Р. ГАБАСОВ
Ф. КИРИЛЛОВА

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р. ГАБАСОВ Ф. КИРИЛЛОВА КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

Р. ГАБАСОВ, Ф. КИРИЛЛОВА

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

6ф6.5
Г12
УДК 62-50

Качественная теория оптимальных процессов. Габасов Р., Кириллова Ф. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1971, 508 стр.

В книге методом приращений и методами функционального анализа изучаются основные проблемы теории оптимальных процессов в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Последовательно рассматриваются следующие вопросы: проблема управляемости по Калману, управляемость по направлению, теория наблюдаемости, задача идентификации, проблема существования оптимальных управлений, принцип максимума, особые управления, оптимизация по параметрам, статистические задачи оптимального управления, некоторые задачи из теории дифференциальных игр, достаточные условия оптимальности, корректность постановки задач оптимального управления. Предлагается несколько алгоритмов по целенаправленному изменению управлений, обосновываются вычислительные методы оптимального управления. Дается развернутое изложение необходимых и достаточных условий оптимальности в дискретных системах.

Книга рассчитана на научных работников, студентов, интересующихся вопросами оптимального управления системами. Основные результаты доступны инженерам, имеющим математическую подготовку в объеме технических вузов.

Библ. 225 назв.

$\frac{3\text{-}3\text{-}14}{129\text{-}71}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти
Евгения Алексеевича
БАРБАШИНА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теории оптимальных процессов посвящены фундаментальные монографии ведущих специалистов. В данной работе мы старались не повторять известных по этим монографиям методов и результатов. Основной материал книги базируется на исследованиях авторов и их сотрудников, что отразилось как в выборе материала, так и в характере библиографии.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные проблемы теории оптимальных процессов

Теория оптимальных процессов возникла из задач современной науки и техники. Решающую роль в зарождении новой ветви вариационного исчисления сыграли проблемы автоматического регулирования; богатым источником задач оптимального управления является космическая навигация. В настоящее время, пожалуй, трудно найти область человеческой деятельности, в которой так или иначе не сталкивались бы с вопросами научно обоснованной организации управления.

Для ознакомления с основными проблемами теории оптимальных процессов рассмотрим задачу быстродействия. Имеется некоторый объект, способный изменять свое состояние под воздействием определенных сил. По доступной информации о текущем состоянии объекта требуется организовать воздействия таким образом, чтобы объект из начального состояния перешел в другое, желаемое, состояние за кратчайшее время. Ясно, что прежде, чем приступить к теоретическому исследованию этой задачи, нужно составить ее математическую модель. Вопросы, связанные с математическим описанием объектов, составляют *проблему идентификации объектов.*

Допустим, что поведение исследуемого объекта можно описать уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор, характеризующий состояние объекта, t — время, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — вектор, обозначающий те параметры объекта, которыми можно распоряжаться. Каждому *начальному состоянию* x_0 и выбранной функции $u(t)$, $t \geqslant t_0$, называемой *управлением*, соответствует единственное решение (*траектория*, *движение*) $x(t)$, $t \geqslant t_0$, уравнения (1). Обычно функция

$x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ недоступна непосредственному измерению. Информация о текущем состоянии объекта заключена в функции $z(t) = \{z_1(t), \ldots, z_m(t)\}$, $m \leqslant n$, связанной с $x(t)$ соотношением

$$z(t) = h(x(t), t) \tag{2}$$

(в теории автоматического регулирования функции $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ называют также *входными воздействиями* (*входами*), а функции $z_1(t), \ldots, z_m(t)$ — *функциями выхода* (*выходами*)). *Проблема наблюдения* состоит в восстановлении текущего (или начального) состояния объекта по известным функциям выхода. Если эти две проблемы решены для изучаемого объекта, то поставленной выше задаче быстродействия можно придать такую форму: заданы два вектора x_0, x_1; с помощью управления $u(t)$ требуется за кратчайшее время перевести траекторию $x(t)$ системы (1) из x_0 в x_1. Сразу возникает вопрос: существует ли хотя бы одно управление, переводящее траекторию $x(t)$ из начального состояния x_0 в конечное x_1? Это основной вопрос *проблемы управляемости*.

Задача быстродействия свелась, таким образом, к нахождению лучшего управления среди тех, которые порождают траектории системы (1), проходящие через x_0, x_1. При решении этой проблемы (частично и проблемы управляемости) четко оговариваются два условия: 1) класс функций, из которого можно выбирать управления (*допустимые управления*); 2) *критерий качества* переходного процесса (в задаче быстродействия это — время). *Проблему существования оптимальных управлений* можно сформулировать следующим образом: среди допустимых управлений существует ли *оптимальное* управление, которое выбранному критерию качества доставляет наименьшее значение?

Следующим шагом в решении задачи быстродействия является проблема сужения множества допустимых управлений с тем, чтобы из этого множества выделить подмножество, содержащее оптимальные управления. Такие подмножества выделяются наложением на допустимые управления новых условий, свойственных оптимальным управлениям. Нахождение условий, которым необходимо удовлетворяют оптимальные управления, входит в круг вопросов *проблемы необходимых условий оптимальности.*

Если в задаче быстродействия существует оптимальное управление и необходимые условия оптимальности выделяют единственное допустимое управление, то последнее, очевидно, и есть оптимальное управление (единственное). Если же необходимые условия выделяют несколько управлений, то возникает вопрос об их оптимальности, *проблема о достаточных условиях оптимальности.*

Для окончательного решения задачи быстродействия осталось реализовать способы выделения оптимальных управлений на вычислительных устройствах. Каждая реализация предполагает определенный алгоритм. Решение *проблемы вычислительных алгоритмов* для задач оптимизации во многом определяется успешным решением предыдущих проблем.

Таковы в общих чертах основные проблемы, возникающие при оптимизации объектов управления. Каждая из перечисленных проблем содержит в себе много других проблем, о которых мы не упомянули. К ним относятся задачи оптимизации стохастических систем, оптимальные системы с адаптацией, задачи статистического прогноза, проблемы инвариантности, автономности, теория скользящих режимов, проблема синтеза оптимальных управлений, вопросы единственности оптимальных управлений и корректности постановки задач оптимизации, теория оптимизации дискретных систем. Указанные выше проблемы приобретают много специфических черт при решении задач оптимизации в ситуациях конфликтного типа, когда приходится учитывать несовпадающие интересы нескольких сторон. Этот круг вопросов в последние годы оформился в теорию дифференциальных игр.

§ 2. Краткий очерк современного состояния теории оптимальных процессов

Теория идентификации — столь же древняя наука, как и математика. В современном аспекте проблемы идентификации изучаются в [150b, 153, 166, 207]. Наиболее распространенная задача состоит в *параметрической идентификации* объектов, когда уравнения объекта считаются известными с точностью до параметров, которые ищутся таким образом, чтобы движение, генерируемое математической моделью (1), (2), было в определенном смысле близко к движению, полученному на выходе изучаемого объекта. При этом возможна детерминированная и стохастическая постановка задачи. В общем виде эти задачи можно рассматривать как некоторые задачи оптимизации с параметрами [18b]. Для решения подобных вопросов успешно применяются различные методы [18d, 184].

Теории управляемости и наблюдаемости как самостоятельные разделы теории оптимальных процессов оформились после доклада Р. Калмана [58a]. Различные задачи этих теорий решались и ранее [38b, 115].

Согласно Калману, динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

(A — $n \times n$-матрица, B — $n \times r$-матрица) называется *вполне управляемой*, если для каждого состояния x_0 найдутся число t_1 и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, такие, что траектория $x(t)$ системы (3) удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$. Для того чтобы система (3) была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\} = n$. Этот результат для $r = 1$ получен в [58a] и в общем случае — в [185]. Нестационарные линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

с точки зрения управляемости рассматривались в [74j]. Известно [74j, n], что система (4) вполне управляема, если при некотором $\bar{t} \geqslant t_0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{ранг } \{Q_0(\bar{t}), Q_1(\bar{t}), \ldots, Q_{n-1}(\bar{t})\} = n, \\ &Q_0(t) = B(t), \ Q_k(t) = A(t)Q_{k-1}(t) - \dot{Q}_{k-1}(t), \\ &\qquad\qquad k = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Необходимые и достаточные условия управляемости системы (4), выраженные через фундаментальную матрицу, приводятся в [74n]. Управляемость в малом (для начальных состояний x_0 из достаточно малой окрестности начала координат) нелинейных систем

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \ x(t_0) = x_0, \qquad f(0, 0, t) = 0, \tag{6}$$

доказана в [64d, 74c, l] в предположении, что линейная модель (4), $A(t)=\frac{\partial f(0,0,t)}{\partial x}$, $B(t)=\frac{\partial f(0,0,t)}{\partial u}$, этой системы удовлетворяет условию (5). Случаи, когда для (6) уравнения линейного приближения (3), (4) неуправляемы, называются *критическими*. В [59] изучены критические случаи управляемости системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt}=f(x)+bu.$$

Вопросы управляемости обыкновенных динамических систем (6) рассматриваются также в [23, 61, 100, 137b, 146, 147, 157, 170, 193, 200a, 208, 215]. Ближайшим обобщением системы (6) является уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\ x(t-h),\ u(t),\ t), \tag{7}$$

где h — запаздывание. Начальное состояние $x_0(\cdot)$ этой системы (минимальная информация, однозначно определяющая последующее движение системы) характеризуется вектор-функцией $x_0(\cdot)=\{\Phi(\tau),\ t_0-h\leqslant\tau\leqslant t_0\}$. В связи с этим, кроме введенного выше понятия управляемости (которое ниже называется *относительной управляемостью*), особый интерес для (7) представляет свойство *полной управляемости*, при котором траектория $x(t)$ не только достигает начала координат, но и удерживается там: $x(t)\equiv 0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_1+h$. Неявные условия управляемости системы

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)\,x(t)+A_1(t)\,x(t-h)+B(t)\,u(t) \tag{8}$$

имеют такой же вид, как и для обыкновенных систем (3), (4). Явные (выраженные через A, A_1, B) условия относительной управляемости приводятся в [66a, b]. Задача о полной управляемости рассматривается в [74n]. В общем случае еще не найдены условия полной управляемости для систем (8). Мало разработаны вопросы управляемости и для других систем, отличных от (6). Здесь известны лишь отдельные результаты. В [213, 220] рассматриваются уравнения в частных производных, в [154a, b] — уравнение (3) в банаховом пространстве.

Основной результат теории наблюдаемости линейных систем получен в [58a]. Согласно Калману [58a], динамическая система

$$\dot{x} = Dx, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{9}$$

называется *вполне наблюдаемой* по выходу

$$z(t) = c'x(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{10}$$

если для любого вектора p значение $p'x_0$ в каждой точке x_0 можно восстановить по измерениям $z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Необходимое и достаточное условие вполне наблюдаемости системы (9) по выходу (10) состоит в требовании

$$\text{ранг}\ \{c,\ D'c,\ \ldots,\ [D']^{n-1}c\} = n.$$

Обобщение этого результата на случай нескольких выходов, на нестационарные системы проходит по той же схеме, что и в аналогичной задаче управляемости. Это объясняется принципом двойственности [58a] между управляемостью и наблюдаемостью: система (3) вполне управляема тогда и только тогда, когда система (9), (10), $D = -A'$, $c = b$, вполне наблюдаема. Вопросы наблюдаемости нелинейных систем в литературе почти не разрабатывались. Известен лишь результат [3] о наблюдаемости по линейному приближению (см. также [196]). Эффективных критериев наблюдаемости систем, отличных от обыкновенных динамических, неизвестно совсем.

Первые результаты по существованию оптимальных управлений в задаче предельного быстродействия для (3) появились в [38a]. В этой работе за множество допустимых управлений принята совокупность измеримых функций со значениями в кубе

$$|u_i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{11}$$

В [108a] куб (11) заменен на выпуклый многогранник. Обобщение результата [38a] на нестационарные системы (4) и множество допустимых управлений, представляющее шар в стандартном нормированном пространстве, приведено в [74a, b].

Вопросы существования управлений, оптимальных в смысле быстродействия, в нелинейной системе (1) начали изучаться с работы [125]. Пусть вместо (11) задано компактное множество U в r-мерном пространстве и существует допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее точку x_0 системы (1) в начало координат за время $t_1 - t_0$. Если выполнены условия: 1) траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (1), соответствующие всевозможным допустимым управлениям, равномерно ограничены; 2) множество $f(x, U, t) = \{f(x, u, t): u \in U\}$ выпукло, то существует оптимальное по быстродействию управление. Метод доказательства этого результата нетрудно перенести [221a] на задачи оптимизации, в которых критерий качества имеет, например, вид

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)\, dt. \tag{12}$$

Другая схема получения теорем существования предложена в [205]. Аналогичный результат в частном случае $f(x, u, t) = g(t, x) + h(t, x)\,u$, где $u \in U$, U — компактное выпуклое множество, имеется в [187].

В основе доказательства А. Ф. Филиппова лежит лемма о неявных функциях. Эта лемма в последующих исследованиях [148, 173, 209] многократно обобщалась. Нетрудно показать, что каждое из основных условий, участвующих в формулировке теоремы А. Ф. Филиппова, в общем случае существенно. Однако для частных случаев системы (1), специальных граничных условий и критериев качества они могут оказаться лишними. Действительно, в работе [194b] показано, что теорема существования оптимального по быстродействию управления справедлива для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + b(u, t), \qquad u \in U,$$

с непрерывными $A(t)$, $b(u, t)$ и компактным множеством U без всяких предположений о выпуклости. Ослаблению условий теоремы А. Ф. Филиппова посвящены также работы [145, 159]. В общем случае задача минимизации функционалов на траекториях динамических систем не имеет решения даже тогда, когда множество допустимых управлений расширено до класса измеримых функций. Для справедливости теорем существования оптимальных управлений требуется более радикальное расширение класса допустимых управлений. Эта задача решена Р. В. Гамкрелидзе в теории оптимальных скользящих режимов.

Известно, что всегда можно построить последовательность управлений, вдоль которых последовательность значений функционала сходится к нижней грани. Если последовательность соответствующих траекторий равномерно сходится к некоторой кривой, удовлетворяющей граничным условиям, то предельная кривая называется оптимальным скользящим режимом [26, 38е]. Для изучения оптимальных скользящих режимов Р. В. Гамкрелидзе предложена следующая конструкция.

Пусть на траекториях $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (1) рассматривается задача минимизации функционала (12) с помощью измеримых функций $u(t)$ со значениями в заданном компактном множестве U. Вместо этой задачи рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u, \alpha) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i(t) f_0(x, u_i, t)\, dt \tag{13}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i(t) f(x, u_i, t) \tag{14}$$

с помощью управлений $\alpha_i(t)$, $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n+2$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_i(t) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i(t) = 1, \quad u_i(t) \in U.$$

Если траектории системы (14) равномерно ограничены, то последняя задача удовлетворяет условиям теоремы существования оптимальных управлений, ибо множество

$$\left\{ \begin{matrix} \sum \alpha_i(t) f_0(x, u_i, t) \\ \sum \alpha_i(t) f(x, u_i, t) \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_i(t) \geqslant 0, \quad \sum \alpha_i(t) = 1 \\ u_i(t) \in U \end{matrix} \right\}$$

в $(n+1)$-мерном пространстве выпукло. По оптимальным управлениям $\alpha_i^0(t)$, $u_i^0(t)$ в [38е, 190b, 221b] строится последовательность управлений в (1), реализующая оптимальный скользящий режим. Вопросам существования оптимальных управлений и скользящим режимам посвящены работы [45b, 74e, f, 78, 222].

Необходимые условия оптимальности являются в настоящее время наиболее разработанным разделом теории оптимальных процессов. Первые результаты для линейных уравнений (релейность оптимального управления, теорема об n-интервалах) получены еще в [86, 124a, 142, 169, 211]. Фундаментальным событием теории оптимальных процессов, положившим начало новой ветви вариационного исчисления, явилось открытие в 1956 г. Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе принципа максимума [19].

Согласно принципу максимума оптимальное управление $u^0(t)$ в двухточечной задаче быстродействия для (1) обладает тем свойством, что существует нетривиальное решение $\psi(t)$ системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'\psi, \qquad A = \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x},$$

на котором функция

$$H(x^0(t), \psi(t), u, t) = \psi'(t) f(x^0(t), u, t)$$

достигает максимума среди элементов u из U:

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u, t). \quad (15)$$

Этот результат, доказанный первоначально для линейных систем, оптимальных по быстродействию [38a], получен в общем случае функционала (12) В. Г. Болтянским в [18a]. Основные конструкции, использующие игольчатые вариации и теорему об отделимости выпуклых множеств, позволили преодолеть затруднения методов вариационного исчисления, связанные с замкнутостью множества U. Аналогичные конструкции были развиты Р. В. Гамкрелидзе на задачи с ограничениями на фазовые координаты [38c, d]. В дальнейшем А. Я. Дубовицким, А. А. Милютиным, Р. В. Гамкрелидзе, Л. Нейштадтом и др. были предложены [38f, 50b, 77a, b, 156, 194c] новые схемы доказательства принципа максимума, что позволило существенно расширить круг задач, поддающихся решению.

После появления принципа максимума были предприняты попытки обобщить методы классического вариационного исчисления на задачи оптимизации систем управления. Оказалось, что предпосылки для выполнения этой цели имелись уже в старых работах по вариационному исчислению. Трудами Р. Калмана, А. И. Лурье, В. А. Троицкого, и др. [87, 92, 94, 121, 139a, 165, 176, 191] к настоящему времени показана возможность сведения большого числа задач к проблемам классического вариационного исчисления.

Использование метода динамического программирования в теории необходимых условий оптимальности затрудняется требованиями гладкости функции Беллмана. Существенный вклад здесь сделан В. Г. Болтянским [18c]. Эффективное применение метод динамического программирования получил в линейном случае (3) задач минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \int_0^{t_1} (x'Mx + u'Ru)\,dt, \quad t_1 \leqslant \infty, \quad M > 0,$$

которые детально исследованы А. М. Летовым [87a]. В теории необходимых условий оптимальности плодотворным оказался метод приращений, развитый в работе Л. И. Розоноэра [114b] (см. также [29]).

Совокупность приемов, основанных на некоторых теоремах функционального анализа, применяемых для оптимизации линейных систем управления [74a, 138], получила название «подход функционального анализа». Пионерской работой этого направления явилось исследование Р. Беллмана и его сотрудников [138], где явно используется теорема об отделимости выпуклых множеств. Проблема моментов (в первых работах она называлась L-проблемой моментов) введена в арсенал средств теории оптимальных процессов Н. Н. Красовским [74a, b].

Усилиями большого отряда ученых (основная масса литературы по оптимальным процессам, насчитывающая несколько тысяч наименований, относится к теории необходимых условий оптимальности) теория необходимых условий оптимальности в обыкновенных динамических системах (1) доведена до такого состояния, что позволяет записать принцип максимума (или аналогичные условия) для любой задачи оптимизации.

Выше отмечалось, что использование конструкций работы [38e] позволяет избавиться от забот по существованию оптимальных управлений в задаче (1), (12). Следует вместо последней задачи рассмотреть задачу (13), (14). Однако на этом пути встречается одна трудность, которая полностью лишает информации о виде оптимального управления, обычно доставляемой принципом максимума. Действительно, принцип максимума для (13), (14) приводит к условию

$$H(x^0(t), \psi(t), u_1^0(t), \ldots, u_{n+1}^0(t), \alpha_1^0(t), \ldots, \alpha_{n+1}^0(t), t) =$$
$$= \max_{\substack{u_i \in U \\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum \alpha_i = 1}} H(x^0(t), \psi(t), u_1, \ldots, u_{n+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, t) =$$
$$= \max_{\substack{\alpha_i \geqslant 0 \\ \sum \alpha_i = 1}} \sum \alpha_i \max_{u_i \in U} \psi'(t) f(x^0(t), u_i, t) =$$
$$= \max_{u \in U} \psi'(t) f(x^0(t), u, t),$$

т. е. функция (15) не зависит от управлений α_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n+1$. Это частный случай ситуации, когда вдоль некоторого управления $u^*(t)$ функция (15) не зависит от параметров управления. Такие управления $u^*(t)$ в работе [114b] названы *особыми*. К особым управлениям приводит ряд задач космической навигации [89]. Все это послужило толчком для тщательного исследования особых управлений. В простейших случаях особые управления легко находятся из самого определения [114b]. Для сложных случаев требуются более глубокие исследования [17, 24, 45a, 50c, 54, 174, 178a, 214].

Первые результаты по необходимым условиям оптимальности особых управлений получены Г. Келли [63a]. Этот успех во многом определился использованием нового типа вариаций управления, отличных от уже ставших традиционными игольчатых вариаций. Дальнейшие обобщения, основанные на новых вариациях управления, сделаны Р. Коппом, Г. Мойером, Г. Роббинсом [71, 113]. Случаю, когда особых управлений несколько, посвящено исследование И. Б. Вапнярского [26].

Ряд задач оптимизации систем управления связан с наилучшим выбором параметров. Задача оптимального управления с параметрами, рассмотренная В. Г. Болтянским [18b] (см. также [18d, 164, 182, 184, 224]), формулируется следующим образом. Среди q-мерных векторов w и r-мерных измеримых функций $u(t)$ со значениями из множества U выбрать такие w^0, $u^0(t)$, при которых

$$J(u^0, w^0) \leqslant J(u, w) = \int_0^{t_1} f_0(x, u, w)\, dt,$$

если уравнения движения системы управления имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, w), \qquad x(0) = x_0.$$

Для этой задачи получены необходимые условия оптимальности параметра и управления [18d]. Постепенно результаты, полученные в теории необходимых условий оптимальности для обыкновенных динамических систем (1), переносятся на объекты, описываемые более сложными уравнениями. В ряде работ [72, 74m, 104a, 127, 179, 195, 203] исследуются системы с запаздыванием. С усложнением систем запись принципа максимума заметно теряет оригинальную компактность. Необходимые условия оптимальности А. Г. Бутковским, Ю. В. Егоровым, А. И. Егоровым, К. А. Лурье, Т. К. Сиразетдиновым и др. [21a, d, 22, 47, 52a, 53a, 93, 118] исследовались в задачах оптимизации систем с распределенными параметрами. Здесь, кроме интегральных уравнений [21d, 30], в основном рассматривались разнообразные уравнения в частных производных [52, 53a]. Имеются работы по перенесению принципа максимума на уравнения в банаховых пространствах [53b, 137a, 151, 158, 160c, 162]. В последнем случае возникают особенности [53b] и принцип максимума не удается доказать в общем виде.

Теория достаточных условий оптимальности развивалась до сих пор в основном через метод динамического программирования или его обобщения (см. работы В. Г. Болтянского, Н. Н. Красовского, В. Ф. Кротова [18c, 74g, h, 77c]). Типичный результат формулируется следующим образом. Если найдется гладкая функция

$S(x, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \max_{u \in U} \left[-\frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) - f_0(x, u, t) \right] \tag{16}$$

и условию $S(x, t_1) = \varphi(x)$, то управление $u(x, t)$, выбранное согласно правилу

$$-\frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u(x, t), t) - f_0(x, u(x, t), t) =$$
$$= \max_{u \in U} \left[-\frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) - f_0(x, u, t) \right], \tag{17}$$

доставляет минимальное значение $S(x_0, t_0)$ функционалу

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)\, dt$$

на траекториях системы (1), управляемой измеримыми функциями $u(t)$ со значениями из некоторого множества U. При этом подходе к задачам оптимального управления основная трудность заключается в решении уравнения (16), но результат (17), выражающий оптимальное управление в функции вектора состояния x и времени t, во многих отношениях оказывается предпочтительнее результата принципа максимума, когда оптимальное управление получается в виде функции времени.

Требование на гладкость функции Беллмана можно ослабить [18c]. С помощью метода динамического программирования В. Г. Болтянским [18d] доказана достаточность принципа максимума при условиях регулярного синтеза.

Другим эффективным методом получения достаточных условий оптимальности для нелинейных систем явился метод приращений [114a, b]. В работе Л. И. Розоноэра [114a] доказана оптимальность в локальном смысле управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Метод приращений позволяет непосредственно использовать особенности рассматриваемой задачи (линейность, выпуклость и т. п.). Достаточность принципа максимума в ряде задач оптимизации линейных систем удается доказать с помощью методов функционального анализа [50a, 74d].

Существующие алгоритмы вычисления оптимальных управлений отличаются как разнообразием использованных идей, так и выбором пространства, на котором строятся итерации. В основном это градиентные методы, если в основу алгоритма положены необходимые условия оптимальности. Среди алгоритмов, построенных на итерациях в пространстве управлений, типичными являются алгоритмы, предложенные в работах [10, 20, 48a, 49, 63b, 132, 133, 141, 152]. В [7, 31, 84, 197] связи, наложенные на систему управления, учитываются введением множителей Лагранжа (или метода *штрафных функций*). В [133] описывается процедура постепенного уменьшения невязки в связях или уменьшения значения функционала. Алгоритмы этой группы ведут, вообще говоря, к точке локального минимума.

Алгоритмы, основанные на итерациях в пространстве состояний систем управления, исходят в основном из метода динамического программирования. Подобная схема весьма удобна в задачах, где основные ограничения наложены на состояния системы. Среди алгоритмов этого сорта известны дискретная схема динамического программирования [13], метод последовательного анализа вариантов [95], метод трубок и метод локальных вариаций [6, 98b, 130]. Отмечается [13], что алгоритмы, базирующиеся на динамическом программировании [9, 11b, 14, 37, 98a], приводят к оптимальному управлению, но требуют при высокой точности решения большой оперативной памяти ЭЦВМ. Известен ряд алгоритмов, использующих итерации в пространстве сопряженных переменных [5, 43, 57, 67, 79, 101, 150a, 181, 199]. В основном эти алгоритмы применимы к задачам оптимизации линейных по состоянию систем и приводят к нахождению оптимального управления.

Под дискретными системами управления понимаются системы, поведение которых можно описать рекуррентными соотношениями (или разностными уравнениями)

$$x(k+1) = f(x(k),\ u(k),\ k). \tag{18}$$

Универсальным методом исследования дискретных систем является динамическое программирование. Однако его применение к конкретным задачам [122] может оказаться менее эффективным, чем использование принципа максимума. Поэтому теория оптимальных процессов для дискретных систем является актуальной задачей. Ряд проблем теории оптимальных процессов в непрерывных системах имеет тривиальное решение для дискретного аналога. Однако проблемы, связанные с аналитическими выкладками, сложны, и их решение уже не имеет столь привлекательного вида, как для непрерывного случая.

Основные работы теории оптимальных процессов в дискретных системах, за редким исключением ([58a] — управляемость, [21b, d] — достаточные условия оптимальности), относятся к задаче получения необходимых условий оптимальности. При этом конечная цель этих работ состоит в доказательстве дискретного аналога принципа максимума. Н. Н. Красовским [74b] для задачи быстродействия в системе

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = x_0,$$

доказан один вариант принципа максимума, в котором сравниваются управления с минимальной нормой. Сформулируем этот результат.

Если управление $u^0(k)$, $|u^0| \leqslant \mu$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, приводит точку x_0 в начало координат за минимальное время N и не существует управления $u^*(k)$, решающего эту задачу при $|u^*(k)| < \mu$, то оптимальное управление необходимо удовлетворяет условию

$$\psi'(k)\, bu^0(k) = \max_{|u| \leqslant \mu} \psi'(k)\, bu,$$

где $\psi(k)$ — нетривиальная последовательность n-векторов, порожденных соотношениями

$$\psi(k-1) = A'\psi(k). \tag{19}$$

Л. И. Розоноэром [114b] принцип максимума доказан для задачи минимизации функционала

$$J(u) = c'x(N) \tag{20}$$

вдоль траекторий системы

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + b(u, k), \quad x(0) = x_0,$$

со свободным правым концом и управляемой последовательностью $\{u(k)\}$, каждый элемент которой принимает значения из множества U. Этот результат формулируется следующим образом: вдоль оптимального управления $u^0(k)$ выполняется условие максимума

$$\psi'(k)\, b(u^0(k), k) = \max_{u \in U} \psi'(k)\, b(u, k),$$

где $\psi(k)$ — решение уравнения (19) с начальным условием $\psi(N-1) = c$.

А. Г. Бутковским [21b] построен пример дискретной системы, оптимальное управление в которой не удовлетворяет условию максимума. Этим самым было показано, что многочисленные попытки, предпринятые для перенесения принципа максимума на общие дискретные системы, обречены на неудачу. Первоначальная задача теперь могла ставиться лишь в ограниченном виде: найти классы дискретных систем, оптимальные управления в которых можно искать с помощью принципа максимума. В работах [110, 160b, 161] различными методами показано, что принцип максимума

$$\psi'(k)\, f(x^0(k), u^0(k), k) = \max_{u \in U} \psi'(k)\, f(x^0(k), u, k), \tag{21}$$

$$\psi(k-1) = \frac{\partial f'(x^0(k), u^0(k), k)}{\partial x}\, \psi(k) \tag{22}$$

выполняется в задаче быстродействия (и в задаче минимизации функции (20)) для системы (18), если выпукло множество

$$\{f(x, u, k) \colon u \in U\}. \tag{23}$$

Требование выпуклости (23) можно заменить [110, 167, 168] на условие односторонней выпуклости (выпуклость по направлению [167b]), если рассматривать функционал вида

$$J(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x(k), u(k), k).$$

В этом случае множество

$$\left\{ \begin{matrix} f(x, u, k) \\ f_0(x, u, k) \end{matrix} \,\middle|\, u \in U \right\}$$

рассматривается уже в $(n+1)$-мерном пространстве.

В силу примера из [21b] многие исследователи направили усилия по пути локализации принципа максимума в дискретных системах. Различные предложения, заменяющие условие глобального максимума (21) на условия локального максимума и условия стационарности, сформулированы в [21b, d, 110, 144, 171, 172, 175, 177, 201, 202, 204, 210, 216, 223]. Другой подход к необходимым условиям оптимальности, при котором сохраняется в некотором смысле глобальный характер этих условий, сделан в [34j].

Завершая этот краткий обзор основных результатов теории оптимальных процессов, отметим ряд весьма интересных результатов, относящихся к другим областям этой теории. Прежде всего, это работы по стохастическим задачам управления, по теории оптимальных процессов с адаптацией и, наконец, по дифференциальным играм. С упомянутыми вопросами можно ознакомиться по публикациям [1, 11c, 41, 42, 44, 51, 55, 62, 68, 69, 70, 73, 74i, 76, 81b, 97a, b, 99, 108b, c, 120, 124b, c, 136, 155, 183, 188, 192, 206, 217, 225]. Укажем еще на обзоры [88a, 117, 139b].

§ 3. Содержание монографии

Основная задача, которую ставили авторы при написании книги, состоит в демонстрации возможностей двух методов решения узловых проблем теории оптимальных процессов. Первый метод, который используется систематически, называется *методом приращений* и является развитием аналогичного метода работы [114b] для широкого круга проблем, включающий как частный случай теорию необходимых условий оптимальности. В основу второго метода исследования оптимальных процессов положены некоторые теоремы функционального анализа. Кроме приемов, использованных в [21d, 74n, 80], здесь будут введены новые, а прежние, известные, будут в какой-то мере развиты. Каждый из используемых методов имеет собственную эффективную область применения. Грубо говоря, первый метод используется для изучения нелинейных задач, второй же — для более узкого класса задач, связанных с линейными системами. Чтобы сразу снять возможные вопросы, отметим, что, хотя второй метод имеет более узкую область применения, некоторые результаты, полученные методами функционального анализа в этой области, не могут быть получены более общим первым методом. Таким образом, эти методы как бы дополняют друг друга.

Основными объектами изучения в данной книге являются обыкновенные динамические системы (1) и системы с запаздыванием, а также их линейные модели. Нам кажется, что эти два класса систем достаточно полно отражают существо многочисленных систем и, являясь достаточно простыми, позволяют обойтись при их исследовании минимальными вычислениями. Чтобы не загромождать текст утомительными вычислениями, авторы стремились основные идеи иллюстрировать на простых случаях. Рассуждения ведутся так, чтобы обобщение доказываемого результата не вызывало затруднений. Часто выводы в общем случае приводятся без доказательств.

Каждый из использованных методов может быть с успехом применен к исследованию задач оптимизации в системах, отличных от (1). В виде исключения в главе VI приведены результаты по принципу максимума для более широкого класса систем. Это сделано лишь для иллюстрации эффективности новой формы принципа максимума.

Известно, что библиография по теории оптимальных процессов насчитывает несколько тысяч наименований. Обстоятельный обзор этой массы трудов требует большой специальной работы. В данной монографии библиография составлена лишь по цитированным работам.

Перейдем к краткому обзору содержания книги.

Монография состоит из двух частей. В первую часть включены вопросы теории управления динамическими системами, не связанные непосредственно с задачами оптимизации, но играющие подчас решающую роль при исследовании подобных задач.

Первые две главы посвящены проблеме управляемости. Если в первой главе исходным понятием является управляемость по Калману, то в следующей исследование отправляется от нового понятия управляемости, которое проще, чем предыдущее. Известные результаты в главе I приводятся по ходу дела для полноты изложения.

В главе III наблюдаемость динамической системы определяется как понятие, строго двойственное понятию управляемости, введенному в главе II. При этом фигурирующий у Калмана термин «косостояния» мы заменили более прозрачным, на наш взгляд, словом «направление», имея в виду известную двойственность между «точкой» и «направлением». Принцип двойственности, сформулированный в этой главе, отличается от аналогичного результата Калмана. Как видно из оглавления, круг вопросов, рассмотренных в главах II — IV, один и тот же. Это во многом объясняется методом исследования, использованным в этих главах. Новая формулировка проблем из глав II — IV позволила непосредственно и эффективно применить метод приращений для решения вопросов, до сих пор нигде не рассмотренных. В каждой из этих глав приводятся методы функционального анализа и показываются схемы их применения.

Глава IV тесно смыкается с предыдущей как по постановке задач, так и по методу решения. По традиции основную задачу этой главы мы назвали проблемой идентификации, хотя это, конечно, проблема наблюдения, но теперь уже не состояния объекта, а его параметров. В главе сформулирован принцип двойственности, показывающий родственность рассмотренных здесь вопросов с материалом главы I. Задачи из глав II — IV допускают и статистические формулировки (иногда более естественные, чем исследованные), но эти вопросы по ряду причин не затронуты в данной монографии.

Связующим элементом между первой и второй частью книги является глава V. Специалистам по прикладным задачам свойственно не заниматься общими вопросами существования решений, но подобные проблемы в теории оптимальных процессов играют важную и принципиальную роль. В этой главе, во многом основанной на идеях А. Ф. Филиппова и Р. В. Гамкрелидзе, приводится ряд условий, достаточных для существования оптимальных управлений. Конечно, специфика рассматриваемых задач позволила найти и новые условия и новые методы доказательства теорем существования. Здесь же высказана гипотеза о наличии связи между вопросами существования оптимальных управлений в непрерывных системах и возможностью распространения принципа максимума на дискретные системы.

Принципу максимума в различных его аспектах посвящена вторая часть монографии. Эта часть (главы VI—IX) по объему материла превышает первую и содержит традиционные вопросы теории оптимальных процессов.

Глава VI охватывает широкий круг вопросов, связанных с необходимыми условиями оптимальности и в первую очередь со знаменитым принципом максимума Л. С. Понтрягина. Сначала дается подробное доказательство этого результата с помощью метода приращений, затем он переносится на системы с запаздыванием. Анализ метода доказательства обнаруживает, что принципу максимума для большого класса систем можно придать новую форму, которая инвариантна внутри этого класса.

В главе VI много внимания уделяется особым управлениям, отличающимся от других тем, что вдоль них принцип максимума становится неэффективным. Метод исследования особых управлений основан на дальнейшем развитии метода приращений [114b]. В этой же главе вводятся необходимые условия, определенные на управлениях, удовлетворяющих принципу максимума Л. С. Понтрягина, что позволяет во многих случаях сузить множество управлений, подозрительных на оптимальность. В качестве второго метода для уменьшения числа претендентов на оптимальное управление предлагается сведение исходной проблемы к задаче оптимизации с параметрами. Последняя задача представляет и самостоятельный интерес, поэтому в главе VI приводятся основные необходимые условия оптимальности для этой задачи. Остальная часть главы посвящена применениям функционального анализа для исследования глобальных свойств оптимальных систем. Этот вопрос рассматривался уже в монографиях [21d, 74n, 80]. Однако наш путь существенно отличается от изложенного в этих книгах. Отличие прежде всего состоит в том, что в данной монографии сведе́ния, необходимые для доказательства используемых фактов функционального анализа, не выходят за элементарные рамки анализа и линейной алгебры. Другое отличие связано с тем, что здесь систематически применяется ряд теорем функционального анализа (в том числе и L-проблема моментов, которая в [21d, 74n, 80] положена в основу исследования). За основу исследования в данной монографии взяты теоремы о минимаксе и об отделимости выпуклых множеств. Это позволяет в ряде случаев обойти трудности, связанные с применением L-проблемы.

В главе VII приводятся результаты, которые удалось получить в вопросах о достаточных условиях оптимальности, о единственности оптимальных управлений, о корректности постановки некоторых задач теории оптимальных процессов. Здесь же, попутно, рассматривается задача оптимизации с иерархической системой критериев качества.

Глава VIII имеет целью лишь иллюстрировать принципиальные возможности применения методов данной монографии к проблеме вычисления оптимальных управлений. Детальное описание алгоритмов, экспериментальная их проверка и другие вопросы, связанные с этим, будут рассмотрены в другом месте.

С материалом главы VIII соприкасается содержание главы IX, посвященной дискретным системам и завершающей монографию. Теория оптимизации дискретных систем важна в задачах управления и вне связи с непрерывными системами. В главе IX собраны результаты авторов, относящиеся в основном к необходимым условиям оптимальности.

Эти замечания в совокупности с подробным оглавлением должны дать первое впечатление о содержании монографии.

§ 4. Основные обозначения

Большинство операций работы проводится в конечномерных пространствах. Бесконечномерные пространства привлекаются в основном в связи с удобством некоторых символов. Никаких специальных знаний по функциональному анализу и теории операторов от читателя не требуется. Некоторые тонкие вопросы из теории функций поясняются элементарными средствами, не претендующими на строгость. Не везде четко оговариваются условия типа гладкости функций, а предполагается, что осуществляемые операции законны. Такой способ изложения избавляет от излишних и вполне очевидных в каждом конкретном случае условий, которые лишь загромождали бы текст.

Конечномерное (n-мерное) векторное пространство [46, 112] обозначается символом E_n. Пространство, сопряженное к E_n, обозначается через E'_n. Таким образом, элементами E_n являются векторы-столбцы, а векторы-строчки являются элементами E'_n. Для обозначения вектора-строчки используется штрих. Например, x, $x \in E_n$, —

n-вектор-столбец, x' — n-вектор-строка. Символ $g'x$ означает скалярное произведение векторов g и x: $g'x = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$. Для обозначения длины (нормы) вектора x из E_n используется символ $\| x \|$. Конкретный смысл этого символа может быть разным в различных задачах. Типичные (стандартные) виды норм:

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \text{ — евклидова норма,}$$

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

$$\| x \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |$$

(последний вид получается из предыдущего при $p \to \infty$). Нормой элемента g из E'_n, согласованной с нормой $\| x \|$ элемента x из E_n, называется выражение $\| g \|$, полученное по правилу

$$\| g \| = \max_{\| x \| \leqslant 1} g'x.$$

Нормы $\| g \|$, согласованные с приведенными выше нормами $\| x \|$, имеют вид (соответственно)

$$\| g \| = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{1/2},$$

$$\| g \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | g_i |^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1,$$

$$\| g \| = \sum_{i=1}^{n} | g_i |.$$

Если $\| g \|$ — норма, согласованная с $\| x \|$, то нетрудно проверить, что

$$\| x \| = \max_{\| g \| \leqslant 1} g'x.$$

Во многих случаях достаточно ограничиться евклидовой нормой. Тогда и согласованная норма будет также евклидовой. Для обозначения линейной системы n-векторных функций $x(t)$, определенных на множестве T, применяется символ $E_n(T)$. Иногда для той же цели используется более простой символ $E_n(\cdot)$; элементы из $E_n(\cdot)$ обозначаются через $x(\cdot)$. Семейство непрерывных функций, имеющих n непрерывных производных, обозначается символом C^n; C — семейство непрерывных функций.

В книге используются различные классы допустимых управлений. Через D обозначен класс r-векторных кусочно-непрерывных функций со значениями в ограниченном множестве U из E_r; D_1 — класс r-векторных кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций со значениями из U; F — класс r-мерных измеримых вектор-функций со значениями из U.

Кусочно-непрерывными называются функции, определенные на некотором множестве и имеющие на каждом ограниченном подмножестве конечное число точек разрыва первого рода. Смысл термина «измеримая функция» можно пояснить следующим образом. Функция $u(t)$ измерима на множестве $T=[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ можно найти непрерывную функцию $v(t)$ и совокупность σ отрезков из T общей длиной, меньшей ε, такие, что $u(t)\equiv v(t)$ при всех t из T, не принадлежащих σ. Отсюда ясно, что непрерывная функция измерима, измеримы кусочно-непрерывная функция и функция, имеющая на T счетное число точек разрыва.

Для некоторых классов допустимых управлений в книге используются специальные обозначения:

$$U_\infty^L(\cdot)=U_\infty^L(T)=\{u(t)\colon\ u(t)\in F,\ \operatorname*{vrai\,max}_{t\in T}\|u\|\leqslant L\},$$

$$U_p^L(\cdot)=U_p^L(T)=\left\{u(t)\colon\ u(t)\in F,\ \int_{t_0}^{t_1}\|u(t)\|^p\,dt\leqslant L\right\},$$

$U(\cdot)=U(T)$ — заданное семейство управлений. Здесь $\operatorname*{vrai\,max}_{t\in T}\|u(t)\|$ вычисляется следующим образом: на T выделяется множество ω нулевой меры, находится $\sup_{t\in T-\omega}\|u(t)\|$. За $\operatorname*{vrai\,max}_{t\in T}\|u(t)\|$ берется $\inf_{\omega}\sup_{t\in T-\omega}\|u(t)\|$, где ω пробегает всевозможные множества нулевой меры. Очевидно, для непрерывных и кусочно-непрерывных функций справедлива формула

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in T}\|u(t)\|=\max_{t\in T}\|u(t)\|.$$

Для заданной функции $x(t)$, $t \in T$, $x(t) \in E_n(T)$, выражение

$$f(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} u'(t)\, x(t)\, dt,$$

ставящее этой функции в соответствие число, называется *линейным функционалом*. Нетрудно проверить, что

$$\left.\begin{aligned} \sup_{u(\cdot)\in U_\infty(\cdot)} f(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} \| x(t) \|\, dt, \\ \sup_{u(\cdot)\in U_p(\cdot)} f(x(\cdot)) &= \left(\int_{t_0}^{t_1} \| x(t) \|^q\, dt \right)^{1/q}, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

причем $\| x \|$ согласована с $\| u \|$. В общем случае всякая операция, ставящая в соответствие данной функции некоторое число, называется *функционалом* (нелинейным). Когда функции ставится в соответствие вектор (или функция), то говорят об *операторе*. Пусть $u(t)$, $t \in T$,— функция, x — вектор. Если указано правило, по которому по каждому $u(\cdot)$ можно найти x, то пишут $x = S(u(\cdot))$. Мы будем иметь дело с операторами вида

$$x \equiv Su(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, t)\, u(t)\, dt, \qquad (25)$$

$$x \equiv S(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, t, u(t))\, dt,$$

где $S(t_1, t)$ есть $n \times r$-матричная функция двух аргументов, $S(t_1, t, u)$ — n-векторная функция трех аргументов (одного векторного). С линейным оператором (25) часто будут использоваться символы $g'S$, $\| g'S \|$:

$$g'S = g'\, S(t_1, t),$$

$$\| g'S \| = \sup_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, u(t)\, dt.$$

Таким образом, $g'S$ — совокупность из r функций, полученных умножением слева n-вектора g на $n \times r$-матричную функцию $S(t_1, t)$. Чтобы подчеркнуть, что $g'S$ — функция от t, будем иногда писать $[g'S](t)$. Учитывая (24), можно записать и явное выражение для $\| g'S \|$:

$$\| g'S \| = \left(\int_{t_0}^{t_1} \| g'S(t_1, t) \|^q dt \right)^{1/q}, \text{ если } U(\cdot) \equiv U_p(\cdot).$$

Здесь норма в подынтегральном выражении согласована с $\| u \|$.

Отметим еще некоторые традиционные символы: $o(\varepsilon)$: $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $O(\varepsilon)$: $O(\varepsilon) \leqslant k\varepsilon$; $\operatorname{int} X$ — совокупность внутренних точек множества X (точек, принадлежащих X вместе с некоторой окрестностью); $\bar{X}$ — замыкание множества X (объединение X и всех его предельных точек); $\operatorname{conv} X$ — выпуклая оболочка множества X (наименьшее выпуклое множество, содержащее X); $\det A$ — детерминант (определитель) матрицы A; $\operatorname{Sp} A$ — след матрицы A (сумма элементов, лежащих на главной диагонали); E — единичная диагональная матрица; δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$);

$$\operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ -1, & \alpha < 0, \end{cases}$$

$\operatorname{sign} 0$ не определено (если не оговаривается особо); $[a]$ — целая часть числа a. На протяжении всей книги прописными буквами, как правило, обозначаются матрицы, строчными — векторы. В тех местах, где используется координатная форма записи, принято суммирование по повторяющимся индексам.

Обыкновенная динамическая система в общем случае задается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = g(y, \xi, \eta, t), \qquad y(t_0) = y_0 = y_0(\zeta). \tag{26}$$

Здесь $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — вектор состояния системы, $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ — вектор внешних воздействий, $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_q\}$ — вектор параметров системы, $\zeta = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_p\}$ — вектор параметров начального состояния. Каждому набору, состоящему из функции $\xi(t)$, векторов η, ζ, соответствует единственное решение $y(t)$, $t \geqslant t_0$, уравнения (26). Это движение будем называть *невозмущенным* (*программным*) *движением*, а порождающие его функции $\xi(t)$, векторы η, ζ — программным управлением, программными векторами. Как обычно, программные (невозмущенные) характеристики системы будем сравнивать с возмущенными, которые обозначим через $\tilde{y}(t)$, $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$. Введем величины, представляющие отклонение возмущенных характеристик системы от невозмущенных:

$$x(t) = \tilde{y}(t) - y(t), \quad u(t) = \tilde{\xi}(t) - \xi(t),$$
$$w = \tilde{\eta} - \eta, \quad v = \tilde{\zeta} - \zeta. \tag{27}$$

Функцию $x(t)$, $t \geqslant t_0$, назовем *управляемым движением*, функцию $u(t)$, $t \geqslant t_0$,— *управлением*, за w, v оставим прежние названия. Дифференциальное уравнение управляемого (возмущенного) движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, w, t), \quad x(t_0) = x_0(v), \tag{28}$$

где $f(x, u, w, t) = g(y(t) + x, \xi(t) + u, \eta + w, t) - g(y(t), \xi(t), \eta, t)$, $f(0, 0, 0, t) \equiv 0$, $x_0(v) = y_0(\zeta + v) - y_0(\zeta)$, $x_0(0) = 0$. В монографии изучается лишь уравнение (28) возмущенного движения, переход к невозмущенному случаю через (27) очевиден.

В дальнейшем часто используется следующая форма уравнения (28) $(w = 0)$:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + C(t)ux + \frac{1}{2}D(t)xx + \frac{1}{2}G(t)uu + \mathrm{o}.$$

В этой записи использованы обозначения:

$$[A(t)]_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, t)}{\partial x_j}, \quad [B(t)]_{i\nu} = \frac{\partial f_i(0, 0, t)}{\partial u_\nu},$$
$$[C(t)]_{ij\nu} = \frac{\partial f_i(0, 0, t)}{\partial x_j\, \partial u_\nu}, \quad [D(t)]_{ijk} = \frac{\partial f_i(0, 0, t)}{\partial x_j\, \partial x_k},$$
$$[G(t)]_{i\nu\mu} = \frac{\partial f_i(0, 0, t)}{\partial u_\nu\, \partial u_\mu}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n; \ \nu, \mu = 1, \ldots, r,$$

$$[C(t)ux]_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{r} [C(t)]_{ij\nu} u_\nu x_j,$$
$$[D(t)xx]_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [D(t)]_{ijk} x_k x_j,$$
$$[G(t)uu]_i = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{r} [G(t)]_{i\nu\mu} u_\mu u_\nu,$$
$$\mathrm{o} = \mathrm{o}(\|x\|^2 + \|x\|\,\|u\| + \|u\|^2).$$

В случаях, когда $w \neq 0$, но $u = 0$, приведенные обозначения сохраняются с заменой u на w.

Стационарными называются системы (28), у которых правая часть не зависит от времени t; в противном случае говорят о *нестационарных* системах. Под *линейной* системой мы будем понимать систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)\,u.$$

Принимая за r-вектором u название *вход* (r-мерный), будем говорить о системах с одним входом, если $r = 1$, о системах с несколькими входами, если $r > 1$, и о линейных системах с нелинейным входом, если

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + b(u, t).$$

Величины

$$z = h(x, t), \quad h(0, t) = 0,$$

связанные с состоянием x системы (28) и доступные измерению, называются *выходами* системы, причем говорят об m выходах, если размерность вектора z равна m.

В монографии принята следующая система ссылок. Формулы, теоремы, леммы, примеры каждой главы имеют автономную (одинарную) нумерацию. При ссылках на результаты данной главы сохраняется одинарная нумерация. Если же результат относится к другой главе, то используется двойная нумерация, причем первая цифра обозначает номер главы.

ЧАСТЬ I
ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Глава I
УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи. Определения. Идея метода приращений в теории управляемости

Рассмотрим динамическую систему, движение которой на отрезке $T = [t_0, t_1]$, $t_1 - t_0 > 0$, можно описать дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \ x(t_0) = x_0, \quad f(0, 0, t) = 0. \tag{1}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор, характеризующий состояние системы, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — векторное воздействие, t — время.

Пусть некоторому кусочно-непрерывному воздействию $u(t)$, $t \in T$, соответствует движение $x(t)$, $t \in T$, $x(t_0) = x_0$, динамической системы (1). Воздействие $u(t)$, $t \in T$, назовем *управлением*, движение $x(t)$, $t \in T$,— *управляемым движением*.

З а д а ч а. Найти управление, при котором управляемое движение проходит через точки x_0 и $x_1 = 0$: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$.

Определения.

1. Состояние x_0 динамической системы (1) называется *TL-управляемым*, если найдется кусочно-непрерывная функция $u(t)$, $\| u(t) \| \leqslant L$, $t \in T$, такая, что соответствующее ей движение $x(t)$ удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

2. Динамическая система называется *TL-управляемой*, если существует число $\alpha = \alpha(T, L)$ такое, что все состояния из $\{x\colon \| x \| \leqslant \alpha\}$ являются TL-управляемыми.

3. Если состояние x_0 (динамическая система) TL-управляемо (TL-управляема) при некоторых T и L, то оно (она) называется *управляемым* (*управляемой*).

4. Динамическая система называется *вполне управляемой*, если она TL-управляема при любых T ($t_1 > t_0$) и $L > 0$.

5. Динамическая система называется *управляемой* (*вполне управляемой*) *в целом*, если она управляема (вполне управляема) и $\sup\limits_{T,\,L} \alpha(T, L) = \infty$.

Первый подход данной работы к изучению управляемости основан на использовании вспомогательных функций. Идея вспомогательных функций при исследовании управляемости динамических систем состоит в следующем. На TL-управляемых начальных состояниях x_0 системы (1) определяется векторная функция $\varphi(x_0)$. С помощью приращений, рассматриваемых на траекториях системы (1), вектор $\varphi(x_0)$ выражается через $u(t)$, $t \in T$, и параметры системы (1). Находятся условия, при которых множество $\{\varphi(x_0)\}$ является открытым. Если вспомогательная функция $\varphi(x)$ задает при этом неособое преобразование $x \to \varphi(x)$, то найденные условия суть условия управляемости.

§ 2. Формула приращения векторной функции на траекториях динамической системы

Введем векторную функцию $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \ldots \ldots, \varphi_l(x)\}$, $\varphi(0) = 0$, допускающую разложение

$$\varphi(x) = Vx + o(x). \tag{2}$$

Для дифференцируемой $n \times n$-матричной функции $\Psi(t)$ очевидно тождество

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)\,x(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}\,x(t) + \Psi(t)\,\frac{dx(t)}{dt}.$$

Поэтому

$$\Psi(t)\,x(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\Psi}(t)\,x(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,\dot{x}(t)\,dt. \tag{3}$$

Пусть x_0 — TL-управляемое состояние, т. е. $x(t_1)=0$. Тогда из (2), (3) имеем

$$\varphi(x_0)=\int_{t_0}^{t_1}\Psi(t)\dot{x}(t)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\dot{\Psi}(t)x(t)\,dt+o(x_0).$$

И наоборот, если выполняется это равенство, то $\Psi(t_1)x(t_1)=0$. Вместо $\dot{x}(t)$ подставим его выражение из (1), а функцию $\Psi(t)$ на T определим уравнением

$$\dot{\Psi}(t)=-\Psi(t)A(t),\qquad \Psi(t_0)=-V.$$

В результате получим формулу

$$\varphi(x_0)=\int_{t_0}^{t_1}\Psi(t)B(t)u(t)\,dt+\eta, \tag{4}$$

где

$$\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3,\qquad \eta_1=\int_{t_0}^{t_1}\Psi(t)C(t)u(t)x(t)\,dt,$$

$$\eta_2=\int_{t_0}^{t_1}\Psi(t)\,o(\|x\|^2+\|x\|\,\|u\|+\|u\|^2)\,dt,\quad \eta_3=o(x_0).$$

§ 3. Исследование управляемости линейных стационарных систем

1. Системы с одним входом. Рассмотрим систему управления, для которой дифференциальное уравнение управляемого движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=Ax+bu, \tag{5}$$

где A — постоянная $n\times n$-матрица, b — постоянный n-вектор, u — скаляр. Если в формуле (4) в качестве функции $\varphi(x)$ взять тождественное преобразование $\varphi(x)=x$, то получим следующее представление для управляемых состояний:

$$x_0=\int_{t_0}^{t_1}\Psi(t)bu(t)\,dt. \tag{6}$$

Здесь функция $\Psi(t)$, $t \in T$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Psi} = -\Psi A, \quad \Psi(t_0) = -E.$$

Проинтегрируем по частям правую часть (6):

$$x_0 = -b \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t) A b \int_t^{t_1} u(\tau)\,d\tau\,dt.$$

Применим эту операцию ко второму члену последнего выражения, затем — к последнему члену вновь полученного выражения и т. д. В результате после n шагов получим

$$x_0 = \sum_{\beta=0}^{n-1} (-1)^{\beta+1} A^\beta b \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t-t_0)^\beta}{\beta!} u(t)\,dt + \\ + (-1)^n \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t) A^n b \int_t^{t_1} \frac{(\tau-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(\tau)\,d\tau\,dt. \quad (7)$$

Покажем, что векторная функция $p(t) = \Psi(t) A^n b$ допускает разложение

$$p(t) = \sum_{\beta=0}^{n-1} \lambda_\beta(t) A^\beta b. \quad (8)$$

Действительно, так как в силу теоремы Кэли [39] каждая квадратная матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0,$$

то справедливо равенство

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E = 0. \quad (9)$$

Умножая обе части этого равенства слева на $\Psi(t)$ и справа на $A^n b$ и замечая, что $p^{(k)}(t) = (-1)^k \Psi(t) A^{n+k} b$, получим дифференциальное уравнение для $p(t)$:

$$p^{(n)} - \alpha_1 p^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} \dot{p} + (-1)^n \alpha_n p = 0. \quad (10)$$

Допустим, что (8) не имеет места, т. е. существуют момент $t = \bar{t}$ и вектор d такие, что

$$d' p(\bar{t}) \neq 0, \quad d' A^\beta b = 0, \quad \beta = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (11)$$

Функция $\nu(t) = d'p(t)$ в силу (10) удовлетворяет уравнению

$$\nu^{(n)} - \alpha_1\nu^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\dot{\nu} + (-1)^n\alpha_n\nu = 0 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\nu(t_0) = -d'A^nb, \quad \dot{\nu}(t_0) = d'A^{n+1}b, \quad \ldots, \quad \nu^{(n-1)}(t_0) = \\ = (-1)^n d'A^{2n-1}b.$$

Но $A^nb = \sum\limits_{\beta=0}^{n-1} \delta_\beta A^\beta b$, и поэтому из (11) следует, что

$$\nu(t_0) = 0, \quad \dot{\nu}(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad \nu^{(n-1)}(t_0) = 0. \quad (13)$$

Однородное уравнение (12) с условиями (13) имеет единственное решение $\nu(t) \equiv 0$, что противоречит предположению (11): $\nu(\bar{t}) \neq 0$. Справедливость разложения (8) доказана.

Подставим (8) в (7):

$$x_0 = \sum_{\beta=0}^{n-1} A^\beta b \int_{t_0}^{t_1} \Big[(-1)^{\beta+1} \frac{(t-t_0)^\beta}{\beta!} + \\ + (-1)^n \int_{t_0}^{t} \lambda_\beta(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau\Big] u(t)\, dt. \quad (14)$$

Пусть μ_β, $\beta = 0, \ldots, n-1$, — произвольные числа. Докажем, что при любом $\tau = t_1 - t_0 > 0$ существует кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая равенствам

$$\mu_\beta = \int_{t_0}^{t_1} \Big[(-1)^{\beta+1} \frac{(t-t_0)^\beta}{\beta!} + (-1)^n \int_{t_0}^{t} \lambda_\beta(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau\Big] u(t)\, dt. \quad (15)$$

Для этого достаточно показать (см. § 6.11), что функции

$$l_\beta(t) = (-1)^{\beta+1} \frac{(t-t_0)^\beta}{\beta!} + (-1)^n \int_{t_0}^{t} \lambda_\beta(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau, \\ \beta = 0, \ldots, n-1; \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

линейно независимы. Предположим противное: существуют числа g_β, $\beta = 0, \ldots, n-1$, $\|g\| = 1$, такие, что $\Delta(t) =$

$= \sum_{\beta=0}^{n-1} g_\beta l_\beta(t) \equiv 0$. Тогда $\Delta^{(\beta)}(t_0+0)=0$, $\beta=0, \ldots, n-1$. Однако непосредственное вычисление дает $\Delta^{(\beta)}(t_0+0) = g_\beta(-1)^{\beta+1}$, что противоречит предположению о линейной зависимости функций $l_\beta(t)$, $t \in T$, $\beta=0, \ldots, n-1$.

Таким образом, при любых μ_β задача (15) имеет решение относительно $u(t)$, $t \in T$.

Этот результат в совокупности с (14) позволяет сформулировать следующее предложение.

Теорема 1. Множество управляемых состояний системы (5), и только оно, имеет вид

$$x_0 = \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu_\beta A^\beta b, \quad -\infty < \mu_\beta < \infty.$$

Следствие. Для управляемости (вполне управляемости) в целом линейной стационарной динамической системы (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг } \{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\} = n.$$

2. Системы с несколькими входами. Линейная стационарная система с r входами имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{16}$$

где A, B — постоянные $n \times n$, $n \times r$-матрицы, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — вектор. Обозначим через b^ν, $\nu = 1, \ldots, r$, столбцы матрицы B. Тогда систему (16) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{\nu=1}^{r} b^\nu u_\nu.$$

В силу принципа суперпозиции (это можно проверить и непосредственным счетом) для системы (16) получается следующее утверждение.

Теорема 2. Множество управляемых состояний системы (16), и только оно, имеет вид

$$x_0 = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu_\beta^\nu A^\beta b^\nu, \quad -\infty < \mu < \infty.$$

Следствие. Линейная стационарная система (16) управляема (вполне управляема) в целом тогда и только тогда, когда

$$\text{ранг } \{B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B\} = n.$$

Пример 1. Система управления 4-го порядка с 4 входами

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 + x_2 + u_1 + 2u_2 + 5u_4, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -4x_1 - x_2 + u_2 + 4u_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= 6x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + u_3 + 3u_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -14x_1 - 5x_2 - x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

является вполне управляемой, ибо в этом случае

$$A = \begin{Bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{Bmatrix}, \qquad B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

и векторы $b^1 = \{1, 0, 0, 0\}$, $b^2 = \{2, 1, 0, 0\}$, $b^3 = \{0, 0, 1, 0\}$, $Ab^3 = \{0, 0, 2, -1\}$ линейно независимы.

3. Минимальное число входов управляемой системы. Пусть в системе управления

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad (18)$$

$n \times n$-матрица A фиксирована, а $n \times r$-матрицу B можно выбирать. Число r последней матрицы характеризует количество входов системы. При синтезе системы управления может возникнуть задача: каково минимальное число r входов, при котором система с заданной матрицей A управляема? Вообще говоря, число r может принимать любое значение от 1 до n.

Пример 2. Система управления, описываемая уравнением n-го порядка

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x = bu$$

$$(x,\ a_i,\ b,\ u \text{ — скаляры}),$$

всегда управляема при одном входе. Действительно, в данном примере после введения переменных $x_1 = x$,

$x_2 = \dot{x}, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$ и перехода к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_1x_1 - \ldots - a_nx_n + bu \end{aligned}$$

получаем

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots\ldots & & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \end{Vmatrix}, \qquad b = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что векторы

$$b = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{Vmatrix}, \qquad Ab = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \\ -a_nb \end{Vmatrix}, \ \ldots, \quad A^{n-1}b = \begin{Vmatrix} b \\ -a_nb \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix}$$

линейны независимы при любых a_i и $b \neq 0$.

Пример 3. Если в (18) матрица A имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & & 0 & a_n \end{Vmatrix},$$

то очевидно, что для управляемости системы (18) необходимо и достаточно, чтобы матрица B имела размеры $n \times n$ и была неособой.

Комбинируя эти два примера, можно построить управляемые системы с любым числом входов.

Перейдем к исследованию поставленной выше задачи в общем случае. Для этого нам понадобятся некоторые факты из линейной алгебры [39]. Для произвольного $x \in E_n$ ряд

$$x, \ Ax, \ A^2x, \ \ldots,$$

содержит лишь конечное число p линейно независимых векторов, причем

$$A^p x = -\gamma_1 A^{p-1}x - \ldots - \gamma_p x.$$

Многочлен

$$\lambda^p + \gamma_1\lambda^{p-1} + \ldots + \gamma_p$$

называется *минимальным многочленом вектора* x. Наименьшее общее кратное минимальных многочленов базиса пространства E_n называется *минимальным многочленом пространства* E_n. Обозначим его через $\psi_1(\lambda)$:

$$\psi_1(\lambda) = \lambda^{p_1} + \gamma_1^1\lambda^{p_1-1} + \ldots + \gamma_{p_1-1}^1\lambda + \gamma_{p_1}^1. \qquad (19)$$

Если $p_1 < n$, то существует минимальный многочлен

$$\psi_2(\lambda) = \lambda^{p_2} + \gamma_1^2\lambda^{p_2-1} + \ldots + \gamma_{p_2-1}^2\lambda + \gamma_{p_2}^2$$

пространства E_n по $\operatorname{mod} I_1$, где I_1 — подпространство с базисом

$$b^1,\ Ab^1,\ \ldots,\ A^{p_1-1}b^1 \qquad (20)$$

и b^1 — элемент из E_n, минимальный многочлен которого совпадает с (19). Всегда существует вектор b^2, минимальный многочлен которого совпадает с $\psi_2(\lambda)$. Поэтому векторы

$$b^2,\ Ab^2,\ \ldots,\ A^{p_2-1}b^2 \qquad (21)$$

линейно независимы. Но поскольку $\psi_2(\lambda)$ является и минимальным многочленом для b^2 по $\operatorname{mod} I_1$, то $p_1 + p_2$ векторов из (20), (21) линейно независимы. Если $p_1 + p_2 < n$, то существует минимальный многочлен

$$\psi_3(\lambda) = \lambda^{p_3} + \gamma_1^3\lambda^{p_3-1} + \ldots + \gamma_{p_3-1}^3\lambda + \gamma_{p_3}^3$$

пространства E_n по $\operatorname{mod}(I_1 + I_2)$, где I_2 — подпространство с базисом (21). Этот процесс в силу конечности n остановится на некотором этапе r. В результате получается последовательность

$$b^1,\ Ab^1,\ \ldots,\ A^{p_1-1}b^1,\ b^2,\ Ab^2,\ \ldots,\ A^{p_2-1}b^2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ b^r,\ Ab^r,\ \ldots,\ A^{p_r-1}b^r \qquad (22)$$

линейно независимых векторов, причем число r по самому построению минимально. Для получения (22), таким образом, достаточно построить многочлены $\psi_\nu(\lambda)$ и векторы b^ν, для которых эти многочлены являются минимальными.

В линейной алгебре доказывается, что многочлены $\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_r(\lambda)$ определяются однозначно: они совпадают с *нетривиальными* (отличными от единицы) *инвариантными многочленами* матрицы A. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Минимальное число входов управляемой системы (18) равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы A.

Инвариантные многочлены $i_1(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ матрицы определяются по формулам

$$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$i_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}$$
$$(D_0(\lambda) \equiv 1),$$

где $D_j(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров j-го порядка характеристической матрицы $\lambda E - A$ (в $D_j(\lambda)$ старший коэффициент всегда выбирается равным единице). Для практического вычисления многочленов $i_j(\lambda)$ известно несколько способов. Опишем один из них.

Всегда существуют такие многочленные квадратные матрицы $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ с постоянными и отличными от нуля определителями, что матрица

$$P(\lambda)[\lambda E - A]Q(\lambda)$$

имеет структуру

$$\left\{\begin{matrix} i_{n'}(\lambda) & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & i_{n'-1}(\lambda) & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & i_1(\lambda) & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{matrix}\right\}, \qquad (23)$$

где n' равно рангу матрицы $\lambda E - A$. Матрица $P(\lambda)$ равна произведению матриц левых элементарных операций, необходимых для приведения матрицы $\lambda E - A$ к виду (23). *Левые элементарные операции*: 1) умножение какой-нибудь, например i-й, строки на число $c \neq 0$; 2) прибавление к i-й строке другой, j-й, умноженной на произвольный многочлен $b(\lambda)$; 3) перестановка любых строк. Аналогичные операции над столбцами называются *правыми элементарными операциями*. Матрица $Q(\lambda)$ есть произведение матриц правых элементарных операций, необходимых для приведения $\lambda E - A$ к виду (23).

Из всего сказанного следует правило нахождения инвариантных многочленов матрицы A. Составляется матрица $\lambda E - A$, к ней последовательно применяются левые и правые элементарные операции. Эти операции всегда можно применить таким образом, что от $\lambda E - A$ придем к матрице вида (23).

Пример 4. Найдем инвариантные многочлены матрицы A системы (17). Имеем

$$\lambda E - A = \begin{Bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{Bmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{Bmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{Bmatrix} \to$$

$$
\to \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \\ \quad 1 \end{array} \to
$$

$$
\to \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{Bmatrix}.
$$

После перестановки строк и столбцов получаем

$$
\lambda E - A \to \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{Bmatrix}.
$$

Инвариантные многочлены матрицы A:

$$
i_1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1, \quad i_2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1, \quad i_3 = 1, \quad i_4 = 1;
$$

из них нетривиальными являются первые два: $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$. Вывод: в системе (17) минимальное число входов, обеспечивающих ее управляемость, равно двум.

По известным многочленам $\psi_\nu(\lambda)$ можно построить векторы b^ν, для которых указанные многочлены являются минимальными. Эту процедуру достаточно показать для $\psi_1(\lambda)$. Разложим $\psi_1(\lambda)$ на неприводимые в поле действительных чисел множители

$$
\psi_1(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{c_1} [\varphi_2(\lambda)]^{c_2} \ldots [\varphi_s(\lambda)]^{c_s},
$$

где $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_s(\lambda)$ — различные неприводимые многочлены с единичными старшими коэффициентами. Пусть E^1 — совокупность векторов x, удовлетворяющих уравнению $\varphi_1(A)x = 0$. Аналогично определяется $E^2, \ldots, E^s$. В пространстве E^1 рассмотрим базис $e_1, \ldots, e_{k_1}$. Обозначим через e^1 тот из этих элементов, минимальный многочлен которого совпадает с $\varphi_1(\lambda)$. Аналогичным образом в E^2 находим элемент e^2 и т. д. В результате получим векторы $e^1, e^2, \ldots, e^s$. Вектор $b^1 = e^1 + e^2 + \ldots + e^s$ имеет в качестве минимального многочлен $\psi_1(\lambda)$.

Проиллюстрируем эти операции на примере 1. Минимальные многочлены $\psi_1(\lambda) \equiv \psi_2(\lambda)$ для этого примера имеют разложение $\psi_1(\lambda) \equiv \psi_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Поскольку $\psi_1(A) = 0$, то уравнению $\psi_1(A)\,x = 0$ удовлетворяет любой вектор из E_4. Подсчитаем минимальные многочлены для элементов базиса $e_1 = \{1, 0, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, 0\}$, $e_3 = \{0, 0, 1, 0\}$, $e_4 = \{0, 0, 0, 1\}$. Минимальный многочлен элемента e_1 совпадает с $\psi_1(\lambda)$. Поэтому полагаем $b^1 = e_1$. Минимальным многочленом пространства E_4 по $\mathrm{mod}\, I_1$ является $\psi_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Здесь I_1 — подпространство с базисом e_1, Ae_1. Все векторы пространства E_4 по $\mathrm{mod}\, I_1$ удовлетворяют уравнению $\psi_2(A)\,x = 0$. Базисом для E_4 по $\mathrm{mod}\, I_1$ являются векторы $e_3 = \{0, 0, 1, 0\}$, $e_4 = \{0, 0, 0, 1\}$. Минимальные многочлены векторов e_3, e_4 совпадают с $\psi_2(\lambda)$. Поэтому можно положить $b^2 = e_3$ (или $b^2 = e_4$).

4. Системы управления с постоянно действующими возмущениями. Пусть система управления имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \gamma(t), \tag{24}$$

где $\gamma(t)$ — векторная функция, характеризующая постоянно действующие возмущения. Из формулы (4) при $\varphi(x) = x$ имеем

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,Bu(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,\gamma(t)\,dt.$$

Поэтому в силу выполненных над (6) преобразований получается следующая теорема.

Теорема 4. Множество управляемых состояний системы (24), и только оно, выражается формулой

$$x_0 = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu_\beta^\nu A^\beta b^\nu + \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,\gamma(t)\,dt, \qquad -\infty < \mu_\beta^\nu < \infty.$$

Следствие. Для управляемости (вполне управляемости) в целом системы (24) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг}\,\{B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B\} = n.$$

5. Одна задача управления из теории преследования. Пусть система (18) описывает поведение преследующего объекта, а уравнение преследуемого объекта имеет вид

$$\frac{dx^1}{dt} = Ax^1 + Dv,$$

где x^1 — n-вектор состояния, v — q-вектор управления, A, D — постоянные $n \times n$-, $n \times q$-матрицы. Скажем, что задача преследования имеет допустимое решение, если для любых векторов x_0, x_0^1 и кусочно-непрерывной функции $v(t)$, $t \in T$, найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, что $x(t_1) = x^1(t_1)$. Здесь $x(t_0) = x_0$, $x^1(t_0) = x_0^1$, $x(t)$, $t \in T$,— траектория системы (18), порожденная управлением $u(t)$, $x^1(t)$ — траектория преследуемой системы, соответствующая функции $v(t)$.

Из теоремы 2 следует утверждение.

Теорема 5. Задача преследования имеет допустимое решение в том и только в том случае, если пространство, натянутое на векторы

$$d^1, \ldots, d^q, Ad^1, \ldots, Ad^r, \ldots, A^{n-1}d^1, \ldots, A^{n-1}d^q,$$

является подпространством пространства, натянутого на векторы

$$b^1, \ldots, b^r, Ab^1, \ldots, Ab^r, \ldots, A^{n-1}b^1, \ldots, A^{n-1}b^r.$$

§ 4. Положительная, относительная, условная управляемость линейных стационарных систем

1. Положительная управляемость.

Определение 6. Динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{25}$$

называется *положительно управляемой в целом*, если для каждого начального состояния x_0 найдутся момент $t = \bar{t}$ и кусочно-непрерывное неотрицательное управление $u(t)$, $u(t) \geqslant 0$, $t \in [t_0, \bar{t}]$, такие, что траектория $x(t)$ динамической системы, порожденная вектором x_0 ($x(t_0) = x_0$) и управлением $u(t)$, удовлетворяет условию $x(\bar{t}) = 0$.

Аналогичным образом можно переформулировать на случай неотрицательного управления и другие определения управляемости, введенные в § 1. Ясно, что если динамическая система с r управлениями управляема, то та же система положительно вполне управляема с $2r$ управлениями. Исследование положительной управляемости можно провести по схеме § 3.

Теорема 6. Если система (25) положительно управляема, то управляемые состояния x_0 имеют вид

$$x_0 = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\beta=0}^{\infty} \mu_\beta^\nu A^\beta b^\nu, \quad (-1)^{\beta+1} \mu_\beta^\nu > 0,$$
$$\nu = 1, \ldots, r; \quad \beta = 0, 1, \ldots,$$

Введем определение.

Определение 7. Последовательность векторов

$$a_1, \ldots, a_N \tag{26}$$

составляет *положительный* (*неотрицательный*) *базис*, если любой n-вектор x представим в виде

$$x = \sum_{j=1}^{N} \mu_j a_j, \quad \mu_j > 0 \quad (\mu_j \geqslant 0). \tag{27}$$

В силу этого определения и теоремы 6 в положительно управляемых системах последовательность $(-1)^{\beta+1} A^\beta b^\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, $\beta = 0, 1, \ldots$, образует положительный базис. Нетрудно проверить, что если последовательность (26) образует неотрицательный базис, то она же составляет положительный базис. Действительно, если для некоторого x среди соответствующих ему μ_j найдется $\mu_{j_1} = 0$, то раскладываем по базису (26) вектор

$$-a_{j_1} = \sum_{j=1}^{N} \mu_j^1 a_j$$

и добавляем в правую часть разложения (27) тождество $a_{j_1} + \sum_{j=1}^{N} \mu_j^1 a_j = 0$. В новом разложении, очевидно, коэффициент при a_{j_1} будет уже положительным. Для практической проверки того, составляет ли данная последовательность неотрицательный базис, можно воспользоваться следующими леммами.

Лемма 1. Для того чтобы последовательность (26) составляла неотрицательный базис, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент последовательности

$$c_1, \ldots, c_{N_1}, \tag{28}$$

образующий неотрицательный базис, можно было представить в виде

$$c_k = \sum_{j=1}^{N} \mu_j^k a_j, \quad \mu_j^k \geqslant 0. \tag{29}$$

Лемма 2. Для того чтобы последовательность (26) составляла неотрицательный базис в E_n, необходимо и достаточно, чтобы

1) векторы $a_1, \ldots, a_{N-1}$ образовывали базис в E_n,

2) $$a_N = -\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i a_i, \quad \alpha_i > 0. \tag{30}$$

Доказательство лемм 1, 2. Необходимость условий леммы 1 следует из определения 7. Пусть выполняется (29), а (28) — неотрицательный базис. Докажем, что (26) — неотрицательный базис. Действительно, для каждого x имеем

$$x = \sum_{j=1}^{N_1} \mu_j^0 c_j, \quad \mu_j^0 \geqslant 0.$$

Подставляя сюда (29), получаем разложение x по элементам (26) с неотрицательными коэффициентами. Лемма 1 доказана.

Необходимость условий леммы 2. Первое условие очевидно. Для доказательства второго условия раскладываем элемент a_N по (26):

$$a_N = -\sum_{i=1}^{N} \beta_i a_i, \quad \beta_i \geqslant 0.$$

Отсюда

$$a_N = -\frac{1}{1+\beta_N} \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i a_i.$$

Переход от $\beta_i \geqslant 0$ к $\alpha_i > 0$ указан выше.

Достаточность. Пусть в разложении

$$x = \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i a_i \tag{31}$$

числа μ_{i_k}, $k = 1, \ldots, m$, отрицательны. Найдем $\mu_{i_k} a_{i_k}$ из (30):

$$\mu_{i_k} a_{i_k} = -\frac{\mu_{i_k}}{\alpha_{i_k}} [a_N + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{i_k - 1} a_{i_k - 1} + \\ + \alpha_{i_k+1} a_{i_k+1} + \ldots + \alpha_{N-1} a_{N-1}],$$

и подставим их в (31). В новом разложении при векторах $a_1, \ldots, a_N$ отрицательных коэффициентов уже, очевидно, не будет. Лемма 2 доказана.

Понятно, что каждая положительно управляемая система является и управляемой. Обратное предложение неверно.

Пример 5. Система

$$\dot{x} = u \qquad (x \text{ — скаляр})$$

управляема, но не является положительно управляемой. Состояния x_0, которые можно привести в начало координат с помощью неотрицательных управлений, лежат на отрицательной полуоси.

Пример 6. Управляемая система

$$\ddot{x} = u$$

также не является положительно управляемой. Начальные состояния $x_0 = \{x(0), \dot{x}(0)\}$, которые можно привести в начало координат с помощью неотрицательных управлений, даются выражением

$$x_0 = -\mu_0 b + \mu_1 A b, \qquad \mu_0 > 0, \qquad \mu_1 > 0,$$

где $b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $Ab = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$. Таким образом, лишь внутренние точки четвертого квадранта положительно управляемы.

Как управляемость, так и положительная управляемость динамической системы основана на свойствах последовательности

$$B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B,\ \ldots \tag{32}$$

Если при исследовании управляемости системы достаточно проверить не более n первых членов последовательности (остальные линейно через них выражаются), то при изучении положительной управляемости число первых членов, подлежащих проверке, не меньше $n+1$ и может оказаться сколь угодно большим.

Пример 7. В положительно управляемой системе

$$\dot{x}_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta + u,$$
$$0 < \theta \neq \pi k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

число первых членов последовательности (32), образующих положительный базис, стремится к ∞ при $\theta \to 0$. Необходимые и достаточные условия положительной управляемости с позиций функционального анализа исследуются в § 9. Здесь лишь отметим, что условия теоремы 6 не являются достаточными.

Пример 8. Пусть $\dot{x} = x + u$. Это уравнение не является положительно управляемым, хотя условия теоремы 6 выполнены: $-1, +1, -1, \ldots$ — положительный базис.

2. Относительная управляемость.

Определение 8. Динамическая система (25) называется *управляемой относительно подпространства* K $[Kx = 0]$ (*относительно управляемой*), если для каждого состояния x_0 системы найдутся число $\bar{t}$, $\bar{t} < \infty$, и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, такие, что $Kx(\bar{t}) = 0$.

Полагая в (4) $\varphi(x) = KF(\bar{t})\,x$, получаем в полной аналогии с теоремой 2 представление для относительно управляемых состояний

$$KF(\bar{t})\,x_0 = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu_\beta^\nu KF(\bar{t})\,A^\beta b^\nu.$$

Теорема 7. Динамическая система (25) относительно управляема в целом в том и только в том случае, если [58b]

$$\text{ранг}\,\{KB,\ KAB,\ \ldots,\ KA^{n-1}B\} = \text{ранг}\,\{K\}. \qquad (33)$$

Примечание. Вместо «относительная управляемость» можно написать слова «относительная вполне управляемость», «относительная TL-управляемость» и т. п., смысл которых вполне ясен.

Условие (33) для случая $(n-1)$-мерного подпространства K: $k'x = 0$ принимает особенно простой вид: не все числа $k'A^\beta b^\nu$, $\beta = 0, 1, \ldots, n-1$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, должны быть равны нулю.

3. Условная управляемость.

Определение 9. Динамическая система (25) называется *управляемой в подпространстве* M (*условно управляемой*), если каждое ее начальное состояние из подпространства M $(x_0 = My,\ y \in E_n)$ управляемо.

Из представления управляемых состояний, содержащегося в теореме 2, следует критерий условной управляемости рассматриваемой динамической системы.

Теорема 8. Динамическая система (25) условно управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{ранг}\ \{M, B, AB, \ldots, A^{n-1}B\} = \\ = \text{ранг}\ \{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}.$$

Пример 9. Пусть в системе (17) начальные возмущения расположены в плоскости $x_4 = 0$, $x_3 = 0$. Требуется определить, является ли эта система условно управляемой отдельно первым управлением.

Подпространство M задается в этом случае выражением $x = My$, $y \in E_4$, где

$$M = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Для вектора $b^1 = \{1, 0, 0, 0\}$ имеем $Ab^1 = \{3, -4, 6, -14\}$. Условия теоремы 8 выполнены, значит, управление u_1 каждое состояние из M может перевести в начало координат. Однако все состояния из плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ не могут быть приведены в начало координат с помощью этого управления. Система в этом подпространстве управляема третьим управлением.

§ 5. Управляемость линейных нестационарных систем

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)\,u \tag{34}$$

с достаточно гладкими матричными функциями $A(t)$, $B(t)$.

Полагая $\varphi(x) = x$, из (4) получим

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,B(t)\,u(t)\,dt, \tag{35}$$

где $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Psi} = -\Psi A(t), \qquad \Psi(t_0) = -E.$$

Интегрируя по частям правую часть выражения (35) по аналогии с (7), получаем

$$x_0=\sum_{\beta=0}^{n-1}(-1)^{\beta+1}Q_\beta(t_0)\int_{t_0}^{t_1}\frac{(t-t_0)^\beta}{\beta!}u(t)\,dt+$$
$$+(-1)^n\int_{t_0}^{t_1}\Psi(t)\,Q_n(t)\int_t^{t_1}\frac{(\tau-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(\tau)\,d\tau\,dt. \qquad (36)$$

Здесь

$$Q_0(t)=B(t),\quad Q_{\beta+1}(t)=A(t)\,Q_\beta(t)-\dot{Q}_\beta(t),$$
$$\beta=0,\ \ldots,\ n-1. \qquad (37)$$

Из представления (36) вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть $A(t)\in C^{n-2}$, $B(t)\in C^{n-1}$. Тогда нестационарная динамическая система (34) вполне управляема, если

$$\text{ранг}\ \{Q_0(t_0),\ \ldots,\ Q_{n-1}(t_0)\}=n. \qquad (38)$$

На нестационарные системы переносятся результаты §§ 3, 4, связанные с достаточными условиями управляемости. Это, очевидно, объясняется тем обстоятельством, что при выполнении условия (38) все управляемые состояния системы (34) в силу (36) можно записать в виде

$$x_0=\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\beta=0}^{n-1}\mu_\beta^\nu q_\beta^\nu(t_0).$$

Здесь $q_\beta^\nu(t)$ — ν-й столбец матрицы $Q_\beta(t)$.

§ 6. Условия управляемости линейных динамических систем с нелинейным входом

В этом параграфе мы расширяем класс допустимых управлений до семейства *измеримых функций.*

1. Стационарные системы. Пусть система управления описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt}=Ax+b(u), \qquad (39)$$

где A — постоянная $n\times n$-матрица, $b(u)$ — n-векторная функция, непрерывная по r-вектору управления u.

Исследование управляемости систем (39) основано на следующем факте. Множество значений, которые принимает траектория $x(t)$ в любой момент $\bar{t} \geqslant t_0$ при всевозможных измеримых функциях $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, со значениями из компакта U, компактно и совпадает с множеством значений в момент $t = \bar{t}$ траектории $y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, порожденной системой

$$\frac{dy}{dt} = Ay + q(t),$$

где $q(t)$ — всевозможные n-векторные измеримые функции со значениями из выпуклой оболочки $\Omega = \operatorname{conv} b(U)$ множества $b(U)$. Доказательство этого результата приведено в [194b] и основано на одной теореме А. А. Ляпунова [160a] об области значений векторнозначных функций.

Введем число ρ_L:

$$\rho_L = \max [\rho\colon \{x\colon \|x\| \leqslant \rho\} \cap \operatorname{conv} \{b(u)\colon \|u\| \leqslant L\} \subset \subset \operatorname{conv} \{b(u)\colon \|u\| \leqslant L\}],$$

равное наибольшему радиусу шара с центром в начале координат, пересечение которого с выпуклой оболочкой множества $\{b(u)\colon \|u\| \leqslant L\}$ содержится в последнем множестве. Пусть $b^1, \ldots, b^r$ — базис минимального подпространства, содержащего множество

$$\operatorname{conv} \{b(u)\colon \|u\| \leqslant L\}. \tag{40}$$

Обозначим через B матрицу $\{b^1, \ldots, b^r\}$.

Теорема 10. Если выполнены условия:

1) при некотором L начало координат принадлежит ядру множества (40),

2) ранг $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\} = n$,

то для любых T, $t_1 < \infty$ динамическая система (39) TL-управляема.

Доказательство этой теоремы достаточно очевидно, ибо управляемые состояния системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

с достаточно малым по норме управлением $\|u\| \leqslant \alpha$ являются в силу приведенного выше факта и условия 1) теоремы управляемыми и для (39). Условия 1), 2) теоремы для каждого T гарантируют (теорема 1) TL-управляемость любого состояния из некоторой окрестности начала координат. Этих рассуждений достаточно для следующего обращения теоремы 10.

Теорема 11. Если система (39) управляема, то выполняется условие 2) теоремы 10.

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 12. Если в дополнение к условиям теоремы 10 матрица A асимптотически устойчива ($\rho_L > 0$ при $L > 0$, $\sup\limits_L \rho_L = \infty$), то система (39) управляема (вполне управляема) в целом.

Примечание. Теорема может быть усилена. Система (39) TL-управляема при любом $t_1 > 0$, если найдутся ненулевые векторы $c^1, \ldots, c^m$ из (40) такие, что 1) $\gamma_1 c^1 + \ldots + \gamma_m c^m = 0$, $\gamma_i > 0$, 2) ранг $\{C, AC, \ldots \ldots, A^{n-1}C\} = n$. Здесь $C = \{c^1, \ldots, c^m\}$ — $n \times m$-матрица.

2. Использование условий положительной управляемости линейных систем. Выпуклая оболочка множества

$$\{b(u)\colon u \in U\}$$

по определению имеет следующее представление:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i b(u_i), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \quad u_i \in U.$$

Поэтому исследование управляемости системы с помощью управлений со значениями в заданном множестве U эквивалентно исследованию управляемости класса систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^{n+1} c^i v_i,$$

где $c^i(t) = b(u_i(t))$, $u_i(t)$ — измеримые функции со значениями в U, $v_i = v_i(t)$ — измеримые управления, удовлетворяющие условиям $v_i(t) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} v_i(t) = 1$. Выразим одно из v_i (для определенности v_{n+1}) через остальные. Тогда

$v_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} v_i$ и исходная система принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^{n} d^i(t)\, v_i + c^{n+1}(t), \tag{41}$$

где $d^i(t) = c^i(t) - c^{n+1}(t)$ и управления v_i, $i = 1, \ldots, n$ стеснены только условиями $0 \leqslant v_i \leqslant 1$. Выбирая различные постоянные векторы u_i из U, получим постоянные векторы d^i, c^{n+1}. Применяя теперь условия положительной управляемости к системе (41), получим достаточные условия управляемости для системы (39).

Хотя второй подход к исследованию управляемости систем (39) представляется менее общим, его ценность состоит в том, что условия управляемости систем (39) с *заданным* множеством U сводятся к проверке условий управляемости для простых систем (41) с простыми ограничениями на управления.

3. Нестационарные системы. Динамические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x + b(u, t), \tag{42}$$

где $A(t)$, $b(u, t)$ — непрерывные достаточно гладкие по t функции, изучаются с точки зрения управляемости вполне аналогично предыдущим случаям. Основной факт об эквивалентности системы (42) системе

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + q(t), \quad q(t) \in \operatorname{conv}\{b(u, t)\colon\ u \in U\}$$

имеет место и здесь. Понятно, что различия в формулировке результатов будут связаны с зависимостью от t функций $A(t)$, $b(u, t)$. Но подобные вопросы уже обсуждены в предыдущем параграфе, и поэтому необходимые в данном случае выкладки представляются элементарными и в силу этого опущены.

Для приложений большой интерес представляют критерии упрявляемости, не использующие производных от $A(t)$, $b(u,t)$. К сожалению, результатов исследований по этому вопросу в литературе почти нет.

§ 7. Теорема об управляемости динамических систем по линейному приближению

Дифференциальное уравнение управляемого движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad f(0, 0, t) = 0, \tag{43}$$

линеаризуем по x вдоль $x \equiv 0$:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + b(u, t) + h(x, u, t).$$

Здесь

$$A(t) = \frac{\partial f(0, 0, t)}{\partial x}, \quad b(u, t) = f(0, u, t),$$

$$h(x, u, t) = \left[\frac{\partial f(0, u, t)}{\partial x} - \frac{\partial f(0, 0, t)}{\partial x}\right] x + \mathrm{o}(\|x\|)\,a(u, t).$$

Пусть $b^1(t), \ldots, b^r(t)$ — базис минимального подпространства, содержащего множество

$$\Omega(t) = \operatorname{conv}\{b(u, t) \colon \|u\| \leqslant L\}.$$

Теорема 13. Пусть выполнены условия:

1) $A(t) \in C^{n-2}$, $b^\nu(t) \in C^{n-1}$, $\nu = 1, \ldots, r$; $t \geqslant t_0$;

2) функции $\dfrac{\partial f(0, u, t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f(0, u, t)}{\partial x^2}$ непрерывны по u;

3) $0 \in \operatorname{int} \Omega(t)$, $t \geqslant t_0$, $L > 0$;

4) при некотором $\bar{t}$, $\bar{t} \geqslant t_0$,

$$\text{ранг}\,\{Q_0(\bar{t}), \ldots, Q_{n-1}(\bar{t})\} = n,$$

где $Q_0(t) = \{b^1(t), \ldots, b^r(t)\}$, $Q_{i+1}(t) = A(t)\,Q_i(t) - \dot{Q}_i(t)$, $i = 0, \ldots, n-2$.

Тогда динамическая система (43) вполне управляема.

Доказательство. Управляемые состояния системы (43) в силу (4) можно записать следующим образом:

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,b(u, t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\,h(x, u, t)\,dt.$$

Рассмотрим управления, стесненные условием $\|u\| \leqslant L$. При L достаточно малых траектории $x(t)$, приводимые такими управлениями, удовлетворяют неравенству

(см. § 6.1)

$$\| x(t) \| \leqslant kL,$$

где k не зависит от L. Поэтому по определению функции h можно записать

$$\| h(x, u, t) \| \leqslant m(L) L,$$

где $m(L) \to 0$ при $L \to 0$. С другой стороны, из условий 3), 4) теоремы следует, что множество

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)\, b(u, t)\, dt \colon \| u \| \leqslant L \right\}$$

содержит шар $\| x \| \leqslant \rho L$, где ρ не зависит от L. Этих фактов достаточно, чтобы получить утверждение теоремы с помощью схемы, изложенной в монографии [18d, стр. 96].

Примечание. Условие 3) теоремы можно ослабить так же, как это сделано в примечании к теореме 12.

§ 8. Методы функционального анализа в теории управляемости

1. Применение теоремы о минимаксе. Рассмотрим динамическую систему, у которой изменение во времени совокупности интересующих нас величин — вектора $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — связано с управляющим воздействием $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ соотношением

$$x(t) = s(t, x_0) + \int_{t_0}^{t} S(t, \tau, u(\tau))\, d\tau, \quad t \in T = T[t_0, t_1]. \tag{44}$$

Здесь $S(t, \tau, u)$, $s(t, x)$ — непрерывные матричные функции. Функции управления $u(t)$, $t \in T$, будем считать измеримыми и принимающими значения из компактного множества $U(L)$, зависящего от параметра L, $L \geqslant 0$. Найдем сначала условия, при которых для каждого начального состояния $x(t_0) = x_0$ среди введенного класса управляющих функций найдется такая, что траектория $x(t)$ системы (44) удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$. Иначе говоря, будем исследовать свойство управляемости в смысле определений § 1, но с дополнительным условием на функции $u(t)$.

Для n-вектора $x(t_1)$ расстояние точки $x(t_1)$ до начала координат можно записать (по свойству нормы) в виде

$$\| x(t_1) \| = \max_{\| g \| \leqslant 1} g' x(t_1). \tag{45}$$

Множество R векторов $x(t_1)$, соответствующих всевозможным допустимым управлениям $u(t)$, $u(t) \in U(L)$, $t \in T$, называется *областью достижимости системы* (44). При сделанных предположениях множество R является выпуклым и замкнутым. Минимальное расстояние δ от начала координат до R в силу (45) равно

$$\delta(L) = \min_{x \in R} \max_{\| g \| \leqslant 1} g' x.$$

Пользуясь теоремой о минимаксе (§ 6.9), поменяем местами операции min и max:

$$\delta(L) = \max_{\| g \| \leqslant 1} \min_{x \in R} g' x. \tag{46}$$

Точки x множества R порождаются управлениями $u(t)$, $t \in T$, и имеют (по определению) вид

$$x = x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, \tau, u(\tau))\, d\tau + s(t_1, x_0).$$

Поэтому (46) эквивалентно выражению

$$\delta(L) = \max_{\| g \| \leqslant 1} \left[g' s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u(\tau) \in U(L)} g' S(t_1, \tau, u(\tau))\, d\tau \right].$$

Введем обозначение

$$\mu(L, g, t, \tau) = \min_{u \in U(L)} g' S(t, \tau, u).$$

Тогда

$$\delta(L) = \max_{\| g \| \leqslant 1} \left[g' s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(L, g, t_1, \tau)\, d\tau \right].$$

Таким образом, для того чтобы состояние x_0 было управляемым, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых T, L, $t_1 - t_0 > 0$, $L > 0$, выполнялось условие

$$\max_{\| g \| \leqslant 1} \left[g' s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(L, g, t_1, \tau)\, d\tau \right] = 0. \tag{47}$$

В частном случае $S(t, \tau, u) = S(t, \tau)\, u$, $U = \{u\colon |u_\nu| \leqslant L\}$ условие (47) принимает вид

$$\max_{\|g\| \leqslant 1} \left[g's(t_1, x_0) - L \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{r} |[g'S(t_1, \tau)]_\nu|\, d\tau \right] = 0. \quad (48)$$

Пусть отображение $x \to s(t_1, x)$ неособое. Тогда для того, чтобы это условие выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы

$$[g'S(t_1, \tau)]_\nu \not\equiv 0, \ \tau \in T, \quad \text{при некотором } \nu \quad (49)$$

для всех g, $\| g \| = 1$. Действительно, пусть (48) выполняется, но при некотором g_1 справедливы тождества $[g_1'S(t_1, \tau)]_\nu \equiv 0$, $\tau \in T$, $\nu = 1, \ldots, r$. В силу неособенности преобразования $s(t_1, x)$ найдется x_0 такое, что $g_1's(t_1, x_0) > 0$, т. е. левая часть в (48) положительна. Противоречие и доказывает необходимость условия (49).

Для доказательства достаточности положим

$$\mu = \min_{\|g\|=1} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{r} |[g'S(t_1, \tau)]_\nu|\, d\tau.$$

Из (49) следует, что $\mu > 0$. Пусть

$$\lambda = \max_{\|g\|=1} g's(t_1, x_0).$$

Тогда при $L > \lambda/\mu$ левая часть в (48) становится отрицательной, но поскольку она непрерывна по L и при $L = 0$ положительна, то найдется $\bar{L}$, $0 \leqslant \bar{L} \leqslant \lambda/\mu$ такое, что выполняется (48).

Примечание. Если преобразование $s(t, x_0)$ особое или если рассматриваются точки x_0 не из всего пространства E_n, то, как следует из предыдущего, условие (49) не является необходимым для управляемости системы (44).

2. Проблема управляемости и теорема об отделимости выпуклых множеств. Множество $R_L = \{x\colon x = x(t_1)\}$, где $x(t_1)$ — положение в момент $t = t_1$ движущейся по закону (44) точки $x(t)$, является выпуклым и замкнутым, если управления $u(t)$, $t \in T$, в (44) суть всевозможные измеримые функции со значениями в $U(L)$.

Пусть при некоторых L, T система (44) неуправляема. Тогда начало координат и множество R_L не имеют общих точек и их можно строго разделить (см. § 6.10) некоторой гиперплоскостью. Теперь уже легко доказать, что условие (48) достаточно для управляемости системы (44).

Действительно, условие (48) означает, что

$$g's(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(L, g, t_1, \tau)\, d\tau \leqslant 0 \tag{50}$$

для всех g, $\| g \| = 1$. Пусть условие (50) выполнено, но система (44) не является вполне управляемой. Тогда множество R_L не содержит начала координат, и, значит, существует вектор $\bar{g}$, $\| \bar{g} \| = 1$, такой, что

$$\bar{g}'s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \bar{g}'S(t_1, \tau, u(\tau))\, d\tau > 0.$$

Это неравенство должно выполняться для всех допустимых управлений. Поэтому

$$\bar{g}'s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U(L)} \bar{g}'S(t_1, \tau, u(\tau))\, d\tau =$$

$$= \bar{g}'s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(L, \bar{g}, t_1, \tau)\, d\tau > 0,$$

что противоречит (50). Необходимость условия (50) очевидна: из того, что $x(t_1) = 0$ в (44), следует:

$$-g's(t_1, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, \tau, u(\tau))\, d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \mu(L, g, t_1, \tau)\, d\tau$$

для любого g, $\| g \| = 1$.

3. Проблема моментов в теории управляелости. Условие $x(t_1) = 0$ в силу (44) эквивалентно системе равенств

$$-[s(t_1, x_0)]_i = \int_{t_0}^{t_1} [S(t_1, \tau, u(\tau))]_i\, d\tau, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{51}$$

где символ $[\ ]_i$ означает i-ю координату вектора $[\ ]$. Если система (44) линейна по u, т. е.

$$S(t, \tau, u) = S(t, \tau)\, u,$$

то (51) можно трактовать как *проблему моментов*. Для простоты формулировки ограничимся одномерным управлением. Числа $[s(t_1, x_0)]_i$ суть «моменты» функции $u(t)$, $t \in T$, на системе функций $[S(t_1, \tau)]_i$. Необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы моментов состоят (см. § 6.11) в линейной независимости функций $[S(t_1, \tau)]_i$, $i = 1, \ldots, n$, т. е.

$$g'S(t_1, \tau) \not\equiv 0, \quad \tau \in T,$$

для любого g, $\| g \| = 1$, что совпадает с (49).

§ 9. Положительная управляемость динамических систем

Общую схему, изложенную в § 8, используем для исследования положительной управляемости системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu.$$

1. Системы с одним входом. Начнем с простейшего случая одного входа ($r = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(t_0) = x_0. \tag{52}$$

Решения этого линейного неоднородного уравнения выражаются через фундаментальную матрицу решений $F(t)$ соответствующего однородного уравнения следующим образом [102]:

$$x(t) = F(t)\, F^{-1}(t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t)\, F^{-1}(\tau)\, bu(\tau)\, d\tau. \tag{53}$$

Здесь матрица $F(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(t_0) = E.$$

Формулу (53) можно проверить подстановкой (53) в (52) или доказать по схеме § 2 ($\varphi(x) = x$, $\psi = F^{-1}$). Полагая

$s(t_1, x_0) = F(t_1)F^{-1}(t_0)x_0$, $S(t_1, \tau, u) = F(t_1)F^{-1}(\tau)bu$, приходим к системе (44). В качестве множества $U(L)$ выберем множество $U(L) = \{u\colon 0 \leqslant u \leqslant L\}$. При этих условиях имеем

$$\mu(L, g, t_1, \tau) = \min_{u \in U(L)} g'S(t_1, \tau, u) = \\ = L[g'F(t_1)F^{-1}(\tau)b]_-,$$

где символом $[a(t)]_-$ обозначена отрицательная часть функции $a(t)$:

$$[a(t)]_- = \begin{cases} a(t), & \text{если} \quad a(t) < 0, \\ 0, & \text{если} \quad a(t) \geqslant 0. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения, использованные для доказательства условия (49) управляемости, нетрудно убедиться, что необходимое и достаточное условие положительной управляемости системы (52) заключается в требовании

$$[g'F(t_1)F^{-1}(\tau)b]_- \not\equiv 0, \quad \tau \in T, \tag{54}$$

для всех g, $\|g\| = 1$. Это условие заведомо не выполняется, если разность $t_1 - t_0$ мала. Преобразуем (53) к более удобной форме. Дифференцируя тождество $F(\tau)F^{-1}(\tau) = E$, получаем

$$\frac{dF^{-1}}{d\tau} = -F^{-1}A, \ \ldots, \ \frac{d^nF^{-1}}{d\tau} = (-1)^n F^{-1}A^n \tag{55}$$

при следующих условиях в точке t_0:

$$F^{-1}(t_0) = E, \ \ldots, \ \frac{d^nF^{-1}(t_0)}{d\tau} = (-1)^n A^n. \tag{56}$$

Поскольку каждая квадратная матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \ldots + \gamma_n E = 0,$$

то, умножая это тождество слева на $(-1)^n g'F(t_1)F^{-1}(\tau)$, справа на b и учитывая (55), получаем дифференциальное уравнение для функции

$$\psi(t) = g'F(t_1)F^{-1}(t)b \tag{57}$$

в следующем виде:

$$\psi^{(n)}(t) - \gamma_1\psi^{(n-1)}(t) + \ldots + (-1)^{n-1}\gamma_{n-1}\dot{\psi}(t) + \\ + (-1)^n\gamma_n\psi(t) = 0. \tag{58}$$

Начальные условия следуют из (56), (57):

$$\psi(t_1)=g'b,\ \dot{\psi}(t_1)=-g'Ab,\ \ldots,\ \psi^{(n-1)}(t_1)\doteq(-1)^{n-1}g'A^{n-1}b.$$

Возвращаясь к условию (54), заключаем, что для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы

1) векторы b, Ab, ..., $A^{n-1}b$ были линейно независимы;

2) характеристическое уравнение для (58) не имело корней с нулевыми мнимыми частями;

3) число $\tau=t_1-t_0$ было достаточно большим.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 14. Обыкновенная динамическая система с одним входом (52) не может быть положительно вполне управляемой.

Динамические системы нечетного порядка ($n=2k+1$) с одним входом не являются положительно управляемыми.

В положительно управляемой системе (52) существует такое число τ_0, что для каждого $L>0$ найдутся состояния x_0, которые нельзя привести в начало координат за время, меньшее τ_0.

Для положительной управляемости системы (52) необходимо и достаточно, чтобы она была управляема и все собственные числа матрицы A имели ненулевые мнимые части.

Примечание. Число τ_0 выражается через минимальную мнимую часть $\omega_{\min}$ собственных чисел $\lambda_i+\sqrt{-1}\,\omega_i$: $\tau_0=\pi/\omega_{\min}$.

2. Системы с несколькими входами. Изучаемую систему запишем в виде

$$\frac{dx}{dt}=Ax+\sum_{\nu=1}^{r}b^{\nu}u_{\nu}. \tag{59}$$

Введя обозначения

$$s(t,\ x)=F(t)F^{-1}(t_0)x,\quad S(t,\ \tau,\ u)\doteq\sum_{\nu=1}^{r}F(t)F^{-1}(\tau)b^{\nu}u_{\nu},$$

от системы (59) через (53) перейдем к (44). Пусть множество $U(L)$ имеет вид

$$U(L)=\{u_1,\ \ldots,\ u_r\colon\ 0\leqslant u_{\nu}\leqslant L,\ \nu=1,\ \ldots,\ r\}.$$

Тогда

$$\mu(L,\ g,\ t_1,\ \tau) = L \sum_{\nu=1}^{r} [g'F(t_1)F^{-1}(\tau)\,b^{\nu}]_{-}.$$

При каждом ν, $\nu = 1, \ldots, r$, по аналогии со случаем одного управления, получаются дифференциальные уравнения

$$\psi_{\nu}^{n} - \gamma_1\psi_{\nu}^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1}\gamma_{n-1}\dot{\psi}_{\nu} + (-1)^{n}\gamma_n\psi_{\nu} = 0$$

для функций $\psi_{\nu}(t) = g'F(t_1)F^{-1}(t)\,b^{\nu}$. Начальные условия:

$$\psi_{\nu}(t_1) = g'b^{\nu},\quad \dot{\psi}_{\nu}(t_1) = -g'Ab^{\nu},\ \ldots,\ \psi^{(n-1)}(t_1) = \\ = (-1)^{n-1}g'A^{n-1}b^{\nu};\ \nu = 1, \ldots, r.$$

Необходимое и достаточное условие положительной управляемости в целом для системы (59) принимает вид

$$\sum_{\nu=1}^{r} [g'F(t_1)F^{-1}(t)\,b^{\nu}]_{-} \not\equiv 0,\quad t \in T,\quad \text{для всех } g \in E_n.$$

Отсюда следует, что если выполнены условия:

1) ранг $\{b^1, \ldots, b^r,\ Ab^1, \ldots, Ab^r, \ldots, A^{n-1}b^1, \ldots \ldots, A^{n-1}b^r\} = n$;

2) для каждого вектора $\bar{b}$ из линейной оболочки векторов $b^1, \ldots, b^r$ возможно разложение $\bar{b} = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i b^i$, $\alpha_i > 0$ (векторы $b^1, \ldots, b^r$ образуют положительный базис в собственном подпространстве),

то система положительно вполне управляема.

Верно и обратное: если система положительно вполне управляема, то векторы $b^1, \ldots, b^r$ в собственном подпространстве образуют неотрицательный базис (условие 1) очевидно). Из этого замечания следует, что любая управляемая система может быть сделана положительно вполне управляемой добавлением одного управления. Новое управление u_{r+1} следует добавить с вектором b^{r+1}, равным $b^{r+1} = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i b^i$, $\alpha_i > 0$. Эти результаты сведем в теорему.

Теорема 15. Для того чтобы система (59) с r входами была положительно вполне управляема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг } \{b^1, Ab^1, \ldots, A^{n-1}b^1, \ldots, b^r, Ab^r, \ldots, A^{n-1}b^r\} = n$$

и векторы $b^1, \ldots, b^r$ составляли положительный базис в подпространстве, натянутом на них.

Каждая управляемая система может быть сделана положительно вполне управляемой добавлением одного управления u_{r+1} с вектором $b^{r+1} = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i b^i$, $\alpha_i > 0$. Минимальное число входов в положительно вполне управляемой системе (59) на единицу больше числа нетривиальных инвариантных многочленов матрицы A.

§ 10. Линейные системы управления с запаздыванием. Определяющее уравнение

Пусть движение объекта управления описывается уравнением [15]

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \tag{60}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-вектор, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — r-вектор, h — число, характеризующее запаздывание, A, A_1, B — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Для того чтобы движение системы было определенным для $t \geqslant 0$, необходимо задать начальные условия

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \Phi(t),\ -h \leqslant t < 0,\ x(0) = x_0\}, \tag{61}$$

где $\Phi(t)$ — непрерывная функция, x_0—n-вектор. Состояние объекта в произвольной момент характеризуется уже не набором конечного числа величин, а целой функцией

$$\{x(t + \vartheta),\ -h \leqslant \vartheta < 0\},$$

определенной на отрезке $[t - \vartheta, t)$. Эта особенность систем с запаздыванием существенно усложняет решение задачи управления.

Можно выделить два вида управляемости. Если для каждого состояния (61) можно указать момент $t_1 > 0$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, при которых $x(t_1) = 0$, то будем говорить, что состояние *относительно управляемо*. Во многих случаях такого свойства системы уже недостаточно, ибо «выключение» управления в момент $t = t_1$ $(u(t) \equiv 0,\ t \geqslant t_1)$ может вывести систему из состояния покоя $x(t) \equiv 0$ в силу действия запаздывания. Поэтому вводится понятие *вполне управляемого состояния* (61), когда траектория допустимым управлением приводится в начало координат и удерживается там.

В последующих рассуждениях большую роль играет соотношение

$$Q_k(s) = AQ_{k-1}(s) + A_1 Q_{k-1}(s-h),\ s \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$
$$Q_0(0) = B, \quad Q_0(s) \equiv 0, \quad s \neq 0, \tag{62}$$

которое очевидным образом составляется по правой части уравнения (60). Назовем (62) *определяющим уравнением* системы (60). Ясно, что решение уравнения (62) — последовательность матриц, определенных при $k = 1, 2, \ldots$; $s = 0, h, 2h, \ldots$, причем для фиксированного k: $Q_k(s) \equiv \equiv 0$ при $s = (k+1)h, (k+2)h, \ldots$ Для каждого α через π_α обозначим совокупность

$$\pi_\alpha = \{Q_k(s),\ k = 0, 1, \ldots, n-1;\ s \in [0, \alpha h]\}$$

— решение определяющего уравнения. Определяющее уравнение называется *α-невырожденным*, если ранг $\pi_\alpha = n$. Если это условие выполняется хотя бы при одном α, $\alpha < \infty$, то определяющее уравнение будем называть *невырожденным*.

§ 11. Относительная управляемость линейных стационарных систем с постоянным запаздыванием

Определение 10. Начальное состояние $x_0(\cdot)$ системы (60) называется *относительно T-управляемым*, если найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T = [0, t_1]$, такое, что траектория $x(t)$, порожденная начальным состоянием и управлением $u(t)$, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$. Система (60), все начальные состояния которой относительно T-управляемы, называется *относительно T-управляемой*.

Определение 11. Если начальное состояние $x_0(\cdot)$ (система (60)) относительно T-управляемо (T-управляема) хотя при одном t_1, то это состояние (эта система) называется *относительно управляемым* (*управляемой*).

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что решение уравнения (60) выражается формулой

$$x(t)=s(t,\ x_0)+\int_0^t F(t,\ \tau)\,Bu(\tau)\,d\tau,$$

где

$$s(t,\ x_0)=F(t,\ 0)\,x_0+\int_0^h F(t,\ \tau)\,A_1\Phi(\tau-h)\,d\tau,$$

а $F(t,\ \tau)$ — $n\times n$-матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial F(t,\ \tau)}{\partial\tau}=-F(t,\ \tau)\,A-F(t,\ \tau+h)\,A_1,\quad \tau\leqslant t,$$

$$F(t,\ t-0)=E,\quad F(t,\ \tau)=0,\quad \tau\geqslant t+0.$$

Полагая $S(t,\ \tau,\ u)=F(t,\ \tau)\,Bu$, приходим к (44) при $t_0=0$. Значит, в силу результатов § 8 необходимым и достаточным условием относительной T-управляемости системы (60) является требование:

$$[g'F(t_1,\ t)\,B]_\nu\not\equiv 0,\quad t\in T,\ \|g\|=1,$$

при некотором ν, $\nu=1,\ \ldots,\ r$. Для упрощения этого условия исследуем функцию

$$\psi(g,\ \tau)=g'F(t_1,\ \tau)\,b=y'(\tau)\,b. \tag{63}$$

Рассмотрим систему операторных уравнений

$$\left.\begin{aligned}(pE+A'+A_1'e^{ph})\,\tilde{y}(\tau)&=v(\tau),\\ \tilde{\psi}(\tau)-\tilde{y}'(\tau)\,b&=0.\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Здесь p — оператор дифференцирования, e^{ph} — оператор сдвига, т. е.

$$p^ie^{kph}z(\tau)=\frac{d^iz(\tau+kh)}{d\tau^i},$$

$v(\tau)$ — произвольная n-мерная вектор-функция. Разрешив линейную систему (64) относительно $\tilde{\psi}(\tau)$, получим

$$\tilde{\psi}(\tau)=\frac{\begin{vmatrix}v(\tau) & pE+A'+A_1'e^{ph}\\ 0 & -b'\end{vmatrix}}{\det(pE+A'+A_1'e^{ph})}. \tag{65}$$

Функции $y(\tau)$ и $\psi(g,\ \tau)$ удовлетворяют системе (64) с $v(\tau)\equiv 0$. Полагая в (65) $v(\tau)\equiv 0$, получим уравнение для $\psi(g, \tau)$:

$$\det(pE+A+A_1e^{ph})\,\psi(g, \tau)=0,$$

или в дифференциальной форме:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} r_{ij}\frac{d^{n-i}\psi(g, \tau+jh)}{d\tau^{n-i}}=0, \quad \tau<t_1. \tag{66}$$

Здесь

$$r_{00}=1, \quad r_{10}=\operatorname{Sp}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad r_{11}=\operatorname{Sp}A_1=\sum_{i=1}^{n} a_{1,\,ii},$$

$$r_{n0}=\det A, \quad r_{nn}=\det A_1.$$

Остальные r_{ij} также выражаются через элементы матриц A и A_1 (рекуррентные формулы для них см., например, в [39], стр. 77).

Начальные условия для (66) следуют из (62), (63):

$$\psi^{(i)}(g, \tau)=\begin{cases}(-1)^i g' q_i(0), & \tau=t_1-0,\\ 0, & \tau=t_1+0,\end{cases} \tag{67}$$

$$\psi^{(i)}(g, \tau)\equiv 0, \quad \tau>t_1, \quad i=0, 1, \ldots, n-1, \tag{68}$$

где $q_i(s)$ вычислены в силу уравнения (62) ($Q_0(0)=q_0(0)=b$).

Из (63) получаем

$$\psi^{(k)}(g, \tau)=(-1)^k g' \sum_{i=0}^{k} F(t_1, \tau+ih)\,q_k(ih), \quad k=0, 1, \ldots \tag{69}$$

Действительно, при $k=0$ равенство (69) совпадает с (63). Предположим, что (69) имеет место для $k=0, 1, \ldots, p-1$, и покажем, что оно верно и для $k=p$. Так как

$$\psi^{(p)}(g, \tau)=\frac{d\psi^{(p-1)}(g, \tau)}{d\tau}=(-1)^{p-1} g' \sum_{i=0}^{p-1}\frac{dF(t_1, \tau+ih)}{d\tau}q_{p-1}(ih)=$$

$$=(-1)^p g'\Big[\sum_{i=0}^{p-1} F(t_1, \tau+ih)\,Aq_{p-1}(ih)+$$

$$+\sum_{i=1}^{p} F(t_1, \tau+ih)\,A_1q_{p-1}((i-1)h)\Big],$$

то, добавляя справа равные нулю члены $g'F(t_1, \tau+ph)\times\times Aq_{p-1}(ph)$ и $g'F(t_1, \tau)A_1q_{p-1}(-h)$, получаем

$$\psi^{(p)}(g, \tau)=(-1)^p g'\sum_{i=0}^{p} F(t_1, \tau+ih)\,[Aq_{p-1}(ih)+$$
$$+A_1q_{p-1}((i-1)h)]=(-1)^p g'\sum_{i=0}^{p} F(t_1, \tau+ih)\,q_p(ih).$$

В силу произвольности числа p равенство (69) справедливо при любых k, $k=0, 1, \ldots$ Из (69) с учетом (62) имеем

$$\left.\begin{aligned}&\psi^{(i)}(g, t_1-kh-0)=\psi^{(i)}(g, t_1-kh+0),\\ &\qquad i=0, 1, \ldots, k-1,\\ &\psi^{(i)}(g, t_1-kh-0)=\psi^{(i)}(g, t_1-kh+0)+\\ &\qquad\qquad +(-1)^i g'q_i(kh),\\ &\quad i=k, k+1, \ldots;\quad k=1, 2, \ldots\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Теорема 16. Система (60) относительно T-управляема тогда и только тогда, когда определяющее уравнение этой системы α-невырождено, $\alpha=[T/h]$.

Доказательство.

1. Случай одного входа, $B=b$. Необходимость. Пусть система (60) относительно T-управляема. В силу (49), (63) это значит

$$\psi(g, \tau)\not\equiv 0 \quad \text{для всех} \quad \tau\in T,\ \|g\|=1.$$

Покажем, что определяющее уравнение (62) α-невырождено. Допустим противное: ранг π_α меньше n. Тогда существует вектор g_0, $\|g_0\|=1$, для которого

$$g_0'q_k(s)=0;\quad k=0, 1, \ldots, n-1;\quad s\in[0, \alpha h].\tag{71}$$

Из (66), (67), (68) и (71) имеем

$$\psi(g_0, \tau)\equiv 0, \quad \tau\in[t_1-h, t_1].$$

Пусть

$$\psi(g_0, \tau)\equiv 0, \quad \tau\in[t_1-kh, t_1],\tag{72}$$

где k — произвольное число отрезка $[1, \alpha]$. Покажем, что

$$\psi(g_0, \tau)\equiv 0,\ \tau\in[t_1-(k+1)h,\ t_1-kh].\tag{73}$$

Поскольку на $[t_1-(k+1)h,\ t_1-kh]$ функция $\psi(g_0,\ \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению (66) с нулевой начальной функцией (72), то тождество (73) справедливо, если

$$\psi^{(i)}(g_0,\ t_1-kh-0)=0,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Но это — следствие равенств (70), (71), (72). Таким образом,

$$\psi(g_0,\ \tau)\equiv 0,\quad \tau\in[t_1-(\alpha+1)h,\ t_1],$$

что противоречит (49). Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что (49) не выполняется: существует вектор g_0, $\|g_0\|=1$, такой, что

$$\psi(g_0,\ \tau)\equiv 0,\quad \tau\in T. \tag{74}$$

Тогда

$$\psi^{(i)}(g_0,\ \tau)\equiv 0,\quad \tau\in T,\quad i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{75}$$

т. е.

$$\psi^{(i)}(g_0,\tau+0)=\psi^{(i)}(g_0,\ \tau-0)=0,\quad i=0,1,\ \ldots, \tag{76}$$

в каждой внутренней точке отрезка T. Из (67), (74) и (75):

$$g_0'q_i(0)=0,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{77}$$

Из (70) и (76) следует:

$$g_0'q_i(kh)=0,\quad i=k,\ \ldots,\ n-1;\quad k=1,\ \ldots,\ \alpha.$$

Но по свойству решений $q_i(kh)$ уравнения (62)

$$g_0'q_i(kh)=0,\quad i=0,\ \ldots,\ k-1;\quad k=1,\ \ldots,\ \alpha.$$

Объединяя последние соотношения с (77), приходим к равенствам

$$g_0'q_i(kh)=0,\quad i=0,\ \ldots,\ n-1;\quad k=0,\ \ldots,\ \alpha. \tag{78}$$

По условию равенства (78) могут иметь место лишь при нулевом векторе g_0. Это противоречит сделанному ранее предположению относительно g_0. Утверждение для случая 1 доказано.

2. Случай нескольких входов. Доказывается аналогично.

Примечание. В случае $t_1\leqslant h$ число $\alpha=0$ и условие относительной управляемости системы с запаздыванием (60) совпадает с условием вполне управляемости систем без запаздывания:

$$\text{ранг}\ \{B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B\}=n.$$

§ 12. Линейные системы с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. Определяющее уравнение

Пусть дано уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1x(t-h) + B\frac{dx(t-h)}{dt} + Cu(t), \qquad (79)$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$, h — постоянное число (запаздывание), $h > 0$, A, A_1, B, C — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Зададим начальные условия, положив

$$x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau),\ \tau \in [-h, 0);\ x(0) = x_0\}, \qquad (80)$$

где $\Phi(\tau)$ — непрерывно дифференцируемая функция, x_0 — n-вектор. Как и при исследовании уравнения (60), здесь можно выделить два вида управляемости: относительную управляемость и полную управляемость. В этом параграфе изучается относительная управляемость стационарной системы (79) в смысле определений 10, 11 (см. § 11).

Рассмотрим систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1x(t-h) + B\frac{dx(t-h)}{dt}. \qquad (81)$$

Введем $n \times n$-матричные функции $Q_k(s)$, зависящие от двух аргументов k, s, $k = 1, 2, \ldots$; $s = 0, h, 2h, \ldots$, и установим следующее соответствие между функциями $x(t)$ и $Q_k(s)$:

$$x(t) \to Q_{k-1}(s), \quad x(t-h) \to Q_{k-1}(s-h),$$
$$\dot{x}(t) \to Q_k(s), \quad \dot{x}(t-h) \to Q_k(s-h).$$

Тогда для уравнения (81) имеем

$$Q_k(s) = AQ_{k-1}(s) + A_1Q_{k-1}(s-h) + BQ_k(s-h) \qquad (82)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots; \quad s = 0, h, 2h, \ldots).$$

Потребуем для однозначной разрешимости (82): $Q_0(0) = E$, $Q_0(s) = 0$, если $s < 0$. Назовем (82) определяющим уравнением для (79). Для каждого α положим

$$\pi_\alpha = \{Q_k(s)\,C,\ k = 0, 1, \ldots, n-1;\ s \in [0, \alpha h]\}$$

и введем понятия (см. § 10, стр. 71) α-невырожденного и невырожденного определяющего уравнения.

Прежде чем переходить к изучению относительной управляемости системы (79), получим формулу для решения $x(t)$ (см. [15]). Пусть $F(t, \tau)$ — единственная функция, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau)A - F(t, \tau+h)A_1 + \frac{\partial F(t, \tau+h)}{\partial \tau}B, \tag{83}$$

$$0 < \tau < t, \quad \tau \neq t - nh, \quad h = 0, 1, \ldots,$$

$$F(t, t-0) = E, \quad F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geqslant t+0, \tag{84}$$

и

$$F(t, \tau) - F(t, \tau+h)B \tag{85}$$

непрерывна по τ, $\tau \in [0, t]$. Умножим обе части (79) на $F(t, \tau)$ и проинтегрируем от 0 до t:

$$\int_0^t F(t, \tau)[\dot{x}(\tau) - B\dot{x}(\tau - h)]\,d\tau - \int_0^t F(t, \tau)Ax(\tau)\,d\tau - \\ - \int_0^t F(t, \tau)A_1x(\tau-h)\,d\tau = \int_0^t F(t, \tau)Cu(\tau)\,d\tau.$$

Из (84), (85) имеем

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}[F(t, \tau) - F(t, \tau+h)B]\,x(\tau)\,d\tau = x(t) - F(t, 0)x_0 + \\ + F(t, h)Bx_0 - \int_{-h}^{0} F(t, -\tau)B\dot{\Phi}(-\tau-h)\,d\tau - \\ - \int_0^t F(t, \tau)[\dot{x}(\tau) - B\dot{x}(\tau-h)]\,d\tau.$$

Поскольку

$$\int_0^t F(t, \tau)A_1x(\tau-h)\,d\tau = \int_0^t F(t, \tau+h)A_1x(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{-h}^{0} F(t, \tau+h)A_1\Phi(\tau)\,d\tau,$$

то, учитывая, что $F(t, \tau)$ — решение (83), имеем

$$x(t)=\{F(t, 0)-F(t, h)B\}x_0+\int_{-h}^{0}\{F(t, \tau+h)A_1\Phi(\tau)+$$
$$+F(t, -\tau)B\dot{\Phi}(-\tau-h)\}\,d\tau+\int_{0}^{t}F(t, \tau)Cu(\tau)\,d\tau. \quad (86)$$

§ 13. Относительная управляемость линейных стационарных систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

Введем обозначения:

$$s(t, x_0)=\{F(t, 0)-F(t, h)B\}x_0+$$
$$+\int_{-h}^{0}\{F(t, \tau+h)A_1\Phi(\tau)+$$
$$+F(t, -\tau)B\dot{\Phi}(-\tau-h)\}\,d\tau,$$
$$S(t, \tau, u)=F(t, \tau)Cu(\tau).$$

Мы получили соотношение (44). Поэтому в силу результатов § 8 необходимым и достаточным условием относительной T-управляемости системы (79) является линейная независимость функций

$$[F(t_1, \tau)c^\nu]_i,\ i=1, \ldots, n;\ t\in T;\ T=[0, t_1],$$

при некотором ν, $\nu=1, \ldots, r$ (c^ν — ν-й (—) столбец C).

Ограничимся для простоты случаем одного входа, $C=c$.

Введем функции $\psi(g, \tau)=g'F(t_1, \tau)c$, $y(\tau)=g'F(t_1, \tau)$ и рассмотрим систему операторных уравнений

$$(pE+A+A_1e^{ph}+Bpe^{ph})\tilde{y}(\tau)=v(\tau),\quad \tilde{\psi}(\tau)-\tilde{y}'(\tau)c=0.$$

Найдем $\tilde{\psi}(\tau)$ и положим $v(\tau)\equiv 0$. Тогда получим уравнение для $\psi(g, \tau)$:

$$\det(pE+A+A_1e^{ph}+Bpe^{ph})\psi(g, \tau)=0,\quad \tau<t_1. \quad (87)$$

Дифференциальная форма записи этого уравнения совпадает с (66); при этом начальные условия таковы:

$$\psi^{(i)}(g,\ \tau)=\begin{cases}(-1)^i g'Q_i(0), & \tau=t_1-0,\\ 0, & \tau=t_1+0,\end{cases} \tag{88}$$

$$\psi^{(i)}(g,\ \tau)\equiv 0,\ \tau>t_1,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Функции $\psi^{(i)}(g,\ \tau)$ могут терпеть разрыв в точках $\tau=t_1-kh$. Найдем в этих точках скачки $\psi^{(i)}(g,\ \tau)$. Для этого достаточно найти скачки функций $\frac{\partial^i F(t_1,\ \tau)}{\partial\tau^i}$. Имеем

$$\frac{\partial^i F(t_1,\ \tau)}{\partial\tau^i}=(-1)^i\sum_{j=0}^{k-1}F(t_1,\ \tau+jh)\,[AQ_{i-1}(jh)+ \\ +A_1Q_{i-1}([j-1]\,h)], \tag{89}$$

$$\tau\in[t_1-kh,\ t_1-(k-1)\,h].$$

Докажем эту формулу по индукции. В силу (83) формула (89) справедлива для $k=1$ и всех i. Из (83) следует, что (89) имеет место для $i=1$ на отрезке $[t_1-kh,\ t_1-(k-1)\,h]$. Пусть формула (89) справедлива для $k=l$ и любого i и для $i=p$ и любого k. Докажем справедливость формулы (89) для $i=p+1$ и $k=l+1$. На отрезке $[t_1-(l+1)\,h,\ t_1-lh]$ известна p-я производная от $F(t_1,\ \tau)$, значит,

$$\frac{\partial^{p+1}F(t_1,\ \tau)}{\partial\tau^{p+1}}=(-1)^p\sum_{j=0}^{l}\frac{\partial F(t_1,\ \tau+jh)}{\partial\tau}\,[AQ_{p-1}(jh)+ \\ +A_1Q_{p-1}([j-1]\,h)]=(-1)^{p+1}\sum_{j=0}^{l}[F(t_1,\ \tau+jh)\,A+ \\ +F(t_1,\ \tau+(j+1)\,h)\,A_1- \\ -\frac{\partial F(t_1,\ \tau+(j+1)\,h)}{\partial\tau}B]\,[AQ_{p-1}(jh)+A_1Q_{p-1}([j-1]\,h)= \\ =(-1)^{p+1}\sum_{j=0}^{l}F(t_1,\ \tau+jh)\,[AQ_p(jh)+A_1Q_p([j-1]\,h)],$$

т. е. в одну сторону формула (89) верна. Теперь докажем, что если формула (89) верна на $[t_1-lh,\ t_1-(l-1)\,h]$, то она верна и на отрезке $[t_1-(l+1)\,h,\ t_1-lh]$.

