \varphi_3. \quad (20)$$

Можно воспользоваться также (P, Q) -номограммой для действительной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ характеристик, получаемых из $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ согласно формулам

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (21)$$

Например, комплексный коэффициент передачи параллельного соединения (рис. 7.27, а) можно получить так:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) = [P_1(\omega) + jQ_1(\omega)] + [P_2(\omega) + jQ_2(\omega)] = [P_1(\omega) + P_2(\omega)] + j[Q_1(\omega) + Q_2(\omega)]. \quad (22)$$

Сложив активные и реактивные характеристики параллельных звеньев, можно получить $(P(\omega), Q(\omega))$ -характеристики соединений, а от них перейти с помощью той же (P, Q) -номограммы обратно к амплитудной и фазовой характеристикам $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, соответствующим выражению $W(j\omega)$.

Г л а в а VIII

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Основные понятия импульсных систем

В технике связи и управления часто находят применение так называемые импульсные системы как замкнутые, так и разомкнутые. На рис. 8.1, *a* показана структурная схема разомкнутой импульсной системы. Импульсный элемент *ИЭ* на схеме является преобразователем представления или, иначе, амплитудно-импульсным модулятором. Он преобразует входную функцию $X(t)$ (см. рис. 8.2, *a*) в последовательность прямоугольных импульсов $y(t)$ (см. рис. 8.2, *б*). Высота этих импульсов пропорциональна значениям

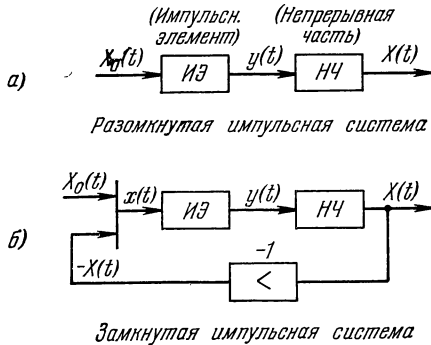


Рис. 8.1.

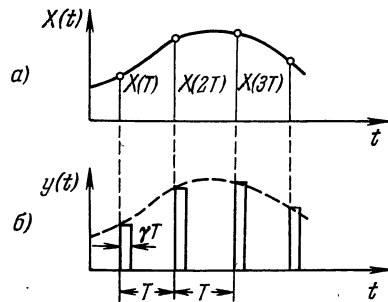


Рис. 8.2.

функции $X(t)$ в дискретные моменты времени $t = nT$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ — целые числа. Эти моменты иногда называются моментами съема или *тактовыми точками*. Продолжительность импульсов равна γT , где $\gamma \leq 1$. Будем считать γ и T постоянными величинами. Таким образом, здесь имеет место *амплитудно-импульсная модуляция АИМ*.

Последовательность импульсов $y(t)$ подается на непрерывную часть *НЧ* системы, которую будем считать линейной системой обычного тока. Выходная величина *НЧ*, обозначаемая $X(t)$, является выходной величиной всей системы.

В замкнутой импульсной системе (рис. 8.1, *б*) выходная величина $X(t)$ подается на вход системы по цепи обратной связи через инвертор (-1). На импульсный элемент *ИЭ* поступает разность входной величины $X_0(t)$ и выходной величины $X(t)$

$$x(t) = X_0(t) - X(t). \quad (1)$$

Как видно на рис. 8.2, *a* в импульсных системах представляют интерес не любые значения функции $x(t)$, а лишь значения $x(nT)$ в *тактовых* точках при $t = nT$. Точно так же мы будем интересоваться не любыми значениями

входной и выходной функций системы $X_0(t)$ и $X(t)$, а лишь значениями этих функций $X_0(nT)$ и $X(nT)$ в тактовых точках. Из уравнения (1) следует, что для схемы рис. 8.1, имеет место равенство

$$x(nT) = X_0(nT) - X(nT). \quad (2)$$

Импульсные системы нашли широкое применение вследствие ряда преимуществ перед непрерывными системами, связанных с квантованием по времени. Эти преимущества во многих случаях выражаются в увеличении помехоустойчивости при передаче информации, в возможности неограниченно долго хранить и запастать полученную информацию, в простоте элементов схем, простой возможности осуществления многоканальной связи, а также простоте управления по многим каналам и т. д. Квантованные по времени

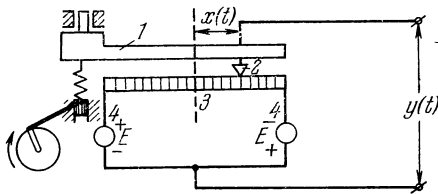


Рис. 8.3.

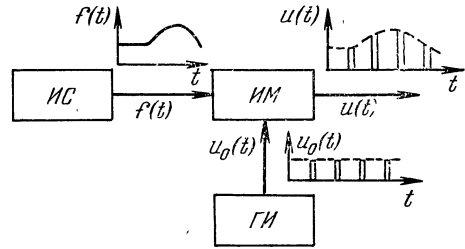


Рис. 8.4.

сигналы часто создаются измерительными датчиками; в некоторых их типах (например, гальванометр с падающей дужкой) наряду с измерением возможно и значительное усиление сигналов непосредственно в измерительном элементе.

На рис. 8.3 показан принцип устройства гальванометра с падающей дужкой. Дужка 1 совершает периодическое движение вверх и вниз с периодом T . Она прижимает к реохорду 3 на время γT стрелку 2 гальванометра (не показанного на рисунке). К реохорду 3 присоединены батареи 4. Входной величиной импульсного элемента является отклонение $x(t)$ конца стрелки гальванометра от среднего положения, пропорциональное некоторому малому току, проходящему по катушке гальванометра. Выходной величиной являются импульсы напряжения $y(t)$, имеющие форму, показанную на рис. 8.2, б. Эти импульсы имеют постоянную длительность, а их высота пропорциональна значению $x(nT)$, т. е. значению отклонения $x(t)$ в тот момент времени, когда падающая дужка начинает прижимать стрелку гальванометра к реохорду. Именно этот момент и следует принять за начало периода (или тактовую точку).

Практическое достоинство схемы рис. 8.3 состоит в возможности съема сравнительно большой мощности с выходных зажимов; между тем сам гальванометр может быть высокочувствительным маломощным устройством.

Рассмотрим другой пример. На рис. 8.4 показана блок-схема электронного устройства, производящего модуляцию последовательности импульсов $u_0(t)$ сигналом $f(t)$. Здесь ИС — источник сигналов $f(t)$, которые поступают в импульсный модулятор ИМ. На другой вход модулятора подается немодулированная последовательность импульсов $u_0(t)$ от генератора импульсов ГИ. В модуляторе ИМ происходит процесс модуляции, и на его выходе появляется модулированная последовательность импульсов $u(t)$. Для примера на выходе блока ИМ показана последовательность импульсов, подвергнутая амплитудно-импульсной модуляции, хотя подобная блок-схема справедлива и для других видов модуляции (частотно-импульсной, фазово-импульсной и т. д.).

На рис. 8.5 показан график, поясняющий работу электронного амплитудно-импульсного модулятора. Пусть кривая $I_a = I_a(U_g)$ представляет собой зависимость мгновенного значения анодного тока I_a в схеме от сеточного напряжения U_g . Допустим, что на сетку подается сумма трех напряжений: постоянного отрицательного напряжения смещения E_g , сигнала $f(t)$ низкой частоты и немодулированной последовательности импульсов $u_0(t)$:

$$U_g = -E_g + f(t) + U_0(t). \quad (3)$$

График результирующего сеточного напряжения, соответствующего формуле (3), изображен внизу слева на рис. 8.5. Здесь ось времени t направлена книзу. Построив обычным методом кривую анодного тока I_a в функции времени t , получаем модулированную последовательность импульсов, изображенную справа на рис. 8.5. Таким образом осуществляется амплитудно-импульсная модуляция АИМ. Ниже рассмотрен именно этот вид модуляции

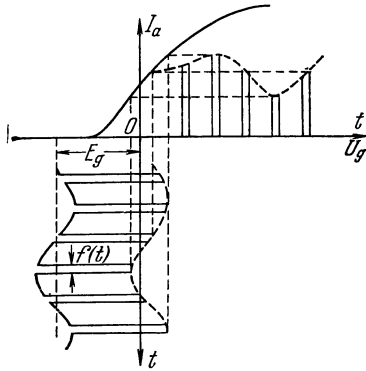


Рис. 8.5.

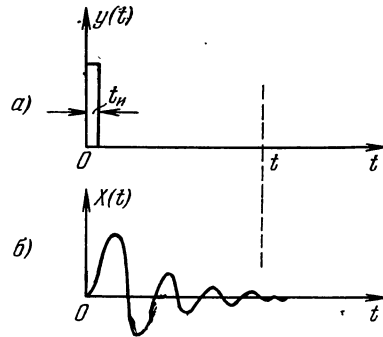


Рис. 8.6.

и связанный с ними класс импульсных систем. Рассмотрение других классов импульсных систем выходит за рамки этой книги.

В большинстве практически важных случаев длительность импульсов $y(t)$ значительно меньше продолжительности периода T , т. е. осуществляется условие

$$\gamma \ll 1. \quad (4)$$

Рассмотрим воздействие одного короткого импульса $y(t)$ (рис. 8.6, а) на непрерывную часть $НЧ$ системы, изображенной на рис. 8.1, а. Пусть $g(t)$ — импульсная переходная функция этой части. Тогда ее выходная величина $X(t)$ выражается интегралом свертки

$$X(t) = \int_0^t y(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad (5)$$

где t — момент наблюдения. Если продолжительность импульса t_n настолько мала, что за это время функция $g(t-\tau)$ мало изменяется, то

$$X(t) = \int_0^t y(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^{t_n} y(\tau) g(t-\tau) d\tau \approx g(t) \int_0^{t_n} y(\tau) d\tau = g(t) S_n, \quad (6)$$

где буквой S_n обозначена площадь импульса,

$$S_n = \int_0^{t_n} y(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Из формулы (6) видно, что действие короткого импульса не зависит от его формы и определяется лишь его площадью. Если $S_{и} = 1$, то $X(t) = g(t)$, т. е. действие импульса совпадает с импульсной переходной функцией или, иначе, с действием единичной импульсной функции $\delta(t)$. Из формулы (6) следует, что можно заменить узкий импульс произвольной формы, действующий на входе системы *НЧ*, импульсной функцией $S_{и} \cdot \delta(t)$. Импульсный

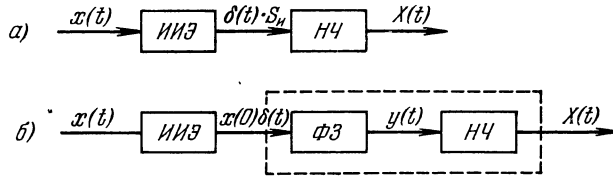


Рис. 8.7.

элемент, на выходе которого имеются такие импульсные функции, назовем *идеальным* и обозначим *ИИЭ* (идеальный импульсный элемент). На рис. 8.7, а показана структурная схема разомкнутой системы, в состав которой входит элемент *ИИЭ* и непрерывная часть *НЧ*. Пусть коэффициент пропорциональности $S_{и} = k_{и}x(0)$, где $x(0)$ — значение входной функции $x(t)$ в тактовой точке. Коэффициент $k_{и}$ можно отнести к части *НЧ*, поставив, например, на ее

входе или выходе усилительное звено с коэффициентом усиления $k_{и}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на выходе *ИИЭ* существует функция $x(0) \delta(t)$.

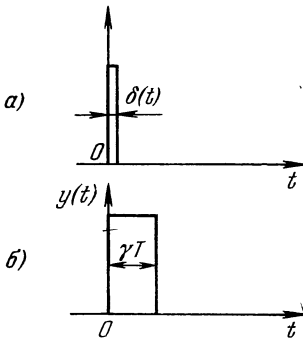


Рис. 8.8.

Даже в том случае, когда импульсный элемент в действительности создает не узкие импульсы, а импульсы любой длительности, можно представить структурную схему системы в таком виде, чтобы в ее состав вошел идеальный импульсный элемент (рис. 8.7, б). Нужно лишь включить последовательно с *ИИЭ* еще один блок — формирующее звено *ФЭ*, на выходе которого получается реальный импульс $y(t)$. На рис. 8.8, а условно показана входная величина $x(0) \delta(t)$, поступающая на вход звена *ФЭ*, а на рис. 8.8, б — его выходная величина $y(t)$.

При $x(0) = 1$ функция $y(t)$ есть реакция звена *ФЭ* на единичную импульсную функцию (см. рис. 8.8, а), приложенную к его входу, т. е. $y(t)$ есть импульсная переходная функция звена *ФЭ*. Таким образом, динамические свойства звена *ФЭ* полностью определяются кривой, изображенной на рис. 8.8, б. *L*-изображение этой функции представляет собой передаточную функцию звена *ФЭ*.

Для определенности будем считать высоту кривой рис. 8.8, б равной единице при $x(0) = 1$. Представим ее в виде разности двух единичных функций $u(t)$ и $u(t - \gamma T)$:

$$y(t) = u(t) - u(t - \gamma T). \tag{8}$$

L-изображение $y(t)$ равно

$$W_{\Phi}(p) = L[y(t)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\gamma T p} = \frac{1 - e^{-\gamma T p}}{p}. \tag{9}$$

Функция $W_{\Phi}(p)$ по определению есть передаточная функция звена *ФЭ*. Если форма импульса $y(t)$ иная, то таким же путем можно узнать передаточную функцию $W_{\Phi}(p)$ в любом другом случае.

Формирующее звено можно объединить с частью *НЧ* в одну общую непрерывную часть системы (см. пунктирный прямоугольник на рис. 8.7, б). Таким образом, можно прийти опять к схеме типа рис. 8.7, а, в которой имеется идеальный импульсный элемент и непрерывная часть. Поэтому ниже импульсный элемент всюду принимается идеальным.

§ 2. Дискретное преобразование Лапласа

Из формулы (7) § 1 следует, что S_{ii} пропорционально $y(t)$ в момент, соответствующий тактовой точке, т. е. величине $x(t)$ в этот момент времени: Положим коэффициент пропорциональности для определенности равным единице. Тогда функция на выходе *ИИЭ* в n -й тактовой точке (т. е. при $t = nT$) равна $x(nT)$.

Обозначим выходную величину импульсного элемента *ИИЭ* через $x^*(t)$ (рис. 8.9, а). Так как эта величина равна сумме δ -функций (рис. 8.9, б), то

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT). \quad (1)$$

При этом считаем, что до момента $t = 0$ функция $x(t) = 0$. На рис. 8.9, в дискретные $x^*(t)$ показаны равными $x(nT)$ в моменты $t = nT$. Эти величины следует еще умножить на соответствующие δ -функции, чтобы получить выходную величину, выражаемую формулой (1).

Обозначим Фурье-изображение входной величины $x(t)$ через $x(\omega)$. Так как $x(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt. \quad (2)$$

Найдем Фурье-изображение $x^*(\omega)$ выходной величины $x^*(t)$ блока *ИИЭ*. Так как Фурье-изображение $\delta(\omega)$ функция $\delta(t)$ выражается формулой

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = |e^{-j\omega t}|_{t=0} = 1, \quad (3)$$

а Фурье-изображение запаздывающей на время nT функции $\delta(t - nT)$ равно $\delta(\omega) e^{-j\omega nT}$, то из формулы (1)

$$x^*(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(\omega) e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (4)$$

L -изображение $x^*(p)$ этой величины по формуле

$$x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}, \quad (5)$$

причем легко видеть, что $x^*(j\omega) = x^*(\omega)$.

Это выражение зависит от функции $x(t)$ в дискретные моменты времени. Оно вовсе не совпадает с обычным выражением для L -изображения функции $x(t)$

$$L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (6)$$

Выражение (5) получится, если подставить в формулу (6) преобразования Лапласа не $x(t)$, а $x^*(t)$ из (1).

Имеется аналогия между интегралом (6) и рядом (5). Последний обычно называют дискретным L -изображением функции $x(nT)$ и обозначают так:

$$x^*(p) = D\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (7)$$

Формула (7) определяет дискретное преобразование Лапласа для дискретной функции $x(nT)$. Оказывается, что дискретное преобразование Лапласа имеет много черт, сходных с чертами обычного преобразования Лапласа. Так, например, можно вывести формулы, аналогичные интегралу свертки, формулам теорем смещения, запаздывания и т. д. в теории непрерывных функций. Основные свойства дискретного преобразования Лапласа приведены в таблице.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Оригинал $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$	Изображение $x^*(p)$
$x(n)$	$x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} x(n)$
$\sum_{i=1}^k a_i x_i(n)$	$\sum_{i=1}^k a_i x_i^*(p)$
$x(n-k)$	$e^{-pk} x^*(p)$
$x(n+k)$	$e^{-pk} \left[x^*(p) - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} x(r) \right]$
$e^{\pm \lambda n} x(n)$	$x^*(p \pm \lambda)$
$\sum_{m=0}^{n-1} x(m)$	$\frac{x^*(p)}{e^p - 1}$
$n^k x(n)$	$(-1)^k \frac{d^k x^*(p)}{dp^k}$
$\frac{x(n)}{n^k}$	$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} x^*(p) (dp)^k$
$\sum_{m=0}^n x_1(n-m) x_2(m)$	$x_1^*(p) \cdot x_2^*(p)$

Иногда вводят следующее обозначение:

$$e^{pT} = z. \quad (8)$$

Тогда формулу (7) можно переписать в следующем виде, заменив $D\{x(nT)\}$ на $Z\{x(nT)\}$:

$$Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}. \quad (9)$$

Выражение для Z является функцией переменной z . Характер этой функции определяется значениями $x(nT)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Формула (9) называется формулой Z -преобразования. Иногда вместо дискретного преобразования Лапласа пользуются эквивалентным ему Z -преобразованием.

Найдем связь между $x(\omega)$ — частотным спектром непрерывной функции на входе ИИЭ — и $x^*(\omega)$ — частотным спектром квантованной величины на выходе этого элемента. Для этого перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (10)$$

Такой вид формулы эквивалентен выражению (1), поскольку $\delta(t - nT) = 0$ при $t \neq nT$ и

$$x(t) \delta(t - nT) = x(nT) \delta(t - nT). \quad (11)$$

Кроме того, $x(t) = 0$ при $t < 0$. Поэтому можно заменить интервал суммирования $n = 0 \div \infty$ интервалом $n = -\infty \div +\infty$. Сумма $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ является периодической функцией времени и может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{jr\omega_0 t}, \quad (12)$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \psi(t) e^{-jr\omega_0 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] e^{-jr\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t - nT) e^{-jr\omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Интеграл в этой формуле отличен от нуля лишь в том случае, когда $\delta(t - nT)$ отлична от нуля в интервале $(-T/2, +T/2)$. Но это имеет место лишь при $n = 0$. Поэтому

$$A_r = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jr\omega_0 t} dt = \frac{2}{T}. \quad (15)$$

Подставляя это выражение в формулу (12), находим

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-jr'\omega_0 t}. \quad (16)$$

В последнем выражении произведена подстановка $r' = -r$, а затем вместо r' вновь написана буква r , поскольку безразлично, как именовать индекс суммирования.

Подставляя (16) в (10), получаем

$$x^*(t) = \frac{1}{T} x(t) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-jr\omega_0 t}. \quad (17)$$

Фурье-изображение этой функции (необходимо помнить, что $x(t) = 0$ при $t < 0$) в случае, когда $x(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}^*(\omega) &= \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-jr\omega_0 t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-j(\omega+r\omega_0)t} x(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega+r\omega_0). \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе используется свойство интеграла Фурье

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-j(\omega+r\omega_0)t} dt = \tilde{x}(\omega+r\omega_0). \quad (19)$$

Формула (18) показывает, что частотный спектр квантованной величины $x^*(t)$ представляет собой, с точностью до множителя $1/T$, сумму частотных спектров непрерывной функции $x(t)$, смещенных друг относительно друга на постоянную величину, равную частоте повторения ω_0 .

Подставив p вместо $j\omega$ в формулу (18), приходим к новому выражению для дискретного преобразования Лапласа ¹⁾

$$x^*(p) = D\{x(nT)\} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(p+jr\omega_0). \quad (20)$$

Сравним теперь формулы (4) и (2) § 1 для частотного спектра квантованной величины $x^*(t)$. Так как

$$e^{-j\omega nT} = (e^{-j\omega T})^n, \quad (21)$$

то, как видно из формулы (4), выражение $\tilde{x}^*(\omega)$ зависит от $e^{-j\omega T}$. Между тем функция $e^{-j\omega T}$ обладает свойством периодичности. Действительно, если k — целое число, то

$$e^{-j(\omega+k\omega_0)T} = e^{-j\omega T} \cdot e^{-jk\omega_0 T} = e^{-j\omega T}, \quad (22)$$

так как $e^{-jk\omega_0 T} = e^{-k \frac{2\pi}{T} T} = e^{-2\pi k} = 1$.

Поэтому изменение аргумента ω на $k\omega_0$ не изменит функции $x^*(j\omega)$. Эта функция периодическая с периодом, равным периоду квантования $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Таким образом,

$$x^*[j(\omega+k\omega_0)] = x^*(j\omega). \quad (23)$$

Этот же результат можно получить из формулы (18), если подставить вместо ω величину $\omega+k\omega_0$. Действительно, сумма в круглых скобках в этом случае равна

$$\omega+k\omega_0+r\omega_0 = \omega+(k+r)\omega_0 = \omega+r'\omega_0, \quad (24)$$

где $r' = r+k$, причем суммирование по целым величинам r' также производится от $-\infty$ до $+\infty$. В итоге формула (18) сохраняет прежний вид, что и доказывает справедливость выражения (23).

¹⁾ Если $x(0) \neq 0$, то к правой части (20) нужно прибавить $\frac{1}{2} x(0)$.

Формулу (18) можно применить для построения частотного спектра $x^*(j\omega)$ квантованной функции по известному частотному спектру $x(j\omega)$ функции $x(t)$. На рис. 8.10, а изображен пример кривой для действительной составляющей $Re\{x(j\omega)\}$ частотного спектра $x(j\omega)$ в функции частоты ω . Если спектр $x(j\omega)$ является чисто действительным, то график на рис. 8.10, а полностью изображает частотный спектр. Если же $x(j\omega)$ — комплексное число, то, кроме графика рис. 10.8, а, для полного описания частотного спектра необходим еще один график зависимости $Im\{x(j\omega)\}$ — мнимой составляющей $x(j\omega)$ от частоты ω .

Эта оговорка действительна и для графика $Re\{x^*(j\omega)\}$, изображенного на рис. 8.10. Чтобы построить график $Re\{x^*(j\omega)\}$, нужно сначала начертить кривые $Re\{x[j(\omega) + k\omega_0]\}$ при различных k , сдвинув кривую рис. 8.10, а на отрезки $\pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0$ и т. д. Эти кривые показаны пунктиром на рис. 8.10, б. Затем, сложив все эти кривые, получаем график $Re\{x^*(j\omega)\}$ в виде сплошной линии на рис. 8.10, б.

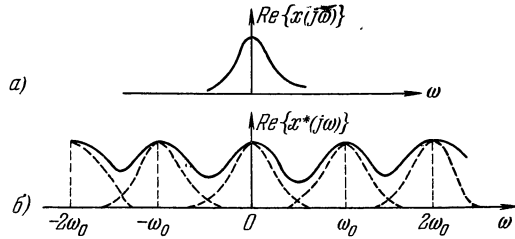


Рис. 8.10.

На рис. 8.11, а показан другой пример. Здесь кривая $x(t)$ представляет собой модулированное колебание частоты ω_0 . Сдвинем «половины» графика рис. 8.11, а на расстояния $k\omega_0$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$), отчего, наложившись друг на друга, они удвоятся. Такие кривые показаны на рис. 8.11, б. Их сумма представляет собой кривую $Re\{x^*(j\omega)\}$. Интересно, что спектр квантованной величины оказался отличным от нуля и на низких частотах, хотя этих частот в

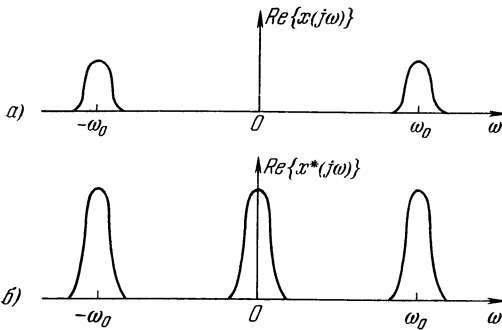


Рис. 8.11.

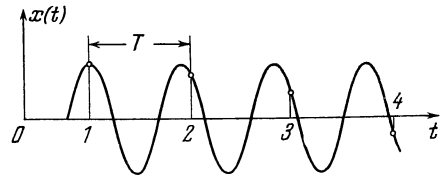


Рис. 8.12.

непрерывной функции $x(t)$ не содержалось. Причина этого эффекта, который можно назвать стробоскопическим, поясняется рис. 8.12. Здесь сплошная кривая представляет собой непрерывную функцию $x(t)$, меняющуюся со сравнительно высокой частотой. Между тем изменение значений дискретной функции $x(nT)$, представленных ординатами точек 1, 2, 3, 4, . . . , происходит со значительно более низкой частотой, если период функции $x(t)$ почти кратен периоду T квантования.

Рассмотрение спектров квантованных величин позволяет понять смысл теоремы В. А. Котельникова. Если сигнал $x(t)$ имеет ограниченный частотный спектр $x(j\omega)$ (рис. 8.13, а) с частотой ω_c среза и частота квантования ω_0 удовлетворяет условию

$$\omega_0 > 2\omega_c, \tag{25}$$

то спектр квантованной величины $x^*(j\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 8.13, б. Как видно из этого рисунка, отдельные части этого спектра,

идентичные по форме спектру сигнала $x(t)$, отделены друг от друга и не накладываются друг на друга. Пропустим квантованный сигнал $x^*(t)$ через идеальный полосовой фильтр с шириной полосы ω_ϕ , причем $\omega_c < \omega_\phi < \omega_0 - \omega_c$. Его частотная характеристика показана пунктиром на рис. 8.13, б. Очевидно, сквозь этот фильтр пройдет лишь низкочастотная часть спектра, и на выходе такого фильтра получится спектр, идентичный спектру сигнала $x(t)$. Иначе говоря, на выходе этого фильтра будет восстановлена первоначальная, неквантованная функция $x(t)$. Между тем, если $\omega_0 < 2\omega_c$ (см. рис. 8.13), то отдельные части спектра $x^*(j\omega)$, показанные пунктиром, накладываются друг на друга. Поэтому выделение фильтром

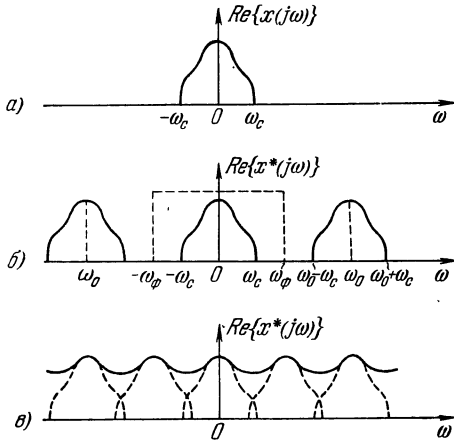


Рис. 8.13.

какой-либо части такого спектра уже не позволит восстановить первоначальный спектр неквантованной функции $x(t)$. Следовательно, восстановление из $x^*(t)$ первоначального сигнала оказывается невозможным. Условие (25) совершенно идентично условию теоремы Котельникова. Действительно, период квантования (см. (25))

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} < \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{\pi}{\omega_c} \quad (26)$$

совпадает с условием В. А. Котельникова.

Выведем теперь уравнение, связывающее дискретные значения входной и выходной величин на схеме, изображенной на рис. 8.7, б. Для сокращения будем в дальнейшем именовать эти

дискретные значения *дискретами*. Пусть импульсная переходная функция непрерывной части, в которую можно включить и блок ФЭ, обозначена через $\phi(t)$. Тогда импульс $x(mT)\delta(t - mT)$, возникший на выходе идеального импульсного элемента в момент $t = mT$, порождает на выходе всей системы реакцию $x(mT)g(t - mT)$. Сумма всех импульсов в моменты $t = mT$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) создает на выходе результирующую реакцию, которая на интервале $nT \leq t \leq (n + 1)T$ описывается формулой

$$X(t) = \sum_{m=0}^n x(mT)g(t - mT). \quad (27)$$

В частном случае в момент $t = nT$ получим значение дискрета на выходе системы

$$X(nT) = \sum_{m=0}^n x(mT)g[(n - m)T]. \quad (28)$$

Это и есть уравнение, связывающее дискреты на входе и выходе. Уравнение (18) показывает, что дискрет на выходе в данный момент времени $t = nT$ линейно зависит от всех дискретов входной величины в данный и предыдущие моменты времени, вплоть до начального. Можно найти также уравнение, связывающее между собой фурье-изображения входной и выходной величин. Если известно выражение для комплексного коэффициента передачи $W(j\omega)$ непрерывной части, то Фурье-изображение $X(j\omega)$ выходной величины $X(t)$ выражается формулой

$$X(j\omega) = W(j\omega)x^*(j\omega), \quad (29)$$

где $x^*(j\omega)$, как указано выше, представляет собой фурье-изображение выходной функции идеального импульсного элемента ИИЭ.

Воспользовавшись формулой (18) и равенством $x(j\omega) = \tilde{x}(\omega)$, находим

$$X(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[j(\omega + r\omega_0)]. \quad (30)$$

Это равенство выражает требуемую связь между частотными спектрами $x(j\omega)$ и $X(j\omega)$ функций времени $x(t)$ и $X(t)$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию формулы (30). На рис. 8.14, а изображен амплитудный частотный спектр $|x(j\omega)|$ входного сигнала $x(t)$.

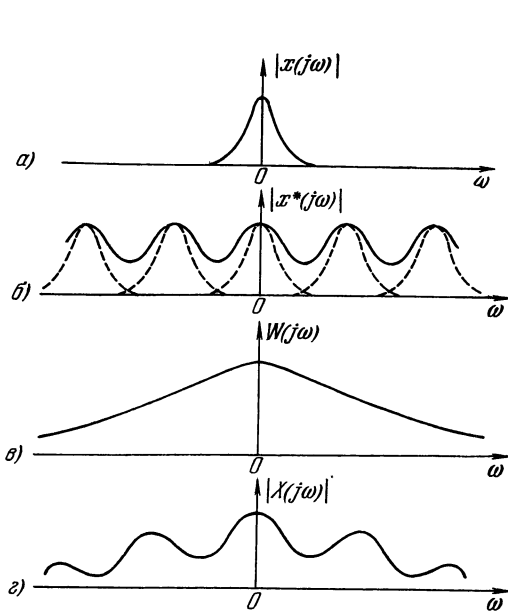


Рис. 8.14.

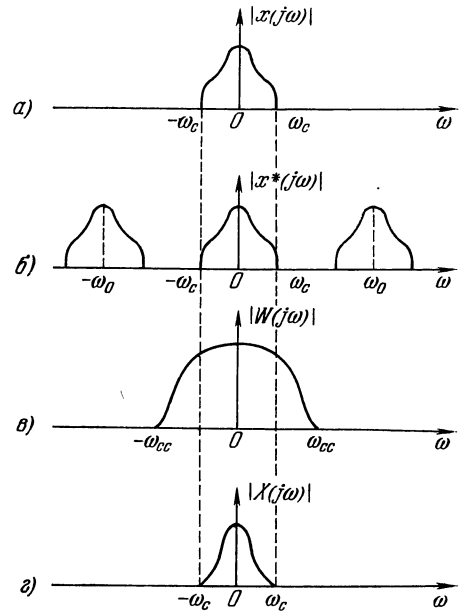


Рис. 8.15.

На рис. 8.14, б показан периодический амплитудный частотный спектр $|x^*(j\omega)|$ квантованной величины на выходе ИИЭ. Следует учесть, что модуль суммы в формуле (18) не равен, вообще говоря, сумме модулей. Поэтому простое суммирование сдвинутых кривых $|x(j\omega)|$, показанных на рис. 8.14 пунктиром, пригодно для получения кривой $|x^*(j\omega)|$ лишь тогда, когда $x(j\omega)$ — действительное число.

На рис. 8.14, в показана амплитудная частотная характеристика $W(j\omega)$ непрерывной части. Как видно из формулы (30), модуль $|X(j\omega)|$ получается перемножением модулей $|x^*(j\omega)|$ и $|W(j\omega)|$. Амплитудный частотный спектр $|X(j\omega)|$, полученный этим способом, показан на рис. 8.14, г. Из этого рисунка видно, что спектр $|X(j\omega)|$ уже не является периодической функцией от ω .

На рис. 8.15 показан другой пример, в котором частотный спектр сигнала $x(t)$ ограничен частотой среза ω_c (рис. 8.15, а). В этом случае спектр $|x^*(j\omega)|$ состоит из отдельных частей (рис. 8.15, б), если частота квантования ω_0 достаточно велика. Пусть полоса пропускания непрерывной части ограничена частотой ω_{cc} (рис. 8.15, в) и удовлетворяется условие

$$\omega_0 \geq \omega_{cc} + \omega_c. \quad (31)$$

Тогда, как видно из рис. 8.15, z , непрерывная часть действует, как фильтр, выделяющий лишь низкочастотную часть спектра $|x^*(j\omega)|$ и, вообще говоря, искажающий частотный спектр сигнала.

Сравним рис. 8.14 и 8.15. В системе, соответствующей рис. 8.15, спектр выходной величины имеет такой же точно вид, как если бы входная величина $x(t)$ поступала непосредственно на вход непрерывной части. Следовательно, свойства импульсной системы, характеризуемой условием (31), не отличаются от свойств непрерывной системы. Между тем для системы, соответствующей рис. 8.14, в которой не выполняется условие (31), частотный спектр выходной величины имеет специфический вид. Характеристика этой системы не сводится, следовательно, к характеристике одной лишь непрерывной части. Свойства такой импульсной системы являются специфическими.

Из формулы (30) можно получить частотный спектр $X(j\omega)$ непрерывной функции времени $X(t)$. Найдем частотный спектр квантованной величины $X^*(t)$, т. е. импульсной функции (ср. с формулой (1)), описываемой выражением

$$X^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X(nT) \delta(t - nT). \quad (32)$$

Эту формулу можно вывести таким же путем, как из (1) были получены формулы (4) и (18).

Итак, найдем, например, формулу типа (18):

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + r\omega_0)] = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + r\omega_0)] x^*[j(\omega + r\omega_0)]. \quad (33)$$

Последнее выражение получено подстановкой $X(j\omega)$ из формулы (29).

Так как функция $x^*(j\omega)$ периодическая (см. (23)), то

$$x^*[j(\omega + r\omega_0)] = x^*(j\omega) \quad (34)$$

и

$$X^*(j\omega) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + r\omega_0)] \right\} x^*(j\omega) = W^*(j\omega) x^*(j\omega), \quad (35)$$

где применено обозначение

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + r\omega_0)]. \quad (36)$$

Формула (35) связывает Фурье-изображения квантованных величин на входе и выходе системы так же, как связаны между собой изображения на входе и выходе непрерывной системы. Поэтому естественно назвать $W^*(j\omega)$ *комплексным коэффициентом передачи* разомкнутой импульсной системы.

Подставим p вместо $j\omega$ в уравнения (35) и (36). Тогда получим связь между изображениями величин на входе и выходе (в смысле дискретного преобразования Лапласа)

$$X^*(p) = W^*(p) x^*(p). \quad (37)$$

Здесь $W^*(p)$ выражается формулой, следующей из (36):

$$W^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W[p + j\omega_0 r]. \quad (38)$$

Сравнение этого выражения с формулой (20) для дискретного преобразования Лапласа показывает, что $W^*(p)$ есть изображение некоторой дис-

кретной функции $g(nT)$. Действительно, формула (20) показывает, как дискретное изображение $x^*(p)$ получается из обычного изображения $x(p)$. Таким же образом $W^*(p)$ получается из $W(p)$. Но $W(p)$ есть L -изображение $g(t)$. Следовательно, $W^*(p)$ есть дискретное изображение $g(t)$, т. е., согласно (7),

$$W^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) e^{-pnT}. \quad (39)$$

Сравним уравнение (37) для изображений с уравнением (28), связывающим между собой оригиналы. Подвергнем уравнение (28) дискретному преобразованию Лапласа:

$$D \{X(nT)\} = D \{x(mT) g[(n-m)T]\}. \quad (40)$$

С другой стороны, уравнение (37) можно переписать в таком виде:

$$D \{X(nT)\} = D \{g(nT)\} \cdot D \{x(nT)\}. \quad (41)$$

Сравнивая (40) и (41), находим

$$D \left\{ \sum_{m=0}^n x(mT) g[(n-m)T] \right\} = D \{g(nT)\} \cdot D \{x(nT)\}. \quad (42)$$

В левой части равенства (42) находится выражение, аналогичное свертке обычных непрерывных функций. Назовем это выражение *сверткой дискретных функций* $x(nT)$ и $g(nT)$. Формула (42) показывает, что изображение свертки этих функций равно произведению изображений функций. Аналогичная формула имеет место и для обычного преобразования Лапласа непрерывных функций.

Пусть передаточная функция непрерывной части системы (без учета формирующего звена ФЭ) $W_n(p)$ имеет вид

$$W_n(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}, \quad (43)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены, причем степень $Q(p)$ меньше чем степень $R(p)$, и равна l .

Найдем для этого случая формулу $W^*(p)$ в замкнутом виде. Для этого нужно узнать вид функции $g(nT)$ в формуле (39). При этом ограничимся случаем, когда все корни характеристического уравнения $R(p) = 0$ различны и не равны нулю. Эти корни обозначим p_1, \dots, p_l .

Переходная функция непрерывной части системы имеет вид

$$h(t) = \frac{Q(0)}{R(0)} + \sum_{v=1}^l A_v e^{p_v t}, \quad (44)$$

где, как известно из теоремы разложения в операционном исчислении (а также из приведенной в книге формулы разложения), коэффициенты A_v выражаются формулами

$$A_v = \frac{Q(p_v)}{R'(p_v) p_v} \quad (v = 1, \dots, l). \quad (45)$$

Когда на вход звена ФЭ подается δ -функция, то на вход непрерывной части системы действует прямоугольный импульс $y(t)$ (см. рис. 8.8, б), который, согласно функции (8) § 1, можно представить в виде разности двух единичных функций.

Следовательно, реакция всей непрерывной части системы, включая ΦZ , на δ -функцию выражается следующей формулой:

$$g(t) = \begin{cases} h(t) & \text{при } 0 \leq t < \gamma T, \\ h(t) - h(t - \gamma T) & \text{при } T \geq \gamma T. \end{cases} \quad (46)$$

Отсюда находим, считая $h(0) = 0$ и, следовательно, учитывая только $n > 0$,

$$\begin{aligned} g(nT) &= h(nT) - h[(n - \gamma)T] = \sum_{\nu=1}^l A_{\nu} e^{p_{\nu} k T} - \sum_{\nu=1}^l A_{\nu} e^{p_{\nu} (n - \gamma) T} = \\ &= \sum_{\nu=1}^l A_{\nu} e^{p_{\nu} n T} (1 - e^{-\gamma p_{\nu} T}) = \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} e^{p_{\nu} n T}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$c_{\nu} = A_{\nu} (1 - e^{-\gamma p_{\nu} T}) = \frac{Q(p_{\nu})}{R'(p_{\nu})} \cdot \frac{1 - e^{-\gamma p_{\nu} T}}{p_{\nu}}. \quad (48)$$

При последнем преобразовании учтена формула (45).

Подставим значение $g(nT)$ из (47) в (39). Тогда, если учесть, что $g(nT) = 0$ при $n = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} W^*(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} g(nT) e^{-pnT} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pnT} \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} e^{p_{\nu} n T} = \\ &= \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pnT} \cdot e^{p_{\nu} n T} = \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(p - p_{\nu}) n T}. \end{aligned} \quad (49)$$

Обозначим $e^{-(p - p_{\nu}) T} = v$ и учтем, что сумма сходящейся геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} v^n = \frac{v}{1 - v}. \quad (50)$$

Тогда внутренняя сумма в выражении (49) равна правой части формулы (50). Отсюда

$$W^*(p) = \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} \frac{e^{-(p - p_{\nu}) T}}{1 - e^{-(p - p_{\nu}) T}} = \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} \frac{e^{p_{\nu} T}}{e^{pT} - e^{p_{\nu} T}}. \quad (51)$$

Это и есть искомое выражение. Когда в состав непрерывной части входит последовательно соединенное интегрирующее звено, то один из корней уравнения $R(p) = 0$ равен нулю. Пусть $p_l = 0$. Для этого случая аналогичный подсчет дает выражение

$$W^*(p) = \sum_{\nu=1}^l c_{\nu} \frac{e^{p_{\nu} T}}{e^{pT} - e^{p_{\nu} T}} + c_{l,0} \frac{1}{e^{pT} - 1}, \quad (52)$$

где

$$c_{l,0} = \frac{Q(0)}{R'(0)} \gamma T. \quad (53)$$

Можно вывести аналогичные формулы и для случая нескольких корней, равных нулю.

Как и для непрерывных систем, амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы назовем годограф вектора $W^*(j\omega)$, получаемого из $W^*(p)$ подстановкой $p = j\omega$. Разница состоит лишь в том, что, так как $W^*(j\omega)$ — периодическая функция, то, чтобы ее получить, достаточно

изменять ω в пределах одного периода, равного ω_0 , скажем:

$$-\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}. \quad (54)$$

Например, из формулы (52) получаем

$$W^*(j\omega) = \sum_{\nu=1}^l c_\nu \frac{e^{\nu T}}{e^{j\omega T} - e^{\nu T}} + c_{l,0} \frac{1}{e^{j\omega T} - 1}. \quad (55)$$

Для подсчета $W^*(j\omega)$ можно воспользоваться также формулой (36), связывающей дискретное и обычное Фурье-изображения. В этой формуле $W(j\omega)$ — комплексный коэффициент передачи непрерывной части (включая звено ФЭ).

Найдем для примера импульсную амплитудно-фазовую характеристику $W^*(j\omega)$ интегрирующего звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{\xi}{p}$. Сначала определяем импульсную передаточную функцию $W^*(p)$ интегрирующего звена. Так как в выражении

$$W(p) = \frac{\xi}{p} = \frac{Q(p)}{R(p)} \quad (56)$$

знаменатель $R(p) = p$ имеет один корень

$$p_1 = 0, \quad (57)$$

то для определения $W^*(p)$ следует воспользоваться формулой (52), которая дает

$$W^*(p) = c_{0,0} \frac{1}{e^{pT} - 1}. \quad (58)$$

Здесь

$$c_{0,0} = \frac{Q(0)}{R'(0)} \gamma T = \frac{\xi}{1} \gamma T = \xi \gamma T, \quad (59)$$

так как

$$R'(p) = 1.$$

Итак,

$$W^*(p) = \frac{\xi \gamma T}{e^{pT} - 1}. \quad (60)$$

Поэтому импульсный комплексный коэффициент передачи

$$W^*(j\omega) = \frac{\xi \gamma T}{e^{j\omega T} - 1}. \quad (61)$$

Характеристику $W^*(j\omega)$ следует строить для интервала

$$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq +\frac{\pi}{T} \quad (62)$$

(см. например, рис. 8.16). Обозначим

$$\bar{\omega} = \omega T \quad (63)$$

и

$$\frac{1}{\xi \gamma T} W^*(j\bar{\omega}) = W_0^*(j\bar{\omega}). \quad (64)$$

Тогда из формулы (61) находим

$$W_0^*(j\bar{\omega}) = \frac{1}{e^{j\bar{\omega}} - 1}. \quad (65)$$

Относительная частота $\bar{\omega}$ меняется в интервале

$$-\pi \leq \bar{\omega} \leq +\pi. \tag{66}$$

Годограф вектора $W_0^*(j\bar{\omega})$ показан на рис. 8.17. На рис. 8.17, а показан годограф вектора $e^{j\bar{\omega}} - 1$ при $-\pi \leq \bar{\omega} < +\pi$. Это — окружность единичного радиуса, проведенная из точки $(-1, 0)$ как из центра. На рис. 8.17, б изображен годограф вектора, обратного $e^{j\bar{\omega}} - 1$. Это — вертикальная прямая, проходящая через точку $(-\frac{1}{2}, 0)$. Эта прямая и представляет собой

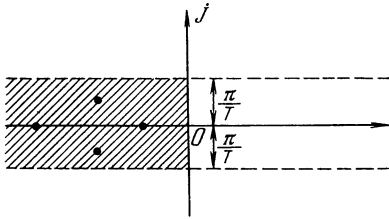


Рис. 8.16.

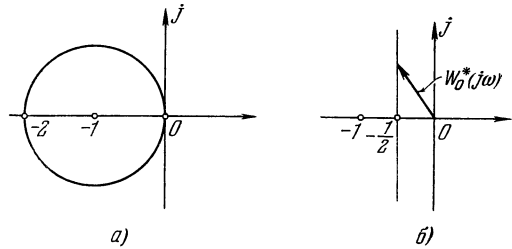


Рис. 8.17.

искомую амплитудно-фазовую характеристику. На рис. 8.17, б характеристика построена в относительных единицах, поскольку вектор $W_0^*(j\omega)$ отличается масштабом от $W^*(j\omega)$.

Рассмотрим схему рис. 8.1, в которой замыкание осуществляется через инвертор -1 . Для дискретных значений $x(nT)$, $X_0(nT)$ и $X(nT)$ справедлива формула (2) § 1. На основе этой формулы и выражения (28) из § 2 этой главы находим

$$x(nT) = X_0(nT) - \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) g[(n-m)T]. \tag{67}$$

Это — уравнение замкнутой импульсной системы относительно погрешности $x(nT)$. Уравнение дает возможность, зная $g(nT)$, найти последовательно все значения $x(nT)$, где $n = 0, 1, \dots$. При этом нужно учесть, что $g(kT) = 0$ при $n \leq 0$. Действительно, для $n = 0$ получаем из (67)

$$x(0) = X_0(0) - x(0) \cdot g(0) = X_0(0). \tag{68}$$

Это означает, что система в начальный момент еще не пришла в движение и находится в покое [$X(0) = 0$]. Поэтому погрешность $x(0)$ совпадает с $X_0(0)$. Для $n = 1$ находим

$$x(T) = X_0(T) - x(0) g(T), \tag{69}$$

откуда становится известным $x(T)$; для $n = 2$

$$x(2T) = X_0(2T) - x(0) g(2T) - x(T) g(T) \tag{70}$$

и находим $x(2T)$ и т. д.

Можно написать уравнение замкнутой системы и для изображений. Из формулы (2) § 1, применяя к обеим ее частям дискретное преобразование Лапласа, получаем

$$x^*(p) = X_0^*(p) - X^*(p). \tag{71}$$

Исключая из этой формулы и из выражения (37) величину $x^*(p)$, приходим к уравнению в изображениях

$$X^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} X_0^*(p). \tag{72}$$

Положим

$$W_3^*(p) = \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} \tag{73}$$

и назовем $W_3^*(p)$ *передаточной функцией замкнутой импульсной системы*. Тогда выражение (72) можно переписать в виде

$$X^*(p) = W_3^*(p) X_0^*(p). \tag{74}$$

Эта формула связывает изображения на входе и выходе импульсной системы (при условии, что в начальный момент времени система находилась в покое). Выражение (74) формально идентично соответствующему выражению для замкнутой непрерывной системы.

Заменяя p на $j\omega$, приходим к формуле

$$W_3^*(j\omega) = \frac{W^*(j\omega)}{1 + W^*(j\omega)}. \tag{75}$$

Эта формула имеет тот же физический смысл, что и в непрерывной системе. Она определяет установившуюся реакцию замкнутой импульсной системы на синусоидальное воздействие. Конечно, реакция рассматривается лишь как дискретная функция, т. е. учитываются лишь дискретные моменты времени $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

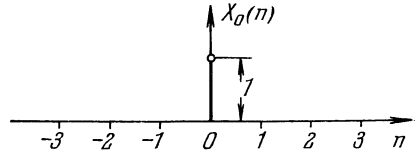


Рис. 8.18.

Так же, как и в непрерывных системах, можно ввести амплитудную и фазовую частотные характеристики замкнутой системы как модуль и соответственно аргумент вектора $W_3^*(j\omega)$.

Рассмотрим пример. Найти передаточную функцию $W^*(p)$ для последовательного соединения двух инерционных звеньев с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k_1}{1 + pT_1} \cdot \frac{k_2}{1 + pT_2} = \frac{Q(p)}{R(p)}, \tag{76}$$

т. е. реакцию этой системы на единичный дискрет, появившейся в начальный момент на входе системы $X_0(0) = 1, X_0(n) = 0, n \geq 0$ (рис. 8.18).

Пользуясь формулой (51), получаем выражение

$$W^*(p) = c_1 \frac{e^{p_1 T}}{e^{pT} - e^{p_1 T}} + c_2 \frac{e^{p_2 T}}{e^{pT} - e^{p_2 T}}; \tag{77}$$

p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения. Последнее получается, если приравнять знаменатель (76) нулю:

$$R(p) = (1 + pT_1)(1 + pT_2) = 0. \tag{78}$$

Отсюда находим

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}. \tag{79}$$

Воспользуемся формулой (48) для определения c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{Q(p_1)}{R'(p_1)} \cdot \frac{1 - e^{-\nu p_1 T}}{p_1} = \frac{k_1 k_2}{2T_1 T_2 \left(-\frac{1}{T_1}\right) + (T_1 + T_2)} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}{\left(-\frac{1}{T_1}\right)} = \\ &= \frac{k_1 k_2 T_1}{T_1 - T_2} (e^{\frac{T}{T_1}} - 1), \end{aligned} \tag{80}$$

так как

$$R'(p) = 2T_1 T_2 p + (T_1 + T_2). \quad (81)$$

Аналогично

$$c_2 = \frac{k_1 k_2 T_2}{T_2 - T_1} (e^{\gamma \frac{T}{T_2}} - 1), \quad (82)$$

откуда

$$W^*(p) = \frac{k_1 k_2 (e^{\gamma \frac{T}{T_1}} - 1)}{1 - \frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{e^{-\frac{T}{T_1}}}{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}}} + \frac{k_1 k_2 (e^{\gamma \frac{T}{T_2}} - 1)}{1 - \frac{T_2}{T_2}} \cdot \frac{e^{-\frac{T}{T_2}}}{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_2}}}. \quad (83)$$

Обозначим

$$k = k_1 k_2, \quad \beta_1 = \frac{T}{T_1}, \quad \beta_2 = \frac{T}{T_2}. \quad (84)$$

Тогда можно привести формулу (83) к виду

$$W^*(p) = \frac{k (e^{\gamma \beta_1} - 1)}{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}} \cdot \frac{e^{-\beta_1}}{e^{pT} - e^{-\beta_1}} + \frac{k (e^{\gamma \beta_2} - 1)}{1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}} \cdot \frac{e^{-\beta_2}}{e^{pT} - e^{-\beta_2}}. \quad (85)$$

Рассмотрим *произведение* передаточных функций двух инерционных звеньев; согласно обозначению (84) оно имеет следующий вид:

$$W_1^*(p) W_2^*(p) = k (e^{\gamma \beta_1} - 1) (e^{\gamma \beta_2} - 1) \frac{e^{-\beta_1}}{e^{pT} - e^{-\beta_1}}. \quad (86)$$

Сравним выражения (85) и (86). Они *различны*, что весьма важно подчеркнуть. Итак, *передаточная* функция последовательного соединения звеньев импульсной системы вовсе не равна произведению передаточных функций этих звеньев. Только в том случае, если перед *каждым* из звеньев (а не только перед первым из них) поставить одинаковые импульсные элементы, работающие синфазно, получим общую передаточную функцию типа (86). Если же импульсный элемент стоит лишь перед соединением в целом, то передаточная функция определяется формулой (85). Учитывая

$$X_0^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} X_0(nT) e^{-pnT}, \quad X_0(0) = 1 \quad (87)$$

и подставляя это значение в формулу (74), находим изображение искомой функции

$$X^*(p) = W_3^*(p). \quad (88)$$

Подставляя в формулу (73) выражение (51) или (52) для $W^*(p)$, можно заметить, что $W_3^*(p)$ представляется в виде отношения многочленов от e^{pT}

$$W_3^*(p) = \frac{H^*(e^{pT})}{G^*(e^{pT})} = \frac{H^*(z)}{G^*(z)}, \quad (89)$$

где $z = e^{pT}$. Порядок $G^*(z)$ равен l . Пусть корни уравнения $G^*(z) = 0$ будут

$$z_1 = e^{p_1 T}, \quad z_2 = e^{p_2 T}, \quad \dots, \quad z_l = e^{p_l T}. \quad (90)$$

Тогда можно представить $W_3^*(p)$ в виде суммы простейших дробей (ограничимся случаем, когда корни z_i различные):

$$W_3^*(p) = \sum_{v=1}^l \frac{d_v}{e^{pT} - e^{p_v T}}. \quad (91)$$

Здесь d_ν — постоянные. Найдем оригинал этого изображения. Рассмотрим функцию

$$f(nT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 1, \\ e^{\nu(n-1)T} & \text{при } n \geq 1. \end{cases} \quad (92)$$

Дискретное L -изображение этой функции имеет вид

$$\begin{aligned} D\{f(nT)\} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pnT} \cdot e^{\nu(n-1)T} = e^{-p_\nu T} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(p-p_\nu)nT} = \\ &= e^{-p_\nu T} \sum_{n=1}^{\infty} v^n = e^{-p_\nu T} \cdot \frac{v}{1-v}, \end{aligned} \quad (93)$$

где

$$v = e^{-(p-p_\nu)T}. \quad (94)$$

Итак,

$$D\{f(nT)\} = e^{-p_\nu T} \frac{e^{-(p-p_\nu)T}}{1 - e^{-(p-p_\nu)T}} = \frac{1}{e^{pT} - e^{p_\nu T}}. \quad (95)$$

Поэтому оригинал $g_3(nT)$ для $W_3^*(p)$, согласно (91), можно записать при $n \geq 1$ в виде

$$g_3(nT) = \sum_{\nu=1}^l d_\nu \cdot e^{\nu(n-1)T}, \quad g_3(0) = 0. \quad (96)$$

Пусть теперь на замкнутую систему действует не единичный импульс, а произвольная функция $X(nT)$. Тогда, поскольку произведению изображений соответствует свертка оригиналов, находим аналогично (40)

$$X(nT) = \sum_{m=0}^n X_0(mT) g_3[(n-m)T] = \sum_{m=1}^n X_0(mT) g_3[(n-m)T], \quad (97)$$

так как $g_3(0) = 0$.

Выражение (74) представляет собой уравнение системы, написанное для изображений. Из него можно получить уравнение для оригиналов. Предварительно заметим, что формулу (89) для $W_3^*(p)$ можно записать в виде отношения многочленов от e^{-pT} , а не от e^{pT} . Действительно, умножив числитель и знаменатель правой части (89) на e^{-lpT} , находим

$$W_3^*(p) = \frac{M^*(e^{-pT})}{N^*(e^{-pT})}, \quad (98)$$

где M^* и N^* — многочлены от e^{-pT} , причем степень многочлена N^* равна l . Подставляя (96) в (85), получим

$$N^*(e^{-pT}) X^*(p) = M^*(e^{-pT}) X_0^*(p). \quad (99)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} N^*(e^{-pT}) &= a_0(e^{-pT})^l + a_1(e^{-pT})^{l-1} + \dots + a_{l-1}e^{-pT} + a_l, \\ M^*(e^{-pT}) &= b_0(e^{-pT})^q + b_1(e^{-pT})^{q-1} + \dots + b_{q-1}e^{-pT} + b_q. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Подставив (100) в (99), находим

$$\begin{aligned} a_0[e^{-pT} X^*(p)] + a_1[e^{-p(l-1)T} X^*(p)] + \dots + a_l X^*(p) = \\ = b_0[e^{-pqT} X_0^*(p)] + b_1[e^{-p(q-1)T} X_0^*(p)] + \dots + b_q X_0^*(p). \end{aligned} \quad (101)$$

Теперь воспользуемся теоремой запаздывания, которая для дискретного преобразования Лапласа имеет тот же вид, что и для непрерывного.

Пусть n и k — целые числа и

$$Y(nT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k, \\ X[(n-k)T] & \text{при } n \geq k. \end{cases} \quad (102)$$

Следовательно, функция $Y(nT)$ запаздывает относительно $X(nT)$ на время, равное kT . Тогда

$$D\{Y(nT)\} = e^{-pkT} D\{X(nT)\}. \quad (103)$$

Действительно, положим $m_1 = m - k$. Тогда

$$\begin{aligned} D\{Y(nT)\} &= \sum_{m=0}^{\infty} Y(mT) e^{-pmT} = \sum_{m=k}^{\infty} X[(n-k)T] e^{-pmT} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} X[m_1T] e^{-p(m_1+k)T} = e^{-pkT} \sum_{m_1=0}^{\infty} X[m_1T] e^{-pm_1T} = e^{-pkT} D\{X(nT)\}. \end{aligned} \quad (104)$$

Пользуясь этой теоремой, можно перейти от уравнения (101) для изображения к уравнению для оригиналов. Очевидно, последнее имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 X[(n-l)T] + a_1 X[(n-l+1)T] + \dots + a_l X[nT] = \\ = b_0 X_0[(n-q)T] + b_1 X_0[(n-q+1)T] + \dots + b_q X_0[nT]. \end{aligned} \quad (105)$$

Это уравнение связывает между собой значения оригинала $X[mT]$ для моментов $m = n - l, n - l + 1, \dots, n$. Уравнение (105) носит название линейного уравнения в конечных разностях с постоянными коэффициентами или, иначе, линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Метод решения этого уравнения аналогичен методу решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

§ 3. Устойчивость импульсных систем

Теория импульсных линейных систем имеет много общих черт с теорией непрерывных линейных систем. Ниже показано, что и методы исследования устойчивости импульсных систем являются, в известном смысле, аналогами соответствующих методов в теории непрерывных систем.

Рассмотрим разностное уравнение (105) § 2 импульсной системы. Как и в непрерывных системах, общее решение уравнения с правой частью представляет собой сумму двух слагаемых

$$X(nT) = X_d(nT) + X_s(nT), \quad (1)$$

где $X_s(nT)$ — частное решение уравнения (105) § 2 с правой частью, а $X_d(nT)$ — общее решение уравнения без правой части:

$$a_0 X_d[(n-l)T] + a_1 X_d[(n-l+1)T] + \dots + a_l X_d[nT] = 0. \quad (2)$$

Так же как и в непрерывных системах, если $X_s(nT)$ описывает установившийся процесс в системе, то $X_d(nT)$ представляет собой переходный процесс. Равенство (1) получается совершенно аналогично соответствующему равенству для непрерывных систем. Решение уравнения (2) можно найти способом, сходным с методом нахождения решения аналогичного уравнения непрерывной системы. Предполагаем существование решения уравнения (2) в следующем виде:

$$X_d(nT) = u^{nT} = z^n, \quad (3)$$

где $z = uT$. Очевидно, при этом

$$X_d[(n-l)T] = u^{(n-l)T}, \quad X_d[(n-l+1)T] = u^{(n-l+1)T} \quad (4)$$

и т. д.

Подставим предполагаемое решение (3) в уравнение (2). Получим

$$a_0 u^{(n-l)T} + a_1 u^{(n-l+1)T} + \dots + a_l u^{nT} = 0 \quad (5)$$

или после сокращения на $u^{nT} \neq 0$,

$$a_0 u^{lT} + a_1 u^{(l+1)T} + \dots + a_l = 0. \quad (6)$$

Умножив обе части этого уравнения на u^{lT} с учетом $z = u^T$, приходим к уравнению относительно z :

$$a_l z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0. \quad (7)$$

Следовательно, для того чтобы предполагаемая форма решения (3) удовлетворяла уравнению (2), необходимо и достаточно соблюдение соотношения (7) для величины z . Уравнение (7) называется характеристическим уравнением, составленным для разностного уравнения (2). Пусть z_1, z_2, \dots, z_l — корни этого уравнения (без ограничения общности считаем эти корни различными). Тогда уравнение (2) имеет, например, решение $c_1 z_1^n$, где c_1 — постоянная величина, а также решения $c_2 z_2^n, c_3 z_3^n, \dots, c_l z_l^n$, где c_1, c_2, \dots, c_l — постоянные. Так как уравнение (2) линейно, то его решением является и сумма указанных выше решений, т. е.

$$X_d[nT] = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_l z_l^n = c_1 u_1^{nT} + c_2 u_2^{nT} + \dots + c_l u_l^{nT}. \quad (8)$$

Здесь $z_i = u_i^T$. Формула (8) дает общее решение разностного уравнения (2), содержащее l постоянных c_1, c_2, \dots, c_l . Последние определяются из l «начальных условий», т. е. из задания определенных значений X_d для первых l дискретов.

$$X_d[0T], X_d[1T], X_d[2T], \dots, X_d[(l-1)T].$$

Если система устойчива, то в пределе значение переходной составляющей $X_d[nT]$ процесса стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_d[nT] = 0. \quad (9)$$

Это необходимое и достаточное условие устойчивости. Из выражения (8) видно, что условие (9) имеет место лишь тогда, когда все корни характеристического уравнения (7) по модулю меньше единицы.

Действительно, пусть, например, z_1 — действительное число; тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_1|^n = 0$ при $|z_1| < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_1|^n = \infty$ при $|z_1| > 1$.

Если же имеется пара комплексно сопряженных корней, например

$$z_1 = r e^{j\varphi}, \quad z_2 = r e^{-j\varphi}, \quad (10)$$

то

$$c_1 z_1^n + c_2 z_2^n = c_1 [r e^{j\varphi}]^n + c_2 [r e^{-j\varphi}]^n = r^n [c_1 e^{jn\varphi} + c_2 e^{-jn\varphi}]. \quad (11)$$

Комплексное число $c_1 e^{jn\varphi} + c_2 e^{-jn\varphi}$ ограничено по модулю. Если теперь $r > 1$, то $r^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$; если же $r < 1$, то $r^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, комплексно сопряженные корни также должны удовлетворять неравенству $|z_i| < 1$, иначе в выражении (8) найдутся составляющие, модуль которых неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, вследствие чего система окажется неустойчивой.

Итак, необходимым и достаточным условием устойчивости для импульсной системы является соблюдение неравенства

$$|z_i| < 1 \quad (12)$$

для всех корней z_i характеристического уравнения (7). Это и есть признак устойчивости.

Будем обозначать корни характеристического уравнения точками на комплексной плоскости (рис. 8.19). Тогда корни характеристического уравнения устойчивости системы должны быть расположены *внутри* области, ограниченной окружностью радиуса, равного единице, с центром в начале координат (рис. 8.19, а). Если же имеются корни за пределами этой области, то система неустойчива.

Рассмотрим предложенное математиком Мизесом преобразование, сводящее условие (12) к условиям Гурвица. Для этой цели произведем замену переменной в характеристическом уравнении (7) с помощью формулы

$$z = \frac{y+1}{y-1}. \tag{13}$$

Подставив выражение для z из (13) в уравнение (12), получим новое уравнение для переменной y . Если числа z удовлетворяют условию (12), то и числа y

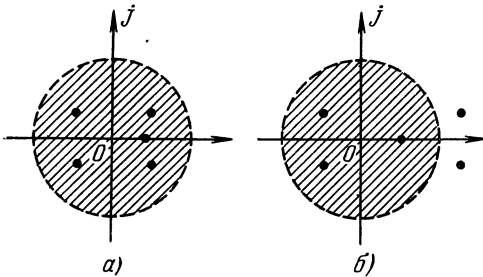


Рис. 8.19.

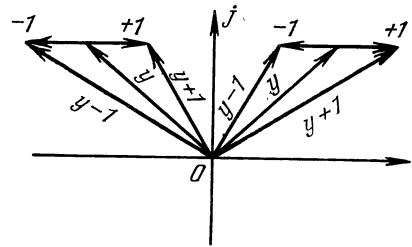


Рис. 8.20.

y находятся внутри некоторой области из комплексной плоскости. Если $|z| < 1$, то из (13) следует, что

$$\left| \frac{y+1}{y-1} \right| < 1 \tag{14}$$

или

$$|y+1| < |y-1|. \tag{15}$$

Рассмотрим числа y , расположенные в левой и правой полуплоскостях (рис. 8.20). Число $y+1$ образуется прибавлением вектора $+1$ к вектору y , а число $y-1$ — прибавлением вектора -1 к вектору y . Из рис. 8.20 ясно, что для чисел y , расположенных в левой полуплоскости, справедливо неравенство (15), а для чисел y , расположенных в правой полуплоскости, это неравенство несправедливо и имеет место противоположное неравенство

$$|y+1| > |y-1|, \tag{16}$$

соответствующее условию $|z| > 1$. Итак, если $|z| < 1$, то соответствующие числа y расположены в левой полуплоскости. Поэтому в этом случае для уравнения (7), преобразованного с помощью формулы (13), все определители Гурвица имеют положительный знак. Это и служит признаком того, что все корни уравнения (7) удовлетворяют неравенству $|z| < 1$.

Рассмотрим в качестве примера характеристическое уравнение первой степени типа (7)

$$a_1 z + a_0 = 0. \tag{17}$$

После подстановки (13) находим

$$a_1 \frac{y+1}{y-1} + a_0 = 0. \tag{18}$$

Так как при $y \neq 1$ величина $y - 1 \neq 0$, то, умножая обе части (18) на $(y - 1)$, получаем

$$a_1(y + 1) + a_0(y - 1) = 0 \quad (19)$$

или окончательно

$$(a_1 + a_0)y + (a_1 - a_0) = 0. \quad (20)$$

Единственный корень этого уравнения находится в левой полуплоскости тогда, когда его коэффициенты имеют одинаковые знаки. Если

$$a_1 + a_0 > 0, \quad (21)$$

то условие устойчивости имеет вид

$$a_1 - a_0 > 0. \quad (22)$$

В случае уравнения второй степени

$$a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0 \quad (23)$$

после подстановки (13) находим, умножив обе части равенства на $(y - 1)$,

$$a_2(y + 1)^2 + a_1(y + 1)(y - 1) + a_0(y - 1)^2 = 0 \quad (24)$$

или

$$(a_2 + a_1 + a_0)y^2 + 2(a_2 - a_0)y + (a_2 - a_1 + a_0) = 0. \quad (25)$$

Для того чтобы корни этого уравнения находились в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты были положительны, т. е. удовлетворялись условия

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 > 0, \quad a_2 - a_0 > 0, \\ a_2 - a_0 + a_0 > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Из условий (16), (22) или (24) видно, что неустойчивость возможна даже в импульсных системах первого или второго порядков. Рассмотрим в качестве примера систему автоматического регулирования, структурная схема которой изображена на рис. 8.21. Импульсный элемент ИЭ выдает на выходе импульсы продолжительности γT (см. рис. 8.2), коэффициент усиления ИЭ принимаем равным единице.

Непрерывная часть НЧ системы представляет собой инерционное звено с передаточной функцией

$$W_n(p) = \frac{k}{1 + pT_1} \quad (27)$$

(ср. с формулой (43) § 2). В данном случае степень знаменателя $l = 1$ и

$$Q(p) = k, \quad R(p) = 1 + pT_1. \quad (28)$$

Находим передаточную функцию $W^*(p)$ разомкнутой системы по формуле (51) § 2 с учетом (48) § 2:

$$W^*(p) = c_1 \frac{e^{p_1 T}}{e^{pT} - e^{p_1 T}} = \frac{Q(p_1)}{R'(p_1)} \frac{1 - e^{-\gamma p_1 T}}{p_1} \frac{e^{p_1 T}}{e^{pT} - e^{p_1 T}}, \quad (29)$$

p_1 — это корень характеристического уравнения непрерывной части системы $1 + pT_1 = 0$, т. е.

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}. \quad (30)$$

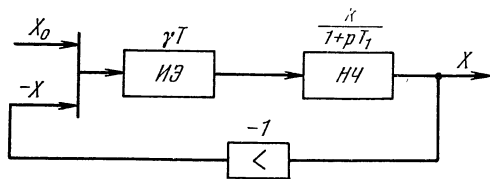


Рис. 8.21.

Поэтому $Q(p_1) = k$, $R'(p_1) = T_1$ и

$$W^*(p) = -k(1 - e^{\gamma \frac{T}{T_1}}) \frac{e^{-\frac{T}{T_1}}}{e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}}} = k(e^{\gamma\beta} - 1) \frac{e^{-\beta}}{e^{pT} - e^{-\beta}}, \quad (31)$$

где

$$\beta = \frac{T}{T_1}. \quad (32)$$

Находим теперь передаточную функцию замкнутой системы по формуле (73) § 2:

$$\begin{aligned} W_3^*(p) &= \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} = \frac{k(e^{\gamma\beta} - 1)e^{-\beta}}{(e^{pT} - e^{-\beta}) + k(e^{\gamma\beta} - 1)e^{-\beta}} = \\ &= \frac{ke^{-\beta}(e^{\gamma\beta} - 1)}{e^{pT} + e^{-\beta}[k(e^{\gamma\beta} - 1) - 1]} = \frac{ke^{-\beta}(e^{\gamma\beta} - 1)e^{-pT}}{1 + e^{-\beta}[k(e^{\gamma\beta} - 1) - 1]e^{-pT}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Сравнив знаменатель этого выражения с формулами (98) и (100) § 2, можно убедиться в том, что в данном случае

$$a_0 = e^{-\beta}[k(e^{\gamma\beta} - 1) - 1], \quad a_1 = 1 \quad (34)$$

и характеристическое уравнение имеет первую степень (ср. с (17)). Поскольку условие (21) здесь удовлетворяется (это нетрудно проверить), единственное условие устойчивости (17) принимает вид

$$1 + e^{-\beta} - ke^{-\beta}(e^{\gamma\beta} - 1) > 0. \quad (35)$$

Отсюда следует, что коэффициент усиления k в устойчивой системе должен быть меньше предельного значения $k_{\text{пр}}$, и, умножив обе части на e^β , условие (35) можно переписать в виде

$$k < \frac{e^\beta + 1}{e^{\gamma\beta} - 1} = k_{\text{пр}}. \quad (36)$$

Итак, и в импульсной системе, так же как в непрерывной, существует предельный коэффициент усиления $k_{\text{пр}}$. Переход величины k за это значение ($k > k_{\text{пр}}$) влечет за собой неустойчивость замкнутой системы.

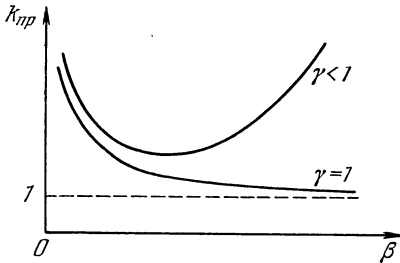


Рис. 8.22.

Начертим кривую зависимости $k_{\text{пр}}$ от $\beta > 0$ (рис. 8.22) при $\gamma < 1$ и $\gamma = 1$. При $\beta \rightarrow 0$ знаменатель выражения $k_{\text{пр}}$ стремится к нулю; поэтому $k_{\text{пр}} \rightarrow \infty$. При $\beta \rightarrow \infty$ величина $k_{\text{пр}}$ также стремится к бесконечности, если $\gamma < 1$. Если же $\gamma = 1$, то $k_{\text{пр}} \rightarrow 1$.

Из формулы (32) следует, что при $\beta \rightarrow 0$, т. е. $T \rightarrow 0$, импульсная система переходит в непрерывную систему первого порядка, которая, очевидно, устойчива при любом конечном k (т. е. для нее $k_{\text{пр}} = \infty$). Это и видно из рис. 8.21. Следовательно, в данном случае введение в систему импульсного элемента уменьшает запас устойчивости системы. Однако не всегда имеет место подобное явление. Так, например, если в непрерывной части системы содержится звено запаздывания, то введение импульсного элемента может способствовать стабилизации системы.

Рассмотрим пример. Найти условия устойчивости импульсной следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 8.23. Коэффициент усиления импульсного элемента $ИЭ$ считаем равным единице.

Как известно из гл. II, двигатель постоянного тока с редуктором может быть, при известной идеализации, изображен в виде последовательного соединения инерционного и интегрирующего звеньев (см. рис. 8.23). Передаточная функция непрерывной части тракта

$$W_n(p) = \frac{k_1 \xi_0}{(1 + pT_{\text{эм}})p} = \frac{\xi}{(1 + pT_{\text{эм}})p}. \quad (37)$$

Перейдем от переменной p к новой переменной q , связанной с p равенством

$$q = pT. \quad (38)$$

(Этот переход соответствует переходу для оригиналов к безразмерному времени $\tau = t/T$.) Тогда из (37) и (38)

находим

$$W_n(q) = \frac{\xi T \beta}{(q + \beta)q}. \quad (39)$$

Здесь обозначено

$$\beta = \frac{T}{T_{\text{эм}}}. \quad (40)$$

Функция $W_n(q)$ имеет полюсы

$$q_0 = 0, \quad q_1 = -\beta. \quad (41)$$

Воспользуемся формулами (48) и (52) § 2 для определения $W^*(p)$ — дискретной передаточной функции разомкнутой системы. Согласно этим формулам

$$c_0 = -\frac{\xi}{\beta}, \quad c_1 = \xi, \quad c_{1,0} = \frac{\xi}{\beta}. \quad (42)$$

С помощью формулы (52) § 2 находим

$$W^*(q) = \xi \left\{ \frac{\gamma}{e^q - 1} - \frac{e^{\gamma\beta} - 1}{\beta} \cdot \frac{e^{-\beta}}{e^q - e^{-\beta}} \right\} = \frac{\xi (b'_1 e^q + b'_0)}{(e^q - 1)(e^q - e^{-\beta})}, \quad (43)$$

где

$$b'_1 = \frac{\beta\gamma - e^{-\beta(1-\gamma)} + e^{-\beta}}{\beta}, \quad b'_0 = \frac{e^{-\beta(1-\gamma)} - \beta\gamma e^{-\beta} - e^{-\beta}}{\beta}. \quad (44)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы принимает вид

$$(e^q - 1)(e^q - e^{-\beta}) + \xi (b'_1 e^q + b'_0) = 0 \quad (45)$$

или, если подставить $e^q = z$,

$$(z - 1)(z - e^{-\beta}) + b_1 z + b_0 = 0, \quad (46)$$

где

$$b_1 = \xi b'_1, \quad b_0 = \xi b'_0.$$

Запишем в развернутом виде уравнение (46):

$$z^2 + (b_1 - 1 - e^{-\beta})z + (b_0 + e^{-\beta}) = 0. \quad (47)$$

Здесь коэффициент уравнения

$$a_2 = 1, \quad a_1 = b_1 - 1 - e^{-\beta}, \quad a_0 = b_0 + e^{-\beta}. \quad (48)$$

Из условий устойчивости (26) получаем три неравенства:

$$\left. \begin{aligned} 1 + b_1 - 1 - e^{-\beta} + b_0 + e^{-\beta} &> 0, \\ 1 - b_0 - e^{-\beta} &> 0, \\ 1 - b_1 + 1 + e^{-\beta} + b_0 + e^{-\beta} &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

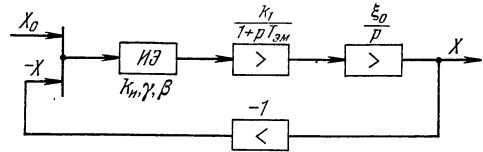


Рис. 8.23.

которые можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi(b'_1 + b'_0) &> 0, \\ 1 - \xi b'_0 - e^{-\beta} &> 0, \\ 2(1 + e^{-\beta}) - \xi(b'_1 - b'_0) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Из (44) получаем

$$\left. \begin{aligned} b'_1 + b'_0 &= \gamma(1 - e^{-\beta}) > 0, \\ b'_1 - b'_0 &= \frac{\beta\gamma(1 + e^{-\beta}) - 2e^{-\beta(1-\gamma)} + 2e^{-\beta}}{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Положим $\gamma = 1$ и $\beta = 1$. Тогда формулы (51) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} b'_1 + b'_0 &= 1 - e^{-1} > 0, \\ b'_1 - b'_0 &= 1 + e^{-1} - 2 + 2e^{-1} = 3e^{-1} - 1 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Кроме того,

$$b'_0 = 1 - 2e^{-1} > 0. \quad (53)$$

Таким образом, два последних условия устойчивости (50) переписываются в виде

$$\left. \begin{aligned} (1 - e^{-1}) - \xi(1 - 2e^{-1}) &> 0, \\ 2(1 + e^{-1}) - \xi(3e^{-1} - 1) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Первое из этих условий удовлетворяется при

$$\xi < \frac{1 - e^{-1}}{1 - 2e^{-1}} = \frac{e - 1}{e - 2} \approx \frac{1,71}{0,71} = 2,41. \quad (55)$$

Второе условие удовлетворяется при

$$\xi < \frac{2(1 + e^{-1})}{3e^{-1} - 1} = \frac{2(e + 1)}{3 - e} \approx \frac{7,42}{0,29} = 25,5. \quad (56)$$

Из условий (55) и (56) получаем окончательно условие устойчивости в следующем виде:

$$\xi < 2,41 = \xi_{\text{пр}}. \quad (57)$$

Таким образом, существует предельное значение коэффициента усиления $\xi_{\text{пр}}$. Сопоставляя формулу (89) § 2, т. е. выражение

$$W_3^*(p) = \frac{H^*(e^{pT})}{G^*(e^{pT})} = \frac{H^*(z)}{G^*(z)}, \quad (58)$$

с соотношениями (98) и (100) § 2, можно усмотреть, что

$$G^*(e^{pT}) = a_l (e^{pT})^l + a_{l-1} (e^{pT})^{l-1} + \dots + a_0 = a_l z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_0 = G^*(z). \quad (59)$$

Сравним теперь эту формулу с характеристическим уравнением (7). Очевидно, что последнее можно записать в виде

$$G^*(z) = 0, \quad (60)$$

что совершенно аналогично соответствующей записи для непрерывной системы. Задача исследования устойчивости сводится, как указано выше, к выяснению расположения корней уравнения (60). Нужно узнать, находятся ли они в области $|z| < 1$ (тогда система устойчива) или вне ее (тогда система неустойчива).

Уравнение (60) можно переписать в виде

$$G^*(e^{pT}) = 0 \quad (61)$$

или в развернутом виде

$$G^*(e^{pT}) = a_l e^{pTl} + a_{l-1} e^{pT(l-1)} + \dots + a_0 = 0. \quad (62)$$

Положим $p = \alpha + j\beta$. Тогда

$$z = e^{pT} = e^{\alpha T} \cdot e^{j\beta T}, \quad (63)$$

и условие $|z| < 1$ сводится к неравенству

$$|e^{\alpha T}| < 1, \quad (64)$$

откуда следует

$$\alpha < 0. \quad (65)$$

Итак, условие устойчивости сводится к тому, что корни уравнения (62) должны иметь отрицательные действительные части, т. е. должны находиться в левой полуплоскости комплексной переменной.

Если p_i — корень уравнения (62), то и $p'_i = p_i + \frac{2\pi k}{T} j$, где k — целое число, также будет корнем этого уравнения. Действительно, слагаемое правой части уравнения ($m = 0, \dots, l$) при подстановке вместо p величины p'_i принимает вид

$$a_{l-m} e^{p'_i T(l-m)} = a_{l-m} e^{(p_i + \frac{2\pi k}{T} j)^T(l-m)} = a_{l-m} e^{p_i T(l-m)} \cdot e^{j2\pi k(l-m)} = a_{l-m} e^{p_i T(l-m)}, \quad (66)$$

так как, поскольку $k(l-m)$ — целое число, справедливо равенство

$$e^{j2\pi k(l-m)} = 1. \quad (67)$$

Следовательно, каждое слагаемое оказалось таким же, как и при подстановке $p = p_i$, вследствие чего левая часть уравнения (62) равна нулю. Таким образом, уравнение (62) имеет бесконечное множество корней; однако все эти корни могут быть получены из основных корней p_1, \dots, p_l , расположенных в полосе

$$-\frac{\pi}{T} j < \text{Im } p < +\frac{\pi}{T} j. \quad (68)$$

Если эти основные корни находятся в левой полуплоскости, то и все остальные корни, получаемые из основных прибавлением $\frac{2\pi k}{T} j$, также находятся в левой полуплоскости.

Итак, для определения устойчивости достаточно лишь установить, что основные корни уравнения (62) находятся в заштрихованной на рис. 8.16 левой полуполосе

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re } p < 0, \\ -\frac{\pi j}{T} < \text{Im } p < +\frac{\pi j}{T}, \end{array} \right\} \quad (69)$$

т. е. не входят в правую, незаштрихованную полуполосу. При $T \rightarrow 0$ импульсная система становится непрерывной, и заштрихованная полуполоса превращается в левую полуплоскость, а признак устойчивости превращается в известный из предыдущего признак для непрерывной системы.

Рассмотрим выражение $G^*(z)$ (см. (59)). Согласно теореме Безу его можно переписать в следующем виде:

$$G^*(z) = a_l(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_l), \quad (70)$$

где z_i ($i = 1, 2, \dots, l$) — корни характеристического уравнения (60). Положим

$$z = e^{j\omega} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (71)$$

и будем изменять параметр ω в уравнении

$$G^*(e^{j\omega}) = a_1(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_l) \tag{72}$$

в пределах от $-\pi$ до π . Найдем, каков будет при этом угол поворота или, иначе, приращение аргумента комплексного вектора $G^*(e^{j\omega})$. Общий угол поворота этого вектора равен сумме углов поворота сомножителей $(e^{j\omega} - z_i)$, где $i = 1, 2, \dots, l$. Поэтому рассмотрим угол поворота одного такого сомножителя. Здесь возможны два случая (рис. 8.24).

а) Точка R конца вектора z_i находится внутри окружности $|z| = 1$ (рис. 8.24, а). При изменении ω от $-\pi$ до $+\pi$ конец вектора $\overrightarrow{ON} = e^{j\omega}$, т. е. точка N обегает всю окружность, начиная от точки M_1 и проходя затем через точки M_2, M_3, M_4 . При этом угол поворота вектора $\overrightarrow{RN} = e^{j\omega} - z_i$ равен

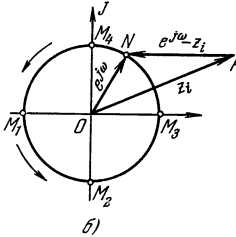
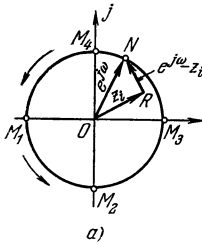


Рис. 8.24.

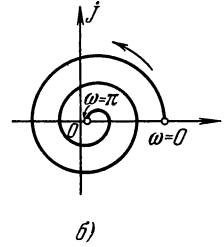
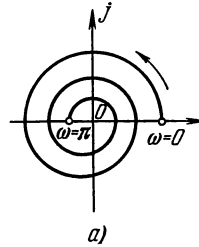


Рис. 8.25.

2л. Отсюда следует, что в том случае, когда система устойчива (все корни z_i внутри окружности), общий угол поворота вектора $G^*(e^{j\omega})$ равен $2\pi l$.

б) Точка R конца вектора z_i находится вне окружности $|z| = 1$ (рис. 8.24, б). В этом случае результирующий угол поворота вектора $\overrightarrow{RN} = e^{j\omega} - z_i$ равен нулю, что легко проследить по рис. 8.24, б. Поэтому в случае неустойчивой системы, когда некоторые корни z_i находятся вне окружности $|z| = 1$, их вклад в общий угол поворота вектора $G^*(e^{j\omega})$ равен нулю. Поэтому угол поворота вектора $G^*(e^{j\omega})$ меньше $2\pi l$.

Вернемся к вектору p , связанному с z равенством (63). Положив

$$p = j \frac{\omega}{T} \tag{73}$$

и меняя ω от $-\pi$ до $+\pi$, можно усмотреть из (63), что

$$z = e^{j\omega}.$$

Итак, когда вектор z на z -плоскости обегает всю окружность $|z| = 1$, то вектор p на плоскости пробегает отрезок мнимой оси от $-j \frac{\pi}{T}$ до $+j \frac{\pi}{T}$ (см. рис. 8.16). Если при этом угол поворота вектора $G^*(e^{pT})$ (см. равенство (62)) равен $2\pi l$, то система устойчива; если же этот угол меньше чем $2\pi l$, то система неустойчива. Этот критерий является аналогом критерия А. В. Михайлова для импульсных систем и был впервые получен Я. З. Цыпкиным. На рис. 8.25 показаны примерные кривые $G^*(e^{j\omega})$ для устойчивой (рис. 8.25, а) и неустойчивой (рис. 8.25, б) систем при $l = 5$. Кривые начерчены лишь для $0 \leq \omega \leq \pi$. Участок кривой при $-\pi \leq \omega \leq 0$ симметричен начерченному участку кривой относительно действительной оси. Поэтому достаточно произвести проверку одного лишь первого участка. Если угол поворота вектора $G^*(e^{j\omega})$ на этом участке равен $\frac{2\pi l}{2} = \pi l$, то система устойчива; если же этот угол меньше πl , то система неустойчива.

Для кривой рис. 8.25, *a* этот угол равен 5π ; следовательно, соответствующая система устойчива (для нее $l = 5$). Для кривой рис. 8.25, *б* угол поворота равен 4π . Поэтому соответствующая система неустойчива.

Для импульсных систем можно сформулировать критерий, данный Я. З. Цыпкиным и являющийся аналогом критерия Найквиста.

Рассмотрим передаточную функцию $W^*(p)$ разомкнутой импульсной системы (см. формулу (37) § 2).

Пусть

$$W^*(p) = \frac{Q^*(p)}{R^*(p)}, \tag{74}$$

где $R^*(p)$ и $Q^*(p)$ — многочлены от $z = e^{pT}$. Условимся, что корни $R^*(z)$ находятся внутри окружности $|z| = 1$ и степень $Q^*(z)$ меньше степени $R^*(z)$. Комплексный коэффициент передачи разомкнутой системы

$$W^*(j\omega) = \frac{Q^*(j\omega)}{R^*(j\omega)}, \tag{75}$$

а амплитудно-фазовая характеристика — это годограф вектора $W^*(j\omega)$. Аналог критерия Найквиста можно сформулировать так же, как и для непрерывных систем: если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой

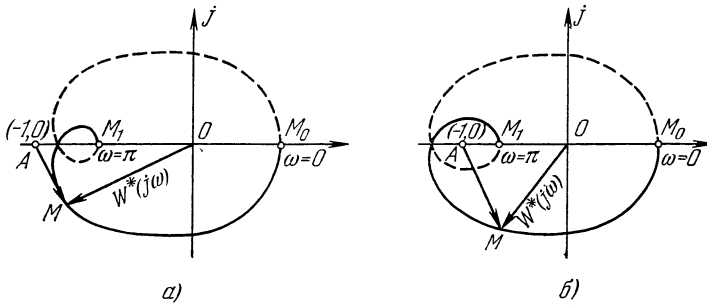


Рис. 8.26.

системы не охватывает критическую точку $(-1, 0)$, то замкнутая система устойчива. В противном случае замкнутая система неустойчива.

Понятие «охватывать» имеет тот же смысл, что и в непрерывных системах. Например, на рис. 8.26, *a* результирующий угол поворота вспомогательного вектора AM при обходе вдоль амплитудно-фазовой характеристики от точки M_0 , соответствующей частоте $\omega = 0$, до точки M_1 ($\omega = \pi$) равен нулю. Следовательно, характеристика не охватывает критическую точку A , и замкнутая система устойчива. На рис. 8.26, *б* угол поворота вектора AM отличен от нуля; следовательно, замкнутая система неустойчива.

Можно добавить к характеристике участок, соответствующий изменению параметра ω от 0 до $-\pi$. Этот участок изображен на рис. 8.26 в виде пунктирной линии, симметричной характеристике относительно оси абсцисс. Тогда вся кривая при изменении параметра от $-\pi$ до $+\pi$ будет замкнутой. Формулировка критерия Найквиста остается неизменной и в том случае, когда используется вся замкнутая кривая, при $-\pi \leq \omega \leq +\pi$.

Если у многочлена $R^*(z)$ имеется корень z_i , равный единице по модулю (или, что одно и то же, имеется корень $p_i = 0$, либо корень $p_i = \pm j\pi$), то формулировка критерия Найквиста остается той же, но построение несколько меняется. Нужно дополнить частотную характеристику при $-\infty < \omega < \infty$ еще одним участком — дугой бесконечно большого радиуса в правой полуплоскости. Аналогичное правило существует и для непрерывных систем (см. гл. VI).

На рис. [8.27, а изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая устойчивой, а на рис. 8.27, б — неустойчивой системе. Из рис. 8.27 видно, что можно ограничиться построением, кроме

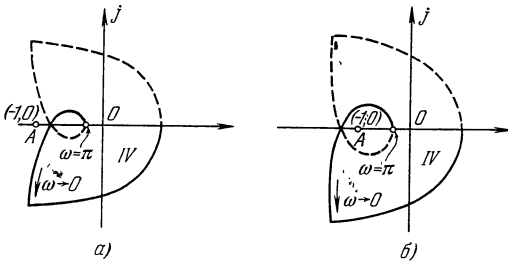


Рис. 8.27.

основной характеристики при $0 \leq \omega \leq \pi$, еще дополнительной дуги бесконечно большого радиуса в четвертом квадрате (римская цифра IV на рис. 8.27). Формулировка критерия при этом остается той же.

Докажем справедливость критерия Найквиста для случая, когда все корни $R^*(z)$ — внутри окружности $|z| = 1$. Доказательство аналогично тому, которое было дано для случая непрерывных систем.

Как видно из рис. 8.26, вектор \vec{AM} есть сумма вектора, равного +1 и $W^*(j\omega)$:

$$\vec{AM} = 1 + W^*(j\omega) = 1 + \frac{Q^*(j\omega)}{R^*(j\omega)} = \frac{Q^*(j\omega) + R^*(j\omega)}{R^*(j\omega)}. \quad (76)$$

С другой стороны, в формуле для комплексного коэффициента передачи замкнутой системы

$$W_s^*(j\omega) = \frac{W^*(j\omega)}{1 + W^*(j\omega)} = \frac{\frac{Q^*(j\omega)}{R^*(j\omega)}}{1 + \frac{Q^*(j\omega)}{R^*(j\omega)}} = \frac{Q^*(j\omega)}{Q^*(j\omega) + R^*(j\omega)} = \frac{Q^*(j\omega)}{G^*(j\omega)}. \quad (77)$$

Характеристический многочлен равен

$$G^*(j\omega) = Q^*(j\omega) + R^*(j\omega). \quad (78)$$

Заменяя в формуле (76) числитель через $G^*(j\omega)$, ее можно переписать в виде

$$\vec{AM} = \frac{G^*(j\omega)}{R^*(j\omega)}. \quad (79)$$

Здесь R^* и G^* — многочлены от $z = e^{j\omega}$ одинаковой степени l , причем корни многочлена $R^*(j\omega)$, согласно условию, находятся внутри окружности $|z| = 1$. Поэтому при $-\pi \leq \omega \leq \pi$ угол поворота этого вектора равен $2\pi l$. Если замкнутая система устойчива, то и угол поворота вектора $G^*(j\omega)$ также равен $2\pi l$; поэтому результирующий угол поворота вектора AM равен нулю. Если же замкнутая система неустойчива, то, согласно доказанному в предыдущем пункте, угол поворота вектора $R^*(j\omega)$ меньше $2\pi l$. Следовательно, в этом случае угол поворота вектора AM отличается от нуля.

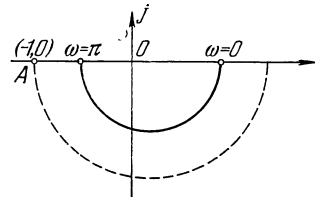


Рис. 8.28.

Рассмотрим пример системы, изображенной на рис. 8.21. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, как видно из формулы (31), есть годограф вектора

$$W^*(j\omega) = k(e^{\nu\beta} - 1) \frac{e^{-\beta}}{e^{j\omega} - e^{-\beta}} \quad (80)$$

(необходимо помнить, что $z = e^{\nu T}$ нужно заменить на $e^{j\omega}$).

Нетрудно показать, что годограф вектора $W^*(j\omega)$ представляет собой в данном случае полуокружность (рис. 8.28). При малых значениях k система

устойчива. При увеличении k масштаб кривой $W^*(j\omega)$ будет увеличиваться. При $k = k_{\text{пр}}$ она дойдет до точки $A (-1, 0)$. Это положение изображено в виде пунктирной кривой на рис. 8.28. Наконец, при $k > k_{\text{пр}}$ кривая будет уже охватывать критическую точку, и замкнутая система окажется неустойчивой. Из рис. 8.28 ясно, что при $k = k_{\text{пр}}$ имеет место равенство

$$[W^*(j\omega)]_{\omega=\pi} = -1. \quad (81)$$

Подставив сюда выражение (80), находим

$$k_{\text{пр}}(e^{\nu\beta} - 1) \frac{e^{-\beta}}{-1 - e^{-\beta}} = -1. \quad (82)$$

Здесь $e^{-j\omega}$ при $\omega = \pi$ заменено на -1 . Отсюда находим предельное значение коэффициента усиления

$$k_{\text{пр}} = \frac{1 + e^{-\beta}}{e^{-\beta}(e^{\nu\beta} - 1)} = \frac{e^{\beta} + 1}{e^{\nu\beta} - 1}. \quad (83)$$

Это выражение совпадает с выражением (36) для $k_{\text{пр}}$, найденным иным путем.

§ 4. Переходные процессы в импульсных системах

Как показано в § 2 этой главы, дискретные L -изображения входной $X_0(nT)$ и выходной величины $X(nT)$ импульсной системы (разомкнутой или замкнутой) связаны между собой равенством

$$X^*(p) = W^*(p) X_0^*(p), \quad (1)$$

где $W^*(p)$ — передаточная функция этой системы. Переходя от изображения $X^*(p)$ к оригиналу (для этого можно воспользоваться таблицей, связывающей оригиналы и изображения), можно найти процесс $X(nT)$. Однако способ непосредственного определения переходного процесса имеет те же недостатки, что и в непрерывных системах. Для исследования переходных процессов в импульсных системах можно применить методы, аналогичные косвенным методам исследования непрерывных систем. Здесь применимы и методы частотных характеристик, и методы распределения корней, и аналог интегральных методов.

Рассмотрим для примера методы распределения корней. Так же как и в непрерывных системах, перейдя от переменной p к новой переменной ξ с помощью уравнения (76) § 3, можно найти затухание η или, иначе, степень устойчивости, т. е. расстояние до мнимой оси ближайшего от нее из корней p_i характеристического уравнения. В отличие от непрерывных систем в импульсных системах имеется возможность получения *бесконечно большого затухания* $\eta = \infty$.

Рассмотрим сначала, как этого можно добиться с формальной точки зрения. Если все корни p_i характеристического уравнения уходят в «минус бесконечность», то корни $z_i = e^{p_i T}$ обращаются в *нуль*. Уравнение $G^*(z) = 0$ (см. (59) § 3) имеет все корни, равные нулю, при выполнении условий

$$a_{l-1} = a_{l-2} = \dots = a_0 = 0. \quad (2)$$

Действительно, в этом случае уравнение принимает вид

$$a_l z^l = 0, \quad (3)$$

а у этого уравнения все l корней равны нулю.

В формуле (58) § 3 для $W_3^*(p)$ числитель $H^*(z)$ может представлять собой по-прежнему многочлен от z степени не выше $(l - 1)$:

$$H^*(z) = b_{l-1}z^{l-1} + b_{l-2}z^{l-2} + \dots + b_1z + b_0. \quad (4)$$

Часть коэффициентов здесь может быть равна нулю. Из (3) следует, что знаменатель $G^*(z)$ выражения $W_3^*(p)$ равен (ср. также с (59) § 3)

$$G^*(z) = a_l z^l, \tag{5}$$

$$W_3^*(p) = \frac{H^*(e^{pT})}{G^*(e^{pT})} = \frac{H^*(z)}{G^*(z)} = \frac{1}{a_l} (b_{l-1}e^{-pT} + b_{l-2}e^{-p2T} + \dots + b_0e^{-plT}). \tag{6}$$

Здесь вместо z подставлено e^{pT} .

Как известно из предыдущего, дискретная передаточная функция есть дискретное L -изображение импульсной переходной функции $g_3(nT)$ системы, т. е.

$$W_3^*(p) = D\{g_3(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} g_3(nT) e^{-pnT}. \tag{7}$$

Сравним выражения (6) и (7). Приравнявая коэффициенты при e^{-pnT} для $n = 0, 1, \dots$, в правых частях равенства, получаем значения $g_3(nT)$:

$$\left. \begin{aligned} g_3(0) &= 0, & g_3(T) &= \frac{b_{l-1}}{a_l}, \\ g_3(2T) &= \frac{b_{l-2}}{a_l}, \dots, & g_3(lT) &= \frac{b_0}{a_l} \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

и т. д.

$$g_3(nT) = 0 \text{ при } n > l. \tag{9}$$

Условие (9) означает, что переходный процесс $g_3(nT)$ заканчивается спустя *конечное время*, равное $t = nT$. В этом физический смысл явления бесконечно большого затухания.

Импульсная переходная функция системы $g_3(nT)$ представляет собой результат воздействия на систему одного дискрета единичной высоты (см. рис. 8.29). В общем случае, когда ко входу системы приложена любая функция $X_0(nT)$, выходная величина $X(nT)$ описывается сверткой функций $X_0(nT)$ и $g_3(nT)$, т. е. рядом (97) § 2, имеющим вид

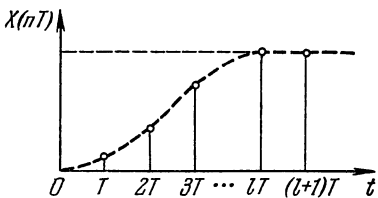


Рис. 8.29.

$$\begin{aligned} X(nT) &= \sum_{m=0}^n X_0(mT) g_3[(n-m)T] = \\ &= \sum_{m=0}^n X_0[(n-m)T] g_3(mT). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь из первого варианта формулы путем подстановки $n - m = m'$ и последующей замены буквы m' прежней буквой m получаем второе выражение.

При выполнении условий (9) все слагаемые этой суммы при $m > l$ обращаются в нули. Итак,

$$X(nT) = \sum_{m=0}^l X_0[(n-m)T] g_3(mT), \tag{11}$$

т. е. процесс заканчивается спустя конечное время также и в общем случае. Графически это показано на рис. 8.29.

Так как при этом переходный процесс заканчивается в наикратчайшее возможное время, то такие импульсные системы можно назвать «оптимальными» по быстрдействию.

Примеры показывают, что в импульсных системах можно обеспечить конечную длительность переходного процесса.

Рассмотрим, например, систему, изображенную на рис. 8.21 в частном случае, когда коэффициент $\gamma = 1$.

При этом, как следует из уравнения (33) § 3, передаточная функция замкнутой системы записывается следующим образом:

$$W^*(p) = \frac{ke^{-\beta}(e^\beta - 1)e^{-pT}}{1 + e^{-\beta}[k(e^\beta - 1) - 1]e^{-pT}} = \frac{k(1 - e^{-\beta})}{e^{pT} - e^{-\beta} + k(1 - e^{-\beta})}. \quad (12)$$

Характеристический многочлен $G^*(e^{pT})$, знаменатель в этой формуле принимает в данном случае вид

$$G^*(e^{pT}) = e^{pT} + k(1 - e^{-\beta}) - e^{-\beta}. \quad (13)$$

Его коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_1 = 1, \\ a_{l-1} &= a_0 = k(1 - e^{-\beta}) - e^{-\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Условие (2) бесконечного затухания можно записать в виде

$$a_0 = k(1 - e^{-\beta}) - e^{-\beta} = 0, \quad (15)$$

откуда может быть найден оптимальный коэффициент усиления, соответствующий этому соотношению,

$$k_{\text{опт}} = \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} = \frac{1}{e^\beta - 1}. \quad (16)$$

Установив это значение коэффициента усиления, можно добиться конечной длительности переходного процесса, который будет продолжаться в течение всего лишь одного интервала (так как здесь $l = 1$). Этот процесс показан на рис. 8.30.

Будет ли при этом система устойчива?

Согласно (36) § 3 предельный коэффициент усиления при $\gamma = 1$ равен

$$k_{\text{пр}} = \frac{e^\beta + 1}{e^\beta - 1} > k_{\text{опт}}, \quad (17)$$

следовательно, при $k = k_{\text{опт}}$ система устойчива.

Если длина интервала уменьшается, то β также уменьшается (см. (32) § 3). Поэтому $k_{\text{опт}}$, как видно из формулы (16), увеличивается. Теоретически можно было бы достичь сколь угодно малой величины T и, следовательно, сколь угодно малого времени переходного процесса. Однако в действительности при достаточно большом значении коэффициента усиления k некоторые величины в тракте системы достигают недопустимо больших значений, которые в реальных системах невозможны. Таким образом, и в импульсных системах продолжительность переходного процесса не может быть сколь угодно малой, ибо она ограничена допустимыми пределами изменения координат системы. С целью улучшения характера переходных процессов и, в частности, достижения «оптимальных» процессов с конечной длительностью приходится вводить в системы специальные дополнительные звенья. Можно вводить дополнительные звенья непрерывного типа последовательно в непрерывную часть системы, либо шунтировать такими звеньями обратной связи импульсный элемент. Наиболее важным типом дополнительных звеньев для коррекции импульсных систем являются специальные импульсные дополнительные блоки (импульсные фильтры) со звеньями запаздывания. В этих фильтрах можно обеспечить импульсную передаточную функцию в виде отношения многочленов от e^{pT} с любыми коэффициентами. Изложение вопросов коррекции импульсных систем выходит за рамки этой книги.

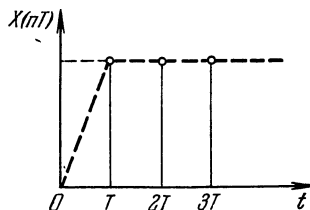


Рис. 8.30.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Уравнения нелинейных звеньев и систем

В предыдущих главах рассматривались линейные системы — системы, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Однако линейные уравнения звеньев и систем есть продукт идеализации реальных характеристик, которые в действительности являются нелинейными. Представлять эти характеристики в виде линейных, линеаризовать их означает приближенно, неточно копировать реальные характеристики. Если при линеаризации существенные черты явлений — как качественные, так и количественные — сохраняются, то линеаризация допустима. Однако далеко не все нелинейные характеристики и управления допускают подобную идеализацию — замену их линейными зависимостями. В ряде случаев при замене нелинейной характеристики линейной не только существенно искажается количественная оценка явлений, но часто пропадают и качественные черты, специфические для нелинейных систем. Задачей этой главы является введение в весьма сложную и до сих пор еще недостаточно исследованную область нелинейных систем автоматического регулирования.

Рассмотрим некоторые типичные нелинейные характеристики элементов и звеньев систем. Весьма часто встречаются усилительные звенья, обладающие нелинейной зависимостью между выходной величиной x и входной величиной x_0 . Различные типы зависимостей $x = f(x_0)$ изображены на рис. 9.1. Зависимость, изображенная на рис. 9.1, а, отличается тем, что крутизна характеристики уменьшается при увеличении x_0 . Иногда эта характеристика принимает предельную форму ломаной, изображенной на рис. 9.1, в. Зона $|x_0| > x_{01}$ иногда называется зоной насыщения. На рис. 9.1, б изображена зависимость, характерная отсутствием реакции на выходе звена при $|x_0| < x_{01}$. Эта зона называется зоной нечувствительности. Зависимость, изображенная на рис. 9.1, г, отличается наличием как зоны нечувствительности, так и зоны насыщения. Предельный вид этой характеристики изображен на рис. 9.1, д. При $x = x_{01}$, а также при $x = -x_{01}$ происходит скачок выходной величины x . Подобная характеристика называется релейной. Если зона нечувствительности сжимается до нуля, то получаем вырожденный случай характеристики (рис. 9.1, е). Если релейная характеристика осуществляется, например, с помощью электромагнитных реле, то значения x_0 при срабатывании и отпуске реле неодинаковы, и релейные характеристики становятся неоднозначными кривыми, изображенными на рис. 9.1, ж и з. Значительно более сложный характер имеет кривая намагничивания $B = f(H)$ или отличающаяся от нее лишь масштабом зависимости $\Phi = f(i)$ в катушке со стальным сердечником (здесь Φ — магнитный поток, i — ток в катушке). Если не учесть петли гистерезиса и особенностей кривой при малых напряженностях поля H , то кривая намагничивания

подобна кривой, изображенной на рис. 9.1, а. При учете петли гистерезиса кривая имеет форму, изображенную на рис. 9.1, и.

Иногда структурная схема нелинейного звена, не содержащего отдельного нелинейного усилителя, может быть преобразована к такой форме, где

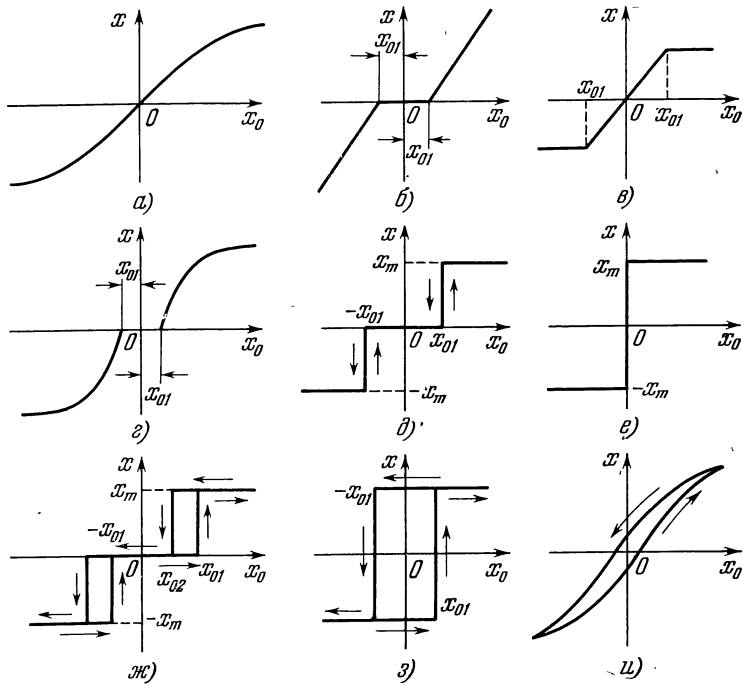


Рис. 9.1.

нелинейная зависимость сосредоточена в усилительном звене. Рассмотрим, например, электромашинный усилитель с учетом насыщения магнитной цепи (рис. 9.1, а). Если обозначить магнитный поток возбуждения буквой Φ ,

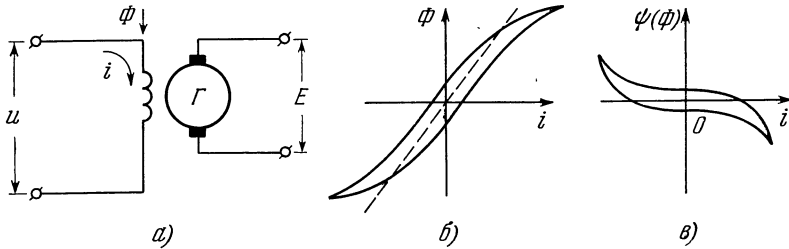


Рис. 9.2.

ток в цепи возбуждения i , входное напряжение, поданное на обмотку возбуждения u , число витков этой обмотки w , а, э. д. с. генератора E , то уравнения схемы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E &= \rho\Phi; & u &= iR + \omega \frac{d\Phi}{dt}; \\ i &= f(\Phi) = a\Phi + \psi(\Phi). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь ρ и a — постоянные. Зависимость $i = f(\Phi)$, изображенную на рис. 9.2, б, удобно разбить на сумму линейной части $a\Phi$ и нелинейной

«добавки» ψ (Φ), показанной отдельно на рис. 9.2, *в*. Из уравнений (1) находим $\Phi = \frac{E}{\rho}$ и далее

$$u = iR + \frac{w}{\rho} \frac{dE}{dt} = R \left[\frac{aE}{\rho} + \psi \left(\frac{E}{\rho} \right) \right] + \frac{w}{\rho} \frac{dE}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho}{aR} \left[u - R\psi \left(\frac{E}{\rho} \right) \right] = E + \frac{w}{aR} \frac{dE}{dt}. \tag{2}$$

Если обозначим

$$R\psi \left(\frac{E}{\rho} \right) = \eta(E), \quad \frac{\rho}{aR} = k, \tag{3}$$

то выражение (2) принимает вид

$$k[u - \eta(E)] = E + T \frac{dE}{dt}. \tag{4}$$

Структурная схема, соответствующая равенству (4), показана на рис. 9.3. Это схема инерционного звена с коэффициентом усиления k и постоянной времени T , шунтированного жесткой обратной связью в виде нелинейного усилительного звена $H\psi$ с нелинейной зависимостью $x = -\eta(E)$.

В динамике систем регулирования нередко играет существенную роль люфт или сухое трение. Люфт часто встречается в шестеренных передачах. Зависимость, характерную для люфта, можно найти также, рассматривая модель сочленения двух звеньев, осуществляющих возвратно-поступательное движение. На рис. 9.4, *а* изображен поршень 1, сочлененный с цилиндром 2. Стрелки, соединенные с деталями 1 и 2, указывают их координаты. Пусть, например, сначала координаты x_1 поршня и z_1 цилиндра равны нулю. Если

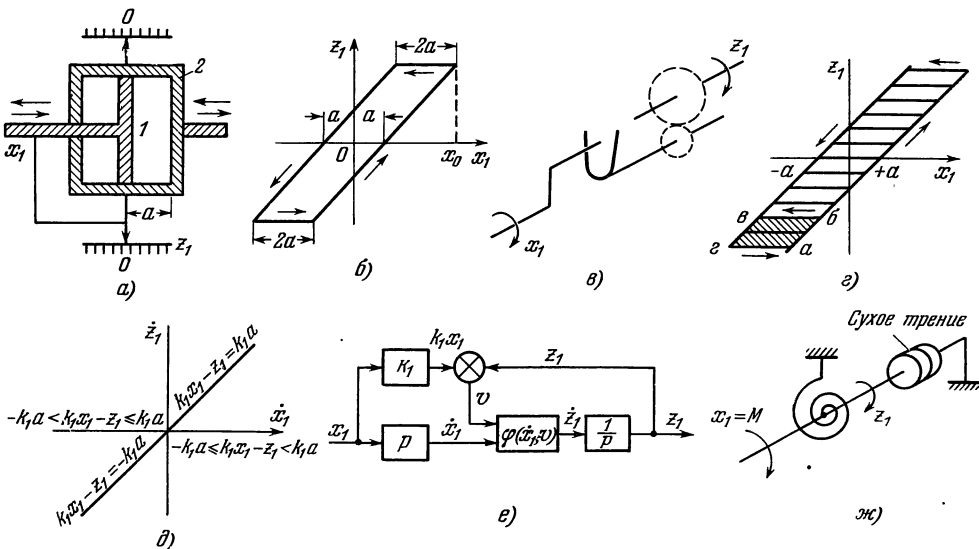


Рис. 9.4.

теперь подвинуть поршень вправо на расстояние, меньшее a , то цилиндр останется в покое. Лишь после того как поршень вступит в контакт с правой стенкой цилиндра 2, последний начнет двигаться (рис. 9.4, *б*). Допустим, что,

достигнув значения x_1 , координата поршня начнет вслед за тем уменьшаться. Координата z_1 цилиндра останется постоянной до тех пор, пока цилиндр не исчерпает люфт размером $2a$. Лишь тогда, когда x_1 станет меньше чем $x_{01} - 2a$, цилиндр вновь начнет двигаться вслед за поршнем. При периодическом движении поршня зависимость координаты z_1 от x_1 имеет вид неоднозначной кривой, показанной на рис. 9.4, б.

Аналогичная нелинейность имеет место, когда движение передается с одного вала (ведущего) на другой (ведомый), например в редукторах, где имеется зазор между зубьями сопрягающихся шестерен. Схематически этот люфт изображен на рис. 9.4, в. В этом случае зависимость между положением ведущего вала x_1 и ведомого вала z_1 неоднозначна и каждому положению ведущего вала соответствует непрерывное множество положений ведомого вала, лежащее в пределах его свободного хода, возможного при неподвижном ведущем вале.

Характеристика, выражающая зависимость между положениями ведущего и ведомого валов, показана на рис. 9.4, г. Каждому положению ведущего вала x_1 соответствует множество положений ведомого вала z_1 , лежащее в пределах $k_1(x_1 - a) \leq z_1 \leq k_1(x_1 + a)$. Выбор того или иного из возможных положений определяется максимальным или минимальным отклонением z_1 , предшествовавшим рассматриваемому моменту времени.

Аналитически характеристика звена «типа» люфт выражается следующим образом:

$$\dot{z}_1 = \begin{cases} k_1 \dot{x}_1 \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } k_1 x_1 - z_1 = k_1 a, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } k_1 x_1 - z_1 = -k_1 a, \end{cases} \\ 0 \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } -k_1 a \leq k_1 x_1 - z_1 < k_1 a, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } -k_1 a < k_1 x_1 - z_1 \leq k_1 a, \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

где $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$ и $\dot{z}_1 = \frac{dz_1}{dt}$.

Как видно, здесь существует однозначная зависимость z_1 от двух переменных x_1 и $v = k_1 x_1 - z_1$; а получающаяся при этом зависимость z_1 от x_1 представляет собой функцию постоянных интегрирования, задаваемых начальными условиями, и, следовательно, заведомо неоднозначна.

Зависимость z_1 от x_1 , выражаемая уравнением (5) для различных значений v , показана на рис. 9.4, д.

Вводя обозначение $\varphi(x_1, v)$ для звена, преобразующего сигналы x_1 и v в сигнал z_1 (см.(5)) можно для звена типа «люфт» получить структурную схему, показанную на рис. 9.4, е.

Характеристиками типа «люфт» обладают механические системы как с воздушным зазором, так и с сухим (кулоновым) трением. Схематически модель механической системы с сухим трением показана на рис. 9.4, ж. Здесь вращающий момент M уравновешивается моментом пружины αz_1 и моментом сухого трения $\pm a$. В этой системе входным воздействием является вращающий момент $x_1 = M$, а выходной величиной служит угол поворота вала z_1 . Составляя уравнение моментов, получаем

$$x_1 = M = \alpha z_1 \pm a$$

или, обозначая $k_1 = \frac{1}{\alpha}$,

$$z_1 = k_1(x_1 \pm a), \quad (6)$$

что соответствует графику, показанному на рис. 9.4, *г* и уравнению (5). При этом

$$\dot{z}_1 = 0 \quad \text{при} \quad |x_1| < a. \tag{7}$$

В различных механических системах перемещение одной из частей механизма бывает ограничено в двух направлениях и при этом ведущая часть может неограниченно перемещаться. Такие звенья называются звеньями типа «упор». Примером устройства, обладающего таким свойством, является механизм, показанный на рис. 9.5, *а*. Здесь ведущий вал связан с ведомой частью с помощью фрикционной муфты, которая расцепляется, как только момент сопротивления превышает некоторую предельную величину. Так как ведомая часть механизма имеет упоры при ее перемещении

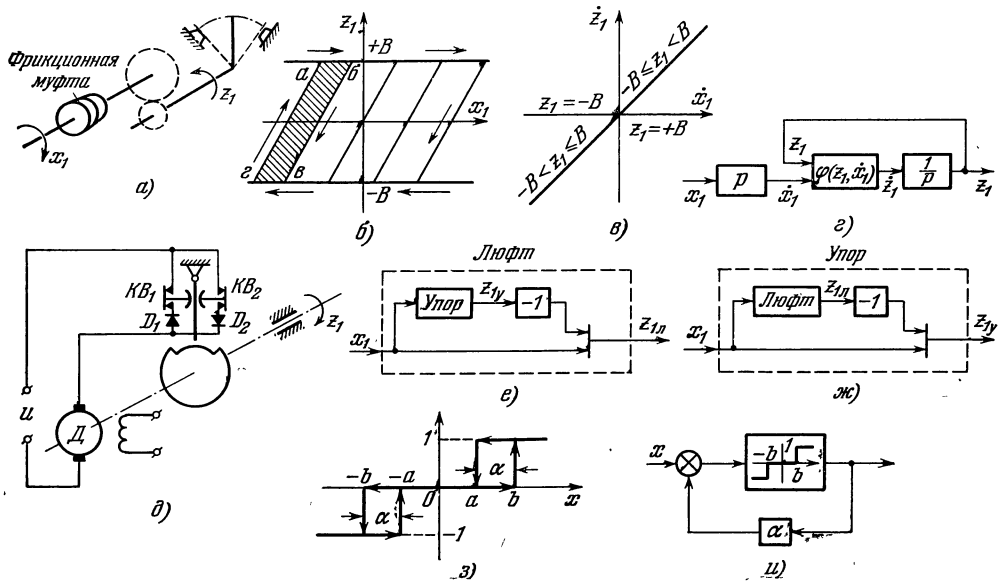


Рис. 9.5.

в двух направлениях, то как только ведомая часть доходит до упора и возникает большой момент сопротивления, фрикционная муфта расцепляется и ведущий вал начинает поворачиваться при неподвижной ведомой части.

Однако как только направление ведущего вала изменяется, муфта снова входит в зацепление и ведомая часть механизма приходит в движение вместе с ведущим валом.

Если обозначить углы поворота ведущего и ведомого валов через x_1 и z_1 , то зависимость между ними выразится графиком, показанным на рис. 9.5, *б*.

Каждому положению ведущего вала x_1 в этом случае соответствует множество положений ведомого вала, лежащее в пределах $-B \leq z_1 \leq B$.

Аналитически характеристика звена типа «упор» может быть записана так:

$$\dot{z}_1 = \begin{cases} k_1 \dot{x}_1 \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } -B \leq z_1 < B, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } -B < z_1 \leq B, \end{cases} \\ 0 \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } z_1 = B, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } z_1 = -B. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

В этом случае \dot{z}_1 представляет собой однозначную функцию двух переменных: \dot{x}_1 и z_1 , а функция z_1 от x_1 зависит от начальных условий и, как и для люфта, неоднозначна.

Зависимость \dot{z}_1 от \dot{x}_1 , выражаемая уравнением (8), показана на рис. 9.5, в. Структурная схема, соответствующая этому уравнению, изображена на рис. 9.5, г.

Нелинейные характеристики, соответствующие звену типа «упор», описывают процессы в системах с пневматическими и гидравлическими усилителями, а также электрическими двигателями, имеющими конечные выключатели в цепи якоря. Если пренебречь выбегом электрического двигателя постоянного тока с независимым возбуждением в схеме привода механизма с упорами, показанной на рис. 9.5, д, то зависимость между $u = \dot{x}_1$ и z_1 выражается нелинейными характеристиками и структурной схемой, показанными на рис. 9.5, б, в и г, и соответствует нелинейному звену типа «упор».

Если сравнить нелинейные характеристики звеньев типа «люфт» и «упор», то обращает на себя внимание противоположный характер циклов, наблюдаемых на этих характеристиках. Всякое циклическое изменение x_1 приводит к циклическому изменению z_1 и на графике $z_1(x_1)$ выражается некоторой замкнутой кривой. На рис. 9.4, г и 9.5, б такие замкнутые кривые циклов показаны контурами а, б, в, г. Интересно обратить внимание на различное направление обхода по этим циклам. Для характеристики звена типа люфт направление обхода против часовой стрелки, а для звена типа упор — по часовой стрелке.

Существенно отметить, что параллельное соединение двух нелинейностей типа «люфт» и «упор» при $a = b$ дает усилительное звено с коэффициентом усиления единица. Это легко видеть, просуммировав ординаты графиков соответствующих характеристик на рис. 9.4, г и рис. 9.5, б при $a = b$. В результате суммирования получим прямую, являющуюся биссектрисой первого и третьего квадрантов

$$z_{1л} + z_{1у} = z_1 = x_1, \quad (9)$$

где $z_{1л}$ и $z_{1у}$ — выходные координаты звеньев типа «люфт» и «упор» соответственно. Этот факт дает возможность рассматривать эти два звена как взаимно дополняющие в упомянутом выше смысле. Отсюда можно получить удобную схему для моделирования одного звена с помощью другого. Так как

$$z_{1л} = x_1 - z_{1у} \text{ и } z_{1у} = x_1 - z_{1л}, \quad (10)$$

то, включая параллельно усилительному звену звено типа «люфт» с обратным знаком, можно получить звено типа «упор» и, наоборот, включая параллельно усилительному звену звено типа «упор», получаем звено типа «люфт» (рис. 9.5, е, ж).

Еще одной неоднозначной характеристикой является реле с гистерезисом, которое срабатывает при входном сигнале x по модулю больше некоторого значения b (зоны нечувствительности), а отключается при x по модулю меньше a ($0 < a < b$) (рис. 9.5, з). Этот элемент также можно представить эквивалентной схемой (рис. 9.5, и), которая включает в себя однозначную нелинейность — реле с зоной нечувствительности.

Составляя уравнение движения системы, необходимо правильно учесть характер зависимостей. При этом неизбежно некоторое упрощение, идеализация этих зависимостей. Совершенно невозможно указать какие-либо стандартные рецепты или правила, следуя которым можно безошибочно идеализировать систему. Следует лишь указать, что при идеализации должны сохраняться все характерные черты изучаемого явления. В то же время задача

идеализации состоит в том, чтобы по возможности абстрагироваться от всех несущественных, посторонних для изучаемого явления черт. При идеализации реальных характеристик аппаратуры следует по возможности упростить их, например, где это можно, представить однозначными и менее сложными по конфигурации.

Особенно ярко выступает необходимость различных подходов к идеализации одной и той же характеристики в зависимости от характера изучаемых явлений в случае типичных, часто встречающихся источников нелинейности — насыщения и трения. Пренебрегая конечной шириной петли гистерезиса, можно представить зависимость магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H в виде, изображенном на рис. 9.6, а. Здесь не учтен

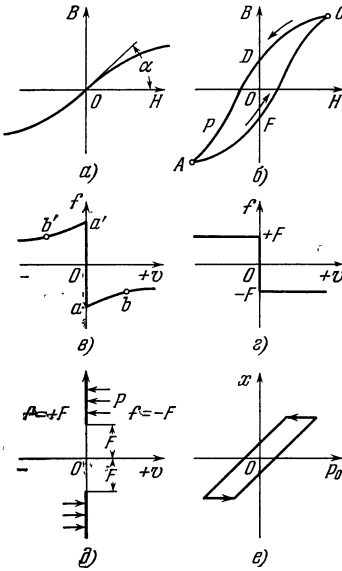


Рис. 9.6.

также нижний загиб кривой, который используется иногда в магнитных усилителях. При не очень больших значениях H кривая $B = f(H)$ почти прямолинейна и имеет крутизну, измеряемую углом наклона α . Если необходим более точный учет формы кривой, то придется принять во внимание неоднозначность зависимости $B = f(H)$, т. е. учесть петлю гистерезиса. На рис. 9.6, б изображена такая петля при синусоидальном изменении H . Точка на кривой, изображающая магнитное состояние системы, перемещается по замкнутому контуру.

Силу вязкого трения в жидкостях и газах при малых скоростях можно считать пропорциональной скорости и направленной навстречу последней. При больших скоростях (например, в авиации) абсолютную величину силы вязкого трения можно принять пропорциональной квадрату скорости. Этот тип зависимости является уже нелинейным. Иной вид имеет зависимость силы сухого трения от скорости, изображенная на рис. 9.6, в, г. Иногда спад характеристики, т. е. участки $a - b$ и $a' - b'$ на кривой зависимости силы трения f от скорости v , является причиной неустойчивости системы. Если этот спад не играет существенной роли, то целесообразно упростить зависимость и положить силу трения при $v \neq 0$ постоянной. Что касается абсолютных величин силы или момента трения, то они обычно задаются из условий конкретной задачи для данной системы.

Если в процессе движения не имеется конечных интервалов времени, в течение которых скорость v равна нулю, характеристика, изображенная на рис. 9.6, г, вполне достаточна для исследования. Такой случай имеется, например, при исследовании колебаний материальной точки массы m при наличии упругой силы $f_1 = -kx$ (где x — отклонение материальной точки от некоторого положения) и силы сухого трения. Однако в более сложных случаях имеются конечные интервалы времени, в течение которых $v = 0$, и в этом случае силы трения находятся в интервале

$$-F \leq f \leq +F,$$

причем сила трения все время равна действующей силе P , пока последняя не превышает величины F . Поэтому сила трения, собственно говоря, есть функция двух переменных $-v$ и P .

Зависимость $f = f(v, P)$ изображена на рис. 9.6, д. На плоскости (v, P) написаны значения F для каждого квадранта и для каждого участка прямой

$v = 0$. Отрезку этой прямой при $P > F$ соответствует значение $f = -F$, что условно показано стрелками, ведущими к этому отрезку от первого квадранта. Отрезку $P < -F$ на прямой $v = 0$ соответствует значение $f = +F$.

Эту зависимость можно записать аналитически в следующем виде:

$$f = \begin{cases} -F & \text{при } v > 0 \text{ или } v = 0, P > +F, \\ +F & \text{при } v < 0 \text{ или } v = 0, P < -F, \\ -P & \text{при } v = 0, |P| \leq F. \end{cases} \quad (11)$$

Если уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = P(x, v) + f, \quad (12)$$

то при $v = 0$ и $|P(x, 0)| < F$ получаем $P + f = 0$ и $\frac{dv}{dt} = 0$. Следовательно, в области, где x удовлетворяет неравенству $|P(x, 0)| < F$, существует равновесие. Например, если $P(x, v) = -(\alpha x + \beta v)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то область $\alpha |x| < F$, т. е. $|x| < \frac{F}{\alpha}$ является совокупностью точек равновесия—линией равновесия. Между тем в отсутствие силы сухого трения подобный эффект не наблюдается. При наличии любой силы вязкого трения $f(v)$ точкой равновесия будет лишь точка $x = 0$ (если $P = 0$ при $x = 0$). Итак, наличие сухого трения вызывает появление зоны нечувствительности.

Пусть $P = P_0 - \alpha x$, где P_0 — внешняя сила, а $-\alpha x$ — сила пружины, соединенной с материальной точкой. Обозначим общую силу, действующую на материальную точку, через P^* . Сила P^* равна правой части уравнения (12):

$$P^* = P(x) + f = P_0 - \alpha x + f. \quad (13)$$

Если периодически изменяются силы P_0 и положения x , то результирующее отклонение x равно $\frac{P_0 + f}{\alpha} = \frac{P_0 - F}{\alpha}$ при $v > 0$. Когда скорость v становится равной нулю, если f меняется от $-F$ до $+F$ (рис. 9.6, е), то отклонение x остается постоянным. Далее, при $v < 0$ отклонение x равно $\frac{P_0 + F}{\alpha}$ и т. д. Эта зависимость имеет (если рассматривать x как функцию P_0) такой же вид, как характеристика люфта.

Нелинейные характеристики могут оказывать существенное влияние не только на количественную сторону процессов в системах автоматического регулирования, но вызывать и качественно новые эффекты. Допустим, например, что система, неустойчивая без обратной связи, стабилизируется с помощью контура обратной связи с усилителем, причем характеристика последнего имеет зону нечувствительности (см. рис. 9.1, б). Тогда при малых величинах входных сигналов цепь обратной связи не будет действовать, и в системе начнут нарастать колебания. При некоторой величине этих колебаний обратная связь окажется настолько эффективной, что воспрепятствует дальнейшему нарастанию колебаний. В результате получим не затухающие, но и не нарастающие колебания в системе. Если амплитуда этих колебаний невелика, то система в целом может оказаться работоспособной.

Иногда нелинейность характеристики какого-либо элемента служит причиной своеобразной связи между двумя цепями, которая отсутствует в линейной системе. Рассмотрим в качестве примера влияние поперечной реакции якоря на процессы в системе регулирования скорости двигателя постоянного тока.

Если по цепи якоря машины протекает ток $I_{я}$ (рис. 9.7, а) и щетки расположены по геометрической нейтрали машины AA' , то продольное поле

реакции якоря отсутствует (пренебрегаем влиянием коммутационных ампервитков), и все поле якоря поперечно. Подобное поле без учета поля полюсов возбуждения изображено на рис. 9.7, а. Поле полюсов возбуждения NS направлено на рис. 9.7, а сверху вниз. В результате влияния поперечного поля реакции якоря результирующее поле машины искажается. Например, под левой половиной полюса N потоки полюсов и реакции якоря вычитаются, а под правой половиной складываются. Однако если магнитная цепь

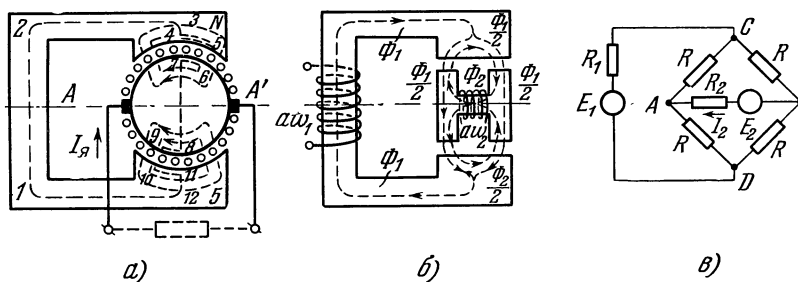


Рис. 9.7.

машины не насыщена, то общий поток Φ полюса не зависит от тока I_a , так как ослабление потока под одной половиной полюса компенсируется усилением его под второй половиной. При насыщенной же магнитной цепи усиление магнитного потока под второй половиной полюса невелико и не может компенсировать ослабления его под первой половиной. В результате общий поток Φ полюса уменьшается при увеличении тока якоря I_a .

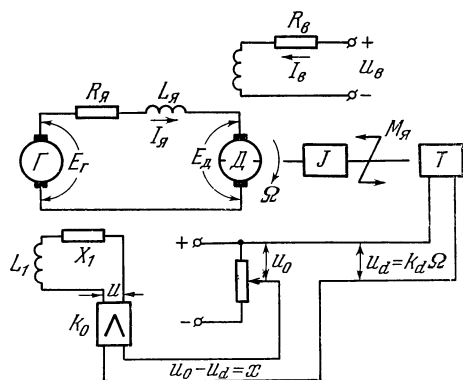


Рис. 9.8.

Поток Φ_1 не сцепляется с катушкой якоря, а поток Φ_2 не сцепляется с обмоткой возбуждения. Когда же магнитная цепь насыщена, то магнитные проводимости тех участков цепи, по которым проходят оба потока, зависят уже от их величин. Поэтому, например, поток Φ_1 , сцепляющийся с обмоткой возбуждения, начинает зависеть от потока Φ_2 якоря, а следовательно, и от ампервитков $a\omega_2$ якоря. При изменении тока I_a якоря изменяется и поток Φ_1 , вследствие чего в обмотке возбуждения наводится э. д. с. Таким образом, появляется своеобразная связь между цепями якоря и обмотки возбуждения.

Рассмотрим систему регулирования скорости двигателя постоянного тока независимого возбуждения (рис. 9.8). На выходе тахогенератора T получается напряжение u_d , пропорциональное регулируемой величине — скорости Ω . Разность x между установленной величиной u_0 и u_d подается

на вход усилителя с коэффициентом усиления k_0 . Выходное напряжение u_1 усилителя приложено к обмотке возбуждения генератора G ; цепь обмотки возбуждения имеет омическое сопротивление $R_{\text{я}}$ и коэффициент самоиндукции $L_{\text{я}}$. Э. д. с. генератора $E_{\text{Г}}$ вызывает ток $I_{\text{я}}$ в цепи якоря, где действует также и противо-э. д. с. двигателя $E_{\text{д}}$, пропорциональная скорости Ω и направленная навстречу $E_{\text{Г}}$. Омическое сопротивление цепи якоря равно $R_{\text{я}}$, коэффициент самоиндукции равен $L_{\text{я}}$. Поток возбуждения двигателя Φ , ток возбуждения $I_{\text{в}}$; сопротивление цепи возбуждения — $R_{\text{в}}$; напряжение, поданное на цепь возбуждения, — $u_{\text{в}}$. Момент инерции вращающейся системы, приведенной к валу двигателя, — J , момент сопротивления — $M_{\text{н}}$, вращающий момент $M_{\text{вр}} = c_2 I_{\text{я}} \Phi$.

Напишем уравнение звеньев системы, учитывая нелинейную зависимость потока Φ от токов $I_{\text{в}}$ и $I_{\text{я}}$. Эти уравнения имеют следующий вид (здесь не учтены коммутационные ампервитки, рассеяние полюсов, а также э. д. с. в обмотке якоря, возникающая от сцепления с обмоткой возбуждения):

$$\left. \begin{aligned} x &= u_0 - u_{\text{д}} = u_0 - k_{\text{д}} \Omega, \quad u_1 = k_0 x, \quad R_1 u_1 = I_1 + T_1 \frac{dI_1}{dt}, \\ k_1 &= \frac{1}{R_1}, \quad T_1 = \frac{L_1}{R_1}, \quad E_{\text{Г}} = \sigma I, \\ I_{\text{я}} R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{dI_{\text{я}}}{dt} &= E_{\text{Г}} - E_{\text{д}}, \quad E_{\text{д}} = c_1 \Omega \Phi_{\text{в}}, \\ I_{\text{в}} R_{\text{в}} + w_{\text{в}} \frac{d\Phi_{\text{в}}}{dt} &= u_{\text{в}}, \quad \Phi_{\text{в}} = \Phi_{\text{в}}(I_{\text{в}}, I_{\text{я}}), \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= M_{\text{вр}} - M_{\text{н}} = c_2 I_{\text{я}} \Phi_{\text{в}} - M_{\text{н}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь σ , c_1 и c_2 — константы ($\sigma = \text{const}$, если пренебрегаем нелинейностью характеристики холостого хода генератора G).

Система является нелинейной, так как зависимость Φ от $I_{\text{в}}$ и $I_{\text{я}}$ нелинейна. Кроме того, в выражениях (14) фигурируют произведения $\Omega \Phi_{\text{в}}$ и $I_{\text{я}} \Phi_{\text{в}}$. Положение равновесия схемы соответствует вращению двигателя с постоянной скоростью Ω_0 . Все остальные величины в схеме также должны быть постоянны, например $\Phi_{\text{в}} = \Phi_{\text{в}0}$; следовательно, их производные обращаются в нуль. Для этого случая из уравнения (14) получаем (все постоянные величины отмечены индексом «нуль»)

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= u_0 - k_{\text{д}} \Omega_0, \quad u_{10} = R_0 x_0, \quad R_1 u_{10} = I_{10}, \\ E_{\text{Г}0} &= \sigma I_{10}, \quad I_{\text{я}0} R_{\text{я}} = E_{\text{Г}0} - c_1 \Omega_0 \Phi_{\text{в}0}, \\ I_{\text{в}0} R_{\text{в}} &= u_{\text{в}0}, \quad \Phi_{\text{в}0} = \Phi_{\text{в}0}(I_{\text{я}0}, I_{\text{в}0}), \quad c_2 I_{\text{я}0} \Phi_{\text{в}0} = M_{\text{н}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Момент нагрузки $M_{\text{н}}$ принят постоянным.

Исключая остальные неизвестные, находим отсюда

$$\Omega_0 = \frac{k_0 k_1 \sigma u_0 - \frac{R_{\text{я}} M_{\text{н}}}{c_2 \Phi_{\text{в}0}}}{k_0 k_1 k_{\text{д}} \sigma + c_1 \Phi_{\text{в}0}}. \quad (16)$$

В этом выражении, кроме параметров системы, известны u_0 и $M_{\text{н}}$. Величина же $\Phi_{\text{в}0}$ еще должна быть определена из уравнений (9). Из этих уравнений получаем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{в}0} &= \Phi_{\text{в}0}(I_{\text{я}0}, I_{\text{в}0}), \\ I_{\text{я}0} &= \frac{c k_1 k_0 (u_0 - k_{\text{д}} \Omega_0) - c_1 \Omega_0 \Phi_{\text{в}0}}{R_{\text{я}}}, \\ I_{\text{в}0} &= \frac{u_{\text{в}0}}{R_{\text{в}}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из формулы (16) видно, что при росте момента нагрузки M_n величина Ω_0 падает; зависимость Ω_0 от M_n нелинейна, так как при изменении M_n меняется и $\Phi_{в0}$. Если величина $k_0 k_1 \sigma$ достаточно велика, то при не слишком малых значениях u_0 из формулы (16) следует

$$\Omega_0 \approx \frac{u_0}{k_d},$$

т. е. осуществляется требуемая пропорциональность между установленной величиной и регулируемой величиной независимо от колебаний нагрузки и нелинейности характеристик системы.

§ 2. Уравнение для малых отклонений. Понятие о первом методе Ляпунова

Основными методами исследования нелинейных систем являются:

1) *Метод малых отклонений*. Составляя уравнения для малых отклонений от состояния равновесия либо установившегося движения, можно исследовать устойчивость данного состояния равновесия или данного движения. Здесь исследование обычно ведется с помощью понятия устойчивости по Ляпунову и первого метода Ляпунова.

2) *Второй метод Ляпунова*. С его помощью можно находить достаточные условия устойчивости.

3) *Методы малого параметра*, позволяющие приближенно исследовать устойчивость, находить приближенное значение амплитуды колебаний в неустойчивой системе и т. д.

4) *Методы интегрируемой аппроксимации*, с помощью которых можно найти решение уравнений, если заменить характеристику нелинейного элемента некоторой близкой к ней кривой.

В большинстве случаев точное интегрирование нелинейного уравнения движения системы оказывается невозможным. Действительно, формула, являющаяся окончательным результатом интегрирования, должна представлять собой конечную комбинацию элементарных функций алгебры и анализа, т. е. зависимостей типа t^m , \sqrt{t} , $\sin \lambda t$, $e^{\lambda t}$ и т. д. Имеется небольшое число вошедших, так сказать, в математический обиход элементарных функций анализа. Между тем каждое новое дифференциальное уравнение в сущности является определением нового класса функций, и вовсе не обязательно, чтобы эти новые функции выражались в виде конечной комбинации ранее известных элементарных функций. Как раз наоборот, доказано, что даже интегралы от комбинаций элементарных функций (т. е. решения простейшего дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = f(t)$) не выражаются в общем случае в виде конечных комбинаций элементарных функций. Следовательно, задав какое-либо нелинейное уравнение, мы не имеем права требовать решения его в виде конечной комбинации элементарных функций — для большинства типов уравнений такого решения не существует. Можно, однако, часто найти решение в форме, например, бесконечного ряда; приближенное решение получается, если учитывается только конечное число членов этого ряда. Эффективную группу таких приближенных методов решения составляют методы малого параметра.

Можно поставить вопрос нахождения решений и по-иному. Допустим, например, что характеристика нелинейного элемента, входящего в исследуемую систему, $y = f(x)$. Функция $f(x)$ определяется из эксперимента либо выводится ее математическое выражение. Поставим следующий вопрос: нельзя ли аппроксимировать функцию $f(x)$ с помощью достаточно близкой к ней кривой $\varphi(x)$, и притом такой, чтобы при замене $f(x)$ на $\varphi(x)$ дифференциальное уравнение допускало решение в виде конечной комбинации элементарных

функций? Как находить в общем случае эту «близкую» функцию $\varphi(x)$, при которой уравнение становится интегрируемым в элементарных функциях, еще неизвестно. Однако существует один тип аппроксимации характеристики $f(x)$ зависимостью $\varphi(x)$, который применим почти во всех случаях, — это аппроксимация в виде ломаной, или, как ее называют, кусочно-линейная аппроксимация. Ниже показано, что при подобной аппроксимации в принципе можно получить точное решение.

Если нужно ответить на вопрос качественного порядка (например, устойчиво ли данное положение равновесия), то часто интегрировать уравнение и не нужно. Для решения подобной задачи можно применить качественные методы. Первые две группы методов, указанных выше, являются качественными методами.

Метод интегрируемой аппроксимации, т. е. замена «точного» уравнения приближенным и точное интегрирование последнего, принципиально не менее точно, чем метод приближенного решения «точного» уравнения. Нужно лишь достаточно точно аппроксимировать нелинейную характеристику. Нередко значительная точность аппроксимации и не требуется, причем часто не само уравнение, а соображения физического характера указывают на требуемую точность аппроксимации. Действительно, любое уравнение не учитывает всех сторон процесса, всех паразитных параметров и т. д. и с этой точки зрения абсолютно точное уравнение вообще нельзя написать.

Далее, всякая характеристика получается из опыта лишь с определенной степенью точности; поэтому любые аппроксимации, погрешность которых по отношению к экспериментальной кривой не превосходит допустимой величины, обычно совершенно равноправны. Заменяя одну такую аппроксимацию другой, мы не совершаем никакой дополнительной ошибки. Наконец, часто путем исследования уравнения необходимо получить качественный вывод (например, устойчива ли система), а вывод этого рода нередко справедлив и при сравнительно больших отклонениях аппроксимированной кривой от кривой, полученной из эксперимента.

Рассмотрим метод малых отклонений. Методику получения уравнений для малых отклонений от положения равновесия можно проиллюстрировать на примере системы регулятора скорости (см. рис. 9.8). Уравнения системы даны формулами (14) § 1: величины, соответствующие положению равновесия, удовлетворяют равенствам (15) § 1. Пусть теперь величины, характеризующие систему, несколько отличаются от тех значений, которые соответствуют положению равновесия. Обозначая малыми буквами величины отклонений от положения равновесия, можно написать

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{я}} &= I_{\text{я}0} + i_{\text{я}}, & \Omega &= \Omega_0 + \gamma, & I_{\text{в}} &= I_{\text{в}0} + i_{\text{в}}, \\ E_{\text{г}} &= E_{\text{г}0} + e_{\text{г}}, & \Phi_{\text{в}} &= \Phi_{\text{в}0} + \varphi, & I_1 &= I_{10} + i_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Величины с индексами 0 считаем известными, так как их можно вычислить из уравнений (9) § 1, соответствующих положению равновесия. Исключив остальные переменные, подставив значения (1) и учитывая равенство (9) § 1, получим уравнения для отклонений (момент $M_{\text{я}}$ считаем постоянным):

$$\left. \begin{aligned} -k_0 k_1 \sigma k_d \gamma &= e_{\text{г}} + T_1 \frac{de_{\text{г}}}{dt}, \\ L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} &= -c_1 \Omega_0 \varphi - c_1 \Phi_{\text{в}0} \gamma - c_1 \varphi \gamma + e_{\text{г}}, \\ w_{\text{в}} \frac{d\varphi}{dt} = -r_{\text{в}} i_{\text{в}}, & J \frac{d\gamma}{dt} = c_2 \Phi_{\text{в}0} i_{\text{я}} + c_2 I_{\text{я}0} \varphi + c_2 \varphi i_{\text{я}}, \\ \varphi &= (M' - 3N' I_{\text{в}0}^2) i_{\text{в}} - 3N' I_{\text{в}0} i_{\text{в}}^2 - N' i_{\text{в}}^3 - P' I_{\text{я}0}^2 i_{\text{в}} - \\ &\quad - P' 2I_{\text{я}0} i_{\text{я}} i_{\text{в}} - R' i_{\text{я}}^2 i_{\text{в}} - P' I_{\text{я}0} 2I_{\text{я}0} i_{\text{я}} - P' I_{\text{я}0}^2 i_{\text{я}}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если все отклонения достаточно малы, то можно пренебречь в первом приближении их высшими степенями и произведениями. Пренебрежем также малой величиной $L_{\text{я}}$. Тогда получим уравнения первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} -k_0 k_1 \sigma k_d \gamma &= e_{\Gamma} + T_1 \frac{de_{\Gamma}}{dt}, \quad R_{\text{я}} i_{\text{я}} = -c_1 \Omega_0 \varphi - c_1 \Phi_{\text{в}0} \gamma + e_{\Gamma}, \\ w_{\text{в}} \frac{d\varphi}{dt} &= -r_{\text{в}} i_{\text{в}}, \quad \varphi = (M' - 3N' I_{\text{в}0}^2 - P' I_{\text{я}0}^2) i_{\text{в}} - 2P' I_{\text{в}0} I_{\text{я}0} i_{\text{я}}, \\ J \frac{d\gamma}{dt} &= c_2 \Phi_{\text{в}0} i_{\text{я}} + c_2 I_{\text{я}0} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_0 k_1 \sigma R_d &= q_1, \quad \frac{c_1 \Omega_0}{R_{\text{я}}} = q'_{2\varphi}, \quad \frac{c_1 \Phi_{\text{в}0}}{R_{\text{я}}} = q'_{2\gamma}, \\ \frac{1}{R_{\text{я}}} &= q'_{2e}, \quad M - 3N' I_{\text{в}0}^2 - P' I_{\text{я}0}^2 = M, \quad 2P' I_{\text{в}0} I_{\text{я}0} = N' = q'_{2i}, \\ \frac{w_{\text{в}} M}{r_{\text{в}}} &= T_2, \quad \frac{c_2 I_{\text{в}0}}{J} = q'_{3\varphi}, \quad \frac{c_2 \Phi_{\text{в}0}}{J} = q'_{3i}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнения первого приближения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -q_1 \gamma &= e_{\Gamma} + T_1 \frac{de_{\Gamma}}{dt}, \quad i_{\text{я}} = -q'_{2\varphi} \varphi - q'_{2\gamma} \gamma + q'_{2e} e_{\Gamma}, \\ \varphi + T_2 \frac{d\varphi}{dt} &= -q'_{2i} i_{\text{я}}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = q'_{3i} i_{\text{я}} + q'_{3\varphi} \varphi, \quad \varphi = M i_{\text{в}} - q'_{2i} i_{\text{я}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Коэффициент q'_{2i} обращается в нуль, когда нелинейность характеристики исчезает, т. е. N' обращается в нуль. Тогда третье из уравнений (5) принимает вид $\varphi + T_2 \frac{d\varphi}{dt} = 0$, откуда $\varphi = 0$ при $t > 0$, если равенство $\varphi = 0$ имело место в начальный момент. Введем затем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \frac{T_2}{1 + q'_{2\gamma} q'_{2\varphi}}, \quad q_{2\gamma} = \frac{q'_{2\gamma} q'_{2\gamma}}{1 + q'_{2\gamma} q'_{2\varphi}}, \quad q_{3\varphi} = \frac{q'_{3\varphi}}{q'_{2\gamma}}, \\ q_{2e} &= \frac{q'_{2e} q'_{2e}}{1 + q'_{2\gamma} q'_{2\varphi}}, \quad T = \frac{1}{q'_{2\gamma} q'_{3i}}, \quad q_{3e} = \frac{q'_{3e}}{q'_{2\gamma}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и, исключая из уравнений (5) ток, находим

$$\left. \begin{aligned} -q_1 \gamma &= e_{\Gamma} + T_1 \frac{de_{\Gamma}}{dt}, \quad \varphi + T_2 \frac{d\varphi}{dt} = q_{2\gamma} \gamma - q_{2e} e_{\Gamma}, \\ \gamma + T_3 \frac{d\gamma}{dt} &= -q_{3\varphi} \varphi + q_{3e} e_{\Gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Коэффициенты $q_{2\gamma}$ и q_{2e} обращаются в нуль при отсутствии нелинейности. Рассмотрим сначала этот случай. Положив

$$q_1 q_{3e} = k, \quad (8)$$

получаем из первого и последнего уравнений (5)

$$T_1 T_3 \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + (T_1 + T_3) \frac{d\gamma}{dt} + (1 + k) \gamma = 0. \quad (9)$$

Это уравнение устойчивой системы второго порядка.

Теперь учтем влияние нелинейности кривой намагничивания. Перепишем уравнение (7) в операторном виде для нулевых начальных условий:

$$\left. \begin{aligned} -q_1 \gamma(p) - (1 + pT_1) e_{\Gamma}(p) + 0\varphi(p) &= 0, \\ -q_{2\gamma} \gamma(p) + q_{2e} e_{\Gamma}(p) + (1 + pT_2) \varphi(p) &= 0, \\ (1 + pT_3) \gamma(p) - q_{3e} e_{\Gamma}(p) + q_{3\varphi} \varphi(p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь $\gamma(p)$, $\varphi(p)$, $e_r(p)$ — изображения функций времени $\gamma(t)$, $\varphi(t)$, $e_r(t)$. Если исключить отсюда все величины, кроме одной, например $\varphi(p)$, то получим уравнение $\Delta\varphi(p) = 0$, где Δ — определитель системы (10). Поэтому характеристическое уравнение имеет вид $\Delta = 0$ или

$$\begin{vmatrix} -q_1 & -(1+pT_1) & 0 \\ -q_{2\gamma} & q_{2e} & 1+pT_2 \\ 1+pT_3 & -q_{3e} & q_{3\varphi} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Напишем это уравнение в развернутом виде:

$$p^3 T_1 T_2 T_3 + p^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) + p (T_1 + T_2 + T_3 + kT_2 + q_{2\gamma} q_{3\gamma} T_1) + (1 + k + q_{2\gamma} q_{3\varphi} + q_{2e} q_1 q_{3\varphi}) = 0. \quad (12)$$

Условие устойчивости напишется в виде

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (T_1 + T_2 + T_3 + kT_2 + q_{2\gamma} q_{3\varphi} T_1) - T_1 T_2 T_3 (1 + k + q_{2\gamma} q_{3\varphi} q_1) > 0. \quad (13)$$

Пусть, например, в частном случае $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Обозначим

$$q_{3\varphi} q_{2\gamma} = \xi_1, \quad q_{2e} q_1 q_{3\varphi} = \xi_2; \quad (14)$$

тогда неравенство (13) принимает вид

$$3(3 + k + \xi_1) - (1 + k + \xi_1 + \xi_2) > 0$$

или

$$8 + 2k + 2\xi_1 - \xi_2 > 0. \quad (15)$$

Величина

$$\xi_2 = \frac{q'_2 q'_{2e}}{1 + q'_2 q'_{2\varphi}} \cdot \frac{q'_{2\gamma}}{q'_{2e}} k = \frac{q'_2 q'_{2\gamma}}{1 + q'_2 q'_{2\varphi}} k < k.$$

Отсюда следует, что неравенство (15) справедливо при любых значениях параметров. Следовательно, в данном случае влияние реакции якоря не может вызывать неустойчивости системы, во всяком случае при достаточно малых отклонениях от положения равновесия.

При исследовании нелинейных систем чрезвычайно плодотворным оказывается применение понятия фазового пространства. Рассмотрим это понятие для системы, движение которой описывается уравнением второго порядка.

Пусть для системы типа колебательного звена уравнение свободного движения имеет вид при $h = d_0 \omega_0$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16)$$

Для полного знания состояния системы в данный момент времени необходимо задать две величины, например, значение x в момент времени t_0 , т. е.

$$(x)_{t=t_0} = x_0,$$

и значение $\frac{dx}{dt}$ в момент времени t_0 , т. е.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0.$$

Примем величины x и $y = \frac{dx}{dt}$ в качестве декартовых координат на плоскости (рис. 9.9). Точка M_0 на плоскости, имеющая координаты x_0 и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, будет соответствовать некоторому состоянию системы, движение которой описывается уравнением (16).

Точка M , положение которой полностью характеризуется состоянием системы, называется *изображающей точкой*, а плоскость $(x, \frac{dx}{dt})$ называется *фазовой плоскостью*. Если состояние движения системы полностью описывается заданием двух величин x и y , то фазовой плоскостью называется плоскость, в которой x и y являются декартовыми координатами изображающей точки. При движении системы ее состояние изменяется, и изображающая точка M , находящаяся в начальный момент времени $t = t_0$ в положении M_0 , описывает некоторую кривую (см. рис. 9.9), которая называется траекторией изобра-

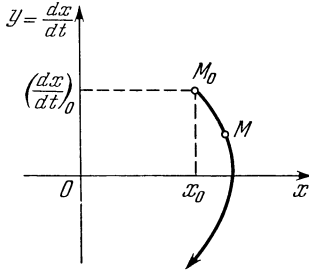


Рис. 9.9.

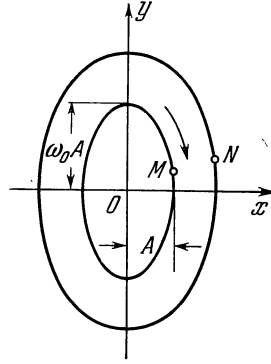


Рис. 9.10.

жающей точки на фазовой плоскости. Пусть, например, в уравнении (16) величина $h = 0$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (17)$$

которое имеет решение

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (18)$$

Здесь A и φ — постоянные, которые можно узнать из начальных условий. Дифференцируя выражение (18), находим

$$y = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (19)$$

Из уравнений (18) и (19), исключая величину $\omega_0 t + \varphi$, получаем

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\omega_0^2} = 1. \quad (20)$$

Это уравнение эллипса с полуосями A и $\omega_0 A$.

Итак, если система находится в движении, описываемом уравнением (17), то изображающая точка M движется по эллипсу, показанному на рис. 9.10. Время нигде не отображено на фазовой плоскости, и можно лишь представить себе, что с течением времени изображающая точка M движется по траектории, изображенной на рис. 9.10, в направлении, указанном стрелкой. При $y = \frac{dx}{dt} > 0$ величина x увеличивается со временем; поэтому на верхней полу-плоскости, где $y > 0$, движение точки M происходит в таком направлении, чтобы координата x увеличивалась. Наоборот, при движении точки M в нижней полуплоскости координата x должна уменьшаться. Другое частное решение уравнения (17) при иных начальных условиях дает другую траекторию; например, траекторию на рис. 9.10, на которой изображена точка N . Две траектории не могут пересечься друг с другом, так как в противном случае после точки пересечения последующее движение системы стало бы неоднозначно определенным. Между тем любая реальная система при определенных зада-

ниях начальных условий имеет лишь одно определенное движение, а не два или более «возможных» движений.

Исключение составляют, как увидим ниже, точки равновесия. Действительно, система, вообще говоря, может, выйдя из положения равновесия, двигаться различными способами; поэтому из точки равновесия может исходить множество траекторий. Ниже показано, что *точки равновесия* — это *особые точки* на фазовой плоскости.

Если рассматривается движение системы, определяемой, например, уравнением третьего порядка относительно x , то необходимо задать три величины для полного определения состояния системы, скажем x , $y = \frac{dx}{dt}$, $z = \frac{d^2x}{dt^2}$. Отложив эти величины в виде декартовых координат изображающей точки в трехмерном пространстве, получаем фазовое пространство трех измерений. Если движение системы описывается уравнением n -го порядка, то это движение геометрически интерпретируется в n -мерном фазовом пространстве. Далее будем рассматривать главным образом системы, движение которых описывается уравнением второго порядка, например в виде, разрешенном относительно второй производной $\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Положив $y = \frac{dx}{dt}$, можно заметить это уравнение совокупностью двух уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В данном случае функции P и Q имеют вид

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = F(x, y).$$

Однако в общем случае функции P и Q могут иметь какой угодно вид. Будем часто предполагать эти функции аналитическими.

Если задать какие-либо значения x и y , т. е. задать координаты точки M на фазовой плоскости, то из уравнений (21) определяется направление касательной к траектории, проходящей через точку M . Действительно, так как тангенс угла касательной $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, то, деля уравнения (21) почленно, получаем выражение для $\operatorname{tg} \varphi$ или, что одно и то же, $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (22)$$

Уравнение (22) — дифференциальное уравнение первого порядка траектории на фазовой плоскости.

Если P и Q — аналитические функции, то уравнение (22) однозначно определяет касательную во всех точках, кроме тех, в которых получаем одновременно

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В точках, где осуществлены оба условия (23), имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0},$$

т. е. не существует определенного направления касательной. Из такой точки могут исходить многие траектории. Точки этого типа назовем *особыми*.

Сопоставив условия (23) с уравнениями (21), видим, что условия (23) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0. \quad (24)$$

Однако равенства (24) означают, что переменные x и y , характеризующие состояние системы, не изменяются, т. е. нет движения — система находится в равновесии. Следовательно, *особые точки* суть не что иное, как точки равновесия, или, точнее, точки на фазовой плоскости, соответствующие *состояниям равновесия* системы.

В нелинейных системах функции P и Q могут в общем случае быть нелинейными, а в таком случае система уравнений (23) может иметь не одну пару решений, а несколько (или, быть может, даже бесконечное множество). Это означает, что нелинейная система может иметь не одно состояние равновесия, а несколько.

Если параметры уравнений зависят явно от времени, то уравнения (21) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

В этом случае исследование на фазовой плоскости становится значительно сложнее, так как вся картина фазовых траекторий изменяется с течением времени. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, t)}{P(x, y, t)}, \quad (26)$$

т. е. в каждой точке фазовой плоскости направление касательной зависит от времени.

Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь тех систем, в которых нет явной зависимости Q и P от времени. Такие системы называются *автономными*.

Понятие устойчивости положения равновесия, которое рассматривалось в предыдущих главах, требует обобщения при переходе к исследованию нелинейных систем. Рассмотрим в качестве примера маятник, изображенный на рис. 9.11. Если отклонить маятник от положения равновесия a , то он в дальнейшем вернется вновь к прежнему положению и начнет совершать вокруг него затухающие колебания. Чем меньший начальный толчок дан маятнику, тем меньше последний отклонится от состояния равновесия. При достаточно малом толчке скорость отклонения и само отклонение будут также сколь угодно малы. Такое состояние равновесия называется *устойчивым*.

Если, однако, тот же маятник находится в другой точке равновесия — в верхнем положении (положение b на рис. 9.11), то его поведение при сколь угодно малом отклонении будет иным. Если сначала маятник находится в положении b , то достаточно сколь угодно малого толчка, чтобы маятник, выйдя из точки b , стал удаляться от нее все больше и больше. Таким образом, при сколь угодно малом толчке маятник не остается в окрестности точки равновесия b , а уходит от нее. Такое состояние равновесия называется *неустойчивым*.

Предыдущие определения носили лишь приблизительный, полуинтуитивный характер. Ляпунов дал строгое определение понятия «устойчивость». Система, удовлетворяющая условию устойчивости Ляпунова, называется устойчивой по Ляпунову или иногда просто устойчивой.

Рассмотрим точку равновесия O на фазовой плоскости (рис. 9.12). Определение устойчивости, по Ляпунову, состоит в следующем. *Состояние равновесия называется устойчивым, если при любой заданной области ϵ допустимых отклонений от состояния равновесия (например, область ϵ вокруг точки равновесия O) можно указать область δ (ϵ), окружающую состояние равно-*

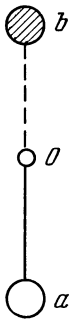


Рис. 9.11.

весья (но не состоящую из одной только точки равновесия) и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ , никогда не достигнет границ области ε . Наоборот, состояние равновесия неустойчиво, если может быть указана такая область отклонений от состояния равновесия (область ε), для которой не существует области $\delta(\varepsilon)$, окружающей состояние равновесия и обладающей тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ , никогда не достигнет границы области ε .

Подчеркнем некоторые характерные черты этого определения. Во-первых, если мы задаем какую-то область ε допустимых отклонений, то область δ — область допустимых начальных условий — зависит от того, какую мы выбрали область ε .

Отметим зависимость δ от ε как

$$\delta = \delta(\varepsilon).$$

Затем весьма существенно, что, имея некоторую область δ начальных условий, мы не требуем, чтобы система обязательно вновь приходила к прежнему состоянию равновесия — к точке O . Это «сильное» требование заменяем более «слабым» — требуем лишь, чтобы движение изображающей точки после отклонения происходило внутри области ε допустимых отклонений (требование возврата к прежнему состоянию равновесия приводит к иному определению — так называемой *асимптотической устойчивости*).

На первый взгляд кажется, что к системе предъявляются слишком слабые требования. Однако достаточно вникнуть в определение устойчивости по Ляпунову, чтобы понять, что и эти требования идут весьма далеко. Действительно, так как для любой области ε имеется своя область допустимых начальных условий $\delta(\varepsilon)$, то, следовательно, задав сколь угодно малую область отклонений ε , мы все же получим какую-то область $\delta(\varepsilon)$, окружающую точку равновесия и, вообще говоря, содержащуюся внутри ε .

Следовательно, и наоборот, при достаточно малых начальных толчках (начальные условия, т. е. начальные скорость и отклонение достаточно малы по модулю) получающиеся отклонения также достаточно малы. Система, удовлетворяющая этому условию, вполне соответствует и нашим интуитивным представлениям об устойчивости.

Подчеркнем еще одну черту определения устойчивости по Ляпунову. В этом определении сначала задается произвольная область ε допустимых отклонений, и если система устойчива, существует область $\delta(\varepsilon)$ допустимых начальных условий, при которых гарантируется, что изображающая точка в дальнейшем движении не перейдет границ области ε .

Но устойчивость по Ляпунову вовсе не гарантирует того, что при любой произвольной конечной области начальных условий система обязательно вернется к состоянию равновесия, либо не выйдет за пределы какой-то окружающей δ , но конечной области. Этого может и не быть. Как будет показано ниже, встречаются примеры, в которых только для достаточно малых, но вовсе не произвольных областей δ можно указать конечные области отклонений ε . Если же область δ выходит за некоторые границы, то конечной области допустимых отклонений ε может не существовать — изображающая точка может «уйти в бесконечность», т. е. расстояние от нее до точки равновесия становится больше любой сколь угодно большой величины.

Следовательно, область начальных условий δ определяет конечную область отклонений ε только для достаточно малых отклонений, в достаточно

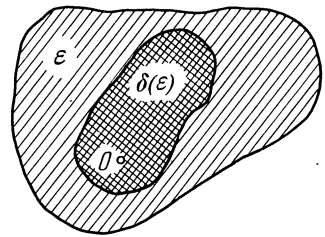


Рис. 9.12.

малой области вокруг точки равновесия. Поэтому системы, удовлетворяющие условию Ляпунова, наверняка являются локально-устойчивыми, т. е. устойчивыми при достаточно малых начальных отклонениях от точки равновесия в фазовом пространстве. Но система, устойчивая по Ляпунову, может уйти сколь угодно далеко от точки равновесия при достаточно больших начальных отклонениях, т. е., как говорят, может не быть *устойчивой в большом*.

Итак, *устойчивость по Ляпунову* — это локальная устойчивость, *устойчивость «в малом»* (т. е. для достаточно малых начальных отклонений). Именно этот тип устойчивости важен тогда, когда мы исследуем физическую осуществимость того или иного состояния равновесия. Если данное состояние равновесия устойчиво по Ляпунову, то оно физически осуществимо, если нет, то неосуществимо, так как при любых сколь угодно малых начальных отклонениях изображающая точка системы начнет уходить из окрестности точки равновесия.

Пусть x_0, y_0 — одно из решений системы уравнений (23), т. е. координаты одной из точек равновесия на фазовой плоскости. Как исследовать характер устойчивости системы в этом положении равновесия? Чтобы упростить вычисления, введем новые переменные ξ и η , связанные с прежними x и y соотношениями

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \quad (27)$$

Геометрически это преобразование означает перенос начала координат в точку равновесия (x_0, y_0) .

Если P и Q — аналитические функции в некоторой области, окружающей рассматриваемую точку равновесия, то их можно разложить в ряды:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + a\xi + b\eta + P_1(\xi, \eta), \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + c\xi + d\eta + Q_1(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь выражения P_1 и Q_1 объединяют все члены степени выше первой относительно ξ и η . Значения a, b, c, d , согласно правилу разложения в ряд Тейлора, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = P'_x(x_0, y_0), & b &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = P'_y(x_0, y_0), \\ c &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = Q'_x(x_0, y_0), & d &= \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = Q'_y(x_0, y_0). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Если мы имеем дело с достаточно малыми отклонениями от точки равновесия, т. е. малыми ξ и η , то интуитивно ясно, что можно пренебречь членами, содержащими $\xi^2, \eta^2, \xi\eta$ и т. д., — вообще членами P_1 и Q_1 в выражении (28). В этом случае, если учтем равенства (23), справедливые для точки (x_0, y_0) , и поскольку $x_0 = \text{const}, y_0 = \text{const}$, учтем также, что $\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}, \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$, то получим приближенную систему уравнений или систему уравнений первого приближения для малых отклонений ξ, η

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Эту систему уравнений легко исследовать, так как уравнения линейны и их коэффициенты постоянны. Однако заранее нельзя еще сказать, действительно ли исследование характера устойчивости по приближенным уравнениям (30) даст нам точное суждение о характере устойчивости системы, описываемой нелинейными уравнениями (25), в точке равновесия (x_0, y_0) . Заслу-

га Ляпунова заключается в том, что он строго доказал, что во многих случаях исследование линейной системы (30) дает точный ответ относительно устойчивости нелинейной системы (25) в точке (x_0, y_0) .

Для того чтобы определить, в каких случаях это возможно, необходимо предварительно изложить метод исследования уравнений (30). Этот метод очень прост. Применяем обычный метод решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Полагаем решение в форме экспонент

$$\xi = Ae^{\lambda t}, \quad \eta = Be^{\lambda t}. \quad (31)$$

Подставляем эти выражения в уравнения (30). Получаем после сокращения на $e^{\lambda t} \neq 0$

$$A\lambda = Aa + Bb, \quad B\lambda = Ac + Bd$$

или

$$\left. \begin{aligned} A(a - \lambda) + Bb &= 0, \\ Ac + B(d - \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Не равные нулю значения A и B могут существовать только в том случае, когда определитель системы уравнений (32) равен нулю. Следовательно, λ должно удовлетворять уравнению (32)

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

Это и есть характеристическое уравнение. Конечно, его можно было найти и любым иным путем, например, написав выражение для изображения какой-либо величины — ξ или η . Решения λ_1 и λ_2 квадратного характеристического уравнения (33) дают, согласно (31), частные решения системы $\xi_1 = A_1 e^{\lambda_1 t}$, $\eta_1 = B_1 e^{\lambda_1 t}$ и $\xi_2 = A_2 e^{\lambda_2 t}$, $\eta_2 = B_2 e^{\lambda_2 t}$. Общее решение для ξ и η имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \eta &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, определяемые двумя начальными условиями и равенствами (32), из которых следует

$$B_1 = -A_1 \frac{a - \lambda_1}{b}, \quad B_2 = -A_2 \frac{a - \lambda_2}{b}.$$

Характер устойчивости определяется видом корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения. Если эти корни находятся в левой полуплоскости комплексного переменного, то $\xi \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. система уравнений первого приближения устойчива.

Ляпунов доказал, что если для системы уравнений первого приближения все действительные части корней отрицательны, то в этом случае локально устойчива не только линейная «приближенная» система (30), но и нелинейная система (21). Далее им доказано, что при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения системы первого приближения в правой полуплоскости неустойчива не только система уравнений первого приближения, но и нелинейная система. Только в том случае, когда имеются корни на мнимой оси (помимо корней в левой полуплоскости), исследование системы уравнений первого приближения не может дать ответа на вопрос об устойчивости нелинейной системы, и необходимо изучение другими методами, с привлечением приближений более высокого порядка.

Рассмотрим возможные типы корней характеристического уравнения (33) и соответствующие картины фазовых траекторий в окрестности точки равновесия.

1. Оба корня характеристического уравнения чисто мнимые. Напишем уравнение (33) в развернутом виде:

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (35)$$

Условие существования мнимых корней этого уравнения означает

$$\left. \begin{aligned} a + d &= 0, \\ ad - bc &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Простейшим примером системы подобного типа является система с уравнением (17) и решением (18). Как было показано выше, фазовая траектория в этом случае есть эллипс с уравнением (20). При различных значениях A и $\omega_0 A$ (см. рис. 9.10), причем через каждую точку плоскости проходит один эллипс, соответствующий определенному значению A , т. е. определенному виду начальных условий. Вся фазовая плоскость оказывается заполненной вложенными друг в друга эллипсами, за исключением точки $x = 0, y = 0$. Решение (18) показывает, что имеют место незатухающие колебания вокруг положения равновесия. Изображающая точка, попав однажды на какой-нибудь из эллипсов, будет двигаться по нему вокруг точки равновесия.

Таким образом, выбирая достаточно малые начальные отклонения, можно быть уверенным в том, что замкнутая фазовая траектория не выйдет из любой наперед заданной области допустимых отклонений ϵ , поэтому в данном случае положение равновесия для системы первого приближения устойчиво по Ляпунову. Точка равновесия такого типа, когда фазовые траектории являются замкнутыми, вложенными друг в друга кривыми, охватывающими эту точку, называется точкой типа *центра* или просто *центром*. Подобные точки равновесия характерны для консервативных систем, в которых нет ни притока энергии извне к системе, ни расхода энергии. Примером служит «идеальный» колебательный контур, состоящий из индуктивности L и емкости C при сопротивлении $R = 0$.

Уравнение для тока при свободных колебаниях в подобном контуре имеет вид

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0.$$

Это частный случай уравнения (19) при $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

2. Два комплексно сопряженных корня с отрицательной действительной частью. Рассмотрим систему с уравнением (18), причем

$$h^2 < \omega_0^2. \quad (37)$$

При этом корни характеристического уравнения комплексно сопряжены. Решение имеет вид затухающих колебаний:

$$\left. \begin{aligned} x &= M_1 e^{-ht} \sin(\omega t + \varphi_1), \\ \frac{dx}{dt} = y &= M_2 e^{-ht} \sin(\omega t + \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где $M_1, M_2, \varphi_1, \varphi_2$ — постоянные, а

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \quad (39)$$

Уравнение (16) можно представить в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega_0^2 x - 2hy. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Исключая t из этих двух уравнений, получаем уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x + 2hy}{y}. \tag{41}$$

Это выражение, как можно показать, является уравнением логарифмической спирали (рис. 9.13). Движение по этой спирали происходит в направлении, указанном стрелкой, так как при $y > 0$ величина x должна увеличиваться, а при $y < 0$ — уменьшаться. Проекция радиуса-вектора изображающей точки на оси координат будут, как это видно из формулы (38) и рис. 9.13, затухающими колебаниями. При различных начальных условиях движение будет происходить по различным спиралям, «вложенным» друг в друга, с точкой равновесия O в виде асимптотической точки, куда сходятся все спирали (рис. 9.14).

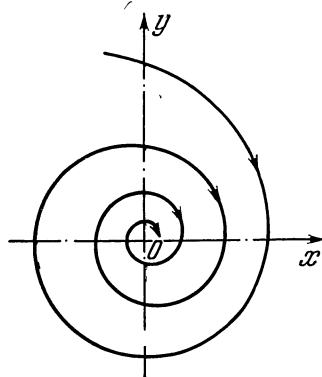


Рис. 9.13.

Такая точка равновесия называется *устойчивым фокусом*. Изображающая точка не только не уходит при отклонении из окрестности точки равновесия O , но, наоборот, неограниченно приближается к последней. Поэтому устойчивый фокус является устойчивым, по Ляпунову, положением равновесия и даже обладает асимптотической устойчивостью (с течением времени изображающая точка возвращается сколь угодно близко к положению равновесия). Очевидно, фокус устойчив, если $h > 0$. При этом колебания в системе затухают.

3. Два комплексно сопряженных корня с положительной действительной частью. Если в уравнении (16) величина $h < 0$, колебания (см. формулу (37))

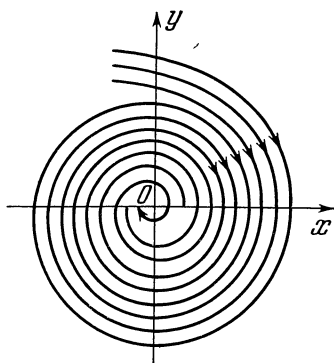


Рис. 9.14.

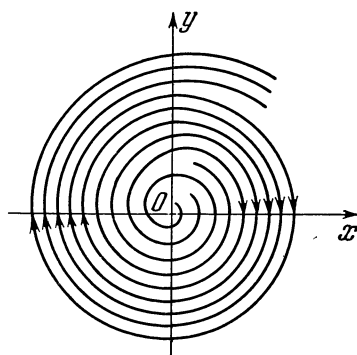


Рис. 9.15.

нарастают. Получаем картину траекторий, изображенных на рис. 9.15, — раскручивающихся спиралей. Идя по каждой из них, изображающая точка уходит с течением времени сколь угодно далеко от точки равновесия O . Следовательно, точка равновесия неустойчива. Она называется *неустойчивым фокусом*.

4. Два действительных отрицательных корня. Примером служит уравнение (16) при

$$h > 0, \quad h^2 > \omega_0^2. \tag{42}$$

Решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = \frac{dx}{dt} &= C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ — отрицательные действительные числа. Точка этого типа называется *устойчивым узлом*. Типичная картина фазовых траекторий показана на рис. 9.16. Здесь уже нет колебательного движения вокруг точки равновесия, и только для известной области начальных условий имеется «полуколебание» (например, траектория *mn*), когда y меняет в процессе движения знак.

5. Два действительных положительных корня. В этом случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и картина траекторий имеет в общем тот же вид, что на рис. 9.16,

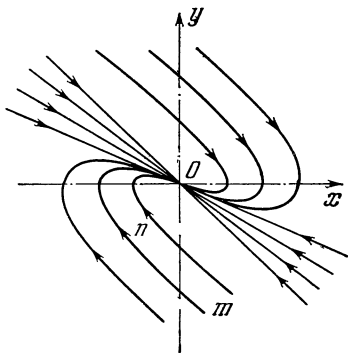


Рис. 9.16.

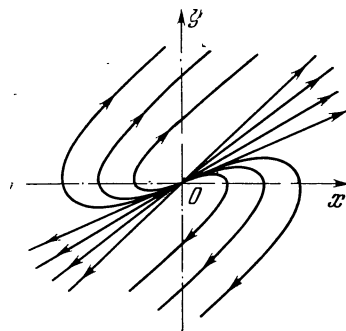


Рис. 9.17.

но направление движения изображающей точки изменяется на обратное — от точки равновесия O к бесконечности. Если учесть, что при $y > 0$ величина x должна нарастать, то получим картину траекторий, изображенную на рис. 9.17. Такая точка называется *неустойчивым узлом*. Примером служит уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

при

$$h < 0, \quad h^2 > \omega_0^2. \quad (44)$$

6. Действительные корни различных знаков. Рассмотрим простейший пример

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = kx, \quad (45)$$

т. е. действие на материальную точку массы m «отталкивающей» силы kx , пропорциональной удалению точки от положения равновесия. Заменяя это уравнение двумя

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{R}{m} x,$$

получаем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m} \frac{x}{y}. \quad (46)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{y^2}{R} - \frac{x^2}{m} = c. \quad (47)$$

Это уравнение семейства равнобедренных гипербол, отнесенное к главным осям. Положим $c = 0$, находим две асимптоты этого семейства:

$$y = -\sqrt{\frac{k}{m}}x \quad \text{и} \quad y = \sqrt{\frac{R}{m}}x.$$

Картина траекторий показана на рис. 9.18. Такая точка равновесия называется точкой типа *седла* или просто *седлом*.

Рассматривая рис. 9.18, легко убедиться в том, что где бы ни находилась изображающая точка в начальный момент, она всегда в конечном итоге начнет удаляться от точки равновесия (причем это движение будет не колебательным, а аperiodическим). Следовательно, седло есть неустойчивая точка.

Только в случае движения изображающей точки в точности по асимптоте $y = -\sqrt{\frac{R}{m}}x$ она движется к положению равновесия. Но стоит изображающей точке сдвинуться на сколь угодно малое расстояние от этой асимптоты, как она уже в конечном итоге уйдет от точки O . Если считать все начальные состояния равновероятными, то вероятность попасть в точности на асимптоту равна нулю. Поэтому при всяком реальном движении система окажется неустойчивой.

В общем случае уравнение с корнями различных знаков имеет вид ($h > 0$ или $h < 0$).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x = 0. \quad (48)$$

Качественно картина протекания фазовых траекторий в общем случае остается такой же, как на рис. 9.18.

Сведем теперь воедино результаты рассмотрения всех типов состояний равновесия. Пусть $\text{Re}(\lambda)$ — действительная часть λ , $\text{Im}(\lambda)$ — мнимая часть λ . Всего имеем шесть типов точек равновесия, которые запишем в следующем порядке:

1. Центр: $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$, $\text{Im}(\lambda) \neq 0$.
2. Устойчивый фокус: $\text{Re}(\lambda) < 0$, $\text{Im}(\lambda) \neq 0$.
3. Неустойчивый фокус: $\text{Re}(\lambda) > 0$, $\text{Im}(\lambda) \neq 0$.
4. Устойчивый узел: $\text{Re}(\lambda) < 0$, $\text{Im}(\lambda) = 0$.
5. Неустойчивый узел: $\text{Re}(\lambda) > 0$, $\text{Im}(\lambda) = 0$.
6. Седло: $\text{Re}(\lambda_1) > 0$, $\text{Re}(\lambda_2) < 0$, $\text{Im}(\lambda) = 0$. Положив в уравнение (33)

$$\left. \begin{aligned} p &= -(a+d), \\ q &= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

находим

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (50)$$

Можно начертить в координатах (p, q) области, занимаемые различными типами состояний равновесия (рис. 9.19). Парабола $p^2 = 4q$ отграничивает колебательное движение от аperiodического, т. е. фокусы от узлов.

Область $q < 0$ соответствует седлам. Центры занимают пограничную линию между устойчивыми и неустойчивыми фокусами. Следовательно, в линейной системе малейшее изменение параметров изменит тип точки центра на тип фокуса. Поэтому в линейных системах, если они не строго консервативны, с точками типа центра и вообще с замкнутыми траекториями не

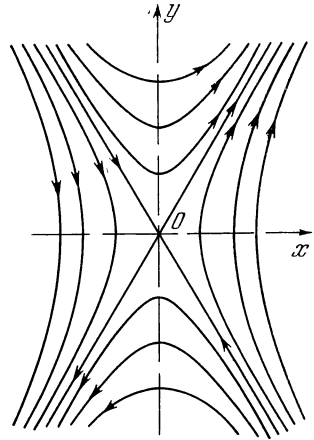


Рис. 9.18.

встречаются. Ниже увидим, что в нелинейных и неконсервативных системах могут существовать замкнутые траектории, т. е. периодические движения.

Выше были рассмотрены различные типы движений в окрестностях особых точек. Характер движения в окрестности обыкновенной точки полностью определен вектором, имеющим в данной точке наклон

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}.$$

Как было указано выше, через обыкновенную точку проходит только одна фазовая траектория и эта траектория характеризуется определенным углом наклона. Поэтому отрезок этой траектории вблизи данной точки изобразится просто в виде отрезка прямой (если речь о достаточно малой окрестности точки), направленного под данным углом к оси абсцисс. Отрезки фазовых траекторий, расположенных в достаточно малой окрестности обыкновенной точки, будут с достаточной точностью изображаться также отрезками

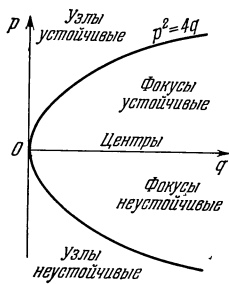


Рис. 9.19.

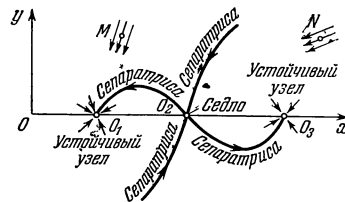


Рис. 9.20.

прямых, имеющими с точностью до бесконечно малых тот же угол наклона, что и угол наклона отрезка фазовой траектории, проходящей через данную точку. Итак, характер движения вблизи обыкновенной точки на фазовой плоскости изображается просто пучком параллельных отрезков.

На рис. 9.20 изображен для примера характер движений на фазовой плоскости (x, y) вблизи точек равновесия O_1, O_2, O_3 (O_1 и O_3 — устойчивые узлы, O_2 — седло) и обыкновенных точек M и N .

Изучение движений системы не может, однако, ограничиваться определением характера движений вблизи особых или обыкновенных точек. Часто необходимо дать ответ на вопросы, требующие знания всей картины фазовых траекторий на плоскости или хотя бы некоторых ее типичных черт, не сводящихся к характеру движения вблизи какой-либо точки. Часто, например, требуется ответить на вопрос: возможно ли в данной системе периодическое движение и какие начальные условия нужны для того, чтобы это периодическое движение получить. Все такого рода вопросы требуют методов изучения, справедливых и для больших участков фазовой плоскости или фазового пространства.

Допустим, например, что система имеет одну точку равновесия и эта точка устойчива, например является устойчивым фокусом. Это означает, что при малом отклонении от положения равновесия система станет совершать затухающие колебания вокруг этого положения и с течением достаточно большого промежутка времени будет сколь угодно близка к положению равновесия. Но значит ли это, что, выведя систему из равновесия, мы в любом случае получим стремление ее к положению равновесия, т. е. устойчивость в большом? Такой вывод был бы совершенно неверен. На основании исследования локальной устойчивости можно заключить в данном случае лишь об устойчивости при достаточно малых отклонениях, ибо те уравнения первого приближения,

которые дают ответ относительно характера устойчивости, справедливы лишь в достаточно малой окрестности точки равновесия.

Может случиться, что если начальное положение изображающей точки на фазовой плоскости выбрано далеко от положения равновесия, изображающая точка станет не приближаться, а, наоборот, удаляться от точки равновесия. В этом случае получаем устойчивость при малых отклонениях, т. е. устойчивость в малом, локальную устойчивость, но не устойчивость при больших отклонениях. Если при каких угодно отклонениях изображающая точка удаляется от положения равновесия, то система фактически является неустойчивой — неустойчивой в большом.

Исследуя характер движения вблизи точки, мы основное внимание уделяли особым точкам. Точно так же, исследуя характер движения на плоскости, мы уделим основное внимание особым траекториям, которые имеют большое значение для распознавания всей картины траекторий на фазовой плоскости, как говорят, фазового портрета системы.

Имеются три типа особых траекторий:

1) *Точки равновесия.* Последние являются частным случаем траектории, и, конечно, особым случаем. Этот тип траекторий уже был исследован выше.

2) *Периодические движения.* По прошествии времени T система вновь возвращается в прежнее состояние. Поэтому фазовая траектория оказывается замкнутой.

В консервативных системах кривые, соседние с периодической кривой, обычно также являются периодическими. Таким образом, характерной картиной при существовании периодических движений в консервативной системе является, например, картина, изображенная на рис. 9.10, — совокупность замкнутых траекторий, «вложенных» друг в друга. Нет никакой причины для того, чтобы назвать какую-либо из этих траекторий особой. Однако в неконсервативных системах замкнутые траектории играют принципиально иную роль. Здесь, как можно строго доказать, существуют только *изолированные* замкнутые траектории. Всякая траектория, соседняя с такой траекторией, уже не является замкнутой.

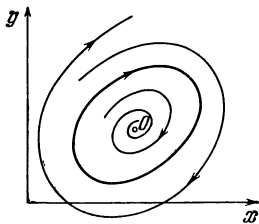


Рис. 9.22.

Изолированная замкнутая траектория является особой траекторией и называется *предельным циклом*.

На рис. 9.21 показан характерный пример, когда траектории, соседние внутри с предельным циклом, как бы «наматываются» на него, и изображающая точка, двигаясь по такой соседней траектории, все ближе придвигается к предельному циклу. Соседняя извне траектория также «наматывается» на предельный цикл. Где бы ни избрать начальную точку в некоторой области, окружающей предельный цикл, она с течением времени станет сколь угодно точно копировать периодическое движение, характеризующее предельный цикл. Иначе говоря, система от любых начальных значений, взятых в этой области, переходит к периодическому движению.

Такой *предельный цикл* называется *устойчивым*. В системе, где движение происходит по предельному циклу, имеются *автоколебания*.

Может, однако, существовать и картина иного характера: соседние траектории как снаружи, так и изнутри могут «разматываться» с предельного цикла (рис. 9.22), и изображающая точка, двигаясь по таким траекториям, с течением времени будет удаляться от предельного цикла. Такой предельный цикл называется *неустойчивым*. Действительно, если движение в этом случае

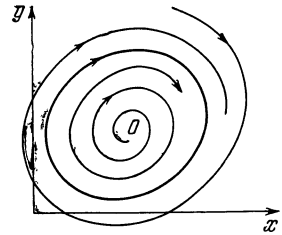


Рис. 9.21.

и окажется периодическим, т. е. изображающая точка движется как раз по замкнутой траектории, то стоит какому-либо случайному, сколь угодно малому толчку сколь угодно мало «сдвинуть» изображающую точку с предельного цикла, как система начнет удаляться от периодического движения. Поэтому движение по неустойчивому предельному циклу физически нереализуемо.

Если траектории с одной стороны «наматываются», а с другой «разматываются» с предельного цикла, то последний называется *полуустойчивым*.

Из рис. 9.21 и 9.22 видно, что устойчивый и неустойчивый предельные циклы играют роль, так сказать, «водоразделов», отделяющих область с одним типом траекторий («разматывающиеся») от области с другим типом траекторий («наматывающиеся»). Поэтому естественно назвать предельный цикл особой траекторией. К тому же в неконсервативной системе обычно имеется лишь конечное число предельных циклов. Это еще более подчеркивает особый характер такого типа траекторий.

3) «Усы» седла. Особое значение этих траекторий в окрестности самого седла, где они являются асимптотами, видно из рис. 9.18. «Усы» в этой окрестности являются также как бы «водоразделом» между движениями различного характера. Оказывается, что эти «усы» играют ту же роль не только при локальном рассмотрении, но и при рассмотрении в большом. При достаточном удалении от седла «ус» оказывается уже не прямой, а кривой линией. Эта кривая отделяет область траекторий одного типа от области другого типа. Такая кривая называется *сепаратрисой*. Пример сепаратрисы приведен на рис. 9.20.

Итак, *точки равновесия, предельные циклы и сепаратрисы являются особыми траекториями*. Таких траекторий имеется обычно конечное число на фазовой плоскости. Узнав все эти особые траектории, мы тем самым находим как бы скелет всей картины фазовых траекторий на плоскости. Особые траектории разбивают всю фазовую плоскость на ряд областей; характер движения в каждой из этих областей часто бывает нетрудно определить, зная характер устойчивости точек равновесия и предельных циклов. Так получается полная качественная характеристика всех возможных типов движений системы.

§ 3. Исследование нелинейной системы с реле

Рассмотрим применение метода интегрируемой аппроксимации на примере релейной системы. Назовем релейной системой автоматического регулирования такую систему, в состав структурной схемы которой входит безинерционное усилительное звено с релейной характеристикой, изображенной на рис. 9.23. Схема управляющего органа, имеющего подобную характеристику, показана на рис. 9.24, а и б. Управляющий орган включает в себя фазированный выпрямитель на двух лампах. В анодные цепи ламп включены реле P_1 и P_2 . Анодное напряжение u_a подается от сети переменного тока. На вход звена подано переменное напряжение Δu амплитуды x_1 . Выходное напряжение звена (рис. 9.24, б) — это напряжение u , подаваемое на якорь сервомотора. Покажем, что зависимость

$$u = f(x_1) \quad (1)$$

является зависимостью релейного типа, изображенной на рис. 9.23.

Если $\Delta u = 0$, т. е. $x_1 = 0$, то ни одно из реле не срабатывает, контакты K_1 и K_2 не замкнуты и напряжение u_0 не поступает на якорь двигателя. Замкнуты лишь нормально замкнутые контакты K'_1 и K'_2 , служащие для динамического торможения. Таким образом, напряжение, поданное на вход цепи якоря сервомотора, равно нулю. Если, например, на вход подается напряжение Δu , синфазное с анодным (условимся, что амплитуда такого напряжения положительна), то при $x_1 > \delta$ срабатывает реле P_1 , включая контактами K_1 напряжение $+u_0$ в цепь якоря сервомотора; при этом контакт

K'_1 размыкает цепь динамического торможения. При $x_1 < -\delta$, т. е. при напряжении Δu в противофазе с анодным и достаточно большим по амплитуде, срабатывает реле P_2 , подающее напряжение противоположного звена ($-u_0$) в цепь якоря сервомотора. Если срабатывание и отпускание реле происходит при одном и том же токе, т. е. коэффициент возврата $\lambda = 1$, то зависимость u от x принимает форму кривой, показанной

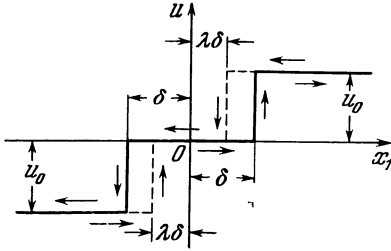


Рис. 9.23.

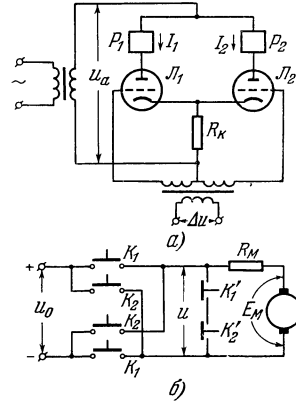


Рис. 9.24.

сплошной линией на рис. 9.23. Аналитическое выражение для этой кривой можно написать в следующем виде:

$$u = f(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{при } |x_1| < \delta, \\ +u_0 \quad \text{при } x_1 \geq \delta, \\ -u_0 \quad \text{при } x_1 \leq -\delta. \end{array} \right\} \quad (2)$$

В действительности, вследствие того что коэффициент возврата $\lambda < 1$, отпускание реле P_1 происходит не при $x_1 = \delta$, а при меньшем значении $\lambda\delta$. Кривая обратного хода показана на рис. 9.23 пунктиром. Следовательно, характеристика (1) нелинейного усилителя становится неоднозначной, что может оказаться, как выяснится ниже, причиной неустойчивости системы. При $x_1 < 0$ характеристика имеет аналогичный вид (считаем, что реле P_1 и P_2 и ветви ламп L_1 и L_2 идентичны; поэтому вся характеристика, изображенная на рис. 9.23, нечетная).