Из (83) имеем

$$\frac{\partial^{p+1}F(t_1, \tau)}{\partial\tau^{p+1}} = -\frac{\partial^p F(t_1, \tau)}{\partial\tau^p}A - \\ - \frac{\partial^p F(t_1, \tau+h)}{\partial\tau^p} + \frac{\partial^{p+1}F(t_1, \tau+h)}{\partial\tau^{p+1}}B.$$

Значит,

$$\frac{\partial^{p+1}F(t_1, \tau)}{\partial\tau^{p+1}} = (-1)^{p+1}\sum_{j=0}^{l} F(t_1, \tau+jh)[AQ_{p-1}(jh) + \\ + A_1Q_{p-1}([j-1]h)]A + \\ + (-1)^{p+1}\sum_{j=0}^{l-1} F(t_1, \tau+(j+1)h)[AQ_{p-1}(jh) + \\ + A_1Q_{p-1}([j-1]h)]A_1 + \\ + (-1)^{p+1}\sum_{j=0}^{l-1} F(t_1, \tau+(j+1)h)[AQ_p(jh)+A_1Q_p([j-1]h)]B.$$

Воспользуемся (82) и получим

$$\frac{\partial^{p+1}F(t_1, \tau)}{\partial\tau^{p+1}} = (-1)^{p+1}\sum_{j=0}^{l} F(t_1, \tau+jh)\times \\ \times[AQ_p(jh)+A_1Q_p([j-1]h)],$$

т. е. формула (89) верна при любых i и k. Найдем скачки функции $\psi(g, \tau)$ в точках $\tau = t_1 - kh$. В силу непрерывности функции (85) имеем

$$F(t_1, t_1-kh+0) = F(t_1, t_1-kh-0) - B^k,$$

$$\psi^{(i)}(g, \tau) = \\ = (-1)^i g' \sum_{j=0}^{k-1} F(t_1, \tau+jh)[AQ_{i-1}(jh) + A_1Q_{i-1}([j-1]h)],$$

$$\psi^{(i)}(g, t_1-kh+0) = (-1)^i g' \sum_{j=0}^{k-1} F(t_1, t_1+(j-k)h+0)\times \\ \times[AQ_{i-1}(jh)+A_1Q_{i-1}([j-1]h)] = \\ = (-1)^i g' \sum_{j=0}^{k-1} F(t_1, t_1-(k-j)h-0)\times \\ \times[AQ_{i-1}(jh)+A_1Q_{i-1}([j-1]h)] - \\ -(-1)^i g' \sum_{j=0}^{k-1} B^{k-j}[AQ_{i-1}(jh)+A_1Q_{i-1}([j-1]h)].$$

Теперь вычислим $\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh-0)$. Так как

$$\psi^{(i)}(g,\ \tau)=$$
$$=(-1)^i g' \sum_{j=0}^{k} F(t_1,\tau+jh)\times[AQ_{i-1}(jh)+A_1Q_{i-1}([j-1]h)],$$

то

$$\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh-0)=(-1)^i g' \sum_{j=0}^{k-1} F(t_1,\ t_1-(k-j)h-0)\times$$
$$\times[AQ_{i-1}(jh)+A_1Q_{i-1}([j-1]h)]+$$
$$+(-1)^i g'[AQ_{i-1}(kh)+A_1Q_{i-1}([k-1]h)].$$

Имеем

$$\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh+0)+(-1)^i g'[AQ_{i-1}(kh)+$$
$$+A_1Q_{i-1}([k-1]h)]=\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh-0)-$$
$$-(-1)^i g' \sum_{j=0}^{k-1} B^{k-j}[AQ_{i-1}(jh)+A_1Q_{i-1}([j-1]h)],$$

или

$$\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh+0)+(-1)^i g' \sum_{j=0}^{k} B^{k-j}[AQ_{i-1}(jh)+$$
$$+A_1Q_{i-1}([j-1)]h)]=\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh-0).$$

Но

$$Q_i(kh)=AQ_{i-1}(kh)+A_1Q_{i-1}([k-1]h)+$$
$$+B[AQ_{i-1}([k-1]h)+A_1Q_{i-1}([k-2]h)]+\dots$$
$$\dots+B^k[AQ_{i-1}(0)+A_1Q_{i-1}(-h)].$$

Окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(i)}(g,\ t_1-kh-0)=\psi^{(i)}(g,\ t_1-kh+0)+&\\ +(-1)^i g'Q_i(kh),&\\ i=1,\ 2,\ \dots;\quad k=0,\ 1,\ \dots& \end{aligned}\right\}\tag{90}$$

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Теорема 17. Система (79) относительно T-управляема тогда и только тогда, когда определяющее уравнение (82) α-невырождено, $\alpha=[T/h]$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (79) относительно управляема. Это означает, что $\psi(g,\ \tau)\not\equiv 0$ для всех $\tau\in T$ и g, $\|g\|=1$.

Покажем, что определяющее уравнение (82) α-невырождено. Допустим противное. Тогда существует вектор g_0, $\| g_0 \| = 1$, для которого

$$g_0' Q_k (s) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \quad s \in [0, \alpha h]. \tag{91}$$

Из (87), (88), (91) получаем

$$\psi (g_0, \tau) \equiv 0, \quad \tau \in [t_1 - h, t_1]. \tag{92}$$

Пусть

$$\psi (g_0, \tau) \equiv 0, \quad \tau \in [t_1 - kh, t_1], \tag{93}$$

где k — произвольное число. Покажем, что

$$\psi (g_0, \tau) \equiv 0, \quad \tau \in [t_1 - (k+1) h, t_1 - kh]. \tag{94}$$

На $[t_1 - (k+1) h, t_1 - kh]$ функция $\psi (g_0, \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению (87) с нулевой начальной функцией (93); следовательно, тождество (94) справедливо, если $\psi^{(i)} (g_0, t_1 - kh - 0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Но это следствие равенств (90), (91) и (92). Таким образом, $\psi (g_0, \tau) \equiv 0$ при $\tau \in [t_1 - (\alpha + 1) h, t_1]$, что противоречит линейной независимости функций $[F (t_1, \tau) c]_i$.

Достаточность. Допустим противное. Тогда существует вектор g_0, $\| g_0 \| = 1$, такой, что $\psi (g_0, \tau) \equiv 0$, $\tau \in T$. Отсюда

$$\psi^{(i)} (g_0, \tau) \equiv 0, \quad \tau \in T, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{95}$$

$$\psi^{(i)} (g_0, \tau + 0) = \psi^{(i)} (g_0, \tau - 0), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{96}$$

в каждой внутренней точке отрезка $[0, t_1]$. Из (88), (95) имеем $g_0' Q_i (0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Условия (90) и (96) дают

$$g_0' Q_i (kh) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1; \quad k = 1, \ldots, \alpha.$$

Объединяя последние соотношения, приходим к равенствам

$$g_0' Q_i (kh) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1; \quad k = 0, 1, \ldots, \alpha,$$

что невозможно. Теорема доказана.

В случае векторного управления $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ матрицу C записываем через ее столбцы $c^1, \ldots, c^r$. Тогда уравнение (87) распадается на r уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{i}}' r_{ij} \frac{d^{n-i} \psi_s (g, \tau + jh)}{d\tau^{n-i}} = 0, \quad \tau < t_1$$

(ср. с (66)). Здесь $\psi_s(g, \tau) = g'F(t_1, \tau)c^s$. Каждое из условий (88) даст r равенств

$$\psi_s^{(i)}(g, \tau) = \begin{cases} (-1)^i g' Q_i^s(0), & \tau = t_1 - 0, \\ 0, & \tau = t_1 + 0, \end{cases}$$

$$\psi_s^i(g, \tau) \equiv 0, \ \tau > t_1, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $Q_i^s(0)$ — s-й столбец матрицы $Q_i(0)$ (см. уравнение (82)).

Условия (90) имеют вид

$$\psi_s^{(i)}(g, t_1 - kh - 0) = \psi_s^{(i)}(g, t_1 - kh + 0) + (-1)^i Q_i^s(kh),$$
$$k = 0, 1, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots; \quad s = 1, \ldots, r.$$

Теперь, используя схему доказательства теоремы 17, нетрудно убедиться, что для относительной T-управляемости системы (79) необходимо и достаточно, чтобы было α-невырождено определяющее уравнение (82), $\alpha = [T/h]$.

§ 14. Линейная стационарная система с несколькими запаздываниями

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - h_i) + Bu(t), \quad t \geqslant 0, \\ h_0 < h_1 < \ldots < h_m; \\ x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau), \tau \in [-h_m, 0), \ x(0) = x_0\}, m \geqslant 2, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

где A_i — $n \times n$-матрицы, h_i — положительные числа, $h_0 = 0$. *Определяющее уравнение для* (97) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} & Q_k(s) = \sum_{i=0}^{m} A_i Q_{k-1}(s - h_i), \quad 0 \leqslant s; \quad k = 1, 2, \ldots, \\ & Q_0(s) = \begin{cases} B, & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Уравнение (98) называется *невырожденным*, если ранг $\pi_{n-1} = n$

$$\pi_{n-1} = \{Q_k(s), \ k = 0, \ldots, n-1; \quad s \in [0, (n-1)h_m]\}.$$

Заметим, что при каждом $k = 1, 2, \ldots$ решение $Q_k(s)$ уравнения (98) равно тождественно нулю всюду, за исключением, может быть, точек

$$s_{j_1, \ldots, j_k} = \sum_{\sigma=1}^{k} h_{j_\sigma}, \; j_p = 0, 1, \ldots, j_{p-1}; \; p \geqslant 1; \; j_0 = m. \tag{99}$$

Теорема 18. Система (97) относительно управляема в том и только в том случае, если определяющее уравнение (98) этой системы невырождено.

Доказательство теоремы проведем для случая $r = 1$. *Необходимость.* Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - h_i) + bu(t),$$

$$x_0(\cdot) = \{x(\tau) = \Phi(\tau), \; -h_m \leqslant \tau < 0; \; x(0) = x_0\}.$$

Решение $x(t)$ этого уравнения можно найти по формуле Коши [15]. Обозначим через $\psi(g, \tau)$ скалярную функцию

$$\psi(g, \tau) = g' F(t_1, \tau) b.$$

Здесь функция $F(t_1, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{dF(t_1, \tau)}{d\tau} = -\sum_{i=0}^{m} F(t_1, \tau + h_i) A_i,$$

$$F(t_1, \tau) = \begin{cases} E, & \tau = t_1 - 0, \\ 0, & \tau \geqslant t_1. \end{cases}$$

Функция $\psi(g, \tau)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\det\left(pE + \sum_{i=0}^{m} A_i e^{ph_i}\right) \psi(g, \tau) = 0,$$

которому соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n \psi(g, \tau)}{d\tau^n} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1=0}^{m} \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_i=0}^{j_{i-1}} r_{j_1 \ldots j_i} \frac{d^{n-i} \psi\left(g, \tau + \sum_{s=1}^{i} h_{j_s}\right)}{d\tau^{n-i}} = 0 \tag{100}$$

с начальными условиями

$$\psi^{(i)}(g,\ \tau)=\begin{cases} g'q_i(0)(-1)^i, & \tau=t_1-0,\\ 0, & \tau=t_1+0,\end{cases} \tag{101}$$

$$\psi^{(i)}(g,\ \tau)\equiv 0,\quad \tau>t_1,\quad i=0,\ \ldots,\ n-1, \tag{102}$$

где коэффициенты $r_{j_1j_2\ldots j_i}$, $j_p=0,\ 1,\ \ldots,\ j_{p-1}$; $p=1,\ \ldots$ $\ldots,\ i$; $i=1,\ \ldots,\ n$; $j_0=m$, явным образом выражаются через элементы матриц A_i, а векторы $q_i(0)$ вычислены в силу уравнения

$$\left.\begin{aligned} &q_k(s)=\sum_{i=0}^{m} A_i q_{k-1}(s-h_i),\quad s\geqslant 0,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\\ &q_0(s)=\begin{cases} b, & s=0,\\ 0, & s\neq 0.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{98a}$$

Пусть исходная система относительно управляема. В силу теоремы 16 существует t_1, $t_1<\infty$, такое, что

$$\psi(g,\ \tau)\not\equiv 0,\quad \tau\in T,$$

для всех g, $\|g\|=1$. Из чисел $s_{j_1\ldots j_k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, определенных соотношением (99), образуем строго возрастающую последовательность $\{s_i,\ i=0,\ 1,\ \ldots\}$, считая, что совпадающие числа входят в нее только один раз. Тогда последовательность $\{t_1-s_i,\ i=0,\ 1,\ \ldots\}$ будет строго убывать. Допустим, что ранг π_{n-1},

$$\pi_{n-1}=\{q_k(s),\ k=0,\ \ldots,\ n-1;\ s\in[0,\ (n-1)h_m]\},$$

меньше n. В этом случае можно построить вектор g_0, $\|g_0\|=1$, так, чтобы

$$g_0'q_k(s)=0,\ s\in[0,\ kh_m],\ k=0,\ \ldots,\ n-1. \tag{103}$$

Тогда при каждом конечном t_1 имеем

$$\psi(g_0,\ \tau)\equiv 0,\quad \tau\in[t_1-s_1,\ t_1],$$

как для решения однородного уравнения (100) с нулевыми начальными условиями (101) и (102). Вообще, если

$$\psi(g_0,\ \tau)\equiv 0,\quad \tau\in[t_1-s_k,\ t_1],$$

где k — произвольное целое число, $k\geqslant 1$, то

$$\psi(g_0,\ \tau)\equiv 0,\tau\in[t_1-s_{k+1},\ t_1-s_k].$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить условие

$$\psi^{(i)}(g_0,\ t_1 - s_k - 0) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{104}$$

Докажем справедливость (104). По аналогии с (69) имеют место равенства

$$\psi^{(k)}(g_0,\ \tau) =$$
$$= (-1)^k g_0' \sum_{j_1=0}^{j_0} \sum_{j_2=0}^{j_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{j_{k-1}} F\Big(t_1,\ \tau + \sum_{s=1}^{k} h_{j_s}\Big) q_k\Big(\sum_{s=1}^{k} h_{j_s}\Big),$$
$$k = 1, \ldots; \quad j_0 = m,$$

и, как следствие из них,

$$\psi^{(i)}\Big(g_0,\ t_1 - \sum_{s=1}^{k} h_{j_s} - 0\Big) =$$
$$= \psi^{(i)}\Big(g_0,\ t_1 - \sum_{s=1}^{k} h_{j_s} + 0\Big), \quad i = 0, \ldots, k-1, \tag{105}$$

$$\psi^{(i)}\Big(g_0,\ t_1 - \sum_{s=1}^{k} h_{j_s} - 0\Big) = \psi^{(i)}\Big(g_0,\ t_1 - \sum_{s=1}^{k} h_{j_s} + 0\Big) +$$
$$+ (-1)^i g_0' q_i\Big(\sum_{s=1}^{k} h_{j_s}\Big), \quad i = k,\ k+1, \ldots;$$
$$j_p = 1, \ldots, j_{p-1};\ p = 1, \ldots, k;\ j_0 = m;\ k = 1, 2, \ldots \tag{106}$$

Равенства (105) получены при следующем предположении: если при каких-либо фиксированных последовательностях номеров j_s и j_p, $s = 1, \ldots, k_1$; $p = 1, \ldots, k_1 + l$; $l \geqslant 1$, точки $s_{j_1 \ldots j_{k_1}}$ и $s_{j_1 \ldots j_{k_1+l}}$ совпадают, т. е.

$$\sum_{s=1}^{k_1} h_{j_s} = \sum_{s=1}^{k_1+l} h_{j_s},$$

то соотношения (105) при $k = k_1 + l$ в указанной точке не рассматриваются. Равенства (106) справедливы в каждой точке $s_{j_1 \ldots j_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Из (105) и (106) с учетом (103) следует (104). В силу произвольности k заключаем, что

$$\psi(g,\ \tau) \equiv 0, \quad \tau \in T,$$

при $g = g_0$ для каждого конечного числа t_1. Поскольку последнее тождество находится в противоречии с (49), то на этом доказательство необходимости завершается.

Достаточность. Покажем, что из невырожденности определяющего уравнения следует относительная управляемость системы. Допустим противное: система не является относительно управляемой. Это значит, что существует вектор g_0, $\| g_0 \| = 1$, такой, что

$$\psi(g_0, \tau) = g_0' F(t_1, \tau)\, b \equiv 0, \quad \tau \in T, \tag{107}$$

каково бы ни было число t_1, $0 < t_1 < \infty$. Из (107) следуют равенства

$$\psi^{(k)}(g_0, \tau - 0) = \psi^{(k)}(g_0, \tau + 0), \quad \tau \in T, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{108}$$

Полагая $t_1 > nh_m$ и рассматривая равенства (108) в точках $\tau = t_1 - s_\alpha$, $\alpha = 0, \ldots, N$; $s_N = nh_m$, приходим к соотношениям

$$g_0' q_k(s_\alpha) = 0,\ k = 0, \ldots, n-1; \quad \alpha = 0, \ldots, N,$$

которые в силу невырожденности определяющего уравнения могут иметь место лишь при $g_0 = 0$. Противоречие доказывает теорему.

§ 15. Относительная управляемость линейных нестационарных систем

Пусть движение объекта управления задано уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + A_1(t)\, x(t-h) + b(t)\, u(t),\ t \geqslant 0, \\ &x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau),\ \tau \in [-h, 0),\ x(0) = x_0\}, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

в котором элементы матриц $A(t)$, $A_1(t)$ и вектора $b(t)$ определены и непрерывны при $t \geqslant 0$ вместе с $n-1$ производной. Как и раньше, системе (109) поставим в соответствие уравнение

$$q_k(s, t) = A(t)\, q_{k-1}(s, t) + A_1(t)\, q_{k-1}(s-h, t-h) - \frac{dq_{k-1}(s, t)}{dt}, \quad k \geqslant 1, \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \tag{110}$$

$$q_0(s, t) = \begin{cases} b(t), & s = 0, \\ 0, & s \neq 0, \end{cases}$$

и назовем его *определяющим уравнением системы управления* (109). Рассмотрим совокупность

$$\pi_\alpha(t) = \{q_k(s, t),\ k = 0, \ldots, n-1;\ s \in [0, \alpha h]\},$$

составленную из отличных от нуля решений определяющего уравнения (110) на отрезке $[0, \alpha h]$.

Уравнение (110) будем называть невырожденным, если хотя бы при одном t_1, $t_1 > 0$,

$$\text{ранг } \pi_\alpha(t_1) = n, \quad \alpha = \left[\frac{t_1}{n}\right].$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 19. Если определяющее уравнение (110) невырождено, то система (109) относительно управляема.

Доказательство. Пусть число t_1, $t_1 > 0$, таково, что ранг $\pi_\alpha(t_1) = n$. Покажем, что для каждого начального состояния $x_0(\cdot)$ существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, при котором $x(t_1) = 0$. Нетрудно проверить, что решение $x(t)$ уравнения (109) в момент $t = t_1$ можно представить формулой

$$x(t_1) = s(t_1, x_0) + \int_0^{t_1} F(t_1, \tau)\, b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau,$$

где

$$s(t, x_0) = F(t, 0)\, x_0 + \int_0^h F(t, \tau)\, A_1(\tau)\, \Phi(\tau - h)\, d\tau,$$

а $F(t, \tau)$ — решение уравнения

$$\frac{dF(t, \tau)}{d\tau} = -F(t, \tau) A(\tau) - F(t, \tau + h) A_1(\tau + h), \quad \tau \leqslant t,$$

$$F(t, t-0) = E, \quad F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geqslant t + 0.$$

Поэтому в силу результатов § 10 можно утверждать, что система (109) относительно управляема в том и только в том случае, если

$$\psi(g, \tau) = g' F(t_1, \tau)\, b(\tau) \not\equiv 0, \quad \tau \in T,$$

для всех g, $\| g \| = 1$. Можно показать, что функция $\psi(g, \tau)$ удовлетворяет соотношениям

$$\psi^{(k)}(g, \tau) = (-1)^k g' \sum_{i=0}^{k} F(t_1, \tau + ih) q_k(ih, \tau + ih),$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

из которых следуют равенства

$$\left.\begin{aligned} &\psi^{(i)}(g, t_1 - kh - 0) = \psi^{(i)}(g, t_1 - kh + 0), \\ &\qquad\qquad i = 0, \ldots, k-1, \\ &\psi^{(i)}(g, t_1 - kh - 0) = \psi^{(i)}(g, t_1 - kh + 0) + \\ &\qquad\qquad + (-1)^i g' q_i(kh, t_1), \\ &i = k, k+1, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

Допустим, что для некоторого $g = g_0$, $\| g_0 \| = 1$, имеет место тождество

$$\psi(g_0, \tau) \equiv 0, \qquad \tau \in T. \qquad (112)$$

Тогда

$$\psi^{(i)}(g_0, t_1 - 0) = g_0' q_i(0, t_1) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1. \qquad (113)$$

Кроме того, из (112) имеем

$$\psi^{(i)}(g_0, \tau - 0) = \psi^{(i)}(g_0, \tau + 0) = 0, \qquad \tau \in T,$$
$$i = 0, \ldots, n-1. \qquad (114)$$

Рассматривая соотношения (114) в точках $\tau = t_1 - kh$, $k = 1, \ldots, \alpha$, и учитывая (111), получим

$$g_0' q_i(kh, t_1) = 0, \quad i = k, \ldots, n-1; \quad k = 1, \ldots, \alpha. \qquad (115)$$

Присоединяя к равенствам (113) и (115) соотношения

$$g_0' q_i(kh, t_1) = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1; \quad k = 1, \ldots, \alpha,$$

проверка которых не составляет труда, приходим к выводу:

$$g_0' q_i(kh, t_1) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1; \quad k = 0, \ldots, \alpha.$$

Поскольку по предположению $\| g_0 \| = 1$, то последнее означает линейную зависимость векторов $\{q_i(kh, t_1)$, $i = 0, \ldots, n-1$; $k = 1, \ldots, \alpha\}$ и одновременно системы $\pi_\alpha(t_1)$. Это противоречит условию. Теорема доказана.

§ 16. Об относительной управляемости по линейному приближению динамической системы с запаздыванием

Пусть дано уравнение движения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\ x(t-h),\ u(t)),\ f(0,\ 0,\ 0)=0,\\ &x_0(\cdot)=\{x(\tau)=\Phi(\tau),\ -h\leqslant\tau<0,\ x(0)=x_0\},\end{aligned}\right\} \quad (116)$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$, $f(x, y, u)$ определена и непрерывна вместе с первыми производными по всем аргументам.

Определение 12. Нелинейная система называется *относительно управляемой*, если для любых $t_1 > 0$, $L > 0$ найдется число $\alpha_0(t_1, L)$ такое, что каждая траектория $x(t)$, соответствующая состоянию из области

$$\| x_0(\cdot) \| \leqslant \alpha_0(t_1, L),$$

может быть переведена в начало координат $x = 0$ с помощью кусочно-непрерывного управления $u(t)$, $\| u(t) \| \leqslant L$.

Составим для (116) линейное приближение

$$\frac{dx(t)}{dx}=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),$$

где

$$A=\frac{\partial f(0,\ 0,\ 0)}{\partial x},\quad A_1=\frac{\partial f(0,\ 0,\ 0)}{\partial y},\quad B=\frac{\partial f(0,\ 0,\ 0)}{\partial u}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 20. Динамическая система (116) относительно управляема, если относительно управляема ее линейная модель.

Доказательство этой теоремы можно провести по схеме § 7. Необходимые изменения вполне очевидны. В [74c] для аналогичной цели применяется теорема о существовании корня [2]. Теорема 20, содержащая достаточные условия управляемости нелинейных систем, аналогична теоремам об устойчивости по линейному приближению.

§ 17. Полная управляемость динамических систем с запаздыванием. Критерии полной управляемости

Вернемся к линейной системе

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \\ &x_0(\cdot) = \{x(\tau) = \Phi(\tau), \quad -h \leqslant \tau < 0, \quad x(0) = x_0\}. \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

Определение 13. Состояние $x_0(\cdot)$ называется *управляемым*, если существует момент $t_1 < \infty$, кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, такое, что траектория $x(t)$ системы (117) удовлетворяет условию

$$x(t) = 0, \quad t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1.$$

Определение 14. Динамическая система с запаздыванием *вполне управляема*, если каждое ее начальное состояние управляемо.

Критерии полной управляемости получены для ряда частных случаев системы (117). Сначала выделим те системы, в которых эти критерии совпадают с условиями относительной управляемости.

1. Система с n входами. Пусть движение системы описывается уравнением (117), причем ранг матрицы B равен n. В этом случае вопрос о полной управляемости решается наиболее просто. Очевидно, при сделанном предположении $r \geqslant n$. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что векторы $b^1, \ldots, b^n$ (столбцы матрицы B) линейно независимы. Введем новые управления $v(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$ и $w(t) = \{u_{n+1}(t), \ldots, u_r(t)\}$. Тогда уравнение (117) примет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + B_1v(t) + B_2w(t),$$

где B_1 — неособая матрица. На основании теоремы 16 система (117) относительно управляема. Значит, для каждого начального состояния $x_0(\cdot)$ можно указать такое число t_1, $t_1 < \infty$, и функцию $u(\cdot)$, что

$$x(t_1 - h) = 0.$$

Продолжим $u(t)$ на отрезок $[t_1 - h, t_1]$, положив

$$v(t) = -B_1^{-1}A_1x(t-h), \qquad w(t) \equiv 0.$$

Таким образом обеспечим условие

$$x(t) \equiv 0, \quad t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1.$$

Следовательно, система (117) полностью управляема.

2. Дифференциальное уравнение n-го порядка с запаздывающим аргументом. Пусть движение системы происходит по закону

$$\left.\begin{aligned} &x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{(n-i)}(t) + \sum_{s=1}^{n} a_{1,s} x^{(n-s)}(t-h) = \\ &\qquad = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t), \quad t \geqslant 0, \quad m < n, \quad \sum_{j=0}^{m} b_j^2 > 0, \\ &x^{(k)}(\tau) = \Phi^{(k)}(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Уравнение (118) вполне управляемо. Действительно, представим его в виде

$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + A_1 y(t-h) + b\mu(t), \\ &y_0(\cdot) = \{\Phi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0]\}, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

где $\mu(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t)$ — новое управление, $\Phi(\tau) = \{\Phi^0(\tau), \ldots$ $\ldots, \Phi^{(n-1)}(\tau)\}$ — начальная функция,

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & \ldots & \ldots & \ldots & -a_1 \end{Vmatrix},$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ -a_{1,n} & \ldots & -a_{1,1} \end{Vmatrix}, \qquad b = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что система (119) относительно управляема (по μ). Это значит, что для каждого $y_0(\cdot)$

существуют конечное число t_1 и кусочно-непрерывная функция $\mu_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1 - h$, такие, что

$$y(t_1 - h) = 0.$$

Если при $t \in [t_1 - h,\ t_1]$ положить

$$\mu_2(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{1,\, s} y_{n-s+1}(t-h),$$

то управление

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1(t), & t \in [0,\ t_1 - h], \\ \mu_2(t), & t \in [t_1 - h,\ t_1], \end{cases}$$

приведет систему (119) в состояние $y(t) \equiv 0$, $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда управление

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0,\ t_1 - h], \\ u_2(t), & t \in [t_1 - h,\ t_1], \end{cases}$$

$$\sum_{s=0}^{m} b_s u_i^{(s)}(t) = \mu_i(t), \quad i = 1, 2,$$

обеспечит для траектории уравнения (118) условие

$$x^{(k)}(t) \equiv 0, \quad t \in [t_1 - h,\ t_1], \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Значит, рассматриваемое уравнение вполне управляемо.

3. Система с r ($r < n$) входами. Уравнение (118) является частным случаем системы (117) с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{1;\, n-r+1,\, 1} & \ldots & \ldots & a_{1;\, n-r+1,\, n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1;\, n,\, 1} & \ldots & \ldots & a_{1;\, n,\, n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ A_{1,\, 1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ b_{n-r+1,\, 1} & \ldots & \ldots & b_{n-r+1,\, n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & \ldots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ B_1 \end{pmatrix}, \tag{120}$$

$$\det B_1 \neq 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 21. Для того чтобы система (117) с матрицами A_1 и B вида (120) была вполне управляема, необходимо и достаточно, чтобы она была относительно управляема.

В самом деле, управление

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t), & t\in[0,\ t_1-h],\\ u_2(t)=B_1^{-1}A_{1,1}x(t-h), & t\in[t_1-h,\ t_1],\end{cases}$$

полностью отрабатывает начальное возмущение системы к моменту $t = t_1$, если $u_1(t)$ и t_1 выбраны из условия $x(t_1 - h) = 0$. Но такой выбор возможен при каждом $x_0(\cdot)$ в силу относительной управляемости системы. На этом доказательство теоремы завершается.

4. Динамическая система с чистым запаздыванием. Рассмотрим уравнение

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t-h)+Bu(t),\\ x_0(\cdot) &= \{\Phi(\tau),\ \tau\in[-h,\ 0),\ x(0)=x_0\},\end{aligned}\right\}\tag{121}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$. Допустим, что ранг A_1 равен n, ранг B равен *) r. Для полной управляемости системы (121) необходимо, чтобы она была относительно управляемой. Отметим, что система (121) относительно управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\{B, A_1B, \ldots, A_1^{n-1}B\}$ равен n (см. § 13). Покажем, что в относительно управляемой системе (121) существует управление $u(t)$, $t \in T$ (t_1 — достаточно большое конечное число), обеспечивающее условие

$$x(t) \equiv 0, \quad t \in [t_1 - h,\ t_1]. \tag{122}$$

Наряду с (122) рассмотрим тождество $x^{(n)}(t) \equiv 0$, $t \in [t_1 - h,\ t_1]$, которое в подробной записи имеет вид

$$A_1^nx(t-nh)+\sum_{i=0}^{n-1}A_1^iBu^{(n-i-1)}(t-ih)\equiv 0, \quad t\in[t_1-h,\ t_1]. \tag{123}$$

---

*) Это предположение не является ограничением, так как в случае, когда ранг B равен $r_1 < r$, рассуждения сохраняют силу, если уменьшить размерность управления до r_1, положив компоненты вектора u, стоящие при зависимых столбцах матрицы B, тождественно равными нулю.

Соотношения (123) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_j^{(n-i-1)}(t-ih)$, $i = 0, \ldots, n-1$; $j = 1, \ldots, r$. Из относительной управляемости системы (121) следует, что ранг матрицы системы (123) равен n. Поэтому систему (123) можно разрешить относительно

$$v(t) = \{u_1^{(n-1)}(t),\ u_2^{(n-1)}(t),\ \ldots,\ u_r^{(n-1)}(t),\\ u_{j_1}^{(n-i_1-1)}(t-i_1h),\ \ldots,\ u_{j_{n-r}}^{(n-i_{n-r}-1)}(t-i_{n-r}h)\},$$

положив

$$u_j^{(n-i-1)}(t-ih) \equiv 0, \quad i \neq i_s, \quad j \neq j_s, \quad s = 1, \ldots, n-r. \tag{124}$$

Это решение имеет вид

$$v(t) = Gx(t-nh), \quad t \in [t_1 - h,\ t_1], \tag{125}$$

где G — постоянная неособая матрица. Соотношения (124), (125) определяют управление $u(t)$ на отрезке $[t_1 - nh,\ t_1]$.

Из (123) следуют тождества

$$\left.\begin{aligned} &x(t) \equiv \sum_{s=0}^{n} d_s \frac{t^{n-s}}{(n-s)!},\\ &A_1^i x(t-ih) + \sum_{j=0}^{i-1} A_1^j B u^{(i-j-1)}(t-jh) \equiv\\ &\equiv \sum_{s=0}^{n-i} d_s \frac{t^{n-i-s}}{(n-i-s)!}, \quad t \in [t_1 - h,\ t_1], \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Здесь $\| d_0 \| = 0$, а d_i, $i = 1, \ldots, n$,— произвольные постоянные n-векторы. Для того чтобы было выполнено (122), необходимо и достаточно, чтобы $\| d_i \| = 0$, $i = 1, \ldots, n$, в (126). Преобразуя (126), приходим к системе относительно неизвестных d_i, $i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i=s}^{n-1} \left[\frac{t_1^{i-s-1}}{(i-s-1)!} E - \frac{(t_1-h)^{i-s}}{(i-s)!} A_1\right] d_{n-i} = Bu^{(s)}(t_1),\\ s = 0, \ldots, n-1.$$

Определитель этой системы отличен от нуля, так как по предположению матрица A_1 неособая. Следовательно,

$d_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, тогда и только тогда, когда

$$u^{(s)}(t_1) = 0, \quad s = 0, \ldots, n-1. \tag{127}$$

Из (125) имеем

$$u^{(n-1)}(t) = G_1 x(t - nh), \qquad t \in [t_1 - h, t_1], \tag{128}$$

где G_1 — матрица, состоящая из первых r строк матрицы G. Дифференцируя (128) по t, в силу системы (121) получим

$$u^{(n)}(t) = G_1 A_1 x(t - (n+1)h) + G_1 B u(t - nh),$$
$$t \in [t_1 - h, t_1]. \tag{129}$$

Могут представиться два случая.

1) Ранг $G_1 B$ равен r. Тогда система (129) с управляющим воздействием $w(t) = u(t - nh)$ вполне управляема. Следовательно, существует $w(t)$, $t \in [t_1 - h, t_1]$ (или, что то же самое, $u(t)$, $t \in [t_1 - (n+1)h, t_1 - nh]$, обеспечивающее равенства (127). При этом управление $u(t)$ на отрезке $[0, t_1 - (n+1)h]$ может быть произвольным. Таким образом, если система (121) относительно управляема, то условию (122) можно удовлетворить при всех $t_1 \geqslant (n+1)h$.

2) Ранг $G_1 B$ меньше r. Пусть число k таково, что ранг $G_1 A_1^i B$, $i = 1, \ldots, k-1$, также меньше r, но матрица $G_1 A_1^k B$ имеет ранг r. Из относительной управляемости системы (121) следует, что такое k существует и не превосходит $n - 1$. Полагая

$$u(t) \equiv 0, \qquad t \in [t_1 - (n+k)h, t_1 - nh],$$

из (128) и (121) получим

$$u^{(n+k)}(t) = G_1 A_1^{k+1} x(t - (n+k+1)h) +$$
$$+ G_1 A_1^k B u(t - (n+k)h), \quad t \in [t_1 - h, t_1]. \tag{130}$$

Уравнение (130) вполне управляемо по воздействию $w(t) = u(t - (n+k)h)$. Следовательно, условие (127) можно обеспечить за счет подходящего выбора управления $w(t)$, $t \in [t_1 - h, t_1]$ ($u(t)$, $t \in [t_1 - (n+k+1)h$, $t_1 - (n+k)h]$), считая $u(t)$ на отрезке $[0, t_1 - (n+k+1)h]$ произвольным.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 22. Система (121) (A_1 — неособая матрица) полностью управляема тогда и только тогда, когда она относительно управляема.

5. Полная управляемость системы с одним входом. Для системы (121) с одним управляющим воздействием ($r = 1$) ограничение на ранг матрицы A_1 можно снять. Рассмотрим этот случай подробнее.

Пусть система

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_1 x(t-h) + bu(t), \\ &x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau),\ \tau \in [-h, 0),\ x(0) = x_0\}, \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

где u — скаляр, относительно управляема. Это значит, что векторы b, $A_1 b$, ..., $A_1^{n-1} b$ линейно независимы. Выбрав их в качестве новых базисных векторов, преобразуем систему (131) к виду [39]

$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}(t) = A_{11} y(t-h) + b_1 u(t), \\ &y_0(\cdot) = \{\Phi_1(\tau),\ \tau \in [-h, 0),\ y(0) = y_0\}, \\ &A_{11} = \begin{Bmatrix} 0 & . & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & \dots 0 & 1 & \alpha_n \end{Bmatrix}, \quad b_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Допустим, что α_{k+1} — первое отличное от нуля число среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Систему (132) разобьем на две подсистемы относительно векторов $v = \{y_1, \dots, y_k\}$ и $w = \{y_{k+1}, \dots, y_n\}$. Имеем

$$\dot{v}(t) = D_1 v(t-h) + e_1 u(t), \quad \dot{w}(t) = D_2 w(t-h) + e_2 y_k(t-h).$$

Здесь

$$D_1 = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & & 0 & \alpha_{k+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+2} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_n \end{Bmatrix}, \quad e_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

В случае $k=0$ ($\alpha_1 \neq 0$) вторая подсистема совпадает с полной системой (132): $w=y$, $D_2=A_{11}$, $e_2=b_1$, $y_0(t-h)=u(t)$. Покажем, что условие $y(t)\equiv 0$, $t\in[t_1-h, t_1]$, будет обеспечено, если к системе (132) приложить управление

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t), & t\in[0,\ t_1-nh],\\ u_2(t), & t\in[t_1-nh,\ t_1-kh],\\ 0, & t\in[t_1-kh,\ t_1],\end{cases}$$

где $u_1(t)$ и t_1 выбраны так, что

$$y_k^{(i)}(t_1-h)=0, \quad i=0, \ldots, n-1, \tag{133}$$

а $u_2(t)$ удовлетворяет тождеству

$$w^{(n)}(t)\equiv 0, \quad t\in[t_1-h,\ t_1],$$

или, в подробной записи,

$$Ly(t-nh)+\sum_{i=k}^{n-1} D_2^{i-k}e_2u_2^{(n-i-1)}(t-ih)\equiv 0, \tag{134}$$
$$t\in[t_1-h,\ t_1].$$

Здесь $D_2^0=E$, L — $(n-k)\times n$-матрица вида

$$L=\{l_{ij}\}=\{[D_2^{n-k+j-1}e_2]_i\}.$$

Заметим, что при каждом фиксированном t, $t\in[t_1-h,\ t_1]$, решение $\{u_2^{(n-k-1)}(t-kh),\ u_2^{(n-k-2)}(t-(k+1)h), \ldots, u_2(t-(n-1)h)\}$ системы (134) существует в силу линейной независимости векторов $e_2, D_2e_2, \ldots, D_2^{n-k-1}e_2$ и полностью определяется состоянием $\{y(t),\ t\in[t_1-(n-1)h,\ t_1-nh]\}$. Если $u_2(t)$ найдено из (134), то имеют место тождества

$$\left.\begin{aligned} &w(t)\equiv\sum_{s=0}^{n} d_s\frac{t^{n-s}}{(n-s)!},\\ &D_2^m w(t-mh)+\sum_{i=1}^{m} D_2^{i-1}e_2y_k^{(m-i)}(t-ih)\equiv\\ &\equiv\sum_{s=0}^{n-m} d_s\frac{t^{n-m-s}}{(n-m-s)!},\quad m=1,\ldots,n;\ t\in[t_1-h,\ t_1],\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

где $\|d_0\|=0$, а d_i, $i=1, \ldots, n$, — произвольные постоянные векторы. Рассматривая (135) в моменты $t=t_1-h$ и $t=t_1$, получим для d_i, $i=1, \ldots, n$, систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=s}^{n-1}\left[\frac{t_1^{i-s-1}}{(i-s-1)!}E-\frac{(t_1-h)^{i-s}}{(i-s)!}D_2\right]d_{n-i}=e_2y_k^{(s)}(t_1-h), \quad (136)$$
$$s=0, \ldots, n-1,$$

с определителем, отличным от нуля (матрица D_2 неособая). Если управление $u_1(t)$, $t\in[0, t_1-nh]$, выбрано из условия (133), то система (136) допускает лишь тривиальное решение: $\|d_i\|=0$, $i=1, \ldots, n$. Последнее означает, что

$$w^{(k)}(t)\equiv 0, \quad t\in[t_1-h, t_1], \quad k=0, \ldots, n-1.$$

Таким образом, управление

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t), & t\in[0, t_1-nh],\\ u_2(t), & t\in[t_1-nh, t_1-kh],\end{cases}$$

при условии (133) обеспечивает успокоение системы (132) к моменту $t=t_1$ по $n-k$ координатам $y_{k+1}, \ldots, y_n$. Более того, это же самое управление заранее «подготавливает» траекторию системы к тому, чтобы отработка возмущения по остальным k координатам произошла при выключенном управлении

$$u_3(t)\equiv 0, \quad t\in[t_1-kh, t_1].$$

Действительно, из (132) следует, что при $u=u_3(t)$

$$y_1(t)\equiv \text{const}, \quad t\in[t_1-kh, t_1].$$

Кроме того, в силу (132) и (133)

$$y_1(t_1-kh)=\dot{y}_2(t_1-(k-1)h)=\ldots=y_k^{(k-1)}(t_1-h)=0.$$

Поэтому

$$y_1(t)\equiv 0, \quad t\in[t_1-kh, t_1].$$

Пусть для произвольного r, $1\leqslant r\leqslant k-1$,

$$y_r(t)\equiv 0, \quad t\in[t_1-(k-r+1)h, t_1].$$

Покажем, что тогда

$$y_{r+1}(t)\equiv 0, \quad t\in[t_1-(k-r)h, t_1].$$

Из уравнения (132) имеем

$$y_{r+1}(t) \equiv \text{const}, \qquad t \in [t_1 - (k-r)h,\ t_1].$$

Но поскольку

$$y_{r+1}(t_1 - (k-r)h) = \dot{y}_{r+2}(t_1 - (k-r-1)h) = \ldots = y_k^{(k-r-1)}(t_1 - h),$$

то

$$y_{r+1}(t) \equiv 0, \qquad t \in [t_1 - (k-r)h,\ t_1].$$

Вследствие произвольности числа r заключаем:

$$y_{s+1}(t) \equiv 0,\ t \in [t_1 - (k-s)h,\ t_1],\ s = 0, \ldots, k-1.$$

Для завершения доказательства остается обосновать возможность выбора управления $u_1(t)$ в соответствии с (133). Разрешим уравнение (134) относительно $u_2^{(n-k-1)}(t - kh)$:

$$u_2^{(n-k-1)}(t - kh) = a'y(t - nh), \quad t \in [t_1 - h,\ t_1]. \tag{137}$$

Здесь $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — некоторый постоянный вектор, причем $a_1 = -\alpha_{k+1}$. Вычислив в силу системы (132) производную $y_k^{(n)}(t - h)$, с учетом (137) получим

$$y_k^{(n)}(t - h) = a'A_{11}y(t - (n+1)h) - \alpha_{k+1}u(t - nh), \tag{138}$$
$$t \in [t_1 - h,\ t_1].$$

Так как по предположению $\alpha_{k+1} \neq 0$, то уравнение (138), рассматриваемое на отрезке $[t_1 - h,\ t_1]$ и потому являющееся уравнением без запаздывания, вполне управляемо. Следовательно, условие (133) можно обеспечить при всех t_1, $t_1 \geqslant (n+1)h$, за счет выбора управления $u(t)$ лишь на отрезке $[(n+1)h,\ t_1]$, считая его до момента $t = (n+1)h$ произвольным (например, $u(t) \equiv 0$, $t \in [0,\ (n+1)h]$). Таким образом, система (132) полностью управляема на каждом отрезке T, $t_1 \geqslant (n+1)h$. А так как уравнение (132) было получено из (131) с помощью неособого преобразования, то из полной управляемости системы (132) следует полная управляемость системы (131).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 23. Для того чтобы система (131) была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы она была относительно управляемой.

В пп. 1—4 настоящего параграфа показано, что в некоторых случаях выполнение условий относительной управляемости гарантирует полную управляемость системы. Однако в общем случае это не так.

Пример 10. Система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t)$$

с матрицами

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -e & -1 \end{Bmatrix}, \quad A_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

которая, очевидно, относительно управляема, при $h = 1$ не является полностью управляемой.

Пример 11. Система (117) с матрицами

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad A_1 = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ни при каких h, $h > 0$, не является полностью управляемой.

6. Один вспомогательный результат. Ниже (пп. 7, 8) рассмотрены еще два частных случая системы (117), для которых можно указать достаточные условия полной управляемости, не совпадающие с условиями относительной управляемости.

Предварительно сформулируем один результат, относящийся к относительной управляемости систем с запаздыванием, который будет использован при разборе этих случаев.

Допустим, что требуется привести систему (117):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),$$
$$x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau),\ \tau \in [-h, 0),\ x(0) = x_0\},$$

в положение $x(t_1) = 0$ при условии, что управление $u(t)$ можно выбирать лишь на части $[0, t_1 - h]$ отрезка T, а на остальной части оно задано в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{s} V_i x(t - ih), \qquad t \in [t_1 - h, t_1], \tag{139}$$

где V_i — некоторые постоянные $r\times n$-матрицы. Тогда на отрезке $[t_1-h,\ t_1]$ имеем

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{s} D_i x(t-ih),$$

где $D_0=A+BV_0$, $D_1=A_1+BV_1$, $D_k=BV_k$, $k=2,\ \ldots,\ s$. Условие $x(t_1)=0$ запишем с помощью формулы Коши в форме

$$\left.\begin{gathered} x(t_1-h)+\int_{t_1-h}^{t_1} F_1(t_1-h-\tau)\sum_{i=1}^{s} D_i x(\tau-ih)\,d\tau=0,\\ \dot{F}_1=D_0F_1,\qquad F_1(0)=E. \end{gathered}\right\}\tag{140}$$

Заменяя $x(t_1-h)$ и $x(\tau-ih)$ по формуле Коши, сведем задачу к проблеме моментов: найти функцию

$$u(t)=\{u_1(t),\ \ldots,\ u_r(t)\},$$

которая порождает линейный функционал, принимающий на заданных элементах заданные значения:

$$\int_0^{t_1-h} u'(\theta)\,[F_2(t_1-h,\ \theta)\,B]_j\,d\theta=\beta_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n.$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_2(t_1-h,\ \theta)&=F(t_1-h,\ \theta)+\\ &+\int_{t_1-2}^{t_1-h} F_1(t_1-2h-\tau)\sum_{i=1}^{s} D_iF(\tau-(i-1)h,\ \theta)\,d\tau, \end{aligned}\tag{141}$$

$[F_2(\tau,\ \theta)\,B]_j$ — вектор, составленный из элементов j-й строки матрицы $F_2(\tau,\ \theta)\,B$, а величины β_j определяются начальным состоянием $x_0(\cdot)$ системы (117). Образуем последовательность матриц $\Gamma_k(s,\ \sigma)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ по правилу

$$\left.\begin{gathered} \Gamma_0(s,\ \sigma)=Q_0(s),\\ \Gamma_k(s,\sigma)=Q_k(s)+F_1(-\sigma)\sum_{i=1}^{s} D_iQ_{k-1}(s-(i-1)h)+\\ +F_1(-\sigma+h)\sum_{i=1}^{s} D_iQ_{k-1}(s-ih)+\frac{d\Gamma_{k-1}(s,\ \sigma)}{d\sigma},\\ k\geqslant 1,\ s\geqslant 0,\ \sigma\geqslant 0, \end{gathered}\right\}\tag{142}$$

где $Q_k(s)$ — решение определяющего уравнения (62). Справедлива следующая теорема.

Теорема 24. Если

$$\text{ранг } \{\Gamma_k(\alpha h, h),\ \alpha = 0, \ldots, k;\ \ k = 0, \ldots, n-1\} = n,$$

то система (117) с заданным на $[t_1 - h, t_1]$ управлением (139) относительно управляема.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы и $t_1 > nh$, то можно указать такой номер k, $1 \leqslant k \leqslant r$, что соотношение

$$\psi_k(g, \theta) = g'[F_2(t_1 - h, \theta) B]^k \not\equiv 0,$$
$$\theta \in [0, t_1 - h], \qquad (143)$$

будет выполнено для любого вектора g, $\| g \| = 1$. Здесь $[F_2(t_1 - h, \theta) B]^k$ — k-й столбец матрицы $F_2(t_1 - h, \theta) B$. Допустим противное. Тогда для некоторого вектора $g = g_0$, $\| g_0 \| = 1$, имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} \psi_k^{(m)}(g_0, t_1 - h - 0) &= 0, \\ \psi_k^{(m)}(g_0, t_1 - ph - 0) - \psi_k^{(m)}(g_0, t_1 - ph + 0) &= 0, \\ m = 0, \ldots, n-1; \quad p = 2, \ldots, n, & \end{aligned}\right\} \qquad (144)$$

где $\psi_k^m(g, \theta)$ — m-я производная по θ функции $\psi_k(g, \theta)$. Преобразуя (144) с учетом (140) — (143), получим

$$g_0'[\Gamma_m(\alpha h, h)]^k = 0,$$
$$\alpha = 0, \ldots, m; \quad m = 0, \ldots, n-1; \quad k = 1, \ldots, r.$$

Но последние равенства возможны лишь при $\| g_0 \| = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

7. Система с $n-1$ входами. Пусть в системе (117)

$$B = \begin{Bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n-1} \\ 0 & \ldots & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \det B_1 \neq 0. \qquad (145)$$

Поскольку для полной управляемости системы необходимо, чтобы она была относительно управляема, укажем сначала условия относительной управляемости системы (117), (145).

Лемма 3. Для того чтобы система (117), (145) была относительно управляемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг } \{B,\ AB,\ A_1B\} = n. \tag{146}$$

Доказательство. *Достаточность.* При условии (146) определяющее уравнение (62) невырождено, и, следовательно, по теореме 16 система (117) относительно управляема.

Необходимость. Допустим, что система (117), (145) относительно управляема, но ранг $\{B,\ AB,\ A_1B\} < n$. Тогда, учитывая специальный вид матрицы B, имеем

$$a'_n\bar{b}_j = 0, \quad a'_{1,n}\bar{b}_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{147}$$

Здесь и ниже принято обозначение: если $D = \{d_{ij}\}$ — $k \times l$-матрица, то $d_s = \{d_{s1}, \ldots, d_{sl}\}$, $\bar{d}_p = \{d_{1p}, \ldots, d_{kp}\}$, $s = 1, \ldots, k$; $p = 1, \ldots, l$. Из (147) следует, что $a_{nj} = 0$, $a_{1,nj} = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, поскольку по предположению $\det B_1 \neq 0$. Но тогда во всех матрицах $Q_k(s) = \{q_{ij}(k, s)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющих (62), векторы $q_n(k, s)$ при каждом фиксированном $s \in (-\infty, \infty)$ нулевые. Следовательно, определяющее уравнение (62) вырождено, а тогда в силу теоремы 16 система (117), (145) не является относительно управляемой, что противоречит условию. Лемма доказана.

В соответствии с леммой 3 рассмотрим две возможности.

1) Допустим, что

$$\text{ранг } \{B,\ A_1B\} = n. \tag{148}$$

Это значит, что $\|B'a_{1,n}\| \neq 0$, т. е. можно указать k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, такое, что $a'_{1,n}\bar{b}_k \neq 0$. Если для каждого начального состояния $x_0(\cdot)$ существуют t_1, $t_1 < \infty$, и $u(\cdot)$, обеспечивающие условие

$$x(t_1 - h) = 0, \tag{149}$$

то дальнейшее управление системой по закону

$$\left.\begin{aligned} &u_i(\theta) = 0, \quad i \neq k, \quad u_k(\theta) = -\frac{1}{a'_{1,n}\bar{b}_k}\,[a_{1,n}Ax(\theta) + \\ &\qquad + a'_{1,n}A_1x(\theta - h)], \quad \theta \in [t_1 - 2h,\ t_1 - h], \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &u(\theta) = -B_1^{-1}A_{11}x(\theta-h), \quad \theta\in[t_1-h,\ t_1], \\ &A_{11}=\left\{\begin{matrix} a_{1,11} & \dots & a_{1,1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{1,n-1\,1} & \dots & a_{1,n-1\,n} \end{matrix}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

приводит ее в состояние $x(t)\equiv 0$, $t\in[t_1-h,\ t_1]$. Действительно, равенства (150) получены из условия $a'_{1,n}\dot{x}(\theta)\equiv 0$, $\theta\in[t_1-2h,\ t_1-h]$, откуда следует, что $a'_{1,n}x(\theta)\equiv \mathrm{const}$ на отрезке $[t_1-2h,\ t_1-h]$. Но если выполнено условие (149), то $a'_{1,n}x(\theta)\equiv 0$, $\theta\in[t_1-2h,\ t_1-h]$. Последнее тождество вместе с (149) и (151) обеспечивает условие $x(\theta)\equiv 0$, $\theta\in[t_1-h,\ t_1]$.

Таким образом, система (117), (145) полностью управляема, если существует управление $u(t)$, $t\in[0,\ t_1-2h]$, решающее задачу (149) при условии (150). Достаточные условия разрешимости задачи (149), (150) следуют из теоремы 24 в предположении, что в формулах (142) положено

$$\left.\begin{aligned} &D_0=\{d^0_{ij}\}=\left\{a_{ij}-\frac{1}{a'_{1,n}\bar{b}_k}\bar{a}'_j a_{1,n}b_k\right\}, \\ &D_1=\{d^1_{ij}\}=\left\{a_{1,ij}-\frac{b_{ik}}{a'_{1,n}\bar{b}_k}\bar{a}'_{1,j}a_{1,n}\right\}, \\ &D_m=\{0\},\ m\geqslant 2. \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

2) Пусть теперь

$$\text{ранг}\ \{B,\ A_1B\}<n, \tag{153}$$

но

$$\text{ранг}\ \{B,\ AB\}=n. \tag{154}$$

Из (153) имеем $a_{1,nj}=0$, $j=1,\ \dots,\ n-1$. Будем считать $a_{1,nn}\neq 0$, так как в противном случае оказываемся в условиях теоремы 21. В силу (154) норма $\|B'a_n\|\neq 0$. Следовательно, можно указать такое число k, $1\leqslant k\leqslant n-1$, что $a'_n\bar{b}_k\neq 0$. Чтобы обеспечить условие $a'_{1,n}\ddot{x}(\theta)\equiv 0$, $\theta\in[t_1-2h,\ t_1-h]$, положим

$$\left.\begin{aligned} &u_i(\theta)\equiv 0, \quad i\neq k, \quad u_k(\theta)=-\frac{1}{a'_n\bar{b}_k}\{a'_nAx(\theta)+ \\ &+a'_nA_1x(\theta-h)+a_{1,nn}[a'_nx(\theta-h)+a'_{1,n}x(\theta-2h)]\}, \\ &\qquad \theta\in[t_1-2h,\ t_1-h]. \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Тогда для траектории системы (117) будут выполнены тождества

$$\left.\begin{aligned} &a'_n x(t-h) + a'_{1,n} x(t-2h) \equiv d_1, \\ &a'_{1,n} x(t-h) \equiv d_1 t + d_2, \quad t \in [t_1 - h, t_1], \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

где d_i, $i = 1, 2,$ — некоторые постоянные величины. Из (156) следуют уравнения

$$(1 - t_1 + h)\, d_1 - d_2 = a'_n x\,(t_1 - h),$$
$$t_1 d_1 + d_2 = a'_{1,n} x\,(t_1 - h),$$

которые при условии (149) обеспечивают равенство нулю постоянных d_i, $i = 1, 2$. Если на отрезке $[t_1 - h, t_1]$ управление определить с помощью (151), то с учетом (149) и (156) (где $d_1 = d_2 = 0$) получим $x\,(t) \equiv 0$, $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$. Следовательно, и в этом случае система (117), (145) вполне управляема, если она относительно управляема на $[0, t_1 - h]$ с управлением $u\,(t)$, $t \in [t_1 - 2h, t_1 - h]$ из (155). Последнее имеет место, если для (117), (145) выполнены условия теоремы 24 при

$$D_0 = \{d^0_{ij}\} = \left\{ a_{ij} - \frac{b_{ik}}{a'_n \bar{b}_k} \bar{a}'_j a_n \right\},$$

$$D_1 = \{d^1_{ij}\} = \left\{ a_{1,\,ij} - \frac{b_{ik}}{a'_n \bar{b}_k} [a'_n a_{1,\,j} + a_{nj}] \right\},$$

$$D_2 = \{d^2_{ij}\} = -\frac{1}{a'_n \bar{b}_k} b_{ik} a_{1,\,nj},$$

$$D_m = \{0\}, \quad m \geqslant 3.$$

8. К исследованию общего случая полной управляемости. Обобщая предыдущий случай, рассмотрим систему (117) с матрицами

$$A_1 = \left\{\begin{array}{ccc} a_{1,\,11} & \dots & a_{1,\,1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,\,r1} & \dots & a_{1,\,rn} \\ \hline a_{1,\,r+1\,1} & \dots & a_{1,\,r+1\,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} A_{11} \\ \hline A_{12} \end{array}\right\}, \quad B = \left\{\begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rr} \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right\}. \tag{157}$$

Возможны две ситуации.

1) Ранг $\{B\} \neq$ ранг $\{B,\ A_1B\}$. При этом предположении исследование полной управляемости системы (117), (157) проводится по схеме п. 7 (случай: ранг $\{B,\ A_1B\} = n$). В результате приходим к соотношениям, аналогичным (150) — (152), с той разницей, что в (150), (152) вектор $a_{1,n}$ заменяется вектором $a_{1,r+1}$, а в (151) A_{11} и B_1 — матрицы из (157).

2) Несколько сложнее исследуется случай ранг $\{B\} =$ ранг $\{B,\ A_1B\}$. Будем считать, что $\| a_{1,r+1} \| \neq 0$, так как случай $\| a_{1,r+1} \| = 0$ уже разобран в п. 3.

Предварительно докажем одно вспомогательное предложение, справедливое лишь в случае 2).

Лемма 4. Если

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(p,\ 0) = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ r; \quad p = 0,\ \ldots,\ k,$$

то

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(k+m,\ mh) = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ r; \quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Здесь $\bar{q}_j(p,\ s)$ — j-й столбец матрицы $Q_p(s)$ из (62).

Доказательство проведем по индукции (индукция по двум индексам). Положим сначала $p = 0$. Тогда из соотношений

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(0,\ 0) = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ r,$$

следует, что $a_{1,\ r+1j} = 0$, $j = 1,\ \ldots,\ r$. Поэтому

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(1, h) = a'_{1,\ r+1}A_1\bar{q}_j(0,\ 0) = a_{1,\ r+1,\ r+1}a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(0,\ 0) = 0.$$

Вообще, если

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(m,\ mh) = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ r,$$

то

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(m+1,\ (m+1)\,h) = a'_{1,\ r+1}A_1\bar{q}_j(m,\ mh) = \\ = a_{1,\ r+1,\ r+1}a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(m,\ mh) = 0.$$

Предположим, что утверждение леммы справедливо для $p = 0,\ \ldots,\ k-1$. Покажем, что оно имеет место и для $p = k$. Итак, пусть

$$a'_{1,\ r+1}\bar{q}_j(p,\ 0) = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ r; \quad p = 0,\ \ldots,\ k.$$

Это значит, что $[(A')^p a_{1,\,r+1}]_s=0$, $s=1, \ldots, r$; $p=0, \ldots, k$. Тогда

$$a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(k+1,\,h)=(A'a_{1,\,r+1})'\,\bar{q}_j(k,\,h)+a'_{1,\,r+1}A_1\bar{q}_j(k,\,0)=$$
$$=a'_{1,\,r+1}A^2\bar{q}_j(k-1,\,h)+a'_{1,\,r+1}AA_1\bar{q}_j(k-1,\,0)+$$
$$+a'_{1,\,r+1}A_1\bar{q}_j(k,\,0)=\ldots=a'_{1,\,r+1}A^k\bar{q}_j(1,\,h)+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}a'_{1,\,r+1}A^{k-i}A_1\bar{q}_j(i,\,0)=\sum_{i=0}^{k}a'_{1,\,r+1}A^{k-i}A_1\bar{q}_j(i,\,0)=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}[(A')^{k-i}a_{1,\,r+1}]_{r+1}\,a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(i,\,0)=0,\quad j=1,\,\ldots,\,r.$$

Допустим теперь, что

$$a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(k+m,\,mh)=0,\quad j=1,\,\ldots,\,r,$$

и покажем, что

$$a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(k+m+1,\,(m+1)\,h)=0,\quad j=1,\,\ldots,\,r.$$

Повторяя предыдущее рассуждение, получим

$$a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(k+m+1,\,(m+1)\,h)=a'_{1,\,r+1}A\bar{q}_j(k+m,\,(m+1)\,h)+$$
$$+a'_{1,\,r+1}A_1\bar{q}_j(k+m,\,mh)=a'_{1,\,r+1}A^2\bar{q}_j(k+m-1,\,(m+1)\,h)+$$
$$+a'_{1,\,r+1}AA_1\bar{q}_j(k+m-1,\,mh)+a'_{1,\,r+1}A_1\bar{q}_j(k+m,\,mh)=$$
$$=\ldots=a'_{1,\,r+1}A^k\bar{q}_j(m+1,\,(m+1)\,h)+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}a'_{1,\,r+1}A^{k-i}A_1\bar{q}_j(i+m,\,mh)=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}a'_{1,\,r+1}A^{k-i}A_1\bar{q}_j(i+m,\,mh)=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}[(A')^{k-i}a_{1,\,r+1}]_{r+1}\,a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(i+m,\,mh)=0,$$
$$j=1,\,\ldots,\,r.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если система (117), (157) относительно управляема, то существуют числа l и p, $1\leqslant l\leqslant n-1$, $1\leqslant p\leqslant r$, такие, что

$$\left.\begin{aligned}a'_{1,\,r+1}\bar{q}_j(k,\,0)=0,\quad j=1,\,\ldots,\,r;\quad k=0,\,\ldots,\,l-1,\\ a'_{1,\,r+1}\bar{q}_p(l,\,0)\neq 0.\end{aligned}\right\}\qquad(158)$$

Действительно, поскольку по предположению $\| a_{1, r+1} \| \neq \neq 0$, то в силу леммы 4 равенства

$$a'_{1, r+1} \bar{q}_j(k, 0) = 0, \quad j = 1, \ldots, r; \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

означали бы, что

$$\text{ранг}\, \{\bar{q}_j(k, 0),\ j = 1, \ldots, r;\ k = 0, \ldots, n-1\} < n.$$

Последнее противоречит относительной управляемости системы (117), (157).

Перейдем теперь непосредственно к вопросу о полной управляемости системы (117), (157). Рассмотрим уравнение

$$a'_{1, r+1} x^{(l)}(t) = 0, \qquad t \in [t_1 - 2h, t_1 - h],$$

или, что то же самое,

$$a'_{1, r+1} \sum_{i=0}^{l} P_l(ih)\, x(t - ih) + \sum_{j=1}^{r} a'_{1, r+1} \bar{q}_j(l, 0)\, u_j(t) = 0. \tag{159}$$

Здесь l — число из (158), а $P_k(s)$ — решение определяющего уравнения (98) с начальным условием

$$P_0(s) = \begin{cases} E, & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases} \tag{160}$$

Положим

$$u(t) = -B_1^{-1} A_{11} x(t - h), \quad t \in [t_1 - h, t_1], \tag{161}$$

$$u_j(t) \equiv 0, \quad j \neq p, \quad t \in [t_1 - 2h, t_1 - h]. \tag{162}$$

Тогда в силу (159)

$$u_p(t) = -\frac{1}{a'_{1, r+1} \bar{q}_p(l, 0)}\, a'_{1, r+1} \sum_{i=0}^{l} P_l(ih)\, x(t - ih), \tag{163}$$
$$t \in [t_1 - 2h, t_1 - h].$$

Такой выбор управления обеспечит для траектории системы тождества

$$a'_{1, r+1} \sum_{i=0}^{s} P_s(ih)\, x(t - ih) \equiv \sum_{j=1}^{l-s} d_j \frac{(t+h)^{l-s-j}}{(l-s-j)!}, \tag{164}$$
$$s = 0, \ldots, l-1, \qquad t \in [t_1 - 2h, t_1 - h],$$

где d_j, $j = 1, \ldots, l$ — произвольные постоянные интегрирования. После несложных преобразований соотношений

(164) приходим к системе алгебраических уравнений относительно d_j, $j=1, \ldots, l$:

$$\sum_{j=1}^{l} d_j \frac{t_1^{l-j}}{(l-j)!} = a'_{1,\, r+1} x(t_1 - h),$$

$$\sum_{j=1}^{l-k} d_j \frac{t_1^{l-k-j}}{(l-k-j)!} - \sum_{i=0}^{k-1} [(A')^i a_{1,\, r+1}]_{r+1} \sum_{j=k}^{l+i} d_{j-k+1} \frac{(t_1-h)^{l+i-j}}{(l+i-j)!} =$$

$$= a'_{1,\, r+1} A^k x(t_1 - h), \quad k = 1, \ldots, l-1,$$

определитель которой равен

$$\Delta(h) = \begin{vmatrix} \frac{h^{l-1}}{(l-1)!} & \frac{h^{l-2}}{(l-2)!} & \ldots & h & 1 \\ \frac{h^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{h^{l-3}}{(l-3)!} & \ldots & 1 & -[a_{1,\, r+1}]_{r+1} \\ \frac{h^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{h^{l-4}}{(l-4)!} & \ldots & -[a_{1,\, r+1}]_{r+1} & -[A' a_{1,\, r+1}]_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -[a_{1,\, r+1}]_{r+1} & \ldots & -[(A')^{l-3} a_{1,\, r+1}]_{r+1} & -[(A')^{l-2} a_{1,r+1}]_{r+1} \end{vmatrix}.$$

Пусть t_1, $t_1 < \infty$, и $u(\cdot)$ таковы, что имеет место (149). Если при данном h определитель $\Delta(h) \neq 0$, то $d_j = 0$, $j = 1, \ldots, l$, и, значит,

$$a'_{1,\, r+1} x(t-h) \equiv 0, \qquad t \in [t_1 - h,\ t_1].$$

Последнее условие в совокупности с (161) и (149) дает $x(t) \equiv 0$, $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$. Таким образом, если h не является корнем уравнения $\Delta(h) = 0$, то для доказательства полной управляемости системы (117), (157) достаточно обосновать разрешимость задачи (149). Это можно сделать с помощью теоремы 24, полагая в (142)

$$D_0 = \{d_{ij}\} = \left\{ a_{ij} - \frac{b_{ip}}{a'_{1,\, r+1} \bar{q}_p(l, 0)} a'_{1,\, r+1} \bar{p}_j(l, 0) \right\},$$

$$D_1 = \{d^1_{ij}\} = \left\{ a_{1,\, ij} - \frac{b_{ip}}{a'_{1,\, r+1} \bar{q}_p(l, 0)} a'_{1,\, r+1} \bar{p}_j(l, h) \right\},$$

$$D_k = \{d^k_{ij}\} = -\left\{ \frac{b_{ip}}{a'_{1,\, r+1} \bar{q}_p(l, 0)} a'_{1,\, r+1} \bar{p}_j(l, kh) \right\},$$

$$k = 2, \ldots, l; \quad D_m = \{0\}, \quad m \geqslant l+1.$$

§ 18. Общая схема исследования полной управляемости

В предыдущем параграфе на частных примерах была проиллюстрирована возможность сведения функциональной проблемы полной управляемости к конечномерной задаче. Ниже описан способ такого сведения в общем случае.

Рассмотрим систему (117):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + bu(t),$$
$$x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau),\ \tau \in [-h,\ 0],\ x(0) = x_0\},$$

с произвольными матрицами A, A_1 и вектором b. Допустим, что она полностью управляема, т. е. для любого $x_0(\cdot)$ существуют такие t_1 и $u(\cdot) = \{u(t),\ t \in [0,\ t_1]\}$, что

$$x(t) \equiv 0, \qquad t \in [t_1 - h,\ t_1]. \tag{165}$$

Не уменьшая общности рассуждений, можно считать $t_1 \geqslant 2nh$, так как если система полностью управляема на отрезке $[0,\ t_2]$, $t_2 < 2nh$, то она полностью управляема и на каждом отрезке $[0,\ t_1] \supset [0,\ t_2]$. Введем некоторые соотношения, следующие из (165), которые потом используем для нахождения указанных t_1 и $u(\cdot)$. Вместе с (165) для рассматриваемых t_1 и $u(\cdot)$ должно выполняться тождество

$$\sum_{i=0}^{n} P_n(ih)\, x(t-ih) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} q_j(ih)\, u^{(n-j-1)}(t-ih) \equiv 0, \tag{166}$$
$$t \in [t_1 - h,\ t_1].$$

Здесь $q_k(s)$ и $P_n(s)$ — решение определяющего уравнения (62). Из соотношений (166) следуют равенства

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\equiv \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}, \\ \sum_{i=0}^{s} P_s(ih)\, x(t-ih) &+ \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=i}^{s-1} q_j(ih)\, u^{(s-j-1)}(t-ih) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n-s} d_i \frac{t^{n-s-i}}{(n-s-i)!},\quad s = 1, \ldots, n-1;\ t \in [t_1 - h, t_1], \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

где d_i, $i = 1, \ldots, n$,— произвольные постоянные n-векторы. Рассматривая (167) в моменты $t = t_1 - h$ и $t = t_1$, получим систему алгебраических уравнений относительно d_i, $i = 1, \ldots, n$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \frac{t_1^{n-i}}{(n-i)!} d_i = x(t_1), \\ &\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{t_1^{n-s-i}}{(n-s-i)!} E - \sum_{p=0}^{s-1} \frac{(t_1-h)^{n-i-p}}{(n-i-p)!} A^{s-p-1} A_1 \right] d_i = \\ &= A^s x(t_1) + \sum_{i=1}^{s} A^{i-1} b u^{(s-i)}(t_1), \quad s = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Матрица коэффициентов этой системы после несложных преобразований приводится к виду

$$M(h) = \\ = \begin{Vmatrix} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} E & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} E & \ldots & hE & E \\ \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} E & \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} E & \ldots & E & -A_1 \\ \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} E & \frac{h^{n-4}}{(n-4)!} E & \ldots & -A_1 & -AA_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E & -A_1 & \ldots & -A^{n-3}A_1 & -A^{n-2}A_1 \end{Vmatrix}. \tag{169}$$

Будем считать, что в уравнении (117) запаздывание h удовлетворяет условию $\det M(h) \neq 0$. Это условие выполняется почти для всех h, так как $\det M(h) \not\equiv 0$. По предположению управление $u(\cdot)$ и число t_1 таковы, что для траектории системы (117) имеет место (165). Это значит, что в соотношениях (167) все d_i, $i = 1, \ldots, n$, равны нулю. Последнее возможно в том и только в том случае, если система (168) является однородной. Так как в силу (165) $x(t_1) = 0$, то для однородности системы (168) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства

$$\sum_{i=1}^{s} A^{i-1} b u^{(s-i)}(t_1) = 0, \quad s = 1, \ldots, n-1,$$

и, как следствие из них,

$$u^{(i)}(t_1)=0, \quad i=0, \ldots, n-2. \tag{170}$$

Таким образом, если управление $u(t)$, $t\in[0, t_1]$, обеспечивает для системы (117) условие (165), то оно необходимо удовлетворяет соотношениям (166) и (170).

Преобразуем (166). Вводя обозначение $v(t)=\{u(t), \ldots$ $\ldots, u(t-(n-1)h)\}$, имеем интегро-дифференциальное уравнение [25, 96, 103] относительно вектора $v(t)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q_i v^{(n-i-1)}(t)+\int_{t_1-h}^{t_1} R(t, \tau)v(\tau)\,d\tau=f(t), \quad t\in[t_1-h, t_1], \tag{171}$$

где

$$Q_i=\begin{Bmatrix} q_{i1}(0) & q_{i1}(h) & \ldots & q_{i1}((n-1)h) \\ q_{i2}(0) & q_{i2}(h) & \ldots & q_{i2}((n-1)h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{in}(0) & q_{in}(h) & \ldots & q_{in}((n-1)h) \end{Bmatrix},$$

$$R(t, \tau)=\sum_{i=0}^{n-1} P_n(ih)S(t-ih, \tau),$$

$$S(t-kh, \tau)= \\ =\begin{Bmatrix} [F(t-kh, \tau)b]_1 & \ldots & [F(t-kh, \tau-(n-1)h)b]_1 \\ [F(t-kh, \tau)b]_2 & \ldots & [F(t-kh, \tau-(n-1)h)b]_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [F(t-kh, \tau)b]_n & \ldots & [F(t-kh, \tau-(n-1)h)b]_n \end{Bmatrix},$$

$$f(t)=-\sum_{i=0}^{n} P_n(ih)s(t-ih)- \\ -\sum_{i=0}^{n} P_n(ih)\int_0^{t_1-nh} F(t-ih, \tau)bu(\tau)\,d\tau$$

и $s(t)$, $F(t, \tau)$ — функции из формулы Коши. На основании изложенных выше рассуждений заключаем, что если система полностью управляема, то существует решение уравнения (171)

$$v(t) = Df(t) + \int_{t_1-h}^{t_1} \Gamma(t, \tau, h) f(\tau)\, d\tau,$$
$$t \in [t_1 - h, t_1), \tag{172}$$

удовлетворяющее граничному условию (170): $v_1^{(i)}(t_1) = 0$, $i = 0, \ldots, n-2$. Соотношения (170) — (172) определяют вид управления $u(t)$ на отрезке $[t_1 - nh, t_1]$. Управление $u(t)$ при $t \in [0, t_1 - nh]$ найдем из условия $x(t_1) = 0$ в предположении, что матрица $F(t_1, t_1 - nh)$ неособая. Преобразуя условие $x(t_1) = 0$ с учетом (172), получим

$$\int_0^{t_1-nh} [F(t_1-nh, \tau)\, b + K(\tau, h)\, b]_i\, u(\tau)\, d\tau = \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{173}$$

Здесь

$$K(\tau, h) = F^{-1}(t_1, t_1 - nh) \Bigg[\int_{t_1-(n+1)h}^{t_1-nh} F(t_1, \theta + h) A_1 F(\theta, \tau)\, d\theta -$$
$$- \int_0^{t_1} S(t_1, \theta) D \sum_{i=0}^{n} P_n(ih) F(\theta - ih, \tau)\, d\theta -$$
$$- \int_{t_1-h}^{t_1} \int_{t_1-h}^{t_1} S(t_1, \sigma) \Gamma(\sigma, \theta, h) \sum_{i=0}^{n} P_n(ih) F(\theta - ih, \tau)\, d\theta\, d\sigma \Bigg],$$

$$\gamma = F^{-1}(t_1, t_1 - nh) \Bigg[\int_{t_1-h}^{t_1} S(t_1, \tau) D \sum_{i=0}^{n} P_n(ih)\, s(\tau - ih)\, d\tau +$$
$$+ \int_{t_1-h}^{t_1} \int_{t_1-h}^{t_1} S(t_1, \tau) \Gamma(\tau, \theta, h) \sum_{i=0}^{n} P_n(ih)\, s(\theta - ih)\, d\theta\, d\tau -$$
$$- \int_{t_1-(n+1)h}^{t_1-nh} F(t_1, \tau + h) A_1 s(\tau)\, d\tau \Bigg] - s(t_1 - nh).$$

В результате приходим к следующему выводу: управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, обеспечивающее системе (117) условие (165), на отрезке $[0, t_1 - nh]$ является решением задачи (173), а при $t \in [t_1 - nh, t_1]$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (171) и условию (170).

Справедливо и обратное утверждение: если при некотором t_1, $2nh < t_1 < \infty$, задача (170), (171), (173) имеет решение $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, то траектория $x(t)$ системы (117), порожденная этим управлением, удовлетворяет условию (165).

Действительно, если управление $u(t)$, $t \in T$, найдено из (170), (171), (173), то система (168) однородна, и при условии $\det M(h) \neq 0$ она допускает единственное тривиальное решение, откуда и следует (165). Таким образом, для того чтобы система (117) с запаздыванием h, удовлетворяющим условиям $\det M(h) \neq 0$ и $\det F(t_1, t_1 - nh) \neq$ $\neq 0$, была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение задачи (170), (171), (173).

Хотя сформулированные в такой форме условия полной управляемости не являются достаточно эффективными, описанная схема дает практический метод исследования на управляемость каждой конкретной системы почти при всех h. При этом не обязательно находить решение интегро-дифференциального уравнения (171) в явном виде, что связано с определенными трудностями: достаточно выразить управление $u(t)$ в виде некоторого функционала.

Применение описанной схемы проиллюстрируем на примерах.

Пример 12. Пусть дана система третьего порядка

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t-1), \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t-1). \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

Требуется установить, является ли данная система полностью управляемой.

Действуя по общей схеме, составим для нее уравнение (166):

$$-x_1(t) + \ddot{u}(t) - \dot{u}(t) + u(t) = 0,$$

$$x_1(t-1) + \dot{u}(t-1) - u(t-1) = 0,$$

$$-x_1(t-2) + u(t-2) = 0.$$

Решение системы (174), вычисленное по формулам Коши, имеет вид

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} x_{10} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} x_{20} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} x_{30} + \int_0^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Phi_1(\tau - 1)\,d\tau + \int_0^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Phi_2(\tau - 1)\,d\tau + \int_0^t \begin{Bmatrix} e^{-t+\tau} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau,$$

$$t \in [0,\ 1],$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t+1} + 1 \\ 0 \end{Bmatrix} x_{10} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \end{Bmatrix} x_{20} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} x_{30} + \int_0^{t-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ t-\tau-1 \end{Bmatrix} \Phi_1(\tau - 1)\,d\tau + \int_{t-1}^{1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Phi_1(\tau - 1)\,d\tau + \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Phi_2(\tau - 1)\,d\tau + \int_0^{t-1} \begin{Bmatrix} e^{-t+\tau} \\ -e^{-t+\tau+1} + 1 \\ 0 \end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^{t} \begin{Bmatrix} e^{-t+\tau} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau, \quad t \in [1,\ 2],$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t+1} + 1 \\ e^{-t+2} + t - 3 \end{Bmatrix} x_{10} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \end{Bmatrix} x_{20} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} x_{30} +$$

$$+\int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ t-\tau-1 \end{Bmatrix} \Phi_1(\tau-1)\,d\tau + \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Phi_2(\tau-1)\,d\tau +$$

$$+\int_0^{t-2} \begin{Bmatrix} e^{-t+\tau} \\ -e^{-t+\tau+1}+1 \\ e^{-t+\tau+2}+t-\tau-3 \end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_{t-2}^{t-1} \begin{Bmatrix} e^{-t+\tau} \\ -e^{-t+\tau+1}+1 \\ 0 \end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^{t} \begin{Bmatrix} e^{-t+\tau} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau,$$

$$t \geqslant 2.$$

Считая $t_1 \geqslant 4$, приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений (см. (171))

$$\left.\begin{aligned} &-e^{-t}x_{10} - \int_0^t e^{-t+\tau}u(\tau)\,d\tau + \ddot{u}(t) - \dot{u}(t) + u(t) = 0, \\ &e^{-t+1}x_{10} + \int_0^{t-1} e^{-t+\tau+1}u(\tau)\,d\tau + \\ &\qquad\qquad + \dot{u}(t-1) - u(t-1) = 0, \\ &-e^{-t+2}x_{10} + \int_0^{t-2} e^{-t+\tau+2}u(\tau)\,d\tau + u(t-2) = 0, \\ &\qquad t \in [t_1-1, t_1]. \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

Ясно, что функция

$$u(t) \equiv 0, \qquad t \in [t_1-3, t_1], \tag{176}$$

удовлетворяет (175), (170), если только

$$x_{10} + \int_0^{t_1-3} e^{\tau} u(\tau)\,d\tau = 0. \tag{177}$$

Учитывая вид решения системы (174), нетрудно убедиться в том, что условие $x_1(t_1) = 0$ в предположении

(176) совпадает с (177), а требование $x_2(t_1) = x_3(t_1) = 0$ приводит к интегральным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &x_{10}+x_{20}+\int_0^1 \Phi_1(\tau-1)\,d\tau+\int_0^{t_1-3} u(\tau)\,d\tau=0,\\ &-2x_{10}+x_{30}-\int_0^1 \tau\Phi_1(\tau-1)\,d\tau+\int_0^1 \Phi_2(\tau-1)\,d\tau-\\ &\qquad\qquad -\int_0^{t_1-3}(\tau+2)\,u(\tau)\,d\tau=0. \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Линейная независимость функций e^τ, 1, $\tau+2$ гарантирует разрешимость задачи (177), (178) (в общей схеме (173)) при любых начальных состояниях $x_0(\cdot)$ и полную управляемость системы (174), если $\det M(1) \neq 0$. В справедливости последнего неравенства убеждаемся простым счетом.

Пример 13. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t),\\ &\dot{x}_2(t) = -ex_1(t) - x_2(t) + x_1(t-1), \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

которая, очевидно, относительно управляема. Покажем, что она не является полностью управляемой. Если $t_1 \leqslant 2$, то необходимые условия удержания траектории системы (179) в начале координат

$$u(t) \equiv 0, \qquad x_1(t-1) \equiv 0, \qquad t \in [t_1-1,\ t_1],$$

не могут быть выполнены при произвольной начальной функции $\Phi(\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$. Поэтому положим $t_1 > 2$. В соответствии с формулой Коши имеем

$$\begin{Bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^t\\ \frac{1}{2}e\,(e^{-t}-e^t)\end{Bmatrix} x_{10} + \begin{Bmatrix} 0\\ e^{-t}\end{Bmatrix} x_{20} +$$

$$+\int_0^t \begin{Bmatrix} 0\\ e^{-t+\tau}\end{Bmatrix} \Phi_1(\tau-1)\,d\tau + \int_0^t \begin{Bmatrix} e^{t-\tau}\\ \frac{1}{2}e\,(e^{-t+\tau}-e^{t-\tau})\end{Bmatrix} u(\tau)\,d\tau,$$

$$t \in [0, 1],$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^t \\ \frac{1}{2} e^t (e^{-1} - e) \end{Bmatrix} x_{10} + \begin{Bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{Bmatrix} x_{20} +$$

$$+ \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ e^{-t+\tau} \end{Bmatrix} \Phi_1(\tau - 1)\, d\tau + \int_0^{t-1} \begin{Bmatrix} e^{t-\tau} \\ \frac{1}{2} e^{t-\tau} (e^{-1} - e) \end{Bmatrix} u(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{t-1}^{t} \begin{Bmatrix} e^{t-\tau} \\ \frac{1}{2} e (e^{-t+\tau} - e^{t-\tau}) \end{Bmatrix} u(\tau)\, d\tau, \qquad t \geqslant 1.$$

Запишем условие $x(t_1) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_{10} + \int_0^{t_1} e^{-\tau} u(\tau)\, d\tau = 0, \\ x_{20} + \int_0^1 e^{\tau} \Phi_1(\tau - 1)\, d\tau + \\ + \frac{e^{t_1}}{2} \int_{t_1 - 1}^{t_1} (e^{-t_1+\tau+1} - e^{t_1-\tau-1})\, u(\tau)\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Задача (180) имеет решение при любых $x_0(\cdot)$ лишь в случае, если $u(\tau) \not\equiv 0$, $\tau \in [t_1 - 1, t_1]$. Составим теперь (166):

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) + u(t) + \dot{u}(t) = 0, \\ x_2(t) - eu(t) + u(t-1) = 0, \qquad t \in [t_1 - 1, t_1]. \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Нетрудно видеть, что требованиям (165), (170), (181) удовлетворяет единственная функция $u(t) \equiv 0$, $t \in [t_1 - - 2, t_1]$. Несовместность условий (180), (181), (170) и означает, что система (179) не является полностью управляемой. Заметим, что начальное состояние

$$x_0(\cdot) = \{\Phi(\tau),\ \tau \in [-1, 0),\ x_{10} = \Phi_1(0),$$
$$x_{20} = -\int_0^1 e^{\tau} \Phi_1(\tau - 1)\, d\tau\}$$

системы (179) полностью управляемо.

§ 19. Достаточные условия полной управляемости систем с малым запаздыванием

В предыдущем параграфе задача о полной управляемости систем с запаздыванием была сведена к некоторой эквивалентной задаче. Покажем, что в случае малого запаздывания условия полной управляемости явным образом выражаются через параметры исходной системы.

Обратимся снова к системе (117). Соответствующее ей интегро-дифференциальное уравнение (171) можно представить в виде

$$D(p)\,v(t)+\int\limits_{t_1-h}^{t_1} R(t,\ \tau)\,v(\tau)\,d\tau=f(t). \tag{182}$$

Дифференциальный оператор $D(p)$ определяется формулой

$$D(p)=\left\{\begin{matrix} \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_{i1}(0)\,p^{n-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n-1} q_{i1}(h)\,p^{n-i-1} & \ldots q_{n-1,1}((n-1)h) \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_{i2}(0)\,p^{n-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n-1} q_{i2}(h)\,p^{n-i-1} & \ldots q_{n-1,2}((n-1)h) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_{in}(0)\,p^{n-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n-1} q_{in}(h)\,p^{n-i-1} & \ldots q_{n-1,n}((n-1)h) \end{matrix}\right\}$$

или, короче,

$$D(p)=\{d_{ij}\}=\Big\{\sum_{k=j-1}^{n-1} q_{ki}((j-1)\,h)\,p^{n-k-1}\Big\}.$$

Положим

$$\bar{D}(p)=\{\bar{d}_{ij}\}=\{d_{i,\,n-j+1}\}.$$

Известно [90, 126], что существует матрица $L(p)$ с $\det L(p)=\mathrm{const}\neq 0$ такая, что

$$D_1(p)=L(p)\,\bar{D}(p)=\left\{\begin{matrix} m_{11}(p) & \ldots & & m_{1n}(p) \\ 0 & m_{22}(p) & \ldots & m_{2n}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & m_{nn}(p) \end{matrix}\right\}.$$

Здесь $m_{ik}(p)$ — некоторые полиномы от p, в частности,

$$m_{nn}(p) = \sum_{s=1}^{l} d_s p^s. \qquad (183)$$

Заметим, что степени полиномов $\Delta(p) = \det D(p)$ и $\Delta_1(p) = \det D_1(p)$ равны и не превосходят $\frac{n(n-1)}{2}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 25. Если

$$\text{ранг}\,\{b, (A + A_1)\,b, \ldots, (A + A_1)^{n-1}b\} = n, \qquad (184)$$

$$\Delta(p) \not\equiv 0, \qquad \sum_{i=n-2}^{l} \alpha_i^2 \neq 0, \qquad (185)$$

где l и α_k, $k = n - 2, \ldots, l$,— числа из (183), то при достаточно малых h система (117) полностью управляема.

Из выводов § 16 заключаем, что для доказательства теоремы 25 достаточно при указанных условиях обосновать разрешимость задачи (170), (171), (173). Итак, пусть h — достаточно малое число. В этом случае условие $\Delta(p) \not\equiv 0$ обеспечивает существование решения $v(t)$ системы (182). Требование $\sum_{i=n-2}^{l} \alpha_i^2 \neq 0$ гарантирует зависимость компоненты $v_1(t)$ этого решения не менее чем от $n - 2$ произвольных постоянных, что в свою очередь дает возможность удовлетворить условиям (170). Поскольку $\det M(0) \neq 0$ и $\det F(t_1, t_1) \neq 0$, то при достаточно малых h матрицы $M(h)$ и $F(t_1, t_1 - h)$ неособые. Таким образом, вопрос состоит лишь в возможности выбора $u(t)$ на отрезке $[0, t_1 - nh]$ в соответствии с (173).

Вследствие (184) система (117) вполне управляема при $h = 0$. Это значит, что

$$g'F(t_1, \tau)\, b \not\equiv 0, \qquad \tau \in [0, t_1],$$

для каждого g, $\|g\| = 1$. Из компактности сферы $\|g\| = 1$ следует, что

$$\min_{\|g\|=1} \max_{\tau \in T} |\, g'F(t_1, \tau)\, b \,| = \alpha > 0.$$

Так как $g'F(t_1 - nh, \tau)\, b$ является непрерывной функцией аргумента h на отрезке $\left[0, \frac{(t_1 - \tau)}{n}\right]$, то можно указать такие числа α_1 и h_1, $0 < \alpha_1 < \alpha$, $h_1 > 0$, что

$$\min_{\|g\|=1} \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g'F(t_1 - nh, \tau) b| \geqslant \alpha_1(h_1) \tag{186}$$

для всех $h \in [0, h_1]$. Число h_1 можно уменьшить настолько, чтобы одновременно с (186) имело место неравенство

$$\max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} \|K(\tau, h) b\| \leqslant \beta(h_1), \quad h \in [0, h_1],$$

$$0 < \beta(h_1) < \alpha_1(h_1).$$

Тогда для произвольного g, $\|g\| = 1$, и $h \in [0, h_1]$ имеем

$$\max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g'F(t_1 - nh, \tau) b + g'K(\tau, h) b| \geqslant$$
$$\geqslant \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} (|g'F(t_1 - nh, \tau) b| - |g'K(\tau, h) b|) \geqslant$$
$$\geqslant \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g'F(t_1 - nh, \tau) b| - \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g'K(\tau, h) b| \geqslant$$
$$\geqslant \min_{\|g\|=1} \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g'F(t_1 - nh, \tau) b| -$$
$$- \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} \|K(\tau, h) b\| \geqslant \alpha_1(h_1) - \beta(h_1)$$

и

$$\max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g_0'F(t_1 - nh, \tau) b + g_0'K(\tau, h) b| =$$
$$= \min_{\|g\|=1} \max_{\tau \in [0, t_1 - nh]} |g'F(t_1 - nh, \tau) b + g'K(\tau, h) b| \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_1(h_1) - \beta(h_1).$$

Поскольку $\alpha_1(h_1) - \beta(h_1) = \alpha_2(h_1) > 0$, то

$$g'F(t_1 - nh, \tau) b + g'K(\tau, h) b \not\equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1 - nh], \quad h \in [0, h_1].$$

Разрешимость задачи (173) доказана. На этом доказательство теоремы завершается.

Комментарии к главе I

Понятия, близкие к управляемости, всегда играли большую роль для объектов (систем, процессов), способных изменять свое поведение под целенаправленными воздействиями. Интерес к свойству управляемости динамических систем усилился после зарождения теории оптимальных процессов [19]. В рамках этой теории были найдены [38b] первые условия управляемости линейных стационарных систем. Сам термин «управляемость» и открытие истинного смысла этих условий появились позднее [58a].

Наши определения (§ 1) отличаются от известных, хотя и близки ко многим из них. Как видно из содержания глав I, II, термин «управляемость» весьма перегружен; для отражения новых черт управляемых объектов приходится вводить новые понятия, которые, будучи родственными понятию управляемости, перегружают его.

Метод приращений для исследования управляемости введен в [32i]. Для линейных систем он эквивалентен методу неопределенных множителей и приводит к одному из вариантов формулы Коши. Теорема 3 о минимальном числе входов управляемой системы доказана другим методом в [218].

Достаточные условия управляемости линейных нестационарных систем разными методами доказывались неоднократно [74n]. Естественен вопрос об обращаемости этого результата. Конечно, в общем случае ответ отрицателен [74n, 212].

Критические случаи управляемости еще мало исследованы. Здесь можно отметить работу [59] для систем на плоскости. Однако методы этой работы, пожалуй, трудно обобщить на системы большой размерности.

В §§ 11—16 исследуется управляемость динамических систем с запаздыванием. Новый взгляд на условия управляемости обыкновенных систем позволил ввести [66b] понятие определяющего уравнения системы управления. Это уравнение в вопросе управляемости играет такую же роль, как характеристическое уравнение в вопросе об устойчивости систем. Относительная управляемость исследовалась и в [143]. Полная управляемость систем с запаздыванием — проблема более трудная, чем относительная управляемость, исследованная в §§ 11—16. Это свойство рассмотрено в [74n].

Глава II

ТЕОРИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

§ 1. Постановка задачи. Определения. Метод исследования

Пусть динамическая система описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(0) = 0, \quad t \in T = [0, t_1], \quad f(0, 0) = 0, \qquad (1)$$

где x — n-вектор состояния, u — r-вектор управления. Предположим, что управляющие воздействия $u(t)$, $t \in T$, суть кусочно-непрерывные функции. Такие управления будем называть *допустимыми*. Каждому допустимому управлению $u(t)$, $t \in T$, соответствует единственная траектория $x(t)$ системы (1), исходящая из точки $x = 0$.

Задача. Найти условия, при которых для каждой точки x_1 найдется допустимое управление, переводящее траекторию из $x = 0$ в $x = x_1$.

Определения.

1. Начало координат называется *TL-управляемым в направлении p*, $\| p \| = 1$, если существует такое число $\alpha_0 = \alpha_0(t_1, L, p) > 0$, что для каждого α, $| \alpha | \leqslant \alpha_0$, найдется допустимое управление $u(t)$, $\| u(t) \| \leqslant L$, такое, что $p'x(t_1) = \alpha$.

2. Динамическая система *TL-управляема* (в начале координат), если начало координат управляемо в любом направлении $\inf\limits_{\|p\|=1} \alpha_0(t_1, L, p) > 0$.

3. Начало координат называется *управляемым в направлении p*, $\| p \| = 1$, если оно TL-управляемо в этом направлении при некоторых $t_1 = t_1(p) < \infty$, $L = L(p) < < \infty$ $(\alpha_0(t_1, L, p) > 0)$.

4. Динамическая система (1) *управляема* (в начале координат), если начало координат управляемо в любом направлении ($\inf\limits_{\|p\|=1} \alpha_0 (t_1 (p), L (p), p) > 0$).

5. Начало координат называется *вполне управляемым в направлении* p, если оно в этом направлении TL-управляемо с любыми $t_1 > 0$, $L > 0$ ($\alpha_0 (t_1, L, p) > 0$ для любых $t_1 > 0$, $L > 0$).

6. Динамическая система называется *вполне управляемой* (в начале координат), если начало координат вполне управляемо в любом направлении ($\inf\limits_{\|p\|=1} \alpha_0 (t_1, L, p) > 0$ для любых $t_1 > 0$, $L > 0$).

7. Начало координат в направлении p *управляемо в целом*, если оно управляемо в этом направлении и найдется последовательность $t_{1k} (p)$, $L_k (p)$ такая, что

$$\alpha_0 (t_{1k} (p), L_k (p)) \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

8. Динамическая система *управляема в целом* (в начале координат), если для любого направления начало координат управляемо в целом ($\inf\limits_{\|p\|=1} \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_0 (t_{1k} (p), L_k (p), p) = \infty$).

Метод исследования управляемости почти очевидным образом следует из введенных определений. На траекториях системы (1) вводится функционал

$$J (u) = p'x (t_1). \tag{2}$$

С помощью формул приращения правая часть выражается через параметры системы. Условия, при которых функционал (2) зависит от управления, суть условия управляемости.

§ 2. Формула приращения по управлению

Сравним функционал (2) на двух управлениях: $u_1 (t) \equiv 0$ и $u = u (t)$. Поскольку на первом управлении система (1) имеет тривиальное решение $x \equiv 0$, то приращение $\Delta J (u) = J (u) - J (u_1)$ сведется к выражению (2). Введем n-векторную функцию $\psi (t)$, $\psi (t_1) = p$. Через формулу интегрирования по частям правую часть выражения (2) можно представить в виде

$$p'x(t_1) = \psi'(t_1)\, x(t_1) = \\ = \int_0^{t_1} \dot{\psi}'(t)\, x(t)\, dt + \int_0^{t_1} \psi'(t)\, \dot{x}(t)\, dt. \qquad (3)$$

На интервале T функцию $\psi(t)$ определим уравнением

$$\dot{\psi}(t) = -A'\psi(t), \qquad A = \frac{\partial f(0,\, 0)}{\partial x}.$$

Значение $\dot{\psi}(t)$ из этого уравнения, а также $\dot{x}(t)$ из (1) подставим в (3) и произведем простые преобразования

$$p'x(t_1) = \int_0^{t_1} \psi'(t)\, f(0,\, u(t))\, dt + \\ + \int_0^{t_1} \psi'(t) \left[\frac{\partial f(0,\, u(t))}{\partial x} - \frac{\partial f(0,\, 0)}{\partial x}\right] x(t)\, dt + \int_0^{t_1} o(\|x(t)\|)\, dt.$$

Окончательную формулу запишем следующим образом:

$$J(u) = p'x(t_1) = \\ = \int_0^{t_1} \psi'(t)\, Bu(t)\, dt + \int_0^{t_1} \psi'(t) \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu x(t) u_\nu(t)\, dt + \\ + \int_0^{t_1} o(\|x(t)\|)\, dt + \int_0^{t_1} o(\|u(t)\|)\, dt. \qquad (4)$$

Здесь

$$B = \frac{\partial f(0,\, 0)}{\partial u}, \qquad C_\nu = \frac{\partial^2 f(0,\, 0)}{\partial x\, \partial u_\nu}.$$

§ 3. Управляемость линейных систем

Ограничимся изучением систем с одним входом. Рассмотрим частный случай для (1):

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu.$$

Из (4) получаем

$$J(u) = p'x(t_1) = \int_0^{t_1} \psi'(t)\, bu(t)\, dt.$$

Из этого выражения видно, что если

$$\lambda(t) = \psi'(t)\, b \not\equiv 0, \tag{5}$$

то для любого α_0 (вне зависимости от p и t_1) можно найти такое L, что на допустимом управлении *) $u(t) = \beta L \operatorname{sign} \lambda(t)$ функционал $J(u)$ принимает все значения из $[-\alpha_0, \alpha_0]$ при изменении параметра β в пределах $[-1, 1]$. И наоборот, если $J(u)$ принимает значения из некоторого отрезка $[-\alpha_0, \alpha_0]$, то выполняется (5). Производные функции $\lambda(t)$ имеют вид

$$\dot{\lambda}(t) = -\psi'(t)\, Ab, \ldots, \lambda^{(n)}(t) = (-1)^n \psi'(t) A^n b. \tag{6}$$

С другой стороны, каждая $n \times n$-матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению (теорема Гамильтона — Кэли [39])

$$A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1} A + \gamma_n E = 0.$$

Умножая это равенство слева на $\psi'(t)$, а справа на b, в силу (5), (6) получим дифференциальное уравнение

$$\lambda^{(n)}(t) - \gamma_1 \lambda^{(n-1)}(t) + \ldots + \gamma_{n-1}(-1)^{n-1} \dot{\lambda}(t) + (-1)^n \gamma_n \lambda(t) = 0$$

с начальными условиями

$$\lambda(t_1) = p'b,\ \dot{\lambda}(t_1) = -p'Ab,\ \ldots,\ \lambda^{(n-1)}(t_1) = (-1)^{n-1} p'A^{n-1}b.$$

Так как однородное линейное дифференциальное уравнение имеет нулевое решение в том и только в том случае, когда равны нулю все начальные условия, то из условия $\lambda(t) \not\equiv 0$ приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Начало координат динамической системы (1) TL-управляемо (управляемо, вполне управляемо) в целом по направлению p тогда и только тогда, когда отлично от нуля хотя бы одно из чисел

$$p'b,\ p'Ab,\ \ldots,\ p'A^{n-1}b.$$

Следствие. Для TL-управляемости (управляемости, вполне управляемости) в целом динамической системы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг } \{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\} = n.$$

*) $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Примечание. Из доказательства теоремы следует, что функция $\alpha_0(t_1, L, p)$, участвующая в определениях 1—8, может быть выбрана не зависящей от t_1, p и неограниченно возрастающей по L.

§ 4. Управляемость по линейному приближению

Пусть для динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(0) = 0, \tag{7}$$

линейная модель

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{8}$$

управляема. Докажем, что в этом случае вполне управляемой является и система (7). Будем выбирать управления $u = u(t)$ вида

$$u(t) = \mu v(t), \quad |v| \leqslant L, \tag{9}$$

где μ — малый параметр. Решение $x(t)$ уравнения (7) при подстановке (9) непрерывно по μ и имеет по μ порядок малости не ниже первого: $x(t) \sim \mu$. Формулу (4) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$J(u) = \mu \int_0^{t_1} \psi'(t)\, bv(t)\, dt + o(\mu),$$

где $o(\mu)$ непрерывна по μ и имеет по μ порядок малости не ниже второго: $o(\mu) \sim \mu^2$. Управляемость линейной модели (8) означает, что величине $\int_0^{t_1} \psi'(t)\, bv(t)\, dt$ с помощью управления (9) можно придать любое значение из отрезка $[-M, M]$, где величина M зависит от L, t_1 и параметров системы, но не зависит от p, μ, причем для любого t_1 $M \to \infty$, если $L \to \infty$.

Докажем, что для любых t_1, L найдется $\alpha_0(t_1, L)$ такое, что для каждого α из $[-\alpha_0, \alpha_0]$ существует управление $u(t)$, на котором $J(u) = \alpha$. Зафиксируем в (9) значение μ, положив $\mu = \mu_1$, где μ_1 таково, что $|o(\mu_1)| = 0{,}1\mu_1$. Пусть для определенности $\alpha > 0$. Обозначим через $v(t)$ управление из (9), на котором

$$\int_0^{t_1} \psi'(t)\, bv(t)\, dt = M.$$

На управлении $w(t) = \beta v(t)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, имеем

$$\int_0^{t_1} \psi'(t)\, bw(t)\, dt = \beta M.$$

Подставляя управление $u(t) = \beta\mu_1 v(t)$ в (7), получим, что траектория $x(t) = x(t, \beta)$ и величина $o(\mu_1) = o(\mu_1, \beta)$ непрерывно зависят от β и $x(t, 0) = 0$, $o(\mu_1, 0) = 0$. Значит, непрерывным по β является функционал $J(u) = J(u, \beta)$, и при этом его значения на концах отрезка $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ равны $J(u, 0) = 0$, $J(u, 1) = \mu_1 M + o(\mu_1) \geqslant 0{,}9\mu_1 M = \alpha_0$. Отсюда следует, что найдется такое $\bar{\beta}, 0 \leqslant \bar{\beta} \leqslant 1$, при котором $J(u, \bar{\beta}) = \alpha$. По построению функция $\alpha_0(t_1, L, p)$ не зависит от p. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Начало координат системы (7) вполне управляемо по направлению p, если этим свойством обладает начало координат ее линейной модели (8).

Следствие. Динамическая система (7) вполне управляема, если этим свойством обладает ее линейное приближение (8).

§ 5. Линейные системы с нелинейным входом

1. Управляемость в малом. Задачу управляемости рассмотрим для системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^{l} b^i u^i. \tag{10}$$

Из формулы (4) имеем

$$J(u) = p'x(t_1) = \int_0^{t_1} \psi'(t)\, b^1 u(t)\, dt + \ldots + \int_0^{t_1} \psi'(t)\, b^l u^l(t)\, dt. \tag{11}$$

Для того чтобы начало координат было вполне управляемым в направлении p, достаточно, чтобы

$$\psi'(t)\, b^1 \not\equiv 0, \qquad t \in T,$$

что в силу теоремы 1 эквивалентно требованию: хотя бы одно из чисел

$$p'b^1,\ p'Ab^1,\ \ldots,\ p'A^{n-1}b^1 \tag{12}$$

отлично от нуля. Пусть все числа (12) равны нулю. Тогда первый интеграл в (11) равен нулю. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{t_1} \psi'(t)\, b^2 u^2(t)\, dt.$$

Поскольку при достаточно малых t_1 функция $\psi'(t)\, b^2$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, не меняет своего знака, то отсюда можно сделать вывод: начало координат в направлении p не является вполне управляемым с помощью малых управлений, если

$$p'A^i b^1 = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1; \quad \sum_{i=0}^{n-1} |p'A^i b^2| \neq 0 \quad \text{и} \quad t_1 \ \text{мало}.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Начало координат в направлении p является вполне управляемым, если первое отличное от нуля число

$$p'A^i b^j, \quad i = 0, \ldots, n-1; \quad j = 1, \ldots, l,$$

имеет нечетный индекс j. Когда этот индекс четный, тогда начало координат не является вполне управляемым в направлении p.

Следствие. Динамическая система (10) вполне управляема, если является нечетным первый индекс j, при котором

$$\text{ранг}\ \{b^j, Ab^j, \ldots, A^{n-1}b^j\} = n; \quad j = 1, \ldots, l.$$

Если указанный индекс четный, то система (10) не может быть вполне управляемой.

2. Управляемость в целом. Пусть в динамической системе (10) допустимое управление удовлетворяет условию: $|u(t)| \geqslant L$, где L — достаточно большое число. В этом случае исследование вполне управляемости естественно начать с рассмотрения интеграла $\int\limits_0^{t_1} \psi'(t)\, b^l u^l(t)\, dt$.

Нетрудно заметить, что при четном l и достаточно малом t_1 этот интеграл принимает значения одного знака с $\psi'(t)b^l$, при нечетном l — противоположного. Из подобных рассмотрений нетрудно установить, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Начало координат вполне управляемо в целом по направлению p, если первое отличное от нуля число в ряду

$$p'A^i b^j, \qquad i = 0, \ldots, n-1; \quad j = l, \ldots, 1,$$

имеет нечетный индекс j.

Следствие. Если условие

$$\text{ранг}\ \{b^j, Ab^j, \ldots, A^{n-1}b^j\} = n, \qquad j = l, \ldots, 1,$$

впервые выполняется при нечетном j, то система (10) вполне управляема в целом.

§ 6. Об инвариантности и автономности динамических систем

Пусть задана система (8).

Определение 9. Начало координат *инвариантно к управлению в направлении* p, если для любого допустимого управления имеет место тождество $p'x(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Хотя введенное понятие не является отрицанием к понятию управляемости, методы их исследования аналогичны. Из теоремы 1 следует такой результат.

Теорема 5. Начало координат для системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$

инвариантно к управлению в направлении p тогда и только тогда, когда

$$p'b = p'AB = \ldots = p'A^{n-1}b = 0.$$

Перейдем к динамическим системам с несколькими управлениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{\nu=1}^{r} b^{\nu} u_{\nu}$$

и рассмотрим направления p^{ν}, $\nu = 1, \ldots, r$.

Определение 10. Начало координат в направлении p^{ν} *автономно управляемо по отношению к* u_{ν}, если оно в этом направлении управляемо по отношению к u_{ν} и инвариантно к управлениям u_j, $j \neq \nu$.

Условия автономности получаются из теорем 1, 5.

Теорема 6. Начало координат автономно управляемо по u_{ν} в направлении p^{ν}, если и только если

$$\sum_{i=0}^{n-1} |(p^{\nu})' A^i b^{\nu}| \neq 0, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{r} |(p^j)' A^i b^j| = 0.$$

Комментарии к главе II

1. Понятия управляемости, использованные в данной главе, эквивалентны аналогичным из главы I лишь для систем, области достижимости которых выпуклы. В частности, это имеет место для линейных систем (с линейным и нелинейным входом).

В основу метода исследования управляемости динамических систем здесь положено понятие, аналогичное относительной управляемости из § 1.4. При таком подходе изучение сложного вопроса управляемости динамической системы заменяется рассмотрением предельно простой задачи управляемости точки по направлению. Результаты решения последней задачи можно непосредственно использовать для изучения задач главы I в случае линейных систем. В общем случае нелинейных систем переход от задач данной главы к аналогичным задачам предыдущей главы можно осуществить через понятие автономно управляемых систем. Конкретнее, если в нелинейной системе с r управлениями начало координат автономно управляемо по r линейно независимым направлениям p^{ν}, то любая точка из некоторой окрестности начала координат, лежащая в линейной оболочке векторов p^{ν}, $\nu = 1, \ldots, r$, может быть достигнута из начала координат. Изложенный в данной главе подход и полученные результаты наиболее естественно приложимы в теории необходимых условий управляемости в смысле главы I.

2. Следующим шагом к исследованию управляемости в смысле определений главы I, которое более сложно, чем рассмотренное в настоящей главе, является введение понятий управляемости по двум, трем и т. д., n линейно независимым направлениям. В последнем случае имеем задачу главы I. Этот вопрос в данной монографии не рассматривается.

3. В главе II управляемость понимается как свойство системы, при котором траектория из начала координат может быть переведена в другую точку. Ранее (глава I) ставилась задача о переводе траектории из заданной точки в начало координат. Это сделано лишь для того, чтобы упростить обозначения. Далее, в определения 1—8 главы II внесен несколько иной смысл управляемости, чем в аналогичные определения главы I, что делает эту главу отличной от предыдущей и по существу рассматриваемых вопросов.

4. Теория инвариантности имеет обширную библиографию. Наш подход наиболее близок к вариационному методу Л. И. Розоноэра [104b, 114c]. Там же можно найти некоторые результаты для нелинейных систем. Наряду с полной инвариантностью для нелинейных систем может представить интерес инвариантность некоторого порядка. Смысл последнего понятия можно уяснить по аналогичному понятию индифферентности, введенному в § 3.7 в связи с наблюдаемостью. Грубо говоря, система инвариантна с порядком k по направлению p, если $p'x(t) = o(\beta^k)$ для всех допустимых управлений, стесненных условием $|u(t)| \leqslant \beta$. В новом понятии влияние возмущений на функционал учитывается более тонко, чем это имеет место в ε-инвариантности [91].

Свойство автономности играет большую роль в теории управления. Как видно из § 6, условия автономности получаются непосредственно из теории управляемости и теории инвариантности.

ГЛАВА III

НАБЛЮДАЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи. Определения. Метод исследования

Будем рассматривать динамические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad f(0) = 0, \tag{1}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор состояния.

Пусть информация о неизвестном состоянии x_0 заключена в значениях m-вектора z:

$$z = h(x), \qquad h(0) = 0, \tag{2}$$

измеряемых в течение времени $T = [0, t_1]$. Вектор z принято называть *выходом* системы (1), число m — *размерностью выхода*.

З а д а ч а. Функции $f(x)$, $h(x)$ заданы. По известному выходу $z(t)$, $t \in T$, системы (1) найти ее начальное состояние x_0.

Нам понадобятся следующие определения.

Определения.

1. Направление p, $\| p \| = 1$ (в начале координат $x = 0$), называется *T-наблюдаемым* по измерениям (2) на T, если существует такое число $\alpha_0 = \alpha_0(t_1, p) > 0$, что любое начальное состояние системы (1) вида

$$x_0 = \alpha p, \qquad |\alpha| \leqslant \alpha_0, \tag{3}$$

можно восстановить по функции $z(t)$, $t \in T$.

2. Динамическая система (1) называется *T-наблюдаемой* (в начале координат), если каждое направление p, $\| p \| = 1$, в точке $x = 0$ T-наблюдаемо.

3. Если существует хотя бы один отрезок T, при котором направление p, $\| p \| = 1$ (в $x = 0$), T-наблюдаемо, то это направление называется *наблюдаемым* в $x = 0$ ($\alpha_0(t_1, p) > 0$ при некотором $t_1 = t_1(p)$).

4. Динамическая система называется *наблюдаемой* (в $x = 0$), если каждое направление p, $\| p \| = 1$, в $x = 0$ наблюдаемо ($\inf\limits_{\|p\|=1} \alpha_0(t_1(p), p) > 0$).

5. Направление p, $\| p \| = 1$ (в $x = 0$), для динамической системы (1) *вполне наблюдаемо*, если оно T-наблюдаемо в $x = 0$ при любых $t_1 > 0$ ($\alpha_0(t_1, p) > 0$ при всех $t_1 > 0$).

6. *Вполне наблюдаемая* (в $x = 0$) динамическая система — система (1), каждое направление p, $\| p \| = 1$, для которой в $x = 0$ вполне наблюдаемо ($\inf\limits_{\|p\|=1} \alpha_0(t_1, p) > 0$ при всех $t_1 > 0$).

7. Направление p, $\| p \| = 1$ (в $x = 0$), для динамической системы (1) *наблюдаемо в целом*, если оно наблюдаемо и существует $t_1 = t_1(p)$, при котором $\alpha_0(t_1(p), p) = \infty$.

8. Динамическая система (в $x = 0$) *наблюдаема в целом*, если каждое направление p, $\| p \| = 1$, в $x = 0$ наблюдаемо в целом.

Метод исследования наблюдаемости, принятый в §§ 3—6, состоит в следующем. Обозначим через $x(t, \alpha)$ решение системы (1), порожденное начальным условием вида (3). Подстановка $x(t, \alpha)$ в (2) порождает функцию *) $z(t, \alpha) = h(x(t, \alpha))$. Нетрудно заметить, направление p, $\| p \| = 1$, системы (1) T-наблюдаемо тогда и только тогда, когда существует хотя бы один момент $t = \bar{t}$ такой, что функция $z = z(\bar{t}, \alpha)$ в окрестности точки $\alpha = 0$ допускает обращение $\alpha = \alpha(z)$. Условия обратимости функций легко выражаются через производные. Известно, что функция $z = z(\bar{t}, \alpha)$ в окрестности $\alpha = 0$ обратима, если в ряду ее производных

$$\left.\frac{\partial^i z(\bar{t}, \alpha)}{\partial \alpha^i}\right|_{\alpha=0}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

первая отличная от нуля производная имеет нечетный индекс. Если этот индекс четный, то функция в окрестности $\alpha = 0$ необратима. Для обратимости функции $z =$

---

*) Для простоты рассматриваем систему с одним выходом, т. е. здесь z — скаляр.

$= z(\bar{t}, \alpha)$ при всех α необходимо и достаточно, чтобы она была монотонной (строго) в области определения.

Один из способов вычисления производных (4) состоит в разложении функции $z(\bar{t}, \alpha)$ по степеням α. Поскольку $z(\bar{t}, 0) \equiv 0$, $\bar{t} \in T$, то величину $z(\bar{t}, \alpha)$ можно трактовать как приращение $z(\bar{t}, \alpha) - z(\bar{t}, 0)$. Таким образом, метод приращений функционалов на траекториях динамических систем находит естественное приложение в теории наблюдаемости.

§ 2. Формула приращения по начальному состоянию

Из определения функции *) $z = h(x)$ имеем

$$z(\bar{t}, \alpha) = \frac{\partial h'(0)}{\partial x} x(\bar{t}, \alpha) + o(\alpha). \tag{5}$$

С другой стороны, для любой дифференцируемой функции $\psi(t)$ и решения $x(t, \alpha)$ уравнения (1) с начальным условием (3) справедливо тождество

$$\psi'(\bar{t})\, x(\bar{t}, \alpha) = \psi'(0)\, p\alpha + \int_0^{\bar{t}} \frac{d\psi'(t)}{dt} x(t, \alpha)\, dt + \int_0^{\bar{t}} \psi'(t) \frac{dx(t, \alpha)}{dt}\, dt. \tag{6}$$

Определим функцию $\psi(t) = \psi(t, \bar{t})$ уравнением

$$\frac{d\psi(t, \bar{t})}{dt} = -A'\psi(t, \bar{t}), \quad \psi(\bar{t}, \bar{t}) = \frac{\partial h(0)}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}. \tag{7}$$

Подставляя (6), (7), (1) в (5), получим

$$z(\bar{t}, \alpha) = \psi'(0, \bar{t})\, p\alpha - \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t})\, A x(t, \alpha)\, dt + \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) \left[f(0) + \frac{\partial f(0)}{\partial x} x(t, \alpha) + o(\| x(t, \alpha) \|) \right] dt.$$

Поскольку $\| x(t, \alpha) \| \leqslant k\alpha$, $t \in T$, $k = \mathrm{const}$, то окончательно:

$$z(\bar{t}, \alpha) = p'\psi(0, \bar{t})\, \alpha + o(\alpha). \tag{8}$$

*) Здесь, как и выше, z — скаляр.

§ 3. Наблюдаемость линейных систем

1. Системы с одним выходом. Пусть динамическая система (1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{9}$$

где A — $n \times n$-матрица. Измерению доступны величины

$$z = c'x,$$

где c — n-вектор. В этом случае формула (8) принимает вид

$$z(\bar{t}, \alpha) = p'\psi(0, \bar{t})\,\alpha,$$

где $\psi(t, \bar{t})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi(t, \bar{t})}{dt} = -A'\psi(t, \bar{t}), \quad \psi(\bar{t}, \bar{t}) = c.$$

Отсюда видно, что направление p в системе (9) наблюдаемо в целом тогда и только тогда, когда

$$p'\psi(0, \bar{t}) \not\equiv 0, \qquad \bar{t} > 0. \tag{10}$$

Выразим это условие через данные задачи. Последовательные производные функции

$$\lambda(t) = p'\psi(0, t) \tag{11}$$

имеют вид

$$\dot{\lambda}(t) = p'A'\psi(0, t), \ \ldots, \ \lambda^{(n)}(t) = p'(A^n)'\psi(0, t). \tag{12}$$

С другой стороны, матрица A' удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\lambda + \gamma_n = 0,$$

т. е.

$$(A^n)' + \gamma_1(A^{n-1})' + \ldots + \gamma_{n-1}A' + \gamma_n E = 0.$$

Умножая последнее уравнение слева на p' и справа на $\psi(0, t)$, получим в силу (11), (12) дифференциальное уравнение для функции $\lambda(t)$:

$$\lambda^{(n)}(t) + \gamma_1\lambda^{(n-1)} + \ldots + \gamma_{n-1}\dot{\lambda}(t) + \gamma_n\lambda(t) = 0 \tag{13}$$

с начальными условиями

$$\lambda(0) = p'c, \qquad \dot{\lambda}(0) = p'A'c, \ \ldots, \ \lambda^{(n-1)}(0) = p'(A^{n-1})'c. \tag{14}$$

Для того чтобы решение однородного уравнения (13) с начальными условиями (14) было отличным от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы среди чисел

$$p'c,\ p'A'c,\ \ldots,\ p'(A^{n-1})'c \tag{15}$$

были отличные от нуля. Сравнивая (10) с (11), убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Направление p линейной системы (9) T-наблюдаемо (наблюдаемо, вполне наблюдаемо) в целом тогда и только тогда, когда не все числа (15) равны нулю.

Линейная динамическая система (9) T-наблюдаема (наблюдаема, вполне наблюдаема) в целом в том и только в том случае, когда

$$\text{ранг}\ \{c,\ A'c,\ \ldots,\ (A^{n-1})'c\} = n.$$

2. Системы с несколькими выходами. Пусть в системе (9) измерению доступны величины

$$z_j = c_j'x, \quad j = 1,\ \ldots,\ m, \tag{16}$$

где c_j — n-векторы. Повторяя рассуждения п. 1 для каждого выхода, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 2. Направление p для системы (9) с m выходами (16) T-наблюдаемо (наблюдаемо, вполне наблюдаемо) в целом в том и только в том случае, когда среди чисел

$$p'c_j,\ p'A'c_j,\ \ldots,\ p'(A^{n-1})'c_j, \quad j = 1,\ \ldots,\ m,$$

найдется хотя бы одно, отличное от нуля.

Для T-наблюдаемости (наблюдаемости, полной наблюдаемости) в целом линейной системы (9) с выходами (16) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг}\ \{C,\ A'C,\ \ldots,\ (A^{n-1})'C\} = n.$$

Здесь C есть $n \times m$-матрица, составленная из n-векторов c_j, $j = 1,\ \ldots,\ m$.

3. Наблюдаемые системы с минимальным числом выходов. Пусть в системе (9) матрица A задана. Требуется указать минимальное число векторов $c_1,\ \ldots,\ c_m$, при которых система (9) с выходами (16) наблюдаема. Основываясь на рассуждениях § 1.3, связанных с нахождением минимального числа входов, получаем следующий результат.

Теорема 3. Минимальное число выходов наблюдаемой системы (9) равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы A'.

§ 4. Наблюдаемость динамической системы и ее управляемость по начальным условиям

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = x_0, \tag{17}$$

поведением которой $x(t, x_0)$ можно управлять с помощью выбора начального значения x_0, $\| x_0 \| \neq 0$. Будем говорить, что система имеет *вход d для воздействия по начальным условиям*, если допустимые начальные условия представимы в виде

$$x_0 = dy,$$

где y — скаляр, принимающий все значения из интервала $(-\infty, \infty)$, d — n-вектор, характеризующий вход.

Определение 9. Начало координат в направлении p *управляемо начальным воздействием*, если для любого α найдутся число t_1 и вектор dy такие, что

$$p'x(t_1, dy) = \alpha.$$

Определение 10. Динамическая система (17) *управляема начальным воздействием*, если начало координат управляемо начальным воздействием по всем направлениям.

Для исследования нового типа управляемости используем метод приращений. Приращение функционала

$$J(x_0) = p'x(t_1, x_0)$$

выражается (§ 1.2, § 2.2) через параметры системы (17) следующим образом:

$$J(x_0) = \psi'(0, t_1)\, dy, \tag{18}$$

где $\psi(t, t_1)$ — решение уравнения

$$\frac{d\psi(t, t_1)}{dt} = -A'\psi(t, t_1), \qquad \psi(t_1, t_1) = p.$$

Из формулы (18) видно, что начало координат в направлении p управляемо допустимым вектором x_0, если и только если

$$\lambda(t) = \psi'(0, t)\, d \not\equiv 0, \qquad t > 0.$$

Это условие эквивалентно (см. § 3) следующему: среди чисел

$$p'd,\ p'Ad,\ \ldots,\ p'A^{n-1}d \tag{19}$$

найдется отличное от нуля. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Для того чтобы начало координат в направлении p, $\| p \| = 1$, было управляемо в целом начальным воздействием, необходимо и достаточно, чтобы не все числа (19) равнялись нулю.

Динамическая система управляема в целом начальным воздействием тогда и только тогда, когда

$$\text{ранг } \{d, Ad, \ldots, A^{n-1}d\} = n. \tag{20}$$

Сравнивая этот результат с теоремой 1, приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

с входом d для начальных воздействий управляема этими воздействиями тогда и только тогда, когда сопряженная система

$$\frac{dx}{dt} = -A'x$$

наблюдаема по измерениям

$$z = d'x.$$

Через условие (20) и следствие теоремы 2.1 приходим к следующему выводу.

Теорема 6. Динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

с входом d для начальных воздействий управляема этими воздействиями, если управляема динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + du.$$

Верно и обратное утверждение.

§ 5. Наблюдаемость динамических систем по линейному приближению

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f(0) = 0, \tag{21}$$

с выходом

$$z = h(x) \tag{22}$$

и линейную модель

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}, \tag{23}$$

$$z = c'x, \quad c = \frac{\partial h(0)}{\partial x}. \tag{24}$$

Докажем, что справедливо утверждение.

Теорема 7. Если направление p, $\| p \| = 1$, для линейной модели (23), (24) наблюдаемо, то оно вполне наблюдаемо и для системы (21), (22).

Для полной наблюдаемости нелинейной системы (21), (22) достаточно, чтобы была наблюдаема ее линейная модель (23), (24).

Доказательство. Достаточно доказать лишь первую часть утверждения. Для системы (21), (22) из (8) имеем следующую формулу:

$$z(\bar{t}, \alpha) = p'\psi(0, \bar{t})\,\alpha + o(\alpha).$$

В силу теоремы 1 из наблюдаемости направления p в линейной системе (23), (24) следует:

$$p'\psi(0, t) \not\equiv 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

для любого $t_1 > 0$. Поэтому для любого p найдутся числа $\bar{t}$, α_0 такие, что $p'\psi(0, \bar{t}) \neq 0$, и функция $z(\bar{t}, \alpha)$ монотонна по α при $|\alpha| \leqslant \alpha_0$. Последнее означает, что функция $z = z(\bar{t}, \alpha)$ при $|\alpha| \leqslant \alpha_0$ обратима, что равносильно наблюдаемости направления p в системе (21), (22). На этом доказательство теоремы завершается.

§ 6. Критические случаи наблюдаемости

Определение 11. Направление p, $\| p \| = 1$, для динамической системы (21) с выходом (22) называется *критическим*, если оно не является наблюдаемым в линейной модели (23), (24).

Если у системы (21), (22) существует хотя бы одно критическое направление, то будем говорить, что в (21), (22) имеет место *критический случай наблюдаемости*.

Для исследования критических случаев наблюдаемости необходимо уточнить формулу (8) так, чтобы выписать явно члены, содержащие старшие степени α. С одной стороны, из (5) имеем

$$z(\bar{t}, \alpha) = \frac{\partial h(0)}{\partial x} x(\bar{t}, \alpha) + \frac{1}{2} x'(\bar{t}, \alpha) \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x^2} x(\bar{t}, \alpha) + o(\|x\|^2). \quad (25)$$

С другой стороны, легко проверяется тождество

$$x'(\bar{t}, \alpha) \Psi(\bar{t}, \bar{t}) x(\bar{t}, \alpha) - x'(0, \alpha) \Psi(0, \bar{t}) x(0, \alpha) = \int_0^{\bar{t}} [\dot{x}'(t, \alpha) \Psi(t, \bar{t}) x(t, \alpha) + x'(t, \alpha) \Psi(t, \bar{t}) \dot{x}(t, \alpha)] \, dt + \int_0^{\bar{t}} x'(t, \alpha) \dot{\Psi}(t, \bar{t}) x(t, \alpha) \, dt.$$

Матричную функцию $\Psi(t, \bar{t})$ определим уравнением

$$\frac{d\Psi(t, \bar{t})}{dt} = -A'\Psi(t, \bar{t}) - \Psi(t, \bar{t}) A - \frac{1}{2} \psi'(t, \bar{t}) D \quad (26)$$

с начальным условием

$$\Psi(\bar{t}, \bar{t}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x^2}. \quad (27)$$

Здесь символом $\psi' D$ обозначено выражение

$$[\psi' D]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(0)}{\partial x_i \, \partial x_j} \psi_k.$$

После подстановки (7), (23), (26), (27) в (25) получаем искомую формулу:

$$z(\bar{t}, \alpha) = \alpha p' \psi(0, \bar{t}) + \alpha^2 p' \Psi(0, \bar{t}) p + o(\alpha^2). \quad (28)$$

Пусть теперь p — критическое направление в системе (21), (22). Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$p' \psi(0, \bar{t}) \equiv 0, \qquad \bar{t} \in T,$$

и формула (28) принимает вид

$$z(\bar{t}, \alpha) = \alpha^2 p' \Psi(0, \bar{t}) p + o(\alpha^2). \quad (29)$$

Отсюда следует, что параметр α на критическом направлении p можно восстановить по значениям $z(t, \alpha)$ лишь в те моменты t, когда

$$p' \Psi(0, t) p = 0, \qquad t \in T.$$

Множество точек t, при которых выполняется это равенство, имеет нулевую меру. Чтобы исключить этот особый случай наблюдаемости, введем определение.