Релейные системы автоматического регулирования получили значительное распространение. Наряду с конструктивной простотой они обладают принципиальным преимуществом: в них возможно достижение минимального времени регулирования, меньшего, чем в линейных системах. Действительно, рассмотрим, например, процесс отработки начального рассогласования двух осей x_0 . Для того чтобы этот процесс происходил в течение минимального времени, требуется сначала осуществить с максимально допустимым ускорением разгон приемной оси, а затем при максимально допустимом отрицательном ускорении затормозить ось. При этом считаем, что величина ускорения приемной оси ограничена по модулю, как это имеет место на практике, например, допустимым током сервомотора. На рис. 9.25 показана наилучшая кривая $y = \frac{dx}{dt}$, где x — величина рассогласования. Начальное рассогласование x_0 , которое исчерпывается по истечении времени T_0 переходного процесса,

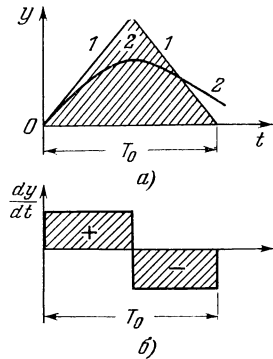


Рис. 9.25.

есть постоянная величина, равная площади кривой

$$x_0 = \int_0^{T_0} y dt = \text{const.}$$

Кривая I является ломаной, наклон которой по абсолютной величине равен максимально допустимому значению $\left| \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{\text{max}}$. Нетрудно убедиться в том,

что всякая иная кривая 2 с наклоном, не превышающим по модулю $\left| \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{\text{max}}$, будет описывать ту же площадь x_0 в течение большего времени, чем T_0 . Следовательно, доказано, что движение, соответствующее кривой I , дает минимальное время регулирования.

При этом вращающий момент двигателя, пропорциональный ускорению $\frac{dy}{dt}$, меняется по кривой, показанной на рис. 9.25, б. Аналогичным образом должен изменяться и ток сервомотора; подобный характер изменения достижим проще всего в релейной системе.

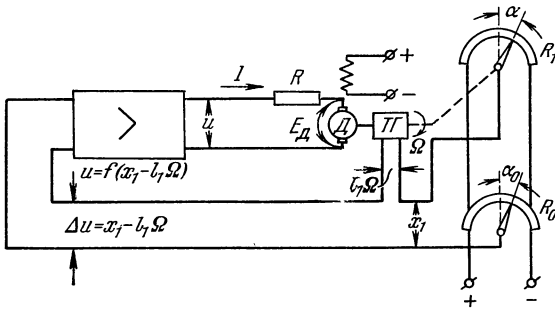


Рис. 9.26.

Принципиальная схема одной из систем регулирования положения с релейным усилителем изображена на рис. 9.26.

Задающая ось связана с движком потенциометра R_0 ; ее отклонение α_0 считаем равным нулю. Тогда угловое рассогласование между задающей и приемной осями равно углу α приемной оси, взятому с обратным знаком, т. е. $\alpha_0 - \alpha = -\alpha$.

С приемной осью связан движок потенциометра R_1 . На выходе измерительного органа появляется напряжение x_1 , пропорциональное рассогласованию

$$x_1 = -\rho\alpha. \tag{3}$$

На валу сервомотора, вращающего приемную ось, помещается тахогенератор, дающий напряжение отрицательной обратной связи, пропорциональное скорости $-l_1\Omega$. Алгебраическая сумма

$$\Delta u = x_1 - l_1\Omega \tag{4}$$

поступает на вход релейного усилителя, описанного выше. Пренебрежем индуктивностью якоря сервомотора. Тогда уравнение электрической цепи последнего имеет вид

$$u = IR + k_M\Omega, \tag{5}$$

где I — ток якоря, $E_M = k_M\Omega$ — противо-э. д. с. двигателя, а k_M — коэффициент пропорциональности.

Пусть момент инерции, приведенный к валу мотора, равен J , передаточное число редуктора, соединяющего вал сервомотора с приемной осью, равно q , а вращающий момент сервомотора равен $M_{вр} = \vartheta I$, где $\vartheta = \text{const}$. Пренебрегая моментом трения, можно написать остальные уравнения системы в следующем виде:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \vartheta I, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Omega}{q}, \quad u = f(\Delta u). \tag{6}$$

Исключая из уравнений (4), (5), (6) все неизвестные, кроме x_1 , находим

$$f\left(x_1 + \frac{l_1 q}{\rho} \dot{x}_1\right) = -\frac{JqR}{\vartheta\rho} \ddot{x}_1 - \frac{k_M q}{\rho} \dot{x}_1. \quad (7)$$

Обозначим

$$a = \frac{JRq}{\vartheta\rho}, \quad b = \frac{k_M q}{\rho}. \quad (8)$$

Тогда уравнение системы принимает вид

$$a \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + f\left(x_1 + \frac{l_1 q}{\rho} \frac{dx_1}{dt}\right) = 0. \quad (9)$$

Перейдем к относительным единицам, положив

$$x = \frac{b^2}{u_0 a} x_1, \quad \tau = \frac{bt}{a}. \quad (10)$$

Основное уравнение можно переписать так:

$$\frac{a}{u_0} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{b}{u_0} \frac{dx}{d\tau} = -\frac{1}{u_0} f\left(x_1 + \frac{l_1 q}{\rho} \frac{dx_1}{dt}\right) = -\psi\left(x + l \frac{dx}{d\tau}\right) = \psi(w), \quad (11)$$

где при $\lambda = 1$ и

$$l = \frac{l_1 q}{\rho} \frac{u_0}{\rho}, \quad (12)$$

функция ψ имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |w| = \left|x + l \frac{dx}{d\tau}\right| < \varepsilon, \\ +1 & \text{при } w = x + l \frac{dx}{d\tau} > \varepsilon, \\ -1 & \text{при } w = x + l \frac{dx}{d\tau} < -\varepsilon. \end{cases} \quad (13)$$

Величина w достигает значения ε , например, при $\frac{dx_1}{dt} = 0$ и $x_1 = \delta$, откуда, согласно первой формуле (10), следует

$$\varepsilon = \frac{b^2 \delta}{u_0 a}. \quad (14)$$

Переходя в выражении (11) от t к τ и от x_1 к x согласно формулам

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{u_0 a}{b^2} \frac{dx}{d\tau} = \frac{u_0 a}{b^2} \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{u_0}{b} \frac{dx}{d\tau}$$

и

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{u_0}{b} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{u_0}{b} \frac{d^2 x}{d\tau^2} \frac{d\tau}{dt} = \frac{u_0}{a} \frac{d^2 x}{d\tau^2},$$

получаем окончательное уравнение системы в относительных единицах:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = -\psi\left(x + l \frac{dx}{d\tau}\right). \quad (15)$$

Для исследования с помощью фазовой плоскости заменим это уравнение двумя уравнениями первого порядка. Положим $\frac{dx}{d\tau} = y$. Тогда вместо уравнения (15) получим два уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -y - \psi. \quad (16)$$

Функция ψ от w имеет по форме такой же вид, как и функция u от x_1 . Она изображена на рис. 9.27. Эта функция $\psi = +1$ при $w = x + l \frac{dx}{d\tau}$ или при

изменении w между ε и $\lambda\varepsilon$, если в начальный момент эта функция была равна $+1$. Аналогично $\psi = -1$ при $w = x + l \frac{dx}{d\tau} < -\varepsilon$ или при изменении w в интервале $-\varepsilon < w < -\lambda\varepsilon$, если в начальный момент $\psi = -1$. Величина

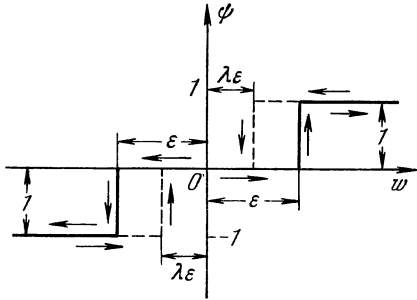


Рис. 9.27.

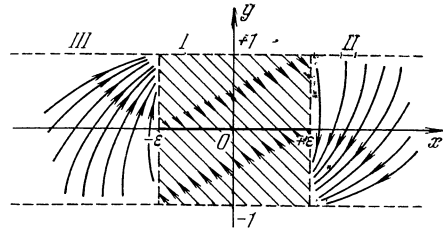


Рис. 9.28.

$\psi = 0$ при $|w| < \lambda\varepsilon$, а также при изменении w в интервалах $-\varepsilon < w < -\lambda\varepsilon$ и $+\varepsilon < w < +\lambda\varepsilon$, если в начальный момент $\psi = 0$. Таким образом, величина ψ зависит не только от значения w , но и от «предыстории» движения.

Рассмотрим сначала частные случаи.

1) В простейшем случае коэффициент обратной связи $l = 0$ и коэффициент возврата $\lambda = 1$, т. е. область неоднозначности в релейной характеристике отсутствует. Тогда функция ψ принимает вид

$$\psi = \begin{cases} +1 & \text{при } x > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |x| < \varepsilon, \\ -1 & \text{при } x < -\varepsilon. \end{cases} \quad (17)$$

Уравнение фазовых траекторий получается в результате исключения τ из уравнений (16)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + \psi}{y}. \quad (18)$$

Это уравнение справедливо для любого случая. В данном простейшем случае, однако, ψ зависит лишь от x . Рассмотрим фазовую плоскость (рис. 9.28). Прямыми $x = +\varepsilon$ и $x = -\varepsilon$ вся фазовая плоскость разбивается на три зоны: I, II и III. Зона I характеризуется неравенством

$$|x| < \varepsilon. \quad (19)$$

Согласно выражению (17) для любой точки этой зоны величина $\psi = 0$, и уравнение траектории (18) принимает в этой зоне вид

$$\frac{dy}{dx} = -1. \quad (20)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y = -x + \text{const}. \quad (21)$$

Это — уравнение семейства прямых, идущих под углом 45° к оси абсцисс. Соответствующие траектории в зоне I начерчены на рис. 9.28, причем стрелками намечены направления движения на этих траекториях (согласно правилу: при $y > 0$ величина x должна увеличиваться и при $y < 0$ величина x должна уменьшаться).

Найдем, где находятся на фазовой плоскости точки, соответствующие состоянию равновесия системы. В точках равновесия $\frac{dx}{d\tau} = 0$ и $\frac{dy}{d\tau} = 0$. Из уравнений (16) находим, что эти условия означают

$$y = 0, \quad y + \psi = 0. \quad (22)$$

Из этих уравнений следует равенство $\psi = 0$, что справедливо при $|x| < \varepsilon$. Итак, точки равновесия характеризуются условиями

$$y = 0, \quad |x| < \varepsilon. \quad (23)$$

Этим условиям соответствует отрезок равновесия на оси x , изображенный жирной линией на рис. 9.28. Каждая из точек этого отрезка есть точка равновесия. Таким образом, в данном случае получаем бесконечное множество — континуум точек равновесия.

На рис. 9.28 видно, что точки отрезка равновесия соответствуют устойчивым положениям равновесия, так как фазовые траектории в зоне I идут к ним, а не от них. Наибольшая скорость сервомотора при токе $I = 0$ будет равна $\Omega_{\max} = \frac{u_0}{R_M}$ (так как при этом $E_M = k_M \Omega = u_0$). Поэтому наибольшее значение для $\frac{dx_1}{dt}$

$$\left| \frac{dx_1}{dt} \right|_{\max} = \frac{\rho}{q} \Omega_{\max} = \frac{\rho u_0}{q R_M} = \frac{u_0}{b}.$$

Отсюда

$$|y|_{\max} = \left| \frac{dx}{d\tau} \right|_{\max} = \frac{b}{u_0} \left| \frac{dx_1}{dt} \right|_{\max} = 1. \quad (24)$$

Таким образом, можно не рассматривать фазовые траектории, лежащие вне области $|y| \leq 1$ (если не принимать во внимание каких-либо внешних толчков в системе).

В зоне II величина $x > \varepsilon$ и, согласно выражению (17), $\psi = +1$. Поэтому уравнение (18) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{y}. \quad (25)$$

В зоне III , где $x < -\varepsilon$ величина $\psi = -1$, и уравнение (18) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y-1}{y}. \quad (26)$$

Достаточно рассмотреть лишь одну из зон II или III , так как картина фазовых траекторий в этих зонах оказывается антисимметричной относительно начала координат. Действительно, рассмотрим уравнения (16) сначала для некоторого радиуса-вектора $r(x, y)$, конец которого расположен в зоне II , затем для вектора $r_1 = r(-x, -y)$, конец которого находится в зоне III . Векторы скорости $\frac{dr}{d\tau}$ и $\frac{dr_1}{d\tau}$, равные друг другу по модулю, обратны по знаку, так как $\psi = +1$ для r и $\psi = -1$ для r_1 . Поэтому, начертив траекторию для зоны II , можно затем повернуть чертеж на 180° и, таким образом, получить траектории для зоны III .

Для нахождения траектории в зоне II интегрируем уравнение (25). Из него следует

$$\frac{y dy}{y+1} = -dx$$

или

$$dy - \frac{dy}{y+1} = -dx. \quad (27)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y - y_{\text{нач}} - \ln \frac{y+1}{y_{\text{нач}}+1} = x_{\text{нач}} - x$$

или

$$x_{\text{нач}} - x = y - y_{\text{нач}} + \ln \frac{y_{\text{нач}}+1}{y+1}. \quad (28)$$

Здесь $x_{\text{нач}}$ и $y_{\text{нач}}$ — начальные значения координат той точки на фазовой плоскости, откуда начинается рассматриваемая фазовая траектория. Уравнения фазовых траекторий, построенные, согласно уравнению (28), для зоны II, а затем перенесенные указанным выше способом на зону III, показаны на рис. 9.28. Можно показать, что в этом случае не существует предельного цикла, и при всяком движении изображающая точка стремится к отрезку равновесия.

2) Пусть $l = 0$, $0 < \lambda < 1$.

Поскольку функция ψ по-прежнему может принимать лишь значения $+1$, 0 , -1 , уравнения (20), (25), (26) для фазовых траекторий в различных зонах остаются прежними. Изменяется лишь

расположение зон. Для того чтобы выяснить, как будут в данном случае расположены различные зоны, рассмотрим движение изображающей точки на фазовой плоскости (рис. 9.29), находящейся в начальный момент времени, допустим, в положении M' . При этом реле не сработало и $\psi = 0$. Траектория является прямой линией; изображающая точка движется по этой траектории до тех пор, пока величина x не сделается равной ϵ , т. е. до точки M_1 . Тогда реле сработает, функция ψ сделается равной $+1$, и изображающая точка перейдет в зону II. Следовательно, в верхней полуплоскости границей между зонами I и II является вертикальная

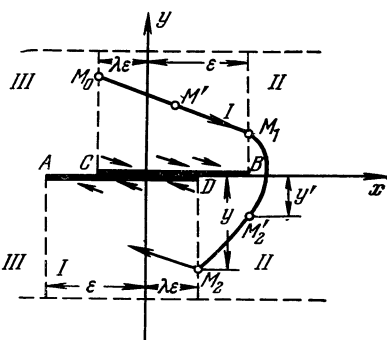


Рис. 9.29.

полупрямая $x = \epsilon$ ($y \geq 0$). Затем изображающая точка двинется по криволинейной траектории M_1M_2 . Однако, поскольку $\lambda < 1$, реле не отпустит, когда координата x в точке M_1 сделается равной ϵ . Движение будет продолжаться по той же траектории до тех пор, пока x не сделается равным $\lambda\epsilon$, т. е. до точки M_2 . Лишь тогда реле отпустит, функция ψ сделается равной нулю и изображающая точка перейдет в зону I.

Итак, границей между зонами I и II в нижней полуплоскости является полупрямая $x = \lambda\epsilon$ ($y < 0$). Аналогично рассуждая, получаем для левой полуплоскости две полупрямые: $x = -\epsilon$ ($y \leq 0$) и $x = -\lambda\epsilon$ ($y \geq 0$) в качестве границы между зонами I и III.

Из рис. 9.29 видно, что при $\lambda < 1$ момент отпускания реле (точка M_2) несколько запаздывает по сравнению с моментом отпускания (точка M_2') при $\lambda = 1$. Благодаря этому запаздыванию скорость y в точке M_2 становится больше по абсолютной величине, чем величина y' в точке M_2' , т. е. затухание колебаний становится меньше. Можно показать, что в этом случае система при известном соотношении параметров может стать неустойчивой. Это будет показано ниже для общего случая, включающего рассматриваемый случай как частный. Отрезок равновесия в данном случае приобретает новые черты. Точки отрезка CD , характеризуемого условиями $y = 0$, $|x| < \lambda\epsilon$ и составляющего часть отрезка равновесия, являются точками обычного типа. Отрезки же AC и BD обладают иными свойствами. Например, к отрезку BD подходят траектории, расположенные лишь в верхней полуплоскости; пере-

ход в нижнюю полуплоскость через линию BD «запрещен», так как сколь угодно малое отклонение изображающей точки от отрезка BD вниз означает приложение возмущающей силы конечной величины к релейному усилителю (например, прижатие контактов реле пальцами). Поэтому отрезок равновесия может быть устойчив, даже если траектория, изображенная на рис. 9.28, исходит из какой-либо точки прямой BD , но направлена вниз. Аналогичные соображения справедливы и для отрезка AC , с той разницей, что здесь «запрещен» переход через прямую AC в верхнюю полуплоскость.

3) Рассмотрим теперь общий случай $\lambda \leq 1, l \geq 0$. Здесь ψ является уже функцией не x , а $w = x + ldx/d\tau = x + ly$. По-прежнему ψ может принимать значения $0, +1$ и -1 , но уже в зависимости от значений w . Поэтому уравнения фазовых траекторий в зонах I, II, III останутся теми же, что и выше; лишь расположение зон подвергается изменению.

Первое реле срабатывает при $w = \varepsilon$, т. е. $x + ly = \varepsilon$ и отпускает при $w = \lambda\varepsilon$, т. е. $x + ly = \lambda\varepsilon$. Второе реле срабатывает при $w = -\varepsilon$, т. е. $x + ly = -\varepsilon$ и отпускает при $w = -\lambda\varepsilon$, т. е. $x + ly = -\lambda\varepsilon$. Отсюда видно, что границы зон будут теперь не вертикальными линиями $x = \text{const}$, как в предыдущих случаях, а наклонными линиями $x + ly = \text{const}$ (рис. 9.30).

Траектория в зоне I , являющаяся по-прежнему прямой, ведет к точке M_1 . От последней изображающая точка уходит, двигаясь в зоне II по криволинейной траектории M_1M_2 . Затем в положении M_2 изображающая точка вновь попадает в зону I и т. д. В общем случае, как показано ниже, при определенных условиях в системе возможно незатухающее колебание, т. е. периодическое движение.

На рис. 9.30 показана замкнутая траектория — предельный цикл, — соответствующая подобному периодическому движению. Наличие подобного движения означает, что система неустойчива. Если же предельный цикл отсутствует и изображающая точка при любых движениях системы стремится к отрезку равновесия, то система является устойчивой.

Ниже будем всюду полагать $l < 1$, так как при $l > 1$ характер движения усложняется и, кроме того, как будет показано ниже, значения $l < 1$ могут обеспечить устойчивость системы.

Рассмотрим, в каком случае возможно образование предельного цикла. Для этого достаточно рассмотреть одно «полуколебание» $M_0M_1M_2$. Если окажется, что размах колебания по ординате y_h в конце «полуколебания» равен y_0 — размаху в начале «полуколебания», то после повторения этого «полуколебания» (картина траекторий антисимметрична относительно начала координат O) в виде кривой $M_2M_3M_0$ изображающая точка придет в прежнее положение M_0 , т. е. траектория будет замкнутой.

Пусть координата точки M_0 равна y_0 . После прохождения по траектории M_0M_1 изображающая точка попадает в положение M_1 с ординатой y_1 . Найдем значение y_1 . Так как наклон прямой M_0M_1 равен 45° , то разность $y_0 - y_1$ равна разности абсцисс точек M_0 и M_1 , т. е.

$$y_0 - y_1 = x_1 - x_0. \tag{29}$$

Однако x_1 и x_0 связаны с y_1 и y_0 уравнениями

$$x_0 + ly_0 = -\lambda\varepsilon, \quad x_1 + ly_1 = \varepsilon. \tag{30}$$

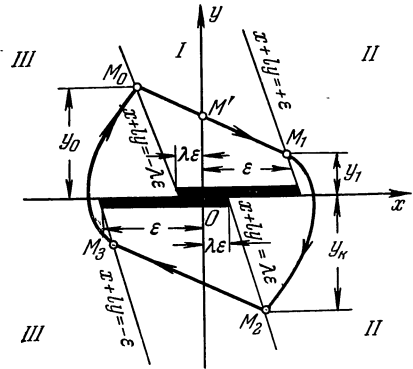


Рис. 9.30.

Подставляя значения x_1 и x_0 , найденные из выражений (30), в уравнение (29), находим отсюда величину y_1

$$y_1 = y_0 - \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{1-l}. \quad (31)$$

Если существует предельный цикл, то величина y_1 , найденная из этого уравнения, должна быть положительной; во всяком случае, если даже при $y_0 = |y|_{\max} = 1$ величина y_1 , найденная из этого уравнения, отрицательна, то существование предельного цикла невозможно. Поэтому *необходимое* (но недостаточное) условие существования предельного цикла имеет вид

$$1 - \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{1-l} > 0$$

или

$$l < 1 - \varepsilon(1+\lambda). \quad (32)$$

Если это неравенство не удовлетворяется, то траектория, исходящая даже из точки M_0 с ординатой $y_0 = 1$, ведет к отрезку равновесия.

Из сравнения рис. 9.29 и 9.30 видно, что уменьшение величины λ , как бы создавая дополнительное «запаздывание», способствует возникновению автоколебаний; между тем увеличение l , наклоняя линии границ зон, уменьшает это «запаздывание» и, таким образом, препятствует возникновению автоколебаний.

Найдем теперь связь между величинами y_0 и y_k (см. рис. 9.30), т. е. между абсолютными значениями y в начале и конце полуоборота траектории. Для этого воспользуемся уравнением (31), а также уравнением (28) для траектории в зоне II. Подставив в уравнение (28) в качестве начальных значений $x_{\text{нач}}$ и $y_{\text{нач}}$ координаты точки M_1 , а в качестве значений x и y — координаты точки M_2 , т. е. положив

$$\begin{aligned} y_{\text{нач}} &= y_1, & x_{\text{нач}} &= \varepsilon - ly_1, \\ y &= y_2 = -y_k, & x &= x_2 = \lambda\varepsilon - ly_2 = \lambda\varepsilon + ly_k \end{aligned}$$

и подставив значение y_1 из выражения (31), находим

$$2\varepsilon\lambda - y_0(1-l) + \ln \left[1 + y_0 - \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{1-l} \right] = y_k(1-l) + \ln(1-y_k). \quad (33)$$

Если отрезок $M_0M_1M_2$ является «половиной» предельного цикла, то $y_k = y_0$. Подставив это значение y_k в равенство (33), получаем

$$e^{-2\varepsilon\lambda + 2y_0(1-l)} = \frac{1 + y_0 - \frac{\varepsilon(1+\lambda)}{1-l}}{1-y_0}. \quad (34)$$

Введем для упрощения этого уравнения новую переменную

$$z = y_0(1-l) - \varepsilon\lambda. \quad (35)$$

Геометрический смысл величины z может быть выяснен из сравнения формулы (35) с рис. 9.30; величина z равна длине отрезка $M'O$, отсекаемого траекторией на оси ординат. Заменяя величину y_0 в выражении (34) через z согласно формуле (35), можно придать выражению следующий вид:

$$e^{-2z} = \frac{1-l-z-\varepsilon\lambda}{1-l+z-\varepsilon}. \quad (36)$$

Исследуем, возможно ли для этого уравнения существование действительного корня z .

Пусть

$$f_1(z) = e^{-2z}, \quad f_2(z) = \frac{1-l-\varepsilon\lambda-z}{1-l-\varepsilon+z}. \quad (37)$$

Из неравенства (32) вытекает, что при существовании предельного цикла и подавно $\varepsilon < 1 - l$. Поэтому

$$f_2(0) = \frac{1-l-\varepsilon\lambda}{1-l-\varepsilon} > 1 = f_1(0). \tag{38}$$

Далее $f_1(\infty) = 0$ и $f_2(\infty) = -1$, а также

$$\frac{df_1}{dz} = -2e^{-2z} < \frac{df_2}{dz} = -\frac{2(1-l)-\varepsilon(1+\lambda)}{(1-l-\varepsilon+z)^2}. \tag{39}$$

Справедливость этого неравенства следует из того, что в точке $z = 0$

$$\left| \frac{df_2}{dz} \right|_{z=0} = 2 \left[1 + \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{2(1-l-\varepsilon)} \right] > 2 = \left| \frac{df_1}{dz} \right|_{z=0},$$

а также из факта более высокого порядка убывания экспоненциальной функции $\left| \frac{df_1}{dz} \right|$, чем рациональной $\left| \frac{df_2}{dz} \right|$.

Из неравенств (38) и (39) следует, что кривые $f_1(z)$ и $f_2(z)$, изображенные на рис. 9.31, пересекаются, причем пересечение происходит лишь в одной точке. Следовательно, существует единственный действительный корень уравнения (36). Однако для существования предельного цикла недостаточно существования действительного корня уравнения (36). Необходимо еще, чтобы этот корень был больше ε . Действительно, так как $z = OM'$ (см. рис. 9.30), то при $z < \varepsilon$ траектория, исходящая из M_0 , ведет к отрезку равновесия (не забудем, что наклон этой траектории составляет 45° к оси абсцисс). Это же условие можно получить из выражений (31) и (35). Так как должно быть $y_1 > 0$, то из (34) находим

$$y_0 > (y_0)_{\min} = \frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l}. \tag{40}$$

Поэтому из (35) следует

$$z > (y_0)_{\min}(1-l) - \varepsilon\lambda = \varepsilon. \tag{41}$$

Итак, если уравнение (36) имеет корень, больший ε , то предельный цикл существует, и система неустойчива. Если же корень меньше ε , то предельный цикл отсутствует, и система устойчива.

Если предельный цикл существует, то точка $z = \varepsilon$ (см. рис. 9.31) должна находиться слева от точки пересечения кривых $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Следовательно, в этом случае

$$[f_1(z)]_{z=\varepsilon} \leq [f_2(z)]_{z=\varepsilon}. \tag{42}$$

Подставляя выражения (37) для функций f_1 и f_2 , получаем после подстановки значения $z = \varepsilon$ неравенство

$$e^{-2\varepsilon} \leq 1 - \varepsilon \frac{1+\lambda}{1-l}. \tag{43}$$

Это и есть условие существования предельного цикла, т. е. условие *неустойчивости*. Предельное значение $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пр}}$, соответствующее границе устойчивости, находится из равенства

$$e^{-2\varepsilon_{\text{пр}}} = 1 - \varepsilon_{\text{пр}} \frac{1+\lambda}{1-l}. \tag{44}$$

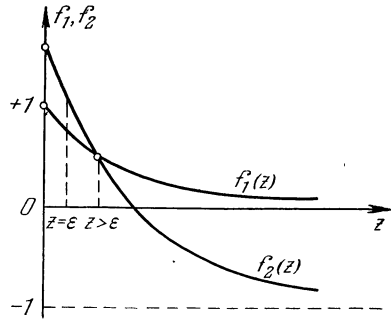


Рис. 9.31.

Если предельный цикл отсутствует, то система устойчива, и справедливо неравенство

$$e^{-2z} > 1 - \varepsilon \frac{1+\lambda}{1-l}. \quad (45)$$

Это и есть условие устойчивости.

Построим область устойчивости на плоскости параметров (λ, ε) при различных значениях l . Для этого начертим при данных значениях l (например, $l = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$) кривые (44) зависимостей $\varepsilon_{\text{пр}} = f(\lambda)$. Эти кривые изображены на рис. 9.32. Из равенства (44) и неравенства (45) следует, что при $1 - 2l < \lambda < 1$ не существует отличного от нуля корня уравнения (44), и вся плоскость параметров принадлежит области устойчивости. При $0 < \lambda < 1 - 2l$ существует единственный корень $\varepsilon_{\text{пр}}$ уравнения (44). При $\varepsilon < \varepsilon_{\text{пр}}$ система неустойчива, так как удовлетворяется неравенство (43), а при $\varepsilon > \varepsilon_{\text{пр}}$ — устойчива, так как удовлетворяется неравенство (45). При $l = 0,5$, даже в наихудшем случае $\lambda = 0$, область неустойчивости (криволинейный треугольник с вершиной O на рис. 9.32) сжимается в точку — начало координат. Поэтому для стабилизации системы не требуются значения l , большие, чем 0,5. При $\varepsilon < \varepsilon_{\text{пр}}$ образуется один устойчивый предельный цикл. Для доказательства устойчивости предельного цикла перепишем уравнение (33) в следующем виде:

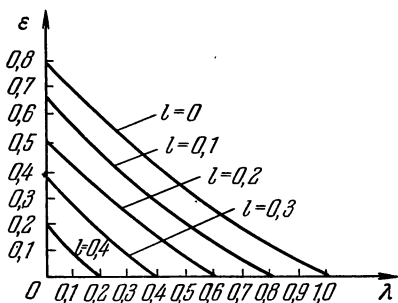


Рис. 9.32.

$(1 - y_k) e^{y_k(1-l)} = e^{2\lambda\varepsilon - y_0(1-l)} \left[y_0 + 1 - \frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l} \right]. \quad (46)$

Положим

$$\theta_1(y) = (1 - y) e^{y(1-l)}, \quad \theta_2(y) = e^{2\lambda\varepsilon - y(1-l)} \left[1 + y - \frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l} \right]. \quad (47)$$

Кривые $\theta_1(y)$ и $\theta_2(y)$ пересекаются в одной точке, так как, положив $y_k = y_0$ в уравнении (46), получаем единственную ординату, соответствующую предельному циклу. Это уже было доказано выше. Так как

$$-2\varepsilon = 2[\lambda\varepsilon - (1 + \lambda)\varepsilon],$$

то из условия наличия предельного цикла (43) следует

$$e^{2[\lambda\varepsilon - \frac{(1+\lambda)\varepsilon(1-l)}{1-l}]} < 1 - \frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l}$$

или

$$e^{2\lambda\varepsilon - \left[\frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l}\right](1-l)} < e^{\frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l}(1-l)} \left[1 - \frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l} \right].$$

Это неравенство выражает условие (ср. с (47))

$$\theta_2(y) < \theta_1(y) \quad \text{при} \quad y = \frac{(1+\lambda)\varepsilon}{1-l}.$$

Поэтому точка N_2 кривой $\theta_2(y)$ (рис. 9.33) имеет меньшую ординату, чем точка N_1 . Далее при $y = 1$ функция $\theta_1(y)$ равна нулю, а $\theta_2(y) > 0$, так как $1 - l > \varepsilon(1 + \lambda)$.

По кривым $\theta_1(y)$ и $\theta_2(y)$, изображенным на рис. 9.33, можно, задавшись y_0 , найти размах колебания y_k после полуоборота траектории. Если, например,

$y_0 < y_{00}$ (y_{00} — координата предельного цикла), то, проведя вертикаль до пересечения в точке R с кривой θ_2 , можно найти значение θ_2 ; затем после проведения горизонтали до точки S находим соответствующую равенству $\theta_1 = \theta_2$ величину $y_k = OM$. Это величина ординаты после полуоборота траектории. Откладывая аналогичным образом отрезки ST , TU и т. д., находим все новые и новые значения y после второго, третьего и т. д. полуоборотов траектории.

Из рис. 9.33 видно, что размах колебания после каждого полуоборота увеличивается и координата y_0 стремится к y_{00} . Следовательно, траектория наматывается изнутри на предельный цикл. Если же начальное значение

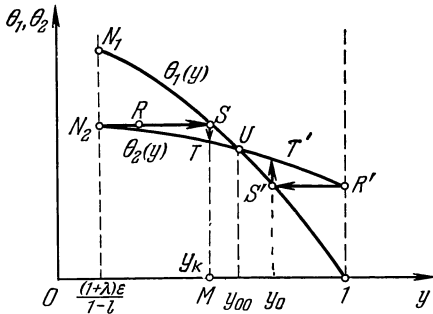


Рис. 9.33.

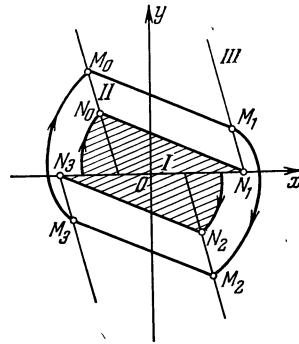


Рис. 9.34.

$y_0 > y_{00}$, то опять-таки y_0 стремится к y_{00} , в чем можно убедиться, откладывая отрезки $R'S'$, $S'T'$, $T'U$ и т. д. Таким образом, траектории наматываются на предельный цикл и снаружи. Следовательно, предельный цикл устойчив и соответствующее автоколебание реализуется в системе.

Фазовая плоскость при существовании предельного цикла разбивается на три области (рис. 9.34). Область I ограничена прямыми N_0N_1 и N_2N_3 траекторий, идущих в угловые точки отрезка равновесия, а также траекториями, идущими к точкам N_0 и N_2 . Если изображающая точка системы в начальный момент находится в области I , то система стремится к положению равновесия. Траектории, расположенные в области II , «наматываются» на предельный цикл $M_0M_1M_2M_3$ изнутри, а траектории в области III «наматываются» на предельный цикл снаружи. Область I является, таким образом, областью притяжения для отрезка равновесия. Если изображающая точка в начальный момент находится в области I , то в конце концов система «застрянет» в вилке нечувствительности и периодическое движение в ней не возникает. Области II и III образуют область притяжения для предельного цикла $M_0M_1M_2M_3$. Если изображающая точка системы в начальный момент окажется в одной из этих областей, то движение системы в конце концов сведется к автоколебаниям.

Согласно формуле (14) предельное значение вилки нечувствительности равно

$$\delta_{пр} = \frac{\epsilon_{пр} u_0 a}{b^2} = \frac{\epsilon_{пр} u_0 J R \rho}{k_M^2 q \vartheta} \quad (48)$$

Следовательно, при $\lambda = \text{const}$ и $l = \text{const}$, откуда следует $\epsilon_{пр} = \text{const} > 0$, величина предельной вилки нечувствительности тем больше, чем больше электромеханическая постоянная времени сервомотора $\frac{JR}{k_M \vartheta}$ и максимальная скорость приемной оси $\frac{u_0}{k_M q}$.

В результате проведенного выше исследования показано, что при $\lambda = 1$, т. е. при отсутствии неоднозначного участка в релейной характеристике, авто-

колебания в рассматриваемой системе отсутствуют и последняя устойчива. При $\lambda < 1$ возможно возникновение автоколебаний; их можно уничтожить, увеличивая вилку нечувствительности и сделав $\varepsilon > \varepsilon_{\text{пр}}$. Однако эта мера увеличит установившуюся погрешность, что не всегда допустимо. Лучший выход заключается в увеличении коэффициента обратной связи l ; при этом величина $\varepsilon_{\text{пр}}$ уменьшается (см. рис. 9.32). При достаточно большой величине l область неустойчивости вообще исчезает.

Приведенный выше пример показывает, что точное исследование даже сравнительно простой нелинейной системы второго порядка весьма громоздко. Еще более затруднительно точное исследование систем более высокого порядка. Для того чтобы сделать это исследование возможным, нелинейную характеристику аппроксимируют ломаной линией (в случае релейной системы характеристика уже сама по себе является ломаной, и дополнительные операции по аппроксимации не требуются). При исследовании, например, системы третьего порядка приходится пользоваться понятием трехмерного фазового пространства с координатами x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ (рис. 9.35). В работах академика А. А. Андропова и других советских ученых разработаны методы исследования систем более высокого порядка, основанные на теории точечных преобразований. Дадим представление об основных принципах этой теории.

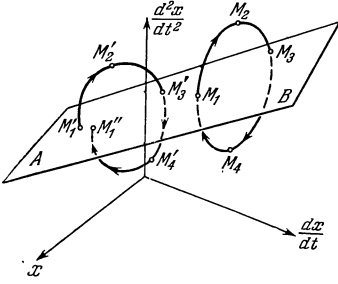


Рис. 9.35.

Автоколебаниям системы соответствует замкнутая траектория в фазовом пространстве — предельный цикл. На рис. 9.35 изображен предельный цикл $M_1M_2M_3M_4$. Рассмотрим сечение фазового пространства плоскостью AB . Предельный цикл пронизывает плоскость AB в точке M_1 , а затем, после полуоборота, в точке M_3 . После следующего полуоборота изображающая точка оказывается вновь в положении M_1 . Рассмотрим теперь какую-либо другую фазовую траекторию $M'_1M'_2M'_3M'_4$. Она пронизывает плоскость AB . Сначала в точке M'_1 , а после оборота — в точке M'_3 , не совпадающей с точкой M'_1 . Можно вывести аналитическое соотношение, связывающее между собой координаты точек M'_1 и M'_3 на плоскости. Это соотношение дает соответствие между точками M'_1 и M'_3 и показывает, как происходит преобразование, переход из точки M'_1 к M'_3 .

Если преобразование приводит из точки M'_1 обратно в нее же, т. е. имеет неподвижную точку преобразования, то получается предельный цикл — траектория типа $M_1M_2M_3M_4M_1$. Итак, изучение возможности возникновения предельных циклов сводится к изучению *неподвижных точек точечных преобразований*. Рассмотрение точечных преобразований позволяет провести изучение структуры траекторий в фазовом пространстве.

Рассмотренный выше пример релейной системы был исследован также методом точечных преобразований. При этом рассматривались преобразования точек прямых $x + ly = \pm \varepsilon$ и $x + ly = \pm \lambda \varepsilon$.

В нелинейных системах, как показано на примере релейной системы, неоднозначность характеристики может привести к неустойчивости и автоколебаниям. Причиной неустойчивости может служить запаздывание срабатывания реле, люфт, сухое трение, а также зона нечувствительности, например, при наличии в тракте системы неустойчивых звеньев. В каждом конкретном случае необходимо особое исследование для выяснения влияния той или иной нелинейной характеристики.

Характер возникновения автоколебаний и изменения фазового портрета системы при изменении параметров последней может быть различным. Рас-

смотрим, например, систему второго порядка и ее фазовый портрет (рис. 9.36). Пусть при некотором значении какого-либо изменяемого параметра фазовый портрет изображается рис. 9.36, *а*. Система устойчива, все фазовые траектории ведут к точке равновесия O . Допустим, что, непрерывно изменяя параметр, можно сделать систему неустойчивой. Пусть при некотором значении параметра $a = a_1$ образуется устойчивый предельный цикл бесконечно малых

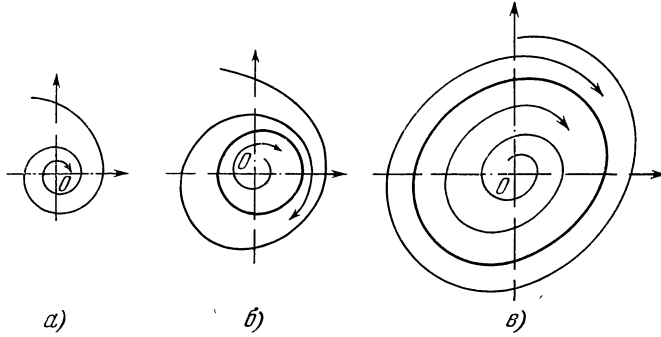


Рис. 9.36.

размеров (рис. 9.36, *б*). При дальнейшем изменении параметра этот предельный цикл будет «распухать» — получим картину, изображенную на рис. 9.36, *в*. Подобный режим возникновения автоколебаний называется режимом *мягкого возбуждения*. Иногда при режиме мягкого возбуждения неопасно несколько выходить за пределы области устойчивости, если при этом предельный цикл оказывается достаточно малым. Автоколебание малых размеров,

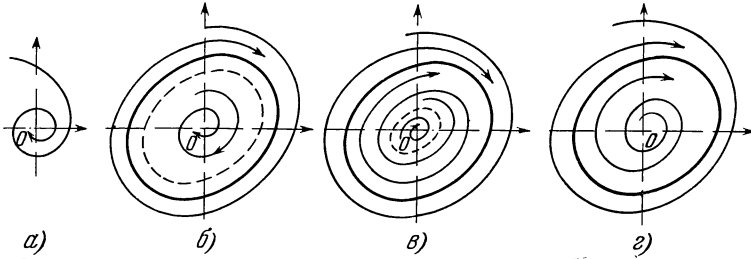


Рис. 9.37.

находящееся в пределах допустимой погрешности, может оказаться вполне приемлемым. Иногда оно может быть даже полезным, так как уничтожает застой в зоне нечувствительности, образованной, например, сухим трением.

Возможен и другой характер возникновения автоколебаний в нелинейной системе. Рассмотрим фазовый портрет устойчивой системы, изображенной на рис. 9.37, *а*. Если изменять значение какого-либо изменяемого параметра a , то при некотором его значении $a = a_1$ образуются как бы «слипшиеся» друг с другом два предельных цикла — устойчивый и неустойчивый, причем их размер уже не бесконечно мал, как в предыдущем случае, а является конечным.

При дальнейшем изменении параметра a неустойчивый цикл «сжеживается», уменьшаясь по размерам, а устойчивый «распухает», увеличиваясь в размерах (рис. 9.37, *б* и *в*). Здесь устойчивый цикл изображен сплошной линией, а неустойчивый — пунктирной. Наконец, при некотором значении $a = a_2$ неустойчивый предельный цикл, «сжежившись» до минимума, слива-

ется с точкой равновесия. Остается лишь один устойчивый предельный цикл. Однако, слившись с точкой равновесия, неустойчивый предельный цикл как бы «заражает» ее своей неустойчивостью, и она сама становится неустойчивой. Такой режим, при котором сразу возникает предельный цикл конечных размеров, называется режимом *жесткого возбуждения*. На рис. 9.37 изображена типичная картина изменения фазового портрета системы при режиме жесткого возбуждения. В этом случае может оказаться опасным сколь угодно малый выход системы за пределы области устойчивости. Значения a_1 и a_2 параметра, при которых меняется качественный характер фазового портрета системы, называются *бифуркационными*.

§ 4. Второй метод Ляпунова

Трудности, связанные со строгим исследованием устойчивости систем выше второго порядка, привели к поискам возможностей для нахождения хотя бы достаточных условий устойчивости нелинейной системы. Эти условия могут быть получены с помощью второго метода Ляпунова. Второй метод был разработан Ляпуновым для исследования локальной устойчивости, т. е. устойчивости в достаточно малой окрестности особых точек или линий фазового пространства. Однако советские ученые расширили применение второй metody, показав, что идеи Ляпунова позволяют исследовать и устойчивость «в большом» или *абсолютную устойчивость*.

Обобщив известную теорему Дирихле, согласно которой равновесие устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, Ляпунов находил при выводе условий устойчивости вспомогательную функцию координат изображающей точки x_1, x_2, \dots, x_n в фазовом пространстве $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Эта функция однозначна, дифференцируема, определено положительно вне положения равновесия и обращается в нуль в положении равновесия. Если удастся подобрать такую функцию V , что при любом движении системы эта функция уменьшается, т. е. имеет место неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$, то, как увидим ниже, система оказывается устойчивой и притом не только в малом, но и в большом. Это легко выяснить с помощью геометрической интерпретации второй metody Ляпунова, особенно наглядной в фазовом пространстве трех измерений.

Пусть имеем некоторую нелинейную систему третьего порядка с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Координаты точек равновесия системы должны удовлетворять равенствам

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (2)$$

Допустим, что существует лишь одна точка равновесия (что часто имеет место в системах автоматического регулирования); условимся, что она совпадает с началом координат O (рис. 9.38). Построим в фазовом пространстве семейство поверхностей

$$V(x_1, x_2, x_3) = C = \text{const.}$$

Примером функции Ляпунова может служить функция

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

В этом случае поверхность $V = C$ есть сфера.

Поверхности $V = C$, построенные для различных значений C , не пересекаются друг с другом, так как V — однозначная функция координат. Поэтому семейство представляет собой вложенные друг в друга односвязанные замкнутые поверхности, причем поверхность с меньшим значением C вложена внутри поверхности с большим значением C (см. рис. 9.38). Поверхность $V = C$ при $C \rightarrow 0$ сжимается в точку равновесия O .

Пусть в какой-нибудь момент времени изображающая точка помещается на какой-либо поверхности $V = C_3$; если при движении системы производная $\frac{dV}{dt} < 0$, то с течением времени изображающая точка перемещается к поверхности $V = C_2$, где $C_2 < C_3$. Следовательно, фазовая траектория пронизывает вторую, лежащую внутри первой поверхность, что означает переход снаружи поверхности внутрь. Этот переход совершается со скоростью $w \neq 0$, так как скорость изображающей точки в фазовом пространстве

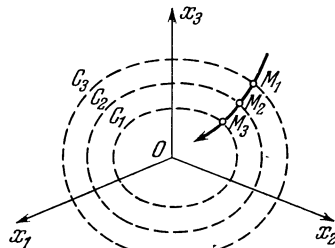


Рис. 9.38.

$$w = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \quad (3)$$

и величина w обращается в нуль лишь в точке равновесия O .

Итак, изображающая точка при своем движении, пронизывая поверхности семейства в направлении снаружи внутрь, с течением времени неограниченно приближается к точке равновесия, что является *достаточным* признаком устойчивости, притом *асимптотической* устойчивости и устойчивости в большом.

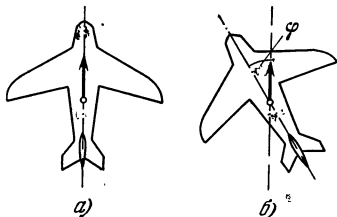


Рис. 9.39.

Условие $\frac{dV}{dt} < 0$ не является, однако, *необходимым* признаком устойчивости, так как можно представить себе фазовую траекторию, идущую на некоторых участках от внутренних к наружным поверхностям, но в конце концов направляющуюся к особой точке.

Оценка устойчивости с помощью второго метода Ляпунова, как показывает следующий пример, возможна и в том случае, когда имеется не одна особая точка, а континуум особых точек — «отрезок равновесия» или «полоса равновесия» (в общем случае область равновесия).

Рассмотрим в качестве примера систему автоматического регулирования курса самолета. Желаемый курс, по которому должен летать самолет, указывается направлением стрелки, соединенной с компасом. Если продольная ось самолета направлена по стрелке (рис. 9.39, а), то это означает, что самолет летит по курсу. Если же какая-либо причина изменит угловую ориентацию самолета, то (рис. 9.39, б) образуется некоторый угол φ — угол рассогласования между требуемым и имеющимся направлениями. Если регулирование курса производится автоматически, то соответствующий аппарат — автопилот — поворачивает руль в нужную сторону. Благодаря этому и самолет в свою очередь поворачивается, вследствие чего угол рассогласования φ уменьшается до нуля. При повороте самолета вокруг вертикальной оси на

него действует, во-первых, момент руля, примерно пропорциональный углу поворота руля (что справедливо при малых углах поворота руля), т. е. равный $N_1\delta$, где δ — угловое отклонение руля и N_1 — постоянная; во-вторых, момент вязкого трения в воздушной среде $M_1\dot{\varphi}$, пропорциональный $\dot{\varphi}$, т. е. скорости изменения φ , причем $M_1 = \text{const}$. Пусть J — момент инерции самолета относительно вертикальной оси; тогда получим

$$J\ddot{\varphi} = -M_1\dot{\varphi} - N_1\delta. \tag{4}$$

Деля обе части уравнения на J и полагая $\frac{M_1}{J} = M$, $\frac{N_1}{J} = N$, получаем уравнение движения регулируемого объекта в виде

$$\ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\delta. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение автопилота. Если не учитывать электромеханическую постоянную времени сервомотора автопилота, то скорость вращения его якоря, а следовательно, и скорость перекладки руля $\frac{d\delta}{dt}$ будет пропорциональна напряжению u , поданному на якорь, т. е.

$$\dot{\delta} = k_1 u. \tag{6}$$

Допустим, что напряжение u образуется с помощью схемы, показанной на рис. 9.40, а. Со стрелкой, указывающей курс, связан движок D реостата P ,

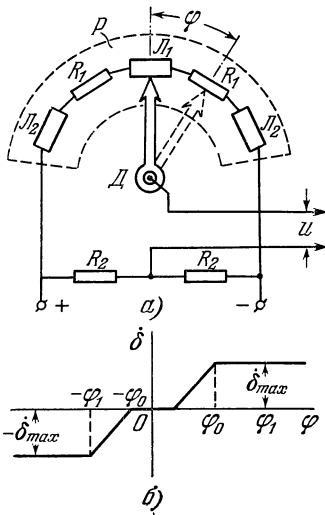


Рис. 9.40.

а обмотка реостата неподвижна относительно самолета. Если самолет идет по курсу, то движок стоит посередине, и при этом напряжение u диагонали моста, образованного сопротивлениями R_1 и R_2 реостата P , равно нулю. Если же самолет отклонится от курса на угол φ , то стрелка займет положение, показанное пунктиром на рис. 9.40, а; при этом напряжение u не будет уже равно нулю.

На реостате P , как видно из рис. 9.40, а, имеются, помимо обмотки, еще ламели L_1 и L_2 . Пока движок D скользит по средней ламели L_1 , напряжение $u = 0$; следовательно, якорь сервомотора неподвижен не только тогда, когда угол φ в точности равен нулю, но и тогда, когда $|\varphi| < \varphi_0$, где φ_0 — половина угла, занимаемого ламелью L_1 . Угол φ_0 называется зоной нечувствительности (иногда — вилкой нечувствительности). При больших отклонениях $|\varphi| > \varphi_1$ движок D переходит на крайние ламели L_2 и напряжение u при дальнейшем увеличении $|\varphi|$ больше не увеличивается. Средняя ламель L_1

способствует устойчивости самолета, а крайние ламели не допускают превышения скорости вращения якоря за пределы максимально допустимой. Из рис. 9.40, а следует, что величина u или пропорциональная ей скорость перекладки рулей $\dot{\delta}$ является нелинейной функцией φ , изображенной на рис. 9.40, б. Обозначим функцию, изображенную на рис. 9.40, б, через $F(\varphi)$. Тогда

$$\dot{\delta} = F(\varphi). \tag{7}$$

Подобной характеристикой обладают и гидравлические сервомоторы с золотником. Однако система автоматического регулирования с автопилотом,

построенным, согласно уравнению (7), неработоспособна, так как в ней возникают автоколебания. Действительно, допустим, что возникло отклонение φ . Тогда, согласно уравнению (7), начнется перемещение руля из нейтрального положения, в котором он находился раньше, в отклоненное положение. Рассогласование φ начнет вследствие этого уменьшаться, но пока оно еще не равно нулю, величина $\delta > 0$, и руль будет переключаться все дальше. Когда, наконец, окажется $\varphi = 0$, руль будет отклонен от нейтрального положения. Вследствие этого самолет будет продолжать поворачиваться. Только при $\varphi < 0$ руль начнет переключаться в обратную сторону. До тех пор, пока руль не придет в нейтральное положение, отклонение $\varphi < 0$ будет все увеличиваться по абсолютной величине. Затем руль начнет переключаться в обратную сторону, чтобы ликвидировать получившееся рассогласование φ , и процесс повторится снова. Подобного рода система и ее недостатки уже указывались в данной книге. Здесь же она разбирается более детально. Очевидно, система управления рулем должна быть такой, чтобы по мере уменьшения рассогласования φ уменьшался также и угол отклонения руля. В этом случае в тот момент, когда φ подойдет к нулю, руль также окажется в нейтральном положении. Подобная система может быть сконструирована, если обмотку реостата P (см. рис. 9.40, а) сделать не неподвижной относительно самолета, а связанной передачей с рулем. Тогда угол оси симметрии реостата относительно самолета будет равен δ/a (где a — передаточное число), а относительно движка D он окажется равным $\varphi - (\delta/a)$. В этом случае уравнение автопилота принимает вид

$$\dot{\delta} = F \left(\varphi - \frac{\delta}{a} \right). \quad (8)$$

Член $-\delta/a$ является составляющей, вызванной жесткой обратной связью. Теперь якорь сервомотора вращается, когда $\varphi - \frac{\delta}{a} \neq 0$, вследствие чего обеспечивается равенство $\varphi - \frac{\delta}{a} = 0$, если скорость вращения якоря достаточно велика и время установления системы мало. Следовательно, и угол отклонения руля δ станет равным нулю сразу же после обращения в нуль рассогласования φ .

Однако вследствие наличия момента инерции самолета угол φ будет все же переходить через положение равновесия, и колебания, хотя, быть может, и затухающие, возникнут. Необходимо поэтому, если скорость $\dot{\varphi}$, меньшая нуля, в момент приближения рассогласования φ к нулю велика по абсолютной величине, предупредить переход φ за нуль, дав рулю отклонение тем большее, чем больше $\dot{\varphi}$. Так, например, инстинктивно поступают все опытные рулевые на кораблях. В автопилоте подобного эффекта можно достичь, давая движку D добавочное смещение $b\dot{\varphi}$, пропорциональное скорости изменения φ . Поэтому уравнение регулятора примет вид

$$\dot{\delta} = F \left(\varphi + b\dot{\varphi} - \frac{\delta}{a} \right). \quad (9)$$

Введение жесткой обратной связи совместно с производной $b\dot{\varphi}$ позволяет получить удовлетворительное протекание процессов регулирования. Обозначим через ψ величину

$$\psi = \varphi + b\dot{\varphi} - \frac{\delta}{a}. \quad (10)$$

Дальнейшие результаты получаются независимо от какой-либо конкретной формы характеристики $F(\psi)$ и справедливы при любых $F(\psi)$, удовлетворяющих следующим ограничениям.

1) Функция $F(\psi)$ — нечетная и непрерывная функция, причем $F(\psi) = 0$ при $|\psi| < \psi_0$ и $F(\psi) > 0$ при $\psi > \psi_0$.

2) Функция $F(\psi)$ монотонна, т. е. не убывает с возрастанием ψ .

Для исследования системы с уравнениями движения (5) и (9) удобно сначала преобразовать уравнения к относительному времени и ввести безразмерные параметры, а также перейти частично к иным переменным.

Постоянная времени объекта регулирования (см. (5)) равна $1/M$.

Поэтому введем относительное время

$$\tau = tM, \quad (11)$$

а также новые переменные

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{M^2}{N} \dot{\varphi} + M\delta, \\ x_2 &= -M\delta, \\ x_3 &= \frac{M^2}{Nb} \psi = \frac{M^2}{N} \left(\frac{\varphi}{b} + \dot{\varphi} - \frac{\delta}{ab} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и новые безразмерные коэффициенты

$$a = \frac{1}{bM}, \quad r = \frac{M}{abN}, \quad F(\psi) = F\left(\frac{Nb}{M^2} x_3\right) = f(x_3). \quad (13)$$

Функция $f(x_3)$ имеет те же качественные черты, что и $F(\psi)$. Например,

$$f(x_3) = 0 \quad \text{при} \quad |x_3| < \frac{\psi_0 M^2}{Nb} = \varepsilon. \quad (14)$$

Уравнения (5) и (9), из которых одно второго порядка, могут быть записаны в виде трех уравнений первого порядка. При новых переменных эти уравнения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), & \frac{dx_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (\alpha - 1)x_1 + ax_2 - rf(x_3). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Континуум особых точек, т. е. корни уравнений $\frac{dx_1}{d\tau} = 0$, $\frac{dx_2}{d\tau} = 0$, $\frac{dx_3}{d\tau} = 0$, характеризуется значениями

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad |x_3| \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Итак, отрезок равновесия расположен на оси x_3 и имеет длину 2ε .

Для исследования устойчивости этой системы А. И. Лурье и В. Н. Постниковым была предложена функция Ляпунова, имеющая следующий вид:

$$V = z(x_3) + \frac{\alpha}{2} x_2^2 + \frac{|\alpha - 1|}{2} x_1^2, \quad (17)$$

где

$$z(x_3) = \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (18)$$

Функция $z(x_3)$ четная и непрерывная. Она обращается в нуль там, где $f(x_3)$ обращается в нуль, т. е. на отрезке равновесия. Следовательно, V есть всюду положительная, однозначная и непрерывная функция координат x_1 , x_2 , x_3 и обращается в нуль только на отрезке равновесия. Поверхности семейства

$$V(x_1, x_2, x_3) = C > 0$$

при уменьшении C стягиваются к отрезку равновесия; поверхность, соответствующая меньшему C , заключена внутри поверхности с большим C . При $C = 0$ соответствующая поверхность обращается в *отрезок равновесия*.

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 1$.

Полная производная функция V

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau}.$$

Если подставить сюда значения $\frac{dx_i}{d\tau}$ из уравнений (15) и $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, вычисленные согласно формуле (17), то получим

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= f(x_3) \frac{dx_3}{d\tau} + dx_2 \frac{dx_2}{d\tau} + (\alpha - 1) x_1 \frac{dx_1}{d\tau} = \\ &= -(\alpha - 1) x_1^2 + 2(\alpha - 1) x_1 f(x_3) - r f^2(x_3) = \\ &= -(\alpha - 1) [f(x_3) - x_1]^2 - (r + 1 - \alpha) [f(x_3)]^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Из этого выражения следует, что достаточными условиями, при которых равенство $\frac{dV}{d\tau} < 0$ обеспечивается во всем фазовом пространстве, являются

$$\alpha > 1, \quad r + 1 > \alpha. \quad (20)$$

При этом, однако, $\frac{dV}{d\tau} = 0$ в некоторой полосе плоскости

$$x_1 = 0, \quad |x_3| < \varepsilon. \quad (21)$$

Если при этом $x_2 \neq 0$, то система еще не находится в равновесии. Изображающая точка не остается в полосе (21), а проходит через нее. Действительно, в этой полосе, согласно третьему уравнению (15),

$$\frac{dx_3}{d\tau} = \alpha x_2 \neq 0.$$

Поэтому x_3 меняется (при $x_2 = \text{const}$ и $x_1 = 0$) и, наконец, изображающая точка выходит из полосы (21). В течение всего времени нахождения в этой полосе траектория изображающей точки лежит на соответствующей поверхности $V = C$ (так как в этой полосе $V = \frac{\alpha}{2} x_2^2 = \text{const}$), но по выходе из полосы траектория вновь начинает пронизывать поверхности семейства $V = C$ снаружи внутрь, что и является достаточным условием устойчивости в большом.

Итак, при $\alpha > 1$ условие $r > \alpha - 1$ достаточно для устойчивости. При $0 < \alpha < 1$ из выражения (17) получаем аналогичным путем (теперь $|\alpha - 1| = 1 - \alpha$)

$$\frac{dV}{d\tau} = -(1 - \alpha) x_1^2 - r f^2(x_3). \quad (22)$$

Отсюда следует достаточное условие устойчивости в большом

$$r > 0. \quad (23)$$

Следовательно, потребовав, чтобы $\alpha > 0$, $r > 0$ и

$$r + 1 > \alpha, \quad (24)$$

можно всегда обеспечить устойчивость системы в большом.

Полученный результат, конечно, не является необходимым условием устойчивости, что видно хотя бы из того, что он не зависит от конкретного вида характеристики $f(x_3)$ или $F(\psi)$. Однако если эта характеристика близка к линейной, то можно показать, что неравенство (24) близко к необходимому условию устойчивости. Простота выкладок, с помощью которых получено это неравенство, выгодно отличает подобный метод оценки устойчивости.

В предыдущем примере для исследования была применена специально подобранная функция Ляпунова. А. И. Лурье дал способ подбора таких

функций, пригодный для целого класса систем автоматического регулирования. Ниже рассмотрен другой метод, позволяющий сравнительно просто подобрать требуемую функцию Ляпунова для широкого класса систем.

Идея этого метода состоит в следующем. Нелинейное уравнение сначала линеаризуется, т. е. нелинейные зависимости сначала заменяются линейными, по возможности близкими к первоначальным нелинейным. Для линеаризованной системы стандартным способом подбирается функция Ляпунова V , даются достаточные условия

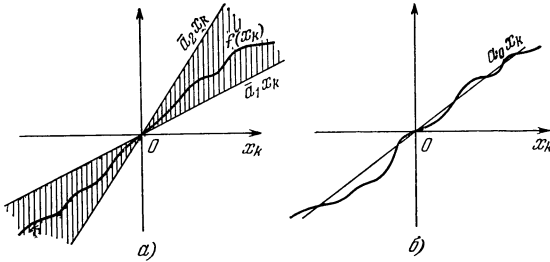


Рис. 9.41.

устойчивости, т. е. имеем $\frac{dV}{dt} < 0$ во всем фазовом пространстве. Если начать изменять те параметры, которые приняты постоянными, а на деле являются переменными, то в некотором диапазоне изменения этих параметров полученная функция V будет еще обладать свойством $\frac{dV}{dt} < 0$ во всем фазовом про-

странстве. Поэтому, если нелинейные зависимости не выходят из некоторых рамок, можно гарантировать устойчивость и для первоначальной величины системы.

Рассмотрим сначала первый метод. Пусть имеем систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{1j} x_j + f(x_k), \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 2, \dots, n), \quad (25)$$

являющуюся частным типом нелинейной системы. Первое из уравнений нелинейно, так как в нем присутствует нелинейная функция $f(x_k)$. Остальные уравнения линейны, причем будем считать все коэффициенты a_{ij} (в том числе и в первом уравнении) постоянными. Будем также считать, что система имеет лишь одну особую точку в начале координат.

Наложим на функцию $f(x_k)$ (где k может быть любым от 1 до n) ограничения:

- 1) $[f(x_k)]_{x_k=0} = 0$,
- 2) $\bar{a}_1 x_k < f(x_k) < \bar{a}_2 x_k$ при $x_k > 0$,

Где a_1 и a_2 — постоянные, не обязательно одного знака. При $x_k < 0$ второе неравенство меняется на противоположное. Геометрически это условие означает, что функция $f(x_k)$ находится между прямыми $\bar{a}_1 x_k$ и $\bar{a}_2 x_k$ (рис. 9.41, а), т. е. внутри заштрихованного участка плоскости.

3) Функция $f(x_k)$ непрерывная, дифференцируемая и однозначная. Произведем линеаризацию уравнений (25), заменив функцию $f(x_k)$ прямой $a_0 x_k$ (рис. 9.41, б). Выбираем

$$\bar{a}_1 < a_0 < \bar{a}_2,$$

причем удобнее, чтобы прямая $a_0 x_k$ возможно лучше соответствовала «в среднем» ходу функции $f(x_k)$. Это впрочем, не обязательно. Линеаризованные уравнения принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{1j} x_j + a_0 x_k, \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 2, \dots, n). \quad (26)$$

Для линеаризованной системы (26) построим функцию Ляпунова V . Это можно сделать бесчисленным множеством способов. Можно положить, например,

$$\frac{dV}{dt} = -A \sum_{i=1}^n x_i^2 = U_0. \quad (27)$$

Если удастся найти функцию V , удовлетворяющую равенству (27), то при $A > 0$ ее производная отрицательна в любой точке фазового пространства с координатами (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Функцию V нетрудно найти с помощью приема, указанного А. И. Ляпуновым. Полагаем сначала функцию V в виде квадратичной формы с еще неопределенными коэффициентами $B_{hi} = B_{ih}$:

$$V = \sum_{\substack{h=1 \\ i=1}}^n B_{hi} x_h x_i. \quad (28)$$

Чтобы найти коэффициенты B_{hi} , воспользуемся выражением

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = U_0. \quad (29)$$

Подставим в это выражение значения $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, вычисленное из (28), $\frac{dx_i}{dt}$ из (26) и U_0 из (27). Получим

$$\begin{aligned} -A \sum_{i=1}^n x_i^2 = & 2(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \dots + B_{1n}x_n) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{1j}x_j + a_0x_k \right) + \dots \\ & \dots + 2(B_{n1}x_1 + B_{n2}x_2 + \dots + B_{nn}x_n) \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right). \quad (30) \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем в правой и левой частях этого выражения многочлены. Они тождественны, если коэффициенты при членах в правой и левой частях равны друг другу. Приравнивая значения коэффициентов, получаем отсюда уравнения для определения B_{ij} . Следовательно, функция V найдена. Эта функция соответствует постоянному значению a_0 , коэффициенты B_{ij} являются функциями a_0 .

Если a_0 станет меняться, но квадратичная форма V остается той же, то производная $\frac{dV}{dt}$ уже не будет равна U_0 . Если коэффициенты B_{ij} известны как функции a_0 , то можно найти производную

$$U_S = \frac{dV}{dt} = \sum_{\substack{h=1 \\ i=1}}^n S_{hi} x_h x_i. \quad (31)$$

Здесь $S_{hi} = S_{ih}$. Форма U_S уже не сводится к сумме квадратов (с отрицательным знаком) U_0 (см. (27)). Однако в некотором диапазоне изменения a_0

$$a_{01} < a_0 < a_{02} \quad (32)$$

форма U_S определенно отрицательна во всем фазовом пространстве (либо U_S положительна). Узнать значения a_{01} и a_{02} сравнительно нетрудно (см. ниже). Теперь представим $f(x_k)$ в виде $a_0 x_k$, где a_0 уже, конечно, не постоянная величина ($f(x_k) = a_0 x_k$). Если функция $f(x_k)$ лежит между прямыми $a_{02} x_k$ и $a_{01} x_k$, т. е.

$$a_{01} x_k < f(x_k) < a_{02} x_k \quad (x_k > 0)$$

или

$$a_{01} x_k < a_0 x_k < a_{02} x_k, \quad (x_k > 0),$$

то до тех пор, пока a_0 изменяется в пределах, указанных неравенствами (32), величина $U_S = \frac{dV}{dt}$ по-прежнему отрицательна во всем фазовом пространстве, т. е. для нелинейной системы при этих условиях найдена функция V Ляпунова, для которой $\frac{dV}{dt} < 0$. Возникает вопрос, следует ли устойчивость нелинейной системы (и при том в большом) из условия устойчивости «эквивалентной» линейной системы? Подобная задача известна как проблема М. А. Айзермана. Ее графо-аналитическое решение дается критерием В. М. Попова, приведенным в следующем параграфе.

Условие $a_{01}x_k < f(x_k) < a_{02}x_k$ ($x_k > 0$) не является необходимым условием устойчивости, так как система, вообще говоря, может быть устойчивой и в том случае, если в некоторой области фазового пространства $\frac{dV}{dt} > 0$, но любая фазовая траектория в конце концов ведет к точке равновесия. (Здесь опять-таки принято, что при $x_k < 0$ знаки неравенств меняются на противоположные.)

Рассмотрим пример системы второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -f(x) - 2y, \\ \dot{y} &= x - y. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Эту систему можно представить и в виде одного уравнения. Исключаем y из системы (33),

$$\ddot{x} = -\frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} - 2\dot{y} = -\frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} - 2(x - y) = -\frac{df(x)}{dx} \dot{x} - 2x - f(x) - \dot{x}.$$

Отсюда

$$\ddot{x} + \dot{x} \left[1 + \frac{df(x)}{dx} \right] + 2x + f(x) = 0. \quad (34)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} [f(x)]_{x=0} &= 0, \\ \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=0} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Найдем достаточные условия устойчивости системы, описываемой уравнениями (33) и (34). Линеаризуем систему, положив $f(x) = a_0x$ и сначала $a_0 = 1$. Линеаризованные уравнения принимают вид

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = x - y. \quad (36)$$

Линеаризованное уравнение (36) можно написать в виде

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0. \quad (37)$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + 2p + 3 = 0$$

имеет корни, лежащие в левой полуплоскости. Следовательно, линеаризованная система устойчива.

Задаемся «производной» квадратичной формой U_0 в виде

$$U_0 = -A(x^2 + y^2). \quad (38)$$

Далее полагаем

$$V = \frac{1}{2} B_x x^2 + \frac{1}{2} B_y y^2 - B_{xy} xy. \quad (39)$$

Коэффициенты B_x , B_y , B_{xy} находим из выражения

$$U_0 = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (40)$$

Подставляя сюда значения U_0 , $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$ согласно (39) и значения $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ из (36), находим

$$-A(x^2 + y^2) = (B_{xx} - B_{xy}y)(-x - 2y) + (B_{yy} - B_{xy}x)(x - y)$$

или

$$-Ax^2 - Ay^2 = -B_{xx}x^2 + B_{xy}xy - 2B_{xx}xy + 2B_{xy}y^2 + B_{yy}yx - B_{xy}x^2 - B_{yy}y^2 + B_{xy}xy. \quad (41)$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих членах многочленов в левой и правой частях, находим уравнения для определения B_x , B_y , B_{xy} :

$$-A = -B_x - B_{xy}, \quad -A = 2B_{xy} - B_y, \quad 0 = 2B_{xy} - 2B_x + B_y. \quad (42)$$

Отсюда получаются значения

$$B_x = \frac{5}{6}A, \quad B_y = \frac{8}{6}A, \quad B_{xy} = \frac{1}{6}A. \quad (43)$$

Следовательно, квадратичная форма V (см. (39)) имеет вид

$$V = A \left(\frac{5}{12}x^2 + \frac{8}{12}y^2 - \frac{1}{6}xy \right). \quad (44)$$

Это — функция Ляпунова, положительная всюду на фазовой плоскости (x, y) , исключая единственную точку равновесия $x = 0, y = 0$, где она обращается в нуль. То обстоятельство, что $V > 0$, вытекает из условия $\frac{dV}{dt} < 0$ во всей фазовой плоскости и $V = 0$ в начале координат. Нетрудно также непосредственно проверить по формуле (44), что для любых значений x и y функция V положительна.

Теперь допустим, что $a_0 \neq 1$. Линеаризованные уравнения (36) в этом случае могут быть написаны в виде

$$\dot{x} = -a_0x - 2y, \quad \dot{y} = x - y. \quad (45)$$

Найдем пределы изменения a_0 , при которых функция V , определенная формулой (44), будет функцией Ляпунова, т. е. будет осуществляться условие $\frac{dV}{dt} < 0$ во всем фазовом пространстве. Теперь при $a_0 \neq 1$ производная $\frac{dV}{dt}$ уже не будет равна выражению (38). Положим

$$\frac{dV}{dt} = U_S = (S_x x^2 + S_y y^2 + 2S_{xy}xy) \quad (46)$$

и определим S_x, S_y, S_{xy} . Написав в развернутом виде выражения для $\frac{dV}{dt}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{A}{6}(5x - y)(-a_0x - 2y) + \frac{A}{6}(8y - x)(x - y) = \\ &= -S_x x^2 - S_y y^2 - 2S_{xy}xy. \end{aligned} \quad (47)$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при соответствующих членах в правой и левой частях, получаем уравнения

$$-S_x \frac{6}{A} = -5a_0 - 1, \quad S_y \frac{6}{A} = -6, \quad -2S_{xy} \frac{6}{A} = a_0 - 1, \quad (48)$$

откуда находим S_x, S_y, S_{xy} . После подстановки этих значений в выражение (46) получаем

$$U = -\frac{A}{6} [(5a_0 + 1)x^2 + 6y^2 + (1 - a_0)xy]. \quad (49)$$

Остается узнать, при каких значениях a_0 квадратная скобка в формуле (49) будет положительна (каковы бы ни были значения x и y). Если a_0 будет изменяться в этих пределах, то производная $\frac{dV}{dt}$ будет отрицательна, что служит достаточным признаком устойчивости в большом. Таким образом, требуется найти условия положительности квадратичной формы, помещенной в квадратную скобку в выражении (49). Как известно, условие положительного знака квадратичной формы с двумя переменными совпадает с положительным знаком дискриминанта ее коэффициентов, т. е. определителя

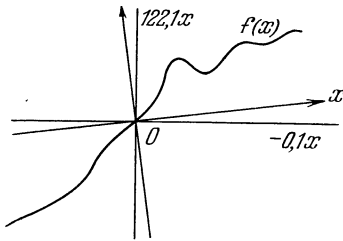


Рис. 9.42.

$\begin{vmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{vmatrix}$. Соответствующее неравенство для формы (49) принимает вид

$$6(5a_0 - 1) - \frac{1}{4}(1 - a_0)^2 > 0$$

или

$$a_0^2 - 122a_0 + 25 < 0.$$

Последнее неравенство справедливо при

$$0,1 < a_0 < 122,1.$$

Следовательно, при изменении a_0 в этих пределах система наверняка устойчива. Поэтому «дозволенные пределы» изменения функции $f(x)$ (рис. 9.42) — между прямыми $122,1x$ и $0,1x$. (Отметим, что, вообще говоря, подобный вывод справедлив для систем не выше второго порядка.)

Рассмотренный выше метод можно обобщить на случай нескольких нелинейных функций. Пусть, например, первое уравнение системы (25) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f_1(x_{k_1}) + f_2(x_{k_2}) + \dots$$

Линеаризуя систему, заменяем это уравнение следующим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + a_{01k_1}x_{k_1} + a_{01k_2}x_{k_2} + \dots$$

Подберем для фиксированных значений $a_{01k_1}, a_{02k_2}, \dots$ функцию Ляпунова, а затем найдем пределы для изменений $a_{01k_1}, a_{02k_2}, \dots$, при которых найденная функция еще является функцией Ляпунова. Эти пределы укажут границы, между которыми должны находиться функции $f_1(x_{k_1}), f_2(x_{k_2}), \dots$, для того чтобы была обеспечена устойчивость системы.

Аналогичным образом можно рассмотреть и нелинейные уравнения с функциями нескольких переменных. Если, например, первое уравнение системы (25) написано в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f(x_1, x_2, x_3),$$

то, линеаризуя его, следует заменить зависимость f линейной функцией; получаем

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3.$$

Дальнейшая методика действия остается той же: следует найти при фиксированных значениях a_0, b_0, c_0 функцию Ляпунова, а затем определить

пределы для изменения a_0, b_0 и c_0 , при которых эта функция еще остается функцией Ляпунова. Тогда, если эти пределы соответственно равны $a_{01}; a_{02}; b_{01}, b_{02}; c_{01}, c_{02}$; то «дозволенные» поверхности $f(x_1, x_2, x_3)$ находятся между плоскостями

$$a_{01}x_1 + b_{01}x_2 + c_{01}x_3 = 0$$

и

$$a_{02}x_1 + b_{02}x_2 + c_{02}x_3 = 0.$$

Если окажется, что при $|x_k| > |x_k|_{пр}$ функция выходит за «дозволенные» пределы, то можно утверждать, что наша функция является функцией Ляпунова, если не во всем фазовом пространстве, то во всяком случае в области $|x_k| < |x_k|_{пр}$. Эта область, таким образом, есть область притяжения (или часть области притяжения) для точки равновесия. Поэтому устойчивость в малом при отклонениях x_k , не превышающих $|x_k|_{пр}$, тем самым доказана.

Второй метод рассмотрим для системы, движение которой описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f(x_1), \\ \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i=2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} (50)$$

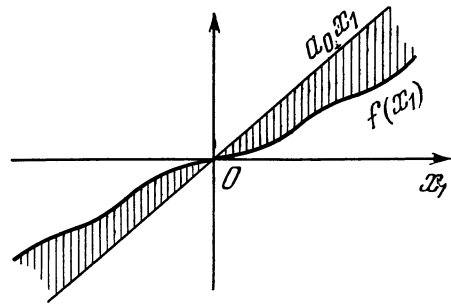


Рис. 9.43.

Линеаризуем систему, заменяя $f(x_1)$ через $a_0 x_1$. Подберем такое значение a_0 и такую функцию Ляпунова для линеаризованной системы, чтобы удовлетворялись два условия:

$$\left. \begin{aligned} 1) & \quad \text{sign } \frac{\partial V}{\partial x_1} = \text{sign } x_1; \\ 2) & \quad x_1 [a_0 x_1 - f(x_1)] \geq 0. \end{aligned} \right\} (51)$$

Если удастся подобрать такую функцию V , то система устойчива в большом. Разберем сначала смысл этих условий.

Если, например, $V = \sum_{j=1}^n m_j x_j^2$ и $m_1 > 0$, то $\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2m_1 x_1$, и знак $\partial V / \partial x_1$ совпадает со знаком x_1 . Конечно, функция V должна быть функцией Ляпунова для линеаризованной системы, т. е. должно удовлетворяться неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$ во всем фазовом пространстве.

Второе условие означает, что прямая $a_0 x_1$ лежит над функцией $f(x_1)$ при $x_1 > 0$ и под этой функцией при $x_1 < 0$ (рис. 9.43).

Докажем достаточность условий (51) для устойчивости. Допустим, что для линеаризованной системы найдена функция V , удовлетворяющая условиям (51). Составляя для линеаризованной системы производную $(dV/dt)_{мин}$, получаем

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{мин} < 0.$$

Теперь посмотрим, чему равна производная от этой же функции для нелинейной системы:

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{нелин} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)_{нелин} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots$$

Так как в нелинейной системе (см. первое из уравнений (50))

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{\text{нелин}} = f(x_1) - a_0 x_1 + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{\text{лин}},$$

то, подставляя эту формулу в предыдущее выражение, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{нелин}} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \left[f(x_1) - a_0 x_1 + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{\text{лин}} \right] + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} [f(x_1) - a_0 x_1] + \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{\text{лин}} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots \right] = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} [f(x_1) - a_0 x_1] + \left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{лин}}. \end{aligned}$$

Следовательно, отличие между $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{нелин}}$ и $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{лин}}$ заключается лишь в члене $\frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) - a_0 x_1]$. Если этот член имеет отрицательный знак, то поскольку $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{лин}} < 0$, будет и по-прежнему $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{нелин}} < 0$, т. е. система окажется устойчивой в большом. Между тем, если знак $\frac{dV}{dx_1}$ такой же, как знак x_1 , то дополнительный член будет отрицателен, если положительно выражение

$$x_1 [a_0 x_1 - f(x_1)],$$

т. е. если удовлетворяется второе из условий (51). Следовательно, при удовлетворении обоих условий (51) производная $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{нелин}}$ отрицательна во всем фазовом пространстве, и система устойчива в большом.

Если, например, для системы второго порядка найдена функция

$$V = \frac{B_x}{2} x^2 + \frac{B_y}{2} y^2 + B_{xy} xy,$$

то она будет удовлетворять первому условию (51), если

$$B_{xy} = 0 \text{ и } B_x > 0.$$

Чтобы исследовать указанными выше методами системы любого порядка, необходимо знать условия, при которых форма $(-U_S)$ (см. (46)) определена положительно. В курсах высшей алгебры доказывается, что необходимыми и достаточными условиями для определенной положительности формы с n переменными x, y, z, \dots

$$-U_S = S_x x^2 + S_y y^2 + S_z z^2 + \dots + 2S_{xy} xy + 2S_{xz} xz + \dots \quad (52)$$

являются положительные знаки n определителей следующего вида:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad S_x > 0, \\ 2) \quad \begin{vmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{vmatrix} > 0, \\ 3) \quad \begin{vmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z \end{vmatrix} > 0, \\ 4) \quad \begin{vmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} & S_{x\xi} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} & S_{y\xi} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z & S_{z\xi} \\ S_{x\xi} & S_{y\xi} & S_{z\xi} & S_\xi \end{vmatrix} > 0, \end{array} \right\} \quad (53)$$

$$5) \left. \begin{matrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} & S_{x\xi} & S_{x\mu} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} & S_{y\xi} & S_{y\mu} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z & S_{z\xi} & S_{z\mu} \\ S_{x\xi} & S_{y\xi} & S_{z\xi} & S_\xi & S_{\xi\mu} \\ S_{x\mu} & S_{y\mu} & S_{z\mu} & S_{\xi\mu} & S_\mu \end{matrix} \right\} > 0 \quad (53)$$

и т. д. Дозволенные «пределы» изменения, например коэффициента a_0 , ограничиваются диапазоном, на границе которого какой-нибудь из этих определителей обращается в нуль.

§ 5. Частотный критерий абсолютной устойчивости Попова

Румынский ученый В. М. Попов развил оригинальный метод исследования абсолютной устойчивости одного практически важного класса нелинейных систем. Ему удалось найти довольно широкие достаточные условия,

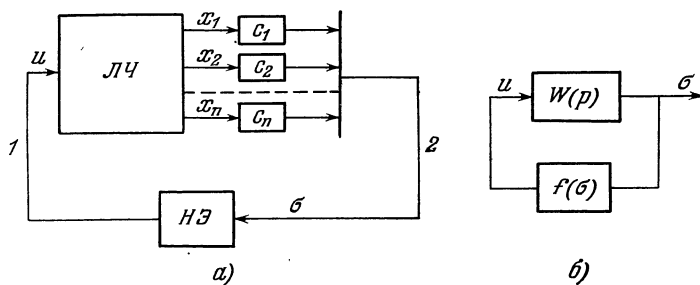


Рис. 9.44.

которые гарантируют устойчивость регулируемой системы в большом. Привлекательность его метода состоит в том, что об абсолютной устойчивости системы можно судить на основании частотной характеристики линейной части системы.

Частотный критерий Попова допускает простую геометрическую интерпретацию. Он является в каком-то смысле обобщением известного частотного критерия устойчивости Найквиста.

Для изложения основного результата дадим сначала точную постановку задачи. Пусть регулируемая система имеет вид, изображенный на рис. 9.44, а. Это — замкнутая система, которая состоит из произвольного вида линейной части ЛЧ и безынерционного нелинейного элемента НЭ с входным сигналом σ и выходным сигналом u , т. е.

$$u = f(\sigma). \quad (1)$$

Входной сигнал нелинейного элемента σ равен линейной комбинации с весами c_1, c_2, \dots, c_n выходных координат x_1, x_2, \dots, x_n линейной системы

$$\sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k. \quad (2)$$

Выходной сигнал u нелинейного элемента подается на вход линейной части системы. Линейная часть описывается следующей системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Мы здесь будем предполагать, что система (3) при $u \equiv 0$ устойчива. Если ввести векторно-матричные обозначения

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ и } b = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то уравнения (2) и (3) можно переписать в виде

$$\sigma = cx, \quad (4)$$

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (5)$$

Если разомкнуть систему в точках 1 и 2 (рис. 9.44, б) и рассматривать u как входной сигнал линейной части системы, а σ — как выходной, то связь между u и σ можно описать с помощью передаточной функции $W(p)$. Для того чтобы получить выражение $W(p)$, совершим в уравнении (5) формальную замену \dot{x} на px ; получим

$$px = Ax + bu. \quad (6)$$

Разрешим это уравнение относительно x :

$$x = \frac{bu}{pE - A} = (pE - A)^{-1}bu, \quad (7)$$

где E — единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим выражение (7) для x в уравнение (4). Получим

$$\sigma = c(pE - A)^{-1}bu, \quad (8)$$

или

$$\frac{\sigma}{u} = c(pE - A)^{-1}b. \quad (9)$$

Выражение

$$W(p) = c(pE - A)^{-1}b \quad (10)$$

и есть искомая передаточная функция между входом и выходом σ линейной части системы. (Читатель может самостоятельно проделать строго подобные операции, используя преобразование Лапласа.) Полагая $p = j\omega$ в равенстве (10), мы получим частотную характеристику $W(j\omega)$. Предположим, что матрица A устойчива, т. е. все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части.

Посмотрим теперь, какими свойствами можно наделить нелинейную функцию $f(\sigma)$ — характеристику нелинейного элемента в обратной связи. Оказывается, что для справедливости критерия Попова на функцию $f(\sigma)$ должны быть наложены следующие условия.

1. Функция $f(\sigma)$ должна быть определена и непрерывна при всех значениях σ от $-\infty$ до $+\infty$ (если она естественно определяется на некотором конечном интервале значения σ , то ее можно легко доопределить на всем интервале $[-\infty, \infty]$).

2. При любых $\sigma \neq 0$ функция $f(\sigma)$ имеет тот же знак, что и σ , т. е.

$$f(0) = 0 \text{ и } \sigma f(\sigma) > 0. \quad (11)$$

Первое из указанных двух условий означает, что у характеристики нет скачков (разрывов); второе — что график характеристики лежит лишь в первом и третьем квадрантах и проходит, следовательно, через начало координаты.

Теорема Попова. Для того чтобы нелинейная система (1)–(3) была абсолютно устойчива, достаточно существования такого неотрицательного числа $q \geq 0$, чтобы для всех вещественных ω от $-\infty$ до ∞ выполнялось условие (условие Попова)

$$\operatorname{Re} [(1 + j\omega q) W(j\omega)] \leq 0. \tag{12}$$

Эта аналитическая формулировка теоремы Попова допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Действительно, введем новую, или,

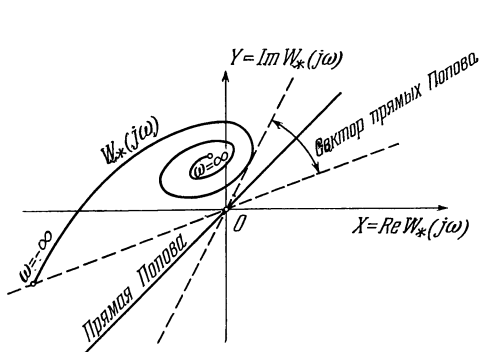


Рис. 9.45.

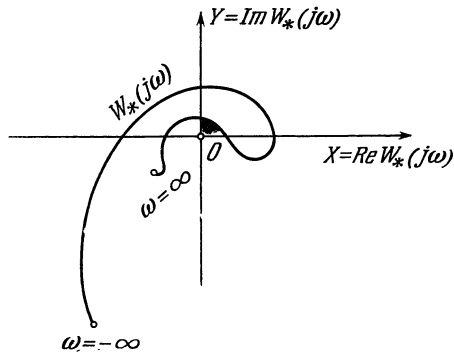


Рис. 9.46.

как мы ее будем называть, видоизмененную комплексную частотную характеристику $W_*(j\omega)$, которая связана с $W(j\omega)$ равенствами

$$\operatorname{Re} W_*(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) \equiv X, \quad \operatorname{Im} W_*(j\omega) = \omega \operatorname{Im} W(j\omega) \equiv Y. \tag{13}$$

Тогда левая часть неравенства Попова (12) примет вид

$$\operatorname{Re} [(1 + j\omega q) W(j\omega)] = \operatorname{Re} W(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} W(j\omega) = X - qY$$

и, следовательно, условие Попова сведется к неравенству

$$X - qY \leq 0 \text{ (при всех вещественных } \omega, -\infty \leq \omega \leq \infty). \tag{14}$$

Это уравнение на плоскости X, Y является уравнением прямой линии, проходящей через начало координат с коэффициентом наклона, равным $q \geq 0$. Эта прямая называется также прямой Попова. Прямая Попова разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Неравенство (14) характеризует ту из этих двух полуплоскостей, которая содержит отрицательную действительную ось и, следовательно, лежит слева от прямой Попова. Условие (14) требует, чтобы годограф видоизмененной характеристики $W_*(j\omega)$ лежал в этой полуплоскости, т. е. слева от прямой Попова.

Итак, в силу сделанных замечаний может быть дана следующая геометрическая формулировка теоремы Попова. Для того чтобы нелинейная система (1)–(3) была абсолютно устойчива, достаточно, чтобы в комплексной плоскости, где изображен годограф видоизмененной характеристики $W_*(j\omega)$, можно было провести через начало координат прямую, относительно которой годограф $W_*(j\omega)$ целиком лежит слева от этой прямой.

На рис. 9.45 приведен пример годографа $W_*(j\omega)$, для которого существует отделяющая прямая Попова. На рис. 9.46 показан пример годографа $W_*(j\omega)$, для которого нельзя построить отделяющую прямую Попова.

Следовательно, в первом случае система будет абсолютно устойчива; во втором случае никакого суждения об устойчивости системы сделать нельзя, так как условия Попова являются лишь *достаточными* условиями. В связи с этим отсутствие отделяющей прямой Попова не гарантирует еще факта неустойчивости системы.

Рассмотрим следующий пример. Пусть задана система регулирования, структурная схема которой изображена на рис. 9.47, а, причем нелинейность $f(\sigma)$ имеет произвольный вид, подчиненный лишь условиям 1 и 2,

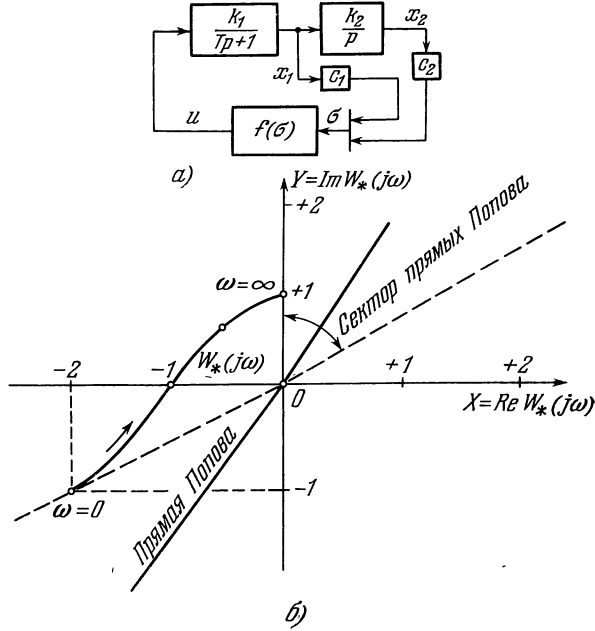


Рис. 9.47.

сформулированным выше в этом параграфе, и T — действительное положительное число. Найдем передаточную функцию линейной части системы. Имеем

$$\sigma = \left[\frac{k_1 c_1}{Tp+1} + \frac{k_1 k_2 c_2}{(Tp+1)(p+1)} \right] u. \tag{15}$$

Следовательно, искомая передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{\sigma}{u} = \frac{k_1 c_1}{Tp+1} + \frac{k_1 k_2 c_2}{(Tp+1)(p+1)} = \frac{k_1 c_1 p + k_1 c_1 + k_1 k_2 c_2}{(Tp+1)(p+1)}.$$

Отсюда видно, что корни характеристического многочлена разомкнутой линейной части имеют отрицательные действительные части.

Находим соответствующую комплексную частотную характеристику

$$W(j\omega) = \frac{k_1 c_1 j\omega + k_1 c_1 + k_1 k_2 c_2}{(Tj\omega+1)(j\omega+1)}.$$

Разделяя действительные и мнимые части, получим

$$W(j\omega) = \frac{k_1 c_1 + k_1 k_2 c_2 - k_1 k_2 c_2 T \omega^2 + k_1 c_1 \omega^2}{(1 - T\omega^2)^2 + \omega^2 (T+1)^2} - j \frac{k_1 c_1 \omega^3 T + k_1 c_1 \omega T + k_1 k_2 c_2 \omega T + k_1 k_2 c_2 \omega}{(1 - T\omega^2)^2 + \omega^2 (T+1)^2}.$$

В соответствии с определением (13) видоизмененной частотной характеристики $W_*(j\omega)$ имеем

$$W_*(j\omega) = \frac{k_1c_1 + k_1k_2c_2 - k_1k_2c_2T\omega^2 + k_1c_1\omega^2}{(1-T\omega^2)^2 + \omega^2(T+1)^2} - j \frac{k_1c_1T\omega^4 + k_1c_1T\omega^2 + k_1k_2c_2T\omega^2 + k_1k_2c_2\omega^2}{(1-T\omega^2)^2 + \omega^2(T+1)^2}. \quad (16)$$

Теперь нужно построить на комплексной плоскости годограф функции $W_*(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ . Так как $W_*(j\omega)$ всегда четная функция ω , то годограф будет построен, если менять ω от 0 до ∞ .

Для конкретности положим, например,

$$k_1 = k_2 = -1, \quad c_1 = c_2 = T = 1. \quad (17)$$

Тогда

$$W_*(j\omega) = \frac{-2\omega}{(1+\omega^2)^2} + j \frac{\omega^4 - \omega^2}{(1+\omega^2)^2}.$$

Построим годограф $W_*(j\omega)$ по точкам (см. таблицу).

ω	0	1	2	10	∞
$X = \operatorname{Re} W_*(j\omega)$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{2}{10\,000}$	0
$Y = \operatorname{Im} W_*(j\omega)$	0	0	$\frac{12}{25}$	$\frac{999}{1000}$	1

Из рассмотрения годографа $W_*(j\omega)$ (рис. 9.47, б) видно, что имеется целый сектор между мнимой осью и пунктирной прямой, в котором могут быть проведены прямые Попова. Следовательно, можно сделать вывод о том, что нелинейная система, изображенная на рис. 9.47, а, при параметрах, определяемых равенствами (17), будет устойчивой в большом.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Попова.

Для краткости всюду в дальнейшем будем писать $f(t)$ вместо $f(\sigma(t))$ и $\Phi(t)$ вместо $\Phi(\sigma(t))$, где

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma. \quad (18)$$

Далее, пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной линейной системы, соответствующей системе (3). Тогда можно записать вместо дифференциального уравнения (3) с учетом (1) и (2) интегральное уравнение

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-\tau)bf(\tau) d\tau, \quad (19)$$

где $x_0 = x(0)$. Умножая векторное равенство (13) на вектор c , получим

$$\sigma(t) = cX(t)x_0 + \int_0^t v(t-\tau)f(\tau) d\tau, \quad (20)$$

где $v(t)$ — импульсная переходная функция от u к σ , соответствующая передаточной функции $W(p)$.

Для доказательства теоремы сделаем еще три замечания:

1) Пусть $g(t)$ — некоторый полином, m — положительная постоянная и

$$h(t) = g(t) e^{-mt}. \quad (21)$$

Поскольку любая экспонента убывает быстрее, чем возрастает любой полином, то при $0 < k < m$ для $t \geq 0$ найдется такое c , что

$$|h(t)| < ce^{-kt}. \quad (22)$$

Это же неравенство будет справедливо, если $h(t)$ является суммой членов вида (21). Функции $h(t)$, подчиняющиеся неравенству типа (22), называются квазиэкспоненциальными.

Так как, по предположению, матрица A устойчива, то найдутся такие $C > 0$, $k > 0$, что

$$|v(t)| < Ce^{-kt} \quad \text{и} \quad |\dot{v}(t)| < Ce^{-kt} \quad \text{при} \quad t \geq 0. \quad (23)$$

2) Если $k > 0$ и $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то при $t \geq 0$

$$g_1(t) = \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \rightarrow 0, \quad (24)$$

так как

$$|g_1(t)| \leq e^{-kt} \int_0^t e^{k\tau} |\varphi(\tau)| d\tau = h(t),$$

и в соответствии с правилом Лопиталя при $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |g_1(t)| = 0.$$

3) Нам еще понадобится известное равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) \bar{G}_2(\omega) d\omega, \quad (25)$$

где $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ являются преобразованием Фурье соответственно функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$, а черта над функцией означает сопряженную к данной функцию.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы Попова.

Введем следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} f_T(t) &= \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при всех остальных } t, \end{cases} \\ \mu(t) &= v(t) + q\dot{v}(t), \\ \lambda(t) &= \int_0^t \mu(t-\tau) f_T(\tau) d\tau - qcbf_T(t), \\ \varphi(t) &= c(X(t) - q\dot{X}(t)) X_0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где q — произвольное число.

Из уравнения (20) получаем

$$\dot{\sigma}(t) = c\dot{X}(t) x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t v(t-\tau) f(\tau) d\tau = c\dot{X}(t) x_0 + \int_0^t \dot{v}(t-\tau) f(\tau) d\tau - cbf(t),$$

откуда опять с учетом (20) имеем

$$\lambda(t) = \sigma(t) + q\dot{\sigma}(t) - \varphi(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (27)$$

Кроме того, существуют такие $C > 0$ и $k > 0$, что

$$|\lambda(t)| < Ce^{-kt} \quad \text{при } t \geq T, \quad (28)$$

так как $f_T(t)$ — финитная функция, т. е. обращается в нуль при t вне отрезка $[0, T]$, а $\mu(t) = \nu(t) + q\dot{\nu}(t)$ подчиняется равенству типа (28), так как $\nu(t)$ и $\dot{\nu}(t)$ удовлетворяют (23).

Пусть теперь $L(j\omega)$ означает преобразование Фурье от функции $\lambda(t)$, а $F(j\omega)$ — от функции $f_T(t)$. Тогда имеем

$$L(j\omega) = W(j\omega) (1 + j\omega q) F(j\omega). \quad (29)$$

Определим теперь функцию

$$\theta(T) = \int_0^{\infty} \lambda(t) f_T(t) dt \quad (30)$$

и преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(j\omega) \overline{F(j\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) (1 + j\omega q) F(j\omega) \overline{F(j\omega)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 W(j\omega) (1 + j\omega q) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \operatorname{Re} [W(j\omega) (1 + j\omega q)] d\omega. \end{aligned}$$

С учетом (12) отсюда следует, что

$$\theta(T) = \int_0^{\infty} \lambda(t) f_T(t) dt \leq 0. \quad (31)$$

Из уравнения (27) и неравенства (31) получаем

$$\int_0^T \sigma(t) f(t) dt + q \int_0^T \dot{\sigma}(t) f(t) dt \leq \int_0^T \varphi(t) f(t) dt. \quad (32)$$

Исследуем каждый из интегралов в последнем неравенстве.

Так как $\sigma f(\sigma) > 0$ при всех $\sigma \neq 0$ по основному предположению о характере нелинейности, то

$$\int_0^T \sigma(t) f(t) dt > 0. \quad (33)$$

Далее

$$\int_0^T \dot{\sigma}(t) f(t) dt = \Phi(T) - \Phi(0). \quad (34)$$

Наконец интеграл в правой части приводится интегрированием по частям к виду

$$\int_0^T \varphi(t) \varphi(t) dt = \int_0^T \varphi(t) \dot{\xi}(t) dt = [\varphi(t) \xi(t)]_0^T - \int_0^T \xi(t) \dot{\varphi}(t) dt.$$

Пусть $\xi_1 = \max |\xi(t)|$ в интервале $0 \leq t \leq T$. Так как φ квазиэкспоненциальна и пропорциональна длине вектора x_0 , то для $w = |x_0| + \xi(0)$ имеем

$$|[\varphi(t)\xi(t)]_0^T| < C_1 w \xi_1, \quad C_1 > 0.$$

Но функция $\varphi(t)$ также квазиэкспоненциальна. Поэтому

$$\left| \int_0^T \xi(t) \dot{\varphi}(t) dt \right| < C_2 w \xi_1, \quad C_2 > 0.$$

Отсюда при $C > 0$ и любом T

$$\left| \int_0^T \varphi(t) f(t) dt \right| < C w \xi_1. \quad (35)$$

На основе неравенств (32), (34), (35) получим

$$\int_0^T \sigma(t) f(t) dt + q\Phi(T) + \frac{1}{2} \xi^2(T) \leq C w \xi_1 + q\Phi(0). \quad (36)$$

Воспользуемся теперь уравнением (3) и заметим, что начальное значение σ_0 функции $\sigma(t)$ сходится к нулю вместе с суммой $w = |x(0)| + |\varphi(0)|$. Но так как $\Phi(\sigma)$ непрерывная и положительная функция от σ и обращается в нуль при $\sigma = 0$, то значение w можно выбрать столь малым, что $q\Phi(0) < 0$. Таким образом, из неравенства (36) получаем

$$\int_0^T \sigma(t) f(t) dt < C w \xi_1. \quad (37)$$

Так как можно выбрать $T = T_1$, то в силу неотрицательности $\Phi(T)$ при $\xi_1 = \xi(T_1)$ имеем

$$\varphi(\xi_1) = \xi_1^2 - 2C w \xi_1 \leq 0.$$

Так как $\xi_1 > 0$, то отсюда следует, что

$$\xi_1 < 2C w$$

и, следовательно,

$$|\xi(t)| < 2C w. \quad (38)$$

Поскольку ξ_1 ограничено, из неравенства (37) следует

$$\int_0^\infty \sigma(t) f(t) dt < \infty. \quad (39)$$

Из уравнения (19) имеем

$$\begin{aligned} - \int_0^t X(t-\tau) b f(\tau) d\tau &= \int_0^t X(t-\tau) b \dot{\xi}(\tau) d\tau = \\ &= X(t-\tau) b \xi(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \frac{dX(t-\tau)}{d\tau} b \xi(\tau) d\tau = \\ &= b \xi(t) - \xi_0 X(t) b + \int_0^t \frac{dX(t-\tau)}{d\tau} b \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Используя уравнение (3) и квазиэкспоненциальность $X(t)$ и $\dot{X}(t)$ и неравенство (38), получим

$$|X(t)| < C(w + \xi_1), \quad C > 0. \quad (40)$$

Неравенства (38) и (40) позволяют сделать вывод, что при заданном $\epsilon > 0$ всегда можно подобрать такое $\eta > 0$, что из неравенства $w < \eta$ следует неравенство $|x(t)| + |\xi(t)| < \epsilon$ при всех $t \geq 0$.

Иными словами, начало координат является устойчивым состоянием равновесия системы (1)–(3).

Теперь осталось показать, что любое решение $(x(t), \xi(t))$ системы сходится к началу координат $x = 0, \xi = 0$ при $t \rightarrow \infty$ независимо от выбора функции $f(\sigma)$ (конечно, подчиненной упомянутым выше условиям).

Прежде всего докажем, что $\sigma(t)$ и $f(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Из ограниченности длины вектора $x(t)$, т. е. ограниченности $|X'(t)|$ и $|\xi(t)|$ следует, что должна быть ограниченной функция $f(\sigma)$. Но так как $f(\sigma)$ непрерывна и $f(0) = 0$, то ограничена и функция $f(t)$. Из ограниченности $|x(t)|$ и $|f(t)|$ уже следует ограниченность $\sigma(t)$. Следовательно, всегда можно выбрать такое $M > 0$, что $|\sigma(t)| < M$ и $|\dot{\sigma}(t)| < M$ при любом $t \geq 0$. Предположим теперь, что утверждение относительно сходимости $\sigma(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$ несправедливо. Тогда найдутся такое $\delta > 0$ и такая расходящаяся последовательность положительных величин $t_1 < t_2 < \dots$, что $|\sigma(t_k)| > \delta$ при всех k . Можно даже, предложив, что $t_k - t_{k-1} > \frac{\delta}{M}$ и $t_1 = \frac{\delta}{2M}$, получить

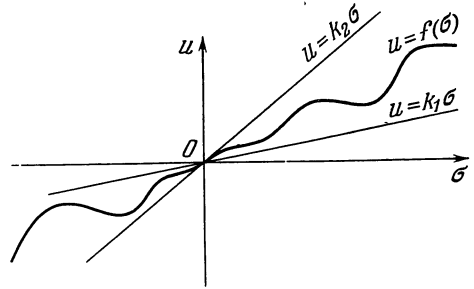


Рис. 9.48.

$$|\sigma(t)| = \left| \sigma(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right| > |\sigma(t_k)| - |M(t - t_k)| > \delta - \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \delta.$$

Но так как $f(\sigma)$ непрерывна и $f(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = 0$, при $M > |\sigma| > \frac{1}{2} \delta$, будем иметь $|f(\sigma)| > R > 0$. Отсюда, если $t_N \leq T < t_{N+1}$, то интеграл

$$\int_0^T f(t) \sigma(t) dt = \int_0^T |f(t)| |\sigma(t)| dt < \frac{R\delta^2}{4M} N$$

стремится к бесконечности вместе с T . А это противоречит неравенству (39) и, следовательно, $\sigma(t) \rightarrow 0$ вместе с $f(t)$.

Так как $f(t) \rightarrow 0$, то $|x(t)| \rightarrow 0$ в силу свойства (24), что и завершает доказательство теоремы.

Теорема Попова, доказанная в этом параграфе, допускает обобщение, которое мы проведем без доказательства, на случай, когда нелинейная характеристика $u = f(\sigma)$ целиком расположена в секторе между двумя линейными характеристиками $u = k_1\sigma$ и $u = k_2\sigma$ (рис. 9.48). Это означает, что нелинейная характеристика подчинена условию

$$k_1 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq k_2, \tag{41}$$

где k_1 и k_2 — произвольные действительные числа ($k_1 < k_2$).

Однако подстановкой $f_1(\sigma) = f(\sigma) - k_1(\sigma)$ исходную систему (3) можно преобразовать в систему такого же типа с нелинейностью вида $u = f_1(\sigma)$,

которая в силу (41) удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \frac{f_1(\sigma)}{\sigma} \leq k, \quad (42)$$

где $k = k_2 - k_1$.

Таким образом, задача с нелинейностью вида (41) элементарно сводится к задаче с нелинейностью вида

$$0 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq k. \quad (43)$$

Поэтому мы будем предполагать, что с самого начала имеет место это последнее условие (43).

В этом случае справедлива следующая теорема Попова.

Т е о р е м а. *Для того чтобы нелинейная система (1), (2), (3) была абсолютно устойчива при нелинейности (1), удовлетворяющей условию (43), достаточно, чтобы существовало такое действительное число q , при котором для всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} (1 + jq\omega) W(j\omega) - \frac{1}{k} < 0. \quad (44)$$

Легко видеть, что доказанная в этом параграфе теорема является частным случаем только что приведенной теоремы при $k = \infty$ или $1/k = 0$.

Если опять воспользоваться видоизмененной частотной характеристикой $W_*(j\omega)$, определенной равенством (13), то последнее достаточное условие абсолютной устойчивости (44) можно истолковать геометрически.

Действительно, условие (44) с учетом обозначений (13) можно записать в виде

$$X - qY - \frac{1}{k} < 0. \quad (45)$$

Но уравнение

$$X - qY - \frac{1}{k} = 0 \quad (46)$$

является уравнением прямой линии, проходящей через точку действительной оси с абсциссой $1/k$ и с угловым коэффициентом $1/q$. Эту прямую мы также будем называть *прямой Попова*. Прямая Попова разбивает всю плоскость на две полуплоскости. Неравенство (45) характеризует ту полуплоскость, которая лежит слева от прямой Попова. Условие (44) или (45) требует, чтобы видоизмененная частотная характеристика $W_*(j\omega)$ целиком лежала слева от прямой Попова.

Таким образом, мы приходим к геометрической формулировке теоремы Попова.

Для того, чтобы имела место абсолютная устойчивость системы (1), (2), (3) при условии (43), достаточно, чтобы в плоскости $W_(j\omega)$ можно было построить прямую, проходящую через точку действительной оси с абсциссой $1/k$ так, чтобы видоизмененная частотная характеристика $W_*(j\omega)$ вся лежала слева от этой прямой.*

Критерий Попова приводит к простым и изящным достаточным условиям абсолютной устойчивости для систем второго порядка общего вида. Действительно, рассмотрим систему второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \\ \sigma &= c_1x_1 + c_2x_2, \\ u &= f(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Мы потребуем, чтобы линейная часть этой системы была устойчивой, и в силу этого должны выполняться следующие необходимые и достаточные для этого условия:

$$A_1 = -a_{11} - a_{22} > 0, \quad A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (48)$$

Линейные уравнения (47) можно переписать в операторной форме: $px_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u$, $px_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$, $\sigma = c_1x_1 + c_2x_2$.

Исключая из этих уравнений x_1 и x_2 , легко найти передаточную функцию от u к $-\sigma$, которая будет равна

$$W(p) = \frac{B_0p + B_1}{p^2 + A_1p + A_2},$$

где $B_0 = -(b_1c_1 + b_2c_2)$, $B_1 = a_{11}b_2c_2 - a_{12}b_2c_1 - a_{21}b_1c_2 + a_{22}b_1c_1$. Отсюда комплексная частотная характеристика от u к $-\sigma$ будет иметь вид

$$W(j\omega) = \frac{jB_0\omega + B_1}{(A_2 - \omega^2) + jA_1\omega} = \frac{(jB_0\omega + B_1)(A_2 - \omega^2 - jA_1\omega)}{(A_2 - \omega^2)^2 + A_1^2\omega^2}.$$

Видоизмененная частотная характеристика

$$W_*(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

имеет соответственно действительную и мнимую части:

$$X = X(\omega) = \frac{B_1(A_2 - \omega^2) + B_0A_1\omega^2}{(A_2 - \omega^2)^2 + A_1^2\omega^2}, \quad Y = Y(\omega) = \frac{[B_0(A_2 - \omega^2) - B_1A_1]\omega^2}{(A_2 - \omega^2)^2 + A_1^2\omega^2}.$$

С осью X , т. е. при $Y = 0$, характеристика W_* всегда имеет общую начальную точку при $\omega = 0$ с абсциссой

$$X_0 = \frac{B_1}{A_2}$$

и может иметь вторую общую точку при

$$\omega^2 = \omega_1^2 = A_2 - \frac{B_1}{B_0} A_1,$$

если $B_0 \neq 0$. Абсцисса этой второй общей точки годографа $W_*(j\omega)$ с осью X как легко видеть, определяется по формуле

$$X_1 = \frac{B_0}{A_1}.$$

Рассмотрим тот случай, когда годограф $W_*(j\omega)$ имеет общую точку с осью X и абсцисса этой точки отрицательна. Если имеется только одна такая точка, то ее абсциссу обозначим через X_* . Если же имеются две такие точки с абсциссами X_0 и X_1 , то полагаем

$$X_* = \min(X_0, X_1).$$

Тогда угол $(0, k_*)$, где $k_* = 1/|X_*|$ является максимальным углом, при котором имеет место устойчивость при линейных характеристиках $u = f(\sigma) = h\sigma$; где $0 \leq h \leq k$.

Покажем теперь, что через точку с координатами $(X_*, 0)$ можно в плоскости (X, Y) провести такую прямую (опорную прямую), что весь годограф $W_*(j\omega)$ будет расположен слева от этой прямой. Рассмотрим сначала случай, когда у кривой $W_*(j\omega)$ имеются две общие точки с осью X . В этом случае в качестве искомой опорной прямой возьмем касательную к видоизмененной характеристике $W_*(j\omega)$ в точке $(X_*, 0)$.

Поскольку в рассматриваемом случае $n = 2$, то видоизмененная характеристика с любой прямой не может иметь более двух общих точек. Но любая

касательная к кривой $W_*(j\omega)$ имеет с ней «двойную» общую точку. Поэтому других общих точек с этой касательной видоизмененная характеристика уже не может иметь. Таким образом, видоизмененная характеристика располагается по одну сторону от любой своей касательной, т. е. является выпуклой кривой. По отношению к касательной, проведенной через точку $(X_*, 0)$, годограф $W_*(j\omega)$ располагается слева, так как слева находится его вторая общая точка с осью X .

Если же имеется только одна общая точка с осью X (при $w_1^2 = 0$), то вся видоизмененная характеристика располагается по одну сторону от оси X , и поскольку она расположена в конечной части плоскости (ибо мы исключили наличие корней характеристического уравнения разомкнутой системы

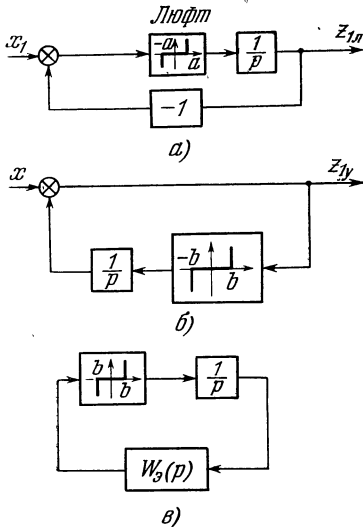


Рис. 9.49.

на мнимой оси), то искомую опорную прямую можно получить небольшим поворотом оси X вокруг точки $(X_*, 0)$. После этого прямую Попова получим из опорной прямой сколь угодно малым сдвигом вправо. Она будет проходить через точку действительной оси с абсциссой $1/(k_* - \epsilon)$, где ϵ — малое положительное число. В этом случае по теореме Попова будет иметь место абсолютная устойчивость в угле $[0, k - \epsilon]$. Если же $X_0 > 0$ и вторая точка пересечения кривой $W_*(j\omega)$ с осью X не существует либо $X_1 > 0$, то можно провести прямую Попова через начало координат, что соответствует $k = \infty$. Наконец, если $X_0 \geq 0, X_1 \geq 0$ (либо нет второй точки пересечения), то можно провести прямую Попова через любую точку положительной действительной полуоси и, следовательно, будет иметь место абсолютная устойчивость при любом секторе $[0, k]$, где k — конечное число.

Итак, если система (47) устойчива при любых линейных характеристиках $u = h\sigma$ ($0 \leq h \leq k$), то она абсолютно устойчива в угле $[0, k - \epsilon]$, где ϵ — сколь угодно малое положительное число.

При рассмотрении вопроса об абсолютной устойчивости нелинейных систем до сих пор мы предполагали, что нелинейные звенья в системе имеют однозначную характеристику. Однако, как мы видели выше, большое практическое значение имеют нелинейные звенья с неоднозначными характеристиками, как, например, звенья типа «люфт», «упор», неоднозначная релейная характеристика и т. д. Нелинейности типа «люфт» и «упор», часто встречаемые в системах управления и регулирования, не удовлетворяют рассмотренному выше условию (11) и требуют специального рассмотрения. Однако можно применить критерий Попова в данной выше формулировке, если воспользоваться эквивалентными схемами подобных нелинейностей, приведенными частично в § 1 настоящей главы (для характеристик типа «люфт», «упор» эквивалентные схемы даются ниже) и сводящие исследование к рассмотрению однозначной нелинейной характеристики. На рис. 9.49 показаны схемы, где нелинейность типа «люфт» или «упор» моделируется последовательным соединением звена с зоной нечувствительности, усилителя с большим коэффициентом усиления (теоретически бесконечным) и интегратора.

Заменяя нелинейность эквивалентной схемой, исходную систему, изображенную на рис. 9.44, б, можно заменить эквивалентной схемой, изобра-

женной на рис. 9.49, в, где $W_э(p)$ вычисляется по формуле

$$W_э(p) = W(p) + 1$$

для системы с люфтом и

$$W_э(p) = \frac{1}{W(p)+1}$$

для системы с упором.

Таким образом, общая передаточная функция линейной части системы $W_{пр}(p)$ равна

$$W_{пр}(p) = \frac{1}{p} W_э(p).$$

Из полученной эквивалентной схемы рис. 9.49в, видно, что для нелинейной системы с люфтом и упором нужно ставить задачу об абсолютной устойчивости стационарного множества положений равновесия $|x| \leq a$ или $|x| \leq b$, а не единственного положения равновесия.

Сформулируем теперь критерий абсолютной устойчивости для рассматриваемого класса систем, полученный А. В. Нетушилом.

1. Если все полюсы передаточной функции $W(p)$ линейной части исходной системы с люфтом или упором расположены в левой полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Re} p_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (49)$$

где p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — полюсы функции $W(p)$ и n — порядок линейной части системы, то для абсолютной устойчивости системы достаточно выполнения следующего неравенства для всех вещественных ω :

$$U(\omega) - \alpha \omega V(\omega) \geq 0, \quad (50)$$

где

$$U(\omega) = \operatorname{Re} W_{пр}(j\omega), \quad V(\omega) = \operatorname{Im} W_{пр}(j\omega),$$

а α — положительный параметр, который, в отличие от произвольного параметра в критерии Попова, удовлетворяет условию

$$-\frac{1}{\alpha} \neq p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (51)$$

2. Если $W(p)$ имеет один полюс, равный нулю, $p_1 = 0$, а остальные полюсы p_2, p_3, \dots, p_n расположены в левой полуплоскости, то для абсолютной устойчивости достаточно выполнения условия

$$\operatorname{Im} W_{пр}(j\omega) < 0 \quad (52)$$

для всех вещественных ω .

3. Если $W(p)$ имеет более одного полюса на мнимой оси, то система с люфтом структурно неустойчива.

Дадим геометрическую интерпретацию этих критериев. Используя уравнения для $W_э(p)$ и $W_{пр}(p)$, определим функцию $W_{пр}(j\omega)$. Пусть выполняются условия (49). Неравенство (50) выполняется тогда и только тогда, когда через начало координат комплексной плоскости можно провести такую прямую, что годограф видоизмененной функции $W_{*пр}(j\omega)$ окажется по правую сторону от этой прямой. При этом параметр $\alpha > 0$, характеризующий наклон этой прямой, должен удовлетворять условию (51).

При выполнении условия п. 2 для абсолютной устойчивости достаточно, чтобы годограф функции $W_{пр}(j\omega)$ располагался под вещественной осью.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию критериев абсолютной устойчивости непосредственно в терминах частотной характеристики $W(j\omega)$ линейной части исходной системы, когда имеется нелинейность типа «люфт» или «упор».

При выполнении условий (49) и отсутствия нулевых полюсов у $W(p)$ на основании равенств (38) и (39) можно показать, что запретной областью для годографа $W(j\omega)$ системы с люфтом является лишь нижний левый квадрант, ограниченный прямой, параллельной мнимой оси и проходящей через точку $(-1, 0)$, и вещественной отрицательной полуосью. Для системы с упором «запретным» является соответственно верхний левый квадрант.

При выполнении условия 2 условие (52) можно заменить условиями

$$\operatorname{Re} [W(j\omega) + 1] > 0 \quad (53)$$

или

$$\operatorname{Re} W(j\omega) > -1. \quad (54)$$

Таким образом, для системы с люфтом или упором, для которой $W(p)$ имеет один нулевой полюс, достаточным условием абсолютной устойчивости является требование, чтобы годограф $W(j\omega)$ располагался правее прямой, проходящей через точку $(-1, 0)$ и параллельной мнимой оси.

§ 6. Методы малого параметра (аналитические варианты)

Методы малого параметра дают возможность приближенно исследовать устойчивость нелинейных систем, определять амплитуды и частоты автоколебаний в системах, а также устойчивость этих автоколебаний (предельных циклов). Существуют различные варианты методов малого параметра, применяемые в радиотехнике и теории автоматического регулирования и имеющие более или менее широкие области применения. Наиболее ранними являются методы Пуанкаре, Ляпунова, Рэйли и Ван-дер-Поля. Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси и А. А. Андроновым был строго обоснован метод Ван-дер-Поля, развит метод Пуанкаре. Б. В. Булгаковым эти методы были распространены на системы высокого порядка. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов разработали принцип так называемого гармонического баланса, а К. Ф. Теодорчик — принцип энергетического баланса. Широкое применение находит метод Л. С. Гольдфарба, базирующийся на использовании принципа гармонического баланса. Этот метод относится уже к графо-аналитическим вариантам, которыми в дальнейшем занимались также К. Ф. Теодорчик, Е. П. Попов и др.

В первой фазе развития методов малого параметра рассматривались нелинейные системы второго порядка. Например, уравнение лампового генератора может быть приведено к виду (для относительного времени)

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu\varphi\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right). \quad (1)$$

Здесь φ — нелинейная функция x и $\frac{dx}{d\tau} = \dot{x}$, а μ — некоторое постоянное число, считающееся малым по величине. Это и есть малый параметр. Если $\mu = 0$, то уравнение (1) вырождается в простое линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0, \quad (2)$$

имеющее очевидное решение

$$x = x_0 = A \cos \tau, \quad (3)$$

где амплитуда A зависит от начальных условий, а частота $\omega = 1$.

Между тем при $\mu \neq 0$, как следует, например, из эксперимента, получается автоколебание вида

$$x \approx A \cos \omega\tau, \quad (4)$$

где A — определенная амплитуда, *независимая* от начальных условий, а частота ω близка к единице, но несколько от нее отличается.

Автоколебание, как следует из формулы (4), примерно синусоидально, если μ невелико.

Уравнение (1) при $\mu = 0$ имеет известное решение x_0 (3). При малом μ , не равном нулю, естественно представить это решение в форме, близкой к x_0 , а именно

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \quad (5)$$

где x_1, x_2 и т. д. — некоторые функции времени. Если эти функции найдены, то, ограничившись некоторым числом членов ряда (5), получаем приближенное решение, обращающееся в частном случае $\mu = 0$ в функцию $x_0(t)$ — решение уравнения линейной консервативной системы (2).

Методы малого параметра имеют принципиальное ограничение — они и качественно и количественно передают хорошо черты явления лишь в том случае, когда система в известном смысле мало отличается от консервативной, имеющей решение, соответствующее значению $\mu = 0$. Если система сильно отличается от исходной, то методы малого параметра уже не описывают достаточно точно происходящие явления и могут даже дать качественно неверный результат.

Предположим, что функция φ является аналитической относительно двух переменных x и $dx/d\tau$, это означает, что функция $\varphi(x, \dot{x})$ может быть разложена в бесконечный ряд в окрестности значений $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$. Если $x = x_0 + h$ и $\dot{x} = \dot{x}_0 + \delta$, то

$$\begin{aligned} \varphi(x, \dot{x}) = \varphi(x_0, \dot{x}_0) + \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} h + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, \dot{x})}{\partial x^2} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} h^2 + \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, \dot{x})}{\partial x^2} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \delta^2 + \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, \dot{x})}{\partial x \partial \dot{x}} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} h\delta + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, из определений h и δ из выражения (5) следует

$$\left. \begin{aligned} h &= \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \\ \delta &= \mu \dot{x}_1 + \mu^2 \dot{x}_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если подставим выражения (7) в формулу (6), а последнюю вместе с выражением (5) в уравнение (1), то получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) = \\ = \mu \varphi(x_0, \dot{x}_0) + \mu^2 \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} x_1 + \mu^2 \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \dot{x}_1 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

При достаточно малых μ , как можно доказать, ряд в правой части этого уравнения будет равномерно сходящимся. Так как решение x является аналитической функцией μ , то и левая часть уравнения (1), т. е. $\ddot{x} + x$, также есть аналитическая функция μ . Так как две аналитические функции равны друг другу только в том случае, когда равны соответственные коэффициенты их разложений, то можно приравнять друг другу коэффициенты

при одинаковых степенях μ в правой и левой частях уравнения (8). Произведя эту операцию, получаем бесконечную последовательность уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= \varphi(x_0, \dot{x}_0), \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} x_1 + \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \dot{x}_1, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, определение неизвестных функций времени x_0, x_1, x_2, \dots ряда (5) может быть проведено с помощью последовательного интегрирования ряда линейных дифференциальных уравнений (9) с постоянными коэффициентами и с правой частью. Первое из уравнений (9) дает при начальных условиях $x_0 = A$ и $\dot{x}_0 = 0$

$$x_0 = A \cos \tau.$$

Тогда второе из уравнений (9) может быть написано в виде

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \varphi(A \cos \tau - A \sin \tau).$$

Находя отсюда (при нулевых начальных условиях) x_1 как функцию τ , подставляем эту функцию в правую часть следующего уравнения (9) и т. д. Казалось бы, что, действуя таким образом, нетрудно найти достаточно большое число членов разложения (5) и, следовательно, хорошее приближение к истинному решению. Однако в действительности в большинстве случаев последовательность уравнений (9) дает ряд, весьма неудобный и недостаточно хорошо отражающий ход действительной функции для больших значений τ .

Рассмотрим для пояснения конкретный пример. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu(a - bx^2) \frac{dx}{d\tau}. \quad (10)$$

Это — уравнение лампового генератора при мягком режиме возбуждения автоколебаний.

В данном случае

$$\varphi(x, \dot{x}) = (a - bx^2) \dot{x}. \quad (11)$$

Последовательность уравнений (9) принимает вид при начальных условиях $x_0 = A, \dot{x}_0 = 0, x_i = \dot{x}_i = 0 (i = 1, 2, \dots)$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= (a - bA^2 \cos^2 \tau) (-A \sin \tau) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и т. д.

Уравнение для определения x_1 можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \left(\frac{bA^3}{4} - aA \right) \sin \tau + \frac{bA^3}{4} \sin 3\tau = M \sin \tau + N \sin 3\tau. \quad (13)$$

При любом A величина M , вообще говоря, не равна нулю. Уравнение (13) изображает воздействие внешней силы вида $M \sin \tau + N \sin 3\tau$ на консервативную линейную систему, например на идеальный колебательный контур или идеальный резонатор, резонирующий на частоту $\omega = 1$. Так как действующая сила имеет в своем составе компоненту $M \sin \tau$ как раз резонансной частоты, то эта компонента будет раскачивать систему и вызовет в ней

нарастающие колебания типа $M\tau \cos \tau$. Итак, решение уравнения (13) будет иметь вид

$$x_1(\tau) = \varphi_{11}(\tau) + \tau\varphi_{12}(\tau),$$

где φ_{11} и φ_{12} — периодические функции. С течением времени амплитуда этого колебания беспредельно нарастает. Поэтому будут беспредельно нарастать и амплитуды колебания приближенного решения

$$x_{\text{пр}} = x_0 + \mu x_1 = A \cos \tau + \mu\varphi_{11}(\tau) + \mu\tau\varphi_{12}(\tau).$$

Отсюда ясно, что данное равенство пригодно только для небольших значений τ , а для больших значений времени уже не отражает точно решения.

Находя следующее приближение с учетом x_2 , можно тем же способом получить ряд

$$x_{\text{пр}} = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 = A \cos \tau + \mu\varphi_{11}(\tau) + \mu\tau\varphi_{12}(\tau) + \mu^2\varphi_{21}(\tau) + \mu^2\tau\varphi_{22}(\tau) + \mu^2\tau^2\varphi_{23}(\tau) + \dots, \quad (14)$$

который будет достаточно точно отражать ход действительной функции уже на большом участке τ , чем первое приближение, но все же совершенно непригоден для исследования стационарных режимов и их установления. Члены, содержащие множители τ , τ^2 и т. д., называются вековыми или секулярными. Они появляются отнюдь не вследствие какой-либо ошибки в составлении уравнений (9), ряд (14) также не является ошибочным. Однако практическая непригодность ряда (14) есть следствие того, что само нулевое приближение $A \cos \tau$ не отражает известных черт действительного решения уравнения.

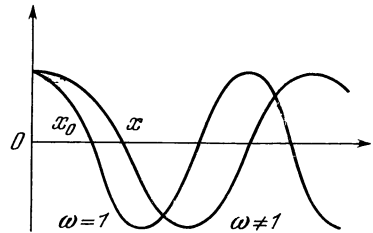


Рис. 9.50.

Если мы хотим найти периодическое решение уравнения (10), то должны потребовать, чтобы в уравнении (13) была равна нулю амплитуда той силы, которая находится в резонансе с системой. Поэтому условие периодичности имеет вид

$$\frac{bA^3}{4} - aA = 0.$$

Отсюда $A = 0$ или $A = 2\sqrt{a/b}$.

Это условие определяет амплитуду A . Но следующее уравнение для x_2 дает другое условие для A , вообще говоря, несовместное с предыдущим. Поэтому при нахождении периодических решений следует с самого начала видоизменить рассуждения.

Периодическое решение может изображаться бесконечным рядом (14) в том случае, если оно отличается не только несинусоидальностью, но, самое главное, — частотой от решения нулевого приближения $A \cos \tau$.

Действительно, из рис. 9.50 видно, что если частоты колебаний x и x_0 разнятся на любую сколь угодно малую величину, то по прошествии значительного промежутка времени τ кривые x и x_0 могут сильно разойтись. Вековые члены при нахождении периодического решения возникают потому, что в действительности частота колебания $\omega \neq 1$, а мы хотим ее выразить в виде ряда, составленного из функций $\sin n\tau$ и $\cos n\tau$.

Метод приближенного решения уравнения этого типа, данный Ляпуновым и независимо Рэйли, состоит в том, чтобы положить нулевое приближение имеющим другую частоту $\omega \neq 1$. Однако, поскольку при $\mu = 0$ должно быть $\omega = 1$ или $\omega^2 = 1$, мы должны принять частоту зависящей от μ , т. е.

$$\omega^2 = \omega^2(\mu) = 1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots, \quad (15)$$

где h_1, h_2 и т. д. — частотные поправки. Из формулы (15) следует в соответствии со сказанным выше, что при $\mu = 0$ величина $\omega^2 = 1$.

Чтобы ввести член ω^2 в уравнение (4), перепишем последнее в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x + \mu \varphi(x, \dot{x}). \quad (16)$$

Подставив ряд (5) и выражение (15) в уравнение (16), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + \omega^2 x_0 + \mu \omega^2 x_1 + \mu^2 \omega^2 x_2 + \dots = \\ = \mu h_1(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) + \mu^2 h_2(x_0 + \mu x_1 + \dots) + \\ + \mu \left[\varphi(x_0, \dot{x}_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 (\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right)_0 (\mu \dot{x}_1 + \mu^2 \dot{x}_2 + \dots) \right], \end{aligned}$$

где в качестве сокращенного обозначения принято

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 = \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}}$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right)_0 = \left[\frac{\partial \varphi(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right]_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}}.$$

Отделив и приравняв друг к другу члены при одинаковых степенях μ в правой и левой частях равенства, получаем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= h_1 x_0 + \varphi(x_0, \dot{x}_0), \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= h_1 x_1 + h_2 x_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right)_0 \dot{x}_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и т. д.

Решая эти уравнения, следует помнить, что сама величина ω неизвестна и приближенно определяется из выражения (15) все точнее и точнее, по мере того, как мы узнаем все большее число величин h_1, h_2, \dots, h_n . Величинами же h_i следует распорядиться так, чтобы пропали вековые члены по всей цепочке уравнений. Это и будет означать в случае нахождения периодического решения, что частота колебания ω выбрана правильно.

Рассмотрим в качестве примера уравнение (10) и найдем его периодическое решение (предельный цикл). Очевидно, существование предельного цикла возможно не при всяких начальных условиях. Поэтому естественно ожидать, что при решении мы получим отбор возможных значений амплитуды нулевого приближения A , и, кроме того, сами начальные условия становятся функциями μ , которые также можно разложить в ряды:

$$\begin{aligned} x|_{\tau=0} &= x_0|_{\tau=0} + \mu x_1|_{\tau=0} + \mu^2 x_2|_{\tau=0} + \dots \\ \dot{x}|_{\tau=0} &= \dot{x}_0|_{\tau=0} + \mu \dot{x}_1|_{\tau=0} + \mu^2 \dot{x}_2|_{\tau=0} + \dots \end{aligned}$$

Начальные условия связаны между собой уравнением предельного цикла $\psi(x, \dot{x}) = 0$. Поскольку предельный цикл является в общем случае не точкой, а траекторией, т. е. множеством точек, в начальных условиях имеется определенная свобода. Например, часто мы можем положить произвольно $x|_{\tau=0} = 0$ либо $\dot{x}|_{\tau=0} = 0$.

Для уравнения (10), если зададим произвольно

$$\dot{x}_0|_{\tau=0} = 0, \quad x_0|_{\tau=0} = A,$$

где A — еще неизвестная постоянная, цепочка уравнений (17) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= h_1 A \cos \omega \tau + (a - bA^2 \cos^2 \omega \tau) (-A\omega \sin \omega \tau), \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= h_1 x_1 + h_2 A \cos \omega \tau + bA^2 \sin 2\omega \tau x_1 + (a - bA^2 \cos^2 \omega \tau) \dot{x}_1. \end{aligned} \right\} (18)$$

Второе из этих уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = h_1 A \cos \omega \tau + A\omega \left(\frac{bA^2}{4} - a \right) \sin \omega \tau + \frac{bA^3 \omega}{4} \sin 3\omega \tau. \quad (19)$$

Очевидно, вековой член пропадет, если положим $h_1 = 0$ и

$$\frac{bA^2}{4} - a = 0,$$

откуда

$$A = 2 \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (20)$$

Выражение (20) определяет величину A . Таким образом, из уравнения первого приближения получаем определенную величину амплитуды нулевого приближения. При этом само уравнение (19) первого приближения принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{bA^3 \omega}{4} \sin 3\omega \tau.$$

Общее решение этого уравнения периодическое:

$$x_1 = C_1 \sin \omega \tau + D_1 \cos \omega \tau + \frac{bA^3 \omega}{32\omega} \sin 3\omega \tau. \quad (21)$$

Здесь C_1 и D_1 — еще неизвестные постоянные.

Третье из уравнений (18) напомним с учетом (21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= h_2 A \cos \omega \tau + \frac{b^2 A^5}{64\omega} \cos \omega \tau = \\ &= -\frac{b^2 A^5}{64\omega} \cos 5\omega \tau + \frac{3abA^3}{32} \cos 3\omega \tau - \frac{3b^2 A^5}{64} \cos 3\omega \tau - \\ &- \frac{3b^2 A^5}{64} \cos \omega \tau - \frac{3b^2 A^5}{64} \cos 5\omega \tau + \left(\frac{bA^2 C_1}{2} + aC_1 \omega - \frac{3bA^2 C_1 \omega}{4} \right) \cos \omega \tau + \\ &+ \left(\frac{bA^2 D_1}{2} - aD_1 \omega + \frac{bA^2 D_1 \omega}{4} \right) \sin \omega \tau - \left(\frac{bA^2 C_1}{2} + \frac{bA^2 C_1 \omega}{4} \right) \cos 3\omega \tau + \\ &+ \left(\frac{D_1 bA^2}{2} + \frac{D_1 bA^2 \omega}{4} \right) \sin 3\omega \tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Чтобы пропали вековые члены, необходимо выполнение равенств

$$\left. \begin{aligned} h_2 A + \frac{b^2 A^5}{64\omega} - \frac{3b^2 A^5}{64} + \frac{bA^2 C_1}{2} + aC_1 \omega - \frac{3bA^2 C_1 \omega}{4} &= 0, \\ \frac{bA^2 D_1}{2} - aD_1 \omega + \frac{bA^2 D_1 \omega}{4} &= 0. \end{aligned} \right\} (23)$$

Для определения неизвестных постоянных можно привлечь также начальное условие $\dot{x}_1 |_{\tau=0} = 0$, так как $\dot{x} |_{\tau=0} = 0$ и, следовательно, можно положить для всех \dot{x}_i начальное значение равным нулю. Из равенства (13) находим, полагая $\dot{x}_1 |_{\tau=0} = 0$,

$$C_1 \omega + \frac{3bA^3}{32} = 0. \quad (24)$$

Отсюда определим

$$C_1 = -\frac{3bA^3}{32\omega}. \quad (25)$$

Второе из уравнений (23), полагая $\omega^2 = 1 + \mu^2 h_2 \approx 1$, можно переписать в виде

$$D_1 \left(\frac{3bA^2}{4} - a \right) = 0. \quad (26)$$

Так как $A^2 = \frac{4a}{b}$, то $\frac{3bA^2}{4} - a \neq 0$, и отсюда следует

$$D_1 = 0. \quad (27)$$

Поправка h_2 определяется из первого уравнения (23)

$$h_2 = \frac{bA^3}{32} \left(\frac{Ab}{4} + 3a \right). \quad (28)$$

Итак, частота колебания с точностью до второго приближения вычисляется по формуле

$$\omega^2 \approx 1 + h_2 \mu^2 = 1 + \frac{\mu^2 b A^3}{32} \left(\frac{Ab}{4} + 3a \right) = 1 + \frac{(\mu a)^2}{8} \left(1 + 6 \sqrt{\frac{a}{b}} \right). \quad (29)$$

а величина x изобразится с точностью до первого приближения выражением

$$\begin{aligned} x \approx x_0 + \mu x_1 &= A \cos \omega t - \frac{\mu b A^3}{32\omega} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) \approx \\ &\approx 2 \sqrt{\frac{a}{b}} \cos \omega t - \frac{\mu a}{4\omega} \sqrt{\frac{a}{b}} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t). \end{aligned} \quad (30)$$

Итак, условие отсутствия вековых членов само по себе приводит к периодическому решению.

Метод малого параметра можно применить и к системам, движение которых описывается уравнениями высокого порядка. Рассмотрим вновь в качестве примера уравнения самолета с автопилотом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} &= -N\delta, \\ \dot{\delta} &= F \left(\varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{\delta}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Положим $\psi = \varphi + \dot{\varphi} - \frac{\delta}{a}$; из этого уравнения выразим δ через ψ и подставим $\delta = \delta(\varphi, \dot{\varphi}, \psi)$ в уравнения (31), после чего напомним вспомогательную систему уравнений (при $\mu = 1$ она обращается в систему уравнений (31)).

$$\left. \begin{aligned} [p^2 + (M + Na\beta)p + Na]\varphi - Na\psi &= 0, \\ -a(\beta p^2 + p)\varphi + (ap + h)\psi &= \mu [h\psi - F(\psi)]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Здесь p — оператор дифференцирования, h — некоторая «средняя» крутизна характеристики $F(\psi)$ (рис. 9.51).

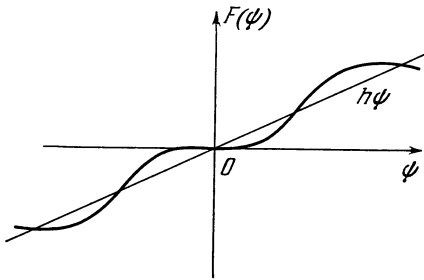


Рис. 9.51.

Рассмотрим сначала линейную систему, получаемую из уравнений (32) при $\mu = 0$. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 + (M + Na\beta)p + Na & -Na \\ -a\beta p^2 - ap & ap + h \end{vmatrix} = \\ = ap^3 + (Ma + h)p^2 + h(M + Na\beta)p + Nah = 0. \quad (33)$$

Единственное условие устойчивости для этой системы имеет вид

$$(Ma + h)(M + Na\beta) - a^2N > 0. \quad (34)$$

Когда это неравенство превращается в равенство, то получаем условие границы устойчивости. Пусть это условие имеет место при $a = a^*$. Тогда

$$(Ma^* + h)(M + Na^*\beta) - Na^{*2} = 0, \quad (35)$$

$$a^* = \frac{1}{2N(1 - M\beta)}(M^2 + M\beta h + R), \quad (36)$$

где

$$R = +\sqrt{(M^2 - N\beta h)^2 + 4MNh}. \quad (37)$$

Пусть $1 - M\beta > 0$. Тогда $a^* > 0$. Следовательно, в устойчивой системе должно быть $a < a^*$ (т. е. жесткая обратная связь не должна быть меньше некоторой определенной величины).

Если $a = a^*$, то характеристическое уравнение системы, как нетрудно показать, получает вид

$$a^* \left(p + \frac{Na^* + h}{a^*} \right) \left[p^2 + \frac{h(M + Na^*\beta)}{a^*} \right] = 0.$$

Один корень этого уравнения действителен и отрицателен:

$$p_1 = -\frac{Na^* + h}{a^*} < 0.$$

Другие два корня — чисто мнимые:

$$p_{2,3} = \pm j\omega_0$$

и

$$\omega_0^2 = \frac{h(M + Na^*\beta)}{a^*} = N(1 - M\beta)a^* - M^2. \quad (38)$$

Этой паре чисто мнимых корней отвечает периодическое решение системы φ^* , ψ^* , причем

$$(p^2 + \omega_0^2)\varphi^* = (p^2 + \omega_0^2)\psi^* = 0. \quad (39)$$

Нетрудно убедиться в том, что, положив

$$\psi^* = A \sin \omega_0 t, \quad (40)$$

где A — неопределенная амплитуда, зависящая от начальных условий, получаем φ^* в виде

$$\varphi^* = A \frac{-\omega_0 \cos \omega_0 t + M \sin \omega_0 t}{(1 - M\beta)(M + Na^*\beta)}. \quad (41)$$

В правильности этой формулы можно убедиться, например, подставив ее в уравнения (32) при $\mu = 0$.

Теперь наметим ход решения нелинейной системы (32). Если параметр μ сделаем не равным нулю, но достаточно малым и одновременно несколько изменим величину a (ведь при заданных значениях параметров $a \neq a^*$), то может оказаться, что у полученной нелинейной системы, достаточно

близкой к «порождающей» линейной системе, окажется периодическое решение, достаточно близкое к одному из периодических решений «порождающей» системы. При $\mu \rightarrow 0$ периодическое решение нелинейной системы, т. е. предельный цикл, стремится к некоторому периодическому решению «порождающей» линейной системы с определенной величиной A . Поэтому, если μ достаточно мало, то решение нелинейной системы можно с достаточной точностью считать синусоидальным. Положим это решение в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A \sin \omega t, \\ \varphi &= B \sin \omega t + C \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

и пусть $a \neq a^*$, но достаточно близко к a^* . Так как при $\mu = 0$ решение (42) должно вырождаться в равенства (40) и (41), то

$$\left. \begin{aligned} (B)_{\mu=0} &= \frac{AM}{(1-M\beta)(M+Na^*\beta)} = A\lambda_1, \\ (C)_{\mu=0} &= \frac{A\omega_0}{(1-M\beta)(M+Na^*\beta)} = A\lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

При $\mu = 0$ должны удовлетворяться равенства $a = a^*$ и $\omega^2 = \omega_0^2$. При $\mu \neq 0$, но достаточно малом, решение имеет вид формул (42), но амплитуды B и C зависят от μ , т. е.

$$B = B(\mu), \quad C = C(\mu).$$

Кроме того, $a = a(\mu)$ и $\omega^2 = \omega^2(\mu)$ (частота периодического решения, как указывалось выше, зависит от μ). Разлагая эти функции в ряды, учитывая равенства (43) и ограничиваясь членами первой степени μ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} B &= A(\lambda_1 + \mu\varepsilon_1), \\ C &= A(\lambda_2 + \mu\varepsilon_2), \\ \omega^2 &= \omega_0^2(1 + \mu\delta_1), \\ a &= a^*(1 - \mu w). \end{aligned} \right\} \quad [(44)$$

При $\mu = 0$ эти выражения принимают значения, соответствующие «порождающей» системе. Величины ε_1 , ε_2 , δ_1 необходимо определить; величина w задается, так как она определяет произвольное небольшое изменение $a^*\mu w$ значения коэффициента жесткой обратной связи. Если формулы (42) являются приближенным периодическим решением уравнений (32), то последние должны удовлетворяться при подстановке в них формул (42) и учете только членов, линейно зависящих от μ . Производя эту подстановку, учитывая выражения (44) и тождество $p^2\varphi = -\omega^2\varphi$, находим выражение

$$\begin{aligned} [-\omega^2 + (M + Na\beta)p + Na](B \sin \omega t + C \cos \omega t) - NaA \sin \omega t = 0, \\ - (a\beta\omega^2 + ap)(B \sin \omega t + c \cos \omega t) + (ap + h)A \sin \omega t = \\ = \mu [hA \sin \omega t - F(A \sin \omega t)] \end{aligned}$$

или, сокращая на A , так как исследуется периодическое движение, причем $A \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} -\omega_0^2(1 + \mu\delta_1) + [M + N\beta a^*(1 - \mu w)]p + \\ + Na^*(1 - \mu w)[(\lambda_1 + \mu\varepsilon_1) \sin \omega t + (\lambda_2 + \mu\varepsilon_2) \cos \omega t] - Na^*(1 - \mu w) \sin \omega t = 0, \\ -[\beta a^*\omega_0^2(1 - \mu w)(1 + \mu\delta_1) + a^*(1 - \mu w)p][(\lambda_1 + \mu\varepsilon_1) \sin \omega t + (\lambda_2 + \mu\varepsilon_2) \cos \omega t] + \\ + [a^*(1 - \mu w)p + h] \sin \omega t = \mu \left[h \sin \omega t - \frac{F(A \sin \omega t)}{A} \right]. \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ уравнения должны тождественно удовлетворяться; поэтому все члены, при которых нет множителя μ , выпадают из уравнений. Разлагая $\frac{F(A \sin \omega t)}{A}$ в ряд Фурье и ограничиваясь членом $\sin \omega t$ (так как функция $F(\psi)$ нечетная, то амплитуда члена с косинусом ωt равна нулю), получим, полагая согласно (44), что $\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\mu \delta_1}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} & (-\omega_0^2 - \mu \omega_0^2 \delta_1 + Na^* - \mu Na^* w) [(\lambda_1 + \mu \varepsilon_1) \sin \omega t + (\lambda_2 + \mu \varepsilon_2) \cos \omega t] + \\ & + [(M + N\beta a^*) - \mu N\beta a^* w] \left[(\lambda_1 + \mu \varepsilon_1) \omega_0 \left(1 + \frac{\mu \delta_1}{2}\right) \cos \omega t - \right. \\ & \quad \left. - (\lambda_2 + \mu \varepsilon_2) \omega_0 \left(1 + \frac{\mu \delta_1}{2}\right) \sin \omega t \right] - Na^* \sin \omega t + \mu Na^* w \sin \omega t = 0, \\ & - [\beta a^* \omega_0^2 + \mu (\delta_1 - w) \beta a^* \omega_0^2] [(\lambda_1 + \mu \varepsilon_1) \sin \omega t + (\lambda_2 + \mu \varepsilon_2) \cos \omega t] + \\ & + [a^* - \mu a^* w] \left[\omega_0 (\lambda_1 + \mu \varepsilon_1) \left(1 + \frac{\mu \delta_1}{2}\right) \cos \omega t - \omega_0 (\lambda_2 + \mu \varepsilon_2) \left(1 + \frac{\mu \delta_1}{2}\right) \sin \omega t \right] + \\ & + h \sin \omega t + (a^* - \mu a^* w) \omega_0 \left(1 + \frac{\mu \delta_1}{2}\right) \cos \omega t = \\ & = \mu \left[h \sin \omega t - \frac{1}{\pi A} \int_{-\pi}^{+\pi} F(A \sin u) \sin u \, du \sin \omega t \right]. \end{aligned}$$

Приравнивая друг другу амплитуды синусоид и косинусоид в правой и левой частях и ограничиваясь лишь членами с первой степенью μ , получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } & -\omega_0^2 \delta_1 \lambda_1 - Na^* w \lambda_1 - \varepsilon_1 \omega_0^2 + Na^* \varepsilon_1 - \\ & - (M + N\beta a^*) \left(\varepsilon_2 \omega_0 + \frac{\omega_0 \delta_1 \lambda_2}{2} \right) + N\beta a^* w \omega_0 \lambda_2 + Na^* w = 0; \\ \text{б) } & (-\omega_0^2 + Na^*) \varepsilon_2 + (-\omega_0^2 \delta_1 - Na^* w) \lambda_2 + \\ & + (M + N\beta a^*) \left(\varepsilon_1 \omega_0 + \frac{\omega_0 \delta_1 \lambda_1}{2} \right) - N\beta a^* w \omega_0 \lambda_1 = 0; \\ \text{в) } & -(\delta - w) \beta a^* \omega_0^2 \lambda_2 - \beta a^* \omega_0^2 \varepsilon_2 + a^* \left(\varepsilon_1 \omega_0 + \frac{\omega_0 \delta_1 \lambda_1}{2} \right) - \\ & - a^* w \omega_0 \lambda_1 + \omega_0 \left(\frac{a^* \delta_1}{2} - a^* w \right) = 0; \\ \text{г) } & -\beta a^* \omega_0^2 \varepsilon_1 - (\delta - w) \beta a^* \omega_0^2 \lambda_1 + \\ & + a^* w \omega_0 \lambda_2 - a^* \left(\varepsilon_2 \omega_0 + \frac{\omega_0 \delta_1 \lambda_2}{2} \right) - h + \frac{1}{\pi A} \int_{-\pi}^{+\pi} F(A \sin u) \sin u \, du = 0. \end{aligned} \right\} (45)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -\omega_0^2 + Na^*, & P_2 &= \omega_0 (M + N\beta a^*), & P_3 &= a^* \omega_0, & P_4 &= -\beta a^* \omega_0^2, \\ Q_1 &= -(M + N\beta a^*) \omega_0, & Q_2 &= Na^* - \omega_0^2, & Q_3 &= -\beta a^* \omega_0^2, & Q_4 &= -a^* \omega_0, \\ R_1 &= -\omega_0^2 \lambda_1 + (M + N\beta a^*) \frac{\omega_0 \lambda_2}{2}, & R_2 &= -\omega_0^2 \lambda_2 + (M + N\beta a^*) \frac{\omega_0 \lambda_1}{2}, \\ R_3 &= \frac{\omega_0 a^*}{2} + \frac{\omega_0 a^* \lambda_1}{2} - \beta a^* \omega_0^2 \lambda_2, & R_4 &= -\left(\beta a^* \omega_0^2 \lambda_1 + \frac{\omega_0 \lambda_2}{2} a^* \right), \\ S_1 &= Na^* w (1 - \lambda_1) + Na^* w \beta \omega_0 \lambda_2, & S_2 &= -Na^* w (\lambda_2 + \beta \omega_0 \lambda_1), \\ S_3 &= w \beta a^* \omega_0^2 \lambda_2 - a^* w \omega_0 \lambda_1 - a^* w \omega_0 = a^* w \omega_0 (\beta \omega_0 \lambda_2 - \lambda_1 - 1), \\ S_4 &= w \beta a^* \omega_0^2 \lambda_1 + a^* w \omega_0 \lambda_2 - h = a^* w \omega_0 (\lambda_2 + \beta \omega_0 \lambda_1) - h. \end{aligned} \right\} (46)$$

При новых обозначениях уравнения (45) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \varepsilon_1 + Q_1 \varepsilon_2 + R_1 \delta_1 + S_1 &= 0, \\ P_2 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_2 + R_2 \delta_1 + S_2 &= 0, \\ P_3 \varepsilon_1 + Q_3 \varepsilon_2 + R_3 \delta_1 + S_3 &= 0, \\ P_4 \varepsilon_1 + Q_4 \varepsilon_2 + R_4 \delta_1 + S_4 - \frac{f(A)}{A} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Здесь

$$f(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(A \sin u) \sin u \, du. \quad (48)$$

Исключая три неизвестных ε_1 , ε_2 и δ_1 , получаем уравнение для четвертого неизвестного A в виде

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 & S_4 - \frac{f(A)}{A} \end{vmatrix} = 0. \quad (49)$$

Это уравнение проще всего получить следующим образом. Представим себе величины S_1 , S_2 , S_3 и $S_4 - \frac{f(A)}{A}$ в уравнениях (47) умноженными на z , причем $z = 1$. Тогда, если считать A заданным, четыре уравнения с четырьмя неизвестными ε_1 , ε_2 , δ_1 и z могут иметь ненулевое решение только тогда, когда определитель системы равен нулю. Приравняв его нулю, получим равенство (49).

Уравнение (49) можно преобразовать следующим образом:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 & S_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f(A)}{A} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 & S_4 \end{vmatrix} = \frac{f(A)}{A} \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Положим

$$q = \frac{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \\ P_4 & Q_4 & R_4 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix}}. \quad (51)$$

Тогда уравнение (50) принимает вид

$$f(A) = qA. \quad (52)$$

После громоздких преобразований можно получить приближенное выражение для q следующего вида:

$$q \approx h - \frac{w}{2MN} [4MNH + (M^2 - N\beta h)^2 + (M^2 - N\beta h) R].$$

Уравнение (52) служит для нахождения A . Решение этого уравнения можно интерпретировать геометрически как координату A_0 точки пересечения прямой $y = qA$ и кривой $y = f(A)$ (рис. 9.52). Кривая весьма похожа по очертанию на кривую $F(\psi)$.

Получаются либо две точки пересечения цифра 1 (не считая $A = 0$), либо одна в граничном случае цифра 2, либо ни одной (последний случай соответствует невозможности автоколебаний). При $q < 0$ прямая $y = qA$ занимает положение, указанное на рис. 9.52 цифрой 3. При этом автоколебания невозможны, и, как увидим ниже, система получается устойчивой.

Для оценки устойчивости предельных циклов, полученных в результате решения уравнения (52), необходимо написать уравнения для движения, несколько отклоняющегося от периодического, так называемого «возмущенного» движения. Пусть в результате решения уравнения (52) найдена какая-либо система периодических функций φ и ψ ; соседние возмущенные движения изобразятся функциями времени $\varphi + \delta\varphi$ и $\psi + \delta\psi$, где $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ достаточно малы (поэтому можно пренебречь их высшими степенями). Разложим $F(\psi + \delta\psi)$ в степенной ряд

$$F(\psi + \delta\psi) = F(\psi) + \delta\psi F'(\psi) + \dots$$

Здесь не выписаны члены, содержащие высшие степени $\delta\psi$, которые для достаточно малых отклонений $\delta\psi$ можно отбросить. В этом выражении ψ означает известную периодическую функцию. Подставив разложение $F(\psi + \delta\psi)$, а также $\varphi + \delta\varphi$ и $\psi + \delta\psi$ вместо φ и ψ в уравнения (33) с учетом того, что φ и ψ — решения этого уравнения, получим так называемые уравнения в вариациях для малых отклонений $\delta\varphi$ и $\delta\psi$:

$$\left. \begin{aligned} [p^2 + (M + N\alpha\beta)p + Na] \delta\varphi - Na\delta\psi &= 0, \\ -a(\beta p^2 + p) \delta\varphi + (ap + h + h_1) \delta\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Здесь

$$h_1 = \mu [F'(\psi) - h].$$

Уравнения (53) являются линейными уравнениями, но не с постоянными, а с периодическими коэффициентами, так как параметр h_1 зависит от $F'(\psi)$; поскольку ψ есть известная нам периодическая функция времени, постольку $F'(\psi)$ и h_1 являются также известными нам периодическими функциями времени.

Строгое исследование уравнений (53) весьма сложно. Поэтому, следуя Б. В. Булгакову, найдем среднее значение функции $F'(\psi) = F'(A \sin \omega t)$ и отбросим переменную составляющую величины h_1 . Тогда уравнение (53) приближенно можно изобразить в виде уравнения с постоянными коэффициентами. Подобный метод дает приближенно правильные результаты в случае не слишком большой модуляции параметра h_1 , если переменная составляющая по амплитуде не больше постоянной составляющей.

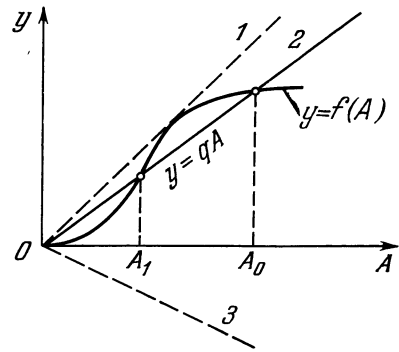


Рис. 9.52.

Среднее значение функции $F'(A \sin u)$ будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F'(A \sin u) du &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F'(A \sin u) (\cos^2 u + \sin^2 u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{A} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos u F'(A \sin u) d(A \sin u) + \frac{d}{dA} \int_{-\pi}^{+\pi} F(A \sin u) \sin u du \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{A} \cos u F'(A \sin u) \int_{-\pi}^{+\pi} + \left(\frac{d}{dA} + \frac{1}{A} \right) \int_{-\pi}^{+\pi} F(A \sin u) \sin u du \right] = \\ &= \frac{1}{2A} \frac{d}{dA} [Af(A)]. \end{aligned}$$

Выражение $f(A)$ следует взять из формулы (48). Непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что

$$\frac{1}{2A} \frac{d}{dA} [Af(A)] = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dA} + \frac{1}{A} \right) f(A).$$

Поэтому предыдущее выражение справедливо.

Итак, параметр h_1 , если отбросить переменную составляющую, равен

$$h_1 \approx \mu \left\{ \frac{1}{2A} \frac{d}{dA} [Af(A)] - h \right\}. \quad (54)$$

В это выражение следует подставить амплитуду того предельного цикла, устойчивость которого исследуется.

Уравнения в вариациях, если подставить h_1 из выражения (54), будут уравнениями с постоянными коэффициентами; для проверки устойчивости можно поэтому написать неравенства Гурвица. Первое из этих неравенств (их всего два, так как третье всегда выполняется) имеет вид

$$2Ah(1 - \mu) + \mu \frac{d}{dA} Af(A) > 0.$$

Так как $f(A)$ монотонно растет с A , то для $A < 0$, $h > 0$ и $0 < \mu \leq 1$; это неравенство всегда выполняется ($\frac{d}{dA} Af(A) > 0$). Второе из неравенств Гурвица после преобразований приближенно (для малых μ) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dA} A [f(A) - qA] > 0.$$

Из этого условия видно, что, когда линия $f(A)$ пересекает прямую qA снизу вверх (при увеличении A), получаем устойчивый цикл, а когда $f(A)$ пересекает qA сверху вниз, — цикл неустойчив. Следовательно, цикл с меньшей амплитудой A_1 на рис. 9.52 будет устойчив, а с большей — неустойчив. При уменьшении наклона прямой qA малый, устойчивый цикл сжимается и стремится к точке равновесия. Когда $q < q_{\min}$ точка равновесия становится устойчивой; следовательно, при $q < q_{\min}$ получаем устойчивую систему.

§ 7. Методы малого параметра (графоаналитические варианты)

Наибольшее распространение получил графоаналитический метод, основанный на так называемом принципе гармонического баланса. В целях ознакомления с этим методом рассмотрим сначала понятие комплексного коэффициента усиления (комплексного коэффициента передачи) нелинейного усилительного звена. Допустим, что зависимость между выходной вели-

чиной x и входной величиной x_0 этого звена выражается формулой

$$x = f(x_0). \quad (1)$$

Предположим, что функция f нечетная, т. е. $f(-x_0) = -f(x_0)$.

Пусть на вход звена подан синусоидальный сигнал

$$x_0 = A_0 \sin \omega t = A_0 \sin \psi. \quad (2)$$

Выходная величина в этом случае представляет собой периодическую функцию. Разложим ее в тригонометрический ряд:

$$x = f(A_0 \sin \psi) = \sin \psi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi \right] + \\ + \cos \psi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi \right] + \dots \quad (3)$$

Ограничимся лишь первой гармоникой в разложении (3), отбросив третью, пятую и т. д. гармоники (так как функция f нечетна, то в разложении отсутствует постоянная составляющая и четные гармоники). При этом весь последующий расчет устойчивости систем оказывается приближенным, поскольку не учитываются высшие гармоники разложения x .

Определим комплексный коэффициент усиления как отношение комплексных векторов, соответствующих x и x_0

$$\bar{K} = \frac{\bar{x}}{x_0}. \quad (4)$$

Действительные функции $x_0(t)$ и $x(t)$ получаются как проекция соответствующих векторов на мнимую ось. Если положить

$$\bar{x}_0 = A_0 e^{j\psi}, \quad \text{то} \quad \text{Im}(A_0 e^{j\psi}) = A_0 \sin \psi = x_0(t).$$

Здесь Im обозначает мнимую составляющую.

Вектор \bar{x} также следует определить так, чтобы проекция его на мнимую ось была равна правой части выражения (3), конечно, без учета высших гармоник. Положим

$$\bar{K} = g + jb. \quad (5)$$

Из формул (3), (4) и (5) следует

$$\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos \psi d\psi \right] \cos \psi = \text{Im}[(g + jb) A_0 e^{j\psi}]. \quad (6)$$

Отсюда находим

$$\left[\frac{1}{\pi A_0} \int_0^{2\pi} f \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \left[\frac{1}{\pi A_0} \int_0^{2\pi} f \cos \psi d\psi \right] \cos \psi = g \sin \psi + b \cos \psi. \quad (7)$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \psi$ и $\sin \psi$ в обеих частях тождества (7), получаем

$$\left. \begin{aligned} g(A_0) &= \frac{1}{\pi A_0} \int_0^{2\pi} f(A_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ b(A_0) &= \frac{1}{\pi A_0} \int_0^{2\pi} f(A_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Последние равенства показывают, что комплексный коэффициент усиления нелинейного усилительного звена зависит от амплитуды A_0 входного сигнала. Если функция $f(x_0)$ является однозначной нечетной функцией, то выражение для \bar{K} упрощается: составляющая $b(A_0)$ оказывается равной нулю, и \bar{K} становится действительным числом.

Некоторым основанием для пренебрежения высшими гармониками выходной величины звена служит следующее рассуждение. В тракте цепи регулирования, куда включается нелинейное усилительное звено, обычно

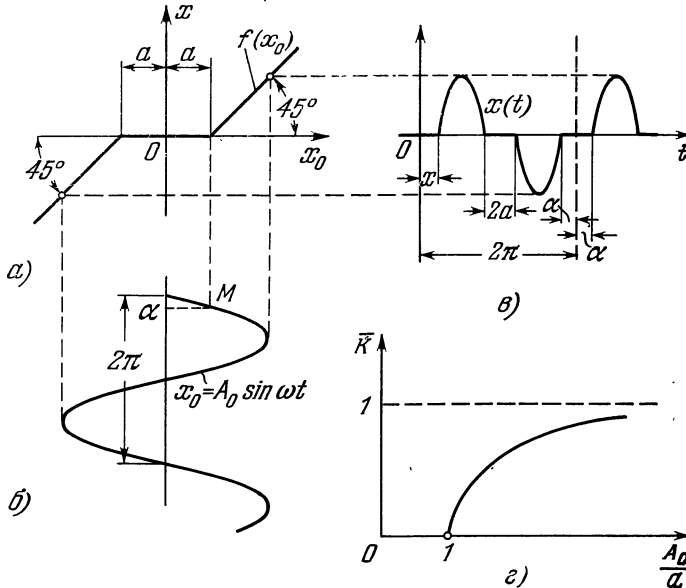


Рис. 9 53

присутствуют инерционные или интегрирующие звенья, гасящие компоненты колебания, являющиеся высшими гармониками. Поэтому отсутствие учета последних часто не вносит существенной погрешности в расчеты. Это рассуждение не может, однако, претендовать на какую-либо доказательность и оказывается совершенно неверным, если, например, в тракте имеются колебательные звенья, реагирующие на колебания сравнительно высоких частот. Поэтому весь метод является приближенным и аналитически совершенно идентичным методу малого параметра, когда решение уравнения первого приближения полагается в форме $A_1 \sin \psi_1$.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть характеристика нелинейного усилительного звена изображается кривой, показанной на рис. 9.53, а. Функция $f(x_0)$ в данном случае может быть записана в следующем виде:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{при } |x_0| \leq a, \\ x_0 - a & \text{при } x_0 > a, \\ x_0 + a & \text{при } x_0 < -a. \end{cases} \quad (9)$$

Определим комплексный коэффициент усиления

$$\bar{K} = g(A_0) + jb(A_0).$$

Так как функция f однозначна и нечетна, то $b(A_0) = 0$, т. е. при подаче на вход звена синусоидального сигнала выходное колебание не сдвинуто по фазе по отношению к входному и первая гармоника является синусоидой. Графическое построение выходного сигнала показано на рис. 9.53, в.

Пользуясь первой из формул (8), можно определить \bar{K} . Учитывая симметрию выходной кривой относительно линии $x_0 = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\begin{aligned}\bar{K} = g(A_0) &= \frac{4}{\pi A_0} \int_a^{\pi/2} (A_0 \sin \psi - a) \sin \psi d\psi = \\ &= 1 - \frac{2\alpha}{4\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{\pi} - \frac{4 \cos \alpha}{\pi A_0} = 1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}.\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь положено

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{A_0}.\quad (11)$$

Формула (10) справедлива при $A_0 > a$. α — это та фаза, при которой выходной сигнал начинает отличаться от нуля — см. точку M на рис. 9.53, б.

На рис. 9.53, г показана зависимость комплексного коэффициента усиления \bar{K} от отношения A_0/a , вычисленная по формуле (10). Значение \bar{K} стремится к пределу, равному единице, при $\frac{A_0}{a} \rightarrow \infty$.

Форму кривой, изображенной на рис. 9.53, г, можно было в общих чертах предугадать еще до вывода формулы (10). Действительно, из рис. 9.53, а и б очевидно, что при $A_0 < a$, т. е. при $\frac{A_0}{a} < 1$, выходная величина равна

нулю, т. е. коэффициент усиления $\bar{K} = 0$. Когда величина A_0/a , увеличиваясь, становится большей единицы, появляется сигнал на выходе. Следовательно, коэффициент усиления увеличивается от нуля. При $A_0/a \rightarrow \infty$ величина зоны нечувствительности a становится сколь угодно малой по сравнению с амплитудой A_0 входного сигнала. Поэтому выходной сигнал получается таким же, как при отсутствии зоны нечувствительности, т. е. при характеристике усилительного звена вида $x = x_0$. В этом случае коэффициент усиления, очевидно, равен единице.

Если рассматривается релейная характеристика усилительного звена, показанная на рис. 9.54, а, то функция $f(x_0)$ может быть записана в следующем виде:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{при } |x_0| \leq a, \\ B & \text{при } x_0 > a, \\ -B & \text{при } x_0 < -a. \end{cases}\quad (12)$$

На основании формулы (8) и учета нечетности характеристики (12) можно написать

$$\bar{K} = g = \frac{4}{\pi A_0} \int_a^{\pi/2} B \sin \psi d\psi = \frac{4B}{\pi A_0} \cos \alpha.\quad (13)$$

Здесь α по-прежнему выражается формулой (11). Подставляя значение α в равенство (13), находим

$$\bar{K} = \frac{4B}{\pi A_0} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A_0}\right)^2} = \frac{4}{\pi} \frac{B}{a} \frac{1}{A_0} \sqrt{1 - \frac{1}{(A_0/a)^2}}.\quad (14)$$

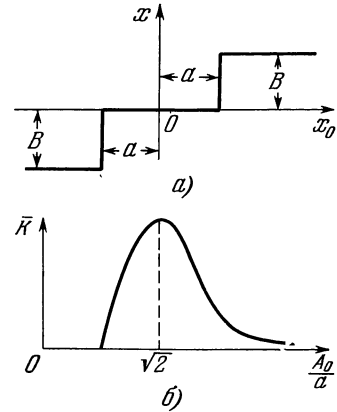


Рис. 9.54.

График этой зависимости показан на рис. 9.54, б. Максимум \bar{K} достигается при $A/a = \sqrt{2} \approx 1,41$. Если $A_0 \rightarrow \infty$, то $\bar{K} \rightarrow 0$, что можно было бы предвидеть, рассматривая характеристику звена. Действительно, при неограниченном возрастании амплитуды входного сигнала амплитуда выходной величины остается ограниченной и равной B ; это означает, что коэффициент усиления стремится к нулю.

На рис. 9.55, а показана весьма часто встречающаяся характеристика с зоной насыщения; величина $x = B$ при $x_0 > a$ и $x = -B$ при $x_0 < -a$. В интервале $|x_0| < a$ имеет место линейное изменение функции. Для такой характеристики график $\bar{K} = b$ в функции относительной амплитуды входной

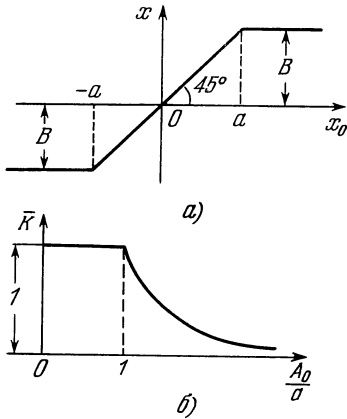


Рис. 9.55.

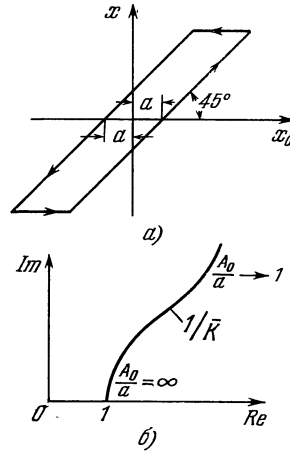


Рис. 9.56.

величины A_0/a имеет вид, показанный на рис. 9.55, б. В линейной зоне коэффициент усиления постоянен; в нелинейной зоне он понижается с увеличением A_0/a , так как амплитуда выходной величины остается при этом равной B .

Функция \bar{K} усложняется, если характеристика нелинейного звена неоднозначна. Рассмотрим зависимость, характерную для люфта или сухого трения, изображенную на рис. 9.56, а. Если подать на вход этого звена синусоидальную величину $x_0 = A_0 \sin \omega t$, то выходное колебание будет отставать по фазе от входного. В этом нетрудно убедиться, производя графическое построение. Аналогичный характер имеет зависимость между током в катушке и магнитным потоком, возбуждаемым этим током в стальном сердечнике, если учесть, что первая гармоника тока опережает магнитный поток (т. е. поток отстает от тока).

Это отставание по фазе уменьшается, однако, с ростом амплитуды потому, что относительная величина $2a$ «петли» становится меньше. При бесконечно большой амплитуде входной величины сдвиг фаз становится равным нулю.

График \bar{K} нет возможности чертить в функции амплитуды A_0/a , так как \bar{K} является комплексным числом. На рис. 9.56, б изображен годограф $1/\bar{K}$ (A_0/a), т. е. геометрическое место точек концов векторов $1/\bar{K}$ при A_0/a , изменяющемся от 0 до ∞ .

Удобнее откладывать не \bar{K} , а $1/\bar{K}$, что выясняется ниже. При $A_0/a \rightarrow \infty$ величины \bar{K} и $1/\bar{K}$ стремятся к единице. При $A_0/a \rightarrow 1$ величина $|\bar{K}| \rightarrow 0$,

а $1/\bar{K} \rightarrow \infty$, причем сдвиг по фазе увеличивается до 90° . При $A_0/a < 1$, очевидно, $\bar{K} = 0$.

Л. С. Гольдфарбом предложен метод исследования устойчивости системы, содержащей одно нелинейное усилительное звено НЭ (нелинейный элемент) с коэффициентом усиления $\bar{K}_1(A)$ (рис. 9.57) и любую сколь угодно сложную линейную часть с комплексным коэффициентом передачи $W_0(j\omega)$. Ниже рассмотрены основные положения этого метода.

Допустим, что система находится на границе устойчивости и в ней возникли незатухающие колебания некоторой частоты ω ; величина x — входная величина нелинейного звена — пусть колеблется с амплитудой A . Разомкнем систему, например, между точками M и N и подадим на вход ее синусоидальное колебание x той же амплитуды и частоты. Тогда выходное колебание x_1 будет равно по амплитуде и обратно по фазе входному (так как

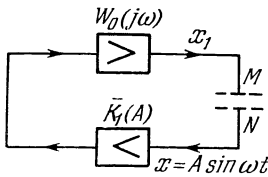


Рис. 9.57.

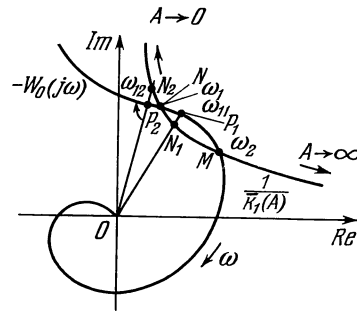


Рис. 9.58.

система находится на границе устойчивости). При этом не учитываем высших гармоник на выходе разомкнутой системы. Итак, условие возникновения автоколебаний в системе приобретает вид

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) \bar{K}_1(A) = -1. \tag{15}$$

Это равенство можно переписать так:

$$-W_0(j\omega) = \frac{1}{\bar{K}_1(A)}. \tag{16}$$

Важно отметить, что комплексный коэффициент передачи линейной части $W_0(j\omega)$ зависит лишь от частоты и не зависит от амплитуды, в то время как комплексный коэффициент усиления усилительного звена $\bar{K}_1(A)$ зависит лишь от амплитуды и не зависит от частоты. Приравнявая отдельно вещественную и мнимую части уравнения (16) нулю, получаем два уравнения с двумя неизвестными — частотой ω и амплитудой A автоколебаний. Если в результате решения этих уравнений будут получены положительные действительные значения ω и A , то автоколебания в системе возможны.

Решение уравнения (16) удобно получить графически путем построения годографов векторов $-W_0(j\omega)$ и $1/\bar{K}_1(A)$, т. е. амплитудно-фазовой характеристики $W_0(j\omega)$ линейной части системы, взятой с обратным знаком, и годографа величины $1/\bar{K}_1(A)$ для нелинейного усилительного звена. Точки пересечения этих двух кривых (рис. 9.58) определяют частоту и амплитуду возможных колебаний. Если характеристики не пересекаются, то это означает, что автоколебания в рассматриваемой системе невозможны.

Если характеристики касаются друг друга, то система находится на границе устойчивости. Уменьшая величину модуля $|W_0(j\omega)|$, можно при этом избежать пересечения и, таким образом, сделать систему устойчивой. При таком методе исследования можно наглядно представить характер влияния параметров системы и на устойчивость; можно также установить, как надо

деформировать амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы, чтобы обеспечить ее устойчивость.

Факт пересечения кривых $-W_0(j\omega)$ и $1/\bar{K}_1(A)$ означает лишь возможность существования автоколебаний. Предельный цикл физически реализуем в системе лишь тогда, когда он устойчив. Поэтому, исследуя точки M и N пересечения кривых на рис. 9.58, нужно определить, устойчивы ли соответствующие им автоколебания.

Точке N соответствует частота ω_1 , отсчитываемая на кривой $-W_0(j\omega)$, и амплитуда A_1 , отсчитываемая на кривой $1/\bar{K}_1(A)$. Точке M соответствуют величины ω_2 и A_2 .

Оказывается, что при заданном на рис. 9.58 виде характеристик точка N соответствует неустойчивому предельному циклу, а точка M — устойчивому. Для того чтобы это показать, рассмотрим устойчивость колебаний по амплитуде. Допустим, что амплитуда автоколебаний, соответствующая точке N , по какой-либо случайной причине возросла и стала равной $A_1 + \delta A_1$. Тогда вектор $1/\bar{K}_1(A)$ изменится и окажется совпадающим с вектором ON_1 . Обозначим его $\bar{K}_{11}(A)$. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы

$$\bar{W}_{N_1}(j\omega) = W_0(j\omega) \bar{K}_{11}(A).$$

Найдем частоту, при которой годограф вектора $\bar{K}_{11}(A)$ пересечет действительную ось. Если $-\bar{K}_{11}(A)W_0(j\omega)$ — действительное положительное число, то аргументы векторов $\bar{K}_{11}(A)$ и $-W_0(j\omega)$ противоположны по знаку. Следовательно, аргументы векторов $1/\bar{K}_{11}(A)$ и $-W_0(j\omega)$ совпадают. Теперь нетрудно найти соответствующую частоту. Нужно взять вектор \vec{OP}_1 на характеристике $-W_0(j\omega)$ с тем же аргументом, что у вектора $\vec{ON}_1 = \bar{K}_{11}(A)$.

Соответствующая точке P_1 частота ω_{11} будет искомой частотой.

Характеристика $\bar{K}_{N_1}(A)$ пересекает действительную ось слева от критической точки $(-1, 0)$. Действительно, из рис. 9.58 видно, что $OP_1 > ON_1$, т. е.

$$|-W_0(j\omega)| > \left| \frac{1}{\bar{K}_{11}(A)} \right|$$

или

$$|W_0(j\omega_{11}) \bar{K}_{11}(A)| = |\bar{K}_{N_1}(A)| > 1$$

при частоте $\omega = \omega_{11}$. Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика $\bar{K}_{N_1}(A)$ охватывает критическую точку, и система оказывается неустойчивой, т. е. амплитуда колебания в ней нарастает.

Итак, при малом приращении амплитуды δA_1 последующее движение происходит так, что амплитуда продолжает нарастать, и система уходит все дальше от состояния, характеризующегося значением амплитуды A_1 . Аналогичным рассуждением можно показать, что при уменьшении амплитуды величина вектора $1/\bar{K}_1(A)$ будет определяться отрезком $\vec{ON}_2 = \frac{1}{\bar{K}_{12}(A)}$,

а значение $\omega = \omega_{12}$, при котором годограф вектора $\bar{K}_{N_2}(A)$ пересекает действительную ось, будет определяться точкой P_2 . Так как $OP_2 < ON_2$ или

$$|W_0(j\omega_{12})| < \left| \frac{1}{\bar{K}_{12}(A)} \right|,$$

то отсюда следует

$$|W_0(j\omega_{12}) \bar{K}_{12}(A)| = |\bar{K}_{N_2}(A)| < 1.$$

Теперь годограф вектора $\bar{K}_{N_2}(A)$ пересекает действительную ось справа от критической точки $(-1, 0)$ и амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает критическую точку. Поскольку такая система устойчива, колебания в ней затухают и их амплитуда уменьшается.

Приведенные выше рассуждения показывают, что предельный цикл, соответствующий точке N , неустойчив и физически нереализуем. Такими же рассуждениями можно показать, что предельный цикл, соответствующий точке M (амплитуда A_2 , частота ω_2), будет устойчив. Например, при увеличении амплитуды A_2 до $A_2 + \delta A_2$ последующее движение происходит так, что амплитуда колебаний уменьшается и стремится к прежнему значению A_2 .

Если амплитуда колебаний меньше A_1 , то они, как указано выше, затухают, и изображающая точка в фазовом пространстве стремится к положению равновесия. Таким образом, исследуемая система устойчива в малом. Если, однако, в системе возникнут колебания амплитуды, большей чем A_1 , то амплитуда колебаний будет увеличиваться, стремясь к амплитуде A_2 устойчивого предельного цикла. Поэтому рассматриваемая система неустойчива в большом.

В общем случае, если амплитудно-фазовая характеристика линейной части разомкнутой системы имеет произвольный вид и пересекается с характеристикой $1/\bar{K}(A)$ нелинейного звена, то вопрос об устойчивости автоколебаний, соответствующих точке пересечения кривых, решается построением характеристики общего комплексного коэффициента усиления разомкнутой системы при увеличенной амплитуде.

Если эта характеристика охватывает точку $(-1, 0)$, то автоколебания неустойчивы; если не охватывает, то устойчивы.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть нелинейная система третьего порядка состоит из трех инерционных звеньев и нелинейного усилительного звена $HЭ$, соединенных последовательно (рис. 9.59). Пусть для простоты коэффициенты усиления инерционных звеньев равны единице и общий коэффициент усиления разомкнутой системы определяется, таким образом, коэффициентом усиления нелинейного усилителя. Если усилитель линейный, то условие устойчивости системы (см. гл. V) имеет вид

$$k < k_{пр} = 2 + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}. \tag{17}$$

Заменяем нелинейный усилитель эквивалентным линейным звеном, у которого, однако, коэффициент усиления зависит от амплитуды. Рассмотрим сначала усилитель с зоной насыщения. В этом случае (рис. 9.60, а) кривая $k = f(A/a)$ убывает с увеличением амплитуды A/a . Система устойчива, если при любом значении амплитуды A/a коэффициент усиления $k < k_{пр}$.

Пусть соотношение постоянных времени таково, что величина $k_{пр}$ (см. (17)) достаточно велика (эта величина показана пунктирной горизонталью 1 на рис. 9.60, а). Тогда при любом значении A/a величина $k < k_{пр}$, и система устойчива (в большом). Система может быть неустойчивой, если при некоторых значениях A/a величина $k > k_{пр}$. Это получается при меньшем значении $k_{пр}$ (пунктирная горизонталь 2). Предельный цикл в этом случае оказывается устойчивым. Действительно, если в системе имеются колебания малой амплитуды, то для них (см. рис. 9.60, а) $k > k_{пр}$, и амплитуда колебаний нарастает, стремясь к величине A_1/a . Если же амплитуда больше A_1/a , то величина k становится меньшей, чем $k_{пр}$, и амплитуда

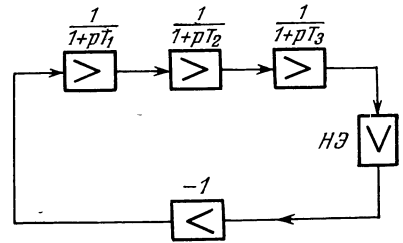


Рис. 9.59.

колебаний убывает, стремясь опять-таки к величине A_1/a . При амплитуде, в точности равной A_1/a , величина $k = k_{пр}$, и система как бы находится на границе устойчивости — в ней существуют «ненарастающие» и «незатухающие» колебания.

Если усилитель имеет зону нечувствительности, то зависимость $k = k(A/a)$ изображается кривой, показанной на рис. 9.60, б. При достаточно

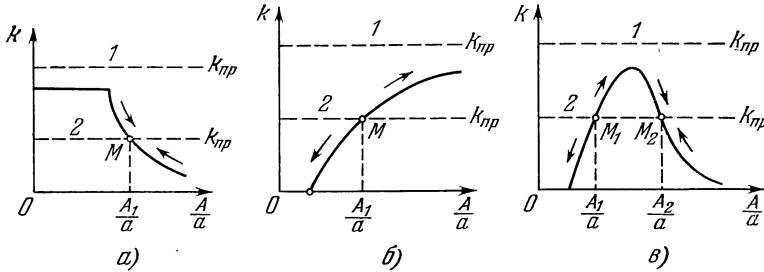


Рис. 9.60.

большом значении $k_{пр}$ (горизонталь 1) величина $k < k_{пр}$ при любой амплитуде, и система устойчива в большом. Если же $k_{пр}$ уменьшается (либо k возрастает), то горизонталь $k = k_{пр}$ оказывается в положении 2. Из рис. 9.60, б видно, что существует один и притом неустойчивый предельный цикл. Колебания малой амплитуды (меньшей, чем A_1/a) затухают, т. е. система устойчива в малом. Но колебания большой амплитуды неограниченно нарастают. Автоколебания в такой системе невозможны.

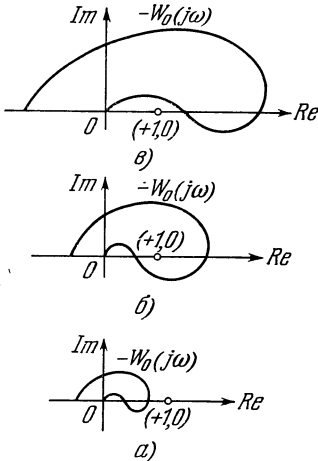


Рис. 9.61.

На рис. 9.60, в изображена характеристика релейного усилителя при коэффициенте возврата $\lambda = 1$. Если значение $k_{пр}$ достаточно велико (горизонталь 1), то система устойчива в большом. Если же $k_{пр}$ уменьшается (горизонталь 2), то образуются две точки пересечения M_1 и M_2 , соответствующие двум предельным циклам. Из рисунка видно, что цикл амплитуды A_1/a неустойчив, а цикл с амплитудой $A_2/a > A_1/a$ устойчив. Система устойчива в малом. Но если в нем появятся колебания, большие по амплитуде, чем A_1/a , то систему «затянет» к устойчивому предельному циклу с амплитудой A_2/a .

Пусть амплитудно-фазовая характеристика системы имеет более сложный вид, например снабжена «клювом» (рис. 9.61), на котором изображены кривые $-W_0(j\omega)$. В этом случае имеются два предельных значения коэффициента усиления. Действительно, если коэффициент усиления системы мал, то характеристика $-W_0(j\omega)$ не охватывает критической точки $(+1, 0)$ (см. рис. 9.61).

При увеличении коэффициента усиления k , когда k становится большим первого предельного значения k_1 , масштаб характеристики увеличивается настолько, что характеристика начинает охватывать критическую точку (рис. 9.61, б): система становится неустойчивой. Наконец, при $k > k_2$ дальнейшее увеличение масштаба характеристики (рис. 9.61, в) приводит к тому, что критическая точка уже не охватывается кривой, и система становится устойчивой. Таким образом, неустойчивость имеет место лишь

в интервале значений коэффициента усиления

$$k_1 < k < k_2.$$

Присоединим теперь последовательно к линейной системе нелинейное усилительное звено. На рис. 9.62, а показана характеристика звена с зоной нечувствительности и горизонтали $k = k_1$ и $k = k_2$, соответствующие двум предельным значениям коэффициента усиления. Точка M_1 пересечения с горизонталью $k = k_1$ соответствует неустойчивому предельному циклу, так как, например, при $A < A_1$ величина $k < k_1$, и система устойчива,

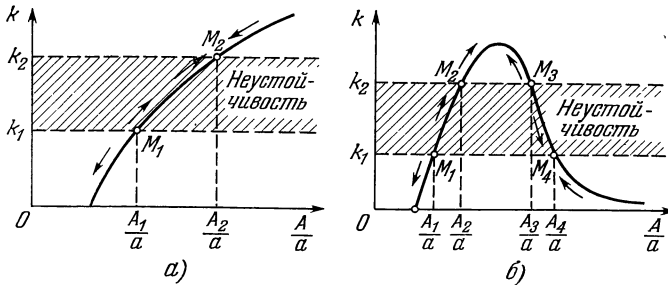


Рис. 9.62.

т. е. колебания в ней затухают. Точка M_2 соответствует устойчивому предельному циклу, так как, например, при $A > A_2$ величина $k > k_2$, причем система становится «устойчивой», и амплитуда колебаний убывает, стремясь к величине $A = A_2$.

При включении в схему релейного усилителя (рис. 9.62, б) получаются четыре точки: M_1, M_2, M_3, M_4 , соответствующие четырем предельным циклам. Из них циклы, соответствующие точкам M_2 и M_4 , устойчивы, а соответствующие точкам M_1 и M_3 — неустойчивы. Системы в обоих указанных выше примерах устойчивы в малом и неустойчивы в большом.

В заключение рассмотрим влияние сухого трения на устойчивость систем. На рис. 9.56, б показан годограф вектора $1/\bar{K}_1(A)$ для линейного

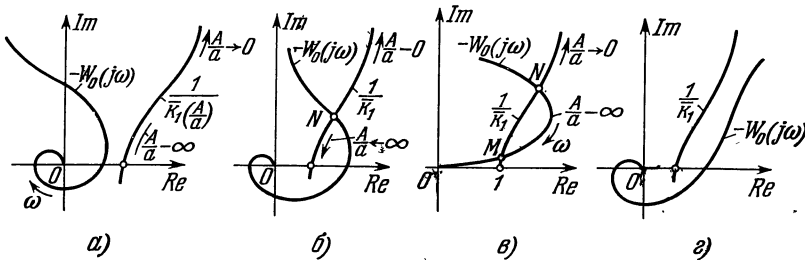


Рис. 9.63.

звена, характеризующего люфт или сухое трение. На рис. 9.63, а показана амплитудно-фазовая характеристика линейной части разомкнутой системы $-W_0(j\omega)$, которая не пересекается с годографом $1/\bar{K}_1(A/a)$ нелинейного элемента.

Сама по себе характеристика линейной части не охватывает критическую точку; поэтому система без сухого трения устойчива. Такая система сохраняет устойчивость и в том случае, когда включен элемент с трением, так как характеристики $-W_0(j\omega)$ и $1/\bar{K}_1(A/a)$ не пересекаются и

характеристика $-W_0(j\omega)$ может стянуться к нулю, не «перерезав» при этом годографа $1/\bar{K}_1(A/a)$.

На рис. 9.63, б показан другой случай, когда характеристика системы без трения охватывает критическую точку; такая система неустойчива. При включении элемента с трением возникает один предельный цикл, соответствующий точке N пересечения кривых $-W_0(j\omega)$ и $1/\bar{K}_1(A/a)$. Этот предельный цикл, как нетрудно показать с помощью указанных выше рассуждений (см. для сравнения точку N на рис. 9.58), неустойчив. Поэтому система в малом становится устойчивой; если амплитуда колебаний меньше значения A_1 , соответствующего точке N , то колебания затухают. Однако при достаточно большой амплитуде колебаний они начинают неограниченно возрастать; система, следовательно, неустойчива в большом. Здесь сухое трение оказалось полезным, стабилизировав систему хотя бы при малых отклонениях от положения равновесия.

Однако вовсе не всегда трение способствует стабилизации систем. Рассмотрим, например, характеристику линейной части системы, изображенную на рис. 9.63, в. В отсутствие трения система устойчива, так как характеристика $-W_0(j\omega)$ не охватывает критическую точку. При наличии сухого трения образуются два предельных цикла, соответствующих двум точкам пересечения кривых $-W_0(j\omega)$ и $1/\bar{K}_1(A/a)$ — точкам M и N . Точка M соответствует устойчивому, а N — неустойчивому циклу. Система оказывается устойчивой в малом. Если же амплитуда колебаний достаточно велика, то движение «притягивается» к устойчивому предельному циклу, соответствующему точке M . В данном случае появление сухого трения вызвало неустойчивость системы. Представим себе, что верхняя часть характеристики $-W_0(j\omega)$, изображенной на рис. 9.63, в, поворачивается по часовой стрелке и в пределе характеристика занимает положение, изображенное на рис. 9.63, г. Точка N устремляется в бесконечность, амплитуда предельного цикла стремится к нулю и в пределе неустойчивый предельный цикл «заражает» точку равновесия своей неустойчивостью. Таким образом, система оказывается неустойчивой в малом (и подавно в большом). Однако автоколебаний в системе не существует, так как кривые $-W_0(j\omega)$ и $1/\bar{K}_1(A/a)$ на рис. 9.63, г не пересекаются. Колебания в такой системе неограниченно возрастают. Эта система, неустойчивая без сухого трения, остается неустойчивой и при включении нелинейного звена.

Рассмотренные выше примеры показывают, что приближенное исследование устойчивости методом малого параметра не очень громоздко даже для весьма сложных нелинейных систем.

Метод Гольдфарба в том виде, в каком он изложен выше, ограничен случаем, когда в системе имеется лишь одно нелинейное звено¹⁾. Если в системе имеется несколько нелинейных звеньев, не соединенных последовательно или параллельно, а размещенных в различных ветвях структурной схемы, либо нелинейные элементы с двумя входами, то расчет значительно усложняется. Например, в структурной схеме, соответствующей уравнениям (15) § 1 этой главы нелинейной системы, имеются звенья типа $E = c_1\Omega\Phi_B$, где выходная величина E пропорциональна произведению двух входных переменных Ω и Φ_B . Такое нелинейное звено называется множительным. В этом случае метод, изложенный выше, не может быть применен. Можно, однако, рассмотреть всю разомкнутую систему в целом (рис. 9.64, а).

Подадим на вход системы синусоидальную величину $x_0 = A_0 \sin \omega t$, соответствующую вектору $x_0 = A_0 e^{j\omega t}$. Если учесть лишь первую гармонику на выходе разомкнутой системы, то вектор выходной величины может

¹⁾ Л. С. Гольдфарб распространил этот метод на случай нескольких нелинейных звеньев.

быть записан в виде

$$x = (Ae^{j\varphi}) A_0 e^{j\omega t}, \quad (18)$$

где величины A и φ зависят от A_0 и ω :

$$\left. \begin{aligned} A &= A(A_0, \omega), \\ \varphi &= \varphi(A_0, \omega). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При $A_0 = \text{const}$ можно построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, т. е. зависимость $Ae^{j\varphi}$ от частоты. Серия таких характеристик, построенных для различных значений A_0 , изображена на

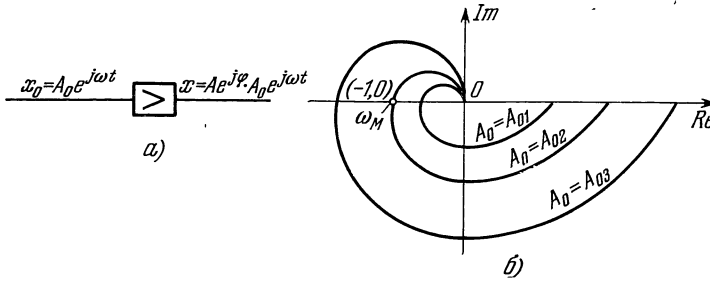


Рис. 9.64.

рис. 9.64, б. Допустим, что при $A_0 = A_{02}$ соответствующая характеристика проходит через критическую точку; следовательно, в замкнутой системе колебания не затухают и не нарастают по амплитуде, т. е. в системе возможны автоколебания. Если при уменьшении A_0 характеристика начинает охватывать критическую точку, то предельный цикл устойчив и в системе существуют автоколебания. Если при уменьшении амплитуды характеристика не охватывает критическую точку, то предельный цикл неустойчив.

Величины A_0 и ω , соответствующие предельному циклу, можно найти из уравнений (19), полагая $A = 1$ и $\varphi = \pi$. Этим методом исследовал системы К. Ф. Теодорчик.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Типы моделей и их назначение

Исследование динамики систем автоматического регулирования представляет собой весьма сложную задачу. Даже исследование устойчивости линейных систем невысокого порядка сравнительно громоздко. Исследование качества регулирования систем высокого порядка еще сложнее, даже если пользоваться косвенными методами. При исследовании нелинейных систем трудности возрастают во много раз и могут оказаться непреодолимыми при чисто теоретическом расчете.

Существует, однако, иной путь исследования, который в сочетании с теорией обеспечивает решение указанных выше задач. Это — путь моделирования. Он заключается в том, что некоторые звенья тракта системы автоматического регулирования заменяются их моделями, в то время как другие звенья остаются неизменными. В частном случае все звенья системы заменяются их моделями. Полученная таким образом система

подвергается экспериментальному исследованию, которое выясняет необходимые вопросы.

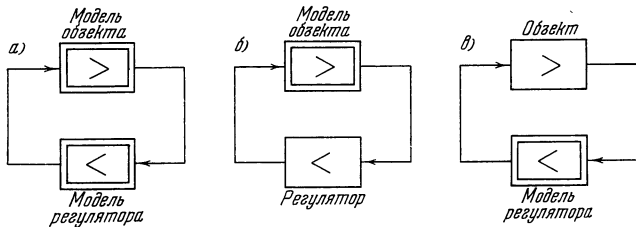


Рис. 10.1.

Если модель состоит из звеньев того же типа, что и замененные ею (например, из малых электрических машин, моделирующих большие машины того же типа), то моделирование называют *физическим*. Если же звенья модели имеют иную физическую природу, чем звенья реальной системы регулирования, то такое моделирование называют *математическим*.

Смысл моделирования состоит в том, что динамику сложной, дорогостоящей и мощной реальной системы регулирования можно изучить с помощью сравнительно простой и маломощной модели, специально приспособленной для изменения параметров в широком диапазоне, что обеспечивает возможность исследования процессов при различных комбинациях значений параметров и различных структурных схемах.

Общая теория подобия при моделировании, а также теория погрешностей разработаны акад. М. В. Кирпичевым и акад. Н. Г. Бруевичем. Вопросы техники моделирования изучались в работах советских ученых Л. И. Гутенмахера, М. П. Костенко, В. А. Трапезникова, Б. Я. Когана, В. А. Веникова, а также ряда других советских и зарубежных ученых.

Существуют различные способы применения моделей. Основные из них указаны на рис. 10.1. На рис. 10.1, а как объект регулирования, так

и регулятор заменены моделями. Таким образом, вся замкнутая система регулирования заменена моделью. Для того чтобы на модели можно было изучить динамику системы автоматического регулирования, необходимо, чтобы уравнения, описывающие движение модели, были тождественны уравнениям, описывающим движение реальной системы регулирования. Для этого, однако, совсем не требуется, чтобы элементы модели копировали по конструкции, например, в уменьшенном виде реальные элементы системы регулирования. Как показано ниже, звенья модели могут быть совсем иной физической природы. Важно лишь, чтобы их уравнения движения были тождественны уравнениям реальных звеньев.

Пусть, например, уравнения реальной системы автоматического регулирования, разрешенные относительно производных, имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

На выходах модели получаются величины, вообще говоря, иной природы y_i . Условимся говорить, что они представляют реальные величины x_i , если копируют эти величины в каких-либо масштабах:

$$y_i = \mu_i x_i. \quad (2)$$

Здесь μ_i — постоянные, вообще говоря, неодинаковые.

Кроме того, и временной масштаб в модели может быть иным, чем в реальной системе регулирования. Все кривые y_i могут получаться в функции относительного времени τ , пропорционального времени t :

$$\tau = \mu_t t. \quad (3)$$

Соотношения между y_i и τ в модели, копирующей реальную систему, можно найти из уравнений реальной системы (1), подставив в них значения y_i и τ из (2) и (3). Так как $x_i = \frac{y_i}{\mu_i}$ и $t = \frac{\tau}{\mu_t}$, то $dx_i = \frac{dy_i}{\mu_i}$, $dt = \frac{d\tau}{\mu_t}$, и уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\mu_t}{\mu_i} \frac{dy_i}{d\tau} = f_i\left(\frac{y_1}{\mu_1}, \frac{y_2}{\mu_2}, \dots, \frac{y_n}{\mu_n}, \frac{\tau}{\mu_t}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

или

$$\frac{dy_i}{d\tau} = \psi_i(y_1, y_2, \dots, y_n, \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где

$$\psi_i(y_1, y_2, \dots, y_n, \tau) = \frac{\mu_i}{\mu_t} f_i\left(\frac{y_1}{\mu_1}, \frac{y_2}{\mu_2}, \dots, \frac{y_n}{\mu_n}, \frac{\tau}{\mu_t}\right). \quad (6)$$

Модель может быть гидравлической, пневматической, электрической и т. д. Ниже рассматриваются только электрические модели. В свою очередь наиболее гибкими, универсальными и перспективными из электрических типов моделей являются электронные. Величины y_i , в частности, могут являться напряжениями или токами в звеньях электронной модели, в то время как представляемые ими величины x_i могут быть совсем иной природы, например перемещениями, углами поворота, давлениями, температурами и т. д.

Если масштаб времени в модели тот же, то и в реальной моделируемой системе регулирования, то $\mu_t = 1$. В таком случае модель, как иногда говорят, работает на натуральных частотах, или в реальном масштабе времени.

Изменение масштаба времени часто оказывается весьма целесообразным при моделировании всей системы в целом, показанном на рис. 10.1, а. Если ускорить процессы в модели во много раз по сравнению с процессами в реальной системе автоматического регулирования, то при изучении переходных процессов можно подавать возмущающие силы много раз в секунду. При этом переходный процесс после подачи возмущающих сил быстро заканчивается и затем вновь повторяется при новой подаче возмущающих сил.

Этот повторяющийся много раз (от 10 до 50) в секунду процесс можно наблюдать, например, на катодном осциллографе в виде «застывшей» на экране кривой. Меняя параметры модели, можно сравнительно быстро подобрать такие их значения, при которых форма кривой переходного процесса будет благоприятной либо удовлетворяющей техническим условиям. Этот вид моделей назовем *моделями с повторением*.

Впервые универсальные электронные модели с повторением были разработаны под руководством Л. И. Гутенмахера при участии Н. В. Королькова, Г. К. Кузьминка и др.

Второй способ применения моделей изображен на рис. 10.1, б. Если объект регулирования лишь проектируется либо невозможно его опробование в системе, то включают модель объекта в замкнутую цепь с реальным регулятором. Таким образом, можно наладить регулятор и подобрать экспериментально благоприятные значения его параметров. Кроме того, еще до изготовления объекта можно на модели проследить влияние на динамику всей системы тех или иных параметров проектируемого объекта. Подобная модель должна работать на натуральных частотах, так как в нее включен реальный регулятор. Этот способ применения весьма важен, например, при наладке автопилотов. Налаживать автопилот при полете самолета неудобно. Его необходимо предварительно наладить на стенде на земле в условиях, копирующих условия реального полета. Поскольку само движение объекта регулирования — самолета — в данном случае невозможно осуществить, заменяют самолет моделью, уравнения движения которой совпадают с уравнениями движения самолета. Выходная величина модели подается на вход реального регулятора, а выход регулятора должен воздействовать на вход модели. Этот способ применения моделей чрезвычайно важен практически. Он позволяет изучить динамику сложнейших систем в тех случаях, когда, например, уравнения регулятора столь сложны, что теоретическое изучение уравнений системы наталкивается на непреодолимые трудности.

Третий способ применения моделей показан на рис. 10.1, в. Он весьма близок ко второму способу и отличается от него лишь тем, что в данном случае присутствует реальный объект, а регулятор заменен моделью. На подобной модели можно изучить влияние на динамику системы различных параметров проектируемого регулятора, например люфта, вилки нечувствительности, постоянных времени его звеньев и т. д. Моделирование здесь также должно производиться на натуральных частотах. Возможно также замещение части объекта или части регулятора моделями.

Физические модели часто позволяют провести исследование сравнительно простыми средствами, а также имеют существенное педагогическое значение и применяются для тренировки учащихся. Они основаны на принципах физического подобия. Каждая такая модель может решать лишь сравнительно узкий класс задач. Поэтому в настоящее время получило широкое развитие математическое моделирование. Модели этого типа являются более универсальными, гибкими и в ряде случаев более точными, чем физические модели. Ниже рассматривается лишь этот тип моделей, получивший наибольшее распространение при исследовании динамики систем автоматического регулирования.

§ 2. Структурные схемы моделей

Любые модели, осуществляющие математическое моделирование, в сущности являются интеграторами дифференциальных уравнений, согласно которым должно происходить движение в модели. Методы построения интеграторов могут быть различны. Здесь мы рассмотрим лишь те методы, кото-

рые являются основными при построении моделей систем автоматического регулирования, т. е. весьма частного подкласса интеграторов.

Если структурная схема моделируемой линейной системы автоматического регулирования состоит, например, из двух инерционных звеньев и одного интегрирующего (рис. 10.2, а), то представляется естественным и с известной точки зрения полезным сохранить ту же структурную схему и в модели. Следовательно, в модели необходимо иметь набор элементарных звеньев — инерционные звенья, интегрирующие, дифференцирующие, усилительные и колебательные. Соединение этих звеньев между собой в том же порядке, что и в реальной системе, позволяет построить модель системы. Так как в модели необходимо суммировать некоторые величины (например, X_0 и $-X$ — см. рис. 10.2, б), то следует предусмотреть также суммирующее звено.

Пока не рассматривается вопрос о том, каким образом построены сами звенья модели. Будем обозначать эти звенья такими же прямоугольниками, какими изображали звенья реальной системы регулирования. Чтобы уравнения движения всей модели были теми же, что и у реальной системы, необходимо соблюсти зависимости между входными и выходными величинами звеньев такими же, как и в реальной системе. Следовательно, операторы звеньев модели будут такими же, как и операторы звеньев реальной системы. Иногда целесообразно перераспределить коэффициенты усиления звеньев по-иному, но с условием сохранения значения коэффициента усиления системы.

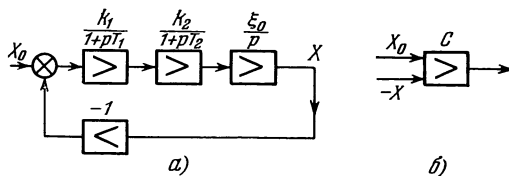


Рис 10.2.

Суммирующее звено в модели условимся изображать прямоугольником, над которым находится буква C (рис. 10.2, б). Интегрирующее звено обозначим в дальнейшем буквами $ИТ$, инерционное — $ИН$, усилительное — $У$, дифференцирующее — $Д$, а колебательное — $КЛ$.

Способ построения модели, показанный на рис. 10.2, не является единственным. Действительно, например, для системы, структурная схема которой изображена на рис. 10.2, а, зависимость между регулируемой величиной X и установленной X_0 выражается операторным равенством

$$\frac{X(p)}{X_0(p)} = W_з(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{\frac{R_1 R_2 \xi_0}{(1+pT_1)(1+pT_2)p}}{1 + \frac{R_1 R_2 \xi_0}{(1+pT_1)(1+pT_2)p}} = \frac{\xi}{(1+pT_1)(1+pT_2) + \xi} \cdot \quad (1)$$

Здесь $\xi = k_1 k_2 \xi_0$. Отсюда следует

$$[(1+pT_1)(1+pT_2)p + \xi] X(p) = \xi X_0(p). \quad (2)$$

Следовательно, уравнение для оригинала $X(t)$ имеет вид

$$\left[\left(1 + T_1 \frac{d}{dt}\right) \left(1 + T_2 \frac{d}{dt}\right) \frac{d}{dt} + \xi \right] X(t) = \xi X_0(t)$$

или

$$T_1 T_2 \frac{d^3 X}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dX}{dt} + \xi X = \xi X_0(t). \quad (3)$$

Это уравнение можно бесчисленным количеством способов представить в виде совокупности трех уравнений первого порядка. Например, можно

положить $X = x_1$ и

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} x_3 - \frac{1}{T_1T_2} x_2 - \xi x_1 + \xi X_0. \quad (5)$$

Уравнения (5) и (4) совместно образуют систему трех уравнений первого порядка, заменяющую уравнение (3).

Построим структурную схему модели, уравнениями движения которой служат уравнения (4) и (5). Каждое в отдельности из уравнений (4) есть

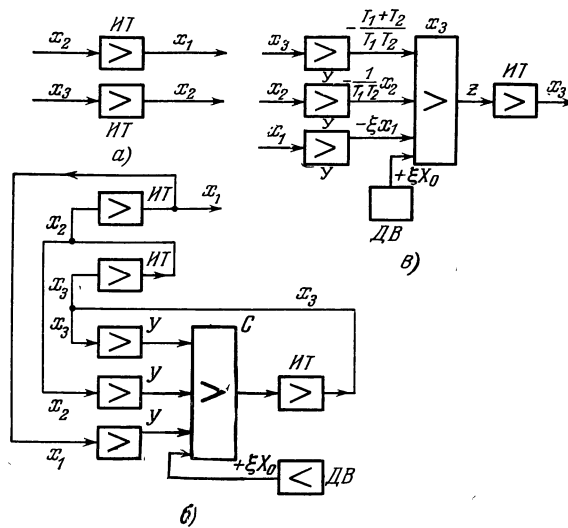


Рис. 10.3.

уравнение интегрирующего звена; на вход первого из этих звеньев подается величина x_2 , а выходной величиной является x_1 . На вход второго звена подана величина x_3 , причем здесь выходной величиной является x_2 (рис. 10.3, а). Уравнение (5) моделируется более сложной схемой, изображенной на рис. 10.3, б. Это также уравнение интегрирующего звена, выходной величиной которого является x_3 ; на вход звена подана сумма четырех членов:

$$-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} x_3, \quad -\frac{1}{T_1T_2} x_2, \quad -\xi x_1, \quad +\xi X_0.$$

Эта сумма получается на выходе суммирующего звена. На вход последнего подаются соответствующие слагаемые. Слагаемое $-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} x_3$ образуется путем прохождения величины x_3 через усилительное звено $У$ с коэффициентом усиления, равным

$$\left(-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} \right);$$

слагаемое $-\frac{1}{T_1 T_2} x_2$ образуется путем прохождения величины x_2 через усилительное звено с коэффициентом усиления, равным $(-\frac{1}{T_1 T_2})$, и т. д. Величина $+\xi X_0$, т. е. внешняя возмущающая сила, которая может быть функцией времени, задается извне от аппарата, который можно назвать датчиком функций времени или датчиком возмущений (сокращенно ДВ — см. рис. 10.3, б и в).

Из структурных схем отдельных блоков, изображенных на рис. 10.3, а и б, не видно, откуда получают входные величины, поступающие на эти блоки. Но ведь x_1, x_2 и x_3 являются как раз выходными величинами блоков. Следовательно, подав величины x_1, x_2, x_3 с выходов блоков на соответствующие входы этих блоков, получим модель, движение которой описывается требуемыми уравнениями (4) и (5). Структурная схема модели изображена на рис. 10.3, в.

Эта схема содержит большее количество звеньев, чем схема, изображенная на рис. 10.2, а. Однако она имеет и некоторое преимущество, так как построена лишь из *трех* типов звеньев: *интегрирующих, суммирующих и усилительных* (не считая датчика функций времени, который должен присутствовать и на схеме рис. 10.2, а). Очевидно, любую линейную модель можно построить лишь из этих трех типов звеньев, так как любое уравнение n -го порядка можно представить в виде совокупности n уравнений первого порядка. В моделях, построенных согласно такой совокупности, — они иногда называются матричными моделями, — не нужны инерционные, колебательные и дифференцирующие звенья. Модели типа, изображенного на рис. 10.2, а, называются иногда моделями *структурного* типа. Дифференцирующие звенья могут понадобиться в матричных моделях лишь в тех случаях, когда необходимо получение производных от внешних возмущающих сил (например, dx_0/dt и т. д.). Пусть в общем случае моделируется система линейных уравнений

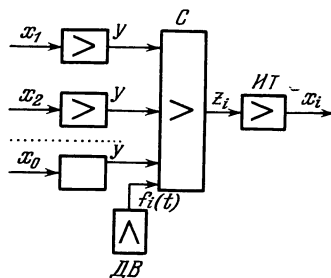


Рис. 10.4.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + f_i(t), \tag{6}$$

где $a_{ik} = \text{const}$. Схема матричной модели может быть образована путем соединения между собой n блоков, каждый из которых моделирует одно из уравнений (6). Рассмотрим, например, i -й блок (рис. 10.4). Его выходная величина x_i получается на выходе интегрирующего звена. На вход последнего подается величина z_i , равная, согласно уравнению (6),

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + f_i(t). \tag{7}$$

Величина z_i есть, следовательно, выходная величина суммирующего звена C , на вход которого поданы слагаемые $a_{i1}x_1, a_{i2}x_2, \dots, a_{in}x_n$ и $f_i(t)$. Последняя из этих величин получается от датчика функции времени ДВ. Остальные величины получают путем прохождения входных величин x_k через усилительные звенья, где x_k умножаются на постоянные величины a_{ik} (если a_{ik} — явные функции времени, то получаем модель линейной системы с переменными коэффициентами).

Аналогичным образом можно построить и структурные схемы нелинейных моделей. Пусть, например, требуется моделировать систему, уравнение движения которой имеет следующий вид:

$$\frac{dX}{dt} + a_1(t) X^2 + a_2(t) f[X - X_0(t)] = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) можно, очевидно, переписать в следующем виде:

$$\frac{dX}{dt} = Z, \tag{9}$$

где

$$Z = -a_1(t) X^2 - a_2(t) f[X - X_0(t)]. \tag{10}$$

Уравнение (9) является уравнением интегрирующего звена ИТ (рис. 10.5, а), к входу которого приложена величина Z. В свою очередь Z равно сумме двух членов. Первый из этих членов $-a_1(t) X^2$ можно получить следующим образом. Назовем множительным звеном (обозначение МЗ) аппарат, на вход которого подаются две величины x_1 и x_2 и который на выходе дает их произведение $x_1 x_2$. Если подать на оба входа МЗ величину X, то на выходе получим X^2 . Подав эту величину на один вход другого МЗ, а функцию времени $[-a_1(t)]$ — на другой вход МЗ, получим на выходе последнего величину $[-a_1(t) X^2]$, т. е. как раз первое из слагаемых, входящих в состав Z.

Чтобы получить второе слагаемое, необходимо иметь в составе модели аппарат, дающий на выходе величину $y = f(x)$, где x — входная величина.

Назовем этот аппарат нелинейным преобразователем с одним входом (обозначение НП-1). Подадим на вход такого нелинейного преобразователя разность $X - X_0(t)$, предварительно полученную с помощью суммирующего звена. Сама величина $X_0(t)$ поступает от датчика функции времени или вообще откуда-либо извне. На выходе аппарата НП-1 получим $f[X - X_0(t)]$. Если теперь с помощью множительного звена МЗ умножить эту величину на $-a_2(t)$, то получим второе слагаемое $-a_2(t) \cdot f[X - X_0(t)]$, входящее в состав Z. Таким путем образуется структурная схема модели, изображенная на рис. 10.5, а.

В более сложных нелинейных моделях могут понадобиться нелинейные преобразователи более сложного типа, дающие, например, выходную величину

$$y = f(x_1, x_2),$$

где x_1 и x_2 — две входные величины (см. рис. 10.5, б). Это нелинейные преобразователи с двумя входами (обозначение НП-2). В сущности множительные звенья являются частным случаем подобного нелинейного преобразователя, так как их выходная величина пропорциональна произведению входных, т. е.

$$y = cx_1 x_2. \tag{11}$$

Это частный случай зависимости $y = f(x_1, x_2)$. В нелинейных моделях часто оказывается необходимым также делительное звено (обозначение ДЗ),

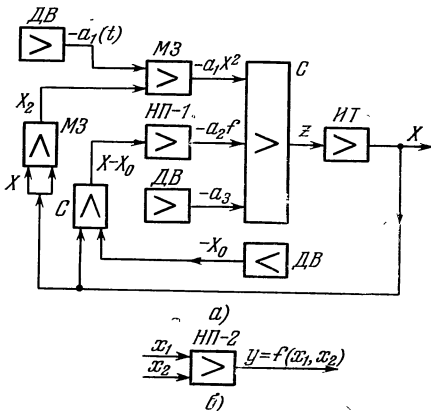


Рис. 10.5.

выходная величина которого

$$y = c \frac{x_1}{x_2}. \quad (12)$$

Здесь x_1 и x_2 — две входные величины.

В некоторых случаях может потребоваться воспроизведение разрывных или неоднозначных нелинейных функций f , например зависимостей, характерных для люфта, трения, гистерезиса и т. д.

Даже из беглого рассмотрения структурных схем видно, что нелинейные модели значительно сложнее линейных, так как в них присутствуют нелинейные преобразователи различных типов, в частности множительные, делительные звенья и т. д. Однако современная техника электрических моделей позволяет создавать и успешно эксплуатировать модели с весьма сложными нелинейными зависимостями.

§ 3. Звенья электрических моделей

В основу работы звеньев модели могут быть положены самые различные физические принципы. Например, можно создать электрохимические, электротермические и т. п. интегрирующие звенья. Ниже рассматриваются лишь

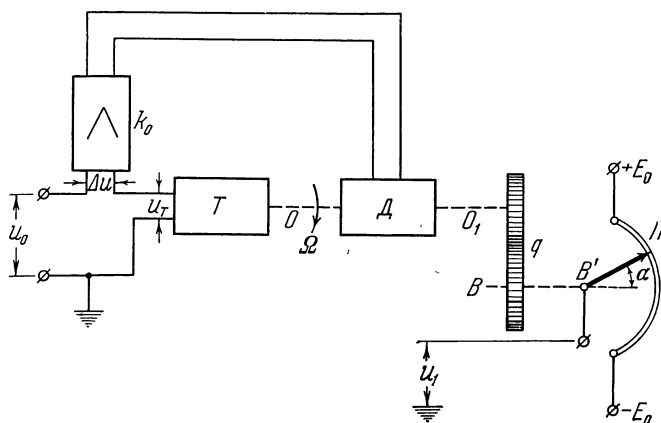


Рис. 10.6.

некоторые виды звеньев, нашедшие наиболее широкое применение и основанные на схемах следующих трех типов:

- 1) электромеханические,
- 2) пассивные электрические,
- 3) электронные.

Пример электромеханического интегрирующего звена показан на рис. 10.6. Здесь изображена схема, принципиально не отличающаяся от схемы регулятора скорости вала. Входное напряжение u сравнивается с напряжением u_T тахогенератора T , пропорциональным скорости Ω . Разность $\Delta u = u - u_T$ подается на вход усилителя k_0 и после усиления — на вход схемы двигателя D . Таким образом, скорость Ω вала автоматически регулируется так, чтобы осуществилось приближенное равенство $\Delta u \approx 0$. Поэтому скорость Ω оказывается пропорциональной входному напряжению u , т. е. $\Omega \approx k_1 u$. Однако в данной схеме выходной величиной является угол α поворота оси BB' , соединенной шестеренной передачей q с осью двигателя. Следовательно, связь между входной величиной u и выходной

величиной α дается уравнением

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Omega}{q} = \frac{k_1 u}{q}. \quad (1)$$

Если укрепить на оси BB' движок потенциометра Π , который скользит по обмотке, присоединенной к источнику напряжения, то в качестве выходной величины схемы может фигурировать напряжение E , пропорциональное α , т. е. $E = k_2 \alpha$. Уравнение (1) можно переписать так:

$$E = k_2 \alpha = \frac{k_1 k_2}{q} \int u dt = \xi \int u dt. \quad (2)$$

Это закон, характерный для интегрирующего звена.

Применяя прецизионные тахогенераторы с погрешностью $\pm 0,1\%$ от шкалы и асинхронные двухфазные двигатели с малой постоянной времени, можно получить доброкачественные интегрирующие звенья. Однако здесь сказывается некоторая погрешность из-за момента сухого трения

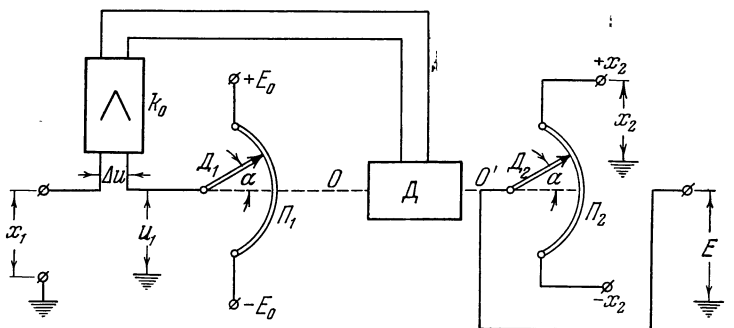


Рис. 10.7.

на валу, а также динамическая погрешность вследствие наличия постоянной времени схемы, достигающей даже в лучших образцах десятков миллисекунд. Необходимость добавления цепей дополнительных связей для стабилизации системы и надлежащего качества переходных процессов усложняет схему, которая в итоге получается сравнительно сложной.

Как правило, электромеханическая аппаратура применяется для моделирования звеньев со сравнительно медленными процессами, когда постоянная времени самого звена не играет заметной роли.

На рис. 10.7 показано электромеханическое множительное звено. Схема принципиально ничем не отличается от схемы регулятора углового положения вала OO' . На валу укрепляются движки D_1 и D_2 потенциометров Π_1 и Π_2 , изолированные электрически от вала. Напряжение u_1 потенциометра Π_1 , пропорциональное углу поворота вала (при $E_0 = \text{const}$), сравнивается с первым входным напряжением. Разность $\Delta u = x_1 - u_1$ подается на тракт схемы и после усиления и преобразования напряжения u_k воздействует на двигатель D . Последний заставляет вал повернуться так, чтобы Δu обратилось в нуль, т. е. чтобы имело место равенство $x_1 = u_1$.

Второе входное напряжение x_2 подается на потенциометр Π_2 ; угол поворота движка D_2 этого потенциометра тот же, что и у D_1 . Следовательно, выходное напряжение E схемы, снимаемое с потенциометра Π_2 , определяется равенством

$$\frac{E}{x_2} = \frac{u_1}{E_0}.$$

Так как $u_1 = x_1$, то

$$E = \frac{1}{E_0} x_1 x_2 = C x_1 x_2. \tag{3}$$

Это соотношение характерно для множительного звена.

Аналогичным образом можно построить и делительное звено. Нужно лишь считать в формуле (3) величину $x_2 = \text{const}$, а E считать второй входной величиной.

Для моделирования могут быть применены пассивные цепи, не содержащие источников энергии, кроме входной величины. Например, колебательный контур (рис. 10.8) может служить моделью колебательного звена, если корни характеристического уравнения для схемы комплексно сопряженные. Уравнение для напряжения E на конденсаторе имеет вид

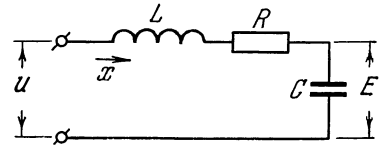


Рис. 10.8.

$$L \frac{d^2 E}{dt^2} + R \frac{dE}{dt} + \frac{1}{C} E = \frac{1}{C} u. \tag{4}$$

Пусть u — входная величина звена, E — выходная. Уравнение (4) есть уравнение колебательного звена при условии $d_0 < 1$ или

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{5}$$

Пассивные схемы с элементами L, R, C не могут служить моделями для любых систем регулирования. Это ясно хотя бы из того, что все эти схемы представляют собой устойчивые системы.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 10.8, при $L = 0$. Из уравнения (4) находим при $L = 0$

$$RC \frac{dE}{dt} + E = u. \tag{6}$$

Это уравнение инерционного звена. Однако если RC достаточно велико, то при не слишком больших значениях времени t это звено можно с некоторым приближением считать интегрирующим. Действительно, если

$$|u| \gg |E|, \tag{7}$$

то уравнение (6) принимает вид

$$RC \frac{dE}{dt} \approx u. \tag{8}$$

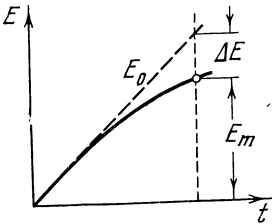


Рис. 10.9.

Последнее уравнение характеризует интегрирующее звено.

Условие (7) может иметь место при малых значениях E . Рассмотрим, например, переходную функцию звена, движение которого описывается уравнением (6):

$$E = u \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \tag{9}$$

Экспонента (9) изображена на рис. 10.9 сплошной линией. Если t не слишком велико, то экспонента мало отличается от прямой ut/RC , т. е. от переходной функции интегрирующего звена, движение которого описывается уравнением (8). Найдем значение t_m , при котором относительное отклонение $\Delta E/E_m$ экспоненты от прямой еще достаточно мало. Разлагая в выражении (9)

$e^{-t/RC}$ в ряд

$$e^{-t/RC} = 1 - \frac{t}{RC} + \frac{t^2}{(RC)^2} \frac{1}{2} - \dots$$

и ограничиваясь лишь тремя членами этого ряда, находим

$$E \approx u \left[\frac{t}{RC} - \frac{t^2}{(RC)^2} \frac{1}{2} \right]. \quad (10)$$

Если «идеальная» зависимость выражается формулой

$$E_0 = u \frac{t}{RC}, \quad (11)$$

то отклонение от нее

$$\Delta E = E_0 - E = u \frac{t^2}{2(RC)^2}. \quad (12)$$

Относительное отклонение

$$e = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{t}{2RC}. \quad (13)$$

Величина e для любого требуемого t теоретически может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно большую величину RC . Например, пусть требуется значение $e \leq 0,001 = e_m$ при $t \leq t_m = 100$ сек. Тогда, как видно из формулы (13), требуется избрать значение

$$RC \geq \frac{t_m}{2e_m} = \frac{100}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ сек.} \quad (14)$$

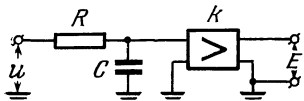


Рис. 10.10.

Однако практически неудобно осуществить схему со столь большой постоянной времени. Кроме того, описываемый вариант интегрирующего звена имеет серьезный недостаток: малую величину выходного напряжения. Согласно формуле (11) при $t_m = 100$ сек и $RC = 0,5 \cdot 10^5$ сек максимальное значение E_0 при $u = 100$ в оказывается равным

$$E_0 = 100 \frac{100}{0,5 \cdot 10^5} = 0,2 \text{ в.} \quad (15)$$

Чтобы довести значение выходного напряжения также, например, до 100 в, необходимо усилить напряжение на конденсаторе в $\frac{100}{0,2} = 500$ раз. В итоге получаем схему, содержащую электронный усилитель (рис. 10.10).

Оператор этой схемы

$$W(p) = \frac{E(p)}{u(p)} = \frac{R}{1 + pCR}. \quad (16)$$

Для значений p , при которых соблюдается условие $|pCR| \gg 1$, выражение (16) вырождается в формулу k/pCR для оператора интегрирующего звена.

Схема, изображенная на рис. 10.10, практически оказывается неудовлетворительной, так как в усилителе с высоким коэффициентом усиления k выходное напряжение E нестабильно по двум причинам: а) влияние э. д. с. дрейфа усилителя постоянного тока (см. гл. II); б) нестабильность самого значения k из-за изменения характеристик ламп, старения сопротивлений и т. д.

Эту схему можно видоизменить так, чтобы получить лучшие результаты.

Из формулы (6) следует, что, подав на вход звена не u , а сумму $u + E$, можно скомпенсировать добавкой E в правой части последний член левой части. В итоге получится уравнение (8). Реализация этой идеи приводит к схеме, изображенной на рис. 10.11.

Здесь напряжение E с конденсатора поступает на вход усилителя Y , не потребляющего мощность на входе; коэффициент усиления этого усилителя равен $+1$. Выходное напряжение усилителя, также равное E , поступает на выход схемы и в сумме с входным напряжением u подается также на вход RC схемы, т. е. между точками M и N . Положительные полярности всех напряжений обозначены на рис. 10.11 знаками $+$.

В такой схеме при $RC = 1 \text{ сек}$ (т. е., например, при $R = 1 \text{ Мом}$ и $C = 1 \text{ мкф}$) выходное напряжение уже при $t = 1 \text{ сек}$ достигает значения $E = 100 \text{ в}$, если $u = 100 \text{ в}$. Это можно видеть из выражения (16). Усилитель с коэффициентом усиления, равным единице, можно сделать стабильным за счет отрицательных обратных связей внутри схемы самого усилителя.

Схема, изображенная на рис. 10.11, имеет недостаток, заключающийся в требовании высокой стабильности значения $k = 1$. Действительно, пусть

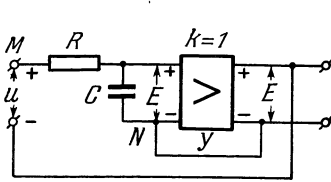


Рис. 10.11.

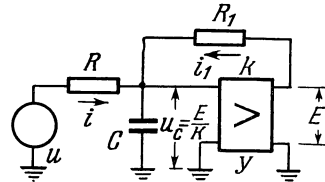


Рис. 10.12.

$k \neq 1$. Тогда на выходе усилителя появляется значение kE , и уравнение схемы можно записать в виде

$$RC \frac{dE}{dt} + E = u + kE,$$

откуда следует

$$\frac{RC}{1-k} \frac{dE}{dt} + E = \frac{1}{1-k} u. \tag{17}$$

Если $k < 1$, то звено фактически является инерционным и наблюдается погрешность в воспроизведении переходной функции интегрирующего звена. Если же, приближая k к единице, перейти за значение $k = 1$, т. е. достичь значения $k > 1$, то звено станет неустойчивым. Его переходная функция будет теперь безгранично нарастать при $t \rightarrow \infty$.

Применение неустойчивого звена практически неудобно; поэтому приближают k к единице, не переходя через это значение. Расчеты показывают, что для поддержания высокой точности воспроизведения переходной функции необходимо достижение весьма стабильных значений k , что практически может оказаться затруднительным.

Схему, изображенную на рис. 10.11, можно подвергнуть модификации, заменив сложение напряжений u и E сложением токов. На рис. 10.12 изображена модифицированная схема, на которой обозначены положительные полярности напряжений. Напишем уравнения схемы в операторном виде:

$$u_c = \frac{1}{pC} (i + i_1), \quad u - u_c = iR, \quad E - u_c = i_1 R_1, \quad E = u c k. \tag{18}$$

Исключая из этих уравнений u_c , i и i_1 , получаем оператор системы

$$pRCE = ku + \left[\frac{(k-1)R}{R_1} - 1 \right] E. \tag{19}$$

Если подобрать R , R_1 и k так, что квадратная скобка в выражении (19) обращается в нуль, то получаем уравнение интегрирующего звена. Однако и здесь, точно так же как в предыдущем варианте, изменение величины k

может сделать квадратную скобку положительной, вследствие чего звено в целом станет неустойчивым.

Схемы типа, изображенного на рис. 10.12, имеют ценное преимущество, заключающееся в простоте введения начальных условий. Они в основном применяются в моделях, работающих с повторением, где важно одновременное введение начальных условий в ряде звеньев и не очень жесткие требования к точности решения.

Для моделирования на натуральных частотах получили преимущественное применение схемы другого типа, основанные на принципе отрицательной обратной связи. Все линейные звенья могут быть построены по одному принципу — усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 10.13. Буквой U обозначен усилитель постоянного тока

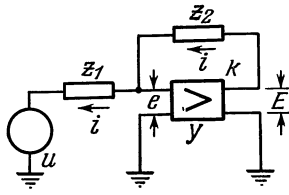


Рис. 10.13.

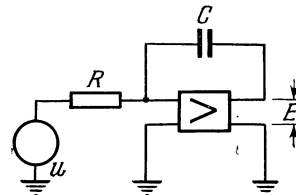


Рис. 10.14.

с большим коэффициентом усиления k и нечетным числом каскадов. Поэтому зависимость между входным напряжением e и выходным напряжением E усилителя имеет вид

$$E = -ke. \quad (20)$$

Примем, что усилитель не потребляет мощности на входе. В схему включены также импедансы z_1 и z_2 ; u является входным, а E — выходным напряжением. Для схемы, изображенной на рис. 10.13, можно написать следующие уравнения, используя преобразование Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} i(p) &= \frac{E(p) - e(p)}{z_2(p)} = \frac{e(p) - u(p)}{z_1(p)}, \\ E(p) &= -ke(p). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из уравнений (21) находим оператор звена

$$W(p) = \frac{E(p)}{u(p)} = -\frac{1}{z_1(p)} \frac{z_2(p)}{\frac{1+k}{k} + \frac{z_2(p)}{kz_1(p)}}. \quad (22)$$

Если формально устремить k к бесконечности в этом выражении, то в пределе получим

$$W(p) = \frac{z_2(p)}{z_1(p)}. \quad (23)$$

В случае, когда k достаточно велико, можно пользоваться выражением (23) с известными оговорками. Их смысл пояснен ниже для случая интегрирующего звена. Если поставить в качестве z_2 емкость C , а в качестве z_1 сопротивление R , то получим схему, изображенную на рис. 10.14. Полагая в выражении (23)

$$z_2(p) = \frac{1}{Cp}, \quad z_1(p) = R,$$

получаем

$$W(p) = -\frac{1}{pRC} = \frac{E(p)}{u(p)}, \quad (24)$$

откуда находим уравнение звена для оригиналов

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC} u = \xi u, \tag{25}$$

где $\xi = -\frac{1}{RC}$. Следовательно, схема, изображенная на рис. 10.14, есть схема интегрирующего звена. Однако точное выражение для оператора, согласно формуле (22), имеет вид

$$W(p) = -\frac{1}{pRC \frac{1+k}{k} + \frac{1}{k}}. \tag{26}$$

Это выражение показывает, что звено, изображенное на рис. 10.14, в действительности является инерционным. Из формулы (26) получаем уравнение для оригиналов

$$RC(1+k) \frac{dE}{dt} + E = -ku. \tag{27}$$

Это — уравнение инерционного звена с коэффициентом усиления k и постоянной времени $T' = RC(1+k)$. Если u — отрицательная единичная функция, то решение уравнения (27) может быть написано в следующем виде:

$$E = -k(1 - e^{-\frac{t}{T'}}) = \frac{tR}{RC(1+k)} - \frac{t^2 R}{2! [RC(1+R)]^2} + \dots \tag{28}$$

Между тем решение для идеального интегрирующего звена имеет вид $E = \text{const } t = (RC)^{-1}t$. Если $k \gg 1$, то без существенной погрешности можно принять в качестве идеальной кривой зависимость

$$E_{\text{ид}} = \frac{tR}{RC(1+k)}. \tag{29}$$

В таком случае относительная погрешность

$$\delta = \frac{E - E_{\text{ид}}}{E_{\text{ид}}} \approx \frac{t}{RC} \frac{1}{2! (1+R)} \approx \frac{t}{RC} \frac{1}{2R}. \tag{30}$$

Отсюда следует, что для обеспечения малой погрешности δ коэффициент усиления k должен быть достаточно велик. Кроме того, обеспечение малой погрешности δ возможно лишь в течение определенного промежутка времени t .

Пусть требуется, например, обеспечить $\delta \leq 0,25\% = 0,25 \cdot 10^{-2}$ при $t \leq 100$ сек, если постоянная времени интегрирующего звена $T = RC = 1$ сек. Из формулы (30) находим, что для этого требуется значение

$$k > k_{\text{min}} = \frac{t}{2T} = \frac{10}{2 \cdot 1 \cdot 0,25 \cdot 10^{-2}} = 20\,000.$$

Однако при $T = RC = 0,1$ сек погрешность за 100 сек может достигь величины 2,5% при $k = 20\,000$; поэтому желательно увеличение k по крайней мере до 40 000—50 000. При $u = 1$ переходная функция интегрирующего звена имеет вид $E = \frac{t}{RC}$. Если сопротивление R получит приращение ΔR ;

то переходная функция $E' = \frac{t}{(R+\Delta R)C}$. Относительная погрешность при $\frac{\Delta R}{R} \ll 1$ выражается формулой

$$\delta = \frac{E - E'}{E} \approx \frac{\frac{\Delta R}{R^2 C} t}{\frac{1}{RC} t} = \frac{\Delta R}{R}. \tag{31}$$

Если требуется, чтобы погрешность δ от нестабильности или неточности сопротивления не превышала $\pm 0,1\%$, то величина $\Delta R/R$ должна быть выдержана с той же точностью.

Дрейф усилителя постоянного тока можно представить на схеме в виде эквивалентной приведенной к входу э. д. с. дрейфа ΔE . Величина этой э. д. с. случайна и может быть любой в определенных пределах. Тогда, конечно, и на выходе звена, даже при отсутствии входного напряжения u , появится напряжение E — погрешность от дрейфа. Вычислим величину этой погрешности для схемы интегрирующего звена, изображенной на рис. 10.15. По-прежнему считается, что усилитель не потребляет мощности на входе.

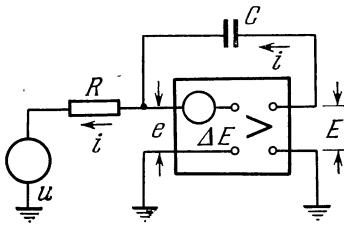


Рис. 10.15.

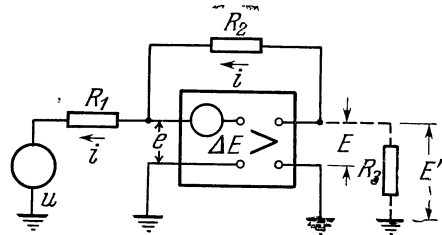


Рис. 10.16.

Уравнения схемы, изображенной на рис. 10.15, для изображений имеют вид (при отсутствии начального заряда на конденсаторе)

$$\left. \begin{aligned} E(p) &= -k[e(p) + \Delta E(p)], \\ \frac{E(p) - e(p)}{1/pC} &= \frac{e(p) - u(p)}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Из этих уравнений находим

$$\left[pRC \left(1 + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k} \right] E(p) = -u(p) - \Delta E(p) (1 + pRC). \quad (33)$$

Будем считать ΔE постоянной величиной (интересующая нас составляющая э. д. с. дрейфа меняется настолько медленно, что без значительной погрешности в течение промежутка времени в 10–20 сек, ее часто можно принять постоянной). Тогда, переходя к оригиналам и пренебрегая $1/k \ll 1$, получаем из уравнения (33)

$$RC \frac{dE}{dt} = -u - \Delta E. \quad (34)$$

При $u = 0$ и $E(0) = 0$ на выходе звена появится напряжение, изменяющееся в функции времени по закону

$$E = \frac{t}{RC} \Delta E. \quad (35)$$

Если, например, $\Delta E = 10$ мв, $RC = 1$ сек, то по истечении промежутка времени $t = 100$ сек погрешность на выходе звена достигнет величины

$$E = \frac{100}{1} 10^{-2} = 1\text{в},$$

что составляет 1% от шкалы, если последняя равна 100 в. Подобная погрешность может оказаться недопустимой, особенно если выходное напряжение данного звена требуется еще раз проинтегрировать.

Рассмотрим другой тип звена — усилительного, схема которого изображена на рис. 10.16. Уравнения этой схемы могут быть написаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E &= -k(e + \Delta E), \\ \frac{E - e}{R_2} &= \frac{e - u}{R_1}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Из этих уравнений получаем, полагая $\frac{R_2}{R_1} = k_0$,

$$\left[1 + \frac{1}{k}(1 + k_0)\right] E = -\Delta E (1 + k_0) - k_0 u. \quad (37)$$

Положим сначала $\Delta E = 0$. Если $k \gg 1$, то, пренебрегая вторым членом в скобке левой части равенства (37), находим

$$E = -k_0 u. \quad (38)$$

Это и есть уравнение усилительного звена с коэффициентом усиления $-k_0$. Действительный коэффициент усиления равен

$$k'_0 = -\frac{k_0}{1 + \frac{1}{k}(1 + k_0)}. \quad (39)$$

Если считать коэффициент усиления равным k_0 , то допускается относительная погрешность

$$\delta = \frac{k_0 - k'_0}{k_0} = 1 - \frac{k_0}{1 + \frac{1}{k}(1 + k_0)}. \quad (40)$$

Если $k = 4 \cdot 10$ и, например, $k_0 = 10$, то погрешность

$$\delta = 1 - \frac{1}{1 + \frac{10}{4 \cdot 10^4}} = 0,025\%.$$

Подобная величина обычно считается достаточно малой.

С учетом дрейфа, пренебрегая величиной $1/k(1 + k_0)$, выражение (37) можно переписать при $u = 0$ в следующем виде:

$$E = -\Delta E (1 + k_0). \quad (41)$$

Это и есть погрешность от дрейфа в усилительном звене. Например, при $k = 100$ и $\Delta E = 10$ мв величина [погрешности E на выходе достигает 1 в.

Если требуется, чтобы величина k_0 была функцией времени, то можно изменять сопротивление R_1 или R_2 в функции времени. Можно присоединить также потенциометр R_3 (рис. 10.16), движок которого перемещается в функции времени. Тогда коэффициент усиления всего звена E/u будет функцией времени.

Суммирующее звено изображено на рис. 10.17. Уравнения схемы имеют вид

$$i = \frac{E - e}{R_0} = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \frac{e - u_1}{R_1} + \dots + \frac{e - u_n}{R_n}, \quad (42)$$

$$E = -k(e + \Delta E).$$

Отсюда следует

$$\left[1 + \frac{1}{k} \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{R_0}{R_j}\right)\right] E = -\Delta E \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{R_0}{R_j}\right) - \sum_{j=1}^n \frac{R_0 u_j}{R_j}. \quad (43)$$

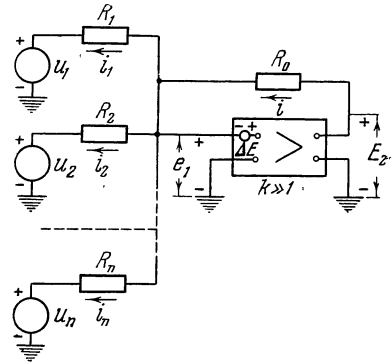


Рис. 10.17.

Пренебрегая вторым слагаемым в скобке левой части равенства и полагая $\Delta E = 0$, получаем уравнение суммирующего звена

$$E = - \sum_{j=1}^n \frac{R_0}{R_j} u_j. \quad (44)$$

Если $R_0 = R_j$, то

$$E = - \sum_{j=1}^n u_j. \quad (45)$$

Для этого случая из уравнения (43) при $u_j = 0$ получаем погрешность от дрейфа

$$E = - \Delta E \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{R_0}{R_j} \right) = - \Delta E (n + 1). \quad (46)$$

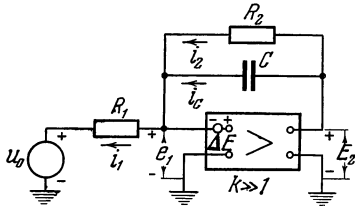


Рис. 10.18.

Следовательно, погрешность от дрейфа такая же, как и в усилительном звене с коэффициентом усиления $k_0 = n$, что очевидно также из схемы, изображенной на рис. 10.17 (при $u_j = 0$ все сопротивления R_j складываются параллельно, и результирующее сопротивление равно R_j/n).

На рис. 10.18 изображена схема инерционного звена. Уравнения схемы имеют вид

$$i(p) = \frac{e(p) - u(p)}{R_1} = i_2(p) + i_C(p) = \frac{E(p) - e(p)}{R_2} + \frac{E(p) + e(p)}{pC},$$

$$E(p) = -k[e(p) + \Delta E(p)]. \quad (47)$$

Из этих уравнений находим

$$\left[1 + pCR_2 + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + pCR_2 \right) \right] E(p) =$$

$$= - \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + pCR_2 \right) \Delta E(p) - \frac{R_2}{R_1} u(p). \quad (48)$$

Пренебрегая малым членом $\frac{1}{k} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + pCR_2 \right)$ в левой части равенства и полагая $\Delta E = \text{const}$, $CR_2 = T$, $\frac{R_2}{R_1} = k_0$, находим для оригиналов

$$E + T \frac{dE}{dt} = - (1 + k_0) \Delta E - k_0 u. \quad (49)$$

Если $\Delta E = 0$, то получается уравнение, характерное для инерционного звена. Это же уравнение можно получить из формулы (23) для оператора звена. Последняя в данном случае принимает вид

$$W(p) = \frac{E(p)}{u(p)} = \frac{z_2(p)}{z_1(p)} = - \frac{R_2 + \frac{1}{pC}}{R_1} = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + pR_2C} = - \frac{k_0}{1 + pT}, \quad (50)$$

откуда следует для оригиналов уравнение

$$E + T \frac{dE}{dt} = -k_0 u. \quad (51)$$

В установившемся режиме при $u = 0$ из уравнения (49) следует

$$(E)_{уст} = -(1 + k_0) \Delta E, \tag{52}$$

т. е. погрешность от дрейфа такая же, как и у усилительного звена с коэффициентом усиления k_0 .

Весьма важным свойством звеньев, построенных по принципу обратной связи, является их нечувствительность к ряду факторов — импеданцу утечки z_3 входной цепи на землю (рис. 10.19), внутреннему импеданцу выходного каскада усилителя z_0 и импеданцу нагрузки z_H . Конечно, эта нечувствительность имеет место лишь для достаточно больших значений коэффициента

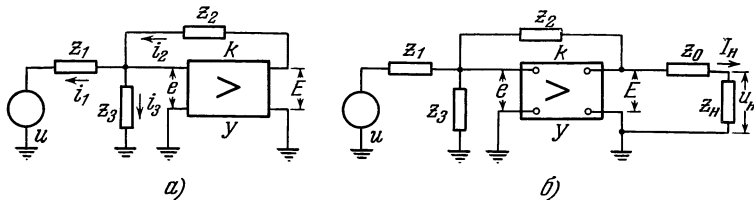


Рис. 10.19.

усиления усилителя как для постоянной составляющей $k_0 = -E/e$, так и для переменной составляющей $\tilde{k} = -dE/de$ (величины k и \tilde{k} могут не совпадать при нелинейной характеристике усилителя). Рассмотрим сначала схему, изображенную на рис. 10.19, а. Ее уравнения имеют вид

$$i_2(p) = \frac{E(p) - e(p)}{z_3(p)} = i_1(p) + i_3(p) = \frac{e(p) - u(p)}{z_1(p)} + \frac{e(p)}{z_3(p)}, \quad E(p) = -ke(p). \tag{53}$$

Из этих уравнений получаем

$$\left\{ \frac{1}{z_2(p)} + \frac{1}{k} \left[\frac{1}{z_2(p)} + \frac{1}{z_1(p)} + \frac{1}{z_3(p)} \right] \right\} E(p) = -\frac{u(p)}{z_1(p)}. \tag{54}$$

При достаточно большом k и ограничениях, наложенных на промежуток времени, в течение которого требуется соблюсти справедливость равенства, можно пренебречь вторым слагаемым в фигурной скобке. В результате получаем выражение

$$W(p) = \frac{E(p)}{u(p)} = -\frac{z_2(p)}{z_1(p)}$$

(вновь выражение (23)), не зависящее от z_3 . Следовательно, величина z_3 не оказывает заметного влияния на свойства звена. Поэтому, например, емкость или гальваническая утечка с входа на землю не влияет на работу звена.

Для схемы, изображенной на рис. 10.19, б, получаем аналогичным способом выражение

$$W(p) = \frac{u_H(p)}{u(p)} = \frac{k - \frac{z_H}{z_0}}{\frac{z_0 z_1}{z_H} \frac{k - \frac{z_0}{z_2}}{z_0 + z_2} + \left(1 + \frac{z_0}{z_2} + \frac{z_0}{z_H}\right) \left[1 + (1+k) \frac{z_1}{z_2 + z_0} + \frac{z_1}{z_3}\right]}. \tag{55}$$

Нетрудно видеть, что при большом k и это выражение превращается в выражение (23) и не зависит от z_3 , z_0 и z_H .

Можно подсчитать, исходя из этих выражений, внутреннее эквивалентное сопротивление звена, т. е. величину z_i в эквивалентной схеме для выходной цепи звена (рис. 10.20). Величина $|z_i|$ оказывается весьма малой; она равна 1—2 ом для усилительного звена при обычных значениях коэффициента усиления.

Следовательно, можно подключать к выходу звена любую нагрузку (например, шлейф осциллографа) без опасения, что это повлияет на характеристики звена, лишь бы ток, потребляемый от выхода звена, не превысил допустимого.

Существенная разница между выражениями для погрешности от дрейфа (42), (46) и (52), с одной стороны, и выражением (35), с другой стороны, состоит в том, что в первых погрешность постоянна, а в последнем она нарастает и по истечении достаточно большого промежутка времени может сделаться сколь угодно большой. Если перед включением схемы в работу разорвать связи между звеньями и подать какие-либо величины начальных напряжений (начальные заряды) на конденсаторы интегрирующих звеньев, то с течением времени эти напряжения будут меняться, так как погрешность от дрейфа на выходах звеньев будет нарастать.

Целесообразнее при разрыве связей между звеньями и установке начальных условий изменить схемы соединений интегрирующих звеньев, превратив их в инерционные звенья. Подобная схема установки начальных условий показана на рис. 10.21. Контакты K_1 и K_2 , принадлежащие реле начальных условий, находятся в положениях *a* тогда, когда происходит установка начальных условий и связи между звеньями разорваны. Как видно из рис. 10.21, при этом звено является инерционным, так как сопротивление R_{02} шунтирует конденсатор C . На вход звена может быть подано через сопротивление R_{01} напряжение от потенциометра Π ; при надлежащем положении движка этого потенциометра может быть установлено требуемое значение выходного напряжения E (и пропорционально ему заряда конденсатора C). Это значение может поддерживаться постоянным в течение любого промежутка времени, требуемого для установки значений и регулирования всех остальных блоков схемы.

Когда начинается процесс движения в модели, происходит переключение контактов K_1 и K_2 в положение *б*. При этом точка заземляется (что не особенно существенно, но полезно), а точка N — вход усилителя — присоединяется через сопротивление R к входному напряжению u . В этом положении схема превращается в нормальную схему интегрирующего звена.

Во время переключения контактов вход N усилителя через сопротивление R оказывается заземленным, и схема представляет собой также интегрирующее звено. Поэтому скачки напряжения на выходе в эти моменты невозможны. Во время нормальной работы звена сопротивление R не оказывает влияния. Так как точка M заземлена, то гальванические утечки между контактами реле также включаются на землю, шунтируя сопротивление R' , и не влияют на работу схемы. Сопротивление R' вообще может быть выключено из схемы; тогда его роль играют утечки. Входную цепь усилителя (см. рис. 10.21) следует экранировать и экран заземлять. Тогда

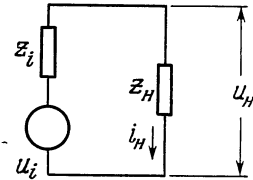


Рис. 10.20.

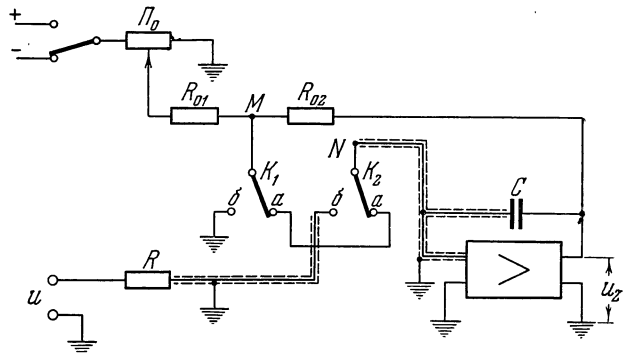


Рис. 10.21.

утечки от любых источников напряжения замыкаются на экран. Сопротивление утечки самого экрана оказывается заземленным и не влияет на работу схемы.

Весьма важно также надежное заземление схемы.

Из изложенного выше ясно, насколько важна задача уменьшения дрейфа усилителя постоянного тока. Обычные пути уменьшения дрейфа: отбор и старение ламп, стабилизация анодных напряжений и напряжения накала, катодная компенсация в первом каскаде, применение стабильных сопротивлений, ненапряженный температурный режим усилителя, тщательная установка нуля усилителя специальной рукояткой.

Однако совокупность подобных мероприятий не может обеспечить пределы изменения э. д. с. дрейфа, приведенной к входу, меньшие 2—3 мв, что может в ряде моделей (особенно высокого порядка) оказаться чрезмерно большой величиной. Радикальное уменьшение э. д. с. дрейфа может быть достигнуто в усилителе с применением модуляции. Скелетная схема усилителя с модуляцией УМ изображена на рис. 10.22, а. Входное напряжение e_0 постоянного тока через входной фильтр Φ_1 поступает на модулятор M (чаще всего контактный). В модуляторе напряжение e преобразуется в переменное напряжение u частоты — 50—200 гц и поступает далее на усилитель переменного тока $У$. Усиленное переменное напряжение u' поступает на синхронный фазочувствительный демодулятор $ДМ$, выпрямляется и фильтруется фильтром Φ_2 , причем выходное напряжение e_1 постоянного тока меняет свой знак при изменении знака входного напряжения e_0 .

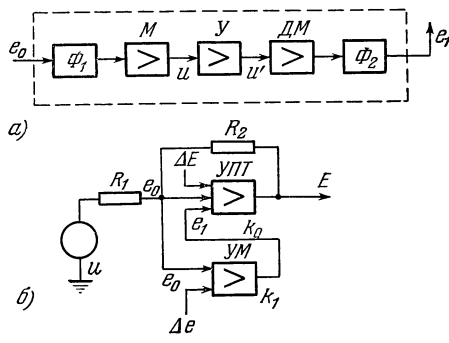


Рис. 10.22.

Вследствие отсутствия дрейфа у усилителя переменного тока проблема дрейфа практически снимается для усилителя УМ. Точнее, роль дрейфа теперь играют малые по величине наводки и фон несущей частоты; последние могут быть снижены до нескольких микровольт, приведенных к входу. Однако усилитель УМ непосредственно не может быть применен в модели; действительно, его частотная характеристика вследствие наличия фильтров Φ_1 и Φ_2 и небольшой несущей частоты тракта переменного тока имеет сравнительно узкую ширину полосы пропускаемых частот. Последняя не превышает 5—10 гц. Между тем усилитель постоянного тока должен иметь ширину полосы пропускаемых частот, не меньшую 100—200 гц, а в ряде случаев требуется ширина в несколько тысяч герц.

Поэтому были разработаны схемы, сочетающие широкополосную частотную характеристику обычного усилителя постоянного тока и отсутствие (точнее, весьма малую величину) дрейфа, характерное для усилителя с модуляцией УМ. Одна из подобных схем изображена на рис. 10.22, б. Здесь входное напряжение усилителя подается на два усилителя — УМ с модуляцией и УПТ — обычный усилитель постоянного тока. Выходное напряжение e_1 усилителя УМ подается на вход УПТ. Выходное напряжение E усилителя УПТ является выходным напряжением схемы. Вся схема в целом представляет собой усилительное звено с коэффициентом усиления $k_0 = R_2/R_1$. Рассмотрим уравнения этой схемы, считая коэффициент усиления k_0 усилителя УПТ бесконечно большим, коэффициент усиления усилителя УМ равным k_1 и учитывая э. д. с. наводок, фона и т. д., приведенную к входу усилителя УМ, Δe , а также э. д. с. дрейфа усилителя УПТ

ΔE . Уравнения для схемы, изображенной на рис. 10.22, б, имеют вид

$$\Delta E + e_0 + e_1 = 0, \quad e_1 = k_1 (e_0 + \Delta e), \quad E = (1 + k_0) e_0 = k_0 u. \quad (56)$$

Отсюда получаем при $u = 0$ дрейф на выходе звена

$$E = -\frac{1+k_0}{1+k_1} \Delta E - (1+k_0) \frac{k_1}{1+k_1} \Delta e. \quad (57)$$

Следовательно, э. д. с. дрейфа по сравнению с предыдущим случаем (формула (42)) уменьшается в $(1+k_1)$ раз. Кроме того, добавляется еще э. д. с. Δe , обусловленная усилителем УМ. Если $k_0 = 100$, $k_1 = 3 \cdot 10^3$, $\Delta E = 10$ мв, $\Delta e = 5$ мкв, то напряжение на выходе $-E \approx \frac{100}{3000} 10 + 100 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0,83$ мв. Между тем без усилителя с модуляцией дрейф был бы равен

$$(1+k_0) \Delta E \approx 100 \cdot 10 = 1 \text{ в.}$$

Эффект усилителя с модуляцией значительно снижается при быстрых изменениях дрейфа. Действительно, если комплексный коэффициент усиления УПМ равен $W_1(j\omega)$, а комплексный коэффициент усиления УМ равен $W_2(j\omega)$, то общий комплексный коэффициент усиления усилителя выражается формулой

$$W(j\omega) = [1 + W_2(j\omega)] W_1(j\omega) = W_1(j\omega) + W_1(j\omega) W_2(j\omega). \quad (58)$$

Из-за наличия фильтров Φ_1 и Φ_2 величина $W_2(j\omega)$ резко понижается при увеличении ω . Поэтому, если для частоты $\omega = 0$ обычно

$$W(0) = W_1(0) + W_1(0) W_2(0) = 4 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^3 \approx 12 \cdot 10^7,$$

т. е. чрезвычайно высокая цифра благодаря которой совершенно не ощущается влияние конечного значения $W(0)$, то при частотах порядка десятков герц величина $W(j\omega)$ имеет порядок $W_1(j\omega)$, — усилитель УМ как бы почти не участвует в работе схемы.

Если усилитель с модуляцией включен в схему интегрирующего звена, то эквивалентная э. д. с. дрейфа на входе определится величиной $\frac{\Delta E + k_1 \Delta e}{1 + k_1}$, т. е. уравнение (34) примет вид

$$RC \frac{dE}{dt} = -U - \frac{\Delta E + k_1 \Delta e}{1 + k_1}. \quad (59)$$

При $u = 0$ и численных значениях ΔE , Δe , k , указанных выше, а также значении $RC = 1$ сек получим по истечении времени $t = 100$ сек, напряжение дрейфа на выходе звена

$$E = \frac{t}{RC} \frac{\Delta E + k_1 \Delta e}{1 + k_1} \approx \frac{100}{1} \frac{10^{-2} + 3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^3} \approx 0,8 \text{ мв,}$$

что является достаточно малой цифрой, значительно меньшей 1 в — погрешности, достигаемой при подсчете по формуле (34) для обычного усилителя.

§ 4. Схемы электронных моделей линейных систем

Рассмотрим примеры построения принципиальных схем линейных электронных моделей. Схемы звеньев, построенные по принципу усилителя с обратной связью, описаны в предыдущем разделе. Построим схему, соответствующую скелетной схеме системы регулирования, изображенной на рис. 10.2. При построении следует учесть, что операторы схем звеньев, изображенных на рис. 10.14—10.17, содержат знак «минус» перед отношением $z_2(p)/z_1(p)$ (см. уравнение (23)).

На рис. 10.23 изображена схема электронной модели, соответствующая скелетной схеме, показанной на рис. 10.2. Суммирующее звено построено на усилителе $Y-5$ и содержит равные друг другу сопротивления R_0 . Поэтому на выходе этого звена получается алгебраическая сумма входных величин с обратным знаком, т. е. $X - X_0$. Чтобы правильно учесть знаки в последовательной цепочке звеньев, можно воспользоваться простым правилом: каждая пара последовательно соединенных звеньев не дает перемены знака.

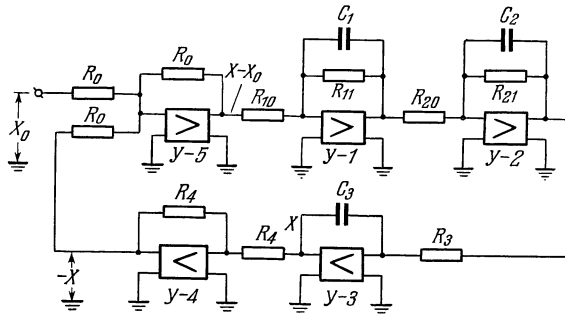


Рис. 10.23.

Следовательно, звенья, построенные на усилителях $Y-5$, $Y-1$, $Y-2$ и $Y-3$, в итоге не дают перемены знака, и можно отвлечься от знака при их рассмотрении.

На усилителе $Y-1$ построено инерционное звено с оператором $\frac{k_1}{1+pT_1}$. Поэтому следует выбрать параметры этого звена так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\frac{R_{11}}{R_{10}} = k_2, \quad C_1 R_{11} = T_1. \quad (1)$$

Для следующего инерционного звена, построенного на усилителе $Y-2$, должны удовлетворяться аналогичные равенства

$$\frac{R_{22}}{R_{20}} = k_2, \quad C_2 R_{22} = T_2. \quad (2)$$

Интегрирующее звено построено на усилителе $Y-3$. Если требуется, чтобы его оператор был равен ξ/p , то нужно положить

$$\frac{1}{R_3 C_3} = \xi. \quad (3)$$

На выходе интегрирующего звена получается величина X . Между тем на вход суммирующего звена $Y-5$ должно быть подано напряжение $-X$. Чтобы изменить знак X на обратный, необходимо включить инверторное звено на усилителе $Y-4$.

При практическом выполнении схемы может оказаться, что, избрав некоторый определенный масштаб для величины X (например, 100 в — предельное допустимое значение для X), мы получим на выходе какого-либо из промежуточных усилителей ($Y-1$ или $Y-2$) слишком большое напряжение, выходящее за пределы линейной части характеристики усилителя, что недопустимо. В таком случае можно уменьшить масштаб для напряжения X , например, до 50 в. Это, однако, невыгодно, так как отношение э. д. с. дрейфа к шкале X теперь увеличится в два раза, т. е. увеличится погрешность. Нередко можно избежать увеличения погрешности, сохранив масштаб прежним, но перераспределив коэффициенты усиления звеньев так, чтобы

общий коэффициент усиления системы

$$\xi = k_1 k_2 \xi_0 = \frac{R_{11}}{R_{10}} \frac{R_{22}}{R_{20}} \frac{1}{R_3 C_3} \quad (4)$$

остался постоянным. Уменьшив коэффициенты усиления k_1 и k_2 и увеличив ξ_0 (т. е. уменьшив $R_3 C_3$), можно добиться того, что прежнее значение X будет достигаться при меньших напряжениях на выходах усилителей $Y-1$ и $Y-2$. Если эти напряжения не выходят за допустимые пределы, то схема будет работать правильно.

Иногда в одном звене совмещаются функции суммирующего и интегрирующего или суммирующего и усилительного звеньев. Рассмотрим, например, схему, изображенную на рис. 10.24. Задача этой схемы состоит в том, чтобы воспроизводить уравнение

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = k_0 \omega_0^2 X_0. \quad (5)$$

Здесь $(-X_0)$ — выходная величина.

Уравнения для изображений величин X и x_1 при условии, что схема в начальный момент времени находилась в покое (заряды на конденсаторах

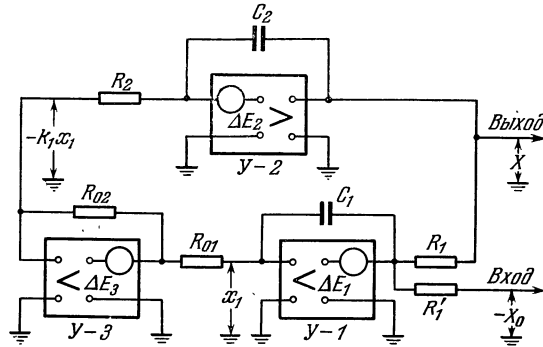


Рис. 10.24.

C_1 и C_2 равны нулю), могут быть написаны в следующем виде (здесь не учитываются э. д. с. дрейфа $\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3$):

$$\left. \begin{aligned} X(p) &= \frac{k k_1 x_1(p)}{1 + p R_2 C_2 (1+k)}, \\ x_1(p) &= \frac{\frac{X_0(p)}{R_1} - \frac{X(p)}{R_1}}{\frac{1+k}{k} p C_1 + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь величиной k_1 обозначена величина коэффициента усиления усилительного звена $Y-3$:

$$k_1 \approx \frac{R_{02}}{R_{01}};$$

k — коэффициент усиления каждого из усилителей $Y-1, Y-2, Y-3$, который будем считать весьма большим, но конечным. Исключая $x_1(p)$ из этих уравнений, находим

$$\left[\frac{1+k}{k} p C_1 + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right) \right] \left[\frac{1 + p R_2 C_2 (1+k)}{k k_1} \right] X(p) = \frac{X_0(p)}{R_1} - \frac{X(p)}{R_1}. \quad (7)$$

Если $k \gg 1$, то приближенно можно переписать уравнение в следующем виде:

$$\left(p^2 + \frac{k_1}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right) X(p) = \frac{k_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{R_1}{R_1'} X_0(p). \quad (8)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k_1}{R_1 R_2 C_1 C_2}, \\ k_0 &= \frac{R}{R_1'}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$(p^2 + \omega_0^2) X(p) = k_0 \omega_0^2 X_0(p). \quad (10)$$

Очевидно, что уравнение, написанное для оригиналов, имеет вид уравнения (5).

В практическом выполнении уравнение, воспроизводимое схемой, несколько отличается от уравнения (5). Чтобы отличие действительно получаемого решения X от идеального требуемого решения X^* было мало, необходимо весьма тщательное выполнение схемы, стабилизация напряжений питания и т. д. Существенными источниками погрешности в схеме могут явиться:

- 1) конечность значения коэффициента усиления k усилителя при расчете данной схемы; например, по уравнениям (9) величина k принята бесконечно большой;
- 2) неточное значение и нестабильность значений сопротивлений и емкостей в схеме;
- 3) электродвижущие силы дрейфа усилителей постоянного тока;
- 4) паразитные гальванические связи между источниками постоянных напряжений питания и входными зажимами усилителей;
- 5) паразитные гальванические связи между входами и выходами усилителей, в том числе утечки конденсаторов;
- 6) паразитные гальванические связи между различными звеньями;
- 7) паразитные или дополнительные реактивные элементы в схеме — емкости монтажа, стабилизирующие емкости, помещаемые внутри усилителей; дополнительные фильтры, помещаемые иногда на выходе схемы для сглаживания фона, и т. д.;
- 8) нелинейность характеристик усилителей, а также иногда нелинейность вольтамперных характеристик сопротивлений;
- 9) проводящие включения в диэлектрике конденсаторов;
- 10) фон переменного тока (когда он настолько велик, что забивает тракт усилителя);
- 11) неточность установки начальных условий и неодновременность срабатывания различных реле при пуске схемы.

В линейных моделях с переменными коэффициентами и нелинейных моделях добавляются новые источники погрешностей, содержащиеся в таких звеньях, как $MЗ$, $DЗ$ и т. д.

Пункты 4 и 6 обычно не опасны, так как вредное влияние гальванических связей устраняется помещением входных проводов усилителей в заземленный экран.

Пункт 8 для усилителей не имеет существенного значения, пока коэффициент усиления усилителя достаточно велик.

Пункты 2, 5, 8 и 9 не создают значительной погрешности, если выбрать правильно тип и точно соблюсти значения параметров деталей.

Пункты 3 и 1 не создают значительной опасности, если усилители снабжены автоматической компенсацией дрейфа (см. § 3 этой главы). Однако

в случае отсутствия последней э. д. с. дрейфа (а иногда и конечность значения k) может явиться одной из основных причин погрешности.

Оценим влияние конечного значения коэффициента усиления усилителя.

Рассмотрим для этого вновь уравнение типа (7), которое перепишем в следующем виде:

$$\left[p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 \left(\frac{1+k}{k} \right)^2 \frac{1}{k_1} + p R_1 C_1 \frac{1+k}{k^2} \frac{1}{k_1} + p R_1 R_2 C_2 \frac{1+k}{k} \frac{1}{k_1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right) + \frac{R_1}{k} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right) \frac{1}{k k_1} + 1 \right] X = \frac{R_1}{R_2'} X_0. \quad (11)$$

Положив

$$\dot{k}_0 = \frac{R_1}{R_1'}, \quad (12)$$

можно записать с достаточной точностью

$$\left[p^2 + p \frac{1}{k} \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 (1+k_0)}{R_1 C_1 R_2 C_2} + \frac{k_1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \right] X = k_0 \frac{k_1}{R_1 C_1 R_2 C_2} X_0 \quad (13)$$

или

$$[p^2 + ph + \omega_0^2] X = k_0 \omega_0^2 X_0, \quad (14)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}, \quad (15)$$

$$h = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} (1+k) \right]. \quad (16)$$

Рассчитаем схему, например, при $k_0 = 1$. Если при данном ω_0 требуется насколько возможно уменьшить h , то следует подобрать величины $R_1 C_1$ и $R_2 C_2$ так, чтобы обеспечить минимум выражения (16) при связывающем условии (15). Соответствующий расчет дает неодинаковые значения $R_1 C_1$ и $R_2 C_2$ (при $k_1 = \text{const}$). Однако практически удобнее положить их равными максимально допустимым значениям, а регулирование значения ω_0 осуществить путем изменения k_1 . Поэтому, считая, например $R_1 = R_2 = 1 \text{ Мом}$ и $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкф}$, положим $R_1 C_1 = R_2 C_2 = 1 \text{ сек}$. Тогда, поскольку $k_0 = 1$, получим

$$\omega_0 = \sqrt{k_1}, \quad h = \frac{3}{k}. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + hp + \omega_0^2 = 0 \quad (18)$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}, \quad (19)$$

действительная часть которых по модулю равна

$$\alpha = \frac{h}{2}. \quad (20)$$

Период колебаний

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (21)$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания

$$\vartheta = \alpha T = \frac{\pi h}{\omega_0}. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что величина ϑ есть логарифм отношения двух последовательно проходящих амплитуд затухающего колебания. Амплитуды после-

довательных колебаний A_1, A_2, \dots, A_n связаны соотношениями

$$A_i = A_{i-1}e^{-\vartheta}. \quad (23)$$

Отсюда следует

$$A_n = A_1 e^{-(n-1)\vartheta}. \quad (24)$$

Выясним, по прошествии скольких амплитуд (их число пусть равно n) размах колебания снизится на 50%? Если коэффициент усиления $k = 5 \cdot 10$ и, например, $\omega_0 = 1$, то

$$\vartheta = \frac{\pi h}{\omega_0} = \frac{3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 5} \approx 1,89 \cdot 10^{-4}.$$

Для определения числа n из уравнения (24) находим

$$0,5 = e^{-(n-1) 1,89 \cdot 10^{-4}},$$

откуда

$$(n - 1) 1,89 \cdot 10^{-4} = \ln 2 \approx 0,695.$$

Итак,

$$n = 1 + \frac{0,695}{1,89 \cdot 10^{-4}} \approx 3680.$$

Следовательно, колебания затухают очень медленно; за время нескольких колебаний и даже десятков колебаний амплитуда их не уменьшится заметно. Подобное затухание нередко считается приемлемым. Если требуется все же его уменьшить, то можно осуществить частичную компенсацию затухания, подав часть выходного напряжения усилителя $У-3$ ($-\beta k_1 x_1$, где $\beta \ll 1$) на вход усилителя $У-1$ через сопротивление R . Если $R_1 = R'_1 = R$, то, как нетрудно показать, полная компенсация затухания будет иметь место при осуществлении условия

$$\beta = \beta_{\text{пр}} = \frac{4}{kk_1}. \quad (25)$$

Практически, однако, нельзя слишком близко подходить к значению $\beta = \beta_{\text{пр}}$, так как при неизбежных колебаниях значений параметров затухание может стать отрицательным и система окажется неустойчивой.

Рассмотрим вновь схему, изображенную на рис. 10.24, причем на этот раз не будем учитывать конечности значения k ; однако учтем наличие сопротивлений утечки R_y , шунтирующих конденсаторы C_1 и C_2 . Сопротивления утечки двух конденсаторов положим равными друг другу. Пусть также $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC = 1$ сек. Уравнения схемы принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \left(pRC + \frac{R}{R_y} \right) x_1 &= -X + X_0 + \beta k_1 x_1, \\ \left(pRC + \frac{R}{R_y} \right) X &= k_1 x_1. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Исключая из этих уравнений x_1 , находим, полагая $RC = 1$ сек,

$$\left\{ p^2 + p \left(2 \frac{R}{R_y} + \beta k_1 \right) + \left[\left(\frac{R}{R_y} \right)^2 - \beta k_1 \frac{R}{R_y} + k_1 \right] \right\} X = k_1 X_0. \quad (27)$$

Пусть сначала $\beta = 0$; искажение уравнения заключается в следующем:

1) несколько изменяется собственная частота:

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{R}{R_y} \right)^2; \quad (28)$$

2) появляется член, характеризующий затухание:

$$h = 2 \frac{R}{R_y}; \quad (29)$$

3) меняется коэффициент усиления звена, поскольку правая часть должна иметь вид $k_0\omega_0^2 = k'_0\omega_0'^2 = k_1$:

$$k'_0 = k_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} = k_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \left(\frac{R}{R_y}\right)^2}. \quad (30)$$

Влияние изменения частоты весьма невелико. Пусть, например, $R = 1$ Мом и $R_y = 1000$ Мом. Тогда

$$\left(\frac{R}{R_y}\right)^2 = (10^{-3})^2 = 10^{-6}.$$

Следовательно, если, например, $\omega_0 = 1$, то $\omega'_0 \approx \omega_0$. Поэтому и $k'_0 \approx k_0$. Однако появляется затухание

$$h = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Наличие подобного затухания может сказаться на работе схемы. Действительно, логарифмический декремент затухания, согласно формуле (22), равен

$$\phi = \alpha T = \frac{\pi h}{\omega_0} = 2 \frac{R}{R_y} \frac{\pi}{\omega_0} = 6,28 \cdot 10^{-3}.$$

Амплитуда колебания снизится, например, на 10% после n колебаний; число n найдем, согласно выражению (24), из формулы

$$0,9 = e^{-(n-1)\phi},$$

откуда

$$n = 1 + \frac{\ln 10 - \ln 9}{\phi} = 1 + \frac{46}{0,434 \cdot 6,28} \approx 18.$$

Это число в ряде случаев может оказаться недостаточным, в связи с чем необходимо применять стирофлексные конденсаторы с хорошей изоляцией, сопротивление которой значительно больше 1000 Мом на 1 мкф; иногда целесообразно введение компенсации. Требуемый коэффициент компенсации β , как видно из выражения (27), может быть подсчитан по формуле

$$2 \frac{R}{R_y} - \beta k_1 = 0. \quad (31)$$

Например, при $k_1 = 1$ и прежних значениях R и R_y величина β равна

$$\beta = \frac{2}{k_1} \frac{R}{R_y} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Полная компенсация практически недостижима по причинам, указанным ранее.

В схемах, где применены усилители без автоматической компенсации дрейфа, погрешность, вызываемая э. д. с. дрейфа, может оказаться значительной. Если учесть э. д. с. дрейфа ΔE_1 , ΔE_2 , ΔE_3 (см. рис. 10.24), то уравнение схемы, считая коэффициент усиления усилителя $k = \infty$, можно написать в следующем виде:

$$\frac{C_1 C_2 R_2}{k_1} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{X}{R_1} = \frac{X_0}{R'_1} + C_1 \frac{d(\Delta E_1)}{dt} + \Delta E_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) + \frac{C_1 R_2 C_2}{k_1} \frac{d^2(\Delta E_2)}{dt^2} + \frac{C_1}{k_1} \frac{d(\Delta E_2)}{dt} + \frac{1+k_1}{k_1} C_1 \frac{d(\Delta E_3)}{dt}. \quad (32)$$

Если приближенно считать ΔE_1 , ΔE_2 , ΔE_3 постоянными величинами, то уравнение принимает вид

$$\frac{C_1 C_2 R_2}{k_1} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{X}{R_1} = \frac{X_0}{R'_1} + \Delta E_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right). \quad (33)$$

Наличие дополнительного члена в правой части уравнения изменяет процесс. Если начальные условия для X остаются прежними, то влияние ΔE_1 сказывается в следующем:

1) появляется дополнительный член Δx в установившемся значении X , причем

$$\Delta x = \Delta E_1 \left(1 + \frac{R_1}{R'_1} \right); \quad (34)$$

это означает, что нуль схемы смещается на величину Δx ;

2) изменяются начальные условия для переходной составляющей. Действительно, $X = x_d + x_s$, где x_s — частное решение уравнения с правой частью, а x_d — переходная составляющая, т. е. общее решение уравнения без правой части. Если начальные условия для X остаются прежними, а x_s меняется, то в свою очередь изменяются начальные условия для x_d .

Влияние э. д. с. дрейфа удобнее всего оценивать по изменению установившейся части решения. Из формулы (34) следует, что если $R_1 = R'_1$, то при $\Delta E = 1$ мв величина $\Delta x = 10 \cdot 10^{-3} (1 + 1) = 20$ мв, что является небольшой погрешностью при шкале в 100 в.

Если, однако, $R'_1 = 0,01R_1$, то

$$\Delta x = 10 \cdot 10^{-3} (1 + 100) \approx 1 \text{ в},$$

что может оказаться уже значительной величиной, а иногда и недопустимой.

Погрешность линейных моделей целесообразно иногда вычислять по методам частотных характеристик. Пусть, например, на вход «идеальной» модели (без учета погрешности) подается синусоидальная возмущающая сила с амплитудой, равной единице. Тогда выходная величина модели X выразится формулой

$$X = W_1(j\omega), \quad (35)$$

где $W_1(j\omega)$ — комплексный коэффициент передачи «идеальной» системы. Если же учесть погрешности в системе (отклонение параметров, паразитные реактивные элементы и т. д.), то действительное значение равно

$$X = W_2(j\omega), \quad (36)$$

где $W_2(j\omega)$ — коэффициент передачи реальной системы. Амплитуда погрешности может быть оценена как модуль числа

$$\varepsilon(j\omega) = W_2(j\omega) - W_1(j\omega). \quad (37)$$

В качестве меры относительной погрешности можно принять величину

$$\delta = \frac{|\varepsilon(j\omega)|}{|W_1(j\omega)|}. \quad (38)$$

Требуется, чтобы максимум этой величины не превзошел допустимого значения.

§ 5. Универсальные нелинейные преобразователи с одним входом (НП-1)

В нелинейных моделях интеграторах дифференциальных уравнений и других типах нелинейных ВУ необходимы блоки, выполняющие функции нелинейного преобразования. Простейшим из таких блоков является преобразователь с одним входом, осуществляющий зависимость

$$y = f(x), \quad (1)$$

где x — входная величина, y — выходная, а f — нелинейная функция. Примем для таких преобразователей обозначение НП-1. В электронных ВУ величины x и y обычно представляют собой напряжения.

Одна из линий классификации НП-1 — это разделение на универсальные и специализированные преобразователи. На универсальном НП-1

должны набираться различные однозначные и непрерывные функции $f(x)$, принадлежащие к некоторому достаточно широкому классу функций. В специализированных НП-1 устанавливается одна определенная форма функциональной зависимости (например, характеристика люфта, зоны нечувствительности и т. д.), и можно лишь регулировать параметры этой функции, не меняя ее вида.

Характер возможного решения задачи о разработке НП-1 во многом определяется способом задания функции $f(x)$. Возможны различные способы задания, из которых основными являются:

- 1) задание в виде разложения функции в ряд, например в степенной ряд, тригонометрический ряд, ряд по экспонентам, полиномам Лежандра;
- 2) задание в форме шаблона или кривой, начерченной на бумаге или ленте, в виде магнитной записи на ферромагнитной ленте и т. д.;
- 3) задание значений функции в ряде точек интервала изменения x , причем в преобразователе должен быть предусмотрен определенный способ интерполяции для нахождения значений y в остальных точках интервала;
- 4) задание дифференциального уравнения для функции $f(x)$, которое можно параллельно решать на дополнительном интеграторе (этот способ, как не получивший существенных практических применений в электронных интеграторах, ниже не рассматривается);
- 5) задание в виде функции времени $f(t)$ с последующим преобразованием в $f(x)$.

При первом способе задания функция получается в виде суммы более простых функций — членов ряда. Количество этих членов не должно быть велико, иначе схема преобразователя усложняется. С другой стороны, при небольшом числе членов сужается класс задаваемых функций. Кроме того, представление в виде ряда часто оказывается неудобным потому, что требуемая зависимость обычно задается кривой, таблицей или формулой для $f(x)$. Поэтому необходимы дополнительные расчеты, иногда весьма сложные, для определения коэффициентов членов ряда. Лишь в отдельных случаях, когда структура $f(x)$ позволяет осуществить малое число членов ряда, а также требуется высокая точность воспроизведения и имеются аппараты (например, множительные звенья) с высокой точностью для получения членов ряда, этот способ задания функции оказывается выгодным.

Второй способ задания весьма удобен; однако при необходимости частых замен или корректирования вида функции $f(x)$ необходимость изготовления ряда новых шаблонов или кривых может усложнить эксплуатацию преобразователя. К тому же НП-1 этого типа отличаются, как правило, сложной схемой и увеличенной погрешностью либо конструктивно сложными подвижными частями.

При третьем способе задания функция набирается на коммутационном поле (либо на перфорированной ленте). В случае набора значений функции в точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) допускается сравнительно быстрая и простая замена одной функции другой, причем не требуются какие-либо вычисления или расчеты. Однако чрезмерное увеличение числа точек x_i вызывает усложнение схемы. Если функцию можно представить с достаточной точностью при сравнительно небольшом (порядка 10—40) числе точек x_i , то третий способ задания может считаться наиболее удобным.

Число точек задания связано со способом аппроксимации. Наиболее часто применяется линейная аппроксимация. Существуют также методы, позволяющие осуществить квадратичную аппроксимацию. При этом можно уменьшить число точек задания, но схемы оказываются более сложными и пока не получили распространения.

Последний (пятый) способ задания также иногда применяется, но, однако, широкого распространения не получил ввиду известной сложности схем.

Рассмотрение возможных способов выполнения универсальных НП-1 с различными способами задания показало, что совместить требования точности, простоты устройства и его эксплуатации, гибкости и широкой применимости удастся наилучшим образом при третьем способе задания. Поэтому ниже рассматривается аппаратура, в которой применен именно этот способ.

Рассмотрим диодный НП-1. Насколько известно авторам, первая схема универсального диодного нелинейного преобразователя НП-1 была разработана Л. В. Коганом под руководством Л. И. Гутенмахера. Эта схема позволяла

аппроксимировать заданную функцию отрезками прямой. Однако она не получила широкого распространения в вычислительных устройствах, так как не свободна от ряда

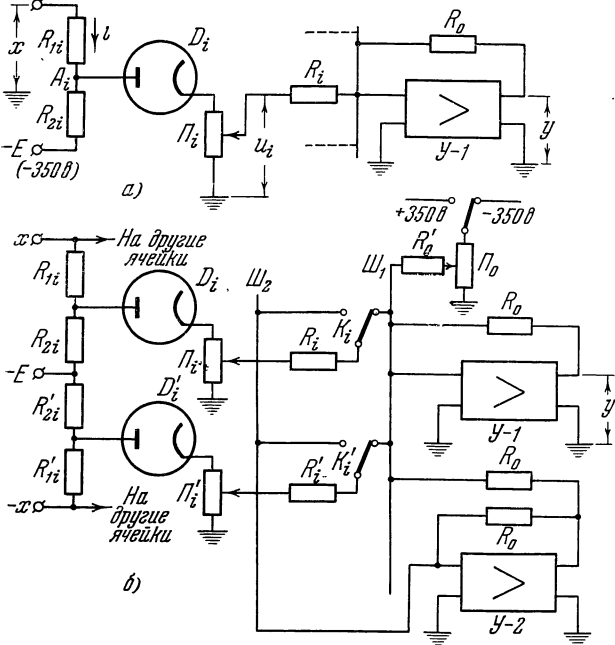


Рис. 10.25.

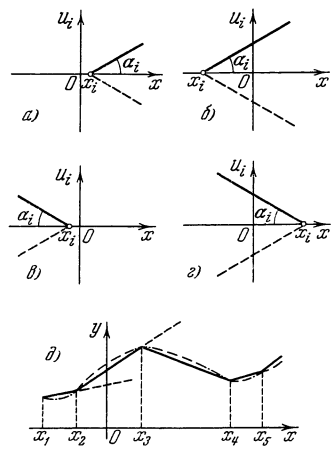


Рис. 10.26.

недостатков. Так, в частности, для каждого преобразователя данного типа требуется дополнительный источник питания. Схема не дает возможности получить несколько функций одного переменного.

На рис. 10.25, а показана ячейка простой схемы диодного НП-1, свободная от этих недостатков. На вход ячейки подается напряжение x . Рассмотрим зависимость напряжения u_i на выходе потенциометра Π_i от входного напряжения x (рис. 10.26). При $x = 0$ потенциал точки A_i меньше нуля, так как к нижней точке потенциометра $R_{1i} R_{2i}$ подано отрицательное напряжение $-E$ (например, -350 в). Поэтому диод D_i не проводит, и напряжение u_i равно нулю. Если увеличивать x , то при некотором значении $x_i > 0$ потенциал точки A_i становится равным нулю. Так как ток i , текущий по потенциометру при $x = x_i$, может быть выражен формулами

$$i = \frac{x_i}{R_{1i}} = \frac{E}{R_{2i}},$$

то значение x_i определяется из равенства

$$x_i = E \frac{R_{1i}}{R_{2i}}. \tag{2}$$

Если $x > x_i$, то диод D_i начинает проводить; поэтому его можно заменить на схеме рис. 10.25, *a* малым сопротивлением. Если остальные сопротивления схемы значительно больше, то сопротивление диода D_i можно принять равным нулю. Следовательно, при дальнейшем увеличении x напряжение u_i начнет расти, как показано на рис. 10.26, *a*. Угол наклона α_i можно регулировать, перемещая движок потенциометра P_i . Напряжение u_i вместе с выходными напряжениями других ячеек приключается к усилителю $У-1$, на выходе которого появляется выходное напряжение y . Кривая, изображенная на рис. 10.26, *a*, является элементарной ломаной, с одним изломом. Большой класс кривых можно с достаточной точностью аппроксимировать ломаными (рис. 10.26, *d*), а любую сложную ломаную, очевидно, можно представить в виде суммы элементарных ломаных. На этом основана схема диодного НП-1. В этой схеме «набор» любой кривой ведется, например, так: устанавливается крайнее значение x_1 . Затем угол наклона первой элементарной ломаной подбирается таким, чтобы обеспечить заданное значение функции y в точке x_2 конца первого интервала (рис. 10.26, *d*). После этого на следующей ячейке подбирают угол наклона второй ломаной так, чтобы обеспечить требуемое значение y в точке x_3 , и т. д. Часто значения x_i концов интервалов делаются фиксированными, а интервалы — равными друг другу. Однако это не обязательно.

Чтобы иметь возможность набирать любые кривые, необходим набор элементарных ломаных, показанных на рис. 10.26, *a*, *b*, *в*, *г*, а также ломаных, обратных им по знаку и показанных пунктиром на этих рисунках. Не требуется иметь все эти виды ломаных. Достаточно, например, ограничиться ломаными, изображенными на рис. 10.26, *a* и *в*. Вторая из этих ломаных получается из первой изменением знака x . Следовательно, она может быть получена с помощью такой же ячейки, как и первая, но при подаче на эту ячейку напряжения — x .

На рис. 10.25, *б* показана полная схема диодного НП-1, причем для простоты изображены лишь две ячейки двух типов. Ячейка с диодом D_i та же, что и на рис. 10.25, *a*. На ячейку с диодом D'_i подается обратное по знаку напряжение $-x$ от входного инвертора. Ячейки первого типа служат для набора участков кривой $y = f(x)$ при $x > 0$; ячейки второго типа служат для набора участков кривой при $x < 0$. Набор производится независимо на этих двух участках; при наборе каждого из участков кривой следует двигаться от точки $x = 0$. Значение y при $x = 0$ задается с помощью потенциометра P_0 . Каждая из ячеек с помощью тумблера K_i , K'_i может быть приключена либо к шине $Ш_1$ выходного усилителя $У-1$, либо к шине $Ш_2$ выходного инвертора $У-2$, который передает напряжение ячейки на выход с обратным знаком. Таким образом, получают обратные по знаку ломаные, изображенные пунктиром на рис. 10.26, *a* и *в*.

Можно поменять местами катод и анод диодов в ячейках. Тогда получают виды ломаных, показанные на рис. 10.26, *б* и *г*. Однако такая модификация не дает ничего принципиально нового.

Диодный НП-1 прост и надежен в работе, но с его помощью невозможно без значительного увеличения дрейфа выходного напряжения осуществлять набор функций $f(x)$, которые имеют резкие изломы и крутые фронты нарастания, т. е. большую величину производной dy/dx . Действительно, теоретически можно получить весьма большую величину крутизны характеристики, применив выходной усилитель с достаточно большим коэффициентом усиления. Но при этом и дрейф на выходе увеличится в таком же отношении и может стать недопустимо большим. К тому же при этом увеличивается влияние изменения характеристик диодов, особенно их нижних участков. Между тем это изменение может иметь место как вследствие старения диода, так и из-за колебания напряжения накала. В итоге величина максимально

допустимой критизны функции dy/dx оказывается ограниченной допустимым значением дрейфа на выходе. Дрейф увеличивается также при резких изменениях модулей знакочередующихся производных на соседних интервалах; таким образом, иногда оказывается ограниченной и величина d^2y/dx^2 второй производной.

Для уменьшения дрейфа при воспроизведении таких функций следует применять, хотя бы частично, компенсационный метод, пользоваться принципом обратной связи. Схема диодно-триодного НП-1, в котором применяется этот принцип, показана на рис. 10.27.

На вход двухкаскадного усилителя постоянного тока $У-1$ через входное сопротивление R_0 подается напряжение x . На выходе двухкаскадного

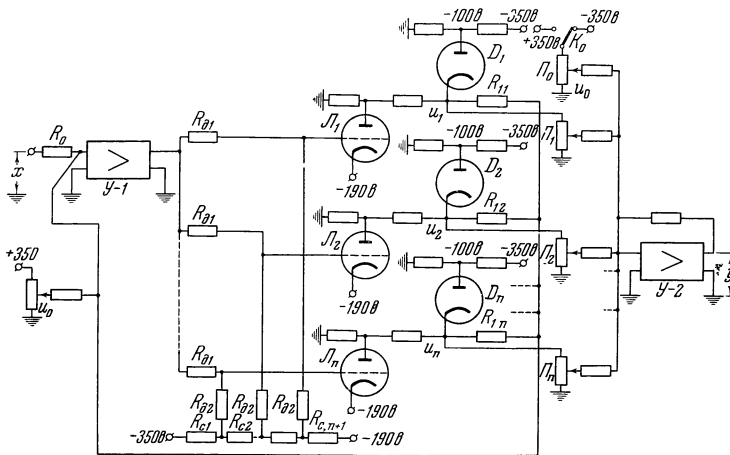


Рис. 10.27.

усилителя $У-1$, обладающего большим коэффициентом усиления, подключены делители R_{01} , R_{02} . Выходное напряжение с различных делителей подается на сетки ламп $L_1 - L_n$. Кроме того, на сетки ламп подаются смещения с делителя $R_{c1} - R_{c, n+1}$, которые подобраны таким образом, что, когда входное напряжение равно своему наименьшему значению (например, $x = -100$ в), все лампы $L_1 - L_n$ заперты.

Лампы $L_1 - L_n$ представляют собой как бы третий, выходной каскад усилителя $У-1$; от цепей анодов этих ламп на вход усилителя $У-1$ через сопротивления $R_{11} - R_{1n}$ поданы обычные обратные связи, аналогично тому, как это выполняется в любом усилительном звене. Рассмотрим зависимости между выходными напряжениями u_1, u_2, \dots, u_n на катодах диодов D_1, \dots, D_n , например при условии сопротивлений обратных связей R_{1i} . Последнее, впрочем, не обязательно.

Пусть входное напряжение x равно x_{\min} , а затем начинает увеличиваться, изменяясь в некотором интервале $x_{\min} \leq x \leq x_{\min} + \Delta x_m$. Тогда откроется лишь одна из выходных ламп L_i , а именно та, на сетке которой наименьшее смещение. Это лампа L_i ; очевидно, обратная связь усилителя окажется при этом замкнутой через сопротивление R_{1i} . Следует отметить, что потенциалы на анодах остальных, пока еще запертых ламп $L_2 - L_n$ равны нулю и, следовательно, напряжения u_2, \dots, u_n равны нулю, а все диоды D_1, \dots, D_n заперты.

Изменение выходного напряжения u_1 первой ячейки, в которой находится лампа L_1 , обозначим через Δu_1 . Эта величина определяется

из соотношения

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x} = -\frac{R_{11}}{R_0},$$

где Δx — изменение входного напряжения. Следовательно,

$$\Delta u_1 = -\frac{R_{11}}{R_0} \Delta x. \quad (3)$$

Когда выходное напряжение u_1 , изменяясь, достигает своего крайнего значения, допустим, равного -100 в, то начнет проводить диод D_1 ; дальнейшее изменение u_1 прекратится, и это напряжение «застынет» на значении $u_1 = u_{1\min} = -100$ в. Этому значению будет соответствовать значение входного напряжения $x = x_{\min} + \Delta x_m$, причем Δx_m определяется из равенства (3). При подстановке $\Delta u_1 = -100$ в

$$\Delta x_m = \frac{R_0}{R_{11}} \cdot 100. \quad (4)$$

Кривая изменения напряжения u_1 показана на рис. 10.28, а.

Лампа L_2 при $x = x_{\min} + \Delta x_m$ еще заперта, но стоит чуть увеличить входное напряжение, как напряжение на выходе усилителя $Y-I$ мгновенно «подскочит» вследствие того, что цепь обратной связи усилителя через лампу L_1 оказывается разомкнутой и усилитель $Y-I$ без обратной связи будет иметь очень большой коэффициент усиления. Тогда лампа L_2 откроется, причем замкнется цепь обратной связи усилителя $Y-I$ через сопротивление R_{12} .

Напряжение u_2 на выходе второй ячейки, т. е. ячейки лампы L_2 начнет изменяться на втором интервале таким же образом, как напряжение u_1 изменялось на первом. Приращение Δu_2 можно рассчитывать по формуле, аналогичной выражению (3):

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta x} = -\frac{R_{12}}{R_0}. \quad (5)$$

В конце второго интервала при $x = x_{\min} + 2\Delta x_m$ напряжение u_2 достигнет потенциала ограничения -100 в, при котором откроется ограничивающий диод D_2 . Зависимость u_2 от x показана на рис. 10.28, б.

Аналогичные рассуждения можно продолжить и для всех остальных ламп $L_3 - L_n$. На каждом интервале одно из напряжений u_i будет изменяться. На последнем интервале изменяется напряжение u_n (рис. 10.28, в).

Напряжения, пропорциональные u_1, \dots, u_n , снимаются с потенциометров Π_1, \dots, Π_n и подаются непосредственно на выходной суммирующий усилитель $Y-2$ либо через инвертор, не показанный на рис. 10.27. Последнее необходимо в том случае, когда на каком-либо интервале знак производной нужно изменить на противоположный. Функция $f(x)$ набирается, таким образом, в виде суммы напряжений, имеющих форму трапецеидальных уступов (рис. 10.28). При наборе функции значения ее в конечных точках интервалов устанавливаются равными заданным, а во внутренних точках интервалов имеет место кусочно-линейная аппроксимация. Напряжение u_0 , соответствующее значению функции при $x = x_{\min}$, задается с помощью отдельного потенциометра Π_0 и тумблера K_0 .

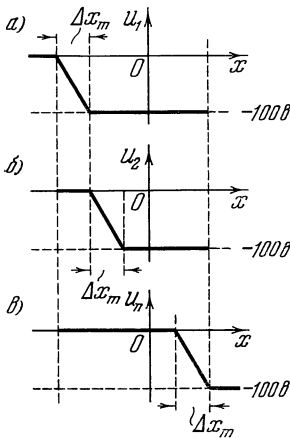


Рис. 10.28.

Схема, изображенная на рис. 10.27, имеет ряд модификаций. Например, подавая на вход схемы абсолютную величину $|x|$ вместо x и положив входное смещение $U_0 = 0$, можно использовать ряд ламп L_1, \dots, L_n два раза: как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Для этого нужно иметь дополнительный инвертор, выход которого приключается вместо выходов потенциометров P_i к выходному усилителю при $x < 0$. К выходу этого инвертора приключаются выходы дополнительных потенциометров P'_i , включенных параллельно потенциометрам P_i .

Диодно-триодные НП-1 позволяют осуществить набор функций с резкими и частыми изломами. Однако они отличаются более сложной схемой, чем диодные НП-1. Л. Н. Фицнер и Л. В. Медведев предложили комбинацию схем диодного и диодно-триодного НП-1. Эта схема сохраняет положительные свойства диодно-триодного НП-1, однако устройство в целом упрощается. Весь диапазон изменения входной величины x разбивается на небольшое число крупных интервалов по диодно-триодной схеме (первая ступень аппроксимации). Внутри каждого интервала осуществляется разбиение на более мелкие участки (вторая ступень аппроксимации) с помощью диодных схем.

Структурная схема комбинированного НП-1 показана на рис. 10.29. Входное напряжение x поступает на диодно-триодный НП-1, обозначенный ДТ-НП-1. Выходные напряжения u_1, u_2, \dots, u_n ячеек этого НП-1 в свою очередь подаются на входы диодных НП-1, обозначенных Д-НП-1-1, ..., Д-НП-1- n . Выходы последних приключены к суммирующему усилителю, на выходе которого получается напряжение y . В одном из выполненных экземпляров содержится восемь диодно-триодных ячеек, дающих разбиение диапазона изменения входной величины x на восемь основных интервалов. Ширина каждого из них может устанавливаться дискретно через 1 в в пределах от 3 до 45 в путем изменения сопротивлений R_{1i} , выполненных в виде магазинов. Каждый основной интервал с помощью диодных схем, содержащих по две ячейки (один двойной диод), разбивается на три равные части. Блок позволяет получать максимальную крутизну функции $f(x)$, равную 33, и резкие изломы с вдвое большей величиной скачка производной.

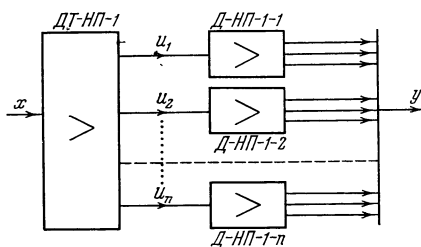


Рис. 10.29.

Длительная эксплуатация диодно-триодных и комбинированных НП-1 дала положительные результаты. Недостатком таких блоков является большая сложность, а также ограниченная ширина полосы пропускаемых частот из-за наличия сложной цепи обратной связи. Однако частоты до 15 гц проходят хорошо сквозь выполненный блок. Для прохождения более высоких частот необходимо расширить полосу пропускания усилителей, применяя, например, форсирующие емкости на делителях $R_{\partial 1}, R_{\partial 2}$.

Можно построить НП-1 по чисто компенсационной схеме. Такой блок может обеспечить высокую точность (до сотых долей процента), но весьма сложен. Поэтому он не получил значительного распространения в практических системах.

Из изложенного выше видно, что задача обеспечения повышенной точности, стабильности и объема класса воспроизводимых кривых решается в основном путем внедрения компенсационного принципа. Естественно, что с повышением требований возрастает и сложность схем. Поэтому нет смысла применять всюду одну и ту же схему. При менее жестких требованиях рационально применение диодных НП-1. Если требуется воспроизводить кривые с большой крутизной и резкими изломами, то наиболее целесообразно

применять диодно-триодные или комбинированные НП-1. Наконец, в отдельных случаях, когда требуется повышенная стабильность и структура кривой подходит для этого, можно применять компенсационные НП-1 либо аппроксимировать кривую $f(x)$ степенным рядом с применением прецизионных множительных звеньев (см. ниже).

§ 6. Специализированные НП-1

Для воспроизведения типовых зависимостей, например синуса, параболы, экспоненты, которые не требуется перестраивать, нелинейные преобразователи универсального типа не нужны. Целесообразнее строить для таких случаев более простые схемы специализированного типа. Кроме того,

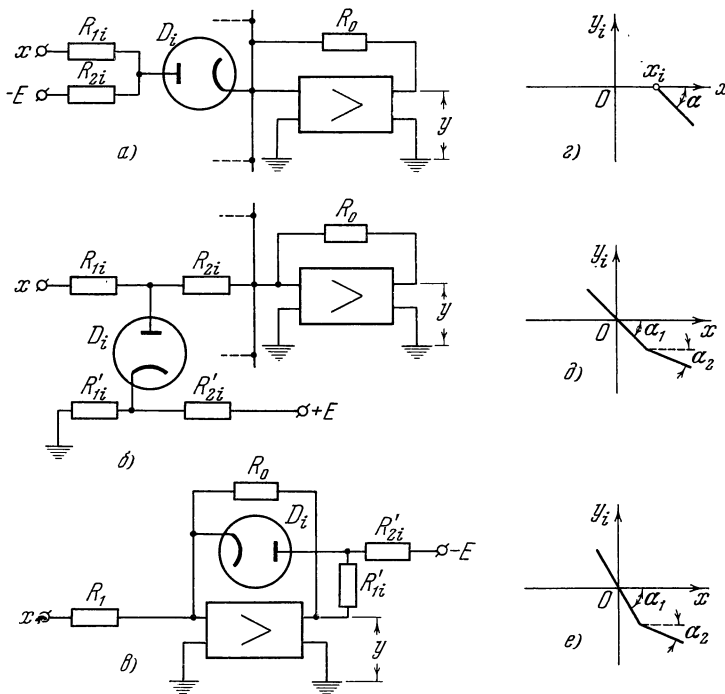


Рис. 10.30.

при помощи универсальных НП-1 рассмотренного выше типа вообще невозможно получить ряд специальных зависимостей, например релейную характеристику, характеристику люфта. Следовательно, кроме универсальных НП-1, необходимо иметь еще и специализированные преобразователи.

Для воспроизведения специальных нелинейных характеристик обычно применяются схемы, включающие диоды и усилители. Комбинация этих элементов позволяет осуществить большое разнообразие схем. Мы сначала рассмотрим типы схем, близкие к универсальным схемам диодных НП-1. Наиболее часто применяемые в специализированных НП-1 схемы диодных ячеек показаны на рис. 10.30, а, б, в.

Схема, изображенная на рис. 10.30, а, предложена А. Д. Таланцевым. Она является видоизменением диодной ячейки, показанной на рис. 10.25, а, и получается из последней при равном нулю сопротивлении R_i и бесконечном сопротивлении потенциометра (причем предполагается, что движок его находится в верхнем положении). Характеристика схемы показана на рис. 10.30, г,

где по оси ординат отложена лишь составляющая y_i выходного напряжения y , обусловленная одной диодной ячейкой; остальные ячейки считаются отключенными. Достоинством этой схемы является простота расчета параметров элементарной ломаной. Эти параметры рассчитываются по очевидным формулам

$$x_i = E \frac{R_{1i}}{R_{2i}}, \quad \text{tg } \alpha_i = \frac{R_0}{R_{1i}}. \quad (1)$$

Другой тип схемы, показанный на рис. 10.30, б, по существу является такой же схемой ограничителя. Ее характеристика изображена на рис. 10.30, д. Угол α_2 отличен от нуля и, вообще говоря, тем больше, чем больше сопротивления R'_{1i} и R'_{2i} .

На рис. 10.30, в показан вариант диодной ячейки с диодом в цепи обратной связи. Соответствующая характеристика изображена на рис. 10.30, е. Переменив местами анод и катод диода (при этом придется изменить также знак смещения E), подавая напряжение ячейки на выход через инвертор, а также изменив знак x , можно получить модификации элементарных ломаных, сводящиеся к отображениям прежних кривых от оси абсцисс или оси ординат.

В настоящее время ламповые диоды в НП-1 заменяются кристаллическими диодами — германиевыми либо кремниевыми. На рис. 10.31 показаны два варианта схем с ячейками на кристаллических диодах. Первая из этих схем действует так же, как схема рис. 10.30, а, а вторая — как схема рис. 10.30, в. Схемы, изображенные на рис. 10.31, отличаются от прежних наличием дополнительных диодов K'_i . Диод K'_i проводит тогда, когда диод K_i заперт. Так как диод K'_i при токе, протекающем через него в прямом направлении, является малым сопротивлением, то обратное напряжение на «рабочем» диоде K_i всегда невелико, что гарантирует его от пробоя. Аналогично и «рабочий» диод страхует от пробоя обратным напряжением дополнительный диод K'_i .

Рассмотрим теперь вопрос о моделировании зоны насыщения и зоны нечувствительности. Характеристики с зоной насыщения и зоной нечувствительности, показанные на рис. 10.32, весьма часто встречаются в системах автоматического регулирования. Для моделирования первой из этих зависимостей можно применить либо схему ограничителя, либо схему, показанную на рис. 10.33.

Пока входное напряжение x находится между некоторыми пределами $x_2 < x < x_1$ (рис. 10.32, а), диоды D_1 и D_2 заперты. Поэтому схема представляет собой усилительное звено с коэффициентом усиления

$$k_0 = \frac{R_0}{R_1}. \quad (2)$$

Однако при $x > x_1$ потенциал выхода y делается столь низким, что отпирается диод D_1 . Если бы прямое сопротивление диода, а также сопротивления

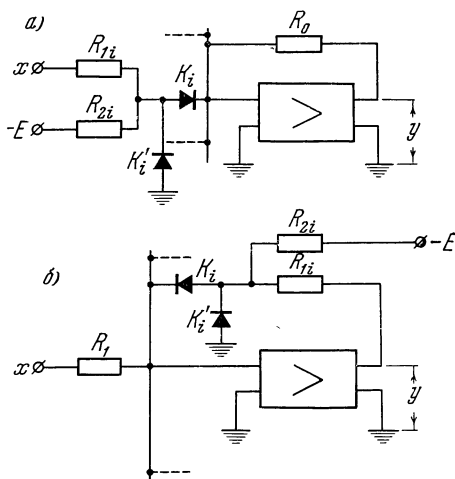


Рис. 10.31.

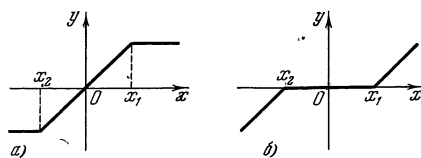


Рис. 10.32.

R_{01} и R'_{11} были нулями, то общее сопротивление в цепи обратной связи обратилось бы в нуль и характеристика $y = f(x)$ стала бы при $x > x_1$ горизонтальной прямой. В действительности эти сопротивления больше нуля и часть характеристики, соответствующая насыщению, имеет угол наклона, больший нуля. Регулируя эти сопротивления, например R_{01} , можно изменять угол наклона.

При $x < x_2$ отпирается диод D_2 и происходит аналогичное ограничение, соответствующее левой горизонтальной ветви характеристики насыщения.

Схема с ограничением в цепи обратной связи (рис. 10.33, а и 10.30, е) имеет ряд практических преимуществ по сравнению со схемой ограничения

на входе (см. рис. 10.30, б). Например, в первой схеме дрейф больше, чем в последней; может быть применено суммирование нескольких величин на входе; крутизна средней части характеристики может быть сделана сколь угодно большой, причем в пределе получаем релейную характеристику без гистерезиса.

Простейшую схему с зоной нечувствительности можно получить с помощью двух ограничивающих диодов на входе. Однако получение малых зон нечувствительности в такой схеме затруднено, так как они «смазываются» закруглением характеристик диодов и нестабильностью этих характеристик в их нижней части. Значительно лучшие результаты можно получить с помощью схемы, изображенной на рис. 10.33, б,

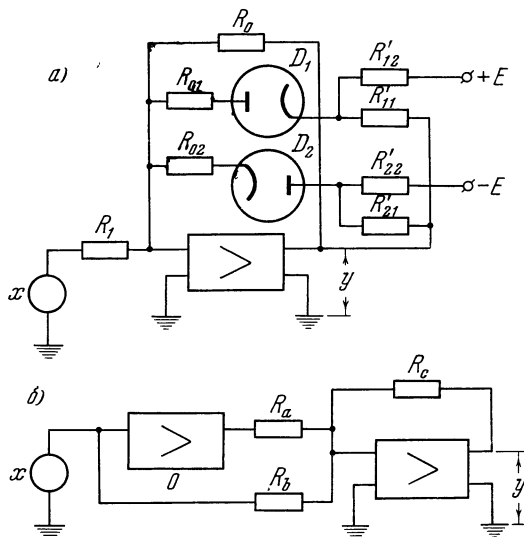


Рис. 10.33.

которая предложена А. И. Манухиным. Блок O здесь является описанным выше блоком ограничения, схема которого показана на рис. 10.33, а. Отметим, что напряжение на выходе этого блока имеет знак, обратный знаку входного напряжения. Схема построена так, что при $x_2 < x < x_1$, когда блок O работает в средней части характеристики, напряжения, подаваемые на сопротивления R_a и R_b , компенсируют друг друга и суммарное выходное напряжение y равно нулю. Таким образом, моделируется зона нечувствительности $x_1 - x_2$ (см. рис. 10.32, б). Однако когда x выходит за пределы этой зоны, изменение напряжения на выходе блока O прекращается и напряжение на выходе всей схемы начинает изменяться. Приращения Δy и Δx , очевидно, связаны между собой законом

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{R_a}{R_b}. \quad (3)$$

Можно установить ограничение на блоке O , допустим, при ± 80 в, но избрать отношение R_a/R_b настолько большим, чтобы выходное напряжение блока O в 80 в было эквивалентно 1 в входного напряжения x . Тогда удастся получить очень четкую зону нечувствительности в 1 в. Колебание характеристик диодов здесь вызовет пренебрежимо малую (уменьшенную в 80 раз) ошибку.

Если требуется моделировать кривую плавного ограничения или насыщения, аппроксимируемую сложной ломаной (рис. 10.34, а), то можно при-

менить схему с несколькими диодами в цепи обратной связи (рис. 10.34, б). Работа этой схемы в принципе такова же, как и схемы, изображенной на рис. 10.33, а. При увеличении x от нуля сначала все диоды заперты. Затем при $x = x_1$ открывается диод D_1 , потом при $x = x_2$ открывается диод D_2 и т. д. Диоды $D'_1 - D'_4$ открываются таким же точно образом при движении x от нуля в отрицательном направлении.

Выше были рассмотрены некоторые однозначные нелинейные характеристики. Задача построения схемы усложняется, когда требуется модели-

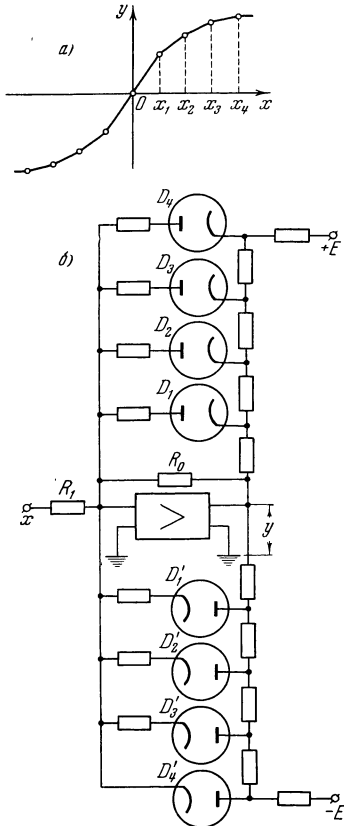


Рис. 10.34.

ровать неоднозначные зависимости. Между тем такие зависимости часто встречаются в звеньях систем автоматического регулирования. Например, зависимость выходной координаты редуктора от входной при наличии люфта и трения на выходном валу изображается неоднозначной кривой, показанной на рис. 10.35, а. Если вначале при $-\varepsilon_2 < x < \varepsilon_1$ выходная величина y равна нулю, то при увеличении x она не меняется до тех пор, пока x не дойдет до значения ε_1 . При дальнейшем увеличении x величина y также станет увеличиваться; изображающая точка на плоскости (x, y) пойдет по прямой M_0M_1 .

Когда увеличение x прекращается (точка M_1 , значение $x = x_1$) и x начнет уменьшаться, то изменение y прекращается до тех пор, пока люфт $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ не будет выбран (изображающая точка движется по горизонтальной линии M_1M_2). При

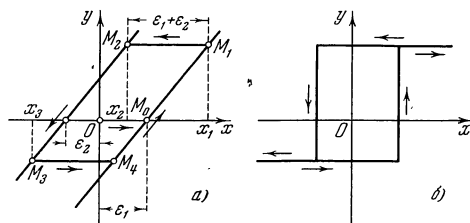


Рис. 10.35.

дальнейшем уменьшении x движение изображающей точки происходит по наклонной прямой M_2M_3 . При новом увеличении x люфт опять выбирается в противоположном направлении, а изображающая точка скользит по горизонтальной прямой M_3M_4 до точки M_4 и т. д.

Другой пример неоднозначной характеристики — релейная характеристика с петлей гистерезиса — показан на рис. 10.35, б.

Рассмотрим разновидности схем для моделирования характеристики люфта. Простейшая схема показана на рис. 10.36. В этой схеме конденсатор C заряжается через диод D_1 , а разряжается через диод D_2 . Если вначале напряжение u_C на конденсаторе равно нулю, то оно останется равным нулю до тех пор, пока x не превзойдет величины $E_1 \frac{R_{11}}{R_{12}}$. При большем напряжении x диод D_1 открывается и конденсатор заряжается (если считать диод идеальным) до потенциала точки N_1 , который был бы при отключенном диоде D_1 . Следовательно, подъем напряжения u_C на конденсаторе идет по прямой

M_0M_1 (см. рис. 10.35, а). Если теперь x начнет уменьшаться, то диод D_1 заперется. Разрядиться через диод D_2 конденсатор C сможет лишь тогда, когда потенциал точки N_2 станет ниже потенциала верхней обкладки конденсатора. При дальнейшем уменьшении x напряжение u_C следует за потенциалом точки N_2 , т. е. происходит движение по прямой M_2M_3 .

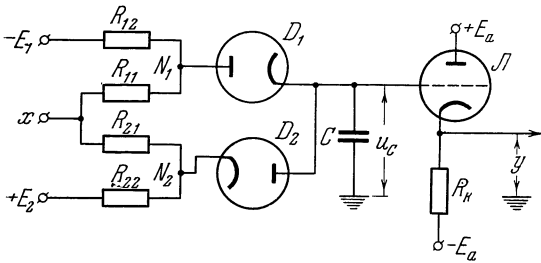


Рис. 10.36.

Напряжение u_C выводится наружу через катодный каскад на лампе L . Вместо конденсатора C и катодного каскада можно применить интегрирующее звено.

В этой схеме невозможно получить устойчивую достаточно узкую зону люфта — она «смазывается» нелинейностью характеристик диодов и утечками.

Кроме того, сопротивления схемы велики; на нижнем сгибе характеристики сопротивление диода также велико. Поэтому заряд и разряд конденсатора совершаются сравнительно медленно. Применить конденсатор малой емкости нельзя, так как он будет заметно разряжаться на утечки в то время, когда схема находится в зоне люфта.

Значительно лучшие результаты дает компенсационная схема, идея устройства которой изображена на рис. 10.37, а. В этой схеме имеется запоминающее звено Z , которое имеет следующие свойства: если один из диодов D_1, D_2 открыт, то потенциал точки M_2 (выхода) связан однозначной и монотонной зависимостью с потенциалом точки M_1 . Если же диоды заперты, то звено «запоминает» значение потенциала M_2 , которое было в последний момент перед запирианием. Это значение «застывает» на выходе звена Z . В качестве запоминающего звена можно применить, например, интегрирующее звено или катодный повторитель с конденсатором на входе.

Схема работает следующим образом. Если, например, сначала $y = 0$, а x находится в диапазоне $-\varepsilon_2 < x < \varepsilon_1$, то суммарное напряжение u_1 , поданное на вход усилителя $Y-1$ и выражающееся формулой

$$u_1 = x + y - \varepsilon_1, \tag{4}$$

отрицательно. Усилитель $Y-1$ обладает большим коэффициентом усиления и нечетным числом каскадов. Следовательно, потенциал точки N_1 — его

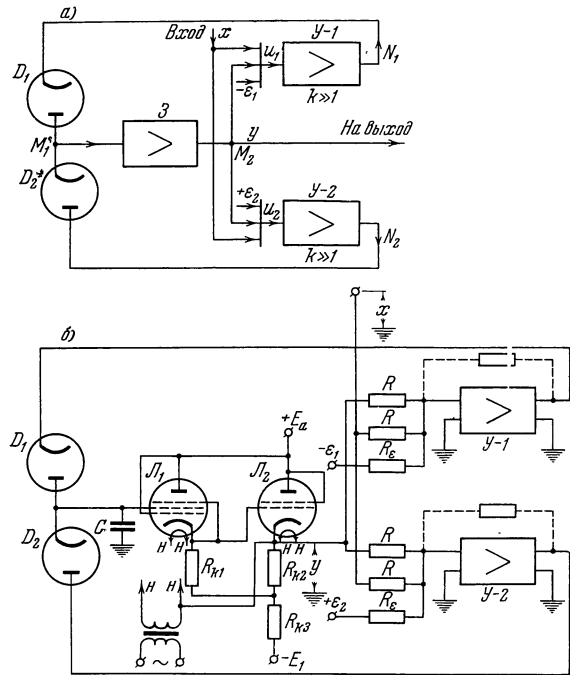


Рис. 10.37.

выхода — значительно больше нуля и диод D_1 заперт (считаем, что потенциал точки M_1 ниже того потенциала, который имеет точка N_1).

Входное напряжение u_2 усилителя $Y-2$ связано с x, y, ε_2 формулой

$$u_2 = x + y + \varepsilon_2. \tag{5}$$

При указанном выше начальном положении напряжение u_2 положительно. Усилитель $Y-2$ такой же, как и $Y-1$. Поэтому потенциал его выхода (точки N_2) отрицателен по знаку и настолько велик по модулю, что диод D_2 также заперт. Следовательно, величина y (выход звена Z) находится в «застывшем» состоянии. Изменение y будет равно нулю до тех пор, пока x не выйдет за пределы зоны люфта.

Диоды D_1 и D_2 заперты до тех пор, пока $u_1 < 0, u_2 > 0$, т. е. пока соблюдаются условия

$$-\varepsilon_2 < x + y < \varepsilon_1. \tag{6}$$

Эти неравенства выделяют на плоскости x, y (рис. 10.38) область, заключающуюся между прямыми AA' и BB' , с уравнениями соответственно $u_2 = 0$ и $u_1 = 0$. Это и есть область люфта; прямые AA' и BB' отличаются от прямых M_2M_3 и M_1M_4 , показанных на рис. 10.35, *a*, лишь знаком угла наклона, что несущественно.

Проследим, что происходит со схемой, когда x увеличивается и изображающая точка на плоскости x, y доходит до прямой BB' , где $u_1 = 0$, и чуть переходит за нее в область $u_1 > 0$. Как только величина u_1 станет чуть положительной, потенциал выхода усилителя $Y-1$ окажется резко отрицательным и диод D_1 начнет пропускать ток. Сейчас же замкнется цепь отрицательной обратной связи через звено Z , усилитель $Y-1$ и диод. Эта цепь будет работать как система автоматического регулирования, поддерживая такое значение величины на выходе звена Z , чтобы соблюдалось условие $u_1 \approx 0$ или

$$x + y - \varepsilon_1 = 0. \tag{7}$$

Следовательно, движение происходит по прямой BB' в направлении от P_0 к P_1 , указанном стрелкой. Если теперь x начнет уменьшаться, то y не сможет уменьшиться, ибо через диод D_1 звено Z может заряжаться лишь в одном направлении. При уменьшении x величина y «застывает» и изображающая точка движется по прямой P_1P_2 . Когда изображающая точка попадает на прямую AA' и продвигается чуть за нее, то напряжение u_2 становится отрицательным. Потенциал выхода N_2 усилителя $Y-2$ становится резко положительным и отпирается диод D_2 . Образуется цепь с отрицательной обратной связью через усилитель $Y-2$ и диод D_2 , которая автоматически поддерживает соотношение $u_2 \approx 0$ или

$$x + y + \varepsilon_2 = 0. \tag{8}$$

Движение изображающей точки происходит по прямой AA' в направлении от P_2 и P_3 .

В такой схеме влияние несовершенства или нестабильности характеристик диодов исчезает; если внутренние сопротивления усилителей малы, то постоянная времени зарядки звена Z также мала и звено получается быстродействующим. Изменение характеристики звена Z также не играет роли; должна быть лишь мала утечка показания, пока звено находится в зоне люфта.

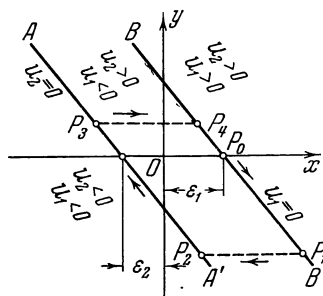


Рис. 10.38.

На рис. 10.37, б показан вариант конкретной схемы. В качестве звена Z здесь применен специальный двойной катодный повторитель, у которого лампа L_1 типа 6Ж1Ж, а лампа L_2 типа 6П3. Такая схема обеспечивает ничтожные сеточные токи на входе и в то же время малое выходное сопротивление и возможность отдавать ток нагрузки до 10 ма. Шкала напряжения порядка ± 100 в. Коэффициент усиления звеньев на базе усилителей $Y-1$ и $Y-2$ выбирается порядка 200—500. Эти звенья целесообразно снабжать диодными ограничителями, как на схеме рис. 10.33, а, что уменьшает время переходного процесса.

Для получения релейной характеристики с гистерезисом можно применить триггерную схему. В таком случае, когда требуется высокая стабильность и плавная регулировка петли гистерезиса, можно применить схему с положительной обратной связью, показанную на рис. 10.39. Эта схема, предложенная А. И. Манухиным, как и обычный триггер, имеет

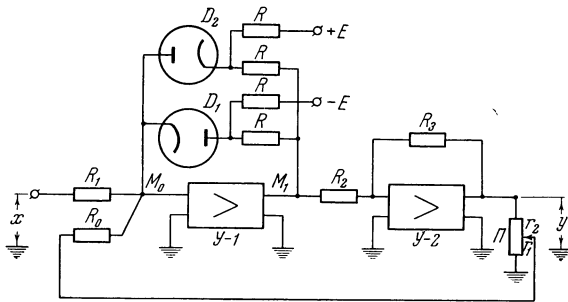


Рис. 10.39.

два положения устойчивого равновесия; одно при открытом диоде D_1 , другое при открытом диоде D_2 . Так как в этих случаях потенциал точки M_1 равен $\pm E$, то два возможных значения выходного напряжения равны

$$y = \pm E \frac{R_3}{R_2} = \pm y_0. \quad (9)$$

Чтобы перевести схему из одного состояния в другое, надо подать на вход сигнал x такой величины, чтобы,

например, диод D_1 , ранее открытый, закрылся, т. е. чтобы потенциал точки M_0 оказался больше нуля. Отсюда следует

$$\frac{x}{R_1} \geq y_0 \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{R_0}, \quad (10)$$

где r_2 и r_1 — сопротивления верхней и нижней частей потенциометра Π , которые считаются значительно меньшими, чем R_0 . Из условия (10) следует, что зона гистерезиса определяется из выражения

$$2x_0 = 2y_0 \frac{R_1}{R_0} \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \quad (11)$$

Регулировкой потенциометра Π можно плавно изменять зону гистерезиса.

Рассмотрим теперь моделирование сухого трения. Момент сухого трения $M_{тр}$ представляет собой довольно сложную функцию, по существу, двух переменных: угловой скорости Ω вала и вращающего момента $M_{вр}$. В уравнении вращающихся масс

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_{вр} \mp M_{тр}, \quad (12)$$

где J — момент инерции, момент трения обратен по знаку скорости Ω и практически не зависит от нее по величине (если пренебречь эффектом влияния Ω на очень малых и очень больших скоростях). При $\Omega \neq 0$ величина $M_{тр} = -M_0 \text{sign } \Omega'$, где $M_0 = \text{const} > 0$. Когда же скорость Ω обращается в нуль, то момент $M_{тр}$ становится функцией действующего момента $M_{вр}$, причем $M_{тр} = -M_{вр}$ до тех пор, пока $|M_{вр}| \leq M_0$. При $\Omega = 0$ и $|M_{вр}| \geq M_0$ момент трения определяется формулой $M_{тр} = -M_0 \text{sign } M_{вр}$.

На рис. 10.40 изображена схема, с достаточной точностью моделирующая указанную выше зависимость и одновременно воспроизводящая уравнение движения (12). Эта схема предложена Б. Я. Коганом. Здесь для наглядности представляющие напряжения на входе и выходе схемы обозначены теми же буквами, что и представляемые величины $M_{вр}$, $M_{тр}$, Ω . Схема представляет собой интегрирующее звено на базе усилителя $У-1$ с уравнением (12). Усилитель $У-2$ работает как инвертор (при отрицательной обратной связи в замкнутой цепи должно быть нечетное число усилителей). Усилитель $У-3$ имеет большой коэффициент усиления и ограничение; в силу последнего его выходная величина $M_{тр}$ ограничена значениями $\pm M_0$.

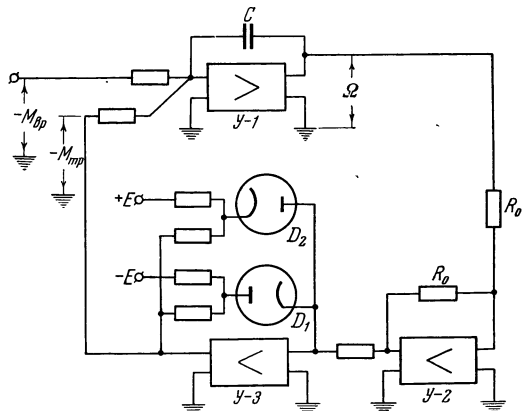


Рис. 10.40.

Очень малой величины Ω , практически равной нулю, достаточно для создания любого напряжения $M_{тр}$ в диапазоне $-M_0 < M_{тр} < M_0$. Это напряжение, таким образом, компенсирует входное напряжение $M_{вр}$ до тех пор, пока последнее по модулю меньше M_0 . Поэтому «движение» в схеме отсутствует. Однако при $|M_{вр}| > M_0$ на входе интегрирующего звена появляется отличная от нуля результирующая величина, возникает «ускорение» и скорость Ω начинает изменяться. При этом величина $M_{тр}$ находится на одном из порогов ограничения согласно равенству

$$M_{тр} = -M_0 \text{ sign } \Omega.$$

§ 7. Множительные и делительные звенья

Наряду с нелинейными преобразователями с одним входом НП-1 в нелинейных моделях и интеграторах используются преобразователи с двумя входами НП-2. Универсальные преобразователи НП-2 рассматриваются в следующем параграфе этой главы. Здесь излагаются вопросы устройства специализированных электронных НП-2, служащих для выполнения операций умножения и деления или, как их называют, множительных и делительных звеньев (сокращенно МЗ и ДЗ). Важная линия классификации множительных звеньев связана с применением в них принципа функции двух переменных или функции одного переменного. Зависимость типа

$$y = cx_1x_2, \tag{1}$$

характерная для множительного звена первого типа, может получаться в каком-либо устройстве естественным путем или быть следствием какого-либо закона. Например, напряжение u на зажимах сопротивления R , по которому протекает ток i , связано с i и R зависимостью

$$u = iR.$$

Если сделать ток i пропорциональным одной из входных величин, а сопротивление R — другой, то u оказывается пропорциональным произведению входных величин.

Множители в формуле (1) могут иметь различную размерность. Например, x_1 может быть числом прямоугольных импульсов напряжения,

поступающих за период T , а x_2 — их высотой. Тогда среднее значение напряжения пропорционально произведению x_1x_2 . Можно воспользоваться любой другой формулой, например $u_m = I_m \omega L$, где u_m — амплитуда напряжения на индуктивности, I_m — амплитуда тока, текущего по катушке L , а ω — частота. Если I_m пропорциональна x_1 , а ω пропорциональна x_2 , то u_m есть искомая выходная величина, пропорциональная произведению x_1x_2 .

Уже из этих примеров следует, что возможно большое разнообразие видов множительных звеньев первого типа: число-импульсные, время-импульсные (см. ниже) и т. д.

В множительных звеньях второго типа находят применение некоторые нелинейные функции одного переменного $y = \phi(x)$. Конкретные формы зависимостей, которые могут быть использованы, имеют вид

$$y = x^2, \tag{2}$$

$$y = \ln x, \tag{3}$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x. \tag{4}$$

Рассмотрим, как можно применить, например, зависимость (2). Назовем квадратором нелинейный преобразователь типа НП-1, у которого выходная величина пропорциональна квадрату входной. Подадим на вход одного

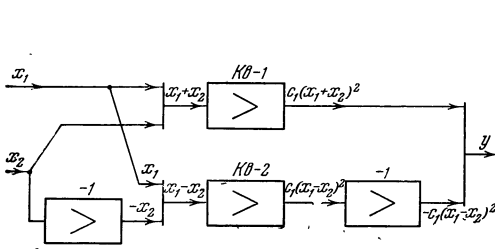


Рис. 10.41.

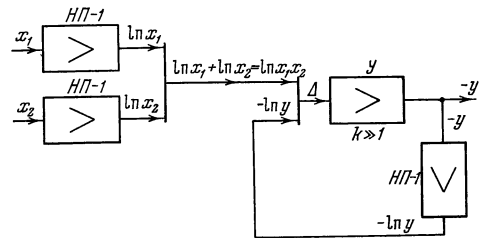


Рис. 10.42.

такого квадратора сумму $(x_1 + x_2)$ входных величин, а на вход другого такого же квадратора — разность $(x_1 - x_2)$. Так как

$$x_1x_2 = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2], \tag{5}$$

то искомое произведение получится в виде разности выходов двух квадраторов. Соответствующая структурная схема приведена на рис. 10.41. Инверторы имеют на этой схеме обозначение (-1) , а квадраторы — $KB-1$ и $KB-2$.

Сходным образом можно построить схему, основываясь на нелинейной зависимости (3) и тождестве

$$\ln x_1x_2 = \ln x_1 + \ln x_2. \tag{6}$$

Структурная схема МЗ, в которой применено это тождество, показана на рис. 10.42. Буквой $У$ здесь обозначен усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления. Сумма выходных величин двух нелинейных преобразователей $\ln x_1 + \ln x_2 = \ln x_1x_2$ сравнивается с $\ln y$ — выходной величиной третьего нелинейного преобразователя. Разность $\Delta = \ln x_1x_2 - \ln y$ поступает на вход усилителя $У$. Выходной величиной этого усилителя является y — выходная величина всей схемы. Если коэффициент усиления k усилителя достаточно велик, то Δu мало и $\ln y = \ln x_1x_2$, откуда следует $y = x_1x_2$.

Можно также построить схему МЗ, пользуясь одной из зависимостей (4) и применяя, например, тождество

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2} [\cos (a_1 - a_2) - \cos (a_1 + a_2)],$$

если при $|x_1 x_2| < 1$ положить

$$x_1 = \sin a_1, x_2 = \sin a_2.$$

На практике находят применение как звенья первого, так и звенья второго типа. Примеры звеньев обоих типов приведены ниже.

Множительные звенья могут различаться также по быстродействию или диапазону частот. Наиболее инерционными являются электромеханические МЗ. Существуют и быстродействующие МЗ, в которых процессы совершаются за микросекунды.

Делительные звенья можно классифицировать также по функции, лежащей в основе действия звена, или по его структурной схеме. Можно построить схемы ДЗ следующих типов.

а) С применением схемы, в которой на выходе «естественным» путем получается величина

$$y = c \frac{x_1}{x_2}. \tag{7}$$

Если, например, x_1 — напряжение, а x_2 — сопротивление в цепи, то ток может явиться выходной величиной такого ДЗ.

б) С применением базовой функции одного переменного. Для построения ДЗ можно, например, воспользоваться функцией (3) и тождеством

$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}.$$

в) С применением преобразователя НП-1 с гиперболической характеристикой вместе с МЗ согласно формуле

$$y = c x_1 \frac{1}{x_2} = c_1 x_1 \varphi(x_2),$$

где функция $\varphi(x_2) = \frac{c_2}{x_2}$ воспроизводится преобразователем НП-1.

г) Со схемой МЗ с обратной связью. Из уравнения (7) следует

$$\Delta = c_1 y x_2 - c_2 x_1 = 0, \tag{8}$$

где c_1, c_2 — константы. В схеме с обратной связью (рис. 10.43) усилитель постоянного тока Y имеет большой коэффициент усиления $k \gg 1$. Поэтому его выходное напряжение автоматически регулируется так, чтобы разность Δ на входе усилителя была примерно равна нулю, т. е. выполнялось соотношение (8).

Расчет показывает, что применение обычного МЗ вызывает увеличенную погрешность всей схемы делительного звена. В данной схеме поэтому необходимо применять МЗ с уменьшенной погрешностью.

На практике часто находит применение сравнительно простая диодная схема МЗ, работающая в соответствии с формулой (5). Эта схема предложена Л. Н. Фицнером. Она отличается тем, что выражения $(x_1 + x_2)$ и $(x_1 - x_2)$, фигурирующие в формуле (5), перед возведением в квадрат проходят преобразование, превращающее их соответственно в $|x_1 + x_2|$ и $|x_1 - x_2|$. Это нужно для того, чтобы подвести к квадратору положительную величину.

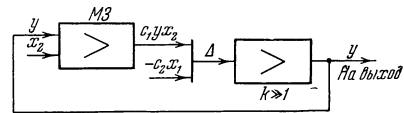


Рис. 10.43.

Тогда вместо двух ветвей параболы в квадраторе требуется лишь одна ветвь (10.44, а) для положительных значений аргумента. Вследствие этого экономится половина диодов, требуемых для воспроизведения параболической характеристики квадратора. Само же получение модулей от величин $(x_1 + x_2)$ и $(x_1 - x_2)$ требует немного ламп, как показано ниже. На рис. 10.44, а показана для примера структурная схема части звена, служащая для образования $(x_1 + x_2)^2$. Сначала сумма $(x_1 + x_2)$ проходит через блок 1, образующий модуль. Характеристика этого блока показана ломаной над блоком 1. Затем полученный модуль $|x_1 + x_2|$ идет в квадратор 2, характеристика которого в виде «половины» параболы показана над блоком 2. Из этого блока выходит величина $(x_1 + x_2)^2$. Аналогично строится и схема для получения $(x_1 - x_2)^2$.

На рис. 10.44, б изображена схема блока для получения

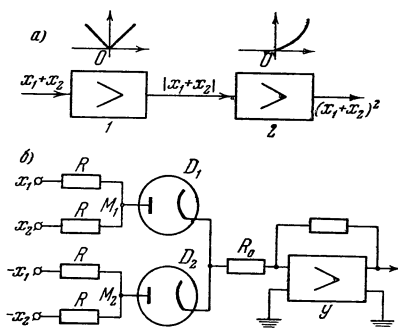


Рис. 10.44.

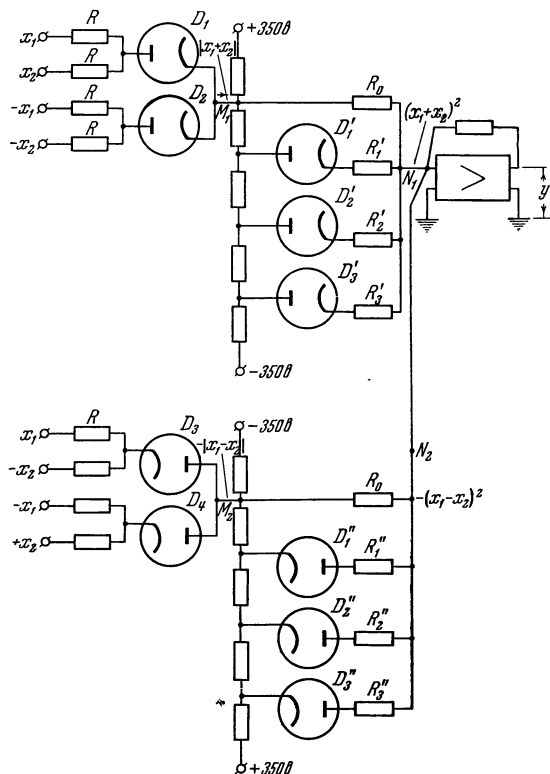


Рис. 10.45

модуля. Величина $(x_1 + x_2)$ поступает на вход усилителя $У$ через диод D_1 , а величина $-(x_1 + x_2)$ поступает через диод D_2 . Если $x_1 + x_2 > 0$, то диод D_1 открыт, а D_2 заперт и на вход усилителя поступает величина $x_1 + x_2 > 0$. Если же, наоборот, $x_1 + x_2 < 0$, то теперь уже диод D_1 закрыт, а D_2 открыт. В результате на вход усилителя поступает величина $-(x_1 + x_2) > 0$, т. е. получаем неизменно на входе усилителя модуль величины $|x_1 + x_2|$.

Полная схема МЗ показана на рис. 10.45. Рассмотрим сначала верхнюю часть схемы, в которой получается $(x_1 + x_2)^2$. Слева вверху расположена часть схемы, выходной ток которой при условии постоянства сопротивления между точкой M_1 и землей пропорционален $|x_1 + x_2|$. При запертых диодах потенциал точки M_1 равен нулю. Если бы диоды D'_1, D'_2, D'_3 отсутствовали, то между точкой M_1 и землей существовало бы лишь постоянное сопротивление R_0 . Тогда зависимость составляющей y_1 выходной величины y , обусловленной верхней частью схемы, от $|x_1 + x_2|$ выражалась бы пунктирной прямой, изображенной на рис. 10.46. Однако такая зависимость имеет место лишь до тех пор, пока не откроется диод D'_1 . После этого параллельно сопротивлению R_0 оказывается приключенным другое сопротивление R'_1 . В резуль-

тате общее сопротивление между точкой M_1 и землей уменьшается, а крутизна характеристики $y_1 = f(|x_1 + x_2|)$ увеличивается (участок 1—2 на сплошной кривой рис. 10.46). Затем при еще большем значении $|x_1 + x_2|$ отпирается диод D'_2 , что еще более увеличивает крутизну (участок 2—3 на кривой рис. 10.46). Наконец, отпирается диод D'_3 , что соответствует участку кверху от точки 3 на кривой. Ломаную 0—1—2—3 рассчитывают так, чтобы она аппроксимировала ветвь параболы. Ток, идущий от точки N_1 к земле, пропорционален $(x_1 + x_2)^2$. Таким образом, верхняя часть схемы рис. 10.45 соответствует структурной схеме, изображенной на рис. 10.44, а. Аналогично нижняя часть схемы, изображенной на рис. 10.45, дает составляющую $-(x_1 - x_2)^2$. На диодах D_3 и D_4 построена схема модуля, у которой ток на выходе пропорционален величине $-|x_1 - x_2|$. Диодная схема с диодами D'_1, D'_2, D'_3 обеспечивает параболическое искривление характеристики, и ток, идущий от точки N_2 к земле, пропорционален $-(x_1 - x_2)^2$. В итоге, как следует из формулы, на выходе получается величина y , пропорциональная произведению $x_1 x_2$.

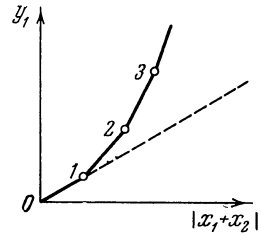


Рис. 10.46.

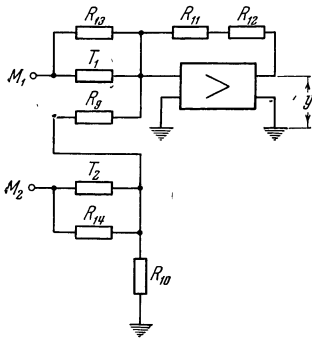


Рис. 10.47.

В схеме Фицнера можно достигнуть перемножения с погрешностью, не превышающей $\pm 1\%$ от шкалы, а при тщательной подгонке сопротивлений и их стабильности — еще меньшей цифры. Основные источники погрешностей здесь — нестабильность сопротивлений и дрейф усилителя. В меньшей мере влияет нестабильность характеристик диодов.

Другой пример весьма простой схемы с погрешностью того же порядка, что и у диодного МЗ, представляет собой схема МЗ на тиритовых сопротивлениях. В этой схеме, структура которой такова же, как и у схемы рис. 10.44, электронные лампы имеются лишь в выходном усилителе. Диоды D_1, D_2, D_3, D_4 германиевые, а вместо схем с диодами $D'_1 - D'_3$ и $D''_1 - D''_3$, осуществляющих параболическую характеристику, подключены тиритовые сопротивления. Эти сопротивления обладают нелинейной вольтамперной характеристикой, которую можно использовать для получения параболы. На рис. 10.47 изображена часть схемы, расположенная после блоков модуля, т. е. после точек M_1 и M_2 (ср. с рис. 10.45). Здесь T_1 и T_2 — тиритовые сопротивления. Так как последние представляют собой небольшие диски (например, высотой 9 мм и диаметром 50 мм), то общие габариты МЗ весьма невелики. Подгонка характеристики тирита под параболу осуществляется с помощью дополнительных параллельных и последовательных сопротивлений; методика их расчета имеется в литературе. При значительных колебаниях температуры среды, окружающей МЗ, возникает дополнительная погрешность. Ее можно значительно уменьшить, включив в цепь обратной связи усилителя дополнительное компенсационное сопротивление R_{12} типа КМТ. В результате дополнительная погрешность при изменении температуры на $\pm 10^\circ$ не превышает 0,2—0,3%.

Схемы множительных звеньев часто оказываются удобным осуществлять, если сомножители x_1 и x_2 входят в звено в различных представлениях. В схемах время-импульсных МЗ один из сомножителей, например x_2 , имеет чисто непрерывное представление, а другой сомножитель x_1 переводится во время-импульсное представление. Преобразователь x_1 во время-импульсное

представление находится обычно внутри МЗ и представляет собой наиболее сложную часть схемы МЗ. Ниже описана другая схема время-импульсного МЗ, в которой частичное введение компенсационного принципа позволяет уменьшить погрешность до 0,3—0,4% от шкалы.

В описанном ниже МЗ входная и выходная величины являются напряжениями, меняющимися в диапазоне

$$-100 \text{ в} \leq x_1, \quad x_2 \leq +100 \text{ в}.$$

Выходная величина y также изменяется в этом диапазоне. Поэтому коэффициент c в формуле (1)

$$y = cx_1x_2$$

имеет значение $c = 0,01 \frac{1}{\text{в}}$.

Принцип действия любого время-импульсного МЗ можно пояснить с помощью рис. 10.48. Время-импульсное звено состоит из двух блоков.

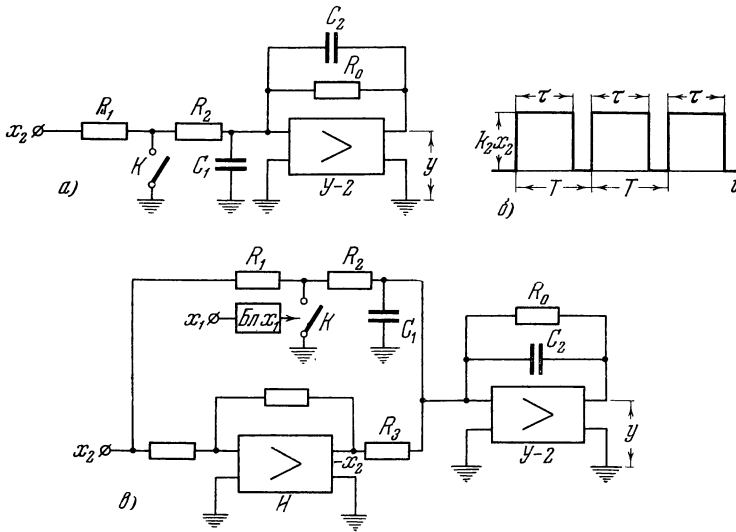


Рис. 10.48.

которые назовем «блок x_1 » и «блок x_2 ». На рис. 10.48, а изображена принципиальная схема блока x_2 . Она состоит из усилительного звена, на входе которого имеется ключ K . Этот ключ может замыкать на землю входное напряжение x_2 звена. Пусть ключ K разомкнут при $0 < t < \tau$ и замкнут при $\tau < t < T$, где $0 < \tau < T$. В таком случае выходное напряжение имеет форму, показанную на рис. 10.48, б. Постоянная составляющая этого напряжения, очевидно, равна

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T y \, dt = \frac{k_2 x_2 \tau}{T}, \tag{9}$$

где $k_2 = \frac{R_0}{R_1 + R_2}$. Допустим, что величина τ/T пропорциональна другому входному напряжению x_1 :

$$\frac{\tau}{T} = k_1 x_1. \tag{10}$$

Тогда из (9) находим

$$y_{\text{ср}} = k_2 x_2 \cdot k_1 x_1 = c x_1 x_2, \tag{11}$$

где $c = k_1 k_2 = \text{const}$. Таким образом, получается требуемая для МЗ зависимость.

Переменная составляющая напряжения y отфильтровывается с помощью емкостей C_1 и C_2 (рис. 10.48, а), и на выходе практически остается только постоянная составляющая. Небольшой переменный фон высокой частоты также не страшен, так как он не проходит через последующие звенья. Если период T равен 0,5 мсек, то даже с учетом фильтра схема имеет постоянную времени порядка не более 3—5 мсек. Величина τ в схеме рис. 10.48, б имеет только положительный знак; поэтому, как видно из формулы (10), сомножители x_1 может быть только одного знака. Чтобы работать с сомножителями разных знаков, надо отсчитывать τ не от начала, а от середины периода

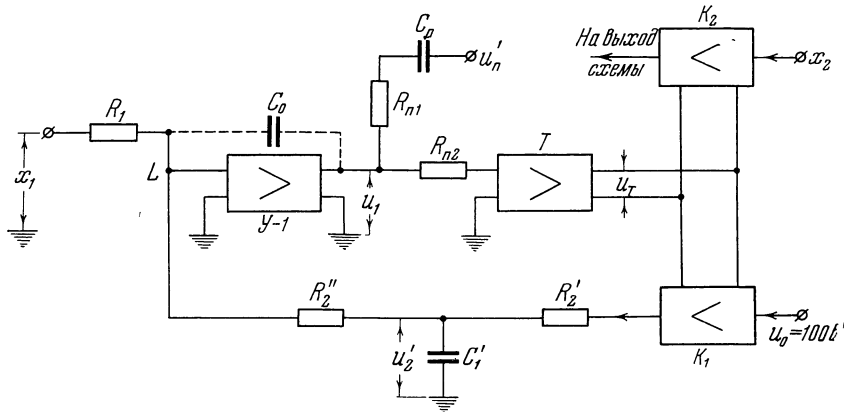


Рис. 10.49.

и перейти к более сложной схеме, показанной на рис. 10.48, в. Здесь добавлен инвертор I , на выходе которого получается напряжение $-x_2$. Сопротивления R_1, R_2, R_3 подобраны так, чтобы напряжения на выходе $Y-2$ при двух положениях ключа были равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку. Для этого должно быть выполнено соотношение

$$R_3 = 2(R_1 + R_2). \tag{12}$$

Теперь при работе ключа K напряжение на выходе (при отсутствии емкостей фильтра) будет колебаться от $-k_2 x_2$ до $k_2 x_2$. Если при этом замыкание ключа происходит в середине периода ($\tau = 0$), то постоянная составляющая выходного напряжения будет равна нулю. При отклонении момента замыкания ключа K от середины периода появится постоянная составляющая напряжения на выходе схемы — положительная или отрицательная в зависимости от знака τ . Действительно, если в начальные моменты периода напряжение $y > 0$, то

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2} + \tau} k_2 x_2 dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2} + \tau}^T k_2 x_2 dt = k_2 x_2 \frac{2\tau}{T}. \tag{13}$$

Так как величина τ , отсчитываемая от середины периода, может быть больше или меньше нуля, то, согласно формуле (10), появляется возможность перемножения знакопеременных напряжений x_1 и x_2 .

Ключ K управляется блоком x_1 , обозначенным $Бл x_1$ на рис. 10.48, в. В качестве ключа K в МЗ обычно применяются электронные схемы.

Центральную часть схемы МЗ составляет блок x_1 , структурная схема которого изображена на рис. 10.49, а; принцип действия его поясняется

кривыми на рис. 10.50. Буквой T на рис. 10.49 обозначен триггер, выходное напряжение которого u_T управляет двумя электронными ключами K_1 и K_2 . Ключ K_2 пропускает величину x_2 на выходной усилитель, как это было показано на рис. 10.48, в. На ключ K_1 подается постоянное напряжение u_0 , например 100 в. Выходное напряжение ключа K_1 фильтруется фильтром $R_2' C_1'$. Постоянная составляющая этого напряжения подается через сопротивление R_2'' на вход усилителя $У-1$. На вход этого усилителя через сопротивление R_1 подается также входное напряжение x_1 . Выходное напряжение u_1 усилителя, как будет показано ниже, управляет моментом τ переброски триггера, автоматически изменяя его с тем, чтобы потенциал входа L усилителя $У-1$ поддерживался на значении, равном нулю.

Если схема ключа K_1 такова же, как и схема ключа K_2 , то формула (13) с заменой x_2 на u_0 пригодна и для определения постоянной составляющей

u_2' — напряжения на конденсаторе C_1' . Точка L находится на нуле, если соблюдено условие

$$\frac{x_1}{R_1} = \frac{u_2'}{R_2''}. \quad (14)$$

Так как

$$u_2' = k' u_0 \frac{2\tau}{T}, \quad (15)$$

где $k' = \text{const}$, то из (14) и (15) получаем

$$\frac{\tau}{T} = \frac{R_2''}{R_1} x_1 \frac{1}{2k' u_0} = k_1 x_1.$$

Таким образом, приходим к формуле (10). Следовательно, величина τ/T

автоматически поддерживается пропорциональной входному напряжению x_1 . По существу блок x_1 является преобразователем величины x_1 из чисто непрерывного представления во время-импульсное представление, т. е. в величину τ/T относительно времени импульса. Остается пояснить, каким образом регулируется момент переброса триггера T . Выходное напряжение u_1 усилителя $У-1$, обладающего большим коэффициентом усиления, подается на вход триггера T совместно с напряжением u_{Π} пилообразной формы и высокой частоты (1—2 кГц). Последнее вырабатывается специальной схемой, не показанной на рис. 10.50 и питающей ряд множительных звеньев. Эта схема приключается к точке, обозначенной u_{Π}' . Напряжение u_{Π} попадает на вход триггера через емкость C_{Π} и сопротивления $R_{\Pi 1}$ и $R_{\Pi 2}$. Амплитудное значение этого напряжения обозначим через $u_{\Pi M}$. Будем считать, что на входе триггера имеется сумма напряжений $u_{\Pi} + u_1$. Зависимость этого суммарного напряжения от времени показана на рис. 10.50, а.

Пусть напряжение, при котором триггер срабатывает (т. е. перебрасывается во второе положение), равно $u_{\text{ср}}$, а напряжение, при котором триггер отпускает (т. е. перебрасывается в первое положение), равно $u_{\text{отп}}$. Отметим эти значения соответствующими горизонтальными пунктирными линиями на рис. 10.50. В начальный момент периода кривая входного напряжения $u_1 + u_{\Pi}$ триггера пересекает горизонтальную линию $u_{\text{отп}}$ и триггер отпускает, т. е. перебрасывается в первое положение. Для обеспечения надежного отпускания в этот момент можно подавать также положительный импульс на вход триггера. Затем кривая $u_1 + u_{\Pi}$ идет книзу и спустя время t_1 пересекает линию $u_{\text{ср}}$. Тогда триггер срабатывает, т. е. перебрасывается во второе положение, в котором он и остается до конца периода T .

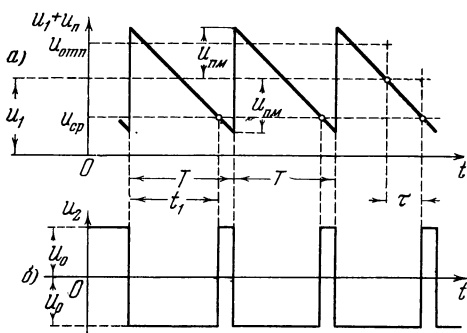


Рис. 10.50.

Так как напряжение u_0 проходит через ключ K_1 , то на выходе последнего получается напряжение u_2 (рис. 10.50, б), которое может иметь два значения: $+u_0$ и $-u_0$.

Если коэффициент усиления усилителя $U-1$ велик, то достаточно ничтожного изменения потенциала точки L , чтобы значительно изменилось выходное напряжение u_1 усилителя. Тогда пилообразная кривая на рис. 10.50, а перемещается кверху или книзу, отчего меняется и отношение τ/T , а следовательно, и пропорциональное этой величине напряжение u'_2 на емкости C'_1 (см. рис. 10.49). Таким образом автоматически поддерживается соотношение (14).

Схема блока x_1 является замкнутой системой автоматического регулирования, в которой величина τ автоматически регулируется с тем, чтобы быть пропорциональной напряжению x_1 . Точность работы схемы обусловлена большим коэффициентом усиления разомкнутой цепи, как и в любой статической системе автоматического регулирования.

Следует отметить, что при $x = \text{const}$ и использовании в качестве входной величины напряжения u_0 эта же схема может работать как делительное звено. Это видно из формул (14) и (15).

Схема блока x_1 может работать и при отключенном напряжении u_n , так как в ней автоматически возникают автоколебания. Однако частота этих колебаний, особенно на краях диапазона, невелика, и требуется большая постоянная времени фильтра для хорошей фильтрации, что увеличивает инерционность МЗ. Поэтому рекомендуется работать с питанием схемы от генератора пилообразного напряжения. Кстати, отклонение формы кривой этого генератора от идеальной не влияет заметно на погрешность схемы, так как последняя является компенсационной.

Схема время-импульсного МЗ сравнительно проста и при меньшем числе элементов дает большую точность, чем диодное МЗ. Недостаток время-импульсного МЗ — принципиальное наличие постоянной времени из-за фильтрации выходного напряжения. Для прецизионных моделей требуются множительные звенья с высокой точностью. Описанное выше время-импульсное МЗ может обеспечить сравнительно малую погрешность, если оба электронных ключа K_1 и K_2 в высокой степени идентичны. Этой идентичности можно добиться, применив компенсационные схемы ключей. Имеется несколько вариантов время-импульсных МЗ с компенсационными ключами; к сожалению, все такие схемы сравнительно сложны и наладка их затруднительна.

Увеличение точности множительных звеньев и вообще любых линейных и нелинейных звеньев ВУ непрерывного действия может быть достигнуто не только применением компенсационного метода, но и введением дискретности. При этом звено становится «гибридным» и имеет в своем составе как непрерывную, так и дискретную, например цифровую, часть.

Описываемая ниже схема прецизионного МЗ может быть разделена на две части. Назовем их грубой и точной системами. Точная система в любом варианте является электронной. Что же касается грубой системы, то она может быть выполнена как на базе электромеханических элементов: реле, искателей, следящих систем, так и чисто электронной. Мы рассмотрим сначала релейный вариант грубой системы (рис. 10.51, а).

Грубая система, кроме реле, включает в себя несколько (на рис. 10.51, а, шесть) усилителей постоянного тока с большим коэффициентом усиления $k \gg 1$. На выходе усилителей либо в анодных цепях каскадов имеются пары реле P_i, P'_i ($i=0, 1, \dots, 5$). Можно было бы вместо пары реле применить одно реле с большим количеством контактов. Высокая точность усилителей $U-0$ — $U-5$ не требуется, их дрейф не играет особой роли. Важно лишь, чтобы он был заметно меньшим, например, чем 1 в . На входы усилителей $U-0$ — $U-5$ подается напряжение, пропорциональное

одному из сомножителей, например x_1 , а также дополнительные постоянные напряжения $u_1 - u_5$. При шкале напряжения y , равной 100 в, и при равных значениях входных сопротивлений усилителей $Y-0 - Y-5$ необходимы следующие значения напряжений: $u_1 = -50$ в; $u_2 = -25$ в; $u_3 = -12,5$ в; $u_4 = -6,25$ в; $u_5 = -3,125$ в.

Первый из усилителей ($Y-0$) должен определять знак напряжения x_1 . Если $x_1 > 0$, то потенциал на выходе $Y-0$, становится резко отрицательным,

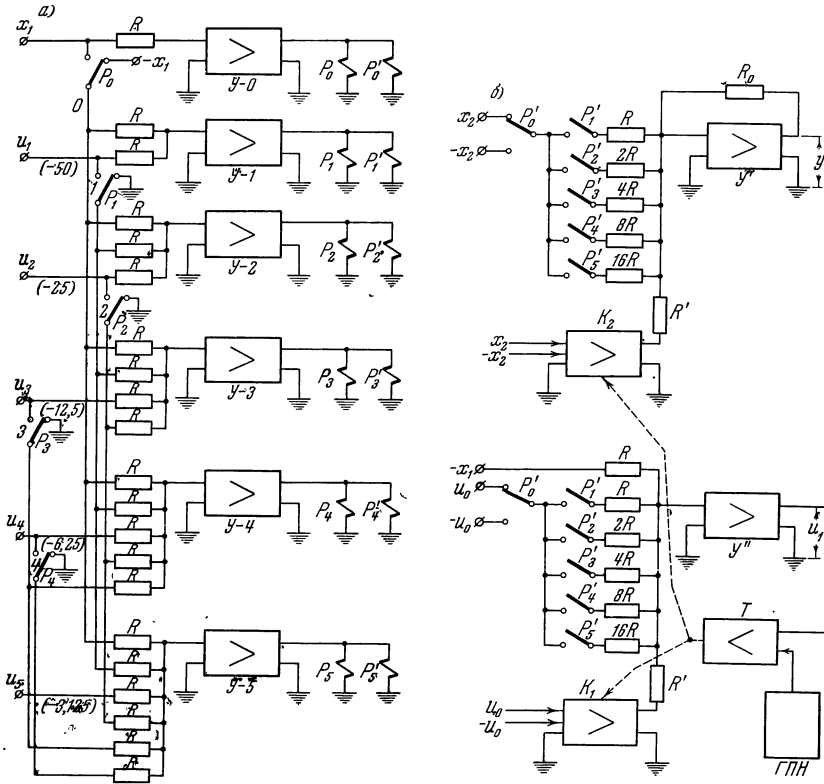


Рис. 10.51.

срабатывают реле P_0, P'_0 (эти реле можно представлять себе поляризованными). Реле P_0 , срабатывая, приключает своим контактом P_0 шину 0 к напряжению $+x_1$. Если же $x_1 < 0$, то шина 0 остается приключенной к положительному напряжению $-x_1$.

Аналогичным образом контакты P'_0 реле P'_0 приключают либо $+x_2$, либо $-x_2$, а также либо $+u_0$, либо $-u_0$ к входам соответствующих усилителей (рис. 10.51, б). Следовательно, знак напряжения на выходе звена будет изменяться на противоположный при изменении знака сомножителя x_1 .

Усилитель $Y-1$, на вход которого поступает величина $|x_1|$ через шину 0 , должен определять знак выражения $|x_1| - 50$. Если $|x_1| > 50$, то срабатывают реле P_1, P'_1 . Контакт P_1 переключает шину 1 с земли на напряжение $u_1 = -50$ в. Это напряжение, таким образом, передается на входы усилителей $Y-2 - Y-5$. Кроме того, контакты P'_1 включают сопротивления R на входах усилителей Y' и Y'' (см. рис. 10.51, б).

Если примем 100 в за единицу, то усилитель $Y-1$ определяет, содержится ли в величине x_1 число $1/2$ или нет. Если $x_1 > 1/2$, то реле P_1, P'_1 срабатывают; если $x_1 < 1/2$, то реле не срабатывают.

Усилитель $У-2$ определяет, содержится ли в x_1 число $1/4 = (1/2)^2$. Если $x_1 > 1/2$, то напряжение u_1 передается на вход $У-2$ и происходит определение знака $x_1 - 1/2 - 1/4$. Если $x_1 < 1/2$, то напряжение u_1 не передается на вход $У-2$ и на последнем определяется знак разности $x_1 - 1/4$. Если $x_1 > 1/4$, то срабатывают реле P_2, P'_2 .

Аналогичным образом работают и усилители $У-3, У-4, У-5$, определяя, содержатся ли в x_1 числа $1/8 = (1/2)^3, 1/16 = (1/2)^4, 1/32 = (1/2)^5$. В итоге определяется с точностью до принятого числа разрядов число x_1 в двоичной системе счисления.

Напряжение, пропорциональное второму сомножителю x_2 , подается на вход усилителя $У'$ (см. рис. 10.51, б). На выходе этого усилителя образуется произведение $y = cx_1x_2$. Если общая входная проводимость этого каскада равна ρ , то

$$y = R_0 \rho x_2. \quad (16)$$

Если сделать величину ρ пропорциональной x_1 , то выходное напряжение y будет пропорционально произведению x_1x_2 . Грубая система позволяет сделать входную проводимость приблизительно пропорциональной x_1 . Точная система компенсирует неточность грубой.

Входные сопротивления, приключенные контактами реле $P'_1 - P'_5$, равны соответственно $R, 2R, 4R, 8R, 16R$. Проводимость, включенная контактами сработавших реле, пропорциональна величине x_1 , выраженной в двоичной системе счисления с точностью до пяти двоичных знаков. Пусть, например, напряжение x_1 равно $+74$ в. Тогда сработают реле P_1 и P'_1 и на вход $У-2$ подается напряжение $-50 - 25 = -75$ в для сравнения с x_1 . Следовательно, реле P_2, P'_2 не срабатывают. На вход $У-3$ подается $-50 - 12,5 = -62,5$ в, и реле P_3, P'_3 сработают. Аналогичным образом сработают и следующие усилители. Итак, если считать 100 в за единицу, то $x_1 = 0,74$ или в двоичном счислении $x_1 \rightarrow 0,10111$.

Действительно,

$$\begin{aligned} 0,74 &= 0,71875 + 0,02125 = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} + 0,02125 \rightarrow 0,10111 + \text{остаток.} \end{aligned}$$

Сравнив это число с номерами сработавших и несработавших реле, можно убедиться в том, что контакты сработавших реле изображают число $+0,74$ в двоичном счислении с точностью до пятого знака после запятой. Контакт реле P_0 дает знак числа. Отсюда следует, что включенная контактами P'_i проводимость на входах усилителей $У'$ и $У''$, равная в данном примере

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{1}{R} + 0 \cdot \frac{1}{2R} + 1 \cdot \frac{1}{4R} + 1 \cdot \frac{1}{8R} + 1 \cdot \frac{1}{16R} = \\ = \frac{2}{R} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} \right) = \frac{2}{R} \cdot 0,71875, \end{aligned}$$

пропорциональна числу $0,71875$, т. е. числу $0,74$ с точностью до остатка, равного $0,02125$. Этот остаток в вольтах равен $74 - 71,875 = 2,125$ в.

Можно выражать с помощью реле число и в десятичной системе, но для этого понадобится большее количество реле при этой же точности. Конструктивно лучше десятичную систему делать на искателе (см. ниже). С помощью реле можно, однако, сделать простую грубую систему, применяя двоично-пятеричную систему счисления (2×5). Эта система здесь не описывается.

Кроме грубой системы, множительное звено содержит точную систему в виде какого-либо электронного МЗ. Очень важно подчеркнуть, что точная система сама по себе не должна обладать высокой точностью и для нее можно

применить любое из «описанных выше» звеньев: диодное МЗ, тиритное, время-импульсное и т. д. Рассмотрим для примера применение время-импульсного МЗ в точной системе. На рис. 10.51, б, изображено время-импульсное МЗ с ключами K_1 и K_2 , триггером T и генератором пилообразного напряжения $ГПН$ — такое же, как описанное выше.

Блок x_1 работает здесь следующим образом: усилитель $У''$ имеет автоматическую компенсацию дрейфа и большой коэффициент усиления. Поэтому установившееся значение его входного напряжения равно примерно нулю. Это может быть лишь тогда, когда

$$\rho u_0 = \frac{x_1}{R_1}. \quad (17)$$

Здесь буквой ρ обозначена полная входная проводимость с учетом проводимости электронного ключа K_2 . Величина ρ есть сумма двух составляющих

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad (18)$$

где ρ_1 — проводимость, включенная контактами реле, а ρ_2 — малая проводимость, обусловленная диодным ключом. Величина ρ_2 является малой добавкой, так как сопротивление R' велико. Уравнение (17) означает, что проводимость электронного ключа как раз такова, что она компенсирует неточность, создаваемую грубой системой. Точно та же проводимость получается и у ключа K_1 , через который напряжение $\pm x_2$ поступает на выход схемы. Сопоставляя (16) и (17), можно убедиться в том, что множительное звено правильно выполняет свои функции. Поставив несколько блоков x_2 (вверху на рис. 10.51, б), можно получить несколько произведений $x_1 x_i$ ($i = 2, \dots, n$) с помощью одного и того же блока x_1 . Это важно в особенности при получении функциональной зависимости в виде ряда с применением прецизионных множительных звеньев.

Проводимость ρ электронного ключа мала, так как от него требуется лишь скомпенсировать малые неточности, в 32 раза меньшие шкалы. Поэтому и погрешность на выходе, обусловленная ошибкой точной электронной системы, будет в 32 раза меньше (в общем случае в 2^n раз, где n — число реле), чем для самого МЗ точной системы. Если проволочные сопротивления $R, 2R, 4R, \dots$ подобраны с точностью $\pm 0,002\%$ (этого можно добиться при одинаковых их температурах), погрешность МЗ точной системы равна $\pm 0,2\%$, то суммарная максимальная погрешность МЗ с грубой и точной системами определится следующими цифрами:

а) погрешность, вносимая точной системой,

$$\pm \frac{1}{32} \cdot 0,2\% = \pm 0,0063\%;$$

б) погрешность от разброса значений проволочных сопротивлений $\pm 0,002\%$;

в) погрешность от прочих источников (нестабильности u_0 э. д. с. дрейфа, сеточных токов и т. д.), приняв тщательные меры, можно снизить примерно до $\pm 0,005\%$.

В итоге получается общая погрешность МЗ порядка

$$\pm (0,01 \div 0,02)\%.$$

По каналу x_2 схема является практически безынерционной. По каналу x_1 инерционность определяется временами срабатывания реле и фильтрами в цепях электронных ключей K_1 и K_2 .

Общая длительность переходного процесса в выполненном образце была не более 20—30 мсек (по каналу x_1).

При переключении контактов реле в переходном процессе наблюдаются всплески напряжения на выходе. Эти всплески не вносят существенных

погрешностей и лишь делают менее приятным вид осциллограмм выходного напряжения. От них можно вовсе избавиться различными способами, которые несколько усложняют схему и здесь не описываются.

Основным недостатком схемы служит ее сложность, обилие усилителей и особенно контактов.

Важно отметить, что совершенно не обязательно срабатывание реле $P_1 - P_5$ именно при напряжениях 50 в, 25 в и т. д. на входе. Небольшие неточности в грубой системе будут автоматически компенсироваться точной системой. Важно лишь обеспечить точное попарное равенство соответствующих сопротивлений: R и R , $2R$ и $2R$ и т. д. на входах усилителей Y' и Y'' .

Нетрудно получить из этой схемы делительное звено так же, как ДЗ было получено из МЗ выше.

Располагая точными множительными и делительными звеньями, можно получить точные нелинейные зависимости в виде дробно-рациональных функций одного или нескольких переменных. Представляя, например, функцию

$$y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \right)$$

в виде ряда

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

и ограничиваясь последним написанным членом ряда, получим погрешность от пренебрежения остальными членами

$$\delta = \frac{x^9}{9!} \leq \frac{\pi^9}{2^9 \cdot 9!} = 0,031\%.$$

Возможны различные варианты осуществления МЗ с грубой и точной системами.

Можно, например, осуществить полностью электронные МЗ. Однако мы ограничимся описанием лишь еще одного, сравнительно простого варианта. Здесь грубая система выполнена по декадной схеме и переключение производится контактами искателя, а в виде точной системы применено диодное МЗ, описанное выше. Разумеется, вместо искателя можно с успехом использовать следующую систему, вращающую движки, скользящие по ламелям. Схема подобного МЗ показана на рис. 10.52. Работа ее производится согласно формуле

$$y = R_0 \rho x_2 = R_0 (\rho_1 + \rho_2) x_2, \tag{19}$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2$ получается по формуле (17).

Составляющая $R_0 \rho_1 x_2$ поступает от движка D_1 реверсивного искателя I . Добавка $R_0 \rho_2 x_2$ идет от МЗ точной системы через сопротивление R_3 .

Рассмотрим работу блока x_1 , построенного на усилителе $Y-1$. К выходу усилителя приключено реле P , срабатывающее в том или ином направлении, как только выходное напряжение u_1 усилителя превысит по модулю некоторую величину (порядка 1,5 — 2 в), соответствующую зоне нечувствительности реле. Контакт P реле при срабатывании замыкает цепь катушки искателя I , заставляя движки D_1 и D_2 искателя перемещаться в том или ином направлении, с тем чтобы уменьшить напряжение u_1 . Таким образом, в установившемся режиме величина u_1 находится в пределах зоны

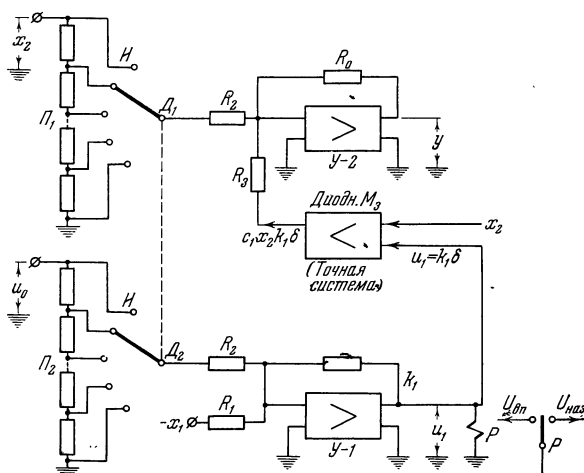


Рис. 10.52.

нечувствительности. Если коэффициент усиления звена равен k_1 , то

$$u_1 = k_1 R_1 \left(\frac{x_1}{R_1} - \rho_1 u_0 \right) = k_1 \delta. \quad (20)$$

Здесь ρ_1 — проводимость потенциометра искателя, шунтированного сопротивлением R_2 . Величина

$$\delta = x_1 - \rho_1 R_1 u_0 \quad (21)$$

сравнительно мала. Однако грубая система не осуществляет компенсацию полностью. Нескомпенсированная разность $u_1 = k_1 \delta$ подается на диодное МЗ, играющее здесь роль точной системы. Другим множителем является x_2 . Выходное напряжение МЗ, равное $c_1 x_2 k_2 \delta$, где $c_1 = \text{const}$, подается через сопротивление R_3 на выходной усилитель. Следовательно, общее выходное напряжение равно

$$y = R_0 \rho_1 x_2 + \frac{R_0}{R_3} c_1 x_2 k_1 \delta. \quad (22)$$

Подставив в эту формулу вместо ρ_1 его значение из выражения (21), т. е.

$$\rho_1 = \frac{x_1 - \delta}{u_0 R_1},$$

находим

$$y = \frac{R_0}{R_1} \frac{x_1 x_2}{u_0} + R_0 x_2 \delta \left(\frac{1}{R_3} c_1 k_1 - \frac{1}{u_0 R_1} \right). \quad (23)$$

Чтобы получить точную зависимость

$$y = \frac{R_0}{R_1} \frac{x_1 x_2}{u_0}, \quad (24)$$

необходимо так подобрать параметры схемы, чтобы скобка в выражении (23) обратилась в нуль. Итак, условие компенсации имеет вид

$$\frac{c_1 k_1}{R_3} = \frac{1}{u_0 R_1}. \quad (25)$$

В этом варианте схемы, как и в предыдущем, точность в основном обусловлена идентичностью сопротивлений секций потенциометров $П_1$ и $П_2$, связанных с ламелями искателя $И$. Погрешность диодного МЗ, которое само дает лишь малую поправку, влияет в значительно меньшей степени. Чтобы учесть эту погрешность, следует вместо выражения $c_1 x_2 k_1 \delta$ в формуле (22) писать $c_1 x_2 k_1 \delta + \varepsilon$, где ε — погрешность на выходе МЗ точной системы.

Недостатком этого варианта является медленная обработка по каналу ρ_1 . На перемещение искателя через всю шкалу при 100 делениях и 15 мсек, требуемых на один переход с ламели на соседнюю ламель, нужно всего $4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 4,5$ сек. Применение быстродействующей следящей системы может снизить это время до десятых долей секунды. При малых рассогласованиях время перехода значительно меньше.

§ 8. Универсальные нелинейные преобразователи с двумя входами НП-2

При решении значительного круга задач на нелинейных электронных моделях встречается необходимость в воспроизведении функций двух переменных

$$y = f(x_1, x_2). \quad (1)$$

Выражение (1) описывает поверхность в трехмерном пространстве x_1, x_2, y (рис. 10.53). Условимся, что требуется воспроизведение функции y

в диапазоне

$$\left. \begin{aligned} -(x_1)_{\max} \leq x_1 \leq (x_1)_{\max}, \\ -(x_2)_{\max} \leq x_2 \leq (x_2)_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В электронных нелинейных моделях удобно принять $(x_1)_{\max} = (x_2)_{\max} = 100 \text{ в}$.

В некоторых электромеханических ВУ поверхность $y = f(x_1, x_2)$ получается обработкой мрамора, металла или пластмассы. Две следящие системы устанавливают щуп так, чтобы двумя его координатами были x_1 и x_2 . В конюдах одно из этих перемещений осуществляется поворотом обработанной поверхности вокруг некоторой оси. Значение y измеряется третьей координатой щупа, который касается обработанной поверхности.

Такие системы имеют существенные недостатки: а) наличие сложной механической части; б) инерционность, связанную с присутствием двух следящих систем; в) при переходе к новой функции приходится изготавливать новую поверхность; для изготовления требуется большой срок и высокая квалификация персонала.

Блок НП-2 для электронной нелинейной модели желательно выполнить без подвижных частей; этот блок должен обладать малой инерционностью — во всяком случае пренебрежимо малой при пропуске сигналов с частотами в несколько герц. Далее требуется сравнительно быстро перестраивать блок с одной функции на другую, причем эта перестройка должна выполняться исполните-

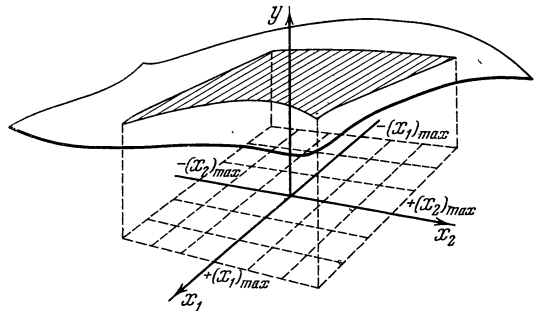


Рис. 10.53.

лем, обладающим невысокой квалификацией. Наконец, обычно допускается погрешность в воспроизведении функции порядка 1—2% от шкалы.

Для получения функции (1) можно воспользоваться разложением в ряды по известным функциям одного переменного, например в степенной ряд или кратный ряд Фурье.

Однако такой способ создания универсального НП-2 не может считаться наилучшим в силу следующих недостатков: а) дополнительная затрата труда на разложение функции двух переменных в ряды (если функция задана не рядом, а таблицей или формулой); б) большое число членов разложения, необходимых для получения приемлемой точности, а следовательно, значительная сложность схемы; в) трудность контроля и коррекции формы поверхности.

К этому методу стоит прибегать лишь в специальных случаях, например для прецизионного воспроизведения сравнительно простых функций двух переменных.

Наиболее рациональный метод построения универсального НП-2 состоит в том, чтобы задавать отдельно значения функции $y = f(x_1, x_2)$ в различных точках плоскости x_1, x_2 внутри области (2). В промежуточных точках значение y получается путем линейной аппроксимации. Такой НП-2 можно осуществить различными путями. Ниже рассмотрен принцип устройства аппарата, примененного в электронной нелинейной модели МН-1. Этот аппарат является целиком электронным и не содержит подвижных частей. Допустим, что имеется n преобразователей f_i с одним входом, на которые подается x_1 , либо один преобразователь НП-1, на вход которого подается x_1 , а на выходе появляются n функций x_1 ; обозначим их $f_1(x_1), \dots, f_n(x_1)$. Такой преобра-

зователь можно сделать как из диодного, так и из диодно-триодного НП-1, описанных выше. На рис. 10.54 этот преобразователь показан слева. Назовем его блоком x_1 .

Функции $f_i(x_1)$ проходят затем сквозь n блоков α_i ($i = 1, \dots, n$), у которых коэффициенты усиления или аттенюации α_i суть функции второй входной величины x_2 . Суммируя выходные напряжения блоков α_i , находим y :

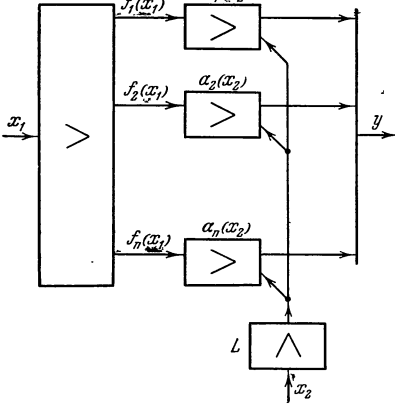


Рис. 10.54.

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_2) f_i(x_1). \quad (3)$$

Специальный выбор функций f_i и α_i дает возможность осуществить сравнительно несложную схему аппарата и упростить набор функции y . Разделим диапазон изменения x_2 (рис. 10.53) на $n - 1$ частей, не обязательно равных, и проведем через все точки деления, в том числе и через концы отрезка $|x_2| = (x_2)_{\max}$, плоскости, перпендикулярные к оси x_2 . Поверхность $y = f(x_1, x_2)$ в пересечении с этими плоскостями даст кривые $f_1(x_1), \dots, f_n(x_1)$. Именно эти кривые набираются на блоке x_1 (см. рис. 10.54). Набор

каждой из кривых f_i производится по принципу кусочно-линейной аппроксимации. Если, например, разделить диапазон изменения x_1 на десять интервалов, то значения каждой из функции $f_i(x_1)$ будут устанавливаться в 10 узловых точках концов интервалов. Внутри интервалов изменение

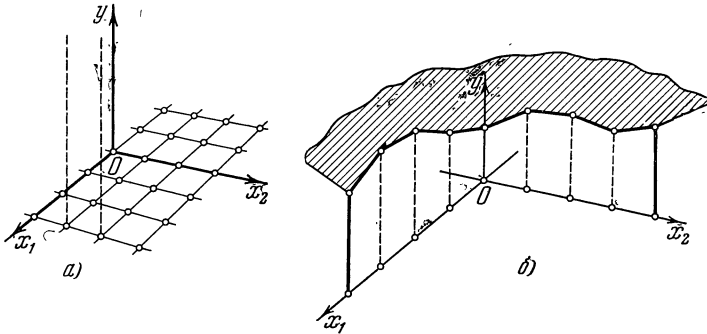


Рис. 10.55.

каждой из функций $f_i(x_1)$ происходит по прямой линии. Если число интервалов по оси x_2 также равно девяти, то получаем всего 10 функций $f_i(x_1)$ и общее число узловых точек в области (2) равно 100. На рис. 10.55, а показано несколько узловых точек на плоскости x_1, x_2 .

Функции $\alpha_i(x_2)$ должны быть так подобраны, чтобы при изменении x_2 внутри каждого интервала получалась также кусочно-линейная аппроксимация. На рис. 10.55, б приведены для примера разрезы аппроксимированной поверхности плоскостями $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$. Любое сечение поверхности плоскостями $x_1 = \text{const}, x_2 = \text{const}$ должно иметь вид ломаной.

Этому требованию можно удовлетворить, придав функциям $\alpha_i(x_2)$ «треугольную» форму, показанную на рис. 10.56, а. Каждая из этих функций отлична от нуля на протяжении двух смежных интервалов разбиения по x_2 и равна нулю на всех остальных интервалах. В общем случае интервалы

могут быть неодинаковыми. В точке, общей двум смежным интервалам, величина α_i достигает значения, скажем, единицы; в других крайних точках интервалов, т. е. $(i - 1)$ -го и i -го интервалов, а также на всех других интервалах величина $\alpha_i = 0$. Внутри каждого интервала α_i линейно зависит от x_2 . Легко видеть, что при такой форме функции $\alpha_i(x_2)$ и при наличии кусочно-линейной аппроксимации функций $f_i(x_1)$, сформулированное выше требование удовлетворяется. Действительно, согласно формуле (3) на i -м интервале по x_2 получаем следующее выражение для выходной величины:

$$y = \alpha_i(x_2) f_i(x_1) + \alpha_{i+1}(x_2) f_{i+1}(x_1). \tag{4}$$

Остальные α_j ($j < i$ и $j > i + 1$) равны нулю.

Функция $\alpha_i(x_2)$ на этом интервале убывает по линейному закону с возрастанием x_2 , а функция $\alpha_{i+1}(x_2)$ возрастает также по линейному закону. Следовательно, y в функции x_2 внутри интервала изменяется также по линейному закону, плавно переходя от значения $f_i(x_1)$ до значения $f_{i+1}(x_1)$

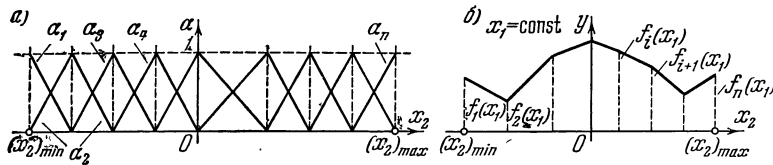


Рис. 10.56.

(рис. 10.56, б). Аналогичная картина кусочно-линейной аппроксимации получится и при изменении x_1 в случае $x_2 = \text{const}$, как это видно из формулы (3).

Возможно применение функций $\alpha_i(x_2)$ другой формы. Пусть каждая функция α_i до i -го интервала (т. е. на интервалах с номером $j < i$) равна нулю, на i -м интервале линейно возрастает до единицы и в дальнейшем остается равной единице. В этом случае, если x_2 находится внутри k -го интервала, выходная величина

$$y = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x_2) f_i(x_1) + \alpha_k(x_2) f_k(x_1). \tag{5}$$

Следовательно, выходное напряжение в данном случае формируется как сумма $(k + 1)$ членов. Поэтому при наборе функций необходимо соблюдать определенное направление, идя от функций f_i с меньшим номером i к функциям с большим номером.

Второй вид функций $\alpha_i(x_2)$, вообще говоря, легче осуществить, чем первый. Однако первый вид функций позволяет производить более удобный набор, так как отдельные функции $f_i(x_1)$ набираются независимо. Кроме того, в случае применения функций первого вида на выходной усилитель подаются одновременно только две функции. Если каналы остальных функций, равных нулю, автоматически отключить от выхода, то можно добиться значительного снижения дрейфа выходного напряжения. Если допустима меньшая точность, то можно на каждом интервале применить аппроксимацию в виде горизонтальной линии (кусочная аппроксимация). При этом схема НП-2 упрощается.

Блок x_1 представляет собой нелинейный преобразователь с одним входом и несколькими выходами, например диодно-триодного типа. Так как эта схема была описана выше, она здесь не рассматривается. На рис. 10.57 изображен блок x_2 , включающий в себя устройство L , управляющее аттенюаторами $\alpha_i(x_2)$ (см. рис. 10.54), а также сами аттенюаторы $\alpha_i(x_2)$.