Определение 12. Направление p, $\| p \| = 1$ (в точке $x = 0$) динамической системы называется *существенно наблюдаемым*, если оно наблюдаемо по значениям $z(t)$, определенным на множестве положительной меры. Динамическая система называется *существенно наблюдаемой*, если каждое направление p существенно наблюдаемо.

Нетрудно заметить, что в теоремах 1—7 слова типа «наблюдаемость» можно заменить на слова «существенная наблюдаемость». Из (29) в силу аналитичности функции $\Psi(0, t)$ следует, что для существенной наблюдаемости критического направления p необходимо, чтобы

$$p'\Psi(0, t)\, p \equiv 0, \qquad t \in T.$$

Дифференцируя это тождество и рассматривая полученные выражения в момент $t = 0$, убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Для того чтобы критическое направление p в системе (21), (22) было существенно наблюдаемым, необходимо, чтобы

$$p'G_k p = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{30}$$

где $n \times n$-матрицы G_k получены из рекуррентных соотношений

$$G_0 = \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x^2}, \quad G_{k+1} = A'G_k + G_k A + \frac{1}{2} q_k' D,$$

$$q_0 = \frac{\partial h(0)}{\partial x}, \qquad q_{k+1} = Aq_k.$$

Если динамическая система существенно наблюдаема, то для каждого критического направления выполняются условия (30). Из этой теоремы, в частности, следует, что линейная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

с выходом

$$z = c'x + x'x$$

не является существенно наблюдаемой, если

$$\text{ранг}\,\{c, A'c, \ldots, (A^{n-1})'c\} < n.$$

Для нахождения достаточных условий наблюдаемости в критических случаях следует уточнить формулу (29) и выделить в ней члены с α^3, α^4, ... Схема получения таких формул в общем случае описана в § 6.5. Теорема 8 может быть использована и как достаточное условие наблюдаемости, если последнее понимать в ослабленном смысле.

Определение 13. Направление p в (21), (22) называется *односторонне T-наблюдаемым*, если существует такое $\alpha_0 > 0$, что по измерениям $z(t)$ на T и знанию $\operatorname{sign}\alpha$ можно восстановить все начальные состояния вида

$$x_0 = \alpha p, \qquad |\alpha| \leqslant \alpha_0.$$

Теорема 9. Критическое направление односторонне наблюдаемо, если хотя бы при одном k, $k = 0, 1, \ldots$, нарушаются условия (30).

§ 7. Об индифферентности и автономности в теории наблюдения

Вернемся к линейной системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{31}$$

с выходом

$$z = c'x. \tag{32}$$

Определение 14. Направление p, $\| p \| = 1$ (в точке $x = 0$) динамической системы (31) называется *T-индифферентным к наблюдению* (32), если для всех начальных условий вида

$$x_0 = \alpha p, \qquad -\infty < \alpha < \infty,$$

выход $z(\bar{t})$ не зависит от α, каково бы ни было число $\bar{t} \in T$.

Условие индифферентности к наблюдению есть прямое следствие теоремы 1.

Теорема 10. Направление p, $\| p \| = 1$, T-индифферентно к наблюдению (32), если и только если

$$p'c = p'A'c = \ldots = p'(A^{n-1})'c = 0.$$

Введем далее следующее определение.

Определение 15. Совокупность направлениий p_j, $\| p_j \| = 1$, $j = 1, \ldots, m$ (в точке $x = 0$), динамической системы (31) с выходами

$$z_j = c'_j x, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{33}$$

автономно T-наблюдаема, если каждое направление p_j T-наблюдаемо по выходу z_j и T-индифферентно к наблюдениям по другим выходам.

Объединяя условия теорем 1, 10, приходим к утверждению.

Теорема 11. Совокупность направлений p_j, $\| p_j \| = 1$, $j = 1, \ldots, m$, динамической системы (31) автономно наблюдаема по выходам (33) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n-1} | p'_j (A^k)' c_j | > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} | p'_i (A^k)' c_j) = 0$$

$$\text{при} \quad i \neq j, \; i, j = 1, \ldots, m.$$

Для нелинейных систем может оказаться полезным следующее определение.

Определение 16. Направление p, $\| p \| = 1$ (в $x = 0$), динамической системы имеет *порядок k T-индифферентности к наблюдению* (22), если для начальных состояний вида

$$x_0 = \alpha p$$

выход (22) имеет вид

$$z(\bar{t}, \alpha) = o(\alpha^k), \quad \bar{t} \in T.$$

Соответствующим образом можно видоизменить и определение 15. Из самих определений следует, что свойства динамических систем, вводимые в них, можно исследовать методом приращений, а первые результаты содержатся уже в теореме 10. Каждое критическое направление системы имеет порядок T-индифферентности не менее первого.

§ 8. Методы функционального анализа в теории наблюдаемости по Калману

1. Применение теоремы о минимаксе. В этом параграфе используется определение наблюдаемости по Калману [58а].

Определение 17. Направление p линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{34}$$

называется *наблюдаемым* по выходу

$$y = c'x, \tag{35}$$

если существует такой отрезок $T = [0, t_1]$, что по функции $y(t)$, $t \in T$, можно для каждого начального состояния x_0 системы (34) восстановить значение $p'x_0$.

Определение 18. Если каждое направление системы (34) наблюдаемо, то система называется *вполне наблюдаемой.*

В своем доказательстве теоремы о наблюдаемости Калман оперирует с линейными операциями восстановления. Точнее, направление p системы (34) считается наблюдаемым, если найдется измеримая функция $\xi(t)$, $t \in T$, такая, что

$$p'x_0 = \int_0^{t_1} c'x(t, x_0)\,\xi(t)\,dt \tag{36}$$

для любого x_0. Здесь $x(t, x_0)$ — решение системы, соответствующее начальному значению x_0. Поскольку

$$x(t, x_0) = F(t)\,x_0,$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица решений ($\dot F = AF$, $F(0) = E$), то (36) принимает вид

$$p'x_0 = \int_0^{t_1} c'F(t)\,\xi(t)\,dt\,x_0. \tag{37}$$

На функцию $\xi(t)$, порождающую операцию восстановления, наложим ограничение

$$|\xi(t)| \leqslant L, \qquad t \in T,$$

с тем, чтобы искать такие числа L, при которых задача о наблюдении имеет решение. Равенство (37) для всех x_0 имеет место, очевидно, тогда и только тогда, когда при некотором L направление p принадлежит множеству

$$Q(L) = \{q\colon q = \int_0^{t_1} F'(t)\,c\xi(t)\,dt,\ |\xi(t)| \leqslant L\}. \tag{38}$$

Иначе говоря, задача наблюдения для направления p имеет решение тогда и только тогда, когда расстояние

$$\rho(L) = \min_{q \in Q(L)} \|p - q\|$$

от направления p до множества $Q(L)$ при некотором L равно нулю. Поскольку $Q(L)$ при каждом L — выпуклое замкнутое множество, то можно воспользоваться теоремой о минимаксе. Имеем

$$\rho(L) = \min_{q \in Q(L)} \max_{\|z\| \leqslant 1} z'(p-q) = \max_{\|z\| \leqslant 1} \min_{q \in Q(L)} z'(p-q).$$

Подставим сюда выражение для q из (38), а операцию min по q заменим на операцию min по ξ, $|\xi| \leqslant L$. Тогда

$$\rho(L) = \max_{\|z\| \leqslant 1} \left(z'p - L \int_0^{t_1} |z'F'(t)c|\,dt \right).$$

Для того чтобы для каждого p существовало число L, при котором $\rho(L) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$z'F'(t)\,c \not\equiv 0, \qquad t \in T, \tag{39}$$

для всех z, $\|z\| \neq 0$.

Действительно, если при некотором z имеем $z'F'(t)\,c \equiv 0$, то направления $p = \alpha z$ ненаблюдаемы: $\rho(L) = |\alpha| > 0$. Если же выполняется (39), то, полагая

$$L = \frac{\|p\|}{\min\limits_{\|z\| \leqslant 1} \int_0^{t_1} |z'F'(t)\,c|\,dt},$$

получим $\rho(L) \leqslant 0$, т. е. система наблюдаема. Составляя для функции $\lambda(t) = z'F'(t)c$ дифференциальное уравнение (см. § 1.3), приходим к утверждению:

Теорема 12. Система (34), (35) наблюдаема в том и только в том случае, когда

$$\text{ранг}\,\{c, A'c, \ldots, (A^{n-1})'\,c\} = n.$$

2. Использование теоремы об отделимости выпуклых множеств. Условие (39) разрешимости задачи о наблюдении легко доказать с помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств. *Необходимость* его очевидна: если

$$p = \int_0^{t_1} F'(t)\,c\xi(t)\,dt,$$

то

$$0 = z'p - \int_0^{t_1} z'F'(t)\, c\xi(t)\, dt \leqslant z'p - L \int_0^{t_1} | z'F'(t)\, c \,|\, dt$$

для всех z, $\| z \| \leqslant 1$. Эти неравенства для всех p возможны (т. е. существуют такие L, что они выполняются) лишь в случае, когда выполняется (39). Для доказательства *достаточности* условия (39) будем рассуждать от противного: пусть (39) выполнено, но система ненаблюдаема, т. е. при любых L множество $Q(L)$ не содержит вектора p. Тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств найдется гиперплоскость, строго разделяющая $Q(L)$ и p. Это означает, что существует вектор z, $\| z \| = 1$, такой, что

$$z'p < \int_0^{t_1} z'F'(t)\, c\xi(t)\, dt$$

для всех $| \xi(t) | \leqslant L$, $t \in T$. Последнее неравенство должно выполняться и для случая, когда правая часть принимает минимальное значение

$$z'p < -L \int_0^{t_1} | z'F'(t)\, c \,|\, dt. \tag{40}$$

Пусть

$$\mu = \min_{\| z \| \leqslant 1} \int_0^{t_1} | z'F'(t)\, c \,|\, dt.$$

Минимум в правой части достигается и в силу (39) положителен: $\mu > 0$. Положим $L = | z'p |/\mu$. Тогда из (40) имеем

$$z'p < - | z'p |,$$

что невозможно. Достаточность условия (39) и потому и теорема 12 с помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств доказаны.

3. Проблема моментов в теории наблюдаемости. Если перейти к координатной записи, то условие

$$p = \int_0^{t_1} F'(t)\, c\xi(t)\, dt$$

разрешимости задачи о наблюдении направления p можно трактовать как проблему моментов, и мы снова придем к (39). Усилим этот результат. Для этого правую часть будем последовательно n раз интегрировать по частям. Отсылая за деталями к доказательству теоремы 1.1, сформулируем результат.

Теорема 13. Наблюдаемые направления системы (34), и только они, имеют представление

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i (A')^i c, \quad -\infty<\mu_i<\infty, \quad i=0, \ldots, n-1.$$

Этот результат можно получить из теоремы 1.1 как следствие принципа дуальности, доказательство которого заключено в теоремах 1.1; 1: для того чтобы система

$$\dot{x} = Ax + bu$$

была управляема, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\dot{x} = A'x, \qquad z = b'x$$

была наблюдаемой.

§ 9. Разрешимость двухточечных краевых задач и управляемость по начальному условию

Пусть для динамической системы, описываемой уравнением

$$x^{(n)} = f_1 (x, \ldots, x^{(n-1)}), \quad t \in T = [0, t_1],$$
$$f (0, \ldots, 0) = 0,$$

требуется найти условия, при которых существует решение $x (t)$, $t \in T$, удовлетворяющее условиям

$$x (0) = \ldots = x^{(n-2)} (0) = 0, \qquad x^{(k)} (t_1) = \alpha,$$

где $0 \leqslant k \leqslant n-1$, α — заданное число, $f_1 (x, \ldots$ $\ldots, x^{(n-1)})$ — скалярная функция.

Непосредственное обобщение этой двухточечной краевой задачи имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=f(x), \quad t\in T, \quad f(0)=0, \tag{41}$$

$$d_j'x(0)=0, \quad j=1, \ldots, n-1, \tag{42}$$

$$c'x(t_1)=\alpha, \tag{43}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-вектор фазовых координат, d_j, $j = 1, \ldots, n-1$,— заданные линейно независимые векторы, c — заданный вектор, α — заданное число.

Сформулированная задача сводится к проблеме управляемости по начальным условиям следующим образом. Пусть d — единичный вектор, ортогональный векторам d_j, $j = 1, \ldots, n-1$,

$$d'd_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

При сделанных предположениях такой вектор существует и единственный. Примем d за вектор, характеризующий вход системы по начальным условиям, т. е. будем считать, что допустимые начальные условия системы (41) имеют вид

$$x_0 = dy, \quad -\infty < y < \infty. \tag{44}$$

Краевая задача (41) — (43) эквивалентна следующей проблеме управляемости: найти число y, $-\infty < y < \infty$, при котором выход

$$z = c'x(t_1)$$

системы (41) с начальным условием (42) принимает заданное значение. Исследование последней проблемы начнем с линейного случая:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x_0 = dy. \tag{45}$$

Нетрудно показать (§ 1.2, § 2.2), что

$$c'x(t_1) = \psi'(0, t_1)\,dy, \tag{46}$$

где $\psi(t, t_1)$ — решение уравнения

$$\frac{d\psi(t, t_1)}{dt} = -A'\psi(t, t_1), \quad \psi(t_1, t_1) = c.$$

Из (46) заключаем, что для любого α задача (45), (42), (43) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\psi'(0, t_1)\,d \neq 0.$$

Отсюда следует: если среди чисел

$$c'd, \; c'Ad, \; \ldots, \; c'A^{n-1}d \tag{47}$$

хотя бы одно отлично от нуля, то задача (45), (43) для любого α имеет решение для всех t_1, кроме конечного числа точек на каждом ограниченном отрезке. Если же все числа (47) равны нулю, то задача (45), (42), (43) не имеет решения ни при каком $\alpha \neq 0$ для всех t_1.

Для более гибкого применения методов теории управления к двухточечным краевым задачам целесообразно несколько изменить первоначальную формулировку (41)—(43). Для заданных t_1, c, d_j, $j = 1, \ldots, n-1$, и любого $\varepsilon > 0$ найти условия, при которых существует решение $x(t)$ уравнения (41), удовлетворяющее начальному условию (42) и условию $c'x(\bar{t}) = \alpha$ при некотором $\bar{t}$ таком, что $|t_1 - \bar{t}| < \varepsilon$. Эта задача в линейном случае (45) имеет решение тогда и только тогда, когда среди чисел (47) есть отличные от нуля.

В новой формулировке краевая задача может быть исследована так же подробно, как задача о наблюдении в §§ 1—6. Результаты решения задачи о наблюдении непосредственно переформулируются в терминах краевой задачи.

Комментарии к главе III

Определение наблюдаемости из § 1 отличается от оригинального [58а] и эквивалентно последнему в случае линейных систем. Свое определение мы построили строго двойственно к определению управляемости главы II. При этом мы отказались от понятия косостояния [58а] в пользу понятия направления. Точка (в определении управляемости) и направление (в определении наблюдаемости) двойственны. Наблюдаемость в смысле § 1, по-видимому, предельно элементарна, интуитивно совершенно прозрачна как для линейных, так и для нелинейных систем. Уже почти само определение указывает и естественный метод исследования. Эффективность такого подхода иллюстрируется в §§ 3—6. Сначала в § 3 элементарно получаются известные условия наблюдаемости линейных систем, доказывается теорема о минимальном числе выходов наблюдаемой системы. Впрочем, последний результат является следствием принципа двойственности [58а]. Этот принцип в § 4 дополняется новым результатом.

Наблюдаемость в смысле Калмана по линейному приближению доказывается в [3]. Критические случаи наблюдаемости в литературе не исследовались. Здесь появляется новое качество наблюдаемых систем (существенно наблюдаемые системы), которое ранее не отмечалось. Теорема 8, конечно, имеет значение и для систем, наблюдаемых по Калману.

ГЛАВА IV
ТЕОРИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи. Определения. Метод исследования

Пусть уравнение возмущенного движения динамической системы имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, w), \quad x(0) = 0, \quad t \in T = [0, t_1], \quad f(0, 0) = 0, \tag{1}$$

где x — n-вектор состояния системы, w — q-вектор параметров. Будем считать, что функция $f(x, w)$ известна с точностью до параметров $w \in W$. Переменными, доступными измерению (выходные переменные системы), пусть являются числа $z_1, \ldots, z_m$, связанные с состоянием x системы (1) соотношением

$$z = h(x), \qquad h(0) = 0. \tag{2}$$

З а д а ч а. По измерениям $z(t)$, $t \in T$, найти значение w.

Определения.

1. Направление s (в точке $w = 0$ пространства параметров) *T-идентифицируемо* по измерениям (2), если существует такое число $\beta_0 = \beta_0(t_1, s) > 0$, что каждое значение параметра w вида

$$w = \beta s, \qquad |\beta| \leqslant \beta_0, \tag{3}$$

можно восстановить по измерениям $z(t)$, $t \in T$.

2. Динамическая система (1) называется *T-идентифицируемой* (в $w = 0$) по измерениям (2), если любое направление s в пространстве параметров системы T-идентифицируемо по измерениям (2) ($\inf\limits_{\|s\|=1} \beta_0(t_1, s) > 0$).

3. Направление s (в $w = 0$) *идентифицируемо* по (2), если существует отрезок $T = [0, t_1]$, $t_1 = t_1(s) < +\infty$, на котором это направление T-идентифицируемо ($\beta_0(t_1(s), s) > 0$).

4. Динамическая система называется *идентифицируемой* (в $w = 0$), если каждое направление в пространстве ее параметров идентифицируемо ($\inf\limits_{\|s\|=1} \beta_0(t_1(s), s) > 0$).

5. Направление s (в $w = 0$) *вполне идентифицируемо* по измерениям (2), если оно T-идентифицируемо по измерениям $z(t)$ на любых T ($\beta_0(t_1, s) > 0$ при всех $t_1 > 0$).

6. Динамическая система (1) *вполне идентифицируема* (в $w = 0$), если каждое направление в пространстве ее параметров вполне идентифицируемо ($\inf\limits_{\|s\|=1} \beta_0(t_1, s) > 0$ при всех $t_1 > 0$).

7. Направление s (в $w = 0$) *идентифицируемо в целом* по измерениям (2), если оно идентифицируемо и $\beta_0(t_1(s), s) = \infty$.

8. Динамическая система называется *идентифицируемой в целом* (при $w = 0$) по измерениям (2), если каждое направление (в $w = 0$) идентифицируемо в целом по (2).

Идею метода, используемого в дальнейшем для исследования идентифицируемости динамической системы, поясним на случае одного выхода. Каждому значению параметра β, связанного с направлением s, соответствует траектория $x(t)$ системы (1), которая порождает функцию $z(t)$ измерительного устройства. Таким образом, совокупность значений $z(t)$ в любой момент $t = \bar{t}$ измерения является функцией $z(\bar{t}, \beta)$ от β. Направление s, очевидно, идентифицируемо по $z(\bar{t}, \beta)$ в том и только в том случае, когда функция $z = z(\bar{t}, \beta)$ обратима по β. Условия обратимости, связанные с монотонностью функции $z(\bar{t}, \beta)$, просто выражаются через производные функции $z(\bar{t}, \beta)$. А для вычисления производных от $z(\bar{t}, \beta)$ метод приращений весьма удобен. Для этого достаточно приращение $z(\bar{t}, \beta) - z(\bar{t}, 0)$ разложить по степеням β:

$$z(\bar{t}, \beta) - z(\bar{t}, 0) = a_1\beta + \frac{a_2}{2!}\beta^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}\beta^n + o(|\beta|^n). \quad (4)$$

Если коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ удастся выразить через данные задачи, то получим явные выражения для производных $\dot{z}(\bar{t}, 0)$, $\ddot{z}(\bar{t}, 0)$, $\ldots$, $z^{(n)}(\bar{t}, 0)$, ибо $a_i = z^{(i)}(\bar{t}, 0)$.

Если в (4) первый отличный от нуля коэффициент имеет нечетный номер, то функция $z(\bar{t}, \beta)$ обратима в окрестности точки $\beta = 0$, в противном случае она необратима.

§ 2. Формула приращения по параметру

Будем рассматривать системы (1) с одним выходом ($m = 1$). Если в представлении (3) число β равно нулю, то значению параметра $w = 0$ в силу (1) соответствует лишь тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, для которого $z(t) = h(0) \equiv 0$. Ненулевому значению β соответствует траектория $x(t, \beta)$, которая порождает в силу (1) функцию $z(t, \beta)$. Приращение этой функции в любой момент $\bar{t}$ равно самой этой функции. Выразим $z(\bar{t}, \beta)$ через условия задачи. С одной стороны, имеем

$$z(\bar{t}, \beta) = h(x(\bar{t}, \beta)) = \frac{\partial h'(0)}{\partial x} x(\bar{t}, \beta) + o(\|x(\bar{t}, \beta)\|). \tag{5}$$

Введем функции $\psi(t, \bar{t})$ согласно уравнениям

$$\frac{d\psi(t, \bar{t})}{dt} = -\frac{\partial f'(0, 0)}{\partial x} \psi(t, \bar{t}), \qquad \psi(\bar{t}, \bar{t}) = \frac{\partial h(0)}{\partial x}. \tag{6}$$

Тогда из формулы интегрирования по частям

$$\psi'(t, \bar{t}) x(t, \beta) \Big|_0^{\bar{t}} = \int_0^{\bar{t}} \frac{d\psi'(t, \bar{t})}{dt} x(t, \beta)\, dt + \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) \frac{dx(t, \beta)}{dt}\, dt$$

с учетом (1), (5), (6) имеем

$$z(\bar{t}, \beta) = \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) f(x(t, \beta), s\beta) + \int_0^{\bar{t}} \frac{d\psi'(t, \bar{t})}{dt} x(t, \beta)\, dt + o(\|x(\bar{t}, \beta)\|) =$$

$$= \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x(t, \beta)\, dt + \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) \frac{\partial f(0, 0)}{\partial w} s\beta\, dt + \int_0^{\bar{t}} \frac{d\psi'(t, \bar{t})}{dt} x(t, \beta)\, dt + \int_0^{\bar{t}} o(\|x(t, \beta)\| + \beta)\, dt.$$

Поскольку $\|x(t, \beta)\| \sim \beta$, то окончательно:

$$z(\bar{t}, \beta) = \beta \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) \frac{\partial f(0, 0)}{\partial w} s\, dt + o(\beta). \tag{7}$$

§ 3. Идентификация линейных систем

1. Системы с одним выходом. Пусть динамическая система описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bw, \tag{8}$$

а измерению доступна величина

$$z = c'x. \tag{9}$$

Для параметров w вида $w = \beta s$ имеем в силу (7)

$$z(\bar{t}, \beta) = \beta \int_0^{\bar{t}} s'B'\psi(t, \bar{t})\, dt, \tag{10}$$

где $\psi(t, \bar{t})$ — решение уравнения

$$\frac{d\psi(t, \bar{t})}{dt} = -A'\psi(t, \bar{t}), \qquad \psi(\bar{t}, \bar{t}) = c.$$

Из формулы (10) следует, что направление s T-идентифицируемо в целом тогда и только тогда, когда хотя бы при одном $\bar{t} \in T$ выполняется условие

$$\mu(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} s'B'\psi(t, \bar{t})\, dt \neq 0.$$

Функция

$$\lambda(t) = \dot{\mu}(t) = s'B'c + \int_0^t s'B'A'\psi(\tau, t)\, d\tau$$

имеет следующие производные:

$$\dot{\lambda}(t) = s'B'A'c + \int_0^t s'B'(A')^2\psi(\tau, t)\, d\tau, \ \ldots,$$

$$\lambda^{(n)}(t) = s'B'(A^n)'c + \int_0^t s'B'(A')^{n+1}\psi(\tau, t)\, d\tau.$$

Но поскольку

$$A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}A + \gamma_n E = 0,$$

то $\lambda(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\lambda^{(n)}(t) + \gamma_1\lambda^{(n-1)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + \gamma_{n-1}\dot{\lambda}(t) + \gamma_n\lambda(t) = 0 \tag{11}$$

с начальными условиями

$$\lambda(0)=s'B'c,\ \dot{\lambda}(0)=s'B'A'c, \ldots, \lambda^{(n-1)}(0)=s'B'(A^{n-1})'c. \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение (11) с начальными условиями (12) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда среди чисел (12) имеются ненулевые.

Теорема 1. Направление s в пространстве параметров T-идентифицируемо (идентифицируемо, вполне идентифицируемо) в целом по измерению (9) в том и только в том случае, когда среди чисел

$$s'B'c,\ s'B'A'c,\ \ldots,\ s'B'(A^{n-1})'c$$

имеются ненулевые. Для того чтобы система (8) была идентифицируемой в целом по измерению (9), необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг}\ \{B'c,\ B'A'c,\ \ldots,\ B'(A^{n-1})'c\} = q.$$

2. Системы с несколькими выходами. Пусть у системы (8) измерению доступны величины

$$z_1 = c_1'x,\ \ldots,\ z_m = c_m'x. \quad (13)$$

Тогда, повторяя приведенные выше рассуждения для каждого выхода z_j, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Направление s в пространстве параметров T-идентифицируемо (идентифицируемо, вполне идентифицируемо) в целом по измерениям (13) в том и только в том случае, если среди чисел

$$s'B'c_j,\ s'B'A'c_j,\ \ldots,\ s'B'(A^{n-1})'c_j,\quad j = 1,\ \ldots,\ m,$$

найдется хотя бы одно, отличное от нуля.

Для T-идентифицируемости (идентифицируемости, полной идентифицируемости) системы (8) по измерениям (13) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг}\ \{B'C,\ B'A'C,\ \ldots,\ B'(A^{n-1})'C\} = q. \quad (14)$$

Здесь C есть $n \times m$-матрица, составленная из n-векторов c_j, $j = 1, \ldots, m$.

§ 4. Относительная управляемость динамической системы и ее идентифицируемость

Если в (14) положить

$$B' = K, \quad A' = A, \quad C = B,$$

то приходим к условию (1.33) теоремы 1.7. Значит, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

управляема относительно подпространства K ($Kx(t_1) = 0$) в том и только в том случае, когда система

$$\frac{dx}{dt} = -A'x - K'w$$

идентифицируема по измерениям

$$z = B'x.$$

Следствие. Динамическая система с r входами

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

управляема тогда и только тогда, когда идентифицируема динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = -A'x - w$$

с r выходами

$$z = B'x.$$

§ 5. Идентифицируемость нелинейных систем по линейному приближению

Нелинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, w), \qquad x(0) = 0, \tag{15}$$

с выходом

$$z = h(x) \tag{16}$$

линеаризуем вдоль $w = 0$. Получим

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bw, \quad z = c'x. \tag{17}$$

Из формулы (7) для нелинейной системы (15) получаем

$$z(\bar{t}, \beta) = \beta \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t})\, Bs\, dt + o(\beta). \qquad (18)$$

Если направление s в линейной модели (17) идентифицируемо, то из теоремы 1 следует, что существует момент $\bar{t}$ такой, что

$$\int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t})\, Bs\, dt \neq 0.$$

В силу (10) это значит, что по значению $z(\bar{t}, \beta)$ можно найти число β из окрестности нуля.

Теорема 4. Нелинейная система (15) идентифицируема по измерениям (16), если является идентифицируемой линейная модель (17).

§ 6. Условия идентифицируемости динамических систем в критических случаях

Будем говорить, что в задаче идентификации нелинейной системы (15), (16) имеет место *критический случай*, если неидентифицируема линейная модель (17). Направление s в пространстве параметров динамической системы (15) называется *критическим*, если оно неидентифицируемо по (17).

В критических случаях идентификации всегда существует хотя бы одно критическое направление. Прежде чем искать условия идентифицируемости в критических случаях, получим формулу приращения функции $z = h(x)$, уточняющую результат (7). Имеем

$$z(\bar{t}, \beta) = \frac{\partial h'(0)}{\partial x} x(\bar{t}, \beta) + \frac{1}{2} x'(\bar{t}, \beta) \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x^2} x(\bar{t}, \beta) + o(\| x(\bar{t}, \beta) \|^2).$$

Введем n-векторную функцию $\psi(t, \bar{t})$ и $n \times n$-матричную функцию $\Psi(t, \bar{t})$ согласно уравнениям

$$\frac{d\psi(t, \bar{t})}{dt} = -A'\psi(t, \bar{t}), \quad \psi(\bar{t}, \bar{t}) = c, \qquad (19)$$

и

$$\frac{d\Psi(t,\bar{t})}{dt} = -\Psi(t,\bar{t})A - A'\Psi(t,\bar{t}) - \frac{1}{2}\psi'(t,\bar{t})D, \qquad (20)$$

$$\Psi(\bar{t},\bar{t}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(0)}{\partial x^2}.$$

Здесь

$$c = \frac{\partial h(0)}{\partial x}, \qquad [\psi' D]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(0,0)}{\partial x_i\,\partial x_j}\psi_k.$$

Из формул интегрирования по частям

$$\psi'(t)x(t)\Big|_0^{\bar{t}} = \int_0^{\bar{t}} \dot{\psi}'(t)x(t)\,dt + \int_0^{\bar{t}} \psi'(t)\dot{x}(t)\,dt,$$

$$x'(t)\Psi(t)x(t)\Big|_0^{\bar{t}} = \int_0^{\bar{t}} \dot{x}'(t)\Psi(t)x(t)\,dt + \int_0^{\bar{t}} x'(t)\Psi(t)\dot{x}(t)\,dt + \int_0^{\bar{t}} x'(t)\dot{\Psi}(t)x(t)\,dt$$

получаем

$$z(\bar{t},\beta) = \int_0^{\bar{t}} \psi'(t,\bar{t})\dot{x}(t,\beta)\,dt + \int_0^{\bar{t}} \dot{x}'(t,\beta)\Psi(t,\bar{t})x(t,\beta)\,dt + \int_0^{\bar{t}} x'(t,\beta)\Psi(t,\bar{t})\dot{x}(t,\beta)\,dt + \int_0^{\bar{t}} \dot{\psi}'(t,\bar{t})x(t,\beta)\,dt + \int_0^{\bar{t}} x'(t,\beta)\dot{\Psi}(t,\bar{t})x(t,\beta)\,dt + o(\|x(\bar{t},\beta\|^2).$$

Подставим сюда значения $\dot{\psi}(t,\bar{t})$, $\dot{\Psi}(t,\bar{t})$ из уравнений (19), (20) и значение $\dot{x}(t,\beta)$, представленное в виде

$$\dot{x} = Ax + Bw + Cwx + \frac{1}{2}Dxx + \frac{1}{2}Gww + o.$$

Смысл новых символов $\bar{A}$, B, C, D, G разъясняется во введении. После очевидных преобразований получаем

$$z(\bar{t}, \beta) = \beta \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t})\, Bs\, dt + \beta \int_0^{\bar{t}} (\psi'(t, \bar{t})\, Csx(t, \beta) + \\ + s'B'\Psi(t, \bar{t})\, x(t, \beta) + x'(t, \beta)\, \Psi(t, \bar{t})\, Bs + \\ + \frac{1}{2}\beta\psi'(t, \bar{t})\, Gss)\, dt + o(\beta^2).$$

Если s — критическое направление, то первый член справа равен нулю (теорема 1), поэтому окончательно имеем

$$z(\bar{t}, \beta) = \beta \int_0^{\bar{t}} [\psi'(t, \bar{t})\, Csx(t, \beta) + s'B'\Psi(t, \bar{t})\, x(t, \beta) + \\ + x'(t, \beta)\, \Psi(t, \bar{t})\, Bs + \frac{1}{2}\beta\psi'(t, t)\, Gss]\, dt + o(\beta^2). \quad (21)$$

Главный член по β траектории $x(t, \beta)$ можно записать следующим образом:

$$x(t, \beta) = \beta \int_0^{t} F(t)\, F^{-1}(\tau)\, Bs\, d\tau + o(\beta).$$

Подставим это выражение в (21):

$$z(t, \beta) = \beta^2 \int_0^{\bar{t}} \int_0^{t} [\psi'(t, \bar{t})\, CsF(t)\, F^{-1}(\tau)\, Bs + \\ + s'B'\Psi(t, \bar{t})\, F(t)\, F^{-1}(\tau)\, Bs + \\ + s'B'\,(F^{-1}(\tau))'\, F'(t)\, \Psi(t, \bar{t})\, Bs]\, d\tau\, dt + \\ + \frac{1}{2}\beta^2 \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t})\, Gss\, dt + o(\beta^2).$$

Если направление s идентифицируемо по значению $z(\bar{t}, \beta)$, то коэффициент при β^2 необходимо равен нулю. В силу аналитичности входящих в этот коэффициент функций он или тождественно по $\bar{t}$ равен нулю, или может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой меры. Чтобы исключить из рассмотрения последний случай, являющийся особым, введем следующее определение.

Определение 9. Направление s, $\| s \| = 1$ (в $w = 0$), называется *существенно идентифицируемым*, если значения $z(t, \beta)$, на которых оно идентифицируемо, определены на множестве точек t положительной меры. Динамическая система, все направления для которой существенно идентифицируемы, называется *существенно идентифицируемой*.

Если критическое направление s существенно идентифицируемо, то для $t \in T$ имеем

$$\int_0^{\bar{t}} \int_0^t [\psi'(t, \bar{t}) CsF(t) F^{-1}(\tau) Bs + s'B'\Psi(t, \bar{t}) F(t) F^{-1}(\tau) Bs +$$

$$+ s'B'(F^{-1}(\tau))' F'(t) \Psi(t, \bar{t}) Bs]\, d\tau\, dt + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \psi'(t, \bar{t}) Gss\, dt \equiv 0,$$

Дифференцируя это тождество и рассматривая левые части полученных выражений при $\bar{t} = 0$, получим последовательность равенств

$$c'Gss = 0, \quad \sum_{p=0}^{k-2} \lambda_p' CsA^{k-p-2}Bs + s'B' \sum_{p=0}^{k-2} (\Lambda_p A^{k-p-2} +$$

$$+ (A')^{k-p-2}\Lambda_p) Bs + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}' Gss = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \qquad (22)$$

где

$$\lambda_0 = c, \quad \lambda_{k+1} = A\lambda_k, \quad \Lambda_{k+1} = \Lambda_k A + A'\Lambda_k + \lambda_k D, \quad \Lambda_0 = \frac{\partial^2 h(0)}{\partial x^2}.$$

Теорема 5. Если критическое направление s, $\| s \| = 1$, в пространстве параметров системы (15) существенно идентифицируемо по измерениям (16), то для него выполняются равенства (22). Для существенной идентифицируемости системы (15) по (16) необходимо, чтобы каждое критическое направление s удовлетворяло условиям (22).

Условия (22) можно использовать для формулировки критериев односторонней идентифицируемости. Последнее понятие является вполне аналогичным понятию односторонней наблюдаемости (определение 3.13).

Примечание. В теоремах 1—4 «идентифицируемость» можно заменить на «существенную идентифицируемость».

В этой главе мы не останавливаемся на вопросах индифферентности и автономности в теории идентификации. Эти понятия в теории идентификации вводятся так же, как аналогичные понятия в теории наблюдения (определения 3.14—3.16). Поскольку соответствующие критерии получаются из доказанных в данной главе теорем без труда, то их формулировки предоставляем читателю.

§ 7. Методы функционального анализа в теории идентификации

Для иллюстрации возможностей функционального анализа в теории идентификации удобно пользоваться определениями, отличными от введенных ранее, но им эквивалентных (в случае линейных систем).

Определение 10. Направление s в пространстве параметров динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bw, \qquad x(0) = 0,$$

называется *идентифицируемым по измерениям*

$$y = c'x,$$

если найдется такой момент t_1, что значение $\gamma = s'w$ для каждого q-вектора w можно восстановить по измерениям $y(t)$, $t \in T = [0, t_1]$.

Динамическая система называется *вполне идентифицируемой*, если каждое направление идентифицируемо.

Примечание. В этом определении неявно предполагается, что операция восстановления линейная.

Непосредственно из определения следует, что направление s идентифицируемо тогда и только тогда, когда существует измеримая функция $\xi(t)$, $t \in T$, такая, что

$$s'w = \int_0^{t_1} \xi(t)\, y(t)\, dt \quad \text{для всех } w.$$

Подставим сюда значение $y(t)$ с учетом того, что

$$x(t) = \int_0^t F(t) F^{-1}(\tau) Bw\, d\tau.$$

В результате получаем

$$s'w = \int_0^{t_1} \xi(t) \int_0^t c'F(t) F^{-1}(\tau) B\, d\tau\, w\, dt.$$

Последнее равенство для всех w имеет место в том и только в том случае, когда

$$s' = \int_0^{t_1} \xi(t) \int_0^t c'F(t) F^{-1}(\tau) B\, d\tau\, dt. \tag{23}$$

Для решения последней задачи можно воспользоваться различными приемами функционального анализа.

1. Применение теоремы о минимаксе. Введем множество $Q(L) =$

$$= \left\{q\colon q = \int_0^{t_1} \xi(t) \int_0^t B'(F^{-1}(\tau))'F'(t)\, c\, d\tau\, dt,\ |\xi(t)| \leqslant L\right\}.$$

Найдем расстояние от точки s до множества $Q(L)$:

$$\rho(L) = \min_{q \in Q(L)} \| s - q \|.$$

Поскольку множество $Q(L)$ замкнуто и выпукло, то можно привлечь теорему о минимаксе. Имеем

$$\rho(L) = \min_{q\in Q(L)} \max_{\|z\|\leqslant 1} z'(s-q) = \max_{\|z\|\leqslant 1} \min_{q\in Q(L)} z'(s-q) =$$

$$= \max_{\|z\|\leqslant 1} \left[z's - L\int_0^{t_1} \left| \int_0^t z'B'(F^{-1}(\tau))'F'(t)\, c\, d\tau \right| dt\right]. \tag{24}$$

Условие (23) эквивалентно, очевидно, следующему: для каждого s найдется такое L, что $\rho(L) = 0$. Для выполнения последнего необходимо и достаточно, чтобы

$$\left|\int_0^t z'B'(F^{-1}(\tau))'F'(t)\, c\, d\tau\right| \not\equiv 0, \quad t \in T, \tag{25}$$

для всех z, $\|z\| \neq 0$. Действительно, оно *необходимо*, ибо в противном случае для $s = \beta z$, $\beta > 0$, имели бы $\rho(L) = \beta > 0$. Условие (25), кроме того, и *достаточно*, так как, положив

$$L = \frac{\|s\|}{\min\limits_{\|z\| \leqslant 1} \int\limits_0^{t_1} \left| \int\limits_0^t z'B'(F^{-1}(\tau))'\, F'(t)\, c\, d\tau \right| dt},$$

из (24) получим $\rho(L) \leqslant \|s\| - \|s\| = 0$. Функция

$$\lambda(t) = \int\limits_0^t z'B'(F^{-1}(\tau))'\, F'(t)\, c\, d\tau$$

отлична от тождественного нуля в том и только в том случае, когда отлична от тождественного нуля ее производная

$$\dot{\lambda}(t) = z'B'c + \int\limits_0^t z'B'(F^{-1}(\tau))'\, F'(t)\, A'c\, d\tau.$$

Вычислив n производных последней функции и используя соотношение $A^n c = -\gamma_1 A^{n-1} c - \ldots - \gamma_n c$, получим однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для $\dot{\lambda}(t)$ с начальными условиями

$$\dot{\lambda}(0) = z'B'c, \quad \ddot{\lambda}(0) = z'B'A'c, \quad \ldots, \quad \lambda^{(n)}(0) = z'B'(A^{n-1})'\, c. \tag{26}$$

Условие (25) оказалось, таким образом, эквивалентным нетривиальности начальных условий (26). А из того, что z — произвольный вектор, следует теорема 1, в которой идентифицируемость понимается в смысле определения 10.

2. Использование теоремы об отделимости выпуклых множеств. Условие (25) можно получить и с помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств, схема применения которой вполне аналогична той, что описана в § 3.8 при изучении наблюдаемости. Детали доказательства предоставляем читателю.

3. Проблема моментов. Применение решения этой проблемы функционального анализа к рассматриваемой задаче может быть без труда выполнено читателем по аналогии с § 3.8. Отметим лишь, что из (23) методом из § 1.3 легко получается, что все идентифицируемые направления, и только они, имеют вид

$$s=\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i B'(A^i)'c, \qquad -\infty<\mu_i<\infty.$$

Комментарии к главе IV

Понятие идентифицируемости динамических систем в настоящей главе вводится по аналогии с понятием наблюдаемости: здесь по измерениям выходных сигналов восстанавливаются параметры системы, входящие в уравнение движения, ранее нужно было найти параметры начальных условий. Как следует из определений, в главе рассматривается идентификация в идеальных условиях, без помех. Общий случай задачи (это относится и к наблюдаемости) выходит за рамки книги, хотя многие проблемы этого круга можно сформулировать и решить на базе теории оптимальных процессов с параметрами (§ 6.7). В § 4 доказывается принцип двойственности между идентифицируемостью системы и ее относительной управляемостью. Если изобразить процесс относительной управляемости системы

$$\dot{x}=Ax+Bu, \qquad Kx(t_1)=0,$$

на блочной диаграмме с блоком входа B, блоком объекта A и блоком выхода K, то процесс идентификации параметра w в системе

$$\dot{x}=-A'x-K'w$$

по выходу $z=B'x$ можно получить из построенной диаграммы элементарно: 1) нужно обратить время, 2) во всех блоках заменить матрицы на им сопряженные. Этот результат нам кажется более симметричным, чем известный принцип двойственности (дуальности) Калмана ([58а]. Сравнение с принципом двойственности из § 4 показывает, что каждой части, фигурирующей в принципе дуальности Калмана, мы нашли более симметричное двойственное понятие и, таким образом, из одного (не вполне симметричного, на наш взгляд) принципа получили два симметричных. Комбинируя разные части в этих принципах, можно получить и другие эквивалентные (но не симметричные) принципы дуальности.

ГЛАВА V
ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

§ 1. Теорема существования оптимальных управлений для систем с запаздыванием

1. Постановка задачи. Пусть уравнение управляемого движения имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),\ x(t-h(x,\ u,\ t)),\ u(t),\ t), \quad t \in T = [t_0,\ t_1], \quad (1)$$

и движения происходят во множестве X из n-мерного пространства, а управления $u(t)$, $t \in T$, выбираются из некоторого множества U r-мерного пространства. Зададим начальные условия:

$$x(\tau) = \Phi(\tau), \qquad \tau \in S_0,$$

$$S_0 = \{\tau\colon\ \tau = \tau(t) = t - h(x,\ y,\ t) \leqslant t_0,$$
$$t \in T, \quad x \in X, \quad u \in U\}.$$

Обозначим через F класс измеримых вектор-функций $u(t)$, определенных на T и принимающих значения из U:

$$u(t) \in U, \qquad t \in T. \quad (2)$$

Элементы $u(\cdot)$ из F будем называть *допустимыми управлениями класса* F. Через D обозначим подмножество из F, состоящее из кусочно-непрерывных функций, через D_1 — совокупность функций с кусочно-непрерывными производными, $D_1 \subset D$.

Пусть при некоторых $u(\cdot) \in F$ существует решение $x(t)$ уравнения (1), определенное на T. На множестве точек $x(t_1)$ зададим функционал

$$J(u) = \varphi_1(x(t_1)), \quad (3)$$

где $\varphi_1(x)$ — полунепрерывная снизу конечная функция, определенная на замыкании $\overline{X}$ множества X. Проблема существования оптимальных управлений состоит в установлении условий, при которых среди допустимых управлений класса F найдется такое $u^0(t)$, $t \in T$, что

$$J(u^0) \leqslant J(u) \quad \text{для всех} \quad u(\cdot) \in F.$$

Управление $u^0(t)$, $t \in T$, называется *оптимальным управлением*, соответствующая ему в силу (1) траектория $x^0(t)$, $t \in T$,— *оптимальной траекторией*.

Приведем сначала вспомогательные результаты.

2. Существование допустимых решений.

Лемма 1. Пусть 1) функция $f(x, y, u, t)$ определена и непрерывна на $P = X \times X \times U \times T$ вместе с $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и

$$\| f(x'', y'', u, t) - f(x, y, u, t) \| \leqslant \leqslant L_1 (\| x'' - x \| + \| y'' - y'' \|),$$

$$\| f(x, y, u, t) \| \leqslant L_2;$$

2) функции $h(x, u, t)$, $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial u$, $\partial h/\partial t$ определены и непрерывны на $Q = X \times U \times T$, причем $h(x, u, t) \geqslant 0$ и

$$| h(x'', u, t) - h(x, u, t) | \leqslant L_3 \| x'' - x \|;$$

3) функция $\Phi(\tau)$ определена, непрерывна на S_0 вместе с $d\Phi/d\tau$ и выполняется неравенство

$$\| \Phi(\tau'') - \Phi(\tau) \| \leqslant L_4 | \tau'' - \tau |;$$

4) $t^* = t_0 + \delta/L$, $\delta = \min\limits_{x \in \partial\overline{X}} \| x - \Phi(t_0) \|$, где $\partial\overline{X}$ — граница множества $\overline{X}$, $L = \max\{L_1, \ldots, L_4\}$. Тогда при $u(\cdot) \in D$ на отрезке t_0, $t^*]$ существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1) с данными начальными условиями.

Это утверждение доказывается [36b] методом последовательных приближений, которые строятся по схеме

$$x_0(t) = \begin{cases} \Phi_1(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t^*, \quad \Phi_1(t_0) = \Phi(t_0), \\ \Phi(t), & t \in S_0, \end{cases}$$

$$x_{p+1}(t) = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_p(t), y_p(t), u(t), t)\, dt, \quad t \geqslant t_0,$$

$$x_p(t) = \Phi(t), \quad t \in S_0, \quad y_p(t) = x_p(t - h(x_p(t), u(t), t)).$$

Здесь $\Phi_1(t) \in X$ — произвольная непрерывная функция. Если $x(t^*) \overline{\in} \partial \overline{X}$, то решение можно продолжить.

3. Ограниченность решений.

Лемма 2. Пусть 1) функция $f(x, y, u, t)$ определена на P и

$$x'f(x, y, u, t) \leqslant c(\|x\|^2 + \|y\|^2 + 1);$$

2) $h(x, u, t) \geqslant 0$, функция $h(x, u, t)$ определена и дифференцируема по всем аргументам; 3) функция $\Phi(t)$ определена и ограничена на S_0; 4) функция $u(t)$ определена и дифференцируема на T. Тогда решение $x(t)$, $t \in T$, уравнения (1) с данными условиями ограничено на T.

Дополнительные свойства решений уравнения (1) (интегральная непрерывность по функциям $u(t)$, $\Phi(t)$), важные при конкретных вычислениях оптимальных управлений, доказываются в [36b].

4. Теорема о существовании оптимальных управлений в системах с запаздыванием. Пусть $T_t = [t_0, t]$, $S_t = S_0 \cup T_t$. Обозначим через $X_t(\cdot)$ множество кривых $x(\theta)$, определенных на S_t и удовлетворяющих условиям

$$\|x(\theta'') - x(\theta)\| \leqslant L\,|\theta'' - \theta|, \quad \theta,\ \theta'' \in S_t,$$
$$x(\tau) = \Phi(\tau), \qquad \tau \in S_0.$$

На $X_t(\cdot)$ определим точечное множество

$$R(x(\cdot), t) = \{z\colon z = f(x(t), x(t - h(x(t), u, t)), u, t), \ u \in U\}.$$

Теорема 1. Пусть 1) выполнены условия леммы 1; 2) решения $x(t)$ уравнения (1) определены и равномерно (по $u(\cdot) \in F$) ограничены; 3) при каждом $x(\cdot) \in X_t(\cdot)$, $t \in T$, множество $R(x(\cdot), t)$ выпукло и замкнуто. Тогда в задаче (1) — (3) существуют оптимальные управления.

Доказательство. Пусть $u(t)$, $t \in T$,— некоторое допустимое управление, порождающее в силу (1) траекторию $x(t)$, $t \in T$, на которой функционал (3) принимает конечное значение a. Множество решений, удовлетворяющих условию $\varphi_1(x(t_1)) \leqslant a$, не пусто. Если оно конечно, то теорема доказана. Пусть это множество бесконечно. Обозначим через Q' последовательность таких

$\{x(t),\ t\in T\}$, для которых последовательность $\{\varphi_1(x(t_1))\}$ является минимизирующей. В силу полунепрерывности снизу функции $\varphi_1(x)$ и ограниченности множества $\{\varphi_1(x(t_1))\}$ существует такое число $\bar{a}$, что $\bar{a}=\inf\{\varphi_1(x(t_1))\}=$ $=\varphi_1(x(t_1))$. Теперь покажем, что из Q' можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к оптимальной траектории.

Множество Q' по условию 2) состоит из равномерно ограниченных функций. Кроме того, элементы Q' равностепенно непрерывны, так как для всех $x(\cdot)\in Q'$ в силу условия 1) производная dx/dt ограничена одним числом: $\|dx/dt\|\leqslant L$. Поэтому из Q' можно выбрать подпоследовательность $\{x_p(t)\}$, равномерно сходящуюся к функции $\bar{x}(t)$. Осталось показать, что $\bar{x}(t)$, $t\in T$, порождается уравнением (1) при некотором допустимом управлении $u(t)$, $t\in T$. Сначала покажем, что почти для всех $t^*\in T$ существует производная $d\bar{x}(t^*)/dt$ и найдется вектор $u^*=u(t^*)$ такой, что

$$\frac{d\bar{x}(t^*)}{dt}=f(\bar{x}(t^*),\ \bar{x}(t^*-h(\bar{x}(t^*),\ u^*,\ t^*)),\ u^*,\ t^*). \tag{4}$$

Функция $x_p(t)$, $t\in T$, абсолютно непрерывна, и для нее почти всюду $\|dx_p(t)/dt\|\leqslant L$. Поэтому и предельная функция $\bar{x}(t)$ абсолютно непрерывна, для нее почти всюду определена функция $q(t)=d\bar{x}(t)/dt$, удовлетворяющая неравенству $\|q(t)\|\leqslant L$. Пусть в точке $t^*\in T$ определен вектор $q(t)$. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$\frac{\bar{x}(t)-\bar{x}(t^*)}{t-t^*}\in[R(\bar{x}(\cdot),\ t^*)]_\varepsilon,\quad \bar{x}(\cdot)\in X_{t^*}(\cdot) \tag{5}$$

при $|t-t^*|\leqslant\delta$ (здесь $[\ \ ]_\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность множества $[\ \ ]$). Действительно, по построению функции $\bar{x}(t)$

$$\frac{\bar{x}(t)-\bar{x}(t^*)}{t-t^*}=\lim_{p\to\infty}\frac{x_p(t)-x_p(t^*)}{t-t^*}.$$

Далее,

$$x_p(t)=x_p(t^*)+\int_{t^*}^{t}q_p(t)\,dt,\qquad q_p(t)=\frac{dx_p(t)}{dt},$$

и поэтому

$$\frac{\bar{x}(t)-\bar{x}(t^*)}{t-t^*}=\frac{1}{t-t^*}\lim_{p\to\infty}\int_{t^*}^{t} q_p(\tau)\,d\tau=$$
$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^1 q_p(t^*+\sigma(t-t^*))\,d\sigma. \qquad (6)$$

Функция $q_p(t)$ удовлетворяет условию: $q_p(t)\in R(x_p(\cdot),t)$, $x_p(\cdot)\in X_t(\cdot)$, и при достаточно больших номерах p и достаточно малых числах δ дополнительно

$$\left.\begin{array}{l} q_p(t^*+\sigma(t-t^*))\in[R(\bar{x}(\cdot),t^*)]_\varepsilon, \\ \bar{x}(\cdot)\in X_{t^*}(\cdot), \quad 0\leqslant\sigma\leqslant 1, \quad |t-t^*|\leqslant\delta. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Последнее свойство вытекает из определения функции $\bar{x}(t)$ и полунепрерывности сверху относительно включения множества $R(x(\cdot),t)$, $x(\cdot)\in X_t(\cdot)$ (см. лемму 3). По условию 3) множество $R(x(\cdot),t)$, $x(\cdot)\in X_t(\cdot)$ выпукло, поэтому из (7) следует:

$$\int_0^1 q_p(t^*+\sigma(t-t^*))\,d\sigma\in[R(\bar{x}(\cdot),t^*)]_\varepsilon,$$
$$\bar{x}(\cdot)\in X_{t^*}(\cdot).$$

Но в силу (6) это равносильно (5).

Заметим, что

$$\left\|\frac{d\bar{x}(t^*)}{dt}-\frac{\bar{x}(t)-\bar{x}(t^*)}{t-t^*}\right\|\leqslant\varepsilon, \quad \text{если} \quad |t-t^*|\leqslant\delta$$

при достаточно малых δ. Поэтому из (5) имеем

$$\frac{d\bar{x}(t^*)}{dt}\in[R(\bar{x}(\cdot),t^*)]_{2\varepsilon}, \quad \bar{x}(\cdot)\in X_{t^*}(\cdot).$$

В силу произвольности ε и замкнутости $R(\bar{x}(\cdot),t^*)$ (условие 3)) имеем

$$\frac{d\bar{x}(t^*)}{dt}\in R(\bar{x}(\cdot),t^*), \quad \bar{x}(\cdot)\in X_{t^*}(\cdot),$$

что равносильно (4). Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться леммой 4 (см. ниже), в силу которой значения $u(t^*)$ можно выбрать таким образом, чтобы функция $u(t^*)$, $t^*\in T$, была измеримой.

В заключение обоснуем два утверждения, использованные в доказательстве теоремы. Множество $R(x(\cdot), t)$ назовем *полунепрерывным сверху* относительно включения, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при

$$|t''-t|<\delta,$$

$$\|x''(\cdot)-x(\cdot)\| = \max_{\theta\in[t_0,\, t'']\cap[t_0,\, t]} \|x''(\theta)-x(\theta)\| < \delta,$$

$$x(\cdot)\in X_t(\cdot), \quad x''(\cdot)\in X_{t''}(\cdot)$$

имеет место включение

$$R(x''(\cdot), t'') \subseteq [R(x(\cdot), t]_\varepsilon.$$

Лемма 3. Пусть $f(x, y, u, t)$ определена и непрерывна на множестве $X \times X \times U \times T$, $h(x, u, t)$ определена и непрерывна на $X \times U \times T$, причем

$$|h(x'', u, t'') - h(x, u, t)| \leqslant \leqslant L(\|x''-x\| + |t''-t|)$$

и $h(x, u, t) > 0$ в каждой точке $\{x, u, t\} \in X \times U \times T$. Тогда множество $R(x(\cdot), t)$ полунепрерывно сверху относительно включения.

Доказательство. Предположим противное: при заданных t и $x(\cdot)$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что, как бы мало ни было $\delta > 0$, множество $R(x''(\cdot), t'') \not\subseteq [R(x(\cdot), t)]_\varepsilon$ при $\|x''(\cdot)-x(\cdot)\| < \delta$ и $|t''-t| < \delta$. Это значит, что существует такое $\bar u \in U$, что

$$\|f(x''(t''), x''(t''-h(x''(t''), \bar u, t'')), \bar u, t'') - f(x(t), x(t-h(x(t), \bar u, t)), \bar u, t)\| > \varepsilon$$

при $\|x''(\cdot)-x(\cdot)\| < \delta$, $|t''-t| < \delta$. Для определенности положим $t'' > t$. Имеем

$$\|x''(t'')-x(t)\| \leqslant \|x''(t'')-x''(t)\| + \|x''(t)-x(t)\| < L(t''-t) + \delta < (L+1)\delta.$$

Аналогично

$$\|x''(t''-h(x''(t''),\bar u,t''))-x(t-h(x(t),\bar u,t))\| = \\ = \|x''(\tau'')-x(\tau)\| \leqslant \|x''(\tau'')-x''(\tau)\| + \\ + \|x''(\tau)-x(\tau)\|.$$

Поскольку

$$\|x''(\tau'')-x''(\tau)\| \leqslant L\,|\tau''-\tau| \leqslant \\ \leqslant L\,[t''-t+|h(x''(t''),\bar u,t'')-h(x(t),\bar u,t)|] < \\ < L(\delta + L[\|x''(t'')-x(t)\|+t''-t]) < \\ < L[1+L(L+2)]\,\delta,$$

то

$$\|x''(\tau'')-x(\tau)\| < [L+L^2(L+2)+1]\,\delta.$$

Таким образом, для указанных $u=\bar u$ и $\varepsilon>0$ неравенство

$$\|f(x'',y'',\bar u,t'')-f(x,y,\bar u\,t),\| > \varepsilon$$

имеет место, если

$$\|x''-x\| < (L+1)\,\delta,\quad t''-t<\delta,$$
$$\|y''-y\| < [L+L^2(L+2)+1]\,\delta,$$

где $\delta>0$ сколь угодно мало. Но это противоречит непрерывности функции $f(x,y,u,t)$ на множестве $X\times X\times U\times T$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4 (А. Ф. Филиппов [125]). Пусть 1) $f(t,u)$ — непрерывная n-вектор-функция аргументов $t\in T$, $u=\{u_1,\ldots,u_r\}$; 2) $Q(t)$ — множество замкнутое, ограниченное, полунепрерывное сверху относительно включения по t; 3) $f(t,Q(t))=R(t)$; 4) $y(t)\in R(t)$ — измеримая n-вектор-функция. Тогда существует такая измеримая r-вектор-функция $u(t)=\{u_1(t),\ldots,u_r(t)\}\in Q(t)$, что $f(t,u(t))=y(t)$ почти для всех $t\in T$.

Доказательство. Пусть сначала $r=1$. Функцию $u(t)$, $t\in T$, определим следующим образом. Для каждого $t\in T$ положим $u(t)=u$, где u — наименьшее число, удовлетворяющее равенству $f(t,u)=y(t)$. Такое число, очевидно, существует, так как множество $\{u\colon f(t,u)=y(t)\}$ замкнуто в силу непрерывности функции $f(t,u)$. По определению измеримой функции для любого $\varepsilon>0$ найдется множество $\sigma\subseteq T$, $\operatorname{mes}\sigma>t_1-\varepsilon-t_0$, на котором функция $y(t)$ непрерывна. Покажем, что для любого a множество $\{t\colon u(t) \leqslant a,\ t \in \sigma\}$ замкнуто. В противном случае существует последовательность $t_k \in \sigma$ такая, что

$$t_k \to \tilde{t}, \qquad u(t_k) \leqslant u(\tilde{t}) - \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 > 0. \tag{8}$$

Так как $|u| \leqslant \mathrm{const}$, то из $\{t_k\}$ можно извлечь подпоследовательность, по которой $u(t_k) \to \tilde{u}$. Из того, что $u(t_k) \in Q(t)$, $Q(t)$ — замкнутое полунепрерывное сверху относительно включения множество, следует: $\tilde{u} \in Q(\tilde{t})$. Из (8) имеем

$$\tilde{u} \leqslant u(\tilde{t}) - \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 > 0. \tag{9}$$

В тождестве $f(t_k, u(t_k)) = y(t_k)$ перейдем к пределу по выбранной последовательности $\{t_k\}$. Пользуясь непрерывностью $f(t, u)$, получим

$$f(\tilde{t}, \tilde{u}) = y(\tilde{t}). \tag{10}$$

Из (9), (10) следует, что $u(\tilde{t})$ не является наименьшим числом, удовлетворяющим уравнению

$$f(\tilde{t}, u) = y(\tilde{t}).$$

Это противоречит определению $u(\tilde{t})$. Таким образом, множество $\{t\colon u(t) \leqslant a,\ t \in \sigma\}$ замкнуто при любых a, что равносильно измеримости функции $u(t)$ на σ, а в силу произвольности ε эта функция измерима и на T.

В общем случае ($r > 1$) функцию $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$ построим следующим образом. Из решений уравнения $f(t, u) = y(t)$ выбираем то, у которого первая координата u_1 наименьшая; если таких решений несколько, то из них оставляем решение с наименьшей второй координатой u_2 и т. д. Для каждого $t \in T$ полагаем $u(t) = u$. Измеримость получившейся функции доказываем по индукции. Измеримость $u(t)$ при $r = 1$ уже доказана; допустим, что $u(t)$ измерима при $r = s - 1$. Докажем ее измеримость при $r = s$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma \in T$, $\operatorname{mes} \sigma > t_1 - t_0 - \varepsilon$, такое, что функции $y(t), u_1(t), \ldots, u_{s-1}(t)$ непрерывны на σ. Доказательство замкнутости множества $\{t\colon u_s(t) \leqslant a\}$ для любого a повторяет приведенное выше доказательство при $r = 1$. Таким образом, $u_s(t)$ — измеримая функция. Лемма доказана.

§ 2. Существование оптимальных управлений и теория оптимальных скользящих режимов

Следуя теории оптимальных скользящих режимов [38е, 221], задачу (1) — (3), $h = h(x, t)$, заменим на задачу минимизации функционала

$$J(v, w) = \varphi_1(z(t_1)) \tag{11}$$

на траекториях системы

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\gamma=1}^{n+1} w_\gamma(t) f(z(t), z(t-h(z(t), t)), v_\gamma(t), t) \tag{12}$$

с помощью измеримых функций $w_\gamma(t)$, $v_\gamma(t)$, $t \in T$, удовлетворяющих условиям

$$w_\gamma(t) \geqslant 0, \quad \sum_{\gamma=1}^{n+1} w_\gamma(t) = 1, \quad v_\gamma(t) \in U, \quad \gamma = 1, \ldots, n+1. \tag{13}$$

Задача (11) — (13) в силу теоремы 1 имеет решение; оптимальные управления $w_\gamma^0(t)$, $v_\gamma^0(t)$, $t \in T$, как будет показано в главе VI, удовлетворяют условию максимума

$$\sum_{\gamma=1}^{n+1} \xi'(t) w_\gamma^0(t) f(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), v_\gamma^0(t), t) =$$
$$= \max_{w_\gamma \geqslant 0,\ \sum w_\gamma = 1} \ \max_{v_\gamma \in U} \sum_{\gamma=1}^{n+1} \xi'(t) w_\gamma f(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), v_\gamma, t), \tag{14}$$

где $\xi(t)$ — решение системы

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{\delta\pi(z^0, \xi, v^0, w^0)}{\delta z(t)}, \qquad \xi(t_1) = -\frac{\partial \varphi_1(z^0(t_1))}{\partial z}. \tag{15}$$

Здесь $\dfrac{\delta\pi(z, \xi, v, w)}{\delta z(t)}$ — вариационная производная в точке t по $z(t)$ от функционала

$$\pi(z, \xi, v, w) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\gamma=1}^{n+1} \xi'(t) w_\gamma(t) f(z(t), z(t-h(z(t), t)), v_\gamma(t), t)\, dt.$$

Из (14) следует, что каждая векторная функция $v_\gamma^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию

$$\xi'(t) f(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), v_\gamma^0(t), t) = \\ = \max_{u \in U} \xi'(t) f(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), u, t), \quad (16)$$

и поэтому скользящий оптимальный режим (решение задачи (11) — (13) с $0 < w_\gamma^0(t) < 1$) заведомо не возникнет, а решение задачи (1) — (3) будет существовать, если максимум по u выражения

$$\xi'(t) f(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), u, t) \quad (17)$$

достигается в единственной точке почти при всех $t \in T$. Используем этот факт для установления критериев существования оптимальных управлений в задаче минимизации функционала

$$J(u) = \varphi_1(x(t_1)) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t), x(t-h(x(t), t)), u(t), t)\, dt \quad (18)$$

на траекториях системы (1) с $h = h(x, t)$. Задача (1), (2), (18) сводится к задаче (1) — (3), если ввести переменную

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f_{n+1}(x(\tau), x(\tau - h(x(\tau), \tau)), u(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Из-за специальной структуры вновь полученной системы уравнений сопряженная система (15) имеет решение, в котором $\xi_{n+1}(t) \equiv -1$ и функция (17) принимает вид

$$\xi'(t) f(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), u, t) - \\ - f_{n+1}(z^0(t), z^0(t-h(z^0(t), t)), u, t).$$

Отсюда следует теорема:

Теорема 2. Пусть в дополнение к условиям леммы 1: 1) $f(x, y, u, t) = f^1(x, y, t) + Bu$; 2) функция $f_{n+1}(x, y, u, t)$ при всех $x, y \in X$, $t \in T$ строго выпукла по u. Тогда в задаче (1), (2), (18) существуют оптимальные управления.

Перенесение теоремы 2 на общий случай задачи (1), (2), (18) выполнено в [36с].

§ 3. Доказательство существования оптимальных управлений методом приращений

1. Системы, линейные по состоянию. Идею этого параграфа проиллюстрируем сначала на следующей задаче.

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = c'x(t_1) \tag{19}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(u, t), \quad u \in \overline{U}, \ x(t_0) = x_0, \tag{20}$$

где $A(t)$, $b(u, t)$ — непрерывные функции. Введем вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{\gamma=1}^{n+1} w_\gamma(t)\, b(v_\gamma(t), t), \ z(t_0) = z_0, \\ &w_\gamma(t) \geqslant 0, \quad \sum_{\gamma=1}^{n+1} w_\gamma(t) = 1, \quad v_\gamma(t) \in U, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

на которой найдем минимум функционала

$$J(v, w) = c'z(t_1). \tag{22}$$

Оптимальные управления $v_\gamma^0(t)$, $w_\gamma^0(t)$ в задаче (21), (22) существуют в силу теоремы 1. Система (20) есть частный случай системы (21), и поэтому

$$J(v^0, w^0) \leqslant \inf J(u). \tag{23}$$

Рассмотрим управление $u^*(t) = v_1^0(t)$ для системы (20) и управления $v_\gamma^*(t) = v_\gamma^0(t)$, $w^*(t) = \{w_1 \equiv 1, w_2 \equiv 0, \ldots$ $\ldots, w_{n+1} \equiv 0\}$ для системы (21). При этих управлениях траектории систем (20), (21) совпадают и

$$J(u^*) = J(v^*, w^*). \tag{24}$$

Но приращение $\Delta J(v^0, w^0) = J(v^*, w^*) - J(v^0, w^0)$ в силу (24) равно

$$\Delta J(v^0, w^0) = \\ = -\int_{t_0}^{t_1} \left[\xi'(t)\, b(v_1^0(t), t) - \sum_{\gamma=1}^{n+1} \xi'(t)\, w_\gamma^0(t)\, b(v_\gamma^0(t), t)\right] dt.$$

Так как подынтегральное выражение в силу свойства (16) тождественно равно нулю, то $J(v^*, w^*) = J(v^0, w^0)$. Сравнивая это равенство с (23), (24), заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Оптимальные управления в задаче (19), (20) существуют.

2. Системы с запаздыванием. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h) + b(u(t), t), \quad u(t) \in \bar{U}, \\ x(\tau) = \Phi(\tau), \quad \tau \in S_0, \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

и функционал

$$J(u) = \varphi_1(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t), x(t-h), u(t), t)\,dt, \quad (26)$$

где $\varphi_1(x)$, $f_{n+1}(x, y, u, t)$ — непрерывные функции, дифференцируемые и вогнутые по $\{x, y\}$ при каждом $t \in T$; $A(t)$, $A_1(t)$, $b(u, t)$ — непрерывные матричные функции. Введем переменную x_{n+1} согласно уравнению

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = f_{n+1}(x(t), x(t-h), u(t), t), \quad x_{n+1}(t_0) = 0. \quad (27)$$

Тогда задача (25), (26) сведется к задаче минимизации функции

$$\varphi_1(x(t_1)) + x_{n+1}(t_1)$$

на траекториях уравнений (25), (27). Повторяя в основном рассуждения, предшествующие теореме 3 (необходимая формула приращения получена в [36c]), нетрудно убедиться в справедливости утверждения.

Теорема 4. Задача (25), (26) имеет решение, если

$$f_{n+1}(x, y, u, t) = f^1_{n+1}(x, y) + f^2_{n+1}(u, t).$$

§ 4. Существование оптимальных управлений в непрерывных системах и принцип максимума для дискретных систем

До сих пор (§§ 2, 3) для доказательства теорем существования оптимальных управлений привлекалась теория скользящих режимов, дополненная (§ 3) изучением приращений функционала качества. Ниже предлагается новый метод установления теорем существования оптимальных управлений, основанный на разностной аппроксимации дифференциальных уравнений.

Пусть требуется с помощью измеримых функций $u(t)$, $t \in T$, $u(t) \in T$, $U = \{u\colon |u| \leqslant 1\}$, минимизировать функционал

$$J(u) = c'x(t_1),$$

если уравнение движения имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x) + bu, \qquad x(t_0) = x_0, \\ &f(x) \in C^{n-2}, \qquad b = \mathrm{const.} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Вместо (28) рассмотрим дискретную систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y(\tau_{h+1}^N) - y(\tau_h^N)}{\Delta t} = f(y(\tau_h^N)) + bv(\tau_h^N), \\ &h = 0, \ldots, N, \qquad y(\tau_0^N) = x_0, \\ &\tau_h^N = t_0 + h\,\Delta t, \qquad \Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

на которой будем минимизировать функцию

$$J^N(v) = c'y(\tau_N^N) \tag{30}$$

по конечному числу переменных $v(\tau_h^N)$, $v(\tau_h^N) \in U$. Задача (29), (30), очевидно, всегда имеет решение $v^0(\tau_h^N)$. Обозначим через $V^N(t)$ кусочно-постоянную функцию, построенную по $v^0(\tau_h^N)$:

$$V^N(t) = v^0(\tau_h^N) \quad \text{при} \quad \tau_h^N \leqslant t < \tau_{h+1}^N. \tag{31}$$

Пусть $Y^N(t)$ — полигон, построенный по траектории $y^0(\tau_h^N)$, соответствующей в силу (29) последовательности $v^0(\tau_h^N)$:

$$Y^N(t) = y^0(\tau_h^N) + (t - \tau_h^N)\,\frac{y^0(\tau_{h+1}^N) - y^0(\tau_h^N)}{\Delta t},$$
$$\tau_h^N \leqslant t < \tau_{h+1}^N;$$

через $K^N(t)$ обозначим полигон

$$K^N(t) = \xi(\tau_h^N) + (t - \tau_h^N)\,\frac{\xi(\tau_{h+1}^N) - \xi(\tau_h^N)}{\Delta t}, \tag{32}$$
$$\tau_h^N \leqslant t < \tau_{h+1}^N,$$

построенный на решении $\xi(\tau_h^N)$ системы

$$\frac{\xi(\tau_{h-1}^N)-\xi(\tau_h^N)}{\Delta t}=\frac{\partial f'(y^0(\tau_h^N))}{\partial y}\xi(\tau_h^N), \qquad \xi(\tau_h^N)=-c.$$

Семейства функций $Y^N(t)$, $K^N(t)$, $N\geqslant 1$, являются, очевидно, компактными и содержат поэтому равномерно сходящиеся подпоследовательности, которые, чтобы не усложнять запись, обозначим снова через $Y^N(t)$, $K^N(t)$. Оптимальное управление $v^0(\tau_h^N)$ удовлетворяет [110, 160b] принципу максимума

$$\xi'(\tau_h^N)\,bv^0(\tau_h^N)=\max_{v\in U}\xi'(\tau_h^N)\,bv. \tag{33}$$

Из (32) имеем

$$b'K^N(\tau_h^N)\,V^N(\tau_h^N)\geqslant b'K^N(\tau_h^N)\,V^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1}),$$
$$b'K^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})\,V^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})\geqslant b'K^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})\,V^N(\tau_h^N).$$

Отсюда

$$b'K^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})\,V^N(\tau_h^N)-b'K^N(\tau_h^N)\,V^N(\tau_h^N)\leqslant$$
$$\leqslant b'K^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})\,V^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})-b'K^N(\tau_h^N)\,V^N(\tau_h^N)\leqslant$$
$$\leqslant b'K^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})\,V^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1})-b'K^N(\tau_h^N)\,V^{N+1}(\tau_{h_1}^{N+1}). \tag{34}$$

Пусть t, $t\in T$, — произвольная точка, h, h_1 таковы, что

$$t_0+h\frac{t_1-t_0}{N}\leqslant t\leqslant t_0+(h+1)\frac{t_1-t_0}{N},$$
$$t_0+h_1\frac{t_1-t_0}{N+1}\leqslant t\leqslant t_0+(h_1+1)\frac{t_1-t_0}{N+1}.$$

Из (32) следует, что

$$K^N(t)=\xi(\tau_h^N)+o\left(\frac{1}{N}\right),\quad K^{N+1}(t)=\xi(\tau_{h_1}^{N+1})+o\left(\frac{1}{N+1}\right).$$

Из (34) получаем: $H^N(t)=b'K^N(t)\,V^N(t)\to H(t)$ при $N\to\infty$. А так как

$$K(t)=\lim_{N\to\infty}K^N(t),$$

то

$$V^N(t)\to V(t) \quad \text{при} \quad N\to\infty \tag{35}$$

во всех точках t, где $b'K(t) \neq 0$. Заметим, что функция $K(t)$ является решением уравнения

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\frac{\partial f'(Y(t))}{\partial y} K(t), \qquad K(t_1) = -c \tag{36}$$

$$\left(Y(t) = \lim_{N \to \infty} Y^N(t)\right).$$

Пусть $\operatorname{mes}\{t\colon b'K(t) = 0\} = 0$. Тогда сходимость (35) имеет место почти всюду на T и по теореме Лебега функция $V(t)$, $t \in T$, измерима. Из (29) нетрудно получить, что

$$\frac{dY}{dt} = f(Y) + bV.$$

Управление $V(t)$, $t \in T$, является допустимым, так как $V^N(t) \in U$ и U — замкнутое множество. Чтобы доказать, наконец, что $V(t)$, $t \in T$, — решение задачи (19), (28), достаточно заметить, что

$$\lim_{N \to \infty} J^N(v^0) \leqslant \inf J(u)$$

и

$$c'y^0(\tau_N^N) \to c'Y(t_1).$$

Результат этого параграфа сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. Пусть $V^N(t)$, $N \geqslant 1$, $t \in T$, — такая последовательность управлений, построенных на решениях задачи (29), (30), что $Y^N(t) \to Y(t)$ при $N \to \infty$, и вдоль $Y(t)$ выполняются условия теоремы 1.9 почти для всех $\bar{t} \in T$.

Тогда $V^N(t) \to V(t)$ во всех точках, где $b'K(t) \neq 0$, $K(t)$ — решение системы (36), $V(t)$, $t \in T$ — оптимальное управление в задаче (19), (28).

§ 5. Доказательство теоремы существования оптимального управления с помощью разностной аппроксимации непрерывной системы

Пусть минимизируется функционал

$$J(u) = \varphi_1(x(t_1)) \tag{37}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T. \tag{38}$$

Будем предполагать, что допустимые управления $u(t)$, $t \in T$, суть измеримые функции со значениями из замкнутого ограниченного множества U. Относительно функций $\varphi_1(x)$, $f(x, u)$ сделаем следующие предположения: 1) $\varphi_1(x)$ — конечная полунепрерывная снизу функция, 2) функция $f(x, u)$ непрерывна по обоим аргументам, по x удовлетворяет условию Липшица. Если, кроме того, траектории $x(t)$, $t \in T$, уравнения (38), соответствующие всевозможным допустимым управлениям, равномерно ограничены, а множество

$$R(x) = \{z\colon\ z = f(x, u),\ u \in U\}$$

выпукло при каждом x, то задача (3), (2), (38) имеет решение в классе измеримых управлений.

Для доказательства утверждения заменим систему (38) уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y(\tau_{h+1}) - y(\tau_h)}{\Delta t} = f(y(\tau_h), v(\tau_h)), \\ &y(\tau_0) = x_0,\quad h = 0, \ldots, N, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где $\tau_h = t_0 + h\,\Delta t$, $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}$. Из замкнутости множества U, непрерывности функций $f(x, u)$ и полунепрерывности снизу функции $\varphi_1(x)$ следует, что задача минимизации функции $\varphi_1(y(\tau_N))$ по конечному числу переменных $v(\tau_h) \in U$ всегда имеет решение $v^0(\tau_h)$, которому в силу (39) соответствует последовательность $y^0(\tau_h)$.

Обозначим через $Y_N(t)$, $t \in T$, полигон, построенный по точкам τ_h, $y^0(\tau_h)$. Последовательность полигонов $Y^N(t)$, $N \geqslant 1$, образует семейство равномерно ограниченных функций (в силу аналогичного свойства системы (38) и сходимости решений системы (39) к решениям системы (38) при $N \to \infty$), удовлетворяющих условию Липшица

$$\| Y^N(t + \Delta t) - Y^N(t) \| \leqslant L\,|\Delta t|,\quad L = \text{const}. \tag{40}$$

Поэтому она содержит подпоследовательность полигонов, равномерно сходящуюся к функции $\overline{Y}(t)$, $t \in T$, которая также удовлетворяет условию (40). Из последнего свойства следует, что производная $d\overline{Y}(t)/dt$ почти всюду на T определена и является измеримой функцией. Пусть точка $t^* \in T$ такова, что производная $dY(t^*)/dt$ существует.

Введем числа $\bar{h}$, θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$: $t^* = \tau_{\bar{h}} + \theta \Delta t$. Очевидны равенства

$$\frac{Y^N(t^*+\Delta t) - Y^N(t^*)}{\Delta t} = \theta \frac{Y^N(t^*+\Delta t) - Y^N(\tau_{\bar{h}+1})}{t^*+\Delta t - \tau_{\bar{h}+1}} + \\ + (1-\theta)\frac{Y^N(\tau_{\bar{h}+1}) - Y^N(t^*)}{\tau_{\bar{h}+1} - t^*} = \theta f(Y^N(\tau_{\bar{h}+1}),\ v^0(\tau_{\bar{h}+1})) + \\ + (1-\theta) f(Y^N(\tau_{\bar{h}}),\ v^0(\tau_{\bar{h}})). \quad (41)$$

Множество $R(Y(t^*))$ полунепрерывно сверху относительно включения, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из

$$\| \bar{Y}(t^*) - Y \| \leqslant \delta \quad (42)$$

следует

$$R(Y) \subset [R(\bar{Y}(t^*))]_\varepsilon. \quad (43)$$

В силу определения функции $\bar{Y}(t)$ существует такое число N_0, $N_0 \geqslant \frac{2L(t_1 - t_0)}{\delta}$, что при $N \geqslant N_0$ имеем

$$\| \bar{Y}(t) - Y^N(t) \| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Последнее неравенство в совокупности с (40) позволяет записать:

$$\| \bar{Y}(t^*) - Y^N(\tau_{\bar{h}}) \| \leqslant \delta, \quad \| \bar{Y}(t^*) - Y^N(\tau_{\bar{h}+1}) \| \leqslant \delta.$$

Отсюда в силу (42), (43) следует:

$$f(Y^N(\tau_{\bar{h}}),\ v^0(\tau_{\bar{h}})) \in R(Y^N(\tau_{\bar{h}})) \subset [R(\bar{Y}(t^*))]_\varepsilon, \quad (44)$$

$$f(Y^N(\tau_{\bar{h}+1}),\ v^0(\tau_{\bar{h}+1})) \in R(Y^N(\tau_{\bar{h}+1})) \subset [R(\bar{Y}(t^*))]_\varepsilon. \quad (45)$$

Множество $[R(Y)]_\varepsilon$ выпукло вместе с $R(Y)$. Поэтому из (42), (44), (45) при достаточно больших N имеем

$$\frac{Y^N(t^*+\Delta t) - Y^N(t^*)}{\Delta t} \in [R(\bar{Y}(t^*))]_\varepsilon.$$

Пусть $N \to \infty$, тогда $\Delta t \to 0$, $\varepsilon \to 0$, в силу замкнутости множества $R(\bar{Y}(t^*))$ и определения числа t^* получаем $\frac{d\bar{Y}(t^*)}{dt} \in R(\bar{Y}(t^*))$. Из этого условия и леммы 4 следует существование такой измеримой функции $\bar{u}(t)$, $\bar{u}(t) \in U$, $t \in T$, что

$$\frac{d\bar{Y}(t)}{dt} = f(\bar{Y}(t), \bar{u}(t)).$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{N\to\infty} \min \varphi_1(y(\tau_N)) \leqslant \inf J(u),$$

$$\varphi_1(\bar{Y}(t_1)) = \lim_{N\to\infty} \varphi_1(Y^N(t_1)).$$

Здесь первый факт является следствием того, что (39) аппроксимирует (38), а второй — следствием полунепрерывности снизу функции $\varphi_1(x)$. Сравнивая эти два факта, получаем $J(\bar{u}) = \inf J(u)$, т. е. $\bar{u}(t)$, $t \in T$,— оптимальное управление.

§ 6. Решение проблемы существования оптимальных управлений при использовании методов функционального анализа

В § 1.8 было доказано, что при использовании методов функционального анализа задача нахождения управлений, при которых траектория системы удовлетворяет заданным граничным условиям, сводится к условию обращения в нуль некоторой функции. Если дополнительно на управления наложено требование экстремальности (для определенности — минимальности), то задача о существовании оптимального управления становится во многих случаях эквивалентной вопросу о непрерывности слева упомянутой функции. Детали доказательств, связанные с этим кругом задач, вынесены в §§ 6.9—6.14, где решается не только проблема существования оптимального управления, но и находится вид оптимального управления.

Комментарии к главе V

1. Если запаздывание $h(x, u, t)$ не зависит от параметров u, то в теореме 1 вместо множества $R(x(\cdot), t)$ достаточно рассмотреть множество

$$R(x, y, t) = \{z: z = f(x, y, u, t),\ u \in U\},$$

определенное на векторах x, y и числе t.

2. Теорема 1 остается справедливой, если в задаче (1) — (3) добавить условие

$$G(x(t),\ t) \leqslant 0, \qquad t \in T, \tag{46}$$

где $G(x,\ t)$ — непрерывная функция. В связи с этим интересно отметить, что теорема 3 с дополнительным условием (46), вообще говоря, неверна.

Пример 1.

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1 - u^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$
$$U = \{u : |u| \leqslant 1\}, \quad T = [0,\ 1], \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad G(x,\ t) = -x_1.$$

Последовательность управлений в примере $u^N(t) = \operatorname{sign}\sin Nt$, $N \geqslant 1$, является минимизирующей: $J(u^N) \to -1 = \inf J(u)$, однако не существует измеримой функции $\bar{u}(t)$, $t \in T$, для которой $J(\bar{u}) = -1$.

3. Хотя условия теоремы 1 довольно жесткие (особенно требование выпуклости $R(x(\cdot),\ t)$), ослабить их, вообще говоря, нельзя.

Пример 2.

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$
$$U = \{u : |u| = 1\}, \quad T = [0,\ 1], \quad \varphi_1(x) = x_2.$$

Нетрудно видеть, что $\inf J(u) = 0$. Однако не существует измеримой функции $\bar{u}(t)$, $t \in T$, доставляющей минимум функционалу $J(u) = x_2$.

4. Условия теорем 2, 4 в общем случае ослабить нельзя.

Пример 3.

$$\dot{x}_1 = u, \quad f_{n+1} = x_1^2 - u^2, \quad x_1(0) = 0,$$
$$U = \{u : |u| \leqslant 1\}, \quad T = [0, 1], \quad \varphi_1(x) = x_2.$$

Легко видеть, что $\inf J(u) = -1$, но infimum на измеримых функциях не достигается.

5. Проблема существования оптимальных управлений в настоящее время имеет обширную библиографию. Первые результаты по существованию оптимальных управлений получены в [38b, 125]. Хотя в общем случае ослабить условия теоремы А. Ф. Филиппова нельзя, представляет интерес выделение классов задач, в которых эти условия допускают ослабление. В этом направлении известны работы [145, 205, 221a]. Результаты §§ 1—5 отличаются от известных как методом исследования, так и содержанием. Весьма перспективной является, на наш взгляд, идея доказательства теоремы 5. Эта теорема и многочисленные примеры (см., в частности, главы V, IX) приводят к мысли, что проблема существования оптимальных управлений в непрерывных системах и возможность перенесения принципа максимума Л. С. Понтрягина на дискретные системы тесно связаны. Сформулируем эту мысль в виде следующего предположения.

Гипотеза. Для того чтобы задача оптимального управления в непрерывной системе имела решение в классе измеримых ограниченных управлений, необходимо и достаточно чтобы при достаточно малых интервалах квантования (Δt мало) оптимальные управления дискретной системы, аппроксимирующей непрерывную систему, удовлетворяли принципу максимума Л. С. Понтрягина.

Доказательство этой гипотезы имело бы большое значение как для непрерывных, так и для дискретных систем. С одной стороны, оно показало бы универсальность принципа максимума Л. С. Понтрягина, с другой — обосновало бы применение этого принципа при расчете оптимальных управлений на цифровых вычислительных устройствах. Последнее обстоятельство является одним из наиболее важных мотивов, в силу которых предлагаемая гипотеза должна быть исследована.

Известно, что динамическое программирование является наиболее универсальным средством исследования дискретных процессов. Однако применение этого метода к расчету оптимальных процессов уже в сравнительно несложных системах наталкивается на непреодолимую (пока) трудность, связанную с ограниченностью оперативной памяти ЭЦВМ. Поэтому [129, 131, 177] предпринимаются настойчивые попытки распространения принципа максимума на дискретные системы. В главе IX этот вопрос будет подробно исследован. Хотя, вообще говоря, принцип максимума для дискретных систем не имеет места, он, будь сформулированная гипотеза справедлива, не теряет своего огромного значения для большого класса дискретных систем, полученных при аппроксимации непрерывных систем.

Если бы приведенная выше гипотеза оказалась справедливой, то появилась бы новая схема доказательства теорем существования оптимальных управлений. Эта схема (частично использованная при доказательстве теоремы 5) проблему существования оптимальных управлений сводит к доказательству принципа максимума для дискретных систем. Последняя задача в ряде случаев (см. главу IX) решается весьма просто.

6. В работе [36b] для задачи (1) — (3) доказана теорема существования оптимальных управлений по схеме, предложенной в [56] для обыкновенных динамических систем.

Часть II

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

ГЛАВА VI

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЙ

§ 1. Метод приращений

1. Постановка задачи. Формулы приращения скалярной функции. На классе D допустимых управлений, состоящем из кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T$, со значениями из ограниченного множества U, рассмотрим решения $x(t)$, $t \in T$, уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x, u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ &x = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f = \{f_1, \ldots, f_n\}, \quad u = \{u_1, \ldots, u_r\}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $f_i(x, u, t)$ — функции, определенные и непрерывные вместе с $\partial f_i(x, u, t)/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Всюду в дальнейшем в точках τ разрыва (первого рода) функций $u(t)$ будем полагать $u(\tau) = \lim u(t)$, $t \to \tau$, $t > \tau$. Пусть управлению $u(t)$, $t \in T$, соответствует некоторое значение функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_1)). \tag{2}$$

Цель настоящего параграфа состоит в нахождении условий (необходимых условий) оптимальности, которым удовлетворяют в задаче (1), (2) оптимальные управления $u^0(t)$, $t \in T$ (предполагается, что они существуют). При доказательстве основных положений будем опираться на формулы приращения скалярной функции

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)),$$

определенной на траекториях системы (1). Обозначим через $x(t)$, $x(t) + \Delta x(t)$ траектории уравнения (1), соответствующие управлениям $u(t)$, $u(t)+\Delta u(t)$. Справедливы следующие формулы:

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = -\int_{t_0}^{t_1}[H(x(t),\ \psi(t),\ u(t)+\Delta u(t),\ t) - \\ - H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)]\,dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial[H'(x,\ \psi,\ u+\Delta u,\ t)-H'(x,\ \psi,\ u,\ t)]}{\partial x}\Delta x(t)\,dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x\|)\,dt + o_4, \tag{3}$$

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = -\int_{t_0}^{t_1}[H(x+\Delta x,\ \psi,\ u+\Delta u,\ t) - \\ - H(x+\Delta x,\ \psi,\ u,\ t)]\,dt - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x\|)\,dt + o_4, \tag{4}$$

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = -\int_{t_0}^{t_1}[H(x,\ \psi+\Delta\psi,\ u+\Delta u,\ t) - \\ - H(x,\ \psi+\Delta\psi,\ u,\ t)]\,dt - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x\|)\,dt + o_4. \tag{5}$$

Здесь

$$H(x,\ \psi,\ u,\ t) = \psi' f(x,\ u,\ t),$$

$$\dot\psi = -\frac{\partial H(x,\ \psi,\ u,\ t)}{\partial x}, \qquad \psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x},$$

$$\Delta\dot\psi = -\frac{\partial H(x+\Delta x,\ \psi+\Delta\psi,\ u+\Delta u,\ t)}{\partial x} + \frac{\partial H(x,\ \psi,\ u,\ t)}{\partial x},$$

$$\Delta\psi(t_1) = 0;$$

величины $o_1 - o_4$ определены через разложения

$$H(x+\Delta x,\ \psi,\ u+\Delta u,\ t) - H(x,\ \psi,\ u+\Delta u,\ t) = \\ = \frac{\partial H'(x,\ \psi,\ u+\Delta u,\ t)}{\partial x}\Delta x + o_1(\|\Delta x\|),$$

$$H(x+\Delta x, \psi, u, t) - H(x, \psi, u, t) = \\ = \frac{\partial H'(x, \psi, u, t)}{\partial x} \Delta x + o_2(\|\Delta x\|),$$

$$H(x+\Delta x, \psi+\Delta\psi, u+\Delta u, t) - H(x, \psi+\Delta\psi, u+\Delta u, t) = \\ = \frac{\partial H'(x+\Delta x, \psi+\Delta\psi, u+\Delta u, t)}{\partial x} \Delta x + o_3(\|\Delta x\|),$$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \frac{\partial \varphi'(x)}{\partial x} \Delta x + o_4(\|\Delta x\|).$$

Доказательство формул (3)—(5). Приращения $\Delta x(t)$, $\Delta\psi(t)$ траекторий $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = f(x+\Delta x, u+\Delta u, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(t_0) = 0, \quad t \in T,$$

$$\frac{d\Delta\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x+\Delta x, \psi+\Delta\psi, u+\Delta u, t)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \quad \Delta\psi(t_1) = 0.$$

Из формулы интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, d\Delta x(t) = \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0)\Delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\, d\psi(t)$$

после подстановки значений $\psi(t_1)$, $\Delta x(t_0)$ получаем

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, d\Delta x(t) - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\, d\psi(t) + o_4(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Заменим $d\Delta x(t)$ и $d\psi(t)$ их выражениями. Тогда имеем

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} [H(x+\Delta x, \psi, u+\Delta u, t) - H(x, \psi, u, t)]\, dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x' \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}\, dt + o_4.$$

Добавим в правую часть выражение $H(x, \psi, u+\Delta u, t) - H(x, \psi, u+\Delta u, t)$. Заново сгруппировав члены, придем к (3). Если в правую часть добавить $H(x+\Delta x, \psi, u, t) - H(x+\Delta x, \psi, u, t)$ и сгруппировать члены, то получим формулу (4). Для получения (5) проинтегрируем по частям выражение

$$\int_{t_0}^{t_1} [\psi'(t) + \Delta\psi'(t)]\, d\Delta x(t) = [\psi'(t_1) + \Delta\psi'(t_1)]\, \Delta x(t_1) -$$
$$- [\psi'(t_0) + \Delta\psi'(t_0)]\, \Delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\, [d\psi(t) + d\Delta\psi(t)].$$

Учтем значения $\psi(t_1)$, $\Delta\psi(t_1)$, $\Delta x(t_0)$ и используем выражения для $d\Delta x(t)$, $d\psi(t)$, $d\Delta\psi(t)$. В результате получим

$$\Delta J(u) = - \int_{t_0}^{t_1} [H(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi, u + \Delta u, t) -$$
$$- H(x, \psi + \Delta\psi, u, t)]\, dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Delta x' \frac{\partial H(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi, u + \Delta u, t)}{\partial x}\, dt + o_4.$$

Добавим в правую часть выражение $H(x, \psi + \Delta\psi, u + \Delta u, t) - H(x, \psi + \Delta\psi, u + \Delta u, t)$, перегруппируем члены, в результате получим формулу (5).

2. Специальное приращение управления. Пусть

$$\Delta_{\varepsilon\theta} u(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leqslant t < \theta, \ \theta + \varepsilon \leqslant t < t_1, \\ u^* - u(t), & \theta \leqslant t < \theta + \varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

где θ, ε — произвольные числа, $\theta \in T$, $\theta + \varepsilon \in T$, $\varepsilon > 0$, u^* — произвольная точка из U. Подставим приращение $\Delta_{\varepsilon\theta} u(t)$ в (3). Тогда получим

$$\Delta_{\varepsilon\theta} J(u) = - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} [H(x(t), \psi(t), u^*, t) -$$
$$- H(x(t), \psi(t), u(t), t)]\, dt -$$
$$- \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_{\varepsilon\theta} x'(t) \frac{\partial [H(x(t), \psi(t), u^*, t) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)]}{\partial x}\, dt -$$
$$- \int_{\theta}^{t_1} o_1(\| \Delta_{\varepsilon\theta} x(t) \|)\, dt + o_4(\| \Delta_{\varepsilon\theta} x(t_1) \|).$$

Здесь символом $\Delta_{\varepsilon\theta}\, x(t)$ обозначено приращение траектории $x(t)$, вызванное приращениями (6).

3. Принцип максимума Л. С. Понтрягина. Приведем сначала три простых утверждения.

Лемма 1. Для любых чисел θ, ε, функции $h(t, u)$, непрерывной по t, u, ограниченного кусочно-непрерывного управления $u(t)$ при достаточно малом ε выполняется равенство

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} h(t, u(t))\, dt = \varepsilon h(\theta, u(\theta)) + o(\varepsilon).$$

Для доказательства достаточно применить формулу Тейлора:

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha(0) + \frac{\partial\alpha(0)}{\partial\varepsilon}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Лемма 2. Если функция $\alpha(t)$ неотрицательна при $t \geqslant t_0$, то для $c \geqslant 0$, $L \geqslant 0$ из неравенства

$$\alpha(t) \leqslant c + L\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, ds, \quad t \geqslant t_0,$$

следует, что

$$\alpha(t) \leqslant c \exp L(t - t_0), \quad t \geqslant t_0.$$

Действительно, при условиях леммы выполняется цепочка неравенств

$$\alpha(t) \leqslant c + L\int_{t_0}^{t}\left[c + L\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma\right] ds \leqslant c + cL(t - t_0) +$$

$$+ L^2\int_{t_0}^{t}(t - s)\,\alpha(s)\, ds \leqslant c\left[1 + L(t - t_0) + \frac{L^2(t - t_0)^2}{2!} + \ldots\right] =$$

$$= c \exp L(t - t_0).$$

Лемма 3. Пусть в выражении $\beta d + \gamma(\beta)$ величина d постоянна, β стремится к нулю, оставаясь положительной, $\beta > 0$, $\gamma(\beta) \to 0$ при $\beta \to 0$, причем $\gamma(\beta)/\beta \to 0$ при $\beta \to 0$.

Если $\beta d + \gamma(\beta) \geqslant 0$ при всех достаточно малых β, то $d \geqslant 0$.

Действительно, если $d < 0$, то $d + \frac{\gamma(\beta)}{\beta} < 0$ при достаточно малых β. Поэтому $\beta d + \gamma(\beta) = \beta\left(d + \frac{\gamma(\beta)}{\beta}\right) < 0$, что противоречит условию. Лемма 3 доказана.

Оценим величину $\|\Delta_{\varepsilon 0} x(t)\|$, $t \in T$. Ясно, что $\Delta_{\varepsilon\theta} x(t) \equiv 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$. Для всех t, $\theta \leqslant t < \theta + \varepsilon$, имеем

$$\frac{d\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)}{dt} = f(x + \Delta_{\varepsilon\theta} x, u^*, t) - f(x, u, t), \quad \Delta_{\varepsilon\theta} x(\theta) = 0.$$

Отсюда, переходя к интегральной записи, получаем

$$\|\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)\| \leqslant L \int_\theta^t \|\Delta_{\varepsilon\theta} x(\tau)\| d\tau + \int_\theta^{\theta+\varepsilon} \|\Delta_{u^*} f(x, u, t)\| dt$$

$$(\Delta_{u^*} f(x, u, t) = f(x, u^*, t) - f(x, u, t)).$$

Применим ко второму интегралу лемму 1 и воспользуемся леммой 2. Тогда имеем

$$\|\Delta_{\theta\varepsilon} x(t)\| \leqslant O(\varepsilon) \exp L\varepsilon = O_1(\varepsilon).$$

При $\theta + \varepsilon \leqslant t < t_1$ уравнения для $\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)$ имеют вид

$$\frac{d\Delta_{\varepsilon\theta} x}{dt} = f(x + \Delta_{\varepsilon\theta} x, u, t) - f(x, u, t), \ \|\Delta_{\varepsilon\theta} x(\theta + \varepsilon)\| \leqslant O_1(\varepsilon).$$

Переходя опять к интегральной записи и применяя лемму 2, получаем

$$\|\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)\| \leqslant O_1(\varepsilon) \exp L(t - \theta - \varepsilon) = O_2(\varepsilon),$$
$$\theta + \varepsilon \leqslant t \leqslant t_1.$$

Таким образом, на всем отрезке T числа $\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)$ имеют порядок малости, не меньший чем ε:

$$\|\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)\| \leqslant O(\varepsilon), \quad t \in T.$$

Поэтому выражение для $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u)$ при достаточных малых ε с помощью леммы 1 можно записать в следующем виде:

$$\Delta_{\varepsilon\theta} J(u) = -\varepsilon\,[H(x(\theta), \psi(\theta), u^*, \theta) - \\ - H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta), \theta)] + o(\varepsilon). \quad (7)$$

Пусть теперь $u(t) = u^0(t)$ — оптимальное управление. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0) \geqslant 0$, т. е. к (7) можно применить лемму 3, в силу которой

$$H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), \theta) \geqslant H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^*(\theta), \theta),$$

причем u^*, $u^* \in U$, $\theta \in T$ — произвольные числа. Полученный результат известен как *принцип максимума*, точная формулировка которого такова.

Теорема 1. Пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$,— оптимальное управление и траектория в задаче (1), (2); $\psi(t)$, $t \in T$,— решение уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}\psi(t), \qquad \psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x}. \tag{8}$$

Тогда в каждый момент t, $t \in T$, оптимальное управление удовлетворяет условию максимума:

$$\psi'(t) f(x^0(t), u^0(t), t) \geqslant \psi'(t) f(x^0(t), u, t) \text{ для всех } u \in U. \tag{9}$$

4. Случай выпуклых функционалов. Предположение о выпуклости функции $\varphi(x)$ позволяет снять ограничение на ее гладкость. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная выпуклая функция. Если вектор $x^0(t_1)$ не является точкой минимума функции $\varphi(x)$ на n-мерном пространстве, то, используя теорему об отделимости выпуклых множеств и уравнения в вариациях для (1), приходим к существованию такого вектора c ($\|c\| \neq 0$), что

$$c'\Delta_{\varepsilon\theta}x^0(t_1) \geqslant o(\varepsilon), \tag{10}$$

$$c'\omega \leqslant 0. \tag{11}$$

Здесь ε — достаточно малое положительное число, $\theta \in T$ ($\theta + \varepsilon \in T$) — произвольная точка, ω — любой вектор, направленный из точки $x^0(t_1)$ внутрь множества $\{x\colon \varphi(x) \leqslant \varphi(x^0(t_1))\}$. С помощью техники, развитой в [18d, 109], нетрудно показать, что вектор c можно выбрать не зависящим от θ, ε. Ниже (§ 2) при исследовании задач оптимизации в системах с запаздыванием доказывается, что свойство (10) оптимальных управлений ведет к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть на траекториях системы (1) функции $u_\nu^0(t)$, $\nu = 1, \ldots, r$, минимизируют функционал (2) с выпуклой функцией $\varphi(x)$, причем $\varphi(x^0(t_1)) \neq \inf \varphi(x)$,

$x \in E_n$. Тогда существует вектор c ($\| c \| \neq 0$), удовлетворяющий неравенству (11), такой, что на оптимальном управлении $u^0(t)$, $t \in T$, выполняется условие максимума (9) с функцией $\psi(t)$, которая является решением уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}\psi(t), \qquad \psi(t_1) = -c.$$

§ 2. Принцип максимума в системах с запаздыванием

1. Основная лемма. Вернемся к системе с запаздыванием [36с]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), x(t-h(x(t), u(t), t)), u(t), t), \quad t \in T, \\ x(\tau) &= \Phi(\tau), \ \tau \in S_0, \ h(x, u, t) > 0, \ u(\cdot) \in D. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Рассмотрим управление $u(t)$, $t \in T$, для которого

$$\frac{dh(x(t), u(t), t)}{dt} \leqslant 1 - \alpha_1, \quad \alpha_1 > 0.$$

Обозначим через $\tau(t)$ выражение

$$\tau(t) = t - h(x(t), u(t), t),$$

через $t = r(\tau)$ — решение уравнения $\tau = \tau(t)$. Пусть

$$H(x, y(x, u, t), \psi, u, t) = \psi' f(x, y(x, u, t), u, t),$$
$$y(x, u, t) = x(t - h(x, u, t)).$$

Будем говорить, что управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума с функцией $\psi(t)$, $t \in T$, если

$$H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t) \geqslant$$
$$\geqslant H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u, t) \tag{13}$$

для всех $u \in U$, $t \in T$.

Лемма 4 (основная). Пусть функции $f(x, y, u, t)$, $\Phi(t)$, $\frac{\partial f(x, y, u, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y, u, t)}{\partial y}$, $h(x, u, t)$, $\frac{\partial h(x, u, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial h(x, u, t)}{\partial u}$, $\frac{\partial h(x, u, t)}{\partial t}$, $\frac{d\Phi(t)}{dt}$ определены и непрерывны, причем

1) $$\|f(\bar{x}, \bar{y}, u, t) - f(x, y, u, t)\| \leqslant \leqslant L_1(\|\bar{x} - x\| + \|\bar{y} - y\|),$$

$$\|f(x, y, u, t)\| \leqslant L_2, \qquad \left\|\frac{d\Phi}{dt}\right\| \leqslant L_2,$$

$$|h(\bar{x}, u, t) - h(x, u, t)| \leqslant L_3 \|\bar{x} - x\|,$$

$$\|\Delta_{\bar{u}} f(x, y(x, u, t), u, t)\| \leqslant G\|\bar{u} - u\|;$$

2) если θ_1 — точка разрыва функции $u(t)$, то

$$h(x(\theta_1), u(\theta_1 - 0), \theta_1) > h(x(\theta_1), u(\theta_1 + 0), \theta_1);$$

3) $$L_3 G \exp[L_1(1 + L_2 L_3)(t_1 - t_0)] \leqslant 1.$$

Тогда каждая кусочно-непрерывная кусочно-дифференцируемая функция $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$, для которой существует такой вектор c, $\|c\| \neq 0$, что при достаточно малых ε, $\varepsilon > 0$, и любых θ, $\theta \in T$, выполняется неравенство

$$c' \Delta_{\varepsilon\theta} x(t_1) \geqslant o(\varepsilon), \tag{14}$$

удовлетворяет условию максимума (13) с функцией $\psi(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} - \\
&\quad - \left.\frac{\partial H(x(\bar{t}), y(x(\bar{t}), u(\bar{t}), \bar{t}), \psi(\bar{t}), u(\bar{t}), \bar{t})}{\partial y}\right|_{\bar{t}=r(t)} \frac{dr(t)}{dt} + \\
&\quad + \frac{\partial H'(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)}{\partial y} \left.\frac{dx(s)}{ds}\right|_{s=\tau(t)} \times \\
&\qquad \times \frac{\partial h(x(t), u(t), t)}{\partial x}, \\
&\qquad t_0 \leqslant t \leqslant t' = t_1 - h(x(t_1), u(t_1), t_1); \\
&\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{\partial H'(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)}{\partial y} \left.\frac{dx(s)}{ds}\right|_{s=\tau(t)} \times \\
&\qquad \times \frac{\partial h(x(t), u(t), t)}{\partial x}, \\
&\qquad t' \leqslant t \leqslant t_1, \qquad \psi(t_1) = -c.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Приведем только схему доказательства, отсылая за подробностями к [36с]. По схеме § 1, но с более громоздкими выкладками, можно показать, что при достаточно малых ε существует постоянная β такая, что $\| \Delta_{\varepsilon\theta} x(t) \| \leqslant \beta\varepsilon$. Далее, исходя из тождества

$$c'\Delta x(t_1) = -\psi'(t_1)\Delta x(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t)\Delta x(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta\dot{x}(t)\,dt,$$

по схеме § 2.2 убеждаемся, что

$$\begin{aligned} c'\Delta x(t_1) = &-\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)\,dt - \\ &-\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\frac{\partial}{\partial x}\Delta_{\tilde{u}} H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)\,dt - \\ &-\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'[\tau(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)] \times \\ &\qquad \times \frac{\partial}{\partial y} H(x(t), x[\tau(x(t), \tilde{u}(t), t)], \psi(t), \tilde{u}(t), t)\,dt + \\ &+\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'[\tau(x(t), u(t), t)] \times \\ &\qquad \times \frac{\partial}{\partial y} H(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)\,dt + \\ &+\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial y}\{H'(x(t), x[\tau(x(t), \tilde{u}(t), t)], \psi(t), \tilde{u}(t), t)\} \times \\ &\qquad \times \left.\frac{dx(s)}{ds}\right|_{s=\tau(x(t), \tilde{u}(t), t)} \Delta x'(t)\frac{\partial h(x(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x}\,dt - \\ &-\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial y}\{H'(x(t), y(x(t), u(t), t), \psi(t), u(t), t)\} \times \\ &\qquad \times \left.\frac{dx(s)}{ds}\right|_{s=\tau(x(t), u(t), t)} \frac{\partial h'(x(t), u(t), t)}{\partial x}\Delta x(t)\,dt - \\ &-\int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x(t)\|)\,dt. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$.

Доказательство завершается выделением в правой части последнего выражения главных членов по ε и применением леммы 3.

Примечания:

1. Функция $r(t)$ на отрезке $[\tau(\theta_1 - 0),\ \tau(\theta_1 + 0)]$ доопределяется условием $r(t) \equiv r(\theta_1 - 0)$.

2. Если запаздывание $h(x, u, t)$ не зависит явно от u, то утверждение леммы справедливо для функций $u(t)$ из класса измеримых функций.

2. Задача со свободным концом. Пусть среди кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными производными ищется управление $u^0(t)$, $t \in T$, минимизирующее вдоль (12) функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1))$$

с дифференцируемой функцией $\varphi(x)$. Если $u^0(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление, то при любых $\varepsilon > 0$, $\theta \in T$, $u^* \in U$ имеем

$$\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0) = \varphi(x^0(t_1) + \Delta_{\varepsilon\theta} x(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) =$$
$$= \frac{\partial\varphi'(x^0(t_1))}{\partial x}\Delta_{\varepsilon\theta} x(t_1) + o(\|\Delta_{\varepsilon\theta} x(t_1)\|) = c'\Delta_{\varepsilon\theta} x(t_1) + o(\varepsilon) \geqslant 0,$$

т. е. выполнено основное условие (14) леммы 4. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть для функций $f(x, y, u, t)$, $\Phi(t)$, $h(x, u, t)$ выполнены условия леммы 4. Тогда кусочно-непрерывное и кусочно-дифференцируемое оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (12), (2) удовлетворяет условию максимума (13) с функцией из (15), где

$$c = \frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x}.$$

3. Задача с незакрепленным временем. Пусть на траекториях системы (12) минимизируется функционал

$$J(u, t_1) = \varphi(x(t_1), t_1), \tag{16}$$

где функция $\varphi(x, t)$ непрерывна вместе с $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}$, t_1 — фиксированное число. Если t_1^0, $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_1^0]$, — оптимальные время и управление, то, очевидно, функция $u^0(t)$ на $[t_0, t_1^0]$ должна удовлетворять условию максимума из теоремы 3. Чтобы получить условия оптимальности для t_1^0, достаточно поэтому рассмотреть процессы разной длительности и положить сначала

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases} u^0(t), & t_0\leqslant t<t_1^0,\\ u^0(t_1^0), & t_1^0\leqslant t<t_1^0+\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда из неравенства

$$\Delta J(u^0, t_1^0)=\varphi(\tilde{x}(t_1^0+\varepsilon),\ t_1^0+\varepsilon)-\varphi(x^0(t_1^0),\ t_1^0)\geqslant 0$$

следует, что

$$\frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0),\ t_1^0)}{\partial t}\varepsilon+\frac{\partial\varphi'(x^0(t_1^0),\ t_1^0)}{\partial x}\times$$
$$\times f(x^0(t_1^0),\ y^0(x^0(t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0)\varepsilon+o(\varepsilon)\geqslant 0 \quad (17)$$

для всех достаточно малых ε, $\varepsilon>0$. Применяя к (17) лемму 3, получаем

$$\frac{\partial\varphi_1(x^0(t_1^0),\ t_1^0)}{\partial t}\geqslant H(x^0(t_1^0),\ y^0(x^0(t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0),\ \psi(t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0).$$

Неравенство противоположного смысла получается, если сравнить оптимальные t_1^0, $u^0(t)$ с $t_1^0-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, и $\tilde{u}(t)=$ $=u^0(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1^0-\varepsilon$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и t_1^0, $u^0(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1^0$, — решение задачи (12), (16). Тогда в дополнение к утверждениям теоремы 3 $\left(c=\frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0,\ t_1^0)}{\partial x}\right)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0),\ t_1^0)}{\partial t}=H(x^0(t_1^0),\ y^0(x^0(t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0)\ \psi(t_1^0),\ u^0(t_1^0),\ t_1^0).$$

4. **Задача с подвижным концом.** Предположим, что на правый конец траектории $x(t)$, $t\in T$, уравнения (12) наложено ограничение

$$g(x(t_1))\leqslant 0, \quad (18)$$

причем скалярная функция $g(x)$ определена и непрерывна вместе с $\partial g(x)/\partial x$.

Теорема 5. Пусть для функций $f(x,\ y,\ u,\ t)$, $h(x,\ u,\ t)$, $\Phi(t)$ выполнены условия леммы 4 и кусочно-непрерывное и кусочно-дифференцируемое управление $u^0(t)$, $t\in T$, в задаче (12), (18) таково, что векторы $\partial\varphi(x^0(t_1))/\partial x$ и $\partial g(x^0(t_1))/\partial x$ неколлинеарны. Тогда найдутся числа λ,

μ, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$ ($\mu = 0$, если $g(x^0(t_1)) < 0$) такие, что функция $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума (13) с $\psi(t)$ (решением системы (15)) при

$$c = \lambda\, \partial\varphi(x^0(t_1))/\partial x + \mu\, \partial g(x^0(t_1))/\partial x.$$

Доказательство. Покажем, что если выполнены условия теоремы 5, то существует ненулевой вектор c, удовлетворяющий условию основной леммы, т. е. $c'\Delta_{\varepsilon\theta}x(t_1) \geqslant o(\varepsilon)$, $o(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$, для любых $u^* \in U$, $\theta \in T$, если ε достаточно мало. Поскольку все остальные условия этой леммы также предполагаются выполненными, то этим и будет доказано утверждение теоремы 5.

Уравнению

$$\frac{d\Delta_{\varepsilon\theta}x(t)}{dt} = f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), u(t), t) - f(x(t), y(t), u(t), t), \quad t \geqslant \theta + \varepsilon,$$

поставим в соответствие уравнение в вариациях

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\delta_{\varepsilon\theta}x(t)}{dt} = A(t)\,\delta_{\varepsilon\theta}x(t) + A_1(t)\,\delta_{\varepsilon\theta}x[\tau(t)], \quad t \geqslant \theta + \varepsilon, \\ &\delta_{\varepsilon\theta}x(t) \equiv 0, \quad t < \theta + \varepsilon, \quad \delta_{\varepsilon\theta}x(\theta + \varepsilon) = \\ &\qquad = \Delta_{u^*}f(x(\theta + \varepsilon), y(\theta + \varepsilon), u(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)\,\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Здесь

$$A(t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1'}{\partial y} \cdot \dfrac{dx(s)}{ds}\Big|_{s=\tau(t)} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x} - \dfrac{\partial f_n'}{\partial y} \cdot \dfrac{dx(s)}{ds}\Big|_{s=\tau(t)} \dfrac{\partial h}{\partial x} \end{Bmatrix}, \qquad A_1(t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y} \end{Bmatrix},$$

где векторы $\partial f_i/\partial x$, $\partial f_i/\partial y$, $i = 1, \ldots, n$, $\partial h/\partial x$ и скалярная функция $\tau(t)$ вычислены вдоль траектории $x(t)$ и управления $u(t)$. Учитывая, что $\tilde{u}(t) \equiv u(t)$ при $t \in [\theta + \varepsilon, t_1]$, имеем

$$\Delta_{\varepsilon\theta}x(t) - \delta_{\varepsilon\theta}x(t) = \Delta_{\varepsilon\theta}x(\theta + \varepsilon) - \delta_{\varepsilon\theta}x(\theta + \varepsilon) + \int_{\theta+\varepsilon}^{t} [f(\tilde{x}(s), \tilde{x}[\tau(\tilde{x}, u, s)], u, s) - f(x(s), x[\tau(x, u, s)], u, s)]\,ds - \int_{\theta+\varepsilon}^{t} (A(s)\,\delta_{\varepsilon\theta}x(s) + A_1(s)\,\delta_{\varepsilon\theta}x[\tau(s)])\,ds =$$

$$= o(\varepsilon) + \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Delta_{\varepsilon\theta} x(s) - \frac{\partial f}{\partial y} \Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(\tilde{x}, u, s)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\tau(s)} \frac{\partial h'}{\partial x} \Delta_{\varepsilon\theta} x(s) \Big] ds + \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} o(\| \Delta_{\varepsilon\theta} x(s) \| +$$

$$+ \| \Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(\tilde{x}, u, s)] \|) \, ds - \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} (A(s) \delta_{\varepsilon\theta} x(s) +$$

$$+ A_1(s) \delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(s)]) \, ds = \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} A(s) [\Delta_{\varepsilon\theta} x(s) - \delta_{\varepsilon\theta} x(s)] \, ds +$$

$$+ \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} A_1(s) [\Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(\tilde{x}, u, s)] - \Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(x, u, s)]] \, ds +$$

$$+ \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} A_1(s) [\Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(s)] - \delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(s)]] \, ds + o(\varepsilon).$$

При доказательстве основной леммы было показано, что

$$\int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} A_1(s) [\Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(\tilde{x}, u, s)] - \Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(x, u, s)]] \, ds = o(\varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\left\| \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} A_1(s) [\Delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(s)] - \delta_{\varepsilon\theta} x[\tau(s)]] \, ds \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_{\tau(\theta+\varepsilon)}^{\tau(t)} A_1(r(s)) [\Delta_{\varepsilon\theta} x(s) - \delta_{\varepsilon\theta} x(s)] \, r'(s) \, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tau(\theta+\varepsilon)}^{\theta+\varepsilon} \| A_1(r(s)) \| \, \| \Delta_{\varepsilon\theta} x(s) \| \, | r'(s) | \, ds +$$

$$+ \int\limits_{\theta+\varepsilon}^{t} \| A_1(r(s)) \| \, \| \Delta_{\varepsilon\theta} x(s) - \delta_{\varepsilon\theta} x(s) \| \, | r'(s) | \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \| A_1(r(s)) \| \, \| \Delta_{\varepsilon\theta} x(s) \| \, | r'(s) | \, ds +$$

$$+\int_{\theta+\varepsilon}^{t} \|A_1(r(s))\|\,\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(s)-\delta_{\varepsilon\theta}x(s)\|\,|r'(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant L_1\frac{\beta}{\alpha_1}\varepsilon^2+L_1\frac{1}{\alpha_1}\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(s)-\delta_{\varepsilon\theta}x(s)\|\,ds=$$

$$=o(\varepsilon)+\frac{L_1}{\alpha_1}\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(s)-\delta_{\varepsilon\theta}x(s)\|\,ds.$$

Учитывая это, получим

$$\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(t)-\delta_{\varepsilon\theta}x(t)\|\leqslant\int_{\theta+\varepsilon}\|A(s)\|\,\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(s)-\delta_{\varepsilon\theta}x(s)\|\,ds+$$

$$+\frac{L_1}{\alpha_1}\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(s)-\delta_{\varepsilon\theta}x(s)\|\,ds+o(\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant L_1\left(\frac{\alpha_1+1}{\alpha_1}+L_2L_3\right)\int_{\theta+\varepsilon}^{t}\|\Delta_{\varepsilon\theta}\,x(s)-\delta_{\varepsilon\theta}x(s)\|\,ds+o(\varepsilon),$$

откуда

$$\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(t)-\delta_{\varepsilon\theta}x(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant o(\varepsilon)\exp\left(L_1\left(\frac{\alpha_1+1}{\alpha_1}+L_2L_3\right)(t_1-\theta-\varepsilon)\right) \qquad (20)$$

для $t\in[\theta+\varepsilon,\ t_1]$ и всех $u^*\in U$. Решение линейного уравнения (19) в момент t_1 запишем по формуле Коши:

$$\delta_{\varepsilon\theta}x(t_1)=F(t_1,\ \theta+\varepsilon)\,\Delta_{u^*}f(x(\theta+\varepsilon),\ y(\theta+\varepsilon),$$
$$u(\theta+\varepsilon),\ \theta+\varepsilon)\,\varepsilon. \qquad (21)$$

Из (21) видно, что при фиксированных θ, u^* и различных $\varepsilon>0$ множество $\{\delta_{\varepsilon\theta}x(t_1)\}$ представляет собой некоторый луч $\Pi_{\theta u^*}$, исходящий из точки $x(t_1)$.

Обозначим $a=\dfrac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}$, $b=\dfrac{\partial g(x(t_1))}{\partial x}$ и рассмотрим два конуса: $K_1=\{\delta x\colon\ a'\delta x\leqslant 0\}$ и $K_2=\{\delta x\colon\ b'\delta x\leqslant 0\}$. Пусть $K_3=K_1\cap K_2$. Из неколлинеарности векторов a и b следует, что конус K_3 имеет внутренние точки. Покажем, что луч $\Pi_{\theta u^*}$ не содержит внутренних точек множества K_3. Пусть точка $\delta_{\varepsilon\theta}x(t_1)\in\Pi_{\theta u^*}$ является внутренней для K_3.

Тогда все точки $\delta_{\varepsilon\theta}x(t_1)$, $o < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$, будут внутренними для K_3. В силу (20) при достаточно малых ε точки $\Delta_{\varepsilon\theta}x(t_1)$ также будет внутренними для K_3, что противоречит оптимальности $u(t)$.

Таким образом, множества $\Pi_{\theta u^*}$ и K_3 можно разделить, т. е. существует вектор $c(u^*, \theta)$ такой, что $c'\Delta_{\varepsilon\theta}x(t_1) \geqslant 0$, причем $c(u^*, \theta)$ является опорным вектором к K_3 в точке $x(t_1)$.

Следуя [109], можно построить вектор $c(u^*, \theta)$ не зависящим от u^* и θ, $u^* \in U$, $\theta \in T$. Иначе говоря, существует ненулевой вектор c, опорный к K_3 в точке $x(t_1)$, такой, что $c'\delta_{\varepsilon\theta}x(t_1) \geqslant 0$ для всех $u^* \in U$, $\theta \in T$.

Обращаясь к (20), получаем

$$c'\Delta_{\varepsilon\theta}x(t_1) \geqslant o(\varepsilon).$$

Выразим c через a и b. По построению $c'\delta x \leqslant 0$, $\delta x \in K_3$, т. е. $c \in K_3^-$, где K_3^- — конус неположительных линейных форм над K_3. Известно, что $K_3^- = (K_1 \cap K_2)^- = \overline{K_1^- + K_2^-}$, т. е. каждый элемент $c \in K_3^-$ представим в виде

$$c = \lambda a + \mu b, \quad \lambda + \mu > 0, \quad \lambda, \ \mu \geqslant 0.$$

Теорема полностью доказана.

§ 3. Новая форма необходимых условий оптимальности

1. Вариационные производные первого и второго рода. Для записи принципа максимума в задачах оптимизации систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (1), весьма удобной оказалась функция

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t), \tag{22}$$

с помощью которой уравнения для основной переменной и сопряженной переменной ψ можно представить в компактной, легко запоминаемой форме:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial \psi}, \tag{23}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}. \tag{24}$$

Сам принцип максимума при использовании функции (22) имеет изящный вид:

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u, t).$$

После появления принципа максимума различными исследователями предпринимались попытки обобщить этот результат на системы, отличные от (1). К настоящему времени в этом направлении известен ряд работ [21d, 30, 52a, 53a, 104a, 127]. Во всех этих работах форма записи условий оптимальности основана на функциях типа (22). Уравнения для переменных x, ψ и условия максимума для систем, существенно отличных от (1), носят нерегулярный характер и трудны для запоминания. Для подтверждения этих слов достаточно обратиться к теореме 3. Уравнение (15) для сопряженной переменной ψ чрезвычайно сложно и трудно запоминаемо. Для других систем необычно будет выглядеть и условие максимума, если выражать его в терминах функции (22).

Ниже предлагается новая форма записи необходимых условий оптимальности. Предварительно введем два определения. Пусть на кривых $x(t) \in C$, $t \in T$, задан функционал $J(x)$. Если существует суммируемая функция $g(t)$, $t \in T$, при которой

$$J(x+\Delta x) - J(x) = \int_{t_0}^{t_1} g'(t)\, \Delta x(t)\, dt + o(\Delta x(\cdot))$$

и $o(\Delta x \cdot (\cdot))/\| \Delta x(\cdot) \| \to 0$ при $\| \Delta x(\cdot) \| \to 0$, то $g(t)$ назовем *вариационной производной первого рода* в момент t от функционала $J(x)$ по функции $x(t)$, $t \in T$, и обозначим символом $\delta J(x)/\delta x(t)$.

Если функционал $J(x)$ зависит от $x(t)$ и ее производных $x^{(l)}(t)$, $t \in T$, то сохраним определение вариационной производной первого рода, добавив одно условие: $o(\Delta x(\cdot))/\| \Delta x(\cdot) \| \to 0$ при $\| \Delta x(\cdot) \| \to 0$ в метрике пространства непрерывных функций $x(t)$ с непрерывными производными $x^{(l)}(t)$, $l = 1, \ldots, k$:

$$\| x(\cdot) \| = \max_{t \in T} \sum_{l=0}^{k} \| x^{(l)}(t) \|.$$

Символом $\delta_y J(x)/\delta x(t)$ будем обозначать вариационную производную второго рода в момент t от функционала $J(x)$ по функции $x(t)$, $t \in T$, понимая под этим функцию $\bar{g}(t)$, удовлетворяющую условию

$$J(x + \Delta_{\varepsilon\theta} x) - J(x) = \varepsilon \bar{g}(\theta) + o(\varepsilon),$$

где

$$\Delta_{\varepsilon\theta} x(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leqslant t < \theta, \ \theta + \varepsilon \leqslant t < t_1, \\ y - x(t), & \theta \leqslant t < \theta + \varepsilon, \end{cases}$$

и $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Новую форму необходимых условий оптимальности проиллюстрируем на ряде систем, начиная с простейшей (1).

2. Обыкновенные динамические системы. На непрерывных кривых $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, и кусочно-непрерывных функциях $u(t)$, $t \in T$, определим функционал

$$\pi(x, \psi, u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) f(x, u, t)\, dt.$$

Исходя из введенных выше определений, нетрудно проверить, что уравнения (1), (8) и условие (9) принимают соответственно вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\delta\pi(x, \psi, u)}{\delta\psi(t)}, \tag{25}$$

$$-\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{\delta\pi(x, \psi, u)}{\delta x(t)}, \tag{26}$$

$$\frac{\delta_{u^*}\pi(x, \psi, u)}{\delta u(t)} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in T, \ u^* \in U. \tag{27}$$

В данном случае новая форма записи условий оптимальности не сложнее прежней, традиционной [109].

3. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Для системы (12) введем функционал

$$\pi(x, \psi, u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) f(x(t), x(t - h(x(t), u(t), t)), u(t), t)\, dt,$$

определенный на непрерывных $x(t)$, $\psi(t)$ и кусочно-непрерывных $u(t)$, причем $x(t) = \Phi(t)$, $t \in S_0$ и $\psi(t) \equiv 0$, $t > t_1$. Тогда уравнения (12), (15) и условие (13) можно записать в форме (25), (26), (27).

4. Одно обобщение обыкновенных динамических систем. Дифференциальное уравнение (1) представляет частный случай уравнения

$$R^N(p,\ t)\,x(t)=f(x,\ u,\ t), \tag{28}$$

где

$$R^N(p,\ t)=A^0(t)\,p^N+A^1(t)\,p^{N-1}+\ldots+A^N(t),$$
$$A^i(t)\in C^{N-i},\quad i=0,\ldots,N,\quad p\equiv\frac{d}{dt}.$$

Если $A^0(t)$, $t\in T$,— неособая матрица (общий случай рассмотрен ниже), то в задаче минимизации функционала (2) на траекториях уравнения (28) (здесь не останавливаемся на вопросе о задании начальных условий) для оптимального управления $u^0(t)$, $t\in T$, выполняется условие максимума. Введем функционал

$$\pi(x,\ \psi,\ u)=\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,f(x(t),\ u(t),\ t)\,dt$$

и выражение

$$R'_N(p,\ t)\,\psi(t)=\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{d^i}{dt^i}\left[(A^{N-i}(t))'\,\psi(t)\right].$$

В новых обозначениях уравнения для основных и сопряженных переменных, а также условия максимума принимают вид

$$R^N(p,\ t)\,x(t)=\frac{\delta\pi(x,\ \psi,\ u)}{\delta\psi(t)}, \tag{29}$$

$$R'_N(p,\ t)\,\psi(t)=\frac{\delta\pi(x,\ \psi,\ u)}{\delta x(t)}, \tag{30}$$

$$\frac{\delta_{u^*}\pi(x,\ \psi,\ u)}{\delta u(t)}\leqslant 0\quad\text{для всех}\quad t\in T,\ u^*\in U. \tag{31}$$

Последняя форма принципа максимума более симметрична, чем (25), (26), (27). Конечно, если речь идет лишь об обыкновенных динамических системах, то вместо (29), (30), (31) можно использовать следующую запись:

$$R^N(p,\ t)\,x(t)=\frac{\partial H(x,\ \psi,\ u,\ t)}{\partial\psi},$$
$$R'_N(p,\ t)\,\psi(t)=\frac{\partial H(x,\ \psi,\ u,\ t)}{\partial x},$$
$$H(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)=\max_{u\in U}H(x(t),\ \psi(t),\ u,\ t),$$

которая обобщает (23), (24), (22) и более симметрична.

5. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производных. Рассмотрим систему управлений, описываемую уравнением

$$R^N(p,\ t)\,x(t) = f(x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(k)}(t),\ u(t),\ t), \tag{32}$$

и допустим, что в момент $t = t_0$ для этого уравнения заданы начальные условия так, что каждому набору кусочно-непрерывных функций $u_\nu(t)$, $t \in T$, $\nu = 1, \ldots, r$, соответствует единственная траектория $x(t)$. На этих траекториях определим функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1),\ \dot{x}(t_1),\ \ldots,\ x^{(m)}(t_1)). \tag{33}$$

Будем считать функции $f(x,\ y^1,\ \ldots,\ y^k,\ u,\ t)$, $\varphi(x,\ y^1, \ldots, y^m)$ непрерывными вместе с производными $\frac{\partial f(x,\ y^1, \ldots, y^k,\ u,\ t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi(x,\ y^1, \ldots, y^m)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y^1, \ldots, y^k, u, t)}{\partial y^l}$, $\frac{\partial \varphi(x,\ y^1, \ldots, y^m)}{\partial y^i}$, $l = 1, \ldots, k$; $i = 1, \ldots, m$, поставим задачу минимизации функционала (33) на управлениях класса D. Напомним, что D — множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$ со значениями из ограниченного множества U. Эта задача решается по схеме § 1. Для формулировки результата, выражающего необходимые условия оптимальности, введем функционал

$$\pi(x,\ \psi,\ u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, f(x(t),\ \dot{x}(t),\ \ldots,\ x^{(k)}(t),\ u(t),\ t)\,dt,$$

определенный на функциях $x(t) \in C^k$, $\psi(t) \in C$, $u(t) \in D$. Запишем уравнение для $\psi(t)$:

$$R'_N(p,\ t)\,\psi(t) = \frac{\delta\pi(x,\ \psi,\ u)}{\delta x(t)}, \tag{34}$$

и соотношение для $\psi(t_1)$:

$$\alpha \frac{\partial \varphi(x(t_1),\ \dot{x}(t_1),\ \ldots,\ x^{(m)}(t_1))}{\partial x^q} = -\beta R'_{N-q-1}(p,\ t_1)\,\psi(t_1) + {}$$

$$+ \gamma \sum_{j=q+1}^{k} (-1)^j \frac{d^{j-q-1}}{dt^{j-q-1}} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial f'(x(t_1),\ \dot{x}(t_1),\ \ldots,\ x^{(k)}(t_1),\ u(t_1 - 0),\ t_1)}{\partial x^j}\,\psi(t_1)\right], \tag{35}$$

$$q = 0,\ \ldots,\ m.$$

Здесь числа α, β, γ зависят от N, k, m следующим образом:

1) $N > k$, $m < k$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = 0, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = m + 1, \ldots, k - 1$;

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, если $q = k, \ldots, N - 1$.

2) $N > k$, $m \geqslant k$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = 0, \ldots, k - 1$;

$\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, если $q = k, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, если $q = m + 1, \ldots, N - 1$.

3) $N > m > 0$, $k = 0$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, если $q = 0, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, если $q = m + 1, \ldots, N - 1$.

4) $N < k$, $m < N$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = 0, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = m + 1, \ldots, N - 1$;

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, если $q = N, \ldots, k - 1$.

5) $N < m$, $k \geqslant N$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = 0, \ldots, N - 1$;

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, если $q = N, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, если $q = m + 1, \ldots, k - 1$.

6) $N = 0$, $k > 0$, $k > m \geqslant 0$: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, если $q = 0, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, если $q = m + 1, \ldots, k - 1$.

7) $N = k$, $m < N$: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = 0, \ldots, m$;

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, если $q = m + 1, \ldots, N - 1$.

Будем говорить, что динамическая система (32) вдоль управления $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию A в задаче (32), (33), если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнены условия:

1) $\| \Delta_{\varepsilon\theta} x_{(j)}(t) \| \leqslant \beta\varepsilon$, $\beta = \mathrm{const}$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, \max\{k, m\}$;

2) система (34), (35) вдоль $u(t)$, $t \in T$, имеет решение.

Нетрудно проверить, что динамические системы (1), (12) при минимизации функционала (2) обладают свойством A.

Теорема 6. Пусть $u^0(t)$, $t \in T$,— оптимальное управление и вдоль него при минимизации функционала (33) система (32) обладает свойством A. Тогда функция $u^0(t)$ такова, что выполняются условия (29) — (31), (35).

6. Системы с последействием. Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(\cdot), u(\cdot), t) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{\gamma}^{\delta} f^1(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\sigma), t, \tau, \sigma)\, d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\sigma_1), t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\delta}^{\gamma} f^3(x(t), x(t-\tau_1), u(t), u(t-\sigma), t, \sigma)\, d\sigma +$$

$$+ f^4(x(t), x(t-\tau_2), u(t), u(t-\sigma_2), t), \qquad (36)$$

$$t \in T, \quad \beta > \alpha \geqslant 0, \quad \delta > \gamma \geqslant 0,$$

при начальных условиях

$$u(t) = \Phi^1(t), \qquad t_0 - \max\{\delta, \sigma_1, \sigma_2\} \leqslant t \leqslant t_0,$$
$$x(t) = \Phi(t), \qquad t_0 - \max\{\beta, \tau_1, \tau_2\} \leqslant t \leqslant t_0.$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (2) с помощью управлений $u(t)$, $t \in T$, класса D.

Считая функции $\varphi(x)$, $f^1(x, y, u, v, t, \tau, \sigma)$, $f^2(x, y, u, v, t, \tau)$, $f^3(x, y, u, v, t, \sigma)$, $f^4(x, y, u, v, t)$, $\Phi(t)$, $\Phi^1(t)$ непрерывными вместе с функциями $\partial\varphi/\partial x$, $\partial f^1/\partial x$, $\partial f^1/\partial y$, $\partial f^2/\partial x$, $\partial f^2/\partial y$, $\partial f^3/\partial x$, $\partial f^3/\partial y$, $\partial f^4/\partial x$, $\partial f^4/\partial y$, нетрудно установить, следуя § 1, необходимые условия оптимальности в рассматриваемой задаче.

Теорема 7. Оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (36), (2) удовлетворяет условиям (29) — (31), где

$$\pi(x, \psi, u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) X(x(\cdot), u(\cdot), t)\, dt,$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x}, \quad \psi(t) \equiv 0, \quad t > t_1.$$

7. Интегральные уравнения. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(\tau), u(\tau), \tau, t)\, d\tau, \quad t \in T, \tag{37}$$

которое зависит от управляющих функций $u(t)$, $u(\cdot) \in D$, $t \in T$. Если хотя бы при одном $u(t)$, $t \in T$, $u(\cdot) \in D$, уравнение (37) допускает непрерывное решение $x(t)$, $t \in T$, то возникает задача минимизации на таких решениях функционала

$$J(u) = \varphi\left(\int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\, d\tau\right). \tag{38}$$

Относительно введенных функций предположим, что $f(x, u, \tau, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе с $\partial f(x, u, \tau, t)/\partial x$, $\partial\varphi(x)/\partial x$, и, кроме того, будем считать выполненным одно из следующих свойств:

1) $f(x, u, \tau, t) = 0$, если $\tau \geqslant t$;

2) $L(t_1 - t_0) < 1$, где $L = \max\limits_{u \in U,\ t \in T,\ \tau \in T} \| f(x, u, \tau, t) \|$

в окрестности оптимальной траектории $x^0(t)$, $t \in T$.

Для формулировки необходимых условий оптимальности введем функционал

$$\pi(x, \psi, u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, dt \int_{t_0}^{t_1} f(x(\tau), u(\tau), \tau, t)\, d\tau - \\ - \varphi\left(\int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\, d\tau\right). \tag{39}$$

Теорема 8. Оптимальные управления $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (37), (38) удовлетворяют условиям (29), (30), (31) с функционалом (39).

8. Уравнения в частных производных. Схема § 1 может быть естественно обобщена на задачи оптимизации систем с распределенными параметрами. Не останавливаясь на доказательстве, приведем некоторые результаты в новой форме, существенно облегчающей их обозрение.

Пусть в области $\Gamma = \{t, s\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ s_0 \leqslant s \leqslant s_1\}$ состояние $x(t, s)$ системы управления описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 x(t, s)}{\partial t\, \partial s} = f\left(x(t, s), \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial x(t, s)}{\partial s}, u(t, s), t, s\right) \tag{40}$$

с граничными условиями

$$x(t_0, s) = \Phi(s), \quad x(t, s_0) = \Phi^1(t), \quad \Phi(s_0) = \Phi^1(t_0). \tag{41}$$

Будем считать, что определены и непрерывны функции

$$f(x, y, z, u, t, s),\ \partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z,\ \Phi(s),\ \Phi^1(t),\ d\Phi/ds,\ d\Phi^1/dt.$$

За класс допустимых управлений $u(t, s)$ возьмем семейство кусочно-непрерывных функций со значениями в заданном ограниченном множестве U r-мерного пространства. Качество процесса $x(t, s)$ оценим функционалом

$$J(u) = \varphi(x(t_1, s_1)) \tag{42}$$

и рассмотрим задачу нахождения среди допустимых управлений оптимального $u^0(t, s)$:

$$J(u^0) \leqslant J(u).$$

Для формулировки результата по необходимым условиям оптимальности уточним введенные ранее понятия. Вариационные производные от функционала, определенного на функциях двух переменных, вводятся совершенно аналогично случаю одной переменной. Изменения состоят в замене (при определении вариационных производных первого рода) интеграла двойным интегралом и во введении (при определении вариационной производной второго рода) вместо отрезка $[\theta, \theta + \varepsilon]$ площади $[\theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_1 + \varepsilon,\ \theta_2 \leqslant s \leqslant \theta_2 + \varepsilon]$.

На функциях $x(t, s)$, $\psi(t, s)$, $u(t, s)$ определим функционал

$$\pi(x, \psi, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{s_0}^{s_1} \psi'(t, s) \times$$
$$\times f\left(x(t, s), \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial x(t, s)}{\partial s}, u(t, s), s, t\right) ds.$$

Теорема 9. Пусть $u^0(t, s)$, $\{t, s\} \in \Gamma$,— оптимальное управление в задаче (40), (42), порождающее дважды непрерывно дифференцируемое решение $x^0(t, s)$, $\psi(t, s)$ уравнений

$$\frac{\partial^2 x^0(t, s)}{\partial t\, \partial s} = \frac{\delta \pi(x^0, \psi, u^0)}{\delta \psi(t, s)}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(t, s)}{\partial t\, \partial s} = \frac{\delta \pi(x^0, \psi, u^0)}{\delta x(t, s)} \tag{44}$$

с граничными условиями (41) и

$$\psi(t_1, s_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1, s_1))}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi(t, s_1)}{\partial t} = -\frac{\delta \pi(x^0, \psi, u^0)}{\delta x_s(t, s_1)}, \qquad \frac{\partial \psi(t_1, s)}{\partial s} = -\frac{\delta \pi(x^0, \psi, u^0)}{\delta x_t(t_1, s)},$$

$$x_s(t, s) \equiv \frac{\partial x(t, s)}{\partial s}, \qquad x_t(t, s) \equiv \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}.$$

Тогда управление $u^0(t, s)$ удовлетворяет условию максимума:

$$\frac{\delta_{u^*} \pi(x^0, \psi, u^0)}{\delta u(t, s)} \leqslant 0, \quad \{t, s\} \in \Gamma, \ u^* \in U. \tag{45}$$

§ 4. Тождество для траекторий динамических систем

В теории существования оптимальных управлений [56] при исследовании необходимых и достаточных условий оптимальности [105] часто полезны соотношения между решениями систем (1), (8).

Пусть функции $f(x, u, t)$ таковы, что

$$f(\lambda x, u, t) = f^0(\lambda x, u, t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^{m_i} f^i(x, u, t).$$

Тогда функция $H(x, \psi, u, t)$ обладает свойствами

$$H(\lambda x, \psi, u, t) = H^0(\lambda x, \psi, u, t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^{m_i} H^i(x, \psi, u, t),$$

$$H(x, \lambda\psi, u, t) = \lambda H(x, \psi, u, t),$$

где $H^i(x, \psi, u, t) = \psi' f^i(x, u, t)$, $H^0(x, \psi, u, t) = \psi' f^0(x, u, t)$.

Теорема 10. На траекториях $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, уравнений (1), (8) выполняется тождество

$$\psi'(t)\,x(t) = \psi'(t_1)\,x(t_1) + \int_t^{t_1} \left[x'(\tau)\frac{\partial H^0}{\partial x} - H^0(x(\tau), \psi(\tau), u(\tau), \tau) \right] d\tau + \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \int_t^{t_1} H^i(x, \psi, u, \tau)\, d\tau.$$

Следствие. Если система уравнений (1) однородна по x ($f^0(x, u, t) \equiv 0$), то

$$\psi'(t)\,x(t) = \psi'(t_1)\,x(t_1) + \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \int_t^{t_1} H^i(x(\tau), \psi(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Доказательство теоремы 10. По формуле Эйлера для однородных функций $x' \frac{\partial g(x)}{\partial x} = mg(x)$, если $g(\lambda x) = \lambda^m g(x)$. Поэтому, используя уравнения (1), (8), имеем

$$\int_t^{t_1} \sum_{i=0}^{k} H^i(x, \psi, u, \tau)\, d\tau = \int_t^{t_1} H(x, \psi, u, \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_t^{t_1} \psi' \frac{\partial H}{\partial \psi}\, d\tau = \int_t^{t_1} \psi' \frac{dx}{dt}\, d\tau = \psi' x \Big|_t^{t_1} - \int_t^{t_1} x' \frac{d\psi}{dt}\, d\tau =$$

$$= \psi' x \Big|_t^{t_1} + \int_t^{t_1} x' \frac{\partial H}{\partial x}\, d\tau =$$

$$= \psi' x \Big|_t^{t_1} + \int_t^{t_1} x' \frac{\partial H^0}{\partial x}\, d\tau + \sum_{i=1}^{k} m_i \int_t^{t_1} H^i(x, \psi, u, \tau)\, d\tau.$$

Приравнивая крайние члены этого выражения, получим утверждение теоремы.

§ 5. Особые управления в задачах оптимизации

В этом параграфе из-за большой размерности матриц принята координатная форма записи, причем всюду по повторяющимся индексам ведется суммирование. Область значений индекса указывается при его введении.

1. Простейшие необходимые условия оптимальности особых управлений.

а) *Первый подход.* Теорема 1 при исследовании оптимальных управлений становится неэффективной, если оптимальные траектории $x^0(t)$, $t \in T$, системы (1) таковы, что

$$\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{46}$$

В этом случае сопряженные переменные $\psi_i(t)$, вычисленные в силу (8), тождественно равны нулю на T и условие максимума (9) переходит в тривиальное равенство, не несущее никакой информации о функции $u^0(t)$, $t \in T$. Особый случай (46) в данном параграфе исследуется с помощью специального приема.

Сначала получим специальную формулу приращения функционала (2) вдоль траектории $x(t)$, $t \in T$, удовлетворяющей условию (46).

Пусть $\varphi(x) \in C^2$. Тогда

$$\Delta J(u) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i(t_1) \Delta x_j(t_1) + \\ + o(\|\Delta x(t_1)\|^2), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{47}$$

С другой стороны, для непрерывных функций $\Delta x_i(t)$, $m_{ij}(t, s)$ с кусочно-непрерывными производными $\Delta \dot{x}_i(t)$, $\partial m_{ij}(t, s)/\partial t$, $\partial m_{ij}(t, s)/\partial s$, $\partial^2 m_{ij}(t, s)/\partial t\, \partial s$ справедливо тождество

$$m_{ij}(t_1, t_1) \Delta x_i(t_1) \Delta x_j(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial m_{ij}(t_1, s)}{\partial s} \Delta x_j(s)\, ds\, \Delta x_i(t_1) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial m_{ij}(t, t_1)}{\partial t} \Delta x_i(t)\, dt\, \Delta x_j(t_1) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} m_{ij}(t, s)\,\Delta\dot{x}_i(t)\,\Delta\dot{x}_j(s)\,dt\,ds -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 m_{ij}(t, s)}{\partial t\,\partial s}\,\Delta x_i(t)\,\Delta x_j(s)\,ds\,dt. \qquad (48)$$

Зададим функции $m_{ij}(t, s)$ уравнениями

$$\frac{\partial^2 m_{ij}(t, s)}{\partial t\,\partial s} = m_{j_1 j_2}(t, s)\,\frac{\partial f_{j_1}(x(t), u(t), t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_{j_2}(x(s), u(s), s)}{\partial x_j},$$
$$j_1,\ j_2 = 1, \ldots, n, \qquad (49)$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} m_{ij}(t_1, t_1) &= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\varphi(x(t_1))}{\partial x_i\,\partial x_j},\\ \frac{\partial m_{ij}(t, t_1)}{\partial t} &= -\frac{\partial f_k(x, u, t)}{\partial x_i}\,m_{kj}(t, t_1), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\\ \frac{\partial m_{ij}(t_1, s)}{\partial s} &= -m_{ik}(t_1, s)\,\frac{\partial f_k(x, u, s)}{\partial x_j}, \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_1. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Подставляя эти условия в (47), (48), после обычных преобразований (§ 1) получим

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} m_{ij}(t, s)\,\Delta_{\tilde{u}} f_i(x, u, t)\,\Delta_{\tilde{u}} f_j(x, u, s)\,ds\,dt + \eta, \qquad (51)$$

где

$$\Delta_{\tilde{u}} f_i(x, u, t) = f_i(x, \tilde{u}, t) - f_i(x, u, t),$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \qquad \eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|^2).$$

Здесь η_2, η_3—остаточные члены, явный вид которых из-за громоздкости выражений опущен. Для дальнейшего важно лишь то, что эти члены на специальном приращении управления имеют порядок малости по параметру ε более высокий, чем члены в (51), выписанные явно.

Управлению $u(t)$ придадим специальное приращение $\Delta_{\varepsilon\theta}u(t)$, определенное в (16). Из оценки $\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(t)\| \leqslant \beta\varepsilon$ для специального приращения $\Delta_{\varepsilon\theta}x(t)$ и определения величин η_1, η_2, η_3 следует, что $\eta \sim \varepsilon^3$ на специальном приращении управления. Поэтому равенство (51) с учетом леммы 1 переходит в следующее:

$$\Delta_{\varepsilon\theta} J(u) = -\varepsilon^2 m_{ij}(\theta, \theta)\, \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta)\, \Delta_{u^*} f_j(x, u, \theta) + o(\varepsilon^2).$$

Предположим, что $u(t) = u^0(t)$ — оптимальное управление. Тогда $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0) \geqslant 0$ при любых $\varepsilon > 0$, $\theta \in T$, и через лемму 3 приходим к следующему утверждению.

Теорема 11. Пусть $\varphi(x) \in C^2$ и управление $u^0(t)$, $t \in T$, доставляет минимум функционалу (2), причем на оптимальной траектории $x^0(t)$, $t \in T$, системы (1) выполняется условие (46). Тогда в каждой точке $t \in T$ для любых $u^* \in U$ выполняется неравенство

$$m_{ij}(t, t)\, \Delta_{u^*} f_i(x^0(t), u^0(t), t)\, \Delta_{u^*} f_j(x^0(t), u^0(t), t) \leqslant 0, \tag{52}$$

где $m_{ij}(t, s) \in C^2$ — решение уравнений (49) с условиями (50).

Схему применения теоремы 11 проиллюстрируем на простом примере.

Пример 1. $\dot{x}_1 = u$, $x_1(0) = 2$, $|u| \leqslant 1$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, x, u — скаляры.

Проверим два управления: 1) $u(t) \equiv 1$; 2) $u(t) \equiv -1$, которые, как нетрудно подсчитать, удовлетворяют необходимым условиям оптимальности (теорема 1) в силу условия (46), выполняющегося на обоих управлениях.

1) Траектория $x(t) = 2 + t$, $x(1) = 3$, $\dfrac{\partial^2\varphi(3)}{\partial x^2} = \dfrac{\pi^2}{4}$. Уравнения для $m(t, s)$:

$$\frac{\partial^2 m(t, s)}{\partial t\, \partial s} \equiv 0, \quad m(1, 1) = -\frac{\pi^2}{8}, \quad \frac{\partial m(t, 1)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial m(1, s)}{\partial s} = 0.$$

Поэтому $m(t, s) = -\pi^2/8$, $\Delta_{u^*} f(x, u, t) = u^* - u$. Условие (52) имеет вид

$$-\frac{\pi^2}{8}(u^* - 1)^2 \leqslant 0,$$

т. е. управление $u(t) \equiv 1$ подозрительно на оптимальность.

2) Траектория $x(t) = 2 - t$, $x(1) = 1$, $\dfrac{\partial^2\varphi(1)}{\partial x^2} = -\dfrac{\pi^2}{4}$. $m(t, s) = \dfrac{\pi^2}{8}$. Условие (52) принимает противоречивый вид:

$$\frac{\pi^2}{8}(u^* + 1)^2 \leqslant 0,$$

что говорит о неоптимальности управления $u(t) \equiv -1$.

b) *Второй подход*. Необходимые условия оптимальности, выраженные теоремой 11, сформулированы с помощью $n \times n$-матричных функций, зависящих от двух аргументов. В работе [32j] описана схема получения необходимых условий в особом случае (40), которая использует вспомогательные $n \times n$-матричные функции лишь одного аргумента. В п. 3 развивается более общая схема, поэтому результат работы [32j] по случаю (46) приведем без доказательства.

Теорема 12. Пусть $\varphi(x) \in C^2$ и на оптимальном управлении $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (1), (2) выполняется условие (46). Тогда в каждый момент $t \in T$

$$n_{ij}(t)\, \Delta_{u^*} f_i(x^0(t),\ u^0(t),\ t)\, \Delta_{u^*} f_j(x^0(t),\ u^0(t),\ t) \leqslant 0$$

при всех $u^* \in U$, где функции $n_{ij}(t)$ — решение уравнений

$$\frac{dn_{ij}(t)}{dt} = -\frac{\partial f_{j_1}(x^0(t),\, u^0(t),\, t)}{\partial x_i} n_{j_1 j}(t) - \frac{\partial f_{j_1}(x^0(t),\, u^0(t),\, t)}{\partial x_j} n_{i j_1}(t),$$

$$n_{ij}(t_1) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x_i\, \partial x_j}.$$

2. Формула приращения k-го порядка. Пусть двум кусочно-непрерывным функциям $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$, $\tilde{u}(t) = \{\tilde{u}_1(t), \ldots, \tilde{u}_r(t)\}$, заданным на отрезке $T = [t_0, t_1]$, соответствуют решения $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ уравнения (1), определенные на T. Предполагая функции $f_i(x, u, t)$, $\varphi(x)$ достаточно гладкими (точные предположения внесены в формулировки утверждений), найдем формулу для приращения

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)). \tag{53}$$

С одной стороны, из (2) для заданного k имеем

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = \frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1}} \Delta x_{j_1}(t_1) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}} \Delta x_{j_1}(t_1)\Delta x_{j_2}(t_1) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}} \Delta x_{j_1}(t_1)\ldots\Delta x_{j_k}(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|^k). \tag{54}$$

Здесь индекс j_s при каждом s, $s=1, \ldots, k$, принимает значения $1, \ldots, n$. С другой стороны, интегрируя по частям выражение

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1}(t) \ldots \Delta x_{j_{l-1}}(t)\, \Delta \dot{x}_{j_l}(t)\, dt, \qquad l=1, \ldots, k,$$

получаем ($\Delta x_i(t_0)=0$) тождество

$$\psi_{j_1 \ldots j_l}(t_1)\, \Delta x_{j_1}(t_1) \ldots \Delta x_{j_l}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1}(t) \ldots$$

$$\ldots \Delta x_{j_l}(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^{l} \psi_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1}(t) \ldots$$

$$\ldots \Delta x_{j_{m-1}}(t)\, \Delta \dot{x}_{j_m}(t)\, \Delta x_{j_{m+1}}(t) \ldots \Delta x_{j_l}(t)\, dt. \tag{55}$$

Положим

$$\psi_{j_1 \ldots j_l}(t_1) = -\frac{1}{l!}\, \frac{\partial^l \varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}. \tag{56}$$

Тогда (53) с учетом (54), (55) примет вид

$$\Delta \varphi(x(t_1)) = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \psi_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1} \ldots$$

$$\ldots \Delta x_{j_{m-1}} \Delta \dot{x}_{j_m} \Delta x_{j_{m+1}} \ldots \Delta x_{j_l}\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{k} \dot{\psi}_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_l}\, dt + o(\|\Delta x(t_1)\|^k).$$

Преобразуем выражение

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \psi_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_{m-1}} \Delta \dot{x}_{j_m} \Delta x_{j_{m+1}} \ldots \Delta x_{j_l}\, dt,$$

учитывая уравнение

$$\Delta \dot{x}_i = f_i(x(t)+\Delta x, \quad u(t)+\Delta u, t) - f_i(x(t), u(t), t)$$

и введя обозначение

$$\Delta_{\tilde{u}} f_i(x, u, t) = f_i(x, \tilde{u}, t) - f_i(x, u, t).$$

Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \psi_{j_1 \ldots j_l}(t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_{m-1}} \Delta \dot{x}_{j_m} \Delta x_{j_{m+1}} \ldots \Delta x_{j_l}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \psi_j \Delta_{\tilde{u}} f_j(x, u, t)\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{q+1} \psi_{j_1 \ldots j_{m-1} j j_m \ldots j_q}(t)\, \Delta_{\tilde{u}} f_j(x, u, t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_q}\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{q=1}^{k} \sum_{l=1}^{q} \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{(q-l+1)!} \psi_{j_1 \ldots j_{m-1} j j_m \ldots j_{l-1}}(t) \times \frac{\partial^{q-l+1} f_j(x, u, t)}{\partial x_{j_l} \ldots \partial x_{j_q}} \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_q}\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{q=1}^{k} \sum_{l=1}^{q} \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{(q-l+1)!} \psi_{j_1 \ldots j_{m-1} j_m \ldots j_{l-1}}(t) \times \frac{\partial^{q-l+1} \Delta_{\tilde{u}} f(x, u, t)}{\partial x_{j_l} \ldots \partial x_{j_q}} \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_q}\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{q=1}^{k} \sum_{m=1}^{q} \psi_{j_1 \ldots j_q}(t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_{m-1}} o_{j_m}(\|\Delta x\|^{k-q+1})\, \Delta x_{j_{m+1}} \ldots \Delta x_{j_q}\, dt.$$

Определим функции $\psi_{j_1 \ldots j_q}(t)$ уравнениями

$$\dot{\psi}_{j_1 \ldots j_q}(t) = -\sum_{l=1}^{q} \frac{1}{(q-l+1)!} \sum_{m=1}^{l} \psi_{j_1 \ldots j_{m-1} j_{q+m-l+1} \ldots j_q}(t) \frac{\partial^{q-l+1} f_j(x, u, t)}{\partial x_{j_m} \ldots \partial x_{j_{q+m-l}}} \tag{57}$$

и начальными условиями (56). Тогда выражение (53) принимает вид

$$\Delta\varphi(x(t_1)) = -\int_{t_0}^{t_1} \psi_j \Delta_{\tilde{u}} f_j(x, u, t)\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{q+1} \psi_{j_1 \ldots j_{m-1} j j_m \ldots j_q}(t)\, \Delta_{\tilde{u}} f_j(x, u, t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \Delta x_{j_q}\, dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{q=1}^{k}\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{(q-l+1)!}\sum_{m=1}^{l}\psi_{j_1\ldots j_{m-1}jj_m\ldots j_{l-1}}(t)\times$$

$$\times\frac{\partial^{q+l-1}\Delta_{\tilde u}f_j(x, u, t)}{\partial x_{j_l}\ldots\partial x_{j_q}}\Delta x_{j_1}\ldots\Delta x_{j_q}\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{q=1}^{k}\sum_{m=1}^{q}\psi_{j_1\ldots j_q}(t)\Delta x_{j_1}\ldots\Delta x_{j_{m-1}}o_{j_m}(\|\Delta x\|^{k-q+1})\Delta x_{j_{m+1}}\ldots$$

$$\ldots\Delta x_{j_q}\,dt+o(\|\Delta x(t_1)\|^k).$$

Введем обозначение, положив

$$Q_{j_1\ldots j_q}(x, \psi, u, \tilde u, t)=\sum_{m=1}^{q+1}\psi_{j_1\ldots j_{m-1}jj_m\ldots j_q}(t)\Delta_{\tilde u}f_j(x, u, t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{(q-l+1)!}\sum_{m=1}^{l}\psi_{j_1\ldots j_{m-1}jj_m\ldots j_{l-1}}(t)\frac{\partial^{q-l+1}\Delta_{\tilde u}f_j(x, u, t)}{\partial x_{j_l}\ldots\partial x_{j_q}}.$$

В результате получим формулу приращения функции $\varphi(x(t_1))$:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varphi(x(t_1))&=-\int_{t_0}^{t_1}\psi_j(t)\Delta_{\tilde u}f_j(x, u, t)\,dt-\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\psi_j(t)\frac{\partial\Delta_{\tilde u}f_j(x, u, t)}{\partial x_{j_1}}\Delta x_{j_1}\,dt-\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\psi_j(t)\,o_j(\|\Delta x\|)\,dt+o(\|\Delta x(t_1)\|),\quad k=1;\\
\Delta\varphi(x(t_1))&=-\int_{t_0}^{t_1}\psi_j(t)\Delta_{\tilde u}f_j(x, u, t)\,dt-\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{q=1}^{k-1}Q_{j_1\ldots j_q}(x, \psi, u, \tilde u, t)\Delta x_{j_1}\ldots\Delta x_{j_q}\,dt-
\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

$$\left.\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{q=1}^{k} \sum_{m=1}^{q} \psi_{j_1 \ldots j_q}(t)\, \Delta x_{j_1} \ldots \\ & \ldots \Delta x_{j_{m-1}} o_{j_m} (\| \Delta x \|^{k-q+1})\, \Delta x_{j_{m+1}} \ldots \Delta x_{j_q}\, dt + \\ & \qquad + o(\| \Delta x(t_1) \|^k), \qquad k \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

3. Необходимые условия оптимальности особых управлений первого порядка. Управление $u(t) = \{u_\nu(t)\}$, $u(t) \in U$, $t \in T$, $\nu = 1, \ldots, r$, называется особым управлением первого порядка, если

$$\psi_i(t)\, \Delta_{u^*} f_i(x, u, t) = 0 \tag{59}$$

тождественно по $t \in T$, $u^* \in U$ вдоль траекторий $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, уравнений (1), (8), соответствующих управлению $u(t)$.

В п. 1 рассмотрены особые управления первого порядка для частного случая, когда (59) выполняется в силу $\psi_i(t) \equiv 0$, $t \in T$. Для исследования общего случая особых управлений первого порядка воспользуемся формулой (58) при $k = 2$. Варьированные управления $\tilde{u}_\nu(t)$, $t \in T$, составим с помощью специальных приращений $\Delta_{\varepsilon\theta} u_\nu(t)$, $t \in T$, определенных в (6). В § 1 было доказано, что приращение $\Delta_{\varepsilon\theta} x(t)$, $t \in T$, траектории $x(t)$, $t \in T$, соответствующее $\Delta_{\varepsilon\theta} u(t)$, удовлетворяет оценке

$$\| \Delta_{\varepsilon\theta} x(t) \| \leqslant \beta\varepsilon, \qquad \beta = \mathrm{const}.$$

Применяя теорему о среднем (см. лемму 1), нетрудно показать, что

$$\Delta_{\varepsilon\theta} x_i(t) = (t - \theta)\, \Delta_{u^*} f_i(x(\theta), u(\theta), \theta) + o_i(t - \theta)$$

при $\theta \leqslant t \leqslant \theta + \varepsilon$. Учитывая эти факты, из (58) непосредственным подсчетом выделяем главный по ε член правой части:

$$\Delta_{\varepsilon\theta} \varphi(x(t_1)) = -\varepsilon^2 Q_i(x, \psi, u, u^*, \theta)\, \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta) + o(\varepsilon^2) \tag{60}$$

(коэффициент при ε равен нулю в силу (59)). Рассмотрим задачу минимизации функционала (2) на траекториях уравнения (1) и допустим, что $u^0(t)$, $t \in T$,— оптимальное особое управление первого порядка. Тогда при любых $\theta \in T$, $\varepsilon > 0$, $\theta + \varepsilon \in T$ и $u^* \in U$ величина $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0)$

неотрицательна. Таким образом, из (60) в силу леммы 3 можно сделать следующее заключение.

Теорема 13. Пусть функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе с $\partial f_i(x, u, t)/\partial x_j$, $\partial^2 f_i(x, u, t)/\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}$, $\partial\varphi(x)/\partial x_i$, $\partial^2\varphi(x)/\partial x_i\partial x_j$. Тогда для того, чтобы особое управление первого порядка $u^0(t)$, $t\in T$, было оптимальным в задаче (1), (2), необходимо выполнение условия

$$[\psi_{ij}(t)+\psi_{ji}(t)]\,\Delta_{u^*}f_i(x^0(t), u^0(t), t)\,\Delta_{u^*}f_j(x^0(t), u^0(t), t)+$$
$$+\psi_{j_1}(t)\frac{\partial\Delta_{u^*}f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_j}\Delta_{u^*}f_j(x^0(t), u^0(t), t)\leqslant 0 \qquad (61)$$

для всех $t\in T$, $u^*\in U$. Здесь $x^0(t)$, $t\in T$, — траектория системы (1), соответствующая управлению $u^0(t)$, $t\in T$; $\psi_i(t)$, $\psi_{ij}(t)$, $t\in T$, — решения уравнений

$$\dot\psi_i(t)=-\frac{\partial f_j(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_i}\psi_j(t),\qquad \psi_i(t_1)=-\frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x_i};$$

$$\dot\psi_{ij}(t)=-\frac{\partial f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_i}\psi_{j_1 j}(t)-$$
$$-\frac{\partial f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_j}\psi_{ij_1}(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_i\,\partial x_j}\psi_{j_1}(t),$$
$$\psi_{ij}(t_1)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x^0(t_1))}{\partial x_i\,\partial x_j}.$$

Схему применения теоремы 13 проиллюстрируем на двух простых примерах.

Пример 2. $\dot x_1=u$, $\dot x_2=-x_1^2$, $x_1(0)=x_2(0)=0$, $T=[0, 1]$, $U=\{u\colon |u|\leqslant 1\}$, $\varphi(x)=x_2$.

Управление $u(t)\equiv 0$ является особым первого порядка, так как вдоль него $x_1(t)=x_2(t)\equiv 0$, $\psi_1(t)\equiv 0$ и функция $H(x, \psi, u, t)=\psi_1 u-\psi_2 x_1^2$ не зависит от u. Уравнения для $\psi_i(t)$, $\psi_{ij}(t)$ имеют вид

$$\dot\psi_1=2\psi_2 x,\quad \dot\psi_2=0,\quad \psi_1(1)=0,\quad \psi_2(1)=-1;$$

$$\begin{Bmatrix}\dot\psi_{11} & \dot\psi_{12}\\ \dot\psi_{21} & \dot\psi_{22}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}0 & -2x_1\\ 0 & 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0 & 0\\ -2x_1 & 0\end{Bmatrix}-$$
$$-\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\psi_{11}(1) & \psi_{12}(1)\\ \psi_{21}(1) & \psi_{22}(1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}.$$

Отсюда

$$\psi_{12}(t) = \psi_{21}(t) = \psi_{22}(t) \equiv 0, \qquad \psi_{11}(t) = 1 - t.$$

Необходимое условие оптимальности (61) сводится к неравенству $(1 - t)(u^* - u(t))^2 \leqslant 0$, которое противоречиво при $t < 1$. Таким образом, управление $u(t) \equiv 0$ не является оптимальным.

Пример 3. Уравнения вертикального полета ракеты в однородном поле сил тяжести при постоянном сопротивлении имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{u-4}{x_3} - g, \quad \dot{x}_3 = -\frac{1}{2}u,$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 2,$$

где x_1 — относительная высота, x_2 — скорость ракеты, x_3 — масса ракеты. Пусть требуется найти закон изменения тяги u, $|u| \leqslant 10$, при котором в момент $t = 1$ максимальна величина $x_1(1) + x_3(1)$.

Полагая $\varphi(x) = -x_3 - x_1$, приходим к задаче (1), (2). Управление $u(t) \equiv 4$, как нетрудно подсчитать, является особым первого порядка. Однако оно не является оптимальным из-за того, что необходимое условие (61) здесь не выполняется (вдоль $u(t) \equiv 4$ левая часть (61), равная

$$-\frac{(t-1)}{2x_3^2}(u^* - 4)^2,$$

положительна при $t < 1$).

4. Особые управления второго порядка. Управление $u(t) = \{u_\nu(t)\}$, $t \in T$, называется *особым управлением второго порядка*, если вдоль него выполняются тождественно по $t \in T$, $u^* \in U$ равенства

$$\psi_i(t)\,\Delta_{u^*} f(x(t), u(t), t) = 0,$$
$$Q_i(x(t), \psi(t), u(t), u^*, t)\,\Delta_{u^*} f_i(x(t), u(t), t) = 0.$$

Введем множество $V(u^*)$ r-мерных векторов; вектор $v^* = \{v_\nu^*\} \in V(u^*)$, если найдутся дифференцируемые функции $u_\nu^*(t)$ такие, что $u_\nu^*(0) = u^*$, $\dot{u}_\nu^*(0) = v_\nu^*$ и $\{u_\nu^*(t), t\} \in \{U, t\}$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, ε достаточно мало. Если $u \in \operatorname{int} U$, то множество $V(u)$ содержит шар сколь угодно большого радиуса.

Для получения необходимых условий оптимальности особых управлений второго порядка используем специальные приращения управления вида

$$\Delta_{\varepsilon\theta}u(t)= \\ =\begin{cases} u^*(t-\theta)-u(t), & \theta\leqslant t<\theta+\varepsilon,\ u^*\in U,\quad v^*\in V(u^*),\\ 0, & t_0\leqslant t<\theta,\ \theta+\varepsilon\leqslant t\leqslant t_1. \end{cases} \tag{62}$$

Пусть $u(t)$, $t\in T$, — кусочно-непрерывное управление с кусочно-непрерывной производной. В приращении (58), вычисленном на управлении $u(t)$, и специальных приращениях (62) выделим главный член по ε. Имеем (θ — точка гладкости функций $u_\nu(t)$, $t\in T$)

$$\Delta_{\varepsilon\theta}J(u)=\Delta_{\varepsilon\theta}\varphi(x(t_1))= \\ =-\int_\theta^{\theta+\varepsilon} Q_i(x(t),\psi(t),u(t),u^*(t-\theta),t)\,\Delta_{\varepsilon\theta}x_i(t)\,dt- \\ -\int_\theta^{\theta+\varepsilon} Q_{ij}(x(t),\psi(t),u(t),u^*(t-\theta),t)\,\Delta_{\varepsilon\theta}x_i(t)\,\Delta_{\varepsilon\theta}x_j(t)\,dt+ \\ +o(\varepsilon^3).$$

Учитывая, что $\Delta_{\varepsilon\theta}x_i(\theta)=0$, получаем

$$\Delta_{\varepsilon\theta}J(u)=-\frac{1}{6}\left[Q_i(x(\theta),\psi(\theta),u(\theta),u^*,\theta)\frac{d^2\Delta_{\varepsilon\theta}x_i(\theta+0)}{dt^2}+\right. \\ \left.+2\left.\frac{dQ_i(x(t),\psi(t),u(t),u^*(t-\theta),t)}{dt}\right|_{t=\theta+0}\Delta_{u^*}f_i(x(\theta),u(\theta),\theta)\right]\times \\ \times\varepsilon^3-\frac{1}{3}Q_{ij}(x(\theta),\psi(\theta),u(\theta),u^*,\theta)\,\Delta_{u^*}f_i(x(\theta),u(\theta),\theta)\times \\ \times\Delta_{u^*}f_j(x(\theta),u(\theta),\theta)\,\varepsilon^3+o(\varepsilon^3).$$

Подставим сюда значения для $d^2\Delta_{\varepsilon\theta}x_i(\theta+0)/dt^2$, dQ_i/dt:

$$\frac{d^2\Delta_{\varepsilon\theta}x_i(\theta+0)}{dt^2}=\frac{\partial f_i(x(\theta),u^*,\theta)}{\partial x_j}f_j(x(\theta),u^*,\theta)- \\ -\frac{\partial f_i(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial x_j}f_j(x(\theta),u(\theta),\theta)+ \\ +\frac{\partial f_i(x(\theta),u^*,\theta)}{\partial u_\nu}v_\nu^*-\frac{\partial f_i(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u_\nu}\dot u_\nu(\theta)+ \\ +\frac{\partial\Delta_{u^*}f_i(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial t};\quad \left.\frac{dQ_i(x(t),\psi(t),u(t),u^*(t-\theta),t)}{dt}\right|_{t=\theta+0}=$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt} \left[\psi_{ij}(\theta) + \psi_{ji}(\theta) + \psi_j(\theta) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\} \Delta_{u^*} f_j(x(\theta), u(\theta), \theta) +$$
$$+ \left[\psi_{ij}(\theta) + \psi_{ji}(\theta) + \psi_j(\theta) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial f_j(x(\theta), u^*, \theta)}{\partial u_\nu} v_\nu^* - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f_j(x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u_\nu} \dot{u}_\nu(\theta) \right].$$

Окончательно приращение $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u)$ можно записать следующим образом:

$$\Delta_{\varepsilon\theta} J(u) = -\varepsilon^3 R(x, \psi, u, \dot{u}, u^*, \theta) -$$
$$- \varepsilon^3 P_\nu(x, \psi, u, u^*, \theta) v_\nu^* + o(\varepsilon^3), \qquad (63)$$

где

$$R(x, \psi, u, \dot{u}, u^*, \theta) =$$
$$= \frac{1}{6} Q_i(x, \psi, u, u^*, \theta) \left[\frac{\partial f_i(x, u^*, \theta)}{\partial x_j} f_j(x, u^*, \theta) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f_i(x, u, \theta)}{\partial x_j} f_j(x, u, \theta) \right] + \frac{1}{3} \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta) \times$$
$$\times \left\{ \frac{d}{dt} \left[\psi_{ij}(\theta) + \psi_{ji}(\theta) + \psi_j(\theta) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\} \Delta_{u^*} f_j(x, u, \theta) +$$
$$+ \frac{1}{6} Q_i(x, \psi, u, u^*, \theta) \frac{\partial f_i(x, u, \theta)}{\partial u_\nu} \dot{u}_\nu(\theta) +$$
$$+ \frac{1}{3} \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta) \left[\psi_{ij}(\theta) + \psi_{ji}(\theta) + \psi_j(\theta) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \times$$
$$\times \frac{\partial f_i(x, u, \theta)}{\partial u_\nu} \dot{u}_\nu(\theta) + \frac{1}{6} Q_i(x, \psi, u, u^*, \theta) \frac{\partial \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta)}{\partial t} +$$
$$+ \frac{1}{3} Q_{ij}(x, \psi, u, u^*, \theta) \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta) \Delta_{u^*} f_j(x, u, \theta),$$
$$P_\nu(x, \psi, u, u^*, \theta) = \frac{1}{6} Q_i(x, \psi, u, u^*, \theta) \frac{\partial f_i(x, u^*, \theta)}{\partial u_\nu} +$$
$$+ \frac{1}{3} \Delta_{u^*} f_i(x, u, \theta) \left[\psi_{ij}(\theta) + \psi_{ji}(\theta) + \psi_j(\theta) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \frac{\partial f_j(x, u^*, \theta)}{\partial u_\nu}.$$

Пусть $u^0(t)$ — оптимальное особое управление второго порядка. Тогда для всех $\theta \in T$, $\varepsilon > 0$, $\theta + \varepsilon \in T$, $u^* \in U$, $v^* \in V(u^*)$ выполняется неравенство $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0) \geqslant 0$, и из (63) в силу леммы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 14. Пусть функции $f_i(x, u, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе с функциями $\dfrac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j}$,

$$\frac{\partial \varphi (x)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_i (x, u, t)}{\partial u_\nu}, \quad \frac{\partial f_i (x, u, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f_i (x, u, t)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}, \quad \frac{\partial^2 f_i (x, u, t)}{\partial x_j \partial t},$$
$$\frac{\partial^2 f_i (x, u, t)}{\partial x_j \partial u_\nu}, \quad \frac{\partial^2 \varphi (x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 f_i (x, u, t)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}, \quad \frac{\partial^3 f_i (x, u, t)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial u_\nu}, \quad \frac{\partial^3 f_i (x, u, t)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial t},$$
$$\frac{\partial^3 \varphi (x)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}.$$

Для того чтобы кусочно-непрерывное управление $u^0(t)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывной производной $\dot{u}^0(t)$ было оптимальным особым управлением второго порядка в задаче (1), (2), необходимо, чтобы для всех $t \in T$, $u^* \in U$, $v^* \in V(u^*)$ выполнялось неравенство

$$R(x^0(t), \psi(t), u^0(t), \dot{u}^0(t), u^*, t) + P_\nu(x^0(t), \psi(t), u^0(t), u^*, t)\, v_\nu^* \leqslant 0.$$

Если U содержит внутренние точки, то дополнительно:

$$P_\nu(x^0(t), \psi(t), u^0(t), u^*, t) = 0$$

для всех $t \in T$, $u^* \in \operatorname{int} U$.

5. К необходимым условиям оптимальности особых управлений k-го порядка. Дальнейшее развитие схемы исследования особых управлений в общем случае наталкивается на трудности, связанные с записью условий оптимальности в компактном виде. Ниже исследуется частный случай особых управлений произвольного порядка, когда необходимые условия оптимальности можно сформулировать в удобной форме.

Пусть оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (1), (2) таково, что тождественно по $t \in T$, $u^* \in U$ выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} &\psi_i(t)\, \Delta_{u^*} f_i (x^0(t), u^0(t), t) = 0, \\ &Q_{j_1 \ldots j_l}(x^0(t), \psi(t), u^0(t), u^*, t) = 0, \quad l = 1, \ldots, k-1. \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Тогда главный член по ε в приращении $\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0)$, вычисленном на $u^0(t)$ и $\Delta_{\varepsilon\theta} u(t)$ из (6), имеет порядок ε^{k+1} и может быть записан в форме

$$\Delta_{\varepsilon\theta} J(u^0) = -\varepsilon^{k+1} Q_{j_1 \ldots j_k}(x^0(t), \psi(t), u^0(t), u^*, t) \times$$
$$\times \Delta_{u^*} f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t) \ldots \Delta_{u^*} f_{j_k}(x^0(t), u^0(t), t) + o(\varepsilon^{k+1}).$$

Таким образом, для задачи (1), (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 15. Пусть функции $f_i(x, u, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе с функциями $\partial^\alpha f_i(x, u, t)/\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\alpha}$, $\partial^\alpha \varphi(x)/\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, k+1$.

Для оптимальности кусочно-непрерывного управления $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяющего условиям (64), необходимо, чтобы при всех $t \in T$, $u^* \in U$ выполнялось неравенство

$$Q_{j_1 \ldots j_k}(x^0(t), \psi(t), u^0(t), u^*, t)\, \Delta_{u^*} f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t) \ldots \\ \ldots \Delta_{u^*} f_{j_k}(x^0(t), u^0(t), t) \leqslant 0$$

(функции $Q_{j_1 \ldots j_k}(x, \psi, u, u^*, t)$ определены в п. 2).

§ 6. Принцип максимума для экстремалей Л. С. Понтрягина

Фундаментальный результат теории оптимальных процессов — принцип максимума Л. С. Понтрягина является мощным средством выделения из всех допустимых управлений более узкого множества (множества экстремалей), среди которого заведомо находятся оптимальные управления, если они существуют. Множество экстремалей может состоять из конечного и бесконечного числа элементов. Поэтому естественно желание на множестве экстремалей определить дополнительные условия, которые из этого множества выделяли бы более узкое подмножество, содержащее оптимальные управления. Этот процесс желательно продолжить далее с тем, чтобы на каком-то этапе выделить оптимальные управления.

В данном параграфе предпринимается попытка по осуществлению этой программы.

1. Экстремали Л. С. Понтрягина. Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ определен класс допустимых управлений — множество r-мерных кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$ со значениями из заданного множества U:

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{65}$$

Рассмотрим следующую задачу оптимизации. С помощью допустимых управлений минимизируем функционал

$$J(u) = c'x(t_1), \tag{66}$$

определенный на траекториях $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T. \tag{67}$$

Здесь c, x_0 — постоянные n-векторы, $f(x, u)$ — функция, непрерывная вместе с $\partial f(x, u)/\partial x$. *Экстремалями Понтрягина* в задаче (65) — (67) назовем допустимые управления $u(t)$, $t \in T$, которые вместе с соответствующими им функциями $x(t)$, $\psi(t) = \{\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ удовлетворяют условиям

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial \psi}, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -c,$$

$$H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u).$$

Согласно принципу максимума оптимальные управления в задаче (65) — (67) должны находиться среди экстремалей Понтрягина. При единственности экстремали задача оптимизации заканчивается выделением ее. Ситуация усложняется в тех задачах, которые допускают несколько экстремалей. Уже в простейших случаях число экстремалей может оказаться бесконечным.

Пример 4. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, \varepsilon]$, $J(u) = -x_2(\varepsilon)$, $U = \{u: |u| \leqslant 1\}$.

Нетрудно проверить, что при каждом $\varepsilon > 0$ среди экстремалей этого примера находятся управления

$$u^p(t) = \pm \operatorname{sign} \cos \frac{2p+1}{2\varepsilon} \pi t, \qquad p = 0, 1, \ldots$$

2. Принцип максимума для экстремалей Л. С. Понтрягина.

Лемма 5. Значение функционала

$$J(v) = c' y(t_1) \tag{68}$$

на траекториях системы

$$\frac{dy}{dt} = f(y, v), \qquad y(t') = 0, \qquad t' \leqslant t \leqslant t_1,$$

выражается формулой

$$J(v) = -\int_{t'}^{t_1} H(y(t), \psi(t), v(t))\,dt + \\ + \int_{t'}^{t_1} \frac{\partial H'(y(t), \psi(t), v(t))}{\partial x_i} y(t)\,dt.$$

Лемма 6. Значение функционала (68) равно

$$J(v) = -\int_{t'}^{t_1} H(y(t), \psi(t), v(t))\,dt - \int_{t'}^{t_1} y'(t) \times \\ \times \left\{ [\Psi(t) + \Psi'(t)] f(y(t), v(t)) - \frac{\partial H(y(t), \psi(t), v(t))}{\partial x} \right\} dt + \\ + \int_{t'}^{t_1} y'(t) \left[\Psi(t) \frac{\partial f(y, v)}{\partial x} + \frac{\partial f'(y, v)}{\partial x} \Psi(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(y, \psi, v)}{\partial x^2} \right] \times \\ \times y(t)\,dt.$$

Здесь $\Psi(t)$ — решение системы

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\Psi(t) \frac{\partial f(y, v)}{\partial x} - \frac{\partial f'(y, v)}{\partial x} \Psi(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(y, \psi, v)}{\partial x^2},$$

$$\Psi(t_1) = 0.$$

Лемма 7. Если на управлениях $v(t)$, $t' \leqslant t \leqslant t_1$, из некоторого множества $U(\cdot)$ функционал $J(v)$ при всех достаточно малых ε допускает разложение

$$J(v) = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1} a_{k-1} + \varepsilon^k a_k + o(\varepsilon^k), \qquad (69)$$

где числа $a_1, \ldots, a_{k-1}$ не зависят от $v \in U(\cdot)$ и, кроме того, числа $a_1, \ldots, a_k$ не зависят от ε, то из условия

$$J(v^0) = \min_{v \in U(\cdot)} J(v)$$

следует:

$$a_k(v^0) = \min_{v \in U(\cdot)} a_k(v).$$

Доказательство. Для $v^0 \in U(\cdot)$ и $v \in U(\cdot)$, $v \neq v^0$, имеем

$$J(v) - J(v^0) \geqslant 0,$$

что в силу разложения (69) и свойства чисел $a_1, \ldots, a_{k-1}$ влечет неравенство

$$\varepsilon^k (a_k(v) - a_k(v^0)) + o(\varepsilon) \geqslant 0.$$

Лемма 7 свелась к лемме 3.

Множество экстремалей Понтрягина для задачи (65)—(67) обозначим через Ω. Известно, что функция

$$H_u(t) = H(x(t), \psi(t), u(t)),$$

вычисленная вдоль экстремали Понтрягина и соответствующих ей функций $x(t)$, $\psi(t)$, равна постоянной:

$$H_u(t) \equiv \text{const}, \quad t \in T. \tag{70}$$

Будем говорить, что экстремаль Понтрягина $u^*(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума, если

$$H_{u^*}(t_1) = \max_{u(\cdot)\in\Omega} H_u(t_1). \tag{71}$$

В силу свойства (70) условие (71) можно проверять в любой точке $t \in T$.

Теорема 16 (принцип максимума для экстремалей Л. С. Понтрягина). Оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (65) — (67) с достаточно малой продолжительностью $t_1 - t_0$ удовлетворяет условию максимума для экстремалей Понтрягина.

Доказательство. Из принципа оптимальности следует, что если $u^0(t)$, $t \in T$,— оптимальное управление в задаче (65) — (67), то при любом t', $t_0 \leqslant t' \leqslant t_1$, будет оптимальным и управление $v^0(t) = u^0(t)$, $t' \leqslant t \leqslant t_1$, в задаче минимизации функционала

$$J(v) = c'z(t_1)$$

на траекториях системы

$$\frac{dz}{dt} = f(z, v), \quad z(t') = x^0(t'), \quad t' \leqslant t \leqslant t_1, \quad v(t) \in U.$$

Введем переменные

$$y(t) = z(t) - x^0(t'), \quad t' \leqslant t \leqslant t_1.$$

Тогда управление $v^0(t)$ будет минимизировать функционал

$$J(v) = c'y(t_1)$$

вдоль траекторий системы

$$\frac{dy}{dt} = f(y + x^0(t'), v), \quad y(t') = 0.$$

Пусть $t_1 - t' = \varepsilon$, $v(t)$, $t' \leqslant t \leqslant t_1$,— экстремаль Понтрягина. Тогда из леммы 5, свойства (70) и оценки

$$\| y(t) \| \leqslant L\varepsilon, \quad t' \leqslant t \leqslant t_1,$$

получаем

$$J(v) = -H_v(t_1)\,\varepsilon + o(\varepsilon),$$

что в силу леммы 7 дает

$$H_{v^0}(t_1) = \max H_v(t_1).$$

Это свойство равносильно утверждению теоремы, если число $t_1 - t_0$ достаточно мало.

Примечание. Теорема 16 справедлива и для задач типа (65) — (67), в которых время t_1 не закреплено, а на точку $x(t_1)$ наложено ограничение $x(t_1) \in G$, где G — некоторое множество.

Применение теоремы 16 к примеру 4 показывает, что управления $u^p(t)$, $p \geqslant 1$, не могут быть оптимальными, если ε достаточно мало.

3. Нестационарные системы. Пусть в задаче (65) — (67) уравнение (67) заменено на нестационарное

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{72}$$

Введя дополнительную переменную $x_{n+1}(t) = t$, задачу (65), (66), (72) сведем к задаче (65) — (67) с $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$.

Теорема 17. Если продолжительность процесса $t_1 - t_0$ в задаче (65), (66) достаточно мала, то оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума (71) для экстремалей Понтрягина.

Примечание. В отличие от стационарного случая, условие (71) справедливо, вообще говоря, лишь при $t = t_1$.

4. Необходимые условия оптимальности для экстремалей первого порядка. Являясь лишь необходимым условием оптимальности, свойство (71) из экстремалей выделяет не только оптимальные управления. Иначе говоря, среди экстремалей, удовлетворяющих условию (71), могут оказаться и неоптимальные управления.

Пример 5. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = \frac{\pi}{2} u \cos\frac{\pi x_1}{2}$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $J(u) = x_2(1)$, $U = \{u\colon |u| \leqslant 1\}$.

Здесь управления $u^1(t) \equiv -1$, $u^2(t) \equiv +1$ являются экстремалями и

$$H_{u^1}(1) = H_{u^2}(1) = \max_{u(\cdot)\in\Omega} H_u(1) = 0,$$

однако управление $u^2(t) \equiv +1$ не оптимально.

Допустимые управления $u^*(t)$, $t \in T$, которые являются экстремалями для задачи (65) — (67) и удовлетворяют условию (71), назовем *экстремалями первого порядка.*

Множество экстремалей первого порядка для задачи (65) — (67) обозначим через Ω_1.

Будем говорить, что для экстремали первого порядка выполняется условие максимума, если

$$\Xi_{u^*}(t_1) = \max_{u(\cdot)\in\Omega_1} \Xi_u(t_1), \tag{73}$$

где

$$\Xi_u(t_1) = -\frac{\partial H'(x(t_1),\ \psi(t_1),\ u(t_1))}{\partial x} f(x(t_1),\ u(t_1)).$$

Теорема 18 (принцип максимума для экстремалей первого порядка). Пусть продолжительность $t_1 - t_0$ в задаче (65) — (67) достаточно мала. Тогда оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, из класса кусочно-постоянных функций $u(t)$, $u(t) \in U$, удовлетворяет условию максимума (73) для экстремалей первого порядка.

Доказательство этой теоремы проходит по схеме доказательства теоремы 16 с использованием леммы 6 (вместо леммы 5).

Применение теоремы 18 к примеру 5 показывает, что управление $u^2(t) \equiv +1$ не может быть оптимальным.

§ 7. Задача оптимизации с параметрами

1. Необходимые условия оптимальности. До сих пор оптимальные управления из экстремалей Л. С. Понтрягина выделялись введением новых необходимых условий на множество Ω. Для достижения этих же целей можно поступать по-другому. Каждая экстремаль характеризуется некоторым начальным условием $\psi(t_0) = \psi_0$ сопряженной переменной. Поэтому, исключив $u(t)$ из уравнений (67) с помощью принципа максимума

$$u(t) = u(x(t), \psi(t)),$$

приходим к следующей задаче оптимизации с параметрами: найти минимум функции $I(\psi_0) = c'x(t_1)$ вдоль траекторий уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \bar{f}(x, \psi), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'(x, \psi)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0, \quad \psi(t_1) = -c.$$

Здесь

$$\bar{f}(x, \psi) = f(x, u(x, \psi)), \quad A(x, \psi) = \frac{\partial f(x, u(x, \psi))}{\partial x}.$$

В данном параграфе рассматриваются лишь задачи со свободным правым концом. Техника перехода к задачам с подвижными и фиксированными концевыми условиями описана в [114b].

Итак, пусть заданы множества V и W в p-мерном и q-мерном векторных пространствах. Среди элементов $v \in V$, $w \in W$ этих множеств требуется указать такие оптимальные параметры v^0, w^0, что

$$I(v^0, w^0) = \min_{v \in V, w \in W} I(v, w), \tag{74}$$

где $I(v, w) = c'x(t_1)$ — функция, определенная на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, w), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad w \in W, \tag{75}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = g(v), \quad v \in V. \tag{76}$$

Всюду, не оговаривая этого особо, будем предполагать, что функции $f(x, w)$, $g(v)$ непрерывны вместе с функцией $\partial f(x, w)/\partial x$. Для изучения задачи оптимизации с параметрами в данной работе использована схема §§ 9.1, 9.4. Ниже приводятся формулировки основных результатов.

Обозначим через $\sigma(z, Z)$ звездную окрестность точки z относительно множества Z: $y \in \sigma(z, Z)$, если найдется последовательность чисел ε_i, $i = 1, 2, \ldots$; $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_i \to 0$, $i \to \infty$, такая, что $(1 - \varepsilon_i) z + \varepsilon_i y \in Z$ при всех $i \geqslant 1$. Введем функции

$$H(x, \psi, w) = \psi' f(x, w), \quad h(\psi, v) = \psi' g(v).$$

Через $x^0(t)$ и $\psi(t)$ будем обозначать решения основной системы (75) и сопряженной системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x, \psi, w)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -c,$$

соответствующие оптимальным параметрам v^0, w^0. Выражение типа $f(x, W)$ означает множество

$$\{z\colon z = f(x, w),\ w \in W\}.$$

Теорема 19. Для задачи (74)—(76) справедливы следующие утверждения:

1. α) $H(x^0(t), \psi(t), w^0) \geqslant \dfrac{1}{t_1 - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} H(x^0(t), \psi(t), w)\, dt$

для всех w таких, что при $t \in T$

$$f(x^0(t), w) \in \sigma(f(x^0(t), w^0), f(x^0(t), W));$$

β) $$h(\psi(t_0), v^0) \geqslant h(\psi(t_0), v)$$

для всех v таких, что $g(v) \in \sigma(g(v^0), g(V))$.

2. Принцип максимума. Если при каждом x множества $f(x, W)$, $g(V)$ выпуклы, то

α) $$H(x^0(t), \psi(t), w^0) = \max_{w \in W} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} H(x^0(t), \psi(t), w)\, dt; \tag{77}$$

β) $$h(\psi(t_0), v^0) = \max_{v \in V} h(\psi(t_0), v). \tag{78}$$

3. Если функции $f(x, w)$, $g(v)$ дифференцируемы по v, w, то

α) $$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), w^0)}{\partial w}\, dt w^0 \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), w^0)}{\partial w}\, dt w$$

для всех $w \in \sigma(w^0, W)$;

β) $$\frac{\partial h'(\psi(t_0), v^0)}{\partial v} v^0 \geqslant \frac{\partial h'(\psi(t_0), v^0)}{\partial v} v$$

для всех $v \in \sigma(v^0, V)$.

4. Если функции $f(x, w)$, $g(v)$ дифференцируемы по w, v и множества W, V выпуклы, то

α) $$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), w^0)}{\partial w} dt w^0 =$$
$$= \max_{w \in W} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), w_0)}{\partial w} dt w; \qquad (79)$$

β) $$\frac{\partial h'(\psi(t_0), v^0)}{\partial v} v^0 = \max_{v \in V} \frac{\partial h'(\psi(t_0), v^0)}{\partial v} v. \qquad (80)$$

5. Если в дополнение к условиям утверждения 4 функции $H(x, \psi, w)$, $h(\psi, v)$ вогнуты по w, v, то для w^0, v^0 выполняются (77), (78).

Условия данного утверждения реализуются, например, для системы (75), в которой функция $f_n(x, w)$ не зависит от x_n, функции $f_1(x, w), \ldots, f_{n-1}(x, w)$, $g_1(v), \ldots$ $\ldots, g_{n-1}(v)$ линейны по w, v, функции $f_n(x, w)$, $g_n(v)$ выпуклы по w, v, постоянные c_i равны нулю, за исключением последней $c_n = 1$.

6. Если функции $f(x, w)$, $g(v)$ дифференцируемы по w, v, множества W, V открыты, то

α) $$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), w^0)}{\partial w} dt = 0; \qquad (81)$$

β) $$\frac{\partial h(\psi(t_0), v^0)}{\partial v} = 0. \qquad (82)$$

7. Если функции $f(x, w)$, $g(v)$ дифференцируемы по w, v, то градиенты функции $I(v, w)$ в точке v^1, w^1 равны

α) $$\frac{\partial I(v^1, w^1)}{\partial w} = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^1(t), \psi(t), w^1)}{\partial w} dt;$$

β) $$\frac{\partial I(v^1, w^1)}{\partial v} = -\frac{\partial h(\psi(t_0), v^1)}{\partial v},$$

где $x^1(t)$, $\psi(t)$ — решения основной и сопряженной систем, соответствующие параметрам v^1, w^1.

8. Если $f(x, w) = Ax + b(w)$, то условия (77), (78), необходимы и достаточны для оптимальности v^0, w^0.

9. Принцип ε-максимума:

$$\alpha) \quad H(x^0(t), \psi(t), w^0) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} H(x^0(t), \psi(t), w)\,dt - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \geqslant 0, \tag{83}$$

для всех $w \in W$;

$$\beta) \quad h(\psi(t_0), v^0) \geqslant h(\psi(t_0), v) - \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_2 \geqslant 0, \tag{84}$$

для всех $v \in V$. При ограниченных множествах V, W для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ можно указать такое число τ, что выполняются условия (83), (84) в задаче (74) — (76) с $t_1 - t_0 \leqslant \tau$.

Для уяснения существенности основных условий в приведенных утверждениях рассмотрим

Пример 6. $\dot{x}_1 = w_1$, $\dot{x}_2 = w_2$, $\dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_1(0) = v_1$, $x_2(0) = v_2$, $x_3(0) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$,

$$V,\ W = \{u_1,\ u_2:\ (u_1 - 1)^2 + (u_2 + 1)^2 \geqslant 8,$$
$$(u_1 - 2)^2 + (u_2 + 2)^2 \geqslant 18\}.$$

Сначала рассмотрим задачу оптимизации только по параметрам w_1, w_2, полагая $v_1 = v_2 = 0$. Имеем $x_1(t) = w_1 t$, $x_2(t) = w_2 t$, $x_3(\tau) = (w_1^2 + w_2^2)\frac{\tau^3}{2}$. Отсюда $w_1^0 = -1$, $w_2^0 = 1$. Далее, $H(x, \psi, w) = \psi_1 w_1 + \psi_2 w_2 + \psi_3(x_1^2 + x_2^2)$, $\dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_3$, $\dot{\psi}_2 = -2x_2\psi_3$, $\dot{\psi}_3 = 0$, $\psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0$, $\psi_3(\tau) = -1$, $x_1^0(t) = -t$, $x_2^0(t) = t$, $\psi_3(t) = -1$, $\psi_1(t) = \tau^2 - t^2$,

$$\psi_2(t) = t^2 - \tau^2, \quad \int_0^\tau H(x^0(t), \psi(t), w)\,dt = \frac{2}{3}\tau^3(w_1 - w_2) - \frac{2\tau^3}{3}.$$

Последняя функция в точке $w_1 = -1$, $w_2 = 1$ достигает абсолютного минимума среди W. Таким образом, условие (77) в данном примере не имеет места. По той же причине нарушается свойство (79). В этом примере не выполняется и свойство (81).

Перейдем к оптимизации по параметрам v_1, v_2 при условии, что $w_1 = w_2 = 0$. Имеем $x_1(t) = v_1$, $x_2(t) = v_2$, $x_3(\tau) = \tau(v_1^2 + v_2^2)$. Отсюда $v_1^0 = -1$, $v_2^0 = 1$.

Проверим необходимые условия оптимальности:

$$h(\psi, v) = \psi_1 v_1 + \psi_2 v_2,$$

$$\dot{\psi}_1 = -2x_1\psi_3, \quad \dot{\psi}_2 = -2x_2\psi_3, \quad \dot{\psi}_3 = 0,$$

$$\psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0, \quad \psi_3(\tau) = -1,$$

$$x_1^0(t) = -1, \quad x_2^0(t) = 1, \quad \psi_3(t) = -1, \quad \psi_1(t) = 2(\tau - t),$$

$$\psi_2(t) = 2(t - \tau), \quad h(\psi(0), v) = 2\tau(v_1 - v_2).$$

Последняя функция не удовлетворяет ни одному из свойств (78), (80), (82). Из того, что свойства (77), (78) нарушаются при любом $\tau > 0$, следует, что утверждение 9 в общем случае нельзя улучшить.

2. Наблюдение и идентификация динамических систем как задача оптимизации с параметрами. Довольно общая задача о наблюдении и идентификации может быть сформулирована следующим образом. На выходе некоторого объекта измеряется величина

$$y(t), \qquad t \in T = [t_0, t_1].$$

Относительно объекта и его выхода известно:

1) дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, w) \tag{85}$$

с точностью до q-векторного параметра w из W;

2) начальное условие

$$x(t_0) = g(v) \tag{86}$$

с точностью до p-векторного параметра v из V;

3) выходное устройство

$$y = h(x).$$

Зная множества V, W, найти векторы $v^0 \in V$ и $w^0 \in W$ так, чтобы

$$I(v^0, w^0) = \min_{v \in V,\ w \in W} I(v, w),$$

где

$$I(v,\ w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(y(t),\ h(x(t)))\,dt, \tag{87}$$

$y(t)$ — известная по измерениям функция, $h(t) = h(x(t))$ — функция траектории $x(t)$ системы (85), соответствующей значениям v, w; $f_0(y,\ h)$ — некоторая мера близости векторов y, h.

Вводя дополнительную переменную

$$x_0(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_0(y(t),\ h(t))\,dt,$$

сформулированную задачу сведем к задаче оптимизации с параметрами.

Теорема 19 позволяет не только проверить оптимальность конкретных значений v, w, но и построить итеративный процесс уточнения исходных данных по методу спуска (градиенты известны).

Примечания. 1) При сделанных предположениях на оптимальных значениях v^0, w^0 функционал (87) равен нулю. Если же задачу ставить в несколько ином плане, то $I(v^0,\ w^0) \geqslant 0$. Конкретнее, если считать уравнения движения объекта неизвестными, а за уравнение (85) принять желаемую (с разных точек зрения, например с точки зрения удобства реализации) форму уравнений движения, то $I(v^0,\ w^0) > 0$ в тех случаях, когда реальное движение $y(t)$ не принадлежит совокупности $h(t)$, порожденной системой (85), (86) при различных v, w. В последней интерпретации сформулированная задача наиболее естественна и широко распространена.

2) Учет случайных помех на измеренные значения не вызывает серьезных затруднений. В этом случае вместо (87) следует взять некоторое усредненное (например, математическое ожидание) значение.

3. Задача о понижении порядка дифференциальных уравнений. Исследование сложных объектов, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка, сопряжено с большими трудностями. Поэтому зачастую, особенно при предварительных исследованиях, стараются вместо данного объекта найти другой, более простой, динамические характеристики которого отражали бы в существенном интересуемые свойства исходного объекта. Во многих случаях это сводится к замене исходного дифференциального уравнения движения более простым уравнением. При этом руководствуются самыми различными принципами (расположение корней характеристического уравнения, выделение медленных движений и т. п.). Являясь достаточно простыми, эти принципы из-за не вполне строгих формулировок не всегда ведут к цели. Между тем постановка подобных проблем в виде задач теории оптимальных процессов позволяет придать им четкую форму и привлечь для их решения мощные методы.

В общем случае задача о понижении порядка дифференциальных уравнений состоит в следующем. Дано n-мерное уравнение движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Требуется указать параметры v^0, w^0, при которых движение m-мерной системы

$$\frac{dy}{dt} = g(y, w), \quad y(t_0) = v,$$

наиболее полно отражало бы исходное движение $x(t)$ в смысле минимума заданного функционала

$$J = J(v, w),$$

определенного на движениях $x(t)$, $y(t)$. В зависимости от конкретного вида критерия возникают различные задачи. Линейный вариант сформулированной задачи обычно выглядит следующим образом.

Дано уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0,$$
$$x^i(t_0) = x_{i0}, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Требуется найти коэффициенты b_j и начальные условия для уравнения

$$y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \ldots + b_{m-1}\dot{y} + b_m y = 0,$$
$$y^{(j)}(t_0) = y_{j0}, \qquad j = 0, \ldots, m-1,$$

так, чтобы, например, среднеквадратичное отклонение между $x(t)$ и $y(t)$ было минимальным:

$$\int_0^\infty [x(t) - y(t)]^2 \, dt = \min_{b, y_0}.$$

Для решения подобных проблем весьма естественно привлечение теории оптимальных процессов (в частности, результатов п. 1) по задачам оптимизации.

§ 8. Методы функционального анализа в теории принципа максимума

Теоремы и факты функционального анализа широко используются во всех современных теориях необходимых условий оптимальности. Однако исторически под функциональным подходом в теории оптимальных процессов стали понимать совокупность таких теорем и схем их применения, которые позволяют (хотя бы для линейных систем) довести решение задачи оптимизации до конца. Под этим понимается преодоление основной трудности принципа максимума, состоящей в решение краевых задач. При функциональном подходе вариационная задача сводится к операциям над функциями конечного числа переменных. Обычно это операции типа вычисления максимума выпуклой функции конечного числа переменных. Можно считать, что последняя задача достаточно хорошо разработана в теоретическом и практическом плане.

В последующих параграфах иллюстрируется применение в теории оптимальных процессов следующих фактов функционального анализа:

a) теоремы о минимаксе,

b) теоремы об отделимости выпуклых множеств,

c) L-проблемы моментов,

d) теоремы о существовании опорной плоскости,

e) теоремы о погружаемости выпуклых множеств,

f) теоремы (леммы) Неймана — Пирсона.

Как будет ясно из дальнейшего изложения, лишь в случаях c) и f) нам придется прибегать к операциям в функциональных пространствах. В остальных случаях операции проводятся в конечномерных пространствах. Заметим, что результаты по c) и f) следуют из a) b).

Приведем некоторые сведения из теории выпуклых множеств и функций. Множество $X \subset E_n$ называется *выпуклым*, если наряду с любыми двумя точками $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ ему принадлежит и соединяющий их отрезок, т. е.

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in X$$

для любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Примеры выпуклых множеств на плоскости: квадрат, круг. Причем последнее множество является строго выпуклым, т. е. для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $0 < \lambda < 1$ любая точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ является внутренней точкой множества X. Под *граничными точками* понимаются все точки из X, в любой окрестности которых найдутся точки, не принадлежащие X. Точки из X, не являющиеся граничными, называются *внутренними*. Точка $x \in X$ называется *крайней*, если в X не существует точек x_1, x_2 таких, что $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $0 < \lambda < 1$. Например, граничные точки квадрата и круга — это границы этих фигур: замкнутый полигон и окружность. Крайние точки: в квадрате — вершины, в круге — граничная окружность.

Наименьшее выпуклое множество, содержащее данное X, называется *выпуклой оболочкой* X: $\operatorname{conv} X$. Известно, что

$$\operatorname{conv} X = \left\{x\colon\ x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i,\ x_i \in X,\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1\right\}.$$

Множество X называется *выпуклым конусом*, если из того, что x, $y \in X$, следует: $\alpha x + \beta y \in X$ для всех α, $\beta \geqslant 0$.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

при всех x_1, $x_2 \in X$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. При этом она строго выпукла, если для всех λ, $0 < \lambda < 1$, имеет место строгое неравенство. Функция $f(x)$ называется *вогнутой*, если $(-f(x))$ — выпуклая функция.

Выпуклая функция $f(x)$ непрерывна относительно внутренних точек X и в этих точках обладает производной по любому направлению g, т. е. предел

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \frac{f(x + \alpha g)}{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial g}$$

существует при всех $x \in \operatorname{int} X$, $g \in X$. Если $f(x, y)$, $y \in Y$, — множество выпуклых функций, то $f(x) = \sup f(x, y)$, $y \in Y$,— выпуклая функция на $\operatorname{int} X$. Локальный минимум выпуклой функции совпадает с глобальным, причем он достигается в единственной точке, если функция строго выпукла. В последнем случае функция $y(x)$, $x \in \operatorname{int} X$, из определения

$$f(x, y(x)) = \sup_{y \in Y} f(x; y)$$

является непрерывной. Множество

$$X = \{x\colon f(x) \leqslant c\}$$

выпукло, если $f(x)$ — выпуклая функция. Если для любых c это множество выпукло, то $f(x)$ называется *квазивыпуклой функцией*. Множество X замкнуто, если $f(x)$ непрерывна или полунепрерывна снизу. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ такое, что

$$f(\bar{x}) - f(x) \geqslant -\varepsilon$$

при любых $\bar{x}$ из множества $\{\bar{x}\colon \|\bar{x} - x\| \leqslant \delta\}$. Полунепрерывная снизу функция достигает на компакте (ограниченном замкнутом множестве) минимума.

§ 9. Применение теоремы о минимаксе к нахождению оптимального управления

1. Теорема о минимаксе. Пусть X, Y — выпуклые множества из E_n, причем X ограничено, Y компактно.

Если функция $f(x, y)$ при каждом $y \in Y$ определена, непрерывна и выпукла на замыкании $\bar{X}$ множества X, а при каждом $x \in \bar{X}$ определена, непрерывна и вогнута на Y, то

$$\inf_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y). \tag{88}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f(x, y)$ строго выпукла по x для каждого y и строго вогнута по y для каждого x. Для каждого y через $x(y)$ обозначим точку из $\bar{X}$, для которой

$$f(x(y), y) = \inf_{x \in X} f(x, y) = m(y). \tag{89}$$

В силу непрерывности и строгой выпуклости функции $f(x, y)$, выпуклости множества X функции $x(y)$, $m(y)$ непрерывны, $m(y)$ вогнута. Пусть точка y^* такова, что

$$m(y^*) = \max_{y \in Y} m(y) = \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y). \tag{90}$$

Строгая вогнутость по y функции $f(x, y)$ означает, что для любого $y \in Y$ и любого t, $0 < t < 1$, на элементе $\tilde{y} = (1 - t) y^* + ty$ выполняются неравенства

$$f(x, \tilde{y}) > (1-t) f(x, y^*) + tf(x, y) \geqslant$$
$$\geqslant (1-t) m(y^*) + tf(x, y).$$

Отсюда для $\tilde{x} = x(\tilde{y})$ имеем

$$m(\tilde{y}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) > (1-t) m(y^*) + tf(\tilde{x}, y).$$

Но из (90) следует, что $m(y^*) \geqslant m(\tilde{y})$. Поэтому

$$f(\tilde{x}, y) < \frac{1}{t} m(\tilde{y}) - \frac{1-t}{t} m(y^*) \leqslant m(y^*) = f(x(y^*), y^*).$$

Пусть $t \to 0$. Тогда $\tilde{y} \to y^*$, $\tilde{x} \to x(y^*) = x^*$ и $f(x^*, y) \leqslant \leqslant f(x^*, y^*)$, что в совокупности с (89) означает

$$f(x^*, y) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \tag{91}$$

для всех $x \in X$, $y \in Y$. По условиям теоремы для любого $\varepsilon > 0$ и $x^* \in \overline{X}$ найдется элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что

$$|f(x^*, y) - f(\tilde{x}, y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $y \in Y$. Поэтому из (91) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют точки $\tilde{x} \in X$, $y^* \in Y$ такие, что

$$f(\tilde{x}, y) \leqslant f(\tilde{x}, y^*) + \varepsilon, \quad f(x, y^*) \geqslant f(\tilde{x}, y^*) - \varepsilon \tag{92}$$

для всех $x \in X$, $y \in Y$. Из первого неравенства (92) получаем

$$\max_{y \in Y} f(\tilde{x}, y) \leqslant f(\tilde{x}, y^*) + \varepsilon, \quad \inf_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \leqslant f(\tilde{x}, y^*) + \varepsilon. \tag{93}$$

Аналогично из второго неравенства имеем

$$\inf_{x \in X} f(x, y^*) \geqslant f(\tilde{x}, y^*) - \varepsilon, \quad \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y) \geqslant f(\tilde{x}, y^*) - \varepsilon. \tag{94}$$

Из (93), (94) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует утверждение (88) теоремы (для строго выпукло-вогнутых функций $f(x, y)$).

В общем случае вместо $f(x, y)$ рассмотрим функцию

$$f_\delta(x, y) = f(x, y) + \delta x'x - \delta y'y.$$

Для каждого $\delta > 0$ функция $f_\delta(x, y)$ удовлетворяет условиям, при которых (88) доказано. Устремляя δ к нулю, выделим подпоследовательность, для которой $y_\delta^* \to y^*$, что в силу компактности множества Y всегда возможно. Остальное в доказательстве теоремы не требует пояснений.

Примечания. 1) Если в условиях теоремы X — замкнутое множество, то в (88) операция inf заменяется на min.

2) Теорема верна без предположения ограниченности множества X.

3) При условиях теоремы существует ситуация ε-равновесия (92). Если дополнительно X — замкнутое множество, то функция $f(x, y)$ обладает седловой точкой (91). Последнее утверждение можно получить и непосредственно из (88), если X, Y — компактные множества, а функция $f(x, y)$ непрерывна по каждому из аргументов.

4) Из доказательства теоремы (см. (91) и далее) видно, что наличие седловой точки $\{x^*, y^*\}$, $x^* \in X$, $y^* \in Y$, влечет (88), причем inf можно заменить на min. Однако в общем случае из выполнения (88) не следует существования седловой точки.

5) Если в (88) определена одна часть, то определена и вторая и они равны.

2. Минимизация нормы конечного состояния. Пусть n-мерный процесс $x(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$, задан выражением

$$x(t) = s(t, x_0) + \int_{t_0}^{t} S(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau, \tag{95}$$

где $s(t, x)$, $S(t, \tau)$ — непрерывные функции, управление $u(t)$, $t \in T$, выбирается из выпуклого семейства r-мерных функций $U(\cdot)$.

Задача. Среди указанных воздействий (допустимых управлений) найти такое $u^0(\cdot) = \{u^0(t),\ t \in T\}$, на котором при заданном $t = t_1$ функционал

$$J(u) = \| x(t_1) \| \tag{96}$$

достигает минимального значения.

С помощью теоремы о минимаксе эта задача решается наиболее просто. Обозначим через R множество достижимости системы (95):

$$R = \{x\colon x = x(t_1) = s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, \tau)\, u(\tau)\, d\tau,\ u(\cdot) \in U(\cdot)\}.$$

Из выпуклости семейства $U(\cdot)$ следует выпуклость множества R. На языке этого множества поставленная задача означает поиск вектора $x \in R$, норма $\|x\|$ которого минимальна:

$$\inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} J(u) = \inf_{x\in R} \|x\|.$$

Но поскольку $\|x\| = \max\limits_{\|g\|\leq 1} g'x$, то, используя теорему о минимаксе (очевидно, в данном случае выполнены все условия теоремы), получим

$$\delta^0 = \inf J(u) = \inf_{x\in R} \max_{\|g\|\leq 1} g'x = \max_{\|g\|\leq 1} \inf_{x\in R} g'x =$$

$$= \max_{\|g\|\leq 1} \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \left[g's(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, u(t)\, dt \right] =$$

$$= \max_{\|g\|\leq 1} \left[g's(t_1, x_0) + \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, u(t)\, dt \right].$$

Задача свелась к исследованию выражения

$$\mu(g) = \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, u(t)\, dt. \tag{97}$$

Во многих задачах семейство $U(\cdot)$ таково, что вычисление (97) не представляет труда. Если при этом нижняя грань достигается на элементе из $U(\cdot)$, то исходная задача имеет решение; в противном случае можно построить последовательность функций $\{u^k(g, t)\} \in U(\cdot)$

таких, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1,\ t)\,u^k(g,\ t)\,dt=\mu(g). \tag{98}$$

Последовательность $u^k(t)$ назовем обобщенным оптимальным управлением, если $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^k)=\delta^0$.

Теорема 20. Минимальное значение критерия качества в задаче (95), (96) равно

$$\delta^0=\max_{\|g\|\leqslant 1}\,[g's(t_1,\ x_0)+\mu(g)]. \tag{99}$$

Задача (95), (96) на $U(\cdot)$ имеет решение, если при любых g, $\|g\|\neq 0$, линейный функционал (97) на $U(\cdot)$ достигает нижней грани. Оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет принципу максимума

$$-\int_{t_0}^{t_1} g_0'S(t_1,\ t)\,u^0(t)\,dt=\max_{u(\cdot)\in U(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1}[-g_0'S(t_1,\ t)\,u(t)]\,dt, \tag{100}$$

где g_0 — вектор, на котором достигается максимум в правой части (99). Обобщенное оптимальное управление таково, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} g_0'S(t_1,\ t)\,u^k(t)\,dt=\mu(g_0).$$

3. Стандартные классы допустимых управлений. Чтобы пояснить значение полученного результата, рассмотрим распространенные типы ограничений на управляющие функции. Пусть класс $U(\cdot)$ состоит из r-мерных кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t)$, $t\in T$, ограниченных по норме

$$\|u(t)\|\leqslant 1,\qquad t\in T.$$

Тогда $\mu(g)$ из (97), очевидно, равно

$$\mu(g)=-\int_{t_0}^{t_1}\|g'S(t_1,\ t)\|\,dt$$

(нижняя грань достигается при всех g). Пусть, далее, $U(\cdot)$ состоит из r-мерных измеримых функций $u(t)$,

$t \in T$, стесненных условием

$$\int_{t_0}^{t_1} \| u(t) \|^p \, dt \leqslant 1, \qquad 1 < p < \infty.$$

Тогда нетрудно убедиться, что нижняя грань в (97) достигается и равна

$$\mu(g) = -\left[\int_{t_0}^{t_1} \| g'S(t_1, t) \|^q \, dt \right]^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Рассмотрим, наконец, семейство $U(\cdot)$ измеримых функций $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющих ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \| u(t) \| \, dt \leqslant 1.$$

В этом случае в $U(\cdot)$ не существует элемента, на котором достигается нижняя грань

$$-\mu(g) = \max_{t \in T} \| g'S(t_1, t) \|$$

функционала. Одна из последовательностей $u^k(t)$, обладающая свойством (98), имеет вид

$$u^k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \bar{t} - \dfrac{1}{2k} \leqslant t \leqslant \bar{t} + \dfrac{1}{2k}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Здесь $\bar{t}$ — точка, на которой функция $\| g'S(t_1, t) \|$ достигает максимума (для простоты считаем, что $\bar{t}$ — единственная точка).

Резюмируем результаты пунктов 2, 3.

1) Вариационная задача (95), (96) с помощью теоремы о минимаксе сводится к задаче минимизации вогнутой функции на шаре конечномерного пространства.

2) Вопрос о существовании оптимального управления сводится к вопросу о существовании минимума линейного функционала (97) на заданном классе допустимых управлений. Решение этого вопроса полностью определяется данными задачи.

3) Оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (100), в котором вектор g_0, играющий здесь роль начального условия $\psi(t_0)$, может быть эффективно вычислен.

4. Оптимизация систем с нелинейным входом. Теорема о минимаксе непосредственно применима и для решения следующей задачи: с помощью r-мерных измеримых функций $u(t)$, $t \in T$, со значениями в заданном компакте U минимизировать функционал (96), определенный на траекториях системы

$$x(t) = s(t, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t, \tau, u(\tau))\, d\tau. \tag{101}$$

Система (101) нелинейна по u, но основной факт, в силу которого применима теорема о минимаксе, имеет место и здесь. Так как множество достижимости

$$R = \left\{x\colon x = s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, t, u(t))\, dt,\ u(t) \in U\right\}$$

выпукло и замкнуто (см. § 1.6), то

$$\delta^0 = \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \| x(t_1) \| = \max_{\|g\|\leqslant 1} \{g's(t_1, x_0) + \mu(g)\} =$$
$$= g_0's(t_1, x_0) + \mu(g_0), \tag{102}$$

где

$$\mu(g) = \int_{t_0}^{t_1} \min_{u\in U} g'S(t_1, t, u)\, dt.$$

Теорема 21. Задача оптимизации (101), (96) сводится к конечномерной задаче (102). Оптимальное управление $u^0(t)$ существует и удовлетворяет принципу максимума

$$-g_0'S(t_1, t, u^0(t)) = \max_{u\in U} [-g_0'S(t_1, t, u)].$$

5. Обобщения. Применение теоремы о минимаксе не исчерпывается функционалами типа (96). Можно рассмотреть функционал

$$I_3^1(u) = \varphi(x(t_1)),$$

где $\varphi(x)$ — квазивыпуклая полунепрерывная снизу функция. В этом случае вместе с множеством достижимости R следует ввести множество

$$Q(\delta) = \{x\colon \varphi(x) \leqslant \delta\}$$

и на множестве $P(\delta) = R - Q(\delta)$ определить функцию $\| z \|$, $z \in P(\delta)$. Минимальное δ, при котором $\| z \| = 0$, равно, очевидно, $\inf I(u)$. Поэтому сначала находим $\lambda(\delta) = \inf\limits_{u} \| z \|$ сведением этой задачи к конечномерной:

$$\lambda(\delta) = \inf_{z \in P} \| z \| = \inf_{z \in P} \max_{\|g\| \leqslant 1} g'z = \max_{\|g\| \leqslant 1} \inf_{z \in P} g'z.$$

Дальнейшие выкладки очевидны.

Конечно, использование изложенной схемы эффективно не только для минимизации функций конечного состояния. Нетрудно видеть (в последующих параграфах на этом остановимся подробнее), что этим методом можно решать задачи оптимального быстродействия с фиксированными и подвижными концевыми условиями, задачи минимизации интегральных критериев качества и др. Кроме того, после сведения вариационной задачи к конечномерной можно продолжить исследование дальше и изучить качественные вопросы оптимального управления (единственность, зависимость от параметров и т. п.). Эти вопросы также рассматриваются в последующих параграфах.

6. Заключение. Исходя из разобранных примеров, можно сформулировать основные моменты сведения конкретной задачи оптимизации к теореме о минимаксе. 1) Дать задаче геометрическую формулировку. 2) Если удастся исходную проблему представить как задачу о существовании общих точек двух выпуклых множеств, то ввести расстояние $\| z \|$ между множествами. 3) Использовать представление $\| z \| = \max\limits_{\|g\| \leqslant 1} g'z$ и применить теорему о минимаксе.

Каждый из этих этапов имеет различные реализации в конкретных задачах. Для приобретения навыков решения этим методом рекомендуется самостоятельно решить задачи §§ 10, 11 сведением их к теореме о минимаксе. Интересно рассмотреть и вариации этих задач.

§ 10. Теорема об отделимости выпуклых множеств и ее приложение к задачам оптимального управления

В этом параграфе прежде всего докажем элементарными средствами теорему об отделимости выпуклых множеств, а затем проиллюстрируем эффективность подхода, основанного на этой теореме, при решении ряда задач оптимизации динамических систем.

1. Теорема об отделимости выпуклых множеств. Пусть X, Y — выпуклые множества, одно из которых ограничено и замыкания $\overline{X}$, $\overline{Y}$ которых не имеют общих точек. Тогда существует вектор g, $\| g \| = 1$, такой, что для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство

$$g'x < g'y. \tag{103}$$

Доказательство. На множествах $\overline{X}$, $\overline{Y}$ определим функцию $\rho(x, y) = (x - y)'(x - y)$. Пусть ограничено множество $\overline{X}$. Тогда на нем определена и непрерывна функция

$$\rho(x) = \min_{y \in \overline{Y}} \rho(x, y) = \rho(x, y(x)) > 0.$$

Эта функция достигает минимума:

$$\rho^0 = \min_{x \in \overline{X}} \rho(x, y(x)) = \rho(x_0, y(x_0)) > 0.$$

Положим $z = x - y$, $z_0 = x_0 - y_0$, $y_0 = y(x_0)$. Для любых $z \in Z = X - Y$ и всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, точка $z_t = z_0 + t(z - z_0)$ удовлетворяет неравенству $z_t'z_t \geqslant z_0'z_0$, откуда

$$2tz_0'(z - z_0) + t^2(z - z_0)'(z - z_0) \geqslant 0.$$

Из того, что последнее неравенство должно выполняться для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, следует: $z_0'(z - z_0) \geqslant 0$, или $z_0'z \geqslant z_0'z_0 > 0$. Положим $g = -z_0/\| z_0 \|$. Тогда

$$g'z = g'(x - y) < 0,$$

что эквивалентно (103). Теорема доказана.

Схема сведения задач оптимального управления к теореме об отделимости выпуклых множеств всегда содержит основной момент, когда исходная задача трактуется как проблема существования общих точек у двух выпуклых множеств. Остальные детали довольно стандартны, и их можно усмотреть из приведенных ниже примеров.

Примечание. Если ограничены множества X, Y, то теорема об отделимости выпуклых множеств следует из теоремы о минимаксе. Действительно, определим на множествах Z, $G = \{g\colon \|g\| \leqslant 1\}$ функцию $f(z, g) = g'z$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы о минимаксе. Поэтому

$$\inf_{z\in Z} \max_{\|g\|\leqslant 1} g'z = \max_{\|g\|\leqslant 1} \inf_{z\in Z} g'z. \tag{104}$$

Из компактности G следует существование такого g_0, что

$$\inf_{z\in Z} (-g_0'z) = \max_{\|g\|\leqslant 1} \inf_{z\in Z} g'z.$$

Поскольку левая часть (104) положительна (Z не содержит начала координат), то $g_0 \neq 0$. Из (104) получаем $-g_0'z > 0$ для всех $z \in Z$ или

$$g_0'x < g_0'y \quad \text{для всех} \quad x \in X,\ y \in Y, \tag{105}$$

что эквивалентно (103) (если разделить обе части (105) на $\| g_0 \|$).

Из теоремы об отделимости выпуклых множеств можно получить теорему о минимаксе. Это распространенный способ доказательства последней.

2. Условия разрешимости одной функциональной задачи. Обозначим через $U(\cdot)$ некоторый класс функций $u(t)$, $t \in T$. Пусть преобразование S каждому элементу $u(\cdot)$ из $U(\cdot)$ ставит в соответствие вектор x конечномерного пространства E_n, при этом множество

$$R = \{x\colon x = Su(\cdot),\ u(\cdot) \in U(\cdot)\}$$

выпукло и ограничено. Зададим, далее: Q_1, Q_2 — линейные преобразования из E_n в E_n, полунепрерывные снизу, квазивыпуклые функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, элемент c из E_n, неотрицательные числа δ_1, δ_2.

Задача. Найти условия, при которых

$$Su(\cdot) + Q_1 v + Q_2 w + c = 0, \quad \varphi_1(v) \leqslant \delta_1, \quad \varphi_2(w) \leqslant \delta_2, \tag{106}$$
$$u(\cdot) \in U(\cdot), \quad v, w \in E_n.$$

Теорема 22. Задача (106) имеет обобщенное решение тогда и только тогда, когда

$$\max_{\|g\|=1} \{g'c + \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} g'Su(\cdot) + \min_{\varphi_1(v)\leqslant\delta_1} g'Q_1v + \min_{\varphi_2(w)\leqslant\delta_2} g'Q_2w\} \leqslant 0. \qquad (107)$$

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$, v, w — решение задачи (106). Тогда

$$g'[Q_1v + Q_2w + c] = -g'Su(\cdot) \leqslant -\inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} g'Su(\cdot)$$

для любого g, $g \in E_n$. С другой стороны,

$$g'[Q_1v + Q_2w + c] \geqslant g'c + \min_{\varphi_1(v)\leqslant\delta_1} g'Q_1v + \min_{\varphi_2(w)\leqslant\delta_2} g'Q_2w.$$

Значит,

$$g'c + \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} g'Su(\cdot) + \min_{\varphi_1(v)\leqslant\delta_1} g'Q_1v + \min_{\varphi_2(w)\leqslant\delta_2} g'Q_2w \leqslant 0 \qquad (108)$$

для любого $g \in E_n$. Поэтому выполняется соотношение (107).

Допустим, что имеет место условие (107). Тогда для любого g, $\|g\| = 1$, справедливо неравенство (108). Рассмотрим множества

$$R = \{x\colon x = Su(\cdot) + c,\ u(\cdot) \in U(\cdot)\},$$

$$Q = \{x\colon x = -Q_1v - Q_2w,\ \varphi_1(v) \leqslant \delta_1,\ \varphi_2(w) \leqslant \delta_2\}.$$

Множество Q, очевидно, выпукло. Множество R ограничено и выпукло (по предположению). Если задача (106) не имеет обобщенного решения, то множество $\overline{R} \cap Q$ пусто, и согласно теореме об отделимости выпуклых множеств существует ненулевой вектор $\bar{g}$ такой, что

$$\min_{\varphi_1(v)\leqslant\delta_1} \min_{\varphi_2(w)\leqslant\delta_2} \bar{g}'[Q_1v + Q_2w] > \sup_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \bar{g}'[-Su(\cdot) - c],$$

т. е.

$$\min_{\varphi_1(v)\leqslant\delta_1} \bar{g}'Q_1v + \min_{\varphi_2(w)\leqslant\delta_2} \bar{g}'Q_2w + \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \bar{g}'Su(\cdot) + \bar{g}'c < 0. \qquad (109)$$

Неравенство (109) противоречит (108), что и доказывает утверждение.

Предположим, что преобразование S линейное:

$$Su(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, \tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} &U(\cdot) \equiv U_p(\cdot) = \left\{u(\cdot)\colon \int_{t_0}^{t_1} \| u(t) \|^p\, dt \leqslant 1\right\},\ p > 1,\\ &\varphi_1(x) = \| x - c^1 \|, \quad \varphi_2(x) = \| x - c^2 \|, \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

где c^1, c^2 — заданные векторы из E_n.

Задача. Найти условия, при которых

$$\left.\begin{aligned} &Su(\cdot) + Q_1 v + Q_2 w + c = 0, \quad u(\cdot) \in U_p(\cdot),\\ &\| v - c^1 \| \leqslant \delta_1, \quad \| w - c^2 \| \leqslant \delta_2. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Теорема 23. Задача (111) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\max_{\|g\|=1} \{g'[c + Q_1 c^1 + Q_2 c^2] - \| g'S \| - \\ - \delta_1 \| g'Q_1 \| - \delta_2 \| g'Q_2 \| \} \leqslant 0. \tag{112}$$

Утверждение доказывается аналогично теореме 22.

Примечание. Пусть $U(\cdot)$ — такой класс вектор-функций $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что множество $SU(\cdot)$ выпукло и замкнуто. Тогда условия существования решения задачи (111), где $u(\cdot) \in U(\cdot)$, имеют вид

$$\max_{\|g\|=1} \{g'[c + Q_1 c^1 + Q_2 c^2] + \min_{u(\cdot) \in U(\cdot)} g'Su(\cdot) - \\ - \delta_1 \| g'Q_1 \| - \delta_2 \| g'Q_2 \| \} \leqslant 0.$$

Предположим, что $\| g'S \| > 0$ при всех g, $\| g \| \neq 0$. Условие (112) равносильно неравенству $\lambda \leqslant 1$, где

$$\lambda = \max_{\|g'S\|=1} \{g'[c + Q_1 c^1 + Q_2 c^2] - \delta_1 \| g'Q_1 \| - \delta_2 \| g'Q_2 \| \}. \tag{113}$$

Теорема 24. Для того чтобы элемент $g = g_0$ был решением задачи (113), необходимо и достаточно, чтобы для произвольного решения $u(\cdot)$, $\| u(\cdot) \| = \lambda$, v, w задачи (111) выполнялись равенства

$$g_0' S u(\cdot) = -\| g_0' S \| \| u(\cdot) \| = -\lambda, \tag{114}$$

$$g_0' Q_1 [v - c^1] = -\delta_1 \| g_0' Q_1 \|, \tag{115}$$

$$g_0' Q_2 [w - c^2] = -\delta_2 \| g_0' Q_2 \|. \tag{116}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть g_0 — решение задачи (113) и функция $u(\cdot)$, векторы v, w удовлетворяют соотношениям (111), причем $\| u(\cdot) \| = \lambda$. Очевидно, справедливо неравенство

$$\lambda = -g_0' [S u(\cdot) + Q_1 (v - c^1) + Q_2 (w - c^2)] - \delta_1 \| g_0' Q_1 \| - \\ - \delta_2 \| g_0' Q_2 \| \leqslant \| g_0' S \| \| u(\cdot) \| - g_0' Q_1 (v - c^1) - \\ - g_0' Q_2 (w - c^2) - \delta_1 \| g_0' Q_1 \| - \delta_2 \| g_0' Q_2 \|. \tag{117}$$

Отсюда получаем

$$g_0' Q_1 (v - c^1) + g_0' Q_2 (w - c^2) \leqslant \\ \leqslant -\delta_1 \| g_0' Q_1 \| - \delta_2 \| g_0' Q_2 \|.$$

Но

$$| g_0' [Q_1 (v - c^1) + Q_2 (w - c^2)] | \leqslant \\ \leqslant \delta_1 \| g_0' Q_1 \| + \delta_2 \| g_0' Q_2 \|.$$

Поэтому выполняются равенства (115), (116). Теперь из (117) следует соотношение (114).

Достаточность. Пусть $u(\cdot)$, v, w — решение задачи (111), $\| u(\cdot) \| = \lambda$. Если для некоторого $\bar{g}$, $\| \bar{g} \| = 1$, выполнены условия (114) — (116), то вместо (117) имеем

$$\bar{g}' (c + Q_1 c^1 + Q_2 c^2) - \delta_1 \| \bar{g}' Q_1 \| - \delta_2 \| \bar{g}' Q_2 \| = \\ = \lambda \| \bar{g}' S \|,$$

т. е. элемент $\bar{g}$ — решение задачи (113), что и доказывает утверждение.

3. Задача минимизации квазивыпуклой функции конечного состояния. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + b(u, t), \tag{118}$$

где $A(t)$ — непрерывная $n \times n$-матричная функция, $b(u, t)$ — непрерывная по u, t n-векторная функция,

$u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — управление. Обозначим через $U(\cdot)$ класс измеримых r-мерных функций $u(t)$, $t \in T$, со значениями из заданного множества U. Пусть даны числа $t_1 > t_0$, $\delta_1 > 0$ и квазивыпуклые, полунепрерывные снизу функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Пусть множества $\{x\colon \varphi_1(x) \leqslant \alpha_1\}$, $\{x\colon \varphi_2(x) \leqslant \alpha_2\}$ ограничены при любых α_1, $\alpha_2 < \infty$.

Требуется найти управление $u^0(t)$, при котором траектория $x(t) = x(x(t_0), u(\cdot), t)$ уравнения (118) удовлетворяет условиям

$$\varphi_2(x(x(t_0), u^0(\cdot), t_1)) = \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \varphi_2(x(x(t_0), u(\cdot), t_1));$$
$$\varphi_1(x(t_0)) \leqslant \delta_1. \tag{119}$$

В силу формулы Коши

$$x(t_1) = F(t_1)F^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1)F^{-1}(\tau)b(u, \tau)\,d\tau. \tag{120}$$

Положим

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t_1)F^{-1}(\tau)b(u, \tau)\,d\tau = Su(\cdot),$$
$$F(t_1)F^{-1}(t_0) = Q_1, \quad -E = Q_2.$$

Из (120) имеем

$$Su(\cdot) + Q_1x(t_0) + Q_2x(t_1) = 0.$$

Пусть $\delta_2 \geqslant 0$. Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{array}{l} Su(\cdot) + Q_1x(t_0) + Q_2x(t_1) = 0,\ u(\cdot) \in U(\cdot), \\ \varphi_1(x(t_0)) \leqslant \delta_1, \quad \varphi_2(x(t_1)) \leqslant \delta_2. \end{array}\right\} \tag{121}$$

На основании теоремы 22 заключаем: задача (121) имеет решение только тогда, когда

$$\Lambda(\delta_2) = \max_{\|g\|=1} \Lambda(\delta_2, g) = \Lambda(\delta_2, g(\delta_2)) \leqslant 0, \tag{122}$$

где

$$\Lambda(\delta_2, g) = \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} g'Su(\cdot) + \min_{\varphi_1(x)\leqslant\delta_1} g'Q_1x + \min_{\varphi_2(x)\leqslant\delta_2} g'Q_2x.$$

Лемма 8. Функция $\Lambda(\delta_2)$ непрерывна справа, не возрастает. Если $\varphi_2(x)$ — непрерывная функция, то

$$\Lambda(\delta_2) < \Lambda(\bar{\delta}_2), \quad \text{при} \quad \bar{\delta}_2 < \delta_2.$$

Доказательство. Непрерывность справа функции $\Lambda(\delta_2)$ — следствие полунепрерывности снизу $\varphi_2(x)$. Докажем монотонность $\Lambda(\delta_2)$. Ясно, что если $\bar{\delta}_2 < \delta_2$, то

$$\min_{\varphi_2(x) \leq \bar{\delta}_2} g'Q_2x \geqslant \min_{\varphi_2(x) \leq \delta_2} g'Q_2x$$

и

$$\Lambda(\bar{\delta}_2, g(\bar{\delta}_2)) \geqslant \Lambda(\bar{\delta}_2, g(\delta_2)) \geqslant \Lambda(\delta_2, g(\delta_2)).$$

Лемма доказана.

Теорема 25. Если существует хотя бы одно управление, удовлетворяющее условию (121), то существует и оптимальное управление, доставляющее функционалу $\varphi_2(x(x(t_0), u(\cdot), t_1))$ значение δ_2^0, которое является наименьшим числом, удовлетворяющим неравенству

$$\Lambda(\delta_2) = \Lambda(\delta_2, g(\delta_2)) \leqslant 0.$$

Для оптимального управления $u^0(\cdot)$ и концов оптимальной траектории $x^0(t)$ выполняются соотношения

$$-g'(\delta_2^0) F(t_1) F^{-1}(t) b(u^0(t), t) = \\ = \max_{u \in U} [-g'(\delta_2^0) F(t_1) F^{-1}(t) b(u, t)], \tag{123}$$

$$\left.\begin{aligned} g'(\delta_2^0) F(t_1) F^{-1}(t_0) x^0(t_0) &= \min_{\varphi_1(x) \leqslant \delta_1} g'(\delta_2^0) F(t_1) F^{-1}(t_0) x, \\ g'(\delta_2^0) x^0(t_1) &= -\min_{\varphi_2(x) \leqslant \delta_2^0} g'(\delta_2^0) x. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Доказательство. Первая часть теоремы следует из леммы 8. Соотношения (123) (принцип максимума), (124) (условия трансверсальности) получаются из условия (122).

Примечание. Функция $\psi(t) = -[F^{-1}(t)]' \times F'(t_1) g(\delta_2^0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'(t)\psi, \tag{125}$$

причем

$$\psi(t_1) = -g(\delta_2^0).$$

Пусть $\varphi_1(x) = \| x - c^1 \|$, $\varphi_2(x) = \| x - c^2 \|$, где c^1, c^2 — фиксированные точки в E_n. Исследуем задачу минимизации функционала

$$J(u) = \| x(t_1) - c^2 \| \tag{126}$$

на траекториях уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u+f(t),\qquad u(\cdot)\in U_p(\cdot),$$

где начальное состояние $x(t_0)$ удовлетворяет неравенству $\|x(t_0)-c^1\|\leqslant\delta_1$. Положим

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{t_0}^{t_1}F(t_1)F^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau=Su(\cdot),\quad F(t_1)F^{-1}(t_0)=Q_1,\\ \int\limits_{t_0}^{t_1}F(t_1)F^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau=c,\qquad\qquad -E=Q_2.\end{aligned}\right\}\tag{127}$$

При $\delta_2\geqslant 0$ рассмотрим уравнение

$$Su(\cdot)+Q_1x(t_0)+Q_2x(t_1)+c=0,\qquad u(\cdot)\in U_p(\cdot),\tag{128}$$

для которого

$$\|x(t_0)-c^1\|\leqslant\delta_1,\qquad\|x(t_1)-c^2\|\leqslant\delta_2.$$

В силу теоремы 23 задача (128) имеет решение только тогда, когда

$$\Lambda(\delta_2,\ t_1)=\max_{\|g\|=1}\Lambda(\delta_2,t_1,g)=\Lambda(\delta_2,t_1,g(\delta_2,t_1))\leqslant 0,\tag{129}$$

где

$$\Lambda(\delta_2,\ t_1,\ g)=g'(c+Q_1c^1+Q_2c^2)-\|g'S\|-\\ -\delta_1\|g'Q_1\|-\delta_2\|g'Q_2\|.$$

Лемма 9. Функция $\Lambda(\delta_2,t_1)$ непрерывна по δ_2, t_1 и строго убывает по δ_2.

Доказательство. Непрерывность $\Lambda(\delta_2,\ t_1)$ по δ_2, t_1 следует из непрерывности $\Lambda(\delta_2,t_1,g)$ по δ_2, t_1. Пусть $\delta_2<\bar\delta_2$. Тогда

$$\Lambda(\delta_2,\ t_1,\ g(\delta_2,\ t_1))\geqslant\Lambda(\delta_2,\ t_1,\ g(\bar\delta_2,\ t_1))>\\ >\Lambda(\bar\delta_2,\ t_1,\ g(\bar\delta_2,\ t_1)).$$

Лемма доказана.

Теорема 26. Оптимальное управление в задаче (126) существует и доставляет функционалу $\varphi_2=\|x(t_1)-c^2\|$

значение

$$\delta_2^0 = \max_{\|g\| \leqslant 1} \{g'(c + F(t_1)F^{-1}(t_0)c^1 - c^2) - \|g'S\| - \\ - \delta_1 \|g'F(t_1)F^{-1}(t_0)\|\} = g_0'[c + F(t_1)F^{-1}(t_0)c^1 - c^2] - \\ - \|g_0'S\| - \delta_1 \|g_0'F(t_1)F^{-1}(t_0)\|. \qquad (130)$$

Если $\delta_2^0 > 0$, то для оптимального управления $u^0(\cdot)$ и концов оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ выполняются соотношения

$$-g_0'Su^0(\cdot) = \max_{u(\cdot) \in U_p(\cdot)} [-g_0'Su(\cdot)] = -\|g_0'S\|, \qquad (131)$$

$$g_0'F(t_1)F^{-1}(t_0)(x^0(t_0) - c^1) = -\delta_1 \|g_0'F(t_1)F^{-1}(t_0)\|, \qquad (132)$$

$$g_0'(x^0(t_1) - c^2) = \delta_2^0 \|g_0\|. \qquad (133)$$

Доказательство. Формула (130) следует из (129) в силу монотонности по δ_2 функции $\Lambda(\delta_2, t_1, g)$. Соотношения (131) — (133) — следствие теоремы 24.

4. Задача быстродействия для системы с нелинейным входом. Функцию $\{u(t),\ t \in T\} \in U(\cdot)$ будем называть *T-допустимым управлением* некоторой задачи, если она порождает траекторию, удовлетворяющую наложенным ограничениям.

Пусть имеется уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(u, t) + f(t), \qquad t \geqslant t_0. \qquad (134)$$

Заданы непересекающиеся множества Γ^1, Γ^2:

$$\Gamma' = \{x: \|x - c^1\| \leqslant \delta_1\}, \qquad \Gamma^2 = \{x: \|x - c^2\| \leqslant \delta_2\},$$

где элементы c^1, c^2, числа δ_1, δ_2 фиксированы, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$. Требуется найти управление $u(\cdot) \in U(\cdot)$, при котором траектория уравнения (134) с начальным условием $x(t_0) \in \Gamma^1$ достигает Γ^2 в минимально возможное время.

Условия существования T-допустимого управления дает неравенство (129). Так как δ_2 в данной задаче фиксировано, то запишем условия (129) в виде

$$\Lambda(t_1) = \max_{\|g\|=1} \Lambda(\delta_2, t_1, g) \equiv \Lambda(t_1, g(t_1)) \leqslant 0.$$

Теорема 27. Если существует хотя бы одно T-допустимое управление, то существует и оптимальное управление со временем быстродействия $\tau^0 = t_1^0 - t_0$, где t_1^0 — наименьший корень уравнения

$$\Lambda(t_1, g(t_1)) = 0. \tag{135}$$

Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ и концы оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ удовлетворяют условиям

$$-g'(t_1^0) Su^0(\cdot) = \max_{u(\cdot)\in U(\cdot)} [-g'(t_1^0) Su(\cdot)],$$

$$g'(t_1^0) F(t_1^0) F^{-1}(t_0)(x^0(t_0) - c^1) = -\delta_1 \| g'(t_1^0) F(t_1^0) F^{-1}(t_0) \|,$$

$$g'(t_1^0)(x^0(t_1^0) - c^2) = \delta_2 \| g(t_1^0) \|.$$

Доказательство. В силу непрерывности $\Lambda(t_1)$ по t_1 (лемма 9) из существования T-допустимого управления следует существование оптимального управления. На основании условий (129) время быстродействия τ^0 таково, что величина $t_1^0 = t_0 + \tau^0$ является наименьшим решением уравнения (135). Вторая часть утверждения следует из теоремы 24.

5. Задача оптимального быстродействия в системе с ограничениями на фазовые координаты. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{136}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Пусть

$$U(\cdot) = \{u(t): |u(t)| \leqslant 1,\ t \in T\}.$$

Зададим область изменений $x(t)$, положив

$$G = \{x: e'x \leqslant 1\}, \tag{137}$$

где e — фиксированный элемент из E_n, $\|e\| \neq 0$. Пусть требуется найти управление $u^0(t)$, $t \in T$, переводящее $x(t)$, $x(t) \in G$, $t \in T$, в начало координат за минимальное время. Обозначим через $\widetilde{U}(\cdot)$ множество функций

$$\{u(t): |u(t)| \leqslant 1,\ e'x(t) \leqslant 1,\ t \in T\}.$$

Если $u(\cdot)$ — T-допустимое управление, то

$$-x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\tau) u(\tau)\, d\tau, \qquad \gamma(\tau) = F^{-1}(\tau) b$$

и

$$e'x(t)=e'F(t)\int_{t_1}^{t} F^{-1}(\tau)\,bu(\tau)\,d\tau\leqslant 1.$$

В силу результатов п. 3 настоящего параграфа T-допустимое управление в этой задаче существует тогда и только тогда, когда

$$\max_{\|g\|=1}\left\{g'x_0+\min_{u(\cdot)\in\widetilde{U}(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1} g'\gamma(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right\}\leqslant 0. \tag{138}$$

Найдем

$$\alpha=\min_{u(\cdot)\in\widetilde{U}(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1} g'\gamma(\tau)\,u(\tau)\,d\tau. \tag{139}$$

Если $u(t)$ — решение (139), $x(t)$ — соответствующая траектория (136), то в силу теоремы Куна — Таккера [134] существует неотрицательная мера $d\mu(t)$, сосредоточенная на $\{t: e'x(t)=1\}$, такая, что

$$\int^{t_1} g'\gamma(\tau)u(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_1}(e'x(\tau)-1)\,d\bar{\mu}(\tau)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_0}^{t_1} g'\gamma(\tau)\,u(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_1}(e'x(\tau)-1)\,d\mu(\tau)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_0}^{t_1} g'\gamma(\tau)\,\bar{u}(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_1}(e'\bar{x}(\tau)-1)\,d\mu(\tau)$$

для всех $d\bar{\mu}\geqslant 0$, $\bar{u}(t)$, $|\bar{u}(t)|\leqslant 1$. Следовательно,

$$\alpha=\min_{u(\cdot)\in U(\cdot)}\ \max_{d\mu(\tau)\geqslant 0}\left\{\int_{t_0}^{t_1} g'\gamma(\tau)\,u(\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}(e'x(\tau)-1)\,d\mu(\tau)\right\}. \tag{140}$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t_1} e'F(\tau)\int_{t_1}^{\tau}\gamma(t)\,u(t)\,dt\,d\mu(\tau)=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\gamma'(t)\int_{t_0}^{t} F'(\tau)\,e'd\mu(\tau)\,u(t)\,dt,$$

то из (140) имеем

$$\alpha = \max_{d\mu \geqslant 0} \left\{ -\int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt - \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t) \right\}.$$

Итак, T-допустимое управление существует тогда и только тогда, когда

$$\left. \begin{aligned} &\Phi(t_1) = \max_{\|g\|=1,\ d\mu \geqslant 0} \Phi(t_1, g, d\mu) = \\ &\qquad\qquad = \Phi(t_1, g(t_1), d\mu_{t_1}) \leqslant 0, \\ &\Phi(t_1, g, d\mu) = \\ &= g'x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt - \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t). \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Лемма 10. Функция $\Phi(t)$ непрерывна слева в точке $t = t_1$, если $\Phi(t_1) \leqslant 0$.

Доказательство. Если $\Phi(t_1) \leqslant 0$, то существует T-допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$ вида

$$\tilde{u}(t) = -\operatorname{sign} \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right], \qquad (142)$$

переводящее траекторию в начало координат за время $\tau = t_1 - t_0$. По определению меры $d\mu$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $d\mu(\tau) = 0$ при $\tau \in (t_1 - \varepsilon, t_1]$. Пусть $t' \in (t_1 - \varepsilon, t_1]$. Обозначим через g, $d\mu$ и $\bar{g}$, $d\bar{\mu}$ решения задачи (141), соответствующие моментам времени t_1 и t'. Положим

$$d\mu'(t) = \begin{cases} d\bar{\mu}(t), & t \leqslant t', \\ 0, & t > t'. \end{cases}$$

Из (141) имеем

$$\Phi(t_1) \geqslant \bar{g}'x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[\bar{g} - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu'(\tau) \right] \right| dt - \int_{t_0}^{t_1} d\mu'(t),$$

$$\Phi(t') \geqslant g'x_0 - \int_{t_0}^{t'} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt - \int_{t_0}^{t'} d\mu(t).$$

Отсюда

$$\Phi(t') - \Phi(t_1) \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[\bar{g} - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu'(\tau) \right] \right| dt - \\ - \int_{t_0}^{t'} \left| \gamma'(t) \left[\bar{g} - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\bar{\mu}(\tau) \right] \right| dt,$$

$$\Phi(t') - \Phi(t_1) \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt - \\ - \int_{t_0}^{t'} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt.$$

Правые части этих неравенств стремятся к нулю при $t' \to t_1$. Утверждение доказано.

Запишем условия (141) в другой форме. Максимум в (141) достигается на элементах g таких, что $g'x_0 \geqslant 0$. Поэтому

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt + \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t) \right\} [g'x_0]^{-1} \geqslant 1$$

для всех g, $d\mu \geqslant 0$, $g'x_0 \geqslant 0$, т. е. T-допустимое управление существует тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(t_1) = \min_{g,\, d\mu \geqslant 0} \Psi(t_1, g, d\mu) = \\ &\qquad\qquad = \Psi(t_1, g(t_1), d\mu_{t_1}) \geqslant 1, \\ &\Psi(t_1, g, d\mu) = \\ &= \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau) \right] \right| dt + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t) \right\} [g'x_0]^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

Лемма 11. Пусть $\Psi(t_1) \geqslant 1$. Тогда $\Psi(t)$ непрерывна в точке $t = t_1$.

Доказательство. Из условия (143) следует существование T-допустимого управления (142). Пусть $t' \in (t_1 - \varepsilon, t_1]$, где ε выбрано, как в доказательстве леммы 10. Если g, $d\mu$, $\bar{g}$, $d\bar{\mu}$ — решения задачи (143) для моментов времени t_1 и t', то

$$|\Psi(t') - \Psi(t_1)| = \left| \left\{ \int_{t_0}^{t'} \left| \gamma'(t) \left[\bar{g} - \int_{t_0}^{t} F'(\tau) e \, d\bar{\mu}(\tau) \right] \right| dt + \int_{t_0}^{t'} d\bar{\mu}(t) \right\} [\bar{g}' x_0]^{-1} - \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau) e \, d\mu(\tau) \right] \right| dt + \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t) \right\} [g' x_0]^{-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t'}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau) e \, d\mu(\tau) \right] \right| dt \, [g' x_0]^{-1}.$$

Следовательно, $\Psi(t') \to \Psi(t_1)$ при $t' \to t_1$.

Пусть $t'' > t_1$. Положим

$$d\mu''(t) = \begin{cases} d\mu(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ 0 & t_1 < t \leqslant t''. \end{cases}$$

Тогда

$$|\Psi(t'') - \Psi(t_1)| \leqslant \left| \left\{ \int_{t_0}^{t''} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau) e \, d\mu''(\tau) \right] \right| dt + \int_{t_0}^{t''} d\mu''(t) - \int_{t_0}^{t_1} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau) e \, d\mu(\tau) \right] \right| dt - \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t) \right\} [g' x_0]^{-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t''} \left| \gamma'(t) \left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau) e \, d\mu(\tau) \right] \right| dt \, [g' x_0]^{-1}.$$

Поэтому $\Psi(t'') \to \Psi(t_1)$ при $t'' \to t_1 + 0$. Лемма доказана.

Примечание. Если $\Psi(t_1) \geqslant 1$, то $\Phi(t_1) \leqslant 0$. Обратный переход, проведенный выше, не вполне строг из-за возможности $g'x_0 = 0$. Последняя ситуация возникает, когда

$$\left|\gamma'(t)\left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau)\right]\right| \frac{d\mu(t)}{dt} \equiv 0. \tag{144}$$

В рассматриваемой задаче соотношение (144) не будет выполняться, если $x_0'e < 1$ и определяющее уравнение невырождено в точке $t = t_1$.

Теорема 28. Если существует хотя бы одно T-допустимое управление, то существует оптимальное управление со временем быстродействия $\tau^0 = t_1^0 - t_0$, где t_1^0 — наименьший корень уравнения

$$\Phi(t_1, g(t_1), d\mu_{t_1}) = 0 \qquad (\Psi(t_1, g(t_1), d\mu_{t_1}) = 1).$$

Оптимальное управление находится из соотношения

$$u^0(t) = -\operatorname{sign} c'(t)\,(F^{-1}(t))'\,\left[g(t_1^0) - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu_{t_1^0}(\tau)\right]. \tag{145}$$

Доказательство. Первая часть утверждения следует из лемм 10, 11 и неравенств (141), (143). Из (138), (140) получаем (145).

6. Минимизация среднеквадратичной ошибки [106]. Пусть движение управляемого объекта описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + b(t)\,u, \tag{146}$$

где x — n-вектор, u — скалярное управление; элементы матрицы $A(t)$, вектора $b(t)$ непрерывны по времени t. Зададим числа: t_1 — момент времени, $\delta > 0$ и точки $x_0 = x(t_0)$, x_1. Будем рассматривать на траекториях уравнения (146), исходящих при $t = t_0$ из точки x_0, функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [x'Mx + u^2]\, dt,$$

где M — данная диагональная матрица с зависящими от времени неотрицательными элементами — непрерывными функциями времени. Пусть функции $u(t)$, $t \in T$,

$T = [t_0, t_1]$, принадлежат классу $U(\cdot)$ функций, суммируемых с квадратом.

Задача. Найти управление $u^0(t)$ такое, что

$$J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} J(u)$$

и

$$\| x(t_1) - x_1 \| \leqslant \delta.$$

Как и выше, сначала запишем решение уравнения (146) по формуле Коши:

$$x(t) = F(t) F^{-1}(t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t) F^{-1}(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau,$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (146) при $u(t) \equiv 0$. Положим $t = t_1$ и введем обозначения:

$$s(t, x) = F(t) F^{-1}(t_0) x, \quad S(t, \tau) = F(t) F^{-1}(\tau) b(\tau),$$

$$Su(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, \tau) u(\cdot) d\tau$$

Траектория $x(t)$ в момент $t = t_1$ должна удовлетворять условиям

$$x(t_1) = s(t_1, x_0) + Su(\cdot), \quad \| x(t_1) - x_1 \| \leqslant \delta. \tag{147}$$

Пусть ε — некоторое положительное число. Рассмотрим соотношения (147) на тех функциях $u(t)$, $t \in T$, которые удовлетворяют неравенству

$$J(u) \leqslant \varepsilon. \tag{148}$$

Обозначим через $U_1(\cdot) \subset U(\cdot)$ класс функций $u(t)$, $t \in T$, для которых выполняется условие (148). Так как множество

$$\Omega = \{x\colon x = Su(\cdot),\ u(\cdot) \in U_1(\cdot)\}$$

выпукло и замкнуто, то, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 22 (п. 2), приходим к выводу: соотношения (147) при ограничении (148) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\Lambda = \max_{\|g\|=1} [g's(t_1, x_0) - g'x_1 - \delta \|g\| + \\ + \min_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} g'Su(\cdot)] \leqslant 0. \tag{149}$$

Найдем $\min g'Su(\cdot)$ при условии (148). Так как этот минимум достигается на том же элементе, что и безусловный минимум функционала $g'Su(\cdot) + \lambda J(u)$, где число λ определяется из условия (148), то поступаем следующим образом. Сначала преобразуем $J(u)$. Подставим

$$x(\tau) = F(\tau) F^{-1}(t_0) x_0 + \int_{t_0}^{\tau} S(\tau, t) u(t)\, dt$$

в выражение для $J(u)$ и изменим порядок интегрирования. Тогда выражение для $J(u)$ примет вид

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t) u(\tau)\, d\tau + u(t) \right] u(t)\, dt + \\ + 2\int_{t_0}^{t_1} u(t) n'(t) x_0\, dt + \int_{t_0}^{t_1} s'(t, x_0) Ms(t, x_0)\, dt, \quad (150)$$

где

$$n(t) = \int_{t}^{t_1} (F^{-1}(t_0))' F'(\tau) MS(\tau, t)\, d\tau,$$

$$K(\tau, t) = \begin{cases} \int_{t}^{t_1} S'(\vartheta, \tau) MS(\vartheta, t)\, d\vartheta, & t \geqslant \tau, \\ \int_{\tau}^{t_1} S'(\vartheta, \tau) MS(\vartheta, t)\, d\vartheta, & t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Обозначим через $L(u)$ выражение $L(u) = g'Su(\cdot) + \lambda J(u)$ Имеем

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t) u(t)\, dt + \\ + \lambda \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t) u(\tau)\, d\tau + u(t) \right] u(t)\, dt + \right. \\ \left. + 2\int_{t_0}^{t_1} u(t) n'(t) x_0\, dt + \int_{t_0}^{t_1} s'(t, x_0) Ms(t, x_0)\, dt \right\}.$$

Первая вариация δL функционала $L(u)$ имеет вид

$$\delta L = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ g'S(t_1, t) + \\ + 2\lambda \Big[n'(t)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\, v(\tau)\, d\tau + v(t) \Big] \Big\}\, \delta u(t)\, dt.$$

Пусть $v(\cdot) \in U(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$L(v) = \max_{u(\cdot) \in U(\cdot)} L(u).$$

Из условия экстремальности функционала $L(v)$ должно быть $\delta L = 0$, откуда в силу основной леммы вариационного исчисления получаем

$$v(t) + \int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\, v(\tau)\, d\tau = -\frac{1}{2\lambda}\, g'S(t_1, t) - n'(t)\, x_0, \quad (151)$$

где множитель λ определяется из условия (148). Таким образом, для нахождения экстремального управления $v(t)$ получено интегральное уравнение (151), где λ должно вычисляться на основании (148). Ядро $K(\tau, t)$ уравнения (151) таково, что $K(\tau, t) = K(t, \tau)$ и

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} | K(\tau, t) |^2\, dt\, d\tau < \infty.$$

Относительно свойств решения интегрального уравнения могут быть сделаны следующие утверждения.