Верхняя часть схемы содержит диодные ключи D_1, D_2, \dots, D_n . Когда эти ключи проводят, они пропускают токи, соответствующие функциям $f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_n(x_1)$, на выходной усилитель $U_{\text{вых}}$ схемы. Функции $f_i(x_1)$ представлены в виде суммы токов, текущих по группе сопротивлений $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{in}$. Эти сопротивления приключены к движкам группы потенциометров на выходе блока x_1 , таких же как потенциометры Π_1, \dots, Π_n на рис. 10.27. Всего имеется n таких групп потенциометров, а каждая

из групп состоит из n потенциометров. Если $n = 10$, то общее количество потенциометров равно 100.

Если диод D_1 проводит, а остальные не проводят, то группа сопротивлений $R_{11}, R_{21}, \dots, R_{n1}$ оказывается приключенной через диод к точке А, т. е. к сетке первого каскада усилителя $U_{\text{вых}}$. Проходящий через выходное сопротивление ток равен сумме токов, текущих по группе сопротивлений $R_{11}, R_{21}, \dots, R_{n1}$, и выходное напряжение u усилителя $U_{\text{вых}}$ пропорционально величине $f_1(x_1)$ и обратно ей по знаку.

Посредством потенциометра Π_0 можно изменять постоянную составляющую выходного напряжения.

При включении диода D_2 на выход схемы передается напряжение, соответствующее функции $f_2(x_1)$, а при одновременном включении диодов D_1 и D_2 на выход передается сумма функций $f_1(x_1)$ и $f_2(x_1)$. Диодные ключи D_1 и D_2 управляются триггерами T_1, T_2, \dots, T_n так же, как и во время-импульсном МЗ. Только схемы ключей здесь последовательного типа, а не параллельного, как

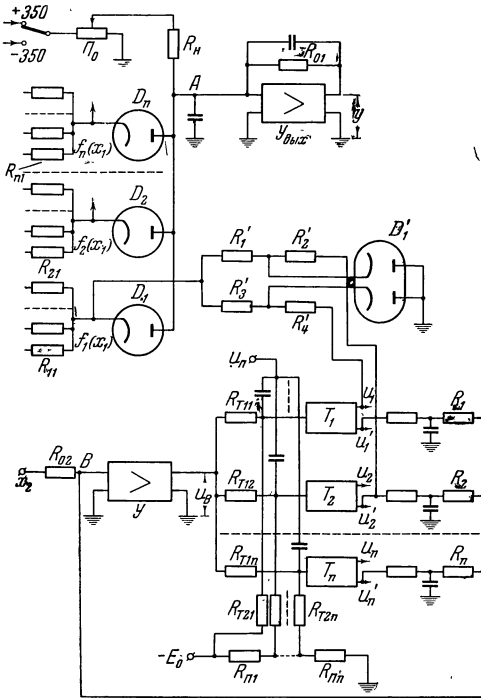


Рис. 10.57.

в описанном выше МЗ. Диоды открываются лишь в течение части периода T .

На схему блока x_2 подается второе входное напряжение x_2 , присоединенное через сопротивление R_{02} . Сопротивления обратной связи, охватывающими усилитель U , служат сопротивления R_1, R_2, \dots, R_n , присоединенные к анодам триггеров T_i .

Потенциалы анодов триггеров обозначены на рис. 10.57 через u_1, u'_1 для триггера T_1 ; u_2, u'_2 — для триггера T_2 и т. д.

Выход усилителя U через делители напряжения $R_{T11} \div R_{T21}, R_{T12} \div R_{T22}$ и т. д. присоединен к сеткам триггеров T_i . С потенциометров $R_{\Pi 1} \div R_{\Pi n}$ на сетки триггеров подаются различные смещения — наибольшее на триггер T_1 и наименьшее на триггер T_n . На сетки триггеров подается, так же как во время-импульсном МЗ, пилообразное напряжение u_{Π} через конденсаторы. Это напряжение меняется с частотой $f = 1-2$ кГц.

Изменяя выходное напряжение u_v усилителя U , можно изменять время t момента срабатывания каждого триггера от нуля до T . После срабатывания триггера в момент времени t он остается в этом состоянии до конца периода. В начальный момент следующего периода пилообразное напряжение заставляет триггер скачком перебраться в первоначальное состояние. Выходное напряжение каждого триггера является периодической функцией времени,

имеющей вид прямоугольника. Постоянная составляющая этого напряжения, линейно зависящая от τ , подается через фильтр на сопротивление обратной связи R_i .

Схема с обратной связью обеспечивает в точке B , т. е. на сетке усилителя Y , поддержание потенциала, близкого к нулю.

Изменение среднего значения напряжения первого триггера u_1 , а следовательно, и величины τ_1 его времени срабатывания, пропорционально изменению x_2 . По мере увеличения x_2 величина τ_1 времени срабатывания убывает от T до нуля. Когда x_2 доходит до конца первого интервала Δx_2 , то время τ_1 оказывается равным нулю. Дальнейшее небольшое увеличение x_2 заставляет выходное напряжение u_B усилителя Y увеличиться настолько, что в работу входит второй триггер. Когда x_2 проходит второй интервал, то τ_2 убывает от T до нуля, далее включается в действие третий триггер и т. д.

Каждый из диодов присоединен к двум смежным триггерам через двойной диод. Например, диод D_1 через сопротивления R'_1, R'_2, R'_3, R'_4 присоединен к потенциалу u_1 первого анода первого триггера T_1 и к потенциалу u'_2 второго анода второго триггера T_2 . Диод D_1 отпирается при срабатывании триггера T_2 ; остальные диоды работают аналогично.

На рис. 10.58 заштрихован промежуток времени, в течение которого диод отперт и пропускает функцию $f_i(x_1)$ на выход схемы. На рис. 10.58, *a* показано положение, при котором триггер T_1 срабатывает вблизи конца периода T . При дальнейшем увеличении x_2 в i -м интервале момент срабатывания перемещается к началу периода. Это изображено на рис. 10.58, *b* и *в*. При переходе x_2 на $(i+1)$ -й интервал начинает срабатывать триггер T_{i+1} ; после срабатывания этого триггера диод D_i запирается, в связи с чем время проводимости ключа сокращается с конца, как это показано на рис. 10.58, *г* и *д*. Когда x доходит до конца $(i+1)$ -го интервала, то моменты τ_i и τ_{i+1} совпадают один с другим (и с началом периода T) и диод D_i оказывается закрытым в течение всего периода (рис. 10.58, *e*). Таким образом, среднее значение составляющей выходного напряжения, обусловленной функцией $f_i(x_1)$, зависит от x_2 по закону, который изображен на рис. 10.56, *a*. Эта составляющая пропорциональна $f_i(x_1) \alpha_i(x_2)$, где α_i — коэффициент аттенюации i -го ключа. Функция α_i , как показано на рис. 10.58, является требуемой «треугольной» функцией. Частотная характеристика описанной выше схемы НП-2 начинает западать при частотах, больших 15 $\mu\text{ц}$, из-за наличия фильтров в цепях обратных связей. Для ряда обычных применений этой полосы частот вполне достаточно. В случае необходимости полоса частот может быть расширена с помощью обычных методов.

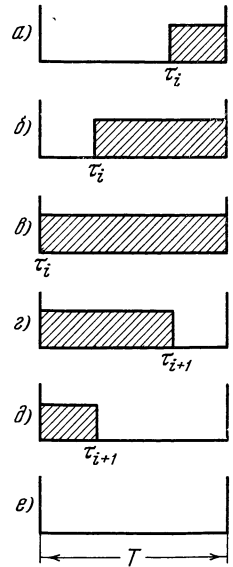


Рис. 10.58.

§ 9. Нелинейные электронные вычислительные устройства

Из рассмотренных выше типов блоков можно собирать различные схемы нелинейных моделей. В настоящее время такие модели изготавливаются серийно. Рассмотрим в качестве примера построение электронной модели нажимного устройства клетки непрерывного стана холодной прокатки. Упрощенная схема нажимного устройства показана на рис. 10.59, *a*. В действительности валок O передвигается с помощью двух нажимных винтов $HВ$, вращаемых двумя соединенными последовательно двигателями D .

На рис. 10.59, а показаны только один двигатель и один винт. Двигатель *Д* вращает нажимной винт *НВ* через самотормозящийся червячный редуктор *Р*. В редукторе имеется заметный люфт, который требуется учесть. Сила нажатия *Q*, действующая от прокатываемой полосы на валок *О*, вызывает момент сухого трения *M_{тр}* на оси нажимного винта. Следует учесть, что этот момент приложен к оси двигателя лишь тогда, когда люфт в редукторе выбран. В зоне люфта момент нагрузки на валу двигателя *Д* практически отсутствует. а координата *S* валка *О* постоянна, поскольку редуктор является самотормозящимся.

Двигатель *Д* постоянного тока с независимым возбуждением питается от электромашинного усилителя (*ЭМУ*). На управляющую обмотку *ЭМУ*

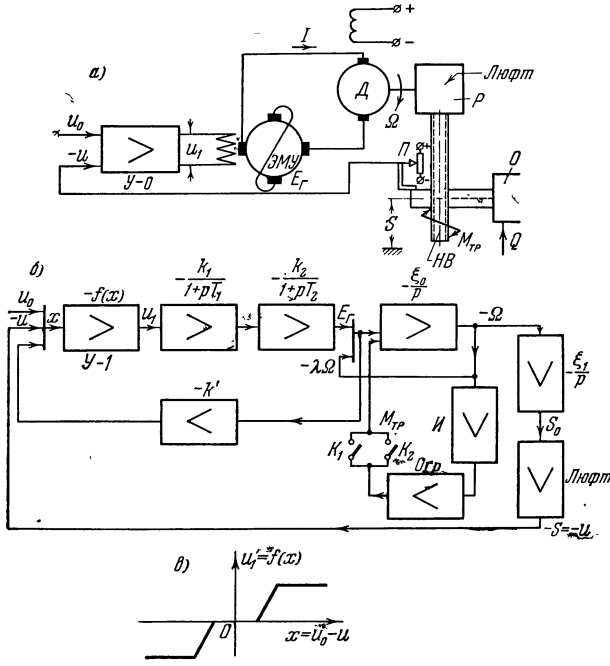


Рис. 10.59.

подается выходное напряжение u_1 усилителя *У-0*. Этот усилитель имеет зону нечувствительности для того, чтобы схема не входила в работу при малых рассогласованиях, иначе увеличится износ нажимных винтов, а также затруднится наладка системы. У усилителя *У-0* имеется также резко очерченная зона насыщения. Характеристика усилителя *У-0* показана на рис. 10.59, в.

На вход усилителя *У-0* подается разность напряжения установки u_0 и напряжения отработки u . Последнее дается потенциометром *П*, движок которого связан с координатой *S* валка. Если отсчет вести от некоторого начального значения координаты *S*, при котором $u = 0$, то величина u пропорциональна координате *S*.

В схеме имеются также дополнительные связи, не показанные на рис. 10.59, а, в частности обратная связь по току якоря *i*. Напряжение, пропорциональное *i*, поступает в виде дополнительной составляющей на вход усилителя *У-0*. На модели требуется испытать влияние этой дополнительной связи на динамику системы и подобрать наиболее выгодные значения ее параметров.

Методика разработки схемы модели остается для нелинейных моделей такой же, как и для линейных моделей. Первый шаг состоит в составлении структурной схемы системы по возможности в таком виде, чтобы построение по ней схемы модели было облегчено. В данном случае удобно каждое звено реальной системы моделировать соответствующим звеном модели.

На рис. 10.59, б показана структурная схема системы, построенная с учетом изменения знака напряжения звеньями модели. Электромашинный усилитель представлен здесь в виде двух инерционных звеньев с передаточными функциями $\frac{k_1}{1+pT_1}$ и $\frac{k_2}{1+pT_2}$. Интегрирующее звено ξ_0/p отражает

уравнения

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d\Omega}{dt} = M_{вр} - M_{тр} = \vartheta i - M_{тр}, \\ E_r - \lambda \Omega = iR. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь E_r — э. д. с. ЭМУ, R — сопротивление цепи якорей, $\lambda - \Omega$ — противо-э. д. с. двигателя, $\lambda = \text{const}$, ϑi — вращающий момент, $\vartheta = \text{const}$, J — момент инерции вращающихся масс, приведенный к оси двигателя. Эту величину считаем постоянной как в зоне люфта, так и вне ее, что ввиду большого коэффициента редукции допустимо.

Выходом интегрирующего звена ξ_0/p служит скорость Ω , которая поступает во второе интегрирующее звено ξ_1/p . На выходе последнего получается угловое перемещение вала двигателя S_0 (приведенное к поступательному перемещению S вала).

В коэффициенте передачи должно быть учтено также явление деформации валков и всей системы нажимных винтов, уменьшающее величину S по сравнению с той, которая имела бы место в абсолютно жесткой системе. В пределах малых перемещений и линейных зависимостей влияние этой деформации сводится лишь к учету ее в величине коэффициента ξ_1 или какого-либо другого коэффициента усиления в звеньях системы.

Величина S_0 связана с S через блок люфта (учтено, что этот блок инвертирует). Момент трения $M_{тр}$ подается на вход интегрирующего звена ξ_0/p через инвертор I и ограничитель $O_{гр}$. Ключи K_1 и K_2 поставлены в этой цепи для того, чтобы отключать момент трения в зоне люфта. Ключ K_1 может управляться, например, реле P_1 , включенным на выходе одного из усилителей, находящихся внутри блока люфта, скажем, $Y-1$ на рис. 10.37, б, а реле P_2 включено на выходе усилителя $Y-2$ на том же рисунке. Когда система находится в зоне люфта, то оба реле P_1, P_2 отключены. При выходе из зоны люфта в том или ином направлении срабатывает либо P_1 , либо P_2 и цепь для момента трения замыкается одним из контактов K_1, K_2 (см. рис. 10.59, б). Величина i заводится в виде обратной связи на вход усилителя $Y-1$ через усилительное звено с коэффициентом усиления $-k'$.

На рис. 10.60 изображена схема модели, соответствующая структурной схеме, показанной на рис. 10.59, б. Для простоты на этой схеме вместо представляющих напряжений модели проставлены переменные действительной системы. Коэффициент пропорциональности между S и u для наглядности выбран равным единице.

На выходе усилителя $Y-1$ получается величина $x = u_0 - u - k'i$. Эта величина поступает на модель нелинейного усилителя $Y-0$ (см. рис. 10.33, а)

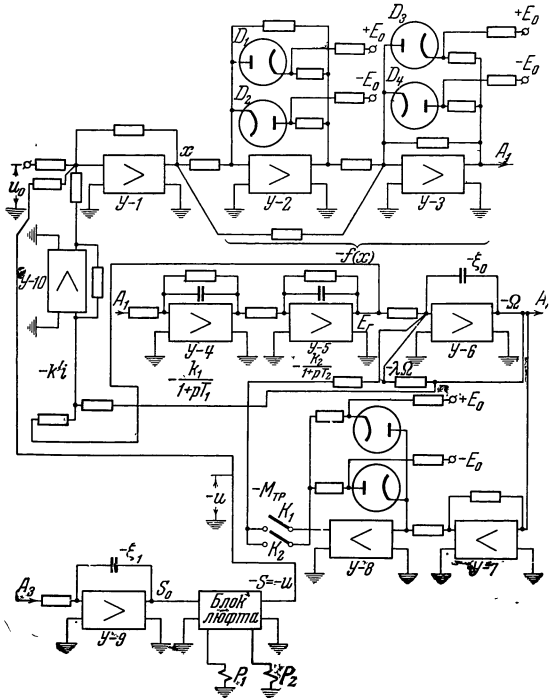


Рис. 10.60.

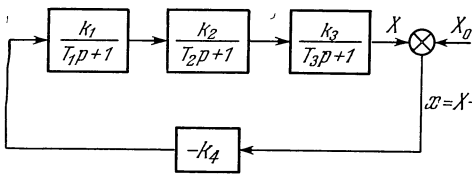
с характеристикой $f(x)$. Эта модель построена на усилителях $У-2$ и $У-3$. Схема модели усилителя $У-0$ соответствует рис. 10.33, б. Однако для моделирования зоны насыщения в цепи обратной связи усилителя $У-3$ (на рис. 10.33, б это усилитель $У$) включена диодная схема на диодах D_3, D_4 .

Точка A выхода $У-3$ приключена ко входу первого инерционного звена на усилителе $У-4$. Второе инерционное звено построено на усилителе $У-5$. Интегрирующее звено ξ_0/p на усилителе $У-6$ окружено обратной связью через усилители $У-7$ и $У-8$, моделирующей момент сухого трения, точно так же, как это изображено на рис. 10.40. Точка A_3 выхода интегрирующего звена $-\xi_0$ присоединена ко входу интегрирующего звена $-\xi_1$ (усилитель $У-9$). За этим звеном следует блок люфта, схема которого в деталях была описана выше (рис. 10.37). К этому блоку приключены реле P_1, P_2 . Контакты K_1, K_2 включают величину $M_{тр}$, когда система находится в зоне люфта, и включают эту величину при выходе из зоны люфта. Конечно, вместо контактов K_1, K_2 можно применить электронные ключи. Однако ввиду медленности работы схемы в данном случае вполне допустимо применение электро-механических элементов, а схема при этом несколько упрощается.

Обратная связь $-k'i$ подается на вход схемы через усилитель $У-10$; на вход этого усилителя подается сумма E_T и $-\lambda\Omega$ согласно второму из уравнений (1). Расчет параметров схемы модели сводится к написанию ее уравнений, сравнению их с уравнениями моделируемой системы и т. д.

§ 10. Пример моделирования системы автоматического регулирования на электронной модели

Рассмотрим пример моделирования системы автоматического регулирования температуры в рабочем пространстве печи, структурная схема которой изображена на рис. 10.61. Дифференциальное уравнение для изменения ошибки $x = X - X_0$, где X — истинная температура в печи в град, и X_0 — заданная температура также в град, имеет вид



$$T_1 T_2 T_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{dx}{dt} + k_1 k_2 k_3 k_4 x = 0. \quad (1)$$

Рис. 10.61.

Апериодическое звено с коэффициентом k_1 соответствует исполнительному устройству, подающему топливо в печь, апериодическое звено с коэффициентом k_2 соответствует температуре самой печи и, наконец, апериодическое звено с коэффициентом k_3 соответствует инерционности терморпары, измеряющей температуру в печи. Блок с коэффициентом k_4 соответствует пропорциональному регулятору температуры в печи.

Пусть параметры систем принимают следующие значения:

$$T_1 = 3 \text{ мин} = 180 \text{ сек}, \quad T_2 = 10 \text{ мин} = 600 \text{ сек}, \quad T_3 = 1 \text{ мин} = 60 \text{ сек},$$

$$k_1 = 10 \frac{\text{кг}}{\text{мин} \cdot \text{вольт}}, \quad k_2 = 2 \frac{\text{град} \cdot \text{мин}}{\text{кг}}, \quad k_3 = 0, 1, \quad k_4 = 2 \frac{\text{вольт}}{\text{град}}.$$

Нужно определить характер переходного процесса при начальном значении ошибки

$$x(0) = 50 \text{ град} \quad (2)$$

и нулевых начальных значениях

$$x'(0) = x''(0) = 0. \quad (3)$$

Подсчитаем значения коэффициентов в уравнении (1):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= T_1 T_2 T_3 = 3 \cdot 10 \cdot 1 = 30 \text{ мин}^3 = 648 \cdot 10^3 \text{ сек}^3, \\
 a_1 &= T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 43 \text{ мин}^2 = 1548 \cdot 10^2 \text{ сек}^2, \\
 a_2 &= T_1 + T_2 + T_3 = 3 + 10 + 1 = 14 \text{ мин} = 840 \text{ сек}, \\
 a_3 &= k_1 k_2 k_3 k_4 = 10 \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 2 = 4.
 \end{aligned}$$

Уравнение (1) принимает вид

$$648 \cdot 10^3 \frac{d^3 x}{dt^3} + 1548 \cdot 10^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 840 \frac{dx}{dt} + 4x = 0, \tag{4}$$

$$x(0) = 50 \text{ град.} \tag{5}$$

Поскольку можно ожидать, что процесс будет монотонным и максимальное значение ошибки за время переходного процесса будет иметь место

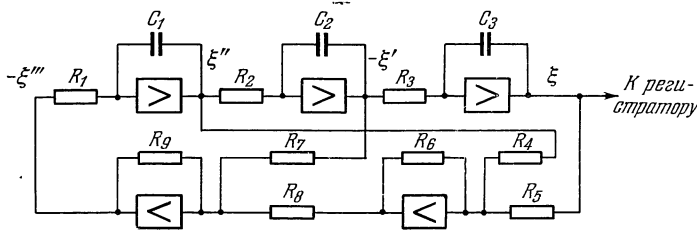


Рис. 10.62.

в начальный момент времени, то для того, чтобы увеличить точность решения, надо использовать весь диапазон выходных напряжений решающих усилителей, равный $\pm 100 \text{ в}$.

Поэтому в качестве машинной переменной ξ примем

$$\xi = kx \text{ или } x = \frac{1}{k} \xi, \tag{6}$$

где $k = 2 \text{ в/град}$ и, следовательно, начальное значение для ξ будет равно

$$\xi(0) = 2 \cdot 50 = 100 \text{ в}.$$

Одно из преимуществ моделирования на электронных моделях состоит в том, что мы можем медленные процессы моделировать в убыстренном масштабе времени, что дает громадный выигрыш времени, необходимого для исследования процессов.

Как видно из условия задачи, реальный переходный процесс длится десятки минут. Принимая масштаб времени $1 : 100$, мы можем на модели определить переходный процесс в 100 раз быстрее реального процесса. Итак, введем машинное время τ по формуле

$$\tau = \frac{1}{100} t \text{ или } t = 100\tau. \tag{7}$$

Таким образом, в новых переменных ξ и τ исходное уравнение (4) примет вид

$$\frac{648 \cdot 10^3}{100^3 \cdot 2} \xi''' + \frac{1548 \cdot 10^2}{100^2 \cdot 2} \xi'' + \frac{840}{100 \cdot 2} \xi' + \frac{4}{2} \xi = 0$$

или

$$0,648 \xi''' + 15,48 \xi'' + 84 \xi' + 4 \xi = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) после элементарных вычислений можно записать в виде

$$-\xi''' = 24 \xi'' + 130 \xi' + 6,2 \xi. \tag{9}$$

Этому уравнению соответствует схема электронной модели, изображенной на рис. 10.62.

В данной схеме принято

$$R_1 C_1 = 1 \text{ сек}, \quad R_2 C_2 = 1 \text{ сек}, \quad R_3 C_3 = 1 \text{ сек};$$

$$\frac{R_6}{R_5} = 6,2, \quad \frac{R_6}{R_4} = 14,3, \quad \frac{R_9}{R_8} = 1, \quad \frac{R_9}{R_7} = 130.$$

Начальное напряжение на емкости C_3 равно $\xi(0) = 100$ в, начальные напряжения на емкостях C_1 и C_2 равны нулю, что соответствует нулевым начальным условиям по первой и второй производным $\xi'(0) = \xi''(0) = 0$.

Изменения напряжения $\xi(t)$ обычно регистрируют на каком-либо регистраторе, например на шлейфовом осциллографе. Полученная осциллограмма дает нам полную информацию о характере изменения отклонений истинной

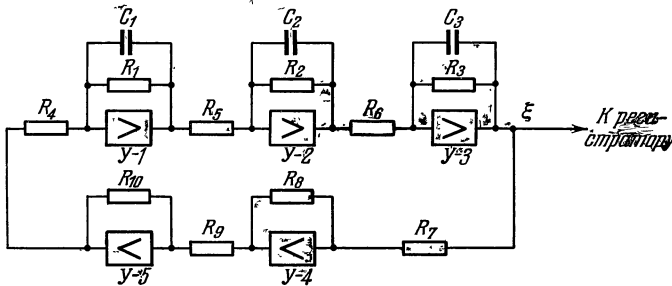


Рис. 10.63.

температуры в печи от заданного значения. Для того чтобы перейти от машинных переменных ξ и τ к исходным переменным x [град] и t [сек], нужно вспомнить, что

$$x = \frac{1}{2} \xi \text{ [град]}; \quad t = 100\tau \text{ [сек]}.$$

Можно также составить схему электронной модели, не переходя к дифференциальному уравнению (1), а отправляясь непосредственно от структурной схеме системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 10.61, используя решающие усилители модели в режиме аperiodического звена. Структурная схема такой модели изображена на рис. 10.63.

Усилители $Y-1$, $Y-2$, $Y-3$ соответствуют аperiodическим звеньям с постоянными времени T_1 , T_2 , T_3 . Для того чтобы получить ускоренный процесс моделирования, можно выбрать постоянные времени усилителей $Y-1$, $Y-2$, $Y-3$ в 100 раз меньшими, чем постоянные времени T_1 , T_2 , T_3 соответственно, т. е.

$$C_1 R_1 = \frac{1}{100} T_1 = \frac{180}{100} = 1,8 \text{ сек},$$

$$C_2 R_2 = \frac{1}{100} T_2 = \frac{600}{100} = 6 \text{ сек},$$

$$C_3 R_3 = \frac{1}{100} T_3 = \frac{60}{100} = 0,6 \text{ сек}.$$

Усилители $Y-4$ и $Y-5$ соответствуют отрицательной обратной связи с коэффициентом $-k_4$.

Используя исходные данные для коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 , k_4 в системе регулирования, сопротивления в электронной модели определим следующим образом:

$$\frac{R_1}{R_3} = k_1 = 10, \quad \frac{R_2}{R_4} = k_2 = 2, \quad \frac{R_3}{R_5} = k_3 = 0,1, \quad \frac{R_8}{R_7} = k_4 = 2.$$

Усилитель У-5 играет роль инвертора. Поэтому нужно положить

$$\frac{R_{10}}{R_9} = 1.$$

Для того чтобы использовать весь размах шкалы модели ± 100 в, начальное напряжение на емкости C_3 принимаем равным

$$\xi(0) = 100 \text{ в.}$$

Напряжения на емкостях C_1 и C_2 вначале должны равняться нулю, что соответствует нулевым начальным условиям $x'(0) = x''(0) = 0$.

Тем самым мы ввели масштаб температур, равный $k = 2 \text{ в/град}$, т. е.

$$x = \frac{1}{2} \xi.$$

Как и в предыдущей схеме модели, для того чтобы перейти от машинных переменных ξ и времени τ к исходным переменным x [град] и t [сек], нужно вспомнить, что

$$x = \frac{1}{2} \xi \text{ [град]}, \quad t = 100\tau \text{ [сек]}.$$

Г л а в а X I

СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 1. Роль случайных сигналов

До сих пор в этой книге исследовалось, как преобразуются регулярные сигналы, проходя через системы. При такой постановке задачи сигнал представлялся в виде некоторой известной функции времени. Рассматривалось преобразование этого сигнала известной системой. Если, кроме полезного сигнала, на систему действует также некоторая помеха, то и помеха при подобном методе рассмотрения должна считаться известной и наперед заданной функцией времени. Во многих случаях такая постановка задачи вполне уместна и целесообразна. Однако она вовсе не является единственно возможной. Мало того, она не является достаточно общей. Существует ряд важнейших общих задач теории систем связи и управления, требующих радикально иного подхода к процессам в этих системах.

Всегда ли можно считать сигнал, передаваемый, например, по системе связи, известной, наперед заданной функцией времени?

В реальных системах связи ситуация совсем иная — заранее неизвестно, какой сигнал будет передаваться в этой системе. Если бы на ее конце было заранее известно, каков будет передаваемый сигнал, то система связи вообще не понадобилась бы. Система нужна лишь потому, что по ней можно передавать неизвестные заранее сигналы и тем самым сообщать новые сведения.

Однако с самого начала мы располагаем некоторыми предварительными данными об этих сигналах. Посмотрим, каков характер такой информации. Во-первых, известно все множество, весь ансамбль возможных сигналов, т. е. сигналов, которые могут передаваться по данной системе связи. Например, телеграфная система устроена так, что по ней можно передавать в закодированном виде все буквы алфавита, а также знаки препинания. Далее, во многих случаях известно, какие сигналы передаются чаще, а какие — реже. Например, исследования показали, что чаще всего в русских текстах телеграмм встречается буква «О» (примерно в 41% случаев). Между тем, например, буква «Ы» встречается гораздо реже. В английских текстах телеграмм чаще всего встречается буква «Е». Таким образом, можно найти вероятности появления различных возможных сигналов. Это уже статистические характеристики. В результате исследования можно также найти более сложные и тонкие статистические характеристики сигналов, чем вероятности появления отдельных сигналов. Например, изучая множество телеграмм, можно найти вероятности появления различных сочетаний букв. Очевидно, что, например, вероятность появления одной за другой нескольких согласных букв очень мала.

Итак, те предварительные сведения, которые мы имеем о сигналах, носят обычно статистический характер. Поэтому в общем случае для исследования прохождения сигналов сквозь системы следует применять статистические методы.

Целесообразность применения этих методов еще более очевидна, если ставится задача исследования преобразования сигналов при наличии помех.

Помеха, находящаяся в канале связи вместе с полезным сигналом, представляет собой, как правило, заранее неизвестную функцию. Если бы помеха была известна, то ее влияние нетрудно было бы нейтрализовать, скомпенсировать. Действительно, пусть, например, известная помеха прибавляется к полезному сигналу в канале связи. Тогда на приемном конце можно вычесть из прибывающей суммы «сигнал плюс помеха» известную величину помехи, и мы получим полезный сигнал в чистом виде. Однако проблема возникает именно потому, что помеха заранее неизвестна и может принимать различные значения. На основании предварительного изучения помех можно определить лишь их статистические характеристики. Поэтому и задача наилучшего отделения сигнала от помехи становится статистической. Для ее решения необходимы статистические методы.

В сущности и характеристики систем, по которым проходят сигналы, также нельзя считать в точности известными. Эти характеристики в силу влияния многих факторов могут изменяться заранее непредвиденным образом. Так, например, в настоящее время развиваются системы радиосвязи, в которых волна попадает из передатчика в приемник, отражаясь от потока метеоров (метеорная радиосвязь). Очевидно, что характеристики такого канала связи подвержены случайным изменениям. Подобные изменения свойств системы обычно можно сводить к влиянию некоторых случайных помех, воздействующих на нее. Поэтому в дальнейшем изложении влияние случайного изменения характеристик системы не будет отдельно рассматриваться.

Разнообразные помехи, действующие в системах связи, можно классифицировать различными способами. Так, например, можно делить помехи по их происхождению на естественные и искусственные. Первые создаются природой независимо от человека, вторые являются прямыми или косвенными результатами деятельности человека. К естественным помехам в области радиосвязи относятся:

а) Внешние помехи — как атмосферные, так и космические. К атмосферным помехам относятся, например, грозовые помехи, главным источником которых являются молнии. Как известно, на земном шаре возникает в среднем 1000 молний в секунду. Особенно сильна грозовая деятельность в районе экватора. Отсюда, а также из других районов, где происходят грозы, грозовые помехи распространяются вдоль поверхности земли. Космические помехи вызываются излучением, приходящим из мирового пространства.

б) Внутренние помехи или внутренние шумы в радиотехнических устройствах. Основные их источники — тепловые шумы сопротивлений, дробовой эффект в электронных лампах и шумы полупроводниковых приборов.

Искусственные помехи могут быть специально организованными или неорганизованными. К числу искусственных помех относятся:

а) Промышленные помехи, источником которых являются объекты, создающие электромагнитное излучение, — рентгеновские аппараты, искрящие контакты электрических машин, искра между дугой и проводом трамвая или троллейбуса, система зажигания двигателей внутреннего сгорания и т. д. В больших городах эти помехи настолько велики, что приемные радиоприемники приходится выносить за город. Эти помехи неорганизованные.

б) Помехи при радиоприеме, происходящие от близких по частотам или близко расположенных мощных радиостанций.

в) Радиопротиводействие, т. е. организованные помехи, чинимые радиосвязи или радиолокационным станциям противника, или его линиям радиотелеизмерения или радиотелеуправления.

Помехи можно различать также по характеру или форме их зависимости от времени. Хотя эта классификация иллюстрируется ниже на примере радиопомех, но она одинакова для помех любой физической природы. Все обычные типы помех принято делить на три категории.

а) Помехи с узкополосным частотным спектром. К числу этих помех относятся помехи от передач радиостанций, наводки от электросети, имеющие форму периодических колебаний промышленной частоты, «фон» двойной промышленной частоты от двухполупериодных выпрямителей и от колебаний температуры подогревного катода в лампах и т. д.

б) Импульсные помехи, представляющие собой хаотическую последовательность импульсов, причем реакция системы на очередной импульс обычно успевает практически затухнуть к моменту прихода следующего импульса. Например, на

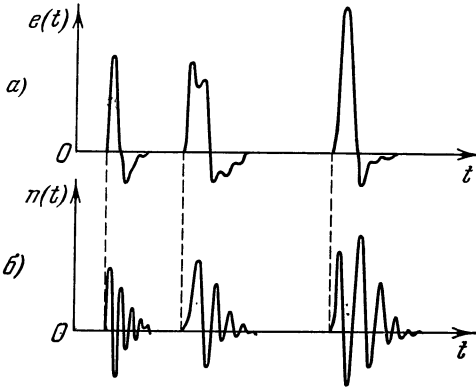


Рис. 11.1.

рис. 11.1, а показаны импульсные электродвижущие силы $e(t)$, возникающие от помех в антенне приемника, а на рис. 11.1, б — соответствующая им реакция на выходе колебательного контура приемника. Как видно из этого рисунка, реакции на отдельные импульсы практически независимы. Известно, что частотный спектр прямоугольного импульса сплошной, охватывает широкую полосу частот и его интенсивность, в общем падает с увеличением частоты ω . Сходный характер имеет и частотный спектр типичных импульсных помех.

в) Гладкие, или флуктуационные, помехи. Типичными примерами таких помех являются внутренние шумы радиоприемника, связанные с тепловым движением электронов внутри сопротивлений или дробным эффектом в электронных лампах. Гладкая помеха представляет собой результат действия огромного множества малых хаотических импульсов. Эти импульсы следуют друг за другом нерегулярно, но, как правило, настолько часто, что реакция системы на очередной импульс не успевает затухнуть к моменту прихода следующего. Поэтому реакции от отдельных импульсов накладываются друг на друга, образуя как бы единый незатухающий хаотический процесс. Частотный спектр гладкой помехи можно считать равномерным вплоть до

очень высоких частот. Между импульсными и гладкими помехами нет четко выраженной границы; целый ряд помех в одних условиях может быть отнесен к импульсным, а в других условиях — к гладким помехам.

Рассмотрим, например, структурную схему системы автоматического управления на рис. 11.2. На выходе управляемого объекта B имеется управляемая величина X , которая, в соответствии с техническими требованиями, должна удовлетворять некоторым условиям X_0 . Можно, например, потребовать, чтобы система поддерживала равенство $X = X_0$, что является типичным условием для САР; в общем случае задающее воздействие X_0 может означать любую совокупность технических требований, предъявляемых к выходу X объекта B . Для осуществления этих требований к объекту B присоединяется управляющее устройство A , которое осуществляет управляющее воздействие. Представим себе, что задающее воздействие X_0 посту-

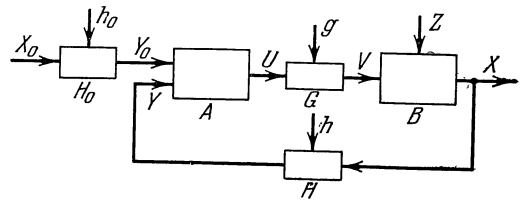


Рис. 11.2.

пает на вход управляющего устройства A через канал H_0 , в котором к X_0 примешивается случайная помеха h_0 . Тогда выход Y_0 канала H_0 , вообще говоря, уже не равен X_0 . Такой случай может иметь место, если, например, задающее воздействие X_0 подается на систему через линию радиосвязи или установка X_0 осуществляется человеком от руки с некоторой субъективной погрешностью. Точно так же управляющее воздействие U поступает на объект B через канал связи G , где оно, смешиваясь со случайной помехой g , преобразуется в воздействие V . Помеха g в конкретной системе может представлять собой погрешность в установке исполнительного блока или возмущение, поступающее на этот блок.

Значение управляемой величины X может поступать на управляющее устройство A также через канал обратной связи H , где оно, смешиваясь со случайной помехой h , преобразуется в Y . Примером помехи h может служить погрешность измерительного блока.

Наконец, сам объект B подвержен воздействию случайного возмущения z , отчего его характеристики изменяются заранее непредвиденным образом.

Отметим, что величина X_0 в общем случае является заранее неизвестным, т. е. по существу случайным сигналом. Например, в следящей системе антенны радиолокатора, осуществляющей слежение за азимутом самолета, задающее воздействие — азимут самолета — неизвестно заранее не только персоналу радиолокационной станции, но и самому летчику на самолете, особенно если он, подвергаясь обстрелу, совершает внезапные маневры.

Итак, на любые звенья системы автоматического управления действуют бесчисленные случайные помехи. В качестве примеров таких помех, кроме указанных выше, можно назвать дрейф электронных усилителей, колебания напряжений источников питания агрегатов, порывы ветра, действующие на пилотируемый автопилотом самолет, и т. д. Задача системы автоматического управления, как и системы связи, состоит в том, чтобы осуществлять в каком-либо смысле наилучшее приближение выхода X системы к требованиям X_0 , подаваемым на ее вход, при наличии случайных помех и возмущений. При создании системы автоматического управления в общем случае невозможно игнорировать случайные факторы, так как и задающее воздействие X_0 , и помехи, и возмущения, действующие на систему, вообще говоря, случайны. Таким образом, для исследования систем связи и управления необходимо привлечение статистических методов.

Развитие статистических методов и их проникновение во все области науки и техники знаменуют начало новой эпохи, эпохи более глубоких и тонких, чем прежние, методов познания действительности. Чтобы понять значение этих методов, необходимо уяснить их место в арсенале любых методов и средств теоретического исследования.

Любая область теоретического исследования представляет собой абстракцию, отвлечение, идеализацию и упрощение бесконечно сложных взаимосвязей, имеющих место в действительности. При такой идеализации необходимо учитывать лишь основные взаимосвязи, отбросив второстепенные. Успех исследования зависит во многом именно от характера идеализации. Действительно, излишне неотброшенные связи делают исследование чрезмерно громоздким, и в этом случае иногда даже не удается добраться до конкретных результатов. Между тем отбрасывание важных для данной области, существенных для нее связей делает результаты исследования беспредметными и неприменимыми к практическим задачам.

На первых этапах развития физики и техники преобладали «регулярные» методы теоретического исследования. Постановка задач характеризовалась полной определенностью задаваемых, наперед известных свойств систем и воздействий, оказываемых на эти систем. Классическая механика представляет собой типичный пример такой «регулярной» теории.

Однако уже в XIX веке в важнейших областях физики выявилась ограниченность и недостаточность подобной идеализации. Причина этого заключается в том, что отброшенные второстепенные связи все же оказывают влияние на течение процессов. Каждая отдельно взятая второстепенная связь может оказывать небольшое влияние. Но все бесчисленное множество второстепенных связей может сильнеешим образом влиять на процессы.

В этих условиях комплекс ограниченного числа основных взаимосвязей уже не определяет полностью исход каждого отдельного опыта. Этот исход становится неопределенным из-за наличия дополнительных, случайных факторов, т. е. из-за наличия бесчисленного множества отброшенных второстепенных взаимосвязей, детальное изучение которых принципиально невозможно.

Казалось бы, что теоретическое исследование в таких областях становится невозможным. Однако препятствия были преодолены путем радикального изменения методов подхода, путем разработки новых, статистических методов исследования. Для статистического метода характерен принципиальный отказ от определения результата каждого отдельного, единичного опыта. Действительно, если мы принимаем во внимание лишь комплекс ограниченного числа основных взаимосвязей, а на исход единичного опыта оказывает сильное влияние также и общий «фон» всех отброшенных взаимосвязей, то предсказание исхода единичного опыта становится невозможным. Однако можно рассматривать массовые опыты, т. е. опыты, совершаемые много раз при одном и том же комплексе основных взаимосвязей. Во многих случаях представляют интерес именно результаты массовых испытаний. Например, при термодинамических расчетах импульс, сообщаемый стенке сосуда одной из ударившихся о нее молекул газа, не представляет интереса; важно общее давление газа, испытываемое стенкой, т. е. результат множества ударов молекул.

Оказывается, что при многократном осуществлении испытаний, характеризующихся каждый раз одним и тем же комплексом основных взаимосвязей, выкристаллизовываются устойчивые статистические закономерности. Частоты появления определенных результатов, средние значения некоторых величин можно предвычислить с достаточной определенностью. Между тем при решении большого круга задач именно такие результаты и требуются.

Статистическая закономерность, обнаруживаемая лишь при массовых явлениях, не похожа на закономерность «регулярного» типа, характерную для каждого единичного явления. Тем не менее *статистическая закономерность есть объективно существующая форма причинной связи.*

В настоящее время статистические методы нашли широчайшее применение в различных областях физики, техники, биологии, экономики и других наук. Роль статистических методов в теории и технике систем связи и управления также весьма велика и с течением времени все увеличивается. С усложнением принципов и условий работы систем все более необходимым оказывается учет случайных факторов. Этот учет оказывает существенное влияние на направление развития техники и теории систем связи и управления.

Выше было отмечено, что в реальных условиях работы систем связи и управления как полезные сигналы, воспринимаемые системой, так и помехи являются случайными. В этих условиях, особенно при наличии значительных помех, приобретает большое значение помехоустойчивость системы, способность ее осуществлять свои функции, несмотря на наличие помех. Разомкнутые системы сравнительно слабо защищены от влияния случайных помех. Если, например, установить на точнейшим образом руль самолета, но не контролировать его направление в течение полета, то непредвиденные порывы ветра и другие случайные факторы могут увести самолет далеко в сторону от пункта назначения. Изобретение обратной связи и появление

замкнутых систем автоматического управления означало большой шаг вперед в повышении их помехоустойчивости. При наличии достаточно точного измерительного блока, измеряющего отклонения управляемой величины от требуемого значения, становится возможной корректировка этой величины и цель управления может достигаться даже при сравнительно больших помехах, действующих на звенья системы. Для обеспечения наилучшей работы системы необходимо при ее конструировании учитывать вероятностные характеристики случайных воздействий. Этот учет может принимать довольно сложную форму, особенно если требуется прогноз, предсказание характера воздействий в будущем. Между тем прогноз во многих случаях совершенно необходим. Если собака гонится за зайцем и бежит ему наперерез, то для того, чтобы быстрее поймать его, она должна предугадывать возможную траекторию движения зайца в будущем. Характерные черты этой ситуации не изменятся, если заменить зайца целью в виде баллистической ракеты или самолета, а собаку — управляемым зенитным снарядом, который должен возможно скорее догнать цель. В этом случае прогноз наименее вероятнейшего движения цели необходим для обеспечения решения задачи управления. Между тем такой прогноз требует применения статистических методов. Однако значение статистических методов для техники и теории связи и управления не исчерпывается учетом случайных воздействий. В некоторых типах систем сам закон действия управляющего устройства целесообразно сделать случайным. Таким образом, случайность нарочно вводится в управляющее устройство, чтобы улучшить его действие.

Наконец, при изучении весьма сложных систем может оказаться целесообразным отказ от рассмотрения слишком сложных «регулярных» законов их действия. В некоторых случаях, рассматривая такие сложные «регулярные» законы как случайные, мы можем значительно упростить их исследование. Иногда только этот путь и позволяет прийти к каким-либо законченным результатам.

Для понимания статистических методов необходимо предварительно ознакомиться с основами теории вероятностей.

§ 2. Случайные события и случайные величины

В этом параграфе дается краткая сводка тех понятий и формул, которые потребуются в дальнейшем изложении. Более подробные сведения о теории вероятности и статистических методах можно найти в ряде руководств и монографий, приведенных в списке литературы к данной главе. Кроме того, некоторые дополнительные сведения статистического характера будут сообщаться по мере необходимости.

В теории вероятностей рассматриваются три класса случайных явлений. К первому классу относятся самые простые случайные явления — так называемые *случайные события*. Второй, более сложный класс называется *случайными величинами*. Наконец, наиболее сложный класс — *случайные процессы*.

Случайное событие A характеризуется некоторым числом — вероятностью $p(A)$, причем $0 \leq p(A) \leq 1$. При массовом производстве испытаний, в процессе которых данное случайное событие A появляется с вероятностью $p(A)$, *частота*, или частость появления события (т. е. отношение числа N_A появлений события к общему числу испытаний N) практически мало отличается от $p(A)$, если N достаточно велико. Для достоверного события $p(A) = 1$, для невозможного $p(A) = 0$.

Если события A_1, A_2, \dots, A_m несовместимы, т. е. любые два из них не могут произойти в одном и том же испытании, то вероятность $p(A)$ события, заключающегося в появлении хотя бы одного из них, выражается

формулой

$$p(A) = \sum_{i=1}^m p(A_i). \quad (1)$$

Часто применяют обозначение $A = A_1 + \dots + A_m$ для события A . Знак «плюс» заменяет здесь слово «или».

Если одно из событий A_i ($i = 1, \dots, m$) произойдет наверняка, то $p(A) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^m p(A_i) = 1. \quad (2)$$

События A_1, \dots, A_m вероятности которых удовлетворяют равенству (2), образуют, как принято говорить, *полную группу*.

Допустим, что при определенных условиях происходит серия испытаний, с которыми связано появление или непоявление случайного события A с вероятностью $p(A)$, которую мы теперь назовем *безусловной*. Пусть с испытаниями связано также появление или непоявление другого случайного события B с безусловной вероятностью $p(B)$. Отберем из всех N испытаний лишь их часть N_B , при которых появилось событие B . Пусть из всех этих N_B испытаний лишь часть их, равная $N_{A/B}$, характеризуется также появлением события A . Отношение $N_{A/B}$ к N назовем частотой события A при условии, что появилось событие B , или, более кратко, *условной частотой события A* (при условии, что появилось B). При большом числе испытаний N_B отношение $N_{A/B}$ к N_B практически мало отличается от некоторого числа, которое мы условимся обозначать $p(A/B)$ и назовем условной вероятностью события A (при условии, что событие B появилось).

Из вышеизложенного ясно, что $N_{A/B}$ есть число испытаний, в которых появились оба события A и B . При большом числе N испытаний отношение $N_{A/B}/N$ практически мало отличается от вероятности события C , заключающегося в совместном наступлении обоих событий A и B . Часто применяют обозначение $C = AB$, где операция умножения соответствует союзу «и». Таким образом, $p(C) = p(AB)$.

Так как

$$\frac{N_{A/B}}{N} = \frac{N_{A/B}}{N_B} \cdot \frac{N_B}{N}, \quad (3)$$

то можно записать по аналогии выражение не для частот, а для соответствующих им вероятностей

$$p(AB) = p(A/B) \cdot p(B). \quad (4)$$

Ввиду равноправия событий A и B можно, рассуждая аналогично, получить формулу, в которой A и B поменялись местами:

$$p(AB) = p(B/A) \cdot p(A). \quad (5)$$

Итак,

$$p(AB) = p(A/B) p(B) = p(B/A) \cdot p(A). \quad (6)$$

События A и B *независимы*, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого. Если вероятность наступления события A не зависит от появления B , то $p(A/B) = p(A)$. В этом случае формула (6) принимает вид

$$p(AB) = p(A) p(B). \quad (7)$$

Эту формулу можно рассматривать как определение независимости событий A и B . Из (6) и (7) следует, что если $p(A/B) = p(A)$, то и $p(B/A) = p(B)$, т. е. если A независимо от B , то и B независимо от A .

События A_1, \dots, A_m называются *попарно независимыми*, если любые два из них независимы. Если же, кроме того, независимы и любые произведения этих событий $A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_r}$ и $A_{j_1}A_{j_2} \dots A_{j_q}$, не содержащие общих сомножителей, то события A_1, \dots, A_m называются *независимыми*. Подчеркнем, что понятия попарной независимости и независимости могут не совпадать.

Для любых событий, применяя последовательно формулу (6), получаем

$$p(A_1A_2 \dots A_m) = p(A_1) p(A_2/A_1) \dots p(A_m/A_1A_2 \dots A_{m-1}). \quad (8)$$

Если же события независимы, то выражение (8) упрощается и принимает вид

$$p(A_1A_2 \dots A_m) = p(A_1) p(A_2) \dots p(A_m). \quad (9)$$

Пусть A_1, \dots, A_m — несовместимые события, образующие полную группу. Тогда $A = A_1 + \dots + A_m$ есть достоверное событие, и вероятность какого-либо другого события B может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} p(B) &= p(BA) = p[B(A_1 + \dots + A_m)] = \\ &= p(BA_1 + BA_2 + \dots + BA_m) = \sum_{i=1}^m p(BA_i), \end{aligned} \quad (10)$$

так как события BA_i и BA_j несовместимы при $i \neq j$. С другой стороны, из (5)

$$p(BA_i) = p(A_i) p(B/A_i). \quad (11)$$

Подставляя это выражение в (10), получаем

$$p(B) = \sum_{i=1}^m p(A_i) p(B/A_i). \quad (12)$$

Следовательно, условная вероятность $p(A_i/B)$ может быть выражена на основании (6) и (12) так:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) p(B/A_i)}{p(B)} = \frac{p(A_i) p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^m p(A_i) p(B/A_i)}. \quad (13)$$

Эта формула, впервые найденная в 1784 г. англичанином Бэйесом, носит его имя. Формула Бэйеса широко применяется для подсчета так называемых *апостериорных* вероятностей, т. е. вероятностей, полученных в результате какого-либо опыта. Допустим, что вероятности событий A_i до некоторого испытания — априорные вероятности — обозначены $p(A_i)$. Если в результате испытания появляется событие B , то после опыта в условиях, когда появилась новая информация, необходимо переопределить вероятности событий A_i . Эти новые вероятности теперь будут уже условными вероятностями $p(A_i/B)$, поскольку они должны вычисляться при условии, что произошло событие B . Они же называются *апостериорными* вероятностями. Формула Бэйеса как раз и служит для подсчета апостериорных вероятностей $p(A_i/B)$ по заданным априорным вероятностям $p(A_i)$. Как видно из (13), для такого подсчета нужно знать условные вероятности $p(B/A_i)$.

Случайная величина представляет собой более сложную конструкцию, чем случайное событие. Это — величина, которая в результате испытания принимает одно и только одно значение из множества возможных значений. Поэтому, чтобы охарактеризовать случайную величину, необходимо задать

как множество ее возможных значений, так и их вероятности. Пусть возможные значения x_1, \dots, x_n случайной величины ξ дискретны (причем n может быть конечным или бесконечно большим). Тогда нужно задать n вероятностей вида $p_i = p(x_i)$, где p_i есть вероятность случайного события, заключающегося в появлении значения x_i случайной величины ξ . Очевидно,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (14)$$

так как события $\xi = x_i$ для разных i несовместимы по определению и, с другой стороны, образуют, опять-таки по определению случайной величины, полную группу. Если же случайная величина ξ может принимать любые значения в некотором интервале, то необходима другая форма задания ее вероятностной характеристики. Наиболее общей формулой является *функция распределения* $F(x)$ или, иначе, *интегральный закон распределения*. Это вероятность случайного события $\xi < x$, заключающегося в том, что величина оказалась меньше некоторого фиксированного уровня x :

$$F(x) = p(\xi < x). \quad (15)$$

Зная $F(x)$ для любых x , легко найти вероятность попадания ξ в интервал $a \leq \xi < b$. Действительно, поскольку события $\xi < a$ и $a \leq \xi < b$ несовместимы, а их суммой является событие $\xi < b$, то можно написать

$$p(\xi < b) = p(\xi < a) + p(a \leq \xi < b). \quad (16)$$

Отсюда следует

$$p(a \leq \xi < b) = p(\xi < b) - p(\xi < a) = F(b) - F(a). \quad (17)$$

Очевидно, что $F(a) = +1$ для $a = \infty$ и $F(a) = 0$ для $a = -\infty$; очевидно также, что $F(x)$ есть монотонная неубывающая функция от x .

Если $F(x)$ непрерывна и дифференцируема во всем интервале $-\infty < x < \infty$, то соответствующая случайная величина называется *непрерывной* случайной величиной. Положим

$$P(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \quad (18)$$

Функция $P(x)$ называется *плотностью вероятности* или *дифференциальным законом распределения* случайной величины ξ . Так как

$$P(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}, \quad (19)$$

то $P(x) \Delta x$ представляет собой, с точностью до малых высшего порядка $O(\Delta x)$, вероятность для случайной величины ξ находиться в бесконечно малом интервале $x \leq \xi < x + \Delta x$. Далее, вероятность для величины ξ находиться в интервале $a \leq \xi < b$ определяется выражением

$$p(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b P(x) dx. \quad (20)$$

Отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1. \quad (21)$$

Важными, хотя и не исчерпывающими характеристиками случайной величины ξ являются ее так называемые *моменты*. Моментом порядка k

называется некоторое число, представляющее собой интеграл

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(x) dx. \quad (22)$$

Особо важное значение имеет момент первого порядка α_1 , который называется *математическим ожиданием* или средним значением случайной величины и часто обозначается m_ξ или $M\{\xi\}$:

$$m_\xi = M\{\xi\} = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x) dx. \quad (23)$$

Понятие среднего значения происходит от среднего арифметического. Если произведено достаточно большое число N испытаний, то среднее арифметическое $\xi_{\text{ср. ар}}$ полученных при испытании значений случайной величины ξ практически мало отличается от среднего значения m_ξ (в том смысле, что вероятность значительных отклонений $\xi_{\text{ср. ар}}$ от m_ξ достаточно мала).

Центральным моментом k -го порядка μ_k называется момент k -го порядка разности $(\xi - m_\xi)$:

$$\mu_k = M\{(\xi - m_\xi)^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^k P(x) dx. \quad (24)$$

Особое значение имеет *центральный момент второго порядка*, который называется *дисперсией* и обозначается $D(\xi)$ или D_ξ :

$$D_\xi = D(\xi) = M\{(\xi - m_\xi)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 P(x) dx. \quad (25)$$

Дисперсия в известной степени характеризует разброс значений случайной величины ξ вокруг ее среднего значения m_ξ . Величина $\sqrt{D_\xi}$ называется *среднеквадратичным отклонением* и обозначается σ_ξ :

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}. \quad (26)$$

Эту величину в общем случае следует отличать от среднеквадратичного значения ξ , которое обозначим через $\xi_{\text{ср. ар}}$ и определим посредством формулы

$$(\xi_{\text{ср. ар}})^2 = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx. \quad (27)$$

Лишь в том случае, когда $m_\xi = 0$, выражения (25) и (27) совпадают. Математическое ожидание любой функции $f(\xi) = \eta$ случайной величины ξ определяется выражением

$$M\{\eta\} = M\{f(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P(x) dx. \quad (28)$$

Для нескольких случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n можно построить как интегральную, так и дифференциальную характеристики. Например, плотность совместного распределения непрерывных случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n есть функция $P(x_1, \dots, x_n)$, причем $P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ есть вероятность события, заключающегося в попадании ξ_1 — первой из случайных величин — в интервал $x_1 \div x_1 + dx_1$ и в то же время второй

величины ξ_2 — в интервал $x_2 \div x_2 + dx_2$ и так вплоть до попадания последней случайной величины ξ_n в интервал $x_n \div x_n + dx_n$.

Совокупность случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n можно рассматривать как декартовы координаты точки или как составляющие случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ в n -мерном пространстве. Вероятность $p(A)$ события A , заключающегося в попадании конца вектора $\bar{\xi}$ в область Ω_A в этом пространстве, равна, очевидно, сумме вероятностей попаданий в бесконечно малые объемы $d\Omega_A = dx_1 \dots dx_n$ этой области

$$p(A) = \int_{\Omega_A} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega_A} P(\bar{x}) d\Omega_A. \quad (29)$$

Здесь введено сокращенное обозначение $P(\bar{x})$ для $P(x_1, \dots, x_n)$.

Так как вероятность попадания конца вектора $\bar{\xi}$ куда-нибудь в n -мерном пространстве равна единице, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (30)$$

Найти плотность вероятности $P_i(x_i)$ для одной величины ξ_i можно, проинтегрировав $P(x_1, \dots, x_n)$ по всей области изменения других величин. Например,

$$P_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n. \quad (31)$$

Если величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, то, согласно выражению (9), общая вероятность $p(A)$ указанного выше события A равна произведению вероятностей, взятых отдельно для случайных величин ξ_i ($i = 1, \dots, n$). Поэтому в данном случае

$$P(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1) \cdot P_2(x_2) \dots P_n(x_n). \quad (32)$$

Плотности P_i вероятностей для различных ξ_i могут быть, конечно, различными.

Если случайные величины ξ и η зависимы, то задание фиксированного значения одной из них влияет на вероятностное распределение другой. Пусть $P(y/x) dy$ есть вероятность для случайной величины η оказаться в фиксированном интервале $y \div y + dy$ при условии, что случайная величина ξ имеет некоторое фиксированное значение x . Назовем плотность вероятности $P(y/x)$ для η при фиксированном $\xi = x$ *условной плотностью вероятности*. Так как вероятность для η иметь какое-либо вообще значение равна единице, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y/x) dy = 1. \quad (33)$$

Зная совместную плотность распределения $P(x, y)$ величин ξ и η , негрудно найти условную плотность распределения $P(y/x)$. Действительно, на основании теоремы умножения вероятностей можно написать

$$P(x, y) dx dy = [P(x) dx] \cdot [P(y/x) dy], \quad (34)$$

где $P(x)$ — безусловная плотность вероятности для ξ . Отсюда следует

$$P(y/x) = \frac{P(x, y)}{P(x)}. \quad (35)$$

Формулы (33) и (35) нетрудно обобщить на случай векторных величин $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, т. е. совокупностей ξ_1, \dots, ξ_n и η_1, \dots, η_n .

Для совокупности случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n можно также ввести понятия средних значений. Например, среднее значение величины ξ_k может быть вычислено по следующей формуле:

$$M\{\xi_k\} = m_{\xi_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_k P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega(\bar{x})} x_k P(\bar{x}) d\Omega(\bar{x}), \quad (36)$$

где $\Omega(\bar{x})$ — все n -мерное пространство точек концов вектора $\bar{\xi}$, а $d\Omega(\bar{x}) = dx_1 \dots dx_n$ — бесконечно малый элемент этого пространства.

Центральные моменты второго порядка для совокупности величин ξ_1, \dots, ξ_n определяются формулами

$$M_{jk}\{\xi_j \xi_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [x_j - M\{\xi_j\}][x_k - M\{\xi_k\}] P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (37)$$

При $j = k$ получаем дисперсию случайной величины ξ_j , а при $j \neq k$ соответствующая величина носит название *ковариации* случайных величин ξ_k и ξ_j . Если эти величины независимы, то, как нетрудно показать, ковариация равна нулю (обратное, вообще говоря, неверно: если ковариация равна нулю, то нельзя еще утверждать, что величины ξ_k и ξ_j независимы). Безразмерное отношение

$$R_{jk} = \frac{M_{jk}}{\sqrt{M_{jj}M_{kk}}} \quad (38)$$

называется *коэффициентом корреляции* между случайными величинами ξ_k и ξ_j .

Совершенно аналогичным образом формулируются и понятия условных средних значений. Например, условное среднее значение $M\{\eta/\xi\}$ случайной величины η при фиксированном значении x другой случайной величины ξ и при условной плотности $P(y/x)$ для η при фиксированном ξ получается по общей формуле типа (35)

$$M\{\eta/\xi\} = M_{\eta/\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} y P(y/x) dy = \frac{1}{P(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y P(x, y) dy. \quad (39)$$

Последнее выражение получено путем подстановки $P(y/x)$ из формулы (35).

§ 3. Случайные процессы и их вероятностные характеристики

Случайная функция какого-либо аргумента — это такая функция, которая при каждом значении аргумента является случайной величиной. Случайная функция времени называется *случайным процессом*. Ее называют также вероятностным или стохастическим процессом. Можно определить случайный процесс еще и как совокупность (множество) случайных величин $x(t)$, зависящих от действительного аргумента t .

В природе происходят разнообразные случайные процессы. Например, координата какой-либо из молекул, находящихся в сосуде, есть случайная функция времени. Напряжение дрейфа на выходе усилителя постоянного тока есть также случайная функция времени, так как оно зависит от множества изменяющихся, заранее не предвиденных и не контролируемых факторов.

Отдельные наблюдения над случайным процессом, протекающим в одностепенных системах, т. е. при неизменных контролируемых условиях опыта, дадут каждый раз различные функции $x(t)$ — различные экземпляры, или реализации, случайного процесса. Предсказать, какова будет в каком-либо единичном опыте реализация случайного процесса, невозможно. Можно найти лишь статистические данные, характеризующие множество процессов, протекающих в одинаковых условиях.

Простейшая из таких вероятностных характеристик — это *одномерный закон распределения*. Если фиксировать некоторый определенный момент $t = t_1$, то значение $x(t_1)$ есть случайная величина, полностью характеризующая своим законом распределения. Пусть, например, вероятность того, что в момент времени $t = t_1$ величина x находится в интервале между x_1 и $x_1 + dx_1$, равна $w_1(x_1, t_1) dx_1$. Тогда $w_1(x_1, t_1)$ — это плотность вероятности для $(x)_{t=t_1}$, называемая одномерной плотностью вероятности или одномерной функцией распределения случайного процесса $x(t)$.

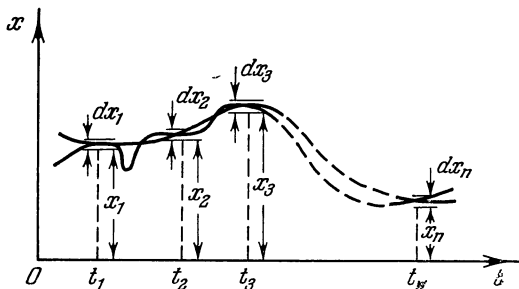


Рис. 11.3.

Плотность вероятности $w_1(x_1, t_1)$ есть функция времени, так как она зависит от t_1 ; это означает, что в общем случае функция распределения для x_1 с течением времени может изменяться. Функция $w_1(x_1, t_1)$ в общем случае не может быть исчерпывающей характеристикой случайного процесса. Ведь последний представляет собой множество случайных величин, вообще говоря, связанных друг с другом статистическими зависимостями. Эти связи не учитываются одномерной плотностью распределения.

Связь между двумя значениями случайного процесса $x(t)$ в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ учитывается *двумерной плотностью распределения* или двумерной функцией распределения. Обозначим через $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$ вероятность сложного события, заключающегося в том, что в момент времени $t = t_1$ функция $x(t)$ находится в интервале между x_1 и $x_1 + dx_1$, а в момент времени $t = t_2$ функция $x(t)$ находится в интервале между x_2 и $x_2 + dx_2$. Функция $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ носит название двумерной плотности распределения. Эта функция полнее, чем одномерная, характеризует случайный процесс, но и она не может дать его исчерпывающую характеристику.

Характеристика случайного процесса должна дать возможность сравнивать вероятности появления различных кривых $x(t)$. Подобную характеристику можно получить следующим образом. Рассмотрим n моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n (рис. 11.3). Обозначим через $w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$ вероятность сложного события, заключающегося в том, что в момент времени $t = t_1$ функция $x(t)$ находится между x_1 и $x_1 + dx_1$ и т. д.; наконец, вероятность того, что в момент времени $t = t_n$ функция $x(t)$ находится между x_n и $x_n + dx_n$. Функция w_n называется *n-мерной плотностью распределения*. Она позволяет определить вероятность прохождения функции $x(t)$ через n «щелей», размеры которых dx_1, dx_2, \dots, dx_n . Ординаты «щелей» равны x_1, x_2, \dots, x_n соответственно. Чем больше число «щелей», т. е. чем больше n , тем детальнее можно выяснить вероятность появления тех или иных кривых. Однако при любом значении n функция w_n характеризует лишь совместное вероятностное распределение n значений случайного процесса при $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, что еще не полностью опреде-

ляет случайный процесс. Сквозь n «щелей» могут пройти различные кривые (рис. 11.3). В общем случае полная информация (да и то с некоторыми оговорками) о случайном процессе имеется у нас лишь в том случае, когда для любого n известна w_n .

Существуют, однако, некоторые типы случайных процессов, вероятностные свойства которых полностью определяются заданием функции w_n для конечного значения n .

Простейший класс случайных процессов — *чисто* случайные процессы — характеризуется независимостью значения $x(t)$ в различные моменты времени t_1 и t_2 . Одномерная плотность вероятности $w_1(x, t)$ полностью характеризует чисто случайный процесс. Действительно, вероятность совместного наступления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w_1(x_1, t_1) \cdot w_1(x_2, t_2) \dots w_1(x_n, t_n). \quad (1)$$

Таким образом, все «старшие» функции w_n ($n > 1$) конструируются из одной w_1 . Такой процесс может мыслиться лишь как идеализация, поскольку в реальных процессах всегда существует некоторая связь между значениями $x(t)$ в достаточно близкие моменты времени.

Другим примером является класс марковских случайных процессов, названных по имени знаменитого математика А. А. Маркова, впервые исследовавшего процессы этого типа. Все плотности вероятности w_n для марковского процесса получаются из $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Обозначим через $w_y(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ условную плотность вероятности для значения $x = x_n$ в момент времени $t = t_n$ при условии, что в момент времени t_{n-1} , меньший t_n ($t_{n-1} < t_n$), значение $x(t)$ было равно x_{n-1} . Марковский процесс характеризуется тем, что эта условная плотность вероятности не изменится, если станут известными еще значения x_{n-2}, \dots, x_1 в предыдущие моменты времени t_{n-2}, \dots, t_1 (причем $t_n > t_{n-1} > t_{n-2} > \dots > t_1$). Если считать $t = t_{n-1}$ данным моментом, все значения $t > t_{n-1}$ будущим, а $t < t_{n-1}$ — прошлым, то можно считать, что вероятностные характеристики марковского процесса, оцениваемые для будущих моментов, определяются его значением x_{n-1} в данный момент времени t_{n-1} и не зависят от «предыстории» процесса, т. е. от его значений в прошлом.

Покажем, что в этом случае все функции w_n могут быть выражены через w_2 . Прежде всего «младшая» плотность распределения w_1 получается из w_2 очевидным образом:

$$w_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2. \quad (2)$$

Вообще, для любого процесса «младшие» плотности w_i могут быть таким же образом получены из «старшей» w_k ($k > i$). Далее, ввиду независимости условной плотности вероятности от «предыстории» процесса можно написать

$$w_y(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_{n-k}, t_{n-k}) = w_y(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3)$$

Здесь w_y — условная плотность для x_n при $t = t_n$, а условие заключается в том, что фиксированы величины, выписанные справа от вертикальной черты: x_{n-1} в момент t_{n-1} , x_{n-2} в момент t_{n-2} и т. д.; наконец, x_{n-k} в момент t_{n-k} .

Так как, согласно известной теореме о вероятности сложного события, имеет место равенство

$$w_2(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) = w_y(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot w_1(x_{n-1}, t_{n-1}), \quad (4)$$

то формулу (3) можно переписать так:

$$w_y(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_{n-k}, t_{n-k}) = \frac{w_2(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1})}{w_1(x_{n-1}, t_{n-1})}. \quad (5)$$

Теперь напишем выражение для плотности w_n . Согласно теореме о произведении вероятностей, с учетом формул (3) и (5), получаем

$$\begin{aligned} w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \\ &= w_1(x_1, t_1) w_y(x_2, t_2 | x_1, t_1) w_y(x_3, t_3 | x_2, t_2) \cdot \dots \cdot w_y(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) = \\ &= w_1(x_1, t_1) \frac{w_2(x_2, t_2; x_1, t_1)}{w_1(x_1, t_1)} \cdot \frac{w_2(x_3, t_3; x_2, t_2)}{w_1(x_2, t_2)} \times \dots \times \frac{w_2(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1})}{w_1(x_{n-1}, t_{n-1})}. \end{aligned} \quad (6)$$

Формула (6) показывает, что любая функция w_n в данном случае выражается через w_2 .

Среди случайных процессов весьма важно различать *стационарные* и *нестационарные*. Случайный процесс называется стационарным (иногда добавляют — в узком смысле; о стационарности в широком смысле см. ниже), если все плотности распределения w_n не зависят от одинакового сдвига t_0 всех точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль оси времени. Для стационарного процесса справедливо равенство

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w_n(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0; \dots; x_n, t_n + t_0). \quad (7)$$

Стационарный случайный процесс — это процесс, статистический характер которого остается неизменным во времени. Это — аналог установившегося процесса. Любой переходный процесс не является стационарным.

Из равенства (7) следует, что для одномерной плотности распределения стационарного случайного процесса справедливо равенство

$$w_1(x_1, t_1) = w_1(x_1, t_1 + t_0). \quad (8)$$

Это равенство означает, что функция w_1 вовсе не зависит от времени t_1 , т. е. одинакова для любых моментов времени:

$$w_1(x_1, t_1) = w_1(x_1). \quad (9)$$

Для двумерной плотности распределения равенство (7) принимает вид

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_2(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0). \quad (10)$$

Это условие означает, что w_2 зависит не от самих моментов t_1 и t_2 , а от их разности

$$t_2 - t_1 = \tau. \quad (11)$$

Действительно, если $\tau = \text{const}$, то и w_2 не изменяется. Но с изменением τ , вообще говоря, меняется и величина w_2 . Поэтому для стационарного случайного процесса можно написать

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_2(x_1, x_2, \tau), \quad (12)$$

где τ определяется уравнением (11).

До сих пор рассматривался лишь один случайный процесс $x(t)$. Однако можно рассматривать одновременно два случайных процесса: $x(t)$ и $y(t)$. Эти процессы могут быть статистически связаны между собой. Характеристиками таких связанных процессов могут служить плотности совместных распределений значений $x(t)$ и $y(t)$ в различные моменты времени. Пусть, например, $w_2(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1 dy_2$ есть вероятность сложного события, заключающегося в том, что $x_1 < x < x_1 + dx_1$ при $t = t_1$, а $y_2 < y < y_2 + dy_2$ в момент $t = t_2$. Функция $w_2(x_1, t_1; y_2, t_2)$ является совместной

плотностью вероятности двух случайных процессов. Аналогично можно сконструировать и совместные плотности вероятности для нескольких значений x_1, \dots, x_k и y_1, \dots, y_j в различные моменты времени. Если все такие функции не зависят от одинакового сдвига t_0 моментов времени t_1, t_2, \dots вдоль оси времени, то процессы $x(t)$ и $y(t)$ называются *стационарно связанными*.

Рассмотренные выше плотности распределений w_n могут быть получены для случайных процессов $x(t)$ в реальных системах лишь с помощью чрезвычайно сложной и трудоемкой обработки множества записей реализаций процесса $x(t)$. Далее, расчеты, связанные с применением функций w_n , также чрезвычайно сложны и громоздки. Однако многие практические задачи можно решить, применяя вместо функций w_n другие, более простые характеристики случайного процесса, а именно средние значения. Правда, средние значения, которые будут рассматриваться ниже, не полностью характеризуют случайный процесс. Но даже и такие неполные характеристики достаточны для решения ряда важных задач. К тому же средние значения могут быть получены путем сравнительно простой обработки записей реализаций случайного процесса.

Рассмотрим сначала так называемые средние по множеству, или математические ожидания; они иногда называются средними по ансамблю или статистическими средними.

Если фиксировать момент времени $t = t_1$, то значение случайного процесса $x(t)$ в этот момент времени является случайной величиной $x(t_1) = x_1$. В теории вероятностей одной из основных характеристик случайной величины $x(t_1)$ является ее математическое ожидание, которое ниже обозначается $M\{x(t_1)\}$. Как известно из теории вероятностей, математическое ожидание связано с плотностью вероятности $w_1(x_1, t_1)$ случайной величины $x(t_1)$ формулой

$$M\{x(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1, t_1) dx_1. \tag{13}$$

Напомним, каково происхождение и физический смысл этой формулы. Допустим, что мы располагаем множеством реализаций случайного процесса $x(t)$ (рис. 11.4, а, б, в, г). Все эти реализации, вообще говоря, являются различными кривыми. Пусть, например, мы изучаем случайный дрейф на выходе усилителя постоянного тока при входном напряжении, равном нулю. Чтобы изучить характеристики дрейфа, можно взять, например, 200 ÷ 300 одинаковых усилителей, одновременно включить их и получить 200 ÷ 300 осциллограмм дрейфа на их выходах. Кривые на этих осциллограммах будут различными, несмотря на то, что все усилители однотипны и находятся в одинаковых условиях (одни и те же напряжения питания, одна и та же температура помещения, в котором находятся усилители, и т. д.).

Найдем теперь для фиксированного момента времени $t = t_1$ (пунктирная вертикальная линия на рис. 11.4) среднее арифметическое всех значений $x(t_1)$.

Пусть N — общее число реализаций процесса $x(t)$. Среднее арифметическое значений $x(t_1)$ можно подсчитать следующим образом: разобьем

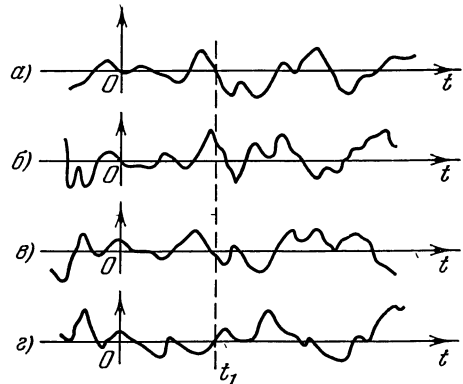


Рис. 11.4.

весь диапазон изменения величины $x(t_1)$ на множество малых интервалов величины Δx_1 . Пусть первому из интервалов соответствует примерное значение величины $x(t_1)$, равное $x_1^{(1)}$, второму — $x_1^{(2)}$ и т. д. Если в результате N измерений величины $x(t_1)$ она ν_1 раз попала в первый интервал, ν_2 раз — во второй и т. д., то среднее арифметическое выразится формулой

$$\frac{\nu_1 x_1^{(1)} + \nu_2 x_1^{(2)} + \dots + \nu_k x_1^{(k)}}{N} = \frac{\nu_1}{N} x_1^{(1)} + \frac{\nu_2}{N} x_1^{(2)} + \dots + \frac{\nu_k}{N} x_1^{(k)}. \quad (14)$$

В этой формуле коэффициенты при $x_1^{(k)}$, равные ν_k/N , представляют собой не что иное, как частности появления значений $x(t_1)$, близких к $x_1^{(k)}$. Эти частности при большом числе опытов близки к вероятностям попадания $x(t_1)$ в интервал Δx_1 возле значения $x_1^{(k)}$. Следовательно, при большом числе опытов величины ν_k/N можно заменить на $w_1(x_1^{(k)}, t_1) \Delta x_1$. Поэтому при $\Delta x_1 \rightarrow 0$ сумма (14) превращается в интеграл (13).

В общем случае математическое ожидание $M\{x(t_1)\}$ различно для различных моментов времени. Это видно и из формулы (13), поскольку после интегрирования правая часть оказывается, вообще говоря, функцией параметра t_1 .

Аналогично можно найти среднее значение от квадрата $x^2(t_1)$ величины $x(t_1)$, обозначаемое σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = M\{x^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1, t_1) dx_1. \quad (15)$$

Положительный корень σ_x из этой величины носит название среднеквадратичного значения $x(t_1)$. Эта величина также является, вообще говоря, функцией t_1 .

Для стационарных случайных процессов функция w_1 не зависит от t_1 . Поэтому средние (13) и (15) в этом случае не зависят от времени и являются постоянными величинами:

$$\left. \begin{aligned} a = M\{x(t_1)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1) dx_1, \\ \sigma_x^2 = M\{x^2(t_1)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1) dx_1. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В теории вероятности вводится также дисперсия $D\{x(t_1)\}$ случайной величины $x(t_1)$, представляющая собой меру разброса значений этой величины вокруг математического ожидания. Дисперсия — это математическое ожидание квадрата отклонения величины от среднего значения

$$D\{x(t_1)\} = M\{[x(t_1) - M\{x(t_1)\}]^2\}. \quad (17)$$

При $M\{x(t_1)\} = 0$ дисперсия $D\{x(t_1)\}$ совпадает с математическим ожиданием квадрата случайной величины $x(t_1)$, т. е. с $\sigma_x^2 = M\{x^2(t_1)\}$.

Введенные выше средние значения приблизительно характеризуют поведение случайного процесса в отдельные моменты времени, но совершенно не затрагивают связь между значениями случайного процесса в различные моменты времени. Связь между значениями $x(t_1)$ и $x(t_2)$ случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 может быть приблизительно оценена средним значением их произведения $x(t_1)x(t_2)$, называемым *корреляционной* (или автокорреляционной) *функцией*. Эта функция, обозначаемая через $K_x(t_1, t_2)$, вычисляется по формуле, вытекающей из определения математического

ожидания:

$$K_x(t_1, t_2) = M \{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (18)$$

Под интегралом здесь стоит плотность w_2 совместного распределения случайных величин $x(t_1) = x_1$ и $x(t_2) = x_2$. После интегрирования правая часть оказывается, вообще говоря, зависящей от t_1 и t_2 .

Для стационарного случайного процесса функция w_2 зависит лишь от $\tau = t_2 - t_1$ (см. формулы (11) и (12)). Поэтому в данном случае корреляционная функция K_x зависит от τ :

$$K_x(\tau) = M \{x(t_1)x(t_1 + \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (19)$$

В частном случае, при $\tau = 0$, автокорреляционная функция оказывается равной математическому ожиданию квадрата $x^2(t_1)$:

$$[K_x(\tau)]_{\tau=0} = M \{x^2(t_1)\} = \sigma_x^2. \quad (20)$$

В качестве характеристики связи между значениями двух случайных процессов $x(t_1)$ и $y(t_2)$ в моменты времени t_1 и t_2 соответственно можно ввести взаимную корреляционную функцию K_{xy} этих процессов, определяемую как математическое ожидание произведения $x(t_1)y(t_2)$:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M \{x(t_1)y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1 dy_2. \quad (21)$$

Если процессы $x(t)$ и $y(t)$ стационарны и притом стационарно связаны, то

$$w_2(x_1, t_1; y_2, t_2) = w_2(x_1, y_2, \tau), \quad (22)$$

где $\tau = t_2 - t_1$. В этом случае K_{xy} зависит лишь от τ :

$$K_{xy}(\tau) = M \{x(t_1)y(t_1 + \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2. \quad (23)$$

Иногда вводят так называемые нормированные корреляционные функции — нормированную автокорреляционную функцию

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)K_x(t_2, t_2)}} = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{M\{x^2(t_1)\}M\{x^2(t_2)\}}} \quad (24)$$

и нормированную взаимную корреляционную функцию

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)K_y(t_2, t_2)}} = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{M\{x^2(t_1)\}M\{y^2(t_2)\}}}. \quad (25)$$

Рассмотрим некоторые свойства корреляционных функций. Так как произведение не меняется от перестановки сомножителей, то уже из самого определения (18) автокорреляционной функции $K_x(t_1, t_2)$ вытекает, что

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1). \quad (26)$$

Это же следует и из того факта, что плотность w_2 в формуле (18) не изменяется, если переставить местами пары x_1, t_1 и x_2, t_2 . В частном случае стационарного случайного процесса (см. формулу (19)) выражение (26) можно

записать в следующем виде:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (27)$$

Это означает, что функция $K_x(\tau)$ *четная*. Отметим, что взаимная корреляционная функция $K_{xy}(\tau)$, вообще говоря, не является четной.

Нормированные корреляционные функции $r_x(t_1, t_2)$ и $r_{xy}(t_1, t_2)$ удобны потому, что они не превосходят единицы по абсолютной величине. Покажем, что это справедливо, с помощью очевидного неравенства

$$\left(\frac{x(t_1)}{\sqrt{M\{x^2(t_1)\}}} - \frac{y(t_2)}{\sqrt{M\{y^2(t_2)\}}} \right)^2 \geq 0. \quad (28)$$

Раскрыв скобку, находим

$$\frac{x^2(t_1)}{M\{x^2(t_1)\}} + \frac{y^2(t_2)}{M\{y^2(t_2)\}} \geq 2 \frac{x(t_1)y(t_2)}{\sqrt{M\{x^2(t_1)\}M\{y^2(t_2)\}}}. \quad (29)$$

Беря математическое ожидание от обеих частей неравенства, получаем в его левой части сумму $1 + 1 = 2$, откуда следует

$$2 \geq 2 \frac{M\{x(t_1)y(t_2)\}}{\sqrt{M\{x^2(t_1)\}M\{y^2(t_2)\}}}, \quad (30)$$

т. е. $r_{xy} \leq 1$. Положив в частном случае $y = x$, приходим к неравенству $r_x \leq 1$.

Для решения многих практических задач достаточно рассматривать лишь математические ожидания и корреляционные функции. Теории, обходящиеся лишь этими характеристиками, будем называть *корреляционными* теориями. В рамках корреляционной теории естественно считать стационарными случайными процессами такие процессы, у которых математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит лишь от $\tau = t_2 - t_1$. Такие случайные процессы называются *стационарными в широком смысле*. Конечно, процессы, стационарные в узком смысле, обязательно стационарны и в широком смысле; однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Для иллюстрации физического смысла автокорреляционной функции рассмотрим стационарный случайный процесс. Пусть математическое ожидание процесса $x(t)$ равно a . Эта величина для стационарного случайного процесса постоянна. Положим

$$x(t) = a + y(t), \quad (31)$$

где составляющая $y(t)$ имеет математическое ожидание, равное нулю. Исследуем сначала автокорреляционную функцию $K_y(\tau)$ процесса y :

$$K_y(\tau) = M\{y(t)y(t+\tau)\}. \quad (32)$$

Если τ мало, то значения $y(t)$ и $y(t+\tau)$ тесно связаны друг с другом, и $K_y(\tau)$ мало отличается от $K_y(0) = M\{y^2(t)\} > 0$. Если же τ достаточно велико, то значения $y(t)$ и $y(t+\tau)$ делаются независимыми. Поэтому имеются одинаковые вероятности как для положительных, так и для отрицательных значений произведения $y(t)y(t+\tau)$; следовательно, и среднее значение этого произведения становится равным нулю. Итак,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_y(\tau) = 0. \quad (33)$$

Функции $K_x(\tau)$ и $K_y(\tau)$ связаны равенством

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= M\{[a + y(t)][a + y(t+\tau)]\} = \\ &= M\{a^2\} + M\{ay(t)\} + M\{ay(t+\tau)\} + M\{y(t)y(t+\tau)\} = \\ &= a^2 + aM\{y(t)\} + aM\{y(t+\tau)\} + M\{y(t)y(t+\tau)\} = a^2 + K_y(\tau), \end{aligned} \quad (34)$$

так как $M \{y(t)\} = M \{y(t + \tau)\} = 0$. Из (33) и (34) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = a^2. \tag{35}$$

Далее, для любой автокорреляционной функции справедливо соотношение

$$K_x(\tau) \leq K_x(0). \tag{36}$$

Это неравенство вытекает из неравенства $r_x \leq 1$, которое для стационарного случайного процесса принимает вид (см. формулу (24))

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} \leq 1. \tag{37}$$

Графики $K_y(\tau)$ и $K_x(\tau)$ показаны на рис. 11.5, а и б соответственно. Кривая $K_x(\tau)$ может стремиться при $r \rightarrow \infty$ к своему асимптотическому значению a^2 как монотонно, так и немонотонно. Чем меньше ордината кривой $K_y(\tau)$, тем менее коррелированы между собой величины $[x(t) - a]$

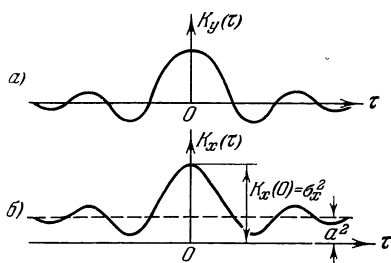


Рис. 11.5.

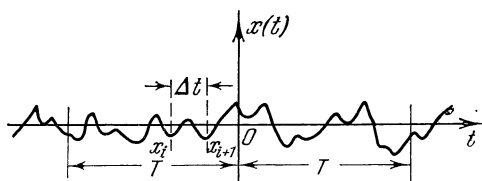


Рис. 11.6.

и $[x(t + \tau) - a]$. По виду кривой $K_x(\tau)$ или $K_y(\tau)$ для того или иного реального процесса можно решить, при каких значениях τ величины $x(t)$ и $x(t + \tau)$ практически уже не коррелированы. Для таких, а также больших значений τ функция $K_y(\tau)$ практически равна нулю.

Следует различать два типа средних значений — средние по множеству и средние по времени. Первый из этих типов описан выше. Второй тип — среднее по времени — может быть получен путем обработки одного экземпляра, одной реализации случайного процесса — см. рис. 11.6. Понятие среднего по времени является обобщением понятия среднего арифметического значений x_i процесса $x(t)$ в различные моменты времени.

Пусть производятся измерения одной реализации процесса $x(t)$ на интервале $-T \leq t \leq +T$. Допустим, что два соседних измерения отделены промежутком времени $\Delta t = \frac{2T}{N}$. По найденным значениям x_1, x_2, \dots, x_N можно построить среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \tag{38}$$

Умножив числитель и знаменатель этого выражения на $\Delta t = \frac{2T}{N}$, получаем

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \Delta t}{N \Delta t} = \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^N x_i \Delta t. \tag{39}$$

Если производить измерения на интервале $-T \leq t \leq +T$ все чаще и чаще, то при $\Delta t \rightarrow 0$ из формулы (39) в пределе получаем

$$\bar{x} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (40)$$

Это и есть среднее значение по времени величины $x(t)$ на конечном интервале $-T \leq t \leq T$. Если теперь неограниченно увеличивать длину интервала, то при $T \rightarrow \infty$ приходим к формуле для среднего по времени от $x(t)$ на бесконечном интервале

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (41)$$

Если, например, $x(t)$ — напряжение, то величина \bar{x} равна постоянной составляющей этого напряжения. Если вместо $x(t)$ рассматривать кривую $x^2(t)$, то получаем аналогичную формулу для среднего по времени от $x^2(t)$

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (42)$$

Совершенно аналогичным образом можно рассматривать среднее по времени от любой функции $x(t)$, например от произведения $x(t)x(t+\tau)$:

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (43)$$

Черта над соответствующим выражением означает усреднение по времени.

Следует подчеркнуть, что в общем случае для различных реализаций случайного процесса получаются различные значения среднего по времени от $x(t)$ или какой-либо функции от $x(t)$.

Понятие среднего по времени, введенное для одного экземпляра случайного процесса, имеет, разумеется, смысл и для любого регулярного, неслучайного процесса.

Пусть $x(t)$ — это напряжение, приложенное к зажимам сопротивления R , равного 1 ом. Тогда $\frac{x^2(t)}{R} = \frac{x^2(t)}{1}$ — мгновенная мощность, поглощаемая в сопротивлении R , а $x^2(t) dt$ — бесконечно малая энергия, расходуемая в этом сопротивлении за бесконечно малый промежуток времени dt . Интеграл

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (44)$$

равен энергии, поглощаемой сопротивлением $R = 1$ ом за бесконечно большой промежуток времени.

Если сигнал $x(t)$ — периодический или является экземпляром случайного процесса, не затухающего при $|t| \rightarrow \infty$, то энергия, поглощаемая в сопротивлении R за бесконечно большое время, бесконечно велика. Поэтому интеграл (44) расходится и не имеет смысла как характеристика интенсивности процесса $x(t)$. Если, однако, разделить энергию на время, то величина

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt, \quad (45)$$

характеризующая среднюю мощность (т. е. среднюю энергию, поглощаемую в единицу времени), оказывается конечной величиной и при $T \rightarrow \infty$. Предел для интеграла (45) и представляет собой величину $\overline{x^2(t)}$, определяемую согласно формуле (42). Поэтому среднее по времени от квадрата $x(t)$, являющееся характеристикой средней интенсивности функции $x(t)$, носит название *мощности* сигнала $x(t)$. Понятие мощности сигнала широко применяется в теории связи и управления.

Найдем в качестве примера мощность синусоидального сигнала

$$x(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (46)$$

Положим

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (47)$$

где T_0 — период сигнала $x(t)$, а ω_0 — угловая частота. Сначала найдем интеграл

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{A_m^2}{2} - \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{A_m^2}{2} \sin 2(\omega_0 t + \varphi) dt. \quad (48)$$

Отсюда получаем

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{A_m^2}{2} - \frac{A_m^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin 2(\omega_0 t + \varphi) dt. \quad (49)$$

Интеграл от $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt$ за целое число периодов T_0 равен нулю. Остаток интеграла за часть периода (если $2T$ не равно целому числу периодов T_0) является конечным числом, и частное от деления этой величины на $2T$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Поэтому второе слагаемое в выражении (49) равно нулю. Итак,

$$\overline{x^2(t)} = \frac{A_m^2}{2}. \quad (50)$$

Следовательно, мощность синусоидального сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды и не зависит от его фазы.

Существует класс случайных процессов, называемых *эргодическими* и обладающих весьма важным специальным свойством. Не все стационарные случайные процессы являются эргодическими; для эргодичности процесса требуется, чтобы его характеристики удовлетворяли некоторым дополнительным условиям.

Случайный процесс называется *эргодическим*, если с вероятностью, равной единице, среднее по множеству от величины, характеризующей процесс, равно среднему по времени.

Если процесс эргодический, то среднее по множеству от значения x в момент времени t равно с вероятностью единица среднему по времени \bar{x} , полученному из формулы (41):

$$M\{x(t)\} = \bar{x} \quad (51)$$

или в развернутом виде с учетом первой из формул

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1) dx_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (52)$$

Напомним, что среднее по множеству получается для ансамбля экземпляров случайного процесса (см. рис. 11.4); оно не зависит от времени в случае стационарного случайного процесса. Между тем среднее по времени

(см. рис. 11.6) определяется для одного экземпляра случайного процесса и поэтому, вообще говоря, является случайной величиной в зависимости от того, какой экземпляр появился в том или другом испытании. Тот факт, что эти две в общем случае столь различные величины совпадают с вероятностью единица, справедлив лишь для эргодических процессов.

На практике часто представляется весьма затруднительным установить эргодичность экспериментально исследуемого случайного процесса. Однако для ряда процессов физические соображения позволяют высказать гипотезу об их эргодичности. Любую бесконечную кривую экземпляра случайного процесса $x(t)$ можно разрезать на сколь угодно большое количество достаточно длинных «кусков». Так как процесс стационарный, то вероятные свойства этих «кусков» одинаковы. Допустим, что их можно рассматривать как экземпляры случайного процесса, принадлежащие одному ансамблю. Это равносильно утверждению о том, что с течением времени одна и та же кривая $x(t)$ будет «копировать» любой «кусок» какого-либо другого экземпляра случайного процесса. В этом смысле один бесконечно длинный экземпляр эквивалентен бесконечному множеству различных «достаточно длинных» экземпляров процесса $x(t)$. Разница между различными экземплярами состоит лишь в том, что в них различные «куски» расположены, грубо говоря, в различном порядке. Поэтому безразлично, проводить ли усреднение по времени, или в некоторый момент времени по множеству различных экземпляров, так как при любом способе усреднения одни и те же значения будут встречаться с одинаковыми частотами.

Ниже рассматриваются такие эргодические процессы, в которых не только для $x(t)$, но и для любых функций от него среднее по множеству равно среднему по времени. Поэтому, например,

$$M \{x^2(t)\} = \overline{x^2} \quad (53)$$

или в развернутом виде с учетом (15), а также (42)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (54)$$

Далее, среднее по времени от произведения $x(t)x(t+\tau)$ и среднее по множеству также совпадают:

$$M \{x(t)x(t+\tau)\} = \overline{x(t)x(t+\tau)}. \quad (55)$$

Запишем это равенство в развернутом виде с учетом (19) и (43):

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (56)$$

Таким образом, для эргодического стационарного процесса автокорреляционная функция $K_x(\tau)$ может рассматриваться в качестве среднего по времени от произведения $x(t)x(t+\tau)$. Такое определение $K_x(\tau)$ встречается в технической литературе.

Два процесса $x(t)$ и $y(t)$ называются *совместно-эргодичными*, если усреднение функций от них по множеству с вероятностью единица приводит к тому же результату, что и усреднение по времени. Так, например,

$$M \{x(t)y(t+\tau)\} = \overline{x(t)y(t+\tau)} \quad (57)$$

или с учетом (23)

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt. \quad (58)$$

В этом случае и взаимную корреляционную функцию $K_{xy}(\tau)$ можно рассматривать как среднее по времени.

Эргодическое свойство имеет большое практическое значение. При исследовании эргодического процесса нет нужды в рассмотрении множества реализаций случайного процесса. Достаточно получить одну длинную запись одного экземпляра. Например, при изучении дрейфа усилителя постоянного тока не требуется исследовать сотни одинаковых усилителей; можно исследовать лишь один усилитель в течение достаточно длительного промежутка времени.

Формула (56) позволяет обнаружить связь между мощностью сигнала и его автокорреляционной функцией. Положим в этой формуле $\tau = 0$. Тогда

$$K_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \overline{x^2(t)}. \quad (59)$$

Итак, мощность сигнала равна значению автокорреляционной функции при $\tau = 0$.

Как мы видели в предыдущих главах, в процессе анализа линейных систем весьма удобно описывать регулярные сигналы их частотными спектрами. Теория интеграла Фурье и частотных спектров также широко применяется и при исследовании случайных сигналов. Однако сразу же следует отметить, что экземпляр стационарного случайного процесса $x(t)$, не затухающий при $|t| \rightarrow \infty$, не удовлетворяет некоторым условиям, необходимым для того, чтобы эту функцию можно было представить в виде интеграла Фурье. Следовательно, непосредственное вычисление частотного спектра $x(t)$ невозможно. Впрочем, если бы это и было возможным, то поскольку $x(t)$ — случайный процесс, его частотный спектр также был бы случайной функцией. Между тем теория случайных процессов оперирует с такими их характеристиками, которые сами по себе не случайны.

Совсем иначе обстоит дело для корреляционной функции случайного процесса.

Ниже мы ограничимся изучением стационарных (в широком смысле) и эргодических процессов. А. Я. Хинчин доказал, что функция $K_x(\tau)$ такого процесса может быть представлена интегралом Фурье. Фурье-изображение $S_x(\omega)$ автокорреляционной функции $K_x(\tau)$ определяется первой формулой преобразования Фурье

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (60)$$

Очевидно, что и, наоборот функция $K_x(\tau)$ может быть получена из $S_x(\omega)$ по формуле обратного преобразования Фурье:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (61)$$

Так как $K_x(\tau)$ есть неслучайная характеристика случайного процесса, то и ее Фурье-изображение $S_x(\omega)$ есть также неслучайная характеристика случайного процесса. Функция $S_x(\omega)$ называется *спектральной плотностью* случайного процесса. Эта функция играет большую роль при исследовании преобразований случайных сигналов линейными системами.

Прежде всего отметим, что $S_x(\omega)$ — действительная и четная функция. Чтобы показать это, воспользуемся формулой Эйлера и перепишем

выражение (60) в следующем виде:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (62)$$

Так как $K_x(\tau)$ — четная функция, а $\sin(-\omega\tau) = -\sin \omega\tau$, то во втором слагаемом правой части (62) подынтегральное выражение представляет собой нечетную функцию переменного τ . Поэтому второй интеграл равен нулю. Следовательно, поскольку $K_x(\tau) \cos \omega\tau$ — четная функция, получаем

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (63)$$

Так как $\cos(-\omega\tau) = \cos \omega\tau$, то из (63) следует

$$S_x(-\omega) = S_x(\omega). \quad (64)$$

Далее, из свойств Фурье-преобразования следует, что при «растяжении» функции $K_x(\tau)$ ее частотный спектр $S_x(\omega)$ «суживается» и, наоборот, при «суживании» $K_x(\tau)$ частотный спектр $S_x(\omega)$ «растягивается».

Для выяснения физического смысла спектральной плотности $S_x(\omega)$ привлечем равенство (59). Положив в формуле (61) $\tau = 0$ и подставив значение $K_x(0)$ в выражение (59), получим

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (65)$$

Последнее преобразование есть следствие четности функции $S_x(\omega)$.

Это важное равенство показывает, что мощность сигнала, являющаяся мерой его интенсивности, может быть представлена в виде бесконечной суммы бесконечно малых слагаемых $\frac{1}{\pi} S_x(\omega) d\omega$, которая распространяется на все частоты от 0 до ∞ . В таком случае каждое парциальное слагаемое этой суммы играет роль мощности, соответствующей бесконечно малому участку спектра сигнала, заключенному в пределах $\omega \div \omega + d\omega$. Эта мощность $\frac{1}{\pi} S_x(\omega) d\omega$ пропорциональна значению функции $S_x(\omega)$ для данной частоты ω . Следовательно, физический смысл функции $S_x(\omega)$ состоит в том, что она описывает распределение мощности сигнала по частотному спектру. Если бы сигнал представлял собой сумму синусоид с амплитудами $A_m(\omega)$, то их средние мощности, пропорциональные математическим ожиданиям квадратов амплитуд $M\{A_m^2(\omega)\}$ (см. (50)), были бы пропорциональны $S_x(\omega)$:

$$S_x(\omega) = \lambda M\{A_m^2(\omega)\}, \quad (66)$$

где λ — коэффициент пропорциональности.

Введем также понятие взаимной спектральной плотности двух взаимно эргодических процессов со средними значениями, равными нулю. Назовем взаимной спектральной плотностью $S_{xy}(\omega)$ процессов $x(t)$ и $y(t)$ фурье-изображение их взаимной корреляционной функции $K_{xy}(\tau)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (67)$$

В свою очередь $K_{xy}(\tau)$ есть Фурье-оригинал от $S_{xy}(\omega)$

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (68)$$

Функция $S_{xy}(\omega)$, вообще говоря, не обладает свойством четности и не является чисто действительной функцией. Рассмотрим примеры определения спектральной плотности. Пусть, например, автокорреляционная функция случайного процесса задана выражением

$$K_x(\tau) = a^2 e^{-\lambda\tau}. \quad (69)$$

График этой функции изображен на рис. 11.7, а. Найдем соответствующую спектральную плотность. Согласно (63) получаем

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} a^2 e^{-\lambda\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (70)$$

График $S_x(\omega)$ показан на рис. 11.7, б.

В целом ряде практически важных случаев спектральные плотности содержат так называемые δ -функции. Ранее уже показывалось, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt,$$

где $x(t)$ — какая-либо другая функция, оказывается равным $(x)_{t=0} = x(0)$. Совершенно аналогичным образом доказывается справедливость равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_1) dt = x(t_1). \quad (71)$$

Функция $\delta(t - t_1)$ представляет собой единичную импульсную функцию, обращающуюся в бесконечность в момент $t = t_1$. Равенство (71) показывает, что операция интегрирования произведения функции $x(t)$ и $\delta(t - t_1)$ по бесконечному интервалу времени сводится к выделению значения $x(t_1)$.

С помощью формулы (71) можно найти спектральную плотность $S_x(\omega)$ в некоторых особых случаях. Пусть, например, $K_x(\tau) = \delta(\tau)$, т. е. является единичной импульсной функцией. Такую функцию можно рассматривать как предел, к которому стремится функция (69) при $\lambda \rightarrow \infty$ и одновременном беспредельном возрастании a^2 . Так как площадь $2a^2 \cdot \frac{1}{\lambda}$ функции $K_x(\tau)$ должна быть равна единице, то в формулах (69), (70) следует положить $a^2 = \lambda/2$. Функция $K_x(\tau) = \delta(\tau)$ равна нулю при $\tau \neq 0$; это означает, что значения случайного процесса, разделенные сколь угодно малым, но отличным от нуля промежутком времени, не коррелированы. Конечно, такой процесс представляет собой идеализацию; в действительных процессах между близкими друг к другу значениями корреляция всегда имеется. Найдем спектральную плотность $S_x(\omega)$ для процесса с корреляционной функцией $K_x(\tau) = \delta(\tau)$. Согласно общей формуле (60) находим, пользуясь (71),

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = [e^{-j\omega\tau}]_{\tau=0} = 1. \quad (72)$$

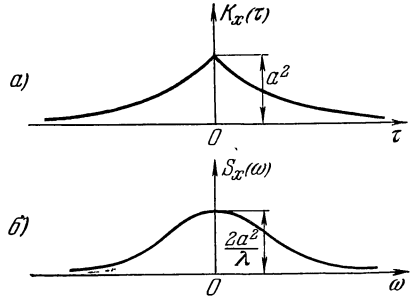


Рис. 11.7.

Здесь в качестве функции $x(\tau)$ фигурирует $e^{-j\omega t}$. Операция, производимая над этой функцией, как видно из (71), сводится к выделению значения $x(0)$.

На рис. 11.8, а и б показаны $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ соответственно. Условимся изображать импульсную функцию в виде жирной стрелки с волной, сопровождаемой указанием величины функции, так, как это показано на рис. 11.8, а. Кривая спектральной плотности $S_x(\omega)$ в данном случае представляется горизонтальной прямой, т. е. частотный спектр оказывается равномерным. Стационарный случайный процесс с равномерным частотным спектром $S_x(\omega) = \text{const}$ называют *белым шумом* по аналогии с белым цветом, в котором представлены все участки спектра. Во многих случаях можно считать помеху (например, внутренние шумы приемника) белым шумом. Следует лишь отчетливо представлять себе, что белый шум есть продукт

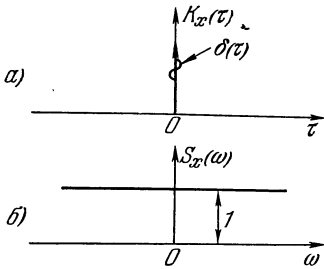


Рис. 11.8.

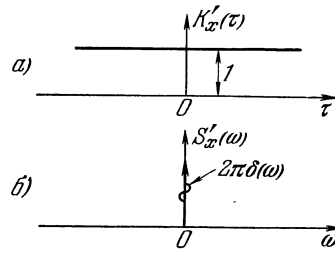


Рис. 11.9.

идеализации, ибо процессов $x(t)$ со взаимно некоррелированными соседними значениями не существует. Поэтому в действительности частотный спектр $S_x(\omega)$ западает на очень высоких частотах. Если, однако, эти частоты настолько велики, что при рассмотрении какого-либо конкретного устройства не играют роли (ибо они лежат вне полосы частот, пропускаемых этим устройством), то идеализация помехи в виде белого шума упрощает рассмотрение и поэтому вполне целесообразна.

Идеализированный характер белого шума подтверждается также и свойствами его дисперсии. Равенство (65) дает в случае белого шума с $S_x(\omega) = S_0 = \text{const}$ для величины $x^2(t)$ значение

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_0 d\omega = \frac{S_0}{\pi} \int_0^\infty d\omega = \infty.$$

На самом деле из энергетических соображений ясно, что у каждого реального шума дисперсия (в данном случае мощность) не бесконечна, а имеет конечное значение. Графики рис. 11.8 можно рассматривать как пределы для соответствующих графиков рис. 11.7, когда кривая $K_x(\tau)$ на рис. 11.7, а беспреречно суживается; при этом кривая $K_x(\omega)$ расширяется, становясь в пределе горизонтальной прямой.

Рассмотрим другой пример. Пусть $S_x(\omega) = \delta(\omega)$, т. е. представляет собой единичную импульсную функцию. Найдем соответствующую корреляционную функцию по формуле (61), пользуясь (71),

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \delta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} [e^{j\omega\tau}]_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}. \tag{73}$$

Если умножим $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ на 2π , то отсюда следует, что

$$K'_x(\tau) = 1 \quad \text{при} \quad S'_x(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \tag{74}$$

(новые функции снабжаем штрихом, чтобы отличить их от прежних). Соот-

ветствующие графики показаны на рис. 11.9, а и б. Легко показать, что $K_x(\tau) = \text{const}$, если процесс $x(t)$ представляет собой постоянную величину. Поэтому составляющая типа $\text{const} \cdot \delta(\omega)$ в составе спектральной плотности указывает на наличие постоянной составляющей в процессе $x(t)$.

Рассмотрим, наконец, еще случай, когда $S_x(\omega) = \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)$. Найдем соответствующую функцию $K_x(\tau)$, воспользовавшись выражениями (61) и (71):

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} (e^{j\omega_1\tau} + e^{-j\omega_1\tau}) = \frac{1}{\pi} \cos \omega_1\tau. \tag{75}$$

Умножив на π как $K_x(\tau)$, так и $S_x(\omega)$, находим

$$K'_x(\tau) = \cos \omega_1\tau \quad \text{при} \quad S'_x(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \tag{76}$$

Корреляционная функция $\text{const} \cdot \cos \omega_1\tau$, как легко показать, соответствует процессу типа $x(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$ с частотой ω_1 и произвольной фазой. Наличие же в выражении для спектральной плотности слагаемых типа $\text{const} \cdot \delta(\omega - \omega_1)$ и $\text{const} \cdot \delta(\omega + \omega_1)$ указывает на то, что рассматриваемый случайный процесс содержит периодическую составляющую частоты ω_1 .

§ 4. Преобразование случайных сигналов линейными системами

Рассмотрим систему с входной величиной x_0 и выходной величиной x (рис. 11.10). Пусть движение системы описывается линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Допустим, что динамические характеристики системы заданы, например известна ее функция веса $g(t)$ либо комплексный коэффициент передачи $W(j\omega)$. Пусть на вход системы поступает стационарный случайный процесс $x_0(t)$ с заданными характеристиками; мы будем в случае надобности без специальной оговорки считать его эргодическим. На выходе системы получается некоторый иной, но, вообще говоря, случайный процесс $x(t)$. Задача состоит в том, чтобы найти вероятностные характеристики случайного процесса $x(t)$.

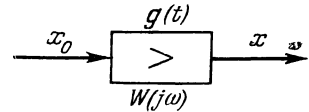


Рис. 11.10.

Пусть $x_0(t)$ — какой-либо экземпляр случайного процесса на входе системы, а $x(t)$ — соответствующая реакция выхода. Предположим также, что процесс $x_0(t)$ подается на вход системы, начиная с бесконечно удаленного в прошлое момента, т. е. $t = -\infty$. Тогда

$$x(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) x_0(t - \tau) d\tau. \tag{1}$$

Весь процесс $x_0(t)$ можно разбить на совокупность коротких импульсов длительности $d\tau$ и высоты $x_0(t - \tau)$, подаваемых в моменты времени $t - \tau$, причем $0 \leq \tau < \infty$. Реакция на выходе системы на один такой импульс в момент времени t равна $g(\tau) x_0(t - \tau) d\tau$, а вся реакция $x(t)$ на выходе системы в момент времени t выражается интегралом (1).

Найдем, пользуясь формулой (1), математическое ожидание величины $x(t)$:

$$M \{x(t)\} = M \left\{ \int_0^{\infty} g(\tau) x_0(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^{\infty} g(\tau) M \{x_0(t - \tau)\} d\tau. \tag{2}$$

Последнее преобразование произведено на основании того, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых. Это правило распространяется и на интеграл, являющийся пределом суммы.

Из формулы (2) видно, что линейные системы преобразуют математическое ожидание случайного сигнала (или, иначе говоря, среднее значение последнего) по тем же законам, что и любой регулярный сигнал.

Другими словами, подав на вход такой системы регулярный сигнал, равный $M\{x_0(t)\}$, на выходе получим $M\{x(t)\}$.

Пусть входной процесс стационарный; тогда $M\{x_0(t - \tau)\} = (x_0)_{\text{ср}} = \text{const}$ и не зависит от τ , при этом справедливо соотношение

$$M\{x(t)\} = (x_0)_{\text{ср}} \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Если интеграл в правой части (3) является конечной величиной, то и $M\{x(t)\}$ представляет собой конечную постоянную величину. В большинстве случаев, но не всегда, это обстоятельство имеет место. Если, например, система является интегрирующим звеном, то $g(\tau) = \text{const}$ и интеграл (3) расходится. Мы ниже будем предполагать, что либо $(x_0)_{\text{ср}} \equiv 0$, либо интеграл (3) конечен и, таким образом, математическое ожидание выходной величины x либо равно нулю, либо конечно.

Найдем теперь автокорреляционную функцию выходного сигнала $x(t)$. Для экземпляра процесса значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в моменты времени t_1 и t_2 выражаются, согласно (1), интегралами

$$\left. \begin{aligned} x(t_1) &= \int_0^{\infty} g(\tau_1) x_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1, \\ x(t_2) &= \int_0^{\infty} g(\tau_2) x_0(t_2 - \tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь τ_1 и τ_2 — переменные, по которым производится интегрирование в интегралах (4). Произведение этих величин равно

$$\begin{aligned} x(t_1) x(t_2) &= \left[\int_0^{\infty} g(\tau_1) x_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \right] \left[\int_0^{\infty} g(\tau_2) x_0(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \right] = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) [x_0(t_1 - \tau_1) x_0(t_2 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь произведение двух интегралов заменено одним двойным интегралом по τ_1 и τ_2 , что ничего, по существу, не меняет. Теперь находим математическое ожидание от обеих частей равенства (5). Поскольку операции усреднения по множеству и интегрирования перестановочны, можно написать

$$M\{x(t_1) x(t_2)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) M\{x_0(t_1 - \tau_1) x_0(t_2 - \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2. \quad (6)$$

В левой части этого равенства появилась автокорреляционная функция выходной величины $K_x(t_1, t_2)$. В правой части под интегралом появилось математическое ожидание произведения $x_0(t_1 - \tau_1) x_0(t_2 - \tau_2)$. Если входной случайный процесс является стационарным, то это выражение является автокорреляционной функцией K_0 для x_0 от аргумента, равного разности

$$(t_2 - \tau_2) - (t_1 - \tau_1) = \tau + (\tau_1 - \tau_2), \quad (7)$$

где

$$\tau = t_2 - t_1. \tag{8}$$

Иначе говоря, под интегралом появляются не t_1 и t_2 в отдельности, а лишь их разность τ . Поэтому и результат интегрирования зависит лишь от τ , и если интеграл (6) сходится, то выходной процесс также является стационарным. Обозначим через $K_x(\tau)$ его автокорреляционную функцию. Из формулы (6) следует

$$K_x(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1) g(\tau_2) K_0[\tau + (\tau_1 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \tag{9}$$

Отсюда, в частности, можно найти мощность выходного сигнала

$$\overline{x^2(t)} = K_x(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1) g(\tau_2) K_0(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{10}$$

Эта формула показывает, что для определения мощности выходного сигнала линейной системы недостаточно знать лишь мощность входного сигнала, т. е. величину $K_0(0)$. Нужно знать всю автокорреляционную функцию входного сигнала.

Формула (10) сравнительно сложна. Ниже будет выведена более простая формула для вычисления $\overline{x^2(t)}$ через спектральные плотности.

Представляет интерес определение взаимной корреляционной функции $M\{x_0(t_1) x(t_2)\}$ между выходом и входом системы. Умножая обе части равенства (1) на $x_0(t_1)$, находим

$$x_0(t_1) x(t_2) = \int_0^\infty g(\tau_1) x_0(t_1) x_0(t_2 - \tau_1) d\tau_1. \tag{11}$$

Поэтому

$$K_{0x}\{t_1, t_2\} = M\{x_0(t_1) x(t_2)\} = \int_0^\infty g(\tau_1) M\{x_0(t_1) x_0(t_2 - \tau_1)\} d\tau_1. \tag{12}$$

Если процессы $x_0(t)$ и $x(t)$ стационарны и стационарно связаны (что мы будем предполагать), то формулу (12) можно переписать, полагая $\tau = t_2 - t_1$, так:

$$K_{0x}\{\tau\} = \int_0^\infty g(\tau_1) K_0(\tau - \tau_1) d\tau_1. \tag{13}$$

Эта формула имеет такой же вид, как выражение (1), с заменой τ на τ_1 , t на τ , x_0 на K_0 и x на K_{0x} . Следовательно, функцию $K_{0x}(\tau)$ можно рассматривать как «реакцию» на выходе линейной системы с функцией веса $g(\tau)$ при подаче на ее вход «сигнала» $K_0(\tau)$.

Рассмотрим теперь связь между спектральными плотностями выходного и входного сигналов линейной системы. Практическое значение понятия спектральной плотности состоит главным образом в том, что с его помощью можно сравнительно просто изучать прохождение сигналов через линейные системы. В частности, спектральная плотность сигнала на выходе системы чрезвычайно просто выражается через спектральную плотность входного сигнала.

Пусть $S_0(\omega)$ — спектральная плотность входного, а $S_x(\omega)$ — спектральная плотность выходного сигналов линейной системы, изображенной на рис. 11.10, с комплексным коэффициентом передачи $W(j\omega)$. Приведем прежде всего простые физические соображения, указывающие на связь между этими функциями.

Пусть $A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ — какая-либо гармоническая составляющая входного сигнала (быть может, с бесконечно малой случайной амплитудой A_0) частоты ω . Согласно формуле (66) § 3 спектральная плотность $S_0(\omega)$ пропорциональна математическому ожиданию квадрата амплитуды, т. е.

$$S_0(\omega) = \lambda M \{A_0^2(\omega)\} \tag{14}$$

Синусоида $A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, пройдя сквозь линейную систему, изменит амплитуду и фазу, но частота ее остается равной ω . Следовательно, соответствующее гармоническое колебание на выходе имеет вид $A \sin(\omega t + \varphi)$; спектральная плотность $S_x(\omega)$ пропорциональна математическому ожиданию квадрата A , т. е.

$$S_x(\omega) = \lambda M \{A^2(\omega)\}. \tag{15}$$

Однако квадраты амплитуд A_0^2 и A^2 на входе и выходе линейной системы связаны равенством

$$A^2 = A_0^2 |W(j\omega)|^2. \tag{16}$$

Из (14), (15), (16) следует

$$S_x(\omega) = \lambda M \{A_0^2 |W(j\omega)|^2\} = |W(j\omega)|^2 \lambda M \{A_0^2\} = |W(j\omega)|^2 S_0(\omega). \tag{17}$$

Итак, спектральная плотность выхода равна спектральной плотности входа, умноженной на квадрат модуля комплексного коэффициента передачи.

Эту формулу можно получить и путем строгого вывода. Действительно, найдем $S_x(\omega)$ как фурье-изображение функции $K_x(\tau)$, описываемой выражением

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{\tau_1=0}^{\infty} \int_{\tau_2=0}^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) K_0[\tau + (\tau_1 - \tau_2)] e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Умножив подынтегральное выражение на $(e^{j\omega\tau_1} e^{-j\omega\tau_2}) (e^{-j\omega\tau_1} e^{j\omega\tau_2}) = 1$, можно привести интеграл (18) к виду

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \\ &= \int_{\tau_1=0}^{\infty} g(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{\tau_2=0}^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \int_{\tau=-\infty}^{\infty} K_0[\tau + (\tau_1 - \tau_2)] e^{-j\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Заменяем теперь τ новым переменным

$$\tau' = \tau + \tau_1 - \tau_2. \tag{20}$$

Если интегрирование по τ' считать внутренним, то $(\tau_1 - \tau_2)$ является параметром и $d\tau' = d\tau$. Пределы интегрирования по τ' остаются бесконечными; $K_0(\tau')$ уже не зависит более от τ_1 и τ_2 . Поэтому интеграл (19) после такой замены сводится к произведению трех отдельных интегралов:

$$S_x(\omega) = \left[\int_{\tau_1=0}^{\infty} g(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \right] \left[\int_{\tau_2=0}^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\tau') e^{-j\omega\tau'} d\tau' \right]. \tag{21}$$

Рассмотрим эти интегралы. Последний из них есть не что иное, как спектральная плотность входного сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\tau') e^{-j\omega\tau'} d\tau' = S_0(\omega). \tag{22}$$

Второй интеграл представляет собой Фурье-изображение от $g(t)$, являющееся, как известно, комплексным коэффициентом передачи $W(j\omega)$ системы

$$\int_0^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 = W(j\omega). \quad (23)$$

Нижний предел интегрирования можно принять равным $-\infty$, так как $g(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$.

Наконец, первый интеграл представляет собой величину, сопряженную второму, так как это бесконечная сумма слагаемых, сопряженных слагаемым, входящим в состав второго интеграла. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} g(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 = W^*(j\omega). \quad (24)$$

Из выражений (21) — (24) находим

$$S_x(\omega) = W^*(j\omega) W(j\omega) S_0(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_0(\omega), \quad (25)$$

т. е. приходим к формуле (17). Из этой формулы следует, что *фазовая* частотная характеристика системы, не входящая в выражение для $S_x(\omega)$, не оказывает влияния на спектральную плотность выхода.

Таким же образом можно найти из формулы (12) связь между взаимной спектральной плотностью $S_{0x}(\omega)$ между входом и выходом и спектральной плотностью $S_0(x)$ входного сигнала. Впрочем, в данном случае конечный результат можно написать сразу, руководствуясь лишь тем, что «сигнал» $K_0(\tau)$, проходя через систему, обеспечивает на выходе «реакцию» $K_{0x}(\tau)$.

Следовательно, их Фурье-изображения связаны известной формулой

$$S_{0x}(\omega) = S_0(\omega) W(j\omega). \quad (26)$$

Зная спектральную плотность $S_x(\omega)$ выходного сигнала, можно найти его мощность по формуле (65) § 3. Подставляя сюда значение $S_x(\omega)$ из (25), получаем

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_0(\omega) d\omega. \quad (27)$$

Эта формула позволяет сравнительно просто определить мощность выходного сигнала системы по спектральной плотности входного сигнала и комплексному коэффициенту передачи системы. Формула (27) гораздо удобнее для расчета, чем, например, выражение (10), требующее двойного интегрирования.

Таким образом, из приведенных выше формул видно, что использование спектральных плотностей позволяет существенно упростить расчеты.

§ 5. Статистически оптимальные параметры линейных систем

Наиболее простая с теоретической точки зрения задача исследования систем состоит в анализе какой-либо готовой системы. Задача ставится так: задана система; требуется узнать, как проходят сквозь нее сигналы. Методы, изложенные выше в этой главе, позволяют решить эту задачу для линейных систем.

Однако эта задача отнюдь не является единственной или даже основной. При проектировании системы сначала не известно, как будет выглядеть либо вся система в целом, либо какая-нибудь ее часть. Задача проектировщиков состоит в том, чтобы создать систему, надлежащим образом выполняющую свои функции. Такая задача формулируется следующим образом: заданы

условия, которым должна удовлетворять система; требуется построить соответствующую систему. Эта задача называется задачей синтеза системы. Именно задача синтеза и является основной в процессе проектирования.

Обе указанные выше задачи не следует считать совершенно оторванными друг от друга. Между ними имеется связь. Во-первых, задаваясь какими-либо вариантами систем и проверяя, как они преобразуют проходящие сквозь них сигналы, т. е. решая каждый раз, по существу, задачу анализа, можно выбрать какую-либо из них, удовлетворяющую поставленным условиям. Тем самым будет решена и задача синтеза. Во-вторых, кроме задач чистого анализа и чистого синтеза, существует еще и ряд задач промежуточного типа.

Допустим, что из тех или иных соображений мы принимаем какую-либо определенную схему проектируемой системы. Допустим, что в этой схеме ряд параметров еще не известен; их надо выбрать так, чтобы удовлетворить требуемым условиям. Такая задача, называемая задачей выбора параметров, имеет большое практическое значение. Она является промежуточной между задачами анализа и синтеза.

Обычно ставится задача: спроектировать какую-либо часть системы, в то время как остальные ее части заданы. Иногда при проектировании какой-либо части системы или всей системы мы заранее ограничиваем класс проектируемого устройства некоторыми дополнительными условиями, не вытекающими непосредственно из требований, предъявляемых к системе. В таком случае определение схемы и параметров проектируемого устройства носит название ограниченного синтеза. Эта задача, также весьма важная практически, еще не является наиболее общей задачей синтеза.

В любом случае, идет ли речь о выборе параметров, выборе схемы или типа устройства, задача сводится всегда, так или иначе, к выбору устройства, наилучшего в том или ином отношении. Действительно, если мы выбираем какой-либо определенный вариант устройства, отбрасывая остальные, то такой выбор является мотивированным или научно обоснованным лишь в том случае, когда избранный вариант в каком-либо отношении лучше, предпочтительнее отброшенных. Наилучшую в каком-либо отношении систему назовем *оптимальной*. Итак, проектирование системы или ее части сводится к нахождению оптимальной системы. Между тем процесс определения оптимальной системы лишь тогда может быть осуществлен, когда предварительно выбран какой-либо критерий оптимальности, т. е. тот критерий, экстремальное значение которого (минимум или максимум) определяет оптимальную систему. Так, например, можно найти систему, оптимальную в смысле минимума искажений. При этом критерием оптимальности является какая-либо мера искажений при прохождении сигнала сквозь систему. Эта мера достигает минимального значения для оптимальной в данном смысле системы. В любом случае обоснованный выбор может быть произведен лишь тогда, когда твердо установлен критерий оптимальности. Кроме того, может быть положен ряд дополнительных требований. Например, в этой главе мы ограничиваем рассмотрение только лишь линейными системами.

Реальная система может работать в разнообразных условиях; на ее вход могут поступать различные сигналы, на нее могут действовать различные помехи. Лишь ограниченный класс задач имеет такие свойства, при которых можно создать систему, наилучшим образом работающую в любом из возможных случаев. В большей части задач дело обстоит иначе: какая бы система ни была спроектирована, она в одних случаях ведет себя наилучшим образом, а в других случаях — не наилучшим. Последнее означает, что можно создать систему, которая именно в этих случаях имела бы лучшие показатели, чем избранная. Какую же систему выбрать? Правильный выбор системы может быть основан на *статистическом критерии оптимальности*. Например,

лучшей можно назвать систему, которая в среднем работает наилучшим образом, т. е. для которой среднее значение (математическое ожидание) какого-либо показателя будет экстремальным. Это среднее значение и будет в данном случае критерием оптимальности.

Статистические критерии оптимальности могут быть различными в зависимости от характера задачи. Так, например, существует большой класс задач обнаружения, когда требуется лишь обнаружить, приходит ли на вход приемного устройства некоторый сигнал, обычно известной формы, либо сигнала на входе устройства нет, а имеется лишь шум. В задаче обнаружения от приемного устройства требуется лишь дать один из двух возможных ответов: «да» или «нет», «есть сигнал» или «нет сигнала». К этому типу задач относятся задачи приема радиолокационных сигналов, сигналов при импульсно-кодовой модуляции. Обнаружение облегчается, когда сигнал значительно больше шума, и, наоборот, затрудняется, если сигнал не выделяется заметно на фоне шума. Поэтому перед устройством, производящим решение, дающим ответ «да» или «нет», целесообразно поставить некоторый фильтр, который по возможности усиливал бы сигнал по сравнению с шумом. Этот фильтр нужно спроектировать так, чтобы на его выходе отношение сигнала к шуму было максимальным. В данном случае отношение сигнал/шум является критерием оптимальности.

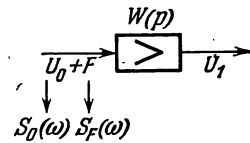


Рис. 11.11.

Другой тип задач возникает в том случае, когда от приемного устройства требуется по возможности точнее воспроизвести форму передаваемого сигнала, которая заранее неизвестна. При приеме радиопередачи обычно допустимо воспроизведение с запаздыванием τ . Поэтому если передаваемый сигнал обозначим $X_0(t)$, а на выходе приемного устройства воспроизводится сигнал $X_0(t - \tau)$, то такое воспроизведение можно назвать идеальным (при не слишком большом τ). С другой стороны, в системах автоматического управления любое запаздывание означает уже отклонение от идеала. В общем случае допустим, что воспроизведение сигнала в виде $X_0(t - \tau)$ является идеальным. Здесь τ — некоторая константа.

Любая реальная система из-за наличия искажений и помех дает на выходе кривую $X(t)$, отклоняющуюся от идеальной. Таким образом, существует погрешность $x(t)$, значение которой

$$x(t) = X_0(t - \tau) - X(t). \quad (1)$$

Систему можно считать тем лучшей, чем меньше погрешность $x(t)$. Однако входной сигнал $X_0(t)$, а также помехи, действующие на систему, представляют собой случайные процессы. Следовательно, и $x(t)$ — также случайный процесс, и критерием оптимальности может быть лишь какая-либо мера интенсивности этого случайного процесса. Если $x(t)$ — стационарный и эргодический процесс, то проще всего принять в качестве такой меры среднеквадратичную погрешность

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X_0(t - \tau) - X(t)]^2 dt. \quad (2)$$

Ниже приведен сначала пример определения оптимального параметра системы при критерии типа сигнал/шум, а затем пример определения оптимального параметра при критерии в виде среднеквадратичной погрешности.

Рассмотрим линейную систему с передаточной функцией $W(p)$, на вход которой поступает сумма полезного сигнала U_0 и помехи F (рис. 11.11). Пусть и сигнал, и помеха представляют собой стационарные случайные

процессы со спектральными плотностями $S_0(\omega)$ и $S_F(\omega)$ соответственно. Задача системы состоит в передаче сигнала U_0 по возможности без искажения, причем допустимы изменения масштаба в k_0 раз и запаздывание на время $\tau_0 = \text{const}$. В таком случае мерилом величины искажений может служить среднеквадратичная погрешность. Идеальный закон изменения выходной величины имеет вид

$$(U_1)_{\text{ид}} = k_0 U_0(t - \tau_0). \tag{3}$$

В реальной системе $U_1 \neq (U_1)_{\text{ид}}$ и имеет место погрешность

$$x(t) = (U_1)_{\text{ид}} - U_1 = k_0 U_0(t - \tau) - U_1(t). \tag{4}$$

Эта погрешность случайна, так как U_0 и F случайны. Ее мерилом является среднеквадратичное значение $\sqrt{\overline{x^2(t)}}$ (см. (2)), причем

$$\overline{x^2(t)} = \overline{[k_0 U_0(t - \tau_0) - U_1(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [k_0 U_0(t - \tau_0) - U_1(t)]^2 dt. \tag{5}$$

В общем случае можно поставить задачу такого подбора передаточной функции $W(p)$ системы, чтобы минимизировать среднеквадратичную

погрешность $\sqrt{\overline{x^2(t)}}$. Эта задача рассматривается в следующем параграфе. Здесь решается более узкая задача. Зададимся некоторой конкретной формой характеристик системы и подберем параметры этих характеристик так, чтобы обеспечить минимум $\sqrt{\overline{x^2(t)}}$.

Пусть система будет идеальным фильтром низших частот: частотные характеристики такого фильтра изображены на рис. 11.12, а, б. Коэффициент усиления k_0 амплитудной частотной характеристики $B(\omega)$ и наклон τ_0 фазовой частотной характеристики считаем заданными. От этих величин зависит лишь масштаб и запаздывание выходной величины фильтра. Поэтому значения величин k_0 и τ_0 , как мы условились выше (см. (3)), могут быть любыми; от этих значений качество воспроизведения не зависит. Оно, однако, существенно зависит от полосы частот ω_c , пропускаемых фильтром. Именно эту полосу частот и требуется определить.

Простые физические соображения подсказывают, что существует некоторое оптимальное значение ω_c . Действительно, чем шире полоса частот ω_c , тем больше интенсивность шума на выходе фильтра, тем

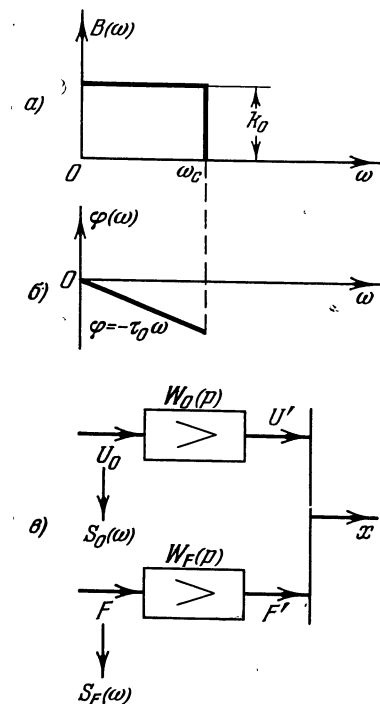


Рис. 11.12.

«лучше» проходит помеха F сквозь фильтр. С этой точки зрения желательно уменьшение значения ω_c . С другой стороны, полезный сигнал U_0 имеет определенный частотный спектр; при увеличении ω_c сквозь фильтр проходит более широкий участок этого спектра. Поэтому воспроизведение полезного сигнала на выходе фильтра улучшается, а его искажения уменьшаются. С этой точки зрения желательно увеличение ω_c . Слишком малое значение ω_c неприемлемо, так как недопустимо возрастает погрешность

воспроизведения вследствие искажения, передаваемого сквозь фильтр сигнала. Слишком большое значение ω_c неприемлемо, так как недопустимо возрастает погрешность из-за увеличения помехи (шума) на выходе. Поэтому можно предположить, что существует некоторое оптимальное значение ω_c , при котором суммарная погрешность минимальна.

Успешная работа линейного фильтра возможна лишь в том случае, когда частотные спектры помехи и полезного сигнала существенно различны. В противном случае их невозможно разделить. Примем, что помеха F является белым шумом со спектральной плотностью $S_F(\omega) = \text{const}$. Что касается спектральной плотности сигнала $S_0(\omega)$, то она зависит от ω и падает на высоких частотах. Для весьма высоких частот $S_0(\omega)$ равняется нулю. Положим также, что полезный сигнал U_0 и помеха F статистически независимы. Тогда их взаимная корреляционная функция равна нулю.

Для решения задачи удобно заменить схему рис. 11.11 некоторой эквивалентной схемой. Чтобы получить эту схему, запишем уравнение (4) в изображениях Лапласа:

$$x(p) = k_0 U_0(p) e^{-p\tau_0} - U_1(p). \quad (6)$$

Из рис. 11.11 следует, что

$$U_1(p) = W(p) [U_0(p) + F(p)]. \quad (7)$$

Подставляя это выражение в (6), находим

$$x(p) = k_0 U_0(p) e^{-p\tau_0} - W(p) U_0(p) - W(p) F(p) = W_0(p) U_0(p) + W_F(p) F(p), \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_0(p) &= k_0 e^{-p\tau_0} - W(p), \\ W_F(p) &= -W(p). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Формулу (8) можно истолковать следующим образом: величина $x(t)$, имеющая изображение $x(p)$, есть сумма двух слагаемых. Первое из этих слагаемых представляет собой результат преобразования сигнала U_0 системой с передаточной функцией $W_0(p)$; второе слагаемое получается в результате преобразования помехи F системой с передаточной функцией $W_F(p)$. Соответствующая схема изображена на рис. 11.12, *в*; это и есть эквивалентная схема.

Так как процессы U_0 и F независимы, то и выходные величины U' и F' систем, изображенных на рис. 11.12, также независимы. Поэтому взаимная корреляционная функция и взаимная спектральная плотность этих величин равны нулю.

Из рис. 11.12 получаем

$$x(t) = U'(t) + F'(t). \quad (10)$$

Автокорреляционная функция суммы двух некоррелированных слагаемых равна сумме автокорреляционных функций слагаемых. Это справедливо и подавно для независимых слагаемых. Действительно, выпишем выражение для автокорреляционной функции $x(t)$:

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= M \{x(t) x(t + \tau)\} = \\ &= M \{[U'(t) + F'(t)] [U'(t + \tau) + F'(t + \tau)]\} = \\ &= M \{U''(t) U'(t + \tau)\} + M \{F'(t) F'(t + \tau)\} + \\ &+ M \{F'(t) U'(t + \tau)\} + M \{U'(t) F'(t + \tau)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Последние два слагаемых равны нулю, так как они представляют собой взаимные корреляционные функции U' и F' . Поэтому

$$K_x(\tau) = K_{U'}(\tau) + K_{F'}(\tau), \quad (12)$$

где $K_{U'}(\tau)$ и $K_{F'}(\tau)$ — автокорреляционные функции U' и F' соответственно:

$$\left. \begin{aligned} K_{U'}(\tau) &= M \{U'(t)U'(t+\tau)\}, \\ K_{F'}(\tau) &= M \{F'(t)F'(t+\tau)\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Следовательно, и спектральная плотность $S_x(\omega)$ для $x(t)$ равна сумме спектральных плотностей $S_{U'}(\omega)$ и $S_{F'}(\omega)$ для величин U' и F' :

$$S_x(\omega) = S_{U'}(\omega) + S_{F'}(\omega). \quad (14)$$

Слагаемые этой формулы весьма просто подсчитываются на основании эквивалентной схемы (рис. 11.12) и формулы (25) § 4.

$$\left. \begin{aligned} S_{U'}(\omega) &= |W_0(j\omega)|^2 S_0(\omega), \\ S_{F'}(\omega) &= |W_F(j\omega)|^2 S_F(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Итак,

$$S_x(\omega) = |W_0(j\omega)|^2 S_0(\omega) + |W_F(j\omega)|^2 S_F(\omega). \quad (16)$$

Теперь уже, воспользовавшись формулой (65) § 3, нетрудно найти искомую величину $\overline{x^2(t)}$:

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_0(j\omega)|^2 S_0(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_F(j\omega)|^2 S_F(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем $W_0(j\omega)$ и $W_F(j\omega)$ по формулам (9). Так как для комплексного коэффициента передачи идеального фильтра (см. также рис. 11.12) справедлива формула

$$W(j\omega) = \begin{cases} k_0 e^{-j\omega\tau_0} & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_c, \end{cases} \quad (18)$$

то из первой формулы (9) следует

$$W_0(j\omega) = k_0 e^{-j\omega\tau_0} - W(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ -k_0 e^{-j\omega\tau_0} & \text{при } \omega > \omega_c. \end{cases} \quad (19)$$

Из второй формулы (9) находим

$$W_F(j\omega) = -W(j\omega) = \begin{cases} -k_0 e^{-j\omega\tau_0} & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_c. \end{cases} \quad (20)$$

Подставляя модули $|W_0(j\omega)|$ и $|W_F(j\omega)|$ из (19) и (20) в выражение (17), приходим к формуле

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{k_0^2}{\pi} \int_{\omega_c}^\infty S_0(\omega) d\omega + \frac{k_0^2}{\pi} \int_0^{\omega_c} S_F(\omega) d\omega = \overline{x^2(t)}_0 + \overline{x^2(t)}_F, \quad (21)$$

где

$$\overline{x^2(t)}_0 = \frac{k_0^2}{\pi} \int_{\omega_c}^\infty S_0(\omega) d\omega, \quad \overline{x^2(t)}_F = \frac{k_0^2}{\pi} \int_0^{\omega_c} S_F(\omega) d\omega. \quad (22)$$

Составляющая $[\overline{x^2(t)}]_0$ дисперсии $\overline{x^2(t)}$ погрешности зависит от $S_0(\omega)$, т. е. от характера полезного сигнала U_0 . Это — погрешность, возникающая от искажения сигнала при передаче его через фильтр. Составляющая $[\overline{x^2(t)}]_F$ зависит от $S_F(\omega)$, т. е. от характера помехи F . Это погрешность от помехи, проходящей сквозь фильтр.

При изменении ω_c меняются пределы интегрирования в интегралах выражения (21). Найдем графически оптимальное значение $(\omega_c)_{\text{опт}}$, обеспечивающее минимум погрешности $\sqrt{\overline{x^2(t)}}$.

Начертим графики $S_0(\omega)$ и $S_F(\omega)$ на рис. 11.13, а и б соответственно и перенесем кривую $B(\omega)$ на рис. 11.13, в. На рис. 11.13, г будем отклады-

вать $[\overline{x^2(t)}]_0$ и $[\overline{x^2(t)}]_F$ в функцию ω_c . Как видно из первой формулы (22), величина $[\overline{x^2(t)}]_0$ пропорциональна площади, заштрихованной на рис. 11.13, б. Чем больше ω_c , тем меньше эта площадь. Этот рисунок наглядно показывает, что первое слагаемое погрешности обусловлено именно тем, что заштрихованная часть частотного спектра полезного сигнала не проходит сквозь фильтр, вследствие чего сигнал на выходе искажается. Из второй формулы (22) следует, что величина $[\overline{x^2(t)}]_F$ пропорциональна площади, заштрихованной на рис. 11.13, б. Чем больше ω_c , тем больше эта площадь. Таким

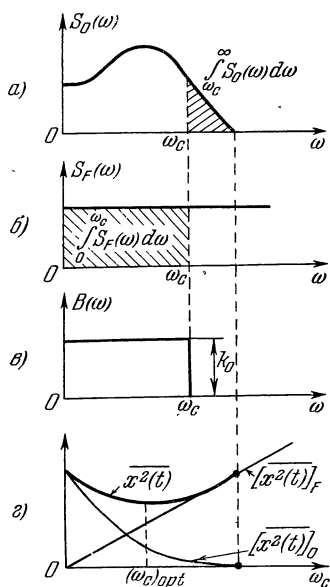


Рис. 11.13.

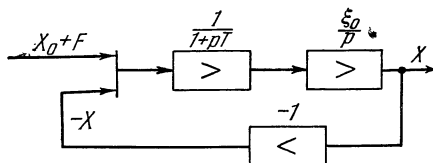


Рис. 11.14.

образом, наглядно показывается, что слагаемое $[\overline{x^2(t)}]_F$ погрешности обусловлено прохождением сквозь фильтр частотного спектра помехи в диапазоне от 0 до ω_c . Изменяя ω_c , мы меняем величины заштрихованных на рис. 11.13, а и б площадей. Пропорциональные им величины $[\overline{x^2(t)}]_0$ и $[\overline{x^2(t)}]_F$, а также их сумма $\overline{x^2(t)}$ отложены в функции ω_c на рис. 11.13, г. По кривой $\overline{x^2(t)}$ на этом рисунке можно найти точку $\omega_c = (\omega_c)_{\text{опт}}$, которой соответствует минимум погрешности. Это и есть искомая полоса частот пропускания фильтра.

Р а с с м о т р и м п р и м е р задачи определения оптимальных параметров линейной системы автоматического управления. Рассмотрим систему автоматического регулирования, структурная схема которой изображена на рис. 11.14. В тракте системы имеются соединенные последовательно инерционное и интегрирующее звенья. Задающее воздействие X_0 подается на вход системы вместе с неотделимой от него помехой или шумом F . Процессы X_0 и F независимы, причем F — белый шум со спектральной плотностью $S_F(\omega) = b^2 = \text{const}$. Задана спектральная плотность $S_{Y_0}(\omega)$ производной $Y_0 = dX_0/dt$ процесса X_0 ; она такая же, как в примере, соответствующем рис. 11.7:

$$S_{Y_0}(\omega) = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \cdot \tag{23}$$

В данном случае за ошибку системы $x(t)$ принимается разность

$$x(t) = X_0(t) - X(t), \tag{24}$$

где $X(t)$ — регулярная величина.

В задаче заданы значения параметров T и ξ_0 . Требуется подобрать такое значение коэффициента усиления инерционного звена k , при котором среднеквадратичная ошибка системы минимальна.

Перепишем уравнение (24) в изображениях:

$$x(p) = X_0(p) - X(p) = \frac{Y_0(p)}{p} - X(p), \tag{25}$$

где $Y(t) = dX_0/dt$ — производная, а $Y_0(p)$ — ее изображение. Изображение $X(p)$ регулируемой величины выражается формулой

$$X(p) = W_3(p) [X_0(p) + F(p)] = W_3(p) \left[\frac{Y_0(p)}{p} + F(p) \right]. \tag{26}$$

Здесь $W_3(p)$ — передаточная функция замкнутой системы. Из рис. 11.14 видно, что

$$W_3(p) = \frac{k\xi_0}{p(1+pT)} = \frac{k\xi_0}{Tp^2 + p + k\xi_0}. \tag{27}$$

Подставив в равенство (25) выражение (26), находим

$$x(p) = \frac{Y(p)}{p} [1 - W_3(p)] - F(p) W_3(p). \tag{28}$$

Отсюда следует, что эквивалентная структурная схема для вычисления погрешности x выглядит так, как показано на рис. 11.15. Так как воздействие Y_0 и помеха F независимы, то, пользуясь эквивалентной схемой, можно сразу написать выражение для спектральной плотности $S_x(\omega)$ погрешности:

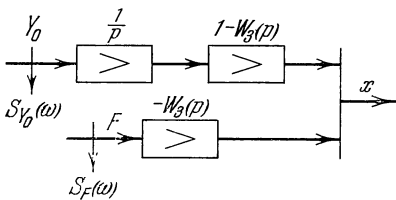


Рис. 11.15.

$$S_x(\omega) = S_{Y_0}(\omega) \left| \frac{1 - W_3(j\omega)}{j\omega} \right|^2 + S_F(\omega) |W_3(j\omega)|^2. \tag{29}$$

Поэтому среднеквадратичная погрешность, которую будем считать мерой величины погрешности, определяется из формулы

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{Y_0}(\omega) \left| \frac{1 - W_3(j\omega)}{j\omega} \right|^2 d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_F(\omega) |W_3(j\omega)|^2 d\omega. \tag{30}$$

Первая составляющая дисперсии $\overline{x^2(t)}$ появляется в результате искажений при передаче полезного сигнала сквозь замкнутую систему регулирования. Действительно, если бы эта система была идеальна, то имело бы место равенство $W_3(j\omega) = 1$. Тогда первое слагаемое обратилось бы в нуль.

Второе слагаемое в формуле (30) обусловлено погрешностью, возникающей из-за наличия помехи F .

Подставим в формулу (30) выражение для $S_F(\omega)$, а также для $S_{y_0}(\omega)$ из формулы (23) и $W_3(j\omega)$ из формулы (27).

Тогда

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \frac{T^2\omega^2 + 1}{(k\xi_0 - T\omega^2)^2 + \omega^2} d\omega + \frac{b^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2\xi_0^2}{(k\xi_0 - T\omega^2)^2 + \omega^2} d\omega. \quad (31)$$

Пусть в рассматриваемом примере фиксированные параметры имеют следующие численные значения:

$$b^3 = 1, \quad \lambda = 0,1, \quad 2a^2\lambda = 1000, \quad T = 0,2, \quad \xi_0 = 1.$$

Тогда формула (31) принимает вид

$$\overline{x^2(t)} = \frac{10^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{0,04\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 0,01)[(k - 0,2\omega^2)^2 + \omega^2]} d\omega + \frac{k^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(k - 0,2\omega^2)^2 + \omega^2} d\omega. \quad (32)$$

Интегралы, фигурирующие в этой формуле, можно вычислить в общем виде, так как подынтегральное выражение есть дробнорациональная функция переменного ω . Опуская подробности вычислений, приведем их результат:

$$\overline{x^2(t)} = \left(\frac{1000}{k} \frac{25,5 + 0,1k}{5k + 0,51} \right)^2 + \frac{k^2}{4}. \quad (33)$$

Дифференцируя это выражение по k и приравняв производную нулю, можно найти оптимальное значение $k_{\text{опт}}$, минимизирующее величину $\overline{x^2(t)}$. Оказывается, что оптимальное значение $k_{\text{опт}} \approx 27$. Подставив это значение в формулу (27), находим оптимальную передаточную функцию

$$W_s(p) \approx \frac{135}{p^2 + 5p + 135}. \quad (34)$$

Это передаточная функция колебательного звена, у которого $\omega_0^2 = 135$ и $2d_0\omega_0 = 5$. Отсюда находим $\omega_0 = 11,62$ и $d_0 = 0,215$. Значение постоянной затухания d_0 оказалось очень малым. Следовательно, переходные процессы в такой системе будут резко колебательными, а время переходного процесса — достаточно большим. Поэтому при осуществлении такой системы желательно разработать более сложную нелинейную схему, в которой для переходного процесса при больших отклонениях погрешности x от нуля демпфирование увеличивается и величина d_0 возрастает. Между тем при малых отклонениях, когда система входит в установившийся режим (именно для этих условий и производится описанный выше расчет), демпфирование должно уменьшиться примерно до указанной в расчете величины.

Помеха F может быть приложена не в той точке, в которой приложено задающее воздействие X_0 (см. рис. 11.16). В этом случае общий ход вычислений остается прежним, но вид формул несколько меняется. Будем считать выходной величиной системы погрешность $x = X_0 - X$, поскольку именно она и интересует нас; эквивалентная схема также должна иметь x в качестве выходной величины. Воспользуемся принципом суперпозиции и представим x в форме $x = x_1 + x_2$, где x_1 есть составляющая x , вызванная воздействием X_0 , а x_2 — составляющая x , вызванная помехой F . Чтобы найти x_1 , полагаем в схеме рис. 11.16 величину F равной нулю. Тогда получаем схему, показанную в верхней части рис. 11.16, б. На участке тракта между X_0 и x_1 можно включить в данном случае усилительное звено с коэффициентом усиления $+1$, что ничего не изменяет по существу, но делает схему несколько более наглядной. Для определения x_2 полагаем в схеме рис. 11.16, а величину X_0 равной нулю. Тогда получаем схему, показанную

в нижней части рис. 11.16, б. На выходе схемы рис. 11.16, б появляется величина $x = x_1 + x_2$.

Для каждой из частей схемы рис. 11.16, б можно найти передаточную функцию по известной формуле (см. гл. III). Находя эти функции $W_0(p)$ и $W_F(p)$, приходим к окончательному виду эквивалентной схемы, показанному на рис. 11.16, в. Если X_0 и F — независимые между собой стационарные

случайные процессы со спектральными плотностями $S_0(\omega)$ и $S_F(\omega)$, то спектральная плотность $S_x(\omega)$ погрешности может быть сразу получена из схемы рис. 11.16, в:

$$S_x(\omega) = S_0(\omega) |W(j\omega)|^2 + S_F(\omega) |W_F(j\omega)|^2. \quad (35)$$

Теперь находим среднеквадратичную погрешность $\sqrt{x^2(t)}$ по формуле

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_0(\omega) |W_0(j\omega)|^2 d\omega + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_F(\omega) |W_F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (36) \end{aligned}$$

Подставляя конкретные выражения S_0 , W_0 , S_F , W_F в эту формулу и выполняя интегрирование, можно найти зависимость $\overline{x^2(t)}$ от параметров системы и подобрать такие значения параметров, при которых погрешность минимальна.

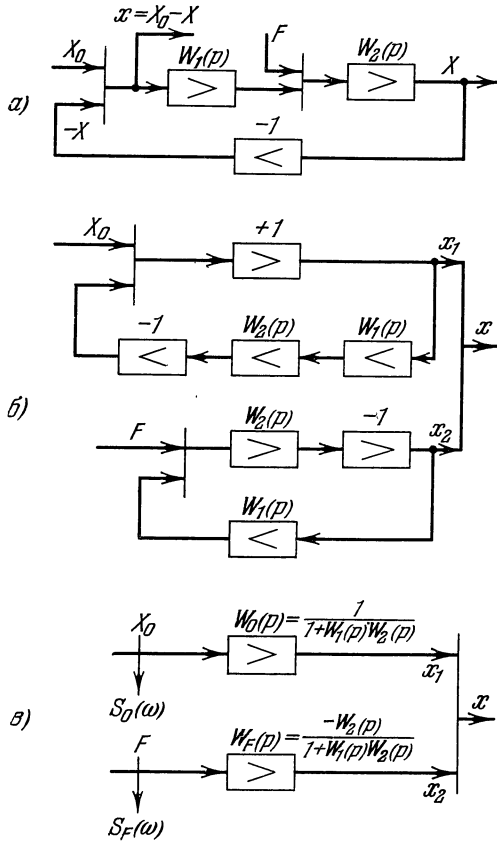


Рис. 11.16.

Если между сигналом X_0 и помехой F имеется корреляция, то формула (36) усложняется; в ней появляются новые члены, зависящие от взаимных спектральных плотностей. Эти члены того же типа, что и два последних слагаемых формулы (11).

§ 6. Статистически оптимальные линейные системы

В любой системе управления требуется обеспечить определенную зависимость между выходом $X(t)$ системы и полезным сигналом $s(t)$, подаваемым на ее вход. Если требуемое значение выхода обозначим $X_0(t)$, то зависимость между s и X_0 можно изобразить уравнением

$$\varphi(s, X_0) = 0. \quad (1)$$

Эта требуемая зависимость может быть различной; например, в системах автоматического регулирования требуется, чтобы выполнялось равен-

ство $X_0 = s$. В системах связи достаточно обеспечить зависимость

$$X_0(t) = ks(t - \tau), \quad (2)$$

где $k, \tau > 0$ — постоянные величины. В вычислительных устройствах требуется обеспечение разнообразных зависимостей. Например, для интегратора такая зависимость имеет вид

$$X_0(t) = \xi \int_0^t s(t) dt, \quad (3)$$

где $\xi = \text{const}$, для дифференциатора

$$X_0(t) = \mu \frac{ds(t)}{dt}, \quad (4)$$

где $\mu = \text{const}$ и т. д. В общем случае зависимость (1) может характеризоваться дифференциальным, интегральным, функциональным или каким-либо иным уравнением. В системах для «предсказания» или упреждения, на выходе которых требуется прогнозировать будущие значения сигнала, идеальной будет зависимость

$$X_0(t) = s(t + \tau), \quad (5)$$

где $\tau > 0$. Если ограничиться одними лишь линейными преобразованиями полезного сигнала, то сигнал на выходе системы $X_0(p)$ в общем случае должен удовлетворять следующему операторному уравнению:

$$X_0(p) = W^*(p) s(p). \quad (6)$$

Например, для случая, описанного уравнением (2), требуемая передаточная функция $W^*(p) = ke^{-p\tau}$, для уравнения (3) — функция $W^*(p) = \frac{\xi}{p}$, для (4) — функция $W^*(p) = \mu p$ и, наконец, для (5) — функция $W^*(p) = e^{p\tau}$.

Однако любая реальная система не может выполнять свои функции идеальным образом. В действительности ее выходная величина $X(t)$ будет неизбежно отличаться от идеального, требуемого значения $X_0(t)$, определяющегося выражением (1). Величина

$$\varepsilon(t) = X_0(t) - X(t) \quad (7)$$

является погрешностью, и задача состоит в том, чтобы насколько возможно уменьшить эту погрешность.

Выше было показано, что причиной возникновения погрешности являются как искажения сигналов при их преобразовании системой, так и помехи, действующие на систему. Ограничимся случаем, когда воздействие, поступающее на вход системы, представляет собой смесь полезного сигнала $s(t)$ и помехи или шума $n(t)$:

$$Y(t) = Y[s(t), n(t)]. \quad (8)$$

Случаи, когда полезный сигнал и помеха приложены к различным входам, могут рассматриваться аналогичным образом и здесь не обсуждаются.

В наиболее простом и весьма важном в практическом отношении случае сигнал и помеха оказываются аддитивными, т. е.

$$Y(t) = s(t) + n(t). \quad (9)$$

Именно это мы и будем предполагать в дальнейшем.

Допустим, что функция (8) или (9), определяющая зависимость входного сигнала от полезного сигнала и шума, известна. Заданы какие-либо

характеристики полезного сигнала и шума, например их плотности распределения, либо спектральные плотности распределения и т. д. Конечно, тривиальный случай, когда $s(t)$ или $n(t)$ точно известны, исключается, так как в первом случае задача вовсе не возникает, а во втором случае, например из (9), зная $Y(t)$, легко определить и $s(t)$. С другой стороны, полное отсутствие априорной, предварительной информации о сигнале и помехе не позволяет разумно поставить задачу. Если какие-либо характеристики $s(t)$ и $n(t)$ заданы и известно, как от $s(t)$ и $n(t)$ зависит входное воздействие $Y(t)$, то задачу синтеза оптимальной системы можно поставить следующим образом. Необходимо из класса возможных систем (ниже в качестве возможных систем рассматривается класс линейных систем) выбрать такую систему, которая обеспечивает минимум для некоторой погрешности ε (см. (7)). Если эта мера статистическая, то мы будем говорить о системе, оптимальной в статистическом смысле, или о статистически оптимальной системе.

Рассмотрим задачу построения статистически оптимальной системы при следующих ограничениях:

1. В качестве критерия оптимальности выбирается среднеквадратичное значение погрешности $\sqrt{M(\varepsilon^2)}$, где $M(\varepsilon^2)$ — математическое ожидание квадрата погрешности ε . В общем случае $M(\varepsilon^2)$ есть функция времени. Если ε — стационарный и эргодический процесс, что и будет далее предполагаться, то $M(\varepsilon^2)$ не зависит от времени и равно

$$M(\varepsilon^2) = \bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (10)$$

Итак, наилучшей *оптимальной* будет считаться система, обеспечивающая наименьшую *среднеквадратичную погрешность*.

Критерий в виде среднеквадратичной погрешности разумен тогда, когда ущерб, вызываемый погрешностью ε , растет с ростом этой погрешности. Однако это не всегда так, а следовательно, и критерий (10) нельзя рассматривать как универсальный. Его популярность в значительной мере обусловлена сравнительной простотой последующих выкладок. При использовании других критериев расчеты систем, как правило, усложняются.

2. Как идеальная система с передаточной функцией $W^*(p)$, так и синтезируемая оптимальная система с передаточной функцией $W_{\text{опт}}(p)$ являются линейными системами с постоянными коэффициентами. В настоящее время методика синтеза оптимальных систем обобщена и на линейные системы с переменными коэффициентами. Однако при этом вычисления существенно усложняются. Такое обобщение ниже не рассматривается.

3. Все случайные процессы будем считать стационарными и эргодическими. Обобщить теорию на случай нестационарных процессов в принципе нетрудно. Однако такое обобщение связано с усложнением характера вычислений.

4. Величина $X(t)$ на выходе линейной системы в момент времени t в общем случае зависит не только от текущего значения входного сигнала $Y(t)$, но и от предыдущих его значений — от «предыстории» процесса. Если процесс $Y(t)$ подавался на вход системы, начиная от бесконечно удаленных в прошлое моментов времени, то $X(t)$ в данный момент времени зависит, вообще говоря, от всех значений $Y(\tau)$ в бесконечном интервале времени $-\infty < \tau \leq t$. Это свойство любой динамической системы можно сформулировать так: система имеет *бесконечную память*. Именно такие системы рассматриваются ниже. Иногда представляет интерес иная постановка задачи, когда $X(t)$ в момент времени t должен зависеть от значений $Y(\tau)$, поступавших на вход системы за конечный промежуток времени $t - T \leq \tau \leq t$.

Излагаемую здесь методику можно обобщить и на этот случай, однако рассматривать его здесь мы не будем.

Впервые задача оптимального синтеза по минимуму среднеквадратичной погрешности была поставлена и решена советским ученым акад. А. Н. Колмогоровым как задача интерполяции и экстраполяции дискретных стационарных случайных последовательностей. Американский ученый Н. Винер, построив эту теорию для непрерывных случайных процессов, дал решение задачи определения передаточной функции оптимальной линейной системы при тех ограничениях, которые были сформулированы выше. Ниже излагаются основы теории Н. Винера в несколько упрощенном виде.

Пусть $Y(t)$ определяется формулой (9). Если $g(t)$ — весовая функция системы с передаточной функцией $W(p)$, то $X(t)$ — выходная величина этой системы — получается, согласно формуле (1) § 4, в виде

$$X(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) Y(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) [s(t-\tau) + n(t-\tau)] d\tau. \quad (11)$$

В этой формуле $s(t)$, $n(t)$, $Y(t)$ и $X(t)$ — экземпляры соответствующих случайных процессов. Функция $g(t)$, которую мы ищем, должна быть весовой функцией физически реализуемой системы. Поэтому она должна удовлетворять условию

$$g(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что формулу (11) можно записать и в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) Y(t-\tau) d\tau, \quad (13)$$

так как интеграл от $-\infty$ до 0 равен нулю.

Подставив выражение для $X(t)$ из (13) в (7), находим

$$\varepsilon(t) = X_0(t) - \int_0^{\infty} g(\tau) Y(t-\tau) d\tau. \quad (14)$$

Найдем квадрат ошибки:

$$\varepsilon^2(t) = \left[X_0(t) - \int_0^{\infty} g(\tau) Y(t-\tau) d\tau \right] \left[X_0(t) - \int_0^{\infty} g(\nu) Y(t-\nu) d\nu \right]. \quad (15)$$

Здесь во втором из интегралов подынтегральная переменная обозначена ν , а не τ , что, разумеется, ничего не меняет. Иное обозначение для подынтегральной переменной удобно потому, что теперь произведение интегралов можно будет заменить двойным интегралом.

Раскрывая скобки в выражении (15), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = & [X_0(t)]^2 - X_0(t) \left[\int_0^{\infty} g(\tau) Y(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} g(\nu) Y(t-\nu) d\nu \right] + \\ & + \left[\int_0^{\infty} g(\tau) Y(t-\tau) d\tau \right] \cdot \left[\int_0^{\infty} g(\nu) Y(t-\nu) d\nu \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Оба слагаемых в первой квадратной скобке, очевидно, одинаковы. Далее, произведение двух интегралов — последний член формулы (16) —

можно переписать в виде двойного интеграла. В итоге приходим к выражению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = [X_0(t)]^2 - 2X_0(t) \int_0^\infty g(\tau) Y(t-\tau) d\tau + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau) g(\nu) Y(t-\tau) Y(t-\nu) d\tau d\nu. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как $X_0(t)$ и $Y(t)$ — случайные процессы, то и погрешность $\varepsilon(t)$ является случайным процессом. Найдем математическое ожидание от квадрата этой величины:

$$\begin{aligned} M\{\varepsilon^2(t)\} = M[X_0(t)]^2 - 2M\left\{X_0(t) \int_0^\infty g(\tau) Y(t-\tau) d\tau\right\} + \\ + M\left\{\int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau) g(\nu) Y(t-\tau) Y(t-\nu) d\tau d\nu\right\} = \\ = M\{[X_0(t)]^2\} - 2 \int_0^\infty g(\tau) M\{X_0(t) Y(t-\tau)\} d\tau + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau) g(\nu) M\{Y(t-\tau) Y(t-\nu)\} d\tau d\nu. \end{aligned} \quad (18)$$

Последнее преобразование следует из факта переместимости операций интегрирования и усреднения по множеству. Обозначим

$$\left. \begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= M\{Y(t_1) Y(t_2)\}, \\ K_{X_0 Y}(t_1, t_2) &= M\{X_0(t_1) Y(t_2)\}, \\ K_{X_0}(t_1, t_2) &= M\{X_0(t_1) X_0(t_2)\}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь K_Y — автокорреляционная функция для $Y(t)$ — сравни с формулой (18) § 3; K_{X_0} — автокорреляционная функция для X_0 ; $K_{X_0 Y}$ — взаимная корреляционная функция X_0 и Y — сравни с формулой (21) § 3. Вводя обозначения (19), можно переписать формулу (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} M\{\varepsilon^2(t)\} = K_{X_0}(t, t) - 2 \int_0^\infty g(\tau) K_{X_0 Y}(t, t-\tau) d\tau + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau) g(\nu) K_Y(t-\tau, t-\nu) d\tau d\nu. \end{aligned} \quad (20)$$

Если заданы все корреляционные функции (19), то лишь функция $g(t)$ в правой части равенства (20) неизвестна. Ее следует определить так, чтобы минимизировать выражение (20).

До сих пор мы нигде не использовали предположения о стационарности исследуемых процессов. Выражение (20) упрощается, если все процессы стационарны, пусть даже в широком смысле. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} K_{X_0}(t, t-\tau) &= K_{X_0}[t-(t-\tau)] = K_{X_0}(\tau), \\ K_Y(t-\tau, t-\nu) &= K_Y[(t-\tau)-(t-\nu)] = K_Y(\nu-\tau) = K_Y(\tau-\nu). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Поэтому

$$M \{ \varepsilon^2(t) \} = K_{X_0}(0) - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau) g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu. \quad (22)$$

Задача определения функции $g(t)$, минимизирующей зависящее от нее выражение $M \{ \varepsilon^2(t) \}$, представляет собой задачу вариационного исчисления. В этой дисциплине разработана методика нахождения необходимого условия, которому должна удовлетворять искомая функция $g(t)$. Воспользуемся этой методикой.

Пусть $g(t)$ — функция веса некоторой физически реализуемой системы, для которой значение $M \{ \varepsilon^2(t) \}$ минимально. Пусть, далее, имеем другую весовую функцию $g(t) + \lambda f(t)$, где λ — некоторое число, а $f(t)$ — любая весовая функция какой-либо физически реализуемой системы. Если вместо $g(t)$ подставить в (22) функцию $g(t) + \lambda f(t)$, то значение $M \{ \varepsilon^2(t) \}$ должно увеличиться при любом $\lambda \neq 0$. Лишь значение $\lambda = 0$ минимизирует величину $M \{ \varepsilon^2(t) \}$, которая, таким образом, может рассматриваться как функция параметра λ . Заменяя $g(t)$ через $g(t) + \lambda f(t)$ в выражении (22), получаем

$$M \{ \varepsilon^2(t) \} = K_{X_0}(0) - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau - \\ - 2\lambda \int_0^{\infty} f(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau) g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu + \\ + 2\lambda \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\nu) f(\tau) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu + \lambda^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) f(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu \quad (23)$$

или

$$M \{ \varepsilon^2(t) \} = A + 2B\lambda + C\lambda^2, \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= K_{X_0}(0) - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau) g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu, \\ B &= - \int_0^{\infty} f(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\nu) f(\tau) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu, \\ C &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) f(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Величина $M \{ \varepsilon^2(t) \}$ должна быть минимальной при $\lambda = 0$; единственное значение λ , соответствующее экстремуму (24), получается из условия $\partial M \{ \varepsilon^2(t) \} / \partial \lambda = 0$ или $2B + 2C\lambda = 0$. Отсюда находим

$$\lambda = -\frac{B}{C}. \quad (26)$$

Из (26) следует, что должно выполняться условие $B = 0$, т. е.

$$- \int_0^{\infty} f(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\nu) f(\tau) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu = 0. \quad (27)$$

Условие (27) можно переписать так:

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \left[\int_0^{\infty} g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\nu - K_{X_0Y}(\tau) \right] d\tau = 0. \quad (28)$$

Это условие может удовлетворяться при любой функции $f(\tau)$ лишь в том случае, когда выражение в квадратной скобке равно нулю, во всяком случае, при $\tau > 0$, т. е.

$$K_{X_0Y}(\tau) = \int_0^{\infty} g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\nu \quad (\tau > 0). \quad (29)$$

Это и есть то необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $g(t)$. Выражение (29) представляет собой линейное интегральное уравнение, так называемое *уравнение Винера — Хопфа*. Для определения $g(t)$ необходимо решить это интегральное уравнение.

Условие (29) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы функция $g(t)$, удовлетворяющая ему, минимизировала среднее от квадратов погрешности $M\{\varepsilon^2(t)\}$. Действительно, если условие (29), а за ним и (28) и, таким образом, $B = 0$ в выражении (24), то лишь слагаемое $C\lambda^2$ в нем зависит от λ . Докажем, что $C > 0$; если это так, то при $\lambda = 0$, т. е. для оптимальной функции $g(t)$, величина $M\{\varepsilon^2(t)\}$ будет принимать минимальное значение. Из (25) находим

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) f(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu = \int_0^{\infty} f(\tau) \left[\int_0^{\infty} f(\nu) M\{Y(t - \tau) Y(t - \nu)\} d\nu \right] d\tau = \\ &= M \left\{ \left[\int_0^{\infty} f(\tau) Y(t - \tau) d\tau \right] \cdot \left[\int_0^{\infty} f(\nu) Y(t - \nu) d\nu \right] \right\} = \\ &= M \left\{ \left[\int_0^{\infty} f(\tau) Y(t - \tau) d\tau \right]^2 \right\} > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Итак, в общем случае $C > 0$, откуда следует, что функция $g(t)$ действительно минимизирует среднеквадратичную погрешность. Ее минимальное значение получается из формулы (23) при $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} [M\{\varepsilon^2(t)\}]_{\min} = A &= K_{X_0}(0) - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau) g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\tau d\nu. \end{aligned} \quad (31)$$

Если учтем выражение (28) для K_{X_0Y} в последнем интеграле (30), то придем к формуле

$$[M\{\varepsilon^2(t)\}]_{\min} = K_{X_0}(0) - \int_0^{\infty} g(\tau) K_{X_0Y}(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Уравнение Винера — Хопфа (29) можно переписать, используя условие (12), в следующем виде:

$$K_{X_0Y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) K_Y(\tau - \nu) d\nu. \quad (33)$$

Если отвлечься от условия (12) физической осуществимости системы, то функцию $g(t)$ нетрудно найти, решая уравнение (33). Сравним это уравнение с уравнением (13). Формально эти уравнения совершенно идентичны. Поэтому уравнение (13) выглядит так, как если бы «сигнал» $K_Y(\tau)$ подавался на вход системы с весовой функцией $g(t)$, а на выходе этой системы получался выходной «сигнал» $K_{X_0Y}(\tau)$. Но тогда нетрудно найти связь между Фурье-изображениями всех этих функций. Введем спектральные плотности:

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad S_{X_0Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_0Y}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (34)$$

и комплексный коэффициент передачи системы, определяемый формулой

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (35)$$

Для физически реализуемых систем, у которых $g(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$, формула (35) тождественна с обычным определением.

Так как Фурье-изображение S_{X_0Y} выходного «сигнала» равно Фурье-изображению S_Y входного сигнала, умноженному на $W(j\omega)$, то

$$W(j\omega) = \frac{S_{X_0Y}(\omega)}{S_Y(\omega)}. \quad (36)$$

Справедливость этой формулы нетрудно проверить, взяв Фурье-изображение уравнения (33). Формула (36) дает искомый оптимальный коэффициент передачи. Оптимальная функция веса может быть получена как фурье-оригинал от $W(j\omega)$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (37)$$

Однако эта функция, найденная без учета условия (12), не удовлетворяет уравнению (33). Полученная система является физически нереализуемой; определяемая из (37) функция $g(t)$ оказывается отличной от нуля при $t < 0$. В этом случае система, «предчувствуя» появление входного сигнала, начинает на него реагировать еще до его появления.

Однако и это решение имеет определенный физический смысл. Конечно, систему, учитывающую в данный момент времени будущие значения входного сигнала, построить невозможно. Представим себе, однако, что некоторая система сначала регистрирует приходящий к ней сигнал в течение большого промежутка времени (теоретически в интервале $-\infty < t < +\infty$), а затем уже начинает его обрабатывать по формуле (13). В этом случае подсчет значения $X(t_1)$ можно произвести с учетом тех значений $Y(t)$, которые имели место при $t > t_1$. Разумеется, однако, что определяемое по формуле (13) значение $X(t_1)$ получается вовсе не в момент $t = t_1$, а гораздо позже — теоретически с бесконечно большим запаздыванием. Поэтому данную систему можно назвать системой с *бесконечным запаздыванием* или системой I типа.

В качестве конкретного примера рассмотрим тот случай, когда сигнал $s(t)$ и помеха $n(t)$ в формуле (9) не коррелированы, а требуемая связь идеального выхода $X_0(t)$ с сигналом $s(t)$ выражается формулой

$$X_0(t) = s(t + \alpha). \quad (38)$$

При $\alpha = 0$ требуется, очевидно, выделение сигнала $s(t)$, а при $\alpha > 0$ — получение прогноза о будущем значении сигнала. Задача о построении

оптимальной системы в первом случае называется задачей *сглаживания* (фильтрации), а во втором случае — задачей *упреждения*. Последняя задача сочетается со сглаживанием при наличии шума, когда $n \neq 0$, и называется задачей *чистого упреждения* при $n = 0$.

В этом случае спектральная плотность $S_Y(\omega)$ суммы $s(t) + n(t)$ равна сумме спектральных плотностей $S_s(\omega)$ и $S_n(\omega)$ сигнала и помехи соответственно ввиду их независимости:

$$S_Y(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega). \tag{39}$$

Формула (38) в изображениях может быть переписана следующим образом:

$$X_0(p) = s(p) e^{p\alpha}. \tag{40}$$

Поэтому (см. (6))

$$W^*(p) = \frac{X_0(p)}{s(p)} = e^{p\alpha}. \tag{41}$$

Определим теперь взаимную корреляционную функцию $K_{X_0Y}(\tau)$. Из (19) и (9) следует

$$\begin{aligned} K_{X_0Y}(\tau) &= M \{X_0(t) Y(t + \tau)\} = M \{X_0(t) [s(t + \tau) + n(t + \tau)]\} = \\ &= M \{X_0(t) s(t + \tau)\} + M \{X_0(t) n(t + \tau)\}. \end{aligned} \tag{42}$$

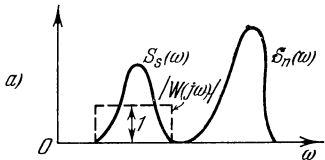
Поскольку $X_0(t)$ зависит лишь от $s(t)$ и, таким образом, корреляция между $X_0(t)$ и $n(t)$ отсутствует, второй член в последнем выражении равен нулю. Отсюда следует, что спектральная плотность $S_{X_0Y}(\omega)$ равна спектральной плотности $S_{X_0s}(\omega)$ — Фурье-изображению от корреляционной функции $K_{X_0s}(\tau)$.

Рассмотрим теперь систему, соответствующую уравнениям (40) и (41). Взаимная спектральная функция $S_{X_0s}(\omega)$ между выходом и входом получается по формуле (26) § 4:

$$S_{X_0Y}(\omega) = S_{X_0s}(\omega) = S_s(\omega) W^*(j\omega) = S_s(\omega) e^{j\omega\alpha}. \tag{43}$$

Подставив выражения (39) и (43) в формулу (36), находим комплексный коэффициент передачи оптимальной системы I типа

$$W(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)} e^{j\omega\alpha}. \tag{44}$$



Для случая простой фильтрации (сглаживания) $\alpha = 0$ и

$$W(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)}. \tag{45}$$

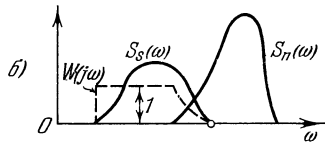


Рис. 11.17.

Рассмотрим частные случаи применения этой формулы. Пусть, например, кривые спектральных плотностей $S_s(\omega)$ и $S_n(\omega)$ не перекрываются (рис. 11.17, а). Тогда из формулы (45) следует, что $W(j\omega) = 1$ там, где $S_s(\omega) \neq 0$, и $W(j\omega) = 0$ там, где $S_s(\omega) = 0$, а спектр помехи отличен от нуля. На рис. 11.17, а пунктиром показана частотная характеристика оптимальной системы. В данном случае фильтрация проходит без помех и на выходе системы воспроизводится в точности полезный сигнал $s(t)$

Более интересный случай, когда кривые $S_s(\omega)$ и $S_n(\omega)$ перекрываются, показан на рис. 11.17, б. На тех участках спектра, где $S_s(\omega) > 0$, а $S_n(\omega) = 0$, величина $W(j\omega) = 1$. Там же, где и сигнал и помеха отличны от нуля,

величина $W(j\omega)$ меньше единицы и уменьшается по мере уменьшения отношения мощности сигнала к мощности помехи на заданном участке спектра. Поэтому участки спектра, где отношение мощностей сигнала и помехи более благоприятно для сигнала, лучше пропускаются, чем те участки спектра, где это отношение менее благоприятно.

Вернемся к задаче определения статистически оптимальной системы II типа, которая дает оптимальное значение $X(t)$ не с запаздыванием, а именно в текущий момент времени t . Такая система не может учитывать входные сигналы, которые появятся в будущем; она использует лишь информацию, пришедшую в интервале времени от $-\infty$ до текущего момента t . Поэтому значение $X(t)$ будет определяться системой II типа с большей погрешностью, чем это делала система I типа, но зато своевременно.

Решение уравнения Винера — Хопфа с учетом условия (12) весьма громоздко.

Дадим, следуя Г. Боду и К. Шэннону, нестрогий вывод формулы для оптимального комплексного коэффициента передачи системы II типа, опираясь на выведенную ранее формулу (44) для системы I типа.

Прежде всего отметим, что значительный класс случайных функций $Y(t)$ может рассматриваться как результат преобразования белого шума некоторой линейной системой. Допустим (такое допущение для большого класса функций $S_Y(\omega)$ справедливо), что $S_Y(\omega)$ может быть выражено в виде квадрата модуля некоторой функции $\psi(j\omega)$:

$$S_Y(\omega) = |\psi(j\omega)|^2 \cdot 1. \quad (46)$$

Тогда можно предположить, что $Y(t)$ есть результат преобразования белого шума со спектральной плотностью $S_0(\omega) = 1$ линейной системой с комплексным коэффициентом передачи $\psi(j\omega)$. В этом случае спектральная плотность выходного сигнала $Y(t)$ этой системы как раз равняется $S_Y(\omega)$. Выходной сигнал $Y(t)$ в общем случае уже не является белым шумом; его значения $Y(t)$ и $Y(t + \tau)$ коррелированы друг с другом, так как бесконечно короткий импульс, появившийся в момент t на входе, вызовет переходный процесс в системе, «следы» которого скажутся на ее выходе и в момент $(t + \tau)$.

Формулу (46) можно переписать в виде

$$S_Y(\omega) = |\psi(j\omega)|^2 = \psi(j\omega) \psi^*(j\omega), \quad (47)$$

где $\psi^*(j\omega)$ — комплексная функция, сопряженная с $\psi(j\omega)$. Допустим, что $S_Y(\omega)$ относится к классу дробно-рациональных функций ω , у которых полюсы (т. е. корни знаменателя, обращающие в бесконечность выражение $S_Y(\omega)$) расположены парами, симметричными относительно действительной оси. Например, функции

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{(a + j\omega)(a - j\omega)}, \quad (48)$$

где $a > 0$, имеет полюсы $\omega = \pm ja$, один из которых расположен в верхней, а другой — в нижней полуплоскости комплексного переменного. Можно доказать, что физически реализуема лишь такая система, для которой комплексный коэффициент передачи $\psi(j\omega)$ имеет полюсы в верхней полуплоскости. Будем считать, что такое условие для $\psi(j\omega)$ соблюдено. В таком случае сопряженная функция $\psi^*(j\omega)$ будет иметь полюсы в нижней полуплоскости. Для примера (48) нужно, очевидно, положить

$$\psi(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + j \frac{\omega}{a}}, \quad (49)$$

$$\psi^*(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega}. \quad (50)$$

Из формулы (49) видно, что $\psi(j\omega)$ представляет собой комплексный коэффициент передачи инерционного звена с коэффициентом усиления $k = 1/a$ и постоянной времени $T = 1/a$. Разумеется, такое звено физически реализуемо.

Рассмотрим теперь систему с комплексным коэффициентом передачи (44). Так как эта система физически не реализуема, то обозначим ее комплексный коэффициент передачи $W_H(j\omega)$ («н» — нереализуемая):

$$W_H(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)} e^{j\omega\alpha} = \frac{S_s(\omega)}{S_Y(\omega)} e^{j\omega\alpha}. \tag{51}$$

На вход этой системы должен подаваться сигнал $Y(t)$ со спектральной функцией $S_Y(\omega)$ (см. (39)). Этот сигнал, согласно изложенному выше, может

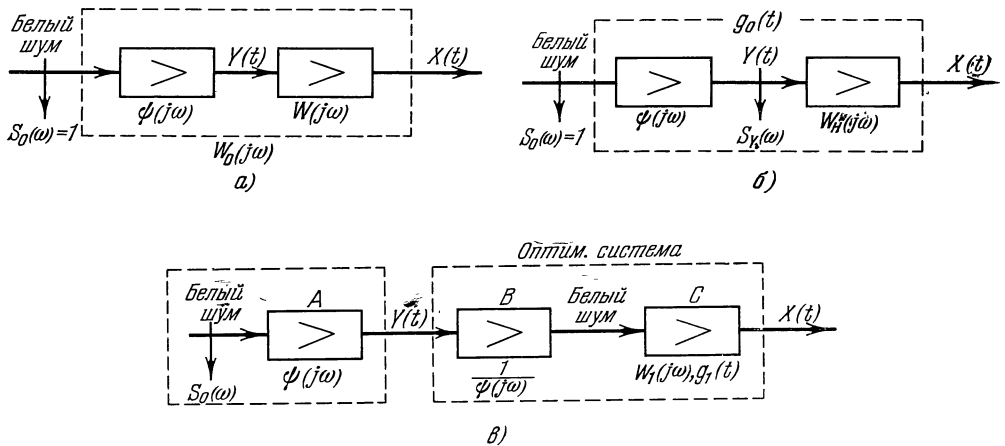


Рис. 11.18.

рассматриваться как выходной сигнал системы с комплексным коэффициентом передачи $\psi(j\omega)$, на вход которой поступает белый шум.

На рис. 11.18, а показана схема, в которой учтены обе системы. Комплексный коэффициент передачи $W_0(j\omega)$ всей этой системы (которая в целом физически не реализуема) имеет вид

$$\begin{aligned} W_0(j\omega) &= \psi(j\omega) W_H(j\omega) = \psi(j\omega) \frac{S_s(\omega)}{S_Y(\omega)} e^{j\omega\alpha} = \\ &= \psi(j\omega) \frac{S_s(\omega)}{\psi(j\omega)\psi^*(j\omega)} e^{j\omega\alpha} = \frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega\alpha}. \end{aligned} \tag{52}$$

Функция веса $g_0(t)$ для этой системы представляет собой оригинал преобразования Фурье от $W_0(j\omega)$:

$$g_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega(t+\alpha)} d\omega. \tag{53}$$

Эта функция не соответствует физически реализуемой системе; $g_0(t)$, вообще говоря, отличается от нуля при $t < 0$. Поэтому схема на рис. 11.18 при подсчете выходной величины для момента времени t_1 учитывает и те входные импульсы белого шума, которые появляются в моменты $t > t_1$.

Будем рассуждать теперь следующим образом. Так как схема на рис. 11.18 является оптимальной, то она производит обработку входящей в нее информации — импульсов белого шума — наилучшим образом. Так

как для линейной системы справедлив принцип суперпозиции, то результаты преобразования системой различных импульсов независимы друг от друга. Далее, физически реализуемая система может производить указанным способом лишь обработку импульсов, пришедших до данного момента времени. Импульсы белого шума не коррелированы, и о будущих импульсах абсолютно ничего предсказать нельзя. Их среднее значение равно нулю. Поэтому та часть выходного сигнала, которая представляет собой реакцию системы в данный момент t на импульсы, поступающие на вход в будущем, должна быть отброшена, т. е. принята равной нулю. Действительная весовая функция $g_1(t)$ физически реализуемой системы должна быть равна $g_0(t)$ для прошедших импульсов, т. е. при $t > 0$, и должна быть равна нулю для будущих импульсов, т. е. при $t < 0$:

$$g_1(t) = \begin{cases} g_0(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (54)$$

Соответствующий ей комплексный коэффициент передачи физически реализуемой системы подсчитывается по формуле

$$\begin{aligned} W_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} g_0(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega(t+\alpha)} d\omega \right] dt. \end{aligned} \quad (55)$$

Мы нашли пока лишь оптимальный коэффициент передачи для всей физически реализуемой системы (рис. 11.18, а), преобразующей белый шум в величину $X(t)$ на выходе. Эта система должна состоять из последовательно соединенных систем с коэффициентами передачи $\psi(j\omega)$ и $W(j\omega)$. Здесь $W(j\omega)$ — искомый коэффициент передачи оптимальной системы, на вход которой поступает сигнал $Y(t)$, а на выходе получается $X(t)$. Из схемы рис. 11.18, а следует

$$W_1(j\omega) = \psi(j\omega) W(j\omega), \quad (56)$$

откуда

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{1}{2\pi \cdot \psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega(t+\alpha)} d\omega \right] dt. \quad (57)$$

Так как $W_1(j\omega)$ и $\psi(j\omega)$ — комплексные коэффициенты передачи физически реализуемых систем, то и $W(j\omega)$ соответствует физически реализуемой системе. Функция веса $g(t)$ этой системы получается из формулы

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (58)$$

Это и есть решение уравнения Винера — Хопфа, удовлетворяющее условию физической реализуемости (12). Строгий вывод, проведенный впервые Н. Винером, приводит к той же формуле (57) для $W(j\omega)$.

Решение задачи оптимального синтеза для случая, когда помеха и полезный сигнал приложены в различных точках системы, можно найти в литературе к данной главе, указанной в конце книги.

§ 7. Задачи упреждения и сглаживания

Рассмотрим задачу чистого упреждения, когда шум $n(t)$ отсутствует и на выходе оптимальной системы требуется в момент t определять будущее значение $s(t + \alpha)$ входного сигнала ($\alpha > 0$). Таким образом, идеальное значение $X_0(t)$ выхода характеризуется формулой (38) § 6. Комплексный коэффициент передачи оптимальной системы чистого упреждения может быть найден как частный случай из выражения (57) § 6. Однако интерес представляет и непосредственное получение соответствующей формулы из физических соображений. При этом вскрывается физический смысл того прогноза будущего поведения стационарного случайного процесса, который можно осуществить в момент времени t .

Пользуясь методом Г. Бодэ и К. Шэннона, можно представить сигнал $Y(t)$ как выход системы с комплексным коэффициентом передачи $\psi(j\omega)$, на вход которой действует белый шум. В момент времени $(t + \alpha)$ выходной сигнал $Y(t + \alpha)$ будет состоять из двух слагаемых принципиально различного характера.

1. Импульсы белого шума, пришедшие в предыдущие моменты времени τ , где $\tau < t$, обусловят отклонение системы с коэффициентом передачи $\psi(j\omega)$ в момент t от положения покоя. Если бы даже при $\tau > t$ приход импульсов белого шума прекратился, то переходный процесс в этой системе будет продолжаться и на выходе появится сигнал $Y(t)$, затухающий со временем (ибо система устойчива). Этот процесс обуславливает первое слагаемое величины $Y(t + \alpha)$.

2. Импульсы белого шума, которые придут на вход системы в интервале $t < \tau < t + \alpha$, создадут второе слагаемое величины $Y(t + \alpha)$. Так как положительные и отрицательные значения этих импульсов равновероятны, то математическое ожидание второго слагаемого равно нулю.

Первое из этих слагаемых вполне предсказуемо, если мы знаем состояние системы с коэффициентом передачи $\psi(j\omega)$ в момент $t = 0$. Второе слагаемое в момент времени t совершенно не может быть предсказано, его математическое ожидание равно нулю, и это слагаемое при прогнозе не учитывается.

Первое слагаемое может быть интерпретировано следующим образом. Найдем реакцию на выходе системы $\psi(j\omega)$, создаваемую импульсом белого шума $b_i \delta(t - \tau_i)$, где $\delta(t)$ — единичная импульсная функция. Этот импульс приходит в момент времени $\tau_i < t$. Реакция на него в момент времени t равна $b_i g(t - \tau_i)$, где $g(t)$ — функция веса системы, являющаяся оригиналом преобразования Фурье с изображением от $\psi(j\omega)$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1)$$

В момент времени $(t + \alpha)$ эта реакция равна $b_i g(t + \alpha - \tau_i)$. Общая реакция на все импульсы белого шума, приходившие при $\tau_i < t$, равна

$$Y(t + \alpha) = \sum_i b_i g(t + \alpha - \tau_i), \quad (2)$$

где суммирование распространяется на все $\tau_i < t$. Именно $Y(t + \alpha)$ и является тем первым слагаемым общего сигнала, которое только и можно предсказать. Поэтому следует написать

$$X(t) = \sum_i b_i g(t + \alpha - \tau_i), \quad (3)$$

где $X(t)$ — выход оптимальной системы упреждения; суммирование по-прежнему распространяется здесь только на значения τ_i , меньшие t .

Допустим, что мы располагаем импульсами белого шума, поступающими на вход системы $\psi(j\omega)$, и подаем их на некоторую систему с весовой функцией $f_1(t)$. Тогда на выходе этой системы получаем реакцию

$$\sum_i b_i f_1(t - \tau_i). \quad (4)$$

Чтобы эта реакция была равна правой части (3), необходимо удовлетворить условию

$$f_1(t - \tau_i) = g(t + \alpha - \tau_i) \quad (5)$$

для всех $\tau_i < t$; если система с весовой функцией $f_1(t)$ физически реализуема, то $f_1(t - \tau_i) = 0$ при $\tau_i > t$. Итак,

$$f_1(t) = \begin{cases} g(t + \alpha) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Это — весовая функция оптимального фильтра, на вход которого необходимо подавать тот самый белый шум, который поступает на вход системы $\psi(j\omega)$. Однако в действительности мы располагаем лишь сигналом $Y(t)$ — выходом системы $\psi(j\omega)$. Как получить входной сигнал этой системы? Чтобы получить белый шум, необходимо провести сигнал $Y(t)$ через систему с комплексным коэффициентом передачи $[\psi(j\omega)]^{-1}$ (см. рис. 11.18, е). Действительно, последовательное соединение блоков A и B на рис. 11.18, е имеет комплексный коэффициент усиления

$$\psi(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} = 1.$$

Поэтому на выходе блока B получается тот же белый шум, который поступает на вход блока A . Этот белый шум подается на блок C с комплексным коэффициентом передачи $W_1(j\omega)$ и весовой функцией $f_1(t)$ (см. (6)). Таким образом, система оптимального прогноза представляет собой последовательно соединенные блоки B и C . Общий комплексный коэффициент передачи оптимальной системы выражается формулой

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{W_1(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{1}{\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} g(t + \alpha) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega(t+\alpha)} d\omega \right] e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Эту же формулу можно получить из выражения (57) § 6. Действительно, в данном случае $n(t) = 0$ и

$$S_Y(\omega) = S_s(\omega) = \psi(j\omega) \psi^*(j\omega), \quad (8)$$

откуда следует

$$\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \psi(j\omega). \quad (9)$$

Подставив это выражение в равенство (57) § 6, приходим к формуле (7). Рассмотрим пример. Пусть спектральная плотность сигнала

$$S_s(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{(a + j\omega)(a - j\omega)}. \quad (10)$$

Тогда комплексный коэффициент передачи системы выражается формулой (49) § 6:

$$\psi(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad (11)$$

а соответствующая функция веса есть весовая функция инерционного звена с коэффициентом усиления $k = 1/a$ и постоянной времени $T = \frac{1}{a}$:

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} = e^{-at}. \tag{12}$$

Тогда

$$f_1(t) = \begin{cases} g(t + \alpha) = e^{-a(t+\alpha)} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} W_1(j\omega) &= \int_0^\infty f_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-a(t+\alpha)} e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{-a\alpha} \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{e^{-a\alpha}}{a+j\omega}. \end{aligned} \tag{14}$$

Итак, согласно (7),

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{\psi(j\omega)} = (a+j\omega) \frac{e^{-a\alpha}}{a+j\omega} = e^{-a\alpha}. \tag{15}$$

Таким образом, оптимальная система представляет собой в данном случае просто аттенуатор с коэффициентом усиления $e^{-a\alpha}$, меньшим единицы. Эту формулу можно было бы найти без всяких выкладок. Действительно, пусть в момент t на выходе инерционного звена с комплексным коэффициентом передачи (11) в результате прихода импульсов белого шума в моменты τ_i , предшествующие t , оказалась выходная величина $Y(t)$. Прогноз величины Y (см. (2)) производится в предположении, что после момента t импульсы белого шума перестали поступать. Следовательно, в уравнении инерционного звена правая часть в моменты, большие t , равна нулю, т. е.

$$T \frac{dY}{dt} + Y = 0. \tag{16}$$

Решение этого уравнения для момента $(t + \alpha)$ имеет вид

$$Y(t + \alpha) = Y(t) e^{-\frac{\alpha}{T}} = Y(t) e^{-a\alpha}. \tag{17}$$

Итак, чтобы узнать прогнозируемую величину $Y(t + \alpha)$, нужно пропустить $Y(t)$ через аттенуатор с коэффициентом усиления $e^{-a\alpha} < 1$.

Рассмотрим еще один пример. Найти передаточную функцию оптимальной системы упреждения, если спектральная плотность сигнала

$$S_s(\omega) = \frac{36}{(1 + \omega^2)(36 + \omega^2)}, \tag{18}$$

а время упреждения $\alpha = 1/6$ сек.

Полагая

$$S_s(\omega) = \psi(j\omega) \psi^*(j\omega), \tag{19}$$

находим из (18)

$$S_Y(\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)(6+j\omega)} \cdot \frac{6}{(1-j\omega)(6-j\omega)}, \tag{20}$$

откуда

$$\psi(j\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)(6+j\omega)}. \tag{21}$$

Определяем весовую функцию $g(t)$ (см. (1)), соответствующую комплексному коэффициенту передачи $\psi(j\omega)$ или передаточной функции $\psi(p)$,

$$\psi(p) = \frac{6}{(1+p)(6+p)}. \tag{22}$$

Находим оригинал по Лапласу от $\psi(p)$:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{6}{5}(e^{-t} - e^{-6t}) & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Теперь можно определить функцию $f_1(t)$ (см. (6)):

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ g(t + \alpha) = \frac{6}{5} \left[e^{-(t+\frac{1}{6})} - e^{-6(t+\frac{1}{6})} \right] = 1,016(e^{-t} - 0,435e^{-6t}) & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Функция $g(t)$ изображена на рис. 11.19, а функция $f_1(t)$ — на рис. 11.20.

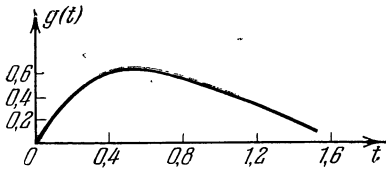


Рис. 11.19.

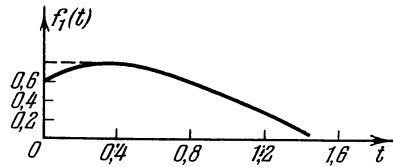


Рис. 11.20.