1. Решение интегрального уравнения

$$u(t) + \int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\, u(\tau)\, d\tau = f(t)$$

существует и единственно для любой (суммируемой с квадратом) функции $f(t) \not\equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда согласно альтернативе Фредгольма [96] однородное уравнение ($f(t) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения. Пусть $\tilde{u}(t) \not\equiv 0$ — одно такое решение. Умножим обе части этого уравнения, где $f(t) \equiv 0$, на $\tilde{u}(t)$ и проинтегрируем по t

от t_0 до t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\tilde{u}(\tau)\,d\tau + \tilde{u}(t)\right]\tilde{u}(t)\,dt = 0.$$

Левая часть полученного соотношения равна $J(\tilde{u})$ при $x_0 = 0$, что легко следует из (150) при $u = \tilde{u}$ и $x_0 = 0$. Но всегда $J(\tilde{u}) > 0$, $\tilde{u}(\cdot) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

2. Решение уравнения (151) записывается в виде

$$v(t) = -\frac{1}{2\lambda} v_1(t) - v_2(t), \quad v_1(t) = g'z(t), \quad v_2(t) = y'(t)\,x_0,$$

где векторы $z(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют соответственно следующим интегральным уравнениям:

$$z(t) + \int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\,z(\tau)\,d\tau = S(t_1, t),$$

$$y(t) + \int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\,y(\tau)\,d\tau = n(t).$$

Доказательство этого утверждения следует из принципа суперпозиции, так как уравнение (150) линейно по v. Предположим, что решения $z(t)$, $y(t)$ известны. Подставим выражение для $v(t)$ в условие (148) с тем, чтобы получить в явном виде ограничение на величину λ. Это ограничение имеет вид

$$J(u) = \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 + c + d \leqslant \varepsilon^2, \tag{152}$$

где

$$a^2 = \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\,v_1(\tau)\,d\tau + v_1(t)\right] v_1(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} g'z(t)\,g'S(t_1, t)\,dt,$$

$$c = -\int_{t_0}^{t_1} v_2(t)\,n'(t)\,x_0\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} y'(t)\,x_0 n'(t)\,x_0\,dt,$$

$$d = \int_{t_0}^{t_1} s'(t, x_0)\,M s(t, x_0)\,dt.$$

Можно показать, что

$$a^2 = J(v_1)\big|_{x_0=0} = J(-v_1)\big|_{x_0=0}, \quad \frac{a^2}{4\lambda^2} = J\left(-\frac{1}{2\lambda}v_1\right)\Big|_{x_0=0},$$

$$c + d = J(-v_2).$$

Очевидно, что решение v задачи

$$\max_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} g'Su(\cdot) = g'Sv(\cdot) \tag{153}$$

существует тогда и только тогда, когда $c + d < \varepsilon^2$. Выполнение условия (149) необходимо влечет существование решения задачи (153); поэтому, если условие (149) выполнено, то имеет место условие $c + d < \varepsilon^2$. Тогда получаем

$$\lambda = \lambda^* = -\frac{|a|}{2\sqrt{\varepsilon^2 - c - d}}.$$

Действительно,

$$\max_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} g'Su(\cdot) = g'Sv(\cdot) = -\frac{1}{2\lambda} g'Sv_1(\cdot) - g'Sv_2(\cdot),$$

$$g'Sv_1(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, v_1(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, g'z(t)\, dt = a^2,$$

$$g'Sv_2(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, y'(t)\, x_0\, dt.$$

Поэтому

$$g'Sv(\cdot) = -\frac{a^2}{2\lambda} - \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, y'(t)\, x_0\, dt,$$

где λ определяется из (152). Таким образом, задача максимизации функционала $g'Su(\cdot)$ по $u(\cdot)\in U_1(\cdot)$ свелась после нахождения вида $v(\cdot)$ к задаче нахождения $\max\limits_{\lambda} g'Sv(\cdot)$ или $\max\limits_{\lambda}(-a^2/2\lambda)$ при условии (152) (член $g'Sv_2(\cdot)$ от λ не зависит). Очевидно, $\max\limits_{\lambda}(-a^2/2\lambda)$ в силу положительности a^2 достигается в точке $\lambda = \lambda^*$. Так как вторая вариация $\delta^2 L$ функционала $L(u)$ имеет вид

$$\delta^2 L = 2\lambda \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} K(\tau, t)\, \delta u(\tau)\, d\tau + \delta u(t)\right] \delta u(t)\, dt$$

или, с учетом (150), $\delta^2 L = 2\lambda J(\delta u)|_{x_0=0}$; $\lambda < 0$; $J(\delta u)|_{x_0=0} > 0$ всегда, если $\delta u(t) \not\equiv 0$, то $\delta^2 L < 0$. Следовательно, $g'Sv(\cdot) = \max\limits_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} g'Su(\cdot)$.

На основе полученных результатов выпишем окончательное выражение для $g'Sv(\cdot)$:

$$\max_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} g'Su(\cdot) = g'Sv(\cdot) = \\ = (\varepsilon^2 - c - d)^{1/2}\left[\int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, g'z(t)\, dt\right]^{1/2} - \\ - \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, y'(t)\, x_0\, dt.$$

Примечание. Условие $c + d < \varepsilon^2$ выделяет в пространстве E_n множество Δ тех начальных данных x_0, для которых имеет решение задача (153), т. е. класс $U_1(\cdot)$ управлений $u(t)$, удовлетворяющих условию (148), при любом $x_0 \in \Delta$ не пуст. При этом $J(v)|_{x_0} = \varepsilon^2$, что следует из (152), куда подставлено значение λ^*. Величина $c + d$ — квадратичная форма от x_{i_0}, $i = 1, \ldots, n$, и так как $c + d = J(-v_2)$, а $J(-v_2) > 0$, $\| x_0 \| \neq 0$, то условие $c + d < \varepsilon^2$ выделяет в пространстве E_n открытый эллипсоид.

Подставим полученное для $g'Sv(\cdot)$ выражение в (149). Тогда условие (149) примет вид

$$\Lambda = \max_{\|g\|=1} \Big\{ g's(t_1, x_0) - g'x_1 - \delta \|g\| - \\ - (\varepsilon^2 - c - d)^{1/2}\left[\int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, g'z(t)\, dt\right]^{1/2} + \\ + \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, y'(t)\, x_0\, dt \Big\} \leqslant 0.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= (\varepsilon^2 - c - d)^{1/2}, \\ \bar{x} &= s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, t)\, y'(t)\, x_0\, dt, \quad q = -x_1 + \bar{x}. \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

Тогда

$$\Lambda = \max_{\|g\|=1} \left\{ g'q - \delta \|g\| - \mu \left[\int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\, g'z(t)\, dt \right]^{1/2} \right\} \leqslant 0. \qquad (155)$$

Нетрудно показать, что (155) является условием разрешимости задачи (147), (148) при $x_0 = 0$, $x_1 = q$ в классе $U_\mu(\cdot)$ управлений $u(\cdot)$ таких, что $J(u) \leqslant \mu^2$. Назовем такую задачу задачей A. Из предыдущего следует, что если условие (149) выполнено, то выполнено и условие (155), где μ, q определяются формулами (154). Очевидно, справедливо и обратное: если условие (155) выполнено и если x_0, x_1 и ε таковы, что имеют место соотношения (154), то условие (149) также выполнено. Таким образом, пришли к следующему утверждению: задача (147), (148) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача A, если x_0, x_1, ε, μ, q связаны формулами (154).

Нетрудно видеть, что задача минимизации среднеквадратичной ошибки при переходе системы (146) из точки x_0 в δ-окрестность точки x_1 сводится к задаче минимизации среднеквадратичной ошибки при переходе системы (146) из точки $x = 0$ в δ-окрестность точки q.

Перейдем теперь к изучению задачи оптимального управления. Обозначим через ε^0 минимальное из чисел ε, удовлетворяющих (149), через $U^0(\cdot)$ — класс допустимых управлений такой, что $J(u) \leqslant \varepsilon^0$.

Теорема 29. Минимальное значение ε, $\varepsilon = \varepsilon^0$, существует и единственно. Если g_0 — решение задачи (149) при $\varepsilon = \varepsilon^0$, то оптимальное управление $u^0(t)$ определяется из условия

$$g_0'Su^0(\cdot) = \max_{u(\cdot)\in U^0(\cdot)} g_0'Su(\cdot)$$

и равно

$$u^0(t) = -\frac{1}{2\lambda_0} v_1^0(t) - v_2(t),$$

где

$$v_1^0(t) = g_0'z(t), \qquad \lambda_0 = \frac{\left[\int_{t_0}^{t_1} g_0'z(t)\, g_0'S(t_1, t)\, dt\right]^{1/2}}{2\left[(\varepsilon^0)^2 - c - d\right]^{1/2}},$$

$x^0(t_1)$ удовлетворяет условию $g_0'(x^0(t_1) - x^1) = -\delta \|g_0\|$.

Доказательство. Задача минимизации ε эквивалентна задаче минимизации μ (см. (154), (155)). Рассмотрим поэтому условие (155), куда μ входит так же, как и δ. Это означает, что λ из (155) при фиксированных t_1, δ, q — монотонно убывающая и непрерывная функция μ, причем $\lambda\,|_{x_0=0} > 0$ всегда. Так что минимальное значение $\mu = \mu^0$ существует и определяется из условия $\lambda\,|_{\mu=\mu^0} = 0$. Нетрудно показать, что

$$\mu^0 = [(\varepsilon^0)^2 - c - d]^{1/2} = \max_{\|g\|=1} \frac{g'q - \delta\,\|g\|}{\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, t)\,g'z(t)\,dt\right]^{1/2}}.$$

На этом доказательство теоремы завершается.

7. Задача оптимального управления в системах с последействием. Пусть движение объекта описывается дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h) + B(t)\,u(t). \qquad (156)$$

Здесь x — n-вектор, определенный в пространстве E_n; $u(t)$ — n-вектор управления — кусочно-непрерывная функция, принадлежащая множеству допустимых управлений $U(\cdot)$; $A(t)$, $A_1(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матричные функции, причем $B(t)$ — неособая при всех t, $t \in T = [t_0, t_1]$; h, $h > 0$,— постоянное запаздывание. Заданы начальные условия: вектор-функция $\Phi(t)$ со значениями в E_n, $x(t) \equiv \Phi(t)$ при $t_0 - h \leqslant t < t_0$ и вектор $x_0 = x(t_0)$.

По аналогии с п. 4 определим T-допустимое управление как такую функцию $u(t)$, $t \in T$, при которой траектория (156) удовлетворяет условию

$$x(t) \equiv 0, \qquad t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1. \qquad (157)$$

В пространстве E_n рассмотрим множество G векторов

$$s = s(t_1 - h, x_0(\cdot)) = \int\limits_{t_0-h}^{t_0} F(t_1 - h, \tau + h)\,A_1(\tau + h)\,\Phi(\tau)\,d\tau + F(t_1 - h, t_0)x_0.$$

Здесь $F(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения, соответствующего (156), причем

$F(\tau, \tau) = E$, $F(t, \tau) = 0$, если $\tau > t$. Множество G_1, $G_1 \subset G$, векторов s, образованных с помощью функций $\Phi(t)$ и векторов x_0, для которых существуют T-допустимые управления, есть область достижимости. Обозначим через $U_1(\cdot)$, $U_1(\cdot) \subset U(\cdot)$, множество T-допустимых управлений. Множество G_1 выпукло. Действительно, по определению множества G_1, если $s \in G_1$, то для него найдется такое $u(\cdot) \in U_1(\cdot)$, что $x(t) \equiv 0$ при $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$, где

$$x(t) = s(t, x_0(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим два элемента множества G_1: s_1 и s_2 — и соответствующие им управления $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$. Покажем, что элемент $s = \alpha s_1 + (1 - \alpha) s_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, также принадлежит множеству G_1, причем соответствующее ему управление, обеспечивающее выполнение условия (157), имеет вид

$$u(t) = \alpha u_1(t) + (1 - \alpha) u_2(t).$$

В самом деле,

$$x(t) = s(t, x_0(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$= \alpha \left[s(t, x_{10}(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau) B(\tau) u_1(\tau) d\tau\right] +$$

$$+ (1 - \alpha) \left[s(t, x_{20}(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau) B(\tau) u_2(\tau) d\tau\right] =$$

$$= \alpha x_1(t) + (1 - \alpha) x_2(t).$$

Но так как $x_1(t) \equiv 0$ и $x_2(t) \equiv 0$ при $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$, то и $x(t) \equiv 0$ при $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$. Выпуклость множества доказана. Из уравнения (156) и условия (157) следует, что каждое T-допустимое управление $u(t)$ на интервале $t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1$ имеет вид

$$u(t) = -B^{-1}(t) \boldsymbol{A}_1(t) x(t - h).$$

Теорема 30. T-допустимое управление существует *) тогда и только тогда, когда

$$\max_{\|g\|=1}\left\{g's(t_1-h,\,x_0(\cdot))+\inf_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1-h} g'F(t_1-h,\,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right\}\leqslant 0. \quad (158)$$

Доказательство проведем по схеме п. 2. *Необходимость.* Пусть управление $u=u(t)$, $u(\cdot)\in U(\cdot)$, при заданных x_0, $\Phi(t)$, t_1 и h обеспечивает выполнение условия (157). Докажем, что выполнено неравенство (158). По условию (157) траектория, которая порождается управлением $u(t)$, в момент $t=t_1-h$ приходит в начало координат, т. е. $x(t_1-h)=0$, или

$$s(t_1-h,\;x_0(\cdot))+\int_{t_0}^{t_1-h} F(t_1-h,\;\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau=0.$$

Умножим скалярно все члены равенства на произвольный вектор g, $\|g\|=1$. Имеем

$$g's(t_1-h,\,x_0(\cdot))+\int_{t_0}^{t_1-h} g'F(t_1-h,\,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau=0.$$

Рассмотрим функционал

$$P(u)=g's(t_1-h,\,x_0(\cdot))+\int_{t_0}^{t_1-h} g'F(t_1-h,\,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

на множестве функций $u(\cdot)\in U_1(\cdot)$. Так как заданное управление $u(\cdot)\in U_1(\cdot)$ и $P(u)=0$, то $\inf\limits_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} P(u)\leqslant 0$. Но последнее неравенство выполнено для произвольного вектора g, $\|g\|=1$; следовательно,

$$\max_{\|g\|=1}\{g's(t_1-h,\,x_0(\cdot))+\inf_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1-h} g'F(t_1-h,\,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\}\leqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

---

*) Допускаются и обобщенные оптимальные управления.

Достаточность. Пусть для заданных x_0, $\Phi(t)$, t_1 выполнено условие (158). Докажем, что существует хотя бы одно управление $u(t)$, $u(\cdot) \in U_1(\cdot)$, обеспечивающее выполнение условия (157).

Предположим противное: не существует ни одного управления $u(t)$, $u(\cdot) \in U_1(\cdot)$, такого, чтобы для траектории, порожденной этим управлением, выполнялось условие (157). Это означает, что вектор $s(t_1 - h, x_0(\cdot))$ при заданных x_0 и $\Phi(t)$ не принадлежит замыканию $\overline{G_1}$ области достижимости G_1. Тогда в силу выпуклости множества $\overline{G_1}$ существует такая гиперплоскость и вектор g, $\| g \| = 1$, нормальный к этой гиперплоскости, что неравенство

$$g's(t_1 - h, x_0(\cdot)) > g's$$

выполнено для всех $s \in \overline{G_1}$. Но так как s — точка области достижимости, то для нее существует такое управление $u(t)$, $u(\cdot) \in U_1(\cdot)$, что

$$s + \int_{t_0}^{t_1 - h} F(t_1 - h, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = 0.$$

Отсюда

$$s = - \int_{t_0}^{t_1 - h} F(t_1 - h, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$g's(t_1 - h, x_0(\cdot)) + \int_{t_0}^{t_1 - h} g'F(t_1 - h, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau > 0.$$

Поскольку s — произвольная точка множества G_1, то последнее неравенство выполнено для всех $u(\cdot) \in U_1(\cdot)$; поэтому

$$g's(t_1 - h, x_0(\cdot)) + \inf_{u(\cdot) \in U_1(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1 - h} g'F(t_1 - h, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau > 0.$$

По условию теоремы для заданных x_0 и $\Phi(t)$ выполнено неравенство (158), что означает, что для любого вектора $\bar{g}$, $\|\bar{g}\|=1$, имеет место неравенство

$$\bar{g}'s(t_1-h,\ x_0(\cdot))+\inf_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1-h}\bar{g}'F(t_1-h,\ \tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\leqslant 0.$$

Однако нам удалось построить вектор g, $\|g\|=1$, для которого выполнено неравенство противоположного смысла. Это противоречие и доказывает теорему.

В дальнейшем будем считать, что множество $U(\cdot)$ допустимых управлений имеет вид

$$U(\cdot)=\left\{u(\cdot)\colon \int_{t_0}^{t_1}u'(t)\,u(t)\,dt\leqslant 1\right\}. \tag{159}$$

Запишем условие (158) в другой форме:

$$\max_{\|g\|=1}\{g's(t_1-h,\ x_0(\cdot))+\mu(g)\}\leqslant 0,$$

$$\mu(g)=\inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)}\mu(g,\ u)=$$
$$=\inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)}\int_{t_0}^{t_1-h}g'F(t_1-h,\ \tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

при условии

$$\int_{t_0}^{t_1-h}u'(t)\,u(t)\,dt+$$
$$+\int_{t_1-h}^{t_1}[B^{-1}(t)\,A_1x(t-h)]'\,B^{-1}(t)\,A_1(t)\,x(t-h)\,dt\leqslant 1.$$

Преобразуем последнее неравенство, заменив $x(t-h)$ по формуле Коши (§ 1.15):

$$\int_{t_0}^{t_1-h}u'(t)\,u(t)\,dt+\int_{t_1-h}^{t_1}\Big[B^{-1}(t)\,A_1(t)\,\Big\{s(t-h,\ x_0(\cdot))+$$
$$+\int_{t_0}^{t-h}F(t-h,\ \tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\Big\}\Big]'\,B^{-1}(t)\,A_1(t)\,\Big\{s(t-h,\ x_0(\cdot))+$$
$$+\int_{t_0}^{t-h}F(t-h,\ \tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\Big\}\,dt\leqslant 1.$$

Раскрыв скобки во втором интеграле и изменив порядок интегрирования, получим

$$\int_{t_0}^{t_1-h} u'(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + N + 2\int_{t_0}^{t_1-h} f'(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t_1-h}\int_{t_0}^{t_1-h} u'(\tau)\,\Phi(\tau,\theta)\,u(\theta)\,d\theta\,d\tau \leqslant 1.$$

Здесь

$$N = \int_{t_1-2h}^{t_1-h} [B^{-1}(t+h)\,A_1(t+h)\,s(t, x_0(\cdot))]' \times \\ \times B^{-1}(t+h)\,A_1(t+h)\,s(t, x_0(\cdot))\,dt,$$

$$f(\tau) = \int_{t_1-2h}^{t_1-h} [B^{-1}(t+h)\,A_1(t+h)\,F(t,\tau)\,B(\tau)]' \times \\ \times B^{-1}(t+h)\,A_1(t+h)\,s(t, x_0(\cdot))\,dt,$$

$$\Phi(\tau,\theta) = \int_{t_1-2h}^{t_1-h} [B^{-1}(t+h)\,A_1(t+h)\,F(t,\tau)\,B(\tau)]' \times \\ \times B^{-1}(t+h)\,A_1(t+h)\,F(t,\theta)\,B(\theta)\,dt.$$

Вводя множитель Лагранжа, перейдем к задаче на безусловный экстремум. Будем искать минимум функционала $\Lambda(u)$:

$$\Lambda(u) = \int_{t_0}^{t_1-h} g'F(t_1-h,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + \\ + \lambda\Big[\int_{t_0}^{t_1-h} u'(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + N + 2\int_{t_0}^{t_1-h} f'(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t_1-h}\int_{t_0}^{t_1-h} u'(\tau)\,\Phi(\tau,\theta)\,u(\theta)\,d\theta\,d\tau\Big].$$

Вычислим вариацию функционала

$$\delta\Lambda(u) = \frac{\partial\Lambda(u+\alpha v)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1-h} v'(\tau)\,L(\tau)\,g + \\ + \lambda v'(\tau)\Big[2u(\tau) + 2f(\tau) + \int_{t_0}^{t_1-h} K(\tau,\theta)\,u(\theta)\,d\theta\Big]\,d\tau,$$

где

$$L(\tau)=[F(t_1-h,\ \tau)B(\tau)]',\qquad K(\tau,\ \theta)=\Phi(\tau,\ \theta)+\Phi'(\theta,\ \tau).$$

Так как вариация функционала $\delta\Lambda(u)$ должна быть равна нулю для любых значений вариации функции, то

$$L(\tau)g+\lambda\left[2u(\tau)+2f(\tau)+\int_{t_0}^{t_1-h}K(\tau,\ \theta)u(\theta)\,d\theta\right]=0.$$

Решение полученного интегрального уравнения можно представить в виде суммы двух решений

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=u_1(t)+\frac{1}{\lambda}R(t)g,$$

причем вектор $u_1(t)$ и матрица $R(t)$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$2u_1(t)+2f(t)+\int_{t_0}^{t_1-h}K(t,\ \theta)u_1(\theta)\,d\theta=0 \tag{160}$$

и

$$2R(t)+L(t)+\int_{t_0}^{t_1-h}K(t,\ \theta)R(\theta)\,d\theta=0. \tag{161}$$

Множитель λ найдем из условия, чтобы найденное управление принадлежало множеству $U_1(\cdot)$. Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1-h}\left[u_1(\tau)+\frac{1}{\lambda}R(\tau)g\right]'\left[u_1(\tau)+\frac{1}{\lambda}R(\tau)g\right]d\tau+N+$$
$$+2\int_{t_0}^{t_1-h}f'(\tau)\left[u_1(\tau)+\frac{1}{\lambda}R(\tau)g\right]d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1-h}\int_{t_0}^{t_1-h}\left[u_1(\tau)+\frac{1}{\lambda}R(\tau)g\right]'\times$$
$$\times\Phi(\tau,\ \theta)\left[u_1(\theta)+\frac{1}{\lambda}R(\theta)g\right]d\theta\,d\tau=1.$$

Отсюда для λ получаем алгебраическое уравнение

$$a\frac{1}{\lambda^2}+2b\frac{1}{\lambda}+c=0. \tag{162}$$

Здесь

$$a = \int_{t_0}^{t_1-h} g'R'(\tau) R(\tau) g \, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1-h} \int_{t_0}^{t_1-h} g'R'(\tau) \Phi(\tau, \theta) R(\theta) g \, d\theta \, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1-h} L'(\tau) R(\tau) g \, d\tau,$$

$$b = \int_{t_0}^{t_1-h} u_1'(\tau) R(\tau) g \, d\tau + \int_{t_0}^{t_1-h} f'(\tau) R(\tau) g \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1-h} \int_{t_0}^{t_1-h} g'R'(\tau) K(\tau, \theta) u_1(\theta) \, d\theta \, d\tau = 0,$$

$$c = \int_{t_0}^{t_1-h} u_1'(\tau) u_1(\tau) \, d\tau + N + 2 \int_{t_0}^{t_1-h} f'(\tau) u_1(\tau) \, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1-h} \int_{t_0}^{t_1-h} u_1'(\tau) \Phi(\tau, \theta) u_1(\theta) \, d\theta \, d\tau - 1 =$$

$$= N - 1 + \int_{t_0}^{t_1-h} f'(\tau) u_1(\tau) \, d\tau.$$

Из двух корней уравнения (162) конечный минимум функционалу $\Lambda(u)$ доставляет положительный корень. Итак, условие (158) для множества допустимых управлений (159) имеет вид

$$\max_{\|g\|=1} \left\{ g's(t_1 - h, x_0(\cdot)) + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1-h} g'F(t_1 - h, \tau) B(\tau) u(\tau, g) \, d\tau \right\} \leqslant 0 \quad (163)$$

или, короче,

$$\max_{\|g\|=1} \Psi(g, t_1) \leqslant 0.$$

Здесь

$$u(\tau, g) = u_1(\tau) + \frac{1}{\lambda} R(\tau) g,$$

причем $u_1(\tau)$ и $R(\tau)$ — решения интегральных уравнений (160) и (161), а λ — положительный корень уравнения (162).

Задача. В классе допустимых управлений найти управление $u^0(t)$, которое для заданных x_0, $\Phi(t)$ решает задачу (157) за минимальное время.

Управление $u^0(t)$ будем называть *оптимальным*, а время t_1^0 переходного процесса, соответствующего этому управлению, — *временем быстродействия*.

Из теоремы 30 следует

Теорема 31. Время быстродействия t_1^0 является наименьшим числом, для которого выполнено неравенство (163). Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется соотношением

$$u^0(t) = \begin{cases} u(t, g_0), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1^0 - h, \\ -B^{-1}(t) A_1(t) x^0(t-h), & t_1^0 - h \leqslant t \leqslant t_1^0, \end{cases}$$

где g_0 — элемент, на котором достигается максимум функции $\Psi(g_1\ t_1^0)$.

Пример 7.

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}(t) = -x(t-1) + u(t), \\ \Phi(t) \equiv 0, \quad &-1 \leqslant t < 0, \quad x(0) = 10, \quad t_1 = 3, \\ &\int_0^3 u^2(t)\, dt \leqslant M. \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Для упрощения вычислений вместо задачи быстродействия рассмотрим другую задачу, непосредственно связанную с первой. Найти такое управление из класса допустимых, чтобы траектория, соответствующая заданным начальным условиям и выбранному управлению, удовлетворяла условию $x(t) \equiv 0$, $2 \leqslant t \leqslant 3$, а функционал $\int_0^3 u^2(t)\, dt$ достигал минимума.

Запишем решение уравнения (164) с помощью формулы Коши, найдем $u(t, g)$ через интегральные уравнения (160), (161), вычислим множитель λ. В результате убеждаемся, что оптимальное управление имеет вид

$$u^0(\tau)=\begin{cases} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(2{,}6521\sin\frac{\tau}{2}-2{,}5115\cos\frac{\tau}{2}\right)- \\ \quad -e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(2{,}3118\sin\frac{\tau}{2}+4{,}6325\cos\frac{\tau}{2}\right), & 0\leqslant\tau\leqslant1; \\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(1{,}1407\sin\frac{\tau}{2}-1{,}0301\cos\frac{\tau}{2}\right)+ \\ \quad +e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(12{,}2625\sin\frac{\tau}{2}+1{,}0359\cos\frac{\tau}{2}\right), & 1\leqslant\tau\leqslant2; \\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(0{,}4901\sin\frac{\tau}{2}-0{,}4219\cos\frac{\tau}{2}\right)- \\ \quad -e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(17{,}2647\sin\frac{\tau}{2}-23{,}6179\cos\frac{\tau}{2}\right)- \\ \quad -8{,}3334\tau+19{,}9980, & 2\leqslant\tau\leqslant3. \end{cases}$$

8. Статистические задачи оптимального управления. Различные применения теоремы об отделимости выпуклых множеств находим при исследовании задач оптимизации систем, поведение которых усложняется действием случайных сил. Эти вопросы подробно рассматриваются в § 15.

9. Задачи преследования. До сих пор рассматривались ситуации, в которых не предполагалось наличие антагонистических целей, определяющих поведение системы. В теории дифференциальных игр изучаются задачи оптимального управления динамическими системами в тех случаях, когда присутствуют стороны с антагонистическими целями. Развитие методов функционального анализа на этот новый круг вопросов обсуждается в § 16.

§ 11. L-проблема моментов в теории оптимальных процессов

В этом параграфе для решения некоторых задач теории оптимальных процессов привлекается одна из фундаментальных теорем функционального анализа (теорема Хана — Банаха о распространении линейной операции

[46]) в ее конкретном приложении к L-проблеме моментов [4], которая сыграла видную роль в первые годы развития теории оптимальных процессов [74n]. Для формулировки и понимания существа L-проблемы требуются определенные знания из теории линейных нормированных пространств. Не стоит, однако, преувеличивать трудностей, связанных с новым кругом вопросов. При желании все рассмотренные ниже задачи можно сформулировать и решить в терминах конечномерного пространства. Мы так и поступим. Сначала дадим традиционную постановку L-проблемы моментов, затем переформулируем ее в терминах конечномерного пространства и, наконец, решим эту проблему, используя уже доказанные ранее факты.

1. L-проблема моментов и ее решение. В линейном нормированном пространстве $E(\cdot)$ заданы линейно независимые элементы $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$. Найти такие необходимые и достаточные условия для чисел $c_1, \ldots, c_n$, L $(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0,\ L > 0)$, чтобы существовал линейный функционал $f(\cdot)$, удовлетворяющий соотношениям

$$f(x_i(\cdot)) = c_i, \quad \|f\| \leqslant L, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{165}$$

Дадим этой проблеме другую формулировку. Числа $c_1, \ldots, c_n$ можно трактовать как компоненты вектора c из n-мерного пространства E_n. Тогда значения $x_i = f(x_i(\cdot))$, $i = 1, \ldots, n$, которые функционал $f(\cdot)$ принимает на заданных элементах $x_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$, нормированного пространства $E(\cdot)$, суть компоненты n-вектора $x \in E_n$. Разным линейным функционалам f соответствуют разные векторы $x \in E_n$. Обозначим через $R(L)$ множество

$$R(L) = \{x\colon\ x = f(x(\cdot)),\ \|f\| \leqslant L\}$$

n-векторов x, порожденных линейными функционалами $f(\cdot)$, $f(\cdot) \in E'(\cdot)$, определенными на заданном элементе $x(\cdot) = \{x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)\}$ и лежащими в шаре $\|f(\cdot)\| \leqslant L$. Соотношение $x = f(x(\cdot))$ теперь можно трактовать и как оператор, который функционалы $f(\cdot) \in E'(\cdot)$ переводит в векторы $x \in E_n$. Понятно, что L-проблема моментов (165) имеет решение тогда и только тогда, когда множество $R(L)$ конечномерного пространства E_n содержит вектор c.

Покажем, что $R(L)$ — выпуклое множество. Действительно, пусть x и y — произвольные точки этого множества, т. е. для некоторых линейных функционалов $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, $\| f(\cdot) \| \leqslant L$, $\| g(\cdot) \| \leqslant L$, выполняются равенства $f(x(\cdot)) = x$, $g(x(\cdot)) = y$. Тогда любая точка $x^\lambda = \lambda x + (1-\lambda) y$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, отрезка, соединяющего точки x, y, также принадлежит $R(L)$. В самом деле, функционал $f_\lambda(\cdot) = \lambda f(\cdot) + (1-\lambda) g(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $\| f_\lambda(\cdot) \| = \| \lambda f(\cdot) + (1-\lambda) g(\cdot) \| \leqslant \lambda \| f(\cdot) \| + (1-\lambda) \| g(\cdot) \| \leqslant L$, а его значение на $x(\cdot)$ (в силу линейности операции) $f_\lambda(x(\cdot)) = [\lambda f(\cdot) + (1-\lambda) g(\cdot)] (x(\cdot)) = \lambda x + (1-\lambda) y$, что равносильно сделанному нами утверждению.

В качестве множества Q, фигурирующего в §§ 9, 10, примем множество, состоящее из одной точки c. Теперь уже очевидно, что к проблеме (165) в новой трактовке можно применить теорему о минимаксе или теорему об отделимости выпуклых множеств. Множество $R(L)$ будет содержать точку c тогда и только тогда, когда его расстояние до точки c

$$\rho = \inf_{x \in R(L)} \| c - x \|$$

равно нулю. Вспоминая, что $\| x \| = \max\limits_{\|g\| \leqslant 1} g'x$, и используя теорему о минимаксе, имеем

$$\rho = \inf_{x \in R(L)} \max_{\|g\| \leqslant 1} g'(c-x) = \max_{\|g\| \leqslant 1} \inf_{x \in R(L)} g'(c-x) =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant 1} \inf_{\|f\| \leqslant L} g'(c - f(x(\cdot))) = \max_{\|g\| \leqslant 1} [g'c - \sup_{\|f\| \leqslant L} g' f(x(\cdot))] =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant 1} [g'c - \sup_{\|f\| \leqslant L} f(g'x(\cdot))]. \quad (166)$$

По определению величина $\sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} f(x(\cdot))$ есть норма элемента $x(\cdot) \in E(\cdot)$:

$$\| x(\cdot) \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} f(x(\cdot)). \quad (167)$$

Выражение $g'x(\cdot)=\sum\limits_{i=1}^{n} g_i x_i(\cdot)$ представляет элемент из $E(\cdot)$. Поэтому (и в силу линейности функционала)

$$\sup_{\|f(\cdot)\|\leqslant L} f(g'x(\cdot))=L\|g'x(\cdot)\|. \tag{168}$$

Подставляя это выражение в (166), получим необходимое и достаточное условие разрешимости L-проблемы моментов:

$$\rho(L)=\max_{\|g\|\leqslant 1}\{g'c-L\|g'x(\cdot)\|\}=0.$$

Если элементы $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ линейно независимы (что предполагается в формулировке L-проблемы), то $\|g'x(\cdot)\|\neq 0$ для всех $\|g\|\neq 0$. Из этого условия и из того, что $g'c-L\|g'x(\cdot)\|$ монотонно убывает по L, нетрудно показать, что минимальное L, при котором $\rho(L)=0$, равно

$$\lambda=\max_{\|g\|\leqslant 1}\frac{g'c}{\|g'x(\cdot)\|}.$$

Из однородности по g числителя и знаменателя следует, что

$$\lambda=\max_{g}\frac{g'c}{\|g'x(\cdot)\|}=\max_{\|g'x(\cdot)\|=1} g'c,$$

или

$$\frac{1}{\lambda}=\min_{g'c=1}\|g'x(\cdot)\|. \tag{169}$$

Основное предложение теории L-проблемы моментов. Задача (165) имеет решение тогда и только тогда, когда $L\geqslant\lambda$, где величина λ определяется из решения конечномерной задачи (169).

Из метода доказательства находятся и те функционалы (экстремальные) $f(\cdot)$, при которых задача (165) имеет решение с минимальным $L=\lambda$. Экстремальные функционалы удовлетворяют равенству *) (168), где g — решение задачи (166). Резюмируем: для того чтобы некоторую задачу оптимального управления решить с помощью L-проблемы, нужно: 1) сформулировать ее в виде задачи (165), 2) решить задачу (169), 3) из (168) найти искомые оптимальные величины.

---

*) Свойства экстремального функционала определены теоремой 24.

Эта общая схема ниже будет конкретизирована на различных задачах оптимального управления. В соотношениях (165) функционал $f(\cdot)$ не всегда представляет управление, иногда полезно в него вкладывать более широкий смысл (п. 4). Ограничение на $f(\cdot)$, $\| f(\cdot) \| \leqslant L$, вытекает из условия задачи. В некоторых задачах вид нормы $\| f(\cdot) \|$ весьма сложен. Это обстоятельство является главным препятствием для решения задачи (169), ибо справа записана норма элемента $x(\cdot)$, которая должна быть согласована по (167) с заданной нормой $\| f(\cdot) \|$. В стандартных случаях, конечно, вычисление $\| x(\cdot) \|$ по $\| f(\cdot) \|$ не составляет труда. Например, если

$$1) \ \| f(\cdot) \| = \sup_{t \in T} \operatorname{vrai} | f(t) |, \ \text{то} \ \| x(\cdot) \| = \int_{t_0}^{t_1} | x(t) | \, dt;$$

$$2) \ \| f(\cdot) \| = \left(\int_{t_0}^{t_1} | f(t) |^q \, dt \right)^{1/q}, \ \text{то} \ \| x(\cdot) \| =$$
$$= \left(\int_{t_0}^{t_1} | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad 1 < q < \infty.$$

В более сложных случаях нахождение $\| x(\cdot) \|$ представляет самостоятельную задачу.

Примечания. 1) Выше мы доказали лишь выпуклость множества $R(L)$. При условиях задачи (165) оно и замкнуто. Это является следствием определения пространства $E'(\cdot)$ функционалов над $E(\cdot)$. Короче говоря, пространство $E'(\cdot)$ определяется так, что задача (167) вычисления нормы $\| x(\cdot) \|$ всегда имеет решение в этом пространстве. Это обстоятельство в конкретных задачах часто приводит к необходимости расширять заданный класс функций (см. примечание на стр. 286).

2) Условие (169) разрешимости L-проблемы моментов получено при дополнительном предположении о линейной независимости элементов $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$. Ситуация, когда эти элементы линейно зависимы, обсуждается в § 9.6. Оказывается, что если элементы $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ связаны соотношениями $\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} x_k(\cdot) = 0$, $i = 1, \ldots, N$, то числа c_i, при которых L-проблема моментов имеет

решение, также должны быть связаны соотношениями $\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} c_k = 0$, $i = 1, \ldots, N$. В переводе на язык задачи оптимального быстродействия это означает, что при линейной зависимости элементов $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$ этой задачи начальные состояния x_0, которые можно привести в нуль, лежат в некотором подпространстве фазового пространства.

2. Двухточечная задача линейного быстродействия. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + b(t)\,u + f(t), \qquad t \in T = [t_0, t_1], \tag{170}$$

где $x \in E_n$; элементы матрицы $A(t)$, векторов $b(t)$, $f(t)$ непрерывны по времени t.

Задача. Среди измеримых управлений $u(t)$, $t \in T$, $|u(t)| \leqslant L$, требуется найти такое $u^0(t)$, что

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1^0) = 0, \quad t_1^0 = \min_{|u(t)| \leqslant L} \{t_1 \colon x(t_1) = 0\}. \tag{171}$$

Здесь x_0 — заданное начальное условие. Далее символ P_i означает i-ю строку матрицы P.

Записав решение неоднородного уравнения (170) через формулу Коши, нетрудно видеть, что управление $u(t)$, $t \in T$, переводит x_0 в начало координат тогда и только тогда, когда

$$c_i = \int_{t_0}^{t_1} F_i^{-1}(\tau)\, b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(\tau)\, u(\tau)\, d\tau = f(x_i(\cdot)). \tag{172}$$

Здесь

$$c_i = \Big\{-x_0 - \int_{t_0}^{t_1} F^{-1}(\tau)\, f(\tau)\, d\tau\Big\}_i,$$

$$x_i(\cdot) = \{\gamma_i(\tau),\ \tau \in T\}, \qquad f(\cdot) = \{u(t),\ t \in T\},$$

$F(t)$ — фундаментальная матрица решений для (170) ($u(t) \equiv f(t) \equiv 0$). Если норму функционала $f(\cdot)$ определить по формуле

$$\| f \| = \operatorname*{vrai\,max}_{t \in T} |u(t)|,$$

то ограничения на управление в исходной задаче можно записать в виде

$$\| f(\cdot) \| \leqslant L. \tag{172'}$$

Объединяя (172) и (172′), видим, что задача линейного быстродействия (171) свелась к поиску минимального t_1, при котором L-проблема моментов (165) имеет решение. Теперь очевиден и путь решения. L-проблему решаем для фиксированного t_1, затем из этих чисел выбираем минимальное.

Предположим, что функции

$$\gamma_i(t) = F_i^{-1}(t)\, b(t), \qquad t \in T, \tag{173}$$

линейно независимы, т. е. не существует вектора g, $\| g \| = 1$, такого, что $g'\gamma(t) = 0$ почти всюду на T.

Примечание. Функции (173) линейно независимы, если определяющее уравнение системы (170) невырождено при некотором $\bar{t} \in T$.

В силу (169) заключаем: T-допустимое управление существует тогда и только тогда, когда $\lambda(c, t_1) \geqslant L^{-1}$, где

$$\left.\begin{aligned} \lambda(c, t_1) &= \min_{g'c=1} \lambda(c, t_1, g) = \lambda(c, t_1, g(t_1)), \\ \lambda(c, t_1, g) &= \int\limits_{t_0}^{t_1} | g'\gamma(t) |\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

Лемма 12. Функция $\lambda(c, t_1)$ непрерывна по c, t_1 и $\lambda(c, t_0) = 0$.

Непрерывность функции $\lambda(c, t_1)$ по аргументам является непосредственным следствием непрерывности по тем же аргументам функции $\lambda(c, t_1, g)$, которая, очевидно, обладает этим свойством.

Теорема 32. Если существует хотя бы одно T-допустимое управление, то существует и оптимальное управление со временем быстродействия τ^0, равным наименьшему корню уравнения

$$\lambda(c, t_0 + \tau) = L^{-1}. \tag{175}$$

Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется соотношением

$$u^0(t) = L \operatorname{sign} g'(t_0 + \tau^0)\, F^{-1}(t)\, b(t)$$

почти всюду на $\sigma_{t_1^0} = \{t\colon g'(t_0 + \tau^0)\, F^{-1}(t)\, b(t) \neq 0\}$.

Доказательство. Из леммы 12 и условия (169) получаем соотношение (175). Пусть $g(t_1)$ — решение задачи (174). Тогда функция $\zeta(t) = g'(t_1)\gamma(t)$, $t \in T$, является экстремальным элементом (см. (168)) для любого решения системы (165) с нормой, равной $\lambda^{-1}(c, t_1)$. Поэтому

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} g'(t_1)\gamma(t)u(t)\,dt \right| = \lambda^{-1}(c,\ t_1) \int_{t_0}^{t_1} |g'(t_1)\gamma(t)|\,dt. \qquad (176)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (176) имеет место только в том случае, если

$$u(t) = \lambda^{-1}(c, t_1)\,\mathrm{sign}\, g'(t_1)\gamma(t) \quad \text{почти всюду на } \sigma_{t_1^0}.$$

На этом доказательство теоремы заканчивается.

Примечание. Соотношение (176) определяет управление $u^0(t)$ лишь в точках, где $g'(t_1)\gamma(t) \neq 0$. Можно показать (§ 7.9), что и в остальных точках функцию $u^0(t)$ возможно доопределить так, чтобы она оказалась кусочно-постоянной на T. Таким образом, искали оптимальное управление в классе измеримых функций, нашли — в более узком классе кусочно-постоянных управлений. «Предвидя» такой результат, задачу линейного быстродействия можно формулировать в более узком классе управлений. В этом случае, переходя от задачи быстродействия к L-проблеме, пришлось бы сначала расширить класс допустимых управлений. Результат оказался бы, конечно, прежним. Вложение первоначальной задачи в более общую задачу, которая имеет решение и зачастую решается проще, извлечение из решения последней решения исходной задачи — это довольно распространенный прием. При этом попутно решается вопрос о существовании решения исходной задачи в заданном классе допустимых управлений.

Рассмотрим систему (170) при $f(t) \equiv 0$. Соотношения (172) теперь имеют вид

$$-x_{i0} = \int_{t_0}^{t_1} \gamma_i(t)u(t)\,dt,$$

функция $\lambda(c,\ t_1) = \lambda(x_0,\ t_1)$:

$$\lambda(x_0,\ t_1) = \min_{g'x_0=-1} \int_{t_0}^{t_1} |g'\gamma(t)|\,dt.$$

Лемма 13. Функция $\lambda(x_0, t_1)$ непрерывна по x_0, t_1 и не убывает по t_1.

Доказательство. Непрерывность $\lambda(x_0, t_1)$ очевидна (см. лемму 12). Докажем, что $\lambda(x_0, t_1)$ не убывает по t_1. Пусть $t_1 < t^1$. Тогда имеем

$$\lambda(x_0, t_1, g(t_1)) \leqslant \lambda(x_0, t_1, g(t^1)) \leqslant \lambda(x_0, t^1, g(t^1)),$$

что и доказывает утверждение.

Примечание. Для стационарной системы (136) лемма 13 может быть усилена. В этом случае функция

$$\lambda(x_0, t_1) = \min_{g'x_0=-1} \int_{t_0}^{t_1} |g'F^{-1}(t)b|\,dt$$

— тождественный нуль или строго возрастает по t_1. В самом деле, рассмотрим функцию $\xi(t, g) = g'F^{-1}(t)b$. Из § 1.3 следует, что $\xi(t, g)$ является решением уравнения

$$\xi^{(n)}(t, g) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s(-1)^{n-s+1}\xi^{(-s1)}(t, g), \qquad \|\alpha\| \neq 0, \ t \in T.$$

Поэтому, если $\xi(t^1, g) = 0$ при некотором $t = t^1$, то $\xi(t, g) \equiv 0$. Теперь из определения функции $\lambda(x_0, t_1)$ следует, что $\lambda(x_0, t_1) \equiv 0$ или строго возрастает по t_1.

Будем говорить, что функции (173) вполне линейно независимы, если ни при каком g, $\|g\| = 1$, функция $\zeta(t) = g'\gamma(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, не обращается в нуль на множестве точек t положительной меры.

Лемма 14. Если функции (173) вполне линейно независимы, то $\lambda(x_0, t_1)$ строго возрастает по t_1.

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

Ясно, что для системы (170), $f \equiv 0$, из существования T-допустимого управления следует существование оптимального управления. Однако теорема 32 для (170), $f \equiv 0$, может быть усилена.

Теорема 33. Оптимальное быстродействие τ^0 определяется соотношением

$$\tau^0 = \max_g \tau(g) = \tau(\tilde{g}),$$

где $\tau(g)$ — наименьший корень уравнения

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} |g'F^{-1}(t)\,b(t)|\,dt = \frac{1}{L}. \qquad (177)$$

Оптимальное управление определяется, как в теореме 32.

Примечание. Если функции (173) вполне линейно независимы, то $\tau^0 = \max_g \tau(g)$, где $\tau(g)$ — корень уравнения (177).

Полученные результаты можно перенести на систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h) + B(t)\,u(t) + f(t).$$

Пусть требуется найти управление $u(t)$, $t \in T$, $u(\cdot) \in U(\cdot)$, такое, что

$$x(t_1^0) = 0, \qquad t_1^0 = \min_{|u(t)| \leqslant 1} \{t_1\colon\ x(t_1) = 0\}.$$

Формула Коши (§ 1.15) является исходным пунктом для применения L-проблемы.

Для удобства формулировок, как и в пп. 4, 5, 7 § 10, введем определение T-относительно допустимого управления. Назовем функцию $u(t)$, $t \in T$, T-относительно допустимым управлением, если она порождает траекторию $x(t)$ со свойством $x(t_1) = 0$. В силу теоремы 31 заключаем: T-относительно допустимое управление существует тогда и только тогда, когда

$$\Lambda(\widetilde{c},\ t_1) = \max_{\|g\|=1} \{g'\widetilde{c} - L\,\|g'\widetilde{\gamma}(\cdot)\|\} = \widetilde{\Lambda}(t_1,\ g(t_1)) \leqslant 0.$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{\gamma}(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ i = 1, \ldots, n\},\quad \gamma_i(\cdot) = \{\gamma_i(t),\ t \in T\},\\
&\gamma_i(t) = F_i(t_1,\ t)\,b(t),\\
&c = -F(t_1,\ t_0)\,x_0 - \int_{t_0-h}^{t_0} F(t_1,\ \tau+h)\,A_1(\tau+h)\times\\
&\qquad\qquad \times\Phi(\tau)\,d\tau - \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,\ \tau)\,B(\tau)\,f(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}\right\} \quad (178)$$

Для функции $\Lambda(\widetilde{c},\ t_1)$ справедлива лемма 12. Поэтому можно доказать утверждение, аналогичное теореме 32.

Теорема 34. Если существует хотя бы одно T-относительно допустимое управление, то существует и оптимальное управление со временем быстродействия $\tau^0 = t_1^0 - t_0$, где t_1^0 — наименьший корень уравнения $\widetilde{\Lambda}(t_1,\ g(t_1)) = 0$.

Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется соотношением

$$u^0(t) = L \operatorname{sign} g'(t_1^0)\gamma(t)$$

почти всюду на $\sigma_{t_1^0} = \{t: g'(t_1^0)\gamma(t) \neq 0\}$.

Примечание. Можно показать, что в стационарном случае функция $\lambda(t) = g'F(t_1, t)b$, $\|g\| \neq 0$, почти всюду отлична от нуля или тождественно равна нулю.

3. Оптимальные процессы с ограничением по циклам. Пусть поведение системы управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u, \tag{179}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор, $A = \{a_{ij}\}$ — $n \times n$-матрица, $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — вектор, $u = u(t)$ — управляющая функция. Задачи оптимального управления, о которых ниже пойдет речь, заключаются в следующем. Задано начальное условие $x(0)$. Требуется найти функцию $u(t)$ такую, чтобы точка $x(t)$, двигаясь по траектории уравнения (179), попала в начало координат за наименьшее время t_1^0. При этом управляющие функции должны удовлетворять следующему ограничению: зададим число $\omega > 0$, определим число N из условия $N\omega < t_1^0 \leqslant (N+1)\omega$, положим $u(t) = 0$ при $t_1^0 \leqslant t \leqslant (N+1)\omega$; пусть

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N} \left(\int\limits_{t=k\omega}^{(k+1)\omega} |u(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \leqslant L, \quad p \geqslant 1. \tag{180}$$

Задача (179), (180) отличается от обычных задач оптимального быстродействия тем, что ограничения на управляющие функции носят циклический характер (ω — длительность цикла). Возможна такая физическая трактовка рассматриваемой задачи при $p = 1$. Некоторый процесс регулируется количеством подаваемого топлива. Непосредственно в процесс топливо подается из бункера, который периодически (через ω единиц времени) заполняется из другого резервуара, запасы которого практически не ограничены. При таких условиях нужно указать оптимальный с точки зрения быстродействия системы расход топлива. Если допустить, что изучаемый процесс может быть описан уравнением типа (179), то, очевидно, имеем задачу (179), (180).

Количество задач типа (179), (180) можно увеличить, но мы ограничимся данной и покажем метод ее решения, который без существенных изменений может быть применен и к другим задачам. То, что всякая задача быстродействия с неподвижными концевыми условиями эквивалентна проблеме моментов, показано в п. 2. Поскольку выражение

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\left(\int\limits_{t=k\omega}^{(k+1)\omega}|u(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

удовлетворяет всем условиям нормы $\|u(\cdot)\|$: 1) $\|u(\cdot)\|>0$, если $u(\cdot)\neq 0$; 2) $\|\lambda u(\cdot)\|=|\lambda|\,\|u(\cdot)\|$; 3) $\|u_1(\cdot)+u_2(\cdot)\|\leqslant\|u_1(\cdot)\|+\|u_2(\cdot)\|$, то ограничение (180) можно записать в виде $\|f(\cdot)\|\leqslant L$, $f(\cdot)\equiv u(\cdot)$.

Таким образом, задача оптимального управления с ограничением по циклам сведена к L-проблеме моментов. Для ее эффективного решения нужно уметь вычислять норму элемента $\|x(\cdot)\|$ (см. (167)). В нашем случае эта задача выполняется легко:

$$\|x(\cdot)\|=\sum_{k=0}^{N}\left(\int\limits_{t=k\omega}^{(k+1)\omega}|x(t)|^q\,dt\right)^{1/q},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Осталось показать, что поставленная выше задача быстродействия эквивалентна проблеме моментов (165). Но в задаче быстродействия это уже сделано в п. 2 с помощью формулы Коши.

4. Задача линейного быстродействия при подвижных концевых условиях. Для простоты ограничимся лишь случаем подвижного правого конца. Итак, требуется за минимальное время перевести траекторию системы (179) из точки x_0 на куб

$$|x_i-d_i|\leqslant\Delta,\qquad i=1,\ldots,n,\tag{181}$$

используя при этом кусочно-непрерывные управления $u(t)$, $t\in T$, стесненные ограничением

$$|u(t)|\leqslant L.\tag{182}$$

Из формулы Коши получаем

$$x(t_1)=F(t_1)F^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)\,d\tau. \qquad (183)$$

Положим

$$\begin{gathered}
c = F(t_1)F^{-1}(t_0)x_0 - d, \quad \gamma(t) = F(t_1)F^{-1}(t)b(t),\\
x_1(\cdot) = \{1, 0, \ldots, 0;\ \gamma_1(t),\ t \in T\},\\
x_2(\cdot) = \{0, 1, 0, \ldots, 0;\ \gamma_2(t),\ t \in T\}, \ldots,\\
x_n(\cdot) = \{0, \ldots, 0, 1;\ \gamma_n(t),\ t \in T\};\\
f(\cdot) = \{f_1, \ldots, f_n;\ f(t),\ t \in T\},\\
f_i \equiv x_i(t_1)-d_i, \quad f(t) \equiv u(t).
\end{gathered}$$

Тогда равенство (183), записанное в координатной форме, можно интерпретировать как значения c_i функционала $f(\cdot)$ на элементах $x_i(\cdot)$:

$$f(x_i(\cdot)) = c_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (184)$$

Введем норму функционала $f(\cdot)$ следующим образом:

$$\|f(\cdot)\|=\max\left\{\max_i \frac{L|f_i|}{\Delta},\ \sup_t |f(t)|\right\}.$$

Тогда ограничения (181), (182) на управление и правый конец траектории принимают вид $\|f(\cdot)\| \leqslant L$. Это условие в совокупности с (184) показывает, что исходная задача сведена к L-проблеме моментов. Норма элемента $x(\cdot) = \{x_1, \ldots, x_n;\ x(t), t \in T\}$. Легко подсчитать, что

$$\|x(\cdot)\|=\frac{\Delta}{L}\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\int_{t_0}^{t_1}|x(t)|\,dt.$$

5. Оптимальные быстродействия в связанных системах. Даны уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u(t), \qquad x(t_0)=x_0, \qquad (185)$$

$$\frac{dy}{dt}=D(t)y+C(t)u(t), \qquad y(t_0)=y_0, \qquad (186)$$

где непрерывные матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ имеют размеры $n \times n$, $n \times r$, $r \times r$, $r \times r$ соответственно, матрица $C(t)$ — неособая при $t \geqslant t_0$. Системы (185), (186) назовем связанными.

Допустим, что кусочно-непрерывные управления $u(t)$ из (185), (186) в отдельные моменты времени могут быть дельта-функциями. Пусть требуется найти управление, при котором точка $x(t)$ траектории (185) попадает в начало координат в минимально возможное время, причем

$$|y_i(t)| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{187}$$

Из (185), (186) имеем

$$\begin{aligned} x(t) = F(t) F^{-1}(t_0) x_0 + B(t) C^{-1}(t) y(t) - \\ - F(t) F(t_0) B(t_0) C^{-1}(t_0) y(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} F(t) F^{-1}(\tau) [A(\tau) B(\tau) C^{-1}(\tau) - B(\tau) C^{-1}(\tau) D(\tau) - \\ - \frac{d}{d\tau}(B(\tau) C^{-1}(\tau))\Big] y(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{188}$$

Пусть $u(\cdot)$ — T-допустимое управление. Обозначая

$$F(t_1) F^{-1}(t_0) x_0 = -c, \quad -F(t_1) F(t_0) B(t_0) C^{-1}(t_0) = \Pi_1(t_0),$$
$$B(t_1) C^{-1}(t_1) = \Pi_2(t_1),$$
$$F(t_1) F^{-1}(\tau) [A(\tau) B(\tau) C^{-1}(\tau) - B(\tau) C^{-1}(\tau) D(\tau) - \\ - \frac{d}{d\tau}(B(\tau) C^{-1}(\tau))\Big] = \Pi_3(t_1, \tau),$$

из (188) получаем

$$c = \Pi_1(t_1) y(t_0) + \Pi_2(t_1) y(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Pi_3(t_1, \tau) y(\tau)\, d\tau, \tag{189}$$

где $y(t)$ — решение (186) при $u = u(t)$. Положим

$$x_1(\cdot) = \{\Pi_{1,11}(t_1), \ldots, \Pi_{1,1r}(t_1); \Pi_{2,11}(t_1), \ldots, \Pi_{2,1r}(t_1); \\ \Pi_{3,11}(t_1, t), \ldots, \Pi_{3,1r}(t_1, t), t \in T\},$$

. . . .

$$x_n(\cdot) = \{\Pi_{1,n1}(t_1), \ldots, \Pi_{1,nr}(t_1); \Pi_{2,n1}(t_1), \ldots, \Pi_{2,nr}(t_1); \\ \Pi_{3,n1}(t_1, t), \ldots, \Pi_{3,nr}(t_1, t), t \in T\},$$
$$f(\cdot) = \{f_{11}, \ldots, f_{1r}; f_{21}, \ldots, f_{2r}; f_{31}(t), \ldots, f_{3r}(t), t \in T\},$$
$$f_{1i} = y_i(t_0), \quad f_{2i} = y_i(t_1), \quad f_{3i}(t) = y_i(t), \quad t_0 < t < t_1.$$

Тогда равенство (189) в координатной форме есть не что иное, как значения c_i, $i = 1, \ldots, n$, функционала $f(\cdot)$, которые он принимает на элементах $x_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$ Введение нормы

$$\|f(\cdot)\| = \max\{\max_i |f_{1i}|,\ \max_i |f_{2i}|,\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T}{}_i |f_{3i}(t)|\} \qquad (190)$$

позволяет записать ограничение (187) следующим образом: $\|f(\cdot)\| \leqslant 1$. Исходная задача сведена, таким образом, к L-проблеме моментов. Для ее решения осталось записать норму элемента $x(\cdot) = \{x_{11}, \ldots, x_{1r};\ x_{21}, \ldots, x_{2r};\ x_{31}(t), \ldots, x_{3r}(t)\}$. Она легко получается из (167), (190):

$$\|x(\cdot)\| = \sum_{i=1}^{r} |x_{1i}| + |x_{2i}| + \int_{t_0}^{t_1} |x_{3i}(t)|\,dt.$$

Решив L-проблему моментов, найдем функцию $y^0(t)$, $t \in T$. Обращаясь к уравнениям (185), (186), нетрудно вычислить $x^0(t)$ и оптимальное управление $u^0(t)$. В точках гладкости $y^0(t)$ управление $u^0(t)$ непрерывно, в точках разрыва $y^0(t)$ управление $u^0(t)$ представляет собой δ-функцию.

6. Задача оптимального управления с учетом фазовых ограничений. Опять рассмотрим связанные системы (185), (186). Пусть $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = 0$; управление $u(t)$, траектория $y(t)$ удовлетворяют условиям:

$$|u_j(t)| \leqslant 1; \quad j = 1, \ldots, r; \quad t \in T, \qquad (191)$$

$$|y_j(\tau_k)| \leqslant 1, \quad \tau_k < \tau_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, N; \qquad (192)$$
$$j = 1, \ldots, r.$$

Здесь τ_k — заданные моменты времени. Требуется найти управление $u(t)$, при котором траектория $x(t)$ достигает точки $x = 0$ в минимально возможное время. Если $u(\cdot)$ — T-допустимое управление, то

$$-x_0 = \int_{t_0}^{t_1} F^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \qquad (193)$$

и наоборот. Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу решений для (186), $u(\cdot)=0$. Имеем

$$y(\tau_k)=\int_{t_0}^{\tau_k}\Phi(\tau_k)\Phi^{-1}(\tau)C(\tau)u(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{\tau_k}\Phi(\tau_k,\tau)C(\tau)u(\tau)\,d\tau. \tag{194}$$

Положим

$$c_1=-x_{10},\ldots,c_n=-x_{n0},\ c_{n+1}=0,\ldots,c_{Nr+n}=0,$$

$$x_1(\cdot)=\{0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;[F^{-1}(t)B(t)]_{1j},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n(\cdot)=\{0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;[F^{-1}(t)B(t)]_{nj},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$x_{n+1}(\cdot)=$$
$$=\{1,0,\ldots,0;0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;\alpha_1[\Phi(\tau_1)\Phi^{-1}(t)C(t)]_{1j},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+r}(\cdot)=$$
$$=\{0,\ldots,0,1;0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;\alpha_1[\Phi(\tau_1)\Phi^{-1}(t)C(t)]_{rj},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$x_{n+r+1}(\cdot)=$$
$$=\{0,\ldots,0;1,0,\ldots,0;0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;\alpha_2[\Phi(\tau_2)\Phi^{-1}(t)C(t)]_{1j},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{2r+n}(\cdot)=$$
$$=\{0,\ldots,0;0,\ldots,0,1;0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;\alpha_2[\Phi(\tau_2)\Phi^{-1}(t)C(t)]_{rj},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{(N-1)r+n}(\cdot)=$$
$$=\{0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;1,0,\ldots,0;\alpha_N[\Phi(\tau_N)\Phi^{-1}(t)C(t)]_{1j},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{Nr+n}(\cdot)=$$
$$=\{0,\ldots,0;\ldots;0,\ldots,0;0,\ldots,0,1;\alpha_N[\Phi(\tau_N)\Phi^{-1}(t)C(t)]_{rj},\ j=1,\ldots,r;\ t\in T\},$$

$$\alpha_1=\alpha_1(t)=1,\quad t_0\leqslant t\leqslant\tau_1;\quad \alpha_1(t)=0,\quad \tau_1\leqslant t\leqslant t_1,\ \ldots;$$
$$\alpha_N=\alpha_N(t)=1,$$
$$t_0\leqslant t\leqslant\tau_N;\quad \alpha_N(t)\equiv 0,\quad \tau_N\leqslant t\leqslant t_1,$$
$$f(\cdot)=\{f_{11},\ldots,f_{1r};f_{21},\ldots,f_{2r};\ldots;f_{N1},\ldots,f_{Nr};$$
$$f_1(t),\ldots,f_r(t),\ t\in T\},$$
$$f_{1i}\equiv y_i(\tau_1),\ \ldots,\ f_{Ni}\equiv y_i(\tau_N),\ f_i(t)\equiv u_i(t),$$
$$i=1,\ldots,r;\ t\in T,$$
$$\|f(\cdot)\|=\max\{\max_i|f_{1i}|,\ \ldots,\ \max_i|f_{Ni}|;\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T}{}_i|f_i(t)|\}.$$

В этих обозначениях соотношения (193), (194) с ограничениями (191), (192) можно трактовать как L-проблему моментов

$$f(x_\nu(\cdot)) = c_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, Nr + n. \tag{195}$$

Норма элемента $x(\cdot) = \{x_{11}, \ldots, x_{1r}; \ldots; x_{N1}, \ldots, f_{Nr}; x_1(t), \ldots, x_r(t), \ t \in T\}$ имеет вид

$$\| x(\cdot) \| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{r} | x_{ij} | + \int_{t_0}^{t_1} | x_j(t) | \, dt.$$

Решив при этих условиях $(Nr + n)$-мерную L-проблему моментов, получим оптимальное управление $u^0(t)$ и значения $y^0(t)$ в точках $\tau_1, \ldots, \tau_N$.

Примечания. 1) Исходную задачу мы свели к $(Nr + n)$-мерной L-проблеме моментов (195). Размерность L-проблемы моментов можно сделать равной n, если найти норму элемента $x(\cdot) = \{x_1(t), \ldots, x_r(t); t \in T\}$, согласованную с нормой функционала $f(\cdot) = \{f_1(t), \ldots, f_r(t); \ t \in T\}$:

$$\| f(\cdot) \| = \max \{ \operatorname{vrai} \sup_{t \in T} {}_i | f_i(t) |, \ \max_{i, k} | y_i(\tau_k) | \}. \tag{196}$$

Здесь $y(\tau_k)$ — значение решения $y(t)$ уравнения (186), $u(t) = f(t)$, в момент $t = \tau_k$. То, что выражение (196) действительно задает норму, проверяется непосредственно. Таким путем задача этого пункта решается в [21d].

2) Можно обобщить сформулированную выше задачу, потребовав, вместо (192), выполнение условия

$$| y_i(t) | \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r; \quad t \in T.$$

Тогда выражение

$$\| f(\cdot) \| = \max \{ \operatorname{vrai} \sup_{t \in T} {}_i | f_i(t) |, \ \max_{t \in T} {}_i | y_i(t) | \}$$

опять задает норму. Однако в этом случае вычисление нормы $\| x(\cdot) \|$ затруднительно. Вид нормы $\| x(\cdot) \|$ можно найти, пользуясь результатами § 6.10. Соответствующая формула приведена в [21d]. Эта формула содержит операцию максимизации по мере, что по трудности представляет задачу в общем случае того же порядка, что и исходная.

7. Оптимальные быстродействия в системах с параметрами. Дано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x+B(t)\,u+C(t)\,w, \qquad x(t_0)=x_0, \tag{197}$$

где $u=u(t)$ — управление, стесненное условием (191), значения $w=w(t)$ могут изменяться в заданные моменты τ_k, $\tau_k<\tau_{k+1}$, $k=1,\ldots,N$, причем $|w_j(\tau_k)|\leqslant 1$, $j=1,\ldots,q$. Требуется с помощью $u(t)$, $w(t)$ перевести траекторию системы (197) в начало координат в минимально возможное время. В этой задаче T-допустимое управление $u(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$-x_0=\int_{t_0}^{t_1}\Pi(\tau)\,u(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{N+1}\pi(k)\,w(k), \quad \Pi(\tau)=F^{-1}(\tau)\,B(\tau),$$

$$\pi(k)=\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}F^{-1}(\tau)\,C(\tau)\,d\tau, \quad k=1,\ldots,N+1;\ \tau_0=t_0.$$

Поэтому определение функции $u(t)$ сводится к L-проблеме моментов (по схеме п. 4).

§ 12. Применение теоремы существования опорной плоскости к задачам оптимального управления

1. Существование опорной плоскости к выпуклой поверхности. Из теоремы об отделимости выпуклых множеств следует утверждение:

Пусть $y=\varphi(x)$, $x\in E_n$, $y\in E_1$,— выпуклая поверхность, $\{x, y\}$ — точка на этой поверхности. Тогда существует опорная гиперплоскость, проходящая через $\{x, y\}$, т. е. существует такой вектор g, $\|g\|=1$, и число $f\neq 0$, что

$$\inf_{\bar{x}\in E_n,\ \bar{y}=\varphi(\bar{x})}[g'\bar{x}+f\bar{y}]=g'x+fy.$$

2. Оптимизация выпуклых функционалов на траекториях линейных систем. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{dt}=A_1(t)\,y+B_1(t)\,z+C_1(t)\,u+f_1(t), \tag{198}$$

$$\frac{dz}{dt}=A_2(t)\,y+B_2(t)\,z+C_2(t)\,u+f_2(t), \tag{199}$$

где y — p-вектор, z — q-вектор, $y \in E_p$, $z \in E_q$; непрерывные матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$ имеют размеры $p \times p$, $q \times p$, $p \times q$, $q \times q$, $p \times r$, $q \times r$ соответственно; $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — управление; $f_1(t) = \{f_{11}(t), \ldots, f_{1p}(t)\}$, $f_2(t) = \{f_{21}(t), \ldots, f_{2q}(t)\}$ — известные функции. Заданы числа t_0, t_1, s_k, L_j ($t_1 > t_0$, $s_k > s_{k-1}$, $k = 3, 4, \ldots, m-1$; $s_3 = t_0$, $s_{m-1} \leqslant t_1$; $j = 1, \ldots, m$; $L_j \geqslant 0$, $j \neq 1$), непрерывный по $u(\cdot)$, t_1, выпуклый по $u(\cdot)$ функционал $\varphi(u(\cdot), t_1)$, определенный на функциях $u(\cdot) \in U_p(\cdot)$. В пространстве E_q дана кривая $\gamma(t)$, $t \in T$, в E_p зафиксированы точки y_0 и y_1. Потребуем, чтобы

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(u, t_1) \leqslant L_1, & \| y(t_0) - y_0 \| \leqslant L_2, \\ \| y(t_1) - y_1 \| \leqslant L_3, & \| z(s_k) - \gamma(s_k) \| \leqslant L_k. \end{array}\right\} \qquad (200)$$

Пусть операторы $F_{ij}(t, \tau)$ при каждом фиксированном t составляют фундаментальную матрицу $F(t, \tau)$ решений однородной системы для (198), (199):

$$F(t, \tau) = \left\{ \begin{array}{cc} F_{11}(t, \tau) & F_{12}(t, \tau) \\ F_{21}(t, \tau) & F_{22}(t, \tau) \end{array} \right\},$$

$$F(t, t) = E$$

и

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= F_{11}(t, t_0)\, y(t_0) + F_{12}(t, t_0)\, z(t_0) + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \{F_{11}(t, \tau)[C_1(\tau) u(\tau) + f_1(\tau)] + \\ &\qquad\qquad + F_{12}(t, \tau)[C_2(\tau) u(\tau) + f_2(\tau)]\}\, d\tau, \\ z(t) &= F_{21}(t, \tau)\, y(t_0) + F_{22}(t, \tau)\, z(t_0) + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \{F_{21}(t, \tau)[C_1(\tau) u(\tau) + f_1(\tau)] + \\ &\qquad\qquad + F_{22}(t, \tau)[C_2(\tau) u(\tau) + f_2(\tau)]\}\, d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

Положим

$$\left.\begin{aligned}
&u=u^1,\quad y(t_0)-y_0=u^2,\quad y(t_1)-y_1=u^3,\\
&z(t_k)-\gamma(t_k)=u^{4+k},\quad t_k=s_{k+3},\quad k=0,1,\ldots,m-4,\\
&S_{11}u^1=\int_{t_0}^{t_1}[F_{11}(t_1,\tau)C_1(\tau)+F_{12}(t_1,\tau)C_2(\tau)]\,u^1(\tau)\,d\tau,\\
&S_{12}=F_{11}(t_1,t_0),\ S_{13}=-E,\ S_{14}=F_{12}(t_1,t_0),\\
&\qquad\qquad S_{1,4+i}=0,\quad i\geqslant 1,\\
&h^1=-y_1+F_{11}(t_1,t_0)\,y_0+F_{12}(t_1,t_0)\,\gamma(t_0)+\\
&\qquad+\int_{t_0}^{t_1}[F_{11}(t_1,\tau)f_1(\tau)+F_{12}(t_1,\tau)f_2(\tau)]\,d\tau,\\
&S_{2+k,1}u^1=\int_{t_0}^{t_{k+1}}[F_{21}(t_{k+1},\tau)C_1(\tau)+\\
&\qquad+F_{22}(t_{k+1},\tau)C_2(\tau)]\,u^1(\tau)\,d\tau,\ S_{2+k,2}=F_{21}(t_{k+1},t_0),\\
&S_{2+k,3}=0,\quad S_{2+k,4}=F_{22}(t_{k+1},t_0),\ S_{2+k,4+i}=\\
&\qquad=-E\,(k=i-1),\ S_{2+k,4+i}=0\ (k\neq i-1),\\
&h^{2+k}=-\gamma(t_{k+1})+F_{21}(t_{k+1},t_0)\,y_0+F_{22}(t_{k+1},t_0)\,\gamma(t_0)+\\
&\qquad+\int_{t_0}^{t_{k+1}}[F_{21}(t_{k+1},\tau)f_1(\tau)+F_{22}(t_{k+1},\tau)f_2(\tau)]\,d\tau.
\end{aligned}\right\}\qquad(202)$$

Величины u^j, $j=1,\ldots,m$, назовем *управлениями*. Управления u^{j0}, $j=1,\ldots,m$, будем называть *оптимальными управлениями*, если одно из чисел L_j, t_1 минимально (при условии, что остальные фиксированы). В силу (200) — (202) решения u^j задачи (200) удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}S_{ij}u^j+h^i=0,\quad i=1,\ldots,m-3,\\
&u^1=u^1(\cdot)\in U_p(\cdot),\quad \|u^j\|\leqslant L_j,\quad j>1.
\end{aligned}\right\}\qquad(203)$$

Здесь u^j, $j\neq 1$, — элементы конечномерных пространств E_p, E_q, линейные операторы S_{ij}, $j>1$, действуют из E_p, E_q

в E_p, E_q. Положим

$$\sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{i1} u^1(\cdot) + f\varphi(u^1(\cdot), t_1) = H(g, f, u^1(\cdot)), \quad f \geqslant 0,$$

$$\Lambda(L_1, \ldots, L_m, t_1, g, f) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m-3} g_i' h^i - \sum_{j=2}^{m} L_j \Big\| \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ij} \Big\| - L_1 f + \min_{u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)} H(g, f, u^1(\cdot)).$$

Теорема 35. Задача (203) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\max_{\|\{g, f\}\|=1,\ f \geqslant 0} \Lambda(L_1, \ldots, L_m, t_1, g, f) \leqslant 0. \tag{204}$$

Доказательство. Пусть величины u^j, $u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)$, $\|u^j\| \leqslant L_j$, — решение задачи (203). Тогда

$$\sum_{i=1}^{m-3} g_i' \Big[\sum_{j=1}^{m} S_{ij} u^j + h^i \Big] = 0 = \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{i1} u^1(\cdot) +$$
$$+ f\varphi(u^1(\cdot), t_1) + \sum_{j=2}^{m} \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ij} u^j - f\varphi(u^1(\cdot), t_1) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-3} g_i' h^i \geqslant \min_{u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)} H(g, f, u^1(\cdot)) -$$
$$- \sum_{j=2}^{m} L_j \Big\| \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ij} \Big\| - L_1 f + \sum_{i=1}^{m-3} g_i' h^i$$

при любых $g_i \in E_p$, $i = 1, \ldots, m-3$; $f \geqslant 0$. Значит, справедливо соотношение (204).

Пусть выполнено условие (204). Покажем, что существует решение задачи (203). В силу (204)

$$\sum_{i=1}^{m-3} g_i' h^i - \sum_{j=2}^{m} L_j \Big\| \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ij} \Big\| - L_1 f +$$
$$+ \min_{u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)} H(g, f, u^1(\cdot)) \leqslant 0 \tag{205}$$

для любых $g_i \in E_p$, E_q, $i = 1, \ldots, m-3$; $f \geqslant 0$. Рассмотрим множество

$$\varkappa(L_2, \ldots, L_m) = \{v\colon v = \{v^1, \ldots, v^{m-3}\}, \quad v^i = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} u^j,$$
$$u^1(\cdot) \in U_p(\cdot), \quad \|u^j\| \leqslant L_j, \ j = 2, \ldots, m\}.$$

Это множество выпукло, компактно. Если следовать далее схеме § 10, то нужно ввести множество

$$Q(v^1, \ldots, v^{m-3}, v^{m-2}) = \\ = \left\{ v^i = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} u^j,\ i = 1, \ldots, m-3;\ v^{m-2} = \varphi(u^1(\cdot), t_1) \right\}.$$

Но поскольку это множество не является в общем случае выпуклым, то в данной задаче нельзя использовать теорему об отделимости выпуклых множеств. На $\varkappa(L_2, \ldots, L_m)$ определим поверхность $\delta = \delta(v^1, \ldots, v^{m-3})$, положив

$$\delta(v^1, \ldots, v^{m-3}) = \min_{u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)} \varphi(u^1(\cdot), t_1) \tag{206}$$

при условии (203). Поверхность $\delta = \delta(v^1, \ldots, v^{m-3})$ выпукла по $\{v^1, \ldots, v^{m-3}\}$. Если бы задача (203) не имела решения, то пересечение множеств

$$R_1 = \{\zeta\colon \zeta = \{-h^1, \ldots, -h^{m-3}, \xi\},\ \xi \leqslant L_1\},$$

$$R_2 = \{\zeta\colon \zeta = \{v^1, \ldots, v^{m-3}, \varphi(u^1(\cdot), t_1)\},\ v^i = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} u^j, \\ u^1(\cdot) \in U_p(\cdot),\ \|u^j\| \leqslant L_j,\ j \neq 1\}$$

было бы пусто. В силу теоремы о существовании опорной плоскости к выпуклой поверхности (206) при некоторых $g_i \in E_p$, $f \geqslant 0$, ε имели бы

$$\min_{u^j} \left\{ \sum_{i=1}^{m-3} g_i' \sum_{j=1}^{m} S_{ij} u^j + f\varphi(u^1(\cdot), t_1) \right\} \geqslant \varepsilon > -\sum_{i=1}^{m-3} g_i' h^i + L_1 f.$$

Это означает:

$$\min_{u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)} H(g, f, u^1(\cdot)) - \sum_{j=2}^{m} L_j \left\| \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ij} \right\| - \\ - L_1 f > -\sum_{i=1}^{m-3} g_i' h^i,$$

что противоречит неравенству (205). Теорема доказана.

Теорема 35 допускает обобщение на случай нескольких ограничений типа $\varphi_i(u(\cdot), t_1) \leqslant L_i$, $i = 1, \ldots, \alpha$, где $\varphi_i(u(\cdot), t_1)$ непрерывны и выпуклы по $u(\cdot)$.

Лемма 15. **Функция $\Lambda(L_1, \ldots, L_m, t_1)$ непрерывна по L_j, t_1, не возрастает по L_j.**

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству леммы 13.

Положим $t_1 = L_0$. Управление $\{u^j\}$ назовем $\widetilde{L}_k$-допустимым, если оно удовлетворяет условиям (200) при $L_k = \widetilde{L}_k$, $L_j < \infty$, $j \neq k$.

Теорема 36. Если существует хотя бы одно $\widetilde{L}_k$-допустимое управление, то существует и оптимальное управление $\{u^{j0}\}$ со значением L_k^0 минимизируемой величины L_k, являющимся наименьшим корнем уравнения

$$\max_{\|\{g, f\}\| \leqslant 1,\ f \geqslant 0} \Lambda(L_1, \ldots, L_m, L_0, g, f) = \Lambda(L_1, \ldots, L_m, L_0, g_0, f_0) = 0.$$

Оптимальное управление определяется соотношениями

$$H(g_0, f_0, u^{10}(\cdot)) = \min_{u^1(\cdot) \in U_p(\cdot)} H(g_0, f_0, u^1(\cdot)),$$

$$\sum_{i=1}^{m-3} g'_{i0} S_{ij} u^{j0} = -L_j \left\| \sum_{i=1}^{m-3} g'_{i0} S_{ij} \right\|, \quad j \neq 1,$$

где $L_k = L_k^0$. Это утверждение следует из леммы 15 и теоремы 35.

§ 13. Условия погружаемости выпуклых множеств. Приложения к задачам оптимального управления

Мы говорим, что выпуклое множество $\varkappa_1$ погружаемо в другое выпуклое множество $\varkappa_2$, если $\overline{\varkappa}_1 \subset \operatorname{int} \varkappa_2$.

1. Условия разрешимости одной функциональной задачи. Пусть линейный оператор S преобразует r-мерные измеримые функции $u(t)$, $t \in T$, в векторы x конечномерного пространства E_n. Заданы Q_1, Q_2 — линейные невырожденные преобразования, действующие из E_n в E_n, элементы c, c_1, $c_2 \in E_n$, числа Δ_1, Δ_2, L, $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$.

З а д а ч а. Найти условия, при которых

$$\left.\begin{aligned} &Su(\cdot) + Q_1 v + Q_2 w + c = 0, \quad u(\cdot) \in U_p^L(\cdot), \\ &\|v - c_1\| \leqslant \Delta_1, \quad \|w - c_2\| \geqslant \Delta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (207)$$

Теорема 37. Задача (207) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\min_{\|g\|=1} \{g'[-c-Q_1c_1-Q_2c_2]-L\|g'S\|-\Delta_1\|g'Q_1\|+ \\ +\Delta_2\|g'Q_2\|\}\leqslant 0. \quad (208)$$

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$, $u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)$, v, w — некоторое решение задачи (207). Тогда существует $g\in E_n$, для которого

$$\Delta_2\|g'Q_2\|\leqslant\|w-c_2\|\,\|g'Q_2\|=g'Q_2(c_2-w)= \\ =g'[Su(\cdot)+Q_1v+Q_2c_2+c]\leqslant \\ \leqslant L\|g'S\|+\Delta_1\|g'Q_1\|+g'[c+Q_1c_1+Q_2c_2].$$

Значит, выполняется неравенство (208). Пусть имеет место (208). Тогда существует по крайней мере один элемент $g\in E_n$ такой, что

$$-g'[c+Q_1c_1+Q_2c_2]-L\|g'S\|- \\ -\Delta_1\|g'Q_1\|+\Delta_2\|g'Q_2\|\leqslant 0. \quad (209)$$

Допустим, что задача (207) не имеет решения. Рассмотрим множества

$$\beta(\Delta_2)=\{x\colon x=-Q_2w,\ \|w-c_2\|\leqslant\Delta_2\},$$
$$\beta(L,\Delta_1)=\{x\colon x=Su(\cdot)+Q_1v+ \\ +c,\ u(\cdot)\in U_p^L(\cdot),\ \|v-c_1\|\leqslant\Delta_1\}.$$

Эти множества выпуклы, компактны. Так как задача (207) не имеет решения, то $\beta(L,\Delta_1)$ погружаемо в $\beta(\Delta_2)$. Поэтому для каждого $f\in E_n$ и числа Δ_2 найдется такой элемент $y\in E_n$, что $\|y\|=\Delta_2$, $f'y=\Delta_2\|f\|$, и для каждого y, $\|y\|\leqslant\Delta_2$, будет выполнено неравенство $f'y\leqslant\Delta_2\|f\|$.

Пусть $f=Q_2'g$, $y=c_2-w$. Тогда $g'Q_2(c_2-w)=\|g'Q_2\|\Delta_2$ при $\|w-c_2\|=\Delta_2$ и $g'x=\|g'Q_2\|\Delta_2-g'Q_2c_2$ при $x=-Q_2w$, $\|w-c_2\|=\Delta_2$. Если $x\in\beta(L,\Delta_1)$, то $g'x=g'[Su(\cdot)+Q_1v+c]<\|g'Q_2\|\Delta_2-g'Q_2c_2$ и

$$\max_{u(\cdot),\,v} g'[Su(\cdot)+Q_1v+c]= \\ =g'(c+Q_1c_1)+L\|g'S\|+\Delta_1\|g'Q_1\|<\|g'Q_2\|\Delta_2-g'Q_2c_2.$$

Последнее неравенство справедливо для всех $g \in E_n$, что противоречит (209). Теорема доказана.

Пусть $\| g'S \| > 0$ для всех g, $\| g \| \neq 0$. Условие (208) равносильно неравенству $L \geqslant \lambda_1$, где

$$\lambda_1 = \min_{\|g'S\|=1} \{-g'[c+Q_1c_1+Q_2c_2] - \Delta_1 \|g'Q_1\| + \Delta_2 \|g'Q_2\|\}. \tag{210}$$

Теорема 38. Для того чтобы элемент $g = g_0$ был решением задачи (210), необходимо и достаточно, чтобы для произвольного решения $u(\cdot)$, $\| u(\cdot) \| = \lambda_1$, v, w задачи (207) выполнялись равенства

$$g_0'Su(\cdot) = \| g_0'S \| \, \| u(\cdot) \| = \lambda_1, \tag{211}$$

$$g_0'Q_1(v - c_1) = \Delta_1 \| g_0'Q_1 \|, \tag{212}$$

$$g_0'Q_2(w - c_2) = -\Delta_2 \| g_0'Q_2 \|. \tag{213}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть g_0 — решение задачи (210); $u(\cdot)$, $\| u(\cdot) \| = \lambda_1$, v, w — решение (207). Имеем

$$\lambda_1 = -g_0'[c + Q_1c_1 + Q_2c_2] - \Delta_1 \| g_0'Q_1 \| + \\ + \Delta_2 \| g_0'Q_2 \| = g_0'[Su(\cdot) + Q_1(v - c_1) + Q_2(w - c_2)] - \\ - \Delta_1 \| g_0'Q_1 \| + \Delta_2 \| g_0'Q_2 \| \leqslant \\ \leqslant \| g_0'S \| \, \| u(\cdot) \| + g_0'Q_1(v - c_1) + \\ + g_0'Q_2(w - c_2) - \Delta_1 \| g_0'Q_1 \| + \Delta_2 \| g_0'Q_2 \|. \tag{214}$$

Отсюда

$$g_0'[Q_1(v - c_1) + Q_2(w - c_2)] \geqslant \Delta_1 \| g_0'Q_1 \| - \\ - \Delta_2 \| g_0'Q_2 \|. \tag{215}$$

Ясно, что $g_0'Q_1(v - c_1) \leqslant \Delta_1 \| g_0'Q_1 \|$. Если бы выполнялось неравенство $g_0'Q_2(w - c_2) < -\Delta_2 \| g_0'Q_2 \|$, то из (215) сразу имели бы, что $g_0'Q_1(v - c_1) > \Delta_1 \| g_0'Q_1 \|$. Поэтому положим $g_0'Q_2(w - c_2) = -\Delta_2 \| g_0'Q_2 \| + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Нетрудно убедиться, что существует решение $u(\cdot)$, v, w такое, что $\| u(\cdot) \| < \lambda_1$. Это невозможно. Значит, выполняется условие (213). Из (215) получаем равенство (212). Используя (214), имеем (211).

Достаточность. Пусть $u(\cdot)$, $\| u(\cdot) \| = \lambda_1$, v, w — решение задачи (207) и для некоторого $g \in E_n$ выполнены условия (211) — (213). Тогда

$$- g' [c + Q_1c_1 + Q_2c_2] - \Delta_1 \| g'Q_1 \| + \Delta_2 \| g'Q_2 \| =$$
$$= g' [Su(\cdot) + Q_1(v - c_1) + Q_2(w - c_2)] - \Delta_1 \| g'Q_1 \| +$$
$$+ \Delta_2 \| g'Q_2 \| = \lambda_1 \| g'S \|.$$

Значит, g — решение задачи (210). Теорема доказана.

2. Задача максимизации нормы конечного состояния. Пусть в фазовом пространстве уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \tag{216}$$

заданы точки c_1, c_2. Для данных чисел t_1, L, Δ_1, $t_1 > t_0$, $\Delta_1 \geqslant 0$, $L > 0$ требуется найти управление $u^0(t)$, $t \in T$, $\| u^0(\cdot) \| \leqslant L$, которое обеспечивает условия

$$\|x^0(t_1) - c_2\| = \max_{\|u(\cdot)\| \leqslant L} \|x(t_1) - c_2\|, \quad \|x(t_0) - c_1\| \leqslant \Delta_1. \tag{217}$$

Эта задача в принятых ранее обозначениях (см. (127)) эквивалентна требованиям

$$Su(\cdot) + Q_1x(t_0) + Q_2x(t_1) + c = 0,$$
$$\| x(t_1) - c_2 \| = \max, \quad \| x(t_0) - c_1 \| \leqslant \Delta_1.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$Su(\cdot) + Q_1v + Q_2w + c = 0, \quad \| v - c_1 \| \leqslant \Delta_1, \tag{218}$$
$$\| w - c_2 \| \cdot \geqslant \Delta_2,$$

где $Q_2 = -E$, $u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)$, Δ_2 — неотрицательное число. В силу теоремы 37 задача (218) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_1(\Delta_2, t_1) = \min_{\|g\|=1} \Lambda_1(\Delta_2, t_1, g) = \\ &\qquad\qquad = \Lambda_1(\Delta_2, t_1, g(\Delta_2, t_1)) \leqslant 0, \\ &\Lambda_1(\Delta_2, t_1, g) = -g'[c + Q_1c_1 + Q_2c_2] - \\ &\qquad\qquad - L\|g'S\| - \Delta_1\|g'Q_1\| + \Delta_2\|g'Q_2\|. \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

Лемма 16. Функция $\Lambda_1(\Delta_2, t_1)$ непрерывна по Δ_2, t_1, строго возрастает по Δ_2.

Доказательство. Непрерывность функции $\Lambda_1(\Delta_2, t_1)$ очевидна. Покажем, что $\Lambda_1(\Delta_2, t_1)$ строго возрастает по Δ_2. Пусть $\Delta_2 < \Delta_2^*$. Имеем

$$\Lambda_1(\Delta_2^*, t_1, g(\Delta_2^*, t_1)) > \Lambda_1(\Delta_2, t_1, g(\Delta_2^*, t_1)) \geqslant \Lambda_1(\Delta_2, t_1, g(\Delta_2, t_1)).$$

Лемма доказана.

Теорема 39. Оптимальное управление в задаче (217) существует и доставляет функционалу $\varphi_2 = \| x(t_1) - c_2 \|$ значение

$$\Delta_2^0 = \max_{\|g\| \leqslant 1} \{L \| g'S \| + \Delta_1 \| (F^{-1}(t_0))' F'(t_1) g \| + g' [c + F(t_1) F^{-1}(t_0) c_1 - c_2]\} = L \| g_0'S \| + \Delta_1 \| g_0'F(t_1) F^{-1}(t_0) \| + g_0' [c + F(t_1) F^{-1}(t_0) c_1 - c_2]. \quad (220)$$

Если $\Delta_2^0 > 0$, то для оптимального управления $u^0(\cdot)$ и концов оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ выполняются соотношения

$$g_0'Su^0(\cdot) = \max_{u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)} g_0'Su(\cdot) = L \| g_0'S \|, \quad (221)$$

$$\left.\begin{aligned} g_0'F(t_1) F^{-1}(t_0) [x^0(t_0) - c_1] &= \Delta_1 \| g_0'F(t_1) F^{-1}(t_0) \|, \\ g_0' [x^0(t_1) - c_2] &= \Delta_2^0 \| g_0 \|. \end{aligned}\right\} \quad (222)$$

Доказательство. Соотношение (220) получается из (219), если учесть, что $\Lambda_1(\Delta_2, t_1)$ монотонна по Δ_2. Равенства (221), (222) следуют из теоремы 38.

3. Задача оптимального быстродействия. Рассмотрим множества

$$\Gamma^1 = \{x: \| x - c_1 \| \leqslant \Delta_1\}, \qquad \Gamma^2 = \{x: \| x - c_2 \| \geqslant \Delta_2\},$$

где c_1, c_2 — фиксированные точки, Δ_1, Δ_2 — заданные неотрицательные числа такие, что множество $\Gamma^1 \cap \Gamma^2$ пусто. Требуется определить управление $u^0(\cdot) \in U_p^L(\cdot)$, при котором траектория уравнения (216) с начальным условием $x^0(t_0) \in \Gamma^1$ достигает Γ^2 в минимально возможное время.

В силу изложенного выше T-допустимое управление в данной задаче существует лишь в случае, если выполнено неравенство (219). Положим

$$\Lambda_1(t_1, g(t_1)) = \min_{\| g \| \leqslant 1} \Lambda_1(\Delta_2, t_1, g).$$

Теорема 40. Если существует хотя бы одно T-допустимое управление, то существует и оптимальное управление со временем быстродействия $\tau^0 = t_1^0 - t_0$, где t_1^0 — наименьший корень уравнения

$$\Lambda_1(t_1,\ g(t_1)) = 0.$$

Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ и концы оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ удовлетворяют условиям

$$g'(t_1^0)\,Su^0(\cdot) = L\,\|g'(t_1^0)\,S\|,$$
$$g'(t_1^0)\,F(t_1^0)\,F^{-1}(t_0)\,[x^0(t_0) - c_1] = \Delta_1\,\|g'(t_1^0)\,F(t_1^0)\,F^{-1}(t_0)\|,$$
$$g'(t_1^0)\,[x^0(t_1^0) - c_2] = \Delta_2.$$

Утверждение доказывается аналогично теореме 27.

§ 14. Обобщенная лемма Неймана — Пирсона в теории оптимальных процессов

Как указывалось в §§ 9, 10, вариационные задачи оптимального управления можно считать сведенными к конечномерным задачам, если вычисление

$$\mu(g) = \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} g'S(t_1, \tau, u(\tau))\,d\tau$$

достаточно просто осуществляется для заданного семейства $U(\cdot)$ допустимых управлений. До сих пор эту задачу удавалось решить или непосредственным счетом (§ 9), или с помощью множителей Лагранжа (§ 10), или с помощью теоремы Куна — Таккера (§ 10). В этом параграфе мы изложим еще один способ вычисления (223) для случая, когда семейство $U(\cdot)$ имеет специальный вид.

Пусть требуется найти

$$\mu(g) = \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} g'\,S(t_1,\ \tau)\,u(\tau)\,d\tau = \inf_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} a'(t)\,u(t)\,dt, \qquad (223)$$

$$U(\cdot) = \Bigl\{u(t)\colon\ |u_j(t)| \leqslant 1,\ \ t \in T,\ \ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{r} |b_j(t)\,u_j(t) - \varphi_j(t)|^p\,dt \leqslant k\Bigr\}. \qquad (224)$$

Здесь $b_j(t)$, $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, r$; $t \in T$,— заданные кусочно-непрерывные функции, p, k, $p \geqslant 1$, $k > 0$,— заданные числа. Подобная задача рассматривается в [12], где интегральное ограничение имеет вид $\int_{t_0}^{t_1} b'(t)\, u(t)\, dt \leqslant k$. Решение последней задачи дает лемма Неймана — Пирсона. Ниже используются аналогичные рассуждения.

Вначале будем считать $p > 1$. Задача, очевидно, имеет решение, если первое неравенство (224) выполняется при

$$u_i(t) = \operatorname{Sat}\frac{b_i(t)}{\varphi_i(t)}, \qquad i = 1, \ldots, r; \ t \in T, \tag{225}$$

где

$$\operatorname{Sat}\gamma = \begin{cases} 1, & \gamma \geqslant 1, \\ \gamma, & -1 \leqslant \gamma \leqslant 1, \\ -1, & \gamma \leqslant -1. \end{cases}$$

В противном случае неравенства из (224) не могут быть удовлетворены одновременно, ибо при $u(t)$, определенном по (225), интеграл в (224) имеет минимальное значение. Введем функции $\psi_i(\tau, \lambda)$:

$$\psi_i(\tau, \lambda) = -\left|\frac{a_i(t)}{\lambda p b_i(t)}\right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sign} a_i(t) + \frac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}, \tag{226}$$

$$\lambda b_i(t) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

где λ — вещественный параметр. Положим

$$u_i(t, \lambda) = \begin{cases} \operatorname{Sat}\psi_i(t, \lambda), & \lambda b_i(t) \neq 0, \\ -\operatorname{sign} a_i(t), & \lambda b_i(t) = 0, \quad a_i(t) \neq 0, \\ \text{произвольная функция} & \\ u_i(t), \ |u_i(t)| \leqslant 1, & \lambda b_i(t) = a_i(t) = 0. \end{cases} \tag{227}$$

Пусть λ_0 — точная нижняя грань неотрицательных λ, для которых соответствующие функции $u(t, \lambda)$ удовлетворяют второму неравенству (224).

Обобщенная лемма Неймана — Пирсона. Функции $u^*(\tau)$, $\tau \in T$, $i = 1, \ldots, r$, минимизирующая функционал (223), определяются по формуле

$$u^*(\tau)=u(\tau,\ \lambda_0). \tag{228}$$

Приведем схему доказательства. Справедливость леммы при $\lambda_0=0$ очевидна. При убывании λ от $+\infty$ до 0 величина $\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum\limits_{i=1}^{r}|b_i(t)u_i(t,\ \lambda)-\varphi_i(t)|^p\,dt$ монотонно возрастает от своего минимального значения $\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum\limits_{i=1}^{r}\left|b_i(t)\operatorname{Sat}\frac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}-\varphi_i(t)\right|^p dt$. Поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{r}|b_i(t)u_i(t,\ \lambda_0)-\varphi_i(t)|^p\,dt=k \quad \text{при} \quad \lambda_0>0.$$

Для любого управления $u(\cdot)\in U(\cdot)$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_0\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{r}|b_i(t)u_i^*(t)-\varphi_i(t)|^p\,dt-\\
&\qquad\qquad-\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{r}|b_i(t)u_i(t)-\varphi_i(t)|^p\,dt\Bigg]\geqslant 0,\\
&\Delta=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{r}a_i(t)\,[u_i(t)-u_i^*(t)]\,dt\geqslant\\
&\qquad\qquad\geqslant\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{r}\{a_i(t)\,[u_i(t)-u_i^*(t)]+\\
&+\lambda_0\,[|b_i(t)u_i(t)-\varphi_i(t)|^p-|b_i(t)u_i^*(t)-\varphi_i(t)|^p]\}\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{229}$$

Если функции $u_i^*(t)$, $t\in T$, $i=1,\ldots,r$, определены по (228), (227), (226), то выражение в фигурных скобках в (229) неотрицательно при любых $u(\cdot)\in U(\cdot)$. Поэтому $\Delta\geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только при $u(\cdot)=u^*(\cdot)$. Этим завершается доказательство.

Предельным переходом из леммы получается решение для $p = 1$. При этом $u^*(t) = u(t, \lambda_0)$,

$$u_i(t, \lambda) = \begin{cases} -\operatorname{sign} a_i(t), & |a_i(t)| > |\lambda b_i(t)|; \\ \operatorname{Sat}\dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}, & \begin{cases} |a_i(t)| < |\lambda b_i(t)|, \text{ или} \\ |a_i(t)| = |\lambda b_i(t)|, \left|\dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}\right| \geqslant 1, \\ \operatorname{sign} a_i(t) = -\operatorname{sign}\dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}; \end{cases} \\ \text{произвольная функция } z_i(t), \\ \dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)} \leqslant z_i(t) \leqslant \\ \leqslant -\operatorname{sign} a_i(t) & |a_i(t)| = |\lambda b_i(t)|, \left|\dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}\right| < 1; \\ \text{произвольная функция } y_i(t), & |a_i(t)| = |\lambda b_i(t)|, \left|\dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}\right| \geqslant 1, \\ \quad |y_i(t)| \leqslant 1, & \operatorname{sign} a_i(t) = \operatorname{sign}\dfrac{\varphi_i(t)}{b_i(t)}. \end{cases}$$

Число λ_0 определяется как точная нижняя грань неотрицательных λ, для которых во множестве соответствующих функций $u_i(t, \lambda)$ имеются функции, удовлетворяющие условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{r} |b_i(t)\, u_i(t, \lambda) - \varphi_i(t)|\, dt \leqslant k.$$

Укажем одну из возможных интерпретаций задачи с ограничениями (224). Пусть $b_i(t) \equiv 1$, $i = 1, \ldots, r$. Предположим, что функции $\varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$; $t \in T$, означают управления, вычисленные для системы из некоторых соображений (например, из оптимальности системы в каком-либо смысле). Тогда задачу с ограничениями (224) можно рассматривать как нахождение такого управления $u^0(t)$, $|u_i^0(t)| \leqslant 1$, которое, мало отличаясь в среднем от программного управления $\varphi(t)$, минимизирует длину вектора конечного состояния.

§ 15. Статистические задачи оптимального управления (подход функционального анализа)

В последние годы в теории оптимальных процессов видное место занимают проблемы управления в стохастических системах. Наиболее общие результаты в этом направлении получены Л. С. Понтрягиным, Е. Ф. Мищенко [97a], Р. Беллманом [11c], А. А. Фельдбаумом [124c], Н. Н. Красовским [74h], Р. Л. Стратоновичем [120]. Ниже для построения оптимальных управлений в системах, подверженных действию случайных факторов, используются методы функционального анализа. Статистические задачи сводятся к эквивалентным детерминированным; исследуются свойства оптимальных решений.

1. Задача минимизации математического ожидания функций конечного состояния (дискретный тип распределения вероятностей).

(1) Постановка задачи. Пусть n-мерный случайный процесс $x(t)$ в момент времени $t = t_1$ задается соотношением

$$x(t_1) = s(t_1, x_0, f(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, t)\, u(t)\, dt, \quad x(t_0) = x_0,$$

где элементы вектора $s(z_1, z_2, z_3)$, матрицы $S(z_1, z_4)$ непрерывны по всем аргументам, $f(t)$ — функция, описывающая внешние случайные помехи, $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$ — управляющее воздействие, стесненное условием

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{r} |u_j(t)|^p\, dt \leqslant L^p, \qquad p > 1.$$

Последнее ограничение запишем в виде $u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)$. Положим

$$s(t_1, x_0, f(t_1)) = \tilde{c}, \qquad \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, t)\, u(t)\, dt = Su(\cdot),$$

$$x(t_1) = \tilde{x}.$$

Тогда имеем

$$\tilde{x} = Su(\cdot) + \tilde{c}. \tag{230}$$

Здесь $\tilde{x}$ — элемент n-мерного пространства E_n. Это уравнение и будем изучать в дальнейшем. Предположим, что матрица $S(t_1, t)$ такова, что функции $[S(t_1, t)]_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы хотя бы при одном $j = 1, \ldots, r$. Тогда, как нетрудно убедиться, $\| g'S \| > 0$ для всех g, $\| g \| \neq 0$.

Обозначим через Mf математическое ожидание случайной величины f. Пусть дана положительная функция $\varphi(x)$. Требуется найти управление $u^0(t)$, $t \in T$, при котором

$$M\varphi(x(\tilde{c}, u^0(\cdot), t_1)) = \min_{u(\cdot) \in U_p^{\mathbf{Z}}(\cdot)} M\varphi(x(\tilde{c}, u(\cdot), t_1)) = \tilde{\delta}. \tag{231}$$

Назовем e *средним значением* (*средним*) *случайного вектора* $\tilde{c}$, число d — *мерой рассеяния* (*рассеянием*), если

$$d = M\varphi(\tilde{c} - e) = \min_{x \in E_n} M\varphi(\tilde{c} - x).$$

Допустим, что

$$\varphi(x) = \| x \|_{\bar{p}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^{\bar{p}}\Big)^{1/\bar{p}}, \quad \bar{p} > 1. \tag{232}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\tilde{c}$ принимает конечное число значений c_j, $j = 1, \ldots, m$, $\| c_j \| < \infty$. Пусть вероятность события $\tilde{c} = c_j$ равна p_j $\Big(p_j > 0,\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\Big)$.

(2) Оптимальные управления. Обозначим через E_{nm} прямую сумму из m пространств E_n, каждое из которых n-мерно. Пусть

$$\| z \| = \sum_{j=1}^{m} p_j \| x_j \|, \qquad z \in E_{nm},\ x_j \in E_n.$$

Если x_j — значение $\tilde{x}$, обусловленное реализацией c_j вектора $\tilde{c}$, то из (230) имеем

$$z = Pu(\cdot) + \eta, \quad P = \{\underbrace{S, \ldots, S}_{m}\}, \quad \eta = \{c_1, \ldots, c_m\}.$$

Значит, задача (231), (232) сведена к определению величины $\tilde{\delta} = \min\limits_{u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)} \|z\|$. Ясно, что

$$f'P = \sum_{j=1}^{m} f_j'S, \quad f \in E_{nm}, \quad f_j \in E_n, \quad \|f\| = \max_j \{\|f_j\|/p_j\}.$$

Поэтому

$$\tilde{\delta} = \max_{\|f\|=1} \{f'\eta - L\|f'P\|\} = \max_{\max\limits_j \|f_j\|=1} \left\{\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' c_j - L\left\|\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' S\right\|\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}' c_j - L\left\|\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}' S\right\|, \qquad (233)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}' S u^0(\cdot) = \min_{u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)} \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0} S u(\cdot). \qquad (234)$$

Экстремальные элементы f_{j0} задачи (233) можно однозначно отнести к одному из двух случаев:

α) $f_{j0} = \hat{g}$, $\|\hat{g}\| = 1$, $j = 1, \ldots, m$;

β) $\left\|\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}\right\| < 1$, $\|f_{j0}\| = 1$.

Лемма 17. Для того чтобы $f_{j0} = \hat{g}$, $j = 1, \ldots, m$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_{\|g\|=1} \{g'c_j - L\|g'S\|\} = \hat{g}'c_j - L\|\hat{g}'S\|, \quad j = 1, \ldots, m. \qquad (235)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f_{j0} = \hat{g}$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $\tilde{\delta} = \sum_{j=1}^{m} p_j \hat{g}' c_j - L\|\hat{g}'S\|$. Если

$$\max_{\|g\|=1} \{g'c_k - L\|g'S\|\} = g_k'c_k - L\|g_k'S\|, \quad g_k \neq \hat{g},$$

то

$$g_k'c_k - L\|g_k'S\| > \hat{g}'c_k - L\|\hat{g}'S\|,$$

и поэтому

$$\sum_{j=1,\ j\neq k}^{m} p_j\hat{g}'c_j + p_k g_k' c_k - L\,\Big\|\sum_{j=1,\ j\neq k}^{m} p_j\hat{g}'S + p_k g_k' S\Big\| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1,\ j\neq k}^{m} p_j\,[\hat{g}'c_j - L\,\|\hat{g}'S\|] + p_k g_k' c_k - p_k\,\|g_k' S\| >$$

$$> \sum_{j=1}^{m} p_j\hat{g}'c_j - L\,\|\hat{g}'S\|,$$

что невозможно. Значит, выполняется условие (235).

Достаточность. Если экстремальные элементы в задаче (235) при всех j равны между собой, то в силу теоремы 26 система (230) может быть приведена в ближайшее к точке $x=0$ состояние x_{j0} для каждого c_j с помощью одного и того же управления. Но

$$\min_{u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)} \sum_{j=1}^{m} p_j\,\|Su(\cdot)+c_j\| \geqslant \sum_{j=1}^{m} p_j \min_{u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)} \|x_j\|.$$

Следовательно, не существует элемента f_{j0}, при котором

$$\tilde{\delta} < \sum_{j=1}^{m} p_j\hat{g}'c_j - L\,\|\hat{g}'S\|.$$

Значит, $f_{j0}=\hat{g}$, $j=1,\ \ldots,\ m$, и лемма доказана.

Лемма 18. Пусть выполнено условие β). Существует вектор λ, $\|\lambda\|\neq 0$, $\lambda\in E_n$, такой, что

$$\left.\begin{aligned} &\max_{\|f_j\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' c_j - L\,\Big\|\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' S\Big\|\Big\} = \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{m} p_j\,\|c_j-\lambda\| + g'\lambda - L\,\|g'S\|,\\ &\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0} - g = 0,\quad f_j'(c_j-\lambda) = \|c_j-\lambda\|. \end{aligned}\right\} \tag{236}$$

Доказательство. В $(n+1)$-мерном пространстве $\{v,\ v_{n+1}\}$ рассмотрим множество $G=\Big\{v\colon\ v=\sum_{j=1}^{m} p_j f_j,\ v_{n+1}=$ $=\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' c_j - L\,\Big\|\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' S\Big\|,\ \|f_j\|\leqslant 1\Big\}$. Множество G

компактно. Задача, сформулированная в условиях леммы, состоит в нахождении точки из G, у которой $v=g$, $v_{n+1}=\max$. Рассмотрим вогнутую функцию

$$z(f_1, \ldots, f_m)=\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' c_j - L \left\| \sum_{j=1}^{m} p_j f_j' S \right\|,$$

определенную на выпуклом множестве $\sigma=\{\{f_1, \ldots, f_m\}: \|f_j\| \leqslant 1\}$. Так как g — внутренняя точка σ, то существует такой вектор $\{l, l_{n+1}\}$, $l_{n+1}>0$, что

$$-l'g+l_{n+1}z(f_{10}, \ldots, f_{m0})=$$
$$=\max_{\|f_j\|\leqslant 1}\left\{-l' \sum_{j=1}^{m} p_j f_j + l_{n+1}\left[\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' c_j - L\|g'S\|\right]\right\},$$

т. е.

$$z(f_{10}, \ldots, f_{m0})=g'l/l_{n+1}-L\|g'S\|+$$
$$+\max_{\|f_j\|\leqslant 1}\sum_{j=1}^{m} p_j f_j' (c_j - l/l_{n+1})=$$
$$=g'\lambda-L\|g'S\|+\sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j-\lambda\|.$$

Здесь

$$\lambda=l/l_{n+1}, \quad g=\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}, \quad \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}'(c_j-\lambda)=\sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j-\lambda\|.$$

Утверждение доказано.

Лемма 19. Вектор λ удовлетворяет соотношениям (236) тогда и только тогда, когда

$$\min_x \left\{g'x+\sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j-x\|\right\}=g'\lambda+\sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j-\lambda\|. \tag{237}$$

Доказательство. Так как

$$\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}'(c_j-x) \leqslant \sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j-x\|$$

для любого $x \in E_n$, то

$$\sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}' c_j \leqslant g'x+\sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j-x\|.$$

С другой стороны, в силу (236) имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{m} p_j f'_{j0} c_j = g'\lambda + \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \|.$$

Значит, справедливо условие (237). Допустим, что равенство (237) выполнено. Тогда

$$\min_x \{g'x + \max_{\|f_j\| \leq 1} \sum_{j=1}^{m} p_j f_j (c_j - x)\} =$$

$$= g'\lambda + \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0} (c_j - \lambda) = g'\lambda + \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - \lambda \|,$$

т. е. выполняется второе соотношение из (236). Очевидно, справедливы равенства

$$g'\lambda + \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0} (c_j - \lambda) = \min_x \{g'x + \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0} (c_j - x)\} =$$

$$= \min_x \{x' [g - \sum_{j=1}^{m} p_j f_{j0}] + \sum_{j=1}^{m} p_j f'_{j0} c_j\}.$$

Поэтому необходимо, чтобы $g = \sum_{j=1}^{m}{}' p_j f_{j0}$. Лемма доказана.

Теорема 41. Оптимальное управление в задаче (230) — (232) существует.

Если выполнены условия (235), то

$$\tilde{\delta} = \max_{\|g_i\|=1} \{g' M \tilde{c} - L \| g'S \|\} = \hat{g}' M \tilde{c} - L \| \hat{g}' S \|. \quad (238)$$

При $\tilde{\delta} > 0$ оптимальное управление $u^0(\cdot)$ определяется соотношением

$$\hat{g}' S u^0(\cdot) = \min_{u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)} \hat{g}' S u(\cdot) = -L \| \hat{g}' S \|. \quad (239)$$

Если условия (235) не выполнены, то

$$\tilde{\delta} = \max_g \min_x \{\sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| + g'x - L \| g'S \| \} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x^0 \| + g'_0 x^0 - L \| g'_0 S \|. \quad (240)$$

При $\tilde{\delta} > 0$ оптимальное управление определяется соотношением (239), где $\hat{g} = g_0$.

Доказательство. Формулы (238), (239) следуют из (233), (234), если учесть, что выполнены условия (235). Вторая часть утверждения также получается из соотношений (233), (234), так как в случае β) справедливы леммы 18, 19.

Таким образом, если выполнены условия α), оптимальное управление в статистической задаче (230) — (232) совпадает с решением задачи минимизации нормы конечного состояния системы

$$x = Su(\cdot) + M\tilde{c}.$$

В случае β) функция $u^0(\cdot)$ такова же, как в задаче минимизации нормы конечного состояния для системы

$$x = Su(\cdot) + x^0.$$

Здесь x^0 — элемент седловой точки игры (240).

(3) Некоторые свойства решений. 1) Из определения седловой точки игры (240) имеем

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x^0 \| + g'x^0 - L \| g'S \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x^0 \| + g_0'x^0 - L \| g_0'S \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| + g_0'x - L \| g_0'S \| \quad (241)$$

для всех x, $g \in E_n$. Пусть $x = x^0$. Тогда первое неравенство в (241) приводит к соотношению

$$g_0'x^0 - L \| g_0'S \| = \max_{\| g \| \leqslant \| g_0 \|} \{ g'x^0 - L \| g'S \| \}. \quad (242)$$

Положив $g = g_0$, из второго неравенства (241) имеем

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x^0 \| + g_0'x^0 = \min_x \left\{ \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| + g_0'x \right\}. \quad (243)$$

Наоборот, если векторы x^0, g_0 удовлетворяют соотношениям (242), (243), то они являются элементами седловой точки игры (240).

2) Точка $\{g_0, x^0\}$ удовлетворяет условию

$$g_0'x^0 - L\, \| g_0'S \| = \beta(g_0, x^0) = 0. \tag{244}$$

В самом деле, из первого неравенства (241) видно, что неравенство $\beta(g_0, x^0) < 0$ невозможно. Положив $g = g_0/\| g_0 \|$, убеждаемся, что $\beta(g_0, x^0)$ не может быть и положительной величиной.

3) Элемент g_0 седловой точки $\{g_0, x^0\}$ удовлетворяет условию

$$\min_{x \in G_1} g_0'x = \max_{x \in G_2} g_0'x, \tag{245}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \Big\{x\colon \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| \leqslant \tilde{\delta}\Big\}, \\ G_2 &= \{x\colon x = -Su(\cdot),\ u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)\}. \end{aligned}\right\} \tag{246}$$

Действительно, из (240) имеем

$$\tilde{\delta} = \min_x \Big\{ \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| + \max_{\| g \| \leqslant \| g_0 \|} [g'x - L \| g'S \|] \Big\}.$$

Учитывая (244), получаем

$$\tilde{\delta} = \min_x \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| \tag{247}$$

при условии

$$\Delta(x) = \max_{\| g \| \leqslant \| g_0 \|} \{g'x - L \| g'S \|\} \leqslant 0. \tag{248}$$

Но множество $Q = \{x\colon \Delta(x) \leqslant 0\}$ совпадает с G_2, что и доказывает утверждение.

4) Пусть e — среднее, d — рассеяние случайного вектора $\tilde{c}$. Существует число q, $0 \leqslant q \leqslant 1$, такое, что

$$\tilde{\delta} = d + q \{ \max_{\| g \| \leqslant \| g_0 \|} [g'e - L \| g'S \|] \}. \tag{249}$$

В самом деле,

$$\tilde{\delta} \geqslant \min_{x \in E_n} \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - x \| = \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - e \| = d. \tag{250}$$

В силу (241), (243) имеем

$$\tilde{\delta} \leqslant \sum_{j=1}^{m} p_j \| c_j - e \| + \max_{\| g \| \leqslant \| g_0 \|} [g'e - L \| g'S \|],$$

что вместе с (250) означает справедливость (249).

5) Если $\Delta(e) < 0$, то $\tilde{\delta} = d$, $x^0 = e$, $g_0 = 0$.

Это утверждение — следствие условия (247). Оптимальное управление в случае 5) может быть определено одним из следующих способов: 1) уменьшением L до $L = L_1$, пока не выполнится равенство $\Delta(e) = 0$; 2) определением (при фиксированном L) момента t_1, когда $\Delta(e) = 0$. Минимальное значение $\tilde{\delta}$ достигается с помощью управления, доставляющего решение одной из следующих детерминированных задач:

1) $$x = Su(\cdot) + e, \quad \min_{u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)} \|x\| = 0,$$

2) $$x = Su(\cdot) + e, \quad x|_{t_1^0} = 0, \quad t_1^0 = \min_{u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)} \{t : x|_t = 0\}.$$

Ниже предполагается, что $\Delta(e) > 0$.

6) Седловая точка $\{g_0, x^0\}$ такова, что выполняются неравенства
$$g_0' x^0 > 0, \qquad g_0' e > 0. \tag{251}$$

Первое неравенство следует из (244). Докажем справедливость второго неравенства. Допустим, что $g_0' e < 0$. Тогда
$$g_0' x^0 + \sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j - x^0\| > g_0' e + \sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j - e\|,$$
что противоречит (243). Утверждение доказано.

7) Если $n = 1$, то оптимальное управление полностью определяется средним e. Действительно, утверждение очевидно, если выполнены условия (235). В противном случае утверждение следует из неравенств (251).

8) Пусть $n > 1$. Если
$$\min_x \left\{ \sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j - x\| + g' x \right\} = \sum_{j=1}^{m} p_j \|c_j - e\| + g' e$$
при условии $\{g : g' e > 0, \ \|g\| = l\}$ и $\max l = \|g_0\|$, то
$$\tilde{\delta} = d + \|g_0\| \max_{\|g\| \leqslant \|g_0\|} \{g' e - L \|g' S\|\}.$$

В этом случае оптимальное управление полностью определяется средним e.

(4) Задача минимизации. Функционал $M\gamma(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} p_j (x_j' x_j)^{p/2}\right)^{1/p}$, $p > 1$. Пусть $p = 2$.

Теорема 42. Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ существует и доставляет функционалу $M\gamma(x)$ такое значение ε, что

$$\varepsilon^2 = d^2 + \Delta_1^2(M\tilde{c}), \tag{252}$$

где

$$\Delta_1(M\tilde{c}) = \max_{\|g\| \leq 1} \{g' M\tilde{c} - L \| g'S \| \} = \hat{g}' M\tilde{c} - L \| \hat{g}' S \|. \tag{253}$$

Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ определяется соотношением (239) при $g = \hat{g}$, т. е. полностью характеризуется величиной $M\tilde{c}$.

Доказательство. Найдем среднее и рассеяние. Имеем

$$\min_x \left(\sum_{j=1}^{m} p_j (c_j - x)' (c_j - x)\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} p_j (c_j - M\tilde{c})' (c_j - M\tilde{c})\right]^{1/2}. \tag{254}$$

Значит, $e = M\tilde{c}$. Из (254) имеем

$$d^2 = M\tilde{c}'\tilde{c} - [M\tilde{c}]' M\tilde{c},$$

т. е. рассеяние равно дисперсии случайного вектора $\tilde{c}$. Если выполнены условия (235), то в силу формулы (233) можно сделать вывод: экстремальный элемент g задачи (233) определяется величиной $M\tilde{c}$, т. е. $g = \hat{g}$. Нетрудно убедиться, что $\varepsilon = d$.

Пусть $g_k \neq \hat{g}$. Докажем, что справедливо соотношение (252). Положим

$$\min_{u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)} \left\{\sum_{j=1}^{m} p_j [Su(\cdot) + c_j]' [Su(\cdot) + c_j]\right\}^{1/2} = \varepsilon.$$

В силу (247), (248) имеем

$$\varepsilon^2 = \max_{\|g\| \leq 1} \min_x \sum_{j=1}^{m} p_j (c_j - x)' (c_j - x)$$

при условии $g'x - L\|g'S\| = 0$. Найдем минимум по x с помощью правила множителей Лагранжа. Пусть

$$H(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j (c_j - x)'(c_j - x) + \lambda (g'x - L\|g'S\|).$$

Тогда

$$\operatorname{grad} H(x) = 2 \sum_{j=1}^{m} p_j (x - c_j) + \lambda g, \qquad x = M\tilde{c} - \frac{\lambda}{2} g.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 = \max_{\|g\| \leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{m} p_j [c_j - M\tilde{c} - (g'M\tilde{c} - L\|g'S\|) \times$$
$$\times (g'g)^{-1} g]' [-(g'M\tilde{c} - L\|g'S\|)(g'g)^{-1} g + c_j - M\tilde{c}] \Big\} =$$
$$= d^2 + [\max_{\|g\| \leq 1} \{g'M\tilde{c} - L\|g'S\|\}]^2.$$

Теорема доказана.

Пусть $p = 4$. Из (245) получаем

$$\min_{\sum_{j=1}^{m} p_j [(c_j - x)'(c_j - x)]^2 \leq \delta^4} g'x = \max_{\Delta(x) \leq 0} g'x.$$

Положим

$$h(x) = g'x + \lambda \sum_{j=1}^{m} p_j [(c_j - x)'(c_j - x)]^2.$$

Тогда

$$\operatorname{grad} h(x) = g - 4\lambda \sum_{j=1}^{m} p_j [c_j'c_j - 2x'c_j + x'x](c_j - x). \tag{255}$$

Разложим векторы c_j по элементам l_i некоторого базиса $l_1, \ldots, l_n$ в E_n. Из (255) имеем

$$\operatorname{grad} h(x) =$$
$$= g + 4\lambda x \Big\{ \sum_{s,k=1}^{n} M a_s a_k (l_s' l_k) - 2 \sum_{i=1}^{n} M a_i l_i' x + x'x \Big\} -$$
$$- 4\lambda \Big\{ \sum_{s,k,i=1}^{n} M a_s a_k a_i l_s' l_k l_i - 2 \sum_{i,s=1}^{n} M a_i a_s l_i' x l_s + \sum_{i=1}^{n} M a_i x'x \Big\},$$

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} l_i.$$

Видно, что x из условия равенства нулю $\operatorname{grad} h(x)$ найдется как функция λ, g, Ma_s, $Ma_s a_k$, $Ma_s a_k a_i$. Значит, величина g_0 в общем случае будет зависеть от Ma_s, $Ma_s a_k$, $Ma_s a_k a_i$; $s, k, i = 1, \ldots, n$. Таким образом, оптимальное управление при $p = 4$ полностью характеризуется величинами Ma_s, $Ma_s a_k$, $Ma_s a_k a_i$; $s, k, i = 1, \ldots, n$.

Если не производить разложения c_j по элементам базиса, то получаем, что оптимальное управление характеризуется величинами $M\tilde{c}$, $M\tilde{c}'\tilde{c}$, $M\tilde{c}\tilde{c}'\tilde{c}$, $M\tilde{c}c_k$, где c_{jk} — k-й компонент j-й реализации.

Примечание. При произвольном задании нормы в E_n нельзя, вообще говоря, найти характеристики случайного вектора, число которых было бы меньше числа реализаций: можно построить примеры, когда оптимальное управление зависит от вероятности каждой реализации.

(5) Системы со случайными параметрами. Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \alpha(t)b(t)u(t) + r(t), \tag{256}$$

где $x \in E_n$; $b(t)$, $r(t)$ — известные непрерывные вектор-функции; $A(t)$ — заданная непрерывная матрица. Предполагается, что скалярная функция $\alpha(t)$ описывает случайный процесс следующего типа: смена значений $\alpha(t)$ возможна в моменты τ_k $(k = 1, \ldots, s)$, $\tau_s = t_1$, причем на каждом отрезке $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ функция $\alpha(t)$ принимает одно из заданных значений α_i, $i = 1, \ldots, m$.

Обозначим через $p(i_1, \ldots, i_s)$ вероятность события, состоящего в реализации для первого отрезка значения α_{i_1}, для второго α_{i_2} и т. д. Требуется определить управление $u^0(\cdot) \in U_p^L(\cdot)$, минимизирующее функционал (231), (232).

Фундаментальная матрица решений $F(t)$ однородной системы, соответствующей (256), определяет операторы S_k:

$$S_k u_k(\cdot) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(t_1)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad k = 1, \ldots, s.$$

Положим

$$F(t_1)F^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1)F^{-1}(\tau)r(\tau)\,d\tau = c. \tag{257}$$

Пусть

$$\min_{\{v_k\}_1^s}\Big\{\sum_{\{i_k=1\}_1^s}^{m} p(i_1, \ldots, i_s)\Big\|c-\sum_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}v_k\Big\|\Big\}=$$
$$=\sum_{\{i_k=1\}_1^s}^{m} p(i_1, \ldots, i_s)\Big\|c-\sum_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}e_k\Big\|,$$

$$\eta_k=\Big\{v_k: \max_{\|g_k\|=1}\Big[\sum_{k=1}^{s} g_k'v_k-L\|g_k'S_k\|\Big]\leqslant 0\Big\}.$$

Теорема 43. Оптимальное управление в задаче (230)—(232) существует.

Если $e_k \in \operatorname{int}\eta_k$, то

$$\tilde{\delta}=\max_{g_k}\min_{\{z_k\}_1^s}\Big\{\sum_{\{i_k=1\}_1^s}^{m} p(i_1, \ldots, i_s)\Big\|c-\sum_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}z_k\Big\|+$$
$$+\sum_{k=1}^{s}[g_k'z_k-L\|g_k'S_k\|]\Big\}=$$
$$=\sum_{\{i_k=1\}_1^s}^{m} p(i_1, \ldots, i_s)\Big\|c-\sum_{k=1}^{s}\alpha_{i_k}z_k^0\Big\|+\sum_{k=1}^{s}[g_{k0}'z_k^0-L\|g_{k0}'S_k\|].$$

При $\tilde{\delta}>0$ оптимальное управление $u_k^0(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{k=1}^{s} g_{k0}'S_ku_k^0(\cdot)=\min_{u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)}\sum_{k=1}^{s} g_{k0}'S_ku_k(\cdot).$$

Утверждение доказывается аналогично теореме 41.

Примечания. 1) Результаты, относящиеся к системам (256), где x_0 — случайная величина, $r(t)$, $\alpha(t)$ — случайные функции, опускаем из-за громоздкости соответствующих формул. Методика исследования таких систем строится по схеме, описанной в подпунктах (1)—(4).

2) Задача определения векторов g_{k0} упрощается для $M\varphi(\tilde{x})=\Big(\sum_{j=1}^{m} p_j(x_j'x_j)\Big)^{1/2}$. Если в этом случае $s=2$, то

$$\tilde{\delta}^2=M[\omega^{-1}\alpha(t_0)\xi+\alpha(t_1)\eta-\omega]^2c'c-$$
$$-\max_{g_1, g_2}[\omega^{-1}c'(\xi g_1+\eta g_2)-L\|g_1'S_1\|-L\|g_2'S_2\|]M^{-1}\gamma,$$

где

$$\omega = M\alpha^2(t_0)\,M\alpha^2(t_1) - M\alpha(t_0)\,\alpha(t_1),$$
$$\xi = M\alpha(t_0)\,M\alpha^2(t_1) - M\alpha(t_1)\,M\alpha(t_0)\,\alpha(t_1),$$
$$\eta = M\alpha(t_1)\,M\alpha^2(t_0) - M\alpha(t_0)\,M\alpha(t_0)\,\alpha(t_1),$$
$$\gamma = [\alpha(t_1)\,g_1 - \alpha(t_0)\,g_2]'\,[\alpha(t_1)\,g_1 - \alpha(t_0)\,g_2]\,\omega^{-1}.$$

Вычисление элементов g_{k0} можно более упростить, если на случайный процесс $\alpha(t)$ наложить ограничения.