Передаточную функцию $W_1(p)$ найдем как изображение по Лапласу от $f_1(t)$:

$$W_1(p) = 1,016 \left(\frac{1}{p+1} - \frac{0,435}{p+6} \right) = 5,65 \frac{0,1015p+1}{(p+1)(p+6)}. \quad (25)$$

Общая передаточная функция оптимальной системы упреждения находится по формуле (7), куда следует подставить $W_1(p)$ и $\psi(p)$ из (25) и (21):

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{W_1(p)}{\psi(p)} = \\ &= 5,65 \frac{0,1015p+1}{(p+1)(p+6)} \frac{(1+p)(6+p)}{6} = \\ &= 0,942(1+0,1015p). \end{aligned} \quad (26)$$

Из этой формулы видно, что структурная схема системы представляет собой параллельное соединение усилительного и дифференцирующего звеньев, т. е. форсирующее звено (рис. 11.21).

Рассмотрим теперь задачу сглаживания. Когда требуется лишь сглаживание, а не упреждение, то $\alpha = 0$ и из формулы (26) находим

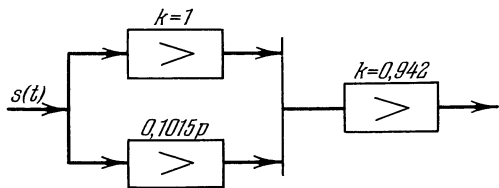


Рис. 11.21.

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \right] dt \right\}. \quad (27)$$

Если бы выражение

$$\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \quad (28)$$

было Фурье-изображением физически реализуемой весовой функции $g'(t)$, то можно было бы рассуждать так. Операция в квадратной скобке позволяет получить оригинал $g'(t)$ из изображения. Операция интегрирования по

t от 0 до ∞ с умножением на $e^{-j\omega t}$ переводит оригинал обратно в изображение. Так как $g'(t) = 0$ при $t < 0$, то последняя операция может рассматриваться и как интегрирование по t от $-\infty$ до ∞ ; следовательно, она является получением изображения из оригинала. Таким образом, обе операции взаимно скомпенсировали бы друг друга, и $W_1(j\omega)$ было бы равно выражению (28). В действительности, однако, это выражение не является фурье-изображением физически реализуемой весовой функции. Для широкого класса задач можно представить это выражение в следующем виде:

$$\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \left[\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \right]_+ + \left[\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \right]_- \quad (29)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой функцию с полюсами в верхней полуплоскости. Поэтому оно является Фурье-изображением физически реализуемой функции $g'(t)$, равной нулю при $t < 0$. Второе слагаемое имеет полюсы только в нижней полуплоскости. Можно доказать, что оно является Фурье-изображением такой функции $g''(t)$, которая равна нулю при $t > 0$. Но в таком случае операция в квадратной скобке (29) переводит второе слагаемое (29) в оригинал $g''(t)$, а следующая операция (27) — в фигурной скобке — дает нуль, так как $g''(t) = 0$ при $t > 0$. Поэтому если подставить сумму (29) в формулу (27), то первое слагаемое (29) после двух преобразований окажется равным первоначальному выражению, а второе обратится в нуль. Итак,

$$W_1(j\omega) = \left[\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \right]_+ \quad (30)$$

и формула для $W(j\omega)$ принимает вид

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \right]_+ \quad (31)$$

Сравним это выражение с формулой (51) § 6 для системы с бесконечным запаздыванием (системы I типа). Учитывая равенство (47) § 6, можно переписать выражение (51) § 6 в следующем виде, положив в данном случае $\alpha = 0$:

$$W_n(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \right] \quad (32)$$

Сравнение формул (31) и (32) показывает, что в системе II типа используется лишь физически реализуемая часть выражения (28), в то время как в системе I типа используется все это выражение. Решение (57) § 6 более общей задачи аналогичным способом сводится к формуле типа (31), отличающейся от этой формулы лишь множителем $e^{j\omega\alpha}$ внутри квадратной скобки.

Рассмотрим пример. Пусть $S_s(\omega)$ выражается формулой (10). Далее, пусть имеем белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = c^2 \quad (33)$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\Sigma}(\omega) &= S_s(\omega) + S_n(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2} + c^2 = \\ &= \frac{1 + a^2c^2 + c^2\omega^2}{a^2 + \omega^2} = \frac{(\sqrt{1 + a^2c^2} + jc\omega)(\sqrt{1 + a^2c^2} - jc\omega)}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \psi(j\omega)\psi^*(j\omega), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\psi(j\omega) = \frac{\sqrt{1 + a^2c^2} + jc\omega}{a + j\omega} \quad (35)$$

и

$$\psi^*(j\omega) = \frac{\sqrt{1 + a^2c^2} - jc\omega}{a - j\omega} \quad (36)$$

Функция $\psi(j\omega)$ выбрана так, чтобы не только полюс $\omega = ja$, но и нуль ее $\omega = j \frac{\sqrt{1+a^2c^2}}{c}$ находился в верхней полуплоскости. Система с таким комплексным коэффициентом передачи, как известно, называется минимально-фазовой. Поэтому для нее обратная функция $[\psi(j\omega)]^{-1}$ является комплексным коэффициентом передачи физически реализуемой системы.

Выражение (28) для данного примера принимает вид

$$\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \frac{1}{(a+j\omega)(a-j\omega)} \cdot \frac{a-j\omega}{\sqrt{1+a^2c^2}-j\omega} = \frac{1}{(a+j\omega)[\sqrt{1+a^2c^2}-j\omega]}. \quad (37)$$

Теперь представляем это выражение в виде суммы с пока еще неопределенными коэффициентами A и B :

$$\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{\sqrt{1+a^2c^2}-j\omega} = \frac{A\sqrt{1+a^2c^2}-jA\omega + Ba + Bj\omega}{(a+j\omega)[\sqrt{1+a^2c^2}-j\omega]}. \quad (38)$$

Из сравнения правых частей (37) и (38) получаем два уравнения для определения A и B :

$$\left. \begin{aligned} A\sqrt{1+a^2c^2} + Ba &= 1, \\ B - Ac &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2c^2} + ac}, \\ B &= \frac{c}{\sqrt{1+a^2c^2} + ac}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Подставляя (40) в формулу (38), приходим к выражению

$$\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} = \frac{1}{[\sqrt{1+a^2c^2} + ac](a+j\omega)} + \frac{c}{[\sqrt{1+a^2c^2} + ac][\sqrt{1+a^2c^2} - j\omega]}. \quad (41)$$

Первое слагаемое этого выражения представляет собой функцию с полюсом a_j в верхней полуплоскости и, следовательно, соответствует первому слагаемому формулы (29). Второе слагаемое имеет полюс в нижней полуплоскости и поэтому должно быть отброшено. Итак,

$$\left[\frac{S_s(\omega)}{\psi^*(j\omega)} \right]_+ = \frac{1}{[\sqrt{1+a^2c^2} + ac](a+j\omega)}. \quad (42)$$

Подставляя выражения (35) и (42) в формулу (31), находим комплексный коэффициент передачи оптимальной системы

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{a+j\omega}{[\sqrt{1+a^2c^2} + j\omega c]} \frac{1}{[\sqrt{1+a^2c^2} + ac](a+j\omega)} = \\ &= \frac{1}{[\sqrt{1+a^2c^2} + ac] \left[1 + j \frac{c\omega}{\sqrt{1+a^2c^2}} \right]} \frac{1}{\sqrt{1+a^2c^2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Следовательно, оптимальная система в данном случае представляет собой инерционное звено с параметрами

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{1+a^2c^2+ac} \frac{1}{\sqrt{1+a^2c^2}}, \\ T &= \frac{c}{\sqrt{1+a^2c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

§ 8. Преобразование случайных сигналов безынерционными нелинейными звеньями

Во многих системах связи и управления встречаются звенья, у которых зависимость между выходной величиной Y и входной величиной X описывается нелинейной функцией φ :

$$Y = \varphi(X). \quad (1)$$

В звене с уравнением (1) мгновенное значение Y в какой-либо момент времени t определяется только мгновенным значением входной величины X в тот же самый момент времени. Поэтому такое звено является безынерционным. Уравнение (1) описывает нелинейный преобразователь с одним входом.

Если $X(t)$ — случайный процесс, то и $Y(t)$ будет случайным процессом. В некоторый момент t_1 значение $X(t_1)$ представляет собой случайную величину. Значение случайной величины $Y(t_1)$ определяется значением $X(t_1)$. Поэтому, зная вероятностное распределение для X в некоторый момент времени, можно найти для этого момента времени и вероятностное распределение для Y .

Общая методика определения закона вероятностного распределения для Y при известном вероятностном распределении для X по идее весьма проста.

Пусть $F_1(x)$ — функция распределения случайной величины и $P_1(x)$ — соответственно плотность распределения этой величины. Требуется найти плотность распределения $P_2(y)$ и функцию распределения $F_2(y)$ случайной величины Y , связанной с X зависимостью (1).

Предположим сначала, что формула (1) задает однозначную монотонную прямую (т. е. чем больше X , тем больше Y) зависимость между X и Y , т. е. существует однозначная монотонная прямая зависимость. Обратную зависимость Y от X мы будем обозначать так:

$$X = \varphi^{-1}(Y). \quad (2)$$

Тогда распределение величины Y будет равно

$$F_2(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = F_1(\varphi^{-1}(y)), \quad (3)$$

где величина $P(Z < z)$ означает вероятность того, что случайная величина Z меньше z .

Итак,

$$F_2(y) = F_1(\varphi^{-1}(y)). \quad (4)$$

Дифференцируя равенство (4) по y как сложную функцию, получим выражение для плотности вероятности $P_2(y)$:

$$F_2'(y) = F_1'(\varphi^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}. \quad (5)$$

Итак,

$$P_2(y) = P_1(\varphi^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}. \quad (6)$$

Например, на вход нелинейного преобразователя с экспоненциальной характеристикой

$$Y = e^X \quad (7)$$

действует случайная величина X с гауссовской плотностью распределения

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi x^2}. \quad (8)$$

Тогда из (7) находим

$$x = \ln y \quad \text{для} \quad y > 0.$$

Далее, по формуле (6) имеем (так как $y' = e^x$)

$$P_2(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(\ln y)^2} \cdot \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} y} \cdot \frac{1}{(e^{\ln y})^{\ln y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} y} y^{-\ln y} \quad \text{при } y > 0. \quad (9)$$

Из (7) также видно, что вероятность Y быть меньше нуля равна нулю (вероятность невозможного события равна нулю). Итак, окончательно

$$P_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi} y} y^{-\ln y} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Несколько иначе обстоит дело в случае неоднозначной обратной зависимости (2). В этом случае мы не можем просто написать, как в (3), что

$$p(\varphi(X) < y) = p(X < \varphi^{-1}(y)). \quad (11)$$

Здесь из условия, что $\varphi(X) < y$, вообще говоря, не следует, что $X < \varphi^{-1}(y)$.

Мы не будем останавливаться на общем случае, а выведем закон распределения $P_2(y)$ и плотность $P_2(y)$ в случае, когда $\varphi(X) = aX^2$, т. е.

$$Y = aX^2. \quad (12)$$

Положим для простоты $a = 1$.

В этом случае условие $\varphi(X) < y$ эквивалентно условиям $-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}$ ($\sqrt{y} \geq 0$). Поэтому, предполагая непрерывность $P_1(y)$, получим

$$\begin{aligned} F_2(y) &= p(\varphi(X) < y) = p(X^2 < y) = p(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \\ &= F_1(\sqrt{y}) - F_1(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Искомая плотность $P_2(y)$ ($y > 0$) находится простым дифференцированием:

$$F_2'(y) = \frac{d}{dy} [F_1(\sqrt{y}) - F_1(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{y}} P_1(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} P_1(-\sqrt{y}), \quad y \geq 0. \quad (13)$$

Очевидно, при $y < 0$ имеем $F_2(y) \equiv 0$.

Весьма часто представляет интерес определение среднего значения m_Y выходной величины у нелинейного звена, а также определение среднеквадратичного значения $\sqrt{m_Y^2}$ или дисперсии D_Y величины Y . Хотя средние значения не полностью характеризуют закон вероятностного распределения, но их величины часто требуется знать в практических применениях.

Очевидно,

$$m_Y = M\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} yP(y) dy. \quad (14)$$

Так как $Y = \varphi(X)$, то можно записать это выражение еще и следующим образом:

$$m_Y = M\{\varphi(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)P(x) dx. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) дают один и тот же результат. Можно применять ту или иную из них в зависимости от простоты и удобства получения решения.

Среднеквадратичное значение $\sqrt{\bar{y}}$ определяется при помощи формулы

$$\bar{y} = M \{Y^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 P(y) dy. \quad (16)$$

Можно пользоваться и эквивалентным выражением

$$\bar{y} = M \{[\varphi(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 P(x) dx. \quad (17)$$

Наконец, дисперсия D_Y определяется из формулы

$$\begin{aligned} D_Y &= M \{(Y - m_Y)^2\} = M \{Y^2 - 2m_Y Y + (m_Y)^2\} = \\ &= M \{Y^2\} - 2m_Y M \{Y\} + m_Y^2 = M \{Y^2\} - 2m_Y^2 + m_Y^2 = \\ &= M \{Y^2\} - m_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 P(y) dy - m_Y^2 = \bar{y} - m_Y^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Большой интерес представляет также и более сложная характеристика случайного процесса $Y(t)$, его автокорреляционная функция $K_Y(\tau)$, а также ее Фурье-изображение — спектральная плотность $S_Y(\omega)$. Ниже принято, что все случайные процессы стационарные и эргодические; поэтому средние по множеству совпадают со средними по времени. Например,

$$K_Y(\tau) = M \{Y(t) Y(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) Y(t + \tau) dt. \quad (19)$$

В отличие от линейных звеньев для нелинейного звена, вообще говоря, невозможно вычислить $K_Y(\tau)$, зная лишь автокорреляционную функцию $K_X(\tau)$ входной величины X . Из этого следует также, что невозможно узнать $S_Y(\omega)$, зная лишь спектральную плотность $S_X(\omega)$ входной величины. Действительно,

$$\begin{aligned} K_Y(\tau) &= M \{Y(t) Y(t + \tau)\} = M \{\varphi[X(t)] \varphi[X(t + \tau)]\} = \\ &= M \{\varphi(X_1) \varphi(X_2)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(x_1) \varphi(x_2) w_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $w_2(x_1, x_2, \tau)$ — вторая функция плотности вероятности. Отсюда видно, что вычислить $K_Y(\tau)$ можно в общем случае лишь тогда, когда известна функция w_2 . Однако в частном случае так называемого гауссова или нормального случайного процесса можно вычислить функцию w_2 по известной автокорреляционной функции $K_X(\tau)$. Как известно из теории вероятностей, гауссовым процессом называется такой случайный процесс, у которого все функции w_i являются нормальными распределениями. В теории вероятностей доказано, что любая плотность вероятности и, в частности, функция w_2 для гауссова процесса может быть выражена через автокорреляционную функцию $K_X(\tau)$ этого процесса. Обозначим среднеквадратичное значение процесса $X(t)$ буквой σ_X :

$$\sigma_X^2 = [K_X(\tau)]_{\tau=0}. \quad (21)$$

Пусть нормированная автокорреляционная функция для $x(t)$ обозначена $r_X(\tau)$:

$$r_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2}. \quad (22)$$

Тогда, как доказывается в теории вероятностей,

$$w_2(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2 \sqrt{1-r_X^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2r_X(\tau)x_1x_2}{2\sigma_X^2 [1-r_X^2(\tau)]} \right\}. \quad (23)$$

Рассмотрим квадратичный детектор, т. е. нелинейное звено с характеристикой

$$\varphi(X) = aX^2. \quad (24)$$

Подставим выражение (23) в формулу (20). Тогда автокорреляционная функция на выходе детектора равняется

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ax_1)^2 (ax_2)^2}{2\pi\sigma_X^2 \sqrt{1-r_X^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2r_X(\tau)x_1x_2}{2\sigma_X^2 [1-r_X^2(\tau)]} \right\} dx_1 dx_2. \quad (25)$$

Итак, в частном случае нормально распределенного входного сигнала автокорреляционная функция квадратичного детектора выходного сигнала может быть определена прямо по функции $K_X(\tau)$. Заметим, что σ_X также определяется из $K_X(\tau)$ (см. (21)).

Теперь найдем спектральную плотность $S_Y(\omega)$ выходного сигнала $Y(t)$:

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} a^2\sigma_X^4 e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} 2a^2 [K_X(\tau)]^2 e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (26)$$

Первое слагаемое представляет собой импульсную функцию $2\pi a^2\sigma_X^4\delta$. Во втором слагаемом желательно заменить $K_X(\tau)$ через спектральную плотность $S_X(\omega)$, чтобы получить непосредственную связь между спектральными плотностями входа и выхода звена. Для этого заменим один из двух сомножителей $K_X(\tau)$ в подынтегральной функции через спектральную плотность $S_X(\omega)$ согласно формуле

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega') e^{j\omega'\tau} d\omega'. \quad (27)$$

Здесь ω' — переменная интегрирования. Тогда интеграл во втором слагаемом формулы (26) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [K_X(\tau)]^2 e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} K_X(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega'=-\infty}^{\omega'=\infty} S_X(\omega') e^{j\omega'\tau} d\omega' \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'=-\infty}^{\omega'=\infty} S_X(\omega') \left[\int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} K_X(\tau) e^{-j(\omega-\omega')\tau} d\tau \right] d\omega'. \quad (28) \end{aligned}$$

Последнее преобразование состоит в изменении порядка интегрирования по τ и ω' . Выражение в квадратных скобках под интегралом (28) оказывается равным спектральной плотности S_X , взятой для аргумента $\omega - \omega'$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j(\omega-\omega')\tau} d\tau = S_X(\omega - \omega') = S_X(\omega' - \omega). \quad (29)$$

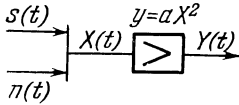
Последнее преобразование допустимо, поскольку спектральная плотность S_X — четная функция. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K_X(\tau)]^2 e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega') S_X(\omega' - \omega) d\omega', \quad (30)$$

а все выражение (26) может быть переписано в следующем виде:

$$S_Y(\omega) = 2\pi a^2 \sigma_X^4 \delta(\omega) + \frac{a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega') S_X(\omega' - \omega) d\omega'. \quad (31)$$

Теперь рассмотрим преобразование квадратичным детектором суммы независимых случайных сигналов. Пусть сигнал $X(t)$, поступающий на вход квадратичного детектора с нелинейной характеристикой (12), представляет собой сумму сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ (рис. 11.22):



$$X(t) = s(t) + n(t). \quad (32)$$

Рис. 11.22.

Допустим также, что как сигнал, так и шум представляют собой независимые стационарные случайные эргодические процессы, не содержащие постоянных составляющих. Последнее условие означает, что

$$M\{s(t)\} = 0, \quad M\{n(t)\} = 0. \quad (33)$$

Из (12) и (32) находим выходную величину $Y(t)$ квадратичного детектора $Y(t) = aX^2(t) = a[s(t) + n(t)]^2 = a[s^2(t) + 2s(t)n(t) + n^2(t)]$. (34)

Теперь определим среднее значение, или, иначе, математическое ожидание, выхода детектора

$$M\{Y(t)\} = a[M\{s^2(t)\} + 2M\{s(t)n(t)\} + M\{n^2(t)\}]. \quad (35)$$

Так как $s(t)$ и $n(t)$ независимы, то математическое ожидание их произведения, как известно из теории вероятностей, равно произведению их математических ожиданий. Учитывая (33), находим

$$M\{s(t)n(t)\} = M\{s(t)\}M\{n(t)\} = 0. \quad (36)$$

Поэтому

$$M\{Y(t)\} = a[M\{s^2(t)\} + M\{n^2(t)\}] = a[\sigma_s^2 + \sigma_n^2], \quad (37)$$

где σ_s^2 и σ_n^2 — дисперсии соответственно сигнала и шума:

$$\sigma_s^2 = M\{s^2(t)\}, \quad \sigma_n^2 = M\{n^2(t)\}. \quad (38)$$

Найдем, далее, среднеквадратичное значение $\sqrt{\bar{y}}$:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= M\{Y^2(t)\} = M\{a^2[s(t) + n(t)]^4\} = \\ &= a^2 M\{s^4(t) + n^4(t) + 6s^2(t)n^2(t) + \dots\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Остальные слагаемые можно не выписывать, так как их математическое ожидание равно нулю. Действительно, рассмотрим для примера один из членов с нечетными степенями сомножителей:

$$M\{2s^3(t)n(t)\} = 2M\{s^3(t)\}M\{n(t)\} = 0, \quad (40)$$

так как $M\{n(t)\} = 0$. Поэтому из (39) находим

$$\begin{aligned} \bar{y} &= M\{Y^2(t)\} = a^2 M\{s^4(t)\} + M\{n^4(t)\} + 6M\{s^2(t)\}M\{n^2(t)\} = \\ &= a^2 [M\{s^4\} + M\{n^4\} + 6\sigma_s^2\sigma_n^2]. \end{aligned} \quad (41)$$

Теперь определим автокорреляционную функцию выхода. Положим

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= Y_1, & Y(t+\tau) &= Y_2, \\ s(t) &= s_1, & s(t+\tau) &= s_2, \\ n(t) &= n_1, & n(t+\tau) &= n_2. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Тогда

$$Y_1 = a(s_1 + n_1)^2, \quad Y_2 = a(s_2 + n_2)^2. \quad (43)$$

Корреляционная функция Y определяется выражением

$$\begin{aligned} K_Y(\tau) &= M\{Y(t)Y(t+\tau)\} = M\{Y_1Y_2\} = M\{a(s_1+n_1)^2 a(s_2+n_2)^2\} = \\ &= a^2 M\{s_1^2 + 2s_1n_1 + n_1^2\} (s_2^2 + 2s_2n_2 + n_2^2) = a^2 M\{s_1^2s_2^2 + 2s_1n_1s_2^2 + \\ &+ n_1^2s_2^2 + 2s_1^2s_2n_2 + 4s_1s_2n_1n_2 + 2s_2n_1^2n_2 + s_1^2n_2^2 + 2s_1n_1n_2^2 + n_1^2n_2^2\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Второе, четвертое, шестое и восьмое слагаемые в скобках, подчеркнутые пунктиром, дают после усреднения нуль, так как какая-либо из величин s и n входит в эти слагаемые в первой степени. Например,

$$M\{2s_1n_1s_2^2\} = 2M\{n_1\} M\{s_1s_2^2\} = 0,$$

так как $M\{n_1\} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} K_Y(\tau) &= a^2 M\{s_1^2s_2^2\} + a^2 M\{n_1^2\} M\{s_2^2\} + \\ &+ 4a^2 M\{s_1s_2\} M\{n_1n_2\} + a^2 M\{s_1^2\} M\{n_2^2\} + a^2 M\{n_1^2n_2^2\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отдельные члены этого выражения уже встречались раньше. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} M\{n_1^2\} &= M\{n_2^2\} = \sigma_n^2, \\ M\{s_1^2\} &= M\{s_2^2\} = \sigma_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Далее, здесь фигурируют автокорреляционная функция сигнала $s(t)$

$$K_s(\tau) = M\{s_1s_2\} \quad (47)$$

и автокорреляционная функция шума $n(t)$

$$K_n(\tau) = M\{n_1n_2\}. \quad (48)$$

Введем также обозначение для автокорреляционной функции от квадрата сигнала

$$K_{s^2}(\tau) = M\{s_1^2s_2^2\} \quad (49)$$

и автокорреляционной функции от квадрата шума

$$K_{n^2}(\tau) = M\{n_1^2n_2^2\}. \quad (50)$$

Тогда выражение (45) можно переписать в следующем виде:

$$K_Y(\tau) = a^2 K_{s^2}(\tau) + 2a^2 \sigma_s^2 \sigma_n^2 + 4a^2 K_s(\tau) K_n(\tau) + a^2 K_{n^2}(\tau). \quad (51)$$

Это выражение включает в себя слагаемые трех различных типов. Первый тип слагаемых зависит лишь от сигнала, второй — лишь от шума и, наконец, третий зависит как от сигнала, так и от шума. Введем обозначение

$$K_{s \times s}(\tau) = a^2 K_{s^2}(\tau) \quad (52)$$

для части, зависящей только от сигнала, обозначение

$$K_{n \times n}(\tau) = a^2 K_{n^2}(\tau) \quad (53)$$

для части, зависящей только от шума, и, наконец, обозначение

$$K_{s \times n}(\tau) = 2a^2 \sigma_s^2 \sigma_n^2 + 4a^2 K_s(\tau) K_n(\tau) \quad (54)$$

для части, зависящей и от сигнала и от шума. Тогда

$$K_Y(\tau) = K_{s \times s}(\tau) + K_{s \times n}(\tau) + K_{n \times n}(\tau). \quad (55)$$

Слагаемое $K_{s \times n}(\tau)$, зависящее как от сигнала, так и от шума, иногда называется интерференционным членом. Наличие этого слагаемого является следствием нелинейности характеристики звена.

Спектральная плотность $S_Y(\omega)$ сигнала Y представляет собой Фурье-изображение от $K_Y(\tau)$. Поэтому

$$S_Y(\omega) = S_{s \times s}(\omega) + S_{s \times n}(\omega) + S_{n \times n}(\omega), \quad (56)$$

где $S_{s \times s}(\omega)$ есть изображение от $K_{s \times s}(\tau)$, $S_{s \times n}(\omega)$ — изображение от $K_{s \times n}(\tau)$ и, наконец, $S_{n \times n}(\omega)$ представляет собой изображение от $K_{n \times n}(\tau)$.

Когда сигнал $s(t)$ равен нулю, то $K_{s \times s}(\tau)$ и $K_{s \times n}(\tau)$ обращаются в нули и остается только $K_{n \times n}(\tau)$. Этот случай был рассмотрен в предыдущем пункте, результат которого можно, таким образом, использовать для вычисления функции $K_{n \times n}(\tau)$ и ее фурье-изображения $S_{n \times n}(\omega)$. Итак, формула (31) может служить для вычисления $S_{n \times n}(\omega)$, нужно лишь заменить в ней X на n :

$$S_{n \times n}(\omega) = 2\pi a^2 \sigma_n^4 \delta(\omega) + \frac{a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega') S_n(\omega' - \omega) d\omega'. \quad (57)$$

Здесь $S_n(\omega)$ — центральная плотность шума на входе квадратичного детектора.

§ 9. Преобразование случайных сигналов нелинейной системой с обратной связью

В предыдущем параграфе приведен пример исследования преобразования случайных сигналов разомкнутой нелинейной системой. Этот пример показывает, что изучение статистики нелинейных систем связано с гораздо более сложными выкладками, чем в линейной теории. Вычисления усложняются еще в большей мере, если перейти к рассмотрению замкнутых нелинейных систем. Действительно, на вход тракта замкнутой системы подается случайный сигнал с ее выхода. Вероятностные характеристики этого сигнала до расчета еще неизвестны. Между тем, чтобы узнать эти характеристики на выходе нелинейной системы, нужно сначала задать характеристики случайного сигнала на ее входе. В результате математической формулировки задачи получаются весьма сложные выражения. Точное решение задач в большинстве случаев невозможно; поэтому приходится прибегать к различным приближенным методам.

Наибольшее распространение получили методы статистической линеаризации, развитые советским ученым И. Е. Казаковым, американскими учеными Дж. Бутоном, Дж. С. Экселби и др. В этих методах нелинейное звено заменяется некоторым эквивалентным линейным звеном. Например, можно так осуществить замену, чтобы среднее значение и дисперсия выхода звена после замены остались без изменения. Можно подобрать характеристики линейного звена и так, чтобы среднеквадратичное значение погрешности, возникающей в результате замены, было минимальным. Ниже излагаются методы статистической линеаризации, предложенные И. Е. Казаковым.

Чаще всего при расчете задаются типом вероятностного распределения на входе X нелинейного звена. Обычно считают, что величина имеет нормальное распределение, на что зачастую имеются достаточно веские основания. Если, например, входной сигнал нелинейного звена предварительно проходит через линейные звенья со сравнительно узкой полосой пропускаемых частот, то его вероятностное распределение приближается к нормальному. Действительно, как видно из формулы свертки, мгновенное значение сигнала на выходе линейной системы представляет собой сумму большого числа слагаемых, зависящих от прошедших ранее значений на входе линейной

системы. Это — сумма большого числа сравнительно слабо связанных небольших слагаемых; из теории вероятностей известно, что вероятностное распределение такой суммы близко к нормальному. Чем уже полоса частот, пропускаемых системой, тем медленнее затухают в ней процессы, тем больше удельный вес прошедших значений в формуле свертки; тем больше, следовательно, число членов суммы, которые нужно принимать во внимание; тем ближе поэтому распределение выхода линейной системы к нормальному.

Имеет значение также и то обстоятельство, что результаты расчетов, получаемые в виде средних значений, обычно не очень резко зависят от типа распределения. Поэтому точное знание типа распределения на входе нелинейного звена часто не требуется. Впрочем, существуют и исключения из этого эмпирического правила; однако в технических расчетах они встречаются сравнительно редко.

Пусть зависимость между входом X и выходом Y нелинейного звена описывается функцией φ :

$$Y = \varphi(X). \tag{1}$$

Заменим случайную величину Y такой линейной функцией Z входной величины X , чтобы при этой замене математическое ожидание m_Y и дисперсия D_Y остались без изменения.

Положим

$$X = m_x + X', \tag{2}$$

где m_x — математическое ожидание величины X , а X' — составляющая X с математическим ожиданием (средним значением), равным нулю. Чтобы добиться большей гибкости и общности приближенного решения, представим себе, что среднее значение m_x и составляющая X' входа разветвляются по двум различным каналам (рис. 11.23) с коэффициентами усиления k_0 и k_1 соответственно. Тогда выходная величина Z эквивалентного линейного звена, являющаяся суммой выходов каналов, определяется из выражения

$$Z = k_0 m_x + k_1 X'. \tag{3}$$

Подберем k_0 и k_1 так, чтобы среднее значение m_Z и дисперсия D_Z величины Z были равны среднему m_Y и дисперсии D_Y выходной величины Y нелинейного звена, т. е.

$$m_Z = m_Y, \quad D_Z = D_Y. \tag{4}$$

Следует отметить, что канал k_0 на рис. 11.23 пропускает одну лишь среднюю составляющую и его коэффициент усиления вовсе не влияет на дисперсию выхода. Итак, k_0 — коэффициент усиления для средней составляющей (математического ожидания):

$$m_Z = k_0 m_x. \tag{5}$$

В свою очередь канал k_1 пропускает лишь составляющую X' с дисперсией D_X и с математическим ожиданием, равным нулю. Так как канал линейный, то и на его выходе математическое ожидание равно нулю. Между тем дисперсия D_Z величины Z обусловлена именно этим каналом:

$$D_Z = k_1^2 M\{X'\}^2 = k_1^2 D_X. \tag{6}$$

Подставим значения m_Z и D_Z из (5) и (6) в равенства (4). Получаем уравнения

$$k_0 m_x = m_Y, \quad k_1^2 D_X = D_Y, \tag{7}$$

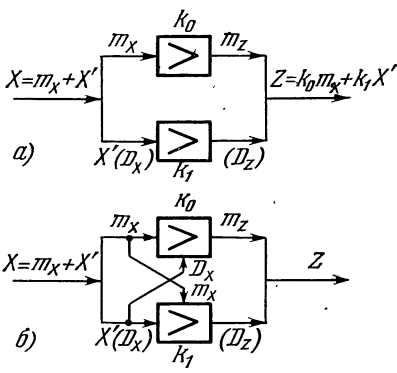


Рис. 11.23.

откуда находим искомые коэффициенты усиления

$$k_0 = \frac{m_Y}{m_X} \quad (8)$$

для среднего значения и

$$k_1 = \pm \sqrt{\frac{D_Y}{D_X}} = \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad (9)$$

для среднеквадратичного отклонения от среднего. Знак у k_1 следует выбрать тот же, что у производной функции $\varphi(X)$. Последняя обычно монотонна.

Формулы (8) и (9) дают возможность, зная $P(x)$ — плотность вероятности входной величины X , вычислить коэффициенты усиления k_0 и k_1 эквивалентной схемы рис. 11.23. Действительно, m_X и σ_X легко вычисляются очевидным образом по заданной функции $P(x)$. Аналогично можно вычислить m_Y и D_Y .

Если распределение величины X нормальное, то $P(x)$ полностью определяется значениями m_X и D_X . Отсюда следует, что в данном случае коэффициенты усиления k_0 и k_1 , которые в общем случае непостоянны, зависят лишь от m_X и D_X . Это символически изображено на рис. 11.23, где показано, что значение D_X влияет на коэффициент усиления k_0 , а значение m_X — на коэффициент усиления канала k_1 .

И. Е. Казаковым предложен и другой метод статистической линеаризации, который иногда оказывается удачнее первого. Можно так подобрать коэффициенты усиления k_0 и k_1 , чтобы среднеквадратичная погрешность от замены реального нелинейного звена эквивалентным линейным была минимальна. Итак, должно быть минимальным среднеквадратичное значение разности $(Z - Y)$, т. е.

$$F = M \{(Z - Y)^2\} = \min. \quad (10)$$

Подставим сюда выражение для Z , вытекающее из структуры схемы рис. 11.23, а.

$$Z = k_0 m_X + k_1 X'. \quad (11)$$

Тогда из (10) находим

$$\begin{aligned} F &= M \{(k_0 m_X + k_1 X' - Y)^2\} = \\ &= M \{k_0^2 m_X^2 + k_1^2 (X')^2 + Y^2 + 2k_0 m_X k_1 X' - 2k_0 m_X Y - 2k_1 X' Y\} = \min. \end{aligned} \quad (12)$$

Математическое ожидание от четвертого слагаемого в скобке равно нулю:

$$M \{2k_0 m_X k_1 X'\} = 2k_0 m_X k_1 M \{X'\} = 0. \quad (13)$$

Далее

$$M \{(X')^2\} = D_X, \quad M \{Y\} = m_Y. \quad (14)$$

Поэтому (12) можно переписать в следующем виде:

$$I = k_0^2 m_X^2 + k_1^2 D_X + M \{Y^2\} - 2k_0 m_X m_Y - 2k_1 M \{X' Y\} = \min. \quad (15)$$

Нужно так подобрать k_0 и k_1 , чтобы минимизировать величину I . Для определения значений k_0 и k_1 приравняем нулю частные производные

$$\frac{\partial I}{\partial k_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial k_1} = 0, \quad (16)$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} k_0 m_X^2 - m_X m_Y &= 0, \\ k_1 D_X - M \{X' Y\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{m_Y}{m_X}, \\ k_1 &= \frac{M\{X'Y\}}{D_X}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Первое из этих равенств совпадает с выражением (8). Следовательно, значение k_0 вычисляется одинаковым способом в указанных двух методах. Между тем значение k_1 , получаемое по второму методу, не совпадает с результатом (9) первого метода. Так как

$$M\{X'Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X) \varphi(x) P(x) dx, \quad (19)$$

то по второму методу получаем k_1 в виде

$$k_1 = \frac{1}{D_X} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X) \varphi(x) P(x) dx. \quad (20)$$

И. Е. Казаков рекомендует вычислять k_1 по первому и по второму методам, а затем брать среднее арифметическое от вычисленных значений и считать его окончательно выбранным значением k_1 .

Г л а в а XII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

§ 1. Количество информации

Важной характеристикой сигнала является количественная оценка той информации, которая в нем содержится. Для получения этой оценки рассмотрим понятие сигнала с общей точки зрения, принятой в современной теории связи.

По линии связи можно передавать различные сигналы, которые рассматриваются в виде элементов, принадлежащих некоторому множеству, иначе — ансамблю. Будем считать это множество конечным. Передача какого-либо

одного определенного сигнала означает выбор этого определенного сигнала из всего ансамбля возможных сигналов.

Пока этот выбор еще не произведен, возможна априорно передача любого из сигналов ансамбля. До прихода сигнала существует, таким образом, неопределенность, возможность поступления любого из сигналов. Приход определенного сигнала уничтожает эту неопределенность. Если ввести количественную меру неопределенности, имевшей место до прихода сигнала, то эту же величину можно принять за меру количества информации, содержащейся в пришедшем сигнале.

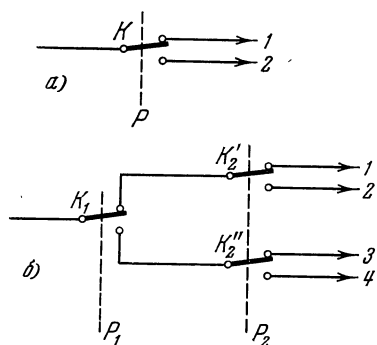


Рис. 12.1.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда элементами ансамбля являются два равновероятных сигнала, обозначенных номерами 1 и 2. Можно рассматривать этот случай как выбор между двумя равновероятными положениями переключателя K (рис. 12.1). Сигналом, определяющим такой выбор, может быть, например, наличие или отсутствие тока в обмотке реле P , контактом которого является K . Сигнал, производящий выбор между двумя одинаковыми возможностями, является простейшим. Поэтому естественно принять за единицу ту степень неопределенности, которая существовала до прихода этого сигнала, и, следовательно, то количество информации, которое содержит приходящий сигнал.

После приведенного выше определения единицы количества информации принципиально возможно определить количество информации, заключающейся в любом, сколь угодно сложном сигнале. Для этого нужно лишь представить сложную операцию выбора в виде совокупности (или последовательности) I элементарных операций выбора; каждая из этих элементарных операций представляет собой выбор только между двумя одинаковыми возможностями. Тогда I будет количеством информации, содержащимся в сигнале.

Рассмотрим сначала в качестве примера случай, когда ансамбль состоит из четырех ($m = 4$) равновероятных сигналов. Выбор одного из четырех вариантов можно произвести с помощью двух элементарных операций выбора. Действительно (рис. 12.1, б), достаточно двух команд, поданных на обмотки реле P_1 и P_2 с контактами соответственно K_1 и K'_2, K''_2 , чтобы выбрать любую из цепей 1, 2, 3, 4. Контакт K_1 выбирает одну из двух половин, т. е. либо пару цепей 1, 2, либо пару 3, 4. Кроме того, один из контактов K'_2, K''_2 переключаемых одновременно реле P_2 выбирает одну из цепей половины, избранной уже контактом K_1 . Два реле (P_1 и P_2) дают возможность осуществить $2^2 = 4$ возможные комбинации, т. е. выбрать одну из четырех цепей.

Пусть в общем случае число равновероятных элементов ансамбля равно m . Если произвести I элементарных операций выбора с помощью, например, I штук реле, то общее число возможных комбинаций состояний реле будет 2^I . Это число должно дать возможность выбрать любой элемент ансамбля. Следовательно, $2^I = m$, откуда

$$I = \log_2 m. \quad (1)$$

Эта формула дает число I элементарных операций выбора, эквивалентное посылке сигнала, выбирающего одну из m равновероятных возможностей. Следовательно, I — это количество информации, содержащееся в одном сигнале.

Пусть передается сложный сигнал, представляющий собой последовательность из n независимых друг от друга простых сигналов типа, описанного выше. Если каждый из этих сигналов несет с собой количество информации, выраженное формулой (1), то общее количество информации, переданное при посылке n сигналов, должно быть в n раз большим, т. е. в данном случае

$$I = n \log_2 m. \quad (2)$$

Действительно, если каждый сигнал может иметь одно из m равновероятных значений, то всего возможны m^n различных равновероятных последовательностей из n сигналов. Поэтому общее количество информации дается формулой (1), в которой теперь вместо m представлено m^n :

$$I = \log m^n = n \log_2 m. \quad (3)$$

Это выражение совпадает с (2).

К формуле (2) можно подойти также, исходя из следующих соображений: чем больше число m_1 , элементов ансамбля, тем больше и неопределенность, имеющая место до прихода сигнала. Следовательно, мерой неопределенности может служить какая-либо монотонная функция $f(m_1)$ числа элементов. Допустим, что сигналы передаются также по другой линии, причем здесь число элементов ансамбля равно m_2 , а мера неопределенности — $f(m_2)$. Тогда $f(m_1)$ представляет собой одновременно количество информации, передаваемое одним сигналом по первой линии передачи, а $f(m_2)$ — количество информации, передаваемое одним сигналом по второй линии.

Согласно смыслу понятия количества информации общее количество информации, переданное по обеим линиям двумя сигналами, равно $f(m_1) + f(m_2)$. С другой стороны, обе линии можно рассматривать как единую сложную систему передачи, а совокупность двух сигналов, переданных по двум линиям, — как один сложный сигнал. Общее количество таких сложных сигналов, соответствующее возможным комбинациям сигналов, передаваемых по каждой из линий, равно m_1, m_2 ; количество информации, которое несет один такой сложный сигнал, равно $f(m_1 m_2)$. Следовательно,

должно осуществляться равенство

$$f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2). \quad (4)$$

Этому равенству удовлетворяет логарифмическая функция, так как

$$\log(m_1 m_2) = \log m_1 + \log m_2.$$

Основание логарифма выбирается равным 2, так как $\log_2 2 = 1$, и выбор между двумя возможностями дает одну единицу информации. Эта единица в иностранной литературе часто называется «bit» (сокращение от «binary unit»).

Можно доказать, что логарифмическая функция является единственной монотонной функцией, удовлетворяющей условию (4), если $f(1) = 0$.

Проиллюстрируем формулу (2) примером. Пусть передается положение какой-либо фигуры на шахматной доске. Ее абсцисса выражается одним из целых чисел 1, 2, . . . , 8. Следовательно, количество информации, передаваемое при посылке одного сигнала, определяющего это число, равно $\log_2 8 = 3$ двоичным единицам. Ордината также выражается одним из чисел 1, 2, . . . , 8. Посылка значения ординаты также добавляет количество информации, равное трем двоичным единицам. Всего, следовательно, для определения положения фигуры на шахматной доске необходимы $3 + 3 = 6$ двоичных единиц информации.

Если все m сигналов равновозможны, то вероятность каждого из них

$$p = 1/m. \quad (5)$$

Поэтому формулу (1) можно переписать так:

$$I = \log_2 \frac{1}{p} = -\log_2 p. \quad (6)$$

Это выражение не содержит ничего нового по сравнению с формулой (1). Однако случай равновозможных сигналов — весьма частный. Как правило, сигналы, принадлежащие к ансамблю, имеют различные вероятности. Например, буквы, передаваемые по телеграфу, имеют неодинаковые вероятности. Буква «О» встречается в русском тексте наиболее часто, а буква «Ж» — гораздо реже. Поэтому весьма важно обобщение формулы для количества информации на тот случай, когда различные сигналы имеют различные вероятности p_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Если различные системы h_i имеют разные вероятности p_i , то выражение типа (6), соответствующее одному какому-либо сигналу h_i , имеет вид

$$I_i = -\log_2 p_i. \quad (7)$$

Эта величина имеет, однако, принципиально иной характер, чем выражение (6). Величина I_i является случайной, так как зависит от того, какой сигнал в действительности будет передан.

Простейшей характеристикой случайной величины является ее среднее значение, т. е. сумма возможных значений величины, умноженных на их вероятности. Вероятность i -го сигнала равна p_i , и такова же вероятность того, что I_i примет значение $(-\log_2 p_i)$. Следовательно, среднее значение рассматриваемой величины I_i определяется формулой

$$H = -\sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i. \quad (8)$$

В случае, когда все p_i одинаковы, формула (8) превращается в прежнюю формулу (6), так как $\log_2 p_i = \log_2 p$ можно вынести за знак \sum , а $\sum_i p_i = 1$.

При посылке n сигналов количество информации увеличивается в n раз и выражается формулой

$$H_n = Hn = -n \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i. \quad (9)$$

Эта формула была положена К. Э. Шэнноном в основу изящной, глубокой и плодотворной теории информации, в которой учитывается статистическая структура источника сообщений.

Величина (8) является средней мерой неопределенности, выраженной в двоичных единицах на один сигнал, в том случае, когда возможные сигналы имеют различные вероятности p_i .

Формула (8) имеет тот же вид, что и формула для энтропии — меры хаотичности, неопределенности в термодинамике. Поэтому она была названа Шэнноном *энтропией*. Здесь имеет место не только чисто формальное сходство. Доказано, что каждый акт получения информации, например измерение какой-либо величины в системе, сопровождается *возрастанием энтропии* в рассматриваемой системе. При этом возрастание термодинамической энтропии (в определенных единицах) оказывается не меньшим, чем полученное количество информации, выражаемое формулой (8).

Энтропия H является *средним значением случайной величины* ($-\log_2 p_i$) и имеет чисто статистический смысл, который можно пояснить следующим рассуждением. Рассмотрим всевозможные последовательности из N сигналов h_i ($i = 1, 2, \dots, m$), имеющих вероятности p_i при достаточно больших значениях N . Общее количество различных последовательностей равно, очевидно, $m^N = 2^{\log_2 m^N} = 2^{N \log_2 m}$. Однако большая часть из них имеет очень малую вероятность; такие последовательности могут быть отброшены, как редко встречающиеся. Наиболее вероятно, что в достаточно длинной последовательности сигнал h_1 будет встречаться примерно $p_1 N$ раз, сигнал h_2 — примерно $p_2 N$ раз и т. д. Вероятность того, что сигнал h_1 (с вероятностью p_1) встретится $p_1 N$ раз, равна $p_1^{p_1 N}$. То же для сигнала h_2 равно $p_2^{p_2 N}$ и т. д. Вероятность события, заключающегося в том, что эти все сигналы будут встречаться с указанными частотами, равна

$$p = p_1^{p_1 N} p_2^{p_2 N} \dots p_m^{p_m N}. \quad (10)$$

Если отбросить редко встречающиеся последовательности, суммарная вероятность которых сколь угодно мала при достаточно большом N (это утверждение можно строго доказать), то остаются лишь «часто встречающиеся» последовательности, вероятность которых сколь угодно мало отличается от p (см. формулу (10)). Конечно, число этих последовательностей представляет собой обычно лишь очень малую долю общего числа возможных последовательностей; однако именно они часто встречаются, и только их имеет смысл рассматривать. Но при таком рассмотрении мы вновь возвращаемся к случаю равновероятных последовательностей и можем применить формулу (6):

$$\begin{aligned} I &= -\log_2 p = -\log_2 [p_1^{p_1 N} p_2^{p_2 N} \dots p_m^{p_m N}] = \\ &= -\sum_{i=1}^m \log_2 p_i^{p_i N} = -N \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, мы пришли к формуле (9), поскольку в данном случае $n = N$. Если теперь общую энтропию для последовательности из N элементов, выраженную формулой (11), разделить на N , то приходим к величине H (см. формулу (8)). Это и будет среднее значение энтропии на один

элемент, или, как говорят, на одну «букву» сообщения (элементы часто называются «буквами», а весь ансамбль — «алфавитом»).

Число «часто встречающихся» последовательностей, имеющих примерно одинаковые вероятности p , приблизительно равно $1/p$ или $2^{\log_2 \frac{1}{p}} = 2^{-\log_2 p} = 2^I = 2^{NH}$ (см. формулы (11) и (8)).

Можно доказать, что

$$H = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i \leq \log_2 m, \quad (12)$$

причем равенство имеет место лишь в случае равных вероятностей $p_1 = p_2 = \dots = p_i = \dots = p_m$. Действительно,

$$2^{NH} \leq 2^{N \log_2 m},$$

т. е. число «часто встречающихся» последовательностей меньше, чем общее возможное число последовательностей (и, как правило, на практике значительно меньше).

Проверим, в какой степени формула (8) соответствует представлениям здравого смысла о количестве информации. Пусть, например, $p_1 = 1$ и, следовательно, $p_i = 0$ при $i > 1$. Тогда из выражения (8) следует

$$H = -p_1 \log_2 p_1 = 0,$$

так как $\lim_{p_i \rightarrow 0} p_i \log_2 p_i = 0$. Следовательно, в данном случае количество информации, передаваемое сигналом, равно нулю. Действительно, если заранее известно, что придет именно сигнал h_1 с вероятностью $p_1 = 1$, то этот сигнал, прибывая, не приносит никакой новой информации.

Рассмотрим теперь случай, когда $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, а $p_i = 0$ при $i > 2$. Тогда из формулы, например, (9) находим

$$H_n = -n \left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) = -n \log_2 \frac{1}{2} = n \log_2 2 = n.$$

Этого и следовало ожидать, так как передаваемый n раз сигнал определял каждый раз, по существу, лишь выбор между двумя равновероятными элементами h_1 и h_2 ансамбля. Иными словами, n раз передавалась двоичная единица количества информации.

Неравенство (12) имеет весьма важное значение. Оно является частным выражением более общего правила. Оказывается, что энтропия H , вообще говоря, тем *меньше*, чем *больше* отклонение вероятностей p_i от равенства друг другу. Это очевидно и из соображений здравого смысла. Ведь если вероятности одних сигналов велики, а других малы, то можно с большой долей уверенности ожидать, что придут именно более вероятные сигналы; при этом неопределенность, очевидно, уменьшается, а с ней уменьшается и количество информации, приносимое прибывающим сигналом.

Проиллюстрируем это правило для простейшего случая, когда $p_i = 0$ при $i > 2$. Пусть $p_1 = p$, а $p_2 = 1 - p = q$. Тогда

$$H = -p \log_2 p - q \log_2 q. \quad (13)$$

Зависимость $H(p)$ изображена на рис. 12.2. Величина H достигает максимума, равного единице, при равных вероятностях $p_1 = p_2 = 1/2$. В этом случае посылка одного сигнала дает одну двоичную единицу количества информа-

ции. При $p = 0$ и $p = 1$ величина H равна нулю, как и следует ожидать. Итак, максимум энтропии соответствует равным вероятностям. Это — случай наибольшей неопределенности.

Выше были приведены численные иллюстрации формул для энтропии и количества информации, причем было обнаружено, что результаты согласуются с требованиями здравого смысла. Апелляция к этим требованиям сопровождалась выражениями типа «можно ожидать с большой долей уверенности...» и т. д. Эти выражения носят субъективный характер, однако они приведены лишь в целях иллюстрации. В действительности, понятие количества информации, введенное Шэнноном, имеет строго объективное значение. Именно поэтому его можно применить, например, для линий связи между системами и внутри автоматических систем. Следует подчеркнуть, что это понятие вовсе не связано со смыслом передаваемого сообщения. Телеграмма с новогодним поздравлением и сообщение о смерти могут содержать одинаковое количество информации. В настоящее время предпринимаются попытки создания такого понятия информации, которое включало бы в себя в какой-то мере смысл сообщения.

Оставляя в стороне вопрос о практической значимости таких попыток, можно лишь отметить, что неучет субъективного смысла сообщения нельзя назвать недостатком понятия количества информации, введенного Шэнноном. Процесс образования научных понятий часто идет как раз по пути объективирования представлений, первоначально имевших субъективный, антропоморфный смысл, по пути изгнания чисто физиологического «привкуса», первоначально в них содержавшегося. Так, например, развивались понятия силы, работы, энергии, первоначально имевшие смысл субъективных ощущений, а затем оторвавшиеся от физиологической основы и прошедшие стадию объективирования. Только на базе четких определений, не зависящих от каких-либо субъективных восприятий, можно строить научную дисциплину. Поэтому не удивительно, что понятия теории связи и управления развиваются в том же направлении объективирования, в каком развивались понятия механики и энергетики.

Из вышеизложенного отнюдь не следует, однако, что рассмотренное выше определение количества информации является всесторонним и исчерпывающим и может служить орудием для решения любых задач, связанных с потоками информации. Разумеется, среднее значение случайной величины (7) не может характеризовать полностью распределение вероятностей, да и само распределение вероятностей еще не характеризует все свойства информации. Представляется удивительным, что из такого простого понятия, как энтропия, Шэнноном были извлечены замечательные следствия (см. ниже). Односторонность и недостаточность понятия энтропии подвергались критике А. Н. Колмогоровым. Здесь можно лишь заметить, что в понятие количества информации не входит промежуток времени между посылкой и получением сигнала. Между тем в автоматических системах важна не просто передача, а «своевременная», без запаздываний, передача информации. Ограниченность понятия энтропии (в случае дискретных сигналов) состоит также в том, что она отнюдь не является, например, харак-

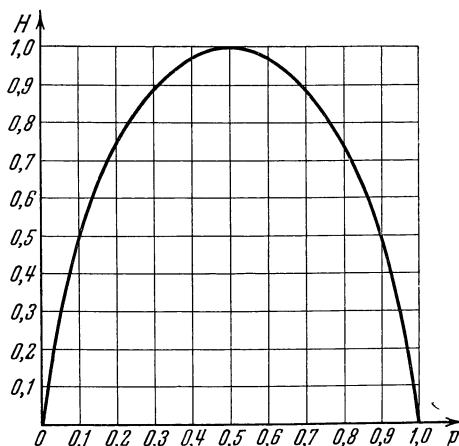


Рис. 12.2.

теристикой неопределенности результата измерения. Рассмотрим простой пример. На рис. 12.3 показано распределение вероятностей для дискретных значений случайной величины x , например результата измерения. Возможные значения x_i отложены в виде точек на оси абсцисс, а соответствующие им вероятности изображены длинами отрезков, перпендикулярных к этой оси. На рис. 12.3, а значения x_i тесно сгруппированы вокруг среднего, т. е. разброс результатов измерения мал. На рис. 12.3, б вероятности p_i те же, но соответствующие им значения x_i значительно дальше отстоят друг от друга, т. е. результат измерения имеет гораздо ббольшую неопределенность. Однако энтропия зависит лишь от вероятностей p_i ; поэтому она будет одной

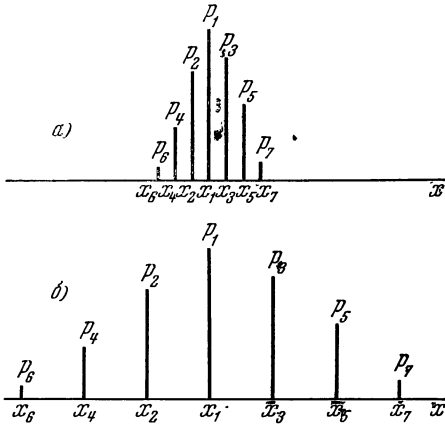


Рис. 12.3.

и той же для обоих случаев. Более правильной характеристикой неопределенности результата измерения является дисперсия.

Несмотря на свою ограниченность, понятия энтропии и количества информации в определенной области оказываются весьма плодотворными, как это вкратце показано ниже.

До сих пор рассматривался случай, когда сигналы, следующие друг за другом, независимы. Однако на практике чаще встречаются последовательности сигналов, в которых наблюдается зависимость сигнала от предыдущих, переданных ранее. Например, принимая в депеше по буквам фамилию «Москв»... можно быть

почти уверенным, что за этим последует буква «и», так как набор возможных фамилий: «Москвитин» и т. д. невелик, и чаще всего за буквой «в» следует «и». (Например, фамилия «Москворецкий» встречается очень редко.) Мы рассмотрим сравнительно простой случай, когда вероятность прихода данного сигнала h_j зависит только от того, какой сигнал h_i поступил перед ним. Эту вероятность обозначим $p_i(j)$; она представляет собой условную вероятность сигнала h_j (при условии, что предыдущий сигнал был h_i). Если $p_i(j)$ не зависит от времени, то случайная последовательность сигналов является примером стационарного марковского случайного процесса.

Пусть $p(i, j)$ — вероятность сложного события, состоящего в появлении сначала сигнала h_i , а за ним сигнала h_j . По известной теореме теории вероятностей

$$p(i, j) = p(i) p_i(j), \tag{14}$$

где $p(i)$ — вероятность прихода сигнала h_i , вычисляемая по известной формуле теории вероятностей

$$p(i) = \sum_{j=1}^m p(i, j) = \sum_{j=1}^m p(j, i) = \sum_{j=1}^m p(j) p_j(i). \tag{15}$$

Рассматривая двухбуквенное сочетание $h_i h_j$ как сложный элемент с вероятностью $p(i, j)$, можно написать выражение для энтропии (см. (8))

$$H_2 = \sum_{i, j=1}^m p(i, j) \log_2 p(i, j). \tag{16}$$

Энтропия, приходящаяся на одну букву, будет в два раза меньше:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m p(i, j) \log_2 p(i, j). \quad (17)$$

Напишем также выражение для энтропии на одну букву без учета зависимости букв друг от друга (конечно, оно непригодно для расчетов в данном случае, так как не учитывает взаимозависимости сигналов):

$$H_0 = -\sum_{i=1}^m p(i) \log_2 p(i), \quad (18)$$

где $p(i)$ вычисляется по формуле (15). Можно доказать, что

$$H \leq H_0, \quad (19)$$

причем равенство имеет место лишь в случае независимости сигналов h_i и h_j . Отсюда следует важное правило: *зависимость между сигналами уменьшает энтропию*. Это следует также из соображений здравого смысла. Действительно, появление предыдущего сигнала уменьшает неопределенность, связанную с появлением следующего сигнала, если эти сигналы зависимы. Поэтому и общее количество информации уменьшается. Наибольшее количество информации при прочих равных условиях несет последовательность не связанных друг с другом, т. е. независимых, сигналов.

Фактически даже формулы (16), (17) недостаточно точно характеризуют энтропию в данном случае. Действительно, они учитывают лишь статистическую зависимость внутри двухбуквенных сочетаний, но не учитывают дополнительной зависимости первой буквы сочетания от последней буквы предыдущего сочетания, т. е. не учитывают половины междубуквенных зависимостей. Таким образом, более точное значение энтропии, приходящейся на букву, учитывающее и эти зависимости, будет еще меньше, чем H из формулы (17). Во всех случаях остается, однако, справедливой формула (8), если понимать под вероятностями p_i вероятности достаточно длинных последовательностей букв; чтобы получить энтропию на одну букву, нужно разделить функцию (8) на число букв в последовательности.

Наложение любой зависимости и дополнительных условий на сигналы, уменьшая неопределенность, уменьшает тем самым и энтропию.

§ 2. Дискретный канал передачи без помех

Введенные выше понятия можно применить к каналу передачи для обеспечения условий, при которых этот канал используется наилучшим образом. Наилучшее использование в случае канала без помех означает передачу через этот канал наибольшего количества информации в среднем в единицу времени.

По каналу передачи могут передаваться различные символы x_1, x_2, \dots, x_m , продолжительности *) которых могут быть t_1, t_2, \dots, t_m . Например, при телеграфной передаче с помощью кода Морзе символами являются точки и тире с паузами после них, а также более длинные паузы между буквами и еще более длинные между словами. Мы ограничимся простейшим случаем канала, по которому можно передавать лишь два символа, например 0 и 1, одинаковой продолжительности t_0 . При исследовании передачи сигналов по каналу возникают три вопроса:

*) Под продолжительностью понимается время, затрачиваемое на передачу символа.

- 1) Какова пропускная способность канала, т. е. наибольшее количество информации, которое может быть передано по каналу в среднем в 1 сек?
- 2) Можно ли закодировать передаваемые от источника сигнала символы так, чтобы полностью использовать пропускную способность канала?
- 3) Каким образом осуществить указанное в предыдущем вопросе оптимальное или близкое к нему кодирование?

Ответ на первый вопрос для рассматриваемого примера весьма прост. При данном количестве символов, передаваемых в секунду, максимальное количество информации будет передано в том случае, когда энтропия, приходящаяся на один символ, будет максимальной. Для того чтобы энтропия, приходящаяся на один передаваемый символ, была максимальной, необходимо удовлетворить двум условиям: а) символы, передаваемые по каналу, должны быть независимы друг от друга (как говорят иногда, не коррелированы *)); б) вероятности отдельных символов должны быть одинаковы.

В данном примере все единицы и нули, передаваемые по каналу, должны быть независимы. Для каждого очередного символа вероятности оказаться равным 1 или 0 должны быть одинаковы и, очевидно, равны 1/2. Но тогда каждый символ несет одну двоичную единицу информации. Число символов в секунду равно $1/t_0 = n$; следовательно, пропускная способность канала C вычисляется по простой формуле

$$C = \frac{1}{t_0} = n \quad (1)$$

двоичных единиц в секунду.

Ответ на второй вопрос дается теоремой, которую мы назовем *первой теоремой Шэннона*. Пусть источник сообщений имеет энтропию H (двоичных единиц на букву), а канал обладает пропускной способностью C (двоичных единиц в секунду). Тогда можно закодировать сообщения на выходе источника таким образом, чтобы передавать буквы по каналу со средней скоростью $(C/H) - \epsilon$ букв в 1 сек, где ϵ сколь угодно мало. Передавать со средней скоростью, большей чем C/H , невозможно.

Итак, передача примерно C/H букв в секунду возможна лишь при наилучшем, оптимальном кодировании. Первая теорема Шэннона устанавливает лишь, что такой оптимальный код существует, но не указывает, как его получить. Однако оптимальные и близкие к ним коды можно строить; такое построение для простого случая показано ниже.

Следует указать, что при неудачном кодировании среднее число букв, передаваемых в секунду, может оказаться существенно ниже, чем C/H .

Поясним, что понимается под кодированием. Передавая сигналы h_i ($i = 1, \dots, n$) по каналу, мы должны поставить во взаимно однозначное соответствие каждой букве или элементу ансамбля или некоторой их комбинации определенный символ или комбинацию символов канала. Если мы, например, передаем буквы обычного алфавита, то можно принять закон взаимно однозначного соответствия: $A \rightarrow 10$, $B \rightarrow 011$ и т. д. (стрелка — знак соответствия). Законом взаимно однозначного соответствия могут быть связаны не отдельные буквы, а определенные последовательности букв алфавита с последовательностями символов канала. Например, последовательности $ВАВ$ может соответствовать комбинация 10, последовательности $АВАА$ — комбинация 010 и т. д.

Рассмотрим примеры кодирования. Допустим, что ансамбль возможных сообщений содержит четыре независимых элемента (или буквы) h_1, h_2, h_3, h_4 с вероятностями $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,25$; $p_3 = 0,125$; $p_4 = 0,125$. Энтропия

*) Независимые сигналы всегда не коррелированы. Однако отсутствие взаимной корреляции еще не означает, что сигналы независимы.

источника сообщений вычисляется по формуле (8)

$$\begin{aligned}
 H &= - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = -0,5 \log_2 0,5 - 0,25 \log_2 0,25 - \\
 &\quad - 0,125 \log_2 0,125 - 0,125 \log_2 0,125 = -\frac{1}{2} \log_2 2^{-1} - \frac{1}{4} \log_2 2^{-2} - \\
 &\quad - 2 \cdot \frac{1}{8} \log_2 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 = 1 \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

двоичных единиц на букву. Ввиду неравных вероятностей отдельных букв энтропия меньше, чем была бы при равных вероятностях (тогда было бы $H_{\max} = 2$ двоичных единицы на букву).

Допустим, что избран двоичный код вида

$$h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 1, \quad h_3 \rightarrow 01, \quad h_4 \rightarrow 10.$$

Но такой код приводит к невозможности различения отдельных букв в последовательности, так как коды одних букв являются началом кодов других букв. Например, сигнал 01 может быть расшифрован как h_3 либо как последовательность h_1, h_2 . Нужно осуществить такое кодирование, чтобы декодирование дало опять первичную последовательность сигналов. Таким свойством обладает, например, следующий код:

$$h_1 \rightarrow 00, \quad h_2 \rightarrow 01, \quad h_3 \rightarrow 10, \quad h_4 \rightarrow 11.$$

Здесь на каждую букву приходится два двоичных знака и недоразумений возникнуть не может.

Подсчитаем число букв, передаваемых в секунду при этом коде, если пропускная способность канала $C = 1000$ двоичных единиц в секунду. Если на передачу одной буквы требуется два двоичных символа, то число букв, передаваемых в секунду, равно 500. Между тем максимальное число букв, которое можно было бы передавать в 1 сек. равно, согласно первой теореме Шэннона, величине C/H . В данном случае

$$\frac{C}{H} = \frac{1000}{1,75} = 570 \text{ букв в секунду.}$$

Таким образом, указанный выше код не является оптимальным. Для построения оптимального кода необходимо учесть статистическую структуру источника сообщений. В простейших случаях она учитывалась уже давно. С точки зрения здравого смысла очевидно, что чаще встречающиеся буквы (т. е. h_i , обладающие большей вероятностью) следует кодировать менее длинными последовательностями, а для реже встречающихся букв могут быть допущены более длинные последовательности. Тогда средняя длина сообщения будет короче и в среднем число букв, передаваемых в секунду, увеличится. Примерно таким образом и был построен код Морзе. Однако значение первой теоремы Шэннона состоит в том, что она указывает верхний предел для скорости передачи и утверждает, что он достижим. Например, можно построить код лучший, чем код Морзе (доказано, что код Морзе не наилучший).

Итак, указанный выше код для h_i не является оптимальным уже хотя бы потому, что он дает одинаковую длину последовательности как для более часто, так и для более редко встречающихся букв. При применении этого кода число двоичных знаков, необходимых для передачи сообщения, например в $N = 10\,000$ букв, будет равно $L = 20\,000$. Между тем на основании теоремы Шэннона можно утверждать, что при оптимальном коде длина

сообщения в $N = 10\,000$ букв равна $L = NH = 10^4 \cdot 1,75 = 17\,500$ двоичных знаков. Передавая это же сообщение с помощью неоптимального кода, мы растягиваем его до $20\,000$ двоичных знаков, допускаем избыточность, лишнее число двоичных знаков. В то же время с помощью оптимального кода можно сжать сообщение, уложив его лишь в $17\,500$ двоичных знаков и сэкономить 2500 двоичных знаков, а с ними и время на их передачу.

«Коэффициент сжатия» в данном случае равен $\frac{17\,500}{20\,000} = \frac{1,75}{2}$. Отметим, что и $H/H_{\max} = 1,75/2$, где H_{\max} — максимально возможная энтропия источника сообщений, которая имела бы место, если бы все вероятности p_i были равны. А. Я. Хинчин доказал, что в любом случае при применении оптимального кода наименьшее значение коэффициента сжатия равно как раз H/H_{\max} . В результате сжатия с помощью оптимального кода полностью устраняется избыточность сообщения. *Количественной мерой избыточности* (при неоптимальном кодировании сигналов минимальными последовательностями символов одинаковой длины) может служить выражение

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}}. \quad (2)$$

Для данного в примере источника величина R равна

$$R = 1 - \frac{1,75}{2} = 0,125.$$

Если бы все вероятности p_i были одинаковы и $H = H_{\max}$, то избыточность R была бы равна нулю. Чем больше связи между элементами h_i и чем более разнятся их вероятности, тем больше избыточность R .

Каким же образом осуществить оптимальное кодирование? Обращаясь вновь к рассмотренному выше коду, можно заметить, что при его применении единицы и нули в последовательностях символов будут встречаться неодинаково часто. Действительно, например, в последовательности из N букв знак 1 будет встречаться $(p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot 1 + p_4 \cdot 2)N$ раз, т. е. $(0,25 + 0,125 + 2 \cdot 0,125)N$ раз, или $0,625N$ раз, а нуль $(p_1 \cdot 2 + p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot 1)N$ раз, т. е. $(0,5 \cdot 2 + 0,25 + 0,125)N$, или $1,375N$ раз.

Для того чтобы полностью использовать пропускную способность канала, или, как говорят, согласовать источник сообщений с каналом, надо так закодировать буквы, чтобы единицы и нули встречались с равными вероятностями при передаче сообщений. Для этого удобно поступить следующим образом: разделим все элементы h_i на две группы так, чтобы суммарные вероятности групп были одинаковы. Присвоим первой группе в качестве первой цифры кода нуль, а второй группе — единицу. Отсюда ясно, что теперь в первых цифрах кодов единицы и нули будут встречаться с одинаковой вероятностью. Теперь в каждой из групп отдельно повторим эту операцию, т. е. разделим, например, элементы первой группы на две подгруппы с равными суммарными вероятностями и присвоим первой из подгрупп в качестве второй цифры кода нуль, а второй из подгрупп — единицу. Повторяя этот процесс до тех пор, пока в подгруппе не окажется один элемент, получим оптимальный код (метод Шэннона — Фэно). Конечно, не всегда удастся точно разделить элементы на такие группы и подгруппы; во всяком случае с помощью этого метода часто можно получить код, близкий к оптимальному.

Поступая таким образом в рассматриваемом примере, делим все элементы на две группы. В одной находится h_1 ($p_1 = 0,5$), в другой h_2, h_3, h_4 ($p_2 + p_3 + p_4 = 0,5$). Итак, $h_1 \rightarrow 0$, а у кодов h_2, h_3, h_4 первой цифрой будет 1. Деля вторую группу на две подгруппы: h_2 ($p_2 = 0,25$) и h_3, h_4

($p_3 = p_4 = 0,25$), получаем

$$h_2 \rightarrow 10, \quad h_3 \rightarrow 110, \quad h_4 \rightarrow 111.$$

Последние цифры у h_3 и h_4 надо взять разными, чтобы различать эти элементы, — они составляют две последние подгруппы. Итак, приходим к коду

$$h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 10, \quad h_3 \rightarrow 110, \quad h_4 \rightarrow 111.$$

При этом коде недоразумения в процессе расшифровки невозможны, так как нет буквы, код которой явился бы началом кода другой буквы.

Полученный код является оптимальным, в чем нетрудно убедиться. Действительно, в закодированной последовательности букв единицы и нули будут встречаться одинаково часто. Например, в последовательности из большого числа N букв единица будет встречаться $(p_2 \cdot l + p_3 \cdot 2 + p_4 \cdot 3)N$ раз, т. е. $(0,25 + 0,125 \cdot 2 + 0,125 \cdot 3)N = 0,875N$ раз, а нуль будет встречаться

$$(p_1 \cdot l + p_2 \cdot l + p_3 \cdot l)N$$

раз, т. е. $(0,5 + 0,25 + 0,125)N = 0,875N$ раз. Итак, единицы и нули в длинной последовательности будут встречаться одинаково часто. Средняя длина последовательности из N букв равна

$$L = (1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4)N$$

двоичных знаков, или

$$L = (1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,125 + 3 \cdot 0,125)N = 1,75N = NH$$

двоичных знаков. Если $N = 10\,000$ букв, то длина сообщения будет 17 500 двоичных знаков. Это число как раз и было определено выше для оптимального кода.

Оптимальное кодирование усложняется при большом числе неравномерных букв алфавита и особенно при наличии зависимостей между несколькими соседними буквами сообщения. Однако и для весьма сложных случаев разработаны приемы кодирования. Универсальным методом является, например, кодирование не отдельных букв, а крупных групп последовательностей букв с помощью комбинаций символов. При таком кодировании достигается значительная декорреляция зависимостей, так как в соприкасающихся группах могут значительно зависеть друг от друга лишь крайние элементы, близкие к точке соприкосновения, а это слабо отражается на взаимозависимостях групп, коль скоро в них много букв. С другой стороны, вероятности отдельных групп (а таких групп гораздо больше, чем букв) могут быть расположены в порядке убывания в длинную таблицу, где значительно точнее, чем при кодировании букв, может быть произведено разделение на группы и подгруппы с примерно равными суммарными вероятностями.

При таком кодировании необходимо сначала принять от источника длинное сообщение $h_i h_j h_k$ на передающем конце, потом закодировать его и затем передавать кодовую комбинацию по каналу передачи. На приемном конце комбинация декодируется (расшифровывается) и преобразуется обратно в последовательность $h_i h_j h_k$. Однако при таком способе передачи появляются значительные запаздывания принимаемых сигналов по отношению к передаваемым. Такое запаздывание, иногда допустимое в канале связи, может оказаться недопустимым в тракте автоматической системы. Это еще одно подтверждение ограниченности понятия количества информации и производных от него понятий (оптимального кодирования и т. д.) и необходимости их обобщения для применения к более широкому классу автоматических систем.

§ 3. Дискретный канал связи с помехами

На практике в любом канале передачи существуют помехи случайного характера. Эти помехи, примешиваясь к сигналу, воспринимаются приемным устройством и могут вызвать ошибки приема.

Допустим, что приходящая информация представляет собой выбор какого-то одного определенного символа x_i из ансамбля возможных символов. Если помеха отсутствует, то после прихода информации вероятность символа x_i стала равной единице, а вероятность всех других символов стала равной нулю. Между тем до прихода данной информации символы x_i имели вероятности p_i . Следовательно, приход информации изменил распределение вероятностей символов. Вероятности а posteriori, т. е. после прихода информации, уже не равны вероятностям а priori, имевшим место до прихода информации, когда еще не было известно, какой символ придет.

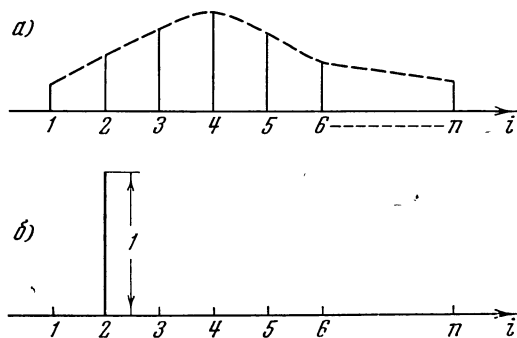


Рис. 12.4.

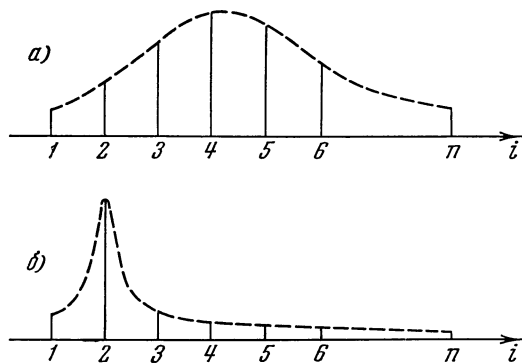


Рис. 12.5.

На рис. 12.4, а изображено для примера распределение вероятностей а priori p_i до прихода сигнала. Цифры по оси абсцисс означают номера символов x_i . На рис. 12.4, б показано распределение вероятностей а posteriori, когда пришел, например, символ x_i .

Если сигнал приходит с неотъемлемой от него случайной помехой, то уже невозможно с полной определенностью выбрать на приемном конце какой-то один символ и утверждать, что именно он, а не какой-либо другой был передан по линии связи. После прихода сигнала остается еще не-

которая, не ликвидированная до конца неопределенность. Вероятность а posteriori не будет целиком сконцентрирована на одном символе, как на рис. 12.4, б, а будет все еще «размазана» по множеству символов. Однако можно ожидать, что при относительно небольшой помехе вероятность одного символа возрастает, а вероятности остальных символов станут меньшими. Этот случай показан на рис. 12.5. На рис. 12.5, а показано распределение вероятностей а priori до прихода информации, а на рис. 12.5, б — распределение вероятностей а posteriori. Распределение вероятностей на рис. 12.5, б при небольшой помехе может быть уже близким к той идеальной картине, которая показана на рис. 12.4, б, но не совпадает с ней.

Каким же образом в данном случае оценить количество пришедшей информации?

Пусть до прихода сигнала априорное распределение вероятностей символов x_i на передающем конце линии связи было совокупностью значений p_i , а после прихода j -го символа к приемнику распределение вероятностей

переданного символа, оцениваемое на приемном конце, равно p'_i . Количество информации, приходящее к приемнику, обозначим через I_j .

После прихода сигнала сделаем следующий мысленный эксперимент: допустим, что помеха исчезла, и пошлем повторно тот же символ. Тогда распределение станет предельно резким, как на рис. 12.4, б. Количество информации, полученное при такой повторной посылке без помехи, будет равно, согласно формуле (8) § 1, величине $[-\sum_{i=1}^m p'_i \log_2 p'_i]$. Общее количество информации, полученное в результате посылки двух указанных выше сигналов, равно

$$I_j + [-\sum_{i=1}^m p'_i \log_2 p'_i]. \quad (1)$$

Но в результате посылки этих двух сигналов получится такое же количество информации, которое передается при отсутствии помехи с помощью одной посылки символа. Соответствующее количество информации, очевидно, в среднем равно

$$[-\sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i], \quad (2)$$

поскольку до посылки сигнала вероятности были равны p_i (вероятности a priori).

Так как выражения (1) и (2) дают в среднем одно и то же количество информации, получаемое различными путями, то их средние значения можно приравнять друг другу. Отсюда следует

$$(I_j)_{\text{ср}} = [-\sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i] - [-\sum_{i=1}^m p'_i \log_2 p'_i]_{\text{ср}}. \quad (3)$$

Применим теперь следующие обозначения. Символы, поступающие от источника сообщений на передающий конец линии связи, будут x_i , причем они имеют вероятности a priori. Символы, принимаемые на конце линии, обозначим через y_i , причем отдельные символы y_i имеют вероятности q_i . Априорные вероятности q_i могут не совпадать с p_i , даже если символы y_i однозначно соответствуют символам x_i , вследствие влияния помех в канале передачи.

Величина I_j является случайной, так как само появление символа y_i на приемном конце случайно. В длинных последовательностях из N сигналов символ y_j встречается $q_j N$ раз и дает количество информации $q_j N \cdot I_j$; общее количество информации, содержащееся в последовательности, равно $\sum_{j=1}^m q_j N I_j$. Среднее количество информации, приходящееся на один символ

последовательности, можно рассчитать по формуле $\sum_{j=1}^m q_j N I_j / N$ или

$$I = \sum_{j=1}^m q_j I_j. \quad (4)$$

Первый член правой части выражения (3) не зависит от j и не является случайной величиной. Его среднее значение равно ему самому. Второй член зависит от j , так как p'_i различны при различных j . Поэтому

$$I = [-\sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i] - \sum_{j=1}^m q_j [-\sum_{i=1}^m p'_i \log_2 p'_i]. \quad (5)$$

Пусть, далее, вероятность сложного события, заключающегося в том, что передан символ x_i , а принят символ y_j , равна $p(i, j)$. Очевидно,

$$p(i, j) = p_i q_i(j) = q_j p_j(i). \quad (6)$$

Здесь $q_i(j)$ — условная вероятность приема j -го символа при условии, что передан i -й символ, а $p_j(i)$ — условная вероятность, что передан i -й символ x_i при условии, что принят j -й символ y_j . Именно эта величина и является вероятностью а posteriori p'_i для x_i , оцениваемой на приемном конце. Итак,

$$p'_i = p_j(i). \quad (7)$$

Иногда встречается случай, когда помеха с одинаковой вероятностью действует в противоположных направлениях, т. е. не изменяет априорных вероятностей q_i по сравнению с p_i . Тогда $q_i = p_i$.

Положим

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i, \\ H_y(x) &= \sum_{j=1}^m q_j \left[- \sum_{i=1}^m p'_i \log_2 p'_i \right] = - \sum_{j=1}^m q_j \sum_{i=1}^m p_j(i) \log_2 p_j(i) = \\ &= - \sum_{i, j=1}^m p(i, j) \log_2 p_j(i) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

двоичных единиц на символ. Тогда формулу (5) можно переписать в следующем виде:

$$I = H(x) - H_y(x) \quad (9)$$

двоичных единиц на символ. Член $H(x)$ является энтропией сигнала, выдаваемого передающим устройством в линию связи. При отсутствии шума именно эта величина представляет собой количество информации. Если же в канале присутствует помеха, то количество информации, приходящееся в среднем на символ, уменьшается на величину $H_y(x)$. Происходит потеря информации. Нетрудно показать, что при отсутствии помехи величина $H_y(x)$ равна нулю. Поэтому величину $H_y(x)$ можно назвать ненадежностью. В зарубежной литературе ее называют эквивокацией (equivocation). Это средняя мера неопределенности, которая еще остается после приема сигнала.

Мера общей неопределенности рассматриваемого сложного события дается, согласно общей формуле (8) § 1, энтропией $H(x, y)$:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= - \sum_{i, j=1}^m p'_i(i, j) \log_2 p(i, j) = - \sum_{i, j=1}^m p_i q_i(j) \log_2 p_i q_i(j) = \\ &= - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i \sum_{j=1}^m q_i(j) - \sum_{i, j=1}^m p(i, j) \log_2 q_i(j) = H(x) + H_x(y), \end{aligned} \quad (10)$$

так как $\sum_{j=1}^m q_i(j) = 1$. Обозначение $H_x(y)$ применяется для выражения

$$H_x(y) = - \sum_{i, j=1}^m p(i, j) \log_2 q_i(j) = - \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m q_i(j) \log_2 q_i(j). \quad (11)$$

Последнее выражение является средней мерой неопределенности для y при известном значении x . Таким образом, смысл формулы (10) заключается в том, что общая энтропия является суммой энтропии на входе канала (обусловленной случайным характером входных сигналов) и средней энтропии на выходе при фиксированных входах. Последний член обусловлен наличием помех в канале.

Если, исходя из формулы (6), выписать $p(i, j)$ в виде $q_j p_j(i)$, то аналогичным путем можно прийти к выражению

$$H(x, y) = H(y) + H_y(x). \quad (12)$$

Здесь

$$H(y) = - \sum_{j=1}^m q_j \log_2 q_j;$$

это — энтропия выхода канала связи. Из формул (10) и (12) получаем

$$H(x, y) = H(x) + H_x(y) = H(y) + H_y(x). \quad (13)$$

Следовательно, количество информации, передаваемой в среднем на один символ по каналу (см. формулу (9)), можно записать так:

$$I = H(x) - H_y(x) = H(y) - H_x(y). \quad (14)$$

Так как $\sum_{j=1}^m q_j(j) = 1$, то выражению для I можно придать вид

$$\begin{aligned} I = H(x) - H_y(x) &= - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i + \sum_{i,j=1}^m p(i, j) \log_2 p_j(i) = \\ &= - \sum_{i=1}^m p_i \left[\sum_{j=1}^m q_j(j) \right] \log_2 p_i + \sum_{i,j=1}^m p(i, j) \log_2 p_j(i) = \\ &= - \sum_{i,j=1}^m p(i, j) \log_2 p_i + \sum_{i,j=1}^m p(i, j) \log_2 p_j(j) = - \sum_{i,j=1}^m p(i, j) \log_2 \frac{p_i}{p_j(i)}. \quad (15) \end{aligned}$$

Пусть n — число символов, которое может передаваться в 1 сек по каналу связи с пропускной способностью C . При отсутствии помехи и оптимальном кодировании, как следует из первой теоремы Шэннона, между $H(x)$ — энтропией выхода передатчика на символ — и этими величинами имеет место следующее соотношение:

$$C = n [H(x)]_{\max}.$$

В примере оптимального кодирования, рассмотренном выше, $[H(x)]_{\max} = 1$ двоичной единице на символ, а $n = 1000$. Поэтому $C = 1000$ двоичных единиц в секунду.

Так как среднее количество информации, передаваемое каждым символом по каналу с помехами, меньше $H(x)$ и выражается формулой (12), то формула для пропускной способности канала в данном случае должна принять следующий вид:

$$C = n [H(x) - H_y(x)]_{\max}. \quad (16)$$

Индекс «max» означает, что нужно взять максимум этой величины, проверяя все возможные источники сообщений, которые могут быть использованы как входные источники канала связи.

Само понятие пропускной способности для канала с шумами может вызвать известные сомнения. Когда мы говорим о пропускной способности канала, то считаем, что по нему передается достоверная информация, и игнорируем возможность ошибок. Действительно, в формуле (16) нигде не отражена, скажем, допустимая частота ошибок. Соображения здравого смысла указывают, что можно застраховаться от ошибок, например, повторяя много раз одно и то же сообщение и статистически изучая результаты на приемном конце линии. При этом кажется, что чем меньшей вероятности ошибок

мы хотим достичь, тем большее число раз должно быть повторено сообщение. Если ошибка должна стать бесконечно малой, то число повторений необходимо бесконечно увеличить, а при этом пропускная способность канала стремится к нулю. Однако эти соображения оказываются неправильными, так как они не учитывают всех возможностей, представляемых рациональным кодированием. Шэннон доказал теорему, которая устанавливает возможность практически достоверной передачи сигналов по каналу с шумами и притом с конечной скоростью. Назовем эту теорему *второй теоремой Шэннона*, формулировка которой сводится к следующему.

Пусть дискретный канал обладает пропускной способностью C , вычисляемой по формуле (16), а дискретный источник сообщений имеет энтропию в секунду H (т. е. генерирует H двоичных единиц информации в секунду). Если $H \leq C$, то существует такая система кодирования, что сообщения источника могут быть переданы по каналу с произвольно малой частотой ошибок (или со сколь угодно малой ненадежностью). Если же $H > C$, то можно закодировать сообщения источника таким образом, чтобы ненадежность была меньше, чем $H - C + \varepsilon$, где ε сколь угодно мало; не существует способа кодирования, обеспечивающего ненадежность, меньшую чем $H - C$.

Эта теорема не указывает, каким именно способом строить оптимальный код, она лишь устанавливает, что такой код существует. Конечно, оптимальный код должен обладать известной избыточностью, содержать «лишние» символы, которые удлиняют сообщение, но зато страхуют от ошибок при передаче. Общих приемов создания оптимальных кодов в настоящее время нет, но ряд частных случаев подвергся обстоятельному рассмотрению. Строгое доказательство второй теоремы Шэннона сложно. Однако идея такого доказательства, в известной мере поясняющая принципы оптимального кодирования, сравнительно проста. При наличии канала с помехами одной и той же последовательности сигналов x_i на входе канала соответствует некоторая группа последовательностей сигналов y_i на выходе. Однако можно найти совокупность таких входных последовательностей x_i , что соответствующие им группы последовательностей y_i «почти» не пересекаются. Иначе говоря, вероятность того, что на выходе получается какая-либо последовательность y_i , которая может произойти как от входной последовательности x_i , так и от x_j , сколь угодно мала. Но тогда с вероятностью, близкой к единице, можно по выходной последовательности y_i узнать, какова входная последовательность x_i . Итак, входные последовательности становятся различными — на выходе можно различить, какая входная последовательность была послана.

Пусть канал обладает k различными последовательностями x_i . Если число различных между собой последовательностей L сигналов источника сообщений не превосходит k , то сигналы могут передаваться по каналу почти без ошибок, несмотря на помехи в канале. Итак, условие $L < k$ обеспечивает передачу со сколь угодно малой погрешностью. Однако L примерно равно 2^{nH} , где n — число членов в последовательности сигналов, а H — энтропия источника (см. замечание перед формулой (12) § 1).

С другой стороны, доказывается, что k примерно равно 2^{nC} , где C — пропускная способность канала. Из неравенства $L < k$ или $2^{nH} < 2^{nC}$ получается условие $H < C$.

Рассмотрим пример подсчета пропускной способности канала при наличии помех. Пусть по каналу связи передаются два символа 0 и 1 одинаковой продолжительности. Вероятности появления этих символов одинаковы: $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Пусть, далее, число символов, передаваемое по каналу в секунду, $n = 1000$. Действие помех проявляется в том, что из 100 переданных

символов в среднем один принимается неправильно, т. е. вместо 1 принимается 0, и наоборот.

При отсутствии помех каждый двоичный символ может (если символы независимы и равновероятны) нести одну двоичную единицу информации. Следовательно, $C = 1000$ двоичных единиц в секунду. При наличии помех 1% символов передается неправильно. Нельзя, однако, считать, что коль скоро 99% символов передается правильно, пропускная способность канала соответствует 99% прежней, т. е. равна 990 двоичных единиц в секунду. На самом деле неопределенность на приемном конце больше полученной из такого примитивного рассуждения, так как неизвестно, какие символы подверглись искажению. Если рассуждать так же примитивно в том случае, когда 50% символов искажается, то можно прийти к заключению, что 50% символов передаются правильно и пропускная способность канала снижается лишь до 50% по сравнению с каналом без помех. На самом же деле в этом случае каждый символ имеет одинаковую вероятность быть правильным или неправильным. Как справедливо отмечает Шэннон, в этом случае можно вообще отказаться от канала связи, заменив получение сигналов от него подбрасыванием монеты на приемном конце. Иначе говоря, канал не доставляет никакой информации; его пропускная способность равна нулю.

Найдем сначала общую формулу для C , считая, что вероятность искажения любого символа равна p . Тогда условные вероятности $p_i(j)$ принимают следующие значения:

$$p_0(0) = 1 - p; \quad p_0(1) = p; \quad p_1(0) = p; \quad p_1(1) = 1 - p.$$

Пусть вероятность появления символа 0 на входе канала p_0 ; вероятность появления символа 1 будет, очевидно, $1 - p_0$. Будем считать последовательно появляющиеся символы x_i независимыми друг от друга, т. е. примем, что имеется полная декорреляция. Тогда

$$H(x) = -[p_0 \log_2 p_0 + (1 - p_0) \log_2 (1 - p_0)]$$

в двоичных единицах на символ. Вычислим теперь ненадежность согласно второй из формул (8):

$$\begin{aligned} H_y(x) &= -\{q_0 [p_0(0) \log_2 p_0(0) + p_0(1) \log_2 p_0(1)] + \\ &\quad + (1 - q_0) [p_1(0) \log_2 p_1(0) + p_1(1) \log_2 p_1(1)]\} = \\ &= -\{q_0 [(1 - p) \log_2 (1 - p) + p \log_2 p] + \\ &\quad + (1 - q_0) [p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p)]\} = \\ &= -[p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p)]. \end{aligned}$$

Ненадежность $H_y(x)$ не зависит от q_0 и p_0 . Следовательно, максимум выражения $[H(x) - H_y(x)]$ будет достигнут при таком значении p_0 , когда $H(x)$ максимально. Из формулы (13) (см. также рис. 12.5) видно, что этот максимум достигается при $p_0 = 1 - p_0 = \frac{1}{2}$, т. е. при равных вероятностях символов 0 и 1, когда $H(x) = 1$. Из формулы (16) находим при $n = 1000$

$$C = 1000 [1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p)]$$

в двоичных единицах в секунду. При $p = 0,01$ получаем $C = 1000 [1 + 0,01 \log_2 0,01 + 0,99 \log_2 0,99] = 1000 \cdot [1 - 0,081] = 919$ двоичных единиц, т. е. намного меньше, чем 990.

Из формулы (15) следует, что при увеличении p от нуля величина C уменьшается и при $p = 0,5$ становится равной нулю, как и следовало ожидать. Но при $p > 0,5$ величина C вновь увеличивается и при $p = 1$ становится такой же, как и при $p = 0$. Этот факт нетрудно истолковать: если все

сигналы в канале обязательно «искажаются», т. е. вместо переданного 0 получается 1 и наоборот, то, принимая символ 0, можно с уверенностью заключить, что был послан символ 1, и наоборот, если принята 1, то, значит, был послан 0. Следовательно, канал работает так, как будто помехи в нем отсутствуют.

§ 4. Информация в непрерывных сигналах

Ниже рассматриваются только непрерывные сигналы с ограниченной полосой частот F . Тогда при продолжительности T сообщения, как следует из теоремы В. А. Котельникова, такой сигнал можно заменить совокупностью $n = 2FT$ значений передаваемой величины x .

Пусть эти значения будут x_1, x_2, \dots, x_n . Все они представляют собой случайные величины, статистика которых задается n -мерной плотностью вероятностного распределения

$$P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Пусть x_1 — значения функции на входе канала связи, а y_i — значения функции на выходе. Величины y_i не равны x_i , так как в канале к сигналу примешивается случайная помеха. Плотность условной вероятности $P_x(y) = P_{x_1, x_2, \dots, x_n}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ вместе с $P(x)$ полностью определяет статистическую картину явления. Здесь $P_x(y) dy_1 \dots dy_n$ есть вероятность того, что значения функции на выходе канала лежат в диапазоне между y_i и $y_i + dy_i$, если значения функции на входе равны x_i . Ниже будем считать, что все величины x_i и y_i приведены к безразмерному виду.

Рассмотрим сначала простейший случай одного лишь значения $x_1 = x$, попытаемся распространить понятие энтропии на непрерывные сигналы. Случайная величина x может принимать любые значения: приблизительно $P(x_k) \Delta x$ есть вероятность того, что величина x_k находится в пределах между x_k и $x_k + \Delta x$, где Δx достаточно мало. Естественно определить энтропию как предел выражения

$$-\sum_k P(x_k) \Delta x \log_2 [P(x_k) \Delta x],$$

когда $\Delta x \rightarrow 0$. Нетрудно, однако, увидеть, что пределом этого выражения является бесконечность.

Действительно, с безграничным увеличением числа возможных диапазонов $x_k \div x_k + \Delta x$, в которых может находиться сигнал x , энтропия бесконечно возрастает. Вычисление дает

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\sum_k P(x_k) \Delta x \log_2 [P(x_k) \Delta x] \right\} &= \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\sum_k P(x_k) \Delta x \log_2 P(x_k) \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\sum_k P(x_k) \Delta x \log_2 \Delta x \right\} &= \\ = -\int_{-\infty}^{\infty} P(x) \log_2 P(x) dx + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\sum_k P(x_k) \Delta x \log_2 \Delta x \right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

Второе слагаемое стремится к бесконечности при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому, казалось бы, понятие энтропии неприменимо к непрерывным сигналам. Однако затруднение с бесконечным слагаемым удастся обойти следующим образом. В тех вычислениях, которые нас интересуют, встречаются разности выражений типа (1). Количество информации (см. формулу (14) § 3) выражается

формулой, в которой фигурирует разность $H(x) - H_y(x)$. Если в этой разности сначала заменить слагаемые выражениями типа (16) § 3, а затем произвести предельный переход, то получим конечное выражение.

Примем понятие количества информации за основное и воспользуемся формулой (15) § 3. В ней следует заменить p_i на $P(x_i) \Delta x$, $p_j(i)$ на $P_{y_j}(x_i) \Delta x$, $p(i, j)$ на $P(x_i, y_j)$. Суммирование следует проводить по всем значениям x_i и y_j . Следует указать, что плотность вероятности $P(x, y)$ можно вычислить, зная плотности $P(x)$ и $q_x(y)$, так как $P(x, y) = P(x) q_x(y)$.

Подставив в формулу (15) § 3 указанные выше значения, находим

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{i, j=1}^m P(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \log_2 \frac{P(x_i) \Delta x}{P_{y_j}(x_i) \Delta x} = \\ &= - \sum_{i, j=1}^m P(x_i, y_j) \left[\log \frac{P(x_i)}{P_{y_j}(x_i)} \right] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Устремив Δx и Δy к нулю, получаем в пределе формулу в виде интеграла

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \left[\log \frac{P(x)}{P_y(x)} \right] dx dy. \quad (2)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \log_2 P(x) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \log_2 P_y(x) dx dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log_2 P(x) dx - \left[- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \log_2 P_y(x) dx dy \right] = \\ &= H(x) - H_y(x), \quad (3) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log_2 P(x) dx, \\ H_y(x) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \log_2 P_y(x) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти обозначения имеют смысл, если оба слагаемых в формуле конечны (а это не всегда бывает так).

Выражения $H(x)$ и $H_y(x)$ обнаруживают определенные аналогии с энтропиями для дискретного случая. Их можно и в случае непрерывных сигналов назвать *энтропией* величины x и *условной энтропией* соответственно. Но в то же время, как показано ниже, интегралы (4) имеют и принципиальные отличия от соответствующих энтропий для дискретного случая.

Величина I есть число двоичных единиц, приходящихся на один дискрет. Поэтому и $H(x)$ и $H_y(x)$ выражаются в двоичных единицах на дискрет.

Если имеется совокупность $n = 2FT$ дискретов, то общая энтропия получается по аналогичной формуле:

$$\begin{aligned} H_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_1, \dots, x_n) \log_2 P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Энтропия, приходящаяся в среднем на один дискрет, равна, очевидно,

$$H = \frac{H_n}{n} = -\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_1, \dots, x_n) \log_2 P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (6)$$

Всякая зависимость между дискретами уменьшает энтропию. Если дискреты независимы, то энтропия наибольшая. При этом

$$P(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1) P_2(x_2) \dots P_n(x_n)$$

и формула (5) распадается на сумму выражений типа первой из формул (4). Ограничимся для простоты только этим случаем. Если, кроме того, $P_i(x_i)$ одинаковы, то для расчета количества информации, приходящегося на один дискрет, которое передается по каналу, можно пользоваться первой из формул (4).

Формулы для энтропии непрерывного распределения имеют принципиальные отличия от формул для энтропии дискретного распределения. Значение энтропии здесь зависит от плотности вероятности $P(x)$, которая характеризует полностью случайную величину, в то время как энтропия дискретного распределения зависит лишь от p_i , но не от значений x_i . Отсюда следует, что энтропия непрерывного распределения зависит от преобразования координат и даже от изменения масштаба величин, так как при этом изменяется $P(x)$. Энтропия может быть как положительной, так и отрицательной. Действительно, пусть величина x проходит через нелинейный преобразователь, выход которого $v = f(x)$ есть монотонная функция.

Пусть $r(v)$ — плотность вероятностного распределения для v . Из теории вероятностей известна формула

$$r(v) = \frac{P(x)}{f'(x)} = \frac{P(x)}{df(x)/dx} \quad (7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H(v) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} r(v) \log_2 r(v) dv = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{f'(x)} \left[\log_2 \frac{P(x)}{f'(x)} \right] f'(x) dx = \\ &= H(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log_2 f'(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Последний член может быть в зависимости от функции $f'(x)$ как больше, так и меньше нуля, а величина его может быть любой. Следовательно, $H(v)$ может быть как больше, так и меньше нуля даже в частном случае $v = ax$, где $a = \text{const}$, $f'(x) = a$. Тогда $H(v) = H(x) + \log_2 a$, так как $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$.

Согласно формуле (16) § 3, пропускная способность канала равна максимально возможному значению выражения

$$2F [H(x) - H_y(x)] = 2F [H(y) - H_x(y)] \quad (9)$$

в двоичных единицах в секунду. Здесь $n = 2F$, так как в секунду появляются $2F$ дискретов, а энтропии, фигурирующие в этой формуле, вычислены в двоичных единицах на дискрет.

В качестве $H(y)$ и $H_x(y)$ следует подставить в эту формулу интегралы, аналогичные интегралам (4)

$$\left. \begin{aligned} H(y) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) \log_2 q(y) dy, \\ U_x(y) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \log_2 \frac{P(x, y)}{P(x)} dx dy, \\ P(x, y) &= P(x) q_x(y), \\ H(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \log_2 P(x, y) dx dy = \\ &= H(y) + H_x(y) = H(x) + H_y(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь $q(y) dy$ — вероятность для выходной величины y канала связи оказаться между y и $y + dy$, а $q_x(y)$ является условной плотностью вероятности для y при заданном значении x .

Почему пропускная способность канала C имеет конечное значение и в случае непрерывных сигналов? Физическое обоснование этого факта заключается в следующем: при увеличении числа возможных значений x и уменьшения «длины» интеграла Δx каждой ячейки, отвечающей значению x (см. формулу (1)), происходит увеличение передаваемого количества информации лишь до тех пор, пока имеется возможность уверенного различения ячеек. Когда же ячейка становится настолько малой, что из-за влияния помехи в канале невозможно уверенно отличать друг от друга соседние ячейки, то дальнейшее уменьшение ячеек с увеличением их числа не увеличивает количества передаваемой информации. Поэтому чем больше среднеквадратичное значение помехи при прочих равных условиях, тем меньше пропускная способность канала. Наоборот, чем больше при прочих равных условиях среднеквадратичное значение сигнала, тем большим можно взять число уверенно различимых ячеек и тем больше пропускная способность канала. Эти физические соображения показывают, что пропускная способность канала C должна зависеть от отношения σ_c/σ_n , где σ_c — среднеквадратичное значение сигнала, а σ_n — среднеквадратичное значение помех.

Пусть для какой-либо случайной величины x дисперсия $\sigma_x = \text{const}$. Найдем, какая плотность распределения $P(x)$ соответствует максимальному значению $H(x)$ — первого члена в формуле (9). Следует найти функцию $P(x)$, обеспечивающую максимум первого из выражений (4), при дополнительных условиях (считаем для простоты, что среднее значение x равно нулю — результат от этого не зависит).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx = \sigma_x^2 = \text{const}. \quad (11)$$

Согласно правилам вариационного исчисления необходимо найти функцию $P(x)$, дающую максимум интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [-P(x) \log_2 P(x) + \lambda x^2 P(x) + \mu P(x)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, P) dx, \quad (12)$$

где λ , μ — константы. Такая функция $P(x)$ называется экстремалью. Как известно, экстремаль является решением уравнения Эйлера (см. главу XIV):

$$\frac{\partial F}{\partial P} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial P'} \right) = 0.$$

Так как в подинтегральном выражении отсутствует $P' = dP/dx$, то уравнение Эйлера принимает вид $\partial F/\partial P = 0$ или

$$-\log_2 P(x) - 1 + \lambda x^2 + \mu = 0. \quad (13)$$

Отсюда

$$P(x) = 2^{\mu-1+\lambda x^2} = \alpha e^{\lambda x^2}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в формулы (11), находим значения

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \text{ и } \lambda = -\frac{1}{2\sigma_x^2}.$$

Следовательно,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (15)$$

Если задано значение дисперсии σ_x^2 , то наибольшая энтропия случайной величины x получается при нормальном законе распределения. Именно это распределение приводит к наибольшей неопределенности.

Если подставить выражение (15) в формулу для энтропии $H(x)$, то получим

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log_2 P(x) dx = \log_2 \sqrt{2\pi} \sigma_x. \quad (16)$$

Из приведенного выше доказательства следует, что максимальная величина $H(y)$ при $\sigma_y = \text{const}$ получится также при нормальном распределении.

Рассмотрим теперь случай, когда помеха представляется независимыми для каждого дискрета величинами с нормальным распределением. Это — часто встречающийся на практике случай. Пусть

$$y = x + n, \quad (17)$$

где y — выходной сигнал, x — входной сигнал, а n — помеха, приращивающаяся к сигналу в канале. Плотность вероятности для помехи

$$w(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}, \quad (18)$$

где σ_n — среднеквадратичное значение помехи.

Определим величину $H_x(y) = H_x(x + n)$. Плотность вероятности $P_x(y)$ при заданной величине x , как видно из формулы (17), зависит от плотности вероятности шума $w(n)$. Так как $n = y - x$, то $P_x(y) = w(y - x) = w(n)$. Тогда

$$\begin{aligned} H_x(y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \int_{-\infty}^{\infty} P_x(y) \log_2 P_x(y) dx dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(y-x) \log_2 w(y-x) dy \right] dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} w(z) \log_2 w(z) dz = H(n), \end{aligned} \quad (19)$$

где $H(n)$ представляет собой энтропию шума и зависит лишь от $w(n)$. Интеграл в квадратной скобке упрощается, если, считая x параметром, положим $y - x = z$ и $dy = dz$. Он не зависит от x при бесконечных пределах интегрирования. Из формулы (19) следует

$$I = H(y) - H_x(y) = H(y) - H(n). \quad (20)$$

В соответствии с формулой (9) пропускная способность

$$C = 2F [H(y) - H(n)]_{\max}. \quad (21)$$

Величина $H(n)$ задана, так как из формулы (18) находим (ср. с (16))

$$H(n) = - \int_{-\infty}^{\infty} w(z) \log_2 w(z) dz = \log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_n. \quad (22)$$

Максимум величины $H(y)$ получается при $\sigma_y = \text{const}$, когда имеется нормальное распределение. Тогда

$$H(y) = \log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_y \quad (23)$$

и формула для пропускной способности канала принимает вид

$$C = 2F [\log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_y - \log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_n] = F \log_2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_n^2}. \quad (24)$$

Так как $y = x + n$, то можно показать, что нормальное распределение для y возможно лишь тогда, когда не только n , но и x имеет нормальное распределение (9), причем

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2, \quad (25)$$

поскольку x и n независимы. Подставляя это выражение в формулу (24), получаем окончательное выражение для пропускной способности канала

$$C = F \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right). \quad (26)$$

двоичных единиц в секунду.

Из приведенных выше рассуждений следует, что входной сигнал канала при оптимальном кодировании должен иметь нормальное распределение и отдельные дискреты должны быть независимы.

Формула (26) весьма важна. Экстраполируя доказательство второй теоремы Шэннона на непрерывный случай, можно показать, что при оптимальном кодировании скорость передачи информации по каналу с помехами может быть доведена до величины, меньшей C , но сколь угодно близкой к ней и притом при сколь угодно малых ошибках. Это справедливо, в частности, и при $\frac{\sigma_x}{\sigma_n} < 1$, т. е. при сигнале, меньшем помехи по среднеквадратичному значению. Ведь и тогда $C > 0$. Итак, можно передавать с конечной скоростью и без заметных ошибок сигналы даже в том случае, когда они «утопают» в помехе. Разумеется, обнаружение таких сигналов требует значительного времени, так как кодированию должна быть подвергнута достаточно длинная последовательность.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

§ 1. Основные группы теорий и задачи выделения сигналов при наличии шумов

В главах XI—XII были изложены некоторые методы решения задач, возникающих в тех случаях, когда на вход приемного аппарата поступает полезный сигнал, смешанный с шумом. Эти методы могут быть различными в зависимости от того, что задано в условиях задачи и что требуется узнать при ее решении. Так, например, можно полностью задать вероятностные характеристики всех случайных процессов, поступающих на вход системы. Тогда в принципе можно определить любые статистические характеристики ее поведения. Но на практике очень трудно, а иногда и невозможно добыть столь полные данные о входных процессах. Если же ограничиться лишь неполными данными, например об одних лишь корреляционных функциях и спектральных плотностях этих процессов, то можно ставить и решать лишь сравнительно узкий круг задач, при решении которых достаточно этих неполных данных.

Методы решения задач могут различаться и в зависимости от того, что требуется получить в результате решения. А эти требования могут быть самыми различными. Речь может идти об анализе преобразования сигналов некоторой известной системой или о синтезе заранее неизвестной системы. Можно интересоваться методами наилучшего кодирования при заданной линии связи либо методами наилучшего приема при заданной линии связи и способе кодирования и т. д.

Несмотря на огромное разнообразие в характере задач, предъявляемых требованиях, условиях задачи и т. д., за последние годы выкристаллизовалось сравнительно небольшое число направлений, в которых развиваются как постановки задач, так и методы их решения. В основном здесь можно выделить три направления и соответствующие им три группы теорий.

1. **К о р р е л я ц и о н н ы е т е о р и и.** С этой группой теорий читатель уже познакомился в гл. XI. Постановка задачи отличается здесь тем, что задаются не все вероятностные характеристики входных процессов, а лишь их корреляционные функции. Оказывается, что этих данных вполне достаточно для того, чтобы построить, например, линейный оптимальный фильтр, обеспечивающий минимум среднеквадратичной погрешности выходного сигнала. Тот же математический аппарат, как это видно из гл. X, в некоторых случаях может быть использован и для расчета нелинейных систем. Однако здесь его возможности существенно ограничены.

2. **Т е о р и я и н ф о р м а ц и и.** Эта теория исследует вопросы передачи сообщений с весьма общей точки зрения (см. гл. XII). Ее основная задача — определить способы оптимального кодирования при заданных свойствах линий связи и заданном статистическом характере источника сообщений. В этой теории передатчик и приемник рассматриваются только лишь как

аппараты, выполняющие функции кодирующего и декодирующего устройств. Во многих случаях такой метод подхода оказывается чрезвычайно плодотворным. Однако он не является наиболее общим, так как передача информации по линии связи не самый общий из процессов в системах связи и управления. Например, в замкнутых системах их звенья производят сложную переработку информации, и процессы в таких системах вовсе не сводятся к передаче информации от одного звена к другому. К тому же постановка ряда задач, относящихся к разомкнутым системам, существенно отличается от той, которая рассматривается теорией информации. Таким образом, теоретико-информационный подход в рамках теории, изложенной в гл. XII, не является наиболее общим и универсальным. Более общая теория информации, учитывающая процессы ее переработки, а также такие ее качества, как смысл и ценность, пока еще находится лишь в зародышевом состоянии.

3. Теория статистических решений. Уже давно в технике связи и управления ощущалась необходимость в статистической теории, которая, с одной стороны, была бы весьма общей и применимой в самых различных случаях, а с другой стороны, позволяла бы доводить решение задач до такой стадии, когда становится возможным от теоретических результатов переходить к их воплощению в конкретной аппаратуре. Развитие математической статистики, с одной стороны, и обобщение методов исследования систем связи и управления, с другой стороны, позволили создать основы такой теории. Эта теория, введение в которую излагается ниже, может быть названа теорией статистических решений. Она позволяет построить закон, с помощью которого какое-либо устройство управления или связи выносит решение в неопределенной ситуации. Любой акт, выполненный таким устройством, можно трактовать как принятие некоторого решения. Если, например, на выходе буквопечатающего телеграфного аппарата появилась буква «о», то это означает, что аппарат воспринял пришедшую к нему информацию и на ее основании принял решение о напечатании буквы «о». Это решение было в виде команды отдано исполнительной части аппаратуры, которая отпечатала букву «о». Основной операцией, выполненной в процессе приема и переработки информации, явилось, несомненно, принятие решения. Если сигнал приходит к приемному аппарату искаженный шумами, то эта операция может оказаться весьма непростой.

Теория статистических решений имеет ряд разветвлений и может рассматриваться как группа теорий с единой методикой подхода к явлениям. На формирование теории статистических решений большое влияние оказал ряд математических дисциплин, а технические аспекты этой теории складывались под воздействием запросов в первую очередь техники и теории связи, а в последнее время и техники и теории автоматического управления. Чтобы лучше понять основные идеи теории статистических решений, полезно ознакомиться, хотя бы в самых общих чертах, с ее разнообразными истоками.

Один из этих истоков — *математическая статистика*, важная ветвь теории вероятностей. В этой области в конце XIX и первой половине XX века были разработаны: теория оценки параметров (работы англичанина Р. Фишера, шведа Г. Крамера, а в позднейшее время советского ученого Ю. В. Линника) и теория испытания гипотез (работы американского математика Ю. Неймана, английского ученого Е. Пирсона и советского ученого А. Н. Колмогорова). Ряд идей этих теорий, как видно из нижеследующего изложения, был воспринят теорией статистических решений.

Независимо от математической статистики стала развиваться *теория игр*. Эта дисциплина, фундамент которой заложил французский математик Э. Борель, была развита американским ученым Дж. фон-Нейманом (с 1928 г.) и другими, переплетаясь в ходе своего развития в различных формах с теория-

ми операций, линейного программирования (первые работы в этой области принадлежат советскому математику Л. В. Канторовичу и относятся к 1938 г.) и динамического программирования, созданного Р. Беллманом. Основной объект изучения теории игр — это игра с участием двух или более партнеров, причем заданы правила игры и, в частности, возможные выигрыши участников. Задача состоит в создании для участника игры методики принятия «наилучших» решений. Такая стратегия, как принято называть в теории игр метод поведения участника, должна, например, в наихудшей ситуации, которая может для него сложиться в процессе игры, найти наиболее выгодный ход.

В этой книге нет места для изложения идей теории игр. Интересующихся можно отослать к имеющейся обильной литературе широкого диапазона от популярных введений до глубоких научных трудов.

Объединение и развитие ряда идей указанных выше дисциплин привели американского математика А. Вальда в 1948—1950 гг. к построению общей математико-статистической дисциплины, названной им *теорией решающих функций*. Основные понятия и методы исследования этой теории, как оказалось в дальнейшем, достаточно хорошо приспособлены к запросам теории связи и управления. А. Вальд создал также важный *метод последовательного анализа*.

Совершенно независимо от развития вышеуказанных математических дисциплин в теории связи появились весьма общие задачи статистического характера. Первой работой, посвященной проблеме синтеза оптимального приемника и выяснения свойств такого приемника, явилось исследование советского ученого В. А. Котельникова, опубликованное в 1946 г. Его оптимальный приемник обеспечивает прием сигналов с минимальной вероятностью ошибки. Теория В. А. Котельникова, названная им *теорией потенциальной помехоустойчивости*, была с успехом использована и развита советскими специалистами. За рубежом работы по оптимальным методам радиоприема появились несколько позже.

Наконец, уже в 50-х годах XX века математическая и техническая ветви теории статистических решений сошлись. В работах американского ученого Д. Миддлтона (1950—1957 гг.) и других было выяснено, что методы теории решающих функций могут быть с успехом применены для решения задач о наилучших способах приема сигналов на фоне шума. В результате работ ряда специалистов за последние годы создана обширная теоретико-техническая дисциплина — *теория статистических решений*, являющаяся важной главой теории связи. Математическая теория статистических решений продолжает развиваться в рамках математики. *Методами теории статистических решений можно решать также задачи теории управления*. В последнее время теория статистических решений была использована и для исследования замкнутых систем автоматического управления. Ниже, однако, рассматривается лишь теория более простых разомкнутых систем, причем главным образом применительно к задачам связи.

Общая схема развития теории статистических решений наглядно изображена на рис. 13.1.

Остановимся на основных задачах теории статистических решений в системах связи и управления. Рассмотрим структурную схему системы связи, изображенную на рис. 13.2. Блок ПРЧ на этом рисунке является передатчиком, КС — каналом связи и ПРМ — приемником. Вырабатываемый передатчиком сигнал обозначим через $S(t)$, а сигнал, принимаемый приемником, — через $X(t)$. Принимаемый сигнал может отличаться от сигнала передатчика, поскольку в канале связи к сигналу $S(t)$ примешивается помеха или шум $n(t)$. В общем случае принимаемый сигнал X зависит как от $S(t)$, так и от $n(t)$:

$$X(t) = X[S(t), n(t)]. \quad (1)$$

В частном случае эта зависимость может принимать, например, аддитивный характер:

$$X(t) = S(t) + n(t). \tag{2}$$

Допустим, что некоторые параметры передаваемого сигнала неизвестны (если бы все они были заранее известны, то не стоило бы передавать этот

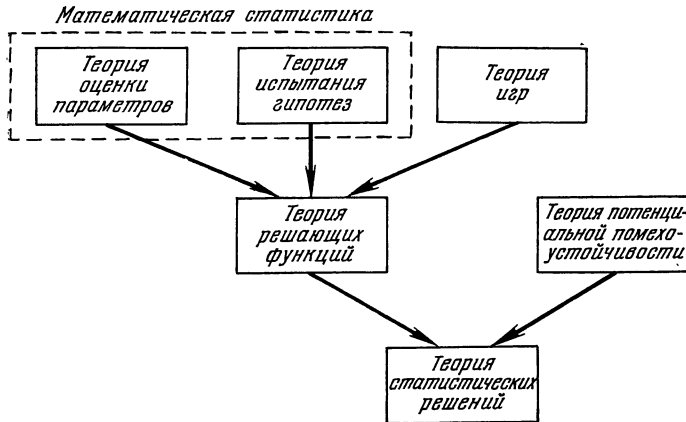


Рис. 13.1.

сигнал), а известно лишь априорное вероятностное распределение этих параметров. Его можно определить, например, обрабатывая статистические данные о работе линии связи за длительное время. Далее, допустим, что известен характер композиции сигнала и шума в канале связи, т. е. вид формулы (1). Кроме того, пусть известны вероятностные характеристики шума $n(t)$. Это все, что требуется знать заранее в задачах теории статистических решений.

Пусть теперь на вход приемника ПРМ в течение конечного интервала времени от $t = 0$ до $t = T$ ($0 \leq t \leq T$) поступает принимаемый сигнал $X(t)$. Требуется на основании принятой реализации сигнала $X(t)$ наилучшим, в каком-то определенном смысле, способом решить, каковы неизвестные параметры передаваемого сигнала $S(t)$. Предполагается, что это решение производит какой-то автомат, находящийся в приемнике ПРМ. Это решение, обозначенное буквой d на рис. 13.2, выдается наблюдателю на выходе приемника. Необходимо сконструировать наилучший, в указанном смысле, автомат. Это и будет наилучший, или оптимальный, приемник.

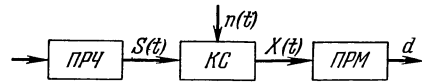


Рис. 13.2.

Однако пока еще задача не сформулирована полностью. Чтобы ее сформулировать до конца, необходимо уточнить, о каких параметрах сигнала $S(t)$ идет речь; далее нужно указать критерий оптимальности, т. е. объяснить, что означают слова: «решить наилучшим способом». Наконец, в различных конкретных задачах могут быть введены дополнительные условия. Например, в некоторых случаях наблюдение сигнала $X(t)$ может производиться непрерывно; в других случаях может измеряться лишь дискретная последовательность значений сигнала $X(t)$.

В зависимости от вариантов формулировки возможны различные типы задач. Основные типы задач перечислены ниже в порядке возрастания их сложности. Соответственно типам задач названы и те отдельные теории

(входящие в общую теорию статистических решений в виде ее частей), с помощью которых эти задачи решаются.

1. Теория дуальтернативных решений. Допустим сначала для простоты, что у сигнала $S(t)$ имеется лишь один неизвестный параметр A . Например, сигнал $S(t)$ может иметь вид

$$S(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3)$$

У этого сигнала частота ω_0 и начальная фаза φ_0 известны, а неизвестна лишь его амплитуда A . Тогда уравнение (3) дает пример сигнала с одним неизвестным параметром. Разумеется, в качестве неизвестного параметра может фигурировать и частота, и начальная фаза сигнала или вообще любой параметр, характеризующий сигнал $S(t)$.

Теория дуальтернативных решений рассматривает случай, когда параметр A сигнала может принимать лишь два возможных значения — A_1 или A_2 с априорными вероятностями $p(A_1)$ и $p(A_2)$, соответственно

$$A = \begin{cases} A_1 \rightarrow p(A_1), \\ A_2 \rightarrow p(A_2). \end{cases} \quad (4)$$

В частном случае может рассматриваться задача, в которой $A_1 \neq 0$, а $A_2 = 0$. Такая задача возникает при обнаружении сигнала, когда возможно, что сигнал присутствует (и имеет при этом амплитуду A_1), но возможно также, что сигнал отсутствует, т. е. его амплитуда A равна нулю. Задачи обнаружения сигналов являются важнейшим полем применения теории дуальтернативных решений.

В задаче, соответствующей условию (4), имеются две альтернативы, т. е. две взаимно исключающие друг друга гипотезы: $A = A_1$ или $A = A_2$. Приемник должен решить, какая из этих двух гипотез более правдоподобна.

2. Теория многоальтернативных решений. В этой теории рассматривается более сложный случай, чем в теории дуальтернативных решений. Допустим, что неизвестный параметр A сигнала $S(t)$ может принимать r различных возможных значений A_1, A_2, \dots, A_r . Пусть заданы априорные вероятности $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_r)$ этих значений. Итак,

$$A = \begin{cases} A_1 \rightarrow p(A_1), \\ A_2 \rightarrow p(A_2), \\ \vdots \\ A_r \rightarrow p(A_r). \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, здесь имеется r возможных альтернатив; $A = A_1$ либо $A = A_2$ и т. д. Оптимальный приемник должен по наблюдениям над принимаемым сигналом $X(t)$ наилучшим, в каком-то смысле, способом принять решение в пользу какой-либо одной из этих гипотез.

3. Теория оценки параметров. Дальнейшее обобщение заключается в переходе от конечного множества альтернатив к бесконечному множеству. Пусть неизвестный параметр A может принимать любое значение из некоторого, вообще говоря, бесконечного множества дозволённых значений. Назовем это множество областью возможных значений параметра A и будем обозначать эту область через $\Omega(A)$. Например, область возможных значений может иметь вид интервала значений от A_{\min} до A_{\max} :

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max}. \quad (6)$$

Область $\Omega(A)$ может охватывать и несколько различных непересекающихся интервалов.

Допустим, что нам известна априорная плотность вероятности $p(A)$ распределения параметра A в области $\Omega(A)$.

Теория оценки параметров дает возможность сконструировать оптимальный приемник. Этот приемник в результате наблюдения над принимаемым сигналом $X(t)$ дает наилучшую, в известном смысле, оценку значения параметра A в передаваемом сигнале $S(t)$.

4. Теория оценки процессов. До сих пор предполагалось, что параметр A сигнала $S(t)$ на всем интервале наблюдения постоянен. Однако это не самый общий случай. Пусть, например, сигнал $S(t)$ есть амплитудно-модулированное высокочастотное колебание. Тогда его амплитуда A не постоянна, — она является функцией времени $A = A(t)$. Именно эту функцию времени и требуется определить в приемном устройстве. Поэтому возникает задача оценки процесса $A(t)$. Пусть неизвестная функция времени $A(t)$ является реализацией случайного процесса с известными априорными вероятностными характеристиками. Задача состоит в том, чтобы по наблюдаемой в интервале $0 \leq t \leq T$ кривой $X(t)$ оптимальным образом оценить вид кривой $A(t)$. Это и есть задача теории оценки процессов.

Таковы основные типы теорий, входящих в виде составных частей в общую теорию статистических решений. Следует отметить, что сформулированные выше задачи еще не являются наиболее общими. Например, вместо задачи оценки одного параметра A можно рассматривать задачу оценки нескольких параметров. Действительно, передаваемый сигнал $S(t)$ может содержать несколько неизвестных параметров, которые мы обозначим через a_1, a_2, \dots, a_m :

$$S(t) = S(a_1, a_2, \dots, a_m, t). \quad (7)$$

Каждый из этих параметров может принимать несколько возможных значений либо бесконечное множество значений в какой-либо области.

Задачу оценки нескольких параметров (или процессов) можно сформулировать в таком же виде, как и задачу оценки одного параметра, если ввести вектор параметров A . Это вектор с координатами a_1, a_2, \dots, a_m :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (8)$$

Тогда условие (4) теории двальтернативных решений, условие (5) теории многоальтернативных решений и т. д. остаются прежними. Нужно лишь при этом считать, что A уже не скаляр, а вектор в m -мерном пространстве с координатами a_1, a_2, \dots, a_m .

Тогда $\Omega(A)$ является уже областью задания этого вектора.

Отметим еще некоторые характерные черты, ограничивающие рамки указанных выше теорий, во всяком случае, в том виде, в каком они сформулированы выше.

а) При формулировке задач мы считаем, что сначала наблюдается вся реализация принимаемого сигнала $X(t)$ в интервале времени $0 \leq t \leq T$, а затем уже, при $t > T$, производится оценка значения параметра A либо функции $A(t)$. Такие системы в гл. XI были названы системами I типа. Но подобная постановка задачи вовсе не единственно возможная; иногда она вообще неприемлема. Например, в гл. XI рассматривалась уже задача оценки процесса $S(t)$ в данный момент времени (системы II типа). При этой оценке система выносит суждение о неизвестном параметре A в виде текущего решения, не дожидаясь окончания интервала наблюдения. Последующие наблюдения помогают уточнить, скорректировать это значение; однако в любой текущий момент t система дает оценку значения A (либо функции $A(t)$), основанную на предыдущих наблюдениях, произведенных в моменты τ , причем $0 \leq \tau \leq t$. При решении этих задач полностью применимы те идеи, которые будут продемонстрированы ниже на примерах более простых задач разработки систем I типа.

б) В большинстве случаев при решении задач мы будем считать, что заданы априорные вероятности различных возможных значений неизвестного параметра A . Задачи такого типа называются *бэйсовыми*, по имени английского ученого Бэйеса, который еще в XVIII веке вывел применяемую при решении этих задач формулу. Но такой подход не всегда возможен. Весьма часто мы не располагаем теми предварительными статистическими данными, по которым можно найти априорные вероятности. Пусть изучается, например, задача обнаружения и оценки координат и скоростей вражеских самолетов, атакующих какой-либо объект. Откуда можно добыть сведения об априорных вероятностях этих величин? Такие сведения могли бы быть получены лишь в результате накопления длительного опыта отражения атак на этот объект, причем все эти атаки должны иметь место при одних и тех же условиях (одни и те же число и типы атакующих самолетов, одно и то же время суток, одна и та же погода и т. д.). Совершенно очевидно, что получение

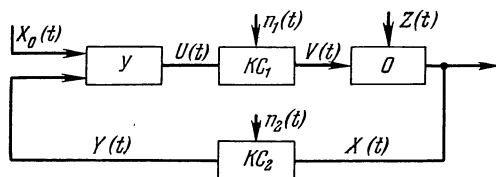


Рис. 13.3.

таких данных практически невозможно. Точно так же во многих других случаях определить априорные вероятности оказывается затруднительным или даже просто невозможным.

В этой главе рассматривается, в частности, и принцип *максимального правдоподобия*, который может быть использован при решении

целого ряда задач. Этот принцип позволяет обойтись без знания априорных вероятностей. Однако область его применения довольно ограничена. В конце главы упоминается о более общем — минимаксном — методе, также не требующем знания априорных вероятностей. Однако основные задачи, рассматриваемые в этой главе, являются бэйсовыми.

До сих пор мы сформулировали лишь задачи, относящиеся к системам связи (рис. 13.3). Однако задачи такого же типа возникают и в замкнутых системах автоматического управления, причем методы решения этих задач также могут базироваться на идеях теории статистических решений.

На рис. 13.3 изображена структурная схема системы автоматического управления с обратной связью. Здесь O — управляемый объект с выходной величиной $X(t)$ и входной величиной $V(t)$; буквой U обозначено управляющее устройство, которое выдает управляющее воздействие $U(t)$. На его вход поступает извне задающее воздействие $X_0(t)$, являющееся в общем случае неизвестной заранее функцией времени. Могут быть заданы лишь априорные вероятностные характеристики этого случайного процесса. Кроме того, на вход управляющего устройства U подается по линии обратной связи значение $X(t)$ управляемой величины. Так как в канале обратной связи $КС_2$ к сигналу $X(t)$ примешивается шум $n_2(t)$, то его выход $Y(t)$, подаваемый на вход U , уже, вообще говоря, не равен величине $X(t)$.

Управляющее воздействие $U(t)$ попадает на вход объекта по каналу связи $КС_1$, где к нему примешивается шум $n_1(t)$. Кроме того, на объект действует случайная помеха $Z(t)$.

Допустим, что мы знаем априорные вероятностные характеристики помехи $Z(t)$, а также вероятностные характеристики шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ и характер композиции шумов и помех с полезными сигналами в звеньях системы. Ставится задача: найти, каким должно быть управляющее устройство U , которое принимало бы, в известном смысле, наилучшие, оптимальные, решения об управлении объектом в виде управляющих воздействий $U(t)$, основываясь на наблюдениях над приходящей в U информацией, т. е.

над процессами $X_0(t)$ и $Y(t)$. Как видим, эта задача может быть сформулирована в виде задачи об оптимальных решениях в неопределенной ситуации. Таким образом, она также может решаться в рамках теории статистических решений. Здесь задачи, относящиеся к замкнутым системам, не будут рассматриваться ввиду их относительной сложности.

§ 2. Элементарные методы статистических решений

В этом параграфе вводятся некоторые понятия и излагаются некоторые математические результаты, которые понадобятся нам впоследствии. Для того чтобы сделать изложение более наглядным, полезно ввести геометрические понятия пространства параметров, пространства шума и пространства наблюдений.

Допустим, что нам полностью известны вероятностные характеристики шума $n(t)$ в канале связи KC (см. рис. 13.2). Это означает (см. гл. X), что для любого k нам известна плотность вероятности

$$w_k = w_k(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_k, t_k), \tag{1}$$

т. е. совместная плотность вероятности значения $n = n_1$ в момент $t = t_1$, значения $n = n_2$ в момент $t = t_2$ и т. д. (рис. 13.4).

В дальнейшем мы будем часто считать, что измерения производятся не непрерывно, а лишь в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k . Поэтому нас будут интересовать именно значения шума n_1, n_2, \dots, n_k в эти

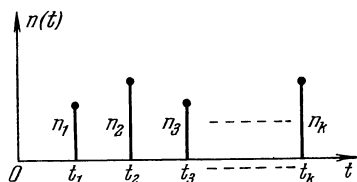


Рис. 13.4.

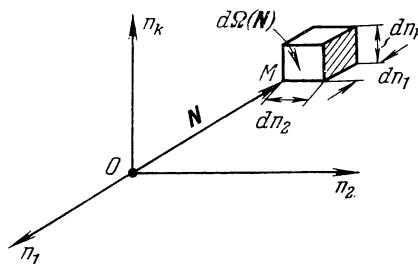


Рис. 13.5.

моменты времени. Совместная плотность вероятности этих случайных величин, т. е. функция w_k (см. (1)) будет считаться заданной; число k будем считать известным фиксированным числом.

Представление совокупности величин n_1, n_2, \dots, n_k на плоскости n, t , показанное на рис. 13.4, можно заменить более удобным для дальнейшего векторным представлением. Введем вектор шума N с координатами n_1, n_2, \dots, n_k :

$$N = (n_1, n_2, \dots, n_k). \tag{2}$$

Это — радиус-вектор в k -мерном пространстве. На рис. 13.5 изображено трехмерное пространство $k = 3$. По аналогии можно представить себе соответствующее построение для любого k . Это и есть пространство шума. Так как величины n_1, n_2, \dots, n_k — координаты вектора N — случайны, то вектор N является случайным вектором. Обозначим через $P(N)$ плотность вероятности этого вектора, т. е. совместную плотность вероятности случайных величин n_1, n_2, \dots, n_k . Это — та же функция w_k (см. (1)), но лишь по-другому обозначенная. Если мы знаем функцию

$$P(N) = P(n_1, n_2, \dots, n_k), \tag{3}$$

то можно узнать вероятность попадания конца вектора N в бесконечно малый объем $d\Omega(N)$ пространства шума (рис. 13.5). Выберем этот объем, например, в виде бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда с ребрами dn_1, dn_2, \dots, dn_k . Тогда

$$d\Omega(N) = dn_1, dn_2, \dots, dn_k.$$

Пусть точка M этого параллелепипеда имеет координаты n_1, n_2, \dots, n_k . Тогда вероятность попадания конца вектора N внутрь параллелепипеда есть вероятность сложного события, заключающегося в том, что первая координата вектора находится между значениями n_1 и $n_1 + dn_1$, вторая координата — между значениями n_2 и $n_2 + dn_2$ и т. д. Очевидно, что эта вероятность равна

$$P(N) d\Omega(N) = P(n_1, n_2, \dots, n_k) dn_1 dn_2 \dots dn_k. \quad (4)$$

Обозначим множество точек пространства шума, куда может попасть конец вектора N , через $\Omega(N)$. Эта область может совпадать со всем пространством шума, но может также занимать лишь часть этого пространства. Общая вероятность попадания конца вектора N в произвольную точку области $\Omega(N)$ равна единице, так как какое-то значение шума имеется в любой момент времени. Таким образом,

$$\int_{\Omega(N)} P(N) d\Omega(N) = 1, \quad (5)$$

где индекс под интегралом означает интегрирование по всей области $\Omega(N)$.

В дальнейшем нам понадобятся еще некоторые аналогичные геометрические конструкции — пространство параметров и пространство наблюдений.

Пространство параметров связано с вектором параметров A (см. (6) § 1). Это m -мерное пространство с декартовыми координатами a_1, a_2, \dots, a_m — значениями соответствующих параметров. Начертим вектор A в этом пространстве (рис. 13.6). Так как значения его координат a_1, a_2, \dots, a_m заранее неизвестны и являются случайными величинами, то A — случайный вектор. Обозначим через $P(A)$ априорную плотность вероятности этого вектора, т. е. априорную совместную плотность вероятности $P(a_1, a_2, \dots, a_m)$ для его координат a_1, a_2, \dots, a_m . Тогда вероятность попадания конца вектора A в бесконечно малый объем $d\Omega(A)$ пространства параметров (рис. 13.6) равна $P(A) d\Omega(A)$, что легко получить с помощью таких же рассуждений, какие были проведены выше относительно вектора шума N . Формула, аналогичная (5), имеет место для вектора параметров A . Нужно лишь произвести интегрирование по $\Omega(A)$ — области возможных значений вектора A .

Рассмотрим, наконец, пространство наблюдений или, иначе, пространство принимаемого сигнала. Будем считать, что принимаемый сигнал $X(t)$ воспринимается приемным устройством не непрерывно, а в дискретные моменты времени. Пусть в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k измеряются значения $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \dots, x(t_k) = x_k$ соответственно. Измеренные значения можно изобразить в виде длин перпендикуляров, восстановленных на плоскости x, t к оси абсцисс в точках t_1, t_2, \dots, t_k , как это изображено на рис. 13.7. Однако для дальнейшего более удобно изобразить совокупность величин x_1, x_2, \dots, x_k в виде радиус-вектора X в k -мерном пространстве,

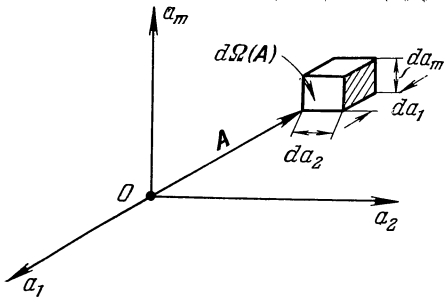


Рис. 13.6.

как это показано на рис. 13.8. Вектор X имеет координаты x_1, x_2, \dots, x_k :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (6)$$

Пространство, изображенное на рис. 13.8, называется пространством наблюдений.

Вектор X случайный, так как случайны его координаты x_1, x_2, \dots, x_k — значения принимаемого сигнала. Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что вероятность попадания конца этого вектора в бесконечно малый объем $d\Omega(X)$ пространства параметров равна $P(X) d\Omega(X)$.

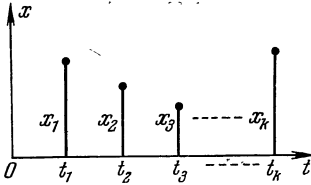


Рис. 13.7.

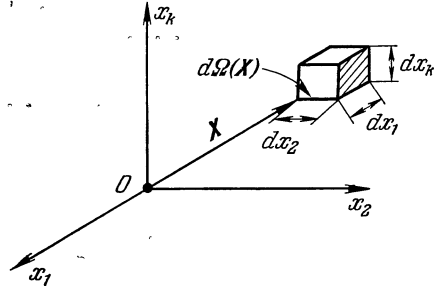


Рис. 13.8.

Здесь справедливо также выражение, аналогичное (5), причем интеграл берется по $\Omega(X)$ — области возможных значений вектора X .

Следует подчеркнуть некоторое отличие последнего случая от предыдущих. В то время как плотность вероятности $P(N)$ вектора шума N и априорная плотность вероятности $P(A)$ вектора параметров A считаются заданными и фигурируют в условиях задачи, в последних отсутствует плотность вероятности $P(X)$ вектора X принимаемого сигнала. Однако ниже будет показано, что, зная характер композиции сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$ в канале связи, а также вероятностные характеристики $S(t)$ и $n(t)$, можно в принципе определить и функцию $P(X)$. Сформулируем еще раз условия задачи, рассматриваемой в этой главе, и уточним, что может дать нам наблюдение за принимаемым сигналом $X(t)$. Пусть заранее известны:

а) вид функции, характеризующей передаваемый сигнал,

$$S(t) = S(t, A);$$

б) априорная плотность вероятности $P(A)$ вектора параметров A ;

в) плотность вероятности $P(N)$ вектора шума N ;

г) характер композиции полезного сигнала S и шума n в канале связи

$$X = X[S, n].$$

Допустим, что мы принимаем сигнал $X(t)$, измеряя его дискретные значения x_1, x_2, \dots, x_k . Таким образом мы находим вектор X . Что мы можем сказать о векторе параметров A после этого наблюдения? Прежде всего следует подчеркнуть, что в результате наблюдения вектора X нельзя, вообще говоря, точно узнать значение A . Действительно, в процессе наблюдения мы воспринимаем не только сигнал $S(t)$, но и смешанный с ним и неотделимый от него случайный шум $n(t)$. Поэтому и после опыта, заключающегося в наблюдении вектора X , распределение вероятностей различных значений A не сосредоточено исключительно на одном каком-либо значении, а «размазано», вообще говоря, по всем возможным значениям вектора A . Однако плотность вероятности после опыта — она называется апостериорной плотностью вероятности — обнаруживает тенденцию большего сосредоточения

вокруг истинного значения A , чем это имело место в априорной плотности вероятности, т. е. в плотности вероятности до опыта.

Итак, в результате опыта, в результате наблюдения вектора X , вся информация, которую мы получаем, сосредоточена в апостериорной плотности вероятности вектора A . *Апостериорная плотность вероятности может быть определена также как условная плотность вероятности A , если задан вектор X .* Оба определения апостериорной плотности вероятности эквивалентны. Поэтому мы будем обозначать апостериорную плотность вероятности через $P(A/X)$, так же как обозначают условную плотность вероятности вектора A , если задан вектор X . Если учтем, что вектор A есть совокупность параметров a_1, a_2, \dots, a_m , а X — совокупность значений x_1, x_2, \dots, x_k , то развернутая запись для $P(A/X)$ выглядит следующим образом:

$$P(A/X) = P(a_1, a_2, \dots, a_m/x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (7)$$

Каким образом, зная априорную плотность вероятности $P(A)$ и наблюдаемый вектор X , определить апостериорную плотность вероятности $P(A/X)$? Для ее вычисления можно воспользоваться формулой Бэйеса, выведенной нами в § 2 гл. XI. Здесь уместно привести другой ее вывод в форме, удобной для последующего изложения.

Начнем с того случая, когда вектор A может иметь конечное число возможных значений A_1, A_2, \dots, A_r с априорными вероятностями $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_r)$ соответственно (см. (5) § 1). Обозначим через $P(A/X)$ условную вероятность для вектора A , если задан вектор X . Обозначим также через $P(X/A) d\Omega(X)$ условную вероятность того, что конец вектора X попадает в объем $d\Omega(X)$ пространства наблюдений (см. рис. 13.8), если вектор A , задан. Найдем вероятность сложного события, заключающегося в том, что вектор параметров имеет значение A и при этом конец вектора принимаемого сигнала X попадает в объем $d\Omega(X)$. Эта вероятность, согласно формуле умножения вероятностей, равна

$$P(A) P(X/A) d\Omega(X). \quad (8)$$

Здесь $P(X/A) d\Omega(X)$ — условная вероятность попадания конца вектора X в объем $d\Omega(X)$, если задан вектор A .

Так как безразлично, каков порядок нумерации событий A и X в формуле, то эта же вероятность может быть представлена в виде

$$P(X) d\Omega(X) P(A/X). \quad (9)$$

Приравнивая (8) и (9) и сокращая на $d\Omega$, получаем

$$P(A) P(X/A) = P(X) P(A/X). \quad (10)$$

Отсюда находим искомую апостериорную вероятность

$$P(A/X) = \frac{P(A)P(X/A)}{P(X)}. \quad (11)$$

Это и есть формула Бэйеса. Если в результате наблюдения мы определим конкретное значение вектора X , то, подставив это значение в правую часть формулы (11), можно получить апостериорную вероятность $P(A/X)$. В формулу (11) входят выражения $P(X/A)$ и $P(X)$, которые необходимо еще найти. Как определяется $P(X/A)$, мы узнаем позже. Пока лишь можно, забегая вперед, указать, что эту функцию X и A можно вычислить, если известны характер композиции сигнала и шума в канале, вероятностные характеристики шума и вид функции, характеризующей сигнал, т. е. приведенные выше условия б), в), г). Что же касается безусловной плотности вероятности $P(X)$ принимаемого сигнала X , то, зная $P(A)$ и $P(X/A)$, ее можно найти следующим образом. Напишем формулы типа (10) отдельно для каждого из воз-

вероятность, равна $P(A, X) d\Omega(A) d\Omega(X)$. Согласно теореме умножения вероятностей, эта вероятность может быть, по аналогии с формулами (8) и (9), вычислена двояким способом:

$$P(A, X) d\Omega(A) d\Omega(X) = [P(A) d\Omega(A)] [P(X/A) d\Omega(X)] = \\ = [P(X) d\Omega(X)] [P(A/X) d\Omega(A)]. \quad (17)$$

После сокращения на $d\Omega(A)$ и $d\Omega(X)$ получим

$$P(A) P(X/A) = P(X) P(A/X), \quad (18)$$

откуда следует, что

$$P(A/X) = \frac{P(A) P(X/A)}{P(X)}. \quad (19)$$

Это выражение по форме тождественно (11). Следует лишь отметить, что все члены, входящие в него, являются плотностями вероятностей. $P(A/X)$ — это искомая апостериорная плотность вероятности, т. е. плотность вероятности A при условии, что стало известно значение принимаемого вектора X .

Найдем выражение для $P(X)$ — безусловной плотности вероятности вектора X , входящей в формулу (19). Для этого умножим обе части (18) на $d\Omega(A)$ и проинтегрируем по всей области $\Omega(A)$ возможных значений вектора A . Получим

$$\int_{\Omega(A)} P(A) P(X/A) d\Omega(A) = P(X) \int_{\Omega(A)} P(A/X) d\Omega(A). \quad (20)$$

Выражение $P(X)$ выведено в правой части за пределы интеграла, так как эта плотность вероятности не зависит от A . В правой части (20) находится интеграл от условной плотности вероятности A по всей области $\Omega(A)$ возможных значений вектора A , который равен единице. Поэтому

$$P(X) = \int_{\Omega(A)} P(A) P(X/A) d\Omega(A). \quad (21)$$

Эта формула является аналогом выражения (15) для непрерывного случая. Подставив формулу (21) в (19), находим

$$P(A/X) = \frac{P(A) P(X/A)}{\int_{\Omega(A)} P(A) P(X/A) d\Omega(A)}. \quad (22)$$

И здесь оказывается, что для определения апостериорной плотности вероятности $P(A/X)$ необходимо знать выражение $P(X/A)$.

Рассмотрим выражение $P(X/A)$. Если возможны несколько различных значений A_1, A_2, \dots, A_r , то при заданном векторе X выражение $P(X/A)$ может принимать несколько возможных значений: $P(X/A_1), P(X/A_2), \dots, P(X/A_r)$. В случае непрерывного распределения параметра A выражение $P(X/A)$ при заданном векторе X является функцией вектора A . Допустим, что наблюдение произведено и, таким образом, вектор X стал известен. Если подставить его в выражение $P(X/A)$, то последнее будет зависеть только от A . Изобразим его в следующем виде:

$$P(X/A) = L(A). \quad (23)$$

Функция $L(A)$ называется *функцией правдоподобия*. Если A может принимать конечное множество значений A_1, A_2, \dots, A_r , то функция правдоподобия также может принимать конечное множество значений. Если A имеет непрерывное распределение, то и $L(A)$ может принимать бесконечное множество значений, соответствующих всем возможным значениям вектора A .

С функцией правдоподобия связан так называемый принцип *максимума правдоподобия*, применяемый в математической статистике (он был предложен Р. Фишером). Этот принцип можно сформулировать в виде следующего правила: *наиболее правдоподобно то значение параметра A , для которого функция правдоподобия $L(A)$ максимальна.*

Этот принцип не может быть выведен из каких-либо предпосылок, а принимается как постулат, основанный на соображениях здравого смысла. Приведем простой пример, поясняющий эти соображения. Студент, сдавая зачет, может получить либо хорошую (зачет), либо плохую оценку (незачет). Оценка зависит в основном от его знаний. Однако приводящие обстоятельства — например, состояние здоровья или волнение отвечающего, случайная неудача или удача при выборе билета — также могут повлиять в ту или иную сторону на его ответ и, следовательно, на оценку. Будем считать для простоты, что знания A студента имеют лишь две градации — они либо хорошие (отметим это индексом $A = 1$), либо плохие (отметим индексом $A = 0$). Его ответ X также может быть либо хорошим ($X = 1$), либо плохим ($X = 0$). На основании предыдущего опыта преподаватель может составить таблицу вероятностей $P(X/A)$. В ней будут четыре числа: вероятность $p(1/1)$ хорошего ответа при хороших знаниях, вероятность $p(0/1)$ плохого ответа при хороших знаниях, вероятность $p(1/0)$ хорошего ответа при плохих знаниях и, наконец, вероятность $p(0/0)$ плохого ответа при плохих знаниях. Естественно, что $p(1/1) > p(1/0)$ и $p(0/0) > p(0/1)$. Поэтому правдоподобнее, что хорошо ответивший студент имеет хорошие знания, а не плохие; аналогично более правдоподобно, что плохо ответивший студент имеет плохие знания, а не хорошие. Допустим теперь, что экзаменатор принял сигнал X , поступивший в виде ответа от студента. Оказалось, что $X = 0$, т. е. ответ плохой. Какое решение о знаниях A студента должен вынести экзаменатор? Очевидно, он должен основываться на вероятностях $p(0/0)$ и $p(0/1)$ — плохих или хороших знаний при наличии плохого ответа. Разумное рассуждение состоит в следующем: преподаватель считает, что при данном значении $X = 0$ правдоподобнее то значение A , для которого вероятность $p(0/A)$ больше (а это и есть функция правдоподобия). Так как $p(0/0) > p(0/1)$, то экзаменатор должен дать плохую оценку знаниям студента.

В повседневной жизни каждому из нас часто приходится по интуиции пользоваться оценками типа максимума правдоподобия, не подозревая, что этот принцип можно четко сформулировать. Мы считаем более правдоподобной такую причину A , которая с большей вероятностью повлечет за собой действительно наблюдаемое следствие X . В этом и заключается принцип максимума правдоподобия.

Оценку значения параметра A по принципу максимума правдоподобия можно, согласно вышеизложенному, производить следующим образом. Допустим, что произведено наблюдение и принят сигнал X . Выпишем в случае дискретного распределения A все возможные значения функции правдоподобия:

$$L(A_1), L(A_2), \dots, L(A_r).$$

Сравнивая их друг с другом, находим наибольшее из них. Пусть это будет $L(A_j)$:

$$L(A_j) > L(A_i), \quad (24)$$

где $i \neq j$ — любое из чисел $1, 2, \dots, r$, не равное j . Действуя по принципу максимума правдоподобия, следует вынести решение о том, что наиболее правдоподобно значение $A = A_j$.

В случае непрерывного распределения параметра A необходимо найти максимум функции $L(A) = L(a_1, a_2, \dots, a_m)$, где a_1, a_2, \dots, a_m — параметры сигнала, т. е. координаты вектора A . Если L — дифференцируемая

функция параметров a_i ($i = 1, \dots, m$) и не наложены какие-либо дополнительные ограничения на значения параметров a , то значения a_i , соответствующие максимуму L , можно искать среди решений уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial a_m} = 0. \quad (25)$$

Совокупность значений a_1, a_2, \dots, a_m , соответствующая максимуму L , будет наиболее правдоподобной.

Принцип максимума правдоподобия имеет существенное практическое достоинство, заключающееся в том, что при его применении не требуется знания априорных вероятностей $p(A_j)$ различных значений A_j вектора A либо априорной плотности вероятности $P(A)$ в случае непрерывного распределения. Поэтому принцип максимума правдоподобия можно применять и при отсутствии априорных данных. Однако в том случае, когда мы располагаем априорными сведениями, не применять их нерационально. Это означало бы пренебрежение ценной информацией, с помощью которой можно улучшить и уточнить оценку. Поэтому при наличии априорных вероятностей удобнее применять иной принцип.

Этим другим принципом, связанным с применением априорных данных, является так называемый *принцип максимума апостериорной вероятности*. Рассмотрим сначала случай дискретного распределения. После прихода сигнала X можно, зная априорные вероятности $p(A_j)$, вычислить апостериорные вероятности $p(A_j/X)$ по формуле Бэйеса (16). Узнав же апостериорные вероятности, разумно выбрать такое значение A_j , которое оказалось наиболее вероятным, т. е. соответствующим максимальному значению $p(A_j/X)$.

В случае непрерывного распределения вычисление апостериорной плотности вероятности можно произвести по формуле Бэйеса (22). И в этом случае можно найти наиболее вероятное значение A , соответствующее максимуму апостериорной плотности вероятности $P(A/X)$. Решение по принципу максимума апостериорной вероятности означает выбор наиболее вероятного значения A в виде оценки того значения параметра, которым характеризуется передаваемый сигнал $S(t)$.

Принципы максимума правдоподобия и максимума апостериорной вероятности можно назвать простейшими, элементарными принципами теории статистических решений.

§ 3. Теория дуальтернативных решений

Излагаемые ниже методы теории дуальтернативных решений будут иллюстрироваться на примерах решения и исследования типовой задачи. Поэтому прежде всего сформулируем такую простую задачу, с которой мы будем иметь дело в дальнейшем. Пусть передаваемый сигнал $S = S(a, t)$ зависит от одного параметра a , причем последний может иметь лишь два возможных значения ($a = a_1$ и $a = a_0$) с априорными вероятностями p_1 и p_0 соответственно:

$$a = \begin{cases} a_1 \rightarrow p_1, \\ a_0 \rightarrow p_0. \end{cases} \quad (1)$$

Так как параметр a наверняка имеет одно из этих двух значений, то $p_1 + p_0 = 1$. Будем считать, что передаваемый сигнал имеет форму

$$S(t) = af(t), \quad (2)$$

где $f(t)$ — заданная функция. Часто мы будем принимать $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$. Таким образом, при $a \neq a_0$ сигнал $S(t) = 0$, а при $a = a_1$ сигнал $S(t)$

отличается от нуля. Следовательно, в данном случае рассматривается задача обнаружения.

Частный пример сигнала типа (2)

$$S(t) = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

где ω и φ считаются неизвестными, а параметр a может принимать одно из двух возможных значений: a_0 и a_1 .

Допустим, что характер композиции сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$ в канале известен. Пусть принимаемый сигнал $X(t)$ является их суммой

$$X(t) = S(t) + n(t). \quad (4)$$

Далее полагаем, что происходит прием дискретных значений x_1, x_2, \dots, x_k сигнала в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k соответственно.

Если положим

$$S(t_i) = S_i, \quad n(t_i) = n_i, \quad (5)$$

то на основании (4) и (5) можно написать

$$X_i = X(t_i) = S_i + n_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6)$$

Примем, что значения n_i шума представляют собой последовательность независимых случайных величин с одним и тем же законом вероятностного распределения. Пусть все величины n_i распределены нормально, имеют среднее значение, равное нулю, и дисперсию σ^2 . Тогда плотность вероятности для n_i выражается формулой

$$P(n_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n_i^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (7)$$

Задача состоит в том, чтобы после того, как принят сигнал $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, оценить, каково значение параметра a в передаваемом сигнале $S(t)$.

Задача обнаружения может быть сформулирована и так: на основании принятого сигнала $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ решить, обнаружен ли в принимаемом сигнале $X(t)$ также и передаваемый сигнал $S(t) \neq 0$ или же принимаемый сигнал содержит один только шум $n(t)$.

Каким бы методом ни решать сформулированную выше задачу, в процессе решения потребуется вычислять $P(X/a)$, т. е. функцию правдоподобия. В теории двуальтернативных решений необходимо вывести выражения для условной плотности вероятности X при значении $a = a_1$:

$$P(X/a_1) = P(X/a = a_0) = P(x_1, x_2, \dots, x_k | a = a_1) \quad (8)$$

и для условной плотности вероятности X при значении $a = a_0$

$$P(X/a_0) = P(X/a = a_0) = P(x_1, x_2, \dots, x_k | a = a_0). \quad (9)$$

Найдем эти функции для сформулированной выше типовой задачи. Сначала вычислим, например, $P(X/a_0)$.

Из (2) и (6) получаем при $a = a_0$

$$x_i = a_0 f(t_i) + n_i. \quad (10)$$

Найдем плотность вероятности для случайной величины x_i . Эта величина случайна, поскольку n_i — второе слагаемое в формуле (10) — случайно. В этой формуле слагаемое $a_0 f(t_i)$ является некоторой известной и заданной нам величиной. Найдем вероятность события, заключающегося в том, что сумма (10) слагаемых $a_0 f(t_i)$ и n_i находится между какими-то фиксирован-

ными значениями x_i и $x_i + dx_i$. Очевидно, эта вероятность равна вероятности того, что слагаемое n_i находится между значениями $[x_i - a_0 f(t_i)]$ и $[x_i + dx_i - a_0 f(t_i)]$. Между тем вероятность последнего события нетрудно найти, так как известна формула плотности вероятности (7) для n_i . На основании определения плотности вероятности получаем выражение для вероятности последнего события в виде

$$\frac{dx_i}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x_i - a_0 f(t_i)]^2}{2\sigma^2} \right\} = P(x_i/a_0) dx_i. \quad (11)$$

Вероятность указанного события по определению равна $P(x_i/a_0) dx_i$, где $P(x_i/a_0)$ — условная плотность вероятности для значения x_i , если $a = a_0$. Сократив на dx_i , находим из (11) выражение для условной плотности вероятности

$$P(x_i/a_0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x_i - a_0 f(t_i)]^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (12)$$

Так как отдельные величины n при различных i статистически независимы, то независимы и x_i (см. (10)) при различных i . Поэтому плотность вероятности для множества величин x_1, x_2, \dots, x_k равна произведению плотностей вероятности для каждой из этих величин:

$$\begin{aligned} P(X/a_0) &= P(x_1, x_2, \dots, x_k/a_0) = \\ &= P(x_1/a_0) P(x_2/a_0) \dots P(x_k/a_0) = \prod_{i=1}^k P(x_i/a_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь символ \prod используется для обозначения произведения в таком же смысле, в каком символ \sum применяется для обозначения суммы. Подставляя в формулу (13) выражение (12), находим

$$\begin{aligned} P(X/a_0) &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x_i - a_0 f(t_i)]^2}{2\sigma^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sigma^k (2\pi)^{k/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициент перед экспонентой является произведением k одинаковых сомножителей типа $(\sigma \sqrt{2\pi})^{-1}$. Выражение в показателе экспоненты имеет вид суммы, поскольку показатель произведения равен сумме показателей сомножителей.

Проводя те же вычисления при $a = a_1$ находим аналогичную формулу для условной плотности вероятности X при $a = a_1$

$$P(X/a_1) = \frac{1}{\sigma^k (2\pi)^{k/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 \right\}. \quad (15)$$

Если подставить в формулы (14) и (15) значения x_1, x_2, \dots, x_k принятого сигнала, то полученные выражения будут значениями функции правдоподобия $L(a)$ для $a = a_0$ и $a = a_1$ соответственно.

На этом примере мы убедились в том, что, зная условия задачи, можно вычислить условную плотность вероятности $P(X/a)$ и найти функцию правдоподобия

$$L(a) = P(X/a), \quad (16)$$

где предполагается, что в качестве координат вектора X подставлены ставшие известными в результате наблюдения значения x_1, x_2, \dots, x_k принятого сигнала.

Наметим теперь ход решения типовой задачи с помощью принципа максимума апостериорной вероятности, а затем метода максимума правдоподобия. После наблюдения значений x_1, x_2, \dots, x_k можно оценить апостериорную вероятность $p(a_1/X)$ для значения параметра $a = a_1$ по формуле (16) § 2 Бэйеса

$$p(a_1/X) = \frac{p(a_1)P(X/a_1)}{p(a_1)P(X/a_1) + p(a_0)P(X/a_0)}. \quad (17)$$

Здесь $p(a_1) = p_1$ — априорная вероятность для a_1 , $p(a_0) = p_0$ — априорная вероятность для a_0 ; $P(X/a_1)$ и $P(X/a_0)$ — найденные в предыдущем пункте условные плотности вероятностей, они же — значения функции правдоподобия для a_1 и a_0 соответственно.

Аналогичная формула для апостериорной вероятности $p(a_0/X)$ имеет вид

$$p(a_0/X) = \frac{p(a_0)P(X/a_0)}{p(a_1)P(X/a_1) + p(a_0)P(X/a_0)}. \quad (18)$$

Согласно принципу максимума апостериорной вероятности нужно сравнить между собой значения $p(a_1/X)$ и $p(a_0/X)$. Если первое из них больше, то следует решить, что $a = a_1$. В противном случае выносится решение, что $a = a_0$. Таким образом, нужно найти, чему равно отношение апостериорных вероятностей

$$\frac{p(a_1/X)}{p(a_0/X)} = \frac{p(a_1)P(X/a_1)}{p(a_0)P(X/a_0)} = \frac{p_1P(X/a_1)}{p_0P(X/a_0)} = \frac{p_1L(a_1)}{p_0L(a_0)}, \quad (19)$$

где подставлены значения функции правдоподобия (см. (16))

$$L(a_1) = P(X/a_1), \quad L(a_0) = P(X/a_0). \quad (20)$$

Введем обозначение

$$\Lambda(X) = \frac{L(a_1)}{L(a_0)} = \frac{P(X/a_1)}{P(X/a_0)} \quad (21)$$

и назовем величину $\Lambda(X)$ *отношением правдоподобия* *). Эта величина зависит от того, каков принятый сигнал X . Из формул (19), (21) и принятого метода решения следует, что при

$$\frac{p_1}{p_0} \Lambda(X) > 1 \quad (22)$$

выносится решение $a = a_1$. Условие (22) и вытекающее из него решение можно записать в следующем виде:

$$\Lambda(X) > \frac{p_0}{p_1} \rightarrow a = a_1. \quad (23)$$

Итак, если отношение правдоподобия окажется больше некоторого порога, равного p_0/p_1 , то выносится решение о том, что $a = a_1$. В противном случае выносится решение $a = a_0$, или, другими словами,

$$\Lambda(X) < \frac{p_0}{p_1} \rightarrow a = a_0. \quad (24)$$

*) Если решение производится по методу максимума правдоподобия, величину $\Lambda(X)$ иногда называют коэффициентом правдоподобия.

Формулы (23) и (24) можно записать вместе следующим образом:

$$\Lambda(X) \begin{cases} > \frac{p_0}{p_1} \rightarrow a = a_1, \\ < \frac{p_0}{p_1} \rightarrow a = a_0. \end{cases} \quad (25)$$

Если решение производится по методу максимума правдоподобия, то нужно вычислить значения $L(a_1)$ и $L(a_0)$ функции правдоподобия и выбрать то значение a , для которого значение функции правдоподобия больше. Но это означает, что в данном случае также нужно найти отношение правдоподобия $\Lambda(X)$ (см. (21)) и выяснить, больше оно или меньше единицы. Если $\Lambda(X) > 1$, то решаем, что $a = a_1$. Если $\Lambda(X) < 1$, то решаем, что $a = a_0$. Итак, метод решения можно выписать в форме, аналогичной (25):

$$\Lambda(X) \begin{cases} > 1 \rightarrow a = a_1, \\ < 1 \rightarrow a = a_0. \end{cases} \quad (26)$$

Сравнение методов решения (25) и (26) показывает, что они имеют один и тот же вид. В любом случае вычисляется отношение правдоподобия $\Lambda(X)$, и решение принимается в зависимости от того, окажется ли $\Lambda(X)$ больше или меньше некоторого порогового значения. Формулы (25) и (26) полностью совпадают в случае равенства априорных вероятностей p_0 и p_1 , т. е. когда и та и другая равны 0,5.

Найдем сначала решение типовой задачи, исходя из принципа максимума правдоподобия. Формулы для $P(X/a_0)$ и $P(X/a_1)$ были найдены выше (см. (14) и (15)), поэтому можно найти отношение правдоподобия (см. (21))

$$\Lambda(X) = \frac{P(X/a_1)}{P(X/a_0)} = \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 + \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (27)$$

Подставляя это выражение в условие (26), можно по измеренным значениям x_1, x_2, \dots, x_k вынести решение о значении a .

Вместо величины $\Lambda(X)$ удобнее рассматривать ее натуральный логарифм, т. е. показатель степени экспоненты (27). Введем новую величину

$$F(X) = \ln \Lambda(X) 2\sigma^2 = -\sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 + \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2. \quad (28)$$

Так как при $F(X) > 0$ величина $\Lambda(X) > 1$ и при $F(X) < 0$ величина $\Lambda(X) < 1$, то условие (28) преобразуется в следующее:

$$F(X) = \begin{cases} > 0 \rightarrow a = a_1, \\ < 0 \rightarrow a = a_0, \end{cases} \quad (29)$$

где $F(X)$ определяется формулой (28).

Этот метод решения имеет простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим пространство наблюдений (рис. 13.9). Начертим в этом пространстве векторы с координатами $a_0 f(t_i)$ и $a_1 f(t_i)$, которые обозначим через OM_0 и OM_1 соответственно. Поскольку их координаты отличаются только масштабами, то эти два вектора коллинеарны (если $a_0 = 0$, то точки M_0 и O совпадают). Допустим, что принят некоторый сигнал; отложим соответствующий вектор X в пространстве наблюдений и обозначим буквой M точку, в которую попал его конец.

Если бы шум отсутствовал ($n_i = 0$) и значение параметра было равно a_0 , то точка M совпала бы с точкой M_0 . Если бы при отсутствии шума значение параметра a в передаваемом сигнале было равно a_1 , то точка M совпала бы с точкой M_1 . В действительности ввиду наличия шума точка M , вообще говоря, не совпадает ни с M_0 , ни с M_1 . Но интуитивно чувствуется, что если M близка к M_0 , то следует решить, что $a = a_0$; если же M близка к M_1 , то следует решить, что $a = a_1$.

Метод решения (29) чрезвычайно просто поддается интерпретации в пространстве наблюдений, если, с учетом (28), переписать условие (29) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2 > \sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 \rightarrow a = a_1, \\ \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2 < \sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 \rightarrow a = a_0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Сумма, стоящая в левой части этих неравенств, есть не что иное, как сумма квадратов координат вектора M_0M (рис. 13.9), или, иначе, квадрат его длины $(M_0M)^2$. Суммы же, стоящие в правой части неравенств (30), это квадрат длины вектора M_1M , т. е. $(M_1M)^2$. Поэтому условия (30) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\left. \begin{aligned} |M_0M| > |M_1M| \rightarrow a = a_1, \\ |M_0M| < |M_1M| \rightarrow a = a_0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Здесь $|M_0M|$ и $|M_1M|$ — модули (длины) соответствующих векторов. Условие (31) означает, что если точка M окажется ближе к M_1 , чем к M_0 , то следует решить, что $a = a_1$. В противном случае выносится решение $a = a_0$.

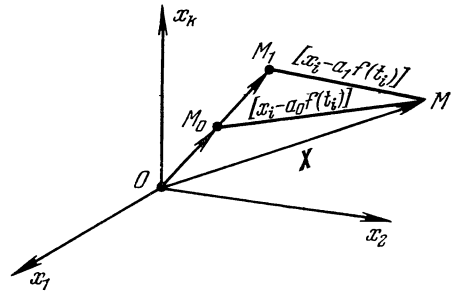


Рис. 13.9.

Метод, основанный на принципе максимума апостериорной вероятности, как показано выше, сводится к процедуре, символически выраженной условиями (25). Отношение правдоподобия $\Lambda(X)$, найденное выше, выражается формулой (27). Подставив в (27) наблюдаемые значения x_1, x_2, \dots, x_k , следует произвести в данном случае решение, воспользовавшись условиями (25). Удобнее вместо $\Lambda(X)$ воспользоваться логарифмом этой величины или функцией $F(X)$ (см. (28)). Тогда условие (25) заменяется условием $\ln \Lambda(X) \geq \ln p_0/p_1$ или

$$F(X) \left\{ \begin{aligned} > 2\sigma^2 \ln \frac{p_0}{p_1} = h' \rightarrow a = a_1, \\ < 2\sigma^2 \ln \frac{p_0}{p_1} = h' \rightarrow a = a_0. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Таким образом, решение определяется значением $F(X)$ и зависит от того, будет ли эта величина больше или меньше порога h' . В свою очередь величина и даже знак порога h' зависят от отношения априорных вероятностей p_0 и p_1 .

Рассмотренная выше процедура оптимального обнаружения содержит совершенно четкое предписание о том, как действовать в любой ситуации. Такое предписание в математике называется *алгоритмом*. Таким образом, выше были выведены алгоритмы оптимального обнаружения как по методу максимума апостериорной вероятности, так и по методу максимума правдоподобия. Эти алгоритмы могут выполняться человеком-оператором. Но

можно поручить осуществление соответствующей процедуры и автомату, заложив в него найденный алгоритм. Покажем, как можно построить схему автомата для оптимального обнаружения по методу, основанному на принципе максимума правдоподобия. Сначала, однако, рассмотрим случай непрерывного приема сигнала, который в ряде практических применений может оказаться более интересным, чем рассмотренный выше прием дискретных значений. Конечно, в силу теоремы В. А. Котельникова, при приеме дискретных значений вместо непрерывного сигнала информация о нем не теряется,

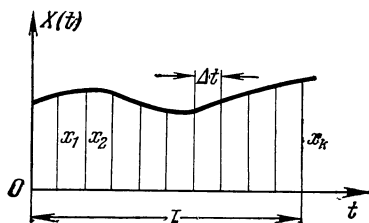


Рис. 13.10.

если только интервалы времени между дискретами достаточно малы. Но схема системы оптимального обнаружения в случае непрерывного приема сигнала часто оказывается технически проще, чем при приеме ряда дискретных значений, вследствие чего она и представляет больший практический интерес.

Допустим, что сигнал $X(t)$ принимается в течение некоторого времени от $t = 0$ до $t = T$ (рис. 13.10). Перейдем к непрерывному приему сигнала, отправляясь от рассмотренной выше задачи с приемом дискретных значений сигнала. Чтобы осуществить этот переход, условимся сначала, что принимаемые дискретные значения x_1, x_2, \dots, x_k отделены друг от друга равными промежутками времени длительности Δt . Таким образом,

$$\Delta t = \frac{T}{k}. \quad (33)$$

Если, сохраняя величину T постоянной, устремить k к бесконечности, то Δt устремится к нулю, дискретные значения беспредельно сблизятся друг с другом, и в пределе мы перейдем к приему непрерывных сигналов.

Перед переходом к пределу умножим обе части формулы (30) на Δt . При этом мы получим следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2 \Delta t &> \sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 \Delta t \rightarrow a = a_1, \\ \sum_{i=1}^k [x_i - a_0 f(t_i)]^2 \Delta t &< \sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 \Delta t \rightarrow a = a_0. \end{aligned}$$

Если теперь устремить k к бесконечности, а Δt к нулю, то вместо сумм в этих условиях появятся интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T [X - a_0 f(t)]^2 dt &> \int_0^T [X - a_1 f(t)]^2 dt \rightarrow a = a_1, \\ \int_0^T [X - a_0 f(t)]^2 dt &< \int_0^T [X - a_1 f(t)]^2 dt \rightarrow a = a_0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Преобразуем эти выражения для случая обнаружения, когда $a_0 = 0$. В этом случае, например, первое из условий (34) можно переписать в следующем виде:

$$\int_0^T X^2(t) dt > \int_0^T X^2(t) dt - 2 \int_0^T X(t) [a_1 f(t)] dt + \int_0^T [a_1 f(t)]^2 dt \rightarrow a = a_1. \quad (35)$$

Введем обозначение

$$\int_0^T [a_1 f(t)]^2 dt = E_0. \tag{36}$$

Тогда условие (35) примет вид

$$\int_0^T X(t) [a_1 f(t)] dt > \frac{E_0}{2} \rightarrow a = a_1. \tag{37}$$

Величина E_0 — интеграл от квадрата сигнала $S(t) = a_1 f(t)$ за время T называется энергией сигнала (см. гл. XI). Условие (37) указывает, что если интеграл в левой части неравенства окажется большим половины энергии сигнала, то следует решить, что $a = a_1$, т. е. решить, что сигнал обнаружен. В противном случае выносится решение об отсутствии сигнала ($a = a_0 = 0$).

По формуле (37) можно построить структурную схему системы оптимального обнаружения, показанную на рис. 13.11.

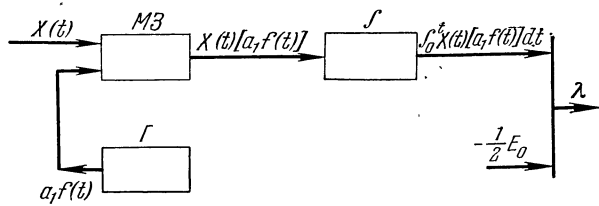


Рис. 13.11.

В этой схеме вычислительное устройство формирует интеграл, стоящий в левой части неравенства (37). Чтобы получить этот интеграл, необходимо сначала перемножить в множительном звене $МЗ$ приходящий извне сигнал $X(t)$ и функцию $S(t) = a_1 f(t)$, вырабатываемую местным генератором сигнала $Г$. На выходе $МЗ$ получается произведение $X(t) [a_1 f(t)]$. (Для простоты считаем масштабный коэффициент множительного звена равным единице.) Произведение $X(t) [a_1 f(t)]$ поступает на вход интегрирующего звена, помеченного знаком \int . Пусть звено «очищено» в момент времени $t = 0$, т. е. его выходная величина в этот момент времени равна нулю. Тогда при $t > 0$ на его выходе получается интеграл

$$\int_0^t X(t) [a_1 f(t)] dt.$$

В момент времени $t = T$ этот интеграл окажется равным

$$\int_0^T X(t) [a_1 f(t)] dt, \tag{38}$$

т. е. получим как раз левую часть неравенства (37). Это значение сравнивается с постоянной величиной $E_0/2$; другими словами, эта величина вычитается из интеграла. Знак разности $(\lambda)_{t=T}$ определяет решение. Если $(\lambda)_{t=T} > 0$, то выносится решение $a = a_1$; если же $(\lambda)_{t=T} < 0$, то аппарат «решает», что $a = a_0 = 0$.

Пусть, например, сигнал $S(t)$ представляет собой высокочастотное колебание

$$S(t) = a_1 \cos \omega t.$$

Тогда, если во входном сигнале $X(t)$ присутствует составляющая $S(t)$, на выходе звена $МЗ$ появится слагаемое вида

$$a_1^2 \cos \omega t = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} \cos 2\omega t.$$

В этом выражении имеется постоянная составляющая $a_1^2/2$. Следовательно, множительное звено $MЗ$ осуществляет детектирование в принципе так же, как и обычная схема с выпрямителем. Детектирование, осуществляемое с помощью умножения на сигнал $[a_1 f(t)]$, называется синхронным. Таким образом, первый блок системы оптимального обнаружения осуществляет *синхронное детектирование*. Следующий блок — интегрирующее звено — формирует интеграл (38). Интегрирование произведения $X(t)$ на $[a_1 f(t)]$ носит название *когерентного интегрирования*.

Ниже будут рассмотрены системы оптимального обнаружения, работающие на других принципах. Однако и в других типах систем обнаружения встречаются те же блоки: блок синхронного детектирования и блок когерентного интегрирования.

При любом статистическом подходе решение не может быть всегда безошибочным. Ошибки в решении неизбежны, так как оценка значения параметра a производится на основании наблюдения случайных величин x_1, x_2, \dots

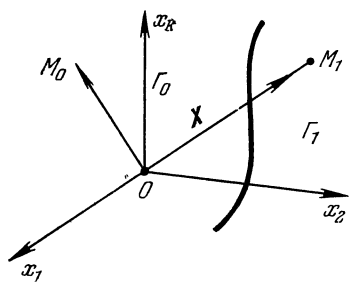


Рис. 13.12.

\dots, x_k . Ввиду большого значения ошибок при решениях необходимо подробное обсуждение этого вопроса.

Рассмотрим пространство наблюдений (рис. 13.12). Каждой наблюдаемой реализации последовательности x_1, x_2, \dots, x_k отвечает некоторый вектор X пространства наблюдений и, следовательно, точка M его конца. В результате наблюдения, сводящегося к определению точки M , наблюдатель или заменяющий его автомат должен вынести решение, имеет ли параметр a значение a_1 или a_0 . Допустим, что выбран ка-

кой-то определенный метод решения. Тогда каждой наблюдаемой точке M соответствует некоторое определенное решение. Одним точкам пространства наблюдений соответствует решение $a = a_1$; другим точкам этого пространства соответствует решение $a = a_0$. Следовательно, все точки пространства наблюдений разбиваются на два класса:

- а) множество точек, соответствующих решению $a = a_1$. Это множество образует область Γ_1 пространства наблюдений (рис. 13.12);
- б) множество точек, соответствующих решению $a = a_0$. Это множество образует область Γ_0 пространства наблюдений.

Например, точка M_1 на рис. 13.12 принадлежит области Γ_1 , а точка M_0 — области Γ_0 .

Итак, любой метод решения сводится к разбиению всего пространства наблюдений на две области: Γ_1 и Γ_0 . Область Γ_1 называется *областью принятия гипотезы $a = a_1$* , она же *областью непринятия гипотезы $a = a_0$* . Аналогично область Γ_0 называется *областью принятия гипотезы $a = a_0$* и *критической областью относительно гипотезы $a = a_1$* или *областью непринятия гипотезы $a = a_1$* . Если $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$, т. е. рассматривается задача обнаружения, то Γ_1 называется просто *критической областью* (без добавления: относительно гипотезы $a = 0$) или *областью принятия гипотезы $a \neq 0$* .

Различным методам решения соответствуют различные разбиения пространства наблюдений на области Γ_1 и Γ_0 .

Каков наилучший метод решения? Каково наилучшее разбиение пространства наблюдений на области Γ_1 и Γ_0 ? Чтобы сформулировать определенную точку зрения на этот вопрос, необходимо учесть, что любому методу решения свойственны ошибки. Любые ошибки можно разделить на два типа.

- а) *Ошибка 1-го рода* заключается в следующем: принимается, что $a = a_1$, между тем как в действительности $a = a_0$. Если речь идет о задаче обнару-

жения, то такая ошибка означает, что принимается решение о наличии сигнала $S(t)$, в то время как на самом деле сигнал отсутствует. Эта ошибка называется иногда *ошибкой ложной тревоги*.

б) *Ошибка 2-го рода* возникает тогда, когда принимается, что $a = a_0$, между тем как в действительности $a = a_1$. В применении к задаче обнаружения это означает, что принимается решение об отсутствии сигнала $S(t)$, в то время как на самом деле сигнал имеется. Эта ошибка иногда называется *ошибкой ложного отбоя* или *ошибкой пропуска сигнала*.

Рассмотрим теперь вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. Обозначим буквой α вероятность ошибки 1-го рода. Это — вероятность решения $a = a_1$ при условии, что на самом деле $a = a_0$. Далее, буквой β обозначим вероятность ошибки 2-го рода. Это — вероятность принять решение $a = a_0$ при условии, что на самом деле $a = a_1$.

С геометрической точки зрения α — это вероятность попадания конца вектора X в область Γ_1 (рис. 13.12), в то время как на самом деле $a = a_0$. Иначе говоря, это — условная вероятность события, заключающегося в попадании точки M в область Γ_1 , если $a = a_0$. Точно так же β это условная вероятность попадания точки M в область Γ_0 , если $a = a_1$.

Пусть $P(X/a_0)$ — условная плотность вероятности вектора X , если $a = a_0$. Тогда вероятность α попадания его конца в область Γ_1 есть сумма бесконечно малых вероятностей $P(X/a_0) d\Omega(X)$ попадания во все бесконечно малые объемы этой области, т. е. интеграл от $P(X/a_0) d\Omega(X)$ по области Γ_1

$$\alpha = \int_{\Gamma_1} P(X/a_0) d\Omega(X). \quad (39)$$

Величина α в математической статистике называется *уровнем значимости*.

Пусть $P(X/a_1)$ — условная плотность вероятности вектора X , если $a = a_1$, тогда вероятность β попадания его конца в область Γ_0 равна интегралу от $P(X/a_1) d\Omega(X)$, взятому по этой области:

$$\beta = \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X). \quad (40)$$

Представляет интерес также вероятность ϵ правильного решения при условии, что $a = a_1$. Эта величина называется в математической статистике *мощностью решения*. Очевидно,

$$\epsilon = 1 - \beta = 1 - \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X). \quad (41)$$

Так как ϵ есть вероятность попадания конца вектора X в область Γ_1 при условии, что $a = a_1$, то можно найти ϵ также по формуле

$$\epsilon = \int_{\Gamma_1} P(X/a_1) d\Omega(X). \quad (42)$$

Формулы (41) и (42) идентичны. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что интеграл от $P(X/a_1)$, взятый по всему пространству наблюдений Γ , равному $\Gamma_1 + \Gamma_0$ (сумме областей Γ_1 и Γ_0), равняется единице:

$$\int_{\Gamma} P(X/a_1) d\Omega(X) = \int_{\Gamma_1} P(X/a_1) d\Omega(X) + \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X) = 1. \quad (43)$$

Напишем также формулу для вероятности μ правильного решения при $a = a_0$:

$$\mu = 1 - \alpha = \int_{\Gamma_0} P(X/a_0) d\Omega(X). \quad (44)$$

Найдем теперь общую вероятность ошибки. Пусть p_0 и p_1 — априорные вероятности значений a_0 и a_1 параметра a соответственно. Тогда безусловная вероятность ошибки 1-го рода — это вероятность сложного события, состоящего в том, что параметр a имеет значение a_0 , и при этом условии производится решение $a = a_1$. Вероятность первого из этих событий равна p_0 , а условная вероятность второго равна α . Следовательно, вероятность указанного выше сложного события равна $p_0\alpha$. Рассуждая таким же образом, можно найти безусловную вероятность ошибки 2-го рода, т. е. вероятность того, что $a = a_1$, и при этом условии производится решение $a = a_0$. Эта безусловная вероятность равна $p_1\beta$. Общая безусловная вероятность Q ошибки равна сумме безусловных вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода:

$$Q = p_0\alpha + p_1\beta. \quad (45)$$

Для любого метода решения можно по формулам (39), (40) и (45) подсчитать вероятности различных ошибок. Чем меньше вероятности ошибок, тем, вообще говоря, лучше метод решения. Однако выбор наилучшего метода определяется выбором критерия оптимальности, а этот последний в зависимости от условий задачи можно выбирать различными способами. Ниже рассматриваются некоторые критерии оптимальности и обусловленные ими оптимальные методы решения, получившие применение в теоретических построениях и практических расчетах.

Не всегда ошибки 1-го и 2-го рода одинаково опасны. В некоторых случаях ошибка ложной тревоги влечет за собой столь неприятные последствия или столь большие убытки, что ее вероятность необходимо ограничить какой-либо заданной малой величиной. Однако и ошибки 2-го рода также нежелательны. При таком подходе можно считать наилучшим метод решения, обеспечивающий наименьшую вероятность пропуска сигнала при заданной вероятности ложной тревоги. Этот критерий был предложен Нейманом и, независимо от него, Пирсоном.

Итак, *оптимальный метод решения по критерию Неймана — Пирсона* имеет следующее свойство: при заданной безусловной вероятности ложной тревоги

$$p_0\alpha = \text{const} = c_0 \quad (46)$$

он обеспечивает минимум безусловной вероятности пропуска сигнала

$$p_1\beta = \text{min}. \quad (47)$$

Подставив выражения для α и β из (39) и (40) в формулы (46) и (47), перепишем их в развернутом виде:

$$p_0 \int_{\Gamma_1} P(X/a_0) d\Omega(X) = c_0 \quad (48)$$

и

$$p_1 \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X) = \text{min}. \quad (49)$$

Пусть p_0 и p_1 заданы. Минимальное значение $p_1\beta$ соответствует минимуму β . При этом величина ε — мощность решения — максимальна. Поэтому *критерий Неймана — Пирсона можно сформулировать* и так: *оптимальным методом решения является такой метод, который при заданном уровне значимости (т. е. величина α) обеспечивает максимальную мощность решения.*

Рассмотрим геометрическую интерпретацию условий (48) и (49) в пространстве наблюдений. Первое из этих условий означает, что область Γ_1 нельзя выбирать слишком большой, ибо интеграл от $P(X/a_0)$, взятый по этой области, должен быть равен малой величине c_0/p_0 . Однако это условие еще

не позволяет однозначно выбрать область Γ_1 , или, что одно и то же, метод разбиения всего пространства Γ наблюдений на области Γ_1 и Γ_0 . Условие (49) требует такого выбора границы областями Γ_1 и Γ_0 , чтобы при соблюдении условия (48) интеграл по Γ_0 от $P(X/a_1)$ был минимален. Само по себе условие (49) не имеет смысла, так как ему удовлетворяло бы решение $\Gamma_0 = 0$, причем область Γ_1 расширилась бы до размеров всего пространства наблюдений. Именно совокупность условий (48) и (49) позволяет однозначно выбрать оптимальное разбиение пространства Γ на области Γ_1 и Γ_0 .

Найдем области Γ_1 и Γ_0 , являющиеся оптимальными для критерия Неймана — Пирсона. Условия (48) и (49) определяют задачу нахождения условного экстремума, т. е. минимума выражения $p_1\beta$ (см. (49)) при условии (48). Как известно, для нахождения условного экстремума можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа. Чтобы решить задачу, нужно найти минимум вспомогательного выражения G , описываемого формулой

$$G = \lambda p_0 \int_{\Gamma_1} P(X/a_0) d\Omega(X) + p_1 \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X) = \min. \quad (50)$$

Здесь λ — неопределенный множитель. Это — постоянная величина, которую можно, вообще говоря, определить из условия (48). Перепишем выражение (50), воспользовавшись равенством (44):

$$G = \lambda p_0 \int_{\Gamma_1} P(X/a_0) d\Omega(X) + p_1 \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X) - p_1 \int_{\Gamma_1} P(X/a_1) d\Omega(X). \quad (51)$$

Так как второй из интегралов в этой формуле равен единице, то

$$G = p_1 - \int_{\Gamma_1} [p_1 P(X/a_1) - \lambda p_0 P(X/a_0)] d\Omega(X). \quad (52)$$

Выражение G станет минимальным тогда, когда интеграл в этой формуле будет максимален. Этому условию можно удовлетворить, если подобрать область Γ_1 таким образом, чтобы она охватывала все те и только те точки пространства наблюдений, в которых подынтегральная функция положительна. Действительно, если область интегрирования содержит некоторые точки, в которых подынтегральная функция отрицательна, то часть интеграла, взятая по дополнительной области, где подынтегральная функция отрицательна, сама также является отрицательной. Следовательно, для того чтобы увеличить интеграл, нужно исключить из области интегрирования все точки, в которых подынтегральная функция отрицательна. Далее, если область интегрирования не охватывает некоторые точки, в которых подынтегральная функция положительна, то интеграл можно еще увеличить, распространив область интегрирования на эти точки. Поэтому оптимальную область Γ_1 нужно подобрать так, чтобы в нее входили лишь все точки, удовлетворяющие условию

$$p_1 P(X/a_1) - \lambda p_0 P(X/a_0) > 0 \quad (53)$$

или

$$\frac{P(X/a_1)}{P(X/a_0)} > \frac{\lambda p_0}{p_1} = h. \quad (54)$$

Здесь h — некоторый порог. Это неравенство описывает оптимальный метод решения по Нейману — Пирсону. Если оно удовлетворяется для некоторого наблюдаемого вектора X , то данная точка принадлежит области Γ_1 , т. е.

считаем, что $a = a_1$. Если удовлетворяется противоположное неравенство

$$\frac{P(X/a_1)}{P(X/a_0)} < \frac{\lambda p_0}{p_1} = h, \quad (55)$$

то считаем, что $a = a_0$.

В левой части неравенств (54) и (55) стоит отношение правдоподобия $\Lambda(X)$. Поэтому их можно записать в виде условий

$$\Lambda(X) \begin{cases} > \frac{\lambda p_0}{p_1} = h \rightarrow a = a_1, \\ < \frac{\lambda p_0}{p_1} = h \rightarrow a = a_0. \end{cases} \quad (56)$$

Сравним этот метод решения с методами, найденными ранее по критериям максимума правдоподобия и максимума апостериорной вероятности (см. (25) и (26)). Оказывается, все эти условия имеют один и тот же вид: если $\Lambda(X)$ больше некоторого порога h , то выносится решение $a = a_1$. В противном случае принимается решение $a = a_0$. Разница между методами состоит лишь в величине порога h .

Чтобы найти этот порог для критерия Неймана — Пирсона, необходимо вычислить λ в выражении (56). Определение порога h производится ниже. Предварительно, однако, рассмотрим иной подход к выбору оптимального метода решения.

Если ошибки 1-го и 2-го рода одинаково опасны, то наилучшим методом решения следует считать такой, который обеспечивает минимум общей безусловной вероятности Q ошибки (см. (45)). Именно этот критерий был использован В. А. Котельниковым при решении задачи о синтезе оптимального приемника.

Итак, условие оптимального метода решения по критерию Котельникова *) имеет вид

$$Q = p_0\alpha + p_1\beta = \min. \quad (57)$$

Подставив сюда выражения α и β из (39) и (40), приходим к развернутому выражению

$$Q = p_0 \int_{\Gamma_1} P(X/a_0) d\Omega(X) + p_1 \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X) = \min. \quad (58)$$

Пользуясь (43), переписываем выражение (58) в иной форме:

$$\begin{aligned} Q &= p_0 \int_{\Gamma_1} P(X/a_0) d\Omega(X) + p_1 \int_{\Gamma_0} P(X/a_1) d\Omega(X) - p_1 \int_{\Gamma_1} P(X/a_1) d\Omega(X) = \\ &= p_1 - \int_{\Gamma_1} [p_1 P(X/a_1) - p_0 P(X/a_0)] d\Omega(X) = \min. \end{aligned} \quad (59)$$

Для того чтобы Q было минимально, интеграл в формуле (59) должен быть максимален. Этого можно добиться, если выбрать область Γ_1 таким образом, чтобы она охватывала все те и только те точки пространства наблюдений, в которых подынтегральная функция положительна. Итак, все точки, в которых

$$p_1 P(X/a_1) - p_0 P(X/a_0) > 0, \quad (60)$$

принадлежат области Γ_1 . Это означает, что неравенство (60) определяет условия принятия решения $a = a_1$. Противоположному неравенству соответствует решение $a = a_0$.

*) Этот критерий иногда называется критерием идеального наблюдателя.

Условие (60) и противоположное ему можно переписать в следующем виде:

$$\Lambda(X) \begin{cases} > \frac{p_0}{p_1} = h \rightarrow a = a_1, \\ < \frac{p_0}{p_1} = h \rightarrow a = a_0. \end{cases} \quad (61)$$

Таким образом, метод решения, оптимальный по Котельникову, имеет тот же характер, что и рассмотренные ранее методы. Величина порога h получилась такой же, как и в методе максимума апостериорной вероятности (см. (25)). Однако теперь метод решения уже не произволен, а обоснован весьма веской аргументацией; ибо доказано, что именно этот метод обеспечивает минимум вероятности ошибки.

§ 4. Характеристики систем оптимального обнаружения

Вернемся к типовой задаче, сформулированной в начале § 3 (см. уравнения (1) — (15) § 3). Предполагая, что $a_0 = 0$, построим для этой задачи систему оптимального обнаружения по критерию Неймана — Пирсона. Сначала рассмотрим дискретный случай. Отношение правдоподобия для этого случая определяется равенством (27) § 3. Поэтому, положив здесь $a_0 = 0$, запишем правило решения (27) § 3 для системы оптимального обнаружения в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2 + \sum_{i=1}^k x_i^2}{2\sigma^2} \right\} > h \rightarrow a = a_1. \quad (1)$$

При этом принято, что выполнение противоположного неравенства влечет за собой решение $a = a_0 = 0$. Порог h можно вычислить, но это мы отложим на дальнейшее.

Логарифмируем обе стороны неравенства (1), преобразуем его левую часть, раскрывая скобки в первой сумме, и получаем

$$a_1 \sum_{i=1}^k x_i f(t_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [a_1 f(t_i)]^2 > \sigma^2 \ln h \rightarrow a = a_1. \quad (2)$$

Представляет интерес предельный переход к случаю непрерывного измерения функции $X(t)$ в интервале от $t = 0$ до $t = T$.

Подобный переход производился выше для системы обнаружения, работающей по критерию максимума правдоподобия. Дискретные значения x_1, x_2, \dots, x_k принимаемого сигнала предполагаются разделенными промежутками времени длительности Δt (см. рис. 13.10). Если затем устремить Δt к нулю, то переходим к непрерывному случаю. Проведем аналогичное рассуждение для системы оптимального обнаружения, работающей согласно условию (2). Для этого предварительно умножим обе части неравенства (2) на Δt :

$$\sum_{i=1}^k x_i a_1 f(t_i) \Delta t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [a_1 f(t_i)]^2 \Delta t > \sigma^2 \ln h \Delta t \rightarrow a = a_1. \quad (3)$$

Если устремить теперь Δt к нулю, то суммы в левой части неравенства превращаются в интегралы. В данном случае, однако, возникают некоторые затруднения, связанные с правой частью неравенства.

Если положить $\sigma^2 = \text{const}$, то правая часть неравенства (3) стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Однако случай $\sigma^2 = \text{const}$ не представляет существенного практического интереса. Действительно, при непрерывном измерении наиболее часто полезный сигнал искажается белым шумом. Поэтому потребуем, чтобы шум $n(t)$ в предельном случае становился белым. Между тем белый шум нельзя получить предельным переходом из последовательности независимых случайных величин с конечной дисперсией $\sigma^2 = \text{const}$. Уже показывалось, что дисперсия белого шума бесконечно велика (см. также гл. X). Если $S = \text{const}$ — его спектральная плотность, то дисперсия определяется из формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S d\omega = \infty. \tag{4}$$

Поэтому, чтобы получить в пределе из последовательности случайных величин n_i белый шум, необходимо при $\Delta t \rightarrow 0$ устремить дисперсию σ^2 к бесконечности. Положим

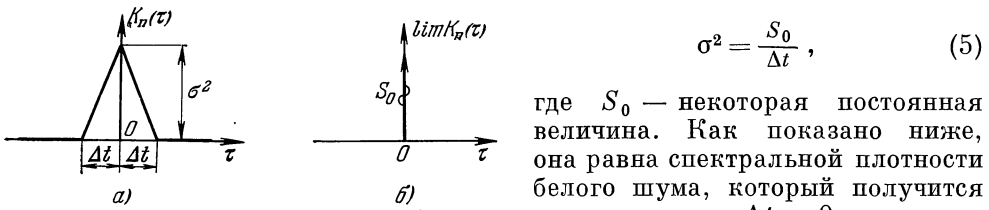


Рис. 13.13.

$$\sigma^2 = \frac{S_0}{\Delta t}, \tag{5}$$

где S_0 — некоторая постоянная величина. Как показано ниже, она равна спектральной плотности белого шума, который получится в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$.