Допустим, что значения, которые принимает случайная функция $\alpha(t)$ в разных интервалах, независимы и, кроме того, $M\alpha(t) = 0$, $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \geqslant 2$. Тогда, например, для случая $s = r$ имеем

$$\widetilde{\delta}^2 = D^2\alpha(t_0)\,M^{-1}\alpha^2(t_0)\,c'c + \max_{g_1}\{M\alpha(t_0)\,M^{-1}\alpha^2(t_0)\,g_1'c -$$
$$- L\,\|g_1'S_1\| - LD\alpha(t_1)\,[1 - g_1'g_1M^{-1}\alpha^2(t_0)]^{1/2}\,\|S_2\|\},$$
$$\|S_2\| = \max_{\|g\|\leqslant 1}\|g'S_2\| = \|g_{20}'S_2\|$$
$$(D\widetilde{x} = M\widetilde{x}'\widetilde{x} - M'\widetilde{x}M\widetilde{x}).$$

3) Статистическую задачу из п. 1 можно интерпретировать как следующую детерминированную. Пусть в E_n задано множество σ, состоящее из m точек $c_1, \ldots, c_m$. Требуется перевести траекторию уравнения (216) за время $\tau = t_1 - t_0$ из точки $x(t_0) = x_0$ в такую точку $x = a$, что

$$\sum_{j=1}^{m} p_j\,\|c_j - a\| = \min_{u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)} \sum_{j=1}^{m} p_j\,\|c_j - x(x_0, u(\cdot), t_1)\|.$$

2. Сведение статистической задачи оптимального управления к игре.

(1) Об одной задаче оптимального управления. Пусть x_μ — n-вектор в E_n, зависящий от параметра μ, $\mu \in \Omega$. Положим $x(\cdot) = \{x_\mu, \mu \in \Omega\}$, множество элементов $x(\cdot)$ обозначим через $E_n(\cdot)$. Задано соотношение

$$x(\cdot) = Su(\cdot) + c(\cdot), \quad u(\cdot) \in U_p^L(\cdot). \tag{258}$$

Здесь S — линейный оператор, $u(\cdot)$ — управление, $c(\cdot)$ — заданный элемент из $E_n(\cdot)$. Функционал $f(x(\cdot))$, определенный на элементах $x(\cdot)$, назовем *квазивогнутым*, если множество

$$\{z\colon f(c(\cdot)-z)\geqslant \varepsilon\}$$

выпукло при каждом ε. Пусть $f(x(\cdot))$ — квазивогнутый полунепрерывный сверху функционал.

Задача. Найти функцию $u^0(\cdot)\in U_p^L(\cdot)$ такую, что

$$f(x^0(\cdot)) = \max f(x(\cdot)),\quad x^0(\cdot) = Su^0(\cdot)+c(\cdot). \tag{259}$$

Положим $y=c(\cdot)-x(\cdot)$. Тогда из (258), (259) имеем

$$f(x^0(\cdot)) = \max_{y=-Su(\cdot),\ u(\cdot)\in U_p^L(\cdot)} f(c(\cdot)-y) = f(c(\cdot)-y^0)=\varepsilon^0. \tag{260}$$

Обозначим через e, d вектор и число, удовлетворяющие условию

$$\max_{y\in E_n} f(c(\cdot)-y) = f(c(\cdot)-e) = d,$$

и предположим, что

$$\Delta(e) = \max_{\|g\|=1}\{g'e - L\|g'S\|\}\geqslant 0\,^{*)}. \tag{261}$$

Так как множество

$$G(y)=\{y\colon f(c(\cdot)-y)\geqslant\varepsilon^0\}$$

выпукло и замкнуто, то y^0 есть элемент границы множества (см. (246)). Из (248) следует, что точки границы удовлетворяют условию

$$\Delta_1(y) = \max_{\|g\|\leqslant 1}\{g'y - L\|g'S\|\} = -\min_{\|g\|\leqslant 1}\{L\|g'S\| - g'y\}.$$

Поэтому из (260) имеем

$$f(x^0(\cdot)) = \max_{\Delta_1(y)=0} f(c(\cdot)-y). \tag{262}$$

Теорема 44. Максимум (262) достигается на элементе седловой точки $y=y^0$ игры

$$\max_y\min_g\{f(c(\cdot)-y)-g'y+L\|g'S\|\} = \min_g\max_y\{f(c(\cdot)-y)-g'y+L\|g'S\|\}=\varepsilon^0. \tag{263}$$

---

*) Случай $\Delta(e)<0$ исследуется, как 5), п. 1 (3).

Существует число $k>0$ такое, что

$$\varepsilon^0=d-k\Delta_1(e). \qquad (264)$$

Доказательство. Если $\{g_0, y^0\}$ — седловая точка игры (263), то

$$f(c(\cdot)-y)-g_0'y+L\|g_0'S\|\leqslant f(c(\cdot)-y^0)-g_0'y^0+ \\ +L\|g_0'S\|\leqslant f(c(\cdot)-y^0)-g'y^0+L\|g'S\| \qquad (265)$$

для любых g, y. Из (265) следует неравенство

$$-g_0'y^0+L\|g_0'S\|\leqslant -g'y^0+L\|g'S\|,$$

справедливое для любых g. Но последнее возможно только при условии

$$\min_g\{-g'y^0+L\|g'S\|\}=0. \qquad (266)$$

Поэтому из левого неравенства (265) имеем

$$f(c(\cdot)-y^0)\geqslant f(c(\cdot)-y)-g_0'y+L\|g_0'S\|\geqslant \\ \geqslant f(c(\cdot)-y)+\min_g\{L\|g'S\|-g'y\},$$

что равносильно соотношению (262). Докажем, что выполняется условие (264). Из (265), (266) и определения величин e, d имеем

$$f(c(\cdot)-y^0)-g_0'y^0+L\|g_0'S\|\geqslant f(c(\cdot)-e)-g_0'e+L\|g_0'S\|\geqslant \\ \geqslant d-\max_{\|g\|\leqslant 1}\{g'e-L\|g'S\|\}.$$

Но ясно, что $f(c(\cdot)-y^0)<d$. На этом доказательство теоремы завершается.

Примечание. Справедливы неравенства

$$g_0'y^0>0, \qquad g_0'e>0.$$

Первое свойство седловой точки $\{g_0, y^0\}$ следует из (266), ибо $\|g_0'S\|\neq 0$ по условию. Второе доказывается от противного, как второе неравенство (251).

(2) Задача минимизации математического ожидания функции конечного состояния. Непрерывный тип распределения вероятностей. Пусть $\Phi_{\tilde{x}}(s)$, $s\in E_n$, — функция распределения случайного вектора $\tilde{x}$ из (230). Требуется найти управление $u^0(\cdot)$, порождающее

решение (230), при котором минимальна величина

$$M \| \tilde{x} \| = \int_{E_n} \| s \| \, d\Phi_{\tilde{x}}(s). \tag{267}$$

Найдем среднее и рассеяние:

$$\min_{x \in E_n} M \| \tilde{c} - x \| = M \| \tilde{c} - e \| = d.$$

Пусть среднее e таково, что выполнено условие (264). Так как функция (267) выпукла, то в силу результатов п. (1) имеем

$$\min M \| x(\tilde{c}, u(\cdot), t_1) \| =$$
$$= \tilde{\delta} = \max_g \min_z \{ M \| \tilde{c} - z \| + g'z - L \| g'S \| \}. \tag{268}$$

Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ определяется из условия (239), где $\hat{g}$ — элемент седловой точки $\{\hat{g}, \hat{x}\}$ игры (268). Из (268) получается следующая оценка для $\tilde{\delta}$:

$$d \leqslant \tilde{\delta} \leqslant d + \Delta_1(e).$$

Примечание. Имеют место неравенства

$$\hat{g}'e > 0, \qquad \hat{g}'\hat{x} > 0.$$

Формула (268) принимает более компактный вид, если минимизируется величина

$$\int_{E_n} s's \, d_{\tilde{x}}\Phi(s). \tag{269}$$

Можно показать, что в случае (269) справедлива теорема 42.

3. Задача максимизации вероятности попадания в заданную окрестность. Пусть в уравнении (256) функция $r(t)$ описывает случайный процесс, $x(t_0) = x_0$ является случайным вектором, $\alpha(t) \equiv 1$ (см. (230), (257)). Зададим точку $x_1 \in E_n$ и ее окрестность $\| x - x_1 \| \leqslant \varepsilon$. При каждом управлении $u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)$ уравнение (256) определяет случайный процесс $\tilde{x}(t)$, $t \geqslant t_0$. Сечение случайного процесса $\tilde{x}(t)$ в фиксированный момент задает случайную величину $\tilde{x}$, для которой будем считать известной

$$\text{вероятность } [\| \tilde{x} - x_1 \| \leqslant \varepsilon] = P(\| \tilde{x} - x_1 \| \leqslant \varepsilon).$$

Требуется найти управление $u(\cdot) \in U_p^L(\cdot)$, доставляющее максимум функционалу

$$J(u) = P(\| \tilde{x}(\tilde{x}_0, u(\cdot), t_1) - x_1 \| \leqslant \varepsilon). \tag{270}$$

Будем говорить, что выполнено условие A, если вероятностные свойства x_0, $r(t)$, $t \in T$, таковы, что для заданного $\varepsilon > 0$ и любого β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, множество

$$Q(\varepsilon, \beta) = \{z\colon P(\| \tilde{a} - z \| \leqslant \varepsilon) \geqslant \beta, \ \tilde{a} = \tilde{c} - x_1\}$$

выпукло и замкнуто. Пусть

$$\max_{x \in E_n} P(\| \tilde{a} - x \| \leqslant \varepsilon) = P(\| \tilde{a} - e \| \leqslant \varepsilon) = d < \infty$$

и справедливо неравенство (261).

Теорема 45. Если выполнено условие A, то оптимальное управление доставляет функционалу (270) значение

$$\beta^0 = \min_g \max_z \{P(\| \tilde{a} - z \| \leqslant \varepsilon) - g'z + L \| g'S \| \} =$$
$$= P(\| \tilde{a} - z^0 \| \leqslant \varepsilon) - g_0'z^0 + L \| g_0'S \|.$$

Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ определяется соотношением (239) с $\hat{g} = g_0$.

Утверждение следует из теоремы 44.

Примечания. 1) В силу теоремы 44 имеем

$$d - \Delta_1(e) \leqslant \beta^0 \leqslant d.$$

Из (266) следует, что $g_0'e > 0$.

2) Для того чтобы множества $Q(\varepsilon, \beta)$ были выпуклы для любых $\varepsilon \geqslant 0$, $\beta \in [0, 1]$, необходимо, чтобы функция плотности вероятностей случайного вектора $\tilde{a}$ была *унимодальна* (одновершинна). Для одномерного вектора $\tilde{a}$ свойство унимодальности является необходимым и достаточным условием выпуклости (односвязности) множеств $Q(\varepsilon, \beta)$ при $\varepsilon \geqslant 0$, $\beta \in [0, 1]$.

Если плотность вероятностей вектора $\tilde{a}$ не является унимодальной, но множество вершин ограничено, то для каждого β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, существует такое ε_0, что множества $Q(\varepsilon, \beta)$ выпуклы при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$.

Множества $Q(\varepsilon, \beta)$ замкнуты, если плотность вероятностей непрерывна.

Если условие A не выполнено, то возможны два пути решения: 1) минимизировать $M\,\|\tilde{x}\|$ и применить неравенство Чебышева; 2) функцию плотности вероятностей для $\tilde{a}$ заменить на другую, при которой условие A выполняется.

Из других статистических задач, изученных с позиций функционального анализа, отметим задачу минимизации математического ожидания времени попадания траектории в начало координат [74g].

§ 16. О некоторых дифференциальных играх

Ниже с позиций функционального анализа исследуются задачи преследования [1, 108b] в линейных системах.

1. Сведение задач программного преследования к функциональным проблемам.

(1) Постановка задач. Пусть в n-мерном пространстве E_n заданы уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1(t)\,x + B_1(t)\,u + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(t)\,y + B_2(t)\,u + f_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{271}$$

где $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — управления, стесненные условиями

$$u(\cdot) \in U_p^{l_1}(\cdot), \qquad v(\cdot) \in U_p^{l_2}(\cdot). \tag{272}$$

На матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, векторные функции $f_i(t)$ накладываются условия, которые обеспечивают представление решений в виде формулы Коши. Назовем x *преследующей точкой*, y — *преследуемой*. Положения точек x, y в момент s, если они с момента t принимают управление $u(t, \theta)$, $v(t, \theta)$, $t \leqslant \theta \leqslant s$, соответственно обозначим символами $x(t, s, u(\cdot))$, $y(t, s, v(\cdot))$. Пусть

$$x(t, t, u(\cdot)) = x(t), \qquad y(t, t, v(\cdot)) = y(t).$$

З а д а ч а A. Найти наименьший момент времени $s = t_1$ и соответствующие управления $u^1(\cdot)$, $v^1(\cdot)$, при которых

$$\|x(t, t_1, u^1(\cdot)) - y(t, t_1, v^1(\cdot))\| = \min_{s \geqslant t} \max_{v(\cdot) \in U_p^{l_2}(\cdot)} \min_{u(\cdot) \in U_p^{l_1}(\cdot)} \|x(t, s, u(\cdot)) - y(t, s, v(\cdot))\|. \quad (273)$$

З а д а ч а В. Определить наименьший момент $s = t_2$ и соответствующие управления $u^2(\cdot)$, $v^2(\cdot)$, когда

$$\|x(t, t_2, u^2(\cdot)) - y(t, t_2, v^2(\cdot))\| = \min_{s \geqslant t} \min_{u(\cdot) \in U_p^{l_1}(\cdot)} \max_{v(\cdot) \in U_p^{l_2}(\cdot)} \|x(t, s, u(\cdot)) - y(t, s, v(\cdot))\|. \quad (274)$$

Решения этих задач — функции $u^i(\cdot)$, $v^i(\cdot)$ будем называть *оптимальными управлениями*. Введем множества

$$\Omega_x(t, s) = \{x: x = x(t, s, u(\cdot))/x(t, t, u(\cdot)) = x(t), \quad u(\cdot) \in U_p^{l_1}(\cdot)\},$$

$$\Omega_y(t, s) = \{y: y = y(t, s, v(\cdot))/y(t, t, v(\cdot)) = y(t), \quad v(\cdot) \in U_p^{l_2}(\cdot)\}.$$

Положим

$$\|x(t, s, u(\cdot)) - y(t, s, v(\cdot))\| = \rho_s(x, y),$$

$$\beta(s) = \beta_s(\Omega_y, \Omega_x) = \sup_{y \in \Omega_y(t, s)} \inf_{x \in \Omega_x(t, s)} \rho_s(x, y),$$

$$\delta_x(s) = \sup_{y \in \Omega_y(t, s)} \rho_s(x, y).$$

Величина $\beta(s)$ есть полуотклонение множества $\Omega_y(t, s)$ от множества $\Omega_x(t, s)$. Величина $\delta_x(s)$ — полуотклонение множества $\Omega_y(t, s)$ от точки x. Следовательно, задача A есть задача определения наименьшего момента времени, когда минимально полуотклонение множества $\Omega_y(t, s)$ от множества $\Omega_x(t, s)$. Задача B — это задача отыскания наименьшего момента времени и функции $u(\cdot)$, когда минимально полуотклонение множества $\Omega_y(t, s)$ от точки x.

Ниже предполагается, что системы (271), $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$ таковы, что определяющие уравнения (110) для них невырождены почти при всех t на рассматриваемых интервалах времени. Это предположение (см. § 7.8) гарантирует единственность оптимальных управлений $u^i(\cdot)$, $v^i(\cdot)$.

(2) Оптимальные управления. Введем фундаментальные матрицы решений $F(s, \tau)$, $\Phi(s, \tau)$ однородных уравнений, соответствующих (271), и положим

$$\int_t^s F(s, \tau) B_1(\tau) u(\tau)\, d\tau = Su(\cdot),$$

$$-\int_t^s \Phi(s, \tau) B_2(\tau) v(\tau)\, d\tau = Pv(\cdot),$$

$$c = F(s, t) x(t) - \Phi(s, t) y(t) - \\ - \int_t^s [F(s, \tau) f_1(\tau) - \Phi(s, \tau) f_2(\tau)]\, d\tau.$$

Нетрудно видеть, что вектор $z = x - y$ в момент s удовлетворяет соотношению

$$z = Su(\cdot) + Pv(\cdot) + c. \tag{275}$$

Теорема 46. Минимальное полуотклонение множества $\Omega_y(t, s)$ от множества $\Omega_x(t, s)$ равно

$$\beta^0(t_1) = \min_{s \geqslant t} \max_{\|g\| \leqslant 1} \{g'c + l_2 \| g'P \| - l_1 \| g'S \|\} = \\ = g'(t_1) c + l_2 \| g'(t_1) P \| - l_1 \| g'(t_1) S \|. \tag{276}$$

Если $\beta^0(t_1) > 0$, то функции $u^1(\cdot)$, $v^1(\cdot)$, на которых полуотклонение $\beta(s)$ минимально, определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} g'(t_1) Su^1(\cdot) &= \min_{u(\cdot) \in U_p^{l_1}(\cdot)} g'(t_1) Su(\cdot), \\ g'(t_1) Fv^1(\cdot) &= \max_{v(\cdot) \in U_p^{l_2}(\cdot)} g'(t_1) Pv(\cdot). \end{aligned}\right\} \tag{277}$$

Доказательство. Зафиксируем $v(\cdot)$ и найдем

$$\beta(s, v(\cdot)) = \min_{x \in \Omega_x(t, s)} \rho_s(x, y).$$

В силу теоремы 26, равенства (275) и ограничений (272) имеем

$$\beta(s,\ v(\cdot)) = \max_{\|g\|\leqslant 1} \{g'c + g'Pv(\cdot) - l_1 \|g'S\|\}.$$

Теперь из (273) следует, что в каждый фиксированный момент s полуотклонение $\beta(s)$ равно

$$\beta(s) = \max_{\|g\|\leqslant 1} \{g'c + l_2 \|g'P\| - l_1 \|g'S\|\}. \tag{278}$$

Значит, справедлива формула (276). Соотношения (277) следуют из теоремы 26 и равенства (278).

Введем множества

$$Q(s,\ l_1) = \{\xi: \xi = -Su(\cdot) - c, \quad s \geqslant t,\ u(\cdot) \in U_p^{l_1}(\cdot)\}.$$

Пусть

$$\max_{v(\cdot)\in U_p^{l_2}(\cdot)} \|Pv(\cdot) - \xi\| = \Psi(s,\ \xi) \tag{279}$$

и

$$\min_{\xi} \Psi(s,\ \xi) = \Psi(s,\ e) = d. \tag{280}$$

Теорема 47. Если $e \overline{\in} \operatorname{int} Q(s,\ l_1)$ при всех $s \geqslant t$, то минимальное полуотклонение множества $\Omega_y(t,\ s)$ от точки x равно

$$\delta_x^0(t_2) = \min_{s\geqslant t} \min_{\xi} \max_{g} \{\Psi(s,\ \xi) + g'[c+\xi] - l_1 \|g'S\|\} =$$
$$= \|Pv^1(\cdot) - \xi(t_2)\| + g'(t_2)[c + \xi(t_2)] - l_1 \|g'(t_2)S\|. \tag{281}$$

Справедлива оценка

$$d \leqslant \min_{x\in\Omega_x(t,\ s)} \delta_x(s) \leqslant d + \max_{\|g\|\leqslant 1} \{g'[c+e] - l_1 \|g'S\|\}. \tag{282}$$

Функция $u^2(\cdot)$ определяется соотношением

$$g'(t_2) Su^2(\cdot) = \min_{u(\cdot)\in U_p^{l_1}(\cdot)} g'(t_2) Su(\cdot),$$

функция $v^2(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$\|Pv^2(\cdot) - \xi(t_2)\| = \Psi(t_2,\ \xi(t_2)).$$

Доказательство. Рассмотрим полуотклонение $\delta_x(s)$ в фиксированный момент $s = \tau$. Имеем

$$\delta_x(\tau) = \max_{v(\cdot)\in U_p^{l_2}(\cdot)} \|Su(\cdot) - Pv(\cdot) + c\|.$$

Положим $Su(\cdot)+c=-z$. Согласно (279) имеем

$$\delta_x(\tau)=\Psi(\tau, z).$$

Очевидно, $\Psi(\tau, z)$ выпукла по z. Поэтому, применяя теорему 44, имеем

$$\min_{x\in\Omega_x(t,\,\tau)} \delta_x(\tau)=\max_g \min_z \{\Psi(\tau, z)+g'[c+z]-l_1\|g'S\|\}.$$

В силу (274) из последнего соотношения получаем (281).

Докажем справедливость (282). Имеем

$$\min_{x\in\Omega_x(t,\,\tau)} \delta_x(\tau)=\min_z \max_{\|g\|\leqslant 1} \{\Psi(\tau, z)+g'[c+z]-l_1\|g'S\|\}\leqslant$$
$$\leqslant \max_{\|g\|\leqslant 1}\{\Psi(\tau, e)+g'[c+e]-l_1\|g'S\|\}=$$
$$=\Psi(\tau, e)+\max_{\|g\|\leqslant 1}\{g'[c+e]-l_1\|g'S\|\}.$$

Следовательно, справедливо правое неравенство из (282). Левое неравенство (282) следует из (280). Соотношения для $u^2(\cdot)$, $v^2(\cdot)$ получаем из (279), (281). Утверждение доказано.

Примечание. Случай $e\in \operatorname{int} Q$ исследуется в 5), п. 1 (3), § 15.

Сформулируем задачи, которые тесно связаны с предыдущими. Пусть заданы числа ε_1, ε_2.

Задача A_1. Определить наименьший момент времени $t_1(\varepsilon_1)$, функции $u^1(\cdot)$, $v^1(\cdot)$, когда полуотклонение $\beta(s)=\varepsilon_1$.

Задача B_1. Определить наименьший момент времени $t_2(\varepsilon_2)$, функции $u^2(\cdot)$, $v^2(\cdot)$, когда полуотклонение $\delta_x(s)=\varepsilon_2$.

Ясно, что решения задач A_1, B_1 существуют лишь при условии $\varepsilon_1\geqslant\beta^0(t_1)$, $\varepsilon_2\geqslant\delta_x^0(t_1)$. Из теоремы 46 следует, что решение задачи A_1 дает наименьшее число $s=\tau^0$, удовлетворяющее неравенству

$$\max_{\|g\|=1}\{g'c+l_2\|g'P\|-l_1\|g'S\|-\varepsilon_1\|g\|\}\leqslant 0. \tag{283}$$

Если $\tilde{g}$ — решение задачи (283) при $s=\tau^0$, то оптимальные управления в этой задаче определяются из соотношений (277) с $g=\tilde{g}$. Способ решения задачи B_1 дается теоремой 47.

Задача A_1 при $\varepsilon_1 = 0$ рассматривалась в [42]. В [74i] последний вариант задачи A_1 назван *задачей поглощения*. Ниже мы будем придерживаться последнего названия. В п. (3) устанавливается связь задачи поглощения с задачей из [62]. Сформулируем последнюю задачу.

Задача C. Пусть $T(u, v)$ — время, за которое точка $x(t, s, u(\cdot))$ догоняет $y(t, s, v(\cdot))$, использовавшую управление $v(\cdot)$. Требуется определить $u^0(\cdot)$, $v^0(\cdot)$, при которых

$$T(u^0, v^0) = T^0 = \max_{v(\cdot)\in U_p^{l_2}(\cdot)} \min_{u(\cdot)\in U_p^{l_1}(\cdot)} T(u, v).$$

(3) Условия совпадения решений задач A, B и A_1, C. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\alpha)\ \beta^0(t_1) \leqslant \delta_x^0(t_1), \quad \beta)\ T^0 \leqslant t_1(0). \tag{284}$$

Пусть значения $\beta(t_1)$, $\delta_x(t_1)$ полуотклонений $\beta(s)$, $\delta_x(s)$ для момента времени $s = t_1$ достигаются на функциях $u_{t_1}^1(\cdot)$, $v_{t_1}^1(\cdot)$ и $u_{t_1}^2(\cdot)$, $v_{t_1}^2(\cdot)$ (соответственно).

Теорема 48. Если

$$\max_{y\in\Omega_y} \rho_{t_1}(x(t, t_1, u_{t_1}^1(\cdot)), \quad y(t, t_1, v(\cdot))) = \beta(t_1),$$

то $\beta(t_1) = \delta_x(t_1)$ и

$$\begin{aligned}\rho_{t_1}(x(t, t_1, u_{t_1}^1(\cdot)), y(t, t_1, v(\cdot))) &\leqslant \\ \leqslant \rho_{t_1}(x(t, t_1, u_{t_1}^1(\cdot)), y(t, t_1, v_{t_1}^1(\cdot))) &\leqslant \\ \leqslant \rho_{t_1}(x(t, t_1, u(\cdot)), y(t, t_1, v_{t_1}^1(\cdot)))&\end{aligned} \tag{285}$$

для всех допустимых $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Если

$$\min_{x\in\Omega_x} \rho_{t_1}(x(t, t_1, u(\cdot)), y(t, t_1, v_{t_1}^2(\cdot))) = \delta_x(t_1),$$

то $\delta_x(t_1) = \beta(t_1)$ и

$$\begin{aligned}\rho_{t_1}(x(t, t_1, u_{t_1}^2(\cdot)), y(t, t_1, v(\cdot))) &\leqslant \\ \leqslant \rho_{t_1}(x(t, t_1, u_{t_1}^2(\cdot)), y(t, t_1, v_{t_1}^2(\cdot))) &\leqslant \\ \leqslant \rho_{t_1}(x(t, t_1, u(\cdot)), y(t, t_1, v_{t_1}^2(\cdot)))&\end{aligned} \tag{286}$$

для всех допустимых $u(\cdot)$, $v(\cdot)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\max_{y\in\Omega_y}\min_{x\in\Omega_x}\rho_{t_1}(x, y)\leqslant\min_{x\in\Omega_x}\max_{y\in\Omega_y}\rho_{t_1}(x, y)\leqslant$$
$$\leqslant\max_{y\in\Omega_y}\rho_{t_1}(x(t, t_1, u^1_{t_1}(\cdot)),\ y(t, t_1, v(\cdot))).$$

Отсюда имеем

$$\beta(t_1)\leqslant\min_{x\in\Omega_x(t,\, t_1)}\ \max_{y\in\Omega_y(t,\, t_1)}\rho_{t_1}(x, y)\leqslant\beta(t_1),$$

что означает

$$\max_{y\in\Omega_y(t,\, t_1)}\ \min_{x\in\Omega_x(t,\, t_1)}\rho_{t_1}(x, y)=\min_{x\in\Omega_x(t,\, t_1)}\ \max_{y\in\Omega_y(t,\, t_1)}\rho_{t_1}(x, y),$$

т. е. $\beta(t_1)=\delta_x(t_1)$, и справедливы неравенства (285). Докажем вторую часть утверждения. Так как

$$\min_{\in\Omega_x}\max_{y\in\Omega_y}\rho_{t_1}(x, y)\geqslant\max_{y\in\Omega_y}\min_{x\in\Omega_x}\rho_{t_1}(x, y)\geqslant$$
$$\geqslant\min_{x\in\Omega_x}\rho_{t_1}(x(t, t_1, u(\cdot)),\ y(t, t_1, v^2_{t_1}(\cdot))),$$

то имеем

$$\delta_x(t_1)\geqslant\max_{y\in\Omega_y}\min_{x\in\Omega_x}\rho_{t_1}(x, y)\geqslant\delta_x(t_1).$$

Значит, $\delta_x(t_1) = \beta(t_1)$, и справедливы неравенства (286). Теорема доказана.

Обозначим через $\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{v}(\cdot)$ решение задачи поглощения.

Теорема 49. Пусть $t_1(0) < +\infty$ и

$$\Lambda(s, \tilde{v}(\cdot)) = \max_{\|g\|=1}\{g'[c + P\tilde{v}(\cdot)] - l_1\|g'S\|\} > 0,$$
$$s < t_1(0).$$

Тогда $t_1(0) = T^0$ и $\tilde{u}(t, s) = u^0(t, s)$, $\tilde{v}(t, s) = v^0(t, s)$, $s \geqslant t$.

Доказательство. По условию $t_1(0)$ — первый нуль функции $\Lambda(s, \tilde{v}(\cdot))$ и $\Lambda(s, \tilde{v}(\cdot))>0$ при $s\in[t, t_1(0))$. Следовательно, $T^0 \geqslant t_1(0)$. Но в силу (284), β) возможно только обратное неравенство. Значит, $t_1(0) = T^0$.

Так как функции $u^0(\cdot)$, $v^0(\cdot)$, $\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{v}(\cdot)$ в силу условий задачи (см. п. (1)) определяются единственным образом, то $\tilde{u}(t, s)\equiv u^0(t, s)$, $\tilde{v}(t, s) = v^0(t, s)$. Утверждение доказано.

Теорема 50. Если $T^0 < \infty$ и

$$\Lambda(T^0) = \max_{\|g\|=1} \{g'c + l_2 \| g'P \| - l_1 \| g'S \|\} \leqslant 0,$$

то $T^0 = t_1(0)$ и $u^0(t, s) = \tilde{u}(t, s)$, $v^0(t, s) = \tilde{v}(t, s)$, $s \geqslant t$.

Если θ — наименьший момент, для которого $\Lambda(\theta, \tilde{v}(\cdot)) \leqslant \leqslant 0$, $\theta < \infty$ и $\Lambda(T) \leqslant 0$ при некотором $t \in [t, \theta]$, то $\theta = T^0$ и $\tilde{u}(t, s) \equiv u^0(t, s)$, $\tilde{v}(t, s) = v^0(t, s)$ при $s \in [t, \theta]$.

Доказательство. В силу условия теоремы $t_1(0) \leqslant \leqslant T^0$. Но из (284), β) следует, что возможно только равенство $t_1(0) = T^0$. Тогда и $u^0(t, s) \equiv \tilde{u}(t, s)$, $v^0(t, s) \equiv \tilde{v}(t, s)$ при $s \in [t, T^0]$. Вторая часть утверждения очевидна.

2. Оптимальное преследование групповой цели. Пусть в пространстве E_n движется группа из m точек $y_1, \ldots \ldots, y_m$, положения которых в момент $s = t_1$ определяются уравнениями

$$y_i = S_i v_i(\cdot) + c_i, \qquad v_i(\cdot) \in U_p^{l_i}(\cdot). \tag{287}$$

Здесь преобразования S_i, векторы c_i имеют тот же смысл, что S, c в соотношениях (275). Назовем точки y_i *преследуемыми*. Отнесем термин «преследующая точка» к точке x, движущейся в пространстве согласно уравнению (230), где c — фиксированный вектор в E_n, $u(\cdot) \in U_p^l(\cdot)$. Пусть заданы числа α_i, $\alpha_i \geqslant 0$. Величину $\varepsilon_i = \alpha_i \| x - - y_i \|$ будем называть *защищенностью* точки y_i. Естественно, величина

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| x - y_i \| \tag{288}$$

характеризует защищенность группы. Пусть требуется найти управления $u^0(\cdot)$, $v_i^0(\cdot)$, число δ^0 такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| x(t, t_1, u^0(\cdot)) - y_i(t, t_1, v_i^0(\cdot)) \| =$$

$$= \max_{v_i(\cdot) \in U_p^{l_i}(\cdot)} \min_{u(\cdot) \in U_p^l(\cdot)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| x - y_i \| = \delta^0. \tag{289}$$

Примечание. Здесь не приводятся другие задачи преследования групповой цели (см. [65]).

Пусть

$$\min_z \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| c - c_i - S_i v_i(\cdot) - z \| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| c - c_i - S_i v_i(\cdot) - \tilde{e} \| = \tilde{d}$$

и

$$\max_{\|g\|=1} \{ g'\tilde{e} - l \| g'S \| \} = \Delta(\tilde{e}) \geqslant 0.$$

Теорема 51. Оптимальные управления $u^0(\cdot)$, $v_i^0(\cdot)$ доставляют функционалу (288) значение

$$\delta^0 = \max_g \max_{\|\gamma_i\|=1} \min_z \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\gamma_i' [c - c_i - z] + l_i \| \gamma_i' S_i \|) + g'z - l \| g'S \| \Big\} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\gamma_{i0}' [c - c_i - z^0] + l_i \| \gamma_{i0}' S_i \|) + g_0' z^0 - l \| g_0' S \|. \tag{290}$$

Функции $u^0(\cdot)$, $v_i^0(\cdot)$ определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} g_0' S u^0(\cdot) &= \min_{u(\cdot) \in U_p^l(\cdot)} g_0' S u(\cdot), \\ \gamma_{i0}' S_i v_i^0(\cdot) &= \max_{v_i(\cdot) \in U_p^{l_i}(\cdot)} \gamma_{i0}' S_i v_i(\cdot). \end{aligned}\right\} \tag{291}$$

Доказательство. Зафиксируем функции $v_i(\cdot)$ и найдем

$$\delta(v_1, \ldots, v_m) = \min_{u(\cdot) \in U_p^l(\cdot)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| x - y_i \|.$$

Из (287), (230) и теоремы 44 следует, что

$$\delta(v_1, \ldots, v_m) = \max_g \min_z \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \| c - c_i - S_i v_i(\cdot) - z \| + g'z - l \| g'S \| \Big\}. \tag{292}$$

Но

$$\| c - c_i - S_i v_i(\cdot) - z \| = \max_{\|\gamma_i\| \leqslant 1} \gamma_i' [c - c_i - S_i v_i(\cdot) - z].$$

Поэтому

$$\delta(v_1, \ldots, v_m) =$$

$$= \max_{g,\,\|\gamma_i\|=1} \min_z \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \gamma_i' [c - c_i - S_i v_i(\cdot) - z] + g'z - l \| g'S \| \right\}.$$

Из (289) следует, что

$$\delta^0 = \max_{g,\,\|\gamma_i\|=1} \min_z \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i (\gamma_i' [c - c_i - z] + \right.$$

$$\left. + \max_{v_i(\cdot) \in U_p^{l_i}(\cdot)} \gamma_i' S_i v_i(\cdot)) + g'z - l \| g'S \| \right\},$$

т. е. справедливо равенство (290). Соотношения (291) получаем из (290), (292). Теорема доказана.

§ 17. Развитие метода приращений для задач оптимизации в игровых ситуациях

Введение в процесс управления двух (и более) сторон с противоположными (несовпадающими) интересами заметно обогащает теорию оптимальных процессов, делая ее вместе с тем существенно сложней обычных задач с одним участником. Хотя при постановке задач оптимизации в игровых ситуациях требование на управления быть управлениями типа обратной связи подчеркивается еще более настойчиво, чем раньше, тем не менее каждое решение задачи и в виде программного управления является ценным. Понятно, что программные управления сторон можно использовать для построения их стратегий (управлений типа обратной связи).

Ниже мы укажем, как применить метод приращений для получения необходимых условий оптимальности в задачах с конфликтной ситуацией.

Пусть на движение объекта, описываемое уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v, w), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = [0, t_1], \qquad (293)$$

воздействуют два участника с помощью управлений $v(t)$, $w(t)$. Эти управления выбираются из класса кусочно-непрерывных функций (для v — p-мерных, для w — q-мерных) со значениями в U — ограниченном множестве

$(p+q)$-мерного пространства:

$$u(t) = \{v(t), w(t)\} \in U, \quad t \in T. \tag{294}$$

Предположим, что свое поведение участники оценивают величиной функционала

$$J(u) = J(v, w) = \varphi(x(t_1)), \tag{295}$$

где $\varphi(x)$ — заданная непрерывная дифференцируемая функция. Управления $v^0(t)$, $w^0(t)$ называются оптимальными, если они удовлетворяют условию (294) и

$$J(v^0, w) \leqslant J(v^0, w^0) \leqslant J(v, w^0)$$

для всех пар $\{v^0(t), w(t)\} \in U$, $\{v(t), w^0(t)\} \in U$. Применяя к каждому из неравенств

$$J(v^0, w^0) \leqslant J(v, w^0), \qquad J(v^0, w^0) \geqslant J(v^0, w)$$

метод приращений (§ 1), получим следующий результат.

Теорема 52. Для оптимальных управлений $v^0(t)$, $w^0(t)$, $t \in T$, и соответствующей им траектории $x^0(t)$ в задаче (293) — (295) в каждый момент выполняются условия

$$H(x^0(t), \psi(t), v^0(t), w) \geqslant H(x^0(t), \psi(t), v^0(t), w^0(t)) \geqslant$$
$$\geqslant H(x^0(t), \psi(t), v, w^0(t)), \quad t \in T, \tag{296}$$

для всех v, w таких, что $\{v^0(t), w\} \in U$, $\{v, w^0(t)\} \in U$. Здесь $H(x, \psi, v, w) = \psi' f(x, v, w)$, а $\psi(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), v^0(t), w^0(t))}{\partial x}, \qquad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}.$$

Следствие. Если ограничения на $v(t)$, $w(t)$ имеют вид

$$v(t) \in V, \qquad w(t) \in W,$$

где V, W — ограниченные множества p, q-мерных пространств, то необходимые условия оптимальности (296) можно записать следующим образом:

$$H(x^0(t), \psi(t), v^0(t), w^0(t)) = \max_{v \in V} H(x^0(t), \psi(t), v, w^0(t)),$$

$$H(x^0(t), \psi(t), v^0(t), w^0(t)) = \min_{w \in W} H(x^0(t), \psi(t), v^0(t), w).$$

Комментарии к главе VI

1. Основными в доказательстве теоремы 1 являются два обстоятельства: формула приращения функционала (3) и использование специального приращения управления (6). Идея такого подхода в теории оптимальных процессов впервые применена в [114a, b], хотя и в классическом вариационном исчислении [16] условия Вейерштрасса получаются методом приращений, а «игольчатые» вариации (6) использовались еще в [190a]. В [114b] результат, аналогичный теореме 1, получен при более жестких предположениях.

2. В [32d] дан анализ доказательства теоремы 1, из которого следует, что использованная в § 1 схема позволяет доказать принцип максимума для случая, когда функции $f(x, u, t)$, $\partial f(x, u, t)/\partial x$ непрерывны по x, u и измеримы по t, а за класс допустимых управлений взят класс измеримых функций. Допускают ослабления и условия, наложенные на функцию $\varphi(x)$. Дифференцируемость этой функции можно заменить условием существования производной по направлению.

Говорят, что функция $\varphi(x)$ имеет в точке x производную $\partial\varphi/\partial g$ по направлению g, если

$$\lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} \frac{\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)}{\alpha}$$

существует и равен $\partial\varphi/\partial g$. Выпуклые функции дифференцируемы по любому направлению [111]. В работе [48b] задана дифференцируемость по любому направлению функций $\varphi(x) = \max\limits_{y\in\Omega} f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция, непрерывная вместе с $\partial f(x, y)/\partial x$, Ω — замкнутое множество. Существование производной по направлению позволяет записать:

$$\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)=\alpha\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}+o(\alpha).$$

Это равенство можно положить в основу тех преобразований, которые в § 1 были произведены с разложением

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\Delta x'\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+o(\|\Delta x\|).$$

В результате получается принцип максимума, в котором вектор $\psi(t_1)$ будет определяться не однозначно, а в форме, аналогичной теореме 2. Кстати, последняя теорема может быть доказана этим методом. Детали доказательств и формулировки соответствующих результатов в данной монографии опущены, ибо они представляют интерес для узкого класса специалистов, которым эти факты достаточно ясны.

3. В работе [32d] приведены также необходимые условия оптимальности, полученные из формул (4), (5). Однако эти результаты громоздко формулируются, а для особых управлений можно получить (см. § 5) более сильные результаты. Тем не менее формулы (4), (5) в силу их компактности могут оказаться полезными для других целей, в частности при установлении достаточных условий оптимальности.

4. Теорема 1 сформулирована для задачи минимизации функционала (2). К задаче (1), (2) легко сводится задача минимизации над (1) функционала

$$J(u)=\varphi(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t),\ u(t),\ t)\,dt.$$

Для этого достаточно к (1) добавить уравнение

$$\frac{dx_{n+1}}{dt}=f_{n+1}(x,\ u,\ t),\ x_{n+1}(t_0)=0, \tag{297}$$

и рассмотреть задачу минимизации величины

$$\varphi(x(t_1))+x_{n+1}(t_1) \tag{298}$$

для системы (1), (297). Нетрудно проверить: из специального вида (1), (297) следует, что $\dot{\psi}_{n+1}(t)\equiv 0$, а из (298) в силу теоремы 1 имеем $\psi_{n+1}(t_1) = -1$, т. е. $\psi_{n+1}(t)\equiv -1$, $t\in T$.

5. Лемма 4 может быть доказана без условий (2), (3).

6. Теорема 5 может быть обобщена в нескольких направлениях. Во-первых, условия гладкости функций $\varphi(x)$, $g(x)$ можно заменить условиями квазивыпуклости и полунепрерывности снизу. Во-вторых, можно рассмотреть несколько ограничений типа (18). В-третьих, ограничения типа (18) можно накладывать в промежуточных точках отрезка T.

7. Название «вариационная производная второго рода» не вполне удачно, однако, несмотря на это, мы сохраняем его в дальнейшем ради краткости письма.

8. В работе [32е] новая форма необходимых условий оптимальности развивается на линейные динамические системы, зависящие от управлений и их производных. Представляет интерес исследование нелинейного случая.

9. Формулировка задач оптимального управления на языке интегральных уравнений обладает преимуществом по отношению к аналогичной формулировке в терминах дифференциальных уравнений по той причине, что уравнения (29), (30) полностью задают движения $x(t)$, $\psi(t)$ и отпадает необходимость выписывания граничных условий. Частный вид критерия (38) не является, очевидно, ограничением.

10. Анализируя теоремы § 3, можно заключить, что форма (28) — (31) необходимых условий оптимальности инвариантна по отношению к широкому классу систем, описываемых функциями одной независимой переменной. Теорема 9 показывает, что аналогичная форма необходимых условий имеет место и для систем, описываемых уравнениями математической физики. Можно доказать, что форма (43) — (45) сохраняется для весьма общих систем интегральных уравнений относительно функций двух независимых переменных.

11. Переход от оператора левой части выражения (43) к оператору левой части выражения (44) соответствует правилу, данному

в (29), (30) для случая функций одной переменной и распространенному здесь по известным рецептам [119] на функции двух переменных.

12. Метод доказательства, основанный на изучении приращений функционалов, позволяет весьма просто получить другие условия оптимальности, отличные от принципа максимума. Для простоты рассуждений ограничимся задачей (1), (2) и предположим в дополнение к условиям теоремы 1, что функция $f(x, u, t)$ дифференцируема по u, а множество U выпуклое. Тогда из (9) непосредственно следует, что оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию

$$\frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial u} u. \tag{299}$$

Отсюда получается необходимое условие оптимальности вида

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial u} = 0, \qquad t \in T, \tag{300}$$

если $u^0(t) \in \operatorname{int} U$, $t \in T$. Формула (3) позволяет найти условия максимума в задаче (1), (2) и в том случае, когда класс допустимых управлений — выпуклое множество кусочно-непрерывных r-мерных вектор-функций $u(t)$, определенных на T. Сохраняя предположение о непрерывности $\partial f/\partial u$, из (3) вместо (299) получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t)\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial u} u(t)\,dt$$

для всех $u(\cdot) \in U(\cdot)$. В случае $u^0(\cdot) \in \operatorname{int} U(\cdot)$ получаются условия (300). Подобные условия можно получить для всех задач, рассмотренных в этой главе.

13. Теорема 10 в [36c] доказана для систем с запаздыванием. Следует отметить, что в [105] условия, получающиеся из теоремы 10, названы необходимыми условиями оптимальности, хотя, очевидно, эти условия выполняются для любых траекторий систем (1), (8).

14. Методика, развитая в § 5, легко обобщается на случай, когда

$$\frac{\partial^l \varphi(x^0(t_1))}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^{k+1} \varphi(x^0(t_1))}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{k+1}}} \neq 0.$$

При этом повышается размерность и число аргументов вспомогательных функций $m_{j_1 \ldots j_l}(t_{j_1} \ldots t_{j^l})$, а также порядок уравнений для этих функций.

15. Если предположить выпуклость множества U и дифференцируемость по u функции $f(x, u, t)$, то из условия (52) следует:

$$m_{ij}(t, t) \frac{\partial f_i(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_\nu} \cdot \frac{\partial f_j(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_\mu} \times \\ \times (u_\nu^* - u_\nu^0(t))(u_\mu^* - u_\mu^0(t)) \leqslant 0,$$

$$t \in T, \quad u^* \in U, \quad \nu = 1, \ldots, r; \quad \mu = 1, \ldots, r.$$

16. Если $u^0(t) \in \operatorname{int} U(t)$, $t \in T$, то на оптимальном управлении $u^0(t)$ неположительна квадратичная форма с матрицей

$$m_{ij}(t, t) \frac{\partial f_i(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_\nu} \cdot \frac{\partial f_j(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_\mu}.$$

17. Случаи выпуклого и открытого множества U в теореме 12 исследуются так же, как это сделано в примечаниях к теореме 11.

18. Понятие особого оптимального управления впервые появилось в работе [114b]. Там же на простом примере показывалось, как найти особое управление, исходя из его определения. Способы нахождения особых управлений, основанные на непосредственном использовании определения таких управлений, в дальнейшем были рассмотрены в ряде работ. Исследование [63a], по-видимому, оказалось первым, в котором получены необходимые условия оптимальности особых управлений. Эта работа интересна и в связи с введением в арсенал средств теории оптимальных процессов новых вариаций управления. Общеизвестна роль «игольчатых» вариаций (6) в теории необходимых условий оптимальности. Если «игольчатые» вариации можно рассматривать как аналоги δ-функций Дирака, то вариации, использованные в [63a], аналогичны производным от δ-функций. Метод работы [63a] был развит в [26, 71, 113].

Придавая большое значение необходимым условиям оптимальности особых управлений, полученным в упомянутых работах, следует отметить, что теория необходимых условий в особом случае оказалась в положении, аналогичном тому, которое возникло в классическом вариационном исчислении при исследовании задач оптимального быстродействия в системах автоматического управления [109, 124a]. Вариации функций, используемые в обоих случаях, предполагают открытость области значений этих функций. Для преодоления этого ограничения, существенного при рассмотрении задач оптимизации систем автоматического регулирования, была развита теория принципа максимума, основанная на непосредственном изучении задач оптимизации с произвольными множествами для значений варьируемых функций. Впоследствии для некоторых задач нового круга удалось развить и технику классического вариационного исчисления [92, 176].

В данной главе метод исследования особых управлений не стеснен предположением открытости множества U. Схема основных доказательств базируется на формулах приращений скалярных функций, полученных в § 5, и использует вариации (6), типичные в теории неособых случаев оптимального управления.

19. Интерес к особым управлениям можно объяснить несколькими причинами. Во-первых, в теории оптимизации летательных аппаратов нередко встречаются особые режимы. Первый нетривиальный пример особого управления найден в [89], дополнительные примеры приведены в [26]. Во-вторых, оптимальные особые режимы в некотором смысле являются непосредственными спутниками оптимальных скользящих режимов. Действительно, согласно [38e] любая задача оптимизации, относительно которой неизвестно, что она имеет решение, заменяется на вспомогательную. Для примера рассмотрим задачу (5.1) — (5.3). От этой задачи следует перейти к задаче (5.11) — (5.13), которая заведомо (теорема 5.1) имеет решение. Однако для нахождения оптимальных управлений $v^0_{\nu\gamma}(t)$, $w^0_\gamma(t)$, $t \in T$, принцип максимума оказывается неэффективным, ибо управления $w^0_\gamma(t)$, $t \in T$, в силу их свойства (5.16) всегда особые. Поэтому при рассмотрении любой сколько-нибудь сложной задачи оптимизации приходится сталкиваться с особыми управлениями.

20. Условия оптимальности для неособых управлений формулируются обычно с помощью вспомогательной векторной функции $\psi(t)$ (импульсы, сопряженная переменная, множитель Лагранжа). В теореме 13 для формулировки необходимых условий оптимальности особых управлений первого порядка вводится дополнительно матричная функция $\Psi(t)$. Если характерной чертой переменной $\psi(t)$ является свойство

$$\psi'(t)\, z(t) \equiv \text{const}, \qquad t \in T,$$

где $z(t)$ — решение уравнения в вариациях

$$\dot z = \frac{\partial f(x(t),\, u(t),\, t)}{\partial x}\, z,$$

то для $\Psi(t)$ выполняется тождество

$$z'(t)\,\Psi(t)\, z(t) = -\frac{1}{2}\,\Psi'(t)\,\frac{\partial^2 f(x(t),\, u(t),\, t)}{\partial x^2}\, z(t)\, z(t) + \text{const}, \qquad t \in T,$$

которое для линейных по x систем и для особых управлений с $\psi(t) \equiv 0$ переходит в простое свойство:

$$z'(t)\,\Psi(t)\, z(t) \equiv \text{const}, \qquad t \in T.$$

21. Формула приращений (3) позволяет получить необходимые условия оптимальности особых управлений первого порядка, выраженные лишь через переменные $\psi(t)$. Идея этого подхода состоит в использовании таких приращений $\Delta u(t)$ управлений, при которых $\|\Delta x(t)\| \sim \varepsilon^2$ при $t \geqslant \theta + \varepsilon$ и $\Delta x(t) \equiv 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$. Если множество U открытое, то для этой цели пригодны приращения, использованные в [63a]. Для произвольного множества U требуемые приращения могут не существовать.

22. Выпуклость и открытость множества U в теореме 13 можно учесть так же, как это сделано в комментариях 15, 16 к теореме 11.

23. Теорема 14 накладывает довольно сильные ограничения на класс допустимых управлений. Этого недостатка лишена теорема 15, которая, однако, более грубо, чем теорема 14, исследует особые управления.

24. Задача оптимизации с параметрами рассматривается в книге [18d].

25. Фундаментальные исследования задачи управления линейными объектами с позиций функционального анализа проводятся в монографиях [21d, 74n, 80]. Во всех этих работах исходным пунктом является L-проблема моментов. Нами избран другой путь решения задач оптимального управления.

Теорема о минимаксе, теоремы об отделимости выпуклых множеств, о существовании опорной плоскости к выпуклой поверхности, использованные в монографии, позволяют обойтись элементарными сведениями из линейной алгебры. Следует отметить, что в ряде случаев применение последних избавляет от громоздких преобразований, свойственных подходу, основанному на проблеме моментов.

26. Теорема о минимаксе (в ее доказательстве мы следуем [60]) привлечена к изучению задач теории оптимальных процессов в [33]. Также указана связь между теорией игр и теорией оптимальных процессов. Другой подход к этому вопросу сделан в [74l].

27. Теорема об отделимости выпуклых множеств (наше доказательство следует [60]) явилась первым результатом функционального анализа (линейной алгебры), который нашел эффективное применение в теории оптимизации линейных систем [12, 138]. В дальнейшем этот подход развивался в работах [83, 88b, 101, 135,194a]. Наиболее общая схема приводится в [34f]. Отметим, что доклад [34d] и работы [34e, f] базировались на одном результате из теории линейных неравенств.

28. Проблема моментов в теорию оптимальных процессов впервые привлечена в [74a, b]. Это направление получило развитие в работах [8b, c, 21c, 64a, 140, 189]. Долгое время здесь рассматривались лишь двухточечные задачи быстродействия со стандартными ограничениями на управляющие воздействия. Начиная с [32b], в серии работ [32c, 34a—c, 81a] L-проблема была развита для более широкого круга задач. Некоторые из этих задач рассмотрены в пп. 3—7 § 11. Интересно отметить, что в первых работах постоянно участвовало условие типа линейной независимости элементов $x_1(\cdot), \ldots, x_2(\cdot)$. Ситуация, когда это условие не выполняется, исследована в [32a].

29. Теорема о существовании опорной плоскости к выпуклой функции для решения задачи оптимизации выпуклого функционала использована в [34g].

30. Условия погружаемости выпуклых множеств доказаны в [34f]. Там же даны приложения этого результата к задачам оптимального управления.

31. Лемма Неймана — Пирсона [12] в обобщенном виде для задач оптимизации с двумя ограничениями на управляющие функции привлекается в [33]. Подобные задачи другим методом решаются в [74k].

32. На возможности перенесения метода приращений на задачи игрового типа указывалось в докладе [65].

Глава VII

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ. КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Задачи оптимизации с функционалами, выпуклыми по переменным состояния

1. Неравенство для приращения функционала. Пусть на траекториях системы

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\,x(t-h),\,u,\,t),\ \ t\in T,\quad x\in E_n,\ u\in E_r,\\&x(t)=\Phi(t),\ \ t\in S_0,\ \ h=h(x,\,u,\,t)\geqslant 0,\ \ u(\cdot)\in D_1,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

минимизируется функционал

$$J(u)=\varphi(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t),\,x(t-h(x,\,u,\,t)),\ \ u(t),\,t)\,dt \tag{2}$$

при дополнительном ограничении на переменную $x(t)$:

$$g(x(t),\,t)\leqslant 0,\qquad t\in\sigma\subset T. \tag{3}$$

Относительно введенных функций будем предполагать, что 1) функции $f(x,y,u,t)$, $\varphi(x)$, $f_{n+1}(x,y,u,t)$, $h(x,u,t)$, $g(x,t)$, $\Phi(t)$ определены и непрерывны вместе с функциями $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial\varphi/\partial x$, $\partial f_{n+1}/\partial x$, $\partial f_{n+1}/\partial y$, $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial u$, $\partial h/\partial t$, $\partial g/\partial x$, $d\Phi/dt$; 2) $h(x,u,t)\geqslant 0$; 3) вдоль исследуемых траектории $x(t)$ и управления $u(t)$ функция $\tau(t)=t-h(x(t),\ u(t),\ t)$ строго возрастает, причем $\frac{d\tau(x(t),u(t),t)}{dt}\geqslant\alpha>0$ в точках, где производная существует.

Обозначим через $\Delta J(u)$ приращение $\Delta J(u) = J(u + \Delta u) - J(u)$ функционала (2) на управлении $u(\cdot) \in D_1$, порожденное приращениями $\Delta u(t)$, $t \in T$, из этого же класса D_1. Траектории уравнений, соответствующие управлениям $u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, обозначим через $x(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$. Пусть $d\mu(t)$ — некоторая неотрицательная мера, сосредоточенная на множестве $\sigma_1 = \{t: g(x(t), t) = 0, t \in \sigma\}$. Введем функцию $\psi(t)$, $t \in T$, согласно уравнениям

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x, y, \psi, u, t)}{\partial x} - \frac{\partial H(x(s), y(s), \psi(s), u(s), s)}{\partial y}\bigg|_{s=r(t)} \times \frac{dr(t)}{dt} + \frac{\partial H'(x, y, \psi, u, t)}{\partial y} \cdot \frac{dx(s)}{ds}\bigg|_{s=\tau(t)} \cdot \frac{\partial h(x, u, t)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{d\mu(t)}{dt}, \qquad t \in [t_0, t'],$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x, y, \psi, u, t)}{\partial x} + \frac{\partial H'(x, y, \psi, u, t)}{\partial y} \cdot \frac{dx(s)}{ds}\bigg|_{s=\tau(t)} \times \frac{\partial h(x, u, t)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{d\mu(t)}{dt}, \quad t \in [t', t_1], \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}.$$

Здесь $H(x, y, \psi, u, t) = \psi' f(x, y, u, t) - f_{n+1}(x, y, u, t)$, $r(t)$ — решение уравнения $t = \tau(r)$, $t' = t_1 - h(x(t_1), u(t_1), t_1)$, $y = x(t - h)$. Если обе траектории $x(t)$, $\tilde{x}(t)$, порожденные управлениями $u(t)$, $\tilde{u}(t)$, удовлетворяют условию (3), то для приращения функционала (2) выполняется неравенство

$$\Delta J(u) \geqslant -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)] \frac{\partial}{\partial y} H(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)]\, \psi, \tilde{u}, t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'[\tau(x, u, t)] \frac{\partial}{\partial y} H(x, y, \psi, u, t)\, dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial y}H(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \psi, \tilde{u}, t)\int_0^1 \frac{dx(s)}{ds}\Bigg|_{\substack{s=\tau(x,\tilde{u},t)-\\-[h(\tilde{x},\tilde{u},t)-\\-h(x,\tilde{u},t)]\theta}}\times$$

$$\times d\theta\,\frac{\partial h'(x, \tilde{u}, t)}{\partial x}\Delta x(t)\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial y}H(x, y, \psi, u, t)\frac{dx(s)}{ds}\Bigg|_{s=\tau(t)}\frac{\partial h'(x, u, t)}{\partial x}\Delta x(t)\,dt+$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+\int_{t_0}^{t_1}o_2(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)]\|)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial y}H(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \psi, \tilde{u}, t)\int_0^1\frac{dx(s)}{ds}\Bigg|_{\substack{s=\tau(x,\tilde{u},t)-\\-[h(\tilde{x},\tilde{u},t)-\\-h(x,\tilde{u},t)]\theta}}\times$$

$$\times d\theta\, o_3(\|\Delta x(t)\|)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}o_4(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)]\|)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}o_5(\|\Delta x(t)\|)\,d\mu(t). \qquad (4)$$

Здесь величины $o_1 - o_5$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\frac{\partial\varphi'(x)}{\partial x}\Delta x+o_1(\|\Delta x\|),$$

$$f_{n+1}(\tilde{x}, \tilde{x}[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)], \tilde{u}, t)-f_{n+1}(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \tilde{u}, t)=$$

$$=\frac{\partial f'_{n+1}(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \tilde{u}, t)}{\partial x}\Delta x+$$

$$+\frac{\partial f'_{n+1}(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \tilde{u}, t)}{\partial y}(x[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)]-x[\tau(x, \tilde{u}, t)])+$$

$$+o_2(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)]\|),$$

$$h(\tilde{x}, \tilde{u}, t)-h(x, \tilde{u}, t)=\frac{\partial h'(x, \tilde{u}, t)}{\partial x}\Delta x+o_3(\|\Delta x\|),$$

$$H(\tilde{x}, \tilde{x}[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)], \psi, \tilde{u}, t) - H(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \psi, \tilde{u}, t) =$$
$$= \frac{\partial H'(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \psi, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Delta x(t) +$$
$$+ \frac{\partial H'(x, x[\tau(x, \tilde{u}, t)], \psi, \tilde{u}, t)}{\partial y} (\tilde{x}[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)] - x[\tau(x, u, t)]) +$$
$$+ o_4(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x[\tau(\tilde{x}, \tilde{u}, t)]\|),$$
$$g(x + \Delta x, t) - g(x, t) = \frac{\partial g'(x, t)}{\partial x} \Delta x + o_5(\|\Delta x\|),$$
$$H(x, y, \psi, u, t) = \psi' f(x, y, u, t).$$

Доказательство неравенства (4) аналогично схеме получения формул приращения скалярных функций, изложенной в § 6.1 и приведено в [36е]. Частный случай неравенства (4), когда $\tau(x, u, t) = t - h(t)$:

$$\Delta J(u) \geqslant - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u, t)\, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_{\tilde{u}} H'(x, y, \psi, u, t) \Delta x(t)\, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_{\tilde{u}} H'(x, y, \psi, u, t) \Delta x(t - h(t))\, dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t - h(t))\|)\, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t - h(t))\|)\, dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} o_5(\|\Delta x(t)\|)\, d\mu(t).$$

2. Достаточные условия оптимальности. Пусть система (1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f_1(x(t), x(t - h(t)), t) + f_2(u(t), t), \\ x(t) &= \Phi(t), \quad t \in S_0 = \{t\colon t - h(t) \leqslant t_0,\ t \in T\}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

На траекториях системы (5) рассмотрим функционал

$$J(u)=\varphi(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}[f_{1,\,n+1}(x(t),\ x(t-h(t)),\ t)+f_{2,\,n+1}(u(t),\ t)]\,dt. \quad (6)$$

Функцию $\alpha(x)$ назовем сильно выпуклой с постоянной N, если она дифференцируема и величина $o(\|\Delta x\|)$ в разложении

$$\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)=\frac{\partial\alpha'(x)}{\partial x}\Delta x+o(\|\Delta x\|)$$

удовлетворяет неравенству

$$o(\|\Delta x\|)\geqslant N\|\Delta x\|^2, \qquad N\geqslant 0.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия: 1) функция $f_{1,\,n+1}(x,\ y,\ t)$ сильно выпукла по совокупности $\{x,\ y\}$ с постоянной N; 2) функции $\varphi(x)$, $g(x,\ t)$ выпуклы по x; 3)

$$\left\|\frac{\partial f_1(x,\ y,\ t)}{\partial x}\right\|\leqslant L_1, \quad \left\|\frac{\partial f_1(x,\ y,\ t)}{\partial y}\right\|\leqslant L_1, \quad \left\|\frac{\partial f_{1,\,n+1}(x,\ y,\ t)}{\partial x}\right\|\leqslant L_1,$$

$$\left\|\frac{\partial f_{1,\,n+1}(x,\ y,\ t)}{\partial y}\right\|\leqslant L_1, \quad \left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right\|\leqslant L_1, \quad \left\|\frac{\partial g(x,\ t)}{\partial x}\right\|\leqslant L_2,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 f_1(x,\ y,\ t)}{\partial x^2}\right\|\leqslant L_3,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 f_1(x,\ y,\ t)}{\partial x\,\partial y}\right\|\leqslant L_3, \quad \left\|\frac{\partial^2 f_1(x,\ y,\ t)}{\partial y^2}\right\|\leqslant L_3, \quad \left|\frac{dh(t)}{dt}\right|\leqslant 1-\alpha, \ \alpha>0.$$

Тогда в задаче (5), (6), (3) при $N\geqslant M_1$,

$$M_1=\frac{1}{2}L_3\left[L_1(t_1-t_0)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+L_2L_4+L_1\right]\times \\ \times\exp\left\{L_1\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(t_1-t_0)\right\},$$

каждое допустимое управление $u(t)$, $t\in T$, из класса D оптимально, если $g(x(t),\ t)\leqslant 0$, $t\in\sigma$, и $u(t)$ удовлетворяет условию

$$H(x(t),\ x(t-h(t)),\ \psi(t),\ u(t),\ t)= \\ =\max_{u\in U}H(x,\ (t),\ x(t-h(t)),\ \psi(t),\ u,\ t),$$

где функция $\psi(t)$, $t \in T$, — решение уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi(t)}{dt} = &-\frac{\partial(x, y, \psi, u, t)}{\partial x} - \\
&-\frac{\partial H(x(s), y(s), \psi(s), u(s), s)}{\partial y}\bigg|_{s=r(t)} \cdot \frac{dr(t)}{dt} + \\
&+\frac{\partial g(x(t), t)}{\partial x} \cdot \frac{d\mu(t)}{dt}, \quad t \in [t_0, t'], \\
\frac{d\psi(t)}{dt} = &-\frac{\partial H(x, y, \psi, u, t)}{\partial x} + \\
&+\frac{\partial g(x(t), t)}{\partial x} \cdot \frac{d\mu(t)}{dt}, \quad t \in [t', t_1], \\
\psi(t_1) = &-\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x},
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

и функция ограниченной вариации $\mu(t)$ такова, что $\int\limits_{\sigma} d\mu(t) \leqslant L_4$.

Доказательство. Для задачи (5), (6), (3) неравенство (4) принимает вид

$$\Delta J(u) \geqslant -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u, t)\,dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\
+\int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h(t))\|)\,dt - \\
-\int_{t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h(t))\|)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} o_5(\|\Delta x(t)\|)\,d\mu(t).$$

По условиям теоремы

$$\Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u, t) \leqslant 0, \quad o_1(\|\Delta x(t_1)\|) \geqslant 0, \quad o_5(\|\Delta x(t)\|) \geqslant 0,$$
$$o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h(t))\|) \geqslant N[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h(t))\|]^2.$$

Величина o_4 удовлетворяет неравенству

$$o_4 \leqslant \frac{1}{2}\|\psi(t)\| L_3 [\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h(t))\|]^2.$$

Из уравнений для $\psi(t)$ получается оценка для $\|\psi(t)\|$:

$$\|\psi(t)\| \leqslant \left[L_1(t_1 - t_0)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + L_2 L_4 + L_1\right] \times \\
\times \exp\left[L_1\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(t_1 - t_0)\right].$$

Подставляя эти оценки в выражение для $\Delta J(u)$ и учитывая неравенство $N \geqslant M_1$, получаем, что $\Delta J(u) \geqslant 0$, т. е. $u(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление.

3. Линейные по состоянию системы. Рассмотрим частный случай системы (5):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h(t)) + b(u(t), t), \\ &x(t) = \Phi(t), \quad t \in S_0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

По аналогии с теоремой 1 получается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $f_{1,n+1}(x, y, t)$, $g(x, t)$, $\Phi(t)$, $f_{2,n+1}(u, t)$, $h(t)$, $A(t)$, $A_1(t)$, $b(u, t)$ определены и непрерывны вместе с функциями $\partial\varphi/\partial x$, $\partial f_{1,n+1}/\partial x$, $\partial f_{1,n+1}/\partial y$, $\partial g/\partial x$ и, кроме того, функции $\varphi(x)$, $f_{1,n+1}(x, y, t)$, $g(x, t)$ выпуклы по совокупности $\{x, y\}$ и $|dh(t)/dt| \leqslant 1-\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда каждое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $u(t) \in U$, в задаче (8), (6), (3) является оптимальным, если $g(x(t), t) \leqslant 0$ и $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума

$$\psi'(t)\,b(u(t), t) - f_{2,n+1}(u(t), t) = \max_{u \in U}\,[\psi'(t)\,b(u, t) - f_{2,n+1}(u, t)]$$

с функцией $\psi(t)$ — решением системы

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A'(t)\,\psi(t) - A_1'(r(t))\,\psi(r(t))\,\frac{dr(t)}{dt} + \left.\frac{\partial f_{1,n+1}(x(t), x(t-h(t)), t)}{\partial x} + \frac{\partial f_{1,n+1}(x(\bar t), x(\bar t - h(\bar t)), \bar t)}{\partial y}\right|_{\bar t = r(t)} \times \frac{dr(t)}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}\cdot\frac{\partial g(x(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, t'],$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A'(t)\,\psi(t) + \frac{\partial f_{1,n+1}(x(t), x(t-h(t)), t)}{\partial x} + \frac{d\mu(t)}{dt}\cdot\frac{\partial g(x(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t', t_1], \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}.$$

4. Единственность оптимальной траектории. Пусть в теореме 1 выполняется строгое неравенство: $N > M_1$. Тогда, повторяя схему доказательства этой теоремы, убеждаемся, что приращение функционала $\Delta J(u)$ положительно, если $\Delta x(t) \not\equiv 0$. Таким образом, если в условиях теоремы 1 выполняется неравенство $N > M_1$, то оптимальная траектория единственна. Будет единственным и оптимальное управление, если вдоль оптимальной траектории система уравнений (5) относительно параметров u_ν имеет единственное решение в каждой точке $t \in T$.

При условиях теоремы 2 для единственности оптимальной траектории достаточно потребовать строгую выпуклость по совокупности переменных $\{x, y\}$ функции $f_{1,n+1}(x, y, t)$.

§ 2. Достаточные условия оптимальности в задачах с выпуклыми по управлениям функционалами

В этом параграфе класс допустимых управлений определяется как совокупность кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T$, со значениями из ограниченного выпуклого множества U.

1. Нелинейные системы. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-h(t)), u(t), t), \\ &x(t) = \Phi(t), \quad t \in S_0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t), x(t-h(t)), u(t), t)\, dt. \tag{10}$$

Теорема 3. Пусть в дополнение к условиям 2), 3) теоремы 1 выполняются условия: 1) функция $f_{n+1}(x, y, u, t)$ сильно выпукла по u с постоянной N_1;

2) $$\left\| \frac{\partial^2 f_{n+1}(x, y, u, t)}{\partial x^2} \right\| \leqslant L_3, \quad \left\| \frac{\partial^2 f_{n+1}(x, y, u, t)}{\partial x\, \partial y} \right\| \leqslant L_3,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f_{n+1}(x, y, u, t)}{\partial y^2} \right\| \leqslant L_3, \quad \left\| \frac{\partial f(x, y, u, t)}{\partial u} \right\| \leqslant L_5,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f(x, y, u, t)}{\partial x\, \partial u} \right\| \leqslant L_6, \quad \left\| \frac{\partial^2 f(x, y, u, t)}{\partial y\, \partial u} \right\| \leqslant L_6,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f_{n+1}(x, y, u, t)}{\partial x\, \partial u} \right\| \leqslant L_6, \quad \left\| \frac{\partial^2 f_{n+1}(x, y, u, t)}{\partial y\, \partial u} \right\| \leqslant L_6,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f(x, y, u, t)}{\partial u^2} \right\| \leqslant L_7.$$

Тогда в задаче (9), (10), (3) при

$$N_1 \geqslant 2M_2 + 2M_3 + M_4, \tag{11}$$

где

$$M_2 = L_5 L_6 \left\{1 + \left[L_1 + L_1(t_1 - t_0)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + L_2 L_4\right]\right\} \times$$
$$\times (t_1 - t_0) \exp L_1 \left(3 + \frac{1}{\alpha}\right)(t_1 - t_0),$$

$$M_3 = 2L_3 L_5^2 \left[L_1 + L_1(t_1 - t_0)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + L_2 L_4\right] \times$$
$$\times \exp L_1 \left(5 + \frac{1}{\alpha}\right)(t_1 - t_0),$$

$$M_4 = \frac{1}{2} L_7 \left[L_1 + L_1(t_1 - t_0)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + L_2 L_4\right] \times$$
$$\times \exp L_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(t_1 - t_0),$$

каждое допустимое управление $u(t)$ является оптимальным, если

$$\frac{\partial H'(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} u(t) =$$
$$= \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} u, \tag{12}$$

$$H'(x, y, \psi, u, t) = \psi' f(x, y, u, t) - f_{n+1}(x, y, u, t),$$
$$y(t) = x(t - h(t)), \tag{13}$$

и функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе (7) с H из (13).

Доказательство теоремы проходит по схеме доказательства теоремы 1 и состоит в сведении неравенства (4) к виду

$$\Delta J(u) \geqslant -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x, y, \psi, u, t)}{\partial u} \Delta u(t)\, dt + N_2 \int_{t_0}^{t_1} \| \Delta u(t) \|^2 dt.$$

Первый интеграл неположителен в силу условия (12). Коэффициент N_2 при втором интеграле равен числу $N_1 - 2M_2 - 2M_3 - M_4$, которое по (11) неотрицательно. Таким образом, $\Delta J(u) \geqslant 0$, что и доказывает оптимальность управления $u(t)$.

2. Линейные системы. Если уравнение (9) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h) + b(t)\,u,$$

где $A(t)$, $A_1(t)$, $b(t)$ — кусочно-непрерывные функции, в функционале (10) функции $\varphi(x)$, $f_{n+1}(x, y, u, t)$ непрерывны вместе с $\partial\varphi/\partial x$, $\partial f_{n+1}/\partial x$, $\partial f_{n+1}/\partial y$, $\partial f_{n+1}/\partial u$ и, кроме того, функции $\varphi(x)$, $f_{n+1}(x, y, u, t)$ выпуклы по совокупности $\{x, y, u\}$, то каждое управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющее условию (12), является оптимальным.

3. Единственность оптимального управления. Если при условиях теоремы 3 в (11) имеет место строгое неравенство, то оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче (9), (10), (3) единственно.

§ 3. Оптимальность управлений, удовлетворяющих принципу максимума

Недостаточность в общем случае условий максимума для оптимальности управлений видна из следующего примера.

Пример 1. $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $U = \{u\colon\ |u| \leqslant 1\}$, $T = [0, 1]$, $J(u) = -\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt$.

Условие максимума в данном случае имеет вид

$$\psi(t)\,u(t) = \max_{|u| \leqslant 1} \psi(t)\,u, \tag{14}$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения $\dot{\psi} = -2x$, $\psi(1) = 0$. Управление $u(t) = 0$, $t \in T$, удовлетворяет условию (14), хотя, очевидно, не является оптимальным. Кроме тривиального управления $u(t) \equiv 0$ условию (14) удовлетворяет еще счетное число нетривиальных управлений (см. § 6.6). Этот пример показывает также, что уже в простейших случаях оптимальные траектории и управления могут оказаться неединственными.

Идею исследования достаточности принципа максимума проиллюстрируем на простейшей задаче (6.1), (6.2). Этот вопрос для задачи (6.12), (6.2) по той же схеме подробно исследован в [36e].

Итак, пусть при минимизации функционала

$$J(u)=\varphi(x(t_1)) \qquad (15)$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt}=f(x, u, t), \qquad x(t_0)=x_0, \qquad (16)$$

найдена кусочно-непрерывная функция $u(t)$, $u(t)\in U$, $t\in T$, для которой

$$\psi'(t)f(x(t), u(t), t)=\max_{u\in U}\psi'(t)f(x(t), u, t)$$

с функцией $\psi(t)$ — решением уравнения

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial f'(x(t), u(t), t)}{\partial x}\psi, \qquad \psi(t_1)=-\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}.$$

Пусть функция $\Delta_{\tilde{u}}H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ на множестве $t\in\sigma=[\theta_1, \theta_2]$, $\tilde{u}\in U$, U — компакт, отлична от нуля и найдется постоянная $\beta_1>0$, при которой

$$\Delta_{\tilde{u}}H(x(t), \psi(t), u(t), t)\leqslant-\beta_1\|\Delta_{\tilde{u}}f(x(t), u(t), t)\|, \; t\in\sigma. \qquad (17)$$

Анализируя способ получения оценки для $\|\Delta_{\varepsilon\theta}x(t)\|$ (см. главу VI), можно заметить, что

$$\|\Delta x(t)\|\leqslant\beta_2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\|\Delta_{\tilde{u}}f(x(\tau), u(\tau), \tau)\|\,d\tau, \quad t\in T, \; \beta_2=\mathrm{const}, \qquad (18)$$

если

$$\Delta u(t)=\tilde{u}(t)-u(t)=0, \quad t\notin\sigma. \qquad (19)$$

Приращение функционала (15) на приращениях управления (19) в силу (17) удовлетворяет неравенству

$$\Delta J(u)\geqslant\beta_1\int_{\theta_1}^{\theta_2}\|\Delta_{\tilde{u}}f(x(t), u(t), t)\|\,dt-$$
$$-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial\Delta_{\tilde{u}}H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}\Delta x(t)\,dt-$$
$$-\int_{\theta_1}^{t_1}o_1(\|\Delta x(t)\|)\,dt+o_4(\|\Delta x(t_1)\|). \qquad (20)$$

Пусть $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| \leqslant L_1$, $\|\psi(t)\| \leqslant K_1$, $o_1(\alpha) \leqslant K_2\alpha^2$, $o_4(\alpha) \leqslant K_3\alpha^2$.

Тогда

$$\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Delta x(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2(\theta_2-\theta_1) K_1 L_1 \beta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\Delta_{\tilde{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\|\, d\tau,$$

$$\left|\int_{\theta_1}^{t_1} o_1(\|\Delta x(t)\|)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant (t_1-t_0) K_2 \beta_2^2 \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\Delta_{\tilde{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\|\, d\tau\right]^2,$$

$$|o_4(\|\Delta x(t_1)\|)| \leqslant K_3 \beta_2^2 \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\Delta_{\tilde{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\|\, d\tau\right]^2,$$

и неравенство (20) принимает вид

$$\Delta J(u) \geqslant [\beta_1 - 2(\theta_2-\theta_1) K_1 L_1 \beta_2] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\Delta_{\tilde{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\|\, d\tau -$$

$$- \beta_2^2 [(t_1-t_0) K_2 + K_3] \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\Delta_{\tilde{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\|\, d\tau\right]^2. \tag{21}$$

Будем говорить, что на множестве $\sigma = [\theta_1, \theta_2]$ управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет усиленному условию максимума с постоянной β_1, если неравенство (17) выполняется при всех $\tilde{u} \in U$, $t \in \sigma$. Управление $u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in T$, назовем оптимальным относительно возмущений, малых в среднем на σ, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $J(u+\Delta u) - J(u) \geqslant 0$ для всех таких $\Delta u(t)$, что $u(t) + \Delta u(t) \in U$, $\Delta u(t) = 0$ при $t \bar{\in} \sigma$ и $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \|f(x(t), u(t) + \Delta u(t), t) - f(x(t), u(t), t)\|\, dt \leqslant \varepsilon$.

Управление $u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in T$, называется оптимальным относительно возмущений, сосредоточенных на σ, если $J(u + \Delta u) - J(u) \geqslant 0$ для всех таких $\Delta u(t)$, что $u(t) + \Delta u(t) \in U$ и $\Delta u(t) = 0$ при $t \bar{\in} \sigma$.

Теорема 4. Пусть функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе с функциями $\partial f(x, u, t)/\partial x$, $\partial\varphi/\partial x$, $\partial^2 f(x, u, t)/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial x^2$. Тогда в задаче (16), (15) при $\beta_1 > 2(\theta_2 - \theta_1) K_1 L_1 \beta_2$ каждое допустимое управление $u(t)$ класса D, удовлетворяющее на $\sigma = [\theta_1, \theta_2]$ усиленному условию максимума с постоянной β_1, является оптимальным по отношению к возмущениям, малым в среднем на σ. Указанное управление будет оптимальным и относительно возмущений, сосредоточенных на σ, если дополнительно $\theta_2 - \theta_1$ достаточно мало, а множество U ограничено.

§ 4. Об оптимальности особых управлений

Хотя принцип максимума в общем случае не является достаточным условием оптимальности, но для линейных по состоянию систем он содержит все условия, обеспечивающие оптимальность управлений (теорема 2). Из примера 1 следует, что и не каждое особое управление является оптимальным. Для нахождения достаточных условий оптимальности особых управлений использование формул приращений функционалов k-го порядка естественно в той же степени, как оно естественно при исследовании неособых управлений (§§ 1—3). Не затрагивая в общем случае этого вопроса, в данном параграфе укажем на задачи, в которых из существования особых управлений следует их оптимальность.

Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(u, t)\,x + b(u, t) \tag{22}$$

с непрерывными функциями $A(u, t)$, $b(u, t)$. Допустим, что среди управлений класса D минимизируется функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)),$$

где $\varphi(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция. Из формулы приращения функционала (6.3) следует неравенство

$$\Delta J(u) \geqslant -\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\,\Delta_{\tilde{u}}\,[A(u(t),t)\,x(t)+b(u(t),t)]\,dt - \\ -\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\,\Delta_{\tilde{u}} A(u(t),t)\,\Delta x(t)\,dt.$$

Поэтому, если управление $u(t)$, $t \in T$, таково, что

$$\left.\begin{aligned} \psi'(t)\,\Delta_{u^*}[A(u(t),t)\,x(t)+b(u(t),t)] \equiv 0, \quad t\in T, \quad u^* \in U,\\ \psi'(t)\,\Delta_{u^*}A(u(t),t) \equiv 0, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

то оно оптимально. Покажем, что условия (23) выполняются для особых управлений первого порядка, если система (22) эквивалентна уравнению

$$\left.\begin{aligned} x^{(n)} + a_n(u,t)\,x^{(n-1)} + \ldots + a_1(u,t)\,x = b(u,t),\\ x^{(i-1)}(t_0) = x_{i0}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

В данном случае матрица A имеет вид

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_n \end{Bmatrix},$$

и принцип максимума приводит к условию

$$\psi_n(t)\left[-\sum_{i=1}^{n} a_i(u^0(t),t)\,x_i^0(t) + b(u^0(t),t)\right] = \\ = \max_{u\in U} \psi_n(t)\left[-\sum_{i=1}^{n} a_i(u,t)\,x_i^0(t) + b(u,t)\right],$$

где $x_i(t) = x^{(i-1)}(t)$, $\psi_n(t)$ — компонента вектор-функции $\psi(t) = \{\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{\psi}(t) = -A'(u^0(t),t)\,\psi(t), \qquad \psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x}.$$

Типичным для практики систем (24) случаем особого управления является тождество

$$\psi_n(t) \equiv 0, \qquad t \in T. \qquad (25)$$

Нетрудно подсчитать, что из (25) следует тождество в (23).

Теорема 5. В задаче (24), (15) каждое особое управление, для которого выполняется (25), является оптимальным.

Сведением к задаче (24), (15) можно получить и следующий результат.

Теорема 6. Пусть на траекториях уравнения (24) минимизируется функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t),\ u(t),\ t)\,dt,$$

где $\varphi(x)$, $f_{n+1}(x, u, t)$ — непрерывные функции вместе с $\partial\varphi(x)/\partial x$, $\partial f_{n+1}(x, u, t)/\partial x$, причем $\varphi(x)$, $f_{n+1}(x, u, t)$ выпуклы по x. Кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, является оптимальным, если вдоль него выполняются условия:

$$\dot\psi(t) = -A'(u(t), t)\,\psi(t) + \frac{\partial f_{n+1}(x(t), u(t), t)}{\partial x},$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x},$$

$$\psi_n(t) \equiv 0,\ f_{n+1}(x(t),\ u(t),\ t) \leqslant$$
$$\leqslant f_{n+1}(x(t),\ u,\ t), \qquad t \in T, \qquad u \in U.$$

§ 5. Достаточные условия оптимальности

1. Управления, порождающие оптимальную траекторию. Пусть на допустимых управлениях $u(t) \in U$ и параметрах $v \in V$ минимизируется функционал

$$J(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x(t),\ u(t))\,dt,$$

определенный на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

с начальными условиями $x(t_0) = g(v)$. Обозначим через M множество допустимых управлений $u^*(t)$ и параметров $v^* \in V$, порождающих оптимальную траекторию $x^0(t)$.

Пусть
$H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u) - f_{n+1}(x, u)$, $h(\psi, v) = \psi' g(v)$,
и функция $\psi(t)$ определена уравнением

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x}, \qquad \psi(t_1) = -c.$$

Теорема 7. Для того чтобы

$$J(\bar{u}, \bar{v}) \leqslant J(u, v), \qquad \{u, v\} \in M,$$

достаточно, чтобы $\bar{u}(t)$, $t \in T$, $\bar{v}$ удовлетворяли условиям

$$H(x^0(t), \psi(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u), \tag{26}$$

$$h(\psi(t_0), \bar{v}) = \max_{v \in V} h(\psi(t_0), v). \tag{27}$$

Доказательство. Обобщая лемму 6.5 на рассматриваемую задачу, получим

$$J(u, v) = -\psi'(t_0) g(v) - \int_{t_0}^{t_1} H(x(t), \psi(t), u(t))\, dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} x(t)\, dt. \tag{28}$$

Допустим, что среди M найдутся оптимальные $u^0(t)$, v^0:

$$J(u^0, v^0) < J(\bar{u}, \bar{v}). \tag{29}$$

Но из условия $\{u^0, v^0\} \in M$, $\{\bar{u}, \bar{v}\} \in M$ следует, что $f(x^0(t), u^0(t)) = f(x^0(t), \bar{u}(t))$, и, кроме того, из принципа максимума для $u^0(t)$ и условия (26) имеем $f_{n+1}(x^0(t), u^0(t)) = f_{n+1}(x^0(t), \bar{u}(t))$. Подставляя эти равенства в уравнения для $\psi(t)$, получаем

$$\psi(t)\big|_{u=u^0(\cdot),\, v^0} = \psi(t)\big|_{u=\bar{u}(\cdot),\, \bar{v}},$$

что совместно с (27) и (28) дает $J(\bar{u}, \bar{v}) \leqslant J(u^0, v^0)$ в противоречии с (29). Теорема доказана.

2. Однородные функционалы.

Теорема 8. Пусть вдоль траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = f(u, w), \quad x(t_0) = g(v), \quad u(t) \in U, \quad v \in V, \quad w \in W, \quad t \in T,$$

минимизируется функционал

$$J(u, v, w) = \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x, u, w)\,dt,$$

где

$$f_{n+1}(\lambda x, u, w) = \lambda^m f_{n+1}(x, u, w), \qquad m > -1.$$

Тогда для оптимальности управления $u^0(t)$, $t \in T$, и параметров v^0, w^0 необходимо и достаточно, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), w^0) = \\ &\qquad\qquad = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u, w^0), \\ &h_{v^0}(t_0) + (t_1 - t_0) H_{u^0, w^0}(t_1) = \\ &\qquad = \max_{\{u, v, w\} \in \Omega} [h_v(t_0) + (t_1 - t_0) H_{u, w}(t_1)]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Здесь

$$H_{u, w}(t) = \psi'(t) f(u(t), w) - f_{n+1}(x(t), u(t), w),$$
$$h_v(t) = \psi'(t) g(v),$$

Ω — множество управлений $u(t)$, $t \in T$, и параметров v, w, удовлетворяющих условию (30).

Доказательство. При условиях теоремы имеем

$$\frac{\partial H'(x, \psi, u, w)}{\partial x} x = -\frac{\partial f'_{n+1}(x, u, w)}{\partial x} x = -m f_{n+1}(x, u, w).$$

Поэтому из (28) и (30) следует

$$J(u, v, w) = -\psi'(t_0) g(v) - (t_1 - t_0) H_{u, w}(t_1) - \\ - mJ(u, v, m),$$

что и доказывает теорему.

В силу этой теоремы управления $u^0(t) = \pm 1$ в примере 1 из § 6.6 оптимальны.

§ 6. Достаточность принципа максимума в линейных системах

Будем говорить, что функция $\bar{u}(t)$, $t \in T$, является экстремальным управлением для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t), \tag{31}$$

где управление $u(t)$ стеснено условием $|u_\nu(t)| \leqslant L$, если

$$\psi'(t)B(t)\bar{u}(t) = \max_{|u_\nu| \leqslant L} \psi'(t)B(t)u, \quad \nu = 1, \ldots, r. \tag{32}$$

Здесь $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'(t)\psi.$$

Рассмотрим решение δ_2^0, $u^0(t)$, $t \in T$, задачи минимизации нормы $\| x(t_1) - c_2 \|$ конечного состояния уравнения (31) при условии $\| x(t_0) - c_1 \| \leqslant \delta_1$, где c_1, c_2 — заданные точки в фазовом пространстве (31), δ_1 — фиксированное, неотрицательное число. Справедливо утверждение:

Теорема 9. Пусть $\bar{u}(t)$ — экстремальное управление. Если траектория $x(x_0, \bar{u}(\cdot), t)$ удовлетворяет условиям

$$\psi'(t_0)[x(t_0) - c_1] = \delta_1 \| \psi(t_0) \|,$$

$$\psi'(t_1)[c_2 - x(x(t_0), \bar{u}(\cdot), t_1)] = \delta_2 \| \psi(t_1) \|,$$

то $\bar{u}(t)$ — оптимальное управление. Утверждение следует из теоремы 6.24.

Теперь допустим, что система (31) стационарна. Рассмотрим для нее задачу оптимального быстродействия (6.171) с фиксированными концевыми условиями, $x(t_1) = 0$, t_1 — конечный момент времени. Справедлива

Теорема 10. Если T-допустимое управление $\bar{u}(\cdot)$ экстремально, то $\bar{u}(\cdot)$ — оптимальное управление.

Доказательство. В силу примечания к лемме 6.13 экстремальное управление единственно. Но $u^0(\cdot)$ — экстремальное управление. Значит, $\bar{u}(\cdot) = u^0(\cdot)$ почти всюду при $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Единственность оптимального управления в задаче (6.171), (31) связана уже с определенными свойствами определяющего уравнения (1.110), $h = 0$, $A_1 = 0$.

Теорема 11. Пусть T-допустимое управление $\bar{u}(\cdot)$ в задаче (6.171), (31) экстремально. Если определяющее уравнение системы (1.110), $A_1 = 0$, невырождено при $t = t_1$, то $\bar{u}(\cdot)$ — оптимальное управление.

Доказательство. Достаточно убедиться, что t_1 — наименьший корень уравнения (6.175).

Так как определяющее уравнение системы невырождено в точке $t = t_1$, то при некотором ε справедливо неравенство

$$\lambda(x_0, t) < \lambda(x_0, t_1), \qquad t \in (t_1 - \varepsilon, t_1).$$

В силу леммы 6.13 и полученного неравенства заключаем: t_1 — минимальный корень для (6.175). Утверждение доказано.

П р и м е ч а н и е. Утверждения, аналогичные теоремам 9—11, справедливы в задачах минимизации нормы конечного состояния и оптимального быстродействия для системы с запаздыванием (6.156), при этом функция $\psi(t)$ в определении экстремального управления — нетривиальное решение уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\psi(t) - \eta(t)A_1^*(t+h)\psi(t+h),$$

$$\eta(t) = 1, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - h, \quad \eta(t) = 0, \quad t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1.$$

Пусть дана система (6.136)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t)u.$$

Область изменения $x(t)$ в (6.137)

$$G(x) = \{x\colon e'x \leqslant 1\}, \quad e \neq 0,$$

при этом управление $u(t)$ стеснено условием $|u(t)| \leqslant 1$.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия (6.171). В определении экстремального управления (см. (32)) функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'(t)\psi + e\frac{d\mu(t)}{dt}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть T-допустимое управление $\bar{u}(\cdot)$ в задаче (6.171), (6.136), (6.137) экстремально и $\psi(t_1) \neq 0$. Тогда $\bar{u}(\cdot)$ — оптимальное управление.

Утверждение доказывается как теорема 11, ибо функция (6.141) обладает следующими свойствами.

Лемма 1. Пусть $\Phi(t_1) = 0$. Тогда $\Phi(t') \leqslant \Phi(t_1)$ для всех $t' > t_1$; существует такое $\varepsilon > 0$, что $\Phi(t'') > \Phi(t_1)$ при всех $t'' \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$.

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из того факта, что траекторию системы можно удержать в начале координат. Докажем вторую часть.

Пусть ε определено, как в доказательстве леммы 6.10. Тогда

$$\Phi(t_1) = g'x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \left|\gamma'(t)\left[g - \int_{t_0}^{t'} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau)\right]\right| dt - \int_{t_0}^{t_1} d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\|g\|=1,\, d\mu\geqslant 0} \left\{g'x_0 - \int_{t_0}^{t''} \left|\gamma'(t)\left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau)\right]\right| dt - \int_{t_0}^{t''} d\mu(t)\right\} - \int_{t''}^{t_1} \left|\gamma'(t)\left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau)\right]\right| dt =$$

$$= \Phi(t'') - \int_{t''}^{t_1} \left|\gamma'(t)\left[g - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau)\right]\right| dt.$$

Последний интеграл равен нулю лишь в случае, если $g = \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\, e\, d\mu(\tau)$, $t \leqslant t_1$. Но это равенство невозможно, так как

$$\psi(t_1) = -(F^{-1}(t_1))'\left[g - \int_{t_0}^{t_1} F'(t)\, e\, d\mu(t)\right] \neq 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 13. Пусть T-допустимое управление $\bar{u}(\cdot)$ в задаче (6.171), (31), (6.136) экстремально и $\psi(t_1) \neq 0$. Если определяющее уравнение (1.110), $A_1 = 0$, невырождено, то $\bar{u}(\cdot)$ — оптимальное управление.

Утверждение доказывается аналогично теореме 11.

Примечание. Предположение $\psi(t_1) \neq 0$ в теоремах 12, 13 становится излишним, если существует T-допустимое управление, при котором

$$e'x(t) < 1, \qquad t \in T.$$

В этом можно убедиться, исследуя функцию $\Phi(t_1)$ или используя рассуждения из [50a].

§ 7. К достаточным условиям оптимальности в задачах игрового типа

Сначала рассмотрим задачу терминального управления. Пусть рассматривается движение

$$\frac{dx}{dt}=Ax+b(v, w), \qquad x(0)=x_0, \qquad t\in T=[0, t_1], \tag{33}$$

управляемое функциями $v(t)\in V$, $w(t)\in W$, $t\in T$. Допустим, что найдены управления $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$ такие, что

$$\psi'(t)\,b(\bar{v}(t), \bar{w}(t))=\max_{v\in V}\psi'(t)\,b(v, \bar{w}(t)),$$

$$\psi'(t)\,b(\bar{v}(t), \bar{w}(t))=\min_{w\in W}\psi'(t)\,b(\bar{v}(t), w),$$

$$x(t)=x(t, \bar{v}(\cdot), \bar{w}(\cdot)),$$

где $x(t)$ — решение уравнения (33) при $v=\bar{v}$, $w=\bar{w}$, а $\psi(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt}=-A'\psi, \qquad \psi(t_1)=-c.$$

Тогда $\{\bar{v}(\cdot), \bar{w}(\cdot)\}$ — седловая точка функционала

$$J(v, w)=c'x(t_1),$$

т. е. для всех $v(t)\in V$, $w(t)\in W$

$$J(\bar{v}, w)\leqslant J(\bar{v}, \bar{w})\leqslant J(v, \bar{w}).$$

Доказательство этого предложения полностью аналогично доказательству из § 1.

Пусть даны уравнения преследующего

$$\frac{dy}{dt}=Ay+b_1v, \qquad y(0)=y_0, \tag{34}$$

и преследуемого

$$\frac{dz}{dt}=Az+b_2w, \qquad z(0)=z_0, \tag{35}$$

объектов. Будем считать, что система (34) управляема и что кусочно-непрерывные управления $v(t)$, $w(t)$ стеснены условиями

$$|v|\leqslant 1, \qquad |w|\leqslant 1.$$

Допустим, что найдены такие управления $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$, $t \in T$, что соответствующие им траектории $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ систем (34), (35) удовлетворяют условию $\bar{y}(t_1) = \bar{z}(t_1)$ и

$$\psi'(t) b_1 \bar{v}(t) = \max_{|v| \leqslant 1} \psi'(t) b_1 v, \tag{36}$$

$$\psi'(t) b_2 \bar{w}(t) = \min_{|w| \leqslant 1} \psi'(t) b_2 w. \tag{37}$$

Здесь $\psi(t)$ — нетривиальное решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'\psi. \tag{38}$$

Тогда функции $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$, $t \in T$ — элементы седловой точки функционала момента встречи

$$t_1(\bar{v}(\cdot), w(\cdot)) \leqslant t_1(\bar{v}(\cdot), \bar{w}(\cdot)) \leqslant t_1(v(\cdot), \bar{w}(\cdot)). \tag{39}$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся тождеством из § 6.4. Фунция $x(t) = y(t) - z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b_1 v - b_2 w, \qquad x(0) = y_0 - z_0.$$

Поэтому вдоль траекторий $x(t)$ и $\psi(t)$ из (38) выполняется тождество

$$\psi'(t_1) x(t_1) - \psi'(0) x(0) = \int_0^{t_1} \psi'(t) b_1 v(t)\, dt - \int_0^{t_1} \psi'(t) b_2 w(t)\, dt.$$

Докажем сначала справедливость второго неравенства в (39). Допустим, что оно не выполняется, т. е. существует управление $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \theta$, $|v(t)| \leqslant 1$, при котором преследующий объект достигает цели за время $\theta < t_1$. По условию

$$\psi'(t) b_1 \bar{v}(t) \geqslant \psi'(t) b_1 v(t).$$

Поэтому

$$\psi'(\theta)\bar{x}(\theta) =$$
$$= [\psi'(\theta)\bar{x}(\theta) - \psi'(0) x(0)] - [\psi'(\theta) x(\theta) - \psi'(0) x(0)] =$$
$$= \int_0^{\theta} \psi'(t) b_1 \bar{v}(t)\, dt - \int_0^{\theta} \psi'(t) b_1 v(t)\, dt \geqslant 0. \tag{40}$$

С другой стороны,

$$\psi'(t)\,b_1\bar{v}(t) = \max_{|u|\leqslant 1} \psi'(t)\,b_1 u = |\psi'(t)\,b_1| \not\equiv 0, \tag{41}$$

$$\psi'(t)\,b_2\bar{w}(t) = \min_{|u|\leqslant 1} \psi'(t)\,b_2 u = -|\psi'(t)\,b_2| \leqslant 0. \tag{42}$$

Поэтому

$$\psi'(\theta)\,\bar{x}(\theta) = \psi'(\theta)\,\bar{x}(\theta) - \psi'(t_1)\,\bar{x}(t_1) =$$
$$= -\int_\theta^{t_1} \psi'(t)\,b_1\bar{v}(t)\,dt + \int_\theta^{t_1} \psi'(t)\,b_2\bar{w}(t)\,dt < 0,$$

что противоречит (40). Первое неравенство в (39) доказывается аналогично. Пусть при управлении $w(t)$, $|w|\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant\sigma$, преследуемый объект избегает встречи до момента $\sigma > t_1$. Управления $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$ на отрезок $[t_1, \sigma]$ продолжим согласно условиям (41), (42). Тогда

$$\psi'(t)\,b_2\bar{w}(t) \leqslant \psi'(t)\,b_2 w(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant\sigma,$$

и поэтому $(x(t) = \bar{y}(t) - z(t))$

$$\psi'(\sigma)\,\bar{x}(\sigma) = [\psi'(\sigma)\,\bar{x}(\sigma) - \psi'(0)\,\bar{x}(0)] -$$
$$- [\psi'(\sigma)\,x(\sigma) - \psi'(0)\,x(0)] =$$
$$= \int_0^\sigma \psi'(t)\,b_2\bar{w}(t)\,dt - \int_0^\sigma \psi'(t)\,b_2 w(t)\,dt \leqslant 0. \tag{43}$$

Но поскольку свойства (41), (42) сохраняются для $0\leqslant t\leqslant\sigma$, то

$$\psi'(\sigma)\,\bar{x}(\sigma) = \psi'(\sigma)\,\bar{x}(\sigma) - \psi'(t_1)\,\bar{x}(t_1) =$$
$$= \int_{t_1}^\sigma \psi'(t)\,b_1\bar{v}(t)\,dt - \int_{t_1}^\sigma \psi'(t)\,b_2\bar{w}(t)\,dt > 0,$$

что противоречит (43). Справедливость (39) доказана.

Примечания. 1) Предположение об управляемости преследующего объекта можно отбросить.

2) Если объекты считать нестационарными, то дополнительно следует предположить, что в момент $t = t_1$ выполнено условие теоремы 1.19, $A_1 = 0$, для преследующего объекта.

3) Существование управлений $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$, удовлетворяющих сформулированным условиям, доказывается в § 6.16. Там же указывается способ их вычисления.

§ 8. Единственность оптимальных управлений в линейных системах

Ниже исследуются управления задачи оптимального быстродействия (6.171). Сначала рассмотрим решение $u^0(t)$ задачи оптимального быстродействия для стационарных систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu.$$

Теорема 14. Если оптимальное управление $u^0(\cdot)$ существует, то оно единственно.

Доказательство. Для оптимального управления $u^0(t)$ справедливо равенство

$$u^0(t) = L \operatorname{sign} \xi(t, g(t_1^0)). \tag{44}$$

Из существования $u^0(\cdot)$ следует, что функция $\xi(t, g(t_1^0)) = g'(t_1^0) F^{-1}(t) b$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры (см. примечание к лемме 6.13). Значит, соотношение (44) определяет функцию $u^0(\cdot)$ однозначно. Утверждение доказано.

Теорема 15. Пусть система (6.170)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t)$$

такова, что определяющее уравнение (1.110), $A_1 = 0$, невырождено почти при всех t, $t \in T$. Если оптимальное управление в задаче оптимального быстродействия (6.171), (6.170) существует, то оно единственно. Утверждение следует из соотношения (44) и примечания к лемме 6.13.

Пусть дано уравнение с запаздыванием (6.156)

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t).$$

Теорема 16. Если оптимальное управление в задаче (6.171), (6.156) существует, то оно единственно.

В самом деле, функция $g'(t_1^0) F(t_1, t) b$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры (см.

примечание к теореме 6.34). Значит, соотношение теоремы 6.34 определяет $u^0(t)$ однозначно, что и требовалось доказать.

Теорема 17. Пусть система (6.156) такова, что определяющее уравнение (1.110) невырождено почти при всех t, $t \in T$. Если оптимальное управление в задаче оптимального быстродействия (6.171), (6.156) существует, то оно единственно.

Это утверждение — следствие примечания к теореме 6.34.

Теоремы 14—17 устанавливают единственность оптимальных управлений во всей их области определения. Если условия теорем 15, 17 не выполнены, то для некоторых начальных состояний оптимальные управления могут определяться теоремами 6.32, 6.34 все же однозначно. Выясним этот вопрос для простейшей задачи оптимального быстродействия [40b].

Дана система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + b(t)\,u, \qquad x(t_0) = x_0,$$

с помощью кусочно-непрерывных управлений $u(t)$,

$$|u(t)| \leqslant L,$$

требуется за минимальное время $t_1^0 - t_0$ перевести траекторию $x(t)$ из точки x_0 в начало координат. Из результатов § 6.10 следует, что эта задача разрешима, если при некотором t_1 неположительна функция

$$\rho(t_1) = \lambda(t_1, g_1) = \max_{\|g\|=1} \lambda(t_1, g),$$

$$\lambda(t_1, g) = g'S(t_1, x_0) - L\int_{t_0}^{t_1} |g'S(t_1, t)|\,dt.$$

Наименьшее t_1^0, при котором $\rho(t_1^0) \leqslant 0$, соответствует времени $t_1^0 - t_0$ оптимального быстродействия. Оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет соотношению

$$u^0(t) = -L\,\mathrm{sign}\,g_1'S(t_1^0, t),$$

которое однозначно определяет $u^0(t)$ на множестве

$$\sigma_1 = \{t\colon\ g_1'S(t_1^0, t) \neq 0,\ t \in T\}.$$

Введем управление

$$u_1(t)=\begin{cases} u^0(t), & t\in\sigma_1,\\ 0, & t\in T-\sigma_1.\end{cases}$$

Это управление переводит точку x_0 в точку $x_1=S(t_1^0, x_0)+ + \int\limits_{\sigma_1} S(t_1^0, t)\,u_1(t)\,dt$. По определению управления $u_1(t)$ для точек x_0, x_1 выполняется равенство $g_1'[x_1-x_0]=0$, т. е. точка x_0 лежит в гиперплоскости l_1: $g_1'x=g_1'x_1$. Поэтому исходная задача свелась к нахождению управления $u(t)$, $|u(t)|\leqslant L$, $t\in T-\sigma_1$, при котором

$$0=x_1+\int\limits_{T-\sigma_1} S(t_1^0, t)\,u(t)\,dt. \qquad (45)$$

Но поскольку множество $\left\{x\colon x=\int\limits_{T-\sigma_1} S(t_1^0, t)\,u(t)\,dt,\ |u(t)|\leqslant L\right\}$ целиком лежит в l_1, то задача имеет размерность на единицу меньшую, чем исходная. Найдем

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1(t_1^0, \alpha)=\lambda_1(t_1^0, \alpha, g_2)=\max_{\|g\|=1,\ g'g_1=0}\lambda_1(t_1, \alpha, g),\\ &\lambda_1(t_1^0, \alpha, g)=g'x_1-\alpha\int\limits_{T-\sigma_1}|g'S(t_1^0, t)|\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Очевидно, $\rho_1(t_1^0, L)\leqslant\lambda(t_1^0, g_1)=0$. Поэтому найдется такое L_1, $0\leqslant L_1\leqslant L$, что $\rho_1(t_1^0, L_1)=0$. Тогда одно из управлений, разрешающих задачу (45), имеет вид

$$u_1^0(t)=-L_1\operatorname{sign} g_2'S(t_1^0, t), \qquad t\in T-\sigma_1, \qquad (47)$$

где g_2 — вектор, разрешающий задачу (46) при $\alpha=L_1$. Соотношение (47) определяет $u_1^0(t)$ однозначно на множестве $\sigma_2=\{t\colon g_2'S(t_1^0, t)\neq 0,\ t\in T-\sigma_1\}$. Положим

$$u_2(t)=\begin{cases} u^0(t), & t\in\sigma_1,\\ u_1^0(t), & t\in\sigma_2,\\ 0 & t\in T-\sigma_1-\sigma_2.\end{cases}$$

Это управление переводит точку x_0 в точку $x_2=S(t_1^0, x_0)+ + \int\limits_{\sigma_1+\sigma_2} S(t_1^0, t)\,u_2(t)\,dt$. Нетрудно проверить, что множество $\left\{x:\ x=\int\limits_{T-\sigma_1-\sigma_2} S(t_1^0,\, t)\,u(t)\,dt,\ |u(t)|\leqslant L\right\}$ лежит в $(n-2)$-мерной гиперплоскости l_2: $g_1'x=g_1'x_1,\ g_2'x=g_2'x_2$. Исходная задача теперь свелась к решению задачи

$$0=x_2+\int\limits_{T-\sigma_1-\sigma_2} S(t_1^0,\, t)\,u(t)\,dt. \tag{48}$$

Составим функцию

$$\left.\begin{aligned} \rho_2(t_1^0,\, \alpha)=\lambda_2(t_1^0,\, \alpha,\, g_3)&=\max_{\substack{\|g\|=1\\ g'g_1=0,\ g'g_2=0}} \lambda_2(t_1^0,\, \alpha,\, g),\\ \lambda_2(t_1^0,\, \alpha,\, g)&=g'x_2-\alpha\int\limits_{T-\sigma_1-\sigma_2} |g'S(t_1^0,\, t)|\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Ясно, что $\rho_2(t_1^0,\, L_1)\leqslant 0$. Поэтому найдется число L_2, $0\leqslant\leqslant L_2\leqslant L_1$, такое, что $\rho_2(t_1^0,\, L_2)=0$. Одно из управлений, разрешающих задачу (48), имеет вид

$$u_2^0(t)=-L_2\operatorname{sign} g_3'S(t_1^0,\, t),\quad t\in T-\sigma_1-\sigma_2,$$

где вектор g_3 — решение задачи (49) при $\alpha=L_2$. Продолжая этот процесс, встретимся с одним из следующих случаев.

1) $\operatorname{mes}\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i=\operatorname{mes} T$ при некотором $k\leqslant n$. Тогда управление

$$u_k(t)=\begin{cases} u^0(t), & t\in\sigma_1,\\ u_1^0(t), & t\in\sigma_2,\\ \dots\dots\dots\\ u_{k-1}^0(t), & t\in\sigma_k, \end{cases}$$

однозначно определенное на T, будет решать исходную задачу.

2) $\operatorname{mes}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i<\operatorname{mes} T$. Управление

$$u_n(t)=\begin{cases} u^0(t), & t\in\sigma_1,\\ u_1^0(t), & t\in\sigma_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{n-1}^0(t), & t\in\sigma_n,\\ u(t), & t\in T-\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i, \end{cases}$$

где $u(t)$, $|u(t)| \leqslant L$ — произвольная функция на $T - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$, решает исходную задачу приведения точки x_1 в начало координат.

Из построения управлений $u_i(t)$ следует утверждение: задача оптимального быстродействия для точки x_0 имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\operatorname{mes} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = T$,

2) $L_i = L$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Примечание. **Изложенная схема допускает очевидное обобщение на случай нескольких входов. Форма же изложения никак не использовала частный вид исходной системы. Поэтому эти выводы справедливы и для системы (6.156). Перенесение схемы на системы с нелинейным входом проводится непосредственно, если учесть, что на каждом этапе мы выделяли множества σ, на которых управления $u_i^0(t)$ однозначно определяются вектором g_{i+1}.** Эта ситуация имеет место и в общем случае.

§ 9. Задачи оптимизации с иерархической системой критериев качества

При пояснении существа рассматриваемых в этом пункте вопросов ограничимся задачей предыдущего параграфа.

Понятно, что если задачу оптимизации решает не одно управление, то естественно из этого множества выбрать такое, при котором система оптимальна в смысле дополнительного критерия. Если и в новой задаче несколько решений, то вводится третий критерий и так далее.

В общем случае имеется система критериев [219]

$$J_1(u),\ J_2(u),\ \ldots$$

и требуется найти допустимое управление $u^0(t)$, при котором выполняются граничные условия и

$$J_1(u) = \min_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} J_1(u), \qquad J_2(u) = \min_{u(\cdot)\in U_2(\cdot)} J_2(u), \ \ldots$$

Здесь $U_1(\cdot) = U(\cdot)$ — заданный класс допустимых управлений, $U_2(\cdot) = \{u(\cdot)\colon J_1(u) = J_1(u^0),\ u(\cdot) \in$

$\in U_1(\cdot)\}$, и т. д. Эту задачу с иерархической системой критериев можно обобщить таким образом, чтобы она имела смысл в тех случаях, когда задача оптимизации с одним критерием имеет единственное решение. Действительно, пусть задана система управления, граничные условия, класс допустимых управлений, упорядоченная система функционалов

$$J_1(u),\ J_2(u),\ \ldots,\ J_m(u),\ J_{m+1}(u)$$

и совокупность чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$.

З а д а ч а. Среди допустимых управлений, удовлетворяющих граничным условиям, найти такое $u^0(t)$, что

$$J_1(u^0) \leqslant \min_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} J_1(u) + \varepsilon_1,$$
$$J_2(u^0) \leqslant \min_{u(\cdot)\in U_2(\cdot)} J_2(u) + \varepsilon_2, \ \ldots,$$
$$J_m(u^0) \leqslant \min_{u(\cdot)\in U_m(\cdot)} J_m(u) + \varepsilon_m,$$
$$J_{m+1}(u^0) = \min_{u(\cdot)\in U_{m+1}(\cdot)} J_{m+1}(u).$$

Здесь $U_1(\cdot) = U(\cdot)$ — заданный класс допустимых управлений,

$$U_2(\cdot) = \{u(\cdot)\colon\ u(\cdot)\in U_1(\cdot),$$
$$J_1(u) \leqslant \min_{u(\cdot)\in U_1(\cdot)} J_1(u) + \varepsilon_1\}, \ \ldots,$$
$$U_{m+1}(\cdot) = \{u(\cdot)\colon\ u(\cdot)\in U_m(\cdot),$$
$$J_m(u) \leqslant \min_{u(\cdot)\in U_m(\cdot)} J_m(u) + \varepsilon_m\}.$$

Числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ могут задаваться заранее или выбираться по ходу решения (в зависимости от результатов предыдущих этапов). Покажем, как использовать схему § 8 для минимизации системы функционалов

$$J_1(u) = t_1 - t_0, \quad J_2(u) = \int_{t_0}^{t_1} a_2(t)\, u(t)\, dt, \ \ldots,$$
$$J_{m+1}(u) = \int_{t_0}^{t_1} a_{m+1}(t)\, u(t)\, dt.$$

Найдем $u_1(t)$, σ_1, x_1, g_1 по описанной в § 8 схеме. Далее, вместо задачи (45) рассмотрим задачу

$$0=x_1+\int\limits_{T-\sigma_1} S(t_1^0, t)\,u(t)\,dt,\quad 0=-\beta+\int\limits_{T-\sigma_1} a_2(t)\,u(t)\,dt. \tag{50}$$

Составим функцию

$$\rho_1(\beta)=\lambda_1(\beta, g_2, f_2)=\max_{|f|+\|g\|\leq 1,\ g'g_1=0} \lambda_1(\beta, g, f),$$

$$\lambda_1(\beta, g, f)=g'x_1-f\beta-L\int\limits_{T-\sigma_1} |g'S(t_1^0, t)+fa_2(t)|\,dt.$$

Если в задаче (45) $L_1<L$, то найдем минимальное β_1, при котором $\rho_1(\beta_1)=0$. Ясно, что управление

$$u_1^0(t)=-L\,\mathrm{sign}\,[g_2'S(t_1^0, t)+f_2a_2(t)]$$

минимизирует функционал $J_2(u)$. Пусть

$$\sigma_2=\{t\colon\ g_2'S(t_1^0, t)+f_2a_2(t)\neq 0,\ t\in T-\sigma_1\}.$$

Положим

$$u_2(t)=\begin{cases} u^0(t), & t\in\sigma_1,\\ u_1^0(t), & t\in\sigma_2,\\ 0, & t\in T-\sigma_1-\sigma_2.\end{cases}$$

Далее, вместо задачи (48) решаем задачу

$$\left.\begin{aligned} 0&=x_2+\int\limits_{T-\sigma_1-\sigma_2} S(t_1^0, t)\,u(t)\,dt,\\ 0&=-\beta+\int\limits_{T-\sigma_1-\sigma_2} a_3(t)\,u(t)\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Если в задаче (48) окажется, что $L_2<L$, то найдем по описанной схеме $\min J_3(u)$ и т. д. Если уже на первом этапе $L_1=L$, то соотношение (50) ставим вместо (51) и находим $J_2(u)$. Дальнейшие выкладки очевидны. В результате получим релейное управление, оптимизирующее иерархическую систему функционалов.

Примечание. В § 8 оптимальное управление, переводящее точку x_0 в начало координат, получилось кусочно-постоянным, имеющим уровни L_1, L_2, ... Из результатов этого параграфа следует, что в линейной системе всегда существует релейное управление ($u(t)=\pm L$), переводящее точку за минимальное время в начало координат. Чтобы найти это управление, нужно решить задачу быстродействия с какой-нибудь иерархической системой критериев.

Решение общей задачи оптимизации иерархической системой критериев в тех случаях, когда эти критерии типа критериев из §§ 6.9—6.11, проходит по схеме, что описана в этих параграфах. Здесь не возникает принципиальных трудностей.

§ 10. Корректность постановки задач оптимального управления

В этом параграфе исследуются свойства решений некоторых задач оптимального управления в зависимости от начальных данных и параметра. Ограничимся случаем, когда функции управления $u(t)$ в исследуемых задачах суть измеримые, почти всюду ограниченные функции, удовлетворяющие неравенству

$$\operatorname{vrai}\sup_{t \in T} |u_\nu(t)| \leqslant L, \quad \nu = 1, \ldots, r; \qquad L = \text{const}.$$

Пусть $J(z_0, \mu_0)$ — значение оптимизируемого функционала для начального состояния $z_0 \in E_n$ и значения μ_0 параметра $\mu \in \Delta$, Ω — область в пространстве состояний и значений параметра, для точек $\{z_0, \mu\}$ которой определены оптимальное управление $u = u^0(z_0, \mu, t)$ и функция $J(z_0, \mu)$.

Определение 1. Оптимальное решение $\{J(z_0, \mu), u^0(z_0, \mu, t)\}$ назовем непрерывным в точке $\{z_0, \mu\}$, если для любых $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенства

$$|J(z_0, \mu) - J(\bar{z}_0, \bar{\mu})| < \varepsilon, \quad \operatorname{mes} \varepsilon_k < \varepsilon,$$

$$\varepsilon_k = \{\tau\colon\ |u_k^0(z_0, \mu, t) - u_k^0(\bar{z}_0, \mu, t)| \geqslant \sigma\}$$

выполняются, как только $\|z_0 - \bar{z}_0\| + |\mu - \bar{\mu}| < \delta$.

Будем говорить, что задача оптимального управления поставлена корректно, если оптимальное управление единственно при $\{z_0, \mu\} \in \Omega$ и решение $J(z_0, \mu)$, $u^0(z_0, \mu, t)$ непрерывно по $\{z_0, \mu\}$.

1. Применение методов функционального анализа.

1. Линейные системы. Задача минимизации нормы конечного состояния. Пусть правая часть уравнения (31) зависит от числового параметра μ, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)\,x + B(t, \mu)\,u(t) + f(t, \mu), \quad t \geqslant t_0, \tag{52}$$

где $\mu \in \Delta$, $\Delta = \{\mu\colon \mu_1 < \mu < \mu_2\}$, элементы матриц $A(t, \mu)$, $B(t, \mu)$ непрерывны по t, μ, имеют по t непрерывные производные $(n-1)$-го порядка, функция $f(t, \mu)$ непрерывна по t, μ. Зафиксируем μ. Для удобства формулировок введем определение.

Определение 2. Если определяющее уравнение (1.110), $A_1 = 0$,

$$q_k(t) = A(t, \mu)\,q_{k-1}(t) - \dot{q}_{k-1}(t), \quad q_0(t) = b^i(t, \mu),$$
$$i = 1, \ldots, r, \quad t \geqslant t_0$$

где $b^i(t, \mu)$ — i-й столбец матрицы $B(t, \mu)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)\,x + B(t, \mu)\,u(t), \tag{53}$$

невырождено для каждого $i = 1, \ldots, r$ почти при всех $t \geqslant t_0$, то систему (53) назовем *нормальной.*

Пусть система (53) нормальна. Пусть требуется минимизировать норму $\| x(t_1) - c_2 \|$ при условии, что

$$| u_\nu(t) | \leqslant L, \quad \| x(t_0) - c_1 \| \leqslant \delta_1, \quad \nu = 1, \ldots, r.$$

Здесь t_1 — фиксированный момент, δ_1 — заданное число, c_1, c_2 — заданные точки. Обозначим через $\delta^0(c_1, c_2, \mu)$, $u^0(c_1, c_2, \mu, t)$ решение этой задачи.

Теорема 18. Функции $u^0(c_1, c_2, \mu, t)$, $\delta^0(c_1, c_2, \mu)$ непрерывны по c_1, c_2, μ в каждой точке $E_n \times E_n \times \Delta$, если $\delta^0 > 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае величина c, преобразование S, матрица F из (6.127) зависят от μ. Поэтому будем далее писать их с индексом: c_μ, S_μ, F_μ. В силу теоремы 6.26 величина $\delta^0 = \delta^0(c_1, c_2, \mu)$ определяется условием

$$\delta^0(c_1, c_2, \mu) = \max_{\|g\| \leqslant 1} \Lambda(c_1, c_2, \mu, g) = \Lambda(c_1, c_2, \mu, g_0), \tag{54}$$

$$\Lambda(c_1, c_2, \mu, g) = g'\,[c_\mu + F_\mu(t_1)\,F_\mu^{-1}(t_0)\,c_1 - c_2] - L\,\| g' S_\mu \| - \delta_1\,\| g' F_\mu(t_1)\,F_\mu^{-1}(t_0) \|. \tag{55}$$

Непрерывность $\delta^0(c_1, c_2, \mu)$ по c_1, c_2, μ — следствие непрерывности функции (55) по этим переменным. В силу теоремы 15 функции $u^0(c_1, c_2, \mu, t)$ однозначно определяются соотношением

$$u^0(c_1, c_2, \mu, t) = -L \operatorname{sign} g_0' S_\mu. \tag{56}$$

Докажем сходимость по мере $u^0(c_1, c_2, \mu, t)$. Пусть $\{c_1, c_2, \mu\}_k \to \{c_1, c_2, \mu\}$ при $k \to \infty$. Ясно, что совокупность векторов $\{g_k\}$, определяющих оптимальные управления $u^0(c_{1k}, c_{2k}, \mu_k, t)$, ограничена равномерно по k. Если $g_{k_m} \to g$, то

$$\begin{aligned}\tilde{g}'[c_\mu + F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(t_0) c_1 - c_2] - L \| \tilde{g}' S_\mu \| - \\ - \delta_1 \| \tilde{g}' F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(t_0) \| \leqslant g_0' [c_\mu + F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(t_0) c_1 - c_2] - \\ - L \| g_0' S_\mu \| - \delta_1 \| g_0' F_\mu(t_1) F^{-1}(t_0) \|.\end{aligned} \tag{57}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}g_{k_m}' [c_{\mu_{k_m}} + F_{\mu_{k_m}}(t_1) F_{\mu_{k_m}}^{-1}(t_0) c_{1k_m} - c_{2k_m}] - \\ - L \| g_{k_m}' S_{\mu_{k_m}} \| - \delta_1 \| g_{k_m}' F_{\mu_{k_m}}(t_1) F_{\mu_{k_m}}^{-1}(t_0) \| \geqslant \\ \geqslant g_0' [c_{\mu_{k_m}} + F_{\mu_{k_m}}(t_1) F_{\mu_{k_m}}^{-1}(t_0) c_{1k_m} - c_{2k_m}] - \\ - L \| g_0' S_{\mu_{k_m}} \| - \delta_1 \| g_0' F_{\mu_{k_m}}(t_1) F_{\mu_{k_m}}^{-1}(t_0) \|.\end{aligned} \tag{58}$$

Переходя к пределу в (58) и сравнивая с (57), убеждаемся, что

$$\begin{aligned}\tilde{g}'[c_\mu + F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(t_0) c_1 - c_2] - L \| \tilde{g}' S_\mu \| - \\ - \delta_1 \| \tilde{g}' F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(t_c) \| = \delta^0.\end{aligned}$$

В силу нормальности системы (53) имеем $\operatorname{sign} g_0' S_\mu = \operatorname{sign} \tilde{g}' S_\mu$ почти всюду на T. Таким образом, каждая последовательность управлений $u_\nu^0(c_{1k}, c_{2k}, \mu_k, t)$, определяемая соотношением (56), содержит подпоследовательность $u_\nu^0(c_{1k_m}, c_{2k_m}, \mu_{k_m}, t)$, которая сходится к $u_\nu^0(c_1, c_2, \mu, t)$ почти всюду. Это значит [112], что функции $u_\nu^0(c_{1k}, c_{2k}, \mu_k, t)$ сходятся к $u_\nu^0(c_1, c_2, \mu, t)$ по мере. Утверждение доказано.

2. Линейные системы. Задача оптимального быстродействия (6.171). Обозначим через $T(x_0, \mu)$, $u^0(x_0, \mu, t)$ — решение задачи (6.171) (здесь и ниже $T(x_0, \mu)$ — оптимальное быстродействие). Пусть дана система (52).

Теорема 19. Для того чтобы функция $T(x_0, \mu)$ была непрерывна по x_0, μ, необходимо и достаточно, чтобы для каждого сколь угодно малого $\sigma > 0$ существовала окрестность Δ_σ точки $\{0, \mu\}$ такая, что все точки $\{x'_0, \mu'\} \in \Delta_\sigma$ имеют $(t_0 + \sigma)$-допустимые управления.

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть

$$\beta_\delta = \{\{x'_0, \mu'\}: \| x'_0 - x_0 \| + | \mu' - \mu | \leqslant \delta\}.$$

Рассмотрим совокупность траекторий для (52) при $\{x'_0, \mu'\} \in \beta_\delta$, порожденную управлением $u = u^0(x_0, \mu, t)$. Пусть $\xi(x'_0, \mu')$ — сечение этой совокупности гиперплоскостью $t = t_0 + T(x_0, \mu)$. Зафиксируем σ, выберем $\delta' \leqslant \delta$ так, чтобы $\xi(x'_0, \mu') \in \Delta_\sigma$. Это возможно на основании непрерывной зависимости решения $x(x_0, \mu, u^0(x_0, \mu, t), t)$ от x_0 и μ. Если $u_\xi(x_0, \mu, t)$ — $(t_0 + \sigma)$ — допустимое управление для точки $\{x_0, \mu\} \in \xi(x'_0, \mu')$, то, полагая

$$u(x'_0, \mu', t) = \begin{cases} u^0(x_0, \mu, t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(x_0, \mu), \\ u_\xi(x_0, \mu, t), & t_0 + T(x_0, \mu) < t, \end{cases}$$

получим T-допустимые управления $(T = t_0 + T(x_0, \mu) + \sigma)$ для точек $\{x'_0, \mu'\} \in \beta_{\delta'}$. В силу теоремы 6.32 для этих точек существуют и оптимальные управления $u^0(x'_0, \mu', t)$. По построению

$$T(x'_0, \mu') \leqslant T(x_0, \mu) + \sigma. \tag{59}$$

Допустим, что

$$\inf_{\{x'_0, \mu'\} \in \beta_{\delta'}} T(x'_0, \mu') = T' < T(x_0, \mu). \tag{60}$$

Выделим из множества $\{u^0(x'_0, \mu', t), \{x'_0, \mu'\} \in \beta_{\delta'}\}$ слабо сходящуюся (в смысле $L_2(t_0, t_0 + T')$) подпоследовательность $u^0(x_0^k, \mu_k, t)$ и положим $x_0 = x_0^k$, $\mu = \mu_k$, $u = u^0(x_0^k, \mu_k, t)$ в (52). Нетрудно видеть (переходя к пределу при $k \to \infty$ в (52)), что точку $\{x_0, \mu\}$ можно перевести в $x = 0$ за время $\tau < T(x_0, \mu)$. Это невозможно. Следовательно, $T' = T(x_0, \mu)$.

В силу произвольности σ заключаем: функция $T(x_0\, \mu)$ непрерывна в точке $\{x_0, \mu\}$. Теорема доказана.

Теорема 20. Задача оптимального быстродействия (6.171) в системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$

поставлена корректно.

Доказательство. Если система управления нормальна, то для каждого σ существует окрестность Δ_σ точки $x = 0$, удовлетворяющая условиям теоремы 19. Поэтому функция $T(x_0)$ непрерывна по x_0. Из теоремы 14 следует, что управление $u^0(x_0, t)$ единственно во всей области Ω.

Если определяющее уравнение этой системы (см. (1.110), $A_1 = 0$) вырождено, то функция $T(x_0)$ определена в области Ω_k из k-мерного подпространства, и, очевидно, непрерывна в Ω_k. В силу теоремы 14 управления $u^0(x_0, t)$ в Ω_k определяются однозначно. Непрерывность функций $u^0(x_0, t)$ доказывается, как в теореме 18.

Из теоремы 19 следует утверждение. Задача (6.171) в стационарной системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

с граничными условиями: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = a$, $\| a \| \neq 0$, поставленна корректно тогда и только тогда, когда множество

$$\{v\colon\ v = Aa + Bu,\ \ | u_\nu | \leqslant L,\ \nu = 1, \ldots, r\}$$

содержит точку $v = 0$.

Теорема 21. Если система (53) нормальна, то задача оптимального быстродействия (6.171), (53) поставлена корректно.

Доказательство. Непрерывность функций $T(x_0, \mu)$ следует из теоремы 19 (см. § 1.15).

В силу теоремы 15 функции $u^0(x_0, \mu, t)$ определяются в Ω единственным образом. В непрерывности $u^0(x_0, \mu, t)$ убеждаемся, как при доказательстве теоремы 18.

3. Нелинейные системы. Задача (6.171). Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u. \mu, t), \tag{61}$$

где $x \in E_n$, $u \in E_r$, $\mu \in \Delta$, $u(\cdot) \in U_\infty^L(\cdot)$. Предположим, что функции $f(x, u, \mu, t)$, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$ непрерывны в $E_n \times$

$\times E_r \times E_1 \times E_1$, удовлетворяют условиям Липшица равномерно по u, μ в E_n, $f(0, 0, \mu, t) = 0$.

Пусть $x(x_0, \mu, u(\cdot)\,t)$ — непрерывное решение уравнения (61), порожденное управлением $u(\cdot) \in U_\infty^L(\cdot)$. Обозначим матрицы $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$ соответственно через $P(x_0, \mu, t)$ $P_u(x_0, \mu, t)$ и запишем уравнение в вариациях для (61) вдоль траектории $x(t) = x(x_0, \mu, u(\cdot), t)$. Имеем

$$\frac{d\delta x}{dt} = P(x_0, \mu, t)\,\delta x + P_u(x_0, \mu, t)\,\delta u. \tag{62}$$

Обозначим через $F(x_0, \mu, t)$ фундаментальную матрицу решений системы (62) при $\delta u \equiv 0$. Будем говорить, что выполнено условие A, если, какова бы ни была непрерывная кривая, являющаяся решением (62) при $u(\cdot) \in U_\infty^L(\cdot)$ или пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных решений (61), также порожденных управлениями из $U_\infty^L(\cdot)$, функции

$$[F^{-1}(x_0, \mu, t)\, P_u(x_0, \mu, t)]_j$$

вполне линейно независимы при всех $j = 1, \ldots, r$.

Условие A равносильно требованию: система (62) нормальна на всех непрерывных решениях (61) и пределах равномерно сходящихся последовательностей траекторий (61). Пусть во всем пространстве $E_n \times \Delta$ выполнено условие A.

Теорема 22. Если в точке $\{x_0, \mu\}$ существует решение $u^0(x_0, \mu, t)$ задачи (6.171), (61), то можно указать δ-окрестность точки $\{x_0, \mu\}$, для которой задача также имеет решение. Функция $T(x_0, \mu)$ непрерывна в точке $\{x_0, \mu\}$.

Доказательство. Так как выполнено условие A, то для данных $\tau^0 = t_0 + T(x_0, \mu)$, $\sigma > \tau^0$, как показано в [64е], существует окрестность Δ_σ точки $\{x_0, \mu\}$ такая, что для $\{x_0', \mu'\} \in \Delta_\sigma$ можно построить σ-допустимое управление $u_\sigma(x_0', \mu', t)$.

Рассуждая, как в доказательстве достаточности теоремы 19, убеждаемся в существовании окрестности $\beta_{\delta'}$ точки $\{x_0, \mu\}$ такой, что выполняется неравенство (59), где σ — сколь угодно малое число. Так как семейство траекторий

$$\{x(x_0, \mu, u(\cdot), t),\ \{x_0, \mu\} \in \beta_{\delta'},\ u(\cdot) \in U_\infty^L(\cdot)\}$$

равномерно по x_0, μ, $u(\cdot)$ ограничено и равностепенно по t непрерывно (§ 5.1), то неравенство (60) невозможно. Теорема доказана.

Следствие. Множество Ω точек $\{x_0, \mu\}$, для которых задача оптимального быстродействия (6.171) имеет решение, открыто.

Примечание. Если выполнены некоторые условия, обеспечивающие единственность оптимальных траекторий для (61), то можно доказать непрерывность функций $u^0(x_0, \mu, t)$.

2. Дифференцируемость функции Беллмана 1. О существовании гладкой функции Беллмана. Пусть матрица $B(t, \mu)$ в системе (53) имеет размеры $n \times n$, является неособой при $t \geqslant t_0$, $\mu \in \Delta$; управление $u(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$u(\cdot) \in \widetilde{U}(\cdot) = \left\{u(\cdot): \sum_{i=1}^{n} u_i^2(t) \leqslant L^2,\ t \in T\right\}. \tag{63}$$

Рассмотрим следующую задачу. Определить управление $u^0(\cdot)$, при котором

$$\|x(x_0, \mu, u^0(\cdot), t_1)\| = \min_{u(\cdot)\in\widetilde{U}(\cdot)} \|x(x_0, \mu, u(\cdot), t_1)\| = \delta(x_0, \mu),$$

$$x(t_0) = x_0 \neq 0, \quad \|x\| = (x'x)^{1/2}.$$

Предположим, что матрицы $A(t, \mu)$, $B(t, \mu)$ непрерывно дифференцируемы по μ до k-го порядка (включительно).

Теорема 23. Функция $\delta(x_0, \mu)$ имеет непрерывные производные любого порядка по x_0, непрерывные производные k-го порядка по μ.

Доказательство. Пусть δ — некоторое положительное число. Найдем условия, при которых траектория уравнения (53) удовлетворяет соотношениям

$$x(t_0) = x_0, \quad \|x(x_0, \mu, u(\cdot), t_1)\| \leqslant \delta, \quad \delta > 0, \quad u(\cdot) \in \widetilde{U}(\cdot). \tag{64}$$

Так как в силу формулы Коши

$$x(x_0, \mu, u(\cdot), t_1) = F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(t_0) x_0 + \\ + \int_{t_0}^{t_1} F_\mu(t_1) F_\mu^{-1}(\tau) B(\tau, \mu) u(\tau)\, d\tau,$$

то (см. § 6.10) условия (64) выполняются только тогда, когда

$$\max_{\|g\|=1}\left\{g'c_\mu(x_0)-L\int_{t_0}^{t_1}\|g'S(t_1,\ t)\|\,dt-\delta\|g\|\right\}\leqslant 0. \tag{65}$$

Здесь

$$c_\mu(x_0)=F_\mu(t_1)F_\mu^{-1}(t_0)x_0,\quad S(t_1,\ \tau)=F_\mu(t_1)F_\mu^{-1}(\tau)B(\tau,\ \mu).$$

Положим

$$\lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ g)=\delta\|g\|+L\int_{t_0}^{t_1}\|g'S(t_1,\ t)\|\,dt. \tag{66}$$

Условие (65) эквивалентно неравенству

$$\min_g \lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ g)=\lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ g_0)\geqslant 1 \tag{67}$$

при

$$g'c_\mu(x_0)=1. \tag{68}$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda(\delta,\ t_1,\ x_0,\ \mu,\ g_0)$ непрерывна по переменным δ, t_1, x_0, μ. Итак, функция $\delta(x_0,\ \mu)$ есть решение задачи

$$\min_g \lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ g)=\lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ g_0)=1 \tag{69}$$

при условии (68). Допустим, что $[c_\mu(x_0)]_1\neq 0$, и исключим переменную $g_1=[g]_1$ в (67), (68). Тогда

$$\lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ g)=\lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ \widetilde{g}),$$

$$\widetilde{g}=\left\{\left(1-\sum_{i=2}^{n} g_i[c_\mu(x_0)]_i\right)[c_\mu(x_0)]_1^{-1},\ g_2,\ \ldots,\ g_n\right\}.$$

Величины g_{0i}, $i\geqslant 2$, определяются из условия

$$p_i(\delta,\ t_1,\ \mu,\ x_0,\ g_2,\ \ldots,\ g_n)=\frac{\partial\lambda(\delta,\ t_1,\ \mu,\ \widetilde{g})}{\partial g_i}=0. \tag{70}$$

Используя (66), нетрудно убедиться, что функциональный определитель для системы (70) отличен от нуля. А так как функции $p_i(\cdot)$, $i=2,\ \ldots,\ n$, имеют непрерывные производные по x_{i0} (произвольного порядка), по μ (k-го порядка), то такие же производные имеют функции $g_0=g_0(x_0,\ \mu)$. Из (69) имеем $\partial\lambda/\partial\delta=\|g\|>0$. Функция $\lambda(\delta, t_1, x_0, \mu, g_0)$ непрерывно дифференцируема по x_0, μ (как и функции $p_i(\cdot)$).

Значит, как и выше, в силу известных теорем о свойствах неявных функций заключаем: функция $\delta(x_0, \mu)$ имеет непрерывные производные любого порядка по x_0 и непрерывные производные k-го порядка (включительно) по μ. Утверждение доказано.

2. Теорема о существовании кусочно-гладкой функции Беллмана. Для нормальной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t) + b(t)\,u(t),$$

где $u(\cdot) \in U^L_\infty(\cdot)$, исследуем решение $u^0(x_0, t)$, $T(x_0)$ задачи оптимального быстродействия (6.171). Пусть $\pi(x, t)$ — поверхность в пространстве $E_n \times t$, $t \leqslant t_0 + T(x_0)$, где $u^0(x_0, t)$ меняет знак.

Теорема 24. Функция $T(x_0)$ непрерывно дифференцируема (произвольное число раз) по x_0, $\|x_0\| \neq 0$, за исключением точек $\{x_0, t_0\} \in \pi(x, t)$.

Доказательство. Пусть в (53) неособая матрица $B(t, \mu)$ имеет вид

$$B(t, \mu) = \begin{Bmatrix} b_{11}(t) & \mu b_{12}(t) & \dots & \mu b_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & \mu b_{n2}(t) & \dots & \mu b_{nn}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2,$$

$\mu_1\mu_2 < 0$, $u(\cdot) \in \widetilde{U}(\cdot)$. Решение задачи (6.171), (63) обозначим через $\widetilde{T}(x_0, \mu)$, $\widetilde{u}(x_0, \mu, t)$. Функция $\widetilde{T}(x_0, \mu)$ в силу соотношения (67) и непрерывности функции (65) по t_1 удовлетворяет условию

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(t_1, x_0, \mu) = L^{-1}, \quad t_1 = t_0 + \widetilde{T}(x_0, \mu), \\ &\lambda(t_1, x_0, \mu) = \min_{g'c_\mu(x_0) = -1} \int_{t_0}^{t_1} \|g'S(t_1, t)\|\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Из неособенности матрицы $B(t, \mu)$ следует, что рассматриваемая система нормальна, поэтому, применяя теорему 21, имеем

$$\lim_{\mu \to 0} \widetilde{T}(x_0, \mu) = T(x_0). \tag{72}$$

Так как функция $T(x_0, \mu)$ имеет [74f] непрерывные производные любого порядка по x_0, $\|x_0\| \neq 0$, то

$$\frac{\partial \widetilde{T}(x_0, \mu)}{\partial x} = -\frac{\partial \lambda(t_1, x_0, \mu)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial \lambda(t_1, x_0, \mu)}{\partial t_1}. \tag{73}$$

Пусть Δ_{x_0} — такая окрестность точки x_0, что множество $\Delta_{x_0} \cap \pi(x, t_0)$ пусто. Из (71), (73) видно, что функции (73) ограничены равномерно по μ, $\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2$.

Так как функции $\dfrac{\partial^2 \lambda(0, t_1, x_0, \mu, g)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \lambda(0, t_1\, x_0, \mu, g)}{\partial t_1\, \partial x}$ равномерно по x_0, μ ограничены, то функции (73) непрерывны равностепенно по x_0, $x_0 \in \Delta_{x_0}$. Пусть

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\partial \widetilde{T}(x_0, \mu)}{\partial x_0} = \sigma(x_0).$$

Из (72), (73) имеем $\sigma(x_0) = \dfrac{\partial T(x_0)}{\partial x_0}$, $x_0 \in \Delta_{x_0}$. Ясно, что функция $\sigma(x_0)$ непрерывна. Можно убедиться, что в Δ_{x_0} равномерно по μ ограничены и равностепенно по x_0 непрерывны производные любого порядка для $\widetilde{T}(x_0, \mu)$. На этом доказательство завершается.

3. О корректности задач оптимизации систем с запаздыванием. Ниже исследуется решение задачи (6.171) для системы (6.156)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\, x(t) + A_1(t)\, x(t-h) + b(t)\, u(t)$$

и системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-h), u(t), t), \qquad h = \text{const}. \tag{74}$$

Будем говорить, что задача (6.171), $h = \text{const}$, поставлена корректно, если оптимальное управление $u^0(x_0(\cdot), t)$ единственно в области определения $\widetilde{\Omega}$ и функции $u^0(x_0(\cdot), t)$, $T(x_0(\cdot))$ зависят непрерывно (в смысле определения 1) от $x_0(\cdot)$.

Теорема 25. Если система (6.156) нормальна, то задача оптимального быстродействия (6.171) поставлена корректно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результатов § 1.15 система (6.156) относительно управляема. Поэтому для любого $\sigma > t_0$ существует окрестность Δ_σ нуля $x(\cdot) = 0$, для точек которой можно построить σ — относительно допустимое управление. Как в доказательстве теоремы 19, убеждаемся, что $T(x_0(\cdot))$ непрерывна по $x_0(\cdot)$.

В силу теоремы 17 оптимальное управление определяется теоремой 6.34 единственным образом. Непрерывность функций $u^0(x_0(\cdot), t)$ доказывается, как в теореме 18.

Примечание. Задача (6.171) для стационарной системы (6.156) поставлена корректно. Утверждение доказывается аналогично теореме 20.

Рассмотрим систему (74). Справедлива

Теорема 26. Если линейная модель системы (74) нормальна, то функция $T(x_0(\cdot))$ в задаче (6.171), (74) непрерывна по $x_0(\cdot)$.

Для системы (74) справедлива теорема, аналогичная теореме 19, поэтому доказательство можно провести, как доказательство достаточности теоремы 19.

Комментарии к главе VII

1. Как уже отмечалось во введении, аппарат исследования приращений функционалов традиционно используется в вариационном исчислении при установлении достаточных условий экстремума. Этот метод в теории оптимальных процессов впервые использован в работе [114a], где получен ряд результатов об оптимальности управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Достаточность условий максимума для задачи оптимизации линейных по состоянию систем показана в [114b, 77c].

Другой метод получения достаточных условий оптимальности основан на динамическом программировании. При этом задача сводится к исследованию функционального уравнения Беллмана [11b] или его обобщения [77c]. Ряд результатов в этом направлении получен в [18d], где сформулированы также условия, при которых принцип максимума выступает как достаточный признак оптимальности.

2. Проблема достаточных условий оптимальности возникает всякий раз, когда оптимальные управления ищутся, исходя из необходимых условий оптимальности. Одна схема доказательства оптимальности управления, удовлетворяющего необходимому условию оптимальности, состоит в проверке двух свойств рассматриваемой задачи: 1) задача имеет решение, 2) решение задачи единственно. Оба эти свойства трудно проверяемы в общем случае. Поэтому возникает задача поиска других условий, гарантирующих оптимальность конкретных управлений.

3. Функции, участвующие в формулировке теоремы 1, считаются определенными и непрерывными. Неравенства, фигурирующие в условии 3) теоремы 1, предполагаются выполненными в некоторой окрестности траектории $x(t)$ при $t \in T$, которая

(окрестность) содержит все траектории уравнений (5), порожденные всевозможными допустимыми управлениями.

4. Теорема 2 для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и для функционала (1) с $\varphi(x) = c'x$, $f_{n+1}(x, y, u, t) \equiv 0$ доказывалась неоднократно [114b, 77c].

5. В работе [36e] доказаны более общие достаточные условия оптимальности, основанные на формуле (4).

6. Так же как в теореме 1, все функции, участвующие в формулировке теоремы 3, считаются определенными и непрерывными. Условия 1), 2) предполагаются выполняющимися при $t \in T$, $u \in U$ и при всех x, y, принадлежащих области возможных значений $x(t)$, $t \in T$, порожденных допустимыми управлениями.

7. Число ε, характеризующее в теореме 4 оптимальность управления относительно возмущений малых в среднем на σ, удовлетворяет в силу (21) неравенству

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{\beta_1 - 2(\theta_2 - \theta_1) K_1 L_1 \beta_2}{\beta_2^2 [K_2(t_1 - t_0) + K_3]}.$$

Для оценки величины $\theta_2 - \theta_1$, при которой допустимое управление из теоремы 4 является оптимальным относительно возмущений, сосредоточенных на σ, поступаем следующим образом. Пусть $G = \sup\limits_{\tilde{u} \in U,\, t \in T} \| \Delta_{\tilde{u}} f(x(t), u(t), t) \|$. Тогда $\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \| \Delta_{\tilde{u}} f(x(t), u(t), t) \| \, dt \leqslant G(\theta_2 - \theta_1)$, и из (21) следует искомая оценка

$$\theta_2 - \theta_1 \leqslant \frac{\beta_1}{2K_1 L_1 \beta_2 + \beta_2^2 [K_2(t_1 - t_0) + K_3] G}.$$

8. Постоянные, участвующие в формулировке теоремы 4, легко выражаются через характеристики системы (9) и функционала (10):

$$K_1 \leqslant \left\| \frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} \right\| \exp L_1 (t_1 - t_0), \quad K_2 \leqslant K_1 \left\| \frac{\partial^2 f(x, u, t)}{\partial x^2} \right\|,$$

$$K_3 \leqslant \left\| \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} \right\|, \quad \beta_2 \leqslant \exp L_1 (t_1 - t_0).$$

9. Неравенство (17), лежащее в основе доказательства теоремы 4, является естественным в силу определения функции $\Delta_{\tilde{u}} H(x, \psi, u, t)$ и свойства (18) для приращений траектории. В [114a] при доказательстве достаточных условий оптимальности наложены дополнительные ограничения на управления $u(t)$, $t \in T$, которые обусловлены методом доказательства.

10. Достаточность принципа максимума в задачах быстродействия для линейных стационарных систем доказана в [18d, 38b, 186] в предположении, что система управляема. Без этого предположения в более общем случае (с учетом фазовых ограничений) достаточность принципа максимума показана в [50a].

11. Единственность оптимального управления в задаче быстродействия для управляемых систем доказана в [38b, 163]. Различные условия единственности оптимальных управлений получены в работах [64a, 74a, n].

ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

§ 1. Два способа улучшения допустимых управлений

1. Первый способ. Пусть дана система

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),\ x(t-h(x,\ u,\ t)),\ u(t),\ t),\ t \in T = [t_0,\ t_1], \tag{1}$$

и требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \tag{2}$$

на траекториях $x(t)$, $t \in T$, порожденных начальными условиями $x(t) = \Phi(t)$, $t \in S_0$, и функциями $u(t)$ класса D_1. Будем считать моменты t_0, t_1 фиксированными. Допустим, что на траекторию $x(t)$ наложено ограничение

$$g(x(t_1)) \leqslant 0. \tag{3}$$

Относительно функций $f(x,\ y,\ u,\ t)$, $h(x,\ u,\ t)$, $\varphi(x)$, $g(x)$, $\Phi(t)$ предположим, что они удовлетворяют условиям теоремы 6.5. В § 6.2 показано, что если минимум функционала (2) достигается на кусочно-гладком допустимом управлении $u(t)$, то оптимальное управление $u^0(t)$ в каждый момент $t \in T$ удовлетворяет условию максимума

$$\Delta_{u^*} H(x^0(t),\ y^0(t,\ u^0(t)),\ \psi(t),\ u(t),\ t) \leqslant 0 \tag{4}$$

при всех $u^* \in U$, где

$$\left.\begin{aligned}
&H(x,\ y,\ \psi,\ u,\ t) = \psi' f(x,\ y,\ u,\ t),\\
&y(t,\ u) = x(t-h(x,\ u,\ t)),\quad \frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\delta\pi(x,\ \psi,\ u)}{\delta x(t)},\\
&\psi(t_1) = -\mu\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g(x(t_1))}{\partial x},\ \lambda,\ \mu \geqslant 0,\ \lambda+\mu = 1,\\
&\pi(x,\ \psi,\ u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi' f(x,\ y,\ u,\ t)\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Пусть $u(t)$ — допустимое кусочно-гладкое управление, порождающее траекторию $x(t)$, которая удовлетворяет условию (3) и доставляет функционалу (2) значение $J(u)$. Если $u(t)$ не удовлетворяет условию максимума (4), то оно, очевидно, не является оптимальным управлением.

Поставим задачу улучшения управления $u(t)$, т. е. нахождения такого допустимого управления $u_1(t)$, $t \in T$, для которого $J(u_1) < J(u)$ и $g(x_1(t_1)) \leqslant 0$. Из результатов § 7.1 следует, что приращение функционала

$$\Delta J(u) = J(u_1) - J(u)$$

на траекториях $x(t)$ и $x_1(t)$, удовлетворяющих условиям

$$g(x(t_1)) \leqslant 0, \qquad g(x_1(t_1)) \leqslant 0,$$

имеет вид

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{u_1} H(x, y, \psi, u, t)\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Delta_{u_1} H(x, y, \psi, u, t)\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'[\tau(x_1, u_1, t)] \frac{\partial}{\partial y} H(x, x[\tau(x, u_1, t)], \psi, u_1, t)\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'[\tau(x, u, t)] \frac{\partial}{\partial y} H(x, x[\tau(x, u, t)], \psi, u, t)\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial y} H'(x, x[\tau(x, u_1, t], \psi, u_1, t) \int_0^1 \frac{dx(s)}{ds}\bigg|_{\substack{s=\tau(x, u_1, t)- \\ -[h(x_1, u_1, t)- \\ -h(x, u_1, t)]\theta}} \times$$

$$\times d\theta \frac{\partial h'(x, u_1, t)}{\partial x} \Delta x(t)\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial y} H'(x, x[\tau(x, u, t)], \psi, u, t) \frac{dx(s)}{ds}\bigg|_{s=\tau(x, u, t)} \times$$

$$\times \frac{\partial h'(x, u, t)}{\partial x} \Delta x(t)\, dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x[\tau(x_1, u_1, t)]\|)\, dt, \qquad (6)$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению (5) со следующим условием на правом конце:

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g(x(t_1))}{\partial x}, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

По управлению $u(t)$ подсчитаем в силу (1) траекторию $x(t)$. По значению $\tilde{\psi}(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}$ вычислим решение $\tilde{\psi}(t)$ уравнения (5) и найдем функции

$$\tilde{H}(t) = H(x(t),\ y(t,\ u(t)),\ \tilde{\psi}(t),\ u(t),\ t),$$

$$\tilde{H}_1(t) = H(x(t),\ y(t,\ \tilde{u}(t)),\ \tilde{\psi}(t),\ \tilde{u}(t),\ t) = \\ = \max_{u\in U} H(x(t),\ y(t,\ u),\ \tilde{\psi}(t),\ u,\ t).$$

Положим $\sigma_1 = \left[\tau_1 - \frac{\delta_1}{2},\ \tau_1 + \frac{\delta_1}{2}\right]$, где τ_1 — точка максимума функции $\Delta\tilde{H}(t) = \tilde{H}_1(t) - \tilde{H}(t)$, $t \in T$, а $\delta_1 = \delta_1(\beta)$ таково, что

$$\Delta\tilde{H}(t) \geqslant \beta\,\|\Delta_{\tilde{u}} f(x(t),\ y(t,\ u(t)),\ u(t),\ t)\|, \qquad t \in \sigma_1.$$

Вычислим число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\beta)$:

$$\varepsilon_1 = 2\,\frac{\{\beta - [M_8\delta_1 + M_1(\delta_1) + M_2(\delta_1)]\}\,e^{-2L_1(2+ML_7)(t_1-\theta_1)}}{L_{12} + \left(\frac{1}{2}ML_{13}M_8 + M_9\right)(t_1-\theta_1)\,e^{-L_1(2+ML_7)(t_1-\theta_1)} + L_{14}L_4}.$$

Определение постоянных, входящих в последнюю формулу, дано в [36с, е]. Допустим, что $\beta - M_8\delta_1 - M_1(\delta_1) - M_2(\delta_1) > 0$. В противном случае уменьшаем δ_1 настолько, чтобы это неравенство имело место. Поскольку $M_1(\delta_1)$ и $M_2(\delta_1)$ стремятся к нулю при $\delta_1 \to 0$, то это возможно. Подберем β таким, чтобы

$$\int_{\sigma_1} \|\Delta_{\tilde{u}} f\|\,dt < \varepsilon_1.$$

Управление

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \,\overline{\in}\, \sigma_1 \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1, \end{cases}$$

уменьшает значение функционала $J(u)$. Если

$$g(x_1(t_1)) \leqslant \varepsilon_2,$$

где ε_2 — заданная точность, то на этом операция улучшения управления $u(t)$ заканчивается. Если последнее неравенство не выполняется, то при вычислении $u_1(t)$ надо учесть возможность нарушения граничного условия $g(x(t_1)) \leqslant 0$. В этом случае можно поступить следующим образом. Подсчитаем функции $\tilde{\psi}$, $\tilde{H}$, $\tilde{H}_1$, $\Delta\tilde{H}$, вычисляем функции $\bar{\psi}$, $\bar{H}$, $\bar{H}_1$, $\Delta\bar{H}$:

$\bar{\psi}(t)$ — решение уравнения (5) с условием $\bar{\psi}(t_1) =$

$$= -\frac{\partial g(x(t_1))}{\partial x};$$

$$\bar{H}(t) = H(x(t),\ y(t,\ u(t)),\ \bar{\psi}(t),\ u(t),\ t);$$

$$\bar{H}_1(t) = \max_{u \in U} H(x(t),\ y(t,\ u),\ \bar{\psi}(t),\ u,\ t) =$$

$$= H(x(t),\ y(t,\ \bar{u}(t)),\ \bar{\psi}(t),\ \bar{u}(t)\ t);$$

$$\Delta\bar{H}(t) = \bar{H}_1(t) - \bar{H}(t).$$

Не приводя громоздких в общем случае оценок, отметим, что в силу результатов работы [36е] существует такое число δ, что при каждом специальном приращении управления $\Delta_{\varepsilon\theta} u$ с $\varepsilon = \delta$ приращение функционала $\Delta J(u)$ определяется значением $\Delta_{u*} H(x, y, \psi, u, t)$. По управлениям $\tilde{u}(t)$ и $\bar{u}(t)$ подсчитаем функции

$$G_1(t) = H(x(t),\ y(t,\ \tilde{u}(t)),\ \bar{\psi}(t),\ \tilde{u}(t),\ t) - \bar{H}(t),$$

$$G_2(t) = H(x(t),\ y(t,\ \bar{u}(t)),\ \tilde{\psi}(t),\ \bar{u}(t),\ t) - \tilde{H}(t).$$

Зададим число $\delta_1 > 0$. Вычислим функции

$$F_1(t,\ \delta_1) = \int\limits_{t-\frac{\delta_1}{2}}^{t+\frac{\delta_1}{2}} [\Delta\tilde{H}(\theta) + \varkappa G_1(\theta)]\, d\theta,$$

$$F_2(t,\ \delta_1) = \int\limits_{t-\frac{\delta_1}{2}}^{t+\frac{\delta_1}{2}} [\Delta\bar{H}(\theta)\,\varkappa + G_2(\theta)]\, d\theta,$$

где $\varkappa$ — некоторый положительный весовой коэффициент, значение которого зависит от степени нарушения граничных условий, величины функционала на траектории $x(t)$, а также от значений предыдущих улучшений $\Delta\varphi(x(t_1))$, $\Delta g(x(t_1))$, если они были проведены. Вообще говоря, $\varkappa$ тем меньше, чем меньше $g(x(t_1))$, причем оно равно нулю, если величина $g(x(t_1))$ отрицательна. Найдем $\tau_1(\delta_1)$ и $\tau_2(\delta_1)$ из условий

$$F_1(\tau_1, \delta_1) = \max_{t \in T} F_1(t, \delta_1), \qquad F_2(\tau_2, \delta_1) = \max_{t \in T} F_2(t, \delta_1).$$

Пусть δ_1 достаточно мало. Тогда управление $u_1(t)$ выбирается по следующему правилу:

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \,\bar{\in} \left[\tau_1 - \frac{\delta_1}{2},\ \tau_1 + \frac{\delta_1}{2}\right], \\ \tilde{u}(t), & t \in \left[\tau_1 - \frac{\delta_1}{2},\ \tau_1 + \frac{\delta_1}{2}\right], \end{cases}$$

если $F_1(\tau_1, \delta_1) > F_2(\tau_2, \delta_1)$, и

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \,\bar{\in} \left[\tau_2 - \frac{\delta_1}{2},\ \tau_2 + \frac{\delta_1}{2}\right], \\ \bar{u}(t), & t \in \left[\tau_2 - \frac{\delta_1}{2},\ \tau_2 + \frac{\delta_1}{2}\right], \end{cases}$$

если $F_1(\tau_1, \delta_1) \leqslant F_2(\tau_2, \delta_1)$.

2. Улучшение допустимых управлений в линейной системе. Пусть на траекториях системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t - h(t)) + b(u, t), \\ &x(t) = \Phi(t), \quad t \in S_0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

стесненных условием

$$g(x(t_1)) \leqslant 0,$$

минимизируется функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)),$$

где $g(x)$ и $\varphi(x)$ — дифференцируемые вогнутые функции. В этом случае алгоритм улучшения, описанный в предыдущем пункте, существенно упрощается.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление, $x(t)$ — соответствующая траектория. Подсчитаем функции $\tilde{\psi}$, $\tilde{H}$, $\tilde{H}_1$,

$\Delta\tilde{H}$, $\bar{\psi}$, $\bar{H}$, $\bar{H}_1$, $\Delta\bar{H}$, G_1, G_2. Найдем числа

$$F_1 = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta\tilde{H}(t) + \varkappa G_1(t)]\,dt, \qquad F_2 = \int_{t_0}^{t_1} [\varkappa\Delta\bar{H}(t) + G_2(t)]\,dt.$$

Если $F_1 > F_2$, то полагаем

$$u_1(t) = \tilde{u}(t), \qquad t \in T,$$

если же $F_1 \leqslant F_2$, то

$$u_1(t) = \bar{u}(t), \qquad t \in T.$$

Аналогичный алгоритм глобального улучшения допустимого управления получается и для задачи минимизации на системе (7) функционала

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\int f_{1,\,n+1}(x(t), x(t - h(t)), t) + \\ + f_{2,\,n+1}(u(t), t) \Big]\,dt.$$

Такой же алгоритм улучшения допустимого управления можно использовать и в тех задачах, где система (7) слабо нелинейна по x, y, и функция $f_{1,\,n+1}(x, y, t)$ сильно вогнута по $\{x, y\}$. Если функция $f_{1,\,n+1}(x, y, t)$ произвольна, то описанное глобальное изменение управления не приводит к его улучшению даже для линейных систем.

Пример 1. Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^1 x'x\,dt$$

на траекториях уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad |u| \leqslant 1, \qquad x(0) = 0.$$

Если $u(t)$ — допустимое управление, то, полагая $u_1(t) = \operatorname{sign}\psi'(t)\,b$, где $\psi(t)$ — решение уравнения $\dot{\psi} = -A'\psi + 2x$, $\psi(1) = 0$, получим

$$\Delta J(u) = -\int_0^1 \psi'(t)\,b\,[u_1(t) - u(t)]\,dt + \int_0^1 \Delta x'(t)\,\Delta x(t)\,dt,$$

где $\Delta x(t)$ — приращение траектории $x(t)$, вызванное управлением $u_1(t)$. Поскольку второе слагаемое неотрицательно, то не исключена возможность $\Delta J(u) > 0$.

Действительно, пусть $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $|u| \leqslant 1$, $x \in E_1$,

$$J(u) = \int_0^1 x^2(t)\,dt.$$

Попытаемся улучшить допустимое управление $u(t) \equiv \alpha$, $t \in [0, 1]$, $|\alpha| < 1$. Имеем

$$x(t) = \alpha t, \quad J(u) = \frac{\alpha^2}{3}, \quad \psi(t) = \alpha(t^2 - 1), \quad u_1(t) = -\operatorname{sign}\alpha,$$

$$x_1(t) = -t\operatorname{sign}\alpha, \quad J(u_1) = \frac{1}{3} > \frac{\alpha^2}{3} = J(u),$$

т. е. управление $u_1(t)$ «хуже», чем $u(t)$.

3. Второй способ. Для системы (1) снова рассмотрим задачу минимизации функционала (2) на траекториях $x(t)$, стесненных условием (3). Предположим, что, кроме отмеченных в п. 1 свойств, функция $f(x, y, u, t)$ дифференцируема по u, а множество U выпукло. Из общей формулы (6.3) приращения функционала имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta J(u) = -\int_{t_2}^{t_1} \Delta u' \frac{\partial}{\partial u} H(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t)\,dt + \\ + o(\|\Delta u(\cdot)\|), \\ o(\|\Delta u(\cdot)\|) \leqslant \alpha \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\|^2\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где функция $\psi(t)$ вычислена в силу уравнения (5) с

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g(x(t_1))}{\partial x}, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

Пусть $u(t)$ — допустимое управление, не удовлетворяющее необходимому условию оптимальности

$$\psi'(t)\frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} u(t) =$$
$$= \max_{u \in U} \psi'(t)\frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} u.$$

Найдем управление $\tilde{u}(t)$ из условия

$$\tilde{\psi}'(t)\frac{\partial f(x(t),\,y(t,\,u(t)),\,u(t),\,t)}{\partial u}\tilde{u}(t)=\\ =\max_{u\in U}\tilde{\psi}(t)\frac{\partial f(x(t),\,y(t,\,u(t)),\,u(t),\,t)}{\partial u}u,$$

где $\tilde{\psi}(t)$ — решение уравнения (5) с

$$\tilde{\psi}(t_1)=-\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}.$$

Из (8) следует, что при достаточно малом ε на допустимом управлении $u_1(t)=u(t)+\varepsilon[\tilde{u}(t)-u(t)]$ выполняется неравенство $J(u_1)<J(u)$. Если $g(x_1(t_1))\leqslant\varepsilon_2$, где ε_2 — заданная точность выполнения граничного условия, то улучшение управления достигнуто.

В общем случае процесс улучшения проводится по следующей схеме. Как и выше, находим $\tilde{u}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$. Вычисляем $\bar{\psi}(t)$, $\bar{u}(t)$:

$\bar{\psi}(t)$ — решение уравнения (5) с

$$\bar{\psi}(t_1)=-\frac{\partial g(x(t_1))}{\partial x},$$

управление $\bar{u}(t)$ таково, что

$$\bar{\psi}'(t)\frac{\partial f(x(t),\,y(t,\,u(t)),\,u(t),\,t)}{\partial u}\bar{u}(t)=\\ =\max_{u\in U}\bar{\psi}'(t)\frac{\partial f(x(t),\,y(t,\,u(t)),\,u(t),\,t)}{\partial u}u.$$

Подсчитываем числа

$$E_1=\int_{t_0}^{t_1}[\tilde{\psi}(t)+\varkappa\bar{\psi}(t)]'\frac{\partial f(x(t),\,y(t,\,u(t)),\,u(t),\,t)}{\partial u}[\tilde{u}(t)-u(t)]\,dt,$$

$$E_2=\int_{t_0}^{t_1}[\tilde{\psi}(t)+\varkappa\bar{\psi}(t)]'\frac{\partial f(x(t),\,y(t,\,u(t)),\,u(t),\,t)}{\partial u}[\bar{u}(t)-u(t)]\,dt.$$

(Весовой коэффициент $\varkappa$ зависит от величин $\varphi(x(t_1))$, $g(x(t_1))$ и предыдущих улучшений $\Delta\varphi(x(t_1))$, $\Delta g(x(t_1))$, если они были получены.) Пусть $E_1>E_2$, тогда полагаем $u_1(t)=u(t)+\varepsilon[\tilde{u}(t)-u(t)]$, в противном случае $u_1(t)=u(t)+\varepsilon[\bar{u}(t)-u(t)]$.

§ 2. Комбинированное улучшение первоначальных управлений

В работах [20, 133] для улучшения управлений в задачах оптимизации без ограничений на управляющие воздействия используется оригинальный метод комбинированного улучшения. Аналогичную идею можно применить и в задачах с ограничениями на управления без предварительного перехода к открытым областям управлений.

1. Использование локальных вариаций. Пусть рассматривается задача из § 1. Следуя схеме § 1, найдем управления $\tilde{u}(t)$, $\bar{u}(t)$, функции $\tilde{H}(t)$, $\bar{H}(t)$, $\tilde{H}_1(t)$, $\bar{H}_1(t)$. Обозначим через θ_1 и θ_2 точки, в которых функции $\Delta\tilde{H}(t) = \tilde{H}_1(t) - \tilde{H}(t)$ и $\Delta\bar{H}(t) = \bar{H}_1(t) - \bar{H}(t)$ достигают максимальных значений.

Построим управление *) $u_1(t)$:

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \,\bar{\in} \left[\theta_1 - \frac{\delta_1}{2},\ \theta_1 + \frac{\delta_1}{2}\right] \times \\ & \qquad \times\, U \left[\theta_2 - \frac{\delta_2}{2},\ \theta_2 + \frac{\delta_2}{2}\right], \\ \tilde{u}(t), & t \in \left[\theta_1 - \frac{\delta_1}{2},\ \theta_1 + \frac{\delta_1}{2}\right], \\ \bar{u}(t), & t \in \left[\theta_2 - \frac{\delta_2}{2},\ \theta_2 + \frac{\delta_2}{2}\right], \end{cases} \tag{9}$$

где δ_1, δ_2 — некоторые положительные числа. Линейные по δ_1 и δ_2 члены приращения функции $g(x(t_1))$, порожденные управлениями (9), имеют вид

$$-a\delta_1 - b\delta_2, \tag{10}$$

где

$$a = \bar{\psi}'(\theta_1)\,[f(x(\theta_1), y(\theta_1, \tilde{u}(\theta_1)), \tilde{u}(\theta_1), \theta_1) - \\ - f(x(\theta_1), y(\theta_1, u(\theta_1)), u(\theta_1), \theta_1)],$$

$$b = \bar{\psi}'(\theta_2)\,[f(x(\theta_2), y(\theta_2, \bar{u}(\theta_2)), \bar{u}(\theta_2), \theta_2) - \\ - f(x(\theta_2), y(\theta_2, u(\theta_2)), u(\theta_2), \theta_2)].$$

---

*) Для простоты рассуждений рассмотрим лишь случай, когда отрезки в определении управления u_1 не пересекаются.

Аналогично из (6.3) получаем, что линейные по δ_1 и δ_2 члены приращения функционала $J(u)$ можно записать в виде

$$-c\delta_1 - d\delta_2, \tag{11}$$

где

$$c = \tilde{\psi}'(\theta_1)[f(x(\theta_1), y(\theta_1, \tilde{u}(\theta_1)), \tilde{u}(\theta_1), \theta_1) - \\ - f(x(\theta_1), y(\theta_1, u(\theta_1)), u(\theta_1), \theta_1)],$$

$$d = \tilde{\psi}'(\theta_2)[f(x(\theta_2), y(\theta_2, \bar{u}(\theta_2)), \bar{u}(\theta_2), \theta_2) - \\ - f(x(\theta_2), y(\theta_2, u(\theta_2)), u(\theta_2), \theta_2)].$$

Из определения управлений $\tilde{u}(t)$, $\bar{u}(t)$, функций $\tilde{\psi}(t)$, $\bar{\psi}(t)$ и чисел θ_1, θ_2 следует, что коэффициенты a, b, c, d в выражениях (10), (11) удовлетворяют условиям

$$b \geqslant 0, \quad b \geqslant a, \quad c \geqslant 0, \quad c \geqslant d. \tag{12}$$

Допустим, что на управлении $u(t)$, $t \in T$, ни один из функционалов $g(x(t_1))$, $\varphi(x(t_1))$ не достигает стационарного значения. Тогда $b > 0$, $c > 0$ и неравенства $a\delta_1 + b\delta_2 \geqslant 0$, $c\delta_1 + d\delta_2 \geqslant 0$ в силу условий (12) имеют положительные решения относительно δ_1, δ_2, за исключением случая

$$d < 0, \quad a < 0, \quad \frac{c}{-d} < \frac{-a}{b}. \tag{13}$$

Примечание. Если допускать нарушение граничных условий на ε, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти δ_1 и δ_2, ведущие к уменьшению критерия качества вне зависимости от (13).

2. Улучшение допустимого управления с помощью малых вариаций. Пусть функция $g(x)$ на траектории $x(t)$ принимает значение $g(x(t_1))$. Для данного ε построим управление $u_1(t)$, на котором $\varphi(x_1(t_1)) < \varphi(x(t_1))$ и $g(x_1(t_1)) \leqslant g(x(t_1)) + \varepsilon$. Положим

$$u_1(t) = u(t) + \varepsilon_1\varepsilon_3(\tilde{u}(t) - u(t)) + \varepsilon_2(1-\varepsilon_3)(\bar{u}(t) - u(t)), \tag{14}$$

где $0 < \varepsilon_3 < 1$, а числа $\varepsilon_1 \geqslant 0$, $\varepsilon_2 \geqslant 0$ находятся так. Для главной части приращения функционала $g(x(t_1))$

потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} [\varepsilon_1\varepsilon_3(\tilde{u}(t) - u(t)) +$$

$$+ \varepsilon_2(1-\varepsilon_3)(\bar{u}(t) - u(t))]\,dt \leqslant \varepsilon. \qquad (15)$$

Если управление $u(t)$ не доставляет стационарного значения функционалу $g(x(t_1))$, то

$$\frac{1}{d_1} = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} [\bar{u}(t) - u(t)]\,dt > 0.$$

Поэтому из неравенства (15) можно найти ε_2:

$$\varepsilon_2 \leqslant c_1\varepsilon_1 \frac{\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3} + \frac{d_1\varepsilon}{2-\varepsilon_3},$$

где

$$c_1 = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} [\tilde{u}(t) - u(t)]\,dt.$$

Допустим, что $c_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + d\varepsilon > 0$. При $\varepsilon > 0$ последнее неравенство выполняется, если величина $\varepsilon_1\varepsilon_3$ достаточно мала. Главная часть приращения функционала $\varphi(x(t_1))$ имеет вид

$$-\varepsilon_1\varepsilon_3 \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\psi}'t \frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} [\tilde{u}(t) - u(t)]\,dt -$$

$$-\varepsilon_2(1-\varepsilon_3) \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\psi}'(t) \frac{\partial f(x(t), y(t, u(t)), u(t), t)}{\partial u} [\bar{u}(t) - u(t)]\,dt$$

и является отрицательной, если ε_2 достаточно мало. Отсюда следует, что управление (14) при достаточно малых $\varepsilon_1\varepsilon_3$ и ε_2 уменьшает значение функционала $\varphi(x(t_1))$, не увеличивая при этом $g(x_1(t_1))$ по сравнению с $g(x(t_1))$ более чем на ε. Поэтому можно улучшить управление $u(t)$ как в направлении уменьшения $\varphi(x(t_1))$, так и в направлении уменьшения $g(x(t_1))$. Изменения в рассуждениях, которые в последнем случае необходимо ввести, очевидны.

3. О задачах оптимизации с незакрепленным временем. Все способы улучшения управления, предложенные выше, относились к процессам оптимизации с фиксированным временем регулирования. Пусть рассматривается задача § 1 и момент t_1 не закреплен. Известно (§ 6.2), что в этом случае к необходимым условиям оптимальности добавляется новое соотношение

$$H(x(t_1),\ x[t_1-h(x(t_1),\ u(t_1),\ t_1)],\ \psi(t_1),\ u(t_1),\ t_1) = \\ = \frac{\partial\varphi(x(t_1),\ t_1)}{\partial t}.$$

Изменения в схемах улучшения допустимого управления, вызванные этим обстоятельством, состоят в следующем. Если $[t_0, t_1]$ — отрезок, на котором задано допустимое управление $u(t)$, то вычисляем величину

$$\Gamma_1(t_1) = \frac{\partial\varphi(x(t_1),\ t_1)}{\partial t} - \\ - H(x,\ (t_1),\ x[t_1-h(x(t_1),\ u(t_1),\ t_1)],\ \psi(t_1),\ u(t_1),\ t_1).$$

Если $\Gamma_1(t_1) \neq 0$, то определяем новый интервал $[t_0, t_1^1]$, где $t_1^1 = t_1 + \Delta t_1 \operatorname{sign} \Gamma_1(t_1)$, $\Delta t_1 > 0$. Если $\Gamma_1(t_1) > 0$, то полагаем $u_1(t) = u(t_1)$, $t \geqslant t_1$. При достаточно малых Δt_1 имеем

$$\varphi(x_1(t_1^1),\ t_1^1) < \varphi(x(t_1),\ t_1).$$

§ 3. Доказательство сходимости двух методов приближенного решения задач оптимального управления

1. О предельном переходе в решении одной задачи с интегральным ограничением. Для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t)u \tag{16}$$

при ограничении на управление

$$\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|^p\,dt \leqslant L^p, \qquad L = \text{const} > 0, \tag{17}$$

исследуем решение $u^0(p, t)$, $T^0(p)$ задачи оптимального быстродействия (6.171). Пусть система (16) нормальна. Из результатов § 6.9 следует, что функция $u^0(p, t)$

однозначно определяется соотношением

$$u^0(p, t) = L^q \,|\, g'(q)\,\gamma(t)\,|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sign} g'(q)\,\gamma(t), \qquad (p^{-1} + q^{-1} = 1). \tag{18}$$

Здесь $\gamma(t)$ — функция (6.173), $g(q)$ — решение задачи

$$\lambda(t_1^0, q) = L^{-1},$$

$$\lambda(t_1, q) = \min_{g'x_0=-1}\left(\int_{t_0}^{t_1^0} |\,g'\gamma(t)\,|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_{t_0}^{t_1^0} |\,g'(q)\,\gamma(t)\,|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при} \quad t_1^0 = t_0 + T^0(p). \tag{19}$$

Лемма 1. Функция $\lambda(t_1, q)$ непрерывна, строго возрастает по t_1.

Утверждение доказывается аналогично лемме 6.14.

Ниже через $\lambda(t_1)$ обозначена функция

$$\min_{g'x_0=-1}\int_{t_0}^{t_1} |\,g'\gamma(t)\,|\,dt,$$

соответствующая системе (16) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Лемма 2. Если $\lim t_1^{(q)} \to t_1$, то

$$\lim_{q\to 1+0} \lambda(t_1^{(q)}, q) = \lambda(t_1).$$

Доказательство. Пусть $q_s > 1$, $q_s \to 1$. Положим

$$\lambda(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\,g_0'\gamma(t)\,|\,dt,$$

$$\lambda(t_1^{(q_s)}, q_s, g) = \left(\int_{t_0}^{t_1^{(q_s)}} |\,g'\gamma(t)\,|^{q_s}\,dt\right)^{\frac{1}{q_s}},$$

$$\lambda(t_1^{(q_s)}, q_s, g(s)) = \min_{g'x_0=-1} \lambda(t_1^{(q_s)}, q_s, g).$$

В силу определения $\lambda(t_1, q)$ имеем

$$\lambda(t_1^{(q_s)}, q_s, g(s)) \leqslant \lambda(t_1^{(q_s)}, q_s, g_0). \tag{20}$$

Будем считать (что не ограничивает общности рассуждений) последовательность $g(s)$ сходящейся: $g(s) \to \tilde{g}$ при $s \to \infty$. Ясно, что

$$\lambda(t_1, 1, \tilde{g}) \geqslant \lambda(t_1, 1, g_0). \tag{21}$$

Переходя к пределу при $q \to 1+0$ в (20) и учитывая неравенство (21), получаем

$$\lambda(t_1, 1, \tilde{g}) = \lambda(t_1, 1, g_0) = \lambda(t_1).$$

Такие рассуждения справедливы для любой последовательности q_s. Значит, лемма доказана.

Пусть ограничение на управление $u(t)$ в уравнении (16) имеет вид: $|u(t)| \leqslant L$. Обозначим через $u^0(\cdot)$, T^0 решение задачи оптимального быстродействия (6.171) для этого случая.

Теорема 1. Если существует решение $u^0(\cdot)$, T^0, то для любых $\varepsilon > 0, \sigma > 0$ найдется $p_1 > 1$ такое, что при $p > p_1$ задача (6.171), (16), (17) имеет решение и справедливы неравенства

$$|T^0(p) - T^0| < \varepsilon, \quad \operatorname{mes}\{t\colon |u^0(p, t) - u^0(t)| \geqslant \sigma\} < \varepsilon. \tag{22}$$

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости первого неравенства. В силу леммы 1 функция $\lambda(t_1, q)$ строго возрастает по t_1. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\beta > 0$, что выполняются неравенства

$$\lambda(t_1 - \varepsilon, q) < L^{-1} - \beta, \qquad \lambda(t_1 + \varepsilon, q) > L^{-1} + \beta.$$

Из леммы 2 следует существование такого $\delta > 0$, что

$$|\lambda(t_1 \pm \varepsilon, q) - \lambda(t_1 \pm \varepsilon)| < \beta$$

при $q - 1 < \delta$. Следовательно, можно указать моменты времени $t_1 = t_0 + \tau(p)$, когда

$$\lambda(t_0 + \tau(p), q) = L^{-1}, \qquad q - 1 < \delta.$$

Ясно, что $|\tau(p) - T^0| < \varepsilon$. Но в силу леммы 1 и соотношения (19) величина $\tau(p)$ — оптимальное быстродействие в задаче (6.171), (16), (17). Первая часть утверждения доказана.

Рассмотрим функции (19). При доказательстве леммы 2 установлено, что если $q_s \to 1 + 0$ и $g(q_s) \to \tilde{g}$, то вектор $\tilde{g}$ дает решение задачи при вычислении $\lambda(t_1)$. В силу непрерывности функции $T^0(p)$ по p и леммы 2 для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое q_1, что при $q < q_1$ нули функции $u^0(p, t)$ попадут в ε-окрестность нулей функции $u^0(t)$. Так как величина q_s/p_s может быть сделана сколь угодно малой, то из (18) следует существование такого $q_2 \leqslant q_1$, что при $q < q_2$ имеет место второе неравенство из (22). Теорема доказана.

Теорема 1 может быть обобщена на нелинейные системы.

2. Об одном способе приближенного построения оптимальных управлений в нелинейных системах. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + B(t, \mu)\, u(t), \tag{23}$$

где $x \in E_n$, непрерывная матрица $B(t, \mu)$ имеет порядок n и неособая при $t \geqslant t_0$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$. Предполагается, что функция $f(x, t)$ непрерывна по t, имеет непрерывные ограниченные производные по x, и $f(0, t) = 0$.

Для такой системы рассмотрим задачу оптимального быстродействия (6.171). Пусть ограничение на управление $u(t)$ имеет вид

$$u'(t)\, u(t) \leqslant L^2. \tag{24}$$

Обозначим через $\tilde{u}(\mu, t)$, $\tilde{T}(\mu)$ решение задачи (6.171), (23), (24). Так как матрица $B(t, \mu)$ неособая, то в силу результатов § 1.7 для каждого $\sigma > t_0$ можно построить окрестность начала координат $x = 0$, для точек которой существует σ-допустимые управления. Приведем без доказательства одну теорему существования оптимальных управлений.

Теорема 2. Пусть в задаче (6.171), (23), (24) существует T-допустимое управление. Тогда существует и оптимальное управление.

Если $x^0(\mu, t)$ — соответствующая оптимальная траектория, то оптимальное управление имеет вид

$$\tilde{u}(\mu, t) = LB'(t, \mu)\,[F_{x^0(\cdot)}^{-1}(t)]'\,g_0\,[\,\|B'(t, \mu)\,(F_{x^0(\cdot)}^{-1}(t))'\,g_0\|]^{-\frac{1}{2}},$$

где $F_{x^0(\cdot)}(t)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{dz}{dt} = P(x^0(\cdot), t)\,z = \frac{\partial f(x^0(\mu, t), t)}{\partial x}\,z,$$

g_0 — решение задачи (7.71) при $F = F_{x^0(\cdot)}$. Обозначим через $u^0(t)$, T^0 решение задачи (6.171) для уравнения (23) со скалярным управлением $u(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + b(t)\,u(t), \quad |u(t)| \leqslant L. \tag{25}$$

Пусть $b_j(t, \mu) \to 0$, $j \neq 1$, $b_1(t, \mu) \to b(t)$ при $\mu \to \mu_0$, $\mu_0 \in (\mu_1, \mu_2)$, и для системы

$$\frac{dz}{dt} = P(x(\cdot), t)\,z + b(t)\,u(t)$$

выполнено условие A (см. § 7.10).

Теорема 3. Если существует решение задачи (6.171), (23), (24), то задача (6.171), (25) также имеет решение и $\lim\limits_{\mu\to\mu_0} \tilde{T}(\mu) = T^0$.

Доказательство. Функция $u(\cdot) = \{u^0(\cdot), 0, \ldots, 0\}$ является $(t_0 + T^0)$-допустимым управлением для задачи (6.171), (23), (24). В силу теоремы 2 для этой задачи при всех μ существует оптимальное управление $\tilde{u}(\mu, t)$. Очевидно,

$$\tilde{T}(\mu) \leqslant T^0. \tag{26}$$

Пусть $T^1 \doteq \inf\limits_{\mu}\{\tilde{T}(\mu)\}$. Выделим из множества $\{\tilde{u}(\mu, t),\ \mu_1 < \mu < \mu_2\}$ последовательность $\tilde{u}(\mu_k, t)$, которая обладает такими свойствами:

a) $\lim \tilde{u}(\mu_k, t) = u(t)$ слабо (в смысле $L_2(t_0, t_0 + T^1)$),

b) $\lim x(x_0, \mu_k, \tilde{u}(\mu_k, t), t) = x(t)$ равномерно по t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T^1$,

c) $\lim T(\mu_k) = T^1$.

Такой выбор $\tilde{u}(\mu_k, t)$ возможен на основании ограниченности функций $\tilde{u}(\mu, t)$, $\partial f/\partial x$ и неравенства (26).

Если бы имело место неравенство $T^1 < T^0$, то из a), b), c) следовало бы, что управление $u(\cdot)$ порождает траекторию $x(\cdot)$ системы (25), для которой $x(t_0+T^1)=0$, что невозможно. Итак, $\lim \tilde{T}(\mu_k) = T^0$.

Примечание. Если в (25) оптимальное управление единственно, то $\lim\limits_{\mu\to\mu_0} \tilde{u}(\mu, t) = u^0(t)$ по мере.

§ 4. Численные алгоритмы решения некоторых задач оптимального управления

Ниже описываются общие вычислительные схемы, основанные на результатах §§ 6.9—6.13, проводится детальное описание приемов для наиболее распространенных задач; обсуждаются проблемы построения первого приближения и выбора шага.

1. Общие схемы вычисления оптимальных управлений. Рассмотрим задачи из § 6.12. Как следует из теоремы 6.37, оптимальные управления определяются вектором $\{g_0, f_0\}$ — решением конечномерной задачи (6.204). Будем считать, что имеется способ определения максимума $H(g, f, u(\cdot))$, и опишем некоторые из возможных вычислительных схем.

A_1. Пусть минимизируется время T.

Выбирается $T(0) > 0$. Если $\Lambda(L_1, \ldots, L_m, 0) > 0$, то находим нулевое приближение $\{g(0), f(0)\}$ из условия

$$\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(0), g(0), f(0)) = \\ = \max_{\|\{g, f\}\|=1,\, f\geqslant 0} \Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(0), g, f) = \Lambda(0).$$

Если $T(0)$ достаточно мало, то $\Lambda(0) \geqslant 0$ и $\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T) > 0$ при $T < T(0)$. Если $\Lambda(0) = 0$, то задача решена и $T(0) - t_0$ — оптимальное быстродействие. Пусть $\Lambda(0) > 0$. За первое приближение $T(1)$ берется число $T(1) = T(0) + \Delta T(0)$, где $\Delta T(0) \geqslant 0$ — малое приращение. Величины $\{g(1), f(1)\}$ определяются из условия

$$\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(1), g(1), f(1)) = \\ = \max_{\|\{g, f\}\|=1,\ f\geqslant 0} \Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(1), g, f) = \Lambda(1).$$

Если не существует такого $\Delta T(0) > 0$, что $\Lambda(1) > 0$, то $T^0 = T(1)$. В противном случае при достаточно малом $\Delta T(0)$ имеем $\Lambda(1) \geqslant 0$, $\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T) > 0$, если $T < T(1)$. Число $\tau = T(1) - t_0$ — оптимальное быстродействие, когда $\Lambda(1) = 0$. При $\Lambda(1) > 0$ процесс продолжается.

Функция $\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T, g, f)$ не имеет локальных максимумов. Величины $\Lambda(k)$ могут быть определены методом наискорейшего подъема.

A_2. *Пусть функция* $\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T)$ *строго убывает по* T, *причем* $\Lambda(L_1, \ldots \ldots, L_m, 0) > 0$.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия. За нулевое приближение берем произвольные числа $\{g(0), f(0)\}$, $f(0) \geqslant 0$, $\|\{g(0), f(0)\}\| = 1$. Вычисляем $T(0)$ из уравнения

$$\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(0), g(0), f(0)) = 0.$$

Первое приближение находим из условия

$$\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(0), g(1), f(1)) = \\ = \max_{\|\{g,f\}\|=1,\ f\geqslant 0} \Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(0), g, f) = \Lambda(0).$$

Если $\Lambda(0) = 0$, то $T(0)$ — оптимальное время и $g_0 = g(0)$, $f_0 = f(0)$. Если $\Lambda(0) > 0$, то процесс продолжается, т. е. находим $T(1)$ из уравнения

$$\Lambda(L_1, \ldots, L_m, T(1), g(1), f(1)) = 0$$

и т. д. Ясно, что $T(k+1) \geqslant T(k)$.

A_3. *Время* $T = T^0$ *в случае* A_2 *удовлетворяет условию*

$$T^0 = \max_{g,f} \{T\colon \Lambda(L_1, \ldots, L_m, T, g, f) = 0\}.$$

На основании этого нахождение g_0, f_0 можно провести, как в [21d]. В этой работе рассмотрена задача (6.171).

A_4. Способы A_1, A_2 годны при минимизации величин L_j.

Если $\sum\limits_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ik} \neq 0$ при всех $g_i \neq 0$, то

$$L_k^0 = \max_{g_i,\, f} \Big\{ L_k\colon \sum_{i=1}^{m-3} g_i h^i - L_1 f - \sum_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{m} L_j \Big\| \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ij} \Big\| +$$

$$+ \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} H(g, f, u(\cdot)) \Big\} \Big/ \Big\| \sum_{i=1}^{m-3} g_i' S_{ik} \Big\| = 1, \ f \geqslant 0, \ k \neq 1.$$

Значит, в последнем случае приемлема схема A_3.

2. Задача минимизации нормы конечного состояния. Пусть требуется найти управление $u(\cdot) \in U_\infty^L(\cdot)$, которое на траекториях системы (16), $x(t_0) = x_0$, минимизирует функционал

$$J(u) = \| x(x_0, u(\cdot), t_1) \|, \qquad J(u^0) = \delta^0, \qquad \| x \|^2 = x'x,$$

где t_1 — фиксированный момент времени, x_0 — заданная точка.

В силу теоремы 6.26 имеем

$$\delta^0 = \max_{\|g\|\leqslant 1} \{ g'c - L \| g'S \| \} = g_0'c - L \| g_0'S \| =$$

$$= g_0' F(t_1) F^{-1}(t_0) x_0 - L \int_{t_0}^{t_1} | g_0' F(t_1) F^{-1}(\tau) b(\tau) | \, d\tau.$$

Допустим, что $\delta^0 > 0$. Тогда для определения оптимального управления $u^0(\cdot)$ имеем (см. теорему 6.26) следующее соотношение:

$$g_0' F(t_1) F^{-1}(t) b(t) u^0(t) = \min_{|u|\leqslant L} g_0' F(t_1) F^{-1}(t) b(t) u.$$

Следовательно,

$$u^0(t) = -L \operatorname{sign} g_0' F(t_1) F^{-1}(t) b(t). \tag{27}$$

Ниже предполагается, что система (16) нормальна. В противном случае при вычислении $u^0(\cdot)$ следует использовать результаты § 7.8. Итак, для вычисления функции $u^0(\cdot)$ необходимо найти максимум вогнутой функции

$$\Lambda(g) = g'c - L \| g'S \|. \tag{28}$$

Введем множество

$$G = \{x\colon\ x = Su(\cdot) + F(t_1) F^{-1}(t_0) x_0,\ u(\cdot) \in U_\infty^L(\cdot)\}.$$

Пусть g_1 — такой вектор, что

$$g_1'c > 0, \qquad \Lambda(g_1) > 0, \qquad \| g_1 \| = 1. \tag{29}$$

Величина $\Lambda(g_1)$ равна минимальной проекции множества G на g_1, поэтому множество точек

$$\Pi_1 = \{x\colon\ x = \Lambda(g) g,\ \| g \| = 1,\ \Lambda(g) > 0\}$$

есть часть подэры [116] границы G. Пусть $\tilde{x} = \Lambda(g_1) g_1 \in \in \Pi_1$. Найдем $u_1(\cdot)$ из условия

$$g_1' S u_1(\cdot) = \min_{(u\cdot)\in U_\infty^L(\cdot)} g_1' Su(\cdot) \tag{30}$$

и определим

$$x_1 = Su_1(\cdot) + c. \tag{31}$$

Ясно, что $(\tilde{x} - x_1)' g_1 = 0$. Поэтому $\Lambda(g_1) \leqslant \| x_1 \|$ (равенство $\Lambda(g_1) = \| x_1 \|$ возможно лишь при условии $\Lambda(g_1) g_1 = x_1$). Рассмотрим точку

$$x(\alpha) = (1 - \alpha) \Lambda(g_1) g_1 + \alpha x_1, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Существует единственное α^*, при котором $x(\alpha^*) \in \Pi_1$. По определению $x(\alpha^*) = \Lambda(g_2) g_2$ и $g_1'(\Lambda(g_1) g_1 - - \Lambda(g_2) g_2) = 0$. Значит, $\Lambda(g_1) = \Lambda(g_2) g_1' g_2$. Если $g_2 \neq g_1$, то

$$\Lambda(g_2) > \Lambda(g_1). \tag{32}$$

Имеет место неравенство

$$\Lambda\left(\frac{\Lambda(g_1) g_1 + \Lambda(g_2) g_2}{\| \Lambda(g_1) g_1 + \Lambda(g_2) g_2 \|}\right) > \min[\Lambda(g_1),\ \Lambda(g_2)]. \tag{33}$$

Неравенства (32), (33) и лежат в основе предлагаемых ниже алгоритмов.

1°. Пусть g_1 — вектор, удовлетворяющий условию (29). Находим функцию $u_1(\cdot)$ из условия (30) и определяем x_1 согласно (31). Решаем уравнение

$$g_1'(\Lambda(g_1) g_1 - \Lambda(g(\alpha)) g(\alpha)) = 0,$$
$$g(\alpha) = (1 - \alpha) \Lambda(g_1) g_1 + \alpha x_1. \tag{34}$$

Пусть α^* — решение (34). За второе приближение берется вектор $g_2 = g(\alpha^*)/\| g(\alpha^*) \|$. Процесс продолжается. В результате получаются последовательности g_k, $\Lambda(g_k)$, $u_k(\cdot)$, x_k. Последовательность $\Lambda(g_k)$ монотонно возрастает (см. (32)), ограничена сверху. Предположим, что

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda(g_{k_m}) = \Lambda^* \neq \max_{\|g\|=1} \Lambda(g) = \Lambda(g_0).$$

Тогда существует $g \neq g_0$, при котором $\Lambda(g) = \Lambda^*$. Возьмем g за первое приближение. Из (30), (31), (34) находим $\tilde{g} \neq g$, при этом $\Lambda(\tilde{g}) > \Lambda(g)$, что противоречит определению Λ^*. Итак, $\Lambda^* = \Lambda(g_0)$. Поскольку g_0 — единственный экстремальный элемент задачи, то $g^k \to g_0$ при $k \to \infty$, $u_k(\cdot) \to u^0(\cdot)$ по мере,

$$x_k \to x(x_0, u^0(\cdot), t_1).$$

2°. Первое и второе приближения g_1, g_2 строим, как описано выше. Полагаем

$$g_3 = [\Lambda(g_1)\, g_1 + \Lambda(g_2)\, g_2]/\|\Lambda(g_1)\, g_1 + \Lambda(g_2)\, g_2\|.$$

Далее можно пойти по одному из двух путей:

α) найти g_4 из уравнения (32),

β) положить

$$g_4 = [\Lambda(g_2)\, g_2 + \Lambda(g_3)\, g_3]/\|\Lambda(g_2)\, g_2 + \Lambda(g_3)\, g_3\|.$$

На последующих этапах можно усреднять по нескольким предыдущим g_i. Усреднение целесообразно проводить до тех пор, пока не нарушится неравенство

$$\Lambda\left(\frac{\Lambda(g_i)\, g_i + \Lambda(g_{i+1})\, g_{i+1}}{\|\Lambda(g_i)\, g_i + \Lambda(g_{i+1})\, g_{i+1}\|}\right) > \max\{\Lambda(g_i),\ \Lambda(g_{i+1})\}.$$

Нетрудно видеть, что этот процесс будет сходиться для систем второго порядка. Для систем более высокого порядка в конце процесса последующие g_i следует находить из уравнения (34). Таким образом, уравнение (34) служит здесь тестом. Приведенный метод особенно удобен в конце процесса.

Примечание. Если в последовательности $\Lambda(g_k)$ встретятся два одинаковых члена $\Lambda(g_k) = \Lambda(g_{k+1})$, то $g_k = g_0$ и процесс закончен.

3. Метод наискорейшего подъема. Снова исследуем задачу минимизации нормы конечного состояния. Пусть

$$\Lambda_1(g) = [g'c - L \| g'S \|]/\| g \|.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{grad} \Lambda_1(g) \,|_{\|g_1\|=1} = x_1 - \Lambda(g_1)\, g_1,$$

где точка x_1 удовлетворяет соотношениям (31), (30). Метод наискорейшего подъема строим по известной схеме. Пусть $\| g_1 \| = 1$. Находим $u_1(\cdot)$, x_1 по правилам п. 2. Строим элемент $g(\alpha) = g_1 + \alpha(x_1 - \Lambda(g_1)\, g_1)$. Определяем α_1 из условия $\Lambda_1(g(\alpha_1)) = \max\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \Lambda_1(g(\alpha))$. Полагаем $g_2 = g(\alpha_1)$ и т. д.

Возможен и другой вариант метода наискорейшего подъема. Из (28) имеем

$$\operatorname{grad} \Lambda(g)|_{\| g_1\|=1} = c + Su_1(\cdot) = x_1,$$

где функция $u_1(\cdot)$ удовлетворяет условию (30). Положим

$$g(\alpha) = [\alpha g_1 + (1 - \alpha)\, x_1]/\| \alpha g_1 + (1 - \alpha)\, x_1 \|$$

и вычислим α_1 из условия $\Lambda(g(\alpha_1)) = \max\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \Lambda(g(\alpha))$. Полагаем $g_2 = g(\alpha_1)$ и т. д.

4. Задача максимизации нормы конечного состояния. Пусть дано начальное состояние $x(t_0) = x_0$ системы (16), зафиксирован момент времени t_1. Требуется найти для (16) функцию $u^0(\cdot)$, при которой

$$\| x(x_0, u^0(\cdot), t_1) \| = \max_{u(\cdot) \in U^L_\infty(\cdot)} \| x(x_0, u(\cdot), t_1) \| = \Delta^0.$$

В силу теоремы 6.39 имеем

$$\Delta^0 = \max_{\|g\|=1} [g'c + L \| g'S \|] = \tilde{g}_0'c + L \| \tilde{g}_0'S \|. \tag{35}$$

Оптимальное управление $u^0(\cdot)$ задается соотношением (27) с $g_0 = -\tilde{g}_0$. Очевидно, что $\Delta^0 > 0$. Функция

$$\Lambda_2(g) = g'c + L \| g'S \|$$

выпукла по g, что может затруднить вычисление $\tilde{g}_0$ из (35). В этом случае уже нельзя гарантировать совпадения локального максимума с глобальным. Пусть $g = g_1$,

$\| g_1 \| = 1$. Величина $\Lambda_2(g_1)$ равна максимальной проекции точек множества достижимости G на g_1. Поэтому множество

$$\Pi_2 = \{x\colon\ x = \Lambda_2(g)\, g,\ \| g \| = 1\}$$

составляет часть подэры границы множества G. Луч, направленный в полупространство $\Gamma = \{g\colon\ g'c > 0\}$, всегда пересекает множество Π_2. Значит, для одного из векторов g_1, $-g_1$ всегда имеем $\Lambda_2(g) > 0$, т. е. проблемы выбора первого приближения здесь не возникает.

Последовательные приближения строим по следующей схеме. Первое приближение — вектор g_1, $\| g_1 \| = 1$, принадлежащий Γ. Находим $u_1(\cdot)$ из условия

$$g_1'Su_1(\cdot) = \max_{u(\cdot)\in U_\infty^L(\cdot)} g_1'Su(\cdot).$$

Вычисляем $x_1 = c + Su_1(\cdot)$ и полагаем

$$g(\alpha) = [(1-\alpha)\Lambda_2(g_1)\, g_1 + \alpha x_1]/\|(1-\alpha)\Lambda_2(g_1)\, g_1 + \alpha x_1\|.$$

Существует единственное α^*, при котором

$$g_1'[\Lambda_2(g_1)\, g_1 - \Lambda_2(g(\alpha))\, g(\alpha)] = 0. \tag{36}$$

За второе приближение берем $g_2 = g(\alpha^*)$. Если $g_2 \neq g_1$, то из (36) следует неравенство $\Lambda_2(g_1) < \Lambda_2(g_2)$. Если $g_2 = g_1$, то g_1 доставляет максимум для $\Lambda_2(g)$. В случае $g_2 \neq g_1$ процесс продолжается. Нетрудно убедиться, что $\Lambda_2(g_k) \to \Lambda_2(g^*)$ при $g_k \to g^*$. Также имеем $\Lambda_2(g^*) \geqslant \Lambda_2(g_k)$ при $k > k_1$.

5. Последовательные приближения в задаче оптимального быстродействия. Для уравнения (16), где управление $u(t)$ стеснено условием $|u(t)| \leqslant L$, рассмотрим задачу оптимального быстродействия (6.171). В силу теоремы 6.32 оптимальное управление задается релейной функцией

$$u^0(t) = L \operatorname{sign} g_0'F^{-1}(t)\, b(t),$$

где g_0 — решение задачи (6.175). Так как условие (6.175) эквивалентно равенству

$$\max_{\|g\|=1}\left[g'x_0 - L\int_{t_0}^{t_1^0} |g'F^{-1}(t)\, b(t)|\, dt\right] = \max_{\|g\|=1}[g'x_0 - L\|g'S\|] = \tilde g_0'x_0 - L\|\tilde g_0'S\|,$$

то вектор $\tilde{g}_0 = -g_0$ можно искать по следующей схеме (см. также п. 1). Зададим малое число $\varepsilon > 0$, которое определяется заданной точностью вычислений. Пусть t_1^1 — величина, близкая к t_0. Положим $g_1 = x_0/\| x_0 \|$. Тогда

$$\Lambda (g_1, t_1') = g_1'x_0 - L \| g_1'S \| \geqslant \varepsilon.$$

Найдем $u_1(\cdot)$. Имеем

$$g_1'Su_1(\cdot) = \min_{u(\cdot)\in U_\infty^L(\cdot)} g_1'Su(\cdot),$$

и положим $x_1 = x_0 + Su_1(\cdot)$. Строим элемент
$g(\alpha) =$

$$= [(1-\alpha) \Lambda (g_1, t_1^1) g_1 + \alpha x_1]/\| (1-\alpha) \Lambda (g_1, t_1^1) g_1 + \alpha x_1 \|$$

и находим α^* из уравнения

$$g_1'[\Lambda (g_1, t_1^1) g_1 - \Lambda (g(\alpha), t_1^1) g(\alpha)] = 0.$$

Вектор $g(\alpha^*)$ берем за второе приближение g_2. За t_1^2 принимаем наибольшее t_1, при котором $\Lambda (g_2, t_1) \geqslant \varepsilon$.

Построенные таким образом последовательности g_k, t_1^k удовлетворяют условиям

$$g_k \to g_0, \qquad t_1^k \to t_1^0.$$

6. Нахождение первого приближения. В некоторых случаях нахождение вектора g_1, удовлетворяющего условиям (29), превращается в самостоятельную задачу. В задаче минимизации нормы $\| x(t_1) \|$ можно рекомендовать следующие пробные шаги выбора g_1.

1) Положим $g_1 = c/\| c \|$ (при таком выборе g_1 первый член в (28) достигает максимума) и будем решать задачу (26) при t_1^1, достаточно близком к t_0. Найдем $\min\limits_{u(\cdot)} \| x(t_1^1) \|$ с некоторой точностью. Положим $g_1 = x(t_1^1)/\| x(t_1^1) \|$ и решим задачу (26) при $t_1^2 > t_1'$ и т. д. Через конечное число шагов получим g_1, удовлетворяющий условиям (29).

2) Полагаем $g_1 = c/\| c \|$ и решаем задачу (26) с достаточно малым L. Находим приближенно $\min\limits_{u(\cdot)} \| x(t_1) \|$. Полагаем $g_1 = x(t_1)/\| x(t_1) \|$ и увеличиваем L. После конечного числа шагов найдем первое приближение g_1, удовлетворяющее условиям (29).

7. Некоторые рекомендации по выбору шага в методе наискорейшего подъема. Допустим, что процесс построения g_i находится на k-м шаге. Полагаем $g_k = g_{k-1}(\alpha_{k-1})$ и находим $u_k(\cdot)$, x_k согласно (30), (31). Вводим элемент

$$g_k(\alpha) = (1-\alpha)\, g_k + \alpha x_k$$

и строим функцию $\mu_k(\alpha) = \Lambda(g_k(\alpha))/\| g_k(\alpha) \|$. Обозначим $x_k/\| x_k \|$ через $\bar{g}_k$ и найдем $\bar{u}_k(\cdot)$, $\bar{x}_k$ из (30), (31) с $g_1 = \bar{g}_k$. Легко подсчитать

$$\mu_k(0) = g_k' x_k, \quad \mu_k(1) = \bar{x}_k' x_k/\| x_k \|,$$

$$\left.\frac{d\mu_k}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = x_k' x_k - [g_k' x_k]^2, \quad \left.\frac{d\mu_k}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = \bar{x}_k' \frac{g_k' x_k x_k - x_k' x_k g_k}{[x_k' x_k]^{3/2}}.$$

Аппроксимируем функцию $\mu_k(\alpha)$ по значениям $\mu_k(0)$, $\mu_k(1)$, $d\mu_k/d\alpha|_{\alpha=0;\,1}$ некоторой функцией $\tilde{\mu}_k(\alpha)$. Вычисляем α_k: $\tilde{\mu}_k(\alpha_k) = \max\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \tilde{\mu}_k(\alpha)$. Полагаем $g_{k+1} = g_k(\alpha_k)$. Итак, величина шага определяется значением α_k.

Примечания. 1) Приведенных чисел x_k, $\bar{x}_k$, g_k, $\bar{g}_k$ достаточно для определения вторых производных $d^2\mu_k/d\alpha^2|_{\alpha=0;\,1}$.

2) Нетрудно видеть, что оптимальное значение δ^0 удовлетворяет неравенствам

$$\Lambda(g_k) \leqslant \delta^0 \leqslant \| x_k \|, \quad \Lambda(\bar{g}_k) \leqslant \delta^0 \leqslant \| \bar{x}_k \|,$$

что позволяет предложить критерий «останова» в соответствии с величиной

$$\delta = \| x_k \| - \Lambda(g_k) \quad (\text{или } \delta^1 = \| \bar{x}_k \| - \Lambda(\bar{g}_k)).$$

Пусть ε — заданная точность вычислений. Критерий «останова» проверяется в начале следующего шага: находим $u_{k+1}(\cdot)$, x_{k+1} и $\varepsilon_{k+1} = \| x_{k+1} \| - g_{k+1}' x_{k+1}$.

Если $\varepsilon_{k+1} \leqslant \varepsilon$, процесс останавливается. В способе, основанном на решении уравнения (34), можно аппроксимировать функцию

$$\varphi(\alpha) = g_1'[\Lambda(g_1)\, g_1 - \Lambda(g(\alpha))\, g(\alpha)].$$

За начало следующей итерации принимается вектор (34) при $\alpha = \alpha^*$: $\tilde{\varphi}(\alpha^*) = 0$, где $\tilde{\varphi}(\alpha)$ — аппроксимирующая функция.

При решении конкретных примеров использовались квадратичная, кубическая и кусочно-линейная аппроксимации.

§ 5. Обобщение на системы с запаздыванием и нелинейным входом

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_1))$$

($\varphi(x)$ — непрерывная, квазивыпуклая функция) на траекториях линейной системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h(t)) + b(u(t),\,t),$$

$$x(t) = \Phi(t), \qquad t \in S_0 = \{t\colon\ t - h(t) \leqslant t_0\}.$$

Здесь $u(t)$ — r-мерные кусочно-непрерывные управления со значениями из компактного множества U. Следуя §§ 6.9, 6.10, можно показать, что оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию

$$\psi'(t)\,b(u^0(t),\,t) = \max_{u \in U} \psi'(t)\,b(u,\,t),$$

где $\psi(t)$ — решение уравнений

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A'(t)\,\psi(t) - A_1'(r(t))\,\psi(r(t))\,r'(t), \quad t \in [t_0,\,t'],$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A'(t)\,\psi(t), \quad t \in [t',\,t_1], \quad \psi(t_1) = -g_0,$$

$$t' = t_1 - h(t_1).$$

Для вектора g_0 имеем соотношение

$$g_0's(t_1,\,x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} g_0'S(t,\,u)\,dt - \max_{\varphi(x) \leqslant \delta^0} g_0'x =$$

$$= \max_{\|g\|=1} \left[g's(t_1,\,x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} g'S(t,\,u)\,dt - \max_{\varphi(x) \leqslant \delta^0} g'x \right],$$

где

$$s(t_1, x_0) = F(t_1, t_0)\,\Phi(t_0) + \int\limits_{t_0-h(t_0)}^{t_0} F(t_1, r(\tau))\,A_1(r(\tau))\,\Phi(\tau)\,d\tau,$$

$$S(t, u) = F(t_1, t)\,b(u, t),$$

$$\frac{dF(t_1, \tau)}{d\tau} = -F(t_1, \tau)\,A(\tau) - F(t_1, r(\tau))\,A_1(r(\tau))\,r'(\tau),$$

$F(t_1, t_1) = E$, $F(t_1, \tau) = 0$ при $\tau > t_1$, δ^0 — корень уравнения

$$\lambda(t_1, \delta) = \max_{\|g\|=1} \lambda(g, t_1, \delta) =$$

$$= \max_{\|g\|=1} \Big[g's(t_1, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} g'S(t, u)\,dt - \max_{\varphi(x) \leqslant \delta} g'x\Big] = 0. \quad (37)$$

Таким образом, определение оптимального управления свелось к нахождению вектора g_0 из (37). Схема последовательных приближений для решения аналогичных задач предложена в [34i] и развита в работах [27, 40a].

Из результатов § 6.10 следует, что минимальное значение функционала $J(u)$ можно найти из условия

$$\delta^0 = \max_{\|g\|=1} \{\delta(g):\ \lambda(g, t_1, \delta(g)) = 0\}.$$

Поскольку функция $\lambda(g, \delta)$ монотонно убывает по δ, то возможна следующая схема вычисления δ^0 и g_0. Пусть вектор g_1, $\| g_1 \| = 1$, удовлетворяет условию

$$\lambda(g_1, 0) > 0.$$

Найдем δ_1: $\lambda(g_1, \delta_1) = 0$. Пусть g_2, $\| g_2 \| = 1$, таковы, что $\lambda(g_2, \delta_1) > 0$. Найдем δ_2: $\lambda(g_2, \delta_2) = 0$ и т. д. Таким образом, получим неубывающую последовательность $\delta_1 < \delta_2 < \ldots$, которая сходится к оптимальному δ^0. Определение δ_p на каждом шаге во многих случаях представляет простую операцию. Например, если $\varphi(x) = \| x \|$, то

$$\delta_p = g_p's(t_1, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} g_p'S(t, u)\,dt.$$

Если считать, что операция вычисления $\min\limits_{u \in U} g'S(t, u)$ для каждого g известна, то основная трудность предлагаемой схемы состоит в определении элементов последовательности g_p, $p=1, 2, \ldots$ Определение первого элемента g_1 можно произвести с помощью разбиения множества U или последовательным увеличением интервала регулирования от нуля до заданного. Конкретная схема зависит от вида множества U и в частных случаях описана в [34i].

Пусть $g_1, \ldots, g_{p-1}$ найдены. Для определения g_p применим метод градиента. Введем дополнительные предположения. Будем считать, что для каждого g задачи

$$\min_{u \in U} g' S(t, u), \qquad \max_{\varphi(x) \leq \delta} g' x$$

имеют единственные решения $u(t, g)$ и $x(g)$. Положим $g(\alpha) = g_p + \alpha(\bar{g} - g_p)$, где $\bar{g}$ — произвольный вектор. Значение $\lambda(g, \delta)$ на $g(\alpha)$ обозначим через $\nu(\alpha)$. Имеем

$$\nu(\alpha) = g'(\alpha) s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} g'(\alpha) S(t, u)\, dt - \max_{\varphi(x) \leq \delta} g'(\alpha) x \leqslant$$

$$\leqslant g'(\alpha) s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} g'(\alpha) S(t, u(t, g))\, dt - g'(\alpha) x(g) \leqslant$$

$$\leqslant \nu(0) + \alpha(\bar{g} - g_p)' \left[s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g_p))\, dt - x(g_p) \right].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \nu(\alpha) \geqslant g_p' s(t_1, x_0) &+ \alpha(\bar{g} - g_p)' s(t_1, x_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} g_p' S(t, u(t, g_p))\, dt + \\ &+ \alpha \int_{t_0}^{t_1} (\bar{g} - g_p)' S(t, u(t, g(\alpha)))\, dt - g_p' x(g_p) - \\ &- \alpha(\bar{g} - g_p)' x(g(\alpha)) = \nu(0) + \alpha(\bar{g} - g_p)' \times \\ &\times \left[s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g(\alpha)))\, dt - x(g(\alpha)) \right]. \end{aligned}$$

В силу сделанных предположений

$$\int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g(\alpha)))\,dt \to \int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g_p))\,dt,$$

$$x(g(\alpha)) \to x(g_p) \quad \text{при } \alpha \to 0,$$

$$\left.\frac{d\nu}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = (\bar{g} - g_p)' \left[s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g_p))\,dt - x(g_p) \right].$$

Значит,

$$\frac{\partial\lambda(g_p, \delta)}{\partial g} = s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g_p))\,dt - x(g_p).$$

Следовательно, при достаточно малых α на элементе

$$g_{p+1} = g(\alpha) = g_p + \alpha\left(s(t_1, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} S(t, u(t, g_p))\,dt - x(g_p)\right)$$

выполняется условие

$$\lambda(g_{p+1}, \delta) > \lambda(g_p, \delta).$$

Более точные рекомендации по выбору α приводятся в работах [27, 40а, 64i], где также указаны критерии «останова» процесса. В заключение отметим, что функция $\lambda(g, \delta)$ является вогнутой по g, поэтому опасность появления локальных максимумов в процессе вычисления g_0 исключена.

§ 6. Алгоритм вычисления оптимального управления, основанный на теории игр

Теорема о минимаксе в применении к теории оптимальных процессов трактует каждую задачу оптимального управления как некоторую игру. Поэтому можно обратиться к численным алгоритмам теории игр. Ниже будет описан лишь один, типичный алгоритм.

Пусть требуется минимизировать норму конечного состояния $\| x(t_1) \|$ вдоль траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu,$$

порожденных измеримыми функциями $u(t)$, $t \in T = [0, t_1]$, из выпуклого множества $U(\cdot)$ допустимых управлений. Из результатов § 6.9 следует, что

$$\delta^0 = \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} \|x(t_1)\| = \min_{x\in R} \max_{\|g\|\leqslant 1} g'x = \max_{\|g\|\leqslant 1} \min_{x\in R} g'x. \quad (38)$$

Здесь $R = \{x\colon x = x(t_1) = s(t_1, x_0) + Su(\cdot),\ u(\cdot) \in U(\cdot)\}$. Поэтому выражение $\delta(u, g) = g'x$ можно рассматривать как платежную функцию игры, участники которой имеют стратегии g и $x(t_1) = x(u(\cdot))$. В этой «игре» одна из сторон выбирает функцию $u(\cdot) \in U(\cdot)$, имея целью минимизировать платеж, другая — вектор g, $\|g\| \leqslant 1$, который дает максимальное значение функции платежа. Оптимальные стратегии сторон $u^0(\cdot)$ и g_0 должны удовлетворять неравенствам $\delta(u^0, g) \leqslant \delta(u^0, g_0) \leqslant \leqslant \delta(u, g_0)$ при любых $u(\cdot) \in U(\cdot)$, $\|g\| \leqslant 1$. Величина $\delta^0 = \delta(u^0, g^0)$ является ценой игры.

Для решения задачи (38) применим итеративный метод Брауна — Робинсон, который распространим на непрерывные игры. Опишем этот метод применительно к задаче (37). Решение задачи проводится поэтапно.

А. Выбираем произвольную допустимую функцию $u_1(t)$, $t \in T$, $u_1(\cdot) \in U(\cdot)$. (Если имеются какие-либо априорные сведения о характере оптимального управления, их надо использовать при выборе первого приближения, так как от удачного выбора во многом зависит скорость сходимости процесса. При отсутствии таких сведений можно принять $u_1(\cdot) = 0$.)

Б. Находим g_1 из соотношения

$$g_1'[Su_1(\cdot) + s(t_1, x_0)] = \max_{\|g\|\leqslant 1} g'[Su_1(\cdot) + s(t_1, x_0)].$$

В. Определим промежуточное значение $\bar{u}_2(\cdot)$ функции управления, дающее минимум выражению $g_1'Su(\cdot)$:

$$g_1'S\bar{u}_2(\cdot) = \min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} g_1'Su(\cdot)$$

Г. Второе приближенное значение $u_2(\cdot)$ находим по формуле

$$u_2(\cdot) = \frac{u_1(\cdot) + \bar{u}_2(\cdot)}{2}.$$

Продолжаем аналогичным образом строить последовательности $\{u_m(\cdot)\}$ и $\{g_m\}$, пользуясь рекуррентными формулами

$$u_{m+1}(\cdot)=\frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m} u_k(\cdot)+\bar{u}_{m+1}(\cdot)\right), \tag{39}$$

где $\bar{u}_{m+1}(\cdot)$ таково, что

$$g'_m S\bar{u}_{m+1}(\cdot)=\min_{u(\cdot)\in U(\cdot)} g_m S u(\cdot), \tag{40}$$

$$g_{m+1}=\frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m} g_k+\bar{g}_{m+1}\right), \tag{41}$$

где

$$\bar{g}'_{m+1}[Su_{m+1}(\cdot)+s(t_1, x_0)]=\max_{\|g\|\leqslant 1} g'[Su_{m+1}(\cdot)+s(t_1, x_0)]. \tag{42}$$

Можно доказать, что любые сходящиеся подпоследовательности построенных таким образом последовательностей сходятся к оптимальным стратегиям $u^0(\cdot)$ и g_0. При этом

$$\lim \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g'_k[Su_k(\cdot)+s(t_1, x_0)]=\delta^0.$$

Описанная схема может быть запрограммирована для решения на вычислительных машинах. На каждом шаге итеративного процесса решаются задачи (39) — (42). Задача (41) состоит в нахождении экстремального элемента с единичной нормой в сопряженном пространстве E'_n. Это известная операция функционального анализа. В случае, когда $\|x\|$ — эвклидова норма, вектор g_{m+1} находится нормированием вектора $Su_{m+1}(\cdot)+s(t_1, x_0)$, т. е.

$$\bar{g}_{m+1}=\frac{Su_{m+1}(\cdot)+s(t_1, x_0)}{\|Su_{m+1}(\cdot)+s(t_1, x_0)\|}.$$

Комментарии к главе VIII

1. Проблема построения алгоритмов численного нахождения оптимальных управлений в теории оптимальных процессов является одной из наиболее актуальных. Ввиду чрезвычайной сложности задачи в общем случае различными авторами предложены разнообразные методы улучшения первоначальных управлений [20, 48a, 49, 63b, 132, 133]. Решение последней задачи имеет огромное значение при оптимизации конкретных процессов, ибо в качестве первоначальных управлений обычно берутся управления, найденные из обобщения опыта многих операторов и людей, занятых управлением объекта. Улучшение таких управлений на 10—15% может дать огромный эффект.

2. На каждом шаге значение коэффициента $\varkappa$ в § 1 можно задать в зависимости от значения $g(x(t_1))$. Выбор этой зависимости определяется конкретной задачей.

3. Значение δ_1, при котором предложенный в § 1 алгоритм заведомо улучшает управление, зависит от степени нелинейности задачи по x, y и структуры функций $\varphi(x)$, $g(x)$. Оценки для δ_1 можно получить, исходя из результатов § 6.1. В общем случае эти оценки громоздки и грубы, поэтому они здесь опущены.

4. При решении конкретных задач функции F_1 и F_2 из § 1 могут вычисляться при разных значениях δ_1, что может лишь улучшить результат.

5. Величина ε в § 1 оценивается через константу α, которая зависит от степени нелинейности (от величины вторых производных) задачи по переменным x, y, u. Априорные оценки вторых производных в ходе вычисления могут улучшаться. При оценке ε полезно учитывать структуру функционала.

6. В § 2 при $c_1 > 0$ можно взять $\varepsilon < 0$, т. е. управление (14) при достаточно малых $\varepsilon_1\varepsilon_3$ и ε_2 одновременно уменьшает $\varphi(x(t_1))$ и $g(x(t_1))$. Вообще говоря, выбор ε зависит от конкретной задачи и предыдущих этапов улучшения управления.

7. Принципиальное отличие схем, описанных в §§ 3—5, от схем §§ 1, 2 состоит в том, что в §§ 3—5 операция улучшения управления проводится в пространстве импульсов (переменных ψ, g), в то время как ранее аналогичные операции проводились в пространстве управлений. Схемы последовательных приближений в пространстве импульсов можно найти также в работах [67, 79].

Глава IX

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Данная глава представляет собой самостоятельную часть с собственными определениями и обозначениями.

§ 1. Необходимые условия оптимальности в дискретных системах

1. Введение. Трудности определения оптимальных управлений в серьезных задачах оптимизации приводят к использованию вычислительных устройств дискретного действия. С другой стороны, существуют задачи оптимизации систем, процессы в которых описываются соотношениями типа

$$x(t+1) = f(x(t),\ u(t),\ t).$$

Исследованию оптимальных процессов в дискретных системах посвящен ряд работ. Наиболее общий подход содержится в работе [11b], где задача оптимизации решается с помощью динамического программирования. Имея ряд преимуществ перед другими методами, этот подход, однако, не позволяет в общем случае сформулировать явно те условия, которым необходимо удовлетворяют оптимальные управления. Поэтому, начиная с работы [74b], ведутся поиски необходимых условий оптимальности в форме, аналогичной принципу максимума [109].

Для задачи со свободным правым концом в работе [114b] показано, что оптимальное управление удовлетворяет условию максимума, если дискретная система имеет вид

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + b(u,\ t).$$

Сомнение о возможности распространения принципа максимума на дискретные системы общего вида, высказанное в [114b], было подтверждено в [21b] примером.

Результаты многочисленных работ по теории оптимальных процессов в дискретных системах можно разбить на две группы. Результаты первой группы относятся к попыткам получения необходимых условий оптимальности в общем случае. Был предложен ряд необходимых условий, основная особенность которых состояла в замене глобальной характеристики, даваемой принципом максимума, локальными характеристиками оптимального управления. Соответствующую литературу по работам этой группы можно найти в [122, 124c]. Результаты второй группы относятся к выделению систем, для которых справедлив принцип максимума. Основной результат [110, 160b] этого направления состоит в доказательстве принципа максимума для дискретных систем, у которых множество $\{f(x, u, t), u \in U\}$ обладает определенной выпуклостью. Ниже исследуются как вопросы получения необходимых условий для дискретных систем, так и вопросы выделения дискретных систем, оптимальные управления которых удовлетворяют условию максимума.

2. Обозначения, определения. Пусть изменение вектора $x(t)$, $x(t) \in E_n$, описывающего процесс в дискретной системе, происходит согласно уравнению

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \qquad t \in T = [t_0, t_0+1, \ldots, t_1 - 1], \tag{1}$$

где $u(t) \in E_r$ — вектор управления, t — номер текущего шага (дискретное время), $f(x, u, t)$ — функция, непрерывная по x, u, t, дифференцируемая по x. Обозначим через $U(t)$, $t \in T$, заданное ограниченное замкнутое множество из E_r.

Пусть u_j — элементы из $U(t)$, α_j — числа, $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1$, $j = 1, \ldots, n+1$, $V(t)$ — множество $(r \times (n+1) + n + 1)$-мерных векторов v с компонентами u_j, α_j:

$$V(t) = \left\{u_j, \alpha_j\colon u_j \in U(t), \alpha_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1, j = 1, \ldots, n+1\right\}.$$

Через $W(t)$ обозначим выпуклую оболочку множества $U(t)$: $W(t) =$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{r+1} \beta_j u_j\colon u_j \in U(t), \beta_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{r+1} \beta_j = 1, j = 1, \ldots, r+1\right\}.$$

Введем системы

$$y(t+1)=g(y(t),\ v(t),\ t),\quad y(t_0)=y_0=x_0,\quad y(t)\in E_n,\quad t\in T; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\xi(t-1)=\frac{\partial g'(y(t),\ v(t),\ t)}{\partial y}\xi(t),\ \ \xi(t_1-1)=-c,\ t\in T,\\ &g(y,\ v,\ t)=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j f(y,\ u_j,\ t),\ \ v(t)\in V(t); \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$z(t+1)=f(z(t),\ w(t),\ t),\quad z(t_0)=x_0,\quad z(t)\in E_n,\quad t\in T; \tag{4}$$

$$\zeta(t-1)=\frac{\partial f'(z(t),\ w(t),\ t)}{\partial z}\zeta(t),\quad \zeta(t_1-1)=-c,\quad w(t)\in W(t). \tag{5}$$

Обозначим через $\Omega(t)$ и $\omega(t)$ множества $2n$-векторов, порожденных уравнениями (2), (3) и (4), (5) соответственно при всевозможных $v(s)\in V(s)$, $w(s)\in W(s)$, $s\in T$:

$$\Omega(t)=\{y(t),\ \xi(t):\ v(s)\in V(s),\ s\in T\},$$
$$\omega(t)=\{z(t),\ \zeta(t):\ w(s)\in W(s),\ s\in T\}.$$

Пусть $x\in E_n$, $\psi\in E_n$. Положим

$$U_1(x,\ \psi,\ t)=\{u:\ \psi' f(x,\ u,\ t)=\max_{\tilde u\in U(t)}\psi' f(x,\ \tilde u,\ t),\ u\in U(t)\},$$

$$R(x,\ \psi,\ t)=\{f(x,\ u,\ t):\ u\in U_1(x,\ \psi,\ t)\},$$

$$Q(x,\ \psi,\ w,\ t)=\left\{u:\ \psi'\frac{\partial f(x,\ w,\ t)}{\partial u}u=\max_{\tilde u\in W(t)}\psi'\frac{\partial f(x,\ w,\ t)}{\partial u}\tilde u\right\}.$$

Звездной окрестностью точки x в множестве X назовем множество $\sigma(x,\ X)$, отнеся к нему все точки $y\in X$, обладающие свойством: для каждого y существует последовательность чисел ε_i, $\varepsilon_i>0$, $\varepsilon_i\to 0$, таких, что при достаточно большом m все $y(\varepsilon_i)\in X$, $i\geqslant m$, где $y(\varepsilon_i)= (1-\varepsilon_i)x+\varepsilon_i y$. Если X — выпуклое множество, то $\sigma(x,\ X)=X$ для любой точки $x\in X$. Если множество X e-выпукло *) [167b], то все точки $(1-\mu)x+\mu y+\beta e\in X$, для которых $\beta(x,\ y)=\max$, имеют звездные окрестности, совпадающие с X. Нетрудно построить примеры множеств, точки которых имеют $\sigma(x,\ X)$, состоящую лишь

---

*) Напомним, что множество X называется *e-выпуклым*, если для любых $x,\ y\in X$ и каждого $\mu\in[0,\ 1]$ найдется такое число $\beta\geqslant 0$, что $(1-\mu)x+\mu y+\beta e\in X$.

из одного элемента x. Например: на прямой — $X = \{x\colon x = 1,\ x = -1\}$, на плоскости — $X = \{x, y\colon x^2 + y^2 = 1\}$.

Пусть $u(t), u_1(t) \in U(t),\ t \in T$,— два управления; вектор $\Delta u(t) = u_1(t) - u(t)$ назовем приращением управления $u(t)$. Приращение $\Delta u(t)$ назовем специальным и обозначим его символом $\Delta_{\theta,u^*} u(t)$, если

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \theta, \\ u^* - u(\theta), & u^* \in U(\theta). \end{cases}$$

Управлениям $u(t)$, $u_1(t)$ в силу (1) соответствуют траектории $x(t)$, $x_1(t)$. Вектор $\Delta x(t) = x_1(t) - x(t)$ называется приращением траектории $x(t)$, соответствующим приращению $\Delta u(t)$. Специальному приращению $\Delta_{\theta,u^*} u(t)$ соответствует специальное приращение $\Delta_{\theta,u^*} x(t)$, которое, очевидно, имеет вид

$$\Delta_{\theta,\,u^*} x(t) = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \theta,$$

$$\Delta_{\theta,\,u^*} x(\theta+1) = f(x(\theta), u^*, \theta) - f(x(\theta), u(\theta), \theta),$$

$$\Delta_{\theta,\,u^*} x(t+1) = f(x(t) + \Delta_{\theta,\,u^*} x(t), u(t), t) - \\ - f(x(t), u(t), t), \quad \theta + 1 \leqslant t \leqslant t_1 - 1.$$

Для сокращения письма введем обозначение

$$\Delta_{u^*} f(x, u, t) = f(x, u^*, t) - f(x, u, t).$$

Аналогично определяются Δv, Δy, Δw, Δz и т. д.

3. Основные леммы.

Лемма 1. Пусть управление $v(t) \in V(t)$ и соответствующая траектория $y(t+1)$, $t \in T$, таковы, что существует ненулевой вектор $c \in E_n$, при котором для всех $v^* \in V(\theta)$, $\theta \in T$, выполняется неравенство

$$c' \Delta_{\theta,\,v^*} y(t_1) \geqslant o(\|\Delta_{\theta,\,v^*} y(t_1)\|), \quad o(\alpha) \leqslant k\alpha^2, \quad k \geqslant 0. \qquad (6)$$

Если множество $R(x, \psi, t)$ выпукло на $\Omega(t)$, $t \in T$, то существуют управление $u(t) \in U(t)$, $t \in T$, и соответствующая траектория $x(t)$ уравнения (1), для которых вместе с вектором $\psi(t) \in E_n$ из соотношений

$$\psi(t-1) = \frac{\partial f'(x(t), u(t), t)}{\partial x} \psi(t), \qquad \psi(t_1 - 1) = -c, \qquad (7)$$

при всех $u^* \in U(t)$, $t \in T$, выполняется неравенство

$$\psi'(t) f(x(t), u(t), t) \geqslant \psi'(t) f(x(t), u^*, t). \qquad (8)$$

Лемма 2. Пусть управление $u(t) \in U(t)$, $t \in T$, и траектория $x(t)$ уравнения (1) таковы, что существует ненулевой вектор $c \in E_n$, при котором для всех $u^* \in U(\theta)$, $\theta \in T$, выполняется неравенство

$$c' \Delta_{\theta,\, u^*} x(t_1) \geqslant o(\| \Delta_{\theta,\, u^*} x(t_1) \|). \tag{9}$$

Тогда для $u(t)$, $x(t)$ и $\psi(t)$ из (7) справедливы утверждения:

1) выполняется неравенство (8) для всех $t \in T$ и таких u^*, что

$$f(x(t), u^*, t) \in \sigma(f(x(t), u(t), t), f(x(t), U(t), t));$$

2) если

$$f(x, u, t) = A(u, t)\, x + b(u, t)$$

и величина $o(\alpha)$ в (9) неотрицательна, то для всех $u^* \in U(t)$, $t \in T$, выполняется неравенство (8);

3) выполняется неравенство (8) для всех $u^* \in U(t)$, если $t = t_1 - 1$ и величина $o(\alpha)$ в (9) неотрицательна.

Лемма 3. Пусть $f(x, u, t)$ дифференцируема по u, управление $w(t) \in W(t)$, $t \in T$, и соответствующая траектория $z(t)$ уравнения (4) таковы, что существует ненулевой вектор $c \in E_n$, при котором для всех $w^* \in W(\theta)$, $\theta \in T$, выполняется неравенство

$$c \Delta_{\theta,\, w^*} z(t_1) \geqslant o_1(\| w^* - w(\theta) \|), \quad o_1(\alpha) \leqslant k_1 \alpha^2, \quad k_1 \geqslant 0. \tag{10}$$

Если

1) $Q(z(t), \zeta(t), w(t), t) \subset U(t)$ при $\dfrac{\partial f'(z(t), w(t), t)}{\partial u} \zeta(t) \neq 0$,

2) $w(t) \in U(t)$ при $\dfrac{\partial f'(z(t), w(t), t)}{\partial u} \zeta(t) = 0$,

то существует управление $u(t) \in U(t)$, $t \in T$, для которого вместе с $x(t)$ из (1) и $\psi(t)$ из (7) выполняется при всех $u^* \in U(t)$, $t \in T$, неравенство

$$\psi'(t) \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} u(t) \geqslant \psi'(t) \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} u^*. \tag{11}$$

Лемма 4. Пусть $f(x, u, t)$ дифференцируема по u, управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ таковы, что существует ненулевой вектор $c \in E_n$, при котором для всех

$u^* \in U(\theta)$, $\theta \in T$, выполняется неравенство

$$c'\Delta_{\theta,\, u^*} x(t_1) \geqslant o_1(\| u^* - u(\theta) \|).$$

Тогда для $u(t)$, $x(t)$ и $\psi(t)$ из (7) справедливы утверждения:

1) выполняется (11) для $u^* \in \sigma(u(t), U(t))$, $t \in T$,
2) выполняется соотношение

$$\psi'(t) \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} = 0,$$

если $u(t)$ — внутренняя точка множества $U(t)$.

Доказательство леммы 1. Из очевидного тождества

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t) \Delta y(t+1) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t-1) \Delta y(t) + \xi'(t_1-1) \Delta y(t_1) - \xi'(t_0-1) \Delta y(t_0)$$

в силу $\Delta y(t_0) = 0$, $\xi(t_1 - 1) = -c$ имеем

$$c'\Delta y(t_1) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t) \Delta y(t+1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t-1) \Delta y(t).$$

Подставим сюда значения $\Delta y(t+1)$, $\xi(t-1)$ из определяющих их уравнений

$$c'\Delta y(t_1) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t) g(y_1(t), v_1(t), t) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t) g(y(t), v(t), t) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t) \frac{\partial g(y(t), v(t), t)}{\partial y} \Delta y(t).$$

В правую часть добавим выражение $\xi'(t) g(y(t), v_1(t), t) - \xi'(t) g(y(t), v_1(t), t)$ и используем разложение

$$\xi'(t)[g(y_1(t), v_1(t), t) - g(y(t), v_1(t), t)] = \\ = \xi'(t) \frac{\partial g(y(t), v_1(t), t)}{\partial y} \Delta y(t) + o_2(\| \Delta y(t) \|),$$

$$o_2(\alpha) \leqslant k_2 \alpha^2, \quad k_2 \geqslant 0.$$

В результате получим

$$c'\Delta y(t_1) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t)\,\Delta_{v_1(t)} g(y(t), v(t), t) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \xi'(t)\frac{\partial \Delta_{v_1(t)} g(y(t), v(t), t)}{\partial y}\Delta y(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta y(t)\|). \quad (12)$$

Пусть $\Delta v(t)$ — специальное приращение. Тогда с учетом (6) получим для всех $v^* \in V(\theta)$, $\theta \in T$:

$$-\xi'(\theta)\,\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta) -$$

$$-\sum_{t=\theta+1}^{t_1-1} o_2(\|\Delta_{\theta, v^*} y(t)\|) \geqslant o(\|\Delta_{\theta, v^*} y(t_1)\|). \quad (13)$$

Используем оценки для $o_2(\alpha)$, $o(\alpha)$. Имеем

$$\xi'(\theta)\,\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta) \leqslant$$

$$\leqslant k\|\Delta_{\theta, v^*} y(t_1)\|^2 + k_2 \sum_{t=\theta+1}^{t_1-1} \|\Delta_{\theta, v^*} y(t)\|^2.$$

Из уравнения для $\Delta_{\theta, v^*} y(t)$ нетрудно получить оценку

$$\|\Delta_{\theta, v^*} y(t)\| \leqslant k_3 \|\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta)\|, \quad t \geqslant \theta + 1.$$

Поэтому для всех $v^* \in V(\theta)$, $\theta \in T$, имеем

$$\xi'(\theta)\,\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta) \leqslant k_4 \|\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta)\|^2, \quad (14)$$

$$k_4 = k + k_2 k_3^2 (t_1 - t_0).$$

Множество $\{\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta)\colon v^* \in V(\theta)\}$ по определению выпукло и содержит начало координат. Отсюда следует, что

$$\xi'(\theta)\,\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta) \leqslant 0 \quad (15)$$

при всех $v^* \in V(\theta)$, $\theta \in T$. Действительно, допустим противное, и пусть θ — момент из T, v^* — управление из $V(\theta)$, при которых $\xi'(\theta)\,\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta) = \eta > 0$. Построим управление v_ε:

$$\Delta_{v_\varepsilon} g(y(\theta), v(\theta), \theta) = \varepsilon \Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta), \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно, $v_\varepsilon \in V(\theta)$ и $\xi'(\theta)\,\Delta_{v_\varepsilon} g(y(\theta), v(\theta), \theta) = \varepsilon\eta > 0$. Подставим v_ε в (14). Имеем

$$\varepsilon\eta \leqslant k_4 \varepsilon^2 \|\Delta_{v^*} g(y(\theta), v(\theta), \theta)\|^2.$$

Последнее неравенство должно выполняться для всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, что невозможно. Из (15) имеем

$$\xi'(\theta) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\theta) f(y(\theta), u_i(\theta), \theta) = \\ = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\theta) \max_{u_i \in U(\theta)} \xi'(\theta) f(y(\theta), u_i, \theta).$$

Таким образом, каждое $u_i(\theta)$, $i = 1, \ldots, n+1$, удовлетворяет условию

$$\xi'(\theta) f(y(\theta), u_i(\theta), \theta) = \max_{u \in U(\theta)} \xi'(\theta) f(y(\theta), u, \theta)$$

и, следовательно, принадлежит множеству $U_1(y(\theta), \xi(\theta), \theta)$. По предположению множество $R(y(\theta), \xi(\theta), \theta)$ выпукло, поэтому $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\theta) f(y(\theta), u_i(\theta), \theta) \in R(y(\theta), \xi(\theta), \theta)$, т. е. существует такой вектор $u(\theta) \in U(\theta)$, что

$$f(y(\theta), u(\theta), \theta) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\theta) f(y(\theta), u_i(\theta), \theta).$$

Управление $u(\theta)$, $\theta \in T$, порождает траекторию $x(\theta) = y(\theta)$ и удовлетворяет в силу (15) условию

$$\xi'(\theta) f(x(\theta), u(\theta), \theta) = \max_{u \in U(\theta)} \xi'(\theta) f(x(\theta), u, \theta), \quad \theta \in T.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Неравенство (14) доказано для (2), (3), поэтому оно справедливо и для частного случая (1), (7):

$$\psi'(\theta) \Delta_{u^*} f(x(\theta), u(\theta), \theta) \leqslant k_4 \| \Delta_{u^*} f(x(\theta), u(\theta), \theta) \|^2, \\ u^* \in U(\theta), \quad \theta \in T. \qquad (16)$$

Пусть u^* таково, что $f(x(\theta), u^*, \theta) \in \sigma(f(x(\theta), u(\theta), \theta), f(x(\theta), U(\theta), \theta))$. Докажем, что

$$\psi'(\theta) \Delta_{u^*} f(x(\theta), u(\theta), \theta) \leqslant 0.$$

В противном случае найдется последовательность $\varepsilon_i \to 0$, $\varepsilon_i > 0$ и число m такие, что $f(x(\theta), u(\varepsilon_i), \theta) \in f(x(\theta), U(\theta), \theta)$ при $i \geqslant m$, $\psi'(\theta) \Delta_{u(\varepsilon_i)} f(x(\theta), u(\theta), \theta) = \varepsilon_i \eta$. Здесь $u(\varepsilon_i)$ таковы, что $f(x(\theta), u(\varepsilon_i), \theta) = (1 - \varepsilon_i) f(x(\theta), u(\theta), \theta) + \varepsilon_i f(x(\theta), u^*, \theta)$, $\eta = \psi'(\theta) \Delta_{u^*} f(x(\theta), u(\theta), \theta) > 0$. Очевидно, $u(\varepsilon_i) \in U(\theta)$ при $i \geqslant m$. Подставляя $u(\varepsilon_i)$ в (16) вместо u^*, получим неравенство $\varepsilon_i \eta \leqslant k_4 \varepsilon_i^2 \| \Delta_{u^*} f(\theta) \|^2$, которое должно выполняться для всех ε_i, $i \geqslant m$. Последнее невозможно, ибо $\varepsilon_i \to 0$. Утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) следует из (13), если последнее переписать для системы (1), (7) и учесть, что $o_2(\| \Delta_{\theta, u^*} x(t) \|) \equiv 0$ в силу линейности по x функции $f(x, u, t)$; $o(\| \Delta_{\theta, u^*} x(t_1) \|) \geqslant 0$ по предположению.

Утверждение 3) также следует из (13), если положить $\theta = t_1 - 1$ и учесть, что $o(\| \Delta_{\theta, u^*} x(t_1) \|) \geqslant 0$. Лемма 2 полностью доказана.

Доказательство леммы 3. Нетрудно проверить, что тождество (12) сохранится, если заменить y, ξ, v на z, ζ, w соответственно. Введем специальное приращение управления $w(t)$. Тогда с учетом (10) имеем

$$-\zeta'(\theta) \Delta_{w^*} f(z(\theta), w(\theta), \theta) - \sum_{t=\theta+1}^{t_1-1} o_2(\| \Delta_{\theta, w^*} z(t) \|) \geqslant o_1(\| w^* - w \|)$$

для всех $w^* \in W(\theta)$, $\theta \in T$. В силу дифференцируемости по u функции $f(z, u, t)$ получаем

$$\zeta'(\theta) \Delta_{w^*} f(z(\theta), w(\theta), \theta) = \zeta'(\theta) \frac{\partial f(z(\theta), w(\theta), \theta)}{\partial w} (w^* - w(\theta)) + o_3(\| w^* - w(\theta) \|),$$

$$\| \Delta_{w^*} f(z(\theta), w(\theta), \theta) \| \leqslant k_5 \| w^* - w(\theta) \|, \quad o_3(\alpha) \leqslant k_6 \alpha^2.$$

Поэтому

$$\zeta'(\theta) \frac{\partial f(z(\theta), w(\theta), \theta)}{\partial w} (w^* - w(\theta)) \leqslant k_4 \| w^* - w(\theta) \|^2, \tag{17}$$

где $k_7 = k_1 + k_6 + k_2 k_3^2 k_5^2 (t_1 - t_0)$, а k_3 таково, что

$$\| \Delta_{\theta, w^*} z(t) \| \leqslant k_3 \| \Delta_{w^*} f(z(\theta), w(\theta), \theta) \|.$$

Отсюда, как при доказательстве (15) в лемме 1, получаем

$$\zeta'(\theta) \frac{\partial f(z(\theta), w(\theta), \theta)}{\partial w} [w^* - w(\theta)] \leqslant 0. \tag{18}$$

По условию леммы 3 $w(\theta) \in U(\theta)$, если

$$\zeta'(\theta) \frac{\partial f(z(\theta), w(\theta), \theta)}{\partial w} = 0 \quad \text{и} \quad Q(z(\theta), \zeta(\theta), w(\theta), \theta) \subset U(\theta),$$

если $\zeta'(\theta)\dfrac{\partial f(z(\theta), w(\theta), \theta)}{\partial w} \neq 0$. Поэтому существует функция $u(\theta) \in U(\theta)$, которой соответствуют траектории $x(t)$, $\psi(t)$ и которая, согласно (18), удовлетворяет требуемому неравенству (11). Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Утверждение 1) доказывается по той же схеме, что и утверждение 1) леммы 2. Утверждение 2) является непосредственным следствием утверждения 1).

4. Необходимые условия оптимальности в задаче со свободным концом (задача A). Введем скалярные функции

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t), \qquad H_1(y, \xi, v, t) = \xi' g(y, v, t).$$

Тогда уравнения (1), (7), (2), (3), (4), (5) можно записать в следующем виде:

$$x(t+1) = \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial \psi}, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{19}$$

$$\psi(t-1) = \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \qquad \psi(t_1) = -c, \tag{20}$$

$$y(t+1) = \frac{\partial H_1(y, \xi, v, t)}{\partial \xi}, \qquad y(t_0) = x_0, \tag{21}$$

$$\xi(t-1) = \frac{\partial H_1(y, \xi, v, t)}{\partial y}, \qquad \xi(t_1-1) = -c, \tag{22}$$

$$z(t+1) = \frac{\partial H(z, \zeta, w, t)}{\partial \zeta}, \qquad z(t_0) = x_0, \tag{23}$$

$$\zeta(t-1) = \frac{\partial H(z, \zeta, w, t)}{\partial z}, \qquad \zeta(t_1-1) = -c. \tag{24}$$

Пусть $\varphi(x)$ — скалярная функция, определенная и непрерывная на E_n вместе с grad $\varphi(x)$. Управление $u(t)$ ($v(t)$, $w(t)$) будем называть допустимым, если $u(t) \in U(t)$ (соответственно $v(t) \in V(t)$, $w(t) \in W(t)$).

Под задачей A оптимизации системы (19) в дальнейшем понимается задача определения допустимого (оптимального) управления $u(t)$, $t \in T$, при котором критерий качества

$$J(u) = \varphi(x(t_1))$$

системы (19) принимает наименьшее значение, т. е.

$$J(u) \leqslant J(\tilde{u}), \qquad \tilde{u}(t) \in U(t), \qquad t \in T.$$

Первой обобщенной задачей A (задача $1OA$) назовем задачу минимизации функции $\varphi(y(t_1))$ на траекториях уравнения (21), порожденных управлениями $v(t) \in V(t)$, $t \in T$.

Минимизацию функции $\varphi(z(t_1))$ на траекториях уравнения (23), порожденных управлениями $w(t) \in W(t)$, $t \in T$, назовем *второй обобщенной задачей* A (задача $2OA$).

Задачу A назовем *невырожденной*, если на оптимальной траектории $x(t)$ выполняется условие $\operatorname{grad}\varphi(x(t_1)) \neq \neq 0$. Аналогично определяется невырожденность задач $1OA$, $2OA$.

Определения.

1. Управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет первому условию максимума, если для него совместно с $x(t)$, $\psi(t)$ из (19), (20) при всех $u^* \in U(t)$, $t \in T$, выполняется неравенство

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) \geqslant H(x(t), \psi(t), u^*, t). \tag{25}$$

2. Управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет второму условию максимума, если для него и соответствующих ему $x(t)$, $\psi(t)$ из (19), (20) при всех $u^* \in U(t)$, $t \in T$, выполняется неравенство

$$u'(t)\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \geqslant (u^*)'\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u}. \tag{26}$$

3. Управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет первому условию локального максимума, если для него и соответствующих ему $x(t)$, $\psi(t)$ из (19), (20) выполняется неравенство (25) при $t \in T$ и u^* таких, что $f(x(t), u^*, t) \in \in \sigma(f(x(t), u(t), t), f(x(t), U(t), t))$.

4. Управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет второму условию локального максимума, если для него и соответствующих ему $x(t)$, $\psi(t)$ из (19), (20) выполняется неравенство (26) при $t \in T$, $u^* \in \sigma(u(t), U(t))$.

Пусть теперь $u(t)$, $t \in T$,— оптимальное управление. Тогда для любого $\tilde{u}(t)$, $t \in T$, имеем

$$\varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) \geqslant 0$$

и из разложения

$$\varphi(\tilde{x}(t_1)) = \varphi(x(t_1)) + \\ + \Delta x'(t_1)\operatorname{grad}\varphi(x(t_1)) - o(\|\Delta x(t_1)\|)$$

следует

$$\Delta x'(t_1)\operatorname{grad}\varphi(x(t_1)) \geqslant o(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Если задача A невырождена, то при специальном приращении управления $u(t)$ отсюда получается неравенство (9). Аналогично из оптимальности управления $v(t)$, $t \in T$, следует неравенство (6) при $c = \operatorname{grad} \varphi(y(t_1))$, причем c — ненулевой вектор, если задача $1OA$ невырождена. Наконец, считая $w(t)$, $t \in T$, оптимальным, нетрудно получить (10), где $c = \operatorname{grad} \varphi(z(t_1))$, и $c \neq 0$ в невырожденной задаче $2OA$.

Исходя из этих замечаний и лемм 1—4, сформулируем следующие теоремы, содержащие необходимые условия оптимальности управлений задачи A для дискретной системы (1).

Теорема 1. Пусть задача $1OA$ невырождена и множество $R(x, \psi, t)$ выпукло на $\Omega(t)$, $t \in T$. Тогда существует оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, задачи A, которое удовлетворяет первому условию максимума; $c = \operatorname{grad} \varphi(x(t_1))$.

Теорема 2. Если задача A невырождена, то оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет: 1) первому условию локального максимума, 2) первому условию максимума, если

$$f(x, u, t) = A(u, t)\,x + b(u, t)$$

и функция $\varphi(x)$ вогнута, 3) условию

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) \geqslant H(x(t), \psi(t), u^*, t),$$
$$t = t_1 - 1, \quad u^* \in U(t_1 - 1),$$

если функция $\varphi(x)$ вогнута.

Теорема 3. Пусть $f(x, u, t)$ дифференцируема по u, задача $2OA$ невырождена и выполнены условия 1), 2) леммы 3. Тогда существует оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, задачи A, которое удовлетворяет второму условию максимума.

Теорема 4. Если функция $f(x, u, t)$ дифференцируема по u, задача A невырождена, то оптимальное управление удовлетворяет: 1) второму условию локального максимума, $c = \operatorname{grad} \varphi(x(t_1))$; 2) равенству

$$\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} = 0,$$

если $u(t)$ — внутренняя точка множества $U(t)$, $c = \operatorname{grad} \varphi(x(t_1))$.

5. Обсуждение теорем 1—4. Примеры. a) Необходимое условие оптимальности в форме первого условия максимума в задаче A для уравнения

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + b(u, t)$$

и критерия качества $\varphi(x) = c'x$ получено впервые в [114b]. В работе [110] показано, что первое условие максимума имеет место для дискретных систем (1), если множество $f(x, U, t)$ выпукло, ограничено, замкнуто. Эти результаты следуют из теоремы 2.

Из приведенных в теоремах 1—4 необходимых условий оптимальности наиболее сильным является первое условие максимума. Наличие у данной системы этого свойства позволяет первоначальную задачу минимизации размерности $[t_1 - t_0] \times r$ свести к $t_1 - t_0$ задачам максимизации размерности r. В общем случае для дискретных систем первое условие максимума не выполняется. Это было показано в [21b] построением довольно сложного примера. Следующий пример достигает той же цели проще.

Пример 1.

$$x(t+1) = \frac{1}{2}u(t), \quad y(t+1) = y(t) + x^2(t) - u^2(t), \quad t = 0,\ 1,$$
$$x(0) = y(0) = 0, \quad |u| \leqslant 1, \quad \varphi(x, y) = y, \quad t_0 = 0,\ t_1 = 2.$$

Имеем

$$J(u) = -\frac{3}{4}u^2(0) - u^2(1).$$

Управление $\{u(0) = 1,\ u(1) = 1\}$ оптимально. Для него: $\psi_2(1) = -1$, $\psi_2(0) = -1$, $\psi_1(1) = 0$, $\psi_1(0) = -1$, $H(x(0), y(0), \psi(0), u, 0) = -\frac{1}{2}u + u^2$. Точка $u = 1$ не является точкой максимума последней функции.

b) Первое условие максимума не выполняется в общем случае и для дискретных систем, которые являются разностной аппроксимацией непрерывных систем.

Пример 2.

$$x(t+1) = x(t) + \frac{1}{2}u(t), \quad y(t+1) = y(t) + x^2(t) - u^2(t).$$

При условиях примера 1 получается картина, тождественная с предыдущей.

c) В работе [21b] в качестве основного необходимого условия оптимальности для дискретных систем предложен принцип локального максимума, по которому функция $H(x, \psi, u, t)$ на оптимальном управлении достигает локального максимума. В примерах 1, 2 это условие выполняется. Однако, в общем случае этот принцип не имеет места.

Пример 3.

$$x(t+1) = 2u(t), \quad y(t+1) = y(t) + x^2(t) - u^2(t),$$
$$x(0) = y(0) = 0, \quad |u| \leqslant 1, \quad \varphi(x, y) = y, \quad t_0 = 0, \ t_1 = 2.$$

Имеем

$$J(u) = y(2) = 3u^2(0) - u^2(1), \quad |u| \leqslant 1.$$

Для оптимального управления $\{u(0) = 0, \ u(1) = 1\}$ получаем

$$H(x(0), \quad \psi(0), u, 0) = u^2.$$

Эта функция в точке $u = 0$, соответствующей оптимальному управлению, достигает абсолютного минимума.

Пример 4.

$$x(t+1) = u(t) \sin\frac{\pi}{2} u(t), \ \ y(t+1) = u(t) \cos\frac{\pi}{2} u(t),$$
$$z(t+1) = z(t) + x^2(t) + y^2(t) - u^2(t),$$
$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \ |u| \leqslant 1, \ \varphi(x, y, z) = z, \ t_0 = 0, \ t_1 = 2.$$

Нетрудно подсчитать, что управление $\{u(0) = 0, u(1) = 1\}$ оптимально, и функция $H(x(0), y(0), z(0), \psi_1(0), \psi_2(0), \psi_3(0), u, 0) = u^2$ достигает в точке $u = 0$ абсолютного минимума.

Пример 5.

$$x(t+1) = v(t) \sin\frac{\pi}{2} u(t), \ \ y(t+1) = v(t) \cos\frac{\pi}{2} u(t),$$
$$z(t+1) = z(t) + x^2(t) + y^2(t) + u^2(t) - v^2(t),$$
$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1, \quad \varphi(x, y, z) = z,$$
$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2.$$

Подсчитаем $J(u)$: $J(u) = z(2) = u^2(0) + u^2(1) - v^2(1)$. Для оптимального управления $\{u(0) = 0, \ v(0) = 0, u(1) = 0, v(1) = 1\}$ имеем $H(x(0), \psi(0), u, 0) = u^2 - v^2$. Последняя функция в точке $u = 0, \ v = 0$ имеет седловую точку.

d) Иногда принцип локального максимума заменяют на другое основное необходимое условие оптимальности, из которого, в частности, делают вывод, что среди точек, где функция $H(x, \varphi, u, t)$ не дифференцируема по u, заведомо не оптимальны те, в которых функция H достигает локального минимума. Это не всегда верно.

Пример 6.

$$x(t+1) = 2\sqrt{|u(t)|}, \quad y(t+1) = y(t) + x^2(t) - |u(t)|,$$
$$x(0) = y(0) = 0, \quad |u| \leqslant 1, \quad \varphi(x, y) = y,$$
$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2.$$

Получаем

$$J(u) = y(z) = 3\,|u(0)| - |u(1)|.$$

Для оптимального управления $\{u(0) = 0, \ u(1) = 1\}$ имеем

$$H(x, \psi, u, 0) = |u|.$$

Функция H в точке $u = 0$, соответствующей оптимальному управлению, не дифференцируема, достигает там абсолютного минимума. Аналогичная ситуация возникает, если рассмотреть

Пример 7.

$$x(t+1) = \sqrt{|u(t)|}\sin\frac{\pi}{2}u(t), \quad y(t+1) = \sqrt{|u(t)|}\cos\frac{\pi}{2}u(t),$$
$$z(t+1) = z(t) + x^2(t) + y^2(t) - |u(t)|,$$
$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad |u| \leqslant 1,$$
$$\varphi(x, y, z) = z, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 2.$$

e) В некоторых работах основное необходимое условие оптимальности для дискретных систем формулируется следующим образом: функция H на оптимальных $u(t)$ стационарна или достигает локального максимума. Предыдущие примеры не противоречат этому выводу. Однако в общем случае он неверен.

Пример 8.

$$x(t+1) = u(t), \quad y(t+1) = y(t) + x^2(t),$$
$$x(0) = y(0) = 0, \quad u = \pm 1, \quad \varphi(x, y) = y,$$
$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2.$$

Получаем

$$J(u) = y\,(2) = u^2\,(0).$$

Для оптимального управления $u\,(0) = 1$ имеем

$$x\,(1) = 1, \quad \psi_2\,(1) = -1, \quad \psi_2\,(0) = -1,$$
$$\psi_1\,(1) = 0, \quad \psi_1\,(0) = -2,$$
$$H\,(x\,(0),\ y\,(0),\ \psi_1\,(0),\ \psi_2\,(0),\ u,\ 0) = -2u.$$

Последняя функция в точке $u = 1$, соответствующей оптимальному управлению, не имеет стационарного значения и не достигает локального максимума.

Такой же вывод мы получим, если рассмотрим

Пример 9.

$$x\,(t+1) = u\,(t), \quad y\,(t+1) = v\,(t),$$
$$z\,(t+1) = z\,(t) + x^2\,(t) + y^2\,(t),$$
$$x\,(0) = y\,(0) = z\,(0) = 0, \quad (u-1)^2 + (v+1)^2 \geqslant 8,$$
$$(u-2)^2 + (v+2)^2 \leqslant 18, \quad \varphi\,(x,\ y,\ z) = z,$$
$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2.$$

На примере 8 можно убедиться, что необходимые условия оптимальности в дискретных системах с квантованными по уровню управлениями имеют свои особенности.

f) Второе условие максимума, как показывают примеры 8, 9, выполняется не для всех дискретных систем.

g) Первое и второе условия локального максимума теряют содержательное значение, если звездные окрестности состоят лишь из оптимальных управлений (примеры 3—9).

h) Утверждение 2) теоремы 4 может выполняться и для u, лежащих на границе множества $U\,(t)$.

6. Об одной частной задаче (задача B). Под задачей B в дальнейшем понимается частный случай задачи A, когда: 1) правые части первых $n-1$ уравнений системы (1) не содержат координаты x_n, 2) функция $f_n\,(x,\ u,\ t)$ имеет вид

$$f_n\,(x,\ u,\ t) = x_n + f_{1n}\,(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ u,\ t),$$

3) функция $\varphi\,(x) = x_n + \varphi_1\,(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$.