Удобно еще до перехода к пределу рассматривать шум $n(t)$ в любой момент времени как некоторый стационарный случайный процесс, который в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ становится белым шумом. Следует так определить этот процесс, чтобы в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k его значения по-прежнему являлись независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым средним значением и дисперсиями, определяющимися выражением (5). Этому требованию удовлетворяет стационарный случайный процесс, корреляционная функция которого $K_n(\tau)$ показана на рис. 13.13. Так как $K_n(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq \Delta t$, то значения процесса, отделенные друг от друга интервалами времени, большими или равными Δt , не коррелированы друг с другом. Это соответствует требованию отсутствия связи между значениями $n(t_i)$ при различных t_i .

Далее, при $\Delta t \rightarrow 0$ «треугольник» кривой $K_n(\tau)$ переходит в импульсную функцию (рис. 13.13), а интеграл от этой импульсной функции определяется площадью кривой $K_n(\tau)$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 2\Delta t = \sigma^2 \Delta t = \frac{S_0}{\Delta t} \Delta t = S_0. \tag{6}$$

Итак, в пределе корреляционная функция оказывается импульсной функцией вида $S_0 \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — единичная импульсная функция. Поэтому спектральная плотность шума $S_n(\omega)$ оказывается равной

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_0 [e^{-j\omega\tau}]_{\tau=0} = S_0 = \text{const}. \tag{7}$$

Итак, получаем в пределе белый шум со спектральной плотностью S_0 . Возвратимся к неравенству (3). Правая часть неравенства равна

$$\sigma^2 \ln h \cdot \Delta t = \frac{S_0}{\Delta t} \ln h \cdot \Delta t = S_0 \ln h. \tag{8}$$

Поэтому в пределе, заменяя суммы интегралами при $\Delta t \rightarrow 0$, находим

$$\int_0^T x(t) [a_1 f(t)] dt - \frac{1}{2} \int_0^T [a_1 f(t)]^2 dt > S_0 \ln h \rightarrow a = a_1. \quad (9)$$

Если учесть обозначение (36) § 3 для энергии сигнала и разделить на S_0 обе части неравенства, то условие (9) приобретает вид

$$I = \frac{1}{S_0} \int_0^T x(t) [a_1 f(t)] dt > \ln h + \frac{E_0}{2S_0} = h_1 \rightarrow a = a_1. \quad (10)$$

Итак, система оптимального обнаружения может быть построена по схеме, изображенной на рис. 13.11. С помощью синхронного детектирования и когерентного интегрирования находится значение интеграла I , которое и сравнивается с порогом h_1 . Если $I > h_1$, то принимается решение $a = a_1$. В противном случае выносится решение $a = a_0 = 0$.

Чтобы вычислить порог h_1 , необходимо определить величину h . А эту величину надо определить таким образом, чтобы соблюдалось условие $p_0 \alpha = \text{const} = c_0$ для вероятности ложной тревоги. Поэтому для системы обнаружения, описываемой условием (10), необходимо построить выражение для вероятности α ложной тревоги и тем самым связать между собой величины α и h .

В данном примере вероятность α ложной тревоги — это вероятность того, что при отсутствии сигнала $S(t)$ интеграл I окажется больше порога h_1 (вследствие чего будет произведено неправильное решение $a = a_1$). Если сигнал $S(t)$ отсутствует, то принимаемый сигнал содержит только шум $n(t)$:

$$X(t) = S(t) + n(t) = n(t). \quad (11)$$

В этом случае условие (10) принимает вид

$$(I)_{X(t)=n(t)} = I_0 = \frac{1}{S_0} \int_0^T n(t) [a_1 f(t)] dt > h_1. \quad (12)$$

Необходимо определить вероятность осуществления неравенства (12).

Интеграл I_0 является случайной величиной, так как в подынтегральном выражении фигурирует случайный шум $n(t)$. Если бы плотность распределения вероятностей случайной величины I_0 была известна, то определить вероятность выполнения неравенства (12) было бы совсем нетрудно. Следовательно, нужно найти закон вероятностного распределения величины I_0 . Это — закон нормального распределения. Действительно, белый шум $n(t)$, полученный как предел последовательности нормально распределенных величин $n(t_1)$, в любой фиксированный момент времени является нормально распределенной случайной величиной. Поэтому интеграл I_0 , являющийся суммой бесконечного множества нормально распределенных слагаемых, как известно из теории вероятностей, сам также представляет собой нормально распределенную величину. Отсюда следует, что формулу для плотности вероятности I_0 можно будет написать, коль скоро мы узнаем среднее значение $M\{I_0\}$ и дисперсию σ_1^2 этой случайной величины.

Найдем сначала среднее значение I_0 :

$$\begin{aligned} M\{I_0\} &= \frac{1}{S_0} M \left\{ \int_0^T n(t) [a_1 f(t)] dt \right\} = \\ &= \frac{1}{S_0} \int_0^T M \{n(t) [a_1 f(t)]\} dt = \frac{1}{S_0} \int_0^T M \{n(t)\} [a_1 f(t)] dt = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

так как $M \{n(t)\} = 0$ — ведь среднее значение шума равно нулю. Итак, среднее значение I_0 равно нулю. Теперь найдем дисперсию σ_I^2 этой величины:

$$\sigma_I^2 = M \{I_0^2\} = M \left\{ \frac{1}{S_0^2} \int_0^T n(t_1) [a_1 f(t_1)] dt_1 \int_0^T n(t_2) [a_1 f(t_2)] dt_2 \right\}. \quad (14)$$

Здесь подынтегральная переменная в первом из интегралов-сомножителей обозначена через t_1 , а во втором — через t_2 . Произведение интегралов можно переписать в виде двойного интеграла, а затем поменять местами операции интегрирования и определения математического ожидания. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 &= M \left\{ \frac{a_1^2}{S_0^2} \int_0^T \int_0^T [n(t_1) n(t_2)] [f(t_1) f(t_2)] dt_1 dt_2 \right\} = \\ &= \frac{a_1^2}{S_0^2} \int_0^T \int_0^T M \{n(t_1) n(t_2)\} [f(t_1) f(t_2)] dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь под интегралом оказалось среднее от произведения $n(t_1) n(t_2)$, представляющее собой не что иное, как корреляционную функцию белого шума $S_0 \delta(\tau)$ (см. рис. 13.13), где $\tau = t_2 - t_1$:

$$M \{n(t_1) n(t_2)\} = K_n(\tau) = S_0 \delta(\tau) = S_0 \delta(t_2 - t_1). \quad (16)$$

Подставляя это выражение в формулу (15), находим

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 &= \frac{a_1^2}{S_0^2} \int_0^T \int_0^T S_0 \delta(t_2 - t_1) [f(t_1) f(t_2)] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{a_1^2}{S_0} \int_{t_1=0}^{t_1=T} f(t_1) \left[\int_{t_2=0}^{t_2=T} \delta(t_2 - t_1) f(t_2) dt_2 \right] dt_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $0 < t_1 < T$, то интеграл в квадратной скобке, согласно известному свойству δ -функции, оказывается равным значению второго подынтегрального сомножителя при $t_2 = t_1$:

$$\int_{t_2=0}^{t_2=T} \delta(t_2 - t_1) f(t_2) dt_2 = [f(t_2)]_{t_2=t_1} = f(t_1). \quad (18)$$

Поэтому выражение (17) можно переписать, с учетом (36) § 3, в виде

$$\sigma_I^2 = \frac{a_1^2}{S_0} \int_0^T [f(t_1)]^2 dt_1 = \frac{E_0}{S_0}. \quad (19)$$

Таким образом, дисперсия величины I_0 равна отношению энергии сигнала к спектральной плотности шума.

Выражения (13) и (19) дают возможность написать формулу для плотности распределения $P(I_0)$ случайной величины I_0 :

$$P(I_0) = \frac{1}{\sigma_I \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{I_0^2}{2\sigma_I^2} \right\}, \quad (20)$$

где σ_I определяется из (19). Кривая $P(I_0)$ изображена на рис. 13.14. Теперь нетрудно найти вероятность α выполнения неравенства (12), т. е. условия $I_0 > h_1$. Эта вероятность, очевидно, равна площади, заштрихованной на рис. 13.14; поэтому

$$\alpha = \int_{h_1}^{\infty} P(I_0) dI_0 = \int_{h_1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_I \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{I_0^2}{2\sigma_I^2} \right\} dI_0. \quad (21)$$

Введем новую переменную z :

$$\frac{I_0}{\sigma_I} = z, \quad \frac{dI_0}{\sigma_I} = dz. \quad (22)$$

После перехода к этой переменной z формула (21) приобретает вид

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{h_1/\sigma_I}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz. \quad (23)$$

В руководствах по теории вероятностей приведены таблицы для значений функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz. \quad (24)$$

График этой функции показан на рис. 13.15. Функция $\Phi(z)$, как

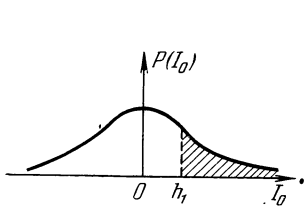


Рис. 13.14.

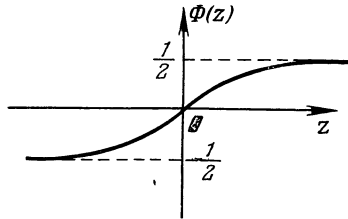


Рис. 13.15.

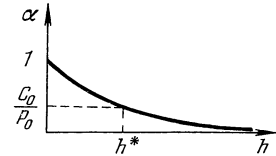


Рис. 13.16.

нетрудно усмотреть из формулы (24), нечетна. Она изменяется в пределах от $\Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}$ до $\Phi(+\infty) = +\frac{1}{2}$. Сравнивая формулы (23) и (24), получаем

$$\alpha = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{h_1}{\sigma_I}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{h_1}{\sigma_I}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\ln h + \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}}\right). \quad (25)$$

Здесь вместо h_1 и σ_I подставлены их значения из (10) и (19). Формула (25) дает искомую связь между величинами α и h . Начертим график зависимости $\alpha = \alpha(h)$ согласно этой формуле (рис. 13.16). Подставляя в формулу (25) значение $h = 0$, получаем

$$h = 0, \quad \ln h = -\infty, \quad \Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = 1.$$

Итак, при $h = 0$ величина $\alpha = 1$. Затем подставляем значение $h = \infty$:

$$h = \infty, \quad \ln h = \infty, \quad \Phi(\infty) = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 0.$$

Далее, так как $\ln h$ есть монотонная функция h , а $\Phi(z)$ — монотонная функция z , то и правая часть равенства (25) есть монотонная функция h . Следовательно, α является монотонной функцией h , что и показано на рис. 13.16.

Эти элементарные свойства кривой $\alpha = \alpha(h)$ можно было бы предугадать без всяких вычислений, исходя только из физических соображений. Действительно, при бесконечно малом пороге h в формуле (1) или (56) § 3 или уходящем в $(-\infty)$ пороге h_1 в формуле (12) практически любая величина интеграла окажется превышающей порог. Поэтому вероятность α ложной тревоги близка к единице. При увеличении порога h вероятность ложной тревоги уменьшается; система делается менее «пугливой». Наконец, при достаточно большой величине порога вероятность того, что интеграл I_0 окажется больше порога, сколь угодно мала. Поэтому $\alpha \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$.

Однако не следует полагать, что система тем лучше, чем выше порог h . При очень большом пороге система делается чересчур «беспечной» и возрастает вероятность β ошибки пропуска сигнала. Действительно, при этом учащаются случаи, когда интеграл I (см. (10)) при $S(t)$, отличном от нуля, все же не достигнет величины порога h_1 .

Кривая $\alpha(h)$ (рис. 13.16) и формула (25) могут служить для вычисления требуемой величины порога. Зададимся величиной $C_0 = P_0\alpha$. Тогда, откладывая по оси ординат отрезок $\frac{C_0}{P_0} = \alpha$, можно узнать, какое значение порога h^* соответствует той вероятности ложной тревоги, которой мы задаемся. Это значение $h = h^*$ следует подставить в формулу (10) для алгоритма системы оптимального обнаружения.

Рассмотрим теперь характеристики системы оптимального обнаружения по Нейману — Пирсону. Характеристикой системы обнаружения называется зависимость мощности решения $\epsilon = 1 - \beta$ от вероятности α ложной тревоги.

Так как α и β зависят от величины порога h , то можно установить зависимость между ними, исключив h . Таким же образом найдем и зависимость ϵ от α . Предварительно необходимо найти зависимость β от h .

Вероятность β пропуска сигнала — это вероятность события, заключающегося в том, что интеграл I (см. (10)) окажется меньше порога h_1 , несмотря на то, что $a = a_1$ и $X(t) = S(t) + n(t)$. Итак, β — это вероятность осуществления неравенства

$$(I)_{X(t)=n(t)+S(t)} = I_1 = \frac{1}{S_0} \int_0^T [a_1 f(t) + n(t)] [a_1 f(t)] dt < h_1. \quad (26)$$

Преобразуем выражение для I_1 с учетом определения (12) для I_0 :

$$I_1 = \frac{1}{S_0} \int_0^T [a_1 f(t)]^2 dt + \frac{1}{S_0} \int_0^T n(t) [a_1 f(t)] dt = \frac{E_0}{S_0} + I_0. \quad (27)$$

Следовательно, случайная величина I_1 отличается лишь постоянным слагаемым от случайной величины I_0 . Поэтому неравенство (26) можно переписать в виде

$$I_0 < h_1 - \frac{E_0}{S_0}. \quad (28)$$

Вероятность β осуществления этого неравенства нетрудно найти, так как плотность вероятности для I_0 была определена выше (см. (20)). На рис. 13.17 вновь показана кривая $P(I_0)$. Вероятность β того, что I_0 окажется меньше, чем $h_1 - \frac{E_0}{S_0}$, равна площади заштрихованной

на рис. 13.17 области. Величина этой площади определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= \int_{-\infty}^{h_1 - \frac{E_0}{S_0}} P(I_0) dI_0 = \int_{-\infty}^{h_1 - \frac{E_0}{S_0}} \frac{1}{\sigma_I \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{I_0^2}{2\sigma_I^2} \right\} dI_0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{h_1 - \frac{E_0}{S_0}}{\sigma_I}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz = \Phi \left(\frac{h_1 - \frac{E_0}{S_0}}{\sigma_I} \right) - \Phi(-\infty) = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{\ln h - \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь вместо h_1 и σ_I подставлены их значения из (10) и (19). Отсюда следует

$$\varepsilon = 1 - \beta = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\ln h - \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right). \quad (30)$$

Зависимости ε и α от h , начерченные в соответствии с формулами (25) и (30), показаны на рис. 13.18. При $h > 0$ величина α меньше ε для одного

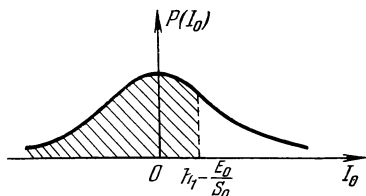


Рис. 13.17.

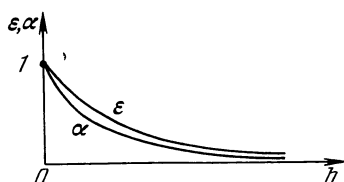


Рис. 13.18.

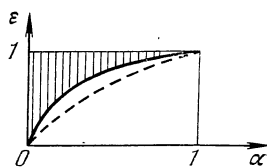


Рис. 13.19.

и того же значения h . Действительно, Φ есть монотонно возрастающая функция своего аргумента (рис. 13.15). Поэтому

$$\Phi \left(\frac{\ln h + \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right) > \Phi \left(\frac{\ln h - \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right). \quad (31)$$

Сравнив это неравенство с (25) и (30), легко убедиться в том, что α меньше ε . Лишь при $h = 0$ обе эти величины равны единице. Каждому значению h соответствуют определенные значения α и ε . Отложив их на графике рис. 13.19 для разных значений h , построим кривую $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ — характеристику системы обнаружения.

Кривая, изображенная на рис. 13.19, показывает, что с уменьшением вероятности α ложной тревоги уменьшается и ε — вероятность правильного решения при наличии сигнала. Иначе говоря, при этом увеличивается вероятность β пропуска сигнала. Величины $\beta = 1 - \varepsilon$ определяются на рис. 13.19 длинами вертикальных отрезков между линией $\varepsilon = 1$ и характеристикой системы обнаружения. Поэтому выбор очень малой величины α влечет за собой слишком большое значение β . Величину α следует выбирать такой, чтобы при этом значении β не было слишком большим.

На рис. 13.19 сплошной кривой показана характеристика системы оптимального обнаружения по алгоритму (10). Для любого другого алгоритма

при каждой определенной величине α мощность решения ε будет меньше, и, следовательно, его характеристика в принципе будет похожа на ту, которая показана на рисунке пунктирной линией. Дадим теперь определение кривой решения. *Кривая решения, иначе называемая характеристикой обнаружения*, определяется как зависимость общей вероятности ошибки Q от отношения сигнала к шуму. Найдем эту кривую для системы оптимального обнаружения, работающей по критерию В. А. Котельникова. Выше было показано, что алгоритм этой системы обнаружения такой же, как и для системы оптимального обнаружения по Нейману — Пирсону, с той лишь разницей, что величина порога h выбирается иной:

$$h = \frac{p_0}{p_1}. \quad (32)$$

Поэтому найденные выше формулы для вероятностей p_0 и p_1 в рассматриваемой задаче остаются прежними (см. (25) и (29)). Нужно лишь подставить в качестве величины h значение (32). Таким образом, находим

$$\alpha = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\ln \frac{p_0}{p_1} + \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right), \quad (33)$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{\ln \frac{p_0}{p_1} - \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right). \quad (34)$$

Общая безусловная вероятность Q ошибки (см. (45) § 3) выражается формулой

$$\begin{aligned} Q = p_0\alpha + p_1\beta &= p_0 \left[\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\ln \frac{p_0}{p_1} + \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right) \right] + \\ &+ p_1 \left[\frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{\ln \frac{p_0}{p_1} - \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} + p_1\Phi \left(\frac{\ln \frac{p_0}{p_1} - \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right) - p_1\Phi \left(\frac{\ln \frac{p_0}{p_1} + \frac{E_0}{2S_0}}{\sqrt{E_0/S_0}} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь учтено, что $p_0 + p_1 = 1$.

Итак, при заданных p_0 и p_1 величина Q есть функция параметра

$$\rho = \frac{E_0}{S_0}. \quad (36)$$

Величина ρ представляет собой отношение энергии E_0 сигнала к спектральной плотности S_0 шума. Это и есть отношение сигнал/шум для рассматриваемой типовой задачи.

Построим кривую $Q = Q(\rho)$ для важного частного случая $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.

Тогда $\ln \frac{p_0}{p_1} = 0$ и формула (35) принимает вид

$$Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2} \right) - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\sqrt{\rho}}{2} \right) = \frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\sqrt{\rho}}{2} \right). \quad (37)$$

Последнее преобразование справедливо, так как Φ — нечетная функция и

$$\Phi \left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2} \right) = -\Phi \left(\frac{\sqrt{\rho}}{2} \right). \quad (38)$$

Так как Φ — монотонно возрастающая функция, то с увеличением $\sqrt{\rho}$ функция Φ в (37) возрастает и, следовательно, Q монотонно убывает.

При $\sqrt{\rho} = 0$ функция $\Phi = 0$ и $Q = \frac{1}{2}$. Итак, зависимость Q от ρ , выражаемая формулой (37), имеет вид кривой, показанной на рис. 13.20. Это и есть кривая решения.

С помощью кривой решения можно, задавшись допустимым значением $Q = Q_{\text{доп}}$ вероятности ошибки, найти, какое значение $\rho = \rho^*$ отношения сигнал/шум необходимо для этого. Чем меньшей величиной ρ мы задаемся, тем больше должно быть отношение сигнала к шуму, тем большей при данном шуме должна быть энергия сигнала.

Характер кривой решения $Q = Q(\rho)$ можно было бы приблизительно оценить и без всяких вычислений. Действительно, при

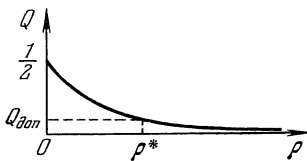


Рис. 13.20.

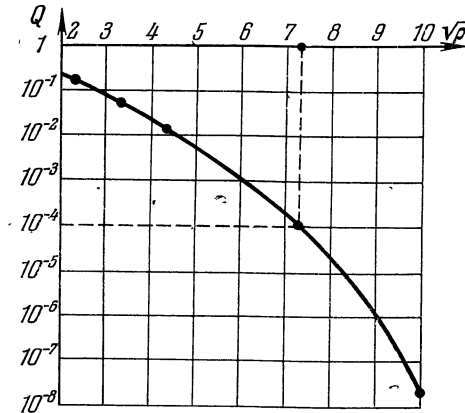


Рис. 13.21.

$\rho \approx 0$, когда сигнал пренебрежимо мал в сравнении с шумом, его вообще невозможно различить. Поэтому вместо того, чтобы как-то обрабатывать наблюдаемый сигнал в приемном устройстве, можно просто подбрасывать монету и принимать решение о присутствии сигнала по выпадению герба. При этом вероятность ошибки, очевидно, равна 0,5. При увеличении отношения сигнала к шуму вероятность ошибки, очевидно, уменьшается. Наконец, при сигнале, сколь угодно большом по сравнению с шумом, вероятность ошибки сколь угодно мала.

Кривую решения можно начертить, воспользовавшись таблицей, подчитанной по формуле (37) и по таблице для функции Φ .

ρ	5	10	20	50	100
$\sqrt{\rho}$	2,24	3,17	4,48	7,06	10
$\Phi\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$	0,3686	0,4441	0,4875	0,49977	0,49999997
Q	0,1314	$5,59 \cdot 10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-8}$

Обычно кривую решения изображают в виде зависимости Q от $\sqrt{\rho}$ при логарифмическом масштабе по оси ординат (см. рис. 13.21), где кривая $Q(\sqrt{\rho})$ построена по приведенной выше таблице.

Приведем пример использования этой кривой для решения конкретной задачи. Пусть сигнал представляет собой высокочастотное колебание

$$S(t) = a_1 \sin \omega_0 t \tag{39}$$

с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (40)$$

Допустим для простоты, что время наблюдения T равно целому числу периодов (если $T \gg T_0$, то это всегда можно допустить), т. е.

$$T = nT_0, \quad (41)$$

где $n \gg 1$ — целое число. Тогда энергия E_0 сигнала выразится формулой

$$\begin{aligned} E_0 &= a_1^2 n \int_0^{T_0} f^2(t) dt = a_1^2 n \int_0^{T_0} \sin^2 \omega_0 t dt = \\ &= a_1^2 n \left[\int_0^{T_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t \right) dt \right] = a_1^2 n \cdot \frac{1}{2} T_0 = \frac{a_1^2 T}{2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Найдем величину $\sqrt{\rho^-}$ — абсциссу рис. 13.21

$$\sqrt{\rho^-} = \sqrt{\frac{E_0}{S_0}} = \sqrt{\frac{a_1^2 T}{2S_0}} = \frac{a_1}{\sqrt{2S_0}} \sqrt{T}. \quad (43)$$

Шумовое напряжение $v_{\text{ш}}$ на выходе полосового фильтра с шириной полосы $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ и коэффициентом усиления, равным единице, определяется по формуле

$$v_{\text{ш}}^2 = \frac{1}{\pi} S_0 \Delta\omega = \frac{1}{\pi} S_0 2\pi\Delta f = 2S_0 \Delta f, \quad (44)$$

где S_0 — спектральная плотность шума на входе.

Поэтому величина

$$2S_0 = \frac{v_{\text{ш}}^2}{\Delta f} = u_{\text{ш}}^2 \quad (45)$$

может рассматриваться как дисперсия шума, приходящаяся на единицу полосы частот; величина $u_{\text{ш}}$ называется *удельным напряжением шума*. Сравнивая выражения (43) и (45), находим

$$\sqrt{\rho^-} = \frac{a_1}{u_{\text{ш}}} \sqrt{T}. \quad (46)$$

Таким образом, величина $\sqrt{\rho^-}$ пропорциональна отношению амплитуды сигнала к удельному напряжению шума; значение $\sqrt{\rho^-}$ также пропорционально квадратному корню из величины периода наблюдения T .

Пусть, например,

$$a_1 = 1 \text{ мв}, \quad S_0 = 0,2 \text{ мв}^2 \cdot \text{сек}. \quad (47)$$

Каков должен быть период наблюдения, чтобы при $p_0 = p_1$ вероятность ошибки Q была равна 0,01%? Решение задачи нетрудно получить с помощью кривой, изображенной на рис. 13.21. Значению $Q = 0,01\% = 10^{-4}$ соответствует величина $\sqrt{\rho^-} = 7,3$ (см. пунктирные линии). Поэтому

$$\sqrt{\rho^-} = 7,3 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0,2}} \cdot \sqrt{T}. \quad (48)$$

Решая это уравнение относительно T , получаем $T \approx 22 \text{ сек}$.

Итак, несмотря на малое отношение сигнала к шуму — удельный шум $u_{\text{ш}}$ в этой задаче того же порядка, что и амплитуда сигнала a_1 , — можно производить решения с ничтожной вероятностью ошибки. Однако платой за высокую точность решений служит длительное время наблюдения.

Перейдем теперь к рассмотрению *понятий существенных и несущественных параметров и понятия простых и сложных гипотез*. Пусть, например, передаваемый сигнал $S(t)$ имеет вид

$$S(t) = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (49)$$

и его амплитуда a может иметь лишь два возможных значения:

$$a = \begin{cases} a_1 \neq 0, \\ a_0 = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Выше было указано, что задача принятия решения эквивалентна задаче испытания двух альтернативных гипотез:

- а) гипотезы H_1 о том, что $a = a_1 \neq 0$;
- б) гипотезы H_0 о том, что $a = a_0 = 0$.

Эта задача решалась в предыдущих пунктах при фиксированных значениях других параметров сигнала, например ω и φ в формуле (49). Но в более общем случае может оказаться, что эти параметры не фиксированы, хотя и постоянны в ходе единичного наблюдения. Допустим, что значения ω и φ могут быть разными при различных наблюдениях и известна априорная совместная плотность вероятности для a , ω , φ либо априорные плотности вероятности для каждого из этих параметров, если они независимы.

Если не требуется определять значения дополнительных параметров, например ω и φ в выражении (49), то такие параметры называются *несущественными*.

Пусть в общем случае вектор параметров $A = (a_1, \dots, a_r)$ распадается на два вектора: вектор A' *существенных* параметров a'_1, a'_2, \dots, a'_r и вектор A'' *несущественных* параметров $a''_1, a''_2, \dots, a''_{r''}$:

$$\left. \begin{aligned} A &= (A', A''), \\ A' &= (a'_1, \dots, a'_{r'}), \\ A'' &= (a''_1, \dots, a''_{r''}). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Очевидно, что $r' + r'' = r$, т. е. любой из параметров попадает либо в класс существенных, либо в класс несущественных параметров. Величины r' и r'' могут быть не равными друг другу. Таким образом, размерности векторов A' и A'' могут быть различны.

Рассмотрим передаваемый сигнал

$$\begin{aligned} S(t) &= S(t, a_1, \dots, a_r) = S(t, A) = S(t, A', A'') = \\ &= S(t, a'_1, \dots, a'_{r'}; a''_1, \dots, a''_{r''}). \end{aligned} \quad (52)$$

Гипотеза об определенном значении вектора A' существенных параметров при наличии вектора A'' несущественных параметров называется сложной гипотезой. В этом случае определенному значению вектора A' соответствует уже не точка в пространстве параметров A , а некоторая область w этого пространства (рис. 13.22). Действительно, одному значению вектора A' может соответствовать множество значений A , поскольку составляющая A'' вектора $A = (A', A'')$ может принимать различные значения.

В рассмотренном выше примере гипотеза H_0 о том, что $a = a_0$, является *простой*, так как при $a = 0$ весь сигнал $S(t) = 0$, и нет смысла рассматривать значения других параметров ω и φ . Но гипотеза H_1 о том, что $a = a_1 \neq 0$, уже является *сложной*, так как различным ω и φ при $a = a_1$

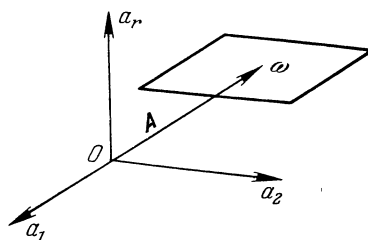


Рис. 13.22.

соответствуют различные сигналы $S(t)$. В этом случае необходимо рассматривать трехмерное пространство параметров a, ω, φ .

Задача оценки существенных параметров передаваемого сигнала усложняется при наличии несущественных параметров. Однако это усложнение не носит принципиального характера, так как новая задача сводится к ранее решенной с помощью усреднения по несущественным параметрам.

Чтобы обосновать это усреднение, рассмотрим область $\Omega(A'')$ возможных значений вектора A'' несущественных параметров. Эта область представляет собой подпространство пространства параметров $\Omega(A)$; подпространство $\Omega(A'')$ имеет размерность r'' . Обозначим через

$$d\Omega(A'') = da''_1 da''_2 \dots da''_{r''} \quad (53)$$

бесконечно малый элемент области $\Omega(A'')$.

Рассмотренные в этой главе методы решения в конечном итоге базировались на вычислении условной плотности вероятности $P(A'/X)$ вектора существенных параметров A' при условии, что фиксирован наблюдаемый вектор X . Однако величину $P(A'/X)$ можно вычислить как сумму плотностей вероятности для A' при всевозможных значениях вектора несущественных параметров A'' . Поэтому

$$P(A'/X) = \int_{\Omega(A'')} P(A', A''/X) d\Omega(A'') = \int_{\Omega(A'')} P(A'/X) d\Omega(A''). \quad (54)$$

Между тем по формуле Бэйеса (см. (19) § 2)

$$P(A', A''/X) = P(A'/X) = \frac{P(A)P(X/A)}{P(X)} = \frac{P(A', A'') \cdot P(X/A', A'')}{P(X)}. \quad (55)$$

Следовательно,

$$P(A'/X) = \int_{\Omega(A'')} \frac{P(A', A'')P(X/A', A'')}{P(X)} d\Omega(A''). \quad (56)$$

Безусловную плотность вероятности $P(X)$ можно вынести из-под знака интеграла, так как она не зависит от A'' . Ограничимся наиболее важным практически случаем, когда векторы A' и A'' независимы. Тогда

$$P(A) = P(A', A'') = P(A') \cdot P(A''). \quad (57)$$

Подставляя в (56) это выражение и вынося за знак интеграла функции, не зависящие от A'' , приходим к формуле

$$P(A'/X) = \frac{P(A')}{P(X)} \int_{\Omega(A'')} P(X/A', A'') P(A'') d\Omega(A'') = \frac{P(A')L(A')}{P(X)}, \quad (58)$$

где

$$L(A') = \int_{\Omega(A'')} P(X/A', A'') P(A'') d\Omega(A'') = \langle P(X/A', A'') \rangle_{A''}, \quad (59)$$

где $\langle \rangle_{A''}$ обозначает усреднение по A'' . Сравнив выражение (58) с формулой Бэйеса

$$P(A'/X) = \frac{P(A')P(X/A')}{P(X)}, \quad (60)$$

можно убедиться в том, что $L(A')$ является функцией правдоподобия и представляет собой $P(X/A')$. Структура формулы (59) показывает, что в данном случае функция правдоподобия $L(A')$ получается из $P(X/A)$ усреднением по области $\Omega(A'')$ несущественных параметров.

Рассмотрим теперь задачу о приеме сигнала со случайной начальной фазой в присутствии белого шума. Начнем с дискретного случая, когда происходит прием дискретных значений x_1, x_2, \dots, x_k . Пусть, так же как

и в изучавшейся выше типовой задаче, дискретные значения шума n_1, n_2, \dots, n_k представляют собой последовательность независимых нормально распределенных случайных величин со средним значением, равным нулю, и дисперсией σ^2 . Сигнал $S(t)$ определяется формулой (49); его амплитуда a может иметь два возможных значения:

$a_1 \neq 0$ и $a_0 = 0$ (см. (50)) с априорными вероятностями p_1 и p_0 соответственно. Пусть, далее, ω — фиксированное число, известное нам. Разница по сравнению с типовой задачей заключается лишь в том, что начальная фаза φ — это несущественный параметр, который может изменяться от наблюдения к наблюдению. Пусть этот параметр равномерно распределен в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$. На рис. 13.23 показан график плотности вероятности $P(\varphi)$ этого параметра. Очевидно, $P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $P(\varphi) = 0$ вне этого интервала.

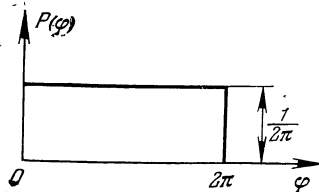


Рис. 13.23.

Так как $a_0 = 0$ и $P(X/a_0)$ не зависит от φ (ибо в этом случае $S(t) = 0$), то усреднение по φ необходимо произвести только в выражении для $P(X/a_1)$. Для типовой задачи это выражение уже было найдено (см. (15) § 3), причем в данном случае

$$S(t_i) = a_1 f(t_i) = a_1 \cos(\omega t_i - \varphi). \tag{61}$$

Усредняя выражение (15) § 3 по φ находим

$$\begin{aligned} \langle P(X|a_1) \rangle_\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k [x_i - a_1 f(t_i)]^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{d\varphi}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2}{2\sigma^2} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2 \sum_{i=1}^k a_1 x_i \cos(\omega t_i - \varphi)}{2\sigma^2} \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k a_1^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t_i - \varphi) \right]}{2\sigma^2} \right\} \frac{d\varphi}{2\pi}. \tag{62} \end{aligned}$$

В этом выражении сразу проведено несколько элементарных преобразований: квадратная скобка $[x_i - a_1 f(t_i)]^2$ преобразована в сумму трех членов по формуле квадрата суммы; множители, не зависящие от φ , выведены за знак интеграла; подставлены значения $f(t_i)$ согласно формуле (61) и $\cos^2(\omega t_i - \varphi)$ заменен на

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t_i - \varphi).$$

Так как $P(X/a_0)_1$ по-прежнему выражается (см. выражение (14)) § 3 формулой (не забудем, что $a_0 = 0$)

$$P(X/a_0) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2}{2\sigma^2} \right\}, \tag{63}$$

то, разделив (62) на (63), можно найти формулу для отношения правдоподобия $\Lambda(X)$. Условие для оптимального обнаружения $\Lambda(X) > h \rightarrow a = a_1$

тогда принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2 \sum_{i=1}^k a_1 x_i \cos(\omega t_i - \varphi)}{2\sigma^2} \right\} \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^k a_1^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t_i - \varphi) \right]}{2\sigma^2} \right\} d\varphi >$$

\$> h \rightarrow a = a_1\$ (64)

или

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^k a_1^2}{4\sigma^2} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k \left[2a_1 x_i \cos(\omega t_i - \varphi) - \frac{a_1^2}{2} \cos 2(\omega t_i - \varphi) \right]}{2\sigma^2} \right\} d\varphi >$$

\$> h \rightarrow a = a_1\$. (65)

Так как $\sum_{i=1}^k a_1^2 = ka_1^2$, то эту формулу можно переписать в следующем виде, умножив и разделив на $\Delta t = \frac{T}{k}$ числитель и знаменатель дроби под знаком \exp :

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{ka_1^2}{4\sigma^2} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{\Delta t \sum_{i=1}^k \left[2a_1 x_i \cos(\omega t_i - \varphi) - \frac{a_1^2}{2} \cos 2(\omega t_i - \varphi) \right]}{2\sigma^2 \Delta t} \right\} d\varphi >$$

\$> h \rightarrow a = a_1\$. (66)

Величина Δt введена для будущего перехода к случаю непрерывного измерения на интервале $0 \leq t \leq T$. Последнее получится, если устремить Δt к нулю, а k — к бесконечности. Если мы хотим получить в пределе из последовательности n_1, n_2, \dots, n_k белый шум со спектральной плотностью S_0 , то необходимо, как показано выше, положить $\sigma^2 \Delta t = S_0$ (см. (5)). При $\Delta t \rightarrow 0$ суммы под знаком \exp в выражении (66) превращаются в интегралы, и выражение (66) принимает следующий вид (учтем, что $\frac{ka_1^2}{4\sigma^2} = \frac{k\Delta t a_1^2}{4\sigma^2 \Delta t} = \frac{T a_1^2}{4S_0}$):

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{T a_1^2}{4S_0} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2a_1 \int_0^T X(t) \cos(\omega t - \varphi) dt - \frac{a_1^2}{2} \int_0^T \cos 2(\omega t - \varphi) dt}{2S_0} \right\} d\varphi >$$

\$> h \rightarrow a = a_1\$. (67)

Положим для простоты, что $T = nT_0$, где $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания $S(t)$, а n — целое число. Следует отметить, что первый интеграл под знаком \exp растет со временем, а второй — нет, так как его значение за целое число периодов равно нулю. Поэтому второй интеграл при достаточно большом значении T , когда $T \gg T_0$, вообще не играет роли. Если же $T = nT_0$, то второй интеграл в точности равен нулю:

$$\int_0^{nT_0} \cos 2(\omega t - \varphi) dt = 0, \quad (68)$$

и формула (67) упрощается. Представляя $\cos(\omega t - \varphi)$ в виде $\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$, можно привести выражение (67) к следующему виду:

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{T a_1^2}{4S_0} \right\} \int_0^{2\pi} \exp a_1 \frac{\cos \varphi \int_0^T X(t) \cos \omega t dt + \sin \varphi \int_0^T X(t) \sin \omega t dt}{S_0} d\varphi > h \rightarrow a = a_1. \quad (69)$$

Положим

$$Y = \frac{1}{S_0} \int_0^T X(t) \cos \omega t dt, \quad Z = \frac{1}{S_0} \int_0^T X(t) \sin \omega t dt. \quad (70)$$

Построим прямоугольный треугольник с катетами Y и Z . Пусть R есть длина его гипотенузы, а φ — угол. Тогда

$$Y = R \cos \varphi, \quad Z = R \sin \varphi \quad (71)$$

и числитель дроби под знаком \exp в (69) можно переписать в следующем виде:

$$Y \cos \varphi + Z \sin \varphi = R \cos \psi \cos \varphi + R \sin \psi \sin \varphi = R \cos(\varphi - \psi). \quad (72)$$

По этому условию формуле (69) можно придать более компактную форму:

$$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{T a_1^2}{4S_0} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \{ a_1 R \cos(\varphi - \psi) \} d\varphi > h \rightarrow a = a_1. \quad (73)$$

Рассмотрим выражение

$$I_0(a_1 R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ a_1 R \cos(\varphi - \psi) \} d\varphi. \quad (74)$$

Эту формулу можно интерпретировать как выражение для постоянной составляющей (среднего значения) ряда Фурье для периодической функции с периодом 2π и равной на интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ величине $\exp \{ a_1 R \cos(\varphi - \psi) \}$. Легко показать заменой переменной интегрирования φ на новую переменную $\nu = \varphi - \psi$, что интеграл $I_0(a_1 R)$ вовсе не зависит от ψ .

Выражение I_0 есть функция только лишь от $a_1 R$. Это, как известно из анализа, бесселева функция нулевого порядка мнимого аргумента. Эта функция табулирована. Подставив (74) в (73), получаем

$$\exp \left\{ -\frac{T a_1^2}{4S_0} \right\} I_0(a_1 R) > h \rightarrow a = a_1 \quad (75)$$

или

$$I_0(a_1 R) > h \exp \left\{ \frac{T a_1^2}{4S_0} \right\} = h_1 \rightarrow a = a_1. \quad (76)$$

В этом алгоритме фигурирует принимаемый сигнал $X(t)$, «спрятанный» внутри R .

I_0 есть монотонная функция своего аргумента $a_1 R$; это нетрудно усмотреть прямо из вида формулы (74). Поэтому условие (76) можно заменить условием перехода аргумента $a_1 R$ через некоторый порог, либо условием $R > h_2$, либо $R^2 > h_2^2 = h_3$; причем h_2 и h_3 получатся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} I_0(a_1 h_2) &= h_1, \\ h_3 &= h_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Условие $R^2 > h_3$ в развернутом виде (см. (68)) запишется так:

$$\left[\frac{1}{S_0} \int_0^T X(t) \cos \omega t dt \right]^2 + \left[\frac{1}{S_0} \int_0^T X(t) \sin \omega t dt \right]^2 > h_3 \rightarrow a = a_1. \quad (78)$$

Противоположное неравенство влечет за собой принятие решения $a = a_0 = 0$. Рассмотрим теперь задачу о синтезе системы оптимального обнаружения при приеме сигнала со случайной начальной фазой в присутствии белого шума. Условие (78) дает возможность построить схему системы оптимального обнаружения (рис. 13.24). Входной сигнал $X(t)$ подается на входы двух множительных звеньев $MЗ$. На второй вход одного из них поступает сигнал $\sin \omega t$, а на второй вход другого — сигнал $\cos \omega t$. Оба эти сигнала вырабатываются местным генератором Γ . Выходы множительных звеньев подаются на интеграторы (с масштабным коэффициентом $1/S_0$). Интеграторы предполагаются очищенными в момент $t = 0$, т. е. в этот момент их выходные

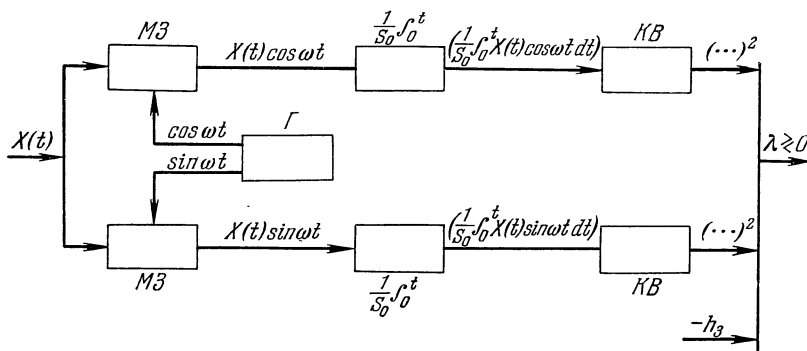


Рис. 13.24.

сигналы равны нулю. Поэтому в момент времени $t = T$ на выходах интеграторов образуются выражения, фигурирующие внутри квадратных скобок в условии (78). Эти выходы возводятся в квадрат двумя квадраторами $Kв$. Последние представляют собой частный случай нелинейного преобразователя НП-1, у которого выходная величина равна квадрату входной. Сумма выходов квадраторов определяет левую часть неравенства (78). Из этой суммы вычитается порог h_3 , и полученная таким образом величина λ анализируется в момент $t = T$. Если $\lambda > 0$, то выносится решение $a = a_1 \neq 0$, если же $\lambda < 0$, то принимается решение $a = a_0 = 0$.

В этой системе можно связать величину порога h_3 с вероятностью α ложной тревоги. Вероятность α это вероятность события, заключающегося в том, что случайная величина R^2 больше h_3 при условии, что $a = a_0 = 0$. Пусть $P(R^2/a_0)$ есть условная плотность вероятности величины R^2 при $a = a_0$. Тогда

$$\alpha = \int_{h_3}^{\infty} P(R^2/a_0) d(R^2) = \int_{h_3}^{\infty} P_{R^2}(w) dw, \quad (79)$$

где приняты обозначения

$$R^2 = w, \quad P(R^2/a_0) = P_{R^2}(w). \quad (80)$$

Имеем очевидное соотношение

$$R^2 = Y^2 + Z^2. \quad (81)$$

При $a = a_0 = 0$ сигнал $S(t) = 0$ и формулы (70) принимают вид

$$Y = \frac{1}{S_0} \int_0^T n(t) \cos \omega t dt, \quad Z = \frac{1}{S_0} \int_0^T n(t) \sin \omega t dt. \quad (82)$$

Найдем сначала вероятностные распределения для случайных величин Y и Z , затем для Y^2 и Z^2 и, наконец, для их суммы $R^2 = Y^2 + Z^2$.

Y и Z — нормально распределенные величины, так как это суммы бесконечного множества слагаемых, каждое из которых имеет нормальное распределение. Действительно, подынтегральное выражение $n(t) \cos \omega t$ или $n(t) \sin \omega t$ для фиксированного t представляет собой нормально распределенную величину, ибо $n(t)$ — нормальный белый шум. Отсюда следует, что вероятностные распределения для Y и Z можно полностью определить, узнав средние значения и дисперсии этих величин. Средние значения Y и Z равны нулю. Действительно, например,

$$M\{Y\} = M\left\{\frac{1}{S_0} \int_0^T n(t) \cos \omega t dt\right\} = \frac{1}{S_0} \int_0^T M\{n(t)\} \cos \omega t dt = 0, \quad (83)$$

так как $M\{n(t)\} = 0$.

Далее, величины Y и Z не коррелированы между собой. Для нормально распределенных величин это свойство, как известно из теории вероятностей, равносильно отсутствию связи между ними.

Проверим отсутствие взаимной корреляции, подсчитав выражение

$$\begin{aligned} M\{YZ\} &= M\left\{\frac{1}{S_0^2} \int_0^T n(t_1) \cos \omega t_1 dt_1 \int_0^T n(t_2) \sin \omega t_2 dt_2\right\} = \\ &= M\left\{\frac{1}{S_0^2} \int_0^T \int_0^T n(t_1) n(t_2) \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 dt_1 dt_2\right\} = \\ &= \frac{1}{S_0^2} \int_0^T \int_0^T M\{n(t_1) n(t_2)\} \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (84)$$

Воспользовавшись формулой (16) для $M\{n(t_1) n(t_2)\}$ и производя операции, аналогичные преобразованиям в формулах (17) и (18), находим

$$\begin{aligned} M\{YZ\} &= \frac{1}{S_0} \int_0^T \sin \omega t_2 \left[\int_0^T \cos \omega t_1 \delta(t_1 - t_2) dt_1 \right] dt_2 = \\ &= \frac{1}{S_0} \int_0^T \sin \omega t_2 \cos \omega t_2 dt_2 = \frac{1}{2S_0} \int_0^T \sin 2\omega t_2 dt_2 = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Сходным путем найдем дисперсии для Y или Z . Они оказываются одинаковыми. Например, дисперсия σ_0^2 для Y получается *) равной

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= M\{Y^2\} = \\ &= \frac{1}{S_0^2} \int_0^T \int_0^T M\{n(t_1) n(t_2)\} \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{S_0} \int_0^T \cos^2 \omega t_2 dt_2 = \frac{1}{2S_0}. \end{aligned} \quad (86)$$

*) Нужно лишь в выражении (45) § 3 написать Y вместо Z , что сведется к замене $\sin \omega t_2$ на $\cos \omega t_2$ во втором интеграле.

Теперь можно написать формулы для условных плотностей вероятности Y и Z :

$$P(Y/a_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Y^2}{2\sigma_0^2}\right\} \quad (87)$$

и

$$P(Z/a_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^2}{2\sigma_0^2}\right\}. \quad (88)$$

Определим плотность вероятности для квадрата величины Y^2 :

$$P_{Y^2} = P(Y^2/a_0). \quad (89)$$

Пользуясь этой формулой, можно написать, что

$$P_{Y^2}(w) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi w}} \exp\left\{-\frac{w}{2\sigma_0^2}\right\} \quad (90)$$

при $w > 0$ и $P_{Y^2}(w) = 0$ при $w < 0$. Аналогично

$$P_{Z^2}(w) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi w}} \exp\left\{-\frac{w}{2\sigma_0^2}\right\}. \quad (91)$$

Согласно известной формуле теории вероятностей плотность суммы R^2 получается из плотностей слагаемых Y^2 и Z^2 следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{R^2}(w) &= \int_0^w P_{Y^2}(u) P_{Z^2}(w-u) du = \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2 2\pi} \int_0^w \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{w-u}} \exp\left\{-\frac{u}{2\sigma_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{w-u}{2\sigma_0^2}\right\} du = \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{w}{2\sigma_0^2}\right\}}{2\pi\sigma_0^2} \int_0^w \frac{du}{\sqrt{u(w-u)}} = \frac{\exp\left\{-\frac{w}{2\sigma_0^2}\right\}}{2\pi\sigma_0^2} \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\rho = \frac{u}{w}, \quad d\rho = \frac{du}{w}. \quad (93)$$

Из таблицы интегралов находим

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}} &= \arcsin(2\rho - 1) + \text{const}, \\ \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}} &= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi. \end{aligned} \quad (94)$$

Подставляя значение интеграла (94) в (92), получаем

$$P_{R^2}(w) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{w}{2\sigma_0^2}\right\}. \quad (95)$$

Подстановка этого выражения в (79) приводит к формуле

$$\alpha = \int_{h_3}^{\infty} P_{R^2}(w) dw = \int_{h_3}^{\infty} \frac{1}{2\sigma_0^2} \exp\left\{-\frac{w}{2\sigma_0^2}\right\} dw = \int_{h_3/2\sigma_0^2}^{\infty} \exp\{-\lambda\} d\lambda = \exp\left\{-\frac{h_3}{2\sigma_0^2}\right\}, \quad (96)$$

где $\lambda = \frac{w}{2\sigma_0^2}$. Допустим, что мы задаемся величиной безусловной вероятности ложной тревоги $q = \alpha p_0$. Тогда из формулы (96) можно вычислить порог

$$h_3 = -2\sigma_0^2 \ln \alpha = +\frac{1}{S_0} (\ln p_0 - \ln q). \quad (97)$$

Так как $\alpha < 1$, то $\ln \alpha < 0$ и порог $h_3 > 0$.

Г л а в а XIV

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Значение теории оптимальных систем

Теория оптимальных систем является важнейшим направлением технической кибернетики. Это направление — теория оптимальных, т. е. наилучших в известном смысле, процессов и теории оптимальных систем управления, оптимальных систем передачи и переработки информации. Проблемы оптимальных систем становятся центральными в силу следующих причин.

Любая научно обоснованная система является оптимальной, так как, выбирая какую-либо систему, мы тем самым предпочитаем ее другим; мы считаем, следовательно, что она в каком-либо отношении лучше других систем. Критерии, с помощью которых производится выбор (ниже они называются *критериями оптимальности*), могут быть различными. Однако при любом выборе критерий оптимальности в конечном итоге всегда существует. В противном случае обоснованный выбор системы был бы невозможен. Прежде, когда производственные процессы не были автоматизированы и технология в значительной мере базировалась на опыте и навыках людей, когда средства измерительной и вычислительной техники не были столь развиты, как сейчас, попытки четкого осмысливания и определения критериев оптимальности и тем более попытки построения оптимальных систем зачастую были беспредметными. Но сейчас мы вступаем в новую эпоху, эпоху построения научно обоснованных и автоматизированных производственных процессов. Поэтому возрастает важность проблем оптимального управления. Решение этих проблем позволит довести до максимума эффективность использования производственных агрегатов, увеличить производительность, улучшить качество продукции, обеспечить экономию электроэнергии и ценного сырья и т. д.

Любой закон природы есть утверждение ограничивающего характера, утверждение о том, что можно и чего нельзя сделать в некоторой области. Законы общего типа в кибернетике также должны дать возможность судить о том, что достижимо и чего нельзя достичь в определенных реальных условиях. Поэтому они могут быть сформулированы в виде утверждений о «потолке возможностей» при управлении. Между тем именно нахождение этого «потолка» есть задача теории оптимальных систем.

Следовательно, теория оптимальных систем должна существенно помочь в трудном деле формулировки общих законов кибернетики. Это дело будущего, но, по-видимому, не столь отдаленного.

Проблемы оптимальных систем возникли во многих областях кибернетической техники. Это задачи построения оптимальных по быстродействию систем автоматического регулирования, задачи наилучшей фильтрации сигнала от смешанного с ним шума, задачи построения оптимальных обнаружителей сигналов, оптимальных «предсказывающих» аппаратов, оптимальных методов распознавания образов, оптимальной стратегии автоматического

поиска и т. д. Однако между всеми этими, столь различными на первый взгляд задачами имеется глубокая внутренняя связь. В последующем изложении эта связь будет выявляться и подчеркиваться. Именно эта связь является базой для построения единой теории оптимальных систем.

В технической кибернетике имеются, кроме перечисленных выше, и иные важные направления — например, изучение устойчивости и автоколебаний систем. Кроме того, такие важнейшие направления, как общая теория систем (частью которой является теория автоматов) и общая теория сигналов (частью которой является теория информации), принадлежат общей кибернетике не в меньшей мере, чем технической.

Указанные направления вовсе не независимы друг от друга. Напротив, между ними имеется определенная связь. Например, в теории конечных автоматов представляет большой интерес определение наиболее простой структуры автомата, реализующей заданный алгоритм. Такая система будет оптимальной по простоте. Ставятся также задачи нахождения наиболее надежных, при заданной сложности автоматов. Это системы, оптимальные по надежности. Еще более тесно связаны с теорией оптимальных систем вопросы автоматического приспособления. Наиболее важную область этих вопросов составляет *теория систем автоматической оптимизации*, связанная с теорией оптимальных систем по многим каналам. Перечислим некоторые из них.

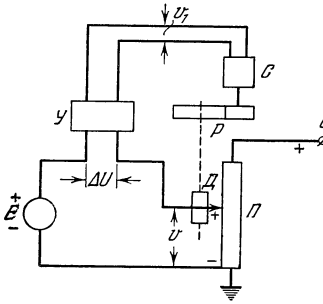


Рис. 14.1.

а) Оптимальная система — это тот идеал, к которому стремится (но которого не всегда достигает) система автоматической оптимизации.

б) При достаточно медленном изменении характеристик управляемого объекта можно строить первичное управляющее устройство согласно теории оптимальных систем, снабдив его, однако, изменяемыми параметрами. Вторичное управляющее устройство — автоматический оптимизатор, — наблюдая работу системы, изменяет параметры первичного устройства так, чтобы система в целом оставалась близкой к оптимальной, несмотря на непредвиденное изменение характеристик управляемого объекта.

в) Когда характеристики объекта изменяются сравнительно быстро, то система, работающая согласно указанному выше принципу, может оказаться далекой от оптимальной. В этом случае возникает задача отыскания наилучшего алгоритма поиска оптимальных методов управления, задача создания оптимальной системы автоматического поиска либо вообще оптимальной системы автоматического приспособления.

Теория оптимальных систем тесно связана с другими направлениями технической кибернетики хотя бы уже потому, что любую задачу, выполняемую управляющим устройством, можно решить наилучшим, оптимальным в каком-либо смысле способом. Следовательно, в любой области технической кибернетики возникают задачи построения оптимальных систем.

Коснемся вкратце, например, задачи построения оптимальных по быстродействию систем автоматического регулирования. Эта задача возникает при разработке следящих систем, автоматических компенсаторов, подъемных устройств, следящих приводов технологических агрегатов, при проектировании и эксплуатации химических и металлургических реакторов и печей, в системах управления ракетами, а также в ряде иных областей. Рассмотрим в качестве примера автоматический компенсатор (рис. 14.1). Задача этого устройства состоит в измерении и регистрации напряжения E , которое может изменяться со временем. В компенсаторе измеряется разность ΔU между

напряжением E и компенсирующим его напряжением U . Последнее представляет собой разность потенциалов между движком D потенциометра Π и нижней точкой потенциометра. На потенциометр подается стабильное постоянное напряжение U_0 , заведомо большее, чем E . Предполагается, что потенциометр имеет равномерную намотку. Допустим сначала, что положение движка D всегда таково, что имеет место компенсация, т. е. $E = U$. Тогда разность $\Delta U = 0$. В этом положении координата движка D пропорциональна измеряемому напряжению E . Поэтому перо, прикрепленное к движку D , может чертить на равномерно перемещающейся бумажной ленте (не показанной на рисунке) график изменения E в функции времени.

Итак, задача автоматического потенциометра заключается в том, чтобы поддержать с достаточной точностью равенство $\Delta U = 0$. Напряжение ΔU подается на вход устройства Y , где оно усиливается и преобразуется. Выходное напряжение U_1 устройства Y поступает на сервомотор C . Если ΔU отклоняется от нуля, то на входе сервомотора C появляется напряжение U_1 и вал сервомотора начинает вращаться, изменяя через посредство редуктора P положение движка D так, чтобы восстановилось равенство $E = U$.

Если система достаточно точна и напряжение E меняется достаточно медленно, то условие $\Delta U = 0$ поддерживается с требуемой точностью. Однако в том случае, когда напряжение E может изменяться с большой быстротой, требуется, чтобы автоматический компенсатор был быстродействующим. Наиболее тяжелый случай соответствует скачку напряжения E , например от значения, равного нулю, до E_{\max} (рис. 14.2), где предполагается, что скачок происходит при $t = 0$.

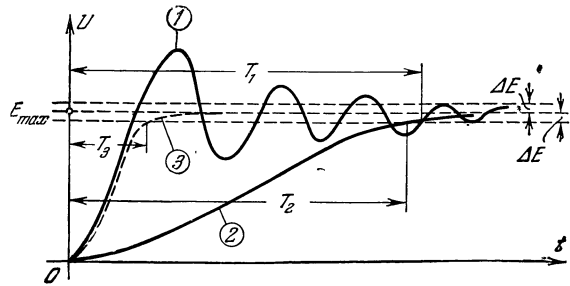


Рис. 14.2.

В идеальной системе и напряжение U должно было бы при $t = 0$ скачком измениться от 0 до E_{\max} . Однако очевидно, что в реальном компенсаторе такой скачок невозможен. Действительно, сервомотор C не может развивать момент (а следовательно, и ускорение), больший некоторого максимально возможного. Обычно существует и ограничение, наложенное на скорость вращения вала сервомотора. Последняя также не может превосходить максимально возможную. Поэтому можно лишь потребовать, чтобы кривая $U = U(t)$ (рис. 14.2) по возможности быстрее, т. е. при минимальном значении $t = T$, достигла бы области $E_{\max} - \Delta E < U < E_{\max} + \Delta E$, где ΔE — достаточно малая величина, причем U будет находиться в этой области и при $t > T$. Величина T называется *временем регулирования*. Требуется так сконструировать управляющее устройство Y (либо только его входную маломощную часть, если мощные каскады усилителя заданы), чтобы обеспечить условие $T = \min$ при заданных ограничениях, наложенных на параметры сервомотора C . Такая система будет наиболее быстродействующей, или, иначе, оптимальной по быстродействию.

В идеальной системе и напряжение U должно было бы при $t = 0$ скачком измениться от 0 до E_{\max} . Однако очевидно, что в реальном компенсаторе такой скачок невозможен. Действительно, сервомотор C не может развивать момент (а следовательно, и ускорение), больший некоторого максимально возможного. Обычно существует и ограничение, наложенное на скорость вращения вала сервомотора. Последняя также не может превосходить максимально возможную. Поэтому можно лишь потребовать, чтобы кривая $U = U(t)$ (рис. 14.2) по возможности быстрее, т. е. при минимальном значении $t = T$, достигла бы области $E_{\max} - \Delta E < U < E_{\max} + \Delta E$, где ΔE — достаточно малая величина, причем U будет находиться в этой области и при $t > T$. Величина T называется *временем регулирования*. Требуется так сконструировать управляющее устройство Y (либо только его входную маломощную часть, если мощные каскады усилителя заданы), чтобы обеспечить условие $T = \min$ при заданных ограничениях, наложенных на параметры сервомотора C . Такая система будет наиболее быстродействующей, или, иначе, оптимальной по быстродействию.

Задача построения системы, оптимальной по быстродействию, весьма сложна даже в простейших случаях. Действительно, допустим сначала, что движение всей системы в целом описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. При малых коэффициентах демпфирования (т. е. малых коэффициентах при первой производной U в уравнении) кривая $U(t)$ имеет резко колебательный характер (кривая 1 на рис. 14.2). В этом случае время регулирования T

велико. Если сделать коэффициент демпфирования большим, то процесс $U = U(t)$ приобретает аperiodический характер (кривая 2 на рис. 14.2). В этом случае время регулирования $T = T_2$ также велико. Путем оптимальной установки коэффициента демпфирования (он обычно выбирается чуть меньшим критического) можно уменьшить время регулирования. Соответствующая кривая не показана на рисунке. Однако простейшие соображения показывают, что можно достичь лучших результатов, перейдя к нелинейной системе. Сделаем коэффициент демпфирования зависящим от разности ΔU между E и U . Пусть при больших значениях ΔU он будет мал, и кривая $U(t)$, обозначенная 3 на рис. 14.2, пойдет по кривой 1. Пусть, однако, когда разность ΔU станет малой, коэффициент демпфирования резко увеличится. Тогда «хвост» кривой 3 получает такой же характер, как и у кривой 2; кривая 3 плавно подойдет к значению E_{\max} , и время регулирования $T = T_3$ окажется значительно меньшим, чем у любой линейной системы. Эти простейшие соображения оправдываются теорией и экспериментом. Оказывается, что система, оптимальная по быстродействию, даже в рассматриваемом простейшем случае должна быть нелинейной. Между тем исследование нелинейных систем, вообще говоря, несравненно более трудно, чем изучение линейных. Но практическое и общетеоретическое значение теории оптимальных систем настолько велико, что вполне оправдывает большой труд, затрачиваемый на ее развитие.

Значимость теории оптимальных систем была подчеркнута выше. Что касается практического значения этой теории, то здесь следует различать два аспекта. Во-первых, без нее невозможно конструировать оптимальные или близкие к ним автоматические системы. Действительно, зачастую даже в простых случаях интуиция инженера совершенно недостаточна для нахождения оптимальных законов действия управляющих устройств. Между тем оптимальные режимы работы агрегатов могут обеспечить очень большой экономический эффект; в оборонной технике пригодны критерии совершенно иного типа, но и там значение оптимальных систем очевидно. С другой стороны, теория оптимальных систем позволяет оценить «потолок», который может быть достигнут в наилучшей, оптимальной системе, и сравнить его с показателями действующей неоптимальной системы. Это сравнение позволяет выяснить, следует ли в рассматриваемом случае заниматься разработкой оптимальной системы или можно удовлетвориться существующей.

§ 2. Классификация оптимальных систем

На рис. 14.3 изображена структурная схема системы автоматического управления. Буквой U обозначено управляющее устройство, а буквой O — управляемый объект.

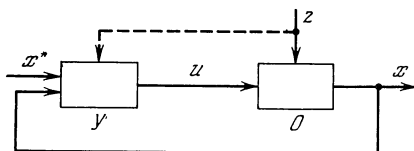


Рис. 14.3.

Природа объекта может быть любой. В качестве управляемого объекта может фигурировать, например, прокатный стан либо химический реактор. Управляемым объектом может быть цех предприятия или отдельный двигатель. На выходе объекта O появляется управляемая величина x . Под управляемой величиной понимаются параметры, характеризующие состояние управляемого объекта.

В общем случае имеется несколько таких параметров x_1, \dots, x_n . Удобно считать эти величины координатами вектора x .

$$x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Вектор x называется также *выходным вектором* или *выходной величиной* объекта O .

На вход объекта O поступает управляющее воздействие u от управляющего устройства U . Если таких воздействий несколько: u_1, u_2, \dots, u_r , то их можно объединить в вектор u с координатами u_j ($j = 1, \dots, r$)

$$u = (u_1, \dots, u_r). \quad (2)$$

На вход управляющего устройства U подается задающее воздействие x^* , представляющее собой инструкцию о том, какой должна быть входная величина x объекта. Эта инструкция должна конкретизировать цель управления (соответствующее понятие уточняется в следующем параграфе). Инструкция может представлять собой коллекцию из n величин x_1^*, \dots, x_n^* , которые будем считать координатами вектора x^* :

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*). \quad (3)$$

Например, можно потребовать, чтобы в идеальном случае удовлетворились условия

$$x_i = x_i^* \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4)$$

где x_i^* — заданные функции времени.

Известно, что системы автоматического управления разделяются на два класса: разомкнутые и замкнутые системы. Последний класс называется также системами с обратной связью. В разомкнутых системах управляющее устройство не получает информации о действительном состоянии x объекта O . В замкнутых системах управляющее устройство U получает эту информацию по линии обратной связи (внизу на рис. 14.3). Принцип действия замкнутой системы может быть кратко охарактеризован следующим образом: если величина x не соответствует требованиям x^* , то управляющее устройство U оказывает такое воздействие u на объект O , чтобы приблизить x к этим требованиям.

Отклонение величины x от требований может произойти от различных причин:

а) Неправильное, неточное или с запаздыванием использование устройством U содержащейся в нем или приходящей к нему информации о характеристиках и состоянии объекта и о цели управления. Этот недостаток в принципе может быть исправлен усовершенствованием закона действия (алгоритма) управляющего устройства U .

б) Ограничение ресурсов управления, т. е. невозможность по тем или иным причинам подавать на объект U такие управляющие воздействия u , которые обеспечили бы требуемое поведение x объекта. На практике ресурсы управления всегда ограничены, и это обстоятельство необходимо учитывать.

в) Причиной отклонения x от требований может оказаться некоторое заранее непредвиденное и не контролируемое возмущающее воздействие z , поступающее на объект O и влияющее на его выходную величину x . Если на различные части объекта O действуют возмущения z_1, \dots, z_l , то мы будем представлять их в виде вектора z

$$z = (z_1, \dots, z_l). \quad (5)$$

Возмущающее воздействие z часто называют помехой. Помехи, действующие на управляемый объект O , могут вызывать заранее непредвиденное изменение его характеристик. Влияние изменения нагрузки на объект можно рассматривать как частный случай действия помехи.

Допустим, что алгоритм управляющего устройства U обеспечивает успешную работу системы при определенных характеристиках объекта O . Однако при их изменении работа системы может ухудшиться и величина x станет значительно отклоняться от требований.

Принцип обратной связи во многих случаях создает возможность удовлетворения требованиям, предъявляемым к величине x даже при наличии значительной помехи z , действующей на объект O . Однако если характеристики объекта O сложны и быстро изменяются в широком диапазоне, то задача управления затрудняется. В таких случаях получение информации о помехе z или хотя бы о некоторых ее составляющих $z_1, \dots, z_{l'}$ ($l' < l$) может оказать существенную помощь и улучшает результат управления. Пусть помеха измеряется и результат измерения поступает (см. пунктирную линию на рис. 14.3) в управляющее устройство $У$. Тогда последнее может рассчитать и подать такое управляющее воздействие u , которое скомпенсирует, нейтрализует влияние помехи z и приведет выходную величину x объекта O в лучшее соответствие с требованиями. Этот прием носит название *компенсации*. Цепь компенсации на рис. 14.1 не является линией обратной связи, так как по ней передается значение входной, а не выходной величины объекта. Системы, в которых наряду с принципом обратной связи применяется принцип *компенсации*, иногда называются *комбинированными*.

Следует отметить, что область применения принципа компенсации гораздо уже области применения принципа обратной связи. Это объясняется главным образом тем, что на объект O действует большое количество различных помех z_1, \dots, z_l . Значительная часть этих помех вообще не поддается измерению, а потому и не может быть скомпенсирована с помощью цепи, показанной пунктиром на рис. 14.3. Даже если бы и существовала принципиальная возможность измерения множества помех z_i , то расчет нейтрализующего их воздействия u был бы чрезмерно сложным. Поэтому управляющее устройство $У$ оказалось бы слишком громоздким, а результаты работы системы могли бы все же быть недостаточно успешными, так как не все помехи можно измерить. Между тем принцип обратной связи позволяет измерять только лишь отклонение управляемой величины x от требований и формировать управляющее воздействие u , которое приближает x к требуемому значению. Очевидно, что принцип обратной связи гораздо более универсален и, вообще говоря, приводит к более простым методам управления, чем принцип компенсации. Однако в ряде случаев, когда измерение основного возмущающего воздействия осуществляется достаточно просто, метод компенсации (или его сочетание с принципом обратной связи) оказывается наиболее удачным.

Обычно объект O задан, и его свойства изменять нельзя. Между тем алгоритм управляющего устройства $У$ большей частью вовсе не задан, и его можно выбирать из широкого класса возможных алгоритмов *). Задача построения оптимальной системы сводится, таким образом, к задаче разработки такого управляющего устройства $У$, которое, в известном смысле, наилучшим образом управляет объектом O .

На практике к устройству $У$ обычно предъявляется ряд самостоятельных требований, не имеющих прямого отношения к объекту O . Например, можно потребовать, чтобы устройство $У$ было достаточно надежным, а также не слишком сложным. Можно потребовать, чтобы его вес, габариты или потребление энергии были не слишком большими. Можно для облегчения расчетов либо по иным соображениям принять устройство $У$ линейными или даже заранее задать его структурную схему, считая неизвестными в ней только параметры отдельных звеньев. Однако ниже основное внимание обращено на такое рассмотрение, в котором отсутствуют какие-либо требования или ограничения, касающиеся непосредственно управляющего устройства $У$.

*) Нередко мощная силовая часть управляющего устройства задана; тогда ее следует относить к управляемому объекту и считать его частью. Поэтому иногда «управляемый объект» заменяют понятием «неизменяемая часть системы».

Допустим, что если потребуется, это устройство может быть любым, например сколь угодно сложным, а также безынерционным. Такое отсутствие ограничений обусловлено обширными возможностями современной вычислительной техники (см. предыдущий параграф). Кроме того, наложение дополнительных ограничений на управляющее устройство $У$ может, вообще говоря, резко усложнить задачу нахождения оптимальной системы. Такое усложнение возникает, если, например, потребовать, чтобы сложность или надежность, либо стоимость управляющего устройства не переходили через некоторую верхнюю грань. Разумеется, если ограничить выбор устройства $У$ известным, заранее определенным классом систем, либо заранее выбрать схему и считать неизвестными лишь ее параметры, то задача сильно упрощается. Однако ценность ее решения, как правило, падает в еще большей мере. Действительно, самое трудное при создании оптимального управляющего устройства — это определение общего вида, общей структуры алгоритма. К сожалению, интуиция инженера или математика может оказать здесь помощь лишь в самых простейших случаях и бессильна в сколько-нибудь более сложных. Поэтому заранее, как правило, не известны ни общий вид алгоритма, ни даже достаточно узкий класс зависимостей, к которому он принадлежит. Всякий необоснованный априорный выбор узкого класса зависимостей лишает поэтому решение задачи той ценности, какую оно имело бы при отсутствии подобных ограничений.

Если ограничения, наложенные на $У$, отсутствуют, то алгоритм оптимального устройства $У$ определяется лишь следующими факторами, относящимися к объекту O и способу его соединения с $У$, а именно:

- а) характеристиками объекта;
- б) требованиями, предъявляемыми к объекту;
- в) характером информации об объекте, поступающей в управляющее устройство.

Подробное рассмотрение этих факторов необходимо в целях детальной постановки задачи. Можно символически представить каждый из указанных выше факторов в виде некоторого направления, ортогонального другим, как это показано на рис. 14.4 и связать с каждым типом оптимальных систем точку или область в таком трехмерном пространстве.

Указанные на рис. 14.4 направления являются направлениями классификации оптимальных систем. Подобная классификация полезна в том отношении, что позволяет правильно определить место каждого типа оптимальных систем среди других типов. Исследование всех возможных типов оптимальных систем с общих точек зрения вскрывает единство основных положений теории, несмотря на существенные различия в отдельных типах систем.

Первое направление, указанное на рис. 14.4 — классификация по характеристикам объектов. Из рис. 14.3 видно, что объект O характеризуется зависимостью его выходной величины x от входных величин u и z . Изобразим символически эту зависимость следующим образом:

$$x = F(u, z). \quad (6)$$

Зависимость F в общем случае представляет собой оператор, т. е. закон соответствия между двумя множествами функций. Например, в формуле (6) вектор-функция x зависит от вида вектор-функций u и z . Оператор F объекта может быть задан различными способами — с помощью формул, графиков или таблиц. Часто задают эту зависимость в виде дифференциальных

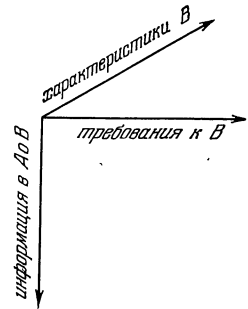


Рис. 14.4.

с предыдущими $x_i(m)$, могут быть записаны в следующем виде:

$$x_i(m+1) = g_i [x_1(m), \dots, x_n(m); u_1(m), \dots, u_r(m); z_1(m), \dots, z_l(m); m] \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12)$$

где g_i — вообще говоря, нелинейные функции своих аргументов. Уравнения (12) можно записать в векторном виде

$$x(m+1) = g [x(m); u(m), z(m); m]. \quad (13)$$

Здесь g — вектор с составляющими g_1, \dots, g_n .

В третьем типе систем дозволены лишь определенные дискретные уровни величин (сетка дозволенных уровней показана на рис. 14.5). Например, возможен случай, когда $x_i(m) = aq$, где a — константа, а q — целое число. Тогда значение величины x_i изображается одним из дозволенных уровней (кружки на рис. 14.5). Системы, в которых величины квантованы и по времени и по уровню, называются дискретными (или чисто дискретными). Оператор дискретной системы может характеризоваться, например, уравнениями (12); однако все величины в этих уравнениях должны иметь лишь дозволенные уровни. В частности, и функции g_i могут принимать лишь дозволенные для x_i значения.

Можно различать объекты и по типам их уравнений. В большинстве работ по оптимальным системам изучаются *объекты с сосредоточенными параметрами*, движение которых характеризуется обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако правомерны и решаются также задачи для *объектов с распределенными параметрами*, характеризующихся уравнениями в частных производных и интегральными уравнениями.

В число характеристик объекта входят также ограничения различного вида. Например, управляющие воздействия u_1, \dots, u_r , входящие в состав вектора u (см. рис. 14.3), не могут иметь любые значения. Они не могут вследствие физических свойств объекта или не должны, допустим, из-за опасности нарушения нормальной работы объекта, превышать некоторые пределы.

Весьма часто ограничения имеют вид

$$|u_1| \leq U_1, \dots, |u_r| \leq U_r, \quad (14)$$

где U_1, \dots, U_r — заданные константы. Возможен случай, когда ограниченные функции от нескольких управляющих воздействий; например,

$$\sum_{v=1}^r \lambda_v^2 u_v^2 \leq N, \quad (15)$$

где λ_v^2 и N — константы либо заданные функции времени.

Рассмотрим r -мерное пространство вектора u с координатами u_1, \dots, u_r . Условия (14) или (15) являются частными случаями условий, ограничивающих расположение конца вектора u некоторой допустимой областью $\Omega(u)$ этого пространства. Выражение « u принадлежит области $\Omega(u)$ » символически записывают в виде

$$u \in \Omega(u). \quad (16)$$

В частном случае условий (14) вектор u ограничен r -мерным параллелепипедом, а в случае условий (15) — r -мерным эллипсоидом в u -пространстве.

Ограничения могут быть наложены не только на управляющие воздействия u_j , но и на координаты x_i ($i = 1, \dots, n$) объекта O . Например, какие-либо заданные функции или функционалы $H_\mu(x)$ этих координат не должны превосходить некоторые пределы, которые можно без ограничения

общности принять равными нулю:

$$H_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = H_{\mu}(\bar{x}) \leq 0 \quad (\mu = 1, \dots, m). \quad (17)$$

Функции или функционалы $H_{\mu}(x)$ можно считать координатами m -мерного вектора $H(x)$. Условия (17) накладывают ограничения на расположение этого вектора. Если H_{μ} — однозначные функции x , то условия (17) означают, что и вектор x ограничен в n -мерном x -пространстве некоторой допустимой областью $\Omega(x)$:

$$x \in \Omega(x). \quad (18)$$

В наиболее общем случае ограничиваются некоторые функционалы L от $u(t)$ и $z(t)$, т. е. величины, зависящие от вида функций u , x , z на каком-либо интервале

$$L_{\mu}[u(t), x(t), z(t)] \in \Omega_{\mu}(L) \quad (\mu = 1, \dots, m), \quad (19)$$

где $\Omega_{\mu}(L)$ — допустимая область изменения функционала L_{μ} . Примером может служить ограничение вида

$$L = \int_0^T \left[\sum_{v=1}^n \alpha_v x_v^2 + \beta u^2 \right] dt \leq N, \quad (20)$$

где T , α_v , β и N — положительные константы *). В дискретно непрерывных или дискретных системах ограничиваются аналогичные величины.

Ограничения чрезвычайно важны при проектировании управляющих устройств. Поясним это положение примером. Пусть требуется построить следящую систему постоянного тока с минимальным временем переходного процесса. В принципе, подавая сколь угодно большие напряжения на вход цепи якоря сервомотора, можно получать сколь угодно большие токи в этой цепи, сколь угодно большие моменты и ускорения вала двигателя, что обеспечит сколь угодно малое время переходного процесса. Однако допустимы лишь такие процессы, в которых ток якоря, а также скорость вала сервомотора не выйдут за некоторые определенные пределы. Именно это обстоятельство не позволяет беспречно уменьшить время переходного процесса (см., например, рис. 14.2). Вообще наличие ограничения придает во многих случаях смысл задаче об оптимальной системе. Решение этой задачи должно ответить на вопрос: как добиться наилучших результатов при ограниченных ресурсах.

К характеристикам объекта O можно отнести также характеристики возмущения z , действующего на объект от внешней среды (см. рис. 14.3 и уравнения (7), (9)).

Иногда характеристики возмущения включают в состав оператора объекта. Если z_v — известные функции времени ($v = 1, \dots, l$), то их выражения можно подставить в уравнения объекта, например в уравнения (7) или (12). Тогда эти уравнения будут явно зависеть от времени. В методических целях удобно непредвиденные возмущения z_v считать внешними воздействиями, прилагаемыми извне к объекту, а все возмущения, предполагаемые известными, включать в состав оператора F .

Возмущения z_v могут, складываясь с другими воздействиями, например с u_j , поступать на входы звеньев объекта. Эти воздействия называют *аддитивными*. Но z_v могут действовать и по-другому, изменяя коэффициенты уравнений звеньев или их параметры. Такие воздействия называются *параметрическими*. В нелинейных системах, вообще говоря, отсутствует четкое различие между этими двумя типами воздействий.

*) В формулу ограничения может входить также время t в явном виде.

Случайные возмущения z_v могут быть случайными величинами или случайными процессами. В первом случае z_v могут считаться постоянными в течение одного отдельного процесса в системе; во втором случае z_v представляют собой случайные функции времени, изменением которых за время одного процесса в системе нельзя пренебречь.

Иногда случайные возмущения z_v не фигурируют явно в условиях задачи. Но если z случайно, то при заданном u , согласно (7), выходная величина x объекта будет случайным процессом. Можно задать вместо характеристики z непосредственно условные вероятностные характеристики процесса x , зависящие от u и начальных условий x^0 , что заменяет сразу задание оператора F и характеристик случайного возмущения z .

§ 3. Критерии оптимальности

Требования, предъявляемые к поведению объекта O , представляют собой второе направление классификации оптимальных систем (см. рис. 14.4). В состав этих требований входит задание определенной цели управления.

В любом случае *цель управления можно рассматривать как достижение экстремума некоторой величины Q — критерия оптимальности*. В зависимости от требований необходим либо максимум, либо минимум величины Q . В общем случае критерий оптимальности зависит как от задающего воздействия x^* , так и от выходной величины x ; он может зависеть также от u и z , а также от времени t . Пусть для определенности требуется, чтобы величина Q была минимальной:

$$Q(x, x^*, u, t) = \min. \quad (1)$$

Это условие представляет собой аналитическую формулировку цели управления. Отметим, что Q является функционалом, т. е. числом, зависящим от вида функций x , x^* , u , z . Например, в частном случае Q имеет вид

$$Q = \int_0^T [x(t) - x^*(t)]^2 dt, \quad (2)$$

где T — фиксированная величина. Из формулы (2) видно, что величина Q зависит от вида функций $x(t)$ и $x^*(t)$ на интервале $0 < t < T$.

В качестве критерия Q могут быть выбраны различные технические или экономические показатели, например производительность объекта или качество продукции либо затрата сырья или электроэнергии и т. д. Обоснование выбора критерия оптимальности Q , определяемого конкретными технико-экономическими условиями, находятся вне рамок теории оптимальных систем и в этой теории не обсуждается.

Из формулы (1) для Q можно узнать не только возможное минимальное значение Q_{\min} , но и оценить ухудшение работы системы при отклонении ее от идеала. Мерой ухудшения может явиться разность $Q - Q_{\min}$ или какая-нибудь монотонная функция этой разности, обращающаяся в нуль при $Q = Q_{\min}$.

Возможны различные линии классификации по типам критериев Q . Так, можно делить критерии оптимальности в зависимости от того, относятся они к переходному или установившемуся процессу в системе. Для примера рассмотрим интегральные критерии процессов в линейных системах. Пусть движение некоторой линейной системы с входной величиной x^* и выходной величиной x характеризуется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, связывающим входную величину x^* с выходной x :

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^m x^*}{dt^m} + \dots + b_m x^*. \quad (3)$$

Решение этого уравнения имеет, как известно, вид

$$x(t) = x_s(t) + x_d(t), \quad (4)$$

где $x_s(t)$ — частное решение уравнения с правой частью, а $x_d(t)$ — общее решение уравнения без правой части

$$a_0 \frac{d^n x_d}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_d}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x_d = 0. \quad (5)$$

Физический смысл формулы (4) состоит в том, что $x_s(t)$, при определенных дополнительных условиях, представляет собой установившийся процесс в системе, а $x_d(t)$ — переходный процесс. Если система устойчива, что и будет предполагаться далее, то

$$x_d(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Чтобы найти выражение для $x_d(t)$, необходимо, как известно, предварительно решить характеристическое уравнение системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (7)$$

и найти его корни p_1, p_2, \dots, p_n . Тогда, считая для простоты все корни различными, получим

$$x_d(t) = c_1 e^{p_1 t} + \dots + c_n e^{p_n t}, \quad (8)$$

причем постоянные c_i ($i = 1, \dots, n$) определяются из начальных условий

$$\left(\frac{d^k x_d}{dt^k} \right)_{t=0} = \left(\frac{d^k x}{dt^k} \right)_{t=0} - \left(\frac{d^k x_s}{dt^k} \right)_{t=0} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (9)$$

Чтобы выяснить характер переходного процесса, необходимо решить характеристическое уравнение (7) и, найдя его корни, построить по уравнению (8) график $x_d(t)$. Однако можно более просто определить характер решения, вычислив, например, интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} x_d(t) dt. \quad (10)$$

Как было показано в § 4 гл. VII, этот интеграл определяется в общем виде как функция коэффициентов уравнения (5) и начальных условий без необходимости предварительного нахождения функции $x_d(t)$. Если $x_d(t)$ неизменного знака, например $x_d(t) > 0$ при любом $t \geq 0$, то уменьшение интеграла I_1 , вообще говоря, соответствует убыстрению переходного процесса. Поэтому иногда принимают I_1 за критерий «качества» переходного процесса. Однако при процессах с изменением знака $x_d(t)$ может оказаться, что малым значением I_1 обладает как раз слабо затухающий процесс, имеющий резко колебательный характер. Поэтому область применения критерия I_1 ограничена, в связи с чем используется другой критерий

$$I_2 = \int_0^{\infty} x_d^2(t) dt. \quad (11)$$

Подбирая параметры или алгоритм управляющего устройства \mathcal{U} с целью минимизации интеграла I_2 , часто можно добиться удовлетворительного характера переходного процесса. Однако нередко применение этого критерия приводит все же к излишне колебательному характеру переходного процесса.

Поэтому, как уже указывалось ранее в книге, широко распространен обобщенный интегральный критерий

$$I_V = \int_0^{\infty} V dt, \quad (12)$$

где V — квадратичная форма от переходных составляющих x_{di} координат x_1, \dots, x_n системы

$$V = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_{di} x_{dj}. \quad (13)$$

Поясним геометрический смысл обобщенного интегрального критерия на простейшем примере, в котором x_{d1} — переходная составляющая погрешности системы $x_{d1} = x_1$; $\frac{dx_{d1}}{dt} = x_2$. Пусть

$$I_V = \int_0^{\infty} [x_1^2 + T^2 x_2^2] dt = \int_0^{\infty} \left[x_{d1}^2(t) + T^2 \left(\frac{dx_{d1}}{dt} \right)^2 \right] dt, \quad (14)$$

где $T = \text{const}$.

Выбирая параметры системы так, чтобы минимизировать интеграл I_V , мы запрещаем длительное существование значительных отклонений x_{d1}

(иначе составляющая $\int_0^{\infty} x_{d1}^2 dt$ интеграла I_V будет велика); но также запрещаем

и длительное существование больших значений производных $\frac{dx_{d1}}{dt}$

(иначе составляющая $\int_0^{\infty} \left(\frac{dx_{d1}}{dt} \right)^2 dt$ интеграла I_V будет велика). Таким обра-

зом, получается не только быстрый, но и плавный, без резких колебаний, переходный процесс.

Интеграл I_V принципиально отличается от I_1 и I_2 тем, что дает возможность по величине I_V составить строгое суждение о характере переходного процесса.

Критерии (10) — (12) служат для оценки переходного процесса $x_d(t)$. Для оценки установившегося процесса $x_s(t)$ служат критерии другого типа. например:

$$\begin{aligned} x_{\text{ср. кв}}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_s^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_d^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T x_s x_d dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Второе слагаемое в правой части (15) равно нулю, так как интеграл $\int_0^T x_d^2(t) dt$ остается конечным при $T \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что и последнее

слагаемое исчезает. Поэтому остается лишь первое слагаемое, соответствующее установившемуся процессу $x_s(t)$.

Часто критерием оптимальности в переходном процессе считают время регулирования или величину максимального отклонения процесса от некоторой заданной величины или функции времени. В последнем случае требуется, чтобы в оптимальной системе достигался *минимум максимального отклонения*, так называемый *минимакс*.

Важно подчеркнуть, что нельзя ставить задачу одновременного достижения экстремума для двух или более функций одного или нескольких переменных. Действительно, вообще говоря, экстремумы у различных функций или функционалов не соответствуют одному и тому же значению совокупности аргументов. Поэтому значений аргументов, соответствующих экстремуму одновременно двух или более функций и функционалов, в общем случае не существует. Можно ставить лишь задачу достижения экстремума одной функции или функционала, но при этом накладывать дополнительные условия в любом количестве об ограничении других функций или функционалов. Сами эти ограничения могут носить сложный характер. Например, можно потребовать такого подбора вектора x , чтобы функция $Q_1(x)$ достигла минимума, но при этом значения других функций $Q_2(x)$ и $Q_3(x)$ не отклонялись бы в процентном отношении от своих экстремумов более чем на ε_2 и ε_3 соответственно. Вопрос о существовании значения x , удовлетворяющего этим условиям, может быть решен лишь при рассмотрении конкретной системы.

Иногда применяют *комбинированные критерии*. Допустим, что требуется подобрать такой вектор x , чтобы функция $Q_1(x)$ была минимальна, а $Q_j(x) \leq 0$ ($j = 2, \dots, m$). Последние неравенства ограничивают в пространстве вектора x некоторую допустимую область, за пределы которой нельзя выходить. Однако формально можно устранить ограничения, применив критерий

$$Q(x) = Q_1(x) + \sum_{j=2}^m \beta_j(Q_j) Q_j(x), \quad (16)$$

причем функции β_j имеют вид

$$\beta_j = \begin{cases} 0 & \text{при } Q_j \leq 0, \\ \gamma^2 \gg 1 & \text{при } Q_j > 0 \end{cases} \quad (j = 2, \dots, m). \quad (17)$$

Если число γ^2 достаточно велико, то точка минимума функции Q либо совпадает с минимумом Q_1 , если последний находится внутри допустимой области, либо лежит практически на ее границе, не выходя за ее пределы. Функции $\beta_j(Q_j)$ можно строить также в виде $(1 + Q_j)^{\alpha_j}$, где числа $\alpha_j \gg 1$. Однако конструкция формулы (16) обычно значительно усложняет аналитическое исследование. Можно избежать больших значений коэффициентов, если заменить формулу (16) следующей:

$$Q(x) = \beta_1(Q_2, \dots, Q_m) Q_1(x) + \sum_{j=2}^m \beta_j(Q_j) Q_j(x), \quad (18)$$

где

$$\beta_1(Q_2, \dots, Q_m) = \begin{cases} 1, & Q_j \leq 0 \quad (j = 2, \dots, m), \\ 0, & \text{если хоть одно из } Q_j > 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$\beta_j(Q_j) = \begin{cases} 1, & Q_j > 0, \\ 0, & Q_j \leq 0. \end{cases}$$

Конструкция формулы (18) при этом еще более усложняется. Однако для машинного решения эта формула приемлема и в таком виде применяется в некоторых автоматических оптимизаторах.

§ 4. Постановка задачи оптимального управления

Допустим, что движение объекта описывается с помощью n уравнений первого порядка типа (7) § 2 для координат x_1, \dots, x_n или одного векторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (1)$$

где f_i — непрерывные и дифференцируемые по своим аргументам функции.

Пусть в момент $t = t_0$ начальное значение x равно $x^{(0)}$. На рис. 14.6 показана точка с координатами

$$x^0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \tag{2}$$

в n -мерном фазовом пространстве системы с декартовыми координатами x_1, \dots, x_n . Для примера на рис. 14.6 изображено трехмерное фазовое пространство. Однако все последующие рассуждения справедливы для любого n .

В результате приложения управляющего воздействия $u(t)$ движение системы происходит по некоторой траектории в фазовом пространстве, и в момент времени $t = T$ изображающая точка достигает положения $x^{(T)}$. Пусть $x^{(T)}$ принадлежит некоторому подмножеству P точек фазового пространства. В частном случае это подмножество может обратиться в единственную точку. Подмножество P может быть, например, одномерным, т. е. может быть кривой линией в n -мерном пространстве. В частном случае подмножество P может вообще совпадать с фазовым пространством. В последнем случае задача называется *задачей со свободным концом траектории*. Мы будем ниже рассматривать главным образом лишь два случая: а) случай, когда P вырождается в фиксированную точку $x^{(T)}$, а само время T заранее не фиксировано; б) случай задачи со свободным концом траектории, когда T фиксировано, т. е. установлено заранее.

Пусть заданы ограничения, наложенные на вектор u , типа (16) § 2

$$u \in \Omega(u).$$

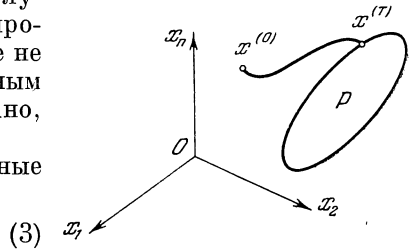


Рис. 14.6.

Назовем *допустимым* управляющим воздействием такую кусочнонепрерывную функцию $u(t)$, которая удовлетворяет ограничению (3). В задаче об оптимальном процессе требуется найти такое допустимое управляющее воздействие $u(t)$ и соответствующее движение $x(t)$ объекта, чтобы траектория изображающей точки x в фазовом пространстве, переходящей от начального положения $x^{(0)}$ к положению $x^{(T)}$, принадлежащему подмножеству P , давала минимум некоторому функционалу Q . Последний будем характеризовать обычно интегралом (при $t_0 = 0$).

$$Q = \int_0^T G[x(t), u(t), t] dt, \tag{4}$$

где G — конечная и обычно положительная скалярная функция x, u и t . Отметим, что явную зависимость от t в выражениях (1), (4) можно с формальной точки зрения ликвидировать, введя дополнительную координату x_{n+1} , причем $(x_{n+1})_{t=0} = 0$,

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1. \tag{5}$$

Так как при этом $x_{n+1} = t$, то можно всюду вместо t писать x_{n+1} . Поэтому новая система уравнений (1) с добавленным к ней уравнением (5) не содержит аргумента t в явной форме, но зато характеризуется $n + 1$ координатами x_1, \dots, x_n, x_{n+1} . Итак, можно ограничиться рассмотрением уравнений без явной зависимости от t , что мы впоследствии часто будем делать.

В частном случае задачи с фиксированной конечной точкой $x^{(T)}$, но не фиксированным заранее временем T , если положить в формуле (4) $G = 1$, получим $Q = T$. Это означает, что условие $Q = \min$ превращается в $T = \min$. В этом случае получим задачу о *максимальном быстродействии*, в которой требуется найти такой закон управления $u(t)$, чтобы в течение минимально-

го времени T перевести изображающую точку x из одного фиксированного положения $x^{(0)}$ в другое фиксированное положение $x^{(T)}$.

Введем дополнительно к координатам x_1, \dots, x_n , еще одну координату x_0 , причем $(x_0)_{t=0} = 0$ и

$$\frac{dx_0}{dt} = G[x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t]. \quad (6)$$

Сравнив выражения (4) и (6), нетрудно убедиться в том, что

$$Q = (x_0)_{t=T} = x_0(T), \quad (7)$$

т. е. критерий оптимальности Q равен значению x_0 в конечный момент времени $t = T$. Геометрически это означает следующее (рис. 14.7). В $(n+1)$ -мерном пространстве с координатами x_0, x_1, \dots, x_n фазовая траектория движения проходит от точки $x^{(0)}$, расположенной в гиперплоскости (x_1, \dots, x_n) до точки M , у которой фиксированы координаты (x_1, \dots, x_n) , но теперь уже не фиксирована координата x_0 . Следовательно, M лежит на перпендикуляре, восстановленном из точки $x^{(T)}$ гиперплоскости $x_0 = 0$ и параллельном оси x_0 . Требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы минимизировать конечное значение $x_0^{(T)}$ координаты x_0 .

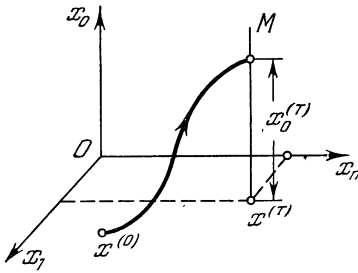


Рис. 14.7.

Если состояние объекта, характеризующее вектором x , определяет все его будущее поведение независимо от «предыстории», т. е. от значений $x(\tau)$ и $u(\tau)$ при $\tau < t$ (например, объект характеризуется уравнениями типа (7) § 2), то $u(t)$ в данный момент времени t является функцией только значения x в тот же момент времени:

$$u(t) = K[x(t), t]. \quad (8)$$

Наконец, если уравнения движения не содержат явно времени t (такие системы часто называют *стационарными*), то оптимальный алгоритм должен быть найден в виде функции

$$u(t) = K[x(t)], \quad (9)$$

или сокращенно

$$u = K[x]. \quad (10)$$

В частном случае, когда имеется лишь одно управляющее воздействие u , формула для оптимального алгоритма приобретает вид

$$u = K[x]. \quad (11)$$

Таким образом, в этом случае требуется найти оптимальную скалярную функцию K от векторного аргумента x , т. е. от положения изображающей точки — конца вектора x — в фазовом пространстве системы. Иначе говоря, K есть функция n переменных x_1, \dots, x_n .

Определение оптимального управления в виде (8) характеризует задачу синтеза оптимальной системы и представляет значительные трудности. Проще находить оптимальный закон управления в функции времени.

§ 5. Динамическое программирование

В течение 50-х годов XX века американский ученый Р. Беллман и ряд его сотрудников развили новый общий метод решения вариационных задач, названный ими динамическим программированием. Метод динамического программирования был применен к широкому классу задач теории оптимальных систем автоматического управления.

Рассмотрим вновь задачу об управлении объектом с уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор с координатами x_1, \dots, x_n , а u — r -мерный вектор с координатами u_1, \dots, u_r . Пусть

$$u \in \Phi(u), \quad (2)$$

и требуется минимизировать интеграл

$$Q = \int_0^T G[x(t), u(t)] dt, \quad (3)$$

где T будем для примера считать пока фиксированным.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности. Этот принцип сформулирован Р. Беллманом для широкого круга систем, будущее поведение которых полностью или статистически определяется их состоянием в настоящем. Поэтому оно не зависит от характера их «предыстории», т. е. поведения системы в прошлом, коль скоро система находится в данный момент в данном состоянии. Для иллюстрации рассмотрим оптимальную траекторию в n -мерном фазовом пространстве (рис. 14.8) с начальными и конечными значениями вектора x , равными $x^{(0)}$ при $t = t_0$ (обычно $t_0 = 0$) и $x^{(T)}$ при $t = T > t_0$. Пусть начальные условия $x^{(0)}$ заданы; значение $x^{(T)}$, вообще говоря, неизвестно. Отметим какую-либо промежуточную точку x' траектории, соответствующую $t = t'$, где $t_0 < t' < T$, и назовем участок траектории от $x^{(0)}$ до x' первым, а от x' до $x^{(T)}$ — вторым. Второму

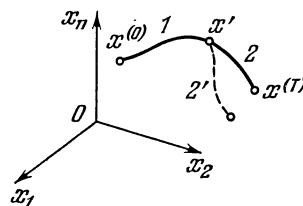


Рис. 14.8.

участку соответствует часть интеграла (3), равная $\int_{t'}^T G[x, u] dt$. Второй участок траектории может рассматриваться и как самостоятельная траектория. Она будет оптимальной, если соответствующий ей интеграл минимален. Первый и второй участки отмечены цифрами 1 и 2 на рис. 14.8. Принцип оптимальности можно сформулировать так: *второй участок оптимальной траектории является в свою очередь оптимальной траекторией.*

Это означает, что в том случае, когда начальное состояние системы есть x' , а начальный момент времени $t = t'$, то независимо от того, каким образом пришла система к этому состоянию, ее оптимальным последующим движением будет траектория 2. Действительно, допустим противное. Тогда критерий (3), рассматриваемый для интервала времени от t до T , будет наименьшим не для траектории 2, а для какой-либо иной траектории 2', исходящей из точки x' и показанной пунктиром на рис. 14.8. Но в таком случае можно было бы построить «лучшую» траекторию, чем траектория 1—2, и для первоначальной задачи нужно лишь выбрать управление u таким, чтобы описывалась траектория 1, а затем 2. Между тем мы исходили из того, что траектория 1—2 оптимальна. Противоречие доказывает невозможность существования траектории 2, обеспечивающей меньшее значение Q , чем траектория 2'. Итак, траектория 2 оптимальна.

Сформулированный выше принцип оптимальности является весьма общим необходимым условием оптимального процесса, справедливым как для непрерывных, так и для дискретных систем.

При определенных условиях, сформулированных в [20], принцип оптимальности является и достаточным условием оптимальности.

Принцип оптимальности выглядит почти тривиальным и на первый взгляд бедным по содержанию утверждением. Однако из него можно, как показал Р. Беллман, методически рассуждая, вывести необходимые условия для оптимальной траектории, имеющие отнюдь не тривиальный характер. В сущности принцип оптимальности не так уж тривиален, как может вначале показаться. Это видно хотя бы из того, что утверждение, кажущееся его обобщением: «любой участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией», — вообще говоря, несправедливо. Так, например, первый участок траектории $x^{(0)}x'x^{(T)}$ на рис. 14.8 может сам по себе не быть оптимальной траекторией, т. е. не давать минимум интегралу (3) для интервала времени от t_0 до t' , если заданы только лишь начальные условия $x^{(0)}$. Поясним это утверждение элементарной иллюстрацией. Как распределяет свои силы хороший бегун при беге на значительную дистанцию? Действует ли он по принципу: «беги на каждом участке настолько быстро, насколько можешь» или, иначе, «добивайся максимума пройденного расстояния за каждый небольшой интервал времени?». Конечно, нет. Ведь бегун может «выдохнуться» задолго до подхода к цели. Разумно распределяя свои ресурсы в соответствии с конечной целью, бегун вначале экономит свои силы, чтобы вырваться вперед или, во всяком случае, не «выдохнуться» в конце дистанции. Аналогичным образом и любое управление не должно быть «близоруким», не должно руководствоваться лишь достижением наилучшего моментального, локального эффекта. Оно должно быть «дальновидным», оно должно быть подчинено конечной цели, т. е. минимизации значения (см. (3)) на всем интервале от t_0 до T . Только в том случае, когда задана конечная точка x' первого участка при $t = t'$, первый участок также сам по себе является оптимальной траекторией.

Можно дать и другую формулировку принципа оптимальности:

Оптимальная стратегия не зависит от «предыстории» системы и определяется лишь ее состоянием в рассматриваемый момент времени.

Эквивалентность этой и предыдущей формулировок очевидна, если понимать под «предысторией» системы ту траекторию I , по которой изображающая точка пришла в положение x' (рис. 14.8). Под состоянием системы в рассматриваемый момент времени понимается в данном случае именно состояние, соответствующее точке x' в момент времени $t = t'$.

Поясним метод рассуждений Р. Беллмана сначала на простом примере управляемого объекта, движение которого характеризуется уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, u), \quad (4)$$

где x — единственная координата системы, а u — единственное управляющее воздействие, ограниченное некоторой областью (2). Пусть задано начальное условие $x(0) = x^{(0)}$. Допустим, что требуется найти закон управления $u(t)$, минимизирующий интеграл

$$Q = \int_{t_0}^T G_1(x, u) dt + \varphi_1[x(T)], \quad (5)$$

где t_0 будем обычно считать равным нулю, а значение T для простоты можно считать фиксированным. Прежде всего дискретизируем задачу, т. е. приближенно заменяем непрерывную систему дискретно-непрерывной. Основания для этого следующие: во-первых, дискретизация является неизбежным этапом подготовки задачи для решения на цифровой машине. Во-вторых, методу рассуждений проще пояснить на примере дискретно-непрерывной систе-

мы. В третьих, при применении динамического программирования к непрерывным системам часто приходится вводить дополнительные ограничения класса рассматриваемых функций, без чего можно обойтись при рассмотрении дискретно-непрерывных систем. Вообще, как будет показано ниже, основная сфера применения метода динамического программирования лежит в области дискретно-непрерывных либо чисто дискретных систем, либо систем, приближенно к ним приводимых.

Разобьем интервал $(0, T)$ на N равных участков малой длины Δ и будем рассматривать лишь дискретные значения $x = x(k)$ и $u = u(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N$) в моменты времени $t = 0, 1\Delta, 2\Delta, \dots, k\Delta, \dots, (N-1)\Delta, N\Delta = T$. Тогда дифференциальное уравнение (4) объекта можно приближенно заменить уравнением в конечных разностях

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta} = f_1[x(k), u(k)], \quad (6)$$

или

$$x(k+1) = x(k) + f[x(k), u(k)], \quad (7)$$

где

$$f[x(k), u(k)] = \Delta f_1[x(k), u(k)]. \quad (8)$$

Начальное условие остается прежним:

$$x(0) = [x]_{t=0} = x^{(0)}. \quad (9)$$

Интеграл (5) приближенно заменяется суммой

$$Q = \sum_{n=0}^{N-1} G[x(n), u(n)] + \varphi[x(N)], \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G[x(k), u(k)] &= G_1[x(k), u(k)] \Delta, \\ \varphi[x(N)] &= \varphi_1[x(N\Delta)] = \varphi_1[x(T)]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Задача теперь состоит в определении последовательности дискретных значений управляющего воздействия u , т. е. величин $u(0)$ и $u(1), \dots, \dots, u(N-1)$, минимизирующих сумму (10) при условиях (2), (7) и (9), наложенных на систему. Таким образом, требуется найти минимум сложной функции многих переменных. Однако метод динамического программирования дает возможность свести эту операцию к последовательности минимизаций функции одного переменного.

Для решения задачи применяется прием, заключающийся в «попятном» движении от конца процесса, т. е. от момента $t = T$, к его началу. Допустим сначала, что рассматривается момент $t = (N-1)\Delta$. Все значения $u(i)$ ($i = 0, 1, \dots, N-2$), кроме последнего $u(N-1)$, уже каким-то образом были осуществлены, причем получено некоторое значение $x(N-1)$, соответствующее моменту $t = (N-1)\Delta$. Согласно принципу оптимальности воздействие $u(N-1)$ не зависит от «предыстории» системы и определяется лишь состоянием $x(N-1)$ и целью управления. Рассмотрим последний участок траектории от $t = (N-1)\Delta$ до $t = N\Delta$. Величина $u(N-1)$ влияет лишь на те члены суммы (10), которые относятся к этому участку. Обозначим сумму этих членов через Q_{N-1} :

$$Q_{N-1} = G[x(N-1), u(N-1)] + \varphi[x(N)]. \quad (12)$$

Из (7) получаем

$$x(N) = x(N-1) + f[x(N-1), u(N-1)]. \quad (13)$$

Следовательно, $x(N)$ также зависит от $u(N-1)$. Найдем допустимое значение $u(N-1)$, удовлетворяющее (13) и минимизирующее величину Q_{N-1} . Обозначим найденное минимальное значение Q_{N-1} через S_{N-1} . Это величина, очевидно, зависит от состояния системы при $t = (N-1)\Delta$, т. е. от значения $x(N-1)$, входящего в (12) и (13). Итак, $S_{N-1} = S_{N-1}[x(N-1)]$. Выпишем выражение для S_{N-1} :

$$\begin{aligned} S_{N-1}[x(N-1)] &= \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} Q_{N-1} = \\ &= \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} \{G[x(N-1), u(N-1)] + \varphi[x(N)]\} = \\ &= \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} \{G[x(N-1), u(N-1)] + \varphi[x(N-1)] + f[x(N-1), u(N-1)]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что для определения S_{N-1} нужно производить минимизацию только по одному переменному $u(N-1)$. Выполнив этот процесс, получим S_{N-1} в виде функции от $x(N-1)$; эту функцию требуется запомнить (например, в каком-либо запоминающем устройстве при вычислении на цифровой машине) перед переходом к последующим стадиям решения.

Перейдем теперь к предпоследнему участку времени. Рассматривая два участка — последний и предпоследний — вместе, можно заметить, что выбор $u(N-2)$ и $u(N-1)$ повлияет только на те слагаемые суммы (10), которые входят в состав выражения

$$Q_{N-2} = G[x(N-2), u(N-2)] + \{G[x(N-1), u(N-1)] + \varphi[x(N)]\}. \quad (15)$$

Величину $x(N-2)$ в начальный момент предпоследнего интервала, полученную в результате «предыстории» процесса, будем считать заданной. Из принципа оптимальности следует, что лишь значение $x(N-2)$ и цель управления — минимизация Q_{N-2} — определяют оптимальное управление на рассматриваемом участке времени. Найдем величину S_{N-2} — минимум Q_{N-2} по $u(N-2)$ и $u(N-1)$. Но минимум по $u(N-1)$ слагаемого, содержащегося в фигурной скобке выражения (15), уже был найден выше для каждого значения $x(N-1)$, а это последнее зависит от $u(N-2)$. Кроме того, при минимизации Q_{N-1} было попутно найдено и соответствующее оптимальное значение $u(N-1)$; обозначим это оптимальное значение через $u^*(N-1)$. Если учесть также, что первое слагаемое в (15) не зависит от $u(N-1)$, то можно написать

$$\begin{aligned} S_{N-2}[x(N-2)] &= \min_{\substack{u(N-2) \in \Omega(u) \\ u(N-1) \in \Omega(u)}} Q_{N-2} = \\ &= \min_{u(N-2) \in \Omega(u)} \{G[x(N-2), u(N-2)] + S_{N-1}[x(N-1)]\} = \\ &= \min_{u(N-2) \in \Omega(u)} \{G[x(N-2), u(N-2)] + \\ &\quad + S_{N-1}[x(N-2)] + f[x(N-2), u(N-2)]\}, \end{aligned}$$

поскольку из (7) следует

$$x(N-1) = x(N-2) + f[x(N-2), u(N-2)].$$

Отметим, что минимизация здесь производится также всего лишь по одному переменному $u(N-2)$. При этом находим $u^*(N-2)$ — оптимальное значение $u(N-2)$ — и величину S_{N-2} — минимум функции Q_{N-2} . Как $u^*(N-2)$, так и S_{N-2} являются функциями от $x(N-2)$. Теперь можно поместить функцию S_{N-2} в ячейки блока памяти и после получения S_{N-2} «стереть» из памяти ненужную отныне функцию $S_{N-1}[x(N-1)]$, находившуюся в блоке памяти ранее.

Важно отметить, что найденное оптимальное значение $u^*(N - 2)$ минимизирует все выражение в фигурной скобке формулы S_{N-2} , а отнюдь не одно лишь слагаемое $G[x(N - 2), u(N - 2)]$. Следовательно, стратегия, в которой каждое значение $u(N - j)$ выбирается путем минимизации только лишь «своего» слагаемого $G[x(N - j), u(N - j)]$ в сумме (10), вовсе не оптимальна. Она слишком «близорука», о чем уже упоминалось выше. Оптимальная стратегия учитывает конечную цель, т. е. минимизацию всего выражения в фигурной скобке, зависящего от $u(N - j)$.

Можно продолжить описанную выше процедуру «попятного» движения: от конца к началу промежутка $(0, T)$. Учет третьего от конца участка требует рассмотрения той части суммы Q , которая зависит от $u(N - 3)$. Обозначим эту часть через Q_{N-3} :

$$Q_{N-3} = G[x(N - 3), u(N - 3)] + \{G[x(N - 2), u(N - 2)] + G[x(N - 1), u(N - 1)] + \varphi[x(N)]\}.$$

На основании выражения (13) можно написать

$$x(N - 2) = x(N - 3) + f[x(N - 3), u(N - 3)].$$

Далее, минимум выражения в фигурной скобке в выражении Q_{N-3} равен $S_{N-2}[x(N - 2)]$. Поэтому минимум S_{N-3} выражения Q_{N-3} равен

$$\begin{aligned} S_{N-3}[x(N - 3)] &\doteq \min_{u(N-3) \in \Omega(u)} \{G[x(N - 3), u(N - 3)] + S_{N-2}[x(N - 2)]\} = \\ &= \min_{u(N-3) \in \Omega(u)} \{G[x(N - 3), u(N - 3)] + \\ &\quad + S_{N-2}[x(N - 3) + f[x(N - 3), u(N - 3)]]\}. \end{aligned}$$

Переходя совершенно аналогичным образом к S_{N-4}, \dots, S_{N-k} , получаем рекуррентную формулу

$$S_{N-k}[x(N - k)] = \min_{u(N-k) \in \Omega(u)} \{G[x(N - k), u(N - k)] + S_{N-k+1}[x(N - k) + f[x(N - k), u(N - k)]]\}. \quad (16)$$

Параллельно в процессе минимизации правой части этой формулы определяется оптимальное значение u^* , зависящее от $x(N - k)$,

$$u^*(N - k) = u^*[x(N - k)], \quad (17)$$

и минимизирующее выражение в фигурной скобке (16).

Вычисляя по формуле (16) последовательно S_{N-k} для $k = 1, 2, \dots, N$, приходим, наконец, к определению оптимального значения $u^*(0)$, т. е. к значению управляющего воздействия, требуемому в начальный момент времени. Именно это значение и необходимо в конечном итоге узнать, так как рассматриваемый в качестве текущего данный момент времени можно считать совпадающим с начальным, а последующие моменты относятся уже к будущему. Одновременно с определением значения $u^*(0)$ получается и S_0 , т. е. минимальное значение критерия Q при оптимальном управлении.

В некоторых простейших случаях удается провести всю описанную процедуру аналитически. Однако в общем случае аналитическое выражение результатов минимизации оказывается невозможным; поэтому данную процедуру можно рассматривать лишь как программу вычислений, производимых в простых случаях вручную, а в более сложных — на вычислительном устройстве дискретного действия, например на универсальной цифровой машине.

Весь процесс решения принципиально переносится на объект любого порядка n с уравнением (1) и любым числом управляющих воздействий u_l ($l = 1, \dots, r$). Нужно лишь заменить скаляры x, u, f в приведенных выше формулах векторами x, u и f . При этом следует ввести векторы для k -го момента времени $t = k\Delta$

$$\left. \begin{aligned} x(k) &= \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}, \\ u(k) &= \{u_1(k), \dots, u_r(k)\}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь $u_j(N-k)$ есть j -е управляющее воздействие, а $x_j(N-k)$ — j -я координата в момент $t = (N-k)\Delta$.

Заменим дифференциальные уравнения (1) уравнениями в конечных разностях, а интеграл (3) — суммой. Тогда рассуждения, совершенно аналогичные приведенным выше, показывают, что формула (16) заменяется выражением

$$S_{N-k}[x(N-k)] = \min_{u(N-k) \in \Omega(u)} \{G[x(N-k), u(N-k)] + \\ + S_{N-k+1}[x(N-k) + f[x(N-k), u(N-k)]]\}. \quad (19)$$

Процедура расчета не изменится, если в f войдет явная зависимость от времени.

Теперь требуется уже на каждом этапе находить минимум функции r переменных $u_1(N-k), \dots, u_r(N-k)$. Далее, оптимальные величины — скаляр S_{N-k} и вектор $u^*(N-k)$ — суть функции вектора $x(N-k)$, т. е. функции n переменных $x_1(N-k), \dots, x_n(N-k)$.

Вышеизложенное может разочаровать тех читателей, которые представляли себе динамическое программирование неким волшебным рецептом для получения решений любых задач. Эти решения иногда мыслятся в виде готовых общих формул. Однако получить решение в таком виде большей частью невозможно, а иногда и не нужно. Обычно требуется решение в виде графиков или таблиц. Путь получения этого решения, указанный выше, представляет собой процедуру вычислений для получения требуемого результата. Чем проще процедура вычислений, тем лучше метод. Динамическое программирование отличается именно радикальным упрощением процедуры вычислений по сравнению с прямым методом решения задачи. Действительно, задачу минимизации суммы (10) можно было бы, в принципе, рассматривать как задачу минимизации функции N переменных $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$. Но чтобы провести эту минимизацию в действительности, необходимо прежде всего выразить каждое $x(k)$ в виде функции от всех предыдущих управляющих воздействий $u(0), \dots, u(k-1)$ (и начальных условий), воспользовавшись формулой (7), т. е. найти решение для $x(k)$ в общем виде. В результате такой замены, если даже ее возможно провести, выражение (10) невероятно усложнится, и лишь в простейших случаях его удастся привести к обозримому виду. Затем нужно будет искать наименьший из минимумов (а их может быть несколько!) полученной сложной функции большого числа переменных. Такая процедура в подавляющем большинстве случаев практически невыполнима.

Между тем динамическое программирование позволяет заменить минимизацию сложной функции многих переменных последовательностью минимизаций. При этом в каждом из процессов минимизации, как подчеркивалось выше, определяется минимум гораздо менее сложной функции одного или нескольких переменных (n переменных для объекта n -го порядка). Поэтому с помощью динамического программирования можно решить ряд задач, которые неразрешимы методом прямой минимизации.

Из вышеизложенного, разумеется, вовсе не вытекает, что прямой метод всегда неприемлем. В отдельных случаях он успешно применялся, когда число переменных было невелико. Однако в общем случае динамическое программирование обеспечивает существенную рационализацию подсчетов по сравнению с прямым методом.

Следует отметить, однако, что, вообще говоря, решение задач по методу динамического программирования может оказаться все же чрезвычайно громоздким. Действительно, на каждом этапе вычислений необходимо находить и запоминать функции $S_{N-k}(x)$ и $S_{N-k+1}(x)$, т. е. в общем случае две функции n переменных. Запоминание таких функций для больших значений n требует огромного объема памяти и в сложных случаях практически достижимо лишь при помощи каких-либо аппроксимаций.

Описанная методика без принципиальных изменений переносится и на оптимальные системы со случайными процессами. Рассмотрим для иллюстрации пример, в котором на объект первого порядка действует, помимо u , еще случайное возмущение z . Тогда уравнение (7) заменится равенством

$$x(k+1) = x(k) + f[x(k), u(k), z(k)], \quad (20)$$

где $z(k)$ — дискретные значения возмущения. Теперь $x(k)$ и критерий (10) становятся случайными величинами. Поэтому в качестве нового критерия Q , значение которого требуется минимизировать, выберем математическое ожидание выражения (10), причем в число аргументов G для общности также введем z :

$$Q = M \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} G[x(n), u(n), z(n)] + \varphi[x(N)] \right\}. \quad (21)$$

Здесь M — обозначение математического ожидания.

Будем считать в данном примере величины $z(i)$ и $z(j)$ при $i \neq j$ независимыми и допустим, что плотности распределений $P[z(0)]$, $P[z(1)]$,, $P[z(N)]$ известны. Пользуясь той методикой, которая изложена выше, находим сначала для каждого фиксированного $x(N-1)$ функцию

$$\begin{aligned} S_{N-1}[x(N-1)] &= \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} Q_{N-1} = \\ &= \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} M \{ G[x(N-1), u(N-1), z(N-1)] + \\ &\quad + \varphi[x(N-1) + f[x(N-1), u(N-1), z(N-1)]] \} = \\ &= \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} \int_{-\infty}^{\infty} P[z(N-1)] \{ G[x(N-1), u(N-1), z(N-1)] + \varphi[x(N-1) + \\ &\quad + f[x(N-1), u(N-1), z(N-1)]] \} dz(N-1). \quad (22) \end{aligned}$$

При минимизации определяется одновременно и оптимальное значение $u^*[x(N-1)]$. Запомнив $S_{N-1}[x(N-1)]$, находим далее функцию

$$\begin{aligned} S_{N-2}[x(N-2)] &= \min_{u(N-2) \in \Omega(u)} M \{ G[x(N-2), u(N-2), z(N-2)] + \\ &\quad + S_{N-1}[x(N-1)] \} = \\ &= \min_{u(N-2) \in \Omega(u)} \int_{-\infty}^{\infty} P[z(N-2)] \{ G[x(N-2), u(N-2), z(N-2)] + \\ &\quad + S_{N-1}[x(N-2) + f[x(N-2), u(N-2), z(N-2)]] \} dz(N-2) \quad (23) \end{aligned}$$

и т. д. Итак, методика решения по существу оказалась той же, что и для регулярных систем. Аналогичная методика применима к объекту любого порядка. Можно рассматривать и более общие задачи, в которых $P [z (i)]$ неизвестны заранее, и некоторая оптимальная процедура обработки наблюдений позволяет накапливать информацию о плотностях распределений.

Метод динамического программирования при некоторых дополнительных допущениях может быть применен для исследования непрерывных систем. Пусть движение объекта характеризуется уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t). \tag{24}$$

В начальный момент времени t_0 вектор x равен $x^{(0)}$, а критерий оптимальности имеет вид

$$Q = \int_{t_0}^T G(x, u, t) dt, \tag{25}$$

причем для простоты считаем $T = \text{const}$.

Допустим, что найдена оптимальная траектория, ведущая из начальной точки $x^{(0)}$ в конечную точку $x^{(T)}$ (рис. 14.8). Минимальное значение критерия Q , соответствующее оптимальной траектории, обозначим $S(x^{(0)}, t_0)$.

Согласно принципу оптимальности участок траектории от точки x , соответствующей моменту $t > t_0$, до конечной точки $x^{(T)}$ (рис. 14.9) также является оптимальной траекторией, а та часть критерия Q , которая соответствует этому участку и отрезку времени от t до T , имеет минимально возможное значение. Обозначим это значение через $S[x(t), t]$.

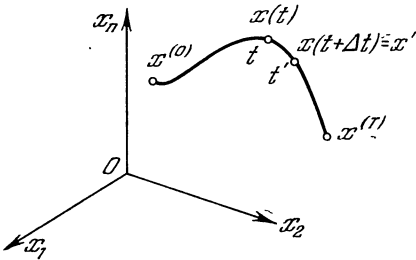


Рис. 14.9.

Пусть Δt — малый промежуток времени, а $S[x(t + \Delta t), t + \Delta t] = S[x', t']$ — минимальное значение той части интеграла Q , которая соответствует участку

оптимальной траектории от точки $x(t + \Delta t) = x'$ до конечной точки $x^{(T)}$ и, следовательно, отрезку времени от $t + \Delta t = t'$ до T . Соотношение между $S[x', t']$ и $S[x, t]$ совершенно аналогично формуле (19); нужно лишь записать $S[x, t]$ вместо $S_{N-k}[x(N-k)]$, $S[x', t']$ вместо $S_{N-k+1}[x(N-k+1)]$ и, наконец, $G[x(t), u(t), t] \Delta t$ вместо $G[x(N-k), u(N-k)]$. Последняя замена как раз и была произведена в первом из уравнений (11). Поскольку Δt — малый, но конечный промежуток времени и замена дифференциального уравнения выражением в конечных разностях неточна, необходимо прибавить в какой-либо из частей равенства еще выражение $o_1(\Delta t)$, т. е. величину порядка малости выше чем Δt . Это означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \tag{26}$$

Итак, вместо равенства (19) можно теперь написать

$$S[x, t] = \min_{u(t) \in \Omega(u)} \{G[x, u, t] \Delta t + S[x', t']\} + o_1(\Delta t). \tag{27}$$

Уравнение (27) можно получить и безотносительно к рассмотренному выше дискретному случаю. Действительно, согласно определению

$$S[x, t] = \min_{u(\tau) \in \Omega(u)} \int_t^T G(x, u, \tau) d\tau \quad (t \leq \tau \leq T). \tag{28}$$

Здесь S представляет собой минимальное значение интеграла, полученное на множестве всех допустимых управлений $u(\tau)$ в интервале от t до T .

Интеграл (28) можно представить в виде суммы двух слагаемых, соответствующих интервалам от t до $t + \Delta t$ и от $t + \Delta t$ до T . Так как Δt мало, то

$$S[x, t] = \min_{u(\tau) \in \Omega(u)} [G(x, u, t) \Delta t + \int_{t'=t+\Delta t}^T G(x, u, v) dv] + o_1(\Delta t), \quad (29)$$

где Δt считаем малым, а $o_1(\Delta t)$ — порядка малости выше, чем Δt . Так как первое слагаемое в квадратной скобке (29) зависит лишь от значения $u(t)$ в момент t и лишь интеграл в квадратной скобке зависит также еще и от значений $u(v)$ в интервале изменения v от $t' \neq t + \Delta t$ до T , то можно написать

$$\begin{aligned} S[x, t] &= \min_{u(t) \in \Omega(u)} [G(x, u, t) \Delta t + \min_{u(v) \in \Omega(u)} \int_{t'}^T G(x, u, t) dv] + o_1(\Delta t) = \\ &= \min_{u(t) \in \Omega(u)} \{G(x, u, t) \Delta t + S[x', t']\} + o_1(\Delta t). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь под знаком минимума перед скобкой стоит значение $u(t)$ в момент времени t . Формулы (30) и (27) совпадают.

Так же как и в формуле (19), следует учесть, что $x' = x(t + \Delta t)$ зависит от $u(t)$. Из (24) находим для малых Δt

$$x' = x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + o_2(\Delta t) = x(t) + f[x(t), u(t), t] \Delta t + o_2(\Delta t), \quad (31)$$

где $o_2(\Delta t)$ — величина высшего порядка малости по сравнению с Δt . Формула (31) аналогична выражению (17).

Предположим теперь, что функция S действительно существует, непрерывна и имеет частные производные по переменным x_i ($i = 1, \dots, n$) и по t , т. е. существуют все $\partial S / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$) и $\partial S / \partial t$. Это предположение пока ничем не обосновано, и справедливость всего последующего вывода зависит от справедливости этого допущения. Если оно не оправдывается, то последующие рассуждения имеют лишь эвристический характер. Между тем существуют случаи, когда указанное выше допущение несправедливо. Вот почему применение динамического программирования к непрерывным системам нуждается, как показано в ряде работ, в общем случае в дополнительном обосновании.

Подставим выражение x' из (31) в формулу (27) и разложим $S[x', t']$ в ряд Тэйлора в окрестности точки (x, t) :

$$\begin{aligned} S[x', t'] &= S[x(t + \Delta t), t + \Delta t] = S[x(t) + f[x(t), u(t), t] \Delta t + o_2(\Delta t); t + \Delta t] = \\ &= S[x, t] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[x, t]}{\partial x_i} f_i[x, u, t] \Delta t + \frac{\partial S[x, t]}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t), \end{aligned} \quad (32)$$

где $o_3(\Delta t)$ — величина высшего порядка малости по сравнению с Δt .

Эту формулу можно переписать более компактно, введя градиент функции $S(x, t)$ — вектор с координатами $\partial S / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$)

$$\text{grad } S = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right). \quad (33)$$

Тогда (32) принимает вид

$$S[x', t'] = S[x(t + \Delta t), t + \Delta t] = \\ = S[x, t] + \langle \text{grad } S[x, t], f[x(t), u(t), t] \rangle \Delta t + \frac{\partial S[x, t]}{\partial t} \Delta t + o_3(\Delta t). \quad (34)$$

Здесь скобками $\langle \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\text{grad } S$ и f . Подставим (34) и (27) и выведем за фигурную скобку в правой части величины $S[x, t]$ и $\partial S/\partial t$, так как они не зависят от $u(t)$. Далее $S[x, t]$ в левой и правой частях можно взаимно уничтожить, и формула после деления на Δt принимает следующий вид:

$$-\frac{\partial S[x, t]}{\partial t} = \min_{u(t) \in \Omega(u)} \{G[x(t), u(t), t] + \\ + \langle \text{grad } S[x, t], f[x(t), u(t), t] \rangle\} + \frac{o_4(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (35)$$

где $o_4(\Delta t)$ — величина высшего порядка малости по сравнению с Δt . Теперь устремим Δt к нулю. Поскольку $o_4(\Delta t)$ подчиняется условию типа (26), то последнее слагаемое в правой части (35) исчезает при $\Delta t \rightarrow 0$. Поэтому в пределе получаем

$$-\frac{\partial S[x, t]}{\partial t} = \min_{u(t) \in \Omega(u)} \{G[x(t), u(t), t] + \langle \text{grad } S[x, t], f[x(t), u(t), t] \rangle\}. \quad (36)$$

Это выражение называется уравнением Беллмана. Оно представляет собой своеобразное дифференциальное уравнение в частных производных.

Рассмотрим пример. Пусть в частном случае $r = 1$ и $n = 2$, причем $G = G(x_1, x_2)$ и единственное управляющее воздействие обозначено через u . Уравнения объекта:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 = ux_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2 = u^2. \quad (37)$$

Тогда уравнение (36) принимает вид (пишем для сокращения S вместо $S[x, t]$)

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_u \left\{ G(x_1, x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_1} (ux_1 + x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} u^2 \right\}. \quad (38)$$

Предполагая, что $\partial S/\partial x_2 > 0$, находим минимум фигурной скобки по u , приравнявая нулю ее производную по u . Оптимальное значение u^* , минимизирующее квадратную скобку,

$$u^* = -\frac{1}{2} x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} \frac{1}{\partial S/\partial x_2}; \quad (39)$$

Подставив это выражение в равенство (38), получим уравнение в частных производных, записанное в обычном виде:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = G(x_1, x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - x_1^2 \frac{(\partial S/\partial x_1)^2}{4 \partial S/\partial x_2}. \quad (40)$$

Уравнение в частных производных (40) можно решить, так как для него известны граничные условия. Действительно, $S[x, T]$ — известная функция. Например, для критерия (5) она равна известной функции $\varphi_1[x(T)]$, так как при $t_0 = T$ интеграл в (5) равен нулю. Для критерия (25) функция $S[x, T]$ равна нулю. Зная граничную функцию $S[x, T]$, можно каким-либо известным методом проинтегрировать уравнение (40). Один из обычных методов приближенного интегрирования состоит в дискретизации задачи и решении получаемых рекуррентных соотношений типа (19). В ряде случаев можно найти приближенное решение иным способом или даже получить точное решение в замкнутом виде. Получаемое попутно значение u^* представляет собой оптимальное управление.

§ 6. Принцип максимума

В 1956 г. академик Л. С. Понтрягин вместе со своими учениками В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе высказал в виде гипотезы принцип, ведущий к решению общей задачи о нахождении оптимального по скорости переходного процесса в непрерывных системах. Открытие этого принципа явилось итогом работы Л. С. Понтрягина и его соавторов по решению задач оптимального управления; ряд таких задач был поставлен А. А. Фельдбаумом в нескольких докладах по теории оптимальных систем в 1954 г. на семинаре, руководимом Л. С. Понтрягиным. Эти задачи были поставлены также в 1953 г. в докладе А. А. Фельдбаума на II Всесоюзной конференции по теории автоматического регулирования. В последовавшем, начиная с 1956 г., ряде работ Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского и Р. В. Гамкрелидзе принцип максимума был обоснован как необходимый и достаточный признак оптимального процесса для линейных систем и необходимый признак оптимального процесса для нелинейных систем. Кроме того, принцип максимума был обобщен на случай минимизации интеграла и на случай ограничений координат объекта. Иные методы доказательства были даны впоследствии Л. И. Розоноэром. В работах Л. И. Розоноэра впервые была установлена связь принципа максимума с динамическим программированием, а также дано доказательство справедливости принципа максимума для линейных дискретно-непрерывных систем. Впоследствии принцип максимума был обобщен на определенные классы интегральных уравнений, соответствующие системам с распределенными параметрами.

Доказательства справедливости принципа максимума, приведенные в работах Л. С. Понтрягина и его соавторов, не имеют непосредственного отношения к принципу оптимальности Р. Беллмана и динамическому программированию. Однако из методических соображений удобно сначала вывести принцип максимума из уравнений Беллмана, чтобы показать его связь с этим соотношением. В дальнейшем будет приведен вывод принципа максимума, независимый от динамического программирования.

Перепишем уравнение (36) § 5 в более компактном виде. Для этого введем дополнительную координату x_{n+1} , причем $(x_{n+1})_{t=0} = 0$; уравнение для координаты x_{n+1} пусть имеет вид

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = f_{n+1} = 1. \quad (1)$$

Если в начальный момент $t = 0$, то $x_{n+1} = t$. Тогда вместо t можно писать x_{n+1} , а вместо $\partial S/\partial t$ напомним $\partial S/\partial x_{n+1}$. Введем, кроме того, координату x_0 с уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0 = G[x, u, t] = G[x, u, x_{n+1}], \quad (2)$$

причем $(x_0)_{t=0}$. Тогда задача минимизации интеграла Q сведется (см. (6) § 4) к задаче минимизации величины $(x_0)_{t=T} = x_0^{(T)}$.

Введем теперь обобщенные векторы в $(n+2)$ -мерном пространстве

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= (x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \tilde{f} &= (f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

$$\psi = \left(-1, -\frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial S}{\partial x_n}, -\frac{\partial S}{\partial x_{n+1}} \right). \quad (4)$$

Переведем $(-\partial S/\partial t)$ в выражении (36) § 5 в правую часть, а затем учтем, что минимум выражения в правой части означает максимум, со знаком

минус, выражения, обратного ему по знаку. Действительно, для любого μ справедливо соотношение

$$\max(-\mu) = \min(\mu); \quad (5)$$

Выражение (36) § 5 может быть переписано с учетом (1), (2) и (5) в виде

$$0 = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \left\{ G[x, u, x_{n+1}](-1) - \langle \text{grad } S[x, x_{n+1}], f[x, u, x_{n+1}] \rangle - \frac{\partial S}{\partial x_{n+1}}(+1) \right\}. \quad (6)$$

Сравнение этого соотношения с выражениями (3) и (4) для векторов f и ψ показывает, что условию (6) можно придать чрезвычайно компактный вид

$$0 = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \{ \langle \tilde{\psi}, \tilde{f} \rangle \}. \quad (7)$$

Теперь введем так функцию Понтрягина; это скаляр

$$\tilde{H} = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f} \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{\psi}_i \tilde{f}_i, \quad (8)$$

где $\tilde{\psi}_i$ и \tilde{f}_i — i -е координаты векторов $\tilde{\psi}$ и \tilde{f} соответственно. Тогда равенство (7) принимает вид

$$0 = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \tilde{H}. \quad (9)$$

Это и есть принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Из выражения (9) следуют два вывода.

а) Если процесс является оптимальным, — а именно из этого мы исходим при выводе (36) § 5, — то в любой момент времени t оптимальное управление $u^*(t)$ — это такое управление, которое максимизирует величину \tilde{H} , причем

$$\tilde{H}_{\max} = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \tilde{H} = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \langle \tilde{\psi}, \tilde{f} \rangle = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \sum_{i=1}^n \tilde{\psi}_i \tilde{f}_i. \quad (10)$$

Величина \tilde{H} в этой формуле зависит от u , поскольку вектор \tilde{f} зависит от u . В данной точке $(n+2)$ -мерного пространства \tilde{x} величина \tilde{H} определена полностью как функция u , коль скоро известен вектор $\tilde{\psi}$, а этот вектор полностью определяется, если известна функция $S[x, x_{n+1}]$ и, следовательно, известны ее частные производные $\partial S / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n+1$).

Итак, рецепт подбора оптимального управления u оказывается в принципе, весьма простым: нужно в каждый момент времени подбирать u так, чтобы обеспечить максимально возможное (с учетом ограничений, наложенных на u) значение функции \tilde{H} .

б) В любой точке оптимальной траектории максимальное значение величины \tilde{H} одно и то же: оно равно нулю.

Принцип максимума имеет определенный геометрический смысл. Чтобы пояснить его, введем вспомогательную функцию \tilde{S} — функцию точки \tilde{x} в $(n+2)$ -мерном пространстве, определяемую формулой

$$\tilde{S} = x_0 + S(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \quad (11)$$

Рассмотрим в $(n+2)$ -мерном пространстве x траекторию изображающей точки, движущейся от начального положения $\tilde{x}^{(0)}$ к конечному положению $\tilde{x}^{(T)}$.

Так как \tilde{S} есть непрерывная функция точки пространства \tilde{x} , то можно найти в этом пространстве некоторую поверхность — геометрическое место точек $\tilde{S} = \text{const}$. Назовем такие поверхности *изоповерхностями*.

Сравнивая (11) с (4), нетрудно убедиться в том, что координаты вектора $\tilde{\psi}$ связаны с \tilde{S} равенствами

$$\tilde{\psi}_i = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (12)$$

Следовательно, вектор $\tilde{\psi}$ является взятым со знаком минус градиентом скаляра \tilde{S} в $(n + 2)$ -мерном пространстве \tilde{x} :

$$\tilde{\psi} = -\text{grad } \tilde{S}. \quad (13)$$

Как известно из векторного анализа, градиент ортогонален к поверхности $\tilde{S} = \text{const}$. Рассмотрим в точке \tilde{x} вектор

$$\tilde{f} = \frac{d\tilde{x}}{dt}. \quad (14)$$

Условие $\tilde{H} = \max$ совпадает с условием максимизации скалярного произведения векторов $\tilde{\psi}$ и \tilde{f} , или, так как вектор $\tilde{\psi}$ в данной точке \tilde{x} задан и не зависит от u , с условием максимума проекции вектора \tilde{f} на направление $\tilde{\psi}$. *Итак, геометрический смысл принципа максимума состоит в следующем: нужно подбирать такое управление u , чтобы проекция вектора скорости изображающей точки $\frac{d\tilde{x}}{dt}$ на направление нормали к изоповерхности в данной точке \tilde{x} была максимальной.* При этом проекция оказывается, вообще говоря, отрицательной, а максимальное ее значение равно нулю согласно (9).

Рассмотрим частный случай, когда явная зависимость от времени t в уравнениях движения и функции G отсутствует и требуется обеспечить минимальное время T переходного процесса. В этом случае в уравнении (2) следует положить $G = 1$; кроме $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. Тогда из (6) находим

$$\max_{u \in \Omega(u)} \langle -\text{grad } S[x, t], f[x, u] \rangle = 1. \quad (15)$$

Следует подчеркнуть, что здесь x и f — векторы в n -мерном пространстве.

Положим

$$H = -\langle \text{grad } S, f \rangle = \langle \psi, f \rangle, \quad (16)$$

где n -мерный вектор ψ определяется выражением

$$\psi = -\text{grad } S. \quad (17)$$

Тогда условие (15) принимает вид

$$\max_{u \in \Omega(u)} H = 1. \quad (18)$$

Это — та форма, которую принимает принцип максимума в данном частном случае. Теперь можно рассматривать траекторию изображающей точки в n -мерном пространстве x (рис. 14.10). Оптимальное управление u следует подбирать так, чтобы в каждый момент времени максимизировать скаляр H , причем максимальное значение H в любой точке траектории равно единице. Так как в данном случае

$$S[x, t] = \int_t^T 1 \cdot dt = T - t, \quad (19)$$

где t — рассматриваемый момент времени, то величина S — время до достижения конечной точки — уменьшается по мере увеличения t . Следовательно, вектор ψ (14), совпадающий с направлением наискорейшего уменьшения S , обращен «внутри» изоповерхности $S = \text{const}$ (рис. 14.10), охватывающей конечную точку $x^{(T)}$. В этом частном случае изоповерхности $S = \text{const}$ становятся поверхностями равных времен $\tau_i = T - t_i$ достижения конечной точки $x^{(T)}$; такие поверхности называются поверхностями *изохрон*. Принцип максимума в данном случае требует так подбирать u , чтобы проекция скорости $\frac{dx}{dt}$ изображающей точки в фазовом пространстве на направление ψ нормали к изоповерхности была максимальной. Это очевидно и из чисто интуитивных физических соображений. Действительно, движение вдоль изоповерхности, например, $\tau_2 = \text{const}$ (рис. 14.10) не дает никакого полезного эффекта, ибо изображающая точка и после перемещения остается в положениях, откуда можно в лучшем случае достичь конечной точки x спустя те же τ_2 секунд. Между тем, чем быстрее происходит движение по нормали к изоповерхности, тем скорее изображающая точка перемещается к «следующей» изоповерхности, $\tau_2 - \Delta t = \text{const}$, и, следовательно, становится возможным в дальнейшем все меньшее и меньшее время достижения конечной точки $x^{(T)}$.

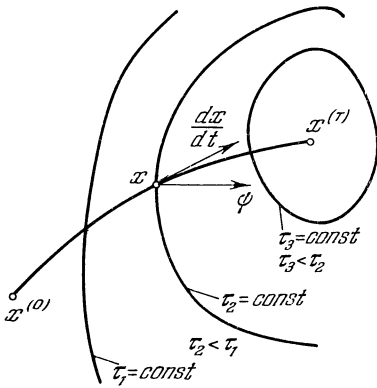


Рис. 14.10.

Как указывалось выше, при применении метода динамического программирования требуется нахождение функций $S[x, t]$ или S , что связано с громоздкими операциями, например решением уравнения в частных производных. Между тем при применении принципа максимума необходимо знать лишь вектор ψ , рассматриваемый на оптимальной траектории, а этот вектор, оказывается, можно найти и без построения поверхностей $\tilde{S} = \text{const}$. Чтобы найти ψ , необходимо решить так называемые сопряженные уравнения.

Допустим, что функция $\tilde{S}(\tilde{x})$ имеет вторые частные производные по всем \tilde{x}_i ($i = 0, 1, \dots, n + 1$), т. е. дважды дифференцируема. Рассмотрим, каково изменение вектора ψ при движении изображающей точки вдоль оптимальной траектории. Так как $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}[\tilde{x}(t)]$, то вектор $\tilde{\psi}$, зависящий от $\tilde{x}(t)$, в конечном итоге есть функция времени. Поэтому можно найти производные

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\psi}_i}{dt} &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_i} \right) = - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_i} \right) \frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \\ &= - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} \tilde{f}_j \quad (i = 1, \dots, n + 1). \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь подставлены значения \tilde{f}_j вместо $\frac{d\tilde{x}_j}{dt}$.

Координата $\tilde{\psi}_0$, как видно из (4), всегда равна (-1). Поэтому

$$\frac{d\tilde{\psi}_0}{dt} = 0. \tag{21}$$

Если подставить в выражение для \tilde{H} (8) вместо любого $u(t)$ оптимальное управление $u^*(t)$ вдоль рассматриваемой оптимальной траектории, то, согласно (7), получим

$$\tilde{H} = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f} \rangle = \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{\psi}_j \tilde{f}_j = - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j} \tilde{f}_j = \tilde{H}_{\max} = 0. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь фиксированный момент времени t . Тогда и $u^*(t)$ будет фиксированной величиной. Для точек пространства \tilde{x} , отличных от той, которая лежит на рассматриваемой траектории, данное управление $u^*(t)$ уже не будет оптимальным; следовательно, для них величина \tilde{H} уже не будет достигать своего максимума. Из этого рассуждения следует, что при фиксированных t и $u(t) = u^*(t)$ величина $\tilde{H} = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f} \rangle$ достигает своего максимума (равного нулю) именно в точке оптимальной траектории и, следовательно, в этой точке производные \tilde{H} по x_i обращаются в нули. Дифференцируя выражение для \tilde{H} (22), причем нужно дифференцировать и $\tilde{\psi}$ по x_i , чтобы учесть приращение $\tilde{\psi}$ в смещенных точках, приходим к равенствам

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left(- \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j} \tilde{f}_j \right) = - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_i} \tilde{f}_j - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n+1). \quad (23)$$

Отсюда следует

$$- \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} \tilde{f}_j = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad (i = 1, \dots, n+1). \quad (24)$$

Замечая, что левая часть (24) идентична правой части (20), подставим в последнее равенство правую часть выражения (24). В итоге находим

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{dt} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i} = - \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{\psi}_j \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad (i = 1, \dots, n+1). \quad (25)$$

Это и есть совокупность сопряженных уравнений, совместно с (24) определяющих изменение вектора $\tilde{\psi}$ на оптимальной траектории. Следует отметить, что уравнения (25) линейны относительно координат $\tilde{\psi}_j$ вектора $\tilde{\psi}$.

В выражении для \tilde{H} , рассматриваемом для данной точки \tilde{x} оптимальной траектории, $\tilde{\psi}$ задано, и в явном виде от \tilde{x} зависит лишь вектор \tilde{f} . Поэтому частная производная \tilde{H} по \tilde{x}_i принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i} = \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{\psi}_j \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (26)$$

Сравнение этого выражения с уравнениями (25) показывает, что последние можно переписать в компактной форме

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i} \quad (i = 1, \dots, n+1). \quad (27)$$

Заметим, что из формулы (22) для \tilde{H} следует также

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\psi}_i} = \tilde{f}_i, \quad (28)$$

поскольку \tilde{f} не зависит от $\tilde{\psi}_i$. Следовательно, уравнения движения объекта можно переписать так:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\psi}_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n+1). \quad (29)$$

Системы уравнений типа (22) и (29) называются *канонически сопряженными*.

Итак, значения вектора $\tilde{\psi}$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (25) или (27). Если же известен вектор $\tilde{\psi}$, то нет необходимости вычислять функцию \tilde{S} . При применении принципа максимума решаются совместно две системы уравнений — основная и сопряженная.

Пусть в частном случае явная зависимость от времени в уравнениях объекта отсутствует и, кроме того, требуется обеспечить минимум времени переходного процесса. При этом $G = 1$ и можно воспользоваться величиной H (16) вместо \tilde{H} , а также n -мерным фазовым пространством \tilde{x} вместо $(n+2)$ -мерного пространства \tilde{x} . Тогда уравнения движения объекта можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (30)$$

а сопряженные уравнения (25) (см. также (27)) принимают вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (31)$$

Введем теперь принцип максимума как необходимый признак оптимальности другим способом, следуя в основном пути, указанному Л. С. Понтрягиным и его соавторами, но с некоторыми упрощениями, с целью облегчения понимания материала. Этот путь вывода полезен в двух отношениях. Во-первых, он позволяет понять динамическую сущность принципа максимума с точки зрения, отличной от изложенной выше. Во-вторых, метод вывода, не связанный с динамическим программированием, позволяет освободиться от допущений о дифференцируемости функции $S[x, t]$, не вытекающих из существа задачи.

Рассмотрим для упрощения задачу с фиксированным временем T и свободным концом траектории. Пусть уравнения движения объекта имеют вид

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \quad (32)$$

и требуется минимизировать величину

$$Q = \tilde{x}_0^{(T)}. \quad (33)$$

Функции \tilde{f}_i будем считать ограниченными и непрерывными по всем своим аргументам и дифференцируемыми по \tilde{x}_j ($j = 0, 1, \dots, n+1$). Управляющее воздействие $u(t)$ пусть принадлежит к классу кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$u(t) \in \Omega(u). \quad (34)$$

Начальное значение вектора \tilde{x} считаем заданным

$$(\tilde{x})_{t=0} = \tilde{x}^{(0)}. \quad (35)$$

При этих условиях требуется найти оптимальную траекторию $\tilde{x}^*(t)$ ($0 \leq t \leq T$) и оптимальное допустимое управляющее воздействие $u^*(t)$, обеспечивающее минимум критерия Q .

Ниже для простоты рассмотрен случай $r = 1$ с одним управляющим воздействием; однако аналогичные рассуждения и выводы справедливы и при $r > 1$.

Допустим, что $\tilde{x}^*(t)$ и $u^*(t)$ найдены.

Рассмотрим кривую $u^*(t)$ (рис. 14.11). Эта кривая, как указано выше, может содержать конечное число точек с разрывами первого рода. Сосредоточим внимание на выборе оптимального управления в бесконечно малом промежутке времени

$$\tau - \varepsilon < t < \tau, \quad (36)$$

где ε — бесконечно малая величина, $0 < \tau < T$. Проварьируем управление только на одном бесконечно малом интервале (36), изменив управление от оптимального u^* до некоторой другой величины $u \neq u^*$. При этом на всех остальных интервалах $(0, \tau - \varepsilon)$ и (τ, T) управление остается неизменным и равным $u^*(t)$. Такая вариация управления u , при которой происходит лишь «игольчатое» изменение u на бесконечно малом участке, носит название «игольчатой» вариации.

Отметим, что величина приращения $(u - u^*)$ при игольчатой вариации вовсе не должна быть сколь угодно малой. Напротив, величины u и u^* могут быть любыми, лишь бы они не выходили из допустимых пределов. Например, если управление ограничено условием

$$|u| \leq U = \text{const}, \quad (37)$$

то как u , так и u^* должны удовлетворять лишь условию (37), модуль разности между ними в этом случае может быть в пределах от 0 до $2U$.

Идея игольчатой вариации интересна в том отношении, что, несмотря на конечную величину разности $(u - u^*)$, влияние этой вариации на последующее движение объекта бесконечно мало. Это обстоятельство очевидно из простых физических соображений. Действительно, как известно, влияние любого короткого импульса на систему оценивается величиной его площади. Так как площадь приращения $(u - u^*)$ бесконечно мала, то и влияние этого приращения на последующее движение $\tilde{x}(t)$ ($t > \tau$) также оказывается бесконечно малым. Ниже доказывается справедливость этого соображения.

Отметим также, что *игольчатая вариация* представляет собой конструкцию, отличную от вариации, применяемой в классическом вариационном исчислении. В последнем вариация должна представлять собой функцию достаточной степени гладкости, в то время как *игольчатая вариация является «скачкообразной»*. Лишь включив в рассмотрение класс кусочно-непрерывных функций $u(t)$, можно иметь дело с игольчатой вариацией (рис. 14.11). Между тем именно игольчатая вариация является исходным пунктом для вывода принципа максимума. Таким образом, та разрывность, которая является камнем преткновения в классическом вариационном исчислении, становится полезным орудием в теории принципа максимума.

В результате варьирования управления на бесконечно малом интервале $\tau - \varepsilon < t < \tau$ дальнейшее движение $\tilde{x}(t)$ при $t > \tau$ уже отличается от оптимального движения $\tilde{x}^*(t)$. Разность между этими величинами в момент времени $t = \tau$ равна, с точностью до малых высшего порядка, разности

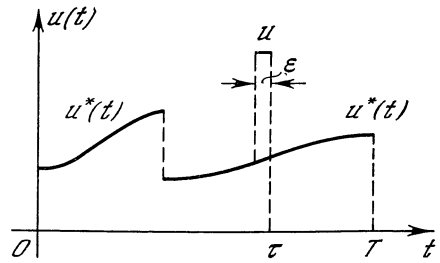


Рис. 14.11.

скоростей изменений, т. е. величине $\left(\frac{d\tilde{x}}{dt} - \frac{d\tilde{x}^*}{dt}\right)_{t=\tau}$, умноженной на промежуток времени ε :

$$\tilde{x}(\tau) - \tilde{x}^*(\tau) = \varepsilon \left\{ \left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)_{t=\tau} - \left(\frac{d\tilde{x}^*}{dt}\right)_{t=\tau} \right\} = \varepsilon \{ \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u(\tau)] - \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u^*(\tau)] \}. \tag{38}$$

Эта разность бесконечно мала, но отлична от нуля. Поэтому при $t > \tau$ расхождение между траекториями $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{x}^*(t)$ будет, вообще говоря, существовать. Действительно, хотя $u^*(t)$ при $t > \tau$ для обеих траекторий одинаково, но, как видно из (38), в момент времени $t = \tau$ значения $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{x}^*(\tau)$ — как бы «начальные» условия для интервала $\tau < t < T$ — неодинаковы. Следовательно, $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{x}^*(t)$ при $t > \tau$ не совпадают. Однако ввиду того, что разность $\tilde{x}(\tau) - \tilde{x}^*(\tau)$ бесконечно мала, все последующее движение $\tilde{x}(t)$ будет лишь бесконечно мало отличаться от $\tilde{x}^*(t)$. На рис. 14.12 иллюстрируется близостью траекторий $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{x}^*(t)$ при $t > \tau$.

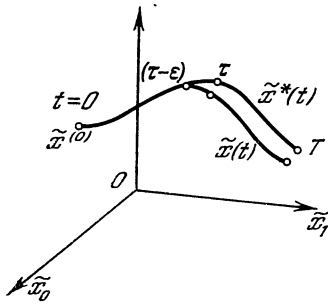


Рис. 14.12.

Введем вектор вариации траектории $\delta\tilde{x}(t)$ с координатами $\delta\tilde{x}_j$ ($j=0, \dots, n+1$), определяемый равенством

$$\delta\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}^*(t) \quad (\tau \leq t \leq T). \tag{39}$$

Из (38) следует, что «начальное» значение вариации при $t = \tau$ равно

$$\delta\tilde{x}(\tau) = \varepsilon \{ \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u(\tau)] - \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u^*(\tau)] \}. \tag{40}$$

Так как $\tilde{x}(t)$ сколь угодно мало отличается от $\tilde{x}^*(t)$ при $t > \tau$, то вариация $\delta\tilde{x}(t)$ траектории бесконечно мала. Поэтому закон ее изменения со временем может быть найден из линейных уравнений для малых изменений $\tilde{x}(t)$, которые называются уравнениями в вариациях. Уравнения в вариациях получаются из основных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \tilde{f}_j(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1}, u) \quad (j=0, \dots, n+1), \tag{41}$$

если заменить все \tilde{x}_j на $\tilde{x}_j + \delta\tilde{x}_j$ ($j=0, \dots, n+1$), а затем, разложив \tilde{f}_j в ряд по $\delta\tilde{x}_i$, отбросить члены высших порядков малости

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{x}_j + \delta\tilde{x}_j)}{dt} &= \tilde{f}_j(\tilde{x}_0 + \delta\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_i + \delta\tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{n+1} + \delta\tilde{x}_{n+1}, u) = \\ &= \tilde{f}_j(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{n+1}, u) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \delta\tilde{x}_i \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{n+1}, u) + o(\delta\tilde{x}). \end{aligned} \tag{42}$$

Отбрасывая слагаемое $o(\delta\tilde{x})$, в котором содержатся члены порядка малости выше первого, и учитывая (41), приходим к линейным уравнениям в вариациях для $\delta\tilde{x}_i$.

$$\frac{d(\delta\tilde{x}_j)}{dt} = \sum_{i=0}^{n+1} \delta\tilde{x}_i \frac{\partial \tilde{f}_j(\tilde{x}, u)}{\partial x_i} \quad (j=0, \dots, n+1). \tag{43}$$

Эти уравнения можно проинтегрировать при начальных условиях (40). Нас прежде всего интересует величина $(\delta x)_{t=T}$, особенно значение координаты $\tilde{\delta x}_0$ при $t = T$. Действительно, эта величина, согласно (33), представляет собой изменение δQ значения критерия Q , возникающее из-за игольчатой вариации, происшедшей на интервале $\tau - \varepsilon < t < \tau$. Так как оптимальное управление $u^*(\tau)$ обеспечивает наименьшее значение Q , то при любом другом управлении $u(\tau)$ значение Q может лишь увеличиться. Следовательно,

$$\delta Q = (\tilde{\delta x}_0)_{t=T} \geq 0. \quad (44)$$

Это соотношение можно переписать следующим образом:

$$-\delta Q = -(\tilde{\delta x}_0)_{t=T} = \langle \tilde{\delta x}(T), \tilde{\psi}(T) \rangle \leq 0, \quad (45)$$

где $\tilde{\psi}(T)$ — вектор, подобранный таким образом, чтобы скалярное произведение $\tilde{\delta x}(T)$ и $\tilde{\psi}(T)$ было равно $\tilde{\delta x}_0(T)$. Очевидно, координата этого вектора $\tilde{\psi}_0(T) = -1$, а остальные координаты $\tilde{\psi}_j(T) = 0$ ($j = 1, \dots, n+1$). Итак,

$$\tilde{\psi}(T) = (1, 0, \dots, 0). \quad (46)$$

Скалярное произведение (45) представляет собой эффект, который игольчатая вариация $u(\tau)$, возникшая в момент $t = \tau$, оказывает на конечную цель, т. е. на значение критерия оптимальности Q или \tilde{x}_0 , в момент $t = T$. Основная идея при выводе принципа максимума состоит в том, что это влияние может быть оценено по линейным уравнениям в вариациях (43), ибо оно сколь угодно мало. Линейность уравнений влечет за собой чрезвычайное упрощение рассмотрения. Так, например, влияния двух игольчатых вариаций, возникших в различных бесконечно малых интервалах времени, можно рассматривать независимо друг от друга вследствие свойств аддитивности, присущих линейным уравнениям. Таким образом, выбор оптимального значения $u(\tau)$ в какой-либо момент времени может базироваться, формально независимо от всего остального процесса управления, лишь на том, чтобы сделать величину соответствующего приращения δQ возможно большей. Для любых неоптимальных управлений эта величина, равная, как видно из (45), скалярному произведению

$$-\delta Q = \langle \tilde{\delta x}(T), \tilde{\psi}(T) \rangle, \quad (47)$$

будет отрицательной. Лишь для $u(\tau)$, равного $u^*(\tau)$, она обращается в нуль, достигая при этом своего максимального значения. В сущности условие (45) означает лишь, что любое неоптимальное управление «хуже», чем оптимальное: оно дает меньший эффект, чем оптимальное управление.

Выражение (47) недостаточно удобно, так как для его вычисления необходимо предварительно проинтегрировать уравнения (43) и найти $\tilde{\delta x}(T)$ в зависимости от «начального» условия $\tilde{\delta x}(\tau)$. Между тем именно значение $\tilde{\delta x}(\tau)$, как видно из (40), прямо связано со значением $u(\tau)$. Поставим задачей получить такой вектор $\tilde{\psi}(t)$, который удовлетворял бы условию

$$\langle \tilde{\delta x}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = \langle \tilde{\delta x}(T), \tilde{\psi}(T) \rangle \quad (\tau \leq t \leq T). \quad (48)$$

Тогда в частном случае при $t = \tau$ можно получить равенство

$$\langle \tilde{\delta x}(\tau), \tilde{\psi}(\tau) \rangle = \langle \tilde{\delta x}(T), \tilde{\psi}(T) \rangle \quad (49)$$

и производить суждение о δQ по левой части этого равенства, прямо связанной тем самым со значением $u(\tau)$, которое требуется определить.

Оказывается, можно найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет вектор $\tilde{\psi}(t)$. Из (48) следует

$$\langle \delta \tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = \text{const} \quad (\tau \leq t \leq T). \quad (50)$$

Отсюда находим

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = 0 \quad (\tau \leq t \leq T), \quad (51)$$

или

$$\left\langle \frac{d[\delta \tilde{x}(t)]}{dt}, \tilde{\psi}(t) \right\rangle + \left\langle \delta \tilde{x}(t), \frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} \right\rangle = 0 \quad (\tau \leq t \leq T). \quad (52)$$

Перепишем это равенство в развернутом виде:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{d[\delta \tilde{x}_j(t)]}{dt} \tilde{\psi}_j(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \delta \tilde{x}_i(t) \frac{d\tilde{\psi}_i(t)}{dt} = 0. \quad (53)$$

Подставив значения $\frac{d(\delta \tilde{x}_j)}{dt}$ из (43), находим

$$\sum_{j=0}^{n+1} \tilde{\psi}_j(t) \sum_{i=0}^{n+1} \delta \tilde{x}_i \frac{\partial \tilde{f}_j(\tilde{x}, u)}{\partial \tilde{x}_j} + \sum_{i=0}^{n+1} \delta \tilde{x}_i(t) \frac{d\tilde{\psi}_i(t)}{dt} = 0. \quad (54)$$

Изменив порядок суммирований по i и j в первом слагаемом, приходим к выражению

$$\sum_{i=0}^{n+1} \delta \tilde{x}_i \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{\psi}_j(t) \frac{\partial \tilde{f}_j(\tilde{x}, u)}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{d\tilde{\psi}_i(t)}{dt} \right\} = 0. \quad (55)$$

Левая часть (55), как видно из (54), тождественно равна нулю при любых $\delta \tilde{x}_j$. Необходимым и достаточным условием для этого является равенство нулю фигурных скобок в (55), откуда следует

$$\frac{d\tilde{\psi}_i(t)}{dt} = - \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{\psi}_j(t) \frac{\partial \tilde{f}_j(\tilde{x}, u)}{\partial \tilde{x}_i} \quad (i = 0, \dots, n+1). \quad (56)$$

Полученные равенства (56) представляют собой совокупность дифференциальных уравнений, линейных относительно $\tilde{\psi}_j$. Нетрудно видеть, что уравнения (56) и (25) идентичны. Следовательно, изложенным путем также получены уравнения, сопряженные основной системе (43). Эти уравнения должны быть решены при граничных условиях (46).

Теперь, как видно из (49) и (45), можно рассматривать величину

$$-\delta Q = \langle \delta \tilde{x}(\tau), \tilde{\psi}(\tau) \rangle \leq 0. \quad (57)$$

Подставив сюда $\delta \tilde{x}(\tau)$ из (40), получим после сокращения на ε

$$\langle \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u(\tau)], \tilde{\psi}(\tau) \rangle - \langle \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u^*(\tau)], \tilde{\psi}(\tau) \rangle \leq 0. \quad (58)$$

Введем теперь величину

$$\tilde{H} = \langle \tilde{f}[\tilde{x}(\tau), u(\tau)], \tilde{\psi}(\tau) \rangle. \quad (59)$$

Из неравенства (58) видно, что величина \tilde{H} достигает максимума при оптимальном управлении $u^*(\tau)$. Отсюда и следует принцип максимума: нужно так подбирать $u(\tau)$, чтобы величина \tilde{H} достигла максимального значения. Все эти рассуждения легко обобщаются на случай любого $r > 1$; следует лишь заменить скаляр u вектором.

Рассмотрим теперь технику применения принципа максимума. При определении оптимальной траектории $\tilde{x}^*(t)$ и оптимального управления $u^*(t)$ решаются совместно две системы уравнений — основная и сопряженная. Процесс решения можно представить в следующем виде. Допустим, что система стартует при $t = 0$ из некоторой точки $\tilde{x} = \tilde{x}^{(0)}$. Задаемся также некоторым начальным значением $\tilde{\psi}^{(0)}$ вектора $\tilde{\psi}$, поскольку заранее оно неизвестно. Значение вектора u в начальной точке $\tilde{x}^{(0)}$ подбирается из условия $\tilde{H} = \max$ таким, чтобы скалярное произведение

$$(\tilde{H})_{\tilde{x}=\tilde{x}^{(0)}} = \langle \tilde{f}^{(0)} \tilde{\psi}^{(0)} \rangle = \left\langle \frac{d\tilde{x}[\tilde{x}^{(0)}, u]}{dt}, \tilde{\psi}^{(0)} \right\rangle \quad (60)$$

было максимальным. Выбрав таким образом управление $(u)_{t=0}$ можно найти из систем уравнений (29) и (27) — основной и сопряженной — приращения $\Delta\tilde{\psi}_i$ и $\Delta\tilde{x}_i$ за достаточно малый промежуток времени Δt . Следовательно, можно найти значения векторов $\tilde{\psi}$ и \tilde{x} в новой точке оптимальной траектории, близкой к начальной и соответствующей моменту времени $t = \Delta t$. В новой точке вся описанная процедура повторяется, находится новое оптимальное значение u^* определяются новые приращения $\Delta\tilde{\psi}_i$ и $\Delta\tilde{x}_i$, происходит перемещение изображающей точки в следующее положение, соответствующее близкому моменту времени $t = 2\Delta t$, и т. д. Так, действуя шаг за шагом, можно прочертить всю оптимальную траекторию или, как ее часто называют, экстремаль. Попутно в каждой точке путем минимизации \tilde{H} определяется оптимальное управление u^* .

В приведенной процедуре построения экстремали имеется пока одно неясное место. Неизвестно, каким способом выбирать начальные значения координат $\tilde{\psi}_i^{(0)}$ вектора $(\tilde{\psi})_{t=0} = \tilde{\psi}^{(0)}$. Выбор этих значений оказывается связанным с граничными условиями задачи.

Рассмотрим, как должен производиться этот выбор для нескольких частных случаев.

1. Задача со свободным концом траектории и фиксированным временем T .

Задача минимизации функционала Q сводится, как показано выше, с помощью введения переменной \tilde{x}_0 к задаче минимизации значения $\tilde{x}_0(T)$. Из предыдущего известно, что для этого требуется так подбирать управление u , чтобы проекция вектора $\frac{d\tilde{x}}{dt}$ на направление $\tilde{\psi}$ была максимальной. Для «последнего» бесконечно малого интервала времени $T - \Delta t < t < T$ соответствующее направление $\tilde{\psi}$ дается формулой (46), смысл которой легко пояснить. Чтобы приращение $\tilde{x}_0(T)$ было возможно меньшим, необходимо при $t = T - \Delta t$ направить вектор $\tilde{\psi}$ противоположно направлению \tilde{x}_0 . Но это направление $\tilde{\psi}$, как нетрудно видеть, совпадает с направлением вектора $\tilde{\psi}(T)$, определяемым формулой (46).

Итак, в данной задаче требуется обеспечить такое решение $\tilde{\psi}(t)$, которое удовлетворяет конечным условиям:

$$\tilde{\psi}_0^{(T)} = -1, \quad \tilde{\psi}_i^{(T)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n+1). \quad (61)$$

Нужно так подобрать начальные значения $\tilde{\psi}_i^{(0)}$, чтобы конечные значения $\tilde{\psi}_i^{(T)}$ были равны заданным величинам, определяемым из (61).

Таким образом, решения двух систем уравнений — основной и сопряженной — должны удовлетворять заданным начальным условиям $\tilde{x}^{(0)}$ для вектора \tilde{x} и заданным конечным условиям (61) для вектора $\tilde{\psi}$. Поэтому

в общем требуется решение задачи интегрирования системы уравнений для \tilde{x} и $\tilde{\psi}$ при заданных граничных условиях. При этом $n+2$ начальных условий для $x^{(0)}$ и $n+2$ конечных условий (58) для $\tilde{\psi}^{(T)}$ дают все граничные условия, требуемые при решении задачи.

2. Задача о максимальном быстродействии с фиксированным концом траектории $x^{(T)}$ в фазовом пространстве x и нефиксированным заранее временем T .

Требуется выбрать такое управление, чтобы в течение минимального времени T перевести изображающую точку x из заданного начального положения $x^{(0)}$ в заданное конечное положение $x^{(T)}$ (рис. 14.13).

Для совместного решения двух систем уравнений (30) и (31) — основной и сопряженной — с параллельным подбором управления u и максимизирующего величину H в каждой точке оптимальной траектории, необходимо знать всего $2n$ начальных условий. Ими являются начальные значения $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ координат точки x в фазовом пространстве и начальные значения $\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_n^{(0)}$ вектора ψ . Первые n значений заданы. Что же касается n начальных координат вектора ψ , то их требуется подобрать таким образом, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на конце оптимальной траектории, т. е. заданным значениям $x_1^{(T)}, \dots, x_n^{(T)}$ координат конечной точки $x^{(T)}$. Таким образом, получаются n условий для n неизвестных $\psi_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, n$).

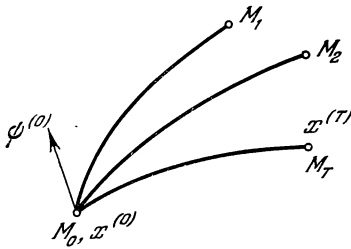


Рис. 14.13.

Задаваясь произвольным $\psi^{(0)}$, строится процедура последовательных приближений. В настоящее время разработаны эффективные вычислительные процедуры. Ниже в виде иллюстрации построим указанным выше образом экстремаль $M_0 M_1$. Однако она, вообще говоря, не пройдет через требуемую точку $M_{(T)}$, для которой $x = x_T$. Зададимся тогда другим значением вектора $\psi^{(0)}$, построим другую экстремаль $M_0 M_2$ и т. д. до тех пор, пока экстремаль не пройдет через M_T . Эту процедуру можно рационализировать, введя меру расстояния r в фазовом пространстве от экстремали $M_0 M_1$ до требуемой точки M_T . Тогда путем поиска следует так подобрать координаты $\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_n^{(0)}$ вектора $\psi^{(0)}$, чтобы зависящая от них величина r стала минимальной:

$$r = r(\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_n^{(0)}) = \min. \quad (62)$$

Этот минимум, конечно, должен оказаться равным нулю. Функция r может иметь несколько минимумов. Искомый минимум есть minimum minimum, т. е. наименьший из всех минимумов.

3. Задача о максимальном быстродействии с фиксированной конечной n -мерной областью P в фазовом пространстве x и нефиксированным заранее временем T .

Требуется управлять таким образом, чтобы в течение минимального времени T перевести изображающую точку x из заданного начального положения $x^{(0)}$ в какую-либо точку $x^{(T)}$, принадлежащую некоторому заданному n -мерному подмножеству P фазового пространства (рис. 14.9). Ни точка $x^{(T)}$, ни время T не фиксированы заранее.

Задача будет решена, если окажутся известными n начальных значений $\psi_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, n$) вектора ψ , поскольку из $2n$ начальных условий для двух систем уравнений — основной и сопряженной — n значений

координат $x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ заданы. Следовательно, необходимо добавить еще n граничных условий. Этими условиями оказываются так называемые условия трансверсальности, накладываемые на координаты вектора ψ в конечной точке $x^{(T)}$ траектории.

Чтобы получить условия трансверсальности, рассмотрим изоповерхность $T = \text{const}$ в фазовом пространстве (рис. 14.14). Условимся называть так геометрическое место точек фазового пространства, которых можно достигнуть за время T из начальной точки $x^{(0)}$ при оптимальном управлении u^* . Например, за время T_1 можно пойти от $x^{(0)}$ до точек изоповерхности T_1 , за время $T_2 > T_1$ — до точек изоповерхности T_2 и т. д. Часто удается доказать, что эти изоповерхности выпуклые. На рис. 14.14 изоповерхность T_2 не пересекается с поверхностью, отделяющей область P от остального фазового пространства. Это означает, что время T_2 недостаточно для достижения области P . Увеличивая T , мы получаем при большем значении T новую изоповерхность, в которую «вложена» старая изоповерхность с меньшим T . Продолжая этот процесс образования новых изоповерхностей $T = \text{const}$, охватывающих точки фазового пространства, все более удаленные от начальной, мы в конце концов (если решение задачи существует) получаем изоповерхность $T = T_3$, касающуюся поверхности, отделяющей область P от остального пространства. Пусть $x^{(T)}$ — точка касания. Тогда это и есть конечная точка требуемой оптимальной траектории, показанной сплошной линией на рис. 14.14. Действительно, точки $x^{(T)}$ можно достичь при оптимальном управлении за время $T = T_3$. Некоторой другой точки M области P можно достичь лишь за время $T_4 > T_3$. Поэтому траектория, соединяющая $x^{(0)}$, например, с точкой M , не будет оптимальной.

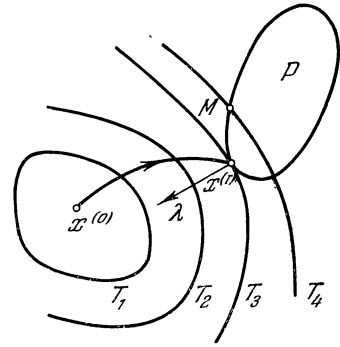


Рис. 14.14.

Пусть уравнение поверхности, отделяющей P от остального фазового пространства, имеет вид

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{63}$$

где φ — функция, дифференцируемая по всем параметрам

$$x_i \ (i = 1, \dots, n). \tag{63}$$

Из построения на рис. 14.14 видно, что поверхность, ограничивающая область P , если она удовлетворяет определенным условиям, и изоповерхность $T = T_3$ имеют в точке $x^{(T)}$ общий нормальный вектор λ . Тогда в качестве нормали λ можно принять градиент φ , т. е. вектор

$$\lambda = \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right). \tag{64}$$

Условимся, что поверхность $\varphi = 0$ не имеет особых точек, в которых обращаются одновременно в нуль все $\partial \varphi / \partial x_i$. Тогда вектор $\text{grad } \varphi$ определен для любой точки поверхности (63).

На рис. 14.14 видно также, что на «последнем» бесконечно малом интервале времени $T - \Delta t < t < T$, где $\Delta t \rightarrow 0$, оптимальное управление состоит в том, чтобы осуществить возможно более быстрое движение от изоповерхности $T_3 - \Delta t = \text{const}$ к изоповерхности $T_3 = \text{const}$. Для этого нужно обеспечить максимальное значение проекции вектора $\frac{dx}{dt}$ на направление вектора λ . Следовательно, в данном случае вектор $\psi(T)$ совпадает

по направлению с λ и можно принять

$$\psi(T) = \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right), \quad (65)$$

откуда следует

$$\psi_i(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (66)$$

Условия (65) называются *условиями трансверсальности*. Так как время T не фиксировано, то неизвестные заранее значения $\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_n^{(0)}$ и величина T — это $n + 1$ неизвестных, для определения которых необходимы $n + 1$ условий. Эти условия даются $n + 1$ соотношениями (63) и (66). Действительно, если мы зададимся значениями $\psi_i^{(0)}$ и T , то координаты $x_i(T)$ и значения $\psi_i(T)$ будут функциями этих $n + 1$ неизвестных. Подставляя эти функции в $n + 1$ соотношений (63) и (66), мы можем ожидать, что полученные $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными $\psi_i^{(0)}$ и T имеют решение. Разумеется, в этом случае трудности решения задачи ввиду более сложного способа задания граничных условий еще возрастают по сравнению с предыдущими случаями. Если область P сжимается в точку, то мы возвращаемся к предыдущей задаче. В этом случае условия трансверсальности теряют смысл, но зато появляются координаты конечной точки траектории, ввиду чего общее число уравнений для определения неизвестных значений $\psi_i^{(0)}$ вновь оказывается достаточным.

Условия задачи можно еще обобщить, если вместо фиксированной начальной точки $x^{(0)}$ рассматривать некоторое начальное подмножество P_0 точек фазового пространства, из которого может стартовать изображающая точка. В этом случае аналогичные вышеизложенному условия трансверсальности накладываются и на начальное значение вектора ψ . Читатель, интересующийся этим вопросом более детально, может обратиться к монографии Л. С. Понтрягина и других, а также обширной литературе по этому вопросу, приведенной в конце книги, где дается строгий и общий вывод принципа максимума с условиями трансверсальности.

4. Задача о максимальном быстром действии с фиксированной конечной s -мерной областью ($s < n$).

В этом случае, более общем, чем предыдущий, конечная точка $x^{(T)}$ экстремали должна находиться на многообразии M_s размерности s , где $1 < s < n$, причем координаты точек x , принадлежащих M_s , задаются системой уравнений

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n - s). \quad (67)$$

Например, задание двух уравнений типа (67) в трехмерном пространстве определяет одномерное многообразие M_s , т. е. некоторую линию.

Вектор g , нормальный к многообразию M_s , может быть задан в следующем виде:

$$g = \sum_{\beta=1}^{\beta=n-s} \lambda_{\beta} \text{grad } \varphi_{\beta}(x), \quad (68)$$

где x удовлетворяет уравнениям (67), а λ_{β} — некоторые числа. При этом считаем, что ни в одной точке многообразия M_s ни один из векторов $\text{grad } \varphi_{\beta}(x)$ не обращается в нуль.

Нетрудно проверить, что вектор g ортогонален любому бесконечно малому вектору dx , принадлежащему многообразию M_s и исходящему из точки x . Действительно, вектор dx лежит в каждой из поверхностей $\varphi_{\beta}(x) = 0$ (67) и, следовательно, ортогонален каждому $\text{grad } \varphi_{\beta}(x)$. Поэтому равно нулю

скалярное произведение

$$\langle g, \delta x \rangle = \sum_{\beta=1}^{\beta=n-s} \lambda_{\beta} \langle \text{grad } \varphi_{\beta}(x), \delta x \rangle = 0, \quad (69)$$

т. е. векторы g и δx ортогональны.

Допустим сначала, что уравнения объекта не зависят явно от времени и имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (70)$$

где x представляет собой n -мерный вектор, а u — является r -мерным вектором. Пусть требуется выбрать управление u , минимизирующее интеграл

$$Q = \int_0^T G(x, u) dt = \int_0^T f_0(x, u) dt = x_0(T). \quad (71)$$

Время T может не быть фиксированным. Можно представить в n -мерном пространстве вектора x изоповерхности $S_t = \text{const}$, где

$$S_t = \int_0^t G(x, u^*) dt, \quad (72)$$

а u^* — оптимальное управление. В частном случае, когда $G = 1$ и требуется минимум времени T , такие изоповерхности показаны на рис. 14.14. Но их можно построить и для более общего случая, в котором G не равно единице. Вектор ψ является градиентом к изоповерхности $S_t = \text{const}$. Это видно из того, что вектор ψ с координатами $\left(-\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)$ есть градиент изоповерхности $S = \text{const}$, что легко усмотреть из (4). Между тем, обратив отсчет времени от конца к началу, можно установить тождественность изоповерхностей такой новой задачи $S = \text{const}$ с изоповерхностями $S_t = \text{const}$ (см. (72)). Разница здесь лишь в знаке; поэтому

$$\psi = \text{grad } S_t \quad (73)$$

(без знака минус, как это было бы в формуле для S).

Представим себе, так же как и в предыдущем случае, совокупность расширяющихся изоповерхностей S_t соответствующих все большему и большему значению t . Если при малом значении t такая изоповерхность еще не имеет общих точек с многообразием M_S , то при увеличении t наступит такой момент t_1 (если решение задачи существует), когда изоповерхность $S_t = \text{const}$ будет иметь хотя бы одну общую точку с многообразием M_S (предполагается, что при $t < t_1$ таких общих точек не было). Так как при касании изоповерхности и многообразия их нормальные векторы ψ и g должны быть коллинеарны, то получаем условие трансверсальности в виде *)

$$\psi(t_1) = g = \sum_{\beta=1}^{n-s} \lambda_{\beta} \text{grad } \varphi_{\beta}[x(t_1)]. \quad (74)$$

Иначе говоря, для конечной точки $x(t_1)$, удовлетворяющей условиям (67), должны существовать такие, не равные одновременно нулю числа λ_{β} , что справедливо равенство (74).

Векторное равенство (74) эквивалентно n скалярным равенствам. Если прибавить к ним еще $n - s$ условий (74), то всего получим $2n - s$ уравне-

*) Вследствие линейности сопряженных уравнений достаточно определить вектор ψ с точностью до постоянного множителя. Поэтому умножение конечных условий на любой постоянный множитель даст новое значение $\psi(t)$, также являющееся решением.

ний, в которых содержится $2n - s$ неизвестных, т. е. $n - s$ констант λ_β и n неизвестных значений $\psi_i(t_1)$.

Если уравнения (70) содержат в явном виде t , то заменой $x_{n+1} = t$ задача сводится к предыдущему случаю. Разница здесь заключается лишь в том, что построение будет производиться в $(n + 1)$ -мерном пространстве. Кроме того, многообразие M_{s+1} в этом новом пространстве, эквивалентное прежнему M_s в n -мерном пространстве x , будет цилиндром, основанием которого является многообразие M_s в прежнем пространстве, а образующие представляют собой прямые, параллельные оси координат $x_{n+1} \equiv t$. Условия трансверсальности здесь имеют прежний вид. Если время перехода из начальной точки на многообразии M_s фиксировано и равно T , то к уравнениям многообразия добавляется еще одно уравнение

$$\varphi_{n-s+1}(\tilde{x}) = x_{n+1} - T = 0, \quad (75)$$

которое должно быть использовано при составлении условий трансверсальности.

Пример. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим простой пример применения принципа максимума для задачи со свободным концом траектории и фиксированным временем T . Пусть требуется найти управление, минимизирующее интеграл

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2 + u^2) dt, \quad (76)$$

причем объект описывается следующим уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + u. \quad (77)$$

Задано значение $(x)_{t=0} = x^{(0)}$. Допустим также, что никакие дополнительные ограничения на управляющее воздействие u не наложены.

Введем переменные

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= x(t), \\ \tilde{x}_0(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\tilde{x}_1^2 + u^2) dt, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

причем $(\tilde{x}_0)_{t=0} = 0$. Тогда получим систему уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_0}{dt} &= \frac{1}{2} \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} u^2 = \tilde{f}_0, \\ \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= a\tilde{x}_1 + u = \tilde{f}_1. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Теперь составим функцию \tilde{H} согласно выражению (22):

$$\tilde{H} = \tilde{\psi}_0 \frac{d\tilde{x}_0}{dt} + \tilde{\psi}_1 \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \tilde{\psi}_0 \frac{1}{2} (\tilde{x}_1^2 + u^2) + \tilde{\psi}_1 (-a\tilde{x}_1 + u). \quad (80)$$

Составим сопряженные уравнения для $\tilde{\psi}_0$ и $\tilde{\psi}_1$ согласно (24) и (25):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{\psi}_0}{dt} &= 0, \\ \frac{d\tilde{\psi}_1}{dt} &= - \sum_{j=0}^1 \tilde{\psi}_j \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_1} = -\tilde{\psi}_0 \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial \tilde{x}_1} - \tilde{\psi}_1 \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{x}_1} = -\tilde{\psi}_0 \tilde{x}_1 + \tilde{\psi}_1 a \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Конечные значения ψ_i согласно (46):

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(\bar{T}) &= -1, \\ \tilde{\psi}_1(\bar{T}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Заданные начальные условия для \tilde{x} :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_0^{(0)} &= 0, \\ \tilde{x}_1^{(0)} &= x^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Управляющее воздействие u нужно подбирать в каждый момент времени так, чтобы максимизировать \tilde{H} . В силу первых условий (81) и (82) справедливо соотношение

$$\tilde{\psi}_0(t) = -1 = \text{const}. \quad (84)$$

Поэтому из (80) находим

$$\tilde{H} = -\frac{\tilde{x}_1^2}{2} - \frac{u^2}{2} - a\tilde{\psi}_1\tilde{x}_1 + \tilde{\psi}_1u. \quad (85)$$

Приравнивая производную $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}$ нулю, находим оптимальное значение

$$u^* = \tilde{\psi}_1. \quad (86)$$

Подставляя это значение в уравнения для \tilde{x}_1 и $\tilde{\psi}_1$ (функция x_0 не входит в эти уравнения, и поэтому нас не интересует), приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= -a\tilde{x}_1 + \tilde{\psi}_1, \\ \frac{d\tilde{\psi}_1}{dt} &= a\tilde{\psi}_1 + \tilde{x}_1. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Граничные условия для этой системы, согласно (82) и (83), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1(0) &= x^{(0)}, \\ \tilde{\psi}_1(\bar{T}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Линейные уравнения (87) нетрудно проинтегрировать. В результате интегрирования получаем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= C_1 e^{pt} + C_2 e^{-pt}, \\ \tilde{\psi}_1(t) &= D_1 e^{pt} + D_2 e^{-pt}, \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

где

$$p = \sqrt{a^2 + 1} \quad (90)$$

— корень характеристического уравнения.

Условия (88) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x^{(0)} &= C_1 + C_2, \\ 0 &= \tilde{\psi}_1(\bar{T}) = D_1 e^{p\bar{T}} + D_2 e^{-p\bar{T}}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Из выражения (87) для $t=0$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d\tilde{x}_1}{dt} \right]_{t=0} &= C_1 p - C_2 p = -a\tilde{x}_1(0) + \tilde{\psi}_1(0) = -ax^{(0)} + D_1 + D_2, \\ \left[\frac{d\tilde{\psi}_1}{dt} \right]_{t=0} &= D_1 p - D_2 p = a\tilde{\psi}_1(0) + \tilde{x}_1(0) = a(D_1 + D_2) + x^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

совместно с (91) определяем постоянные C_1, C_2, D_1, D_2 . В частности, находим

$$D_1 = \int \frac{x^{(0)}}{(p-a) + (p+a)e^{2pT}}, \quad D_2 = - \frac{x^{(0)}e^{2pT}}{(p-a) + (p+a)e^{2pT}}. \quad (93)$$

Отсюда и из (86) и (89) следует

$$u^*(t) = \tilde{\Psi}_1(t) = \frac{x^{(0)} [e^{pt} - e^{2pT}e^{-pt}]}{(p-a) + (p+a)e^{2pT}}. \quad (94)$$

Выражение (94) дает оптимальный закон управления в функции времени. Найдя $\tilde{x}_1(t)$ и исключив время t из $u^*(t)$ и $\tilde{x}_1(t)$, получим закон управления $u^* = u^*(\tilde{x}_1)$.

Принцип максимума естественным образом распространяется на дискретно-непрерывные системы с линейными объектами. Действительно, для этих объектов уравнение отклонений — пусть даже и больших — также линейно. Поэтому те рассуждения, которые были положены в основу вывода принципа максимума для непрерывных систем, можно с небольшими модификациями повторить и для дискретно-непрерывных систем с линейными объектами. Однако в общем случае нелинейных дискретно-непрерывных систем такое доказательство провести невозможно. Действительно, промежутки времени между отдельными дискретами, а также общее число дискретных значений — конечные величины. Поэтому влияние конечной вариации одной из дискрет $u(k)$ — аналога «игольчатой» вариации для данного случая — на конечную цель, т. е. на значение Q , будет также конечной величиной, а вовсе не бесконечно малой, как в непрерывных системах. Но тогда рушится все приведенное выше построение, так как нельзя уже говорить о малых отклонениях варьированной траектории x от оптимальной траектории x^* . Мало того, в этом случае удается даже построить противоречащий пример, при котором для оптимального управления принцип максимума в той форме, которая приведена выше, оказывается несправедливым. В последнее время доказано, что и для определенного класса нелинейных дискретно-непрерывных систем имеет место принцип максимума. Для общего же случая нелинейных дискретно-непрерывных систем справедлива лишь значительно более «слабая» формулировка необходимых условий оптимальности. Чтобы получить эту «слабую» формулировку, нужно рассматривать такую вариацию $du(k)$ дискретного значения $u^*(k)$, влияние которой на конечное значение $Q = x^{(T)}$ было бы бесконечно малым. Очевидно, это возможно, вообще говоря, лишь в том случае, когда величина $du(k)$ была бесконечно мала. В этом случае можно повторить рассуждения, приведенные выше, и получить по виду похожий результат. Однако этот результат будет иметь лишь *локальный* характер; он справедлив лишь для достаточно малых изменений $du(k)$ и δH величин $u^*(k)$ и \tilde{H} . В этом случае можно лишь доказать, что если управление $u(k)$ оптимально, то оно дает стационарное значение величине \tilde{H} . Таким образом, любое стационарное значение (локальный максимум, минимум, собственно стационарное значение) является «подозрительным» в том смысле, что одно из этих значений может представлять собой оптимальное управление. Но какое именно из них является оптимальным управлением? Это остается неизвестным. Поэтому значение принципа максимума в такой «слабой» локальной формулировке уменьшается.

Изложенные выше методы — динамическое программирование и принцип максимума, — вообще говоря, не могут обеспечить решение сложных задач без применения вычислительных устройств. Такова природа вещей, диктующая необходимость решения задач в виде иногда весьма длинной цепочки сложных вычислений — минимизаций функций нескольких пере-

менных, интегрирований и т. д. При применении динамического программирования приходится запоминать функции многих переменных, при применении принципа максимума необходимо решать задачу с граничными условиями, что сопровождается сложным процессом поиска недостающих начальных условий по заданным граничным.

Методы, описанные в данной главе, могут дать во многих случаях лишь общий рецепт решения, между тем как этап получения окончательного решения сопряжен с подсчетами, иногда неимоверно сложными. На этом этапе часто приобретает решающее значение методика приближенных вычислений, в том числе умение рационально аппроксимировать выражения близкими к ним, но более простыми. Таким образом, теория приближенных вычислений оказывается дисциплиной первостепенной важности при синтезе оптимальных систем. Здесь важны прежде всего общие принципы, базирующиеся на функциональном анализе, которые были бы применимы к широкому классу задач, возникающих в теории оптимальных систем. В целом эта крайне важная проблематика еще совершенно недостаточно разработана.

§ 7. Метод фазового пространства. Задача о максимальном быстродействии

Изложим детально постановку задачи в системе, оптимальной по быстродействию.

Пусть непрерывный управляемый объект O в системе с обратной связью характеризуется в общем случае векторным уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \tag{1}$$

где x является n -мерным вектором, а вектор u имеет r координат. Управляющее воздействие u ограничено условием

$$u \in \Omega(u), \tag{2}$$

где $\Omega(u)$ — некоторая допустимая замкнутая область. Конкретным примером условия (2) служит выражение

$$|u| \leq U. \tag{3}$$

Важно отметить, что конец вектора u может находиться не только внутри области $\Omega(u)$, но и на ее границе.

Идеальным процессом $x(t)$ будем считать такой процесс, при котором обеспечиваются равенства

$$x_i(t) = x_i^*(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4}$$

Здесь $x_i(t)$ — координаты объекта, а $x_i^*(t)$ — заданные функции времени, которые мы будем считать координатами вектора x^* :

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*). \tag{5}$$

Функции $x_i^*(t)$ также должны удовлетворять определенным ограничениям. Чтобы выяснить их смысл, рассмотрим n -мерное фазовое пространство вектора x (рис. 14.15). Если бы состояние объекта изменялось в точном соответствии с идеальными условиями (4), то имело бы место равенство

$$x = x^* \tag{6}$$

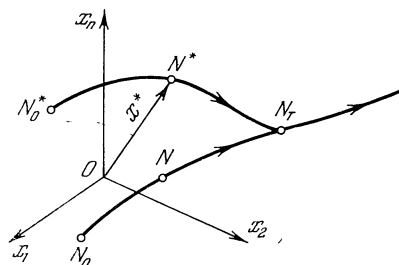


Рис. 14.15.

положения N_0 в начало координат O теперь уже ничем не отличается от задачи об оптимальном быстроедействии, рассматривавшейся в предыдущей главе.

Почему изображающие точки N и N^* на рис. 14.15 не могут встретиться спустя сколь угодно малый промежуток времени? Это невозможно из-за ограничений, существующих в любой реальной системе, например ограничений (3). Эти ограничения не позволяют развивать бесконечно большие скорости перемещения изображающей точки x в фазовом пространстве.

В некоторых случаях ограничения накладываются не только на управляющие воздействия $u_j(t)$, но и на координаты $x_i(t)$ или на функции от этих координат. Иногда последний тип ограничений можно привести к ограничению, наложенному на управляющие воздействия, но уже не в действительной, а в некоторой иной, эквивалентной схеме. Для иллюстрации этого положения рассмотрим простой пример.

Пусть уравнение движения объекта имеет вид

$$b_0 \frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} = u(t), \quad (9)$$

где $b_i = \text{const}$. Такой вид имеет, например, уравнение движения сервомотора постоянного тока, если входной величиной является напряжение на якоре, а выходной величиной — угол поворота вала. Допустим, что ограничение наложено не на $u(t)$, а на вторую производную $\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} \right| \leq M. \quad (10)$$

Для примера сервомотора постоянного тока вторая производная x пропорциональна току якоря, если момент нагрузки пренебрежимо мал. В этом случае можно вместо системы (9) рассматривать иную, эквивалентную систему, уравнение которой определяется не равенством (9), а только лишь условием ограничения (10).

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v(t), \quad (11)$$

где v — эквивалентное управляющее воздействие или управляющая функция, удовлетворяющая условию

$$|v(t)| \leq M. \quad (12)$$

После того как для эквивалентной системы (11) с условием (12) найдем оптимальный процесс $x_{\text{опт}}(t)$, полученное выражение можно подставить в (9) и найти отсюда оптимальное (действительное, а не эквивалентное) управление

$$u^*(t) = b_0 \frac{d^2x_{\text{опт}}}{dt^2} + b_1 \frac{dx_{\text{опт}}}{dt}. \quad (13)$$

Следует отметить, что в этом случае оптимальный процесс определяется не уравнением (9) объекта, а лишь условием ограничения (10). Но для определения действительного оптимального управления $u^*(t)$ необходимо знать уравнение объекта.

Сузим теперь постановку задачи. Пусть имеется лишь одно управляющее воздействие $u(t)$, и пусть на объект с выходной координатой x наложено ограничение типа

$$\left| a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x \right| \leq M, \quad (14)$$

где $a_i = \text{const}$ и $a_0 > 0$. Если в частном случае объект характеризуется уравнением

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = u(t), \quad (15)$$

и фазовая траектория — годограф вектора $x = x^*$ — представляла бы собой, например, траекторию $N_0^*N^*N_T$. Пусть N^* — положение изображающей точки на этой траектории в текущий момент времени $t > 0$, а N_0^* — положение этой точки в начальный момент времени $t = 0$. Однако действительное состояние объекта в момент времени $t = 0$ характеризуется изображающей точкой N_0 , не совпадающей с N_0^* . Пусть также текущее состояние объекта в момент $t > 0$ дается точкой N , а фазовая траектория объекта имеет вид кривой N_0NN_T . Система автоматического регулирования должна совместить действительное состояние N с требуемым N^* за минимальное время. Пусть точки N и N^* совмещаются при $t = T$ в положении N_T . Допустим, что после этого момента, т. е. при $t > T$, можно подобрать такие управляющие воздействия $u(t)$, чтобы было обеспечено равенство (6). Однако не всякие траектории $x^*(t)$ осуществимы при ограниченных ресурсах управления. Назовем траектории $x = x^*(t)$, которые можно осуществить, допустимыми. Очевидно, эти траектории являются решениями уравнения (1) при условии (2).

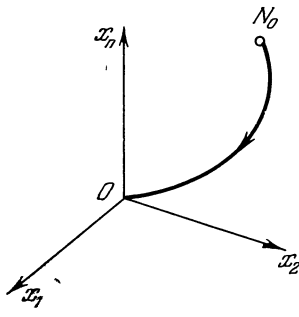


Рис. 14.16.

Это условие и является ограничением, накладываемым на траектории $x^*(t)$. Ограничим их возможными движениями системы при векторе u , лежащем внутри *) области $\Omega(u)$.

Переходным процессом является процесс перехода от начального состояния N_0 объекта к требуемому N_T . Этот процесс длится в течение промежутка времени, равного T . Система называется оптимальной по скорости переходных процессов, если последние удовлетворяют условию

$$T = \min \quad (7)$$

при любых начальных условиях и любой функции $x^*(t)$, принадлежащей к классу допустимых функций, либо точному определенному подклассу этого класса. В последнем случае система называется оптимальной по быстродействию для указанного подкласса допустимых функций $x^*(t)$. Процесс $x(t)$ в такой системе называется оптимальным процессом, а соответствующее управляющее воздействие $u(t)$ — оптимальным управлением.

Задачу об определении оптимального процесса $x(t)$ и оптимального управления $u(t)$, как видно из рис. 14.15, можно трактовать как задачу о самой быстрой встрече двух точек N и N^* в фазовом пространстве.

Вместо фазового пространства для x часто удобно пользоваться фазовым пространством того же порядка для погрешности

$$\varepsilon = x^* - x \quad (8)$$

с координатами $\varepsilon_i = x_i^* - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). По окончании переходного процесса вектор погрешности ε обращается в нуль. Следовательно, в новом пространстве изображающая точка системы, стартуя из некоторого начального положения, должна посредством наиболее быстрого допустимого движения перейти в начало координат.

Новое фазовое пространство получается из прежнего, если перенести начало координат в движущуюся точку N^* — конец вектора x^* (рис. 14.15).

Заменим в новом фазовом пространстве обозначения ε_i ($i = 1, 2, \dots, n$) буквами x_i , теперь уже означающими координаты погрешности (рис. 14.16). Задача о самой быстрой встрече изображающей точки системы из начального

) Внутри, но не на границе, так как точка N должна иметь возможность «догнать» точку N^ при любых начальных условиях.

Отсюда

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t}. \tag{25}$$

Но эта функция может обращаться в нуль не более $(n - 1)$ раз. Отсюда и следует теорема об n -интервалах.

Сама по себе теорема об n -интервалах еще не дает правила для подбора знака σ на первом интервале или для подбора длительностей интервалов. Однако с помощью этой теоремы можно осуществить синтез структурной схемы или, иначе, синтез алгоритма оптимального управляющего устройства, которое автоматически будет осуществлять требуемый подбор. Если становится известным значение требуемой в данный момент управляющей функции v , то нетрудно найти и соответствующее значение действительного управляющего воздействия u . Если на объект наложено ограничение типа (16), то u и v совпадают. Если же уравнение объекта и уравнение (18) ограничения не совпадают, то $v \neq u$; однако связь между u и v находится простым путем. Например, для уравнения (19) и ограничения (10) при $(dx/dt)_{t=0} = 0$ справедливо соотношение

$$u^*(t) = b_0 v(t) + b_1 \int_0^1 v(t) dt. \tag{26}$$

Таким образом, основная задача заключается в определении управляющей функции v для любой точки фазового пространства x в момент времени t :

$$v = v(x, t). \tag{27}$$

Чтобы найти эту зависимость, рассмотрим фазовое пространство для погрешностей. В силу теоремы об n интервалах, значение v в любой точке фазового пространства может быть лишь $+M$ либо $-M$, т. е. если $v = \sigma M$, то $\sigma = +1$ или $\sigma = -1$. Таким образом, каждой обыкновенной точке фазового пространства в каждый момент времени соответствует либо значение $\sigma = +1$, либо значение $\sigma = -1$. Поэтому в каждый момент времени все фазовое пространство разбивается на две области, характеризующиеся значениями $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$. На рис. 14.17 для примера показано трехмерное фазовое пространство с областями $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$. Эти области отделяются друг от друга границей, представляющей собой $(n - 1)$ -мерную гиперповерхность S . Задача синтеза сводится именно к тому, чтобы определить эту гиперповерхность в любой момент времени, S называют *гиперповерхностью переключения*.

В общем случае гиперповерхность S в различные моменты времени имеет различный вид. Такие гиперповерхности называются *нестационарными*. Этот случай имеет место, если уравнения объекта явно зависят от времени. В более частном классе случаев гиперповерхность S неподвижна, но ее форма зависит от параметров задающей функции $x^*(t)$. Назовем такую гиперповерхность *квазистационарной*.

В еще более частном классе случаев форма гиперповерхности S совсем не зависит от параметров $x^*(t)$; тогда гиперповерхность S называется *стационарной*. В последнем случае, который ниже рассмотрен подробно, уравнение погрешности не зависит от параметров $x^*(t)$.

Рассмотрим две точки M_0 и M'_0 (рис. 14.17) для случая стационарной гиперповерхности S в фазовом пространстве погрешностей. Эти точки расположены симметрично относительно начала координат и соответствуют

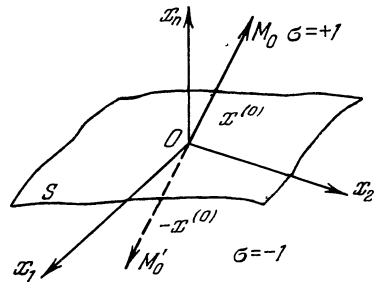


Рис. 14.17.

значениям $x^{(0)}$ и $-x^{(0)}$ вектора x . Допустим, что уравнение (18) и есть уравнение для погрешностей. Пусть для точки M_0 значение σ равно $+1$. Тогда для точки M'_0 значение σ равно -1 . Действительно, если оптимальный процесс $x(t)$, удовлетворяющий уравнению (18), начинается от точки $x^{(0)}$ и происходит при определенном воздействии $v(t)$, то и процесс $-x(t)$ при воздействии $-v(t)$, начинающийся от точки $-x^{(0)}$, удовлетворяет уравнению (18) и поэтому является оптимальным.

Так как любые симметричные относительно начала координат точки, не лежащие на гиперповерхности S , принадлежат к различным областям, то гиперповерхность S проходит через начало координат. Далее, из самого ее определения следует, что она не содержит «дырок», сквозь которые был бы возможен переход из одной области пространства в другую без пересечения гиперповерхности S . Наконец, она простирается до бесконечно удаленных точек фазового пространства.

Оптимальная траектория в фазовом пространстве складывается в общем случае из n участков, соответствующих интервалам $\sigma = \text{const}$. Например,

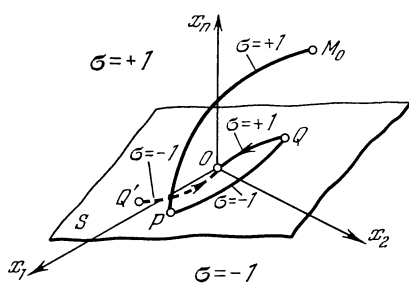


Рис. 14.18.

на рис. 14.18 для $n = 3$ изображена оптимальная фазовая траектория M_0PQO , идущая от точки M_0 (вектор $x^{(0)}$) и состоящая из трех участков. Для первого участка M_0P значение σ равно $+1$; для второго участка PQ значение σ равно -1 ; наконец, для третьего участка QO значение $\sigma = +1$. Антисимметричная ей траектория $M'_0P'Q'O$, не показанная на рисунке, ведет от точки M'_0 (вектор $x^{(0)}$), причем на этой траектории значения σ чередуются в следующем порядке: $\sigma = -1; +1; -1$. В частности, последний участок этой

траектории $Q'O$, показанный пунктиром на рис. 14.18, соответствует значению $\sigma = -1$ и приводит изображающую точку в начало координат.

Пусть переходный процесс начинается при $t = 0$. Можно «обратить» течение времени на противоположное путем замены $\tau = T - t$, где T — значение времени t , соответствующее моменту окончания переходного процесса. Теперь уже моменту окончания переходного процесса, т. е. попаданию изображающей точки в начало координат, будет соответствовать значение $\tau = 0$. При увеличении τ от нуля изображающая точка M станет совершать «попятное» движение по оптимальной траектории, например по траектории $OQPM_0$, — направляясь от точки O к Q , далее от Q к P и от P к M_0 . Точка M_0 будет достигнута при таком «попятном» движении в момент $\tau = T$; соответствующий значению $t = 0$.

Важно отметить, что в точку O можно попасть лишь по одной из двух возможных оптимальных траекторий: QO или $Q'O$. Действительно, заменим время t на $\tau = T - t$ и проследим любое возможное «попятное» движение. На первом, считая от точки O , участке возможны лишь два различных значения управляющей функции v : $+M$ или $-M$, что соответствует значениям $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$. При $\sigma = +1$ движение происходит по траектории OQ , а при $\sigma = -1$ — по OQ' . Обозначим эти траектории через L'_1 и L''_1 соответственно (рис. 14.19).

На каждую из траекторий L'_1 и L''_1 можно попасть различными способами. В какую-либо определенную точку траектории L'_1 можно попасть, двигаясь по одной лишь траектории типа PQ , соответствующей значению $\sigma = -1$. Обозначим множество точек траекторий, соответствующих $\sigma = -1$ и ведущих к точкам траектории L'_1 через L_2 . В свою очередь в каждой определенной точке траектории, принадлежащей множеству L'_2 , ведет одна траекто-

рия, соответствующая значению $\sigma = +1$ (например, PM_0 на рис. 14.19). Обозначим множество точек траекторий, соответствующих $\sigma = +1$ и ведущих к L'_2 , через L'_3 и т. д. Подобным образом сконструируем множества $L'_2, L'_3, \dots, L'_{n-1}$ и, наконец, L'_n . Последнее множество включает все обыкновенные точки фазового пространства, принадлежащие области $\sigma = +1$ и не находящиеся на гиперповерхности S .

Совершенно аналогичным образом обозначим множество точек, лежащих на траекториях, ведущих к L''_1 , через L''_2 . Далее множество точек траекторий, ведущих к L''_2 , обозначим через L''_3 и т. д. Очевидно, что L''_n включает в себя все обыкновенные точки фазового пространства, принадлежащие области $\sigma = -1$ и не находящиеся на гиперповерхности S .

Из рис. 14.19 видно, что n -мерные «струи» оптимальных фазовых траекторий после первого переключения знака σ становятся $(n - 1)$ -мерными, затем, после следующего переключения, $(n - 2)$ -мерными и т. д.; наконец, на n -м интервале появляется одномерная «струя», текущая в начало координат. Имеются всего две такие одномерные «струи»: L'_1 и L''_1 . Все это легко показывается путем прослеживания «попятного» движения изображающей точки из начала координат.

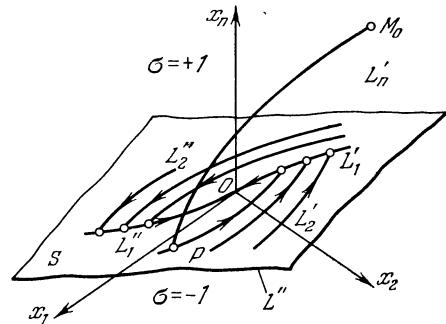


Рис. 14.19.

В точке P оптимальной траектории происходит первое (если рассматривается обычное время t) переключение знака σ . Так как переключение знака σ может происходить лишь при пересечении гиперповерхности переключения S , то, следовательно, точка P принадлежит S . Так как совокупность точек P

есть совокупность множеств L'_{n-1} и L''_{n-1} , которую обозначим, L_{n-1} , то, следовательно, множество L_{n-1} принадлежит S . Но в каждую точку R , принадлежащую S , можно попасть движением по траектории $\sigma = +1$ или $\sigma = -1$ из любой обыкновенной точки без переключения, так как переключение происходит лишь на гиперповерхности S . Следовательно, все точки R гиперповерхности S принадлежат множеству L_{n-1} .

Итак, $(n - 1)$ -мерная гиперповерхность S совпадает с $(n - 1)$ -мерным множеством L_{n-1} . Поэтому нахождение S сводится к нахождению множества точек L_{n-1} .

Поскольку семейство траекторий L''_{n-1} при стационарной гиперповерхности S антисимметрично L'_{n-1} и получается заменой знаков всех координат точек L'_{n-1} на противоположные, достаточно рассмотреть лишь построение семейства L'_{n-1} . Его удобно производить посредством «попятного» движения из начала координат. При этом движении, с заменой t на $\tau = T - t$, изображающая точка будет сначала двигаться по траектории L'_1 (рис. 14.19), соответствующей значению $\sigma = +1$. Допустим, что при τ_1 происходит переключение знака σ и переход на траекторию L'_2 , при $\tau_2 > \tau_1$ происходит новое переключение знака σ и переход на траекторию L'_3 и т. д. Наконец, при $\tau_{n-1} > \tau_{n-2} > \dots > \tau_1$ происходит «последнее» (а в реальном времени первое) переключение знака σ . Перейдя в уравнении

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = v \tag{28}$$

к новому аргументу $\tau = T - t$, получим новое уравнение

$$a_0 (-1)^n \frac{d^n x}{d\tau^n} + a_1 (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + (-1) a_{n-1} \frac{dx}{d\tau} + a_n x = v. \tag{29}$$

Решим это уравнение для «начальных» условий

$$(x)_{\tau=0} = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \dots = \left(\frac{d^{n-1}x}{d\tau^{n-1}}\right)_{\tau=0} = 0 \tag{30}$$

и при $v = +M$, т. е. при $\sigma = +1$. Тогда получим уравнение траектории L'_1 в параметрической форме $x = x(\tau)$. При $\tau = \tau_1$ соответствующая этой траектории точка фазового пространства имеет координаты $x(\tau_1)$. Если в этот момент времени заменить $v = +M$ на $v = -M$, то решение уравнения (29) в момент $\tau_2 > \tau_1$ будет функцией как от τ_1 , так и от τ_2 , т. е. $x = x(\tau_1, \tau_2)$.

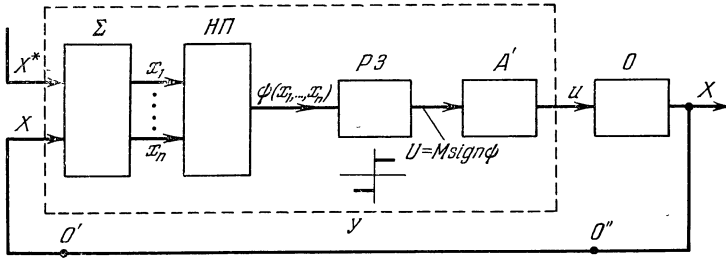


Рис. 14.20.

Производя переключение знака σ в моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, получим решение уравнения (29) в виде

$$x = x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}). \tag{31}$$

Уравнения для координат x_1, x_2, \dots, x_n вектора x имеют вид

$$x_i = x_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{32}$$

Эти решения в своей совокупности представляют собой уравнение гиперповерхности S в параметрической форме и, таким образом, дают решение задачи синтеза. Исключив из уравнений (32) параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, можно в ряде случаев получить уравнение S в явном виде, т. е. в виде соотношения, связывающего координаты x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \tag{33}$$

Пусть функция ψ положительна с одной стороны от гиперповерхности S и отрицательна с другой стороны. Пусть, например, $\psi > 0$ для точек области $\sigma = +1$ и $\psi < 0$ для точек области $\sigma = -1$. Тогда можно положить

$$\sigma = \text{sign } \psi \tag{34}$$

и

$$v = \sigma M = M \text{ sign } \psi = M \text{ sign } \psi(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{35}$$

Это и есть требуемый алгоритм работы оптимальной системы, т. е. уравнение $v = v(x)$. Для каждой точки x фазового пространства уравнение (35) дает значение v , соответствующее оптимальному закону управления. Аналогичные выводы можно получить для случая квазистационарной поверхности S , с той лишь разницей, что в этом случае L'_{n-1} и L''_{n-1} не антисимметричны друг другу.

Зная зависимость (35), можно построить структурную схему оптимального управляющего устройства (рис. 14.20). С выхода объекта O на вход блока Σ , принадлежащего управляющему устройству Y , поступает выходная величина X объекта по каналу обратной связи $O'O''$. Величина X может быть вектором с несколькими координатами. Тогда линия обратной связи

состоит из нескольких каналов, по которым передаются координаты X_i вектора X , например $X, \frac{dX}{dt}$ и т. д.

На блок Σ подается также вектор X^* задающего воздействия. В блоке Σ вырабатываются координаты x_1, x_2, \dots, x_n вектора погрешности: $x_i = X_i^* - X_i$. Если требуется, для этого в состав блока Σ включаются дифференциаторы для определения недостающих координат путем дифференцирования некоторых входных координат. Погрешности x_1, x_2, \dots, x_n с выхода блока Σ подаются на вход нелинейного преобразователя $НП$, образующего их нелинейную функцию $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Последняя подается на вход релейного звена $РЗ$; выходная величина этого звена, т. е. $M \text{sign} \psi$, и представляет собой величину U . Эта величина поступает на вход блока A' , преобразующего $v(t)$ в управляющее воздействие $u(t)$. Если $u(t) = v(t)$, то блок A' не требуется.

Следует пояснить, каким образом при наличии одной лишь $(n - 1)$ -мерной гиперповерхности переключения S в n -мерном фазовом пространстве получается процесс, состоящий из n интервалов. Для того чтобы понять это, следует учесть, что в любой реальной системе существуют флуктуации, которые слегка «сбивают» изображающую точку с оптимальной фазовой траектории. Поэтому реальное движение системы зависит не только от характера самой гиперповерхности S , но и от структуры фазового пространства в окрестности этой гиперповерхности. Эта структура схематически показана на рис. 14.21. Здесь для примера часть L'_{n-1} гиперповерхности S соответствует значению $\sigma = +1$, L''_{n-1} — значению $\sigma = -1$. С одной стороны от L'_{n-1} (на рис. 14.21) проходят почти параллельно ей другие траектории с $\sigma = +1$, принадлежащие области $\sigma = +1$ фазового пространства. С другой стороны от L'_{n-1} (на рис. 14.21 сверху) проходят траектории $\sigma = -1$, которые ведут как раз к этому множеству L'_{n-1} . Аналогичная картина, как видно из рис. 14.21, имеется в окрестности части L''_{n-1} гиперповерхности S , но с той разницей, что на этот раз к L''_{n-1} ведут уже траектории $\sigma = +1$.

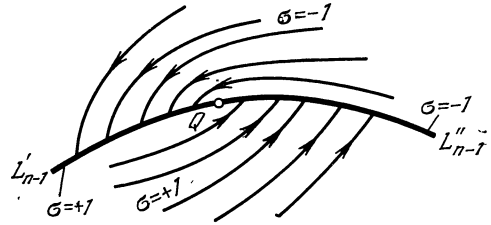


Рис. 14.21.

Если изображающая точка, идущая по участку L'_{n-1} , будет выбита в соседнее место области $\sigma = -1$ фазового пространства, то произойдет перемена знака σ с $+1$ на -1 . Но после этого изображающая точка немедленно (если флуктуация достаточно мала) вернется обратно на гиперповерхность. Поэтому в данном случае фактически движение точки не изменится.

Если изображающая точка, идущая по участку L'_{n-1} , будет выбита в соседнее место области $\sigma = -1$ фазового пространства, то произойдет перемена знака σ с $+1$ на -1 . Но после этого изображающая точка немедленно (если флуктуация достаточно мала) вернется обратно на гиперповерхность. Поэтому в данном случае фактически движение точки не изменится.

Иная ситуация возникнет (а она неизбежно возникнет, так как в системе существуют самые различные флуктуации), если изображающая точка будет выбита в область $\sigma = +1$ вблизи участка L'_{n-1} гиперповерхности S . В этом случае изображающая точка уже не вернется немедленно на гиперповерхность. Траектория последующего движения будет проходить в области $\sigma = +1$ в непосредственной близости к L'_{n-1} . Следовательно, движение будет почти таким же, как если бы изображающая точка двигалась в точности по гиперповерхности. Спустя конечный промежуток времени изображающая точка попадает на участок L''_{n-1} гиперповерхности S , в непосредственной близости к точке Q , в которой заканчивается «идеальная» траектория участка L'_{n-1} . Если теперь новая флуктуация собьет изображающую точку, то она пойдет по траектории $\sigma = -1$, близкой к одной из траекторий L'_{n-2} , так как через Q проходит траектория, принадлежащая к этому множеству. В результате n таких движений изображающая точка, двигаясь

поочередно в областях $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, попадает в малую окрестность начала координат, на чем переходный процесс заканчивается.

Реальная траектория, следовательно, проходит вблизи гиперповерхности S , причем каждое переключение сопровождается «протыканием» изображающей точки гиперповерхности S . На рис. 14.22 показана для иллюстрации реальная траектория в трехмерном пространстве ($n = 3$). Идеальная траектория имеет вид кривой M_0PQO , причем ее участки PQ и QO лежат на поверхности переключения S . Если вблизи положения P флуктуация собьет изображающую точку с поверхности S , то она попадет в положение P_1 и отсюда пойдет при $\sigma = -1$ по траектории P_1Q_1 , близкой к идеальной траектории PQ . В точке Q_1 изображающая точка достигает поверхности S . Если теперь флуктуация выбьет точку в положение Q_1 , то

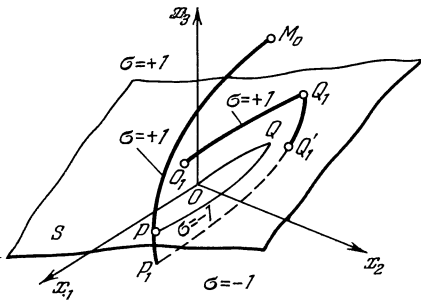


Рис. 14.22.

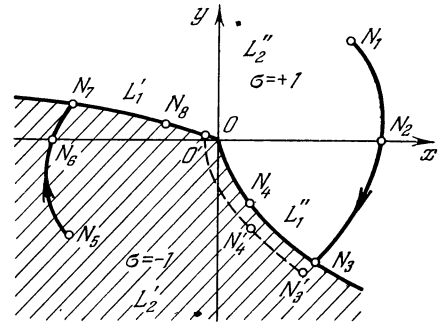


Рис. 14.23.

дальнейшее движение при $\sigma = +1$ пойдет по траектории Q_1O_1 , близкой к «идеальной» траектории QO . В положении O_1 изображающая точка достигает малой окрестности начала координат, и переходный процесс может считаться законченным.

Вернемся еще раз к способу построения гиперповерхности S и напомним, что она представляет собой геометрическое место точек первого переключения знака σ . Однако на этой же гиперповерхности осуществляются все остальные $n - 1$ переключений знака σ . Действительно, из вышеизложенного следует, что совершенно не нужно создавать какие-либо специальные поверхности или линии внутри L_{n-1} для последующих переключений знака σ . Достаточно иметь лишь одну «перегородку» в n -мерном фазовом пространстве, соответствующую первому переключению знака σ . Из-за наличия флуктуаций реальный процесс сколь угодно близок, но не тождествен идеальному оптимальному процессу. Последний вообще невозможен в реальной системе, так как вероятность для изображающей точки оказаться в точности на гиперповерхности S и двигаться по ней равна нулю.

Покажем на простейшем примере объекта второго порядка, как определяется функция ψ и поверхность S . В данном случае фазовое пространство погрешностей превращается в фазовую плоскость (рис. 14.23), а поверхность оказывается одномерной, т. е. превращается в кривую переключения, разделяющую фазовую плоскость на две области: $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$. Пусть объект характеризуется уравнением

$$a_0 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = u, \quad (36)$$

а ограничение имеет вид

$$|u| \leq M. \quad (37)$$

Класс задающих воздействий выбираем в виде

$$x_1^*(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2, \quad (38)$$

где A_0 , A_1 и A_2 — в каждом отдельном процессе постоянные величины. Допустимые функции $x_1^*(t)$ являются решениями уравнения (36) при условии

$$|u| < M. \quad (39)$$

Здесь знак \leq заменен на $<$ с тем, чтобы точка x могла «догнать» точку x^* . Так как

$$a_0 \left| \frac{d^2 x_1^*}{dt^2} \right| < M, \quad (40)$$

то, подставив вторую производную выражения (38) в условие (40), находим

$$|A_2| < \frac{M}{2a_0}. \quad (41)$$

Этим условием ограничены допустимые функции типа (38). Уравнение для оптимального процесса приобретает вид

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\sigma M}{a_0}, \quad (42)$$

где $\sigma = \pm 1$.

Обозначим буквой x погрешность, т. е. разность

$$x = x_1^* - x_1, \quad (43)$$

а буквой y — ее производную

$$y = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1^*}{dt} - \frac{dx_1}{dt}. \quad (44)$$

Из уравнений (42), (43) и (38) следует

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x_1^*}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 2A_2 - \frac{\sigma M}{a_0} = \mu_0. \quad (45)$$

На каждом из интервалов величина μ_0 постоянна, так как $\sigma = \text{const}$. Перейдем теперь к «обращенному» времени $\tau = T - t$. Тогда с учетом уравнения (45) получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = - \frac{d}{d\tau} \left(- \frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \mu_0. \quad (46)$$

Далее,

$$y = \frac{dx}{dt} = - \frac{dx}{d\tau} = - \int \left(\frac{d^2 x}{d\tau^2} \right) d\tau = -\mu_1 - \mu_0 \tau \quad (47)$$

и

$$x = - \int y d\tau = \mu_2 + \mu_1 \tau + \mu_0 \frac{\tau^2}{2}, \quad (48)$$

где μ_1 и μ_2 — постоянные. Найдем линии L_1' и L_1'' , составляющие в данном случае линию переключения. Так как при $\tau = 0$, величины y и x , соответствующие этим линиям, обращаются в нули, то из (47) и (48) находим $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Следовательно,

$$x = \mu_0 \frac{\tau^2}{2}, \quad y = -\mu_0 \tau. \quad (49)$$

Найдем сначала линию L_1'' , для которой $\sigma = -1$. Из формулы (45) и условия (41) следует, что знак μ_0 определяется знаком σ , т. е.

$$\text{sign } \mu_0 = - \text{sign } \sigma. \quad (50)$$

Но из второго уравнения (49) видно, что, поскольку $\tau > 0$, справедливо условие

$$\text{sign } y = - \text{sign } \mu_0. \quad (51)$$

Следовательно,

$$\text{sign } y = \text{sign } \sigma = \sigma. \quad (52)$$

Итак, при $\sigma = -1$ величина $\mu_0 > 0$, а $y < 0$. Движение по линии L_1'' происходит поэтому в нижней полуплоскости (рис. 14.23). Исключая из двух уравнений (49) аргумент τ , находим уравнение для линии L_1'' в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{y^2}{2\mu_0} > 0, \\ \sigma &= \text{sign } \sigma = \text{sign } y = -1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Для линии L_1' величина $\sigma = +1$. Следовательно, как видно из (45), $\text{sign } \mu_0 = -1$. Поэтому из (51) следует $y > 0$. В этом случае из уравнений (49) получается выражение

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{y^2}{2\mu_0} < 0, \\ \sigma &= \text{sign } \sigma = \text{sign } y = +1. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Уравнения обеих линий L_1' и L_1'' можно объединить в виде одного уравнения для линии $L_1 = S$.

$$x = \frac{y^2}{2\mu_0} = \frac{y^2}{2 \left(2A_2 - \frac{M_0}{a_0} \text{sign } y \right)}, \quad (55)$$

где вместо $\sigma = \text{sign } \sigma$ поставлена равная σ величина $\text{sign } y$. Выражение (55) представляет собой уравнение линии переключения. Это уравнение можно записать также в виде, аналогичном (33), т. е. в виде $\psi = 0$, где

$$\psi(x, y) = x + \frac{y^2}{2 \left(\frac{M}{a_0} \text{sign } y - 2A_2 \right)} = x + \frac{y^2 \text{sign } y}{2 \left(\frac{M}{a_0} - 2A_2 \text{sign } y \right)}. \quad (56)$$

На рис. 14.23 изображена линия переключения и оптимальные траектории на фазовой плоскости. Линия переключения имеет вид кривой $N_3N_4ON_8N_7$. Изображающая точка, стартующая из N_1 , движется по параболической траектории $N_1N_2N_3$, которую нетрудно получить, решив уравнение (45), для $\sigma = +1$ и начальных условий, соответствующих точке N_1 . В положении N_3 изображающая точка достигает линии переключения. После переключения изображающая точка движется, в идеальном случае, по самой линии переключения N_3N_4O к началу координат. В действительности из-за наличия флуктуаций изображающая точка движется по пунктирной линии N_3N_4O' в области $\sigma = -1$, т. е. по траектории, близкой к линии N_3N_4O , и достигает в точке O' малой окрестности начала координат.

Если изображающая точка в начальный момент времени находится в положении N_5 , т. е. в заштрихованной области, где $\sigma = -1$, то она идет по параболической траектории $N_5N_6N_7$ (решение уравнения (45) для $\sigma = -1$) до той части линии переключения N_7N_8O , которая находится во втором квадранте, а затем по линии переключения к началу координат.

Так как $\psi(x, y)$ (56) зависит от параметра A_2 задающего воздействия $x_1^*(t)$, то, согласно данному выше определению, линия переключения S

квазистационарна. Это обстоятельство можно было предвидеть, так как в уравнение (45) для погрешности $x(t)$ входит параметр A_2 . В этом случае части L' и L'' линии переключения S уже не антисимметричны относительно начала координат. Действительно, в формуле (55) при $y < 0$ модуль знаменателя равен $\left| \frac{M}{a_0} + 2A_2 \right|$, в то время как при $y > 0$ модуль знаменателя равен $\left| \frac{M}{a_0} - 2A_2 \right|$. Следовательно, полупараболы L'_1 и L''_1 различны и не могут быть совмещены друг с другом поворотом одной из них на 180° . Если же рассматривать более узкий класс задающих воздействий

$$x_1^*(t) = A_0 + A_1 t, \tag{57}$$

то $A_2 = 0$ и в уравнении для погрешности $x(\tau)$ отсутствуют параметры задающего воздействия. В этом случае выражение (56) принимает вид

$$\psi(x, y) = x + \frac{y^2 \operatorname{sign} y}{\frac{2M}{a_0}}, \tag{58}$$

и обе полупараболы L'_1 и L''_1 антисимметричны относительно начала координат.

Зная уравнение (56), можно произвести синтез оптимальной системы. Подставив достаточно большое значение x в выражение ψ , получаем $\psi > 0$. Следовательно, $\psi > 0$ сверху от линии переключения. Аналогичным образом легко показать, что $\psi < 0$ снизу от нее. Поэтому можно под-
 дать величину $w = \psi$ на вход релейного звена, характеристика которого показана на рис. 14.24, а. Выходная величина u этого звена, равная $\pm M$, может быть подана на вход объекта. Однако на практике часто оказывается необходимым заменять релейное звено несколько более сложным звеном. Действительно, найденное выше решение и соответствующее ему оптимальное управляющее устройство имеет смысл применять лишь при больших значениях погрешности и ее производных. Когда изображающая точка в фазовом пространстве погрешностей близка к началу координат или даже к гиперповерхности S , то можно заменить оптимальный закон движения каким-либо иным, например линейным. От этого общее время переходного процесса увеличится незначительно. Между тем колебания вблизи начала координат, исходящие от частных переключений, обычно считаются нежелательными, и их можно уменьшить, придавая зависимости u от w вид одной из кривых, показанных на рис. 14.24, б, в, г. При $|w| > \delta$, где δ — некоторая малая величина, эти зависимости совпадают с характеристикой релейного звена.

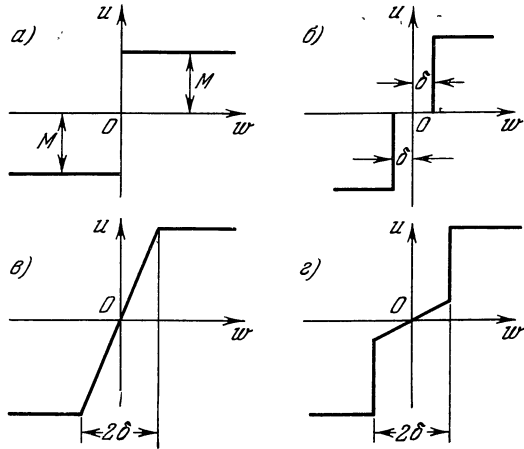


Рис. 14.24.

Вместо управляющего сигнала w можно воспользоваться любой другой величиной w_1 , имеющей тот же знак, например:

$$w_1 = 2w \left(\frac{M}{a_0} - 2A_2 \operatorname{sign} y \right) = 2x \left(\frac{M}{a_0} - 2A_2 \operatorname{sign} y \right) + y^2 \operatorname{sign} y. \tag{59}$$

Это выражение удобнее, чем (56), так как в нем отсутствует операция деления.

На рис. 14.25 изображена структурная схема системы, в которой реализован закон управления (59). Здесь контур объекта O обведен двойной линией. Выходная величина x_1 объекта, являющаяся регулируемой величиной, после перемены знака, производимой инвертором (-1) , подводится к суммирующему устройству. Туда же подводится и задающее воздействие x^* . Разность $x^* - x_1 = x$ поступает на вход дифференциатора D_1 , а также на один из входов множительного звена $MЗ-2$. На второй вход этого же звена поступает величина $M/a_0 - 2A_2 \text{sign } y$. Таким образом,

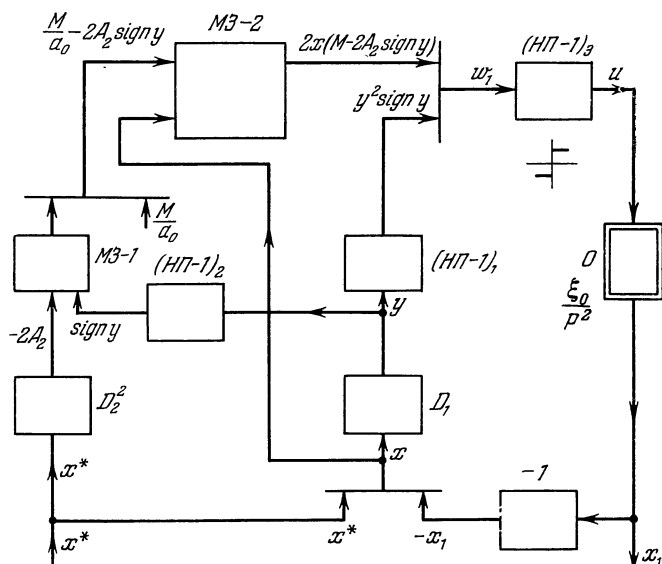


Рис. 14.25.

на выходе звена образуется произведение $2x(M/a_0 - 2A_2 \text{sign } y)$, т. е. первое слагаемое формулы (59). Сомножитель $M/a_0 - 2A_2 \text{sign } y$ этого выражения получается в результате суммирования величины $M/a_0 = \text{const}$ и выхода другого множительного звена $MЗ-1$. На вход последнего подаются сомножители $\text{sign } y$ и $-2A_2$. Первый из них получается на выходе нелинейного преобразователя $(НП-1)_1$ с релейной характеристикой; на вход звена $(НП-1)_1$ подается величина y_2 . Сомножитель $-2A_2$ представляет собой ускорение $-d^2x^*/dt^2$, непрерывно поступающее через двойной дифференциатор D_2^2 . Предполагается, что задающее воздействие $x^*(t)$ не искажено помехой и дифференцирование происходит без искажений.

На вход нелинейного преобразователя $(НП-1)_3$ поступает сумма, фигурирующая в правой части равенства (59). Второе слагаемое этой суммы получается на выходе нелинейного преобразователя $(НП-1)_1$, на вход которого поступает величина y . Характеристика преобразователя $(НП-1)_3$ принадлежит к одному из типов, изображенных на рис. 14.24. Кроме блоков, показанных на рис. 14.25, схема может быть снабжена еще дополнительными звеньями, вступающими в действие лишь при малых отклонениях, когда оптимальный закон управления сменяется на какой-либо иной (см. рис. 14.24).

Алгоритм (59) сравнительно прост, а в случае (58), когда $A_2 = 0$, он становится совершенно элементарным. Вообще для случая ограничения второго порядка, при условии применимости теоремы об n интервалах, алгоритмы строго оптимальных систем сравнительно просты. Пусть, например, объект состоит из последовательно соединенных инерционного и инте-

грирующего звеньев и имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{\xi_0}{p(1+pT)} = \frac{x_1(p)}{u(p)}, \quad (60)$$

где $x_1(p)$ — изображение регулируемой величины $x_1(t)$ на выходе объекта, а $u(p)$ — изображение $u(t)$.

Допустим, что управляющее воздействие $u(t)$ ограничено по модулю

$$|u(t)| \leq M_2. \quad (61)$$

Пусть далее задающее воздействие принадлежит к классу

$$x^*(t) = A_0 + A_1 t. \quad (62)$$

Нетрудно показать, что допустимые функции этого класса в данном случае должны удовлетворять условию

$$|A_1| < \xi_0 M_2 = M. \quad (63)$$

Тогда формула для величины w_1 , подаваемой на вход релейного звена с уравнением

$$u(t) = M_2 \operatorname{sign} w, \quad (64)$$

имеет вид

$$w = x + T \left[(A_1 + M \operatorname{sign} y) \ln \left(1 - \frac{y}{A_1 + M \operatorname{sign} y} \right) + y \right], \quad (65)$$

где $x = x^* - x_1$ — погрешность, а y — ее производная.

При $A_1 = 0$ эта формула принимает весьма простой вид

$$w = x + T \left[M \operatorname{sign} y \ln \left(1 - \frac{|y|}{M} \right) + y \right]. \quad (66)$$

Линия переключения, соответствующая формуле (65), зависит от параметра A задающего воздействия. Следовательно, она квазистационарна. Для частного случая, соответствующего выражению (66), линия переключения не зависит от параметров задающего воздействия и поэтому стационарна.

Рассмотрим в качестве примера задачу с траекториями в трехмерном фазовом пространстве. Пусть ограничена по модулю третья производная от регулируемой величины x_1 :

$$\left| \frac{d^3 x_1}{dt^3} \right| \leq M. \quad (67)$$

Если задающее воздействие x^* принадлежит к классу парабол (38), то, как можно показать, в данном случае поверхность переключения S будет стационарной. Поэтому при выводе формул положим для удобства $x^* = A_0 = \text{const}$, что не изменит результата, ибо все равно S не зависит от параметров функции $x^*(t)$.

Уравнение ограничения (28) записывается в виде

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \sigma M = v. \quad (68)$$

После приведения к «обращенному» времени $\tau = T - t$ это уравнение принимает вид

$$\frac{d^3 x_1}{d\tau^3} = -\sigma M. \quad (69)$$

Решим это уравнение для нулевых начальных условий (30) и $\sigma = \text{const}$. Положим

$$x = x^* - x_1, \quad y = \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{d\tau}, \quad z = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{dy}{d\tau}. \quad (70)$$

Тогда из (59) следует при $\sigma = +1$

$$\frac{dz}{d\tau} = -M, \quad (71)$$

откуда при $\tau = \tau_1$ получаем

$$z = -M\tau_1. \quad (72)$$

Далее находим для $\tau = \tau_1$

$$y = -\int_0^{\tau_1} z d\tau = M \frac{\tau_1^2}{2} \quad (73)$$

и

$$x = -\int_0^{\tau_1} y d\tau = -M \frac{\tau_1^3}{6}. \quad (74)$$

Равенства (72), (73) и (74) представляют собой уравнение линии L'_1 в параметрическом виде. Этими равенствами задаются в момент времени $\tau = \tau_1$ координаты изображающей точки N_1 , вышедшей из начала координат (рис. 14.26). Пусть теперь в этот момент значение σ изменится и станет равным $\sigma = -1$. Тогда нужно будет интегрировать уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = +M \quad (75)$$

при начальных условиях (72) — (74). Если начало отсчета времени τ_2 вести от момента переключения, то на втором участке формулы для z , y , x принимают следующий вид:

$$z = \int_0^{\tau} M d\tau_2 - M\tau_1 = M(\tau_2 - \tau_1), \quad (76)$$

$$y = -\int_0^{\tau_2} z d\tau_2 + M \frac{\tau_1^2}{2} = -\int_0^{\tau_2} M(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 + \frac{M\tau_1^2}{2} = M\tau_1^2 - \frac{M}{2}(\tau_2 - \tau_1)^2 \quad (77)$$

и

$$\begin{aligned} x &= -\int_0^{\tau_2} y d\tau_2 - M \frac{\tau_1^3}{6} = -\int_0^{\tau_2} \left[M\tau_1^2 - \frac{M}{2}(\tau_2 - \tau_1)^2 \right] d\tau_2 - M \frac{\tau_1^3}{6} = \\ &= -M\tau_1^2\tau_2 + \frac{M}{6}(\tau_2 - \tau_1)^3. \end{aligned} \quad (78)$$

Выражения (76), (77) и (78) представляют собой уравнения поверхности L'_2 в параметрическом виде. Уравнения для поверхности L''_2 легко получаются заменой знака x , y , z на противоположный:

$$\left. \begin{aligned} x &= M\tau_1^2\tau_2 - \frac{M}{6}(\tau_2 - \tau_1)^3, \\ y &= -M\tau_1^2 + \frac{M}{2}(\tau_2 - \tau_1)^2, \\ z &= -M(\tau_2 - \tau_1). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Изменяя значения параметров τ_1 и τ_2 в предыдущих формулах в интервале

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \tau_1 < \infty, \\ 0 \leq \tau_2 < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

можно получить все точки поверхности переключения S . В данном примере можно также исключить τ_1 и τ из обеих групп уравнений и, соединив обе «полуповерхности» L'_1 и L''_2 , получить уравнение поверхности S в явной форме

$$\psi(x, y, z) = x + \frac{z^3}{3M^2} + (\text{sign } w) \left[\frac{yz}{M} + \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{z^2}{2M} + y \text{sign } w \right)^{3/2}} \right] = 0, \quad (81)$$

$$w = y + \frac{z^2}{2M} \text{sign } z.$$

Управляющая функция выражается формулой

$$v = M \text{sign } \psi. \quad (82)$$

Уравнение (81) уже сравнительно сложно. Для других примеров ограничений третьего порядка алгоритмы строго оптимальной системы оказываются еще более сложными. Сравнительно сложные алгоритмы и при $n = 2$, если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни. Однако можно найти приближенно-оптимальные алгоритмы, сравнительно простые для любых типов систем третьего порядка.

§ 8. Применение метода динамического программирования

Рассмотрим линейный объект в общем случае с переменными параметрами, у которого импульсная переходная функция обозначена $g(t, \tau)$. Это означает, что выходная величина $x(t)$, наблюдаемая в момент времени t , связана с входными величинами $u(\tau)$ ($-\infty < \tau \leq t$) соотношением

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Для линейных систем с постоянными коэффициентами $g(t, \tau) = g(t - \tau)$ и выражение (1) превращается в обычный интеграл Дюамеля. Ниже состояние объекта в каждый момент времени характеризуется значениями n координат x_1, x_2, \dots, x_n или вектором x .

Допустим, что в качестве критерия оптимальности выбирается некоторый интеграл, взятый по будущим значениям времени на интервале от t до $t + T$:

$$Q = \int_t^{t+T} \{ \lambda(\sigma) f_x [X(\sigma) - x(\sigma)] + f_u [U(\sigma) - u(\sigma)] \} d\sigma. \quad (2)$$

Требуется выбирать текущее значение вектора $u(t)$ таким образом, чтобы минимизировать величину Q . Под интегралом в выражении (2) имеется функция f_x от разности $[X(\sigma) - x(\sigma)]$, где $X(\sigma)$ — заданная «идеальная» функция для вектора x , причем $f_x(0) = 0$. Функция f_u от разности $[U(\sigma) - u(\sigma)]$, где $U(\sigma)$ — «идеальное» воздействие, также обладает свойством $f_u(0) = 0$. Ниже принято

$$f_x(v) = f_u(v) = v^2.$$

Кроме того, $\lambda(\sigma) \geq 0$ — некоторая заданная «весовая» функция, задающая относительную «ценность» слагаемых f_x и f_u в общей формуле. Интервал интегрирования выбран конечным, так как в практических задачах обычно можно установить конечное значение T , за пределами которого прогноз будущего теряет интерес.

При оптимальном управлении величина Q принимает минимальное значение S , зависящее только от состояния объекта в текущий момент

времени t , принимаемый за начальный. Итак,

$$S = S(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = S[x(t), t] = \min_{\substack{u(\sigma) \in \Omega(u), \\ t \leq \sigma \leq t+T}} Q. \quad (3)$$

Подставив вместо Q выражение (2), получим

$$S[x(t), t] = \min_{\substack{u(\sigma) \in \Omega(u), \\ t \leq \sigma \leq t+T}} \int_t^{t+T} \{\lambda(\sigma) f_x[X(\sigma) - x(\sigma)] + f_u[U(\sigma) - u(\sigma)]\} d\sigma. \quad (4)$$

Следует отметить, что

$$S[x(t+T), t+T] = 0. \quad (5)$$

Действительно, значение интеграла Q , как видно из (2), равно нулю, когда нижний предел интегрирования равен $t+T$. Поэтому и $S = \min Q$ равно нулю, если текущее значение времени совпадает с конечным моментом.

Выведем необходимое условие оптимальности так же, как и в § 6 этой главы. Для этого разделим весь промежуток времени от t до $t+T$ на два интервала $[t \leq \sigma \leq t+\varepsilon]$ и $[t+\varepsilon < \sigma \leq t+T]$, где ε мало. Тогда

$$S[x(t), t] = \min_{\substack{u(\sigma) \in \Omega(u), \\ t \leq \sigma \leq t+T}} \varepsilon \{\lambda(t) f_x[X(t) - x(t)] + f_u[U(t) - u(t)]\} + \\ + \int_{t+\varepsilon}^{t+T} \{\lambda(\sigma) f_x[X(\sigma) - x(\sigma)] + f_u[U(\sigma) - u(\sigma)]\} d\sigma. \quad (6)$$

Но минимальное значение второго слагаемого в скобке равно $S[x(t+\varepsilon), t+\varepsilon]$, а именно:

$$S[x(t+\varepsilon), t+\varepsilon] = \min_{\substack{u(\sigma) \in \Omega(u), \\ t+\varepsilon \leq \sigma \leq t+T}} \int_{t+\varepsilon}^{t+T} \{\lambda(\sigma) f_x[X(\sigma) - x(\sigma)] + f_u[U(\sigma) - u(\sigma)]\} d\sigma. \quad (7)$$

При условии обеспечения оптимального управления на интервале $t+\varepsilon \leq \sigma \leq t+T$ можно заменить второе слагаемое в скобке (6) на $S[x(t+\varepsilon), t+\varepsilon]$. Теперь требуется найти такое оптимальное управление $u(\sigma)$ на малом интервале $t \leq \sigma \leq t+\varepsilon$, чтобы минимизировать правую часть выражения

$$S[x(t), t] = \min_{u(t) \in \Omega(u)} [\varepsilon \{\lambda(t) f_x[X(t) - x(t)] + f_u[U(t) - u(t)]\} + \\ + S[x(t+\varepsilon), t+\varepsilon]]. \quad (8)$$

В выражении (8) нетрудно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Разлагая, как и в § 6 этой главы $S[x(t+\varepsilon), t+\varepsilon]$ в ряд Тэйлора, находим

$$S[x_1(t+\varepsilon), \dots, x_n(t+\varepsilon), t+\varepsilon] = \\ = S[x(t), t] + \frac{\partial S[x(t), t]}{\partial t} \varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{\partial S[x(t), t]}{\partial x_k} [x_k(t+\varepsilon) - x_k(t)]. \quad (9)$$

Здесь мы пренебрегли высшими степенями ε . Далее полагаем, опять-таки пренебрегая высшими степенями ε ,

$$x_k(t+\varepsilon) = x_k(t) + \varepsilon x'_k(t), \quad (10)$$

где $x'_k(t)$ — производная от x_k по времени. Положим

$$S_t = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad S_{x_k} = \frac{\partial S}{\partial x_k}; \quad (11)$$

тогда из (9) — (11) следует

$$S[x(t+\varepsilon), t+\varepsilon] = S[x(t), t] + \varepsilon S_t[x(t), t] + \varepsilon \sum_{k=1}^n x'_k(t) S_{x_k}[x(t), t]. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7), находим

$$S[x(t), t] = \min_{u(t) \in \Omega(u)} \{ \varepsilon \{ \lambda(t) f_x[X(t) - x(t)] + f_u[U(t) - u(t)] \} + \\ + S[x(t), t] + \varepsilon S_t[x(t), t] + \varepsilon \sum_{k=1}^n x'_k(t) S_{x_k}[x(t), t] \}. \quad (13)$$

Вычеркнув в обеих частях равенства $S[x(t), t]$, а затем сократив оставшееся равенство на ε , приходим к необходимому условию оптимального управления в виде равенства

$$\min_{u(t) \in \Omega(u)} \{ \lambda(t) f_x[X(t) - x(t)] + f_u[U(t) - u(t)] + \\ + S_t[x(t), t] + \sum_{k=1}^n x'_k(t) S_{x_k}[x(t), t] \} = 0. \quad (14)$$

Ниже рассмотрен простейший пример, когда объект характеризуется лишь одной координатой x , а импульсная переходная функция $g(t, \tau)$ имеет вид

$$g(t, \tau) = g_1 \exp \left\{ -\frac{t-\tau}{T_1} \right\}. \quad (15)$$

Таким образом, в качестве объекта фигурирует инерционное звено с коэффициентом усиления $T_1 g_1$, постоянной времени T_1 и уравнением движения

$$x'(t) + \frac{1}{T_1} x(t) = g_1 u(t). \quad (16)$$

Пусть далее $f_x(v) = f_u(v) = v^2$. Тогда условие (14) принимает вид

$$\min_{u(t) \in \Omega(u)} \{ \lambda(t) [X(t) - x(t)]^2 + [U(t) - u(t)]^2 + \\ + S_t[x(t), t] + x'(t) S_x[x(t), t] \} = 0. \quad (17)$$

Если подставить значение $x'(t)$ из (16) в (17), то получим равенство

$$\min_{u(t) \in \Omega(u)} \left\{ \lambda(t) [X(t) - x(t)]^2 + [U(t) - u(t)]^2 + \right. \\ \left. + S_t[x(t), t] + \left[g_1 u(t) - \frac{1}{T_1} x(t) \right] S_x[x(t), t] \right\} = 0. \quad (18)$$

Предположим, что ограничения, наложенные на управление $u(t)$, отсутствуют и допустимо изменение $u(t)$ в пределах $-\infty < u(t) < \infty$. Тогда можно найти минимум левой части выражения (18), дифференцируя ее по u и приравнявая производную нулю:

$$-2[U(t) - u(t)] + g_1 S_x[x(t), t] = 0. \quad (19)$$

Отсюда находим оптимальное управление

$$u^*(t) = U(t) - \frac{g_1}{2} S_x[x(t), t]. \quad (20)$$

Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$ будет найдено, если станет известной функция $S[x(t), t]$. Подставив найденное значение (20) в (18), получаем равенство

$$\lambda(t)[X(t) - x(t)]^2 + S_t[x(t), t] + \left[g_1 U(t) - \frac{g_1^2}{2} S_x[x(t), t] - \frac{1}{T_1} x(t) \right] S_x[x(t), t] - \left\{ \frac{g_1}{2} S_x[x(t), t] \right\}^2 = 0, \quad (21)$$

представляющее собой дифференциальное уравнение в частных производных. Нужно найти решение уравнения (21), удовлетворяющее граничному условию (5).

Наивысшая степень $x(t)$, встречающаяся в уравнении (21), равна двум, так как в первом члене левой части уравнения имеется слагаемое $\lambda(t)x^2(t)$. Это наводит на мысль о том, что при разложении функции $S[x(t), t]$ в ряд по x достаточно также ограничиться второй степенью. Положим поэтому

$$S[x(t), t] = K(t) + K_1(t)x(t) + K_{11}(t)[x(t)]^2, \quad (22)$$

где $K(t)$, $K_1(t)$ и $K_{11}(t)$ — некоторые функции времени t , которые требуется определить путем подстановки предполагаемого решения (22) в уравнение (21). Предварительно найдем $S_t[x(t), t]$ и $S_x[x(t), t]$, дифференцируя (22) по t и x соответственно. Находим

$$S_t[x(t), t] = K'(t) + K_1'(t)x(t) + K_{11}'(t)[x(t)]^2. \quad (23)$$

(Здесь, как и ранее, штрих означает производную по t от соответствующей функции.) Далее

$$S_x[x(t), t] = K_1(t) + 2K_{11}(t)x(t). \quad (24)$$

Теперь подставляем (22), (23) и (24) в (21) и группируем слагаемые с нулевой, первой и второй степенями $x(t)$:

$$\left\{ K'(t) + g_1 K_1(t) U(t) - \left[\frac{g_1}{2} K_1(t) \right]^2 + \lambda(t)[X(t)]^2 \right\} + x(t) \left\{ K_1'(t) + 2g_1 K_{11}(t) U(t) - \frac{1}{T_1} K_1(t) - \frac{g_1^2}{2} K_1(t) K_{11}(t) - 2\lambda(t) X(t) \right\} + [x(t)]^2 \left\{ K_{11}'(t) - \frac{2}{T_1} K_{11}(t) - [g_1 K_{11}(t)]^2 + \lambda(t) \right\} = 0. \quad (25)$$

Так как уравнение (25) должно быть справедливым для всех значений $x(t)$, коэффициенты при нулевой, первой и второй степенях $x(t)$ должны быть равны нулю. Отсюда получаются три обыкновенных дифференциальных уравнения для функций $K(t)$, $K_1(t)$ и $K_{11}(t)$:

$$K'(t) = \left[\frac{g_1}{2} K_1(t) \right]^2 - g_1 K_1(t) U(t) - \lambda(t)[X(t)]^2, \quad (26)$$

$$K_1'(t) = \left[\frac{1}{T_1} + \frac{g_1^2}{2} K_{11}(t) \right] K_1(t) - 2g_1 K_{11}(t) U(t) + 2\lambda(t) X(t) \quad (27)$$

и

$$K_{11}'(t) = \frac{2}{T_1} K_{11}(t) + [g_1 K_{11}(t)]^2 - \lambda(t). \quad (28)$$

Для решения этих дифференциальных уравнений нужно еще знать начальные или граничные значения функций $K(t)$, $K_1(t)$ и $K_{11}(t)$. Из сравнения условий (5) с равенством (22) видно, что (5) удовлетворится при любых конечных $x(t+T)$ лишь в том случае, если положить коэффициенты $K_1(t+T)$ и $K_{11}(t+T)$ равными нулю

$$K_1(t+T) = K_{11}(t+T) = 0. \quad (29)$$

Но тогда, согласно (5), осуществляется и равенство

$$K(t + T) = 0. \tag{30}$$

Таким образом, решения уравнения (26)—(28) должны удовлетворять трем граничным условиям (29) и (30).

Когда функции $K(t)$, $K_1(t)$ и $K_{11}(t)$ найдены, то из (20) и (24) нетрудно найти оптимальный закон управления $u^*(t)$. Подставляя S_x из (24) в (20), получаем

$$u^*(t) = \left[U(t) - \frac{g_1}{2} K_1(t) \right] - g_1 K_{11}(t) x(t). \tag{31}$$

Итак, $u^*(t)$ зависит от времени t не только явно через посредство функций $K_1(t)$, $K_{11}(t)$ и $U(t)$, но также и неявно через посредство $x(t)$.

Чтобы решить уравнения (26)—(28) при граничных условиях (29) и (30), можно обратить счет времени, считая новым началом момент $(t + T)$. Тогда условия (29) и (30) окажутся «начальными» и потребуются решение обычной задачи Коши при заданных начальных условиях. Решение этих уравнений в конечной форме невозможно, так как они нелинейны. Однако решение может быть получено обычным путем с помощью вычислительных устройств.

На рис. 14.27 изображена структурная схема управляющего устройства, построенная согласно уравнению (31). На этой схеме показаны функции $K_1(t)$ и $K_{11}(t)$, подходящие извне от вычислительных устройств, решающих уравнения (26)—(28). Функция $U(t)$ также подается извне. Функция $K_1(t)$, пройдя через усилительное звено с коэффициентом усиления $-\frac{g_1}{2}$, дает слагаемое $-\frac{g_1}{2} K_1(t)$. Это слагаемое, складываясь в суммирующем звене Σ с $U(t)$, дает первый член правой части (31), содержащийся в квадратной скобке. Второй член выражения (31) поступает от выхода множительного звена МЗ. Выходная величина последнего равна произведению входных величин $K_{11}(t)$ и $-x(t)$, умноженному на постоянный коэффициент g_1 . Сомножитель $-x(t)$ получается на выходе инвертора -1 (усилителя с коэффициентом усиления, равным «минус один»); на вход инвертора поступает $x(t)$ с выхода управляемого объекта O .

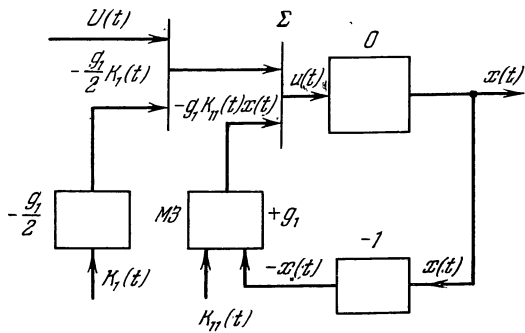


Рис. 14.27.

Метод, рассмотренный выше, можно обобщить на системы более высокого порядка.

Метод динамического программирования является весьма общим способом формулировки и подготовки к приближенному решению самых разнообразных задач. Например, для объекта, уравнение которого имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \tag{32}$$

с начальным условием

$$(x)_{t=0} = x^{(0)}, \tag{33}$$

можно поставить задачу нахождения оптимального управления $u^* \in \Omega(u)$ минимизирующего максимума отклонения $x(t)$ от некоторой известной функции $x^*(t)$ на интервале $0 \leq t \leq T$, где T фиксировано. В данном случае

критерий оптимальности имеет вид

$$Q = \max_{0 \leq t \leq T} |x^*(t) - x(t)|. \quad (34)$$

Требуется так выбрать $u(t)$ на этом интервале, чтобы обеспечить условие

$$\min Q = \min_{u(t) \in \Omega(u)} \max_{0 \leq t \leq T} |x^*(t) - x(t)| = S(x^{(0)}). \quad (35)$$

Буквой S обозначено минимальное значение Q , зависящее от начального условия $x^{(0)}$. Управление $u(t)$ принадлежит некоторой допустимой области $\Omega(u)$.

Для решения задачи сначала дискретизируем ее, приближенно заменив дифференциальное уравнение (32) уравнением в конечных разностях

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k)\Delta, \quad (36)$$

где

$$x_k = x(k\Delta), \quad u_k = u(k\Delta), \quad \Delta = \frac{T}{N} \quad (37)$$

и N — общее число элементарных дискретных интервалов, на которые разбивается промежуток времени T . Теперь вместо (34) можно написать

$$Q = \max_{k=0, 1, \dots, N} |x_k^* - x_k|, \quad (38)$$

а выражение (35) заменится соотношением

$$S(x^{(0)}) = \min Q = \min_{u \in \Omega(u)} \max_{j=0, 1, \dots, N-1} |x_k^* - x_k|. \quad (39)$$

Рассмотрим сначала один лишь момент $t = N$. Для этого момента при $x = x^{(0)}$ величина

$$S_N(x_N) = \min Q_N = |x_N^* - x_N|, \quad (40)$$

и изменение управления $u(t)$ вообще не влияет на величину Q_N . Перемещаясь назад от момента $t = N\Delta$ к $t = N-1$, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} Q_{N-1} &= \max_{k=N-1, N} |x_k^* - x_k| = \max \{|x_{N-1}^* - x_{N-1}|, |x_N - x_N|\} = \\ &= \max \{|x_{N-1}^* - x_{N-1}|, |x_N^* - x_{N-1} - f(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta|\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь x_N заменено согласно (36). Обозначение $\max \{a, b\}$ означает: максимальная из двух величин a и b . При заданной величине x_{N-1} величина Q_{N-1} зависит от u_{N-1} . Подберем значение $u_{N-1} \in \Omega(u)$ так, чтобы минимизировать Q_{N-1} . Тогда получим и оптимальное управление u_{N-1}^* , зависящее от x_{N-1} , x_{N-1}^* , x_N^* , и минимальное значение Q_{N-1}

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega(u)} Q_{N-1}. \quad (42)$$

При этом может оказаться, что изменение u_{N-1} в некотором диапазоне вообще не влияет на (41), коль скоро первая из величин внутри фигурной скобки (41) превалирует над второй. Отсюда следует, что оптимальное управление определяется неоднозначно. Условимся всегда определять значение u , минимизирующее второй член в скобке (41).

Перейдем теперь к моменту времени $t = (N-2)\Delta$. Рассматривая интервал от $t = (N-2)\Delta$ до $t = N\Delta$, получаем

$$\begin{aligned} Q_{N-2} &= \max_{k=N-2, N-1, N} |x_k^* - x_k| = \\ &= \max \{|x_{N-2}^* - x_{N-2}|, \max \{|x_{N-1}^* - x_{N-1}|, |x_N^* - x_N|\}\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Управление u_{N-1} влияет лишь на второй член внутри общей фигурной скобки в этом выражении. Если его выбирать всегда согласно ранее найденному закону (42), то

$$\begin{aligned} S_{N-2}(x_{N-2}) &= \min_{u_{N-1}, u_{N-2} \in \Omega(u)} Q_{N-2} = \\ &= \min_{u_{N-2} \in \Omega(u)} \{ |x_{N-2}^* - x_{N-2}|, S_{N-1}(x_{N-1}) \} = \\ &= \min_{u_{N-2} \in \Omega(u)} \max \{ |x_{N-2}^* - x_{N-2}|, S_{N-1}(x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2}) \Delta) \} = \\ &= \max \{ |x_{N-2}^* - x_{N-2}|, \min_{u_{N-2} \in \Omega(u)} S_{N-1}(x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2}) \Delta) \}. \end{aligned} \quad (44)$$

Произведя операцию минимизации правой части (44), найдем оптимальное управление u_{N-2}^* и т. д. Повторение этого рассуждения приводит к рекуррентной последовательности для вычисления функций $S_{N-k}(x_{N-k})$, причем попутно вычисляются и оптимальные управления u_{N-k} :

$$S_{N-k}(x_{N-k}) = \max \{ |x_{N-k}^* - x_{N-k}|, \min_{u_{N-k} \in \Omega(u)} S_{N-k+1}(x_{N-k} + f(x_{N-k}, u_{N-k}) \Delta) \}. \quad (45)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, N$. Так как функция $S_N(x_N)$ известна (см. (40)), то можно в принципе найти всю совокупность S_{N-k} вплоть до $S(x_0) = S_0(x^{(0)})$. Соответствующее управление u^* и является искомым.

Проведение этой процедуры возможно лишь в численном виде; оно не требует особенно громоздких вычислений.

С помощью динамического программирования можно находить также оптимальное управление при нефиксированном времени T процесса, в том числе и управление, оптимальное по быстродействию. Пусть, например, уравнение объекта имеет вид

$$a_1 x + \sum_{i=1}^n a_{i+1} \frac{d^i x}{dt^i} = u(t). \quad (46)$$

Положим

$$x = x_1, \quad \frac{d^i x}{dt^i} = x_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (47)$$

Тогда уравнение (46) можно заменить совокупностью n уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \frac{dx_n}{dt} &= - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{n+1}} x_i + \frac{u}{a_{n+1}} = - \sum_{i=1}^n b_i x_i + v, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где

$$b_i = \frac{a_i}{a_{n+1}}, \quad \frac{u}{a_{n+1}} = v. \quad (49)$$

Пусть v ограничено по модулю

$$|v| \leq V. \quad (50)$$

Найдем оптимальное управление $v(t)$, при котором минимально время T перемещения изображающей точки от начальных значений $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, которым соответствует вектор $x^{(0)}$, до начала координат в фазовом пространстве.

Заменим уравнения (48) уравнениями в конечных разностях, положив $T = N\Delta t$, $x_i^{(k)} = x_i(k\Delta t)$, $v^{(k)} = v(k\Delta t)$:

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \Delta t \cdot x_{i+1}^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ x_n^{(k+1)} &= x_n^{(k)} - \Delta t \sum_{i=1}^n b_i x_i^{(k)} + \Delta t \cdot v^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Найдем отношение для минимального времени попадания внутрь сферы малого радиуса δ при $k = N$

$$\sum_{i=1}^n [x_i^{(N)}]^2 \leq \delta^2. \quad (52)$$

Минимальное время T попадания в эту сферу зависит лишь от начальных условий, т. е. от вектора $x^{(0)}$. Поэтому $T = T(x^{(0)})$. Переход из начального положения на один шаг занимает время Δt , после чего вектор $x^{(0)}$ будет заменен вектором $x^{(1)}$, зависящим от $v^{(0)}$. Минимальное время попадания из точки $x^{(1)}$ в малую сферу равно $T(x^{(1)})$, а общее время составляет $\Delta t + T(x^{(1)})$. В зависимости от того, каков первый шаг, общее время может быть различным. Очевидно, что

$$T(x^{(0)}) = \min_{|v^{(0)}| \leq v} [\Delta t + T(x^{(1)})] = \Delta t + \min_{|v^{(0)}| \leq v} [T(x^{(1)})]. \quad (53)$$

Если развернуть, согласно (51), выражение для $x^{(1)}$, то получим $T(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \Delta t + \min_{|v^{(0)}| \leq v} T(x_1^{(0)} + \Delta t x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)} + \Delta t \cdot x_n^{(0)}, x_n^{(0)} - \Delta t \sum_{i=1}^n b_i x_i^{(0)} + \Delta t \cdot v^{(0)})$. (54)

Допустим, что T — дифференцируемая функция переменных $x_i^{(0)}$. Тогда

$$T(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \Delta t + \min_{|v^{(0)}| \leq v} \left\{ T(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial T}{\partial x_i^{(0)}} \Delta t \cdot x_{i+1}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_n^{(0)}} \left(-\Delta t \sum_{i=1}^n b_i x_i^{(0)} + \Delta t v^{(0)} \right) \right\} + o(\Delta t). \quad (55)$$

Лишь последний член в фигурной скобке зависит от $v^{(0)}$. Следовательно, только к нему имеет отношение минимизация по $v^{(0)}$. Уничтожим в обеих частях равенства (55) слагаемое $T(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, а затем, разделив на Δt и устремив Δt к нулю, придем к выражению

$$0 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial T}{\partial x_i^{(0)}} x_{i+1}^{(0)} + \min_{|v^{(0)}| \leq v} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_n^{(0)}} \left(-\sum_{i=1}^n b_i x_i^{(0)} + v^{(0)} \right) \right\}. \quad (56)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ значение δ , входящее в (52), также следует устремить к нулю. Заменив значения $x_i^{(0)}$ текущими значениями x_i , которые мы всегда вправе принять за начальные, получим дифференциальное уравнение в частных производных для определения $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$0 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial T}{\partial x_i} x_{i+1} - \frac{\partial T}{\partial x_n} \sum_{i=1}^n b_i x_i + \min_{|v| \leq v} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_n} v \right\}. \quad (57)$$

Сопоставив (50) и (57), нетрудно заключить, что минимум последнего слагаемого в правой части (57) получается при соблюдении условия

$$v^* = -V \operatorname{sign} \frac{\partial T}{\partial x_n}. \quad (58)$$

Это и есть закон оптимального управления. Из него следует, что значения $v(t)$ следует выбирать всегда на границах допустимой области

$$v^* = \pm V_*. \quad (59)$$

Подставив (58) в (57), получим уравнение

$$0 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial T}{\partial x_i} x_{i+1} - \frac{\partial T}{\partial x_n} \sum_{i=1}^n b_i x_i - V \left| \frac{\partial T}{\partial x_n} \right|. \quad (60)$$

Решение уравнения (60) должно удовлетворять граничному условию

$$T(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad (61)$$

поскольку при начальном значении $x^{(0)} = 0$ время, требуемое для попадания в начало координат, очевидно, равно нулю.

Чтобы получить оптимальное управление v^* в функции x , необходимо, как видно из (58), найти функцию $T(x)$, т. е. решить уравнение в частных производных (60).

Решение в явном виде может быть получено лишь для простейших случаев. Рассмотрим в качестве примера уравнения объекта

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u \quad (62)$$

с ограничением

$$|u| \leq 1. \quad (63)$$

Требуется за минимальное время перейти из точки (x_1^0, x_2^0) в начало координат.

Тогда уравнение (57) при замене v на u принимает вид

$$0 = 1 + \frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 + \min_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_2} u \right\}, \quad (64)$$

а закон оптимального управления (57) можно записать следующим образом:

$$u^* = -\operatorname{sign} \frac{\partial T}{\partial x_2}. \quad (65)$$

Согласно (59) и (63) оптимальное управление принимает лишь значения ± 1 . Поэтому фазовую плоскость (x_1, x_2) можно разбить на две области (рис. 14.23): область L_2 , в которой $u = -1$, и область L_2'' , в которой $u = +1$. Для первой из этих областей получаем уравнение (64), в котором вместо u стоит -1 :

$$0 = 1 + \frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T}{\partial x_2}. \quad (66)$$

Для области L_2'' уравнение (64) принимает вид

$$0 = 1 + \frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T}{\partial x_2}. \quad (67)$$

Для решения этих уравнений нужно знать граничные условия на какой-либо линии. Например, можно проинтегрировать уравнения (62) при изменении $u(t)$ по «прямоугольной» кривой $u = \pm 1$ и, таким образом, получить $T(x_1)$ при $x_2 = 0$.

Можно показать, что решение уравнения (66) имеет вид

$$T = 2 \sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 + x_1 + x_2}, \quad (68)$$

а решение для уравнения (67)

$$T = 2 \sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1 - x_2}. \quad (69)$$

При подстановке (65) в (64) получаем уравнение

$$0 = 1 + \frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|. \quad (70)$$

Каждая из формул (68) и (69) в отдельности не является решением уравнения (70). Это решение можно записать в виде

$$T = \begin{cases} 2 \sqrt{\frac{1}{2} x_1^2 + x_1 + x_2}, & x \in L'_2, \\ 2 \sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1 - x_2}, & x \in L''_2. \end{cases} \quad (71)$$

Найдем область L''_2 , в пределах которой справедлива формула (69). Чтобы это сделать, подставим частные производные от правой части (69), т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1}}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1}} - 1, \quad (72)$$

в формулу (69), после чего это выражение примет вид

$$\left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1}} \right) - \left| \frac{x_2}{\sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1}} - 1 \right| = 0. \quad (73)$$

Это равенство справедливо при условии

$$1 - \frac{x_2}{\sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1}} \geq 0 \quad (74)$$

или

$$\sqrt{\frac{1}{2} x_2^2 - x_1} \geq x_2. \quad (75)$$

Последнее условие справедливо при

$$x_2 > 0, \quad x_1 + \frac{x_2^2}{2} \leq 0 \quad (76)$$

либо при

$$x_2 < 0, \quad \frac{1}{2} x_2^2 - x_1 \geq 0, \quad (77)$$

поскольку подкоренное выражение не может быть отрицательным. Из условий (76) и (77) следует, что граница области L''_2 характеризуется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_2 > 0, \quad x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, \\ x_2 < 0, \quad x_1 = -\frac{x_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

или, в более компактном виде, равенством

$$x_1 = \frac{-x_2^2}{2} \text{sign } x_2. \tag{79}$$

Та же граница может быть найдена и для L_2 , если воспользоваться формулой (58).

Из (72) и (65) видно, что в области L_2' величина $u = -1$. Так как линия переключения дается равенством (79), то из сравнения (76), (77) и (79) видно, что оптимальный закон переключения имеет вид

$$u^* = -\text{sign} \left(x_1 + \frac{x_2^2}{2} \text{sign } x_2 \right). \tag{80}$$

Конечно, для данного примера метод фазовой плоскости гораздо проще, чем метод динамического программирования, который приведен здесь в качестве иллюстрации.

Метод динамического программирования можно применять не только к системам с квантованием по времени (дискретно-непрерывным системам), в которых допускаются любые уровни величин, но и к чисто дискретным системам, в которых имеет место не только квантование по времени, но и квантование по уровню. В таких системах значения величин не могут быть любыми; они должны принадлежать конечному множеству дозволённых уровней.

Обычно принимают, что система может находиться в i -й момент времени в состоянии s_i . Имеется конечное множество возможных состояний системы, обозначаемых q_1, \dots, q_m или просто $1, \dots, m$. Состояние s_i может быть одним из чисел q_1, \dots, q_m , что может обозначаться, как указано выше, одним из чисел $1, \dots, m$. Внешнее воздействие u_i также может принимать лишь одно из нескольких возможных значений. Примем для простоты, что имеются лишь два возможных значения u_i , а именно 1 и 0. Закон изменения состояний дается зависимостью

$$s_{i+1} = f(s_i, u_i) \tag{81}$$

Часто принимают также, что выходная величина x_i есть дискретная функция от s_i и u_i :

$$x_i = \psi(s_i, u_i). \tag{82}$$

Ниже для упрощения выходная величина x_i отождествляется с s_i , т. е. зависимость (82) имеет вид

$$x_i = s_i.$$

Тогда дискретная система характеризуется лишь одной функцией двух переменных x_i и u_i :

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \tag{83}$$

которую получаем, подставив $s_i = x_i$ в выражение (81).

Зависимость (83) часто изображают в виде таблицы либо диаграммы. Пусть, например, система может быть в четырех возможных состояниях, обозначенных кружками на рис. 14.28 (номера состояний отмечены цифрами внутри кружков). Переход из одного состояния в другое обозначается на диаграмме линией со стрелкой, ведущей от состояния s_i к состоянию s_{i+1} . Так как этот переход зависит от значения $u_i = 0, 1$, то возле линии следует

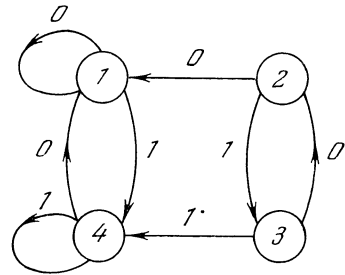


Рис. 14.28.

отметить, при каком из двух возможных значений u_i происходит данный переход. Например, из рис. 14.28 видно, что когда $s_i = 2$ и $u_i = 1$, то переход происходит в состояние $s_{i+1} = 3$; если же $s_i = 2$, а $u_i = 0$, то стрелка ведет от $s_i = 2$ к состоянию $s_{i+1} = 1$.

Возможны случаи, когда состояние системы не меняется. Например, если $s_i = 4$ и $u_i = 1$, то состояние остается прежним, так как стрелка ведет к тому же состоянию $s_{i+1} = 4$. Аналогичное явление наблюдается при $s_i = 1$ и $u_i = 0$.

Ту же зависимость можно представить в виде таблицы с двумя входами u_i и s_i , причем в каждом квадрате таблицы написано соответствующее значение s_{i+1} .

Таблица, соответствующая диаграмме рис. 14.28, имеет вид

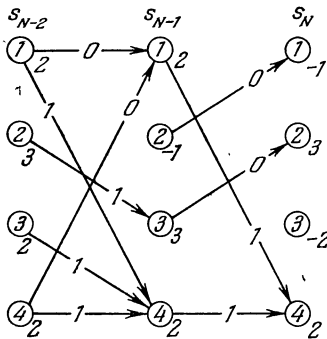
$s_i \backslash u_i$	1	2	3	4
0	1	1	2	1
1	4	3	4	4

Например, при $s_i = 3$ и $u_i = 0$ получаем $s_{i+1} = 2$.

Пусть в начальный момент времени $i = 0$ система находится в некотором начальном состоянии s_0 . Допустим далее, что процесс рассматривается в дискретные моменты времени $i = 0, 1, \dots, N$, где N фиксировано. Требуется найти такую последовательность управляющих воздействий u_0, u_1, \dots, u_N , чтобы максимизировать некоторую заданную функцию $\varphi(s_N)$ от конечного состояния s_N . Это типичная для теории оптимальных систем задача, в которой критерий оптимальности

$$Q = \varphi(s_N). \tag{84}$$

Очевидно, требуется задать функцию $\varphi(s_N)$ в виде таблицы. Пусть, например, функция φ характеризуется для рассматриваемого примера следующей таблицей.



s_N	1	2	3	4
$\varphi(s_N)$	-1	3	-2	2

Рис. 14.29.

В дискретных системах метод динамического программирования предстает в наиболее чистом и «обнаженном» виде. Его применение удобно сочетать с графическим построением (рис. 14.29).

Начертим сначала для момента N один под другим кружки, изображающие четыре возможных состояния s_N . Они изображены в правом столбце на рис. 14.29. Второй столбец справа изображает четыре возможных состояния s_{N-1} в момент времени $N - 1$; следующий столбец, расположенный еще левее, изображает состояния s_{N-2} в момент времени $N - 2$ и т. д. На рис. 14.29 изображены лишь три столбца; в общем случае следует изобразить $N + 1$ столбцов, соответствующих состояниям s_N, s_{N-1}, \dots, s_0 .

Начнем с крайнего правого столбца. Возле состояний 1, 2, 3, 4 написаны соответствующие значения $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4)$, взятые из таблицы

для $\varphi(s_N)$. Произведем «попятное» движение от s_N к s_{N-1} . Пусть, например, состояние системы $s_{N-1} = 1$. Пользуясь таблицей либо диаграммой рис. 14.28, найдем такое значение u_{N-1} , чтобы, стартуя от $s_{N-1} = 1$, получить наибольшее возможное значение $\varphi(s_N)$. При $u_{N-1} = 1$ получаем $s_N = 4$, которому соответствует значение $\varphi(s_N)$, равное 2. Между тем, если положить $u_{N-1} = 0$, то получим $s_N = 1$ и $\varphi(s_N) = -1$. Отсюда следует, что оптимальным значением u_{N-1} оказывается 1, причем в этом случае совершается переход от $s_{N-1} = 1$ к $s_N = 4$. Этот переход, совершаемый при оптимальном управлении, изобразим в виде линии, идущей от $s_{N-1} = 1$ к $s_N = 4$. На линии нанесена цифра 1, соответствующая оптимальному управлению $u_{N-1}^* = 1$. Точно таким же образом проводим и другие линии между состояниями s_{N-1} и s_N , соответствующие оптимальным управлениям при различных «начальных» значениях s_{N-1} равных 1, 2, 3, 4. Эти линии, с нанесенными на них значениями оптимальных управляющих воздействий, соединяют каждое из возможных состояний s_{N-1} с каким-либо из состояний s_N . Тем самым обеспечивается возможность получения максимального значения критерия оптимальности $\varphi(s_N)$, соответствующего каждому из «начальных» значений s_{N-1} . Например, если $s_{N-1} = 4$, то с помощью оптимального управления $u_{N-1}^* = 1$ совершается переход в то же положение $s_N = 4$, вследствие чего функция $\varphi(s_N)$ принимает значение $\varphi(s_N) = 2$. Это значение критерия — максимальное при данном «начальном» условии $s_{N-1} = 4$ — записано возле состояния s_{N-1} в виде цифры 2. Соответствующие цифры следует записать возле каждого из значений $s_{N-1} = 1, 2, 3, 4$. Далее проведем совершенно аналогичную операцию попятного движения от s_{N-1} к s_{N-2} и получим на том же рисунке линии, соединяющие каждое из возможных состояний $s_{N-2} = 1, 2, 3, 4$ с каким-либо из состояний s_{N-1} при оптимальном управляющем воздействии u_{N-2}^* . Около «начальных» состояний s_{N-2} следует записать соответствующие им максимальные достижимые значения $\varphi(s_N)$. Повторяя эту процедуру для s_{N-3}, s_{N-4} и т. д., дойдем в конце концов до s_0 и получим оптимальные стратегии, соответствующие любым возможным начальным условиям.

Например, при $N = 2$ значение $s_{N-2} = s_0$. Из рис. 14.29 видно, что в этом случае при начальном положении $s_0 = 3$ следует выбрать оптимальное управление $u_{N-2} = u_0 = 1$, которое приведет в $s_{N-1} = s_1 = 3$, затем $u_{N-1} = u_1 = 0$, отчего система придет в положение $s_N = s_2 = 2$ и критерий $\varphi(s_N)$ примет максимально возможное значение $Q = 3$.

Оптимальная стратегия не обязательно однозначна. Например, из положения $s_{N-2} = 1$ можно двигаться по-разному, полагая u_{N-2} равным либо нулю, либо единице. Если в первом из этих случаев положить $u_{N-1} = 1$, а во втором — также $u_{N-1} = 1$, то придем к состоянию $s_N = 4$ и получим максимально возможное значение $\varphi(s_N) = 2$. Такой же случай неоднозначности имеет место при $s_{N-2} = 4$. Здесь существуют две оптимальные стратегии с равными значениями критерия Q :

$$u_{N-2} = 1, u_{N-1} = 1 \quad \text{и} \quad u_{N-2} = 0, u_{N-1} = 1.$$

Эти приемы могут быть обобщены на более сложные случаи, когда, например, последовательности управляющих воздействий u_0, \dots, u_N не могут быть любыми, а ограничены добавочными условиями.

§ 9. Применение принципа максимума

С помощью принципа максимума часто оказывается возможным выявить характерные черты оптимальных процессов в непрерывных системах. Рассмотрим, например, задачу о минимуме времени переходного процесса для объекта, уравнения которого имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + b_i u \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + bu. \quad (2)$$

Здесь u — единственное управляющее воздействие, а x , f и b — векторы, причем

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n). \quad (3)$$

Функции f_i считаем дифференцируемыми по своим аргументам.

Пусть ограничение, наложенное на управляющее воздействие, имеет вид

$$|u| \leq 1. \quad (4)$$

Составляем сопряженные уравнения

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \psi_\alpha. \quad (5)$$

Далее формируем функцию

$$H = \left\langle \frac{dx}{dt}, \psi \right\rangle = \langle f(x) + bu, \psi \rangle = \langle f(x), \psi \rangle + u \langle b, \psi \rangle. \quad (6)$$

Так как лишь второе слагаемое в этом выражении зависит от u , то очевидно*), что максимум H будет получен с учетом (4) при

$$u = \text{sign} \langle b, \psi \rangle = \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(t). \quad (7)$$

Чтобы получить закон управления в явном виде, необходимо найти значения ψ_i для каждой точки x фазового пространства. Однако уже из формулы (7) можно сделать важное заключение о том, что для рассматриваемого класса задач управляющее воздействие должно находиться на границе области возможных значений (4). Ниже показано, что для других классов задач это условие может и не выполняться.

В важном частном случае линейного объекта уравнения (4) принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Пусть характеристическое уравнение для свободного движения объекта (при $u = 0$) имеет только отрицательные действительные корни. Сопряженные уравнения (5) можно в данном случае переписать в виде

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha i} \psi_\alpha. \quad (9)$$

Эти уравнения оказываются сопряженными уравнениям (8) объекта. Известно, что в том случае, когда корни основного уравнения действительны и отрицательны, это свойство сохраняется и для корней характеристического уравнения сопряженной системы (9). Следовательно, решения $\psi_i(t)$ имеют вид

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{p_j t}, \quad (10)$$

*) Здесь предполагается, что случай $\langle b, \psi(t) \rangle = 0$ не имеет места, и следовательно, отсутствуют так называемые особые управления.

где p_j действительны и отрицательны ^{*}), а постоянные C_{ij} определяются из решения граничной задачи. Поэтому и правая часть (7) представляет собой сумму экспонент

$$u = \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{p_j t} = \text{sign} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_i C_{ij} \right) e^{p_j t} = \text{sign} \sum_{j=1}^n D_j e^{p_j t}, \quad (11)$$

где

$$D_j = \sum_{i=1}^n b_i C_{ij}. \quad (12)$$

Однако выражение $\sum_{j=1}^n D_j e^{p_j t}$ переходит через нуль не более чем $(n - 1)$ раз и имеет, следовательно, не более n интервалов постоянства знака. Поэтому и управляющее воздействие u имеет в общем случае n интервалов постоянства знака. Таким образом, доказана теорема об n интервалах. (Напомним, что идея доказательства приводилась ранее в § 7.)

Управляющее воздействие не всегда, однако, должно находиться на границах допустимой области. Рассмотрим, например, задачу для объекта с уравнением (8) и ограничениями (4) в том случае, когда критерий оптимальности имеет вид

$$Q = \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j^2 + cu^2 \right) dt. \quad (13)$$

При этом считаем, что в формуле (13) все a_i , а также c положительны.

Положим

$$\left. \begin{aligned} f_0(x_1, \dots, x_n, u) &= \sum_{j=1}^n a_j x_j^2 + cu^2, \\ f_i(x_1, \dots, x_n, u) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Добавим к координатам x_1, \dots, x_n объекта еще одну координату x_0 с уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \dots, x_n, u) \quad (15)$$

и начальным условием $x_0(0) = 0$. Тогда величина Q , согласно (13), становится равной пределу $x_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Составим систему сопряженных уравнений

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \psi_\alpha = - 2a_i \psi_0 x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Теперь можно написать выражение для функции

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha f_\alpha(x_1, \dots, x_n, u) = \\ &= \psi_0 \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + cu^2 \right) + \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \right). \end{aligned} \quad (17)$$

^{*}) Не теряя общности можно считать корни p_j различными.

В правой части (17) величина u содержится в выражении

$$H_1 = c\psi_0(t)u^2(t) + u(t) \sum_{i=1}^n \psi_i b_i. \quad (18)$$

Поэтому условие максимума H совпадает с условием

$$\begin{aligned} \max_{|u| \leq 1} H_1 &= \max_{|u| \leq 1} \left[c\psi_0(t)u^2 + u \sum_{i=1}^n \psi_i b_i \right] = \\ &= \max_{|u| \leq 1} \left\{ c\psi_0(t) \left[u + \frac{1}{2c\psi_0} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(t) \right]^2 - \frac{1}{4c\psi_0} \left[\sum_{i=1}^n b_i \psi_i(t) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ввиду справедливости первого из условий (16) величина ψ_0 постоянна. Так как ее значение может быть избрано любым отрицательным числом, то положим

$$\psi_0 = -1. \quad (20)$$

Подставив это выражение в (19), нетрудно видеть, что максимум выражения в фигурных скобках будет достигнут тогда, когда первое, отрицательное слагаемое обратится в нуль, если это возможно, либо примет наименьшее по абсолютной величине значение. Нетрудно видеть, что величина

$$\left[u - \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(t) \right]^2 \quad (21)$$

минимальна по абсолютной величине, если при условии $|u| \leq 1$ избрать значение u в виде

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(t), & \text{если } \left| \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(t) \right| \leq 1, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \geq 1, \\ -1, & \text{если } \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \leq -1. \end{cases} \quad (22)$$

Значения $\psi_i(t)$ окажутся известными, если будут решены сопряженные уравнения (16). Но для этого нужно предварительно найти начальные значения $\psi_i(0)$.

Допустим сначала, что $u(t)$ не достигает своих граничных значений. Тогда, подставив верхнее из выражений (22) вместо $u(t)$ в уравнения (8) и (16), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \frac{b_i}{2c} \sum_{j=1}^n b_j \psi_j, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= 2a_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} \psi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Эта система уравнений должна быть решена при начальных условиях $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$, а также при граничных (конечных) условиях

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0. \quad (24)$$

Необходимо подобрать $\psi_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) таким образом, чтобы удовлетворялись как начальные, так и конечные условия для $x_i(t)$.

Можно показать, что искомые значения $\psi_i(0)$ связаны с $x_j(0)$ линейными зависимостями

$$\psi_i(0) = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (25)$$

где γ_{ij} — константы. Так как любой момент можно принять за начальный, то и вообще в этой задаче для любого момента времени

$$u^* = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad (26)$$

где

$$k_i = \sum_{j=1}^n b_j \gamma_{ji}. \quad (27)$$

В том случае, когда изображающая точка находится в области ограниченной гиперплоскостями

$$\frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n k_i x_i = +1, \quad \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n k_i x_i = -1, \quad (28)$$

справедливо соотношение (26). В общем случае эффективное решение рассматриваемой задачи синтеза представляет существенные трудности.

Рассмотрим построение оптимальной по быстродействию системы следающего привода с двумя параметрами управления. Объектом управления служит двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. На этот двигатель поступают два управляющих воздействия. Одно из них — напряжение U_1 , подаваемое на вход электромагнитного усилителя ЭМУ, питающего цепь якоря двигателя. Другим управляющим воздействием является напряжение U_2 , подаваемое на обмотку возбуждения двигателя. Управление производится одновременно обоими воздействиями U_1 и U_2 .

Схема силовой части следающего привода показана на рис. 14.30. Здесь I_y — ток обмотки возбуждения ЭМУ, обладающей постоянной времени T_1 . Ток обмотки возбуждения двигателя, обладающей постоянной времени T_2 , обозначен I_B . Постоянную времени поперечной обмотки ЭМУ обозначим T_3 , а э.д.с. ЭМУ обозначим E_r . Далее, пусть $R_{\text{я}}$ — общее сопротивление цепи якорей ЭМУ и двигателя, Ω — скорость вала, $E_d = c\Omega I_B$ — противо-э.д.с. двигателя, $I_{\text{я}}$ — ток якоря, $M_d = k_3 I_{\text{я}} = I_B$ — вращающий момент, J — момент инерции, приведенной к валу двигателя, X — угловое положение выходного вала. Индуктивностью в цепи якорей, реакцией якоря и моментом сопротивления на валу двигателя пренебрегаем. Тогда уравнения схемы рис. 14.30 можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \zeta \Omega, & J \frac{d\Omega}{dt} &= k_3 I_{\text{я}} I_B, \\ T_1 \frac{dI_y}{dt} + I_y &= k_1 U_1, & T_2 \frac{dI_B}{dt} + I_B &= k_2 U_2, \\ T_3 \frac{dE_r}{dt} + E_r &= k_4 I_y, & E_r - c\Omega I_B &= I_{\text{я}} R_{\text{я}}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

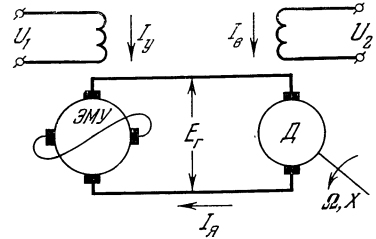


Рис. 14.30.

Здесь ζ , k_1 , k_2 , k_3 , k_4 — постоянные коэффициенты усиления звеньев. Если $T_1 \leq T_3$, то после преобразований и приведения к относительному времени можно записать систему уравнений объекта, изображенного на рис. 14.30 в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \zeta_0 \omega, & \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{1-\mu} i_B e_\Gamma - \omega i_B^2, \\ \frac{de_\Gamma}{dt} &= -\beta_1 e_\Gamma + \beta_1 u_1, & \frac{di_B}{dt} &= -\beta_2 i_B + \beta_2 u_2. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

В этих уравнениях обозначено

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{X}{X_{\max}}, & e_\Gamma &= \frac{E_\Gamma}{E_{\Gamma \max}}, & i_B &= \frac{I_B}{I_{B \max}}, \\ \omega &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{ном}}}, & u_1 &= \frac{U_1}{U_{1 \max}}, & u_2 &= \frac{U_2}{U_{2 \max}}, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{T_{\text{эм}}}{T_1}, & \beta_2 &= \frac{T_{\text{эм}}}{T_2}, \\ T_{\text{эм}} &= \frac{J R_{\text{я}}}{k_3 c I_{\text{в}}^2 \max}, & \eta &= \frac{E_{\Gamma \max}}{E_{\Gamma \text{ном}}} > 1, & \mu &= \frac{I_{\text{я ном}} R_{\text{я}}}{E_{\Gamma \text{ном}}} < 1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

и индексы «мах» и «ном» стоят соответственно при максимальном и номинальном значениях величины.

В уравнениях (30) сохранено обозначение t для безразмерного времени; за базисную величину принята электромеханическая постоянная времени $T_{\text{эм}}$. Напряжение U_1 не может превысить по модулю максимально допустимое значение. Напряжение U_2 , кроме того, нельзя чрезмерно уменьшать во избежание разгона при малом моменте нагрузки. Поэтому на u_1 и u_2 накладываются ограничения

$$|u_1| \leq 1; \quad \lambda \leq u_2 \leq 1, \quad (33)$$

где $\lambda = \text{const} > 0$.

Рассмотрим переходный процесс отработки начального рассогласования, эквивалентного скачку A_0 задающего воздействия, где A_0 — произвольная постоянная. Введем новые координаты, связанные со старыми координатами равенствами

$$x_1 = A_0 - x, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt} = -\zeta_0 \omega, \quad x_3 = -e_\Gamma, \quad x_4 = i_B. \quad (34)$$

Подставив эти выражения в (30), приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_3 x_4 - x_2 x_4^2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\beta_1 x_3 - \beta_1 u_1, & \frac{dx_4}{dt} &= -\beta_2 x_4 + \beta_2 u_2, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$\alpha = \frac{\eta}{1-\mu}. \quad (36)$$

Пусть заданы начальные значения $x_i(0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Требуется найти оптимальные управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, переводящие в течение минимального времени изображающую точку в нулевое положение. Последнее представляет собой точку с координатами $(0, 0, 0, \gamma)$, где $\lambda < \gamma < 1$ — некоторое фиксированное число.

Уравнения (35) в векторном виде могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + Bu, \quad (37)$$

где x и f — векторы, составляющие которых указаны в (35); вектор u имеет составляющие u_1 и u_2 , а B — прямоугольная матрица

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{vmatrix}. \quad (38)$$

Составим систему сопряженных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= 0, & \frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1 + x_4^2\psi_2, \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= -\alpha x_4\psi_2 + \beta_1\psi_3, \\ \frac{d\psi_4}{dt} &= (2x_2x_4 - \alpha x_3)\psi_2 + \beta_2\psi_4. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Сформируем функцию

$$H = \left\langle \psi, \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle \psi, f(x) + Bu \rangle = \langle \psi f(x) \rangle + \langle \psi, Bu \rangle. \quad (40)$$

Лишь второе слагаемое в этом выражении зависит от u . Выпишем его в развернутом виде:

$$\langle \psi, Bu \rangle = -\psi_3(t)\beta_1 u_1 + \psi_4(t)\beta_2 u_2. \quad (41)$$

Отсюда с учетом (33) видно, что максимум H имеет место при следующих условиях:

$$u_1 = -\text{sign } \psi_3(t) \quad (42)$$

и

$$u_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi_4(t) > 0, \\ \lambda & \text{при } \psi_4(t) < 0. \end{cases} \quad (43)$$

Итак, если оптимальное управление существует, то оно состоит из нескольких интервалов, в каждом из которых воздействия u_1 и u_2 поддерживаются на одном из своих предельных значений.

Чтобы найти закон оптимального управления в явном виде, необходимо знать вектор ψ в каждой точке x оптимальной траектории. В общем случае решение соответствующей граничной задачи возможно лишь с помощью вычислительных устройств. Но в некоторых случаях задачу синтеза оптимальной системы можно решить и аналитически. Рассмотрим простейший случай, когда постоянные времени T_2 — поперечной обмотки генератора, T_3 — обмотки возбуждения двигателя пренебрежимо малы по сравнению с $T_{эм}$ — электромеханической постоянной времени. Тогда $\beta_1 = \infty$ и $\beta_2 = \infty$ и уравнения объекта принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -u_2^2 x_2 - \alpha u_1 u_2. \quad (44)$$

Ограничения, накладываемые на u_1 и u_2 , по-прежнему выражаются условиями (33). Сопряженная система запишется теперь в виде

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + u_2^2 \psi_2. \quad (45)$$

Сформируем функцию

$$H = \langle \psi, f(x) \rangle = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-u_2^2 x_2 - \alpha u_1 u_2). \quad (46)$$

Решения уравнения (45) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_{10} = \text{const}, \\ \psi_2(t) &= \exp \left\{ \int_0^t u_2^2(\tau) d\tau \right\} \left[\psi_{20} - \int_0^t \psi_{10} \exp \left\{ - \int_0^s u_2^2(s) ds \right\} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Из последнего выражения видно, что $\psi_2(t)$ может изменять знак не более чем один раз.

В формуле (46) для функции H величины u_2 и α всегда положительны. Поэтому подбор u_1 , максимизирующего H , приводит к выражению

$$u_1 = - \text{sign } \psi_2(t). \quad (48)$$

Чтобы выяснить закон управления для $u_2(t)$, перепишем формулу (46) в следующем виде:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 \left[-x_2 \left(u_2 + \frac{\alpha u_1}{2x_2} \right)^2 + \frac{\alpha^2 u_1^2}{4x_2} \right]. \quad (49)$$

Возможны два случая:

а) $\psi_2(t) < 0$, $u_1 = +1$. При $x_2 > 0$ величина u_2 должна также принимать свое наибольшее значение, равное единице. Если же $x_2 < 0$, то, как видно из (49), следует выбирать для максимизации H

$$u_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right| \geq 1, \\ \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right|, & \text{если } \lambda \leq \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right| \leq 1, \\ \lambda, & \text{если } \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right| \leq \lambda. \end{cases} \quad (50)$$

б) $\psi_2(t) > 0$, $u_1 = -1$. Тогда, чтобы максимизировать H , следует выбирать при $x_2 > 0$

$$u_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\alpha}{2x_2} \geq 1, \\ \frac{\alpha}{2x_2}, & \text{если } \lambda \leq \frac{\alpha}{2x_2} \leq 1, \\ \lambda, & \text{если } \frac{\alpha}{2x_2} \leq \lambda. \end{cases} \quad (51)$$

Если же $x_2 < 0$, то величина $\left(u_2 + \frac{2u_1}{2x_2} \right)$ должна принимать наибольшее значение, а для этого нужно положить $u_2 = 1$.

Поскольку $\psi_2(t)$ изменяет знак не более одного раза, то и $u_1(t)$ состоит, вообще говоря, из двух интервалов; в одном из них $u_1 = +1$, а в другом $u_1 = -1$. Кривая $u_2(t)$ состоит из четырех интервалов. Три из них соответствуют первому интервалу u_1 , а четвертый — второму интервалу u_1 . В первом интервале u_2 максимально в соответствии с первой строкой (50). Во втором интервале u_2 , непрерывно изменяясь, пробегает отрезок $(\lambda, 1)$ (см. вторые строки формул (50) и (51)). В третьем интервале $u_2 = \lambda$. Наконец, на последнем участке воздействия u_2 должно принимать опять максимальное значение, чтобы в конце его, при $x_1 = x_2 = 0$, функция H была максимальна.

Оптимальные траектории на фазовой плоскости показаны на рис. 14.31, а примерные кривые $u_1(t)$, $u_2(t)$, $x_1(t)$ — на рис. 14.32. К началу координат O подходят лишь две оптимальные траектории. Одна из них, обозначен-

ная L_1 , соответствует значениям $u_1 = -1, u_2 = +1$. Другая траектория, обозначенная L'_1 , соответствует значениям $u_1 = +1, u_2 = +1$. К этим траекториям подходят траектории семейств L_2 и L'_2 . Рассмотрим, например, типичную траекторию $M_0M_1M_2M_3$, ведущую к L'_1 . Вся область слева от кривой переключения L_1, L'_1 для u_1 соответствует значению $u_1 = -1$, а вся область справа от этой кривой — значению $u_1 = +1$. Таким образом, процесс x_1 происходит с одним переключением воздействия u_1 , как это

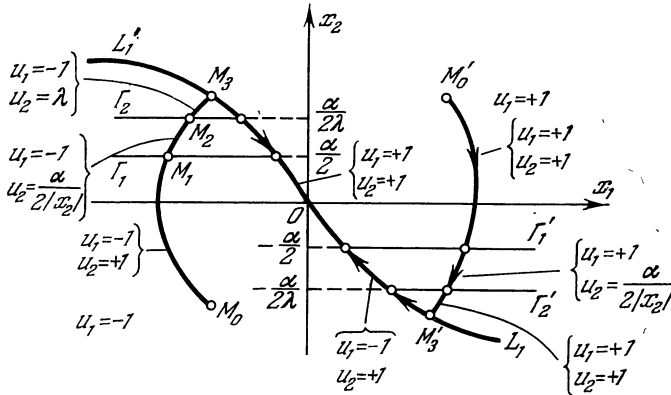


Рис. 14.31.

изображено на рис. 14.32. Что касается u_2 , то процесс изменения этого воздействия более сложен. Проведем в области $u_1 = -1$ две горизонтальные прямые Γ_1 (прямая $x_2 = \frac{\alpha}{2}$) и Γ_2 (прямая $x_2 = \frac{\alpha}{2\lambda}$). Аналогичные прямые в области $u_1 = +1$ обозначены Γ'_1 (прямая $x_2 = -\frac{\alpha}{2}$) и Γ'_2 (прямая $x_2 = -\frac{\alpha}{2\lambda}$).

Если начальная точка M_0 находится в третьем квадранте, то она движется по оптимальной траектории $M_0M_1M_2M_3O$. На участке $M_0M_1M_2M_3$ этой траектории значение u_1 равно -1 , а на участке M_3O $u_1 = +1$. На участке M_0M_1 величина $u_2 = 1$, на участке M_1M_2 , в зоне между прямыми Γ_1 и Γ_2 величина u_2 непрерывно изменяется, повинаясь закону $u_2 = \frac{\alpha}{2|x_2|}$. В точке M_2 значение u_2 становится равным λ и поддерживается на этом уровне на участке M_2M_3 . В точке M_3 скачком меняется не только u_1 , но и u_2 ; последнее становится равным $+1$ и поддерживается на этом уровне на всем участке M_3O .

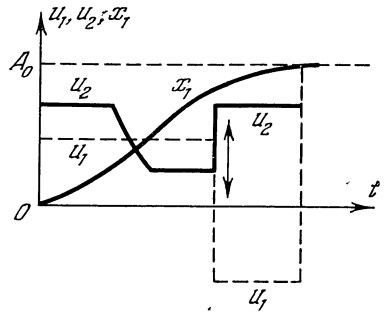


Рис. 14.32.

Аналогично происходит изменение u_1 и u_2 на оптимальной траектории $M'_0M'_1M'_2M'_3O$, исходящей из точки M'_0 , которая расположена в первом квадранте. Разница лишь в том, что на участке $M'_0M'_1M'_2M'_3$ величина $u_1 = +1$, а на участке M'_3O значение $u_1 = -1$. Величина u_2 меняется таким же образом, как и для траектории $M_0M_1M_2M_3O$. Примерные графики $x_1(t), u_2(t)$ и $u_1(t)$ — последний из них показан пунктиром и в ином масштабе, чем u_2 — изображены на рис. 14.32. Они соответствуют траектории $M'_0M'_1M'_2M'_3O$. Из рис. 14.32 видно, что кривая $u_2(t)$ состоит из четырех, а кривая $u_1(t)$ — из двух интервалов.

§ 10. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами

Предыдущие параграфы настоящей главы были посвящены изучению задач оптимального управления такими системами, движения которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такие объекты называются объектами с сосредоточенными параметрами. Такое описание объектов, как и всякое описание, является в той или иной степени идеализацией, т. е. является упрощением, которое позволяет найти с удовлетворяющей точностью решение соответствующей задачи оптимизации. Однако такая идеализация не всегда приемлема. На практике чрезвычайно часто встречаются такие управляемые объекты, описание которых невозможно с достаточной степенью точности втиснуть в рамки обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие объекты описываются дифференциальными уравнениями с частными производными, интегральными уравнениями, а подчас более сложными функциональными соотношениями. Это так называемые *объекты с распределенными параметрами*. Постановка задач оптимального управления системами с распределенными параметрами была дана А. Я. Лернером и вторым автором этой книги. Ими же были получены первые результаты по решению этих задач. В таких объектах управляемые величины, да и сами управляющие воздействия могут меняться не только во времени, но определенным образом распределяться в пространстве: одномерном, двумерном, трехмерном и т. д. Состояние таких объектов описывается уже не набором n координат $x_1(t), \dots, x_n(t)$, зависящих только от времени, а функциями распределения $Q_1(P), Q_2(P), \dots, Q_n(P)$, где P меняется в некоторой области многомерного пространства. Аналогично управляющие воздействия в таких объектах описываются, вообще говоря, функциями $u_1(s), \dots, u_r(s)$, определенными в некоторой многомерной пространственно-временной области.

С такого рода объектами приходится иметь дело в самых различных отраслях промышленности и техники.

К таким объектам с распределенными параметрами относятся широкий класс печей в металлургической и машиностроительной промышленности (доменные печи, методические печи и нагревательные колодцы для нагрева металла под прокатку, печи для термообработки металла, индукционные печи и т. д.). В химической промышленности объектами с распределенными параметрами являются ректификационные колонны для разделения смесей, химические реакторы, абсорберы и т. д.

При управлении подобными объектами возникает задача создания оптимальных управляющих систем в том или ином смысле, по тому или иному критерию. В этом случае минимизируемый функционал зависит также от пространственных переменных, от функции состояния и управляющих воздействий, также распределенных в пространстве. Приведем примеры постановок задач оптимального управления.

Опишем процесс теплообмена между неподвижной греющей средой проходной нагревательной печи, характеризуемой функцией распределения температуры

$$u = u(y, t) \quad (0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

и материалом, движущимся в положительном направлении оси y со скоростью v , зависящей от времени t ($v(t) \geq 0, 0 \leq t \leq T$). Состояние нагреваемого материала характеризуется функцией распределения его температуры по толщине материала, по длине печи и во времени

$$Q = Q(x, y, t) \quad (0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T). \quad (2)$$

Теплофизические параметры материала определяются заданием функции $b = b(y, t) > 0$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$.

Процесс внутреннего теплообмена описывается уравнениями

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - bv \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=s} = \alpha [u(y, t) - Q(t, y, t)], \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (5)$$

При этом материал входит в греющую зону с условием

$$Q(x, 0, t) = Q_r(x, t) \quad (0 \leq x \leq s, 0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

где $Q_r(x, t)$ — заданная функция.

Если нагреваемый материал можно считать в теплотехническом отношении «тонким» телом*), то распределение температуры материала будет описываться функцией $Q(y, t)$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq t \leq T$ и уравнения теплообмена (3) — (5) значительно упростятся и примут вид

$$b \frac{\partial Q}{\partial t} + bv \frac{\partial Q}{\partial y} + Q = u(y, t) \quad (7)$$

с граничным условием при входе в греющую зону

$$Q(0, t) = Q_r(t), \quad (8)$$

где $Q_r(t)$ — также известная функция, характеризующая изменение температуры во времени входящего в зону обработки материала.

Подвигаясь через зону обработки, материал нагревается. Если функции $b(y, t)$ и $v(t)$ известны, то каждой конкретной функции $u(y, t)$ при данном начальном условии $Q(x, y, 0) = Q_0(x, y)$ соответствует определенная функция распределения температуры материала $Q(x, y, t)$. При этом, очевидно, температура материала на выходе из печи в точке $y = L$ зависит от характера изменения распределения температуры в печи за время пребывания данного элемента материала в печи. Кроме того, температура материала на выходе из печи зависит от характера изменения скорости $v(t)$ за тот же интервал времени. Эта температура также зависит от толщины слоя материала s и его теплофизических свойств, таких, как теплопроводность, теплоемкость, удельный вес и т. д. Таким образом, температура материала на выходе из печи зависит от всей «истории» нагрева от момента входа до момента выхода данного сечения материала из печи. Задача управления таким объектом состоит в том, чтобы стабилизировать температуру материала на выходе из печи. Это требуется, например, при прокатке, когда в печи нагреваются металлические заготовки (слябы, блюмы и т. д.). При этом обычными возмущающими факторами являются изменение скорости продвижения металла в печи, связанное с изменением темпа работы прокатного стана, и изменение толщины заготовок и марок стали. В этом случае управляющее воздействие, которым является распределение температуры вдоль рабочего пространства печи $u(y, t)$, должно зависеть от характера распределения температуры металла $Q(x, y, t)$. Задача состоит в том, чтобы создать такую систему управления

*) Критерий Био равен $Bi = \frac{\alpha s}{\lambda} \leq 0,25$.

заданием регуляторов температур зон печи, чтобы уклонение средней температуры заготовки, выходящей из печи

$$Q(y, t) = \frac{1}{s} \int_0^s Q(x, y, t) dx \quad (0 \leq y \leq L, 0 \leq t \leq T) \quad (9)$$

при $y = L$, от температуры, заданной технологической инструкцией, было наименьшим в каком-то определенном смысле. Например, часто требуется, чтобы функционал

$$J = \int_0^T |Q^*(t) - Q(L, t)|^\gamma dt, \quad \gamma \geq 1, \quad (10)$$

достигал своего минимального значения, где $Q^*(t)$ — заданная программа температуры выходящего из печи металла. Заметим тут же, что при $\gamma \rightarrow \infty$ мы получим минимаксную оценку уклонения, т. е.

$$J = \max_{[0, T]} |Q^*(t) - Q(L, t)|. \quad (11)$$

В задачах такого типа оптимальное изменение распределения температуры печи $u(y, t)$ определяется в каждый момент времени t уже не конечным набором числовых величин, как это имеет место в системах с сосредоточенными параметрами, а целым распределением температуры металла в пространстве и во времени. *Таким образом, в системах с распределенными параметрами управляющие воздействия связаны с распределениями, характеризующими состояние управляемого объекта, посредством функциональных соотношений.*

В рассматриваемом процессе нагрева заготовок задача управления может усложняться тем обстоятельством, что проходная печь может, вообще говоря, иметь несколько зон подогрева металла. Например, это имеет место в методических нагревательных печах и в печах скоростного нагрева. Температура в каждой зоне печи стабилизируется с помощью своего регулятора. На управляющие воздействия, которыми в данном случае являются температуры отдельных зон печи, обычно накладываются ограничивающие условия, вытекающие из технических требований. Температуры в печи не должны или не могут выходить за определенные допустимые пределы, обусловленные стойкостью огнеупорной футеровки $A_1 \leq u(y, t) \leq A_2$. Часто соседние зоны печи оказывают сильное влияние друг на друга. Это означает, что перепад температур по длине печи не может превышать некоторое определенное значение, т. е. $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq A_3$. Далее могут быть наложены ограничивающие условия на температуру в разных точках нагреваемой заготовки металла. Например, чтобы избежать оплавления поверхности или обезуглероживания, нельзя превышать температуру поверхности заготовки сверх определенного значения, т. е. $Q(x, y, t) \leq A_4$. Также бывают недопустимы большие градиенты температурного поля внутри самой заготовки $\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \leq A_5$, что диктуется требованиями термообработки. Наличие внутренних термонапряжений, которые связаны с температурным полем через соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных, также накладывает определенные ограничения на допустимые управляющие воздействия. Более точно аналогичная задача будет сформулирована ниже, когда будет рассматриваться постановка задачи оптимального нагрева массивных тел.

Все эти ограничения сильно затрудняют решение задачи оптимального управления, делают математическую постановку задачи неклассической.

К числу объектов, задача управления которыми аналогична описанной выше, относятся также проходные многозонные печи скоростного нагрева, проходные многозонные (в том числе и вращающиеся) печи для сушки и обжига сыпучих материалов, различного рода теплообменные аппараты, агломерационные ленты, установки для нанесения покрытий и многие другие промышленные объекты.

Для поточных производственных процессов характерным является направленное продвижение потока обрабатываемых материалов через ряд последовательно распределенных в пространстве зон обработки. Управляющие воздействия (например, температуры различных зон проходных нагревательных печей) также распределены в пространстве, и воздействие на обрабатываемый материал производится сразу по всей длине зоны обработки.

В отличие от периодических процессов, где задача управления состоит в выработке и реализации требуемой программы изменения *во времени* воздействия на обрабатываемый материал, при поточном методе производства основная задача управления состоит в выборе и поддержании такой *формы* распределенного *в пространстве* воздействия на движущийся поток материала, при котором обеспечивается требуемое изменение его состояния.

Необходимость управления в этом случае обуславливается тем, что имеются различного рода возмущающие воздействия: изменение производительности агрегата, изменение скорости продвижения материалов через зоны обработки, изменение начальных значений некоторых важных параметров на входе в зону обработки, наконец, изменение требуемого состояния на выходе из зоны обработки. Например, для проходных нагревательных и методических печей такого рода возмущающих воздействий могут служить изменение начальной температуры входящей в печь заготовки металла, изменение ее размеров или марки стали; для сушильных агрегатов возмущениями могут являться изменение начальной влажности, пористости материала и т. д.

Для таких объектов задача оптимального управления состоит в определении таких управляющих воздействий, совместимых с наложенными на них ограничениями, при которых отклонение интересующего нас параметра на выходе из заданной зоны обработки (или в другой заданной точке) от желаемого значения в каком-либо определенном смысле было бы минимальным. Если имеются дополнительные условия, наложенные на параметры обрабатываемого материала, то и они должны выполняться.

Рациональное управление такими важными агрегатами металлургической и химической промышленности, как доменные и мартеновские печи, коксовые батареи, агломерационные ленты, дистилляционные колонны, установки для разделения смесей и др., должно производиться с учетом распределения температур и концентраций соответствующих материалов в пространстве. Управляющие воздействия в этом случае также представляют собой определенные пространственные распределения, изменяющиеся со временем.

В металлургическом производстве большое значение придается быстро-му и качественному нагреву металла в колодцах и камерных печах. Особенно часто встречаются следующие две ситуации, в которых возникает необходимость решения задач оптимального управления нагревом металла.

Работа прокатного стана или другого оборудования, предназначенного для горячей обработки металла давлением (например, прессы, кузнечные молоты), целиком зависит от темпа работы нагревательного отделения. В этом случае требуется так *оптимально* управлять нагревом, чтобы получить заданное распределение температуры по всему объему металла за минимальное время. Задачи такого рода можно назвать *задачами оптимального по быстродействию нагрева металла*.

Если время ведения процесса нагрева является фиксированным (например, когда темп работы печи определяется темпом работы прокатного стана), то требуется организовать такое *оптимальное* управление нагревом, чтобы за данное время получить наилучшее качество нагрева. Решению этой задачи посвящена одна из глав этой книги. Здесь рассмотрим один пример постановки задачи такого рода. Пусть распределение температуры $Q = Q(x, t)$ по толщине тела x ($-s \leq x \leq s$) во времени t ($0 \leq t \leq T$) подчиняется дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (уравнение теплопроводности Фурье)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (12)$$

где a — коэффициент температуропроводности. Краевые и начальные условия имеют вид

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=s} = \alpha_1 [u_1(t) - Q(s, t)], \quad (13)$$

$$- \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=-s} = \alpha_2 [u_2(t) - Q(-s, t)], \quad (14)$$

$$Q(x, 0) = Q_0(x). \quad (15)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности; α_1 и α_2 — коэффициенты теплообмена между греющей средой и металлом; $Q_0(x)$ — заданная функция начального распределения температуры тела по толщине.

На управляющие функции, характеризующие температуры греющих сред $u_1(t)$, $u_2(t)$ на отрезке времени t ($0 \leq t \leq T$), накладываются в общем случае дополнительные ограничения

$$A_1 \leq u_1(t) \leq A_2, \quad (16)$$

$$A_3 \leq u_2(t) \leq A_4. \quad (17)$$

Эта задача более подробно рассматривается в гл. XV и XVI.

При недопустимости резких перепадов температур внутри нагреваемого тела вводится ограничение на градиент температурного поля внутри тела

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \leq A_5. \quad (18)$$

В процессе нагрева заготовки существенным также является ограничение времени прогрева тела. Это условие можно записать следующим образом:

$$T \leq A_6, \quad (19)$$

где A_6 — наибольшая допустимая продолжительность прогрева тела. Во всех условиях (16) — (19) величины A_1, \dots, A_6 являются заданными и постоянными.

Задачу оптимального нагрева слитков в этом случае можно сформулировать следующим образом: найти такой закон изменения температуры греющей среды (например, нагревательного колодца или печи) во времени, чтобы за фиксированное время обеспечить минимальное отклонение в каком-либо определенном смысле распределения температуры заготовки от заданного распределения.

Для описанного выше процесса теплообмена требуется определить функции управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ ($0 \leq t \leq T$) таким образом, чтобы при выполнении условий (16) — (19) функционал

$$I = \int_{-s}^s |Q^*(x) - Q(x, T)|^\gamma dx, \quad \gamma \geq 1, \quad (20)$$

характеризующий уклонение истинного распределения температуры $Q(x, t)$ по всей толщине тела $-s \leq x \leq s$ в момент времени $t = T$ от заданного распределения $Q^*(x)$, был минимальным.

Иногда задача может ставиться несколько иным образом: найти такой закон изменения температуры греющей среды во времени, чтобы за минимальное время получить отклонение распределения температуры заготовки от некоторого заданного распределения, не превышающее допустимого значения. При этом часто требуется, чтобы были приняты во внимание дополнительные факторы: ограниченность температуры печи и ограниченность скорости ее изменения во времени, а также ограниченность допустимой температуры поверхности слитка, перепадов температур внутри слитка и связанных с ними температурных напряжений.

В следующем параграфе мы рассмотрим один довольно общий метод, позволяющий решать подобного рода задачи.

§ 11. Принцип максимума для одного класса систем с распределенными параметрами

В этом параграфе будет рассмотрено одно обобщение принципа максимума для систем с сосредоточенными параметрами на один частный, но довольно широкий класс систем с распределенными параметрами, движение которых описывается интегральными соотношениями (примеры подобных систем описываются в конце параграфа). Мы докажем теорему о принципе максимума для этих систем.

Итак, пусть D_1 и D_2 — две области соответственно в p и s -мерных евклидовых пространствах. Состояние системы описывается функцией $q = Q(P)$, $P \in D_1$. Под действием управления $u = U(S)$, $S \in D_2$, принимающего свое значение из замкнутого множества w , состояние системы меняется по закону, который имеет вид

$$Q(P) = \int_{D_2} K(P, S, U(S)) dS, \quad (1)$$

где функция $K(P, S, u)$ непрерывна по $S \in D_2$ и $u \in w$ равномерно по $P \in D_1$.

Требуется найти такое кусочно-непрерывное управление $u = U(P)$ ($P \in D_2$, $u \in w$), которое в силу равенства (1) минимизирует следующий функционал:

$$I = \int_{D_1} K^0(S, Q(S)) dS, \quad (2)$$

где функция $K^0(S, q)$ имеет непрерывную частную производную по q .

Пусть $u = U(S)$ ($S \in D_2$, $u \in w$) есть оптимальное управление, а $q = Q(P)$, $P \in D_1$, — соответствующее ему в силу формулы (1) оптимальное состояние, минимизирующее функционал (2).

В области D_2 выберем точку R и возьмем область $\delta_\varepsilon \in D_2$ ($R \in \delta_\varepsilon$), объем которой равен ε , $\varepsilon \geq 0$. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ область δ_ε стягивается к точке R , которая принадлежит δ_ε при любом $\varepsilon \geq 0$. Определим семейство функций, зависящее от параметра ε :

$$U_\varepsilon(P) = \begin{cases} U(P) & \text{при } P \notin \delta_\varepsilon, \quad P \in D_2, \\ \tilde{u} & \text{при } P \in \delta_\varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

где \tilde{u} — произвольная точка множества w .

Нам придется воспользоваться следующим свойством кусочно-непрерывных функций. Пусть $h(P)$ — функция от $P \in D_2$, а R — точка непрерывности функции $h(P)$; и пусть эта точка R окружена маленькой

областью δ_ε объема ε , $\varepsilon > 0$, такой, что δ_ε стягивается к точке R , когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_{\delta_\varepsilon} h(P) dP = \varepsilon h(R) + \dots, \tag{4}$$

где точками обозначены величины более высокого порядка, чем ε . Точку R , в которой выполняется свойство (4), будем называть *правильной точкой*

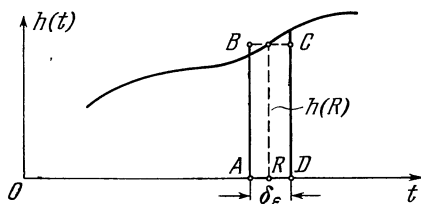


Рис. 14.33.

функции $h(P)$. «Почти все» точки области D_2 являются правильными. Исключение составляют точки разрыва функции $h(P)$, которых, по предположению, будет конечное число. Это свойство можно проиллюстрировать на функции $h(t)$ одной переменной t (рис. 14.33). Это свойство говорит о том, что площадь, расположенная под кривой $h(t)$ на участке δ_ε длины ε (отрезок AD), приблизительно (с точностью до величин второго порядка малости по ε)

равна площади прямоугольника $ABCD$, в котором стороны $AB = CD = h(R)$, где R — некоторая точка внутри отрезка δ_ε .

Тогда под действием нового проварьированного управления (3) функция $Q(P)$ получит приращение $\Delta Q(P)$, определяемое формулой

$$\begin{aligned} \Delta Q(P) &= \int_{D_2} K(P, S, U_\varepsilon(P)) dP - \int_{D_2} K(P, S, U(P)) dP = \\ &= \int_{\delta_\varepsilon} [K(P, S, U_\varepsilon(P)) - K(P, S, U(S))] dS. \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством кусочно-непрерывных функций (4), последнее равенство можно записать в виде

$$\Delta Q(P) = \varepsilon [K(P, R, \tilde{u}) - K(P, R, U(R))] + o(\varepsilon), \tag{5}$$

где $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $P \in D_1$.

Так как при $u = U(S)$ и $q = Q(P)$ функционал (2) достигает минимума, то можно написать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{D_1} K^0(S, Q(S) + \Delta Q(S)) dS - \int_{D_1} K^0(S, Q(S)) dS = \\ = \int_{D_1} [K^0(S, Q(S) + \Delta Q(S)) - K^0(S, Q(S))] dS \geq 0. \end{aligned}$$

Подставляя в последнюю формулу значение $\Delta Q(S)$, определяемое формулой (5), и разлагая в ряд по параметру $\varepsilon > 0$, получим

$$\varepsilon \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} [K(S, R, \tilde{u}) - K(S, R, U(R))] + o_1(\varepsilon) \geq 0, \tag{6}$$

где в силу условия (4)

$$\frac{o_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Предполагая, что интеграл

$$\int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, u) dS \quad (7)$$

почти для всех $R \in D_2$ не равен нулю (необходимым условием выполнения этого требования является неравенство нулю $\frac{\partial K^0}{\partial q}(S, Q(S))$ при оптимальной функции $q = Q(S)$), деля на $\varepsilon \geq 0$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} [K(S, R, \tilde{u}) - K(S, R, U(R))] dS \geq 0, \quad (8)$$

откуда имеем

$$\int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, \tilde{u}) dS \geq \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, U(R)) dS. \quad (9)$$

Последнее неравенство означает, что функция

$$\Pi(R, u) = - \int_{D_1} \frac{\partial K^0(S, Q(S))}{\partial q} K(S, R, u) dS \quad (10)$$

на оптимальном управлении $u = U(P)$ ($P \in D_2$, $u \in w$) при $q = Q(S)$, $S \in D$, достигает максимума по переменной u , меняющейся на множестве w , почти для всех $R \in D_2$. Итак, доказана следующая

Т е о р е м а. Для того чтобы управление $u = U(P)$, $P \in D_2$, $u \in w$, и соответствующее ему в силу формулы (1) состояние $q = Q(P)$, $P \in D_1$, реализовывали минимум функционала (2), необходимо, чтобы при $u = U(P)$ функция $\Pi(R, u)$, определенная равенством (10), достигала максимума по аргументу u , меняющемуся на множестве w , почти для всех $R \in D_2$.

Совершенно аналогично можно доказать справедливость этой теоремы в случае, когда состояние управляемой системы есть вектор $Q(P) = (Q_1(P), \dots, Q_n(P))$ и управление также есть вектор $U(P) = (U_1(P), \dots, U_r(P))$, принимающий свои значения из некоторого замкнутого множества w из r -мерного евклидова пространства E_r .

В этом случае $K(P, S, u)$ будет n -мерным вектором

$$K(P, S, u) = (K_1(P, S, u), \dots, K_n(P, S, u)).$$

Перейдем теперь к выводу интегральных уравнений, определяющих оптимальное управление, для одного часто встречающегося типа задач оптимального управления.

Рассмотрим управляемую систему, состояние которой в каждый момент времени t , $0 \leq t \leq T$, описывается функцией распределения $Q(x, t)$ ($-S \leq x \leq S$). Под действием управляющего воздействия $u = u(t)$, стесненного дополнительными условиями $A_1 \leq u \leq A_2$, состояние управляемой системы меняется по закону

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где $K(x, t, \tau)$ — заданная функция, $-s \leq x \leq s$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Широкий класс объектов с распределенными параметрами может быть описан посредством соотношения (11). Функция $K(x, t, \tau)$ во многих случаях имеет

смысл функции влияния, импульсной переходной функции или функции Грина.

Для системы (11) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления.

Пусть задана функция $Q^*(x)$ ($-s \leq x \leq s$), которая характеризует желаемое или требуемое состояние, а время T фиксировано. Нужно найти такое допустимое (т. е. $A_1 \leq u(t) \leq A_2$) во все время переходного процесса управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, чтобы в момент времени T отклонение функции $Q(x, T)$ от функции $Q^*(x)$ было наименьшим. За меру такого отклонения примем интеграл

$$I = \int_{-s}^s |Q^*(x) - Q(x, T)|^\gamma dx, \quad \gamma \geq 1. \quad (12)$$

Предположим, что функция $Q^*(x)$ и время T таковы, что ни при каком допустимом управлении $u = u(t)$ ($0 \leq t \leq T$, $A_1 \leq u \leq A_2$) невозможно выполнение равенства

$$Q^*(x) \equiv Q(x, t) \quad (-s \leq x \leq s, 0 \leq t \leq T). \quad (13)$$

Функция (10) в этом случае примет следующий вид:

$\Pi(t, u) =$

$$= \int_{-s}^s \gamma |Q^*(x) - Q(x, T)|^{\gamma-1} \operatorname{sign}(Q^*(x) - Q(x, T)) K(x, T, t) u dx. \quad (14)$$

Отсюда видно, что аргумент $u(t)$ входит в определение функции $\Pi(t, u)$ линейным образом.

Предположим, что подынтегральное выражение в равенстве (14) на оптимальном состоянии $Q(x, T)$ обращается в нуль только лишь на множестве меры нуль значений времени t ($0 \leq t \leq T$). Тогда максимум функции (14) при фиксированном t ($0 \leq t \leq T$) достигается при условии

$$u(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \operatorname{sign} \left[\int_{-s}^s |Q^*(x) - Q(x, T)|^{\gamma-1} \operatorname{sign}(Q^*(x) - Q(x, T)) K(x, T, t) dx \right] \quad (0 \leq t \leq T). \quad (15)$$

Таким образом, если в уравнение (15) подставить вместо функции $Q(x, t)$ ее выражение через управление $u(t)$ по формуле (11), то получится интегральное уравнение, которому удовлетворяет оптимальное управление $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$, $A_1 \leq u \leq A_2$):

$$u(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \operatorname{sign} \left[\int_{-s}^s \left| Q^*(x) - \int_0^T K(x, T, \tau) u(\tau) d\tau \right|^{\gamma-1} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sign} \left(Q^*(x) - \int_0^T K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau \right) K(x, T, t) dx \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (16)$$

Задачи подобного рода можно сформулировать, например, для следующих двух процессов.

1. Пусть функция $Q = Q(x, t)$ описывает распределение температуры в массивном теле в зависимости от пространственной координаты x ($-s \leq x \leq s$) и времени t ($0 \leq t \leq T$), а уравнения нагрева имеют вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; \quad (17)$$

для внутреннего теплообмена и теплообмена на границе

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=-s} = \alpha [u(t) - Q(-s, t)], \quad (18)$$

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=s} = \alpha [u(t) - Q(s, t)]; \quad (19)$$

при нулевом начальном условии (без ограничения общности)

$$Q(x, 0) = 0. \quad (20)$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент теплообмена, $2s$ — толщина массивного тела.

Здесь функция $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) имеет смысл температуры среды, которая обогревает тело с двух сторон при условии $A_1 \leq u \leq A_2$.

Тогда, как известно, функцию распределения температуры тела $Q(x, t)$ можно выразить через функцию температуры печи $u(t)$ посредством соотношения типа (11). Если под функцией $Q^*(x)$ ($-s \leq x \leq s$) понимать заданное распределение температуры тела, то задачу наилучшего приближения в смысле минимума функционала (12) можно поставить, например, для процесса нагрева слитков под прокатку в нагревательных колодцах.

Действительно, решение уравнения (17) с граничными и начальными условиями (18), (19), (20) можно записать в виде

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 A_k e^{-\mu_k^2 t} \cos \mu_k x, \quad (22)$$

$$A_k = \frac{2 \sin \mu_k s}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k s} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

а числа μ_k ($k = 1, 2, \dots$) являются различными действительными положительными корнями характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{\alpha s} \mu = \operatorname{ctg} \mu, \quad (24)$$

причем $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots$.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала (12) при $\gamma = 2$ (минимизация квадратичного отклонения истинного распределения температур $Q(x, T)$ от заданного $Q^*(x)$ в момент времени T).

Для получения уравнения для искомого оптимального управления $u(t)$ осталось подставить решение (21) в уравнение (16). Тогда уравнение (16) примет вид

$$u(t) = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) + \frac{1}{2} (A_2 - A_1) \times \\ \times \operatorname{sign} \left[\int_{-s}^s \left(Q^*(x) - \int_0^t K(x, T - \tau) u(\tau) d\tau \right) K(x, T - \tau) dx \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (25)$$

Раскрывая скобки под знаком sign в правой части уравнения (25) и меняя порядок интегрирования (интегрируя сначала по x , а затем по t), получим окончательно интегральное нелинейное уравнение относительно оптимального управления $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \text{sign} \left[B(T, t) - \int_0^T G(T, t, \tau) u(\tau) d\tau \right], \quad (26)$$

где введены обозначения

$$B(T, t) = \int_{-s}^s Q^*(x) K(x, T-t) dx, \quad (27)$$

$$G(T, t, \tau) = \int_{-s}^s K(x, T-t) K(x, T-\tau) dx. \quad (28)$$

Если предположить, что за заданное время T нельзя получить точное соблюдение условия

$$Q^*(x) = Q(x, T),$$

т. е. не существует допустимого управления $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$), с помощью которого можно точно «попасть» в заданное распределение $Q^*(x)$, то выражение под знаком sign в уравнении (26) ни на каком конечном интервале времени (t_1, t_2) , лежащем внутри заданного отрезка времени $[0, T]$, не обращается в нуль. В этом случае непосредственно из вида уравнения (26) следует, что оптимальное управление $u(t)$ на отрезке $[0, T]$ является кусочно-постоянной функцией времени t , принимающей поочередно свои предельно допустимые значения A_1 и A_2 .

Г л а в а XV

МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Метод моментов

Решение оптимальных задач на основе принципа максимума связано с необходимостью решения довольно трудной краевой задачи. Эта задача является самостоятельной проблемой, в отношении решения которой непосредственно принцип максимума никаких рекомендаций не дает. Как мы видели, эта краевая задача сводится к определению n неизвестных параметров, которыми являются n неизвестных начальных условий сопряженной системы. В общем случае нелинейных систем с нелинейными функционалами не существует эффективных регулярных и общих методов решения этой задачи по определению неизвестных параметров. Однако для линейных систем эта задача может быть всегда решена единым методом.

Мощным аппаратом для решения этой проблемы является так называемый метод моментов и, в частности, l -проблема моментов. История применения этого метода довольно хорошо иллюстрирует утверждение, что удачно подобранный математический аппарат позволяет почти до конца решать целый класс проблем автоматического управления. Метод моментов — хорошо разработанный математический аппарат. Для решения задач оптимального управления в их обычной общепринятой постановке наиболее подходящим средством является метод l -проблемы моментов, который позволяет учитывать наличие ограничений на управляющие воздействия.

Методы этой теории позволяют легко определять вид оптимального управляющего воздействия. Так как оптимальные управляющие воздействия, как мы уже говорили, зависят от ряда параметров (эти параметры эквивалентны, в частности, начальным значениям сопряженного вектора ψ в принципе максимума Л. С. Понтрягина, которые определяются из условия решения краевой задачи, т. е. удовлетворения граничных условий), то метод моментов позволяет организовать определенную сходящуюся итерационную процедуру для нахождения этих параметров.

Этот метод дает единую вычислительную процедуру вне зависимости от сложности и порядка линейного управляемого объекта и числа управляющих воздействий. Сложность вычисления не зависит от числа управляющих воздействий. По существу требуется лишь знание собственных функций управляемой системы.

Наиболее общие результаты в теории l -проблемы моментов были получены М. Г. Крейном, который сформулировал эту проблему в абстрактном линейном нормированном пространстве.

Впервые на возможность применения l -проблемы моментов и, в частности, интересных результатов М. Г. Крейна обратил внимание Н. Н. Красовский, который мастерски применил полученные в этой теории результаты для

решения задач оптимального управления линейными системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящем параграфе мы рассмотрим применение результатов, полученных в теории l -проблемы моментов, к задачам оптимального управления линейными системами со сосредоточенными параметрами.

Начнем с типовой задачи оптимального управления объектом, движение которого описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) q_j + \sum_{k=1}^r b_{ik}(t) u_k + c_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где q_1, \dots, q_n — координаты изображающей точки движения управляемого объекта в фазовом пространстве системы (1); u_1, \dots, u_r — управляющие воздействия, оказываемые на объект и $a_{ij}(t), b_{ik}(t), c_i(t)$ — известные функции времени.

Если для компактности записи ввести матричные обозначения

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}; \quad A(t) = \| a_{ij}(t) \|; \\ B(t) = \| b_{ik} \|; \quad C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

то систему (1) можно переписать в виде

$$\dot{q} = A(t)q + B(t)u + C(t), \quad (3)$$

где $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$. Иногда мы будем опускать аргумент t при обозначении матриц $A(t), B(t), C(t)$.

Кроме того, в момент времени t_0 заданы некоторое начальное состояние системы (1) $q_0 = q(t_0)$ и движущаяся в фазовом пространстве точка

$$q^*(t) = \begin{pmatrix} q_1^*(t) \\ \vdots \\ q_n^*(t) \end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать две задачи оптимального управления: задачу A и задачу B .

Задача A . Найти такое управление $u(t)$, чтобы изображающая точка системы (1) попала в точку $q^*(t)$ за заданное фиксированное время $T = t_1 - t_0$, причем должен достигать минимума функционал

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (4)$$

где $p \geq 1$ — заданное число.

Случай $p = \infty$ соответствует функционалу

$$\max_{[t_0, t_1]} (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_r|). \quad (5)$$

Задача B . Найти такое управление $u(t)$, чтобы изображающая точка системы (1) попала в точку $q^*(t)$ за наименьшее возможное время

$T = t_1 - t_0$, причем должно выполняться ограничение

$$\|u\|_p = \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq l, \quad (6)$$

где l — заданное положительное число и $p \geq 1$.

Управление $u(t)$, удовлетворяющее последнему неравенству (6), будем называть допустимым.

Напомним, что в случае $p = 1$ выражение (4) соответствует общей площади графиков во времени компонент управления, а при $p = 2$ выражение (4) соответствует общей энергии входного сигнала в течение интервала времени управления. Случаи $p = 1$ и $p = 2$ важны тогда, когда каждое входное воздействие $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) представляет собой расход некоторого вещества или соответственно энергии от общего источника, емкость которого ограничена. Например, в случае управления горением в ракетном двигателе $u_i(t)$ могут представлять расход топлива в различных камерах сгорания ракеты. В этом случае общая площадь графика входного воздействия дает значение общего расхода топлива, что является важным параметром ракеты. Такому же виду ограничения соответствует ограниченность абсолютного значения импульсов управления.

Выражение (4) или в предельном случае при $p = \infty$ выражение (5) называется *нормой* вектор-функции $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ и обозначается $\|u\|$. Таким образом,

$$\|u\| = \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |u_k(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (6a)$$

или при $p = \infty$

$$\|u\| = \max_{[t_0, t_1]} (|u_1(t)|, |u_2(t)|, \dots, |u_r(t)|). \quad (6b)$$

Когда существует интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} |u_k(t)|^p dt, \quad p \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (6в)$$

обычно говорят, что функция $u_k(t)$ интегрируема по модулю с p -й степенью или соответственно при $p = \infty$ существует максимум функции $u_k(t)$, $k = 1, \dots, r$, на отрезке $[t_0, t_1]$, т. е. существуют величины

$$\max_{[t_0, t_1]} |u_k(t)|, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (6г)$$

Множество функций, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$, которые интегрируемы по модулю с p -й степенью ($p \geq 1$), образуют функциональное пространство, которое обозначают $L_p [t_0, t_1]$.

Множество функций, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$ и не обязательно непрерывных на нем, для которых существует максимум на отрезке $[t_0, t_1]$, входят в функциональное пространство, которое обозначают символом $M [t_0, t_1]$ или $L_\infty [t_0, t_1]$, чтобы подчеркнуть, что оно является предельным случаем пространства $L_p [t_0, t_1]$ при $p = \infty$.

Если функция, определенная на отрезке $[t_0, t_1]$, непрерывна, то для нее всегда в какой-то точке этого отрезка достигается максимум (теория Вейерштрасса из анализа). Поэтому множество непрерывных функций на отрезке $[t_0, t_1]$ является подмножеством в пространстве $M [t_0, t_1]$. Это подмножество также в свою очередь образует функциональное пространство непрерывных функций, которое обозначается $C [t_0, t_1]$.

Так как для функциональных пространств $L_p [t_0, t_1]$, $M [t_0, t_1]$ и $C [t_0, t_1]$ всегда имеет смысл понятие нормы, которая для $L_p [t_0, t_1]$ определяется формулой (6а), а для пространств $M [t_0, t_1]$ и $C [t_0, t_1]$ определяется формулой (6б), то эти функциональные пространства называются нормированными пространствами. Вообще говоря, понятие нормы можно вводить очень часто (хотя в принципе это и не всегда возможно) для множества функций (в том числе и вектор-функций) $f(t)$, определенных на некотором множестве аргументов t , следующим образом.

Мы говорим, что на множестве функций $f(t)$, определенных на некотором множестве аргументов t (например, на отрезке $[t_0, t_1]$), введено понятие нормы, если каждой функции $f(t)$ из этого множества поставлено в соответствие число $\|f(t)\|$, называемое нормой $f(t)$, которое для любых функций $f(t)$ из этого множества удовлетворяет условиям:

$$1) \|f(t)\| \geq 0;$$

2) $\|f(t)\| = 0$ тогда и только тогда, когда функция $f(t) = 0$ на всем множестве, где она определена;

$$3) \|\alpha \cdot f(t)\| = |\alpha| \cdot \|f(t)\| \text{ для любого действительного числа } \alpha;$$

$$4) \|f_1(t) + f_2(t)\| \leq \|f_1(t)\| + \|f_2(t)\|$$

для любых двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из этого множества (неравенство треугольника).

Можно проверить, что введенные нами нормы для пространств $L_p [t_0, t_1]$, $M [t_0, t_1]$ и $C [t_0, t_1]$ действительно удовлетворяют всем перечисленным свойствам нормы.

Покажем теперь, как сформулированные вами две задачи оптимального управления A и B свести к так называемой l -проблеме моментов.

Как известно, решение дифференциального уравнения (3) при заданном $u = u(t)$ можно представить в виде

$$q(t) = \Phi(t) q_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) c(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))$ — матрица фундаментальных решений однородной системы

$$\dot{q} = Aq, \quad (8)$$

соответствующей системе (3), а $\Phi^{-1}(t)$ — матрица, обратная к матрице $\Phi(t)$. Заметим, что матрица

$$\Psi(t) = \Phi^{-1}(t) \quad (9)$$

является матрицей фундаментальных решений, сопряженной к системе (1) системы линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{q} = -A'q, \quad (10)$$

где матрица A' имеет вид

$$A' = \| \| a_{ji} \| \|.$$

Предположим, что в момент времени $t = t_1$

$$q(t_1) = q^*(t_1). \quad (11)$$

Учитывая, что матрица $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$, обратная матрице фундаментальной системы решений $\Phi(t)$, не обращается в нуль ни в одной точке интервала $[t_0, t_1]$ (матрица $\Psi(t)$ сама является матрицей фундаментальных решений системы (10)), умножим обе части равенства (7) на $\Phi^{-1}(t)$ и в силу (9) получим, что для выполнения равенства (11) необходимо и достаточно (ибо все выкладки можно провести в обратном порядке) выполнение следующего

условия:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} G(\tau) u(\tau) d\tau, \\ \alpha_i(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} g_i(\tau) u(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t_1) &= \Psi(t_1) q^*(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \Psi(\tau) c(\tau) d\tau - q_0 = (\alpha_i(t_1)), \\ G(t) &= \Psi(t) B(t) = (g_i(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что интегралы в правой части равенства (12) показываются *моментами функции* (вообще говоря, вектор-функции) $u(t)$ относительно функций (также, вообще говоря, вектор-функций) $g_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Левые части равенств (12) являются определенными числами $\alpha_i(t_1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, задача A оптимального управления сводится к нахождению такого управления $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), которое удовлетворяет равенствам (12). Проблема определения такого $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) называется *проблемой моментов*. Если при этом накладывается еще ограничение на $u(t)$ в виде неравенства (6) или в виде требования минимизации выражения (4), то эта задача называется *l-проблемой моментов*.

В частности, когда возмущающие воздействия отсутствуют, $c(t) \equiv 0$, и изображающую точку системы надо привести в начало координат,

$$\alpha(t_1) = -q_0,$$

и равенство (12) принимает вид

$$-q_0 = \int_{t_0}^{t_1} G(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Таким образом, исходные задачи A и B теперь можно переформулировать следующим образом.

Задача A' (эквивалент задачи A). Требуется найти такое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, чтобы выполнялось равенство (12) (или (13)), а функционал (4) достигал своего минимального значения. Здесь отрезок $[t_0, t_1]$ считается заданным и фиксированным.

Задача B' (эквивалент задачи B). Требуется найти такое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, чтобы выполнялось равенство (12) (или (13)), а также ограничение (6) и при этом величина $T = t_1 - t_0$ достигла своего наименьшего значения. Момент t_0 считается заданным и фиксированным.

Собственно классическая l -проблема моментов в том виде, как она рассмотрена у М. Г. Крейна, формулируется следующим образом. Требуется найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ существовала такая функция $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, которая бы, с одной стороны, решала проблему моментов (т. е. удовлетворяла равенству (12) (или (13)), а с другой стороны, норма функции $u(t)$, определяемая формулой (4) или (5), не превосходила бы заданного положительного числа l (отсюда и произошло название l -проблема моментов).

Сейчас мы докажем основную теорему из теории l -проблемы моментов, из которой непосредственно следует решение задачи A' , а вместе с ней и решение задачи A .

Решение задачи B' и эквивалентной ей задачи B , которое мы разберем позже, также тесно связано с задачами A' и A .

В формулировке и доказательстве этой теоремы мы ограничимся для простоты изложения случаем, когда функция $u(t)$ является скалярной.

Случай векторной функции $u(t)$ рассматривается совершенно аналогично.

Равенства (12) выражают так называемую конечномерную l -проблему моментов. Однако задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами, как мы увидим в дальнейшем, приводят нас к необходимости рассмотрения бесконечномерной l -проблемы моментов, которая отличается от конечномерной тем, что вместо конечного числа n моментных равенств (12) мы имеем бесконечное число моментных равенств

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{t_1} g_i(t) u(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13a)$$

Основную теорему мы докажем как раз для этого более общего случая, когда имеется бесконечное число моментных равенств (13a).

Т е о р е м а. Пусть последовательность функции $g_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, принадлежит пространству $L_{p'}[t_0, t_1]$, где $p' \geq 1$ и связано с p соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Тогда, для того чтобы в пространстве $L_p[t_0, t_1]$ ($1 \leq p \leq \infty$) существовала функция $u(t)$, норма которой не превосходит положительного числа l и которая решает проблему моментов (12) (или (13)), необходимо и достаточно, чтобы для всех конечных наборов чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \right| \leq l \left(\int_{t_0}^{t_1} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}. \quad (13б)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости умножим каждое из первых n равенств (13a) соответственно на ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, и сложим их почленно. Получим

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \right| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right) u(t) dt \right|.$$

Но для правой части последнего равенства на основе неравенства Буняковского — Шварца мы имеем оценку

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right) u(t) dt \right| \leq l \left(\int_{t_0}^{t_1} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'},$$

откуда следует необходимость условия (13б).

Для доказательства достаточности условия (13б) предположим, что оно выполнено для любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. При фиксированном n и дополнительном условии

$$s_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i = 1 \quad (13в)$$

выражение $\int_{t_0}^{t_1} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt$ имеет минимум по переменным ξ_1, \dots, ξ_n , не меньший $1/l^{p'}$, как это видно из условия (13б), так как

$$\frac{1}{l} \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} |h_n(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'}. \quad (13г)$$

Здесь для краткости обозначено

$$h_n(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t). \quad (13д)$$

Этот минимум можно найти по правилу множителей Лагранжа для задач на условный минимум. Значения $\xi_i = \xi_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, при которых этот минимум достигается, определяется из условий равенства нулю частных производных функции

$$\int_{t_0}^{t_1} |h_n(t)|^{p'} dt - \lambda |s_n|^{p'}$$

по переменным ξ_1, \dots, ξ_n .

Пусть $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ — точка минимума. Тогда будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} g_i(t) |h_n^*(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} h_n^*(t) dt - \lambda \alpha_i |s_n^*|^{p'-1} \operatorname{sign} s_n^* = 0, \quad (13е)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где $h_n^*(t)$ означает $h_n(t)$ при $\xi = \xi^*$ и s_n^* означает s_n при $\xi = \xi^*$. Для определения λ умножим каждое из n последних равенств на ξ_i^* , $i = 1, \dots, n$, и сложим их. Используя равенства (13в) и (13д), получим

$$\lambda = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) |h_n^*(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} h_n^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} |h_n^*(t)|^{p'} dt. \quad (13ж)$$

Из (13ж), следовательно, имеем

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{t_1} g_i(t) \frac{1}{\lambda} |h_n^*(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} h_n^*(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда видно, что функция $\psi_n(t)$, равная

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\lambda} |h_n^*(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} h_n^*(t), \quad (13з)$$

дает решение конечномерной (n -мерной) проблемы моментов при $i = 1, 2, \dots, n$, причем норма функции $\psi_n(t)$ в пространстве $L_p[t_0, t_1]$ не превосходит числа l , так как из последнего равенства с учетом (13ж) имеем

$$\|\psi_n(t)\| = \lambda^{-1/p'} = \left(\int_{t_0}^{t_1} |h_n^*(t)|^{p'} dt \right)^{-1/p'},$$

а из (13г) немедленно следует, что

$$\|\psi_n(t)\| = \lambda^{-1/p'} \leq l. \quad (13и)$$

Так как последовательность $\|\psi_n(t)\|$ ограничена при всех n числом l , то последовательность функций $\psi_n(t)$ содержит подпоследовательность, предел которой $\psi(t)$ обладает свойством $\|\psi(t)\| \leq l$ и

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{t_1} g_i(t) u(t) dt \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots,$$

т. е. функция $\psi(t)$ и является искомой функцией, решающей бесконечномерную l -проблему моментов. Теорема доказана.

Из формулы (13з) следует, что оптимальное управление $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) в задаче A' , выражается следующей формулой:

$$u(t) = \frac{1}{\lambda^*} |\xi^* G(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} \xi^* G(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (14)$$

где p' связано с p соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а неизвестный вектор ξ^* и неизвестное число λ^* определяются из решения следующей задачи: найти

$$\min_{\xi} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |\xi G(t)|^{p'} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |\xi^* G(t)|^{p'} dt = \lambda^* \quad (15)$$

при условии

$$\xi \cdot \alpha(t_1) = \xi^* \alpha(t_1) = 1.$$

Рассмотрим теперь задачу B' . Решение этой задачи очень тесно связано с решением задачи A' . Действительно, как видно из равенства (15), величина λ^* при увеличении верхнего предела интегрирования t_1 будет увеличиваться или по крайней мере не уменьшаться. Поэтому, если мы возьмем t_1 слишком маленьким, то может оказаться, что t_1 настолько мало, что норма

$$\|u(t)\| = \lambda^{-1/p'} > l,$$

и управление $u(t)$ недопустимо. Непрерывно увеличивая t_1 , мы сможем достичь такого минимального значения $t_1 = t'_1$, что

$$\|u(t)\| = \lambda^{-1/p'} = l.$$

Очевидно, это и будет то минимальное значение времени $t_1 = t'_1$, при котором будет иметь место решение задачи B' на быстродействие. Из последнего равенства получаем

$$\lambda^{-1} = l^{p'} \quad \text{или} \quad \lambda = l^{-p'}.$$

Итак, оптимальное управление $u(t)$ в задаче B' дается следующей формулой:

$$u(t) = l^{p'} |\xi^* G(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} \xi^* G(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (15a)$$

где вектор ξ^* и t'_1 определяются из решения следующей задачи:

$$\min_{t_1} \min_{\xi} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |\xi G(t)|^{p'} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^r |\xi^* G(t)|^{p'} dt = l^{-p'} \quad (15б)$$

при условии

$$\xi \alpha(t_1) = \xi^* \alpha(t_1) = 1. \quad (15в)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров задач оптимального управления, которые решаются с помощью метода моментов.

Пример 1. Пусть управляемая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = u, \quad (16)$$

где управляющее воздействие $u = u(t)$ стеснено условиями

$$-l \leq u(t) \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, подчиненное условию (17), чтобы система (16) из начального состояния при $t_0 = 0$

$$q_1(0) = q_{10}, \quad q_2(0) = q_{20} \quad (18)$$

перешла в начало координат за минимальное время T .

Пользуясь формулами (15а) и (15б), сведем решение этой задачи оптимального управления к проблеме моментов.

Матрица фундаментальных решений Φ однородной системы

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = 0,$$

соответствующей системе (16), и обратная ей матрица $\Phi^{-1} = (\Phi_{ij})^{-1}$ имеют вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Psi(t). \quad (19)$$

Матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$G(t) = \Psi(t)B = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-t, 1). \quad (20)$$

Далее, $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ — вектор решения системы (16), $q_0 = (q_{10}, q_{20})$ — вектор начальных условий.

Так как конечное условие при $t = T$, $q(T) = 0$, то равенство (12) приводит при $t = T$ к уравнениям, которые выражают проблему моментов. В координатной форме матричное уравнение (12) выглядит следующим образом:

$$q_{10} = \int_0^T tu(t) dt, \quad (21)$$

$$-q_{20} = \int_0^T u(t) dt. \quad (22)$$

Таким образом, нужно найти такое управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, $\max_{[0, T]} |u(t)| \leq l$, чтобы равенства (21), (22) выполнялись при минимальном T . Как следует из формулы (15а), оптимальное управление для этой задачи имеет вид ($p = \infty$, $p' = 1$)

$$u(t) = l \operatorname{sign}(\xi_1 t + \xi_2), \quad (23)$$

где числа ξ_1 и ξ_2 и время T^0 оптимального процесса являются решением следующей задачи: найти

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T |\xi_1 t + \xi_2| dt = \int_0^{T^0} |\xi_1^* t + \xi_2^*| dt = \frac{1}{l} \quad (24)$$

при условии

$$\xi_1 q_{10} - \xi_2 q_{20} = \xi_1^* q_{10} - \xi_2^* q_{20} = 1. \quad (25)$$

Для решения последней задачи (24), (25) выразим из равенства (26) величину

$$\xi_1 = \frac{1 + \xi_2 q_{20}}{q_{10}}. \quad (26)$$

Для простоты положим $q_{20} = 0$ и $q_{10} > 0$. Тогда из условия (25) получим

$$\xi_1 = \frac{1}{q_{10}}. \quad (27)$$

Подставив найденное значение ξ_1 в интеграл выражения (24), получим

$$\int_0^T \left(\frac{1}{q_{10}} t + \xi_2 \right) dt. \quad (28)$$

Чтобы вычислить минимум по ξ_2 этого интеграла, найдем сначала точку t_1 пересечения прямой

$$\frac{1}{q_{10}} t + \xi_2 = 0 \quad (29)$$

с осью t . Легко видеть, что

$$t_1 = -q_{10} \xi_2. \quad (30)$$

Предположим далее, что $0 \leq t_1 \leq T$. Тогда, так как, по предположению, $q_{10} > 0$, то линейная функция, стоящая под знаком модуля в интеграле (28), отрицательна при $0 \leq t \leq t_1$ и положительна при $t_1 \leq t \leq T$. Поэтому интеграл (28) можно разбить на два интеграла следующим образом:

$$\int_0^{t_1} \left(\xi_2 - \frac{1}{q_{10}} t \right) dt + \int_{t_1}^T \left(\frac{1}{q_{10}} t + \xi_2 \right) dt. \quad (31)$$

Вычисляя выражение (31), с учетом (30) получим

$$\begin{aligned} -\frac{t_1^2}{2q_{10}} - \xi_2 t_1 + \frac{T^2}{2q_{10}} + \xi_2 T - \frac{t_1^2}{2q_{10}} - \xi_2 t_1 &= -\frac{t_1^2}{q_{10}} - 2\xi_2 t_1 + \frac{T^2}{2q_{10}} + \xi_2 T = \\ &= -q_{10} \xi_2^2 + 2q_{10} \xi_2^2 + \frac{T^2}{2q_{10}} + \xi_2 T = q_{10} \xi_2^2 + T \xi_2 + \frac{T^2}{2q_{10}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Приравнявая нулю производную по ξ_2 последнего равенства (32), получим уравнение для определения значения ξ_2 , дающего минимум интегралу (24).

$$2q_{10} \xi_2 + T = 0. \quad (33)$$

Отсюда

$$\xi_2 = -\frac{T}{2q_{10}}. \quad (34)$$

Подставляя полученное значение ξ_2 в формулу (32), вычислим значение интеграла (24):

$$q_{10} = \frac{T^2}{4q_{10}^2} - \frac{T^2}{2q_{10}} + \frac{T^2}{2q_{10}} = \frac{T^2}{4q_{10}}. \quad (35)$$

Как видно из выражения (24), время T^0 оптимального переходного процесса должно выражаться из следующего уравнения:

$$\frac{T^0}{4q_{10}} = \frac{1}{l}. \quad (36)$$

Отсюда

$$T^0 = 2 \sqrt{\frac{q_{10}}{l}}. \quad (37)$$

Подставляя полученные значения ξ_1 и ξ_2 в формулу (23), получим закон оптимального управления

$$u^0(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{1}{q_{10}} t - \frac{T^0}{2q_{10}} \right), \quad (38)$$

где T^0 определяется формулой (37).

Заметим, что в этой формуле (38) для оптимального управления предположение о том, что $q_{10} > 0$, излишне, так как легко убедиться, что формула сохранит свой вид также при $q_{10} < 0$.

Пример 2. Пусть управляемая система описывается уравнениями (16) и в начальный момент времени при $t = 0$ система находится в состоянии

$$q(0) = q_{10} = 0, \quad q_2(0) = q_{20} = 0. \quad (39)$$

Требуется из этого начального состояния перевести систему в новый режим, характеризуемый уравнениями

$$q_1^* = t \quad \text{и} \quad q_2^* = 1, \quad (40)$$

за минимальное время T , причем энергия управляющего воздействия ограничена

$$\int_0^T u^2(t) dt \leq l^2, \quad (41)$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы, соответствующей системе (18), и обратная ей матрица $\Phi^{-1}(t) = \Psi(t)$ имеет вид (19), а матрица B определяется (16). Уравнение моментов, соответствующее этой задаче, примет вид

$$T = \int_0^T u(t) dt, \quad (42)$$

$$1 = \int_0^T u(t) dt. \quad (43)$$

Из формулы (15а) получим, что оптимальное управляющее воздействие равно

$$u(t) = l^2 (\xi_1 t + \xi_2) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (44)$$

где ξ_1 , ξ_2 и T в соответствии с (15) находятся из решения следующей задачи: найти

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T (\xi_1 t + \xi_2)^2 dt = \frac{1}{l^2} \quad (45)$$

при условии

$$\xi_1 T + \xi_2 = 1. \quad (46)$$

Выражая из последнего равенства ξ_2 , подставляя его в (45), а затем дифференцируя по ξ_1 , получим уравнение для определения ξ_1

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \int_0^T [\xi_1 t + 1 - \xi_1 T]^2 dt \right\} = 0.$$

Отсюда находим

$$2 \int_0^T (\xi_1 t - \xi_1 T + 1)(t - T) dt = \frac{2}{3} \xi_1 T^3 - \xi_1 T^3 + T^2 - \xi_1 T^3 + 2\xi_1 T^3 - 2T^2 = 0.$$

Сокращая на T^2 (очевидно, $T \neq 0$), получим

$$\frac{2}{3} \xi_1 T - 1 = 0; \quad \xi_1 = \frac{3}{2T}; \quad \xi_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь, подставляя полученные возражения для ξ_1 и ξ_2 в (45), получим

$$\int_0^T \left(\frac{3}{2T} t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \int_0^T \left(\frac{9}{4T^2} t^2 - \frac{3}{2T} t + \frac{1}{4} \right) dt = \frac{3}{4} T - \frac{3}{4} T + \frac{1}{4} T = \frac{1}{4} T = \frac{1}{l^2},$$

откуда время оптимального управления равно

$$T = \frac{4}{l^2},$$

а само оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = l^2 \left(\frac{3}{8} l^2 t - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} l^4 t - \frac{1}{2} l^2.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь более сложный пример оптимального по быстрейшему управлению системой третьего порядка с двумя управляющими воздействиями $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Дифференциальные уравнения этой системы в нормальной форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= q_3 + u_1, \\ \dot{q}_3 &= u_2. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Пусть в начальный момент времени при $t = 0$ состояние системы (47) задается матрицей

$$q(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти такие управляющие воздействия $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые переводят систему из начального состояния $q(0)$ в начало координат фазового пространства исходной системы за минимальное время при условии, что на управление

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

наложено ограничение, конкретный вид которого будет рассмотрен ниже.

Как легко получить, фундаментальная матрица соответствующей однородной системы и обратная ей матрица имеют вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Psi(t) = \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$G(t) = \Psi(t)B = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и с учетом (12) и (13) приходим к системе равенств

$$\begin{aligned} -1 &= \int_0^T \left[-tu_1(t) + \frac{1}{2}t^2u_2(t) \right] dt, & 0 &= \int_0^T [u_1(t) - tu_2(t)] dt, \\ & & 0 &= \int_0^T u_2(t) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим ограничения разных типов:

а) Пусть ограничена величина энергии входного воздействия:

$$\int_0^T [|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2] dt \leq l^2,$$

или

$$\left(\int_0^T [|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2] dt \right)^{1/2} \leq l.$$

Следовательно, на основании (14) имеем

$$u_1(t) = l^2 (-\xi_1 t + \xi_2), \quad u_2(t) = l^2 \left(\frac{1}{2} \xi_1 t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right),$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяются из уравнения

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T \left[(-\xi_1 t + \xi_2)^2 + \left(\frac{1}{2} \xi_1 t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right)^2 \right] dt = \frac{1}{l^2}, \quad (49)$$

причем, как легко видеть, условие (15) в данном случае дает $\xi_1 = 1$.

Следовательно, необходимо найти ξ_2 и ξ_3 , минимизирующие интеграл

$$J(\xi_1, \xi_2) = \int_0^T \left[(-t + \xi_2)^2 + \left(\frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right)^2 \right] dt.$$

Таким образом, ξ_2 и ξ_3 должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \xi_2} &= 2 \int_0^T \left[(-t + \xi_2) - \left(\frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right) t \right] dt = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \xi_3} &= 2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Далее:

$$-\frac{1}{2} T^2 + \xi_2 T - \frac{1}{8} T^4 + \frac{1}{3} \xi_2 T^3 - \frac{1}{2} \xi_3 T^2 = 0, \quad \frac{1}{6} T^3 - \frac{1}{2} \xi_2 T^2 + \xi_3 T = 0.$$

Решая эту систему относительно ξ_2 и ξ_3 , находим

$$\xi_2 = \frac{T}{2}, \quad \xi_3 = \frac{T^2}{12}.$$

Подставляя эти значения ξ_2 , ξ_3 и $\xi_1 = 1$ в (49), получим уравнение для определения времени оптимального переходного процесса

$$\frac{1}{720} T^5 + \frac{1}{12} T^3 = \frac{1}{l^2}.$$

Наименьший положительный корень T_0 этого уравнения и будет временем оптимального переходного процесса. Оптимальные управляющие воздействия в этом случае будут иметь вид

$$u_1(t) = l^2 \left(\frac{T_0^2}{12} - \frac{T_0}{2} t + \frac{t^2}{2} \right), \quad u_2(t) = l^2 \left(\frac{T_0}{2} - t \right).$$

б) Пусть теперь ограничена средняя мощность входных воздействий

$$\left[\frac{1}{T} \int_0^T (|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2) dt \right]^{1/2} \leq l.$$

Этот случай легко сводится к предыдущему, ибо получаем, что норма ограничена числом $l\sqrt{T}$:

$$\|u\| = \left[\int_0^T (|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2) dt \right]^{1/2} \leq l\sqrt{T}.$$

Оптимальные управляющие воздействия в этом случае также вычисляются по формуле (14), однако T_0 является теперь наименьшим корнем уравнения

$$\frac{1}{720} T^6 + \frac{1}{12} T^4 = \frac{1}{l^2}.$$

в) Если входные управляющие воздействия ограничены по модулю:

$$|u_1(t)| \leq l, \quad |u_2(t)| \leq l,$$

то в этом случае следует положить $p = \infty$, что приводит к тому, что за норму $u(t)$ следует взять величину

$$\|u\| = \max_{[0, T]} (|u_1(t)|, |u_2(t)|) \leq l.$$

Случай, когда управляющие воздействия $u_1(t)$ и $u_2(t)$ ограничены по модулю разными величинами, например l_1 и l_2 , т. е.

$$|u_1(t)| \leq l_1, \quad |u_2(t)| \leq l_2, \quad l_1 > 0, \quad l_2 > 0,$$

легко приводится к предыдущему случаю, если ввести новые управляющие воздействия $v_1(t)$ и $v_2(t)$ по формулам

$$v_1(t) = \frac{l}{l_1} u_1(t), \quad v_2(t) = \frac{l}{l_2} u_2(t), \quad l > 0.$$

Тогда новые управляющие воздействия по модулю ограничены одним и тем же числом $l > 0$:

$$|v_1(t)| \leq l, \quad |v_2(t)| \leq l.$$

Используя формулу (14) при $p = \infty$, получим

$$u_1(t) = l \operatorname{sign}(-\xi_1 t + \xi_2), \quad u_2(t) = l \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} \xi_1 t^2 - \xi_2 t + \xi_3\right),$$

где $\xi_1 = 1$, а ξ_2 и ξ_3 находятся из решения следующего уравнения:

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \int_0^T \left(|1-t + \xi_2| + \left| \frac{1}{2} t^2 - \xi_2 t + \xi_3 \right| \right) dt = \frac{1}{l}. \quad (50)$$

Вычисляя интеграл в этом выражении так же, как это делалось в примере 1, и минимизируя полученное выражение по ξ_2 и ξ_3 , получим, что минимум достигается при

$$\xi_2 = \frac{T}{2} \quad \text{и} \quad \xi_3 = \frac{3}{32} T^2.$$

Подставляя эти значения ξ_2 , ξ_3 и $\xi_1 = 1$ в (50), получим уравнение

$$\frac{1}{32} T^3 + \frac{1}{4} T = \frac{1}{l}.$$

Наименьший действительный положительный корень T_0 этого уравнения и будет временем оптимального переходного процесса. При этом оптимальные управляющие воздействия определяются следующим образом:

$$u_1(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{T_0}{2} - t \right), \quad u_2(t) = l \operatorname{sign} \left(\frac{3}{32} T_0^2 - \frac{T_0}{2} t + \frac{1}{2} t^2 \right).$$

Покажем теперь, что решение задачи оптимального управления с помощью принципа максимума для линейных систем с линейным минимизируемым функционалом и линейными краевыми условиями по сути дела сводится к решению некоторой l -проблемы моментов.

Действительно, если применить принцип максимума Л. С. Понтрягина к задаче (1) — (4), то сразу же получим, что оптимальное управление $u(t)$ в случае ограничения $|u_i(t)| \leq l$ ($i = 1, 2, \dots, r$), будет иметь вид

$$u(t) = l \operatorname{sign} \psi(t) B, \quad (51)$$

где вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет сопряженному дифференциальному уравнению, которое для данной задачи имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = A'\psi. \quad (52)$$

На этом роль теоремы о принципе максимума кончается.

Однако здесь остается неясность, какое именно выбрать решение уравнения (51) (ведь дифференциальное уравнение, вообще говоря, имеет много решений). Как известно, единственное решение этого уравнения (51) можно выделить, если задать начальные условия для вектора $\psi(0) = \xi$, т. е. решать задачу Коши. Таким образом, применение принципа максимума выделяет лишь семейство экстремалей, из которых еще предстоит выделить одну единственную. Итак, остается, вообще говоря, трудная краевая задача, которая состоит в том, чтобы подобрать такие начальные значения $\psi(0)$ для вектор-функции $\psi(t)$, чтобы под действием управления $u(t)$, определяемого формулой (51), система (1) из начального состояния $q(t_0) = q_0$ перешла в заданное состояние

$$q(t_1) = q_1, \quad (53)$$

т. е. траектория системы (1) в фазовом пространстве должна пройти через точку q_1 .

Решение сопряженного уравнения (52) с начальным условием $\psi(0) = \xi$ можно записать в виде

$$\psi(t) = \xi \Psi(t), \quad (54)$$

где $\Psi(t)$ — матрица фундаментальных решений уравнения (52).

Подставляя это выражение для $\psi(t)$ в формулу (51) для оптимального управления, получим

$$u(t) = l \operatorname{sign} \xi \Psi(t) B = l \operatorname{sign} \xi G(t), \quad (55)$$

где $G(t) = \Psi(t) B$.

Отсюда видно, что оптимальное управление зависит от n -параметров $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, которые определяются из условия выполнения равенства (53), что в соответствии с (12) эквивалентно решению проблемы моментов, т. е. нахождения «нужных» параметров в формуле (55).

Если при решении задачи A минимизацию выражения (15б) при условии (15в) нельзя провести аналитическим путем до конца, то для определения искомого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ можно предложить вычислительные (числовые) процедуры минимизации. Эту минимизацию можно, например, провести градиентным способом. Надо заметить, что так как функция (15) есть *выпуклая функция* *) по аргументам ξ_1, \dots, ξ_n , то спуск (минимизация) любым методом из любого начального приближения ξ_1^0, \dots, ξ_n^0 в конце концов приведет к определению такого значения $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n$, которое сколь угодно близко к тем значениям ξ_1, \dots, ξ_n , в которых достигается минимум функции $\rho_\xi(T)$ по ξ при условии (15в), т. е. для любого наперед заданного ε найдется такое приближение $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n$, полученное в результате последовательных итераций спуска, при котором

$$|\tilde{\xi}_i - \xi_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначим минимизируемую функцию через $\rho_\xi(T)$ (для простоты положения $t_0 = 0$, $t_1 = T$):

$$\rho_\xi(T) = \int_0^T \sum_{k=1}^r |\xi G(t)|^{p'} dt, \quad (56)$$

где T фиксировано условием задачи A . Тогда градиент этой функции очень легко выписать. Он равен

$$\operatorname{grad} \rho_\xi(T) = \left(\frac{\partial \rho_\xi(T)}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \rho_\xi(T)}{\partial \xi_n} \right),$$

где

$$\frac{\partial \rho_\xi(T)}{\partial \xi_i} = p' \int_0^T G(t) \sum_{k=1}^2 |\xi G(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} \xi G(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (57)$$

Тогда $(s+1)$ -е приближение $\xi_1^{s+1}, \dots, \xi_n^{s+1}$ вычисляется по s -му приближению по формуле (с учетом (57))

$$\xi_i^{s+1} = \xi_i^s + h \frac{\partial \rho_\xi^s(T)}{\partial \xi_i} = \xi_i^s + h p' \int_0^T G(t) \sum_{k=1}^n |\xi G(t)|^{p'-1} \operatorname{sign} \xi G(t) dt, \quad (58)$$

где h — некоторая постоянная, $i = 1, 2, \dots, n$.

Опишем теперь некоторые итеративные способы вычисления искомого вектора $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ и минимального времени \bar{T} , положив для простоты $t_0 = 0$ и $t_1 = T$.

*) Функция $f(x)$ векторного аргумента x называется выпуклой в области D , если для любых двух точек $x_1 \in D$ и $x_2 \in D$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2),$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$.

Обозначим через $\rho_\xi(T)$ функцию от T и ξ :

$$\rho_\xi(T) = \int_0^T \sum_{k=1}^r |\xi G(t)|^{p'} dt,$$

фигурирующую в равенстве (15б).

Далее возьмем произвольное исходное значение вектора $\xi = \xi^0$, удовлетворяющее лишь условию (15в), и построим график функции $\rho_{\xi^0}(T)$ в зависимости от T (рис. 15.1). Так как под интегралом в (5б) стоит положительная величина, то функция $\rho_{\xi^0}(T)$ является монотонно возрастающей функцией T . Пусть график функции $\rho_{\xi^0}(T)$ достиг уровня $1/l^{p'}$, при некотором $T = T_0$, т. е.

$$\rho_{\xi^0}(T_0) = \frac{1}{l^{p'}}.$$

При фиксированном $T = T_0$ функция $\rho_\xi(T_0)$ является функцией от $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Найдем минимум функции $\rho_\xi(T_0)$ по всем возможным ξ , удовлетворяющим условию (15в). Пусть минимум $\rho_\xi(T_0)$ достигается при $\xi = \xi^1$.

Подставим это значение $\xi = \xi^1$ в функцию $\rho_\xi(T_0)$ и найдем то значение T_1 , при котором

$$\rho_{\xi^1}(T_1) = \frac{1}{l^{p'}}.$$

Затем снова при фиксированном $T = T_1$ найдем минимум функции $\rho_\xi(T_1)$ по ξ . Получим $\xi = \xi^2$, при котором

$$\min_{\xi} \rho_\xi(T_1) = \rho_{\xi^2}(T_1).$$

Это даст второе приближение вектора ξ к оптимальному значению $\xi = \xi^*$. Продолжая этот процесс далее, получим последовательность векторов $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \dots$, сходящуюся к оптимальному значению $\xi = \xi^*$, и последовательность T_0, T_1, T_2, \dots , сходящуюся к значению минимального времени $T = \bar{T}$. Процесс последовательных приближений изображен на рис. 15.1.

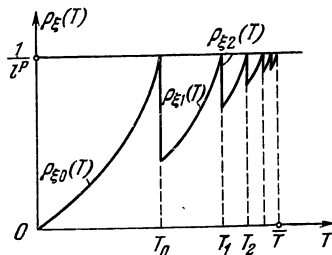


Рис. 15.1

§ 2. Метод моментов в задачах оптимального управления распределенными системами

Рассмотрим теперь применение метода моментов к решению некоторых задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Пусть состояние линейной управляемой системы с распределенными параметрами описывается функцией $Q(y, t)$, где y — пространственная независимая переменная, меняющаяся на отрезке $[s_1, s_2]$, а t — время, меняющееся на отрезке $[0, T]$. Функция $Q(y, t)$ может иметь смысл любого физического параметра: это может быть значение температуры, концентрации, отклонений и т. д. в какой-либо точке пространства y в момент времени t .

Пусть далее система находится под действием распределенного лишь во времени (и сосредоточенного в пространстве) управления, характеризуемого функцией $u = u(t)$ ($0 \leq t \leq T$).

При нулевом начальном условии, т. е. при $Q(y, 0) = 0$ ($0 \leq y \leq s$), состояние управляемой системы может быть описано формулой

$$Q(y, t) = \int_0^t K(y, t, \tau) u(\tau) d\tau, \tag{1}$$

где $K(y, t, \tau)$ — импульсная переходная функция системы, которая показывает, как будет меняться величина Q в точке y , $s_1 \leq y \leq s_2$, во времени t , если $u(t)$ примет вид δ -функции, отличной от нуля при $\tau = 0$, т. е. $Q(y, t) = K(y, t, \tau)$ при $u(t) = \delta(\tau)$.

Кроме того, задаемся еще функцией $Q^*(y)$ ($s_1 \leq y \leq s_2$), характеризующей некоторое желаемое или заданное распределение, к которому должно приближаться управляемое распределение $Q(y, t)$.

Здесь можно также поставить две задачи оптимального управления A и B .

Задача А. Найти такое управление $u(t)$ на заданном фиксированном интервале времени $[0, T]$, чтобы в момент времени T выполнилось равенство

$$Q^*(y) = \int_0^T K(y, T, t) u(t) dt \quad (2)$$

и функционал

$$l^p = \int_0^T |u(t)|^p dt, \quad \text{или} \quad l = \max_{[0, T]} |u(t)| \quad (p \geq 1), \quad (3)$$

достигал своего минимального значения.

Задача В. Найти такое управление $u(t)$ на интервале времени $[0, T]$, стесненное условием

$$\int_0^T |u(t)|^p dt \leq l^p, \quad \text{или} \quad \max_{[0, T]} |u(t)| \leq l, \quad (4)$$

где $l \geq 0$ — заданное фиксированное число, чтобы выполнилось равенство (2), а время T было минимальным.

Систему (1) мы будем называть *управляемой относительно распределения* $Q^*(y)$, если существует хотя бы одно управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T < \infty$, подверженное ограничениям (4), при котором выполняется равенство (2). В противном случае систему (1) будем называть *неуправляемой относительно распределения* $Q^*(y)$.

Равенство (2) выражает *континуальный* аналог проблемы моментов. Покажем, как свести сформулированные выше задачи к l -проблеме моментов. Заметим, однако, что по сравнению со случаем сосредоточенных систем, где число моментов было *конечной величиной*, равной n , в задачах оптимального управления распределенными системами соответствующая *проблема моментов будет уже*, как мы увидим ниже, *бесконечномерной*.

Действительно, возьмем такую систему функций $\{h_k(y)\}$ ($s_1 \leq y \leq s_2$; $k = 1, 2, \dots$), по которой можно разложить в ряд функцию $K(y, t, \tau)$ и функцию $Q^*(y)$ при каждом фиксированном t и τ из отрезка $[0, T]$. В качестве такой системы функций $h_k(y)$, $k = 1, 2, \dots$ можно взять, например, тригонометрическую систему функций. Получим

$$Q^*(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k(y) \quad (s_1 \leq y \leq s_2), \quad (5)$$

$$K(y, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, \tau) h_k(y) \quad (s_1 \leq y \leq s_2, 0 \leq \tau \leq t \leq T). \quad (6)$$

Тогда равенство (2) примет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T g_i(T, t) u(t) dt \cdot h_i(y). \quad (7)$$

Сравнивая почленно коэффициенты при $h_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots$) в левой и правой частях равенства (7), приходим к *бесконечной системе равенств*, выполнение которых необходимо и достаточно для справедливости равенства (2)

$$\alpha_i = \int_0^T g_i(T, t) u(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Числа α_i называются моментами функции $u(t)$ относительно последовательности функций $\{g_i(T, t)\}$. В отличие от задач для сосредоточенных систем, проблема моментов, как это уже указывалось, для распределенных систем бесконечно-мерна, т. е. *необходимо удовлетворить бесконечной системе уравнений* (8).

Таким образом, решение l -проблемы моментов полностью отвечает на вопрос, *управляема ли данная система или неуправляема*. Если l -проблема имеет решение, система является управляемой, в противном случае система является неуправляемой.

Так как необходимые и достаточные условия разрешимости l -проблемы, выраженные в терминах чисел α_i и функций g_i , будут зависеть от параметра T , то в случае управляемой системы дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти минимальное значение параметра $T = T^0$ (который играет роль времени переходного процесса), при котором система еще будет управляемой.

Заметим сразу, что указанное преобразование равенства (4) в счетную систему равенств может сразу выявить неразрешимость l -проблемы моментов ни при каком l и T . Действительно, например, если $\alpha_j \neq 0$, а $g_j(T, t) \equiv 0$ для какого-либо фиксированного $j = 1, 2, \dots$ (т. е. в разложении функции $K(y, T, t)$ отсутствует член $g_j(T, t) h_j(y)$, а коэффициент $\alpha_j \neq 0$ при члене $h_j(y)$ в разложении $Q^*(y)$), то никаким управлением ни за какое время нельзя в системе получить желаемое распределение $Q^*(y)$.

Равенство (1) описывает поведение системы с распределенными параметрами при нулевом начальном условии: $Q(x, 0) = Q_0(x) \equiv 0$ ($0 \leq x \leq s$). Однако если начальное условие $Q_0(x) \neq 0$ ($0 \leq x \leq s$), то и в этом случае проблема оптимального управления также легко сводится к проблеме моментов. Действительно, в этом случае состояние управляемой системы может быть описано следующим образом:

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) u(\tau) d\tau + \int_0^s K_0(x, t, \xi) Q_0(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где $K(x, t, \tau)$ имеет тот же смысл, что и в равенстве (1), а $K_0(x, t, \xi)$ — функция, показывающая, как будет меняться $Q(x, t)$, если $u(t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq T$), а $Q_0(x)$ будет иметь вид δ -функции, отличной от нуля в точке ξ ($0 \leq \xi \leq s$), т. е. $Q(x, t) = K_0(x, t, \xi)$ при $Q_0(x) = \delta(\xi)$.

Условие попадания в заданное распределение $Q^*(x)$ запишется следующим образом:

$$Q^*(y) = \int_0^t K(y, t, \tau) u(\tau) d\tau + \int_{s_1}^{s_2} K_0(y, t, \xi) Q_0(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Переносим второй член равенства (10) в левую часть и обозначим

$$Q^*(x, T) = Q^*(x) - \int_0^s K_0(x, T, \xi) Q_0(\xi) d\xi, \quad (11)$$

получим новое равенство

$$Q^*(y, T) = \int_0^T K(y, T, \xi) Q_0(\xi) d\xi, \quad (12)$$

аналогичное равенству (2), в котором роль $Q^*(y)$ играет функция $Q^*(y, T)$, определенная равенством (11) и полностью известная, правда, теперь еще зависящая от параметра T . Используя вышеуказанную процедуру, мы и в этом случае придем к некоторой бесконечномерной проблеме моментов, где уже в общем случае числа α_i зависят от параметра T .

Выше был рассмотрен случай простейшей системы с распределенными параметрами, состояние которой характеризуется одной функцией распределения $Q(y, t)$ и имеется одно сосредоточенное управляющее воздействие $u(t)$.

Однако все сказанное выше легко обобщается на случай более сложных систем с распределенными параметрами, состояние которых описывается несколькими функциями распределения $Q_i(y, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $s_1 \leq y \leq s_2$; $0 \leq t \leq T$), причем система может управляться не только набором r сосредоточенных управляющих воздействий $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), но и, например, распределенными в пространстве управляющими воздействиями $v_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, s$; $s_1 \leq x \leq s_2$; $0 \leq t \leq T$) и т. д.

Кроме того, начальные условия в системе могут быть отличными от нулевых

$$Q_i(y, 0) = Q_{0i}(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n; s_1 \leq x \leq s_2).$$

Таким образом, состояние такой управляемой системы может быть описано следующим выражением:

$$\begin{aligned} Q_i(y, t) = & \int_0^t \sum_{j=1}^r K_{ji}^1(y, t; \tau) u_j(\tau) d\tau + \int_0^t \int_{s_1}^{s_2} \sum_{j=1}^s K_{ji}^2(y, t, \xi, \tau) v_j(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \int_{s_1}^{s_2} \sum_{j=1}^n K_{ji}^3(y, t, \xi) Q_{0j}(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что для большинства линейных систем с распределенными параметрами $(r + s + n)n$ функций

$$\begin{aligned} K_{ij}^1(y, t, \tau) \quad (i = 1, \dots, r); \quad K_{ij}^2(y, t, \xi, \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, s); \\ K_{ij}^3(y, t, \xi) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

и везде $j = 1, 2, \dots, n$ получаются стандартным приемом из числа функций, гораздо меньшего чем $(r + s + n)n$.

В более общем случае заданные распределения Q_i^* ($i = 1, \dots, m$; $1 \leq m \leq n$), которые нужно получить за минимальное время, могут также в свою очередь быть не стационарными, а зависеть еще и от времени t , т. е.

$$Q_i^* = Q_i^*(y, t) \quad (s_1 \leq y \leq s_2; 0 \leq t \leq T; i = 1, 2, \dots, m).$$

§ 3. Оптимальное управление распределенной колебательной системой

В качестве примера применения l -проблемы моментов к решению задач оптимального управления распределенными системами рассмотрим задачу об успокоении распределенной колебательной системы. Дадим точную постановку задачи. Пусть колебания упругой среды описываются одномер-

ным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где параметр a равен скорости распространения возбуждения в данной упругой среде, а функция $Q = Q(y, t)$ описывает отклонение точек колеблющейся среды от положения равновесия в пространственной точке y в момент времени t . Будем рассматривать колебания этой среды в пределах пространственного отрезка $[0, s]$. Вводя новые независимые переменные t' , y' по формулам

$$t' = at, \quad y' = \frac{\pi y}{s},$$

уравнение (1) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y'^2} \quad \left(0 \leq y' \leq \pi; 0 \leq t' \leq \frac{T}{a} \right).$$

Поэтому без ограничения общности можно положить $a = 1$ и $s = \pi$.

Итак, пусть колебательная система описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \quad (0 \leq y \leq \pi; 0 \leq t \leq T). \quad (2)$$

Таким уравнением, например, описывается колебание упругой струны. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется некоторое возбужденное состояние данной среды, описываемое начальными условиями следующего вида:

$$Q(y, 0) = Q_0(y) \quad (0 \leq y \leq \pi), \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=0} = Q_1(y) \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (4)$$

Уравнение (2) описывает начальное распределение отклонений, а уравнение (3) начальное распределение скоростей.

Предположим, что правый конец колеблющейся струны закреплен, т. е.

$$Q(\pi, t) = 0 \quad \text{при всех } t \in [0, T], \quad (5)$$

а управляющее воздействие, которое описывается функцией времени $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$), сосредоточено на левом конце струны, т. е.

$$Q(0, t) = u(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (6)$$

Будем решать следующую задачу оптимального управления данной распределенной системой. Найти такое управление $u(t)$ на фиксированном интервале времени $[0, 2\pi]$, т. е. $T = 2\pi$, чтобы колеблющаяся распределенная среда полностью успокоилась за время $T = 2\pi$, т. е. должны выполняться условия

$$Q(y, 2\pi) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=2\pi} = 0, \quad (8)$$

причем функционал

$$\int_0^{2\pi} u^2(t) dt \quad (9)$$

должен достичь минимального значения.

Функционал (9) имеет смысл энергии управляющего воздействия. Иными словами, задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом: найти управление $u(t)$, чтобы оно полностью успокоило

колеблющуюся систему за время 2π , причем расход энергии на управление был бы минимальным.

Время успокоения струны, равное 2π , выбрано не случайно, так как априори из физических соображений уже ясно, что, вообще говоря, из произвольного начального состояния нельзя успокоить струну за время, меньшее чем 2π .

Это соображение основано на том факте, что скорость распространения возмущения в струне ограничена и в данном случае равна единице, и поэтому время пробега возмущения от источника обратно к нему не меньше 2π . Возможность успокоить струну за время, равное 2π , будет показана ниже путем вывода явной формулы искомого управляющего воздействия $u(t)$, причем энергия этого управления, расходуемая на гашение колебаний, будет минимальной.

Решение этой задачи мы проведем с помощью метода моментов. В следующей главе XVI решение этой задачи будет дано еще и другим методом.

Для этого запишем решение волнового уравнения (2) с учетом начальных и граничных условий (3) — (6).

Это решение $Q(y, t)$ можно представить в виде суммы двух функций

$$Q(y, t) = Q_1(y, t) + Q_2(y, t), \quad (10)$$

где функция $Q_1(y, t)$ описывает свободные колебания струны, возникшие от ненулевых начальных условий (это решение волнового уравнения (2) при начальных условиях (3) и (4) и нулевых краевых условиях $Q(\pi, t) = Q(0, t) = 0$), а функция $Q_2(y, t)$ описывает вынужденные колебания струны, возникшие под действием возмущения $u(t)$, сосредоточенного на левом конце струны, при нулевых начальных условиях (это решение волнового уравнения (2) при краевых условиях (5) и (6) и нулевых начальных условиях $Q(y, 0) = \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$).

Следовательно,

$$Q_1(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos kt + \frac{1}{k} B_k \sin kt \right) \sin ky, \quad (11)$$

где A_k и B_k ($k=1, 2, \dots$) соответственно определяются формулами

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Q_1(y) \sin ky \, dy, \quad (12)$$

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Q_2(y) \sin ky \, dy \quad (k=1, 2, \dots) \quad (13)$$

и

$$Q_2(y, t) = \int_0^t K(y, t-\tau) u(\tau) \, d\tau, \quad (14)$$

где функция

$$K(y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sin ky. \quad (15)$$

Условие успокоения струны после момента времени T можно записать в виде двух условий

$$Q(y, T) = Q_1(y, T) + Q_2(y, T) = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi), \quad (16)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{\partial Q_1}{\partial t} \Big|_{t=T} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (17)$$

Посмотрим сначала, к чему приводит условие (16). С учетом формул (11), (13) и (16):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos kT + \frac{1}{k} B_k \sin kT \right) \sin ky + \\ + \int_0^T \left(+ \frac{2}{\pi} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sin k(T-\tau) u(\tau) d\tau \sin ky = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (18)$$

Производя изменения порядка интегрирования и суммирования и произведя почленное сравнение коэффициентов при функциях $\sin ky$, $k = 1, 2, \dots$, получим бесконечную систему равенств

$$\frac{\pi A_k}{2} \cos kT + \frac{\pi B_k}{2k} \sin kT = - \int_0^T \sin k(T-\tau) u(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Теперь используем условие (17). Получим аналогично

$$- \frac{\pi A_k}{2} \sin kT + \frac{\pi B_k}{2k} \cos kT = - \int_0^T \cos k(T-\tau) u(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Преобразуем правые части последних равенств (19), (20), используя формулы элементарной тригонометрии

$$\sin(kT - k\tau) = \sin kT \cos k\tau - \cos kT \sin k\tau$$

и

$$\cos(kT - k\tau) = \cos kT \cos k\tau + \sin kT \sin k\tau.$$

Получим

$$\frac{\pi A_k}{2} \cos kT + \frac{\pi B_k}{2k} \sin kT = - \sin kT \int_0^T \cos k\tau u(\tau) d\tau + \cos kT \int_0^T \sin k\tau u(\tau) d\tau; \quad (21)$$

$$- \frac{\pi A_k}{2} \sin kT + \frac{\pi B_k}{2k} \cos kT = - \cos kT \int_0^T \cos k\tau u(\tau) d\tau - \sin kT \int_0^T \sin k\tau u(\tau) d\tau. \quad (22)$$

При каждом фиксированном k пара равенств (21) и (22) образует систему двух алгебраических линейных уравнений относительно величин

$$\xi = \int_0^T \cos k\tau u(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad \eta = \int_0^T \sin k\tau u(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Эта система уравнений относительно ξ и η имеет определитель

$$\begin{vmatrix} -\sin kT & \cos kT \\ -\cos kT & -\sin kT \end{vmatrix} = +1. \quad (24)$$

Поэтому

$$\xi = \begin{vmatrix} \frac{\pi A_k}{2} \cos kT + \frac{\pi B_k}{2k} \sin kT & \cos kT \\ -\frac{\pi A_k}{2} \sin kT + \frac{\pi B_k}{2k} \cos kT & -\sin kT \end{vmatrix} = \\ = -\frac{\pi A_k}{2} \cos kT \sin kT - \frac{\pi B_k}{2k} (\sin kT)^2 + \frac{\pi A_k}{2} \sin kT \cos kT - \\ - \frac{\pi B_k}{2k} (\cos kT)^2 = -\frac{\pi B_k}{2k}. \quad (25)$$

Аналогично находим

$$\eta = \begin{vmatrix} -\sin kT & \frac{\pi A_k}{2} \cos kT + \frac{\pi B_k}{2k} \sin kT \\ -\cos kT & -\frac{\pi A_k}{2} \sin kT + \frac{\pi B_k}{2k} \cos kT \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\pi A_k}{2} (\sin kT)^2 - \frac{\pi B_k}{2k} \sin kT \cos kT +$$

$$+ \frac{\pi A_k}{2} (\cos kT)^2 + \frac{\pi B_k}{2k} \cos kT \sin kT = \frac{\pi A_k}{2}. \quad (26)$$

Таким образом, получаем окончательно искомую систему равенств, выражающую проблему моментов в чистом виде

$$\int_0^T \cos k\tau u(\tau) d\tau = -\frac{\pi B_k}{2k}, \quad (27)$$

$$\int_0^T \sin k\tau u(\tau) d\tau = \frac{\pi A_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Нас интересует решение этой проблемы моментов при $T = 2\pi$. Поэтому, чтобы существовало управление $u(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), успокаивающее колеблющуюся струну за время, равное 2π , необходимо и достаточно выполнение бесконечной системы моментных равенств

$$\int_0^{2\pi} \cos k\tau u(\tau) d\tau = -\frac{\pi B_k}{2k}, \quad (29)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\tau u(\tau) d\tau = \frac{\pi A_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (30)$$

где, напомним, A_k и B_k ($k = 1, 2, \dots$) определяются формулами (12) и (13). Требование оптимальности здесь также состоит в том, чтобы удов-

летворить системе (29), (30) при минимальном значении $\int_0^{2\pi} u^2(t) dt$. Но по-

смотрев на систему (29), (30) внимательно, мы замечаем, что условия (29), (30) в действительности задают полный набор коэффициентов Фурье иско-

мой функции $u(t)$ на интервале $[0, 2\pi]$, за исключением одного коэффициен-

та $\int_0^{2\pi} u(\tau) d\tau$, являющегося средним значением функции $u(t)$ на $[0, 2\pi]$. Таким образом, множество функций $u(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), удовлетворяющих системе (29), (30), имеют вид

$$u(t) = c + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{B_k}{k} \cos kt + A_k \sin kt \right), \quad (31)$$

где c — произвольная константа.

Иными словами, система (29), (30) определяет искомое оптимальное управление $u^*(t)$ с точностью до аддитивной константы c .

Заметим, что любая функция $u(t)$ вида (31), взятая в качестве управляющей функции на отрезке времени $[0, 2\pi]$, успокоит данную колеблющуюся систему с произвольными начальными условиями $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$

за время 2π . Таким образом, нам остается выбрать константу c из условия минимума интеграла $\int_0^{2\pi} u^2(t) dt$.

Функцию $u(t)$, определяемую равенством (31), можно записать в виде

$$u(t) = c + u^*(t), \quad (32)$$

где $u^*(t)$, как легко проверить непосредственным интегрированием, имеет среднее значение на $[0, 2\pi]$, равное нулю, т. е.

$$\int_0^{2\pi} u^*(t) dt = 0. \quad (33)$$

Найдем минимум по c интеграла

$$\int_0^T u^2(t) dt = \int_0^T [c + u^*(t)]^2 dt = c^2 T + 2c \int_0^T u^*(t) dt + \int_0^T u^{*2}(t) dt. \quad (34)$$

В силу (33) последнее равенство (34) примет вид

$$\int_0^T u^2(t) dt = c^2 T + \int_0^T u^{*2}(t) dt. \quad (35)$$

Отсюда с очевидностью вытекает, что минимум интеграла $\int_0^T u^2(t) dt$ достигается при $c=0$. Следовательно, искомое оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{B_k}{k} \cos kt + A_k \sin kt \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (36)$$

Путем несложных преобразований оптимальное управление (36) можно непосредственно выразить через начальные распределения $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$. Заметим только сначала, что функции $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ определены по смыслу задачи только на отрезке $[0, \pi]$:

$$Q_1(0) = Q_1(\pi) = Q_2(0) = Q_2(\pi) = 0. \quad (37)$$

Подставим теперь в выражение (36) значения коэффициентов B_k и A_k , определяемых формулами (12), (13). Получим

$$u^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} Q_2(y) \sin ky dy \cos kt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_1(y) \sin ky dy \sin kt \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (38)$$

Первое слагаемое под знаком суммы в формуле (38) можно интегрированием по частям преобразовать. В результате получим

$$u^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^y Q_2(\tau) d\tau \right) \cos ky dy \cos kt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_1(y) \sin ky dy \sin kt \right]$$

ИЛИ

$$u^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^y Q_2(\tau) d\tau \right) \cos ky dy \cos kt + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_1(y) \sin ky dy \sin kt \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (39)$$

Первая сумма в (39) «почти» похожа на разложение в ряд по косинусам $\cos kt$ некоторой функции на интервале $[0, 2\pi]$, а вторая сумма в (52) также «почти» похожа на разложение в ряд по синусам $\sin kt$ некоторой другой функции на том же интервале $[0, 2\pi]$. Таким образом, мы придем к желаемому результату (выразить $u^*(t)$ непосредственно через $Q_2(\tau)$ и $Q_1(\tau)$ в наиболее простом виде), если коэффициент $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^y Q_2(\tau) d\tau \right) \cos ky dy$ при $\cos kt$ запишем в виде обычного коэффициента разложения по $\cos kt$

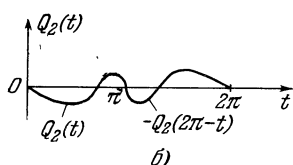
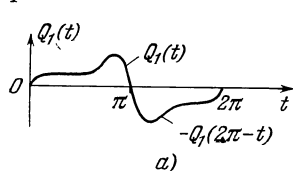


Рис. 15.2.

на $[0, 2\pi]$, а коэффициент $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_1(y) \sin ky dy$ при $\sin kt$ запишем в виде обычного коэффициента разложения по $\sin kt$ на $[0, 2\pi]$. Но это легко сделать, введя новую функцию $\bar{Q}_2(y)$, определенную на интервале $[0, 2\pi]$ следующим образом:

$$\bar{Q}_2(y) = \begin{cases} Q_2(y) & (0 \leq y \leq \pi), \\ -Q_2(2\pi - y) & (\pi \leq y \leq 2\pi). \end{cases} \quad (40)$$

Аналогично введем новую функцию $\bar{Q}_1(y)$ по формуле

$$\bar{Q}_1(y) = \begin{cases} Q_1(y) & (0 \leq y \leq \pi), \\ -Q_1(2\pi - y) & (\pi \leq y \leq 2\pi). \end{cases} \quad (41)$$

Способ продолжения этих функций показан на рис. 15.2.

При этом в силу свойства (37) эти функции останутся даже непрерывными.

В терминах этих новых функций $\bar{Q}_1(y)$ и $\bar{Q}_2(y)$ формулу (39) можно подписать в виде

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^y \bar{Q}_2(\tau) d\tau \right) \cos ky dy \cos kt + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \bar{Q}_1(y) \sin ky dy \sin kt \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (42)$$

Первая сумма (без коэффициента $1/2$) в формуле (42) есть разложение по $\cos kt$ на $[0, 2\pi]$ функции $\int_0^t \bar{Q}_2(\tau) d\tau$, за вычетом ее среднего значения,

равного $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \bar{Q}_2(\tau) d\tau dt$, а вторая сумма в (42) есть разложение в ряд по $\sin kt$ на $[0, 2\pi]$ в точности величины $\frac{1}{2} \bar{Q}_1(t)$. Таким образом, мы приходим к окончательному результату. Оптимальное по минимуму энергии

управление $u(t)$ за время 2π , сосредоточенное на левом конце струны и полностью гасящее колебания струны с начальным распределением отклонений $Q_1(y)$ и начальным распределением скоростей $Q_2(y)$ на отрезке $[0, \pi]$, имеет вид

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \bar{Q}_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \bar{Q}_2(y) dy - \frac{1}{4} \int_0^\pi \bar{Q}_2(y) dy \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad (43)$$

где $\bar{Q}_1(t)$ и $\bar{Q}_2(t)$, изображенные на рис. 2.15, а и б, связаны с $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ соответственно формулами (40) и (41).

Вычислим теперь то минимальное значение энергии $\int_0^{2\pi} u^{*2}(t) dt$, которое необходимо для полного успокоения струны. Этот интеграл легко вычислить используя формулу (36). Действительно, возводя в квадрат обе части равенства (36) и интегрируя обе части от 0 до 2π на основании ортогональности *) систем функций $\sin kt$, $\cos kt$ на интервале $[0, 2\pi]$, получим

$$\int_0^{2\pi} u^{*2}(t) dt = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_k}{k} \right)^2. \quad (44)$$

Интеграл $\int_0^{2\pi} u^2(t) dt$ можно вычислить и непосредственно через начальные функции $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$, определенные на отрезке $[0, \pi]$. Действительно из формулы (43) непосредственным выведением в квадрат правой части и интегрирования находим

$$\int_0^{2\pi} u^{*2}(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [\bar{Q}_1(t)]^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^t \bar{Q}_2(y) dy - \int_0^\pi Q_2(y) dy \right]^2 dt \quad (45)$$

или

$$\int_0^{2\pi} u^{*2}(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \bar{Q}_1^2(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^t \bar{Q}_2(y) dy - \int_0^\pi Q_2(y) dt \right]^2 dt. \quad (46)$$

Последняя формула приобретает особенно простой вид, если среднее значение функции $Q_2(y)$ (т. е. распределение начальных скоростей) равно нулю, т. е.

$$\int_0^\pi Q_2(y) dy = 0. \quad (47)$$

Тогда

$$\min \int_0^{2\pi} u^2(t) dt = \int_0^{2\pi} u^{*2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi Q_1^2(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\int_0^y Q_2(y) dy \right]^2 dt. \quad (48)$$

*) Система функций $g_1(t)$, $g_2(t)$, ..., $g_n(t)$, ... называется ортогональной на отрезке $[t_1, t_2]$, если для любых i и j ($i \neq j$; $i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots$) выполняется равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0.$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть начальные условия для струны таковы, что имеет место лишь одно ненулевое распределение скоростей, которое описывается функцией

$$Q_1(y) = \sin 2y \quad (0 \leq y \leq \pi), \quad (49)$$

а начальное распределение отклонений равно нулю:

$$Q_2(y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (50)$$

Тогда по формуле (43) получаем, что оптимальное управление

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2y dy = -\frac{1}{4} [\cos 2t - 1] \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (51)$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi} u^{*2}(t) dt = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} (\cos 2t - 1)^2 dt = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \cos^2 2t dt + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} = \frac{3}{16} \pi. \quad (52)$$

Для вычисления этого же интеграла можно воспользоваться формулой (48), так как здесь среднее значение $Q_2(y) = \sin 2y$ на $[0, 2\pi]$ равно нулю. Имеем

$$\int_0^{2\pi} u^{*2}(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\int_0^t \sin 2y dy \right]^2 dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (\cos 2t - 1)^2 dt = \frac{3}{16} \pi. \quad (53)$$

В § 5 мы покажем, что метод моментов может быть также применен и к задачам оптимального управления многомерными колебательными объектами.

§ 4. Оптимальное управление распределением температуры

Интересной задачей, имеющей большое прикладное значение, является задача об оптимальном управлении нагревом массивных тел. С задачей нагрева массивных тел имеют дело во всех основных отраслях тяжелой индустрии, поэтому внедрение методов оптимизации тепловых процессов дает большой экономический эффект.

Дадим точную постановку задачи оптимального управления распределения температуры в массивном (в теплотехническом смысле) теле простейшего вида.

Рассмотрим задачу о нагревании бесконечной пластины толщиной $2s$. Между поверхностью пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона, т. е. количество тепла, передаваемое в единицу времени через единицу поверхности из окружающей среды к телу, прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой.

Выберем начало координат в середине пластины, так как теплообмен между поверхностями и окружающей средой происходит одинаково (симметричная задача).

Обозначим температуру окружающей среды через $\tilde{u}(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq \tau_0$). Эта функция и будет нашим управляющим воздействием. Практический интерес представляет случай ограниченной температуры окружающей среды. Поэтому подчиним $\tilde{u}(\tau)$ следующему ограничению:

$$A_1 \leq \tilde{u}(\tau) \leq A_2 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0), \quad (1)$$

где A_2, A_1 — соответственно максимально и минимально возможные температуры нагрева. Распределение температуры по сечению тела в точке ξ в момент времени τ будем обозначать через $\theta = \theta(\xi, \tau)$. Далее будем считать, что в начальный момент времени температура в каждой точке пластины постоянна и равна

$$\theta_0(\xi, 0) = \theta_0 = \text{const.}$$

Распределение температур в теле, которое требуется получить в результате нагревания, считаем также равномерным по сечению тела и равным заданной температуре $\theta_s(\xi) = \text{const} = C$ (рис. 15.3).

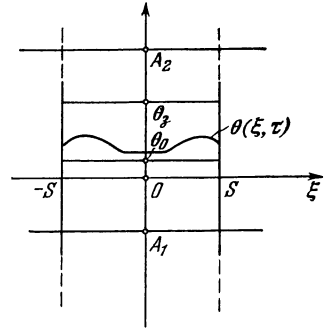


Рис. 15.3.

Процесс нагревания пластины будет описываться уравнением теплопроводности со следующими начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad (2)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0, \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(+s, \tau)}{\partial \xi} + \alpha [\tilde{u}(\tau) - \theta(+s, \tau)] = 0, \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(-s, \tau)}{\partial \xi} + \alpha [\tilde{u}(\tau) - \theta(-s, \tau)] = 0, \quad (-s \leq \xi \leq +s, \tau > 0), \quad (5)$$

где $\tilde{u}(\tau)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция времени, отесненная условием (4); a — коэффициент температуропроводности $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{час}} \right]$; λ — коэффициент теплопроводности $\left[\frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}} \right]$; α — коэффициент теплоотдачи $\left[\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{час} \cdot \text{град}} \right]$.

Коэффициенты a и λ связаны соотношением $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, где ρ — плотность в $\text{кг}/\text{м}^3$; c — теплоемкость в $\text{ккал}/\text{кг} \cdot \text{град}$.

Температуры A_2, A_1, θ_0, C удовлетворяют следующим очевидным неравенствам:

$$A_2 > A_1, \quad C > \theta_0.$$

Последнее означает, что мы в дальнейшем будем всегда заниматься задачей нагрева. (Очевидно, что полученные результаты легко могут быть использованы и для решения задачи оптимального охлаждения.) Кроме того, считаем выполненным следующее неравенство:

$$A_1 < C < A_2, \quad (6)$$

т. е. температура C , до которой мы греем тело, всегда расположена внутри области допустимых температур нагрева.

Перепишем нашу задачу в безразмерном виде. Для этого произведем в (2) — (5) замену переменных, вводя следующие принятые в теплотехнике безразмерные координаты:

$t = \frac{a\tau}{s^2}$ — безразмерное время (критерий Фурье Fo) (в дальнейшем мы будем называть везде t просто временем);

$y = \frac{\xi}{s}$ — безразмерная толщина ($-1 \leq y \leq +1$) и следующие безразмерные критерии:

$b = \frac{\alpha}{\lambda} s$ — критерий Био (Bi) и два безразмерных температурных критерия:

$$v = \frac{2(C - \theta_0)}{A_2 - A_1} \quad (\text{критерий начального условия}),$$

$$\kappa = \frac{A_2 + A_1 - 2C}{A_2 - A_1} \quad (\text{критерий несимметрии нагрева}).$$

Учитывая (6), нетрудно видеть, что $|\kappa| < 1$. Новую безразмерную температуру обозначим

$$Q(y, t) = \frac{2 \left[\theta \left(sy, \frac{S^2}{a} t \right) - C \right]}{A_2 - A_1}.$$

Новое управление

$$u(t) = \frac{2 [\tilde{u} - C]}{A_2 - A_1}.$$

Произведем сдвиг начала координат на оси температур в точку $\frac{2C}{A_2 - A_1}$. В дальнейшем все безразмерные температуры будут отсчитываться от этой точки. Следовательно, целью нагрева будет теперь всегда нулевое распределение температур в пластине $Q_3(y) = 0$. Сделав все упомянутые выше замены переменных, получим следующую теперь уже безразмерную задачу:

$$\frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(y, t)}{\partial y^2}, \quad (7)$$

$$Q(y, 0) = -v, \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q(+1, t)}{\partial y} = b [u(t) - Q(+1, t)], \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q(-1, t)}{\partial y} = b [u(t) - Q(-1, t)] \quad (-1 \leq y \leq +1), \quad (10)$$

где $u(t)$ стеснено теперь условием

$$-(1 - \kappa) \leq u(t) \leq 1 + \kappa. \quad (11)$$

Известно, что решение уравнения теплопроводности (7) с граничными условиями (8) — (10) при произвольной кусочно-непрерывной функции времени $u(t)$ имеет вид

$$Q(y, t) = -vE(y, t) + \int_0^t K(y, t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (-1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t), \quad (12)$$

где

$$E = E(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\mu_k^2 t} \cos \mu_k y,$$

$$A_k = \frac{2 \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и числа μ_k , $k = 1, 2, \dots$, являются различными действительными положительными корнями характеристического уравнения

$$\frac{1}{b} \mu = \operatorname{ctg} \mu, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad (13)$$

Корни этого уравнения определяются графическим путем как точки пересечения графиков котангенсоиды $y_1 = \operatorname{ctg} \mu$ и прямой $y_2 = \frac{1}{b} \mu$.

Легко видеть, что при любом фиксированном b ($b > 0$) с ростом номера k числа μ_k асимптотически стремятся к $(k - 1) \pi$.

Функция $E = E(y, t)$ описывает изменение распределения температуры тела по его сечению и во времени при единичном начальном распределении температуры

$$E(y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \mu_k y = 1 \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (14)$$

и нулевой температуре окружающей среды $u(t) = 0$ ($0 \leq t \leq t_0$).

Нужно отметить, что формула (12) носит общий характер. Формулами такого вида описываются все процессы в линейных стационарных системах с распределенными параметрами с ненулевыми начальными условиями, меняется при этом лишь конкретное выражение функций $E(y, t)$ и $K(y, t)$.

Заметим кстати, что к рассматриваемой задаче относится случай, когда управляющим воздействием, которое заставляет тело нагреваться, служит не температура окружающей среды $u(t)$, а температура поверхности самого тела $Q(1, t) = Q(-1, t)$. Действительно, этот случай легко сводится к рассмотренному. Для этого достаточно положить $b = \infty$. Равенства (9), (10) в этом случае сразу дадут

$$Q(1, t) = Q(-1, t) = u(t). \quad (15)$$

Иными словами можно сказать, что при бесконечно большом (достаточно большом) значении критерия Био (практически $b > 100$) температура поверхности равна (почти равна) температуре окружающей среды $u(t)$. Поэтому можно считать, что управление процессом происходит путем непосредственного изменения температуры поверхности массивного тела.

В этом случае, как видно из уравнения (13),

$$\mu_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поэтому

$$A_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и

$$Q(y, t) = \frac{4}{\pi} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 t}{4}} \cos(2k-1) \frac{\pi}{2} y + \int_0^t K(y, t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (-1 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq t_0), \quad (16)$$

где

$$K(y, t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (2k-1) e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 t}{4}} \cos(2k-1) \frac{\pi}{2} y.$$

Сформулируем теперь задачу оптимального управления. Задано уравнение теплопроводности (7) с граничными условиями (8), (9), (10). Требуется найти управление, стесненное условием (11), которое обеспечило бы за минимальное время $T = \frac{a\tau_0}{s^2}$ выполнение равенства

$$Q(y, T) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad -1 \leq y \leq +1.$$

Задача быстродействия для уравнения теплопроводности (7) может быть сведена к l -проблеме моментов.

Меняя местами знаки суммирования и интегрирования в выражении (12), запишем решение уравнения (7) с граничными условиями (8) — (10) в виде

$$Q(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n y \left[-ve^{-\mu_n^2 t} + \mu_n^2 \int_0^t u(\xi) e^{-\mu_n^2(t-\xi)} d\xi \right]. \quad (17)$$

Для выполнения тождества $Q(y, T) = 0$ при всех $-1 \leq y \leq +1$ необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль все члены ряда решения (17), т. е. чтобы выполнялось бесконечное число равенств вида

$$ve^{-\mu_n^2 T} = \mu_n^2 \int_0^T u(\xi) e^{-\mu_n^2(T-\xi)} d\xi \quad (n=1, 2, \dots) \quad (18)$$

или, сокращая на $e^{-\mu_n^2 T}$, получим

$$\frac{v}{\mu_n^2} = \int_0^T u(\xi) e^{\mu_n^2 \xi} d\xi \quad (n=1, 2, \dots), \quad (19)$$

где $u(\xi)$ стеснена условием (11).

Таким образом, задача оптимального управления свелась к следующей проблеме моментов. Для системы чисел $\{v/\mu_n^2\}$ ($n=1, 2, \dots$) и независимых функций $\{e^{\mu_n^2 \xi}\}$ ($0 \leq \xi \leq T$; $n=1, 2, \dots$) найти функцию $u(t)$ ($0 \leq t \leq \varphi_0$), стесненную условием (11), такую, что равенство (19) выполнено при любом n . При этом время T должно быть минимально возможным.

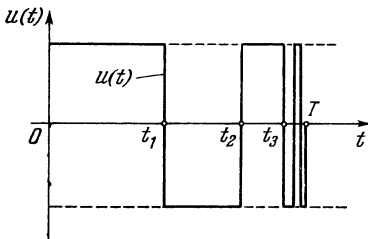


Рис. 15.4.

Решить эту проблему моментов (19), т. е. найти оптимальное управление $u(t)$ в замкнутом виде трудно. Однако для практических целей это в конце концов и не очень важно. Можно показать, что оптимальное управление для сформулированной выше задачи существует. Оптимальное управление $u(t)$ имеет вид кусочно-постоянной функции времени, принимающей поочередно лишь два своих предельных значения $1 + \kappa$ и $-1 + \kappa$. Имеется еще одна интересная особенность оптимального управления $u(t)$ для этой задачи. Она состоит в том, что число интервалов знакопостоянства функции $u(t)$ бесконечно, хотя общее время оптимального процесса есть определенная конечная величина T . Иными словами, оптимальное управление $u(t)$ на конечном отрезке времени $[0, T]$ имеет бесконечное счетное число точек переключения, причем точки переключения довольно быстро накапливаются лишь к концу отрезка $[0, T]$, т. е. к точке $t = T$ (рис. 15.4).

Основное же время переходного процесса занимают лишь первые два-три интервала знакопостоянства. Они составляют более 99% всего времени переходного процесса. Это явление объясняется гораздо более быстрым убыванием функции $e^{-\mu_n^2 t}$ во времени при $n=4, 5, 6, \dots$ по сравнению с первыми двумя-тремя функциями $e^{-\mu_1^2 t}$, $e^{-\mu_2^2 t}$ и $e^{-\mu_3^2 t}$. Это явление используется для приближенного определения оптимального управления $u(t)$, дающего высокую точность приближения истинного распределения температуры в теле к заданному равномерному распределению в конце переходного процесса. Этот подход тем более разумен из-за того, что технически

реализовать систему управления с бесконечным числом переключений невозможно из-за наличия множества неучтенных промежуточных звеньев с малыми параметрами (по отношению к основному инерционному объекту — нагревательному массивному телу).

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению конечномерной l -проблемы моментов

$$\int_0^T e^{\mu_n^2 t} u(t) dt = \frac{\nu}{\mu_n^2} \quad (n = 1, 2, \dots, m), \quad (20)$$

где m равно 2 или 3. Если для простоты положить $\kappa = 0$, то решение этой проблемы можно записать в виде

$$u(t) = \text{sign} \sum_{n=1}^m \xi_n e^{\mu_n^2 t}, \quad (21)$$

где ξ_1, \dots, ξ_m и время T определяются (см. § 1 этой главы) из решения следующей задачи минимизации по ξ_1, \dots, ξ_m . Найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_m} \int_0^T \left| \sum_{n=1}^m \xi_n e^{\mu_n^2 t} \right| dt = \int_0^T \left| \sum_{n=1}^m \xi_n e^{\mu_n^2 t} \right| dt = 1 \quad (22)$$

при условии

$$\sum_{n=1}^m \xi_n \frac{\nu}{\mu_n^2} = 1. \quad (23)$$

Из (20) видно, что оптимальное управление $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) определяется однозначно нулями $t_1, t_2, \dots, t_m = T$ функции $\sum_{n=1}^m \xi_n e^{\mu_n^2 t}$ на отрезке $[0, T]$. Можно показать, что число нулей этой функции, вообще говоря, не более чем m , а в данной задаче оно в точности равно m , т. е. $p = m$. С помощью числовых методов минимизации (21) при условии (22) (см. § 1 этой главы) можно найти в конце концов точки переключения t_1, t_2, \dots, t_m оптимального управления $u(t)$ как функции от исходных параметров задачи b, ν и κ .

§ 5. Оптимальное управление двумерной распределенной колебательной системой

Методы оптимизации распределенных колебательных систем, рассмотренные в предыдущем параграфе, могут быть обобщены и на более сложные, в частности многомерные, управляемые системы. Здесь в качестве примера мы рассмотрим одну простую задачу оптимального управления двумерной распределенной колебательной системой. Как будет видно, при решении такого рода задач начинают проявляться уже некоторые новые особенности проблемы, которые объясняются сложностью задачи и связанные с характером управляемого объекта (расположением управляющих воздействий) и той постановкой задачи оптимизации, которую надлежит решить. В этом параграфе мы рассмотрим две задачи. Дадим формулировку первой задачи.

Пусть управляемый процесс описывается двумерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (2)$$

$$Q(x, 0, t) = u(t), \quad \frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pi} = 0, \quad (3)$$

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y), \quad \frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = Q_1(x, y) \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq t \leq T).$$

На управляющее воздействие $u(t)$ наложены ограничения

$$\|u\|_p \leq l, \quad (4a)$$

где $\|u\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p}$; l — заданное положительное число и T — время управления процессом, при котором

$$Q(x, y, T) = 0, \quad \frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (1) с условиями (2) — (4) записывается в виде

$$Q(x, y, t) = u(t) \quad \text{при } y = 0;$$

$$Q(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{0m} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) y \int_0^t \pi A_{0m} \sin \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) (t - \tau) \right] u(\tau) d\tau +$$

$$\mp \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (B_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{nm}} t + \bar{B}_{nm} \sin \sqrt{\lambda_{nm}} t) \times$$

$$\times A_{nm} \cos nx \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) y \quad \text{при } y \neq 0, \quad (6)$$

где $\lambda_{mn} = n^2 + \left(m + \frac{1}{2} \right)^2$ и коэффициенты B_{nm} , \bar{B}_{nm} определяются из условий (4). Коэффициенты A_{nm} находятся из условия

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left[A_{nm} \cos nx \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) y \right]^2 dx dy = 1.$$

Будем считать, что функция $Q_0(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и y и имеет кусочно-непрерывную третью производную, функция $Q_1(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x и y и имеет кусочно-непрерывную вторую производную и, наконец, функция $u(t)$ дважды кусочно дифференцируема. Заметим, что выражение (6) есть решение волнового уравнения (1) с условиями (2) — (4) в том смысле, что в областях, где $Q(x, y, t)$ дважды дифференцируема по x , y и t , она удовлетворяет уравнению (1). Причем функция $Q(x, y, t)$ дважды дифференцируема по x , y и t в таких точках, у которых координаты x и y произвольные, а координата t принадлежит отрезкам, на которых функция $u(t)$ дважды дифференцируема. Докажем факт, что (6) есть решение уравнения (1) с условиями (2) — (4). Для этого преобразуем выражение (6), интегрируя по частям два раза следующий интеграл:

$$\int_0^t \pi A_{0m} \sin \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) (t - \tau) \right] u(\tau) d\tau.$$

Затем, используя равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi A_{0m}^2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) y = 1,$$

непосредственной подстановкой $Q(x, y, t)$ в (1) убеждаемся, что $Q(x, y, t)$ есть решение волнового уравнения.

Для того чтобы выполнялись условия (5), необходимо и достаточно соблюдение следующих равенств:

$$\int_0^T \pi A_{0m} \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)(T - \tau)\right] u(\tau) d\tau + B_{0m} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) T + \bar{B}_{0m} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) T = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^T \pi A_{0m} \cos\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)(T - \tau)\right] u(\tau) d\tau + \bar{B}_{0m} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) T - B_{0m} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) T = 0, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{nm}} T + \bar{B}_{nm} \sin \sqrt{\lambda_{nm}} T &= 0, \\ \bar{B}_{nm} \cos \sqrt{\lambda_{nm}} T - B_{nm} \sin \sqrt{\lambda_{nm}} T &= 0 \\ (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Легко видеть, что для выполнения равенства (9) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты B_{nm} , \bar{B}_{nm} равнялись нулю. Отсюда сразу же следует, что полностью систему успокоить нельзя. Можно погасить только часть колебаний вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} (B_{0m} \cos \sqrt{\lambda_{0m}} t + \bar{B}_{0m} \sin \sqrt{\lambda_{0m}} t) A_{0m} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) y. \quad (10)$$

Отметим, что колебание считается *направленным*, если оно зависит только от одной пространственной координаты. Теперь задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом.

Найти такое управление $u(t)$, которое назовем оптимальным, чтобы погасить направленные составляющие волн за минимальное время T при ограничении (4а).

Преобразуя (7), (8), получим, что эта задача эквивалентна следующей: найти функцию $u(t)$ и минимальное время T такие, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_0^T \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau = \frac{B_{0m}}{\pi A_{0m}} = \xi_m, \quad (11)$$

$$\int_0^T \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau = -\frac{\bar{B}_{0m}}{\pi A_{0m}} = \eta_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$\|u(t)\|_p \leq l. \quad (13)$$

Будем решать задачу, тесно связанную с l -проблемой моментов, выраженной соотношениями (11) — (13).

Пусть T фиксировано, требуется найти функцию $u(t)$, которая удовлетворяет равенствам (11), (12) и имеет минимальное значение интеграла $\int_0^T |u(t)|^p dt$, $p = 1, 2, \dots$

Таким образом, мы пришли к задаче аналогичной случаю одномерного волнового процесса, рассмотренной в § 3 этой главы (равенства (29), (30)).

Можно показать, что оптимальное управление $u(t)$ в этом случае имеет вид

$$u(t) = M |f_0(t)|^{q-1} \operatorname{sign} f_0(t), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, \quad q = 1, 2, \dots,$$

где функция $f_0(t)$ может быть представлена в виде ряда на $[0, T]$ по функциям $\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)$, $\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и M — постоянное число.

Отсюда получаем, что $u(t)$ имеет период 4π и $u(t + 2\pi) = -u(t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi$, $T = 2\pi n + \varepsilon$.

Преобразуем формулы (11), (12) при $T \geq 2\pi$, $0 < \varepsilon < 2\pi$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau &= \int_0^{2\pi n + \varepsilon} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau = \\ &= (n+1) \int_0^\varepsilon \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau + n \int_0^{2\pi} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau F(\tau) d\tau = \xi_m. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично получим

$$\int_0^T \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau u(\tau) d\tau = \int_0^{2\pi} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \tau F(\tau) d\tau = \eta_m, \quad (15)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} (n+1)u(t) & \text{при } t \in [0, \varepsilon], \\ nu(t) & \text{при } t \in (\varepsilon, 2\pi]. \end{cases} \quad (16)$$

Из (14), (15) находим

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\xi_m \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t + \eta_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) t \right). \quad (17)$$

Используя формулы (16), (17), найдем

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} F(t) & \text{при } t \in [0, \varepsilon], \\ \frac{1}{n} F(t) & \text{при } t \in (\varepsilon, 2\pi]. \end{cases} \quad (18)$$

Функция $u(t)$ на отрезок $[2\pi, 4\pi]$ продолжается по формуле $u(t + 2\pi) = -u(t)$, а далее с периодом 4π . При $T < 2\pi$, используя метод, приведенный в § 5, можно получить:

а) если $F(t) = 0$ почти всюду на множестве $\varepsilon_1 \leq t \leq 2\pi$ и $T \in [\varepsilon_1, 2\pi]$, то

$$u(t) = F(t) \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (19)$$

б) при $T < \varepsilon_1$ функции $u(t)$, являющейся решением задачи, не существует.

Обозначим через $N(T)$ норму функций $u(t)$, являющуюся решением задачи. Используя (18), (19), можно вычислить функцию $N(T)$. Тогда задачу оптимального управления, выраженную соотношениями (11) — (13), можно решить следующим образом. Так как функция $N(T)$ известна, то можно найти минимальное T , для которого будет выполняться $N(T) \leq l$. Тогда оптимальное управление найдется по формулам (19), (18).

Можно доказать, что формулы (18), (19) остаются в силе, когда на $u(t)$ наложено ограничение $\max_{[0, T]} |u(t)| \leq l$.

Пр и м е р. Пусть дано

$$Q(x, y, 0) = \sin x \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) y, \quad \frac{\partial Q(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad |u(t)| \leq \frac{1}{\pi}.$$

Требуется погасить колебания, обусловленные заданными начальными распределениями. Функцию $Q(x, y, 0)$ можно представить в виде

$$Q(x, y, 0) = \frac{2}{\pi} \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) y + \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) y \left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right).$$

Отсюда следует, что можно погасить лишь «часть» колебаний, задаваемых первым слагаемым $Q_0^1 = \frac{2}{\pi} \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) y$ в предыдущей формуле. Используя (16), находим, что $F(t) = \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) t$.

Из (18) и (19) видно, что при ограничении $|u(t)| \leq \frac{1}{\pi}$ минимальное время $T = 2\pi$. Отсюда на основании (19) имеем

$$u(t) = \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right) t}{\pi}.$$

После действия этого управления в системе останутся колебания, которые обусловлены вторым слагаемым в начальном распределении

$$Q_0^2 = \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) y \left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right).$$

Вычислим два интеграла

$$\int_0^\pi \int_0^\pi [Q_0^2(x, y)]^2 dx dy = 0,46 \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \int_0^\pi Q(x, y, 0) dx dy = 2,46.$$

Отсюда видно, что среднеквадратичные значения отклонений уменьшились примерно в пять раз по сравнению с их начальными значениями.

Г л а в а XVI

ФИНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

§ 1. Постановка задачи

Как было показано в гл. XIV, весьма важной является задача определения таких управляющих воздействий из некоторого заданного класса, под действием которых система перешла из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за определенное время T . С такого рода задачами мы сталкиваемся при решении задач оптимального управления, когда, кроме минимизации некоторого функционала, требуется перевести систему из одного состояния в другое заданное. Это так называемая *проблема управляемости системы*. Первым основным вопросом в этой проблеме является вопрос о существовании такого управления (хотя бы одного), переводящего систему из начального состояния в заданное конечное состояние. Если такое управление из заданного класса управлений существует, то мы говорим, что данная система является управляемой относительно заданных начального и конечного состояний. В противном случае говорят, что система является неуправляемой относительно заданных начального и конечного состояний. В этой связи весьма важно найти четкие легко проверяемые критерии управляемости.

Если данная система оказывается управляемой, то возникает следующая задача: найти хотя бы одно управление из заданного класса управлений, переводящее систему из начального состояния в заданное состояние за конечное время, в точности равное заданному значению. Более общая задача состоит в том, чтобы описать все множество управлений заданного класса, решающее задачу управляемости (например, найти аналитические формулы для этого множества искомых управлений).

Такую задачу мы будем называть *задачей финитного управления*.

Если такая задача будет решена, то к проблеме определения оптимального управления можно подойти с другой стороны. Действительно, например, при решении задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина сначала находят управления для множества экстремалей, а затем из этого множества необходимо выделить ту экстремаль (путем подбора начальных условий этой системы дифференциальных уравнений), которая проходит через заданные начальную и конечную точки фазового пространства. Однако к решению задачи оптимизации можно подойти с другого конца — сначала найти все множество допустимых управлений, которое осуществляет переход системы из начального состояния в конечное, а затем из этого множества управлений выбрать то управление, которое экстремизирует (минимизирует или максимизирует) заданный функционал. Именно такой подход соответствует решению вариационных задач с помощью известных прямых методов.

В этом параграфе мы будем рассматривать постановку задачи финитного управления для линейных стационарных неавтономных управляемых

систем с сосредоточенными параметрами, суть которой состоит в следующем: найти такое управляющее воздействие из определенного заданного класса управлений K , которое переводит линейную стационарную неавтономную систему из определенного начального состояния в другое заданное состояние за определенное фиксированное время, в точности равное T .

Задачи финитного управления распределенными системами рассмотрим в следующих параграфах.

Дадим точную постановку этой задачи.

Пусть задана управляемая система, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + bu + F, \quad (1)$$

где вектор x характеризует состояние управляемой системы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad (2)$$

матрица A является квадратной матрицей $n \times n$

$$A = \| a_{ik} \|; \quad (3)$$

величина u характеризует скалярное управляющее воздействие

$$u = u(t),$$

определенное на отрезке времени $[0, T]$. (Решение этой задачи без труда обобщается на случай векторного управляющего воздействия $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, поэтому мы для простоты будем предполагать управление u скаляром.)

Матрица-столбец b описывает коэффициенты, с которыми управление u входит в каждое скалярное уравнение движения объекта

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Наконец, внешнее возмущающее воздействие F , оказываемое на управляющую систему, является заданной функцией времени $F = F(t)$ ($0 \leq t \leq T$)

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Будем предполагать, что все функции $F_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) интегрируемы с квадратом, т. е. существует $\int_{-\infty}^{\infty} |F_i(t)|^2 dt < \infty$ ($i = 1, \dots, n$).

Пусть задан некоторый класс K допустимых управлений $u(t)$, определенных на отрезке времени $[0, T]$. Например, классом K может быть класс всех функций $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$), интегрируемых в квадрате на этом отрезке, т. е. класс тех функций $u(t)$, для которых существует интеграл

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt < \infty. \quad (6)$$

Такой класс K функций обозначается $L_2 [0, T]$.

Теперь можно точно сформулировать нашу задачу. Требуется найти такое управление $u(t)$, принадлежащее заданному классу K , чтобы изображающая точка $x(t)$ системы (1), двигаясь из начальной заданной точки $x(0) = x_0$, совпала с другой заданной точкой x^* в заданный фиксированный момент времени T , т. е. чтобы $x(T) = x^*$.

Без ограничения общности можно считать, что $x^* = 0$ и в конечный момент T требуется выполнить условие $x(T) = 0$, т. е. привести изображающую точку $x(t)$ системы (1) в начало координат в момент T . Действительно, вводя новую функцию y по формуле $y = x - x^*$, мы приходим относительно функции y к системе того же вида, что (1), но с нулевым конечным условием. Так как нас интересует движение системы (1) лишь на конечном отрезке времени $t \in [0, T]$, то после момента времени T , т. е. при $t > T$, управление $u(t)$, соответствующее ему состояние $x(t)$ и возмущение $F(t)$ можно считать равными нулю.

Чтобы в дальнейшем применить преобразование Фурье к системе (1) с начальным условием $x(0) = x_0$, доопределим функции $x(t)$, $u(t)$ и $F(t)$ также тождественным нулем при $t < 0$. Итак, функции $x(t)$, $u(t)$ и $F(t)$ равны тождественно нулю всюду вне отрезка времени $[0, T]$.

Такие функции, которые равны нулю всюду, за исключением некоторого конечного (финитного) отрезка своего определения, называются в математике *финитными*. Поэтому для краткости в дальнейшем управление $u(t)$, определенное на отрезке $[0, T]$ и решающее поставленную выше задачу, будем называть финитным управлением за время T или просто *финитным управлением*. Саму задачу определения финитного управления будем называть задачей финитного управления.

Задача финитного управления по сути дела решает полностью проблему управляемости рассматриваемой системы (1).

Решение задачи финитного управления основывается на применении к системе (1) двустороннего преобразования Фурье, теоремы Винера — Пэли (или более общей теоремы Винера — Пэли — Шварца), теории целых функций комплексного переменного и теории интерполирования функций комплексного переменного.

Ценность этого подхода состоит в том, что можно легко и естественно получить критерии управляемости системы типа (1), а также описать в аналитическом виде все множество управлений из некоторого допустимого класса, решающих задачу финитного управления, т. е. описать все множество искомых финитных управлений $u(t)$. Для систем вида (1) задача финитного управления решается до конца.

Гораздо более проблематичным является решение задач финитного управления для систем с распределенными параметрами. Одну из таких задач об успокоении распределенных в пространстве колебаний (задачу об успокоении колеблющейся струны) мы рассмотрим в § 4 этой главы.

Подобные методы уже использовались ранее в других областях техники и, в частности, в радиотехнике.

§ 2. Финитное управление системами с сосредоточенными параметрами. Основы метода

Перейдем к изложению метода решения поставленной задачи.

Сделаем еще одно важное замечание. При постановке задачи финитного управления вначале предполагалось, что координаты x_1, \dots, x_n вектора x , коэффициенты a_{ij} матрицы A , b , управление u и функция $F(t)$ принимают действительные значения. Однако в дальнейшем можно сделать и более общее предположение, что x_1, \dots, x_n , a_{ij} , b_i и F принимают комплексные значения. Например, можно рассматривать, что изображающая

точка x находится не в действительном n -мерном пространстве, а в комплексном n -мерном фазовом пространстве, т. е. каждая координата x_i точки x имеет вид $x_i = \xi_i + j\eta_i$.

Кроме того, так как впоследствии мы будем использовать теорему Винера — Пэли, которая формулируется в терминах функций, определенных на симметричных относительно начала координат отрезках $[-\sigma, \sigma]$, то и мы нашу исходную систему (1) § 1 преобразуем путем сдвига по времени так, чтобы все входящие в нее функции были определены также на симметричном отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ длины T , т. е. положим $\sigma = \frac{T}{2}$.

Иными словами, вместо $x(t)$ рассмотрим $x^*(t)$ ($x^*(t) = x(t + \sigma)$), вместо $u(t)$ рассмотрим $u^*(t)$ ($u^*(t) = u(t + \sigma)$), вместо $F(t)$ рассмотрим $F^*(t)$ ($F^*(t) = F(t + \sigma)$).

Так как исходные функции $x(t)$, $u(t)$, $F(t)$ были определены на отрезке $[0, T]$, то новые, сдвинутые по времени на σ влево функции $x^*(t)$, $u^*(t)$, $F^*(t)$, будут определены уже на $[-\sigma, \sigma]$, где $\sigma = \frac{T}{2}$. Итак, все функции $x^*(t)$, $u^*(t)$ и $F^*(t)$ будут рассматриваться нами на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, и начальные условия в новом (сдвинутом) уравнении объекта

$$\dot{x}^* = Ax^* + bu^* + F^* \quad (-\sigma \leq t \leq \sigma) \quad (1)$$

будут задаваться при $t = -\sigma$, т. е.

$$x^*(-\sigma) = x_0. \quad (2)$$

Первым шагом в направлении решения этой задачи является применение преобразования Фурье к системе (1), (2).

Преобразование Фурье функции $F(t)$ имеет вид

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Тогда, применяя к уравнению (1) с начальным условием (2) преобразование Фурье (3), получим

$$j\omega \tilde{x}^*(\omega) - x_0 e^{j\omega\sigma} = A\tilde{x}^*(\omega) + b\tilde{u}^*(\omega) + \tilde{F}^*(\omega).$$

Разрешая это уравнение относительно $\tilde{x}^*(\omega)$, получим

$$\tilde{x}^*(\omega) = [j\omega E - A]^{-1} \cdot [b\tilde{u}^*(\omega) + x_0 e^{j\omega\sigma} + \tilde{F}^*(\omega)], \quad (5)$$

где E — единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Формулу (5) можно переписать в виде

$$\tilde{x}^*(\omega) = \frac{C(\omega) [b\tilde{u}^*(\omega) + x_0 e^{j\omega\sigma} + \tilde{F}^*(\omega)]}{|j\omega E - A|} = \frac{C(\omega) b\tilde{u}^*(\omega) + C(\omega) x_0 e^{j\omega\sigma} + C(\omega) \tilde{F}^*(\omega)}{|j\omega E - A|}, \quad (6)$$

где $C(\omega) = \|c_{ik}(\omega)\|$ — присоединенная матрица к матрице $\|j\omega E - A\|$ и $\|j\omega E - A\|$ — характеристический определитель (полином n -й степени) системы (1). Заметим, что каждый элемент $c_{ik}(\omega)$ матрицы $C(\omega)$ является многочленом конечной степени от ω .

По определению функций $x^*(t)$, $u^*(t)$ и $F^*(t)$ преобразования Фурье этих функций $\tilde{x}^*(\omega)$, $\tilde{u}^*(\omega)$, $\tilde{F}^*(\omega)$ соответственно связаны с преобразованиями Фурье $\tilde{x}(\omega)$, $\tilde{u}(\omega)$, $\tilde{F}(\omega)$ исходных функций $x(t)$, $u(t)$ и $F(t)$ соотношениями (теорема о сдвиге в преобразовании Фурье)

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{x}^*(\omega) e^{-j\omega\sigma}, \quad \tilde{u}(\omega) = \tilde{u}^*(\omega) e^{-j\omega\sigma}, \quad \tilde{F}(\omega) = \tilde{F}^*(\omega) e^{-j\omega\sigma},$$

где $\sigma = \frac{T}{2}$.

Теорема Винера — Пэли дает возможность ответить на такой вопрос: какова должна быть функция $\tilde{f}(\omega)$, чтобы функция $f(t)$ (т. е. обратное преобразование Фурье функции $\tilde{f}(\omega)$) была финитной функцией, сосредоточенной на конечном отрезке $[-\sigma, \sigma]$ ($0 < \sigma < \infty$) и равной нулю вне отрезка $[-\sigma, \sigma]$? Если ограничиться пока случаем, когда искомая функция $f(t)$ должна быть интегрируема с квадратом, то оказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\tilde{f}(\omega)$, определенная пока только для действительных ω ($-\infty < \omega < \infty$), тоже была интегрируема с квадратом, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$ и могла быть продолжена на всю комплексную плоскость (с действительной осью ω) как целая функция конечной степени σ . Иными словами, функция $\tilde{f}(z)$, где z меняется во всей комплексной плоскости $z = \omega + j\eta$, должна быть целой функцией комплексного переменного z степени не выше σ и интегрируемой с квадратом на всей действительной оси.

Напомним, что функция $\tilde{f}(z)$ комплексного переменного z называется целой функцией, если она представима всюду сходящимся степенным рядом

$$\tilde{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (7)$$

Следовательно, $\tilde{f}(z)$ не имеет особенностей (полюсов) ни в какой ограниченной части плоскости z . Целую функцию $\tilde{f}(z)$ называют функцией конечной степени, если для всех z , по модулю больших некоторого достаточно большого положительного числа M ($|z| > M$), выполняется условие

$$|\tilde{f}(z)| < e^{\alpha|z|}, \quad (8)$$

где α — некоторое постоянное число, не зависящее от z .

Нижняя грань чисел α , для которых выполняется условие (8), и называется степенью целой функции $\tilde{f}(z)$.

Отметим еще, что степень σ целой функции $\tilde{f}(z)$, определяемой рядом (7), вычисляется по формуле

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |a_n|}. \quad (9)$$

Примером целых функций степени σ могут служить следующие функции: $e^{\sigma z}$, $e^{-\sigma z}$, $\sin \sigma z$, $\cos \sigma z$, $\frac{\sin \sigma z}{z}$ и т. д. Полином n -й степени $P_n(z) =$

$$= \sum_{k=1}^n b_k z^k$$
 является целой функцией нулевой степени.

Заметим еще, что если $\tilde{f}(z)$ — некоторая функция степени σ , а $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — некоторые полиномы произвольных степеней n и m соответственно, то функция $P_n(z)\tilde{f}(z) + Q_m(z)$ также имеет степень, равную σ .

Легко также установить, что если дано несколько функций $\tilde{f}_1(z), \dots, \tilde{f}_n(z)$, каждая из которых имеет соответственно степень $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, то степень σ суммы этих функций $\tilde{f}_1(z) + \dots + \tilde{f}_n(z)$ равна максимальному числу из чисел

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \quad \text{т. е. } \sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Степень σ произведения этих функций, т. е. степень $\tilde{f}_1(z)\tilde{f}_2(z)\dots\tilde{f}_n(z)$ не превосходит суммы степеней $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, т. е. $\sigma \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$.

Таким образом, задача финитного управления сводится к тому, чтобы найти такую функцию $\tilde{u}^*(\omega)$, при которой $\tilde{x}^*(\omega)$, связанная с $\tilde{u}^*(\omega)$ по формуле (6), была бы целой функцией степени

$$\sigma = \frac{T}{2}.$$

Пусть z_1, z_2, \dots, z_n — простые корни характеристического полинома $|jzE - A|$ (случай кратных корней рассматривается далее). Тогда, для того чтобы $\tilde{x}^*(\omega)$ в формуле (6) была целой функцией, необходимо и достаточно, чтобы числитель дроби также обращался в нуль в точках $\omega = z_1, z_2, \dots, z_n$. Иными словами, должны выполняться равенства

$$C(z_i)\tilde{b}\tilde{u}^*(z_i) + C(z_i)x_0e^{jz_i\sigma} + C(z_i)\tilde{F}^*(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Отсюда сразу находим, что для искомой функции $\tilde{u}^*(\omega)$ должны выполняться следующие условия:

$$\tilde{u}^*(z_i) = \frac{C(z_i)x_0e^{jz_i\sigma} + C(z_i)\tilde{F}^*(z_i)}{C(z_i)\tilde{b}} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Иными словами, искомая функция $\tilde{u}^*(\omega)$ должна в заданных точках z_1, z_2, \dots, z_n принимать заданные значения $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, определяемые формулой (11), т. е. $\tilde{u}^*(\omega)$ должна давать решение следующей интерполяционной задаче: найти такую целую функцию степени $\sigma = \frac{T}{2}$, интегрируемую с квадратом на действительной оси, решающую следующую интерполяционную задачу:

$$\tilde{u}^*(z_i) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Так как в правой части равенства (11) фактически написано отношение векторов $C(z_i)x_0e^{jz_i\sigma} + C(z_i)\tilde{F}^*(z_i)$ и $C(z_i)\tilde{b}$, то оно имеет смысл при условии, что эти векторы коллинеарны и $C(z_i)\tilde{b} \neq 0$. Это условие будет обсуждено ниже. Если такая функция $\tilde{u}^*(\omega)$ будет найдена, то $\tilde{x}^*(\omega)$ по формуле (6) также будет целой функцией степени не выше $\sigma = \frac{T}{2}$, и, следовательно, по теореме Винера — Пэли $x^*(t)$ будет искомой финитной функцией на отрезке $[-\sigma, \sigma]$. Действительно, выполнение равенств (11), (12) обеспечивает то, что $\tilde{x}^*(z)$ будет целой функцией. Далее, степень функции $\tilde{x}^*(\omega)$ равна степени числителя дроби (6). Но степень каждого слагаемого в числителе дроби (6) не превосходит $\sigma = \frac{T}{2}$. Степень $C(\omega)$ в $\tilde{u}^*(\omega)$ равна $\sigma = \frac{T}{2}$, так как степень $\tilde{u}^*(\omega)$ будет равна $\sigma = \frac{T}{2}$ по условию, а умножение $\tilde{u}^*(\omega)$

на полином конечного порядка оставляет степень произведения без изменения. Аналогично, так как $\tilde{F}^*(\omega)$ должна иметь степень σ (так как $F^*(t)$ — по условию финитная функция на $[-\sigma, \sigma]$), то $C(\omega)\tilde{F}^*(\omega)$ также имеет степень $\sigma = \frac{T}{2}$ и $C(\omega)x_0e^{j\omega\tau}$ имеет степень, равную σ . Следовательно, по свойству степени суммы функций степень $\tilde{x}^*(\omega)$ не более $\sigma = \frac{T}{2}$; так же легко видеть, что функции $\tilde{x}_i^*(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) интегрируемы в квадрате на всей действительной оси.

Для решения интерполяционной задачи (12) можно воспользоваться интерполяционной формулой Лагранжа. Пусть $\varphi(z)$ есть целая функция степени $\sigma = \frac{T}{2}$, обращающаяся в нуль в узлах интерполяции, т. е. во всех точках z_1, \dots, z_n ,

$$\varphi(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

причем

$$\varphi'(z_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Тогда искомая целая функция $\tilde{u}^*(\omega)$ равна

$$\tilde{u}^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \varphi(\omega)}{\varphi'(z_i)(\omega - z_i)} + \gamma(\omega)\varphi(\omega), \quad (15)$$

где $\gamma(\omega)$ — произвольная целая функция нулевой степени (например, произвольный полином произвольного конечного порядка).

Ясно, что функций $\varphi(z)$, фигурирующих в формуле (15), бесконечное множество, следовательно, формула (15) описывает все множество искомых функций $\tilde{u}^*(\omega)$, обратное преобразование Фурье которых решает задачу финитного управления.

Для определения искомого финитного управления $u^*(t)$ остается только выполнить обратное преобразование Фурье функции $\tilde{u}^*(\omega)$ по формуле

$$u^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16)$$

Для определения исходного финитного управления $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) в системе (1) § 1 нужно, очевидно, положить

$$u(t) = u^*(t - \sigma) \quad \left(0 \leq t \leq T; \sigma = \frac{T}{2}\right). \quad (17)$$

Можно поступить и иначе. Действительно, так как $\tilde{u}(\omega) = \tilde{u}^*(\omega)e^{-j\omega\sigma}$, то

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^*(\omega) e^{j\omega(t-\sigma)} d\omega \quad (0 \leq t \leq T = 2\sigma). \quad (18)$$

Для определения какого-либо конкретного финитного управления $u^*(t)$ нужно задать конкретную функцию $\varphi(\omega)$. Такой функцией, например, может быть

$$\varphi(\omega) = \prod_{i=1}^n \sin \frac{T}{2n}(\omega - z_i),$$

которая является целой функцией степени $T/2$, удовлетворяющей условиям (13), (14).

Таким образом, формула (18) дает решение задачи финитного управления для системы (1) с комплексными коэффициентами в комплексном фазо-

вом пространстве. Вернемся теперь к нашей исходной системе (1) § 1, которая предполагалась определенной в действительном фазовом пространстве и которая имеет действительные коэффициенты A , b и функцию F . Так как формула (18) дает, вообще говоря, комплекснозначное управление $u = v + jw$, то соответствующий ему вектор x также был комплекснозначным: $x = \xi + j\rho$, причем, так как система предполагается теперь определенной в действительном фазовом пространстве, то начальное условие также задается действительным вектором x_0 , т. е.

$$x(0) = \xi(0) = x_0, \quad \rho(0) = 0.$$

В этих обозначениях исходную систему (1) § 1 можно переписать в виде

$$\dot{\xi} + j\dot{\rho} = A\xi + jA\rho + bv + jbw + F.$$

Так как $u = v + jw$ есть по условию финитное управление, определяемое формулой (18), то

$$\xi(T) = 0, \quad \rho(T) = 0. \quad (19)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\dot{\xi} = A\xi + bv + F, \quad \xi(0) = x_0. \quad (20)$$

Система с точностью до обозначений (ξ вместо x и v вместо u) совпадает с исходной системой (1) § 1. Так как выполняется условие (9), то $v(t)$ является финитным управлением для исходной системы. Таким образом, искомое финитное управление для системы (1) § 1 определяется формулой

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^*(\omega) e^{j\omega(t-\sigma)} d\omega \quad (0 \leq t \leq T = 2\sigma). \quad (21)$$

На основании условий (14) можно сразу же сформулировать критерий, дающий необходимые и достаточные условия разрешимости задачи финитного управления.

Действительно, как видно из предыдущего, если числа β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) являются конечными, то всегда можно по формуле Лагранжа (15) построить преобразование Фурье $\tilde{u}^*(\omega)$ искомого финитного управления $u(t)$ и тем самым решить задачу управляемости исходной системы.

Интерполяционная задача (12) не будет иметь решения в классе целых функций $\tilde{u}^*(\omega)$ только в том случае, если хотя бы одно из значений β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не существует (т. е. принимает бесконечное значение). Это означает, что функция $\tilde{u}^*(\omega)$ имеет полюс в конечной части плоскости и, следовательно, не может быть целой аналитической функцией.

Но необходимым и достаточным условием конечности чисел β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) является неравенство нулю знаменателя дроби (11), т. е.

$$C(z_i) b \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

При этом можно показать, что векторы $C(z_i) [x_0 e^{jz_i \sigma} + \tilde{F}^*(z_i)]$ и $C(z_i) b$ коллинеарны и отношение этих векторов имеет смысл и равно $\tilde{\beta}_i = \tilde{u}^*(z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Пользуясь свойствами присоединенной матрицы, можно показать, что условия (22) и условие коллинеарности эквивалентны условию линейной независимости системы векторов $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$. Это является условием управляемости исходной системы.

Пример. Проиллюстрируем изложенную выше методику сначала на простейшем примере задачи финитного управления степеней

$$\dot{x} = -u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0.$$

Применяя к этой системе преобразование Фурье с учетом начального условия, получим

$$\tilde{x}^*(\omega) = \frac{-\tilde{u}^*(\omega) + x_0 e^{j\omega\sigma}}{j\omega}, \quad \sigma = \frac{T}{2}.$$

После этого задача сводится к определению такой целой функции $\tilde{u}^*(\omega)$, которая была бы интегрируемой в квадрате на оси ω в интервале $[-\infty, \infty]$ и имела конечную степень T . При этом $\tilde{x}^*(\omega)$ также должна быть целой функцией той же степени T . Как видно из выражения для $\tilde{x}^*(\omega)$, для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{u}^*(0) = x_0,$$

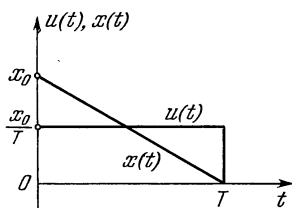


Рис. 16.1.

так как здесь характеристическое уравнение $j\omega = 0$ имеет единственный корень $\omega_1 = 0$, и $\beta_1 = +x_0$. В соответствии с формулой (15) в качестве функции $\varphi(z)$ можно взять

$$\varphi(z) = \sin \frac{T}{2} z.$$

При этом имеем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = \frac{T}{2} \cos z \Big|_{\omega=0} = \frac{T}{2} \neq 0$. Поэтому по формуле (15) имеем

$$\tilde{u}^*(z) = \frac{x_0(1 - e^{-j\omega T})}{j\omega T} = \frac{x_0 \sin \frac{T}{2} z}{\frac{T}{2} z}.$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье или пользуясь таблицами, получим, что искомое финитное управление имеет вид (рис. 16.1)

$$u(t) = \begin{cases} x_0/T & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$$

Пусть теперь исходная управляемая система описывается системой уравнений

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u$$

с граничными условиями

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Производя сдвиг по времени влево на величину $\sigma = \frac{T}{2}$ и обозначая $x(t + \sigma) = x^*(t)$, $u(t + \sigma) = u^*(t)$, получим систему

$$\dot{x}_1^* = u^*, \quad \dot{x}_2^* = -x_2^* + u^*$$

с граничными условиями

$$x_1^*(-\sigma) = x_{01}, \quad x_2^*(-\sigma) = x_{02}, \quad x_1^*(\sigma) = x_2^*(\sigma) = 0; \quad 2\sigma = T.$$

Применяя к этой системе преобразование Фурье с учетом начальных условий, можно получить

$$\tilde{x}_1^*(\omega) = \frac{\tilde{u}^*(\omega) + x_{01} e^{j\omega\sigma}}{j\omega}, \quad (23)$$

$$\tilde{x}_2^*(\omega) = \frac{\tilde{u}^*(\omega) + x_{02} e^{j\omega\sigma}}{j\omega + 1}. \quad (24)$$

Корни характеристического уравнения данной системы равны $z_1 = 0$ и $z_2 = j$. Чтобы $\tilde{x}_1^*(\omega)$ и $\tilde{x}_2^*(\omega)$ были целыми функциями, числитель дроби (23) должен обратиться в нуль при $\omega = z_1 = 0$, а числитель дроби (24) должен обратиться в нуль при $\omega = z_2 = j$. В результате получаем следующие интерполяционные условия:

$$\tilde{u}^*(0) = -x_{01}, \quad \tilde{u}^*(j) = x_{02}e^{-\sigma}.$$

Искомое $\tilde{u}^*(\omega)$ найдем по формуле Лагранжа (15), где в качестве $\varphi(\omega)$ возьмем целую функцию степени σ вида

$$\varphi(\omega) = \sin \frac{\sigma}{2} \omega \cdot \sin \frac{\sigma}{2} (\omega - j).$$

Функцию $\gamma(\omega)$ положим равной нулю тождественно. Тогда

$$\varphi'(\omega) = \frac{1}{2} \sigma \cos \frac{\sigma}{2} \omega \sin \frac{\sigma}{2} (\omega - j) + \frac{1}{2} \sigma \sin \frac{1}{2} \sigma \omega \cos \frac{\sigma}{2} (\omega - j),$$

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2} \sigma \sin j \frac{\sigma}{2}, \quad \varphi'(j) = \frac{\sigma}{2} \sin j \frac{\sigma}{2}.$$

По формуле Лагранжа (12) находим, что

$$\tilde{u}^*(\omega) = 2 \left[\frac{+x_{01}}{\sigma \sin j \frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\omega} - \frac{x_{02}e^{-\sigma}}{\sigma \sin j \frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\omega - j} \right] \sin \frac{\sigma}{2} \omega \sin \frac{\sigma}{2} (\omega - j).$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим

$$u^*(t) = \begin{cases} -a_0 - b_0 e^{-t-\sigma} & \text{при } -\sigma \leq t \leq 0, \\ a_0 e^{-\sigma} + b_0 e^{-t} & \text{при } 0 \leq t \leq \sigma, \end{cases}$$

где

$$a_0 = \frac{x_{01}}{(1 - e^{-\sigma}) \sigma}, \quad b_0 = \frac{x_{02}}{(1 - e^{-\sigma}) \sigma}, \quad \sigma = \frac{T}{2}.$$

Так как обратное преобразование Фурье функции $\tilde{u}^*(\omega)$ оказалось действительной функцией $u^*(t)$, то операция выделения действительной части отпадает. Поэтому искомое финитное управление для исходной системы определяется формулой

$$u(t) = u^*(t - \sigma) = \begin{cases} -a_0 - b_0 e^{-t} & \text{при } 0 \leq t \leq \sigma, \\ a_0 e^{-\sigma} + b_0 e^{-t+\sigma} & \text{при } \sigma \leq t \leq 2\sigma = T. \end{cases}$$

Легко заметить, что функция $\tilde{u}^*(\omega)$ интегрируема в квадрате, т. е. сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega.$$

Случай кратных корней в характеристическом полиноме исходной системы ничем принципиально не отличается от рассмотренного случая простых корней. В этом случае несколько видоизменяется формула Лагранжа для искомой функции $\tilde{u}^*(\omega)$.

Итак, пусть корень z_k полинома $|j\omega E - A|$ имеет соответственно кратность α_k ($k = 1, 2, \dots, s$), причем, естественно, $\sum_{k=1}^s \alpha_k = n$.

В этом случае формула (15) непосредственно неприменима, ибо $\varphi'(z_k) = 0$, если z_k — кратный корень. В этом случае не только числитель дроби (14) должен обратиться в нуль при $\omega = z_k$, но и в той же точке должны

обратиться в нуль $\alpha_k - 1$ производных числителя, т. е.

$$\frac{d^m}{d\omega^m} [C(\omega) \tilde{u}^*(\omega) + C(\omega) x_0 e^{j\omega\sigma} + C(\omega) \tilde{F}^*(\omega)] |_{\omega=z_k} = 0 \quad (25)$$

$$(k = 1, 2, \dots, s; m = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1).$$

В этом случае интерполяционная проблема (12) видоизменяется. Здесь уже нужно, чтобы не только значения искомой функции $\tilde{u}^*(\omega)$ были равны заданным в узлах интерполяции, но также и некоторые производные этой функции в этих же точках принимали заданные значения. Легко получить, что проблема интерполяции в случае кратных корней выражается равенствами

$$\tilde{u}^{*(m)}(z_k) = -\frac{d^m}{d\omega^m} \left[\frac{c(\omega) x_0 e^{j\omega\sigma} + c(\omega) \tilde{F}^*(\omega)}{c(\omega) b} \right]_{\omega=z_k} = \beta_k^m \quad (26)$$

$$(m = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1; k = 1, 2, \dots, s).$$

Обобщенная формула Лагранжа, дающая решение этой задачи интерполирования, имеет вид

$$\tilde{u}^*(\omega) = \sum_{k=1}^s \frac{\varphi(\omega)}{(\omega - z_k)^{\alpha_k}} \sum_{m=0}^{\alpha_k - 1} \frac{\beta_k^m (\omega - z_k)^m}{m!} \left[\frac{(\omega - z_k)^{\alpha_k}}{\varphi(\omega)} \right]_{\omega=z_k}^{(\alpha_k - m - 1)} + \gamma(\omega) \varphi(\omega), \quad (27)$$

где функция $\varphi(z)$ является целой функцией степени $\frac{1}{2}T$:

$$\varphi^{(m)}(z_k) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \alpha_k - 1; k = 1, 2, \dots, s).$$

После этого для определения искомого финитного управления $u(t)$ используются те же формулы (16), (17), (18) и (21).

Пример. Рассмотрим следующий иллюстративный пример финитного управления системой с кратными корнями:

$$\ddot{x} = u,$$

$$x(0) = x_{01}, \quad \dot{x}(0) = x_{02}, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Применим к этой системе преобразование Фурье с учетом начальных условий, не делая сдвига по времени влево, как это мы делали выше. Получим

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega) + j\omega x_{01} + x_{02}}{-\omega^2}. \quad (28)$$

Далее, если $x(t)$ будет финитной функцией, то и ее производная $\dot{x}(t)$ также будет финитной функцией. Поэтому будем искать такое $\tilde{u}(\omega)$, чтобы $\tilde{x}(\omega)$ являлась преобразованием Фурье искомой финитной функции $x(t)$.

Из (28) получаем, что соответствующая интерполяционная проблема имеет вид

$$\tilde{u}(0) = -x_{02}, \quad \tilde{u}'(0) = -jx_{01}.$$

В соответствии с интерполяционной формулой Лагранжа для случая кратных корней в качестве $\varphi(\omega)$ возьмем

$$\varphi(\omega) = (1 - e^{-j\omega\sigma})^2, \quad T = 2\sigma,$$

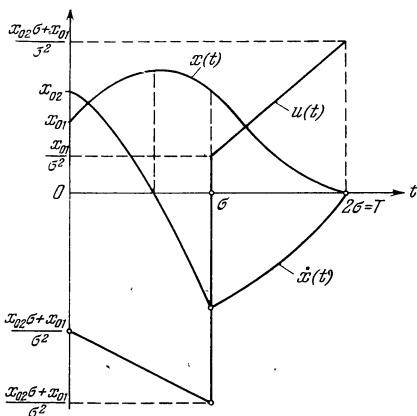


Рис. 16.2.

которая, как легко догадаться, даст в силу (27) финитное обратное преобразование Фурье, т. е. искомое управление $u(t)$ на отрезке $[0, T]$ (а не на отрезке $[-\sigma, \sigma]$).

Произведя все вычисления в соответствии с (27), получим

$$\tilde{u}(\omega) = -\frac{(1 - e^{-j\omega\sigma})^2}{-\sigma^2\omega^2} [x_{02} + j(x_{02}\sigma + x_{01})\omega].$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье, найдем искомое финитное управление

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{x_{02}}{\sigma^2}t - \frac{x_{02}\sigma + x_{01}}{\sigma^2} & \text{при } 0 \leq t \leq \sigma, \\ \frac{x_{02}}{\sigma^2}t - \frac{x_{02}\sigma - x_{01}}{\sigma^2} & \text{при } \sigma \leq t \leq 2\sigma = T, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T \end{cases}$$

или сокращенно

$$u(t) = \left[\frac{x_{02}}{\sigma^2}t + \frac{x_{01} - x_{02}\sigma \operatorname{sign}(t - \sigma)}{\sigma^2} \right] \operatorname{sign}(t - \sigma) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Графики этого переходного процесса изображены на рис. 16.2.

§ 3. Финитное управление при ударных воздействиях. Обобщенное финитное управление

В некоторых задачах управления, где допускаются ударные нагрузки, может быть поставлена задача о «мгновенном» ($T = 0$) приведении управляемой системы в состояние покоя из некоторого начального состояния. Например, при управлении электроприводами иногда допускаются на очень короткое время очень большие импульсы тока. В этом случае управляющее воздействие математически описывается в виде δ -функций и ее производных.

В § 2 финитное управление $u(t)$ мы искали в классе функций, интегрируемых в квадрате на $[0, T]$. Однако при $T \rightarrow 0$ искомая управляющая функция $u(t)$ стремится к функции, не интегрируемой в квадрате. Например, такая ситуация имеет место в приведении системы (1) § 1 из начального состояния $x_0 = x(0) \neq 0$ в конечное состояние $x(T) = 0$ при $T = 0$. Однако в ряде случаев имеет смысл поставить более широкую задачу отыскания финитного управления $u(t)$ в классе обобщенных функций и, в частности, разрешая $u(t)$ зависеть от δ -функции с ее производными. В этом случае можно воспользоваться обобщением теорем Винера — Пэли, данным Шварцем.

Теорема Винера — Пэли — Шварца. Для того чтобы функция $f(t)$ была финитной функцией на интервале $[-\sigma, \sigma]$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\omega)$ могло быть доопределено во всей комплексной плоскости $z = \omega + j\eta$ как целая функция конечной степени, меньшей или равной σ , растущая при $|\omega| \rightarrow \infty$ не быстрее функции $|\omega|^m$, где m — произвольное положительное число. При этом $\tilde{f}(\omega)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-j\omega t} \left[\omega^{m+1}g(t) + \sum_{k=0}^m \frac{j^k f^{(k)}(0)}{k!} \delta^k(t) \right] dt, \quad (1)$$

где $g(t) \in L_2[-\sigma, \sigma]$, т. е. $g(t)$ интегрируема в квадрате на отрезке $[-\sigma, \sigma]$.

Таким образом, в этом случае мы уже можем не заботиться о том, чтобы искомая функция $\tilde{u}(\omega)$, а вместе с ней $u(t)$ принадлежали классу $L_2[0, T]$. Поэтому возможно полагать $\tilde{u}(\omega) = P_n(\omega)$, где $P_n(\omega)$ — полином степени n от ω . Однако в этом случае $\tilde{u}(\omega) = P_n(\omega)$ уже не будет интегрируе-

мой в квадрате на $(-\infty, \infty)$ и для того, чтобы найти $u(t)$, нужно воспользоваться уже обобщенным обратным преобразованием Фурье.

Обратное преобразование $u(t)$ в этом случае будет равно (в символической записи)

$$u(t) = P_n \left(-j \frac{d}{dt} \right) \delta(t). \quad (2)$$

Пусть, например, управляемая система описывается уравнением

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = u(t) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad x^1(0) = x^1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x^{n-1}. \quad (4)$$

Требуется найти управление $u(t)$, которое мгновенно ($T=0$) переводит систему в состояние равновесия

$$x = x' = x'' = \dots = x^{(n-1)} = 0. \quad (5)$$

Применив преобразование Фурье к уравнению (3) с учетом начальных условий (2), получим

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1-s} a_k x^{n-1-s-k} \right) (j\omega)^s + \tilde{u}(\omega)}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (6)$$

Функцию $\tilde{u}(\omega)$ надо выбрать таким образом, чтобы $\tilde{x}(\omega)$ была целой функцией нулевой степени, т. е. $T=0$.

Из (6) видно, что если положить

$$\tilde{u}(\omega) = - \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1-s} a_k x^{n-1-s-k} \right) (j\omega)^s, \quad (7)$$

т. е. приравнять числитель дроби (6) нулю, то $\tilde{x}(\omega) \equiv 0$. Функция $\tilde{x}(\omega) \equiv 0$ является целой функцией нулевой степени. Это и означает, что переходный процесс происходит мгновенно за время $T=0$.

Функция $\tilde{u}(\omega)$ представляет собой, согласно (7), полином $(n-1)$ -й степени от ω и, следовательно, тоже является целой функцией нулевой степени.

Выполнив обратное преобразование Фурье от функций $\tilde{u}(\omega)$, заданное формулой (2), получим

$$u(t) = - \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1-s} a_k x^{n-1-s-k} \right) \delta^{(s)}(t), \quad (8)$$

где $\delta^{(0)}(t)$ — δ -функция, а $\delta^{(s)}(t)$ — ее s -я производная. Напомним, что s -я производная $\delta^{(s)}(t)$ от δ -функции определяется условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(s)}(t) dt = (-1)^s f^{(s)}(0) \quad (s=0, 1, 2, \dots),$$

где $f(t)$ — произвольная непрерывная функция.

§ 4. Финитное управление, оптимальное по быстродействию

Из теории оптимального управления по быстродействию системой (1) § 1 известно, что при наличии ограничения на управление $|u(t)| \leq l$, $0 \leq t \leq T$, оптимальное управление имеет вид, изображенный на рис. 16.3, а, б, в зависимости от того, принимает ли $u(t)$ на первом интервале значение l или $-l$, где $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m = T$ — моменты переключения. Поэтому

преобразование Фурье такой функции $u(t)$ имеет вид

$$\tilde{u}(\omega) = l \frac{\pm [1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k e^{-j\omega t_k} + (-1)^m e^{-j\omega T}]}{j\omega} \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к определению моментов переключения $t_1, t_2, \dots, t_m = T$.

Если все характеристические числа системы (1) § 1 различны и равны z_1, z_2, \dots, z_n , то по формуле (14) § 2 получаем следующую систему уравнений (в общем случае трансцендентную) для определения величин $t_1, \dots, t_m = T$:

$$2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k e^{-jz_i t_k} + (-1)^m e^{-jz_i T} = \frac{\pm jz_i c(z_i) [x_0 + \tilde{F}(z_i)]}{lc(z_i) b} - 1. \quad (2)$$

Если все корни z_1, \dots, z_n чисто мнимые, то имеет место известная теорема об n интервалах, т. е. $m = n$. Решение системы (2), где все t_1, \dots, t_n действительны и не отрицательны, дает искомое решение задачи оптимального управления.

Если же характеристические корни не являются чисто мнимыми, то, вообще говоря, число переключений m в оптимальном процессе может быть больше n , т. е. $m > n$. Это означает, что если мы будем искать оптимальный процесс в классе процессов с n точками переключений t_1, t_2, \dots, t_n , то система (2) для определения этих величин может оказаться неразрешимой в том смысле, что из нее нельзя определить m действительных неотрицательных чисел t_1, t_2, \dots, t_m .

Поэтому в формуле надо постепенно увеличивать, начиная от n , число точек переключения, добавляя t_{n+1}, t_{n+2} и т. д. Таким образом, мы последовательно будем решать систему n уравнений (2) с $n + 1, n + 2$ и т. д. неизвестными. Минимальное m , при котором система (2) будет иметь решение, где все числа t_1, t_2, \dots, t_m действительны, дает искомое решение задачи оптимального управления.

П р и м е р. Рассмотрим примеры на построение финитного управления, оптимального по быстродействию.

Задана система

$$\ddot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Требуется найти финитное управление $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) при $|u(t)| \leq l$ и минимальном T . В этой системе имеется нулевой корень кратности 2, в оптимальном процессе будет два интервала, и надо найти t_1 и T . Следовательно, функцию $\tilde{u}(\omega)$ ищем в виде

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{\pm l [1 - 2e^{-j\omega t_1} + e^{-j\omega T}]}{j\omega} \quad (3)$$

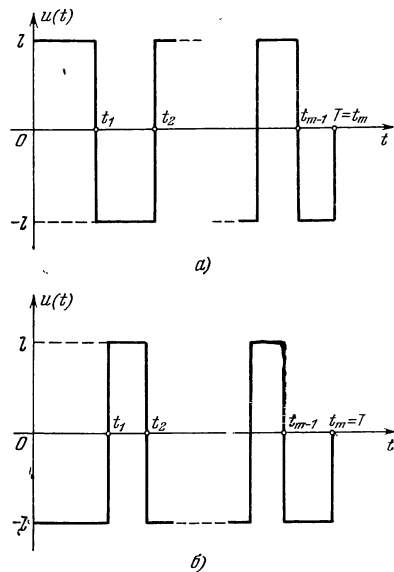


Рис. 16.3.

в соответствии с формулой (25) § 2 ($\alpha = 2, s = 1$) найдем

$$\begin{aligned}\tilde{u}'(\omega) &= \pm jl \frac{\omega [2jt_1 e^{-j\omega t_1} - jT e^{-j\omega T}] - [1 - 2l^{-j\omega t_1} + e^{-j\omega T}]}{\omega^2} = \\ &= \pm jl \frac{\omega(2jt_1 e^{-j\omega t_1} - jT e^{-j\omega T}) - (1 - 2e^{-j\omega T_1} + e^{-j\omega T})}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\tilde{u}(0) &= \pm \frac{l[2j\omega t_1 - j\omega T]}{j\omega} \Big|_{\omega=0} = \pm (2lt_1 - lT) = y_0, \\ \tilde{u}'(0) &= \pm jl \left[2t_1^2 - T^2 - t_1^2 + \frac{T^2}{2} \right] = \pm jl \left(t_1^2 - \frac{1}{2} T^2 \right) = x_0,\end{aligned}$$

что дает систему для определения t_1 и T следующего вида:

$$2t_1 - T = \mp \frac{y_0}{l}, \quad t_1^2 - \frac{1}{2} T^2 = \mp \frac{x_0}{l}.$$

Разрешая эти уравнения относительно t_1 и T , можно найти моменты переключения как функции от начальных условий процесса, т. е. $t_1 = f_1(x_0, y_0)$, $T = f_2(x_0, y_0)$.

Пусть теперь задана колебательная система

$$\ddot{x} + x = u, \quad |u| \leq l, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Применяя преобразование Фурье, получим

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega) + j\omega x_0 + y_0}{1 - \omega^2}.$$

Характеристические корни $z_1 = 1$, $z_2 = -1$. Интерполяционная задача имеет вид

$$\tilde{u}(1) = -jx_0 - y_0, \quad \tilde{u}(-1) = jx_0 - y_0.$$

Система для определения m точек переключения имеет вид

$$\begin{aligned}2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k e^{-jtk} + (-1)^m e^{-jtm} &= \pm \frac{x_0 - jy_0}{l} - 1, \\ 2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k e^{jtk} + (-1)^m e^{jtm} &= \pm \frac{x_0 + jy_0}{l} - 1\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \cos t_k + (-1)^m \cos t_m &= \pm \frac{x_0}{l} - 1, \\ 2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \sin t_k + (-1)^m \sin t_m &= \pm \frac{y_0}{l}.\end{aligned}$$

§ 5. Синтез финитного управления

Выше мы показали, каким способом можно определить финитное управление, т. е. функцию $u(t, x_0, T)$, под действием которой изображающая точка системы за время T переходит из начального состояния x_0 в начало координат. Функция $u(t, x_0, T)$ есть функция текущего времени t , а x_0 и T играют роль параметров (исходных параметров системы). Однако при

синтезе системы было бы желательно найти явный вид синтезирующей функции (эта функция должна быть однозначной), которая обеспечивает приведение изображающей точки системы в начало координат за конечное (финитное) время, т. е. при любом начальном условии $x(0) = x_0$ система

$$\dot{x} = Ax + bu(x) \quad (1)$$

т. е. существует такое конечное T , при котором $x(T) = 0$. Тогда, очевидно, нужно задать функцию $T(x)$ во всем фазовом пространстве, которая бы давала значение времени T движения системы из данной точки x в начало координат. Эта функция, по-видимому, не может быть произвольной. Мы покажем, что она должна подчиняться некоторому дифференциальному уравнению, к выводу которого мы сейчас и переходим. Итак, пусть известна функция $u(t, x_0, T)$, которая является финитным управлением, переводящим систему из точки x_0 в 0 за время T . Пусть $T(x_0)$ — функция, показывающая за сколько времени система перейдет из точки x_0 в начало координат под действием управления $u(t, x_0, T)$. Мы предположим, что функции $u(t, x, T)$ и $T(x)$ имеют непрерывные первые частные производные по всем входящим в них аргументам. Управление в момент времени $\Delta t > 0$ будет равно

$$u = u(\Delta t, x_0, T(x_0)). \quad (2)$$

С другой стороны, момент Δt мы можем принять за начальный, и поэтому управление в точке $x_0 + \Delta x$ дается выражением $u(0, x_0 + \Delta x, T(x_0 + \Delta x))$, где $x_0 + \Delta x$ та точка, в которую попадает система в момент времени Δt . Так как управление должно зависеть только от точки x фазового пространства (и зависеть, естественно, однозначно), то должно выполняться равенство

$$u(\Delta t, x_0, T(x_0)) = u(0, x_0 + \Delta x, T(x_0 + \Delta x)). \quad (3)$$

Отсюда уже легко вывести уравнение для определения $T(x)$. Действительно, в силу предположения о дифференцируемости имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_0, T(x_0)) \Delta t = \\ = \frac{\partial u}{\partial x}(0, x_0, T(x_0)) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial T}(0, x_0, T(x_0)) \frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \Delta x + 0(\Delta t, \Delta x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $0(\Delta t, \Delta x)$ — бесконечно малая величина относительно Δt и Δx . Делим обе части последнего равенства Δt и, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ с учетом основного уравнения (1) § 1, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_0, T(x_0)) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, x_0, T(x_0)) (Ax_0 + bu(0, x_0, T(x_0))) + \\ + \frac{\partial u}{\partial T}(0, x_0, T(x_0)) \frac{\partial T}{\partial x}(x_0) (Ax_0 + bu(0, x_0, T(x_0))). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как в качестве точки x_0 правомерна любая произвольная точка x , то последнее уравнение относительно неизвестной функции $T(x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial T}(0, x, T(x)) (Ax + bu(0, x, T(x))) \frac{\partial T}{\partial x} = \\ = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, T(x)) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, x, T(x)) [Ax + bu(0, x, T(x))]. \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее уравнение есть квазилинейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных относительно неизвестной функции $T(x)$. Это уравнение для однозначности решения нужно дополнить естественным условием $T(0) = 0$.

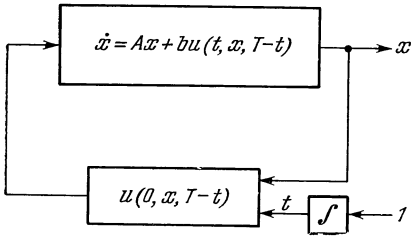


Рис. 16.4.

На основании знания функции $T(x)$, полученной из решения уравнения (6), находим искомую синтезирующую функцию $u(x)$ по формуле

$$u(x) = u(0, x, T(x)).$$

Полученную синтезирующую функцию $u(x) = u(0, x, T(x))$ можно назвать стационарной синтезирующей функцией, так как она зависит только от текущих значений фазовых координат x и не зависит

явно от времени t_0 . Однако, кроме такого рода стационарно синтезирующей функции, существует нестационарная синтезирующая функция $u(x, t)$, которая, кроме зависимости от текущих значений фазовых координат x , еще зависит явным образом от временной переменной t . Как легко видеть, эту нестационарную синтезирующую функцию $u(x, t)$ можно определить следующим образом:

$$u(x, t) \equiv u(0, x, T - t).$$

Блок-схема синтеза с помощью нестационарной синтезирующей функции изображена на рис. 16.4.

§ 6. Фinitное управление системами с распределенными параметрами

В предыдущих параграфах настоящей главы мы рассматриваем задачи фinitного управления для систем с сосредоточенными параметрами. Однако, по-видимому, метод фinitного управления, использующий мощный аппарат теории целых аналитических функций, может дать наиболее нетривиальные результаты для решения задач управления системами с распределенными параметрами. В этом параграфе мы рассмотрим задачи фinitного управления изучавшимися нами ранее в гл. XV колебательной системы, тепловой системой, а также рассмотрим задачу о гашении колебаний балки.

Начнем с волнового уравнения.

Пусть управляемый процесс описывается волновым уравнением (см. уравнение (1) § 3 гл. XV)

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \tag{1}$$

со следующими краевыми и начальными условиями:

$$Q(0, t) = u(t), \quad Q(\pi, t) = 0, \tag{2}$$

$$Q(y, 0) = Q_1(x), \quad Q'_i(y, 0) = Q_2(y). \tag{3}$$

Ставится следующая задача фinitного управления: найти такое управляющее воздействие $u(t)$, чтобы за время T успокоить струну, т. е. чтобы выполнялись следующие условия:

$$Q(y, T) = 0, \quad \left. \frac{\partial Q(y, T)}{\partial t} \right|_{t=T} = 0. \tag{4}$$

Как показано в § 3 гл. XV, для того чтобы выполнялись равенства (4), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_0^T \sin k\tau u(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} A_k, \quad (5)$$

$$\int_0^T \cos k\tau u(\tau) d\tau = -\frac{\pi}{2k} B_k \quad (k=1, 2, \dots), \quad (6)$$

где A_k и B_k — коэффициенты Фурье соответственно функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ разложения по $\sin ky$. Умножая равенство (5) на j и складывая с равенством (6), получим

$$\int_0^T e^{jkt} u(t) dt = -\frac{\pi}{2k} B_k + j \frac{\pi}{2} A_k. \quad (7)$$

Аналогично получим

$$\int_0^T e^{-jkt} u(t) dt = -\frac{\pi}{2k} B_k - j \frac{\pi}{2} A_k. \quad (8)$$

Умножая (7) на e^{-jkT} , а (8) на e^{jkT} , получим

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-jk(T-t)} u(t) dt &= \left(-\frac{\pi}{2k} B_k + j \frac{\pi}{2} A_k \right) e^{-jkT}, \\ \int_0^T e^{jk(T-t)} u(t) dt &= \left(-\frac{\pi}{2k} B_k - j \frac{\pi}{2} A_k \right) e^{jkT}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) получим, что функции

$$\begin{aligned} x_{+k}(t) &= - \left(-\frac{\pi}{2k} B_k + j \frac{\pi}{2} A_k \right) e^{-jkt} + \int_0^T e^{-jk(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \\ x_{-k}(t) &= \left(\frac{\pi}{2k} B_k + j \frac{\pi}{2} A_k \right) e^{jkt} + \int_0^T e^{jk(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}_{+k} + jkx_{+k} = u(t), \quad \dot{x}_{-k} - jkx_{-k} = u(t), \quad (10)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} x_{+k}(0) &= \frac{\pi}{2k} B_k - j \frac{\pi}{2} A_k, \\ x_{-k}(0) &= \frac{\pi}{2k} B_k + j \frac{\pi}{2} A_k \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При $t=T$ получим $x_{+k}(T)=0$, $x_{-k}(T)=0$. Сделаем преобразование Фурье уравнения (10) с учетом начальных условий (11), причем считаем $u(t)=0$ при $t \notin [0, T]$, $x_{+k}(t)$, $x_{-k}(t)$ равны нулю при $t < 0$ и при $t \geq T$. Получим

$$\tilde{x}_{+k} = \frac{\tilde{u} + x_{+k}(0)}{j(\omega + k)}, \quad \tilde{x}_{-k} = \frac{\tilde{u} + x_{-k}(0)}{j(\omega - k)}.$$

Если процесс финитного управления рассматривать на симметричном относительно начала координат отрезке времени $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$, то, полагая

$x_{\pm k}^*(t) = x_{\pm k} \left(t + \frac{T}{2} \right)$, $u^*(t) = u \left(t + \frac{T}{2} \right)$, получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_{+k}^* &= \frac{\tilde{u}^* + x_{+k}(0) e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j(\omega + k)}, \\ \tilde{x}_{-k}^* &= \frac{\tilde{u}^* + x_{-k}(0) e^{j\omega \frac{T}{2}}}{j(\omega - k)} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Из соотношения (12) следует, что для того, чтобы функции $\tilde{x}_{+k}^{(*)}$ и $\tilde{x}_{-k}^{(*)}$ были аналитическими конечной степени T (см. § 2 этой главы), необходимо, чтобы были выполнены соотношения

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}^*(-k) &= -x_{+k}(0) e^{-jk \frac{T}{2}}, \\ \tilde{u}^*(k) &= -x_{-k}(0) e^{jk \frac{T}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Решение интерполяционной проблемы (13) будем искать в виде формулы Лагранжа

$$\tilde{u}^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-x_{+k}(0) \varphi(z) e^{-jk \frac{T}{2}}}{\varphi'(-k)(z+k)} - \frac{x_{-k}(0) \varphi(z) e^{jk \frac{T}{2}}}{\varphi'(k)(z-k)} \right], \quad (14)$$

где функция $\varphi(z)$ обращается в нуль в точках $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, и

$$\varphi'(\pm k) \neq 0. \quad (15)$$

Поставим задачу успокоить струну за время $T = 2\pi$. Тогда в качестве функции $\varphi(z)$ можно выбрать функцию $\sin \pi z$:

$$\varphi(z) = \sin \pi z. \quad (16)$$

Вычислим обратное преобразование Фурье функции $\tilde{u}^*(z)$, задаваемое формулой (14). Для этого воспользуемся формулой Котельникова. По этой формуле функцию $\tilde{u}^*(\omega)$, задаваемую формулой (14), можно представить в виде

$$\tilde{u}^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-x_{+k}(0) \frac{\sin \pi(\omega + k)}{\pi(\omega + k)} e^{-jk\pi} - x_{-k}(0) \frac{\sin \pi(\omega - k)}{\pi(\omega - k)} e^{jk\pi} \right]. \quad (17)$$

На основе обратного преобразования Фурье отсюда легко вычислить, учитывая, что $e^{\pm j\pi n} = (-1)^n$,

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} B_k \cos kt + A_k \sin kt \right) \quad \text{при } t \in [0, 2\pi],$$

или

$$u(t) = \frac{1}{2} Q_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^t Q_2(y) dy - \frac{1}{4} \int_0^\pi Q_2(y) dy, \quad (18)$$

что полностью совпадает с формулой (43) § 3 гл. XV. Рассмотрим теперь процесс успокоения колебаний балки. Этот управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 Q}{\partial y^4} = 0 \quad (19)$$

с краевыми и начальными условиями

$$Q(0, t) = u(t), \quad Q''_{yy}(0, t) = 0, \quad (20)$$

$$Q(\pi, t) = 0, \quad Q''_{yy}(\pi, t) = 0, \quad (21)$$

$$Q(y, 0) = Q_1(y), \quad Q'_i(y, 0) = Q_2(y). \quad (22)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы в момент времени T выполнялись условия

$$Q(y, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = 0. \quad (23)$$

Для того чтобы в момент времени T выполнялись условия (23), как легко показать, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^T \sin k^2 \tau u(\tau) d\tau = \frac{\pi A_k}{2k}, \quad \int_0^T \cos k^2 \tau u(\tau) d\tau = \frac{\pi B_k}{2k}, \quad (24)$$

где A_k, B_k — коэффициенты Фурье функций $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ соответственно на отрезке $[0, \pi]$ в ряду по $\sin ky$.

Аналогично случаю успокоения струны легко можно показать, что решение проблемы, описываемой равенством (24), эквивалентно решению следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{+k} + jk^2 x_{+k} &= u(t), \\ \dot{x}_{-k} - jk^2 x_{-k} &= u(t), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} x_{+k}(0) &= \frac{\pi B_k}{2k^2} - j \frac{\pi}{2} \frac{A_k}{k} \\ x_{-k}(0) &= \frac{\pi B_k}{2k^2} + j \frac{\pi}{2} \frac{A_k}{k} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (26)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы в момент времени T получить

$$x_{+k}(t) = 0, \quad x_{-k}(t) = 0.$$

Сделаем преобразование Фурье уравнения (25) с учетом начальных условий (26), причем мы предполагаем $u(t) = 0$ при $t \notin [0, T]$, $x_{+k}(t), x_{-k}(t)$ равны нулю при $t < 0$ и при $t \geq T$. Получим

$$\tilde{x}_{+k} = \frac{\tilde{u} + x_{+k}(0)}{j(\omega + k^2)}, \quad \tilde{x}_{-k} = \frac{\tilde{u} + x_{-k}(0)}{j(\omega - k^2)} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Если процесс финитного управления рассмотреть на симметричном относительно начала координат отрезке времени $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, то, полагая

$$x_{\pm k}^*(t) = x_{\pm k}\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad u^*(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right),$$

получим следующее соотношение:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_{+k}^* &= \frac{\tilde{u}^* + x_{+k}(0) e^{j\omega \frac{T}{2}}}{j(\omega + k^2)}, \\ \tilde{x}_{-k}^* &= \frac{\tilde{u}^* + x_{-k}(0) e^{j\omega \frac{T}{2}}}{j(\omega - k^2)} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (27)$$

Аналогично (13) получим интерполяционную проблему

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}^*(-k^2) &= -x_{+k}(0) e^{-jk^2 \frac{T}{2}}, \\ \tilde{u}^*(k^2) &= -x_{-k}(0) e^{jk^2 \frac{T}{2}} \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Положим теперь для примера $T=2\pi$. Решение интерполяционной проблемы (28) будем искать в виде (14)

$$\tilde{u}^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x_{+k}(0) \varphi(z) e^{-jk^2 2\pi}}{\varphi(-k^2)(z+k^2)} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{-x_{-k}(0) \varphi(z) e^{jk^2 2\pi}}{\varphi(k^2)(z-k^2)}. \quad (29)$$

В качестве функции $\varphi(z)$ выберем функцию $\sin \pi z$.

Выполняя обратное преобразование Фурье функции $\tilde{u}^*(z)$, задаваемой формулой (29), и делая сдвиг по времени вправо на π , получим

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{B_k}{2k^3} \cos k^2 t + \frac{A_k}{2k} \sin k^2 t \right) \quad \text{при } t \in [0, 2\pi]. \quad (30)$$

В заключение этого параграфа мы рассмотрим другой прием, который позволяет свести задачу финитного управления распределенной системой к некоторой задаче интерполяции для целых функций. Этот прием, как будет видно из дальнейшего, основан на применении преобразования Фурье непосредственно к исходному уравнению задачи (в данном случае к уравнению в частных производных), а не на использовании решений в виде тригонометрических рядов, получаемых по методу разделения переменных (метод Фурье).

Для иллюстрации этого метода рассмотрим задачу финитного управления одномерным распределением температуры в массивном теле.

Пусть имеется массивное тело толщины l . Не уменьшая общности, для простоты примем $l = \pi$. Распределение температуры описывается функцией $Q(y, t)$, которая внутри отрезка $[0, \pi]$ удовлетворяет обычному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \quad (0 < y < \pi, 0 < t) \quad (31)$$

с граничными условиями

$$Q(0, t) = u(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (32)$$

$$Q(\pi, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (33)$$

и начальным условием

$$Q(y, 0) = Q_0(y) \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (34)$$

Требуется найти финитное управление $u(t)$, $(0 \leq t \leq T)$, которое обеспечило бы в момент времени $t = T$ равенство

$$Q(y, T) = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (35)$$

Опишем метод сведения этой задачи к задаче интерполяции целых функций. Применяем преобразование Фурье по переменной t к уравнению (31) с учетом начального условия (34). Получим

$$j\omega \tilde{Q}(y, \omega) - Q_0(y) = \tilde{Q}_y''(y, \omega), \quad (36)$$

где $\tilde{Q}(y, \omega) = q(y)$ означает преобразование Фурье функции $Q(y, t)$ по переменной t . Аналогично применение преобразований Фурье по t к граничным условиям (32), (33) даст

$$\tilde{Q}(0, \omega) = q(0) = \tilde{u}(\omega), \quad (37)$$

$$\tilde{Q}(\pi, \omega) = q(\pi) = 0, \quad (38)$$

где $\tilde{u}(\omega)$ — преобразование Фурье функции $u(t)$.

Таким образом, мы пришли к тому, что $\tilde{Q}(y, \omega) = q(y)$ должно быть решением следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по переменной y , которую с учетом обозначения

$$q(y) = \tilde{Q}(y, \omega) \quad (39)$$

можно записать:

$$q''(y) - j\omega q(y) = -Q_0(y), \quad (40)$$

$$q(0) = \tilde{u}(\omega), \quad (41)$$

$$q(\pi) = 0, \quad (42)$$

Решение $q(y)$ этой краевой задачи можно найти обычным способом, применяющимся для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Характеристическое уравнение

$$s^2 - j\omega = 0 \quad (43)$$

имеет два корня

$$s_1 = \sqrt{j\omega}, \quad s_2 = -\sqrt{j\omega}. \quad (44)$$

Как легко видеть (и проверить, например, непосредственной подстановкой), общее решение неоднородного уравнения (40) имеет вид

$$q(y) = c_1 e^{\sqrt{j\omega}y} + c_2 e^{-\sqrt{j\omega}y} - \frac{1}{j\sqrt{j\omega}} \int_0^y \sin j\sqrt{j\omega}(y-\xi) Q_0(\xi) d\xi. \quad (45)$$

Произвольные постоянные нужно подобрать так, чтобы выполнялись краевые условия (41), (42). Отсюда получаем условия для их определения

$$q(0) = c_1 + c_2 = \tilde{u}(\omega),$$

$$q(\pi) = c_1 e^{\sqrt{j\omega}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{j\omega}\pi} - \frac{1}{j\sqrt{j\omega}} \int_0^\pi \sin j\sqrt{j\omega}(\pi-\xi) Q_0(\xi) d\xi = 0. \quad (46)$$

Решая эту линейную алгебраическую систему относительно c_1 и c_2 , приходим к искомому решению задачи (40) — (42):

$$\tilde{Q}(y, \omega) = q(y) = \frac{\tilde{u}(\omega) \sin j\sqrt{j\omega}(\pi-y) + b(\omega) \sin j\sqrt{j\omega}y}{\sin j\sqrt{j\omega}\pi} - R(y, \omega), \quad (47)$$

где

$$R(y, \omega) = \frac{1}{j\sqrt{j\omega}} \int_0^y \sin j\sqrt{j\omega}(y-\xi) Q_0(\xi) d\xi, \quad (48)$$

$$b(\omega) = R(\pi, \omega). \quad (49)$$

Заметим, что

$$\tilde{Q}(y, 0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{Q}(y, \omega) \quad (50)$$

Для решения сформулированной выше задачи финитного управления необходимо найти такую целую функцию $\tilde{u}(z)$, не зависящую естественно от y , чтобы функция $\tilde{Q}(y, z)$, определяемая формулой (47), также была целой функцией аргумента z для всех y , $0 \leq y \leq \pi$.

Так как функция $R(y, z)$ является целой функцией для всех y , $0 \leq y \leq \pi$ (она имеет нулевую степень), то проблема состоит в выборе такой функции $\tilde{u}(z)$, при которой первое слагаемое в (47) было бы целой функцией, т. е. нули числителя дроби в (47) должны совпадать с нулями знаменателя (с той же кратностью, вообще говоря), т. е. с нулями функции $\sin j \sqrt{jz\pi}$. Очевидно, нули z_k этой функции определяются из формулы

$$j \sqrt{jz_k\pi} = \pm k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда

$$z_k = jk^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (51)$$

При $z = z_k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) числитель дроби в (47) также должен обращаться в нуль. Следовательно, имеем

$$\tilde{u}(z_k) \sin j \sqrt{jz_k}(\pi - y) - b(z_k) \sin j \sqrt{jz_k}y = 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (52)$$

Заметим, однако, что при $k=0$, т. е. $\omega = \omega_k = 0$, дробь в (47) принимает конечное ($\neq \infty$) значение (это значение надо понимать как предел при $\omega \rightarrow 0$) независимо от значения $\tilde{u}(0)$, поэтому условие (52) при $k=0$ можно исключить. Следовательно, дробь в (47) будет целой функцией при выполнении условий

$$\tilde{u}(z_k) = \frac{\sin j \sqrt{jz_k}y}{\sin j \sqrt{jz_k}(\pi - y)} b(z_k) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (52)$$

Учитывая, что z_k есть корень уравнения

$$\sin j \sqrt{jz\pi} = 0, \quad (53)$$

и преобразуя $\sin j \sqrt{jz_k}(\pi - y)$ в (52) и $\sin j \sqrt{j\omega}(\pi - \xi)$ в (49) по формуле синуса разности двух углов, получим

$$\tilde{u}(z_k) = -\frac{1}{k} \int_0^\pi \sin k\xi Q_0(\xi) d\xi, \quad (54)$$

или

$$\tilde{u}(jk^2) = -\frac{1}{k} \int_0^\pi \sin k\xi Q_0(\xi) d\xi \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (55)$$

Соотношения (55) при $k=1, 2, \dots$ определяют интерполяционную задачу для искомой целой функции $\tilde{u}(z)$.

Интересно отметить, что хотя в равенстве (52) фигурирует переменная y , окончательное условие (55) не зависит от y .

Последнее обстоятельство является совершенно необходимым, ибо в противном случае мы бы не могли надеяться на определение искомой функции $\tilde{u}(z)$, которая по условию не должна зависеть от y .

Аналогично можно поступить и при решении задачи финитного управления, например для волнового уравнения (1) с условиями (2) — (4) и для уравнения колебания балки (19) с условиями (20) — (23). Рассмотрим еще, например, задачу финитного управления для волнового уравнения следующего типа, где функция $Q(y, t)$, описывающая распределение отклонений, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \quad (0 < y < \pi, \quad 0 \leq t \leq T) \quad (56)$$

с граничными условиями

$$Q(0, t) = u(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (57)$$

$$Q(\pi, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (58)$$

и начальными условиями

$$Q(y, 0) = Q_1(y) \quad (0 \leq y \leq \pi), \quad (59)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = Q_2(y) \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (60)$$

Требуется найти такое финитное управление $u(t)$ на отрезке времени $[0, T]$, чтобы успокоить колебания в системе (56) — (60), т. е. выполнить условия

$$Q(y, T) = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi), \quad (61)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = 0 \quad (0 \leq y \leq \pi). \quad (62)$$

Для определения интерполяционной задачи в комплексной области для функций $\tilde{u}(z)$ также последовательно проведем те же операции, что и для предыдущей задачи (31) — (35).

Можно даже не повторять всех выкладок, а непосредственно воспользоваться формулами (47) — (49), заменив в них $-j\omega$ на ω^2 и $Q_0(y)$ на $j\omega Q_1(y) + Q_2(y)$.

Проделав эту замену, мы придем к следующей интерполяционной проблеме:

$$\tilde{u}(k) = \beta_k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \quad (63)$$

где числа β_k равны

$$\beta_k = -\frac{1}{k} \int_0^\pi \sin k\xi Q_2(\xi) d\xi - j \int_0^\pi \sin k\xi Q_1(\xi) d\xi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (64)$$

Заметим, что интегралы в (64) с точностью до множителя $2/\pi$ совпадают с коэффициентами разложения функций $Q_2(y)$ и $Q_1(y)$ соответственно в ряд по $\sin ky$ на отрезке $[0, \pi]$.

§ 7. Финитное управление дискретными линейными системами

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались задачи управления непрерывными линейными системами с сосредоточенными параметрами, движение которых описывалось обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными. Здесь рассматриваются задачи финитного управления дискретными линейными системами, движение которых описывается рекуррентными уравнениями следующего вида:

$$x(r+1) = Ax(r) + Bu(r) + F(r), \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где x — вектор-столбец в n -мерном (вообще говоря, комплексном) фазовом пространстве X_n , который характеризует состояние управляемой системы; u — скалярное управляющее воздействие (скалярное управляющее воздействие рассматривается для простоты, случай векторного управления рассматривается аналогично); A — матрица размера $(n \times n)$; B — вектор-столбец размерности n ; наконец, F — вектор-столбец размерности n . Величины x , u и F являются функциями дискретного параметра $r, r=0, 1, 2, \dots$, играющего роль времени. Таким образом, $x(r), u(r), F(r)$ представляют собой решетчатые функции. Как только задано начальное состояние системы $x(0) = x_0$, а также управляющая функция $u(r)$ и внешнее возмущение $F(r)$ при $r = 0, 1, 2, \dots$, рекуррентное соотношение (1) шаг за шагом позволяет однозначно вычислить функцию $x(r)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), характеризующую изменение состояния управляемой системы в зависимости от дискретного времени $r = 0, 1, 2, \dots$.

Совершенно аналогично случаю непрерывных систем, рассмотренному ранее, для дискретных управляемых систем также имеет существенное значение задача определения финитного управления, состоящая в нахождении управления, которое бы за конечное число тактов R переводило систему из заданного начального состояния в начало координат фазового пространства X_n . Дадим теперь формулировку задачи финитного управления для дискретной системы (1). Пусть задано целое неотрицательное число R , начальное условие

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

а также все постоянные параметры системы (1), т. е. матрицы A и B и решетчатая функция $F(r), r = 0, 1, 2, \dots, R$. Требуется найти решетчатую функцию $u(r), r = 0, 1, 2, \dots, R$, такую, что в момент $r = R + 1$ выполняется условие

$$x(R + 1) = 0. \quad (3)$$

Такую решетчатую функцию $u(r), r = 0, 1, \dots, R$, мы будем называть искомой финитной функцией или *искомым финитным управлением за R тактов*, а саму задачу будем называть задачей финитного управления (для дискретных систем).

Для решения только что сформулированной задачи финитного управления воспользуемся Z -преобразованием. Здесь Z -преобразование играет роль преобразования Фурье, которое мы существенным образом использовали ранее для решения задач финитного управления непрерывными системами. Z -преобразование $\tilde{y}(z)$ решетчатой функции $y(r), r = 0, 1, 2, \dots$, определяется следующей формулой:

$$\tilde{y}(z) = Z[y(r)] = \sum_{r=0}^{\infty} y(r) z^r, \quad (4)$$

где z — комплексный аргумент, $z = \omega + j\xi$. Отметим, что определенное здесь Z -преобразование очень тесно связано с дискретным преобразованием Лапласа, которое рассматривалось нами в пятой главе.

Действительно, дискретное преобразование Лапласа $\tilde{y}(p)$ решетчатой функции $y(r), r = 0, 1, 2, \dots$, определялось следующим образом:

$$\tilde{y}(p) = \sum_{r=0}^{\infty} y(r) e^{-pr}.$$

Легко видеть, что Z -преобразование эквивалентно дискретному преобразованию Лапласа, если положить $z = e^{-p}$.

Нам понадобится лишь очень немного свойств Z -преобразования. Во-первых, отметим, что если некоторая функция $\tilde{y}(z)$ представляется в виде

конечного или бесконечного ряда

$$\tilde{y}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r,$$

то ее обратное Z -преобразование $y(r)$ представляет собой решетчатую функцию

$$y(r) = a_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Во-вторых, если $\tilde{y}(z)$ является Z -преобразованием функции $y(r)$, то Z -преобразование функции $y(r+1)$ определяется формулой

$$Z[y(r+1)] = \frac{1}{z} \tilde{y}(z) - \frac{1}{z} y(0). \quad (5)$$

Действительно, по определению Z -преобразования имеем

$$Z[y(r+1)] = \sum_{r=0}^{\infty} y(r+1) z^r.$$

Очевидно, можно сделать следующие преобразования:

$$\begin{aligned} Z[y(r+1)] &= \sum_{r=0}^{\infty} y(r+1) z^r = \frac{1}{z} \sum_{r=0}^{\infty} y(r+1) z^{r+1} = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{r=0}^{\infty} [y(0) z^0 + y(r+1) z^{r+1} - y(0)] = \frac{1}{z} \sum_{r=0}^{\infty} y(r) z^r - \frac{1}{z} y(0) = \\ &= \frac{1}{z} \tilde{y}(z) - \frac{1}{z} y(0), \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (5), которое выражает так называемое свойство *сдвига* Z -преобразования.

Перейдем теперь непосредственно к решению поставленной задачи финитного управления. Применим Z -преобразование к исходной системе (1) с учетом начального условия (2). Получим

$$\frac{1}{z} \tilde{x}(z) - \frac{1}{z} x_0 = A\tilde{x}(z) + B\tilde{u}(z) + \tilde{F}(z).$$

Отсюда, разрешая полученную линейную алгебраическую систему относительно $\tilde{x}(z)$, имеем

$$\tilde{x}(z) = \frac{C \left(\frac{1}{z} \right) \left[B\tilde{u}(z) + \frac{x_0}{z} + \tilde{F}(z) \right]}{\left| \frac{1}{z} E - A \right|} = \frac{z^n C \left(\frac{1}{z} \right) \left[B\tilde{u}(z) + \frac{x_0}{z} + \tilde{F}(z) \right]}{|E - Az|}, \quad (6)$$

где $C(w)$ — присоединенная матрица к матрице A и E — единичная матрица.

Для того чтобы $x(r)$ была финитной функцией, т. е. имела конечный носитель $r = 0, 1, 2, \dots, R$ и $x(r) = 0$ при $r < 0$ и $r > R$, необходимо и достаточно, чтобы правая часть формулы (6) представляла собой полином от z степени R или чтобы полином в числителе (6) делился без остатка на полином знаменателя. Последнее условие в свою очередь эквивалентно условиям

$$\begin{aligned} \left\{ z^n C \left(\frac{1}{z} \right) \left[B\tilde{u}(z) + \frac{x_0}{z} + \tilde{F}(z) \right] \right\}_{z=z_p}^{(q)} &= 0, \\ z &= 0, 1, \dots, \alpha_p - 1; \quad p = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$

где z_p — корень кратности α_p полинома

$$P(z) = |E - Az| \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^m \alpha_p = n. \quad (8)$$

Равенства (7) эквивалентны условиям

$$\tilde{u}^{(q)}(z_p) = \frac{\left[z^{n-1} C \left(\frac{1}{z} \right) x_0 + z^n C \left(\frac{1}{z} \right) \tilde{F}(z) \right]_{z=z_p}^{(q)}}{\left[z^n C \left(\frac{1}{z} \right) B \right]_{z=z_p}^{(q)}} = \beta_p^q \quad \begin{matrix} (q=0, 1, \dots, \alpha_p-1; \\ p=1, 2, \dots, m). \end{matrix} \quad (9)$$

Таким образом, для определения искомого финитного управления $u(r)$ $r = 0, 1, \dots, R$, необходимо и достаточно найти полином степени R , который был бы решением интерполяционной задачи (9). Такой полином можно построить, используя формулу Лагранжа — Эрмита, аналогично тому, как мы делали это в случае непрерывных систем:

$$\tilde{u}(z) = \sum_{p=1}^m \frac{P(z)}{(z-z_p)^{\alpha_p}} \sum_{q=0}^{\alpha_p-1} \beta_p^q \frac{(z-z_p)^q}{q!} \left[\frac{(z-z_p)^{\alpha_p}}{P(z)} \right]_{z=z_p}^{(\alpha_p-1-q)} + Q(z), \quad (10)$$

где $Q(z)$ — произвольный полином степени R , имеющей те же корни z_p с теми же кратностями α_p , что и полином $P(z)$, т. е. $Q(z)$ должен делиться на $P(z)$.

В случае, когда z_p — простые корни, $p = 1, 2, \dots, n$, формула для искомого $\tilde{u}(z)$ более простая:

$$\tilde{u}(z) = \sum_{p=1}^n \beta_p^0 \frac{P(z)}{P'(z_p)(z-z_p)} + Q(z) = \sum_{r=0}^R a_r z^r. \quad (11)$$

В результате $\tilde{u}(z)$ представляется полиномом степени R

$$\tilde{u}(z) = \sum_{r=0}^R a_r z^r. \quad (12)$$

Таким образом, искомое финитное управление дается формулой

$$u(r) = a_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, R. \quad (13)$$

Если X_n — действительное пространство и A, B — действительные матрицы, то действительное финитное управление определяется формулой

$$u(r) = \operatorname{Re} a_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, R, \quad (14)$$

где $\operatorname{Re} a_r$ означает действительную часть числа a_r .

Так как для решения интерполяционной задачи (9) необходимо и достаточно, чтобы величины β_p^q были бы конечными числами, $\beta_p^q \neq \infty$, $q = 0, 1, \dots, \alpha_p - 1$; $p = 1, 2, \dots, m$, то отсюда следует, что для управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\left[z^n C \left(\frac{1}{z} \right) B \right]_{z=z_p}^{(q)} \neq 0 \quad \begin{matrix} (q=0, 1, \dots, \alpha_p-1; \\ p=1, 2, \dots, m). \end{matrix} \quad (15)$$

Напомним, что система (1) называется управляемой, если для любого x_0 существует такое целое $R \geq 0$ и финитное управление $u(r)$, $r = 0, 1, \dots, R$, при котором $x(R+1) = 0$.

Поскольку минимальная степень полинома, решающего интерполяционную задачу (9), вообще говоря, при произвольном x_0 равна R , то:

1) при $R < n - 1$ задача финитного управления, вообще говоря, при произвольном x_0 не имеет решения;

2) при $R = n - 1$ задача финитного управления имеет единственное решение;

3) при $R > n - 1$ задача финитного управления имеет бесконечное множество решений, обусловленное произволом в выборе полинома $Q(z)$.

Формула (10) описывает все множество искомого финитных управлений. Заметим, что в последнем случае, когда $R > n - 1$, произвол в выборе полинома $Q(z)$ может быть использован для оптимизации финитного управления $u(r)$, $r = 0, 1, \dots, R$, по заданному критерию.

Для иллюстрации методики рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. Управляемая система описывается скалярным уравнением

$$\begin{aligned} x(r+1) &= x(r) + u(r), & r = 0, 1, \dots, R, \\ x(0) &= x_0, & x(R+1) = 0. \end{aligned}$$

Для определения финитного управления $u(r)$, $r = 0, 1, \dots, R$, проведем Z -преобразование заданной системы. Получим

$$\frac{1}{z} \tilde{x}(z) - \frac{1}{z} x_0 = \tilde{x}(z) + \tilde{u}(z),$$

Отсюда

$$\tilde{x}(z) = \frac{z\tilde{u}(z) + x_0}{1-z}.$$

Корень полинома в знаменателе этой дроби равен

$$z_1 = 1.$$

Поэтому должно выполняться условие

$$\tilde{u}(1) + x_0 = 0.$$

Отсюда получаем интерполяционную проблему

$$\tilde{u}(1) = -x_0.$$

Таким образом, система управляема, ибо x_0 — конечное число.

По формуле (11) получаем, что Z -преобразование искомого финитного управления $u(z)$ имеет вид

$$\tilde{u}(z) = -x_0 + Q(z),$$

где $Q(z)$ — произвольный полином степени R , делящийся на $1 - z$, или, другими словами, имеющий корень $z_1 = 1$, т. е. $Q(1) = 0$.

Последнюю формулу можно записать и в другом виде:

$$\tilde{u}(z) = -x_0 + (1-z)S(z),$$

где $S(z)$ — произвольный полином степени $R - 1$. В частности, при $R = 0$ получаем

$$\tilde{u}(z) = -x_0,$$

и, следовательно, финитное управление имеет вид

$$u(0) = -x_0.$$

Пример 2. Дана система

$$\begin{aligned}x_1(r+1) &= x_1(r) - x_2(r), & x_2(r+1) &= x_1(r) + x_2(r) + u(r), \\x_1(0) &= x_{01}, & x_2(0) &= x_{02}, \\x_1(R+1) &= 0, & x_2(R+1) &= 0.\end{aligned}$$

Z-преобразование этой системы приводит к

$$\frac{1}{z} \tilde{x}_1 - \frac{1}{z} x_{01} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2, \quad \frac{1}{z} \tilde{x}_2 - \frac{1}{z} x_{02} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{u}.$$

Разрешая эту линейную алгебраическую систему относительно \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 , получим

$$\tilde{x}_1 = \frac{z^2 \tilde{u} - x_{01} z + x_{01} + x_{02} z}{2z^2 - 2z + 1}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{z^2 \tilde{u} - z \tilde{u} + x_{01} z + x_{02} z - x_{02}}{2z^2 - 2z + 1}.$$

Полином $2z^2 - 2z + 1$ имеет два корня

$$z_1 = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2}.$$

Числители в выражениях для \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 должны обращаться в нуль при $z = z_1$ и $z = z_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}z_i^2 \tilde{u}(z_i) - x_{01} z_i + x_{01} + x_{02} z_i &= 0, & i &= 1, 2, \\z_i^2 \tilde{u}(z_i) - z_i \tilde{u}(z_i) + x_{01} z_i + x_{02} z_i - x_{02} &= 0, & i &= 1, 2.\end{aligned}$$

Из первого условия получаем

$$\tilde{u}(z_i) = \frac{1 - z_i}{z_i^2} - \frac{x_{02}}{z_i}, \quad i = 1, 2.$$

Из второго условия получаем

$$\tilde{u}(z_i) = \frac{x_{01}}{z_i - 1} - \frac{x_{02}}{z_i}, \quad i = 1, 2.$$

Легко видеть, что правые части двух последних формул есть конечные числа. Следовательно, система управляема. Более того, как и следовало ожидать, правая часть предпоследней формулы равна правой части последней формулы. Такая ситуация будет иметь место всегда в случае управляемой системы. Отсюда следует важный практический вывод, что после Z-преобразования достаточно разрешить алгебраическую систему лишь относительно какой-либо одной компоненты \tilde{x}_i , выразив ее через x_0 , \tilde{u} и \tilde{F} .

Таким образом, получаем следующую интерполяционную проблему:

$$\begin{aligned}\tilde{u}\left(\frac{1}{2} + j \frac{1}{2}\right) &= -(1+j)x_{01} - (1-j)x_{02} = \beta_1, \\ \tilde{u}\left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2}\right) &= -(1-j)x_{01} - (1+j)x_{02} = \beta_2.\end{aligned}$$

Интерполяционный полином имеет вид

$$\tilde{u}(z) = \frac{\beta_1 \left(z - \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}\right)}{2j} + \frac{\beta_2 \left(z - \frac{1}{2} - j \frac{1}{2}\right)}{2j} + Q(z),$$

где $Q(z)$ — произвольный полином степени $R > 1$ (так как для данной системы $n = 2$), имеющий корнями $z_1 = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}$ и $z_2 = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2}$. Отсюда

$$\tilde{u}(z) = -2x_0 + (2x_{02} - 2x_{01})z + Q(z).$$

Например, при $R = 1$ финитное управление единственно и имеет вид

$$u(0) = -2x_{02}, \quad u(1) = 2x_{02} - 2x_{01}.$$

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

- 1.1. В и н е р Н., Кибернетика, Изд-во «Советское радио», 1958.
- 1.2. В и н е р Н., Кибернетика и общество, ИЛ, 1958.
- 1.3. Э ш б и Р., Введение в кибернетику, ИЛ, 1959.
- 1.4. Аннотированный указатель литературы. Кибернетика, автоматика и телемеханика, Изд-во «Наука», 1966.
- 1.5. Автоматизация производства и промышленная электроника. Энциклопедия, тт. 1, 2, 3, 4, Изд-во «Советская энциклопедия», 1964, 1965.
- 1.6. Автоматическое управление. Перев. с англ., под ред. В. В. Солодовникова, Изд-во «Наука», 1966.
- 1.7. Философские вопросы кибернетики. Сб. статей, Изд-во Социально-экономической литературы, 1961.
- 1.8. Л е р н е р А. Я., Введение в теорию автоматического регулирования, Машгиз, 1958.
- 1.9. Ф е л ь д б а у м А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
- 1.10. Ф е л ь д б а у м А. А., Основы теории оптимальных систем, Изд-во «Наука», 1966.
- 1.11. Ф е л ь д б а у м А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1959.
- 1.12. Ф е л ь д б а у м А. А., Д у д ы к и н А. Д., М а н о в ц е в А. П., М и р о л ю б о в Н. Н., Теоретические основы связи и управления, Физматгиз, 1963.
- 1.13. Л е р н е р А. Я., Начала кибернетики, Изд-во «Наука», 1967.
- 1.14. Б у т к о в с к и й А. Г., Что такое оптимальное управление? Изд-во «Знание», 1966.
- 1.15. М е е р о в М. В., Д и а н о в В. Г., Теория автоматического регулирования и авторегуляторы, Изд-во «Недра», 1963.
- 1.16. К р а с о в с к и й А. А., П о с п е л о в Г. С., Основы автоматизации и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962.
- 1.17. В о р о н о в А. А., Элементы теории автоматического регулирования, Изд-во «Энергия», 1966.
- 1.18. Основы автоматического управления, под ред. В. С. Пугачева, Физматгиз, 1964.
- 1.19. Ц я н ь С ю э - с е н ь, Техническая кибернетика, ИЛ, 1956.
- 1.20. А й з е р м а н М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, 1958.
- 1.21. К л а у с Г., Кибернетика и философия, ИЛ, 1963.
- 1.22. Н о в и к И. Б., Кибернетика. Философские и социологические проблемы, Госполитиздат, 1963.
- 1.23. Т е п л о в Л. П., Очерки о кибернетике, Изд-во «Московский рабочий», 1963.
- 1.24. Щ а д р и н ц е в И. С., Что такое кибернетика? Воениздат, 1963.
- 1.25. Б е р к о в и ч Д. М., Машины управляют машинами, Изд-во «Знание», 1962.
- 1.26. Б и р С., Кибернетика и управление производством, Физматгиз, 1963.
- 1.27. Г о н ч а р е н к о М. И., Кибернетика в военном деле, Изд-во ДОСААФ, 1963.
- 1.28. П о л е т а е в И. А., Сигнал, Изд-во «Советское радио», 1958.
- 1.29. Т р а п е з н и к о в В. А., Автоматика и человечество, Изд-во «Знание», 1962.
- 1.30. П о п о в Е. П., Автоматическое регулирование и управление, Физматгиз, 1962.
- 1.31. В и н е р Н., Новые главы кибернетики, Изд-во «Советское радио», 1963.
- 1.32. Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.
- 1.33. Основы автоматического управления, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1963.
- 1.34. Б е р г А. И., Кибернетика — наука об оптимальном управлении, Изд-во «Энергия», 1964.
- 1.35. Л я п у н о в А. А., О некоторых общих вопросах кибернетики. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 1, Физматгиз, 1959.

- 1.36. Яблонский С. В., Основные понятия кибернетики. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 2, Физматгиз, 1959.
- 1.37. Хэммонд П., Теория обратной связи и ее применение, Физматгиз, 1961.
- 1.38. Лилли Р., Автоматизация и социальный прогресс, ИЛ, 1958.
- 1.39. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, Изд-во «Наука», 1968.
- 1.40. Теория автоматического управления, под общей редакцией А. В. Нетушила, Изд-во «Высшая школа», 1968.

К главе II

- 2.1. Сотсков Б. С., Основы расчета и проектирования электромеханических элементов автоматических и телемеханических устройств, Изд-во «Энергия», 1965.
- 2.2. Кречетович Н. Н., Автоматика и телемеханика. Изд-во Министерства высшего среднего и спец. проф. образования БССР, Минск, 1962.
- 2.3. Основы автоматического управления, т. 3, Автоматические регуляторы и следящие системы, под ред. В. В. Солодовникова, Изд-во «Машгиз», 1963.
- 2.4. Круг Е. К., Минина О. М., Электрические регуляторы промышленной автоматики, Изд-во «Энергия», 1962.
- 2.5. Аронович В. В., Слободкин М. С., Арматура регулирующая и запорная, Машгиз, 1953.
- 2.6. Ордынцев В. М., Щендлер Ю. И., Автоматическое регулирование технологических процессов, Машгиз, 1960.
- 2.7. Теплотехнические и химико-технологические приборы и регуляторы, Машгиз, 1959.
- 2.8. Миронов К. А., Шипетин Л. И., Теплотехнические измерительные приборы и автоматические регуляторы, Машгиз, 1956.
- 2.9. Агейкин Д. И., Датчики контроля и регулирования. Машгиз, 1965.
- 2.10. Туричин А. М., Электрические измерения неэлектрических величин, Энергоиздат, Москва, 1954.
- 2.11. Каганов И. Л., Электронные и ионные преобразователи, Энергоиздат, 1950.
- 2.12. Булгаков А. А., Электронные устройства автоматического управления, Госэнергоиздат, 1951.
- 2.13. Дианов В. Г., Автоматические построенно-измерительные приборы, Московский ин-т нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина, Москва, 1962.
- 2.14. Автоматический контроль и измерительная техника, Сборник, Изд-во АН УССР, 1962.
- 2.15. Автоматический контроль и методы электрического измерения, Труды II конференции, Изд-во СО АН СССР, 1962.
- 2.16. Приборы промышленного контроля и средства автоматики, Доклады и сообщения, Гостехиздат, УССР, 1963.
- 2.17. Справочная книга по технике автоматического регулирования, под ред. Дж. Траксела, Госэнергоиздат, 1962.
- 2.18. Розенблат М. А., Магнитные усилители, Изд-во «Советское радио», 1956.
- 2.19. Сторм Г. Ф., Магнитные усилители, ИЛ, 1957.
- 2.20. Хохлов В. А., Электрогидравлический следящий привод, Изд-во «Наука», 1966.
- 2.21. Красов И. М., Гидравлические элементы системы автоматического регулирования, Машгиз, 1963.
- 2.22. Башта Т. М., Гидравлические следящие приводы, Машгиз, 1960.

К главе III

- 3.1. Воронов А. А., Основы теории автоматического управления, Изд-во «Энергия», часть I, 1965, часть II, 1966.
- 3.2. Лернер А. Я., Введение в теорию автоматического регулирования, Машгиз, 1958.
- 3.3. Блох З. Ш., Динамика линейных систем автоматического регулирования и машин, Гостехиздат, 1952.
- 3.4. Фатеев А. В., Основы линейной теории автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1954.
- 3.5. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
- 3.6. Попов Е. П., Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1954.
- 3.7. Айзерман М. А., Введение в динамику автоматического регулирования двигателей, Машгиз, 1950.

- 3.8. Мееров М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд-во АН СССР, 1956.
- 3.9. Мееров М. В., Дианов В. Г., Теория автоматического регулирования и авторегуляторы, Изд-во «Недра», 1963.
- 3.10. Траксел Дж., Синтез систем автоматического регулирования, Машгиз, 1959.
- 3.11. Смит О. Д., Автоматическое регулирование, Физматгиз, 1969.
- 3.12. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962.
- 3.13. Основы автоматического управления, под ред. В. С. Пугачева, Физматгиз, 1963.
- 3.14. Основы автоматического управления, под ред. В. В. Солодовникова, Физматгиз, 1964.
- 3.15. Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, 1958.
- 3.16. Мееров М. В., Синтез структур систем автоматического регулирования, Физматгиз, 1959.

К главе IV

- 4.1. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
- 4.2. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, Изд-во «Наука», 1967.
- 4.3. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
- 4.4. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, Изд-во «Наука», 1967.
- 4.5. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
- 4.6. Лернер А. Я., Введение в теорию автоматического регулирования, Машгиз, 1958.
- 4.7. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Изд-во «Наука», 1965.
- 4.8. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Изд-во «Наука», 1966.
- 4.9. Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, 1958.
- 4.10. Цыпкин Я. З., Лекции по курсу «Теория автоматического регулирования», Изд-во Всесоюзного заочного энергетического института, 1963.

К главе V

- 5.1. Конторович М. И., Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1955.
- 5.2. Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление, Изд-во «Высшая школа», 1966.
- 5.3. Диткин В. А., Прудников А. П., Справочник по операционному исчислению, Изд-во «Высшая школа», 1965.
- 5.4. Лурье А. И., Операционное исчисление, Гостехиздат, 1951.
- 5.5. Деч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Изд-во «Наука», 1965.
- 5.6. Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961.
- 5.7. Ван-дер-Поль Б., Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
- 5.8. Гарднер М. Ф., Бернс Д. Л., Переходные процессы в линейных системах, Гостехиздат, 1951.
- 5.9. Евтянов С. Н., Переходные процессы в приемно-усилительных схемах, Связьиздат, 1948.
- 5.10. Карслоу Х., Егер Ф., Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.
- 5.11. Круг К. А., Переходные процессы в линейных электрических цепях, Госэнергоиздат, 1948.
- 5.12. Левин В. И., Ряды и интегралы Фурье, элементы операционного исчисления, Изд-во «Советское радио», 1948.
- 5.13. Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложение к задачам механики, Гостехиздат, 1950.
- 5.14. Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, 1956.
- 5.15. Римский-Корсаков Б. С., Элементы операционного исчисления, Физматгиз, 1959.
- 5.16. Снеддон И., Преобразование Фурье, ИЛ, 1955.
- 5.17. Карман Т., Био М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, 1948.
- 5.18. Эфрос А. М., Данилевский А. М., Операционное исчисление и контурные интегралы, АНТВУ, Харьков, 1937.

К главе VI

- 6.1. Б о д е Г. В., Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, 1948.
- 6.2. А н т о к о л ь с к и й М. Л., О связи между частотными и фазовыми характеристиками в линейных системах, Журнал технической физики, т. XVII, вып. 2, 1947.
- 6.3. С о л о д о в н и к о в В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, 1952.
- 6.4. Г о н о р о в с к и й И. С., Радиосигналы и переходные звенья в радиоцепях, Связьиздат, 1954.
- 6.5. Ф е л ь д б а у м А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1954.
- 6.6. Я н к е Е., Э м д е Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1946.
- 6.7. А й з е р м а н М. А., Об увеличении критического коэффициента усиления за счет воздействия по производной, Автоматика и телемеханика, т. XII, № 2, 1951.
- 6.8. А й з е р м а н М. А., О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 2, 1948.
- 6.9. В о р о н о в А. А., О некоторых квадратичных критериях, Автоматика и телемеханика, т. 24, № 6, 1963.
- 6.10. Ц ы п к и н Я. З., Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью, Автоматика и телемеханика, т. 74, № 2—3, 1964.
- 6.11. М е е р о в М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд-во АН СССР, 1956.
- 6.12. Р о з е н ф е л ь д А. С., А х и н с о н Б. И., Переходные процессы и обобщенные функции, Изд-во «Наука», 1966.

К главе VII

- 7.1. Б л о х З. Ш., Некоторые оценки качества регулирования по частотным характеристикам, Автоматика и телемеханика, т. 16, № 3, 1965.
- 7.2. Ц ы п к и н Я. З., Б р о м б е р г П. В., О степени устойчивости линейных систем, Изд-во АН СССР, ОТН, № 12, 1945.
- 7.3. Ф е л ь д б а у м А. А., О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 4, 1948.
- 7.4. Б е н д р и к о в Г. А., Теодорчик К. Ф., К теории регулирования по производной в линейных системах третьего порядка, Автоматика и телемеханика, т. 18, № 5, 1957.
- 7.5. Ф е л ь д б а у м А. А., Интегральные критерии качества регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 1, 1948.
- 7.6. Ф е л ь д б а у м А. А., Исследование динамики систем регулирования по методу обобщенного интегрального критерия, Электричество, № 7, 1951.
- 7.7. Теория следящих систем, под ред. Х. Джеймса, Н. Никольса, Р. Филлипса, ИЛ, 1951.
- 7.8. П у г а ч е в В. С., Общее условие минимума средней квадратической ошибки динамической системы, Автоматика и телемеханика, т. 17, № 4, 1956.
- 7.9. Ш а т а л о в А. С., Структурные методы в теории управления и электроавтоматике, Госэнергоиздат, 1962.
- 7.10. Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1967.
- 7.11. У и т т е к е р А., В а т с о н В., Математическая отработка результатов наблюдений, ОНТИ, 1938.
- 7.12. Т р а к с е л Дж., Синтез систем автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
- 7.13. Д о б р о в о л ь с к и й Г. В., Неустойчившиеся процессы в электрических цепях, Изд-во АН СССР, 1948.
- 7.14. С о л о д о в н и к о в В. В., О применении трапециoidalных частотных характеристик к анализу качества систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 10, № 5, 1949.
- 7.15. В о р о н о в А. А., К приближенному построению кривых переходного процесса по вещественной частотной характеристике, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 6, 1952.
- 7.16. В о л г и н М. Л., Паразитные связи и наводки, Изд-во «Советское радио», 1960.
- 7.17. Теоретические основы связи и управления, под ред. А. А. Фельдбаума, Физматгиз, 1963.
- 7.18. Б е р е з и н С. Я., Расчет систем автоматического регулирования с помощью обратных амплитудно-фазовых характеристик, Судпромгиз, 1962.
- 7.19. Д е л ь Т о р о В., П а р к е р С. Р., Принципы проектирования систем автоматического управления, Машгиз, 1963.

- 7.20. Печорина И. И., Расчет систем автоматического управления, Машгиз, 1962.
- 7.21. Рязанов Ю. А., Проектирование систем автоматического регулирования, Машгиз, 1963.
- 7.22. Смит О. Дж., Автоматическое регулирование, Физматгиз, 1962.
- 7.23. Такер Г. К., Уиллс Д. М., Упрощенные методы анализа системы автоматического регулирования. Графические методы исследования и улучшения систем автоматического регулирования технологических процессов, Госэнергоиздат, 1963.
- 7.24. Удерман Э. Г., Метод корневого годографа в теории автоматического управления, Госэнергоиздат, 1963.
- 7.25. Мееров М. В., Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, 1959.

К главе VIII

- 8.1. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Госэнергоиздат, 1951.
- 8.2. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
- 8.3. Цыпкин Я. З., Теория импульсных систем, Физматгиз, 1958.
- 8.4. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.
- 8.5. Цыпкин Я. З., Лекция по теории автоматического регулирования. Элементы теории импульсного регулирования, Изд-во Всесоюзного заочного энергетического ин-та, 1963.
- 8.6. Тартаковский Г. П., К теории линейных импульсных систем с переменными параметрами, Электросвязь, № 10, 1956.
- 8.7. Тартаковский Г. П., Временные и частотные характеристики линейных импульсных систем с переменными параметрами, Радиотехника и электросвязь, № 12, 1956.
- 8.8. Тартаковский Г. П., О применении моделирования при анализе линейных систем с переменными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. 20, № 5, 1959.
- 8.9. Крутько П. Д., Статистическая динамика импульсных систем, «Советское радио», М., 1963.
- 8.10. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Многомерные дискретные системы управления, Изд-во «Наука», 1966.

К главе IX

- 9.1. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
- 9.2. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, 1955.
- 9.3. Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 8, № 5, 1947.
- 9.4. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
- 9.5. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
- 9.6. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Изд-во «Наука», 1966.
- 9.7. Младов А. Г., Система дифференциальных уравнений и устойчивость движения по Ляпунову, Изд-во «Высшая школа», 1966.
- 9.8. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
- 9.9. Ласалль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, Изд-во «Мир», 1964.
- 9.10. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
- 9.11. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, Изд-во «Наука», 1967.
- 9.12. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
- 9.13. Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд-во ЛГУ, 1958.
- 9.14. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд-во АН СССР, 1963.
- 9.15. Попов В. М., Гиперустойчивость автоматических систем, перев. с румын., Изд-во «Наука», 1960.
- 9.16. Былов Б. Ф., Виноградов Р. Э., Гробман А. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова, Изд-во «Наука», 1966.
- 9.17. Красовский Н. Н., Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения, Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд-во АН СССР, 1962.
- 9.18. Зубов В. И., Колебания в нелинейных управляемых системах, Судпромгиз, 1962.

- 9.19. Емельянов С. В., Системы автоматического управления с переменной структурой, Изд-во «Наука», 1967.
- 9.20. Рабинович Л. В., Методы фазовой плоскости в теории и практике релейных следящих систем, Изд-во «Энергия», 1965.
- 9.21. Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления, Сб. «Итоги науки», под ред. Я. З. Цыпкина, Изд-во АН СССР, 1957.
- 9.22. Карачаров К. А., Пилюттик А. Г., Введение в техническую теорию устойчивости движения, Физматгиз, 1962.
- 9.23. Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во ЛГУ, 1951.
- 9.24. Лефшец С., Устойчивость нелинейных систем автоматического управления, Изд-во «Мир», 1967.
- 9.25. Демидович В. П., Лекции по математической теории устойчивости, Изд-во «Наука», 1967.
- 9.26. Кринецкий Н. Н., Расчет нелинейных автоматических систем, Гостехиздат УССР, 1962.
- 9.27. Ройтенберг Я. И., Некоторые задачи управления движением, Физматгиз, 1963.
- 9.28. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
- 9.29. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
- 9.30. Митропольский Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд-во «Наука», 1964.
- 9.31. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
- 9.32. Ващенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д., Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, Изд-во «Наукова думка», 1966.
- 9.33. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
- 9.34. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950.
- 9.35. Харкевич А. А., Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике, Гостехиздат, 1956.
- 9.36. Митропольский Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд-во АН УССР, 1955.
- 9.37. Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, Изд-во «Наука», 1961.
- 9.38. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1953.
- 9.39. Хейл Дж., Колебания в нелинейных системах, Изд-во «Мир», 1966.
- 9.40. Хаяси Т., Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, 1957.
- 9.41. Цыпкин Я. З., Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах, Автоматика и телемеханика, т. 24, № 12, 1963.
- 9.42. Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
- 9.43. Математические модели технологических процессов и разработка систем автоматического регулирования с переменной структурой, Сборник научных трудов Гинцветмета, под ред. Б. Н. Петрова, Металлургия, 1964.

К главе X

- 10.1. Муррей Ф., Теория математических машин, ИЛ, 1964.
- 10.2. Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.
- 10.3. Корн Г., Корн Т., Электронные моделирующие устройства, ИЛ, 1955.
- 10.4. Корн Г., Корн Т., Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины, Изд-во «Мир», 1967.
- 10.5. Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд-во АН СССР, 1949.
- 10.6. Коган Б. Я., Электронные моделирующие установки и их применение для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, 1963.
- 10.7. Коган Б. Я., Методика набора и решения задач на электронных моделирующих установках, Автоматика и телемеханика, т. XVII, № 1, 1956.
- 10.8. Лосиевский В. Л., О моделировании процессов регулирования производственных объектов, Автоматика и телемеханика, т. XIV, № 3, 1953.
- 10.9. Фельдбаум А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1959.
- 10.10. Трапезников В. А., Коган Б. Я., Принципы построения моделирующих установок для исследования процессов автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. XIII, № 4, 1952.

- 10.11. Трапезников В. А., Математическое моделирование динамических систем, *Электричество*, № 8, 1955.
- 10.12. Коган Б. Я., О моделировании систем автоматического регулирования при наличии типичных нелинейных характеристик, *Автоматика и телемеханика*, т. XVI, № 2, 1955.
- 10.13. Фицнер Л. Н., Блок производства на тиритах, *Приборостроение*, № 4, 1956.
- 10.14. Фицнер Л. Н., Прецизионное множительное звено, *Автоматика и телемеханика*, т. XX, № 1, 1959.
- 10.15. Манухин А. И., Фельдбаум А. А., Фицнер Л. Н., Нелинейные преобразователи с двумя входами. Приборы и техника эксперимента, № 4, 1957.
- 10.16. Быховский М. Л., Основы динамической точности электрических и механических цепей, Изд-во АН СССР, 1958.
- 10.17. Этерман И. И., Математические машины непрерывного действия, Машгиз, 1957.
- 10.18. Фельдбаум А. А., О применении вычислительных устройств в автоматических системах, *Автоматика и телемеханика*, т. XVII, № 11, 1956.
- 10.19. Зайденберг В. К., Таробатова Е. В., Обзор зарубежной вычислительной техники за 1963 г., Институт точной механики и вычислительной техники, 1963.
- 10.20. Полисар Г. Л., Моделирование, Воениздат, 1963.

К главе XI

- 11.1. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1962.
- 11.2. Основы автоматического управления, под ред. В. С. Пугачева, Физматгиз, 1963.
- 11.3. Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд-во «Советское радио», 1960.
- 11.4. Давенпорт В. Б., Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.
- 11.5. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.
- 11.6. Казаков И. Е., Доступов Б. Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1962.
- 11.7. Траксел Дж., Синтез систем автоматического регулирования, Машгиз, 1959.
- 11.8. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.
- 11.9. Джемс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИЛ, 1951.
- 11.10. Лэнинг Дж. Х., Бэтин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, 1958.
- 11.11. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д., Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд-во «Советское радио», 1960.
- 11.12. Бодэ Г., Шеннон К., Упрощенное изложение линейной минимально-квадратичной теории сглаживания и предсказания. Сб. статей «Теория информации и ее применение», под ред. А. А. Харкевича, ИЛ, 1959.
- 11.13. Пелегрэн М., Статистический расчет следящих систем, ИЛ, 1957.
- 11.14. Первозванский А. А., Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, 1962.
- 11.15. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.
- 11.16. Рыжов С. М., Введение в статистическую радиотехнику, Изд-во «Наука», 1966.
- 11.17. Стратонович Р. Л., Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Изд-во «Советское радио», 1961.
- 11.18. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, Судпромгиз, 1961.
- 11.19. Скляревич А. Н., Операторные методы в статистической динамике автоматических систем, Изд-во «Наука», 1965.
- 11.20. Ван-Трис Г., Синтез оптимальных нелинейных систем управления, Изд-во «Мир», 1964.
- 11.21. Андреев Н. И., Корреляционная теория статистически оптимальных систем, Изд-во «Наука», 1966.
- 11.22. Лебедев В. Л., Случайные процессы в электрических и механических системах, Физматгиз, 1958.
- 11.23. Ли Р., Оптимальные оценки, определение характеристик и управления, Изд-во «Наука», 1966.
- 11.24. Деч Р., Нелинейные преобразования случайных процессов, Изд-во «Советское радио», 1965.
- 11.25. Вакман А. Е., Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации, Изд-во «Советское радио», 1965.

- 11.26. Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, Изд-во «Советское радио», т. 1, 1961; т. II, 1962.
 11.27. Миддлтон Д., Очерки теории связи, Изд-во «Советское радио», 1966.
 11.28. Хазен Э. М., Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления, Изд-во «Советское радио», 1968.

К главе XII

- 12.1. Харкевич А. А., Очерки общей теории связи, Гостехиздат, 1955.
 12.2. Турбович И. Г., Некоторые обобщения теоремы Котельникова, Радиотехника, № 4, 1956.
 12.3. Колмогоров А. Н., Яглом А. М., Гельфанд И. М., Количество информации и энтропия для непрерывных распределений, Труды третьего Всесоюзного математического съезда, Изд-во АН СССР, т. 2, 1956.
 12.4. Колмогоров А. Н., Теория передачи информации, Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства, Изд-во АН СССР, т. 1, 1957.
 12.5. Долуханов М. П., Введение в теорию передачи информации по электрическим каналам связи, Связьиздат, 1955.
 12.6. Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация, Гостехиздат, 1957.
 12.7. Голдман С., Теория информации, ИЛ, 1957.
 12.8. Бриллюэн Л., Наука и теория информации, Физматгиз, 1960.
 12.9. Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, 1963.
 12.10. Хинчин А. Я., Понятие энтропии в теории информации, Успехи математических наук, т. 8, вып. 3, 1953.
 12.11. Хинчин А. Я., Об основных теоремах теории информации, Успехи математических наук, т. 2, вып. 1 (67), 1956.
 12.12. Теория информации и ее применение, Сб. переводов под ред. А. А. Харкевича, Физматгиз, 1959.
 12.13. Файнштейн А., Основы теории информации, ИЛ, 1960.
 12.14. Колмогоров А. Н., Теория передачи информации, Изд-во АН СССР, 1956.
 12.15. Плискер М. С., Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов, Изд-во АН СССР, 1960.
 12.16. Теория передачи сообщений, Сб. статей под ред. В. И. Сифорова, ИЛ, 1957.
 12.17. Ключев Н. И., Информационные основы передачи сообщений, Изд-во «Советское радио», 1966.
 12.18. Бриллюэн Л., Научная неопределенность и информация, Изд-во «Мир», 1966.
 12.19. Пирс Дж., Электроны, волны и сообщения, Физматгиз, 1961.
 12.20. Пирс Дж., Символы, сигналы, шумы (закономерности и процессы передачи информации), Изд-во «Мир», 1967.
 12.21. Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, Изд-во «Советское радио», 1955.
 12.22. Полетаев И. А., Сигнал, Изд-во «Советское радио», 1958.
 12.23. Кондратов А., Звуки и знаки, Изд-во «Знание», 1966.
 12.24. Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, Изд-во «Мир», 1965.
 12.25. Теория информации (терминология), Изд-во «Наука», 1964.
 12.26. Тарасенко Ф. П., Введение в курс теории информации. Изд-во Томского университета, 1963.
 12.27. Солодов А. В., Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля, Изд-во «Наука», 1967.
 12.28. Моль А., Теория информации и эстетическое восприятие, Изд-во «Мир», 1966.
 12.29. Кульбак С., Теория информации и статистика, Изд-во «Наука», 1967.
 12.30. Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, Физматгиз, 1959.

К главе XIII

- 13.1. Вильямс Дж. Д., Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр, Изд-во «Советское радио», 1960.
 13.2. Льюис Р. Д., Райфл Х., Игры и решения, ИЛ, 1961.
 13.3. Вальд А., Последовательный анализ, Физматгиз, 1960.
 13.4. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д., Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд-во «Советское радио», 1960.
 13.5. Башариков А. Е., Флейшман Б. С., Методы статистического последовательного анализа и их приложения, Изд-во «Советское радио», 1962.
 13.6. Фелдбаум А. А., Теория дуального управления, I, II, III, IV, Автоматика и телемеханика, т. 21, № 9, 11, 1960; т. 22, № 1, 2, 1961.
 13.7. Блеквелл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, ИЛ, 1958.

- 13.8. Яблонский А. И., Машина принимает решение, Изд-во «Знание», 1964.
 13.9. Уилкс С., Математическая статистика, Изд-во «Наука», 1967.
 13.10. Чернов Г., Мозес Л., Элементарная теория статистических решений, Изд-во «Советское радио», 1962.
 13.11. Лоули Д., Максвелл А., Факторный анализ или статистический метод, Изд-во «Мир», 1967.
 13.12. Саати Т., Математические методы исследования операций, Воениздат, 1963.
 13.13. Кофман А., Фор Р., Займемся исследованием операций, Изд-во «Мир», 1966.
 13.14. Морз Ф. М., Кимбелл Д. Е., Методы исследования операций, Изд-во «Советское радио», 1956.
 13.15. Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, Изд-во «Наука», 1965.
 13.16. Хикс Ч., Основные принципы планирования эксперимента, Изд-во «Мир», 1967.
 13.17. Клепиков Н. П., Соколов С. Н., Анализ и направление экспериментов методом максимума правдоподобия, Изд-во «Наука», 1964.

К главе XIV

- 14.1. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, 1950.
 14.2. Эльсгольц Л. Э., Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1952.
 14.3. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
 14.4. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, Изд-во «Наука», 1966.
 14.5. Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.
 14.6. Цлаф Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, Изд-во «Наука», 1966.
 14.7. Лаврентьев М., Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. 1, ОНТИ, НКТП, М.—Л., 1935.
 14.8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
 14.9. Лернер А. Я., Введение в теорию автоматического регулирования, Машгиз, 1958.
 14.10. Розоноэр Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, т. 20, № 10, 11, 12, 1959.
 14.11. Лернер А. Я., Принципы построения быстродействующих следящих систем и регуляторов, Энергоиздат, 1961.
 14.12. Лернер А. Я., О предельном быстродействии систем автоматического управления, Автоматика и телемеханика, т. 15, № 6, 1954.
 14.13. Цыпкин Я. З., Об оптимальных процессах в импульсных автоматических системах, АН СССР, т. 134, № 2, 1962.
 14.14. Цыпкин Я. З., Оптимальные процессы в импульсных автоматических системах, Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 4, 1960.
 14.15. Летов А. М., Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, т. 21, № 4, 1960.
 14.16. Красовский Н. Н., Летов А. М., К теории аналитического конструирования регуляторов, Автоматика и телемеханика, т. 23, № 6, 1962.
 14.17. Куликовскии Р., Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования, Изд-во «Наука», 1967.
 14.18. Кирilloва Ф. М., Некоторые вопросы теории оптимального регулирования, Изд-во вузов, Математика, № 3, 1962.
 14.19. Кротов В. Ф., Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, Автоматика и телемеханика, т. 23, № 12, 1962.
 14.20. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, Изд-во «Наука», 1965.
 14.21. Шрейдер Ю. А., Задачи динамического планирования и автоматы, Проблемы кибернетики, вып. 5, 1961.
 14.22. Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
 14.23. Беллман Р., Кликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1962.
 14.24. Вентцель Е. С., Элементы динамического программирования, Изд-во «Наука», 1964.
 14.25. Робертс С., Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления, Изд-во «Мир», 1965.
 14.26. Арис Р., Оптимальное проектирование химических реакторов, ИЛ, 1963.

- 14.27. Петров Ю. П., Оптимальное управление электроприводом, Энергоиздат, 1961.
- 14.28. Рабинович Б. И., Вариационные режимы полета крылатых летательных аппаратов, Машгиз, 1966.
- 14.29. Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, Изд-во «Наука», 1966.
- 14.30. Бутковский А. Г., Что такое оптимальное управление. Изд-во «Знание», 1966.
- 14.31. Оптимальные системы автоматического управления. Сб. статей под ред. А. М. Летова, Изд-во «Наука», 1967.
- 14.32. Фан Лян-цэн, Ван Чу-сен, Дискретный принцип максимума, Изд-во «Мир», 1967.
- 14.33. Лоуден Д. Ф., Оптимальные траектории для космической навигации, Изд-во «Мир», 1966.
- 14.34. Спехов А. А., Оптимальное управление перегрузочными процессами, Машгиз, 1966.
- 14.35. Пышкало В. Д., Акимов Л. В., Шамрай В. П., Оптимальные по быстродействию промышленные электроприводы, Энергоиздат, 1967.
- 14.36. Васильев А. И., Анисимов А. С., Оптимальные процессы в микроэлектроприводах, Энергоиздат, 1966.
- 14.37. Ченг С. С. Л., Видоизмененный принцип максимума для оптимального управления системами с ограниченными фазовыми координатами. Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Оптимальные системы. Статистические методы, Изд-во «Наука», 1965.
- 14.38. Петров Ю. П., Вариационные методы теории оптимального управления, Энергоиздат, 1965.
- 14.39. Смольников П. П., Синтез квазиоптимальных систем автоматического управления, Энергоиздат, 1967.
- 14.40. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Задачи на экстремумы при наличии ограничений, ДАН СССР, т. 149, № 4, 1963.
- 14.41. Цян Сьюэ-сен, Техническая кибернетика, ИЛ, 1956.
- 14.42. Розенман Е. А., Об оптимальных переходных процессах в системах с ограниченной мощностью, Автоматика и телемеханика, т. 18, № 6, 1957.
- 14.43. Павлов А. А., Синтез релейных систем оптимальных по быстродействию, Изд-во «Наука», 1966.
- 14.44. Островский Г. М., Методы оптимизации химических реакторов, Изд-во «Химия», 1967.
- 14.45. Бор-Раменский А. Е., Сун Цзянь, Оптимальный следящий привод с двумя параметрами управления, Автоматика и телемеханика, т. 22, № 2, 1961.
- 14.46. Chang S. S. L., Computer optimization of nonlinear control systems by means of digitized maximum principle, IRE International Convention Record, 1961.
- 14.47. Neustadt L., Time optimal control systems with position and integral limits. J. Mathem. analys and applic., V. 3, Dec., N 3, 1961.
- 14.48. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами, ДАН СССР, т. 134, № 4, 1960.
- 14.49. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. 21, № 6, 1960.
- 14.50. Лернер А. Я., Выступление в дискуссии на секции оптимальных систем I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Труды I Международного конгресса ИФАК. Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем, Изд-во АН СССР, 1961, стр. 516—518.
- 14.51. Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, Изд-во «Наука», 1965.
- 14.52. Варшавский О. Г., Быстродействие промышленных регуляторов, Изд-во «Металлургия», 1966.
- 14.53. Малай С. А., Экономичный нагрев металла, Metallurgizdat, 1967.
- 14.54. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, перев. с англ., Изд-во «Машиностроение», 1968.
- 14.55. Бутковский А. Г., Гескин Э. С., Гольдфарт Э. М., Принципы максимума для оптимизации температурного режима печей, Известия вузов, Черная металлургия, № 3, 1967.
- 14.56. Девятко Б. Н., Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления, Изд-во СО АН СССР, 1964.
- 14.57. Ашавский А. М., Основы проектирования оптимальных параметров забойных и буровых машин, Изд-во «Недра», 1966.
- 14.58. Климовицкий М. Д., Оптимизация работы нагревательных печей, Металлургия, 1965.

- 14.59. Б у я к а с В. И., Оптимальное управление системами с переменной структурой при постоянно действующих возмущениях, Автоматика и телемеханика, № 7, 1966.

К главе XV

- 15.1. К р а с о в с к и й Н. Н., Теория управления движением, Изд-во «Наука», 1968.
 15.2. К р а с о в с к и й Н. Н., К теории оптимального регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 18, № 11, 1957.
 15.3. Б у т к о в с к и й А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, Изд-во «Наука», 1965.
 15.4. А н д р е е в Ю. Н., Оптимальное управление нагрева массивных тел, Кандидатская диссертация, 1967.
 15.5. А г р а н о в и ч З. С., П о в з н е р А. Я., Применение операторных методов к решению некоторых задач математической физики, Изд-во Харьковского Гос. ун-та, 1954.
 15.6. А х и е з е р Н. И., К р е й н М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ, Харьков, 1938.
 15.7. Л ы к о в А. В., Теплопроводность нестационарных процессов, Гостехиздат, 1951.
 15.8. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.
 15.9. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1951.
 15.10. Р а с п о п о в Б. М., Задача оптимального быстрогодействия для процессов несвязанного тепло- и массопереноса, Автоматика и телемеханика т. 26, № 10, 1965.
 15.11. Б у т к о в с к и й А. Г., П о л т а в с к и й Л. Н., Оптимальное управление двумерной распределенной колебательной системой, Автоматика и телемеханика, т. 27, № 4, 1966.
 15.12. Б у т к о в с к и й А. Г., П о л т а в с к и й Л. Н., Оптимальное управление волновыми процессами, Автоматика и телемеханика, т. 27, № 9, 1966.

К главе XVI

- 16.1. Б у т к о в с к и й А. Г., Задачи финитного управления линейными системами с сосредоточенными параметрами, ДАН СССР, т. 180, № 5, 1968.
 16.2. Б у т к о в с к и й А. Г., П о л т а в с к и й Л. Н., Финитное управление линейными системами с сосредоточенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. 28, № 9, 1967.
 16.3. Б у т к о в с к и й А. Г., П о л т а в с к и й Л. Н., Некоторые задачи обобщенного и оптимального финитного управления линейными системами с сосредоточенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. 28, № 10, 1967.
 16.4. Б у т к о в с к и й А. Г., П о л т а в с к и й Л. Н., Финитное управление системами с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т. 30, № 1, 1969.
 16.5. Х у р г и н Я. И., Я к о в л е в В. П., Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, Физматгиз, 1962.
 16.6. Ш и л о в Г. Е., Математический анализ. Второй специальный курс, Изд-во «Наука», 1965.
 16.7. Г а н т м а х е р Ф. Р., Теория матриц, Изд-во «Наука», 1968.
 16.8. В и н е р Н., П э л и Р., Преобразование Фурье в комплексной области, Изд-во «Наука», 1964.
 16.9. Г о н ч а р о в В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
 16.10. Л е в и н Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.
 16.11. Р о з о н о э р Л. И., Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления, Автоматика и телемеханика, т. 24, № 6, 7, 1963.
 16.12. М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
 16.13. Т и т м а р ш Е., Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.
 16.14. И б р а г и м о в И. И., Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Изд-во АН Аз. ССР, 1962.
 16.15. К о р е н б л о м Б. И., Оценка типа целой функции и задачи об оптимальном быстродействии, ДАН СССР, т. 170, 1966, № 3.
 16.16. Т и м о ш е н к о С. П., Колебания в инженерном деле, Физматгиз, 1959.
 16.17. Б у т к о в с к и й А. Г. Финитное управление и управляемость в распределенных системах, ДАН СССР, т. 191, № 6, 1970.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Агейкин Д. И. 724
 Агранович Э. С. 733
 Айзерман М. А. 191, 320, 723—727
 Акимов Л. В. 732
 Андреев Н. И. 729
 Андреев Ю. Н. 733
 Андронов А. А. 310, 338, 728
 Анисимов А. С. 732
 Антокольский М. Л. 726
 Арис Р. 731
 Аронович В. В. 724
 Атанс М. 732
 Ахиезер Н. И. 733
 Ашавский А. М. 732

Барбашин Е. А. 725, 727
 Башаринов А. Е. 730
 Башта Т. М. 724
 Беллман Р. 25, 580, 590, 725, 727, 731
 Бендриков Г. А. 726
 Берг А. И. 723
 Березин С. Я. 726
 Беркович Д. М. 723
 Бернс Д. Л. 725
 Био М. 647, 686, 725
 Бир С. 723
 Блекуэлл Д. 730
 Блисс Г. А. 731
 Блох Э. Ш. 724, 726
 Боголюбов Н. Н. 338, 728
 Боде Г. 477, 726, 729
 Болтянский В. Г. 591, 731
 Борель Э. 521
 Бор-Раменский А. Е. 732
 Бреммер Х. 725
 Бриллюэн Л. 730
 Бромберг П. В. 726
 Бруевич Н. Г. 362
 Булгаков А. А. 724
 Булгаков Б. В. 338, 349, 728
 Буняковский В. Я. 662
 Бутковский А. Г. 591, 646, 723, 732, 733
 Бутон Дж. 492
 Буякас В. И. 733
 Былов Б. Ф. 727
 Быховский М. Л. 729
 Бэйсс 435, 526, 530
 Бэттин Р. Г. 729

Вайнштейн Л. А. 729, 730
 Вакман А. Е. 729
 Вальд А. 522, 730

Ван-дер-Поль Б. 338, 725
 Ван-Трис Г. 729
 Ван Чу-сень 732
 Варшавский О. Г. 732
 Васильев А. И. 732
 Ватсон В. 726
 Ващенко С. Ф. 728
 Вейерштрасс 659
 Веников В. А. 362
 Вентцель Е. С. 729, 731
 Вильямс Дж. Д. 730
 Винер Н. 471, 474, 696, 723, 733
 Виноградов Р. Э. 727
 Витт А. А. 728
 Витушкин А. Г. 730
 Волгин М. Л. 726
 Воронов А. А. 723, 724, 726
 Вудворд Ф. М. 730
 Вышнеградский И. А. 126, 177

Гамкрелидзе Р. В. 591, 731
 Гантмахер Ф. Р. 191, 725, 727, 728, 733
 Гарднер М. Ф. 725
 Гельфанд И. М. 730, 731
 Гескин Э. С. 732
 Гиршик М. А. 730
 Голдман С. 730
 Гольдфарб Л. С. 338, 355, 727
 Гольдфарб Э. М. 732
 Гоноровский И. С. 726
 Гончаренко М. И. 723
 Гончаров В. Л. 733
 Грин 654
 Гробман А. М. 727
 Гросс О. 731
 Гурвиц 119, 212, 223
 Гутенмахер Л. И. 362, 364, 391, 728

Давенпорт В. Б. 729
 Данилевский А. М. 725
 Девятов Б. Н. 732
 Дель Торо В. 726
 Демидович Б. П. 725, 728
 Деч Г. 725, 729
 Джемс Х. 729
 Дианов В. Г. 723, 724, 725
 Дирихле 312
 Диткин В. А. 725
 Добровольский Г. В. 726
 Долуханов М. П. 730
 Досупов Б. Г. 729

- Дубовицкий А. Я. 732
 Дудыкин А. Д. 723
 Дюамель 155, 625
- Евтянов С. Н. 725
 Егер Ф. 725
 Емельянов С. В. 728
- Зайденберг В. К. 729
 Зубаков В. Д. 729, 730
 Зубов В. И. 727, 728
- Ибрагимов И. И. 733
- Каганов И. Л. 724
 Казаков И. Е. 492, 729
 Канторович Л. В. 522
 Карачаров К. А. 728
 Карман Т. 725
 Карслоу Х. 725
 Карсон 147, 206
 Катковник В. Я. 727
 Кимбелл Д. Е. 731
 Кириллова Ф. М. 731
 Кирпичев М. В. 362
 Клаус Г. 723
 Клепиков Н. П. 731
 Кликсберг И. 731
 Климовицкий М. Д. 732
 Ключев Н. И. 730
 Кобринский Н. Е. 728
 Коган Б. Я. 362, 403, 728, 729
 Коган Л. В. 391
 Колмогоров А. Н. 471, 501, 521, 730
 Кондратов А. 730
 Конторович М. И. 725
 Коренблюм Б. И. 733
 Корн Г. 728
 Корн Т. 728
 Корольков Н. В. 364
 Костенко М. П. 362
 Котельников В. А. 247, 248, 514, 522, 540, 546, 554, 712
 Кофман А. 731
 Коши 629, 671
 Крамер Г. 521
 Красов И. М. 724
 Красовский А. А. 723, 725
 Красовский Н. Н. 657, 727, 731, 733
 Крейн М. Г. 7, 657, 661, 728, 733
 Кречетович Н. Н. 724
 Кринецкий Н. Н. 728
 Кротов В. Ф. 731
 Круг Е. К. 724
 Круг К. А. 725
 Крутько П. Д. 727
 Крылов Н. М. 338
 Кузьминон Г. К. 364
 Куликовский Р. 731
 Кульбак С. 730
 Курош А. Г. 127, 725
- Лаплас 7, 70, 143, 146, 206, 209, 243, 326, 463, 718
 Ласалль Ж. 727
 Лебедев В. Л. 729
 Левин Б. Р. 729
 Левин Б. Я. 733
 Левин В. И. 725
 Лежаандр 390
 Лернер А. Я. 646, 723, 724, 725, 731, 732
 Летов А. М. 727, 731, 732
 Лефшец С. 727, 728
 Ли Р. 729
 Лилли Р. 724
 Линник Ю. В. 521
 Лопиталь 330
 Лосиевский В. Л. 728
 Лоуден Д. Ф. 732
 Лоули Д. 731
 Лурье А. И. 316, 317, 725, 727
 Лыков А. В. 733
 Льюис Р. Д. 730
 Лэнинг Дж. Х. 729
 Люстерник Л. А. 731
 Ляпунов А. А. 723
 Ляпунов А. М. 282, 288, 312, 338, 341, 727
- Максвелл А. 731
 Малкин И. Г. 727, 728
 Малый С. А. 732
 Мандельштам Л. И. 338
 Мановцев А. П. 723
 Манухин А. И. 398, 402, 729
 Марков А. А. 441
 Маркушевич А. И. 733
 Медведев Л. В. 395
 Мееров М. В. 177, 723, 725, 726, 727
 Миддлтон Д. 522, 730
 Мизес 260
 Микусинский Я. 725
 Милютин А. А. 732
 Минина О. М. 724
 Мирюлюбов Н. Н. 723
 Митропольский Ю. А. 728
 Михайлов А. В. 165, 266
 Михлин С. Г. 732
 Мищенко Е. Ф. 731
 Младов А. Г. 727
 Мозес Л. 731
 Моль А. 730
 Морз Ф. М. 731
 Морзе 503
 Муррей Ф. 728
- Найквист 167, 194, 233, 267, 325
 Налимов В. В. 731
 Нейман Дж. 521, 544
 Нейман Ю. 521
 Неймарк Ю. И. 177
 Нейштадт Л. 732
 Немецкий В. В. 727
 Нетушил А. В. 337
 Николаенко Л. Д. 728
 Никольс Н. 729
 Новик И. Б. 723
 Ньютон И. 684
- Лаврентьев М. А. 731
 Лагранж 545, 663, 700, 704, 720

Ордынцев В. М. 724
Островский Г. М. 732

Павлов А. А. 732
Пальтов И. П. 728
Папалекси Н. Д. 338
Паркер С. Р. 726
Парсеваль 330
Пелегрэн М. 729
Первозванский А. А. 729
Петров Б. Н. 728
Петров Ю. П. 732
Печорина И. И. 727
Пилюттик А. Г. 728
Пирс Дж. 730
Пирсон Е. 521, 544
Плискер М. С. 730
Плисс В. А. 727, 728
Повзнер А. Я. 733
Полегаев И. А. 723, 730
Полисар Г. Л. 729
Полтавский Л. Н. 733
Полуэктон Р. А. 727
Понтрягин Л. С. 25, 591, 592, 604, 657, 671, 694, 731
Попов В. М. 320, 325, 727
Попов Е. П. 338, 723, 724, 728
Поспелов Г. С. 723, 725
Постников В. Н. 316
Прудников А. П. 725
Пуанкаре 338
Пугачев В. С. 8, 723, 725, 726, 729
Пышкало В. Д. 732
Пэли Р. 696, 733

Рабинович Б. И. 732
Рабинович Л. В. 728
Райфл Х. 730
Распонов Б. М. 733
Раус 119
Римский-Корсаков Б. С. 725
Робертс С. 731
Розенблат М. А. 724
Розенман Е. А. 732
Розенфельд А. С. 726
Розоноэр Л. И. 591, 731, 733
Ройтенберг Я. И. 728
Рут В. Л. 729
Рыжов С. М. 729
Рэйм 219, 338, 341
Рязанов Ю. А. 727

Саати Т. 731
Самарский А. А. 733
Свешников А. А. 729
Сифоров В. И. 730
Скляревич А. Н. 729
Слободкин М. С. 724
Смит О. Д. 725, 727
Смольников П. П. 732
Снедон И. 725
Соколов А. А. 177
Соколов С. Н. 731
Солодов А. В. 730
Солодовников В. В. 723, 725, 726, 729
Сотсков Б. С. 724
Спехов А. А. 732

Стокер Дж. 728
Сторм Г. Ф. 724
Стратонович Р. Л. 729
Сун Цзянь 732

Такер Г. К. 727
Таланцев А. Д. 396
Тарасенко Ф. П. 730
Таробатова Е. В. 729
Тартаковский Г. П. 727
Тевенен 165
Тейлор 211, 290, 589
Теодорчик К. Ф. 338, 361, 726
Теплов Л. П. 723
Тимошенко С. П. 733
Титчмарш Е. 733
Тихонов А. Н. 733
Тихонов В. И. 729
Траксел Дж. 725, 726, 729
Трапезников В. А. 362, 723, 728, 729
Турбович И. Г. 730
Туричин А. М. 724

Удерман Э. Г. 727
Уилкс С. 731
Уилкс Д. М. 727
Уиттекер А. 726

Файнштейн А. 730
Фалб П. 732
Фан Лян-цэн 732
Фатеев А. В. 724
Фельдбаум А. А. 723—731
Филипс Р. 729
Фихтенгольд Г. М. 733
Фицнер Л. Н. 395, 405, 729
Фишер Р. 521, 533
Флейшман Б. С. 730
Фомин С. В. 731
Фор Р. 731
Фурье 86, 143, 245, 246, 330, 417, 451, 650, 680, 685, 696
Фэно 506, 530

Хазен Э. М. 730
Хайкин С. Э. 728
Хаяси Т. 728
Харкевич А. А. 728, 730
Хейл Дж. 728
Хикс Ч. 731
Хинчин А. Я. 451, 506, 730
Хопф 474
Хохлов В. А. 724
Хургин Я. И. 733
Хэммонд П. 724

Цлаф Л. Я. 731
Цыпкин Я. З. 8, 169, 194, 195, 266, 267, 724—728, 731
Цзянь Сюэ-сень 723, 732

Ченг С. С. 732
Чернов Г. 731

- Чернова Н. А. 731
Четаев Н. Г. 725, 727
- Шамрай В. Р. 732
Шаталов А. С. 726
Шварц 662, 696
Шилов Г. Е. 733
Шипетин Л. И. 724
Шкиль Н. И. 728
Шрейдер Ю. А. 731
Шэннон К. 477, 499, 504, 506, 512, 729, 730
- Щадринцев И. С. 723
Щедрина И. П. 8
Щендлер Ю. И. 724
- Эйлер 193, 451, 518
Экселби Дж. С. 492
Эльсгольц Л. Э. 731
Эмде Ф. 726
Эрмит 720
Этерман И. И. 729
Эфрос А. М. 725
Эшби Р. 723
- Яблонский А. И. 731
Яблонский С. В. 724
Яглом А. М. 730
Яглом И. М. 730
Яковлев В. П. 733
Янке Е. 726
Янушевский Р. Т. 8
Яхинсон Б. И. 726

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 297
Автоматизация 9
Айзермана проблема 320
Алгоритм 539
«Алфавит» 500
Аппроксимация кусочно-линейная 283
- Беллмана метод динамического программирования 25
— уравнение 590
Био критерий 647, 686
Бит 498
Блок интегрирующий 161
— обратной связи 96
— прямой связи 96
— элементарный 68
«Буква» 500
Буняковского-Шварца неравенство 662
Быстродействие максимальное 579, 609
Бэйеса формула 435, 530
- Вариация «игольчатая» 597
Введение производных для достижения устойчивости 110
Вектор выходной 568
Величина выходная 568
— перехода 201
— регулируемая 11
— случайная 433, 435
— — непрерывная 436
— управляемая 568
Вероятность апостериорная 435
— безусловная 434
Вилка нечувствительности 314
Винера—Пэти—Шварца теорема 696, 705
Винера—Хопфа уравнение 474
Возбуждение жесткое 312
— мягкое 311
Воздействие входное 68
— допустимое 579
— ударное 705
Возмущение аддитивное 574
— параметрическое 574
Время запаздывания 191
— переходного процесса 201, 202
— разбега 91
— регулирования 24, 201, 567
Вход звена 68
Выделение сигналов при наличии шумов 520
Выпрямитель тиратронный 45
Выход звена 68
Вышнеградского гипербола 126
- Гальванометр с падающей дужкой 240
Генератор импульсов 240
- Гидропровод 49
Гипербола Вышнеградского 126
Гиперповерхность переключения 613
— — квазистационарная 613
— — нестационарная 613
— — стационарная 613
Гипотеза простая 557
— сложная 557
Гольдфарба метод 355, 360
Граница области устойчивости 126
Грина функция 654
Группа событий полная 434
- Датчик 27
— болометрический 28
— вибрационный 29
— возмущений 367
— время-импульсный 27
— емкости 27, 32
— импульсно-кодový 27
— индуктивности 27, 30
— напряжения 27, 35, 36
— сопротивления 27, 28
— тока 27
— фазы 27
— фотоэлектрический 28
— функций времени 367
— частоты 27
— число-импульсный 27
— электрический 27
- Движение периодическое 297
Декада 229
Декорреляция полная 513
Демодуляция синхронная 40
Детектирование синхронное 542
Детектор квадратичный 489
Децибел 228
Дирихле теорема 312
Дискрет 248
Дисперсия 437
Дрейф выходного напряжения 39
Дюамеля интеграл 155, 625
D-разбиение 177
- Задача бэйесова 526
— оптимального нагрева металла 649
— со свободным концом траектории 579
Закон распределения дифференциальный 436
— — интегральный 436
— — одномерный 440
Запас устойчивости по амплитуде 233
— — — коэффициенту обратной связи 137
— — — фазе 233, 234
Затухание 210, 269

- Затухание бесконечно большое 269
 Звено аperiodическое 74, 161
 — безынерционное 72
 — интегрирующее 161
 — делительное 368, 403
 — дифференцирующее 81
 — — реальное 82
 — запаздывания 84, 191
 — инерционное неустойчивое 189
 — интегрирующее 19, 73
 — колебательное 77
 — — неустойчивое 189
 — консервативное 189
 — множительное 360, 368, 403
 — неустойчивое 189
 — обратной связи 130
 — пассивное электрическое 369
 — прямой связи 130
 — с распределенными параметрами 85
 — с сосредоточенными параметрами 85
 — суммирующее 85
 — типа «упор» 276
 — усилительное (пропорциональное, статическое) 71
 — формирующее 242
 — электромеханическое 369
 — электронное 369
 — элементарное 71
 Значение бифуркационное 312
 — задающее 11
 — параметра оптимальное 215
 — среднеквадратичное 444
 Зона насыщения 42, 272
 — нечувствительности 272, 314
 Избыточность сообщения 506
 Измерение косвенное 28
 — прямое 28
 Измеритель давления пьезоэлектрический 35
 Изображение Фурье 145
 Изоповерхность 593, 603
 Изохрона 594
 Инвертор 102
 Интеграл свертки (Дюамеля) 155, 625
 — Фурье 145, 451
 Интегрирование когерентное 542
 Информация в непрерывных сигналах 514
 Источник погрешности 385
 — сигналов 240
 Исчисление символическое 157
 Канал дискретный без помех 503
 — — с помехами 508
 — обратной связи 96
 — прямой связи 96
 Карсона — Лапласа преобразование 147
 Качество переходного процесса 202
 — регулирования 24, 202
 Квадратор 404
 Классификация оптимальных систем 569
 — САР 22
 Ковариация 439
 Кодирование 504
 Колебание направленное 691
 Колебательность 211
 Количество информации 496
 Компенсация 570
 Конвертор 39
 Контакттор 41
 Контур замкнутый 95
 Котельникова критерий 546
 — теорема 247, 540
 — формула 712
 Коэффициент возврата реле 41
 — затухания 78
 — излучения 92
 — передачи 70
 — — комплексный 250
 — правдоподобия 537
 — статизма 21, 106, 123
 — усиления 21, 62, 72
 — — комплексный 159, 350
 — — по мощности 38
 — — статический 77
 Кривая решения 554
 Критерий абсолютной устойчивости Нетушила 337
 — Био 647, 686
 — идеального наблюдателя 546
 — интегральный 205
 — — обобщенный 219, 577
 — комбинированный 578
 — косвенный 205
 — Котельникова 546
 — Найквиста 167, 325
 — начального условия 686
 — Неймана—Пирсона 544
 — несимметрии нагрева 686
 — оптимальности (статистический) 460, 565, 575
 — перемежаемости корней 167
 — Попова 320
 — распределения корней 205
 — Рауса — Гурвица 119
 — Фурье 685
 — Цыпкина 266, 267
 — частотный 205
 — — абсолютной устойчивости Попова 325
 — — Михайлова 165
 Лагранжа метод множителей 545, 663
 — формула интерполяционная 700
 — — обобщенная 704
 Лагранжа — Эрмита формула 720
 Лапласа преобразование 70, 143, 146, 326
 — — дискретное 243, 718
 Линеаризация статистическая 492
 — уравнения 69
 Люфт 274
 Ляпунова метод второй 282, 312
 — — первый 282
 — функция 313
 Мажоранта 215
 Максимум правдоподобия 533, 537
 Мера индуктивная 28
 Метод алгоритмический 26
 — аналитический 26
 — вибрирующего контакта 29
 — Гольдфарба 355, 360
 — графоаналитический 338
 — динамического программирования 25, 625
 — интегральный 217
 — интегрируемой аппроксимации 282
 — логарифмических частотных характеристик 207

- Метод Ляпунова второй 282, 312
 — — первый 282
 — малого параметра 282, 338
 — малых отклонений 282
 — минимаксный 526, 577
 — множителей Лагранжа 545, 663
 — моментов 7, 657
 — Неймарка 177
 — последовательного анализа 522
 — распределения корней 209
 — статистический 431
 — фазового пространства 609
 — частотный 158, 205
 — Шэннона — Фэнно 506
- Механизм дроссельного управления 49
 — мембранного типа 53
 — объемного (гидростатического) управления 49
 — струйного управления 49
- Мизеса преобразование 260
- Минимум максимального отклонения (минимакс) 577
- Миноранта 215
- Михайлова критерий 165
- Множитель Лагранжа 545, 663
- Моделирование автоматических систем 362
 — зоны насыщения, нечувствительности 397
 — люфта 399
 — математическое 362
 — релейной характеристики 402
 — САР 424
 — сухого трения 402
 — физическое 362
- Модель матричная 367
 — с повторением 364
 — структурного типа 367
 — электронная 382
- Модулятор амплитудно-импульсный 239
 — импульсный 240
- Модуляция амплитудно-импульсная 239, 241
- Момент случайной величины 436—437
 — съема 239
 — функции 661
 — центральный 437
- Мощность решения 543
 — сигнала 449
- Муфта магнитно-жидкостная 48
 — электромагнитная 47
- Найквиста критерий 167, 325
- Напряжение шума удельное 556
- Настройка 12
- Независимость событий 434—435
- Неймана — Пирсона критерий 544
- Неймарка метод 177
- Ненадежность (эквивокация) 510
- Неравенство Буяковского — Шварца 662
- Нетушила критерий абсолютной устойчивости 337
- Неустойчивость колебательная 23, 129
 — монотонная 23, 129
 — САР 17
- Норма вектор-функции 659
- Область допустимых начальных условий 289
 — — отклонений 289
- Область критическая 542
 — принятия (непринятия) гипотезы 542
 — притяжения 309
 — равновесия 313
 — устойчивости 125
- Обнаружение сигналов 461
- Объект с параметрами распределенными 573
 — — — сосредоточенными 573
 — управляемый 570
- Ожидание математическое 473
- Оператор звена 70
 — линейный 149
- Определение частотных характеристик экспериментальное 162
- Оптимальность по быстродействию 566
- Орган исполнительный 45
 — управляющий 37
- Оригинал 145
- Отбой ложный 543
- Отклонение допустимое 24
 — среднеквадратичное 437
- Отношение правдоподобия 537
- Отрезок равновесия 313
- Ошибка ложного отбоя (пропуска сигнала) 543
 — ложной тревоги 543
- Память бесконечная 470
- Параметры несущественные 557
 — статистически оптимальные 557
 — существенные 557
- Парсеваля равенство 330
- Перерегулирование 23, 201
- Плоскость параметров 124
 — фазовая 286, 635
- Плотность вероятности 436
 — — апостериорная 529
 — — двумерная 440
 — — одномерная 440
 — — условная 438
 — спектральная 451
 — — взаимная 452
- Плунжер золотника 50
- Погрешность 12
 — переходная 21
 — по нагрузке 107
 — по установке 107
 — установившаяся 21, 100, 122
- Поиск 12
- Полином звена характеристический 70
- Положительность формы определенная 324
- Полоса равновесия 313
- Помехи 428, 569
 — внешние, внутренние, естественные, искусственные, промышленные 429
 — гладкие (флуктуационные) 430
 — с узкополосным частотным спектром 430
- Помехоустойчивость потенциальная 522
- Понтрягина принцип максимума 25, 591, 592, 637
 — функция 592
- Попова критерий 320
 — — частотный абсолютной устойчивости 325
 — пряма 327, 334
 — теорема 327, 334
 — условие 327
- Порог неустойчивости 117

- Портрет фазовый 297
 Постоянная затухания 78
 Правило штриховки 179
 Преобразование Карсона — Лапласа 147
 — Лапласа 70, 143, 146, 326
 — дискретное 243, 718
 — Мизеса 260
 — сигналов 37
 — — случайных безынерционными нелинейными звеньями 486
 — формы сигнала 38
 — Фурье 143, 696
 — — обратное 145
 Z-преобразование 245, 718
 Преобразователь нелинейный с одним (двумя) входом 368, 389, 396, 416
 Прибор фазированный (фазочувствительный) 33
 Привод следящий 59
 Принцип гармонического баланса 338, 350
 — максимального правдоподобия 526, 533, 537
 — максимума апостериорной вероятности 534, 537
 — — (Л. С. Понтрягина) 25, 591, 592, 637
 — оптимальности 581, 582, 591
 — энергетического баланса 338
 Проблема Айзермана 320
 — моментов 661
 Программирование динамическое 522, 580, 625
 — линейное 522
 Проницаемость 42
 Пространство наблюдений (принимаемого сигнала) 527, 528
 — нормированное 660
 — параметров 527
 — фазовое 285, 609
 — шума 527
 Процесс аперiodический 74
 — гауссов 488
 — компенсации 28
 — оптимальный 610
 — переходный 23, 201
 — — в импульсных системах 269
 — — монотонный 23
 — — немонотонный (колебательный) 23
 — случайный (вероятностный, стохастический) 433, 439
 — — в широком (узком) смысле 446
 — — марковский 441
 — — нестационарный 442
 — — стационарный 442
 — чисто случайный 441
 — эргодический 449
 Процессы совместно-эргодичные 450
 — стационарно связанные 443
 Прямая Попова 327, 334
 Равенство векторное 12
 — Парсеваля 330
 Равновесие устойчивое (неустойчивое) 288
 Радиопротиводействие 429
 Радиосвязь метеорная 429
 Рауса — Гурвица критерий устойчивости 119
 Реакция звена 69, 72
 — системы 72
 Реализация случайного процесса 440
 Регулирование 11
 — по возмущению 15
 — по отклонению 15
 — прямое (непрямое) 37
 — ручное 16
 Регулятор курса 64
 — положения 59
 — скорости 55
 — температуры 53
 Режим отработки начального рассогласования 102
 Реле с гистерезисом 277
 — с зоной нечувствительности 277
 — электромагнитное 38, 40
 — — поляризованное 41
 Решение дуальтернативное (многоальтернативное) 524, 535
 — собственное 113
 — статистическое 520
 Рэйли формула 219
 Ряд Фурье 143
 Свертка 251
 — дискретных функций 251
 Связь 10
 — гибкая идеальная 130
 — — реальная 130
 — дополнительная 18, 129
 — — последовательная 130
 — жесткая 130
 — обратная 13, 570
 — — жесткая 110
 — — отрицательная 14, 96
 — — — гибкая 136
 — — — положительная 96
 — «с интегралом» 132
 — форсирующая 130
 — — реальная 131
 Сглаживание 476, 480, 483
 Седло 295
 Сельсин 36
 Сепаратриса 296, 298
 Сервомотор 20, 45
 Сигнал входной 68
 — выходной 68
 — гармонический 158
 — случайный 428
 Синтез 460
 — ограниченный 460
 Синус интегральный 209
 Система автоматического жесткого управления 12
 — — регулирования 12
 — автоматической настройки 12
 — — стабилизации 22
 — автономная 288
 — астатическая 19, 102, 123
 — грубая 411
 — дискретная (чисто) 572, 573
 — дискретно-непрерывная 572
 — замкнутая 569
 — — с обратной связью 96
 — импульсная 239
 — колебательная 676
 — комбинированная 570
 — линейная 455
 — автоматического дискретная 717
 — — статистически оптимальная 468
 — минимально-фазовая 160, 485

- Система нейтральная 189
 — нелинейная 272
 — — с обратной связью 493
 — непрерывная 572
 — оптимальная 203, 460, 565
 — оптимального обнаружения 547
 — ортогональная 683
 — программного регулирования 22
 — разомкнутая 569
 — релейная 298
 — самонастраивающаяся 12
 — с бесконечным запаздыванием 475
 — с запаздыванием 191, 195
 — с неполной информацией 25
 — с обратной связью 569
 — с полной информацией 25
 — с распределенными параметрами 646
 — следящая 22
 — статическая 21, 105, 123
 — стационарная 580
 — структурно-неустойчивая 188
 — структурно-устойчивая 188
 — точная 411
 — третьего порядка 116
 Событие независимое 434—435
 — случайное 433
 События попарно независимые 435
 Соединение антипараллельное 95
 — параллельное 95
 — последовательное 94
 Сопротивление тиритовое 407
 Составляющая решения вынужденная 159
 Состояние равновесия 288
 Спектр дискретный 144
 — сплошной 144
 — частотный 144
 — — непрерывный 145
 Спираль логарифмическая 293
 Среднее по времени 447
 — по множеству (ансамблю, статистическое) 443
 Стабилизация систем 172
 Статизм 21, 123
 — по нагрузке 108
 — по установке 108
 Статистика математическая 521
 Степень устойчивости 210—211, 269
 — целой функции 698
 Стратегия 522
 Схема САР 27
 — «скрещенная» 165
 — структурная 12, 68, 94
 — — модели 364
 — — одноконтурная 102
 Таблица свойств дискретного преобразования Лапласа 244
 Тахогенератор 35
 Тевенена теорема 165
 Тело «тонкое» 647
 Тензодатчик 29
 Теорема Винера — Пэли (—Шварца) 696, 705
 — Дирихле 312
 — запаздывания 257
 — Котельникова 247, 540
 — о начальном значении 153
 — о сдвиге 698
 — об установившемся значении 152
 Теорема об n интервалах 612
 — Попова 327, 334
 — разложения 151
 — свертки 154
 — смещения 152
 — Тевенена 165
 — Шэннона вторая 512
 — — первая 504
 Теоремы операционного исчисления 151
 Теория автоматической оптимизации 566
 — автоматов 566
 — вероятностей 433
 — дуальтернативных (многоальтернативных) решений 524, 535
 — игр 521
 — информации 496, 520
 — испытания гипотез 521
 — корреляционная 446, 520
 — оптимальных систем 565
 — оценки параметров 521, 524
 — — процессов 525
 — погрешностей 362
 — подобия 362
 — потенциальной помехоустойчивости 522
 — решающих функций 522
 — сигналов 566
 — точечных преобразований 310
 Термометр сопротивления 30
 Термопара 36
 Тип автоматической системы 16
 Ток отпускания 41
 Точка изображающая 126, 286
 — неподвижная точечного преобразования: 310
 — осевая 287
 — правильная 652
 — равновесия 287, 297
 — тактовая 239
 Траектория допустимая 610
 — фазовая 291
 Тракт схемы 111
 Тревога ложная 543
 Трение сухое 274
 Узел устойчивый, неустойчивый 294
 Управление допустимое 659
 — дуальное 25
 — жесткое 10
 — оптимальное 610
 — особое 638
 — распределением температуры оптимальное 648
 — финитное 694, 708, 718
 — — обобщенное 705
 Управляемость системы 694
 Упреждение (чистое) 476, 480
 Уравнение Беллмана 590
 — в вариациях 349, 598
 — в конечных разностях 258
 — Винера — Хопфа 474
 — волнового 677, 678
 — нелинейного звена 272
 — нелинейной системы 272
 — системы автоматического регулирования 68
 — сопряженное 594
 — — канонически 596
 — теплопроводности 86, 650
 — Фурье 86, 650

- Уравнение характеристическое 70, 259, 291, 612
 Уровень значимости 543
 Усиление мощности сигнала 37
 Усилитель дроссельного типа 50
 — магнитный 38
 — с модуляцией 381
 — со струйной трубкой 51
 — сопло-заслонка 51
 — тиратронный 38
 — электромагнитный 38, 44
 — электронный 38
 Условие граничное (краевое) 86
 — Попова 327
 — трансверсальности 603, 604
 — устойчивости необходимое 115
 — — — и достаточное 114
 Устойчивость 112
 — абсолютная 312
 — асимптотическая 114, 289
 — в большом 290, 312
 — в малом (локальная) 290
 — импульсных систем 258
 — линейных систем 112
 — по Ляпунову 282, 288, 290
 — структурная 188
 Устройство вычислительное нелинейное
 — электронное 421
 — пневматическое 52
 — стабилизирующее 129
- Фильтрация 476, 480, 483
 Фокус устойчивый, неустойчивый 293
 Формула Бэйеса 435, 530
 — интерполяционная Лагранжа 700
 — Котельникова 712
 — Лагранжа — Эрмита 720
 — обобщенная Лагранжа 704
 — Рэйли 219
 Фотоэлемент 33
 Функция Бесселя 561
 — весовая 155
 — влияния 654
 — выпуклая 672
 — Грина 654
 — квазиэкспоненциальная 330
 — конечной степени 698
 — корреляционная (автокорреляционная) 444
 — — взаимная 445
 — — — нормированная 445
 — — нормированная 445
 — Ляпунова 313
 — определенно положительная 312
 — передаточная 69, 70, 157
 — — замкнутой импульсной системы 255
 — переходная 72
 — — импульсная 155
 — Понтрягина 592
 — правдоподобия 532
 — распределения 86, 436
 — — двумерная, одномерная, n -мерная 440
 — решающая 522
 — синтезирующая стационарная, нестационарная 710
 — случайная 439
 — финитная 331, 696, 718
- Функция целая 698
 — экспоненциального типа 146
 Фурье изображение 145
 — интеграл 145, 451
 — критерий 685
 — преобразование 143, 696
 — — обратное 145
 — ряд 143
 — уравнение 86, 650
- Характеристика амплитудная логарифмическая 228
 — амплитудно-фазовая 159, 233
 — временная 154
 — релейная 272
 — системы оптимального обнаружения 547
 554
 — частотная 158
 — — амплитудная 159
 — — вещественная, комплексная, мнимая 159, 160
 — — комплексная видоизмененная 327
 — — логарифмическая 228
 — — фазовая 159, 232
- Цель управления 575
 Центр 292
 Цепь корректирующая 129
 Цикл предельный 297
 — — полуустойчивый 298
 — — устойчивый 297
 Цыпкина критерий 266, 267
- Частота колебаний собственная 78
 — натуральная 363
 — относительная 199
 — события условная 434
 — сопрягающая 231
 — среза 206
 Часть линейная 325
 — системы неизменяемая 570
 Член вековой (секулярный) 341
 — интерференционный 492
- Шум белый 454
 — внутренний 429
 Шэннона теорема вторая 512
 — — первая 504
 Шэннона — Фэно метод 506
- Эквивокация 510
 Экстремаль 224, 518, 601
 Элемент измерительный 27
 — импульсный 239
 — — идеальный 242
 — нелинейный 325
 — САР 27
 Энергия сигнала 541
 Энтропия 499, 515
 — условная 515
 Эффект магнитоупругий 32
 — стробоскопический 247
- D -разбиение 177
 I -проблема моментов 7, 657, 661, 662
 RC -цепочка 76
 Z -преобразование 245, 718
 δ -функция 81, 453

Александр Аронович Фельдбаум, Анатолий Григорьевич Бутковский

МОДОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

М., 1971 г., 744 стр. с илл.

Редактор *Р. Т. Янушевский*

Техн. редактор *В. Н. Кондакова*

Корректоры *О. А. Сигал, Н. Б. Румянчева*

Сдано в набор 10/X 1970 г. Подписано к печати 8/IV 1971 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 46,5. Условн. печ. л. 65,1.
Уч.-изд. л. 60,11. Тираж 17 000 экз. Т-06518. Цена книги 4 руб.
Заказ № 577.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9

4pyδ.