При рассмотрении задачи B условимся n-вектор обозначать символом $\overline{x}$, $(n-1)$-вектор, составленный из первых $n-1$ компонент вектора $\overline{x}$,— символом x. При этих условиях нетрудно проверить, что $\psi_n(t) \equiv -1$, $t \in T$. Поэтому уравнения для $\psi(t)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\psi(t-1) &= \frac{\partial \mathscr{H}(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x},\\ \psi(t_1-1) &= -\operatorname{grad}\varphi_1(x(t_1)),\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\mathscr{H}(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - f_{1n}(x, u, t). \tag{28}$$

В задаче B множества $\Omega(t)$, $\omega(t)$, состоят лишь из таких $\overline{\psi}$, для которых $\psi_n = -1$. Поэтому проверку условий теоремы 1, 3 достаточно провести для $\overline{\psi}$ с $\psi_n = -1$. Отсюда сразу следует, что первое условие максимума выполняется для систем, у которых: 1) функция $f(x, u, t)$ линейна по u, 2) функция $f_{1n}(x, u, t)$ выпукла по u, 3) множество U выпукло.

Назовем функцию $\alpha(x)$ сильно выпуклой с коэффициентом l, если она дифференцируема и величина $o_3(\|\Delta x\|)$ в разложении

$$\alpha(x+\Delta x) - \alpha(x) = \Delta x' \operatorname{grad} \alpha(x) + o_3(\|\Delta x\|)$$

удовлетворяет условию

$$o_3(\|\Delta x\|) \geqslant l\,\|\Delta x\|^2.$$

Теорема 5. Пусть: 1) функция $f(x, u, t)$ дифференцируема по u и величина $o_4(\|\Delta u\|)$ в разложении

$$\psi' f(x, u+\Delta u, t) - \psi' f(x, u, t) = \psi' \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u}\Delta u + o_4(\|\Delta u\|)$$

удовлетворяет неравенству

$$o_4(\|\Delta u\|) \leqslant l_1\,\|\Delta u\|^2;$$

2) функция $f_{1n}(x, u, t)$ сильно выпукла по u с коэффициентом l; 3) множество U выпукло. Тогда в задаче B с $l \geqslant l_1$ оптимальное управление удовлетворяет первому условию максимума.

Доказательство. При условиях теоремы функция $H(x, \psi, u, t)$ вогнута по u, поэтому второе условие максимума, которому в силу теоремы 4 удовлетворяет оптимальное управление, совпадает с первым условием максимума.

Примечания. 1. Оценку величины l_1 нетрудно получить из оценок для ψ и вторых производных $\partial^2 f/\partial u^2$, если последние существуют.

2. Предположение о дифференцируемости по u функций $f(x, u, t)$, $f_{1n}(x, u, t)$ можно снять (см. ниже), если понятие сильной выпуклости и нелинейности функций ввести по [107].

Другая общая схема выделения дискретных систем, в которых выполняется первое условие максимума, получается из рассмотрения задачи $1OA$. При доказательстве леммы 1 было показано, что каждое оптимальное управление $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n+1$; $t \in T$, этой задачи удовлетворяет условию максимума

$$\xi'(t) f(x(t), u_i(t), t) = \max_{u \in U(t)} \xi'(t) f(x, u, t).$$

Поэтому в дискретных системах, для которых функция $\xi' f(x, u, t)$, $\{x, \xi\} \in \Omega(t)$, достигает максимума по u в единственной точке, оптимальное управление удовлетворяет первому условию максимума. Отсюда сразу следует теорема 5 при $l > l_1$, так как рассматриваемая функция $\mathscr{H}$ при этих условиях сильно вогнута и достигает максимума в единственной точке. Кстати, при этих условиях предположение об ограниченности множества $U(t)$ является лишним.

При исследовании задачи B нетрудно выделить дискретные системы, для которых второе условие максимума выполняется и при невыпуклых $U(t)$. Введем множества

$$N_t = \left\{ -\frac{\partial f_{1n}(z, w, t)}{\partial w}, \quad z \in \Omega(t), \; w \in W(t) \right\},$$

$$Q_1(l_2, t) = \{\bar{w}\colon (\nu + \mu)' \bar{w} = \max_{w^* \in W(t)} (\nu + \mu)' w^*, \; \nu \in N_t, \; \|\mu\| \leqslant l_2\}.$$

Теорема 6. Пусть: 1) задача $2OB$ невырождена; 2) функции $f(x, u, t)$, $f_{1n}(x, u, t)$ дифференцируемы по u; 3) $\left\| \zeta' \frac{\partial f(z, w, t)}{\partial w} \right\| \leqslant l_3$; 4) $Q_1(l_2, t) \subset U(t)$. Тогда при $l_2 \geqslant l_3$ оптимальное управление в задаче B удовлетворяет второму условию максимума.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 3, так как при сделанных предположениях выполняются условия последней теоремы.

Примечание. Оценки в теореме 6 значительно упрощаются, если

$$f_{1n}(x, u, t) = f_2(x, t) + bu, \quad f(x, u, t) = f_3(x, t) + Bu.$$

В этом случае множество N_t состоит из одного элемента b, условие 3) имеет вид: $\|\zeta' B\| \leqslant l_3$. Грубо говоря, условия теоремы 6 будут выполнены, если $U(t)$ обладает e-выпуклостью, где e — любой вектор из окрестности элемента b.

§ 2. Выделение класса дискретных систем, для которых выполняется принцип максимума

Из формулы (12) для задачи 10A получаем

$$\Delta J(v) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(y, \xi, v_1, t) - H(y, \xi, v, t)] - \\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta y'(t)\left[\frac{\partial H(y, \xi, v_1, t)}{\partial y} - \frac{\partial H(y, \xi, v, t)}{\partial y}\right] - \\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta y(t)\|) - o(\|\Delta y(t_1)\|).$$

Для задачи 10B формула приращения функции $J(v)$ имеет вид

$$\Delta J(v) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\mathcal{H}(y, \xi, v_1, t) - \mathcal{H}(y, \xi, v, t)] - \\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta y'(t)\left[\frac{\partial \mathcal{H}(y, \xi, v_1, t)}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}(y, \xi, v, t)}{\partial y}\right] - \\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2'(\|\Delta y(t)\|) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2''(\|\Delta y(t)\|) - o(\|\Delta y(t_1)\|),$$

где величины o_2' и o_2'' находятся из разложений

$$\xi'[g(y+\Delta y, v_1, t) - g(y, v_1, t)] = \xi' \frac{\partial g(y, v_1, t)}{\partial y}\Delta y + o_2',$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i[f_{1n}(y+\Delta y, u_{i1}, t) - f_{1n}(y, u_{i1}, t)] = \\ = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i \frac{\partial f_{1n}'(y, u_{i1}, t)}{\partial y}\Delta y + o_2''.$$

Пусть функция $f_{1n}(x, u, t)$ сильно вогнута по x с коэффициентом l_4, т. е. $o_2''(\|\Delta y\|) \leqslant -l_4\|\Delta y\|^2$, $l_4 = \mathrm{const}$, $l_4 \geqslant 0$, функция $f(x, u, t)$ слабо нелинейна по x, т. е. $o_2'(\|\Delta y\|) \leqslant l_5\|\Delta y\|^2$, l_5 мало. Тогда при $l_4 \geqslant l_5$ выражение $\sum\limits_{t=t_0}^{t_1-1} o_2' + o_2''$ оказывается отрицательным. Считая, кроме того, функцию $\varphi(x)$ вогнутой $[o(\|\Delta y\|) \geqslant 0]$, соответственно получаем

$$\Delta J(v) \leqslant -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\mathscr{H}(y, \xi, v_1, t) - \mathscr{H}(y, \xi, v, t)] - \\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta y'(t)\left[\frac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, v_1, t)}{\partial y} - \frac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, v, t)}{\partial y}\right]. \quad (29)$$

В качестве управления $v_1(t)$ возьмем одно из управлений $\{u_i(t), \alpha_i(t)\}$. Точнее, полагаем

$$v_1(t) = \begin{cases} u_j(t),\ \alpha_j(t) = 1, \text{ если} \\ \qquad \Delta y'(t)\left[\dfrac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, u_j, \alpha_j, t)}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, v, t)}{\partial y}\right] > 0, \\ u_l(t),\ \alpha_l(t) = 1,\ l \text{ — любое из } 1, \ldots, n+1, \text{ если} \\ \qquad \Delta y'(t)\dfrac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, u_l, \alpha_l = 1, t)}{\partial y} = 0,\quad u_l(t) \in U(t). \end{cases}$$

Для каждого $t \in T$ найдется индекс $j = j(t)$, при котором указанный выбор $v_1(t)$ возможен. Действительно,

$$\Delta y'(t)\left[\frac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, u_k, \alpha_k = 1, t)}{\partial y} - \frac{\partial\mathscr{H}(y, \xi, v, t)}{\partial y}\right] = \\ = \Delta y'(t)\left[\frac{\partial f'(y, u_k, t)}{\partial y}\xi' - \frac{\partial f_{1n}(y, u_k, t)}{\partial y} - \right. \\ \left. -\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\frac{\partial f'(y, u_i, t)}{\partial y}\xi + \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\frac{\partial f_{1n}(y, u_i, t)}{\partial y}\right], \\ k = 1, \ldots, n+1.$$

Умножим эти равенства на $\alpha_k(t)$ и просуммируем по k от 1 до $n+1$. Справа, очевидно, получится нуль. Поэтому при

$$\Delta y'(t) \frac{\partial \mathscr{H}(y, \xi, u_l, \alpha_l = 1, t)}{\partial y} \not\equiv 0$$

среди

$$\Delta y'(t) \left[\frac{\partial \mathscr{H}(y, \xi, u_k, \alpha_k = 1, t)}{\partial y} - \frac{\partial \mathscr{H}(y, \xi, v, t)}{\partial y} \right],$$
$$k = 1, \ldots, n+1,$$

найдутся как положительные, так и отрицательные величины.

Допустим, что $v(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление. Тогда (см. доказательство леммы 1) каждое $u_k(t)$, $t \in T$, $k = 1, \ldots, n+1$, удовлетворяет условию максимума и поэтому

$$\mathscr{H}(y, \xi, u_k, \alpha_k = 1, t) \not\equiv \mathscr{H}(y, \xi, v, t), \quad t \in T.$$

Подставляя управление $u_j(t)$, $\alpha_j(t) = 1$ в неравенство (29), получим $\Delta J(v) \leqslant 0$, что указывает на оптимальность построенного управления $u_j(t)$, $\alpha_j(t) = 1$ в задаче B. Этот результат сформулируем в виде утверждения.

Теорема 7. Пусть задача $1OB$ не выраждена, функция $f_{1n}(x, u, t)$ сильно вогнута по x с коэффициентом l_4, функция $\varphi(x)$ вогнута, функция $f(x, u, t)$ слабо нелинейна $(l_5 \leqslant l_4)$. Тогда существует оптимальное управление задачи B, удовлетворяющее первому условию максимума.

Теорема 7 усиливает результат утверждения 2) из теоремы 2. Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что в задаче B для системы описываемой выражением

$$\bar{x}(t+1) = \left[A(t) + \sum_{i=1}^{r} u_i B^i(t)\right] \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(u, t)$$

существует оптимальное управление, удовлетворяющее второму условию максимума, если $\varphi_n(u, t)$ сильно вогнута по u, а нелинейность по u функции $\varphi(u, t)$ достаточно мала ($\bar{\varphi}(u, t)$ дифференцируема по u).

§ 3. Разные задачи

1. Задача с подвижными концевыми условиями (задача C). Под задачей AC в дальнейшем понимается задача A с дополнительным условием, содержащим ограничение на правый конец траектории уравнения (1):

$$p(x(t_1)) \leqslant 0, \tag{30}$$

где $p(x)$ — дифференцируемая функция. Введем в рассмотрение вектор $\delta_{\theta, u^*} x(t)$, вычисленный согласно уравнениям

$$\delta_{\theta, u^*}x(t) = 0, \quad t = t_0, \ \ldots, \ \theta; \quad \delta_{\theta, u^*}x(\theta + 1) = \\ = \Delta_{u^*} f(x(\theta), \ u(\theta), \ \theta),$$

$$\delta_{\theta, u^*}x(t+1) = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \delta_{\theta, u^*}x(t), \quad \theta + 1 \leqslant t \leqslant t_1 - 1.$$

Сравнивая этот вектор с $\Delta_{\theta, u^*}x(t)$, убеждаемся, что

$$\| \Delta_{\theta, u^*}x(t) - \delta_{\theta, u^*}x(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} o_5(\| \Delta_{\theta, u^*}x(t) \|)\, dt, \quad t \in T. \tag{31}$$

Пусть множество $\{f(x, U(t), t)\}$ выпукло, τ_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, l$, — любые (не обязательно различные) точки из T, u_i^*, $i = 1, \ldots, l$, — любые (не обязательно различные) элементы из $U(\tau_i)$. Каждой паре τ_i, u_i^* соответствует вектор $\delta_{\tau_i, u_i^*}x(t_1)$:

$$\delta_{\tau_i, u_i^*}x(t_1) = F(t_1, \tau_i) \Delta_{u_i^*} f(x(\tau_i), \ u(\tau_i), \ \tau_i),$$

где

$$F(t_1, \tau_i) = \prod_{j=i}^{t_1 - 2} \frac{\partial f(x(\tau_j + 1), \ u(\tau_j + 1), \tau_j + 1)}{\partial x}.$$

Построим вектор $u_i^*(\varepsilon_i)$, $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1$, зависящий от параметра ε_i:

$$\Delta_{u_i^*(\varepsilon_i)} f(x(\tau_i), \quad u(\tau_i), \quad \tau_i) = \varepsilon_i \Delta_{u_i^*} f(x(\tau_i), \ u(\tau_i), \ \tau_i).$$

В силу выпуклости $\{f(x, U(t), t)\}$, $t \in T$, каждый вектор $u_i^*(\varepsilon_i)$, $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1$, принадлежит множеству $U(\tau_i)$. Очевидно,

$$\delta_{\tau_i, u_i^*(\varepsilon_i)}x(t_1) = \varepsilon_i F(t_1, \tau_i) \Delta_{u_i^*} f(x(\tau_i), \ u(\tau_i), \ \tau_i),$$

Введем управление

$$u_\varepsilon^*(t)=\begin{cases} u(t), & t\neq\tau_i,\\ u_i^*(\varepsilon_i), & t=\tau_i.\end{cases}$$

Этому управлению соответствует вектор

$$\delta_\varepsilon x(t_1)=\sum_{i=1}^{l}\delta_{\tau_i,\,u_i^*(\varepsilon_i)}x(t_1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i F(t_1,\ \tau_i)\,\Delta_{u_i^*}f(x(\tau_i),\,u(\tau_i),\,\tau_i).$$

Множество векторов $K=\{\delta_\varepsilon x(t_1)\colon\ 0\leqslant\varepsilon_i\leqslant 1,\ i=1,\ \ldots,\ l\}$, очевидно, выпукло, ограничено и замкнуто. Если $u(t)$, $t\in T$, — оптимальное управление и $p(x(t_1))<0$, то множество K не может иметь общих внутренних точек с множеством $K_1=\{\delta x\colon\ \delta x'\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))\leqslant 0\}$. Поэтому

$$\delta_\varepsilon x'(t_1)\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))\geqslant 0,\quad \delta_\varepsilon x(t_1)\in K.$$

Если при оптимальном $u(t)$, $t\in T$, имеет место равенство $p(x(t_1))=0$, то множество K не может иметь общих внутренних точек с пересечением множеств K_1 и $K_2=\{\delta x\colon\ \delta x'\operatorname{grad}p(x(t_1))\leqslant 0\}$. Это означает, что существуют постоянные λ, μ, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\lambda+\mu=1$ такие, что

$$\delta_\varepsilon x'(t_1)\,[\lambda\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))+\mu\operatorname{grad}p(x(t_1))]\geqslant 0$$

при $\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))\neq\varkappa\operatorname{grad}p(x(t_1))$. Учитывая (31), можно утверждать, что если в задаче AC управление $u(t)$ оптимально, то существуют такие постоянные λ, μ, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\lambda+\mu=1$, что

$$\Delta_{\theta,\,u^*\!.}\ x'(t_1)\,[\lambda\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))+\mu\operatorname{grad}p(x(t_1))]\geqslant$$
$$\geqslant o(\|\Delta_{o,u^*}x(t_1)\|),$$
$$(\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))\neq\varkappa\operatorname{grad}p(x(t_1))),$$

причем $\mu=0$, если $p(x(t_1))<0$.

Обращаясь к лемме 2 (утверждение 1), убеждаемся, что справедлива

Теорема 8. Пусть множество $f(x,\,U(t),\,t)$, $t\in T$, выпукло. Тогда для оптимального управления $u(t)$ и оптимальной траектории $x(t)$ задачи AC с $\operatorname{grad}\varphi(x(t_1))\neq\neq\varkappa\operatorname{grad}p(x(t_1))$, $-\infty<\varkappa<\infty$, существуют такие неотрицательные числа λ, μ, $\lambda + \mu = 1$, что управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет первому условию максимума с $\psi(t)$ из (7), где

$$c = \lambda \operatorname{grad} \varphi(x(t_1)) + \mu \operatorname{grad} p(x(t_1)).$$

При $p(x(t_1)) < 0$ можно положить $\mu = 0$.

Примечание. Теорема 8 приведена лишь для иллюстрации метода. Более точные результаты получаются из лемм 1, 2 по той же схеме, что и теоремы 1, 2. Подробности опускаем.

Задачу B с дополнительным условием (30) назовем задачей BC и сохраним прежние соглашения относительно обозначений x, $\bar{x}$. Кроме того, будем считать, что $p(\bar{x})$ не зависит от x_n. Нетрудно проверить, что $\psi_n(t) \equiv -\lambda_1$, $t \in T$, и уравнение для $\psi(t)$ имеет вид

$$\psi(t-1) = \frac{\partial \mathscr{H}_{\lambda_1}(x(t),\ \psi(t),\ u(t),\ t)}{\partial x},$$

$$\psi(t_1 - 1) = -\lambda \operatorname{grad} \varphi(x(t_1)) - \mu \operatorname{grad} p(x(t_1)),$$

$$\mathscr{H}_{\lambda_1}(x,\ \psi,\ u,\ t) = \psi' f(x,\ u,\ t) - \lambda_1 f_{1n}(x,\ u,\ t),$$

$$\mu p(x(t_1)) = 0, \quad \lambda,\ \mu \geqslant 0, \quad \lambda + \mu = 1.$$

В задаче BC уже нельзя использовать сильную выпуклость по u функции $f_{1n}(x, u, t)$, так как коэффициент λ_1 заранее неизвестен. Однако результаты по первому условию максимума для задачи B (§ 2) переносятся и на задачу BC, если $f_{1n}(x, u, t)$ выпукла по u, функция $f(x, u, t)$ линейна по u.

Опишем теперь схему получения второго условия максимума в задаче AC. Пусть функция $f(x, u, t)$ дифференцируема по u. Введем вектор $\delta_{\theta, u^*} x(t)$ по формулам

$$\delta_{\theta, u^*} x(t) = 0, \quad t = t_0, \ \ldots, \ \theta,$$

$$\delta_{\theta, u^*} x(\theta + 1) = \frac{\partial f(x(\theta),\ u(\theta),\ \theta)}{\partial u}(u^* - u(\theta)),$$

$$\delta_{\theta, u^*} x(t+1) = \frac{\partial f(x(t),\ u(t),\ t)}{\partial x}\delta_{\theta, u^*} x(t), \qquad \theta + 1 \leqslant t \leqslant t_1 - 1.$$

Сравнивая с $\Delta_{\theta, u^*} x(t)$, получаем

$$\| \Delta_{\theta, u^*} x(t) - \delta_{\theta, u^*} x(t) \| \leqslant o_6 \| u^* - u(\theta) \|.$$

Пусть $U(t)$, $t \in T$, выпукло. Введем τ_i, u_i^*, как и при доказательстве теоремы 8. Вектор $u_i^*(\varepsilon_i)$, $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1$, построим по правилу

$$u_i^*(\varepsilon_i) = (1 - \varepsilon_i)\, u(\theta) + \varepsilon_i u_i^*.$$

Дальнейшие построения очевидны. В результате получим утверждение, формулирующееся аналогично теореме 8 с двумя изменениями: 1) вместо выпуклости $f(x(t), U(t), t)$, $t \in T$, требуется выпуклость $U(t)$ и дифференцируемость по u функции $f(x, u, t)$; 2) первое условие максимума заменяется на второе условие максимума.

2. Задача на минимакс. Оптимальные процессы при ограничениях на состояния дискретной системы. Введем задачу D, которая понимается как задача минимизации на траекториях системы (1) величины

$$J(u) = \max_{t \in T} q(x(t+1),\ t+1), \tag{32}$$

где $q(x, t)$ — дифференцируемая функция. Выражение (32) можно представить в виде

$$J(u) = \max_{\sum \omega(t) = 1} \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \omega(t)\, q(x(t),\ t).$$

Поэтому если $u(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление, $x(t)$ — оптимальная траектория, то им соответствует функция $\omega(t)$, сосредоточенная на множестве $\sigma = \{t\colon q(x(t+1),$ $t+1) = \max_{s \in T} q(x(s+1),\ s+1)\}$, $\sum_{\sigma} \omega(t) = 1$, $\omega(t)\, q(x(t+1),$ $t+1) \geqslant 0$. Из оптимальности управления $u(t)$ следует, что

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} \omega(t)\, q(x(t),\ t) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \omega(t)\, q(\tilde{x}(t),\ t), \quad \tilde{u}(t) \in U(t), \quad t \in T,$$

где $\tilde{x}(t)$ — траектория, порожденная допустимым управлением $\tilde{u}(t)$. Задача D сводится к задаче B, если координату x_n определить по правилу

$$x_n(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1} \omega(s)\, q(x(s),\ s), \quad \omega(t_0) = 0.$$

Последнее уравнение системы (1) теперь имеет вид

$$x_n(t+1) = x_n(t) + \omega(t)\, q(x(t), t), \quad t \in T,$$
$$\omega(t_0) = 0, \qquad x_n(t_0) = 0,$$

функция $\varphi_1(x) = q(x(t_1), t_1)\,\omega(t_1)$. Выпишем уравнения для $\psi(t)$, $H_\omega(x, \psi, u, t)$, соответствующие задаче:

$$H_\omega(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - \omega q(x, t),$$
$$\psi(t-1) = \frac{\partial H_\omega(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \tag{33}$$
$$\psi(t_1 - 1) = -\omega(t_1)\frac{\partial q(x(t_1), t_1)}{\partial x}. \tag{34}$$

Результаты, полученные выше для задачи B, переносятся на задачу D, за исключением тех результатов, где используется понятие сильной вогнутости по x функции $f_{1n}(x, u, t)$. Однако и в этом случае теорема 7 переносится на задачу D, если $f(x, u, t)$ — линейная по x функция, $q(x) \geqslant 0$, $q(x)$ — вогнутая функция. Сформулируем один результат.

Теорема 9. Пусть $f(x, U(t), t)$, $t \in T$,— выпуклое множество. Тогда для оптимального управления $u(t)$, $t \in T$, оптимальной траектории $x(t)$ ($\operatorname{grad} q(x(t), t) \not\equiv 0$) найдется такая функция $\omega(t)$, сосредоточенная на σ, что управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума (25) с функцией $\psi(t)$ из (34).

Примечание. Для определения функции $\omega(t)$ используется неравенство

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} \omega(t)\, q(x(t), t) \geqslant \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \tilde{\omega}(t)\, q(x(t), t),$$

справедливое для всех $\tilde{\omega}(t)$, $\sum_{t=t_0+1}^{t_1} \tilde{\omega}(t) = 1$.

От задачи на минимакс перейдем к задаче оптимизации дискретных систем с учетом ограничений на состояния. Задачей AD назовем задачу A с дополнительным условием

$$q_1(x(t), t) \leqslant 0, \quad t \in T.$$

Рассмотрим задачу на минимакс с функцией $q(x, t)$ вида

$$q(x, t) = \begin{cases} q_1(x, t), & t \in T, \\ \varphi(x) - \nu, & t = t_1, \quad -\infty \leqslant \nu \leqslant \infty. \end{cases}$$

Минимальное ν, при котором решение задачи на минимакс удовлетворяет условию $J(u) \leqslant 0$, является минимальным значением функции $\varphi(x)$ в задаче AD. Оптимальные управления в задаче AD совпадают с аналогичными в задаче D. Такова схема решения и получения необходимых условий оптимальности для задачи AD. Точные формулировки теорем получаются легко и поэтому опущены.

Примечание. Если требуется дополнительно обеспечить условие $q(x(t_1), t_1) \leqslant 0$, то необходимо знать решение задачи на минимакс с подвижным правым концом.

3. Одна форма необходимых условий оптимальности. Пусть рассматривается задача A с дифференцируемой по u функцией $f(x, u, t)$ и множеством $U(t)$, заданным в форме

$$U(t) = \{u\colon q(u, t) \leqslant 0\}, \quad t \in T,$$

где $q(u, t)$ — дифференцируемая по u функция (задача A_1). Введем систему

$$\left.\begin{array}{c} x_1(t+1) = f_1(x_1, x_2, t), \\ x_2(t+1) = f_2(x_2, \nu, t), \quad x_1(t_0) = x_0, \\ x_2(t_0) = u(t_0), \\ t \in T, \quad x_1 \in E_n, \quad x_2 \in E_r, \end{array}\right\} \tag{35}$$

где x_1 — n-вектор, f_2, x_2 — r-векторы, $f_1(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t)$, $f_2(x_2, \nu, t)$ — функция, непрерывная по всем аргументам вместе с $\partial f_2(x_2, \nu, t)/\partial x_2$, ν — управление, $\nu \in E_m$. Область $\Xi(t)$ допустимых значений вектора ν и функцию $f_2(x_2, \nu, t)$ выбираем так, чтобы множество $f_2(x_2, \Xi(t), t)$ было ограничено, выпукло, замкнуто. На траекториях системы (35), стесненных ограничением $q(x_2, t) \leqslant 0$, $t \in T$, рассмотрим задачу минимизации величины

$$J(\nu) = \varphi(x_1(t_1)).$$

Эту задачу назовем *третьей обобщенной задачей* A (задача $3OA$). В силу сделанных предположений оптимальное управление $\nu(t)$, $t \in T$, задачи $3OA$ удовлетворяет первому условию максимума. Пусть управление $u(t_0)$ в задаче A не варьируется. Тогда для ограниченных множеств $U(t)$ можно так подобрать функцию $f_2(x_2, \nu, t)$ и множества $\Xi(t)$, что для каждого $u(t) \in U(t)$, $t \in T$, существует $\nu(t) \in \Xi(t)$, при котором $x_2(t) = u(t)$, $t \in T$.

При этих условиях в задаче A за оптимальное управление $u(t)$ можно взять $x_2(t)$, порожденное оптимальным управлением $\nu(t)$ задачи $ЗОА$.

Остановимся подробнее на двух простейших способах задания f_2 и $\Xi(t)$. Пусть:

1) $$x_2(t+1) = \nu(t), \tag{36}$$

$$\Xi(t) = \left\{\nu\colon \sum_{i=1}^{r} (\nu^i)^2 \leqslant L^2\right\};$$

2) $$x_2(t+1) = x_2(t) + \nu(t). \tag{37}$$

Обозначим через

$$d = \max_{\bar{u},\ u \in U(t)} {}_t \ (\bar{u} - u)'(\bar{u} - u)^{1/2} \tag{38}$$

наибольший диаметр множеств $U(t)$ и положим $L \geqslant d$. В этом случае для каждого $u(t)$, $t \in T$, найдется такое $\nu(t)$, $t \in T$, в (36), (37), что $x_2(t) \equiv u(t)$. Сформулируем теперь необходимые условия оптимальности в задаче A_1.

Теорема 10. Пусть $f(x, u, t)$ дифференцируема по u. Для оптимального управления $u(t)$, $t \in T$, найдется функция $\omega(t)$, сосредоточенная на множестве $\sigma = \{t\colon q(u(t), t) = 0\}$, такая, что $\sum_{\sigma} \omega(t) = 1$,

$$\sum_{\sigma} \omega(t) q(u(t), t) \geqslant \sum_{\sigma} \tilde{\omega}(t) q(u(t), t), \quad \sum_{\sigma} \tilde{\omega}(t) = 1, \tag{39}$$

и такая, что управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию максимума

$$\psi'(t) \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} u(t) - 2\omega(t) u'(t) u(t) \geqslant$$
$$\geqslant \psi'(t) \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} u^* - 2\omega(t) u'(t) u^*, \tag{40}$$
$$u^* \in U(t), \quad t \in T.$$

Здесь $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению (7) с

$$\psi(t_1 - 1) = -\omega(t_1) \operatorname{grad} \varphi(x(t_1)). \tag{41}$$

Примечание. Предположение о том, что $u(t_0)$ не варьируется, несущественно, так как систему (35) можно доопределить на $t = t_0 - 1$.

Использование уравнения (37) для получения необходимых условий оптимальности в задаче A опускаем. Полученное в теореме 10 условие максимума по виду аналогично второму условию максимума. Это объясняется конкретным заданием уравнения (36) и множества $\Xi(t)$.

Иногда может оказаться полезным получение необходимых условий оптимальности через четвертую обобщенную задачу A (задача $4OA$), под которой понимается задача минимизации функции $\varphi(x_1(t_1))$ на траекториях системы (35) при условии, что множество $\Xi(t)$ выпукло. Схема перехода от задачи $4OA$ к задаче A в свете изложенного вполне очевидна.

§ 4. Принцип квазимаксимума

При операциях с непрерывной системой

$$\frac{dy}{ds}=g(y,\ v,\ s),\quad s_0\leqslant s\leqslant s_1, \tag{42}$$

на цифровых вычислительных устройствах оператор dy/ds в простейшем случае заменяют на разность $y(s+h)-$ $-y(s)/h$, где h — шаг квантования времени. Естественно, чем меньше h, тем точнее в данном случае аппроксимация. Полагая $t=s/h$, $x(t)=y(th)$, $u(t)=v(th)$, $f(x,u,t)=$ $=g(y,v,th)$, приходим к дискретной системе

$$x(t+1)=x(t)+hf(x,u,t), \tag{43}$$

зависящей от параметра h. В общем случае дискретная система с параметром имеет вид

$$x(t+1)=f(x,u,t,h), \tag{44}$$

где h может быть и вектором. В дальнейшем величинам и понятиям, связанным с дискретными системами с параметром, будем приписывать индекс h. Выпишем соотношения, связанные с получением необходимых условий оптимальности в задаче A_h для уравнения (44). Оптимальное управление: $u(t,h)$, $t\in T_h$. Траектория уравнения (44) $x(t,h)$, $t-1\in T_h$:

$$\psi(t-1,\cdot h)=\frac{\partial f'(x,\ u,\ t,\ h)}{\partial x}\psi(t,\ h),\quad \psi(t_1-1,\ h)=$$
$$=-\operatorname{grad}\varphi(x(t_1,\ h)), \tag{45}$$

$$H(x,\ \psi,\ u,\ t,\ h) = \psi' f(x,\ u,\ t,\ h),$$
$$\Delta_{\theta,\, u^*} x(t,\ h) = 0, \quad t = t_0,\ \ldots,\theta,$$
$$\Delta_{\theta,\, u^*} x(\theta+1,\ h) = \Delta_{u^*} f(x,\ u,\ \theta,\ h),$$
$$\Delta_{\theta,\, u^*} x(t+1,\ h) = f(x + \Delta_{\theta,\, u^*} x,\ u,\ t,\ h) - f(x,\ u,\ t,\ h),$$
$$\theta + 1 \leqslant t \leqslant t_1 - 1,$$

$$\Delta_{\theta,\, u^*} J_h(u) = -\psi'(\theta,\ h)\, \Delta_{u^*} f(x,\ u,\ \theta,\ h) - \\ - \sum_{t=\theta+1}^{t_1-1} o(\|\Delta_{\theta,\, u^*} x(t,\ h)\|) + o_1(\|\Delta_{\theta,\, u^*} x(t_1,\ h)\|), \quad (46)$$
$$o(\|\Delta x\|) \leqslant k \|\Delta x\|^2, \quad o_1(\|\Delta x\|) \leqslant k_1 \|\Delta x\|^2.$$

Пусть ε, $\varepsilon > 0$, — некоторое число. Введем множество

$$U_\varepsilon(\theta,\ h) = \{u^*:\ o_1(\|\Delta_{\theta,\, u^*} x(t_1)\|) - \\ - \sum_{t=\theta+1}^{t_1-1} o(\|\Delta_{\theta,\, u^*} x(t)\|) \leqslant \varepsilon,\ u^* \in U(\theta)\}.$$

Теорема 11. Оптимальное управление $u(t,\ h)$ в задаче A_h для (44) удовлетворяет условию квазимаксимума

$$H(x(t,h),\ \psi(t,h),\ u(t,h),\ t,\ h) \geqslant H(x(t,h),\ \psi(t,h),\ u^*,\ t,\ h) - \varepsilon$$

для всех $u^* \in U_\varepsilon(t,\ h)$, $\varepsilon > 0$, $t \in T_h$.

В самом деле, пусть $u(t,\ h) \in U(t)$, $t \in T_h$, — оптимальное управление, но существуют $\theta \in T_h$, $\varepsilon > 0$, $u^* \in U_\varepsilon(\theta,\ h)$, при которых

$$H(x(\theta,\ h),\ \psi(\theta,\ h),\ u(\theta,\ h),\ \theta,\ h) < \\ < H(x(\theta,\ h),\ \psi(\theta,\ h),\ u^*,\ \theta,\ h) - \varepsilon.$$

Из (46) тогда имеем $\Delta_{\theta,\, u^*} J(u) < -\varepsilon + \varepsilon = 0$, что противоречит оптимальности управления $u(t,\ h)$. Если ε, h таковы, что при всех $\theta \in T_h$

$$U\varepsilon(\theta,\ h) \supset U(\theta),$$

то вдоль оптимального управления необходимо выполняется условие (условие ε-максимума)

$$H(x(t,\ h),\ \psi(t,\ h),\ u(t,\ h),\ t,\ h) \geqslant \\ \geqslant H(x(t,\ h),\ \psi(t,\ h),\ u^*,\ t,\ h) - \varepsilon \quad (47)$$

для всех $u^* \in U(t)$, $t \in T_h$. Условие переходит в первое условие максимума, если h таково, что

$$U_\varepsilon(\theta,\ h) \supset U(\theta) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{и всех} \quad \theta \in T_h.$$

Применение условия квазимаксимума для конкретного определения оптимального управления не всегда удобно из-за неэффективного способа определения множества $U_\varepsilon(\theta, h)$. Поэтому введем множество

$$U_\varepsilon^1(\theta, h)=\{u^*: B(\theta, u^*, h)\leqslant\varepsilon,\ u^*\in U(\theta)\},$$

где функция $B(\theta, u^*, h)$ выбрана из условия

$$o_1(\|\Delta_{\theta, u^*}x(t_1, h)\|)-\sum_{t=\theta+1}^{t_1-1} o(\|\Delta_{\theta, u^*}x(t, h)\|)\leqslant B(\theta, u^*, h).$$

Вид функции $B(\theta, u^*, h)$ зависит от конкретных условий. Рассмотрим, например, случай дискретной системы (43). Пусть решения уравнения (42) ограничены для всех измеримых $v(s)\in U(s)$. Тогда для достаточно малого h_0 можно указать такое число M, что при всех h, $0\leqslant h\leqslant h_0$, решения уравнения (43) удовлетворяют неравенству

$$\|x(t, h)\|\leqslant M,\qquad t\in T_h.$$

Для упрощения оценок предположим, что функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$ дважды дифференцируемы по x и

$$\left\|\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}\right\|\leqslant M_1,\quad \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|\leqslant M_2,$$
$$\left\|\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right\|\leqslant M_3,\quad \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right\|\leqslant M_4$$

в области $\|x\|\leqslant M$, $u\in\bigcup\limits_{t\in T_h} U(t)$, $t\in T_h$, $h\leqslant h_0$. Тогда из определения величин $o_1(\|\Delta x\|)$, $o(\|\Delta x\|)$ имеем

$$|o(\|\Delta x(t, h)\|)|\leqslant\frac{h}{2}\|\psi(t, h)\|M_2\|\Delta x(t, h)\|^2,$$

$$|o_1(\|\Delta x(t_1, h)\|)|\leqslant\frac{1}{2}M_4\|\Delta x(t_1, h)\|^2.$$

Из (45) получим оценку

$$\|\psi(t, h)\|\leqslant M_5,\qquad t\in T_h,$$

где M_5 не зависит от h, $h\leqslant h_0$ и определяется величинами M_1, s_0, s_1, M_3. Оценка для $\|\Delta_{\theta, u^*}x(t, h)\|$ имеет вид

$$\|\Delta_{\theta, u^*}x(t, h)\|\leqslant hM_6\|\Delta_{u^*}f(x(\theta, h), u(\theta, h), \theta)\|,\qquad t\in T_h,$$

где M_6 не зависит от h. В результате за $B(\theta, u^*, h)$

можно взять функцию

$$B(\theta, u^*, h)=$$

$$=\left[\frac{M_4}{2}+(s_1-s_0)\frac{M_2M_5}{2}\right]M_6^2h^2\,\|\Delta_{u^*}f(x(\theta, h), u(\theta, h), \theta)\|^2.$$

Отсюда видно, что если множества $U(\theta)$, $\theta \in T$, ограничены, то для любого ε можно найти такое число $h(\varepsilon)$, что

$$U_\varepsilon^1(\theta, h)=U(\theta) \quad \text{при} \quad \theta \in T_h, \ h \leqslant h(\varepsilon).$$

Наоборот, при ограниченных $U(\theta)$ для каждого h найдется такое $\varepsilon(h)$, при котором выполняется последнее равенство. Из определения $B(\theta, u^*, h)$ следует, что $\varepsilon(h) \sim h^2$. Эффективность применения условия ε-максимума зависит от соотношения между H и величиной ε. Если $\varepsilon \geqslant 2\,|H|$, то условие ε-максимума не может выделить из $U(\theta)$ собственного подмножества подозрительных на оптимальность управлений. В общем случае оценить снизу порядок по h функции H затруднительно. Однако для задачи B_h функция $\mathcal{H}$ при малых h имеет по h порядок малости не выше первого, если $|f_{1n}(x(t, h), u(t, h), t)| \geqslant \geqslant M_7$ при $t \in T_h$, $h \leqslant h_0$. Можно указать и другие критерии (например, соотношение между $|f_{1n}|$ и $\|\Delta_{u^*}f\|$), при которых $\mathcal{H} \sim h$. Если функция $\mathcal{H}$ обладает указанным свойством, то эффективность условий ε-максимума с уменьшением h в системе (43) возрастает. Эти результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 12. Если $u(t, h)$, $t \in T_h$,— оптимальное управление для задачи A_h в системе (43), то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $h(\varepsilon)$, что управление $u(t, h)$ при $h \leqslant h(\varepsilon)$ удовлетворяет условию ε-максимума.

В задаче B_h для системы (43) эффективность условия ε-максимума возрастает с уменьшением h. Теорему 12 в общем случае нельзя улучшить. Другими словами, существуют дискретные системы вида (43), оптимальные управления в которых не удовлетворяют первому условию максимума ни при каком h, $h > 0$.

Пример 10.

$$x(t+1)=x(t)+hu(t),$$

$$y(t+1)=y(t)+h\,[x^2(t)-u^2(t)],$$

$$x(0)=y(0)=0, \ |u| \leqslant 1, \ \varphi(x, y)=y, \ t_0=0, \ t_1=2.$$

Имеем $J_h(u) = -[h - h^3]\,u^2(0) - hu^2(1)$. При любом h, $0 < h \leqslant 1$, управление $\{u(0, h) = 1,\ u(1, h) = 1\}$ является оптимальным. Для него

$$H_0 = -2h^3u - hu^2, \quad H_0 = H(x(0, h), \psi(0, h), u, 0, h).$$

Последняя функция в точке $u = 1$, соответствующей оптимальному $u(0, h) = 1$, не достигает максимума ни при каком h, $0 < h \leqslant 1$.

Пусть $h > 1$. Тогда управление $\{u(0, h) = 0,\ u(1, h) = 1\}$ является оптимальным, и для него $H_0 = hu^2$. Эта функция при $h > 1$ в точке $u = 0$ не достигает максимума.

§ 5. Двухпараметрические нелинейные системы. Принцип квазимаксимума

1. Постановка задачи. Пусть в узлах $\{mh, n\tau\}$ прямоугольника $D = \{mh, n\tau\colon m = 0, \ldots, M;\ n = 0, 1, \ldots \ldots, N\}$ связь между q-вектором $x = x(m, n)$ и r-вектором управления $u = u(m, n)$ задана уравнением

$$R_{h\tau}(x(m, n)) = f(x, R_h, R_\tau, u, m, n) \tag{48}$$

и начальными условиями

$$x(0, n) = \gamma^n, \quad n = 0, \ldots, N;$$
$$x(m, 0) = \beta^m, \quad m = 0, 1, \ldots, M, \tag{49}$$

где

$$R_{h\tau}(x(m, n)) = \frac{x(m+1, n+1) - x(m+1, n) - x(m, n+1) + x(m, n)}{h\tau},$$

$$R_h = R_h(x(m, n)) = \frac{x(m+1, n) - x(m, n)}{h},$$

$$R_\tau = R_\tau(x(m, n)) = \frac{x(m, n+1) - x(m, n)}{\tau},$$

а функция $f(x, R_h, R_\tau, u, m, n)$ однозначно определена и непрерывна на $\Omega_1 = E_q \times E_q \times E_q \times E_r \times E_1 \times E_1$ и имеет на Ω_1 непрерывные вторые производные по x, R_h, R_τ. Предположим, что допустимы управления

$$u(m, n) \in U \subset E_r.$$

На траекториях (48), (49) определим функционал

$$J(u) = c'x(M, N).$$

Здесь c — заданный вектор.

Задача. Требуется определить $u(m, n) \in U$, $0 \leqslant m \leqslant M-1$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, такое, что

$$J(u) = \min_{\tilde{u}(m,\, n) \in U} J(\tilde{u}). \tag{50}$$

2. Формула приращения функционала. Пусть управлению $u(m, n)$ соответствует решение $x(m, n)$, управлению $u(m, n) + \Delta u(m, n)$ — решение $x(m, n) + \Delta x(m, n)$,

$$\left.\begin{aligned} &R_{h\tau}(\Delta x(m, n)) = \\ &\quad = f(x + \Delta x, R_h + \Delta R_h, R_\tau + \Delta R_\tau, u + \Delta u, m, n) - \\ &\qquad\qquad - f(x, R_h, R_\tau, u, m, n), \\ &\qquad\qquad\qquad \Delta x(m, 0) = \Delta x(0, n) = 0, \\ &\Delta R = R(x(m, n) + \Delta x(m, n)) - R(x(m, n)) = \\ &\qquad\qquad\qquad = R(\Delta x(m, n)). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Для произвольной последовательности q-векторов $p(m, n)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} p'(m, n) R_{h\tau}(\Delta x(m, n)) h\tau = \\ = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x'(m, n) \bar{R}_{h\tau}(p(m, n)) h\tau - \\ - \sum_{m=0}^{M-1} \Delta x'(m, N) \bar{R}_h(p(m, N-1)) h - \\ - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x'(M, n) \bar{R}_\tau(p(M-1, n)) \tau + \\ + p'(M-1, N-1) \Delta x(M, N), \end{aligned} \tag{52}$$

где $m = -1, 0, \ldots, M-1$; $n = -1, 0, \ldots, N-1$,

$$\bar{R}_{h\tau}(p(m, n)) = \frac{p(m, n) - p(m-1, n) - p(m, n-1) + p(m-1, n-1)}{h\tau},$$

$$\bar{R}_h(p(m, n)) = \frac{p(m, n) - p(m-1, n)}{h},$$

$$\bar{R}_\tau(p(m, n)) = \frac{p(m, n) - p(m, n-1)}{\tau}.$$

Положим

$$H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n) = p'(m, n) f(x, R_h, R_\tau, u, m, n)$$

и выберем $p(m, n)$ из уравнений

$$\bar{R}_{h\tau}(p(m, n)) = \frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)}{\partial x} - \bar{R}_h\left(\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)}{\partial R_h}\right) - \bar{R}_\tau\left(\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)}{\partial R_\tau}\right) \quad (53)$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &p(M-1, N-1) = -c, \\ &\bar{R}_h(p(m, N-1)) = -\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, N-1)}{\partial R_\tau}, \\ &\bar{R}_\tau(p(M-1, n)) = -\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, M-1, n)}{\partial R_h}. \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Из (51) — (54) получаем

$$c'\Delta x(M, N) = -\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h\tau\,[H(x, R_h, R_\tau, p, u+\Delta u, m, n) - H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)] - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h\tau\,[H(x+\Delta x, R_h+\Delta R_h, R_\tau+\Delta R_\tau, p, u+\Delta u, m, n) - H(x, R_h, R_\tau, p, u+\Delta u, m, n)] + \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h\tau\left[\Delta x'(m, n)\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)}{\partial x} + \Delta R_h'(m, n)\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)}{\partial R_h} + \Delta R_\tau'(m, n)\frac{\partial H(x, R_h, R_\tau, p, u, m, n)}{\partial R_\tau}\right].$$

Отсюда

$$\Delta J \equiv c'\Delta x(M, N) = -\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h\tau\,[H(z, p, u+\Delta u, m, n) - H(z, p, u, m, n)] - \eta, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2.$$

$$\eta_1 = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h\tau\Delta z'(m, n) \times$$
$$\times \left[\frac{\partial H(z, p, u+\Delta u, m, n)}{\partial z} - \frac{\partial H(z, p, u, m, n)}{\partial z}\right],$$

$$\eta_2 = \frac{h\tau}{2}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \Delta z'(m, n)\frac{\partial^2 H(z+\theta\Delta z, p, u+\Delta u, m, n)}{\partial z^2}\Delta z(m, n),$$

$$0 \leqslant \theta(m, n) \leqslant 1.$$

Здесь $z = \{x, R_h, R_\tau\}$ — $3q$-мерный вектор. Для приращения

$$\Delta^* u(m, n) = \begin{cases} u^* - u(k, l), & m = k, \quad n = l, \\ 0, & m \neq k, \quad n \neq l \end{cases}$$

Имеем

$$\Delta^* J = -h\tau[H(z, p, u^*, k, l) - H(z, p, u, k, l) - \eta^*],$$

$$\eta^* = \frac{1}{2}\sum_{m=k+1}^{M-1}\sum_{n=l+1}^{N-1} \Delta z'(m, n)\frac{\partial^2 H(z+\theta\Delta^* z, p, u^*, m, n)}{\partial z^2}\Delta z(m, n).$$

Нетрудно показать, что

$$|\eta^*| \leqslant \frac{1}{2}(h\tau)^2 \| f(z, u^*, k, l) - f(z, u, k, l)\|^2 \times$$
$$\times \sum_{m=k+1}^{M-1}\sum_{n=l+1}^{N-1} L(m, n)\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right\|, \quad L(m, n) = \text{const}. \tag{55}$$

3. Принцип квазимаксимума. Пусть $f(z, u, m, n)$ дифференцируема по u. Введем множество $a(k, l, \alpha)$:

$$a(z, p, u(m, n), \ldots, u(M-1, N-1), k, l, \alpha) =$$
$$= \{u^*: |\eta^*| \leqslant \alpha\}$$

и величину $\delta_u H$:

$$H(z, p, u+\Delta u, m, n) - H(z, p, u, m, n) =$$
$$= \delta_u H(z, p, u, m, n) + o(\|\Delta u\|).$$

Будем говорить, что управление u в узле $\{k, l\}$ удовлетворяет условию квазимаксимума с числом $\mu(k, l)$ и множеством $\omega(k, l)$, если: 1) $H(z, p, u, k, l) \geqslant H(z, p, u^*, k, l) - \mu(k, l)$ на всех $u^* \in \omega(k, l)$, 2) $\delta_u H \leqslant 0$, если U выпукло, 3) $\delta_u H = 0$ во внутренних точках U.

Теорема 13. Оптимальное управление $u = \{u\,(m, n)\}$ в задаче (50) удовлетворяет условиям:

1) квазимаксимума с $\mu\,(k, l) = \alpha$, $\omega\,(k, \alpha) = a\,(k, l, \alpha) \cap \cap\, U$, $k = 0, 1, \ldots, M - 2$; $l = 0, 1, \ldots, N - 2$;

2)
$$H\,(z, p, u, k, l) \geqslant H\,(z, p, u^*, k, l), \tag{56}$$
$$u^* \in U, \quad \{k = M - 1;\ l = 0, \ldots, N - 1\},$$
$$\{k = 0, \ldots, M - 1;\ l = N - 1\}.$$

Утверждение доказывается аналогично теореме 11.

Примечание. Множество $a\,(k, l, \alpha)$ можно заменить на множество $a^1\,(k, l, \alpha) = \{u^*\colon |\,\bar{\eta}\,| \leqslant \alpha\}$, где $\bar{\eta}$ — некоторая оценка сверху для η^*, например (55). Из определения множества $a\,(k, l, \alpha)$ следует, что принцип локального максимума справедлив в узле $\{k, l\}$, если множество $a\,(k, l, 0)$ содержит точки, отличные от $u\,(k, l)$.

Таким образом, условие квазимаксимума выделяет некоторое множество U^* точек $u\,(k, l)$, подозрительных на оптимальность. Сужение множества U^* осуществляется вариацией α и локальными условиями: $\delta_u H \leqslant 0$, $\delta_u H = 0$.

4. Системы частного вида. Условия оптимальности.

a) Для линейного варианта

$$R_{h\tau}\,(x\,(m, n)) = A\,(m, n)\,x\,(m, n) + B\,(m, n)\,R_h\,(x\,(m, n)) + C\,(m, n)\,R_\tau\,(x\,(m, n)) + b\,(u\,(m, n), m, n) \tag{57}$$

уравнения (48) имеем $\eta = 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 14. Для того чтобы управление $u \in U$ для (57) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы условие (56) выполнялось в узлах $\{m, n\}$, $m = 0, \ldots, M - 1$; $n = 0, \ldots, N - 1$.

b) Для случая

$$R_{h\tau}\,(x\,(m, n)) = A\,(u\,(m, n), m, n)\,x\,(m, n) + B\,(u\,(m, n), m, n)\,R_h\,(x\,(m, n)) + C\,(u\,(m, n), m, n)\,R_\tau\,(x\,(m, n)) + b\,(u\,(m, n), m, n)$$

нетрудно убедиться, что $\eta^* = 0$.

Теорема 15. Если $u = \{u\,(m, n)\}$ — оптимальное управление, то в каждом узле $\{k, l\}$, $k = 0, \ldots, M - 1$; $l = 0, \ldots, N - 1$, выполняется неравенство (56).

c) Пусть U выпукло и уравнение (48) имеет вид

$$R_{h\tau}(x(m, n)) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x, R_h, R_\tau, m, n)\, u_i(m, n) + g(x, R_h, R_\tau, m, n).$$

Теорема 16. На оптимальном управлении условие (56) выполняется во всех узлах прямоугольника D.

Теоремы 15, 16 следуют из формулы для ΔJ.

§ 6. Применение методов функционального анализа к оптимизации дискретных систем

1. Сведение задачи быстродействия к L-проблеме. Пусть поведение системы регулирования описывается разностным уравнением [99, 128, 149, 223]

$$x(n+1) = Ax(n) + bu(n), \quad x = \{x_1, \ldots, x_l\}, \quad b = \{b_1, \ldots, b_l\}, \tag{58}$$

где $x(n)$ — вектор в фазовом пространстве, A — постоянная неособая матрица, b — некоторый заданный вектор, $u(n)$ — скалярная функция дискретного аргумента n. Задача оптимального по быстродействию управления состоит в следующем. Дана начальная точка $x(0) = \{x_1(0), \ldots, x_l(0)\}$. Требуется найти набор управляющих величин $u^0(n)$, $n = 0, 1, \ldots, K^0 - 1$, таких, что траектория системы (58) «приходит» в начало координат за наименьшее возможное число шагов K^0. При этом допускаются значения $u(n)$, стесненные условием

$$|u(n)| \leqslant 1, \quad n = 0, \ldots, K^0 - 1. \tag{59}$$

По схеме § 6.11 сведем нашу задачу к L-проблеме в конечномерном пространстве. Решение системы (58) можно записать по формуле (аналог формулы Коши)

$$x(n) = F(n)\, x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} F(n-i-1)\, bu(i), \tag{60}$$

где $F(n)$ — фундаментальная матрица решений однородной части системы (58). Пусть в некоторый момент времени K траектория системы (58) попадает в начало координат: $x(K) = 0$. Тогда из (60) следует

$$-x(0) = \sum_{j=1}^{K} F(-j)\, bu(j-1). \tag{61}$$

Вводя обозначения

$$h(n) = F(-n)\, b, \qquad \eta(n) = u(n-1) \tag{62}$$

и учитывая равенства (61), (62), первоначальную задачу можно сформулировать так: найти наименьшее число K^0 и линейный функционал $f(\cdot)$ (в данном случае это линейная форма) такие, что

$$f(h^\alpha) = \sum_{n=1}^{K^0} h_\alpha(n)\, \eta(n) = -x_\alpha(0), \tag{63}$$

$$\alpha = 1, \ldots, l, \quad h^\alpha = \{h_\alpha(1), \ldots, h_\alpha(K^0)\},$$

$$\| f(\cdot) \| = \max_n |\eta(n)| \leqslant 1. \tag{64}$$

Будем предполагать, что векторы h^α линейно независимы, причем $K^0 > l$. Согласно основному предложению § 6.11, решение (63) — (64) существует только в том случае, если

$$\lambda(K) \geqslant 1, \tag{65}$$

где $\lambda(K)$ определяется из условия

$$\lambda(K) = \min \sum_{n=1}^{K} |\alpha_1 h_1(n) + \ldots + \alpha_l h_l(n)| \tag{66}$$

при $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i x_i(0) = -1$. Оптимальное время регулирования K^0 определяется как наименьшее число K, удовлетворяющее условию (65). Оптимальное управление ищется следующим образом. Пусть $\alpha^0 = \{\alpha_1^0, \ldots, \alpha_l^0\}$ — решение задачи (66); элемент $\{h^0(n)\} = \left\{\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_j^0 h_j(n)\right\}$ назовем *минимизирующим*. Если для данного функционала $f(\cdot)$ существует элемент $h(\cdot)$

$$|f(h)| = \| f(\cdot) \| \, \| h(\cdot) \|, \tag{67}$$

то этот элемент называется *экстремальным*. Элемент $h(\cdot)$ называется *нормальным*, если функционал $f(\cdot)$ определяется равенством (67) с точностью до скалярного множителя. Оптимальное управление находится из условия, что минимизирующий элемент является экстремальным для какого-либо произвольно выбранного минимального по норме решения системы (63) — (64). Если минимизирующий элемент $\{h^0(n)\}$ задачи (66) нормален, то оптимальное управление определяется однозначно. Вектор $\{h^0(n)\}$ нормален только в том случае, когда

$$h^0(n) \neq 0, \quad n = 1, \ldots, K^0. \tag{68}$$

В тех точках, где выполнено условие (68), оптимальное управление (минимальное по модулю) вычисляется по формуле

$$u^0(n-1) = \frac{1}{\lambda(K^0)} \operatorname{sign} h^0(n). \tag{69}$$

Ниже рассмотрим случаи, когда условие (68) выполняется не везде.

2. Теорема о единственности оптимального управления. Введем несколько критериев для оценки числа нулевых координат вектора $\{h^0(n)\}$, $n = 1, \ldots, K^0$. Рассмотрим совокупность векторов

$$b,\ Ab,\ \ldots,\ A^{l-1}b,\ A^l b,\ \ldots,\ A^{K^0-1}b. \tag{70}$$

Оптимальную задачу будем называть невырожденной, если первые l векторов линейно независимы. Справедливо такое утверждение: в невырожденной оптимальной задаче вектор $\{h^0(n)\}$ не может иметь более $l-1$ последовательных нулевых координат.

В самом деле, допустим противное. Пусть существует число k, при котором

$$h^0(k) = h^0(k+1) = \ldots = h^0(k+l-1) = 0.$$

Тогда по определению $\{h^0(n)\}$ имеем

$$(\alpha^0)' h(i) = 0, \quad i = k, \ldots, k+l-1$$

или, учитывая равенство (62), получаем

$$b'F'(-i)\,\alpha^0 = 0, \quad i = k, \ldots, k+l-1.$$

Нетрудно показать, что $F(-i) = F(-i-1)A$. Поэтому

$$b'(A')^j F'(-k-l+1)\,\alpha^0 = 0, \quad j = 0, \ldots, l-1.$$

Но по условию первые l векторов из (70) линейно независимы, следовательно, система однородных уравнений

$$b'(A')^j F'(-k-l+1)\,\alpha^0 = 0, \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

(где F' — транспонированная матрица F) может иметь лишь нулевое решение $\alpha_1^0 = \ldots \alpha_l^0 = 0$, что противоречит задаче (66). Предложение доказано.

Оптимальную задачу будем называть *сильно невырожденной*, если любые l векторов из совокупности (70) линейно независимы. Докажем утверждение: в сильно невырожденной задаче вектор $\{h^0(n)\}$ не может иметь более $l-1$ нулевых координат.

Допустим противное. Если

$$h^0(i_1) = \ldots = h^0(i_l) = 0, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_l,$$

то

$$b'F'(-i_k)\,\alpha^0 = 0, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Отсюда следует

$$b'(A^{i_l - i_j})' F'(-i_l)\,\alpha^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Но, по предположению, любые l векторов из (70) линейно независимы, поэтому последняя система однородных уравнений может иметь лишь нулевое решение, что опять противоречит задаче (66).

Вернемся к задаче определения оптимальных управлений в том случае, когда минимизирующий элемент задачи (66) не является нормальным. Пусть вектор $\{h^0(n)\}$ имеет q нулевых координат

$$h^0(i_1) = \ldots = h^0(i_q) = 0.$$

Тогда значения

$$u^0(i_1 - 1), \ldots, u^0(i_q - 1)$$

не могут быть определены из формулы (69). Подставим в (63) известные значения $u(i)$ и выделим члены с неизвестными координатами управления

$$\sum_{s=1}^{q} h_j(i_s)\,\eta(i_s) = -x_j(0) - \sum_t h_j(t)\,\eta(t), \quad j = 1, \ldots, l, \tag{71}$$

где $\sum_t$ — суммирование по известным значениям управлений. Система уравнений (71) при любых соотношениях между q и l совместна. Это следует из факта существования решения оптимальной задачи. Кроме того, из общих результатов, относящихся к L-проблеме, следует, что все решения уравнения (71) удовлетворяют неравенству (64). Как следует из результатов § 1, в непрерывных линейных системах из невырожденности оптимальной задачи следует существование и единственность оптимального управления для любого начального условия из окрестности нуля. Для дискретных систем это утверждение перестает быть верным (см. пример 13). Но верна следующая теорема.

Теорема 17. Оптимальное управление в сильно невырожденной задаче единственно.

Действительно, в этом случае мы имеем не более $l-1$ моментов времени, в которые оптимальное управление не определяется из формулы (69). Пусть для определенности число таких моментов равно q ($q<l$). В матрице $\{h_j(i_s)\}$, $s=1,\ldots,q$; $j=1,\ldots,l$, по крайней мере один минор порядка q отличен от нуля. Это следует из того, что векторы $\{h_j(i_s)\}$ определяются соотношением (62), и наша задача сильно невырождена: если бы все миноры q-порядка в рассматриваемой матрице равнялись нулю, то среди векторов из (70) нашелся бы вектор, линейно зависящий от $l-1$ других, что невозможно. Значит, соотношениями (71) определяются однозначно управления в остальные q моментов времени. Утверждение доказано.

3. Примеры.

Пример 11. Рассмотрим оптимальную задачу для системы двух уравнений

$$x(n+1)=x(n)+y(n),\qquad y(n+1)=y(n)+u(n).$$

Имеем

$$A=\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Bmatrix},\quad b=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}.$$

Задача сильно невырождена, так как любые два вектора из последовательности

$$b=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix},\quad Ab=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix},\ \ldots,\ A^{K^0-1}b=\begin{Bmatrix}K^0-1\\ 1\end{Bmatrix}$$

линейно независимы. Из предложений п. 2 следует, что все числа $\{u^0(n)\}$, кроме одного, определяются из формулы (69). Построим оптимальные управления для следующих точек: $\{-3, 0\}$, $\{-4, {}^1/_2\}$. Фундаментальная матрица решений имеет вид

$$F(n) = \begin{Bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Bmatrix};$$

отсюда

$$h_1(k) = -k, \quad h_2(k) = 1.$$

Задача (66) принимает вид: найти $\min \sum_{n=1}^{K} |-\alpha_1 n + \alpha_2| = \lambda(K)$ при $\alpha_1 x(0) + \alpha_2 y(0) = -1$.

Для точки $\{-3, 0\}$ минимальное число K^0, при котором $\lambda(K^0) \geqslant 1$, равно $K^0 = 4$, $\lambda(K^0) = {}^4/_3$. Минимум достигается на двух элементах: $\{\alpha_1^0 = {}^1/_3,\ \alpha_2^0 = {}^2/_3\}$, $\{\alpha_1^0 = {}^1/_3,\ \alpha_2^0 = 1\}$. Из (69) определяем оптимальное управление

$$u^0(n-1) = \frac{3}{4} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{3}n + \frac{2}{3}\right), \tag{72}$$

$$u^0(n-1) = \frac{3}{4} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{3}n + 1\right). \tag{73}$$

Для случая (72) неопределенным является значение $u^0(1)$, для случая (73) — значение $u^0(2)$. Эти значения находим из системы (71), которая в данном примере имеет вид $\sum(-n\eta(n)) = 3$, $\sum \eta(n) = 0$. Отсюда $u^0(1) = {}^3/_4$, $u^0(2) = -{}^3/_4$. Оба управления, таким образом, совпали. Заметим, что модули всех управляющих чисел равны между собой.

Для точки $\{-4, {}^1/_2\}$ решение такое же, как и для точки $\{-3, 0\}$. Три значения оптимального управления определяются по формуле

$$u^0(n-1) = \frac{3}{4} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{3}n + \frac{2}{3}\right).$$

Значение $u^0(1)$ определяется из системы $\sum(-n\eta(n)) = 4, \sum \eta(n) = {}^1/_2$. Так как последняя, как показано выше, всегда совместна, то найдем из второго уравнения: $\eta(2) = u^0(1) = {}^1/_4$. В этом случае величина $u^0(1)$, определенная из системы (71), имеет модуль меньше других значений управляющей функции.

Пример 12. Решим задачу оптимального управления для точки $\{0, -1/c_0\}$. Найдем сначала

$$\min \sum_{n=1}^{K^0} |-\alpha_1 n + \alpha_2| = \lambda(K^0) \quad \text{при} \quad \alpha_2\left(-\frac{1}{c_0}\right) = -1.$$

Подставив α_2 из второго равенства в первое, получим

$$\min \sum_{n=1}^{K^0} |-\alpha_1 n + c_0| = \lambda(K^0).$$

Найдем корни слагаемых в левой части. Имеем

$$(\alpha_1)_n = \frac{c_0}{n}, \quad n = 1, \ldots, K^0.$$

Нетрудно убедиться, что минимум достигается только тогда, когда хотя бы одно слагаемое обращается в нуль. Подсчитаем значение $\sum_{n=1}^{K} |-\alpha_1 n + c_0|$ в точке $(\alpha_1)_K$:

$$\sum_{n=1}^{K} |-(\alpha_1)_K n + c_0| =$$
$$= \left(\frac{c_0}{1} - \frac{c_0}{K}\right)1 + \ldots + \left(\frac{c_0}{K-1} - \frac{c_0}{K}\right)(K-1) =$$
$$= (K-1)c_0 - \frac{c_0}{K}(1 + \ldots + (K-1)) = \frac{K-1}{2} c_0.$$

Значение $\sum_{n=1}^{K} |-(\alpha_1)_i n + c_0|$ можно вычислить как сумму двух величин: $c_0(i-1)/2$ и

$$\left(\frac{c_0}{i} - \frac{c_0}{i+1}\right)(i+1) + \left(\frac{c_0}{i} - \frac{c_0}{i+2}\right)(i+2) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{c_0}{i} - \frac{c_0}{K}\right)K = \frac{(K-i)(K-i+1)}{2i} c_0,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{K} |-(\alpha_1)_i n + c_0| = \frac{2i^2 - 2(K+1)i + K + K^2}{2i} c_0.$$

Задача, таким образом, свелась к нахождению минимума последнего выражения по i. Можно подсчитать, что минимум достигается в точке i_0, которая удовлетворяет неравенствам

$$i_0^2 - i_0 \leqslant \frac{K+K^2}{2}, \qquad i_0^2 + i_0 \geqslant \frac{K+K^2}{2}. \tag{74}$$

Выпишем несколько значений величины $i_0(K)$:

$$i_0(K=1)=1, \quad i_0(K=2)=2, \quad i_0(K=3)=2\,(3),$$
$$i_0(K=4)=3, \quad i_0(K=5)=4, \quad i_0(K=6)=5.$$

Процедура нахождения оптимального времени довольно проста. K^0 — наименьшее число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{2i_0^2 - 2(K+1)\,i_0 + K + K^2}{2i_0}\,c_0 \geqslant 1. \tag{75}$$

Решением задачи (66) в нашем случае являются числа $\alpha_1^0 = (\alpha_1)_{i_0} = c_0/i_0$, $\alpha_2^0 = c_0$. Поэтому оптимальное управление во всех точках, кроме $n = i_0$, вычисляется по формуле

$$u_0(n-1) = \\ = \frac{2i_0}{[2i_0^2 - 2(K^0+1)\,i_0 + K^0 + (K^0)^2]\,c_0}\,\operatorname{sign}\left(-\frac{c_0}{i_0}\,n + c_0\right).$$

Значение $u^0(i_0-1)$ находим из уравнения $\sum\limits_{n=1}^{K^0} u(n-1) = 1/c_0$, которое соответствует системе (71). Имеем

$$u^0(i_0-1) = \frac{1}{c_0}\,\frac{(K^0)^2 + K^0 - 2i_0^2}{2i_0^2 - 2(K^0+1)\,i_0 + K^0 + (K^0)^2}.$$

Учитывая неравенства (74) и (75), получаем $|\,u(i_0-1)\,| \leqslant 1$. Из этих неравенств можно также получить оценки области достижимости для точек оси Oy.

Пример 13. Рассмотрим оптимальную по быстродействию задачу для системы

$$x(n+1) = -\frac{1}{2}\,x(n) + \frac{1}{4}\,y(n) + \frac{1}{2}\,u(n),$$

$$y(n+1) = \frac{1}{2}\,y(n) + u(n),$$

$$A = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \qquad b = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Имеем

$$b=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{Bmatrix},\quad Ab=\begin{Bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix},\ \ldots,\ A^{2i}b=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{Bmatrix}4^{-i},$$

$$A^{2i+1}b=\begin{Bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix}4^{-i},\ \ldots$$

Задача не является сильно невырожденной, хотя она и невырождена, ибо векторы b, Ab линейно независимы. Фундаментальная матрица имеет вид

$$F(n)=\begin{Bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{Bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{Bmatrix}h_1(1)\\ h_2(1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 2\end{Bmatrix},\ \ldots,\ \begin{Bmatrix}h_1(2i)\\ h_2(2i)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 4\end{Bmatrix}4^{i-1},$$

$$\begin{Bmatrix}h_1(2i+1)\\ h_2(2i+1)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 2\end{Bmatrix}4^{i},\ \ldots$$

Построим оптимальное управление для точки $\{-12,0\}$. Из общих результатов следует, что оно определяется по формуле (69) по крайней мере через один шаг. Свойства (70) таковы, что значения управляющей функции вычисляются последовательно по формулам (69), (71).

Если решить задачу (66) для данного примера, то получим $K^0=6$, $\lambda(K^0)={}^{21}/_{12}$, причем минимум достигается на элементе $\alpha^0=\{{}^{1}/_{12},\ -{}^{1}/_{24}\}$. Оптимальное управление имеет вид

$$u^0(n-1)=\frac{12}{21}\operatorname{sign}\left[\frac{1}{12}h_1(n)-\frac{1}{24}h_2(n)\right],\qquad n=1,\ 3,\ 5.$$

Значения $u^0(1)$, $u^0(3)$, $u^0(5)$ найдем, решая систему (71), которая в данном случае принимает вид

$$\left.\begin{aligned}2u^0(1)+8u^0(3)+32u^0(5)&=12,\\ 4u^0(1)+16u^0(3)+64u^0(5)&=24.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$u^0(5) = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}u^0(1) - \frac{1}{4}u^0(3).$$

Таким образом, оптимальное управление зависит от двух произвольных постоянных $u^0(1)$ и $u^0(3)$, что соответствует результатам п. 2.

4. L-проблема моментов на линейно зависимых элементах. В случае $K^0 < l$ (выше мы предполагали, что $K^0 \geqslant l$) непосредственное использование результатов работы [4] становится невозможным. Для задач оптимального регулирования случаи $K^0 < l$ не исключены. Это соответствует тем начальным значениям, для которых оптимальное управление возможно за число шагов, меньшее размерности фазового пространства. И в этом случае сведем задачу к обычной L-проблеме, предварительно решив ее в общем виде.

З а д а ч а. Задано n элементов $x^1, \ldots, x^n$ в пространстве E_m (линейной независимости векторов не требуется). Найти необходимые и достаточные условия для чисел $c_1, \ldots, c_n$, L, $(\sum c_i^2 > 0,\ L > 0)$, чтобы существовал линейный функционал $f(x)$, удовлетворяющий соотношениям

$$f(x^i) = c_i, \qquad \| f(\cdot) \| \leqslant L, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{76}$$

Из элементов $x^1, \ldots, x^n$ выберем базис. Пусть его образуют векторы $x^1, \ldots, x^l$. Тогда остальные элементы x^{l+i} запишутся через векторы $x^1, \ldots, x^l$:

$$x^{l+i} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}x^j, \qquad i = 1, \ldots, n-l.$$

Подставив эти значения в (76), получаем

$$f(x^i) = c_i, \qquad f(x^{l+j}) = f\Big(\sum_{k=1}^{l} a_{jk}x^k\Big) = \sum_{k=1}^{l} a_{jk}c_k = c_{l+j},$$
$$i = 1, \ldots, l;\ j = 1, \ldots, n-l.$$

Отсюда следует, что постоянные c_{l+j}, $j = 1, \ldots, n-l$, однозначно определяются заданием элементов $x^1, \ldots, x^n$ и постоянными c_i, $i = 1, \ldots, l$. Задача, таким образом, свелась к обычной L-проблеме для l линейно независимых элементов $x^1, \ldots, x^l$. Если учесть метод перехода от задачи оптимального управления к L-проблеме, то полученный результат можно выразить так: оптимальное время регулирования и оптимальное управление для переходных процессов, длительность которых не превосходит размерности фазового пространства, соответствуют точкам некоторого подпространства.

5. Применение теорем о минимаксе, об отделимости выпуклых множеств, о существовании опорной плоскости. Непосредственно L-проблема применима к линейным системам вида

$$x(n+1) = A(n)\, x(n) + b(n)\, u(n),$$

в которых класс допустимых управлений можно задать в форме неравенства с нормой

$$U(\cdot) = \{u(\cdot) \colon \|u(\cdot)\| \leqslant L\}.$$

Ниже (§§ 7, 8) таким путем решается ряд довольно сложных задач. Исследование же подобным способом систем с нелинейным входом

$$x(n+1) = A(n)\, x(n) + b(u(n), n) \tag{77}$$

наталкивается на серьезные трудности. Для таких систем эффективными являются методы §§ 6.9, 6.10. Рекомендуем в качестве упражнения исследовать указанными методами типичные задачи §§ 6.9, 6.10 для дискретных систем (77) в случае, когда $u(n) \in U$, U — ограниченное множество такое, что $b(U, n)$ выпукло.

Примечание. В п. 1 описан способ нахождения оптимального управления, минимального по норме. Конечно, методы пп. 2, 3 пригодны и для поиска релейных управлений с заданным уровнем. Для этого можно привлечь идею иерархической системы критериев (§ 7. 9).

§ 7. Оптимальные процессы в связанных системах дискретного типа

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из объекта регулирования, регулятора и связанного с ними второго объекта. Предполагается, что при регулировании первого объекта возбуждается второй объект [82], [124b]. В такой ситуации обычные задачи оптимального регулирования усложняются, так как при их решении должны учитываться ограничения, наложенные на величины, описывающие состояние второго объекта. Ниже исследуется одна задача оптимального регулирования для таких систем.

Далее через $x(n)$ и $y(n)$ обозначены векторы рассогласования в первом и втором объектах соответственно, через $u(n)$ — управляющее воздействие. Пусть рассматриваемая система регулирования описывается следующими разностными уравнениями:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n), \tag{78}$$

$$y(n+1) = Cy(n) + Du(n), \tag{79}$$

где $x(n)$ — p-вектор рассогласования первого объекта, $y(n)$ — q-вектор рассогласования второго объекта, $u(n)$ — r-вектор управляющего воздействия, матрицы C, A — неособые, а у матрицы D по крайней мере один минор порядка r отличен от нуля.

Для уравнений (78), (79) поставим такую задачу. Даны начальные значения $n = 0$, $x(0)$, $y(0) = 0$. Требуется выбрать управление $u(n)$ так, чтобы точка $x(n)$ траектории системы (78) с начальным значением $x(0)$ попала в начало координат $x = 0$ за минимально возможное время. При этом допускаются лишь такие управляющие воздействия, при которых вектор $y(n)$ уравнения (79) ограничен в следующем смысле:

$$|y_i(n)| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, q; \quad n \geqslant 0. \tag{80}$$

При решении поставленной задачи возможны три случая: а) $r = q$, б) $r < q$, в) $r > q$. Случаи а) и б) исследуются довольно легко. Решим задачу для случая, когда $q = mr$ (m — целое положительное число). Полученное решение нетрудно будет распространить и на случай а).

Решение $u^0(n)$, $x^0(n)$, $y^0(n)$ поставленной задачи будем называть оптимальным управлением и оптимальными траекториями.

2. Метод решения задачи. Введем матрицу $F(n)$, определенную при $n \geqslant 0$ и являющуюся решением уравнения

$$F(n+1) = CF(n) \tag{81}$$

с начальным значением $F(0) = E$. Рассмотрим решение

$y(n)$ уравнения (79) при условии, что $y_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, q$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что справедлива формула

$$y(n) = \sum_{s=0}^{n-1} F(n-s-1)\,Du(s). \tag{82}$$

Обозначим символом $\|u\|$ выражение

$$\left.\begin{gathered} \|u\| = \max_{1 \leqslant n \leqslant M} \max_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{q} \sum_{g=1}^{r} f_{il}(n-s-1)\,d_{lg}u_g(s) \right|, \\ F = \{f_{il}\}, \quad D = \{d_{lg}\}, \end{gathered}\right\} \tag{83}$$

где M — некоторое число. Тогда условие (80) эквивалентно неравенству

$$\|u\| \leqslant 1. \tag{84}$$

Пусть матрица $\Phi(n)$ является решением уравнений

$$\Phi(n+1) = A\Phi(n) \tag{85}$$

с начальным условием $\Phi(0) = E$. Запишем решение уравнения (78) при помощи $\Phi(n)$. Имеем

$$x(n) = \Phi(n)\,x(0) + \sum_{s=0}^{n-1} \Phi(n-s-1)\,Bu(s). \tag{86}$$

Допустим, что некоторое управление $u(n)$ приводит траекторию $x(n)$ в момент $n = M$ в начало координат, т. е. $x(M) = 0$. Пусть в (86) $n = M$. Умножим обе части соотношения (86) на $\Phi(-M)$ и перенесем $x(0)$ влево. В результате получим

$$-x(0) = \sum_{s=0}^{M-1} \Phi(-s-1)\,Bu(s).$$

Положим

$$\Gamma(s) = \Phi(-s)\,B, \quad \eta(s) = u(s-1). \tag{87}$$

Теперь можем записать

$$-x_\nu(0) = \sum_{s=1}^{M} \sum_{g=1}^{r} \gamma_{\nu g}(s)\,\eta_g(s), \;\; \nu = 1, \ldots, p, \quad \Gamma = \{\gamma_{\nu g}\}. \tag{88}$$

Ограничение (84) в силу (83) и (87) можно представить в виде

$$\|\eta\| \leqslant 1. \tag{89}$$

Выражение $\eta(\beta) = \sum_{s=1}^{M} \sum_{g=1}^{r} \beta_g(s)\, \eta_g(s)$ является некоторым линейным функционалом, определенным на системе функций $\beta_g(s)$, $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$; функционал $\eta(\cdot)$ считается известным, если известна система функций $\eta_g(s)$, $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$. Теперь, исходя из выражений (88), (89), дадим задаче (78) — (80) следующую формулировку. Найти наименьшее число M и линейный функционал $\eta(\cdot)$ такие, чтобы функционал η на p заданных системах функций $\{\gamma_{lg}(s),\ g = 1, \ldots, r;\ s = 1, \ldots, M\}$, $l = 1, \ldots, p$, принимал заданные значения $-x_l(0)$, $l = 1, \ldots, p$. При этом допускаются лишь такие функционалы, для которых выполняется неравенство (89). Таким образом, задача (78) — (80) сведена к L-проблеме моментов.

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 18. Оптимальное управление для задачи (78) — (79) имеет вид

$$u_i^0(n) = \{[W^{\alpha^0}]^{-1}\eta^{\alpha^0}\}_i(n+1),$$
$$n = 0, \ldots, K^0 - 1; \quad i = 1, \ldots, r.$$

Здесь символом $\{a\}_i(n)$ обозначена i-я координата вектора a в момент n. Выражения W^{α^0}, η^{α^0}, K^0 определяются формулами (94), (98), (114), (115).

Доказательство. Покажем сначала, что выражение

$$\|\eta\| = \max_{1 \leqslant n \leqslant M} \max_{1 \leqslant j \leqslant g} \left| \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} \sum_{g=1}^{r} f_{jl}(n-s)\, d_{lg}\eta_g(s) \right| \tag{90}$$

определяет норму системы функций $\eta_g(s)$, $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$. Для этого достаточно показать, что выполнены три условия: а) $\|\eta\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta_g(s) = 0$, $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$; б) $\|\lambda\eta\| = |\lambda|\, \|\eta\|$, если λ — действительное число; в) $\|\eta_1 + \eta_2\| \leqslant \|\eta_1\| + \|\eta_2\|$. Проверим выполнение этих условий для выражения (90). Если $\eta_g(s) = 0$, $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$, то из (90) следует, что $\|\eta\| = 0$. Пусть $\|\eta\| = 0$. Тогда в силу (90) и (82) $y(n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots, M$. Так как $y(n)$ — решение уравнения (79), то, имея в виду (87), получаем

$$Du(n) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{91}$$

По предположению, по крайней мере один минор порядка r у матрицы D отличен от нуля. Отсюда следует, что $u_g(n)=0$, $g=1, \ldots, r$; $n=0, \ldots, M-1$ — единственное решение полученной системы уравнений.

На проверке условий б) и в) останавливаться не будем. Перейдем к получению вида управляющей функции $u^0(n)$ в оптимальном процессе. Введем в рассмотрение линейное неособое преобразование *) S, определенное на системах функций $\eta_g(s)$, $g=1, \ldots, r$; $s=1, \ldots, M$. Символом $[S\eta]_i(\rho)$ обозначим i-ю координату в момент $s=\rho$ образа $S\eta$ функции η после воздействия на нее преобразованием S. Считаем, что

$$\begin{gathered}
[S\eta]_i(\rho)=\sum_{s=1}^{\rho}\sum_{l=1}^{q}\sum_{g=1}^{r} f_{il}(\rho-s)\, d_{lg}\eta_g(s)+\\
+\sum_{s=1}^{\rho}\sum_{l=1}^{q}\sum_{g=1}^{r} f_{i+r,\, l}(\rho-s)\, d_{lg}\eta_g(s)+\ldots\\
\ldots+\sum_{s=1}^{\rho}\sum_{l=1}^{q}\sum_{g=1}^{r} f_{(m-1)r+i,\, l}(\rho-s)\, d_{lg}\eta_g(s)=\\
=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{s=1}^{\rho}\sum_{l=1}^{q}\sum_{g=1}^{r} f_{(\alpha-1)r+i,\, l}(\rho-s)\, d_{lg}\eta_g(s), \qquad (92)\\
i=1, \ldots, r;\ \rho=1, \ldots, M.
\end{gathered}$$

Исходя из формулы (92), можно вычислить обратное преобразование S^{-1}. Пусть $(S^{-1})'$ — транспонированное преобразование S^{-1}. Из теории линейных преобразований известно, что справедливо тождество

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r}\beta_g(s)\,\eta_g(s)=\sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r}[(S^{-1})'\beta]_g(s)\,[S\eta]_g(s). \qquad (93)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\eta_i^{\alpha}(\rho)=\sum_{s=1}^{\rho}\sum_{l=1}^{q}\sum_{g=1}^{r} f_{(\alpha-1)r+i,\, l}(\rho-s)\, d_{lg}\eta_g(s), \qquad (94)\\
i=1, \ldots, r;\ \alpha=1, \ldots, m;\ \rho=1, \ldots, M.
\end{gathered}$$

---

*) Предполагаем, что рассматриваемые ниже преобразования S, W^{α} и преобразование (101) неособые. Путем незначительных изменений в рассуждениях это ограничение можно снять.

Представим функцию $[(S^{-1})'\beta]_g(s)$ в виде

$$[(S^{-1})'\beta]_g(s) = h_g^1(s) + \ldots + h_g^m(s), \tag{95}$$

где функции $h_g^\alpha(s)$ вычислены из условий

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r} h_g^\alpha(s)\,\eta_g^\delta(s) = -\sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r} h_g^\delta(s)\,\eta_g^\alpha(s), \qquad \delta \neq \alpha. \tag{96}$$

С учетом выражений (95), (96) тождество (93) перепишется следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r} \beta_g(s)\,\eta_g(s) = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r} h_g^\alpha(s)\,\eta_g^\alpha(s). \tag{97}$$

Функции $h_g^\alpha(s)$ можно выразить через функции $\beta_g(s)$. Действительно, в матричной записи формула (94) имеет вид

$$\eta^\alpha = W^\alpha \eta. \tag{98}$$

Пусть преобразование W^α неособое. Тогда

$$\eta^\delta = W^\delta (W^\alpha)^{-1}\eta^\alpha = W^{\delta\alpha}\eta^\alpha. \tag{99}$$

Введем обозначение, положив

$$(h^\alpha)'\,\eta^\delta = \sum_{s=1}^{M}\sum_{g=1}^{r} h_g^\alpha(s)\,\eta_g^\delta(s).$$

Из соотношений (96) и (98) имеем

$$(h^\alpha)'\,\eta^\delta = (h^\alpha)'\,W^{\delta\alpha}\eta^\alpha = -(h^\delta)'\,\eta^\alpha, \qquad \alpha \neq \delta,$$

или

$$h^\delta = -(W^{\delta\alpha})'\,h^\alpha. \tag{100}$$

Поэтому из равенства (95) получаем

$$h^1 = \Big[E - \sum_{i=2}^{m} (W^{i1})'\Big]^{-1} [(S^{-1})'\beta]. \tag{101}$$

Остальные функции h^α, $\alpha = 2, \ldots, m$, вычисляем из формулы (100). Рассмотрим пространство систем функций $h_g^\alpha(s)$, $\alpha = 1, \ldots, m$; $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$, норма элементов h в котором задается выражением

$$\|h\| = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{g=1}^{r}\sum_{s=1}^{M} |h_g^\alpha(s)|. \tag{102}$$

Над введенным таким образом пространством определим функционал $\eta(h)$, общий вид которого

$$\eta(h)=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{g=1}^{r}\sum_{s=1}^{M} h_g^{\alpha}(s)\,\eta_g^{\alpha}(s). \tag{103}$$

Норма функционала η однозначно определяется из (101) и (102):

$$\|\eta\|=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant m}\ \max_{1\leqslant g\leqslant r}\ \max_{1\leqslant s\leqslant M}\ |\eta_g^{\alpha}(s)|. \tag{104}$$

Применим преобразования S и $(S^{-1})'$ к выражению (88) и после выкладок типа (93)—(101) получим

$$-x_{\nu}(0)=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{g=1}^{r}\sum_{s=1}^{M}\gamma_{\nu g}^{\alpha}(s)\,\eta_g^{\alpha}(s),\qquad \nu=1,\,\ldots,\,p, \tag{105}$$

где

$$\gamma_{\nu g}^{\alpha}(s)=\Big\{-(W^{\alpha 1})'\Big[E-\sum_{i=2}^{m}(W^{i1})'\Big]^{-1}[(S^{-1})'\,\gamma^{\nu}]\Big\}_g(s).$$

Функции $\eta_g^{\alpha}(s)$ определяем по формуле (94). Учтем еще соотношения (99), которые в более подробной записи $(\alpha=1)$ имеют вид

$$\eta_i^{\delta}(s)=[W^{\delta 1}\eta^1]_i(s),\ \ i=1,\,\ldots,\,r;\ \ \delta=2,\,\ldots,\,m;$$
$$s=1,\,\ldots,\,M. \tag{106}$$

Общий вид линейной операции над матрицами $\{\eta_i^1(s)\}$, $i=1,\,\ldots,\,r$; $s=1,\,\ldots,\,M$, записывается таким образом:

$$\sum_{t=1}^{M}\sum_{j=1}^{r} T_{ij}(t,\ s)\,\eta_j(t).$$

Поэтому соотношения (106) можно переписать в виде

$$\eta_i^{\delta}(s)-\sum_{t=1}^{M}\sum_{j=1}^{r}\widetilde{T}_{ij}^{\delta}(t,\ s)\,\eta_j^1(t)=0, \tag{107}$$
$$i=1,\,\ldots,\,r;\quad \delta=2,\,\ldots,\,m;\quad s=1,\,\ldots,\,M.$$

Положим

$$T_{ij}^{\delta 1}(t,\ s)=\widetilde{T}_{ij}^{\delta}(t,\ s),\quad T_{ij}^{\delta\varepsilon}(t,\ s)=0,\quad \text{если}\quad \varepsilon\neq 1,\ \delta, \tag{108}$$
$$T_{ii}^{\delta\delta}(s,\ s)=-1,\qquad T_{ij}^{\delta\delta}(t,\ s)=0,\ \text{если}\ i\neq j.$$

Тогда (107) будет иметь вид

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m}\sum_{t=1}^{M}\sum_{j=1}^{r} T_{ij}^{\delta\varepsilon}(t, s)\,\eta_j^{\varepsilon}(t) = 0, \tag{109}$$

$$i = 1, \ldots, r; \quad \delta = 2, \ldots, m; \quad s = 1, \ldots, M.$$

Следовательно, оптимальной задаче (78) — (80) можно дать такую функциональную формулировку. В пространстве систем функций $h_g^{\alpha}(s)$, $\alpha = 1, \ldots, m$; $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$, найти наименьшее число $M = K^0$ и линейный функционал $\eta(h)$ такие, что линейный функционал η на p элементах γ^{ν}, $\nu = 1, \ldots, p$, и $r(m-1)K^0$ элементах $T_i^{\delta}(s)$, $i = 1, \ldots, r$; $\delta = 2, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, K^0$, принимает соответственно значения: $-x_{\nu}(0)$, $\nu = 1, \ldots, p$ и $0, \ldots, 0$ (см. (105), (109)). При этом норма (104) функционала должна удовлетворять неравенству

$$\|\eta\| \leqslant 1. \tag{110}$$

Пусть элементы $\{\gamma^{\nu}\}$, $\{T_i^{\delta}(s)\}$ линейно независимы. Тогда можно применить результаты, относящиеся к L-проблеме. Согласно основному предложению задача (105), (109), (110) имеет решение тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\lambda(M) \geqslant 1, \tag{111}$$

где число $\lambda(M)$ определяется следующим образом:

$$\lambda(M) = \min \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{g=1}^{r}\sum_{s=1}^{M} \Big|\xi_1\gamma_{1g}^{\alpha}(s) + \ldots + \xi_p\gamma_{pg}^{\alpha}(s) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\delta=2}^{m}\sum_{t=1}^{M}\xi_i^{\delta}(t)\,T_{ig}^{\delta\alpha}(s, t)\Big| \tag{112}$$

при $\sum\limits_{i=1}^{p}\xi_i x_i(0) = -1$. Оптимальное время регулирования равно наименьшему числу, удовлетворяющему неравенству (111). Чтобы определить оптимальное управление, поступаем следующим образом. Пусть $\xi_1^0, \ldots, \xi_p^0$, $[\xi_i^{\delta}(t)]^0$, $\delta = 2, \ldots, m$; $t = 1, \ldots, M$; $i = 1, \ldots, r$ — решение задачи (112). Рассмотрим элемент

$$[\gamma_g^{\alpha}(s)]^0 = \sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\gamma_{ig}^{\alpha}(s) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\delta=2}^{m}\sum_{t=1}^{M}[\xi_i^{\delta}(t)]^0\,T_{ig}^{\delta\alpha}(s, t). \tag{113}$$

В силу одного из предложений работы минимальное по норме решение $[\eta_g^\alpha(s)]^0$ задачи (105), (109), (110) имеет элемент $[\gamma_g^\alpha(s)]^0$ в качестве экстремального, т. е.

$$|\eta\{[\gamma_g^\alpha(s)]^0\}| = \|[\eta_g^\alpha(s)]^0\| \, \|[\gamma_g^\alpha(s)]^0\|.$$

Из этого условия находим, что

$$[\eta_g^\alpha(s)]^0 = \frac{1}{\lambda(K^0)} \operatorname{sign}[\gamma_g^\alpha(s)]^0 \quad \text{при} \quad [\gamma_g^\alpha(s)]^0 \neq 0. \tag{114}$$

Если $[\gamma_g^\alpha(s)]^0 = 0$, то полагаем

$$[\eta_g^\alpha(s)]^0 = \omega_g^\alpha(s), \tag{115}$$

где $\omega_g^\alpha(s)$ должны удовлетворять условию $|\omega_g^\alpha(s)| \leqslant 1$. Чтобы найти эти числа, подставим значения $[\eta_g^\alpha(s)]^0$, определяемые соотношениями (114), в (105), (109). Из последних уравнений будем определять $\omega_g^\alpha(s)$. Здесь возможны два случая: числа $\omega_g^\alpha(s)$ определятся единственным образом или числа $\omega_g^\alpha(s)$ будут зависеть от некоторого числа параметров.

Для нашей задачи нет необходимости искать значения $[\eta_g^\alpha(s)]^0$ во всех точках. Допустим, что W^{α^0} — неособое преобразование. Найдем все значения $[\eta_g^{\alpha^0}(s)]^0$, $g = 1, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, M$. Теперь из (98) находим оптимальное управление

$$\eta_g^0(s) = \{[W^{\alpha^0}]^{-1}\eta^{\alpha^0}\}_g(s).$$

3. Оптимальное управление системой с инерционным регулятором. Ниже рассматривается следующая задача. Даны начальные состояния $x(0)$ и $y(0) = 0$ объекта и регулятора. Требуется определить закон образования воздействий $u(n)$, которые за минимально возможное время уничтожают рассогласование $x(0)$ объекта, оставляя при этом ограниченными фазовые координаты регулятора.

Дадим математическую формулировку рассматриваемой задачи. Пусть состояние объекта описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &x(n+1) = Ax(n) + By(n), \\ &\qquad x = \{x_1, \ldots, x_p\}, \quad y = \{y_1, \ldots, y_q\}, \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

регулятор задан уравнением

$$y(n+1)=Cy(n)+Du(n), \qquad u=\{u_1, \ldots, u_r\}, \qquad (117)$$

где A, B, C, D — постоянные матрицы. Предположим, что даны начальные условия $x(0)$ и $y(0)=0$. Нужно найти управление $u(n)$, которое за минимально возможное время K^0 переводит точку $x(0)$ вдоль траектории системы (116) в начало координат; координаты вектора $y(n)$ должны удовлетворять неравенствам

$$|y_k(n)| \leqslant 1, \quad k=1, \ldots, q; \quad n \geqslant 0.$$

Покажем, что задача оптимизации для (116) — (117) сводится к задаче, рассмотренной в пп. 1, 2. Введем функции $h_{ij}(n)$, $i=1, \ldots, p+q$; $j=1, \ldots, p+q$, $n \geqslant 0$, являющиеся решением уравнений

$$h_{ij}(n+1)=\sum_{k=1}^{p+q} \tilde{a}_{ik} h_{kj}(n), \quad h_{ii}(0)=1, \quad h_{ij}(0)=0, \ i \neq j,$$

где числа $\tilde{a}_{ik}$ определены через коэффициенты уравнений (116), (117) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ik} &= a_{ik}, \quad i=1, \ldots, p; \ k=1, \ldots, p, \\ \tilde{a}_{i,\,k+p} &= b_{ik}, \quad i=1, \ldots, p; \quad k=1, \ldots, q, \\ \tilde{a}_{ik} &= 0, \quad i=p+1, \ldots, p+q; \quad k=1, \ldots, p, \\ \tilde{a}_{i+p,\,k+p} &= c_{ik}, \quad i=1, \ldots, q; \quad k=1, \ldots, q. \end{aligned}$$

При помощи функций $\{h_{ij}(n)\}$ решение $x(n)$ системы (116) записывается в виде

$$x_i(n)=\sum_{j=1}^{p} h_{ij}(n) x_j(0)+\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} h_{i,\,j+p}(n-s) \times \\ \times d_{jk} u_k(s-1), \quad i=1, \ldots, p. \qquad (118)$$

Уравнение (118) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (86). Поэтому, проводя последовательно рассуждения, изложенные в пп. 1, 2, получим решение задачи для систем (116) — (117).

4. Пример.

Пример 14. Для иллюстрации результатов пп. 1 и 2 рассмотрим такой пример. Пусть первый объект описывается уравнением

$$x_1(n+1)=\frac{1}{2} x_1(n)+u(n),$$

а состояние второго объекта можно определить системой уравнений

$$y_1(n+1) = y_1(n) + y_2(n), \quad y_2(n+1) = y_2(n) + u(n).$$

Предположим, что начальные состояния таковы: $x_1(0)$, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$. Требуется рассогласование $x_1(0)$ свести до нуля за минимальное время, управляя таким образом, чтобы координаты $y_1(n)$ и $y_2(n)$ во время переходного процесса были ограничены:

$$|y_1(n)| \leqslant 1, \quad |y_2(n)| \leqslant 1, \quad n \geqslant 0.$$

Это частный случай оптимальной задачи, рассмотренной в пп. 1, 2, а именно: $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$. Для данного примера функции, которые нужны для определения оптимального управления, имеют вид

$$F(n) = \begin{Bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \Phi(n) = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}, \quad B = \{1\},$$

$$[S\eta](\rho) = \sum_{s=1}^{\rho} (\rho - s)\,\eta(s) + \sum_{s=1}^{\rho} \eta(s),$$

$$[S^{-1}\nu](1) = \nu(1), \quad [S^{-1}(\nu)](2) = \nu(2) - 2\nu(1),$$

$$[S^{-1}\nu](\rho) = \nu(\rho) - 2\nu(\rho-1) - \nu(\rho-2), \quad \rho = 3, \ldots, M,$$

$$[(S^{-1})'\nu](\rho) = \nu(\rho) - 2\nu(\rho+1) + \nu(\rho+2), \quad \rho = 1, \ldots, M-2,$$

$$[(S^{-1})'\nu](M-1) = \nu(M-1) - 2\nu(M),$$

$$[(S^{-1})'\nu](M) = \nu(M),$$

$$\eta^1(n) = \sum_{s=1}^{n} \eta(s) \equiv [W^1\eta](n);$$

$$\eta^2(n) = \sum_{s=1}^{n} (n-s)\,\eta(s) \equiv [W^2\eta](n).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \eta(n) = [(W^1)^{-1}\eta^1](n) &\equiv \begin{cases} \eta^1(1), & n = 1, \\ \eta^1(n) - \eta^1(n-1), & n = 2, \ldots, M, \end{cases} \\ \eta^2(n) = [W^{21}\eta^1](n) &\equiv \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \sum\limits_{s=1}^{n-1} \eta^1(s), & n = 2, \ldots, M. \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Оператор $(W^{21})'$ имеет вид

$$h^2(n) = [(W^{21})' h^1](n) = \begin{cases} \sum\limits_{i=n+1}^{M} h^1(i), & n = 1, \dots, M-1, \\ 0, & n = M. \end{cases}$$

Подсчитаем функции $\gamma_{11}^{\alpha}(s)$:

$$\gamma_{11}^1(M) = 2^M, \quad \gamma_{11}^1(M-1) = -2^{M-1}, \quad \gamma_{11}^1(M-2) = 3\cdot 2^{M-2}, \dots$$

$$\gamma_{11}^2(M) = 0, \quad \gamma_{11}^2(M-1) = -2^M, \quad \gamma_{11}^2(M-2) = -2^{M-1}, \dots$$

Из формулы (119) получаем элементы $T_{11}^{2\varepsilon}(t, s)$, входящие в выражения (109): $T_{11}^{21}(t, s) = 1$ при $t = 1, \dots, s-1$; $T_{11}^{21}(t, s) = 0$ при $t = s, \dots, M$; $T_{11}^{22}(t, s) = -1$ при $t = s$; $T_{11}^{22}(t, s) = 0$, если $t \neq s$. Выражение (112) для нашего примера имеет вид

$$\lambda(M) = \min \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{s=1}^{M} \left| \xi\gamma_{11}^{\alpha}(s) + \sum_{i=1}^{M} \xi_i T_{11}^{2\alpha}(s, i) \right|$$

при $\xi x(0) = -1$. Пусть $x(0) = 12$. Подсчитаем $\lambda(M)$ при этом значении. Оказывается, что наименьшее число M, удовлетворяющее неравенству $\lambda(M) \geqslant 1$, равно 3. При этом $\lambda(K^0 = 3) = 1$,

$$\xi^0 = -1/12, \quad \xi_1^0 = 1/3, \quad \xi_2^0 = 3/4, \quad \xi_3^0 = -1/6.$$

Отсюда получаем вид экстремального элемента (113)

$$[\gamma^{\alpha}(s)]^0 = -\frac{\gamma_{11}^{\alpha}(s)}{12} + \frac{1}{3} T_{11}^{2\alpha}(s, 1) + \frac{3}{4} T_{11}^{2\alpha}(s, 2) - \frac{1}{6} T_{11}^{2\alpha}(s, 3).$$

В силу формулы (114) имеем

$$[\eta^{\alpha}(s)]^0 = \operatorname{sign}[\gamma^{\alpha}(s)]^0.$$

Положим $\alpha = 1$. Тогда $[\gamma^1(1)]^0 = 0$, $[\gamma^1(2)]^0 = 2/12$, $[\gamma^1(3)]^0 = -8/12$. Поэтому

$$[\eta^1(1)]^0 = c, \quad [\eta^1(2)]^0 = 1, \quad [\eta^1(3)]^0 = -1 \qquad (120)$$

где c — число, которое должно определяться из условия попадания траектории $x_1(n)$ в начало координат. Из соотношений (119) и (120) получаем

$$\eta^0(1) = c, \quad \eta^0(2) = 1 - c, \quad \eta^0(3) = -2. \tag{121}$$

Формула (88) в нашем случае имеет вид: $-12 = 2c + 4(1 - c) - 16$. Отсюда находим, что $c = 0$, а поскольку $u(i) = \eta(i + 1)$, то из (121) получаем оптимальное управление $u^0(0) = 0$, $u^0(1) = 1$, $u^0(2) = -2$.

§ 8. Общая задача оптимального управления связанными системами дискретного типа

1. Постановка задачи *). Допустим, что рассматриваемая система регулирования описывается уравнениями

$$x(n + 1) = Ax(n) + Bu(n), \tag{122}$$

$$y(n + 1) = Cy(n) + Du(n), \tag{123}$$

где **) $x = \{x_1, \ldots, x_p\}$; $y = \{y_1, \ldots, y_q\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_q\}$, A, B, C, D — постоянные матрицы, из которых матрицы A, C, D неособые ***). Размеры матриц A, B, C, D равны $p \times p$, $p \times q$, $q \times q$, $q \times q$ соответственно. Рассмотрим такую задачу. Пусть известны начальные значения $n = 0$, $x(0)$, $y(0) = 0$. Требуется выбрать управление $u(n)$, которое фазовую траекторию $x(n)$ системы (122) за минимальное время $n = K^0$ переводит из состояния $x(0)$ в начало координат. При этом управления $u(n)$ должны принадлежать некоторому классу функций. Будем считать, что допустимыми являются управления, которые во время переходного процесса ограничены вместе с вектор-функцией $y(n)$. Именно

$$|u_i(n)| \leqslant 1, \quad |y_i(n)| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, q; \quad n \geqslant 0. \tag{124}$$

---

*) Задача поставлена А. А. Фельдбаумом [124b, стр. 620].

**) Предположение, что размерность r управления u равна q, сделано для упрощения дальнейших выкладок. Пользуясь результатами § 7, нетрудно исследовать случай, когда r — любое число.

***) Рассматриваемая ниже задача может быть решена тем же методом и в случае, когда ранг матрицы D меньше q.

Решения $u^0(n)$, $x^0(n)$, $y^0(n)$ сформулированной задачи будем называть оптимальным управлением и оптимальными траекториями.

2. Метод решения. Введем матричные функции $\Phi(n) = \{\varphi_{ij}(n)\}$ и $F(n) = \{f_{ij}(n)\}$, являющиеся решениями уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \Phi(n+1) = A\Phi(n), \quad F(n+1) = CF(n), \\ \Phi(0) = E, \quad F(0) = E. \end{array}\right\} \qquad (125)$$

Учитывая начальное условие $y(0) = 0$, решение $y(n)$ уравнения (123) можно представить следующим образом:

$$y(n) = \sum_{s=0}^{n-1} F(n-s-1)\,Du(s). \qquad (126)$$

В § 7 показано, что выражение

$$\max_{1\leqslant n\leqslant M}\ \max_{1\leqslant j\leqslant q}\left|\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{q}\sum_{g=1}^{q} f_{jl}(n-s-1)\,d_{lg}u_g(s)\right|, \quad \{d_{lg}\} = D,$$

определяет норму вектор-функции $u(n)$, $n = 0, \ldots, M-1$. Обозначим эту норму символом $\|u\|_1$; символом $\|u\|_2$ обозначим норму, определяемую выражением $\max\limits_{1\leqslant n\leqslant M}\ \max\limits_{1\leqslant g\leqslant q} |u_g(n-1)|$. Пусть

$$\|u\| = \max\{\|u\|_1, \|u\|_2\}. \qquad (127)$$

Ясно, что условия (124) равносильны неравенству

$$\|u\| \leqslant 1. \qquad (128)$$

Запишем решение уравнения (122) при помощи функции $\Phi(n)$. Имеем

$$x(n) = \Phi(n)\,x(0) + \sum_{s=0}^{n-1}\Phi(n-s-1)\,Bu(s).$$

Пусть $u(n)$ — управление, которое в момент $n = M$ в первый раз приводит траекторию $x(n)$ в начало координат. Тогда из последней формулы получаем

$$-x_i(0) = \sum_{s=0}^{M-1}\sum_{j=1}^{q}[\Phi(-s-1)\,B]_{ij}\,u_j(s), \quad i = 1, \ldots, p,$$

где символом $[Q]_{ij}$ обозначен элемент матрицы Q. Положим

$$\eta(s) = u(s-1), \quad \{\gamma^1(s), \ldots, \gamma^p(s)\} = \Phi(-s)B,$$

$$\eta'\gamma^i = \sum_{s=1}^{M} \sum_{j=1}^{q} \gamma_j^i(s)\,\eta_j(s).$$

Тогда для определения функций $\eta(s)$ получаем систему

$$-x_i(0) = \eta'\gamma^i, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{129}$$

Обозначим через R' пространство систем $\{\eta_j(s)\}$ с нормой (127). Пусть $R'' = R$ — сопряженное к R' пространство систем $\{\gamma_j(s)\}$. Общий вид линейного функционала η над R задается выражением $\eta(\gamma) = \eta'\gamma$. Поэтому исходную задачу можно сформулировать так: найти наименьшее число $M = K^0$ и линейный функционал η, $\|\eta\| \leqslant 1$, который на заданных элементах $\gamma^i \in R$ принимает значения $-x_i(0)$.

Задача, таким образом, сведена к L-проблеме. Для фактического применения результатов решения L-проблемы нужно знать явное выражение нормы в пространстве R. Ниже описывается прием, который позволяет обойтись без вычисления нормы в R.

Рассмотрим преобразование S, определенное в пространстве R' выражением

$$S\eta = \eta + Q\eta = (E+Q)\,\eta,$$

где преобразование Q задано таким образом:

$$[Q\eta]_i(\rho) = \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{j=1}^{q} [F(\rho-s-1)D]_{ij}\,\eta_j(s+1), \tag{130}$$

$$i = 1, \ldots, q; \quad \rho = 1, \ldots, M.$$

Допустим, что оператор S имеет обратный S^{-1}. Обозначим через $(S^{-1})'$ оператор, удовлетворяющий тождеству

$$\gamma'\eta = [(S^{-1})'\gamma]'\,S\eta.$$

В пространстве R' введем два элемента η^1 и η^2, положив

$$\eta^1 = \eta, \quad \eta^2 = Q\eta^1. \tag{131}$$

Разложим элемент $(S^{-1})'\gamma$ пространства R на h^1 и h^2 следующим образом:

$$(S^{-1})'\gamma = h^1 + h^2, \quad (h^1)'\eta^2 = -(h^2)'\eta^1. \tag{132}$$

Из тождеств

$$(h^1)'\,\eta^2 = (h^1)'\,Q\eta^1 = [Q'h^1]'\,\eta^1 = -\,(h^2)'\,\eta^1$$

получаем $h^2 = -\,Q'h^1$. Предположим, что оператор $(E - Q')^{-1}$ существует. Из соотношений (131), (132) можно получить формулы для определения элементов h^1 и h^2. Имеем

$$(S^{-1})'\,\gamma = h^1 - Q'h^1 = (E - Q')\,h^1,$$
$$h^1 = (E - Q')^{-1}\,(S^{-1})'\,\gamma.$$

Следовательно,

$$h^1 = (E - Q')^{-1}\,(E + Q')^{-1}\,\gamma = (E - (Q')^2)^{-1}\gamma,$$
$$h^2 = -\,Q'\,(E - (Q')^2)^{-1}\gamma.$$

Если таким образом разложить заданные элементы γ^i (см. (129)) на элементы h_i^1, h_i^2, $i = 1, \ldots, p$, то вместо соотношения (129) получим

$$-x_i\,(0) = (h_i^1)'\,\eta^1 + (h_i^2)'\,\eta^2. \qquad (133)$$

Теперь вместо пространства R рассмотрим пространство R_1, состоящее из функций $h = \{h^1, h^2\}$. Норму $\|\,h\,\|$ элементов этого пространства определим так:

$$\|\,h\,\| = \|\,h^1\,\| + \|\,h^2\,\|.$$

Общий вид линейного функционала над R_1 записывается в форме $\beta\,(h) = (h^1)'\,\eta^1 + (h^2)'\,\eta^2$, где $\beta = \{\eta^1, \eta^2\}$ — элемент пространства R_1'. Отсюда получаем норму $\|\,\beta\,\|$ в сопряженном пространстве R_1'

$$\|\,\beta\,\| = \max\,\{\|\,\eta^1\,\|,\ \|\,\eta^2\,\|\},$$

т. е. $\|\,\beta\,\|$ совпадает с выражением (127). В силу сделанных выше преобразований следует помнить, что среди функционалов из R_1' можно использовать лишь те функционалы $\beta = \{\eta^1, \eta^2\}$, составляющие компоненты η^1, η^2 которых удовлетворяют второму равенству из (131). Преобразуем это равенство к виду, более удобному для дальнейшего. Используя явный вид (130) оператора Q, вместо второго соотношения из (131) получаем выражения

$$\sum_{s=1}^{\rho}\sum_{j=1}^{q}\,[F\,(\rho - s)\,D]_{ij}\,\eta_j^1\,(s) - \eta_i^2\,(\rho) = 0, \qquad (134)$$
$$i = 1, \ldots, q; \quad \rho = 1, \ldots, M.$$

В пространстве R_1 введем в рассмотрение qM элементов $\{K_\rho^i, N_\rho^i\}$, $i=1, \ldots, q$; $\rho=1, \ldots, M$, положив

$$\left.\begin{aligned} &[K_\rho^i]_j(s)=[F(\rho-s)D]_{ij}, \quad s=1, \ldots, \rho; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j=1, \ldots, q; \\ &[K_\rho^i]_j(s)=0, \quad s=\rho+1, \ldots, M; \\ &[N_\rho^i]_j(s)=-1, \quad s=\rho; \quad j=i; \\ &[N_\rho^i]_j(s)=0, \quad s\neq\rho; \quad i\neq j. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Выражение (134) можно записать в виде

$$[K_\rho^i]'\eta^1+[N_\rho^i]'\eta^2=0. \quad i=1, \ldots, q; \quad \rho=1, \ldots, M. \tag{136}$$

Пусть элементы $\{h_i^1, h_i^2\}$, $\{K_\rho^j, N_\rho^j\}$, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, q$; $\rho=1, \ldots, M$, линейно независимы. Исходя из соотношений (133) и (136), задачу, поставленную в п. 1, можно сформулировать в виде следующей функциональной проблемы. Требуется найти наименьшее число $M=K^0$ и линейный функционал $\beta=\{\eta^1, \eta^2\}$, $\|\beta\|\leqslant 1$, который принимает значения $\{-x_i(0)\}$ на элементах $\{h_i^1, h_i^2\}$, $i=1, \ldots, p$, а на элементах $\{K_\rho^j, N_\rho^j\}$ (см. (135)), $j=1, \ldots, q$; $\rho=1, \ldots, M$, его значения равны нулю.

Решение последней задачи уже неоднократно приводилось. Вычисляем число

$$\lambda(M)=\min_{\xi' x(0)=-1}\Big\{\sum_{s=1}^{M}\sum_{j=1}^{q}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i[h_i^1]_j(s)+ \\ +\sum_{\rho=1}^{M}\sum_{i=1}^{q}\sigma_\rho^i[K_\rho^i]_j(s)+\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i[h_i^2]_j(s)+ \\ +\sum_{\rho=1}^{M}\sum_{i=1}^{q}\sigma_\rho^i[N_\rho^i]_j(s)\Big|\Big]\Big\}. \tag{137}$$

Находим наименьшее число $M=K^0$, удовлетворяющее неравенству $\lambda(M)\geqslant 1$. Число K^0 есть оптимальное время регулирования. Обозначим через ξ_i^0, σ_ρ^{j0}, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, q$; $\rho=1, \ldots, M$, решение задачи (137). Составим минимизирующий элемент $\psi=\{\psi^1, \psi^2\}$ задачи (137), координаты ψ^1, ψ^2 которого вычислим так:

$$\psi_j^1(s)=\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0[h_i^1]_j(s)+\sum_{\rho=1}^{M}\sum_{i=1}^{q}\sigma_\rho^{i0}[K_\rho^i]_j(s),$$

$$\psi_j^2(s)=\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0[h_i^2]_j(s)+\sum_{\rho=1}^{M}\sum_{i=1}^{q}\sigma_\rho^{i0}[N_\rho^i]_j(s).$$

Оптимальное управление $u^0(n)$ и оптимальная траектория (минимальные по норме) находятся из формул

$$\left.\begin{aligned} &u_j^0=\frac{1}{\lambda(K^0)}\operatorname{sign}\psi_j^1(s+1)\\ &\qquad\text{при } \psi_j^1(s+1)\neq 0, \quad s=0, \ldots, K^0-1,\\ &y_j^0(s)=\frac{1}{\lambda(K^0)}\operatorname{sign}\psi_j^2(s)\\ &\qquad\qquad\text{при } \psi_j^2(s)\neq 0, \quad s=1, \ldots, K^0. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Формулы (138) вместе с соотношениями (133) дают полное решение задачи.

3. Пример.

Пример 15. Предположим, что состояние первого объекта можно описать уравнениями

$$x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n), \quad x_2(n+1)=\frac{1}{2}x_2(n)+\frac{1}{4}u(n). \tag{139}$$

Пусть для второго объекта соответствующее уравнение имеет вид

$$y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+\frac{1}{3}u(n), \quad y(0)=0. \tag{140}$$

Нужно за минимальное время уничтожить рассогласование $x_1(0)$, $x_2(0)$ при условии, что в переходном процессе не нарушаются неравенства

$$|u(n)|\leqslant 2, \quad |y(n)|\leqslant\frac{1}{3}, \quad n\geqslant 0. \tag{141}$$

Замена $v=\frac{1}{2}u$, $y_1=3y$ позволяет записать выражения (139) — (141) таким образом.

$$x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n),\quad x_2(n+1)=\frac{1}{2}x_2(n)+\frac{1}{2}v(n),$$

$$y_1(n+1)=\frac{1}{2}y_1(n)+2v(n),$$

$$|v(n)|\leqslant 1,\quad |y_1(n+1)|\leqslant 1,\quad n\geqslant 0.$$

Подсчитываем $\Phi(-n)$, $F(n)$ (см. (125)):

$$\Phi(-n)=\begin{Bmatrix}1 & 2-2^{n+1}\\ 0 & 2^n\end{Bmatrix},\qquad F(n)=\{2^{-n}\}.$$

Элементы $\gamma^1(s)$, $\gamma^2(s)$ равны $\gamma^1(s)=1-2^s$, $\gamma^2(s)=2^{s-1}$. Оператор Q определяется выражением

$$[Q\eta](\rho)=\sum_{s=1}^{\rho}2^{s-\rho+1}\eta(s).$$

Поэтому

$$[Q'\gamma](\rho)=\sum_{s=\rho}^{M}2^{\rho-s+1}\gamma(s).$$

Далее имеем

$$[S\eta](\rho)=[\eta+Q\eta](\rho)=\eta(\rho)+\sum_{s=1}^{\rho}2^{s-\rho+1}\eta(s),$$

$$[S^{-1}\eta](\rho)=\eta(\rho)-\frac{2}{3}\sum_{s=1}^{\rho}\sigma^{s-\rho}\eta(s),$$

$$[(S^{-1})'\gamma](\rho)=\gamma(\rho)-\frac{2}{3}\sum_{s=\rho}^{M}\sigma^{\rho-s}\gamma(s).$$

Пусть $\eta^1=\eta$, $\eta^2(\rho)=\sum_{s=1}^{\rho}2^{s-\rho+1}\eta^1(s)$. Вычислив оператор

$$[(E-Q')^{-1}](\rho)=\gamma(\rho)+\sum_{s=\rho}^{M}(-2)^{\rho-s+1}\gamma(s),$$

находим операторы

$$(E-Q')^{-1}(E+Q')^{-1},\quad Q'(E-Q')^{-1}(E+Q')^{-1}.$$

Для определения элементов $h_i^1(s)$, $h_i^2(s)$ получаются формулы

$$h_i^1(\rho)=\gamma^i(\rho)-\frac{1}{3}\sum_{s=\rho}^{M}[\sigma^{\rho-s}+3(-2)^{\rho-s}]\gamma^i(s),$$

$$h_i^2(\rho)=\sum_{t=\rho}^{M}\left[(-2)^{\rho-t}-\frac{1}{3}\sigma^{\rho-t}\right]\gamma^i(t).$$

Выпишем несколько значений величин $K_\rho(s)$, $N_\rho(s)$:

$$K_1(1)=2,\quad K_1(2)=0,\quad K_1(3)=0,\quad K_2(1)=1,\quad K_2(2)=2,$$

$$K_2(3)=0,\quad K_3(1)=\frac{1}{2},\quad K_3(2)=1,\quad K_3(3)=2;$$

$$N_1(1)=-1,\quad N_1(2)=0,\quad N_1(3)=0,\quad N_2(1)=0,\quad N_2(2)=-1,$$

$$N_2(3)=0,\quad N_3(1)=0,\quad N_3(2)=0,\quad N_3(3)=-1.$$

Используя эти данные, находим $\lambda(M)$ для начальных условий $x_1(0)=1/4$, $x_2(0)=0$. Наименьшее число $M=K^0$, удовлетворяющее неравенству $\lambda(M)\geqslant 1$, равно 2; $\lambda(2)=1$. Решением задачи (137) для рассматриваемого случая являются числа $\xi_1^0=-4$, $\xi_2^0=-6$, $\sigma_1^0=-\frac{1}{3}$, $\sigma_2^0=0$. Поэтому из формул (138) получим

$$v^0(0)=-\frac{1}{2},\quad v^0(1)=\frac{1}{4},\quad y_1^0(1)=-1,\quad y_1^0(2)=0,$$

$$x_1^0(1)=\frac{1}{4},\quad x_1^0(2)=0,\quad x_2^0(1)=-\frac{1}{4},\quad x_2^0(2)=0.$$

Комментарии к главе IX

1. Изложенные в § 1 доказательства несколько громоздки по конструкции. Эти результаты можно упростить, если непосредственно перенести на дискретные системы методы главы VI.

2. Принцип квазимаксимума, предложенный в [34j], возник в связи с необычной ситуацией, которая сложилась в теории оптимальных процессов для дискретных систем. Важность дискретных систем при оптимизации любых систем управления неоспорима. Подготовка задачи оптимизации к расчету на цифровых вычислитель-

ных устройствах требует перехода к рекуррентным (или разностным) соотношениям. Этот переход снимает много вопросов аналитического характера, свойственных непрерывной модели процесса. Он же позволяет привлечь мощный метод динамического программирования, не требующий в дискретном случае аналитического обоснования. Казалось бы, последняя схема решения задач оптимизации делает излишними все исследования вокруг принципа максимума. Однако реализация ее наталкивается на серьезные трудности. Известно, что вычислительные алгоритмы динамического программирования предъявляют большие требования [13, 122] к объему оперативной памяти ЭЦВМ, которая не позволяет пока охватить системы выше третьего порядка. Конечно, в частных случаях порядок рассчитываемых систем можно несколько увеличить, но принципиальная трудность остается. Привлекательной чертой динамического программирования является возможность вычисления управления, доставляющего абсолютный минимум функционалу качества, причем с увеличением числа ограничений, наложенных на управление и на процесс, задача вычисления упрощается. Это породило различные варианты динамического программирования с искусственным введением ограничений. Предельно упрощена задача в методе локальных вариаций [130], который по существу уже не является методом динамического программирования. Искусственное преодоление «проклятия размерности» задачи [13] ведет к тому, что в общем случае нельзя гарантировать нахождения оптимального управления. Таким образом, задача оптимизации оказывается в том же положении, как если бы ее решать с помощью необходимых условий оптимальности. Эффективность этих подходов обсуждается в [122]. В ряде случаев (особенно для систем большого порядка) использование необходимых условий оптимальности становится предпочтительнее динамического программирования.

В § 1 описана краткая история вопроса о необходимых условиях оптимальности в дискретных системах. Число работ, выполненных в этой области, огромно. Для большинства из них характерно стремление перенести на дискретные системы эффектный принцип максимума Л. С. Понтрягина, доказанный впервые [19] для непрерывных систем. После того как обнаружилось [21b], что эта цель в общем случае недостижима, стали предприниматься усилия по доказательству принципа максимума в ослабленной форме (локальный максимум, стационарность). Общим недостатком новых условий было то, что они не переходили в принцип максимума, если дискретная система стремилась (при уменьшении шага (периода) дискретизации) к непрерывной. В этой ситуации и был предложен принцип квазимаксимума как необходимое условие оптимальности в дискретных системах.

3. Проблема моментов для оптимизации дискретных систем впервые применена в [74b], где решена двухточечная задача линейного быстродействия на управлениях минимальной нормы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А й з е к с Р.:
Дифференциальные игры. Изд-во «Мир», 1967.
2. А л е к с а н д р о в П. С.:
Комбинаторная топология. Гостехиздат, 1947.
3. А л ь б р е х т Э. Г., К р а с о в с к и й Н. Н.:
О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 7, 1964.
4. А х и е з е р Н., К р е й н М.:
О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, Научно-технич. изд-во Украины, 1938.
5. Б а б у н а ш в и л и Т. Г.:
Синтез линейных оптимальных систем. ДАН СССР, т. **155**, № 2, 1964.
6. Б а г а е в а Н. Я., М о и с е е в Н. Н.:
Об одном способе численного решения задач оптимального управления. ДАН СССР, т. 153, № 4, 1963.
7. Б а р а н о в А. Ю., Т р у х а е в Р. И., Х о м е н ю к В. В.:
Обоснование метода погружения в вариационных задачах. Автоматика и телемеханика, т. 28, № 7, 1967.
8. Б а р б а ш и н Е. А.:
a) К теории обобщенных динамических систем. Ученые записки Московского ун-та, Математика, т. 2, № 135, 1949.
b) Об оценке среднеквадратичного отклонения от заданной траектории. Автоматика и телемеханика, т. 21, № 7, 1960.
c) Об оценке максимума отклонения от заданной траектории. Автоматика и телемеханика, т. 21, № 10, 1960.
9. Б е д р о в Я. А., К а н а р е в Л. Е.:
Метод последовательного синтеза оптимального по быстродействию управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
10. Б е й к о И. В., К а р п е н к о М. Р.:
Решение нелинейных оптимальных задач методом последовательных приближений. ДАН УССР, № 12, 1964.
11. Б е л л м а н Р.:
a) Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, 1954.
b) Динамическое программирование. ИЛ, 1960.
c) Процессы регулирования с адаптацией. Изд-во «Наука», 1964.

12. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.:
Некоторые вопросы математической теории процессов управления. ИЛ, 1962.
13. Беллман Р., Дрейфус С.:
Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», 1965.
14. Беллман Р., Калаба Р.:
Уменьшение размерности, динамическое программирование и процессы регулирования. Техническая механика, сер. Д, т. 83, № 1, 1961.
15. Беллман Р., Кук К. Л.:
Дифференциально-разностные уравнения. Изд-во «Мир», 1967.
16. Блисс Г. А.:
Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1950.
17. Болонкин О. О.:
Импульсные, особые и скользящие режимы в задачах динамики полета. В сб. «Сложные системы управления», Киев, изд-во «Наукова думка», 1965.
18. Болтянский В. Г.:
a) Принцип максимума в теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. 119, № 6, 1958.
b) Оптимальные процессы с параметрами. ДАН УзССР, № 10, 1959.
c) Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 3, 1964.
d) Математические методы оптимального управления, Изд-во «Наука», 1966.
19. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С.:
К теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. 110, № 1, 1956.
20. Брайсон Д.:
Решение задач оптимального программирования методом быстрейшего подъема. Прикладная механика, № 2, 1962.
21. Бутковский А. Г.:
a) Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. 22, № 1, 1961.
b) О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления. Автоматика и телемеханика, т. 24, № 8, 1963.
c) Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. 24, № 9, 1963.
d) Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд-во «Наука», 1965.
22. Бутковский А. Г., Лернер А. Я.:
Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами. ДАН СССР, т. 134, № 4, 1960.
23. Бутковский А. Г., Полтавский Л. Н.:
Финитное управление линейными системами с сосредоточенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. 28, № 9, 1967.

24. Буякас В. И.:
Особые решения принципа максимума в задаче оптимального управления системами с переменной структурой. В сб. «Оптимальные системы автоматического управления», Изд-во «Наука», 1967.
25. Быков Я. В.:
О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, Изд-во Киргиз. ун-та, 1957.
26. Вапнярский И. Б.:
Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 7, № 2, 1967.
27. Васильев О. В.:
Градиентный метод решения одного класса задач оптимального регулирования. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 7, № 1, 1967.
28. Васильев О. В., Кириллова Ф. М.:
Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах. ДАН СССР, т. 175, № 1, 1967.
29. Величенко В. В.:
О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. Автоматика и телемеханика, т. 27, № 7, 1966.
30. Винокуров В. Р.:
Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями. I—III. Изв. вузов, Математика, №№ 7, 8, 9, 1967.
31. Волин Ю. М., Островский Г. М.:
Об одной оптимальной задаче. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 10, 1964.
32. Габасов Р.:
a) К вопросу о единственности оптимального управления в дискретных системах. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 5, 1962.
b) Оптимальные процессы с ограничением по циклам. ДАН СССР, т. 144, № 4, 1962.
c) К оптимальным процессам в связанных системах дискретного типа. Автоматика и телемеханика, т. 23, № 7, 1962.
d) Об одной задаче теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, т. 28, № 8, 1967.
e) К оптимизации одного класса динамических систем. ДАН БССР, т. 12, № 3, 1968.
f) О необходимых условиях оптимальности для систем, описываемых уравнениями в частных производных. ДАН БССР, т. 12, № 7, 1968.
g) Об оптимальности особых управлений. Дифференциальные уравнения, т. 4, № 6, 1968.
h) К теории оптимальных процессов в дискретных системах. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 8, № 4, 1968.
i) К теории управляемости динамических систем. Дифференциальные уравнения, т. 4, № 9, 1968.

j) О необходимых условиях оптимальности для особых управлений. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1968.

33. Габасов Р., Гиндес В. Б.:
К оптимальным процессам в линейных системах с двумя ограничениями на управляющие воздействия. Автоматика и телемеханика, т. 26, № 6, 1965.

34. Габасов Р., Кириллова Ф. М.:
a) К оптимальным процессам в связанных системах. Автоматика и телемеханика, т. 24, № 6, 1963.
b) Об оптимальном управлении связанными системами дискретного типа. Автоматика и телемеханика, т. 24, № 7, 1963.
c) К задачам оптимального управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1964.
d) Применение теории линейных неравенств к задачам оптимального управления. Аннотации докл. II Всесоюзн. съезда по теорет. и приклад. мех. Изд-во «Наука», 1964.
e) Об одном способе решения некоторых задач оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 3, 1964.
f) О решении некоторых задач теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 7, 1964.
g) Оптимизация выпуклых функционалов на траекториях линейных систем. ДАН СССР, т. 156, № 5, 1964.
h) Статистическая задача оптимального управления линейной системой. ДАН СССР, т. 164, № 1, 1965.
i) Построение последовательных приближений для некоторых задач оптимального управления. Автоматика и телемеханика, т. 27, № 2, 1966.
j) К вопросу о распространении принципа максимума Л. С. Понтрягина на дискретные системы. Автоматика и телемеханика, т. 27, № 11, 1966.
ж) Статистическая задача оптимального управления конечным состоянием линейной системы. В сб. «Оптимальные системы автоматического управления». Изд-во «Наука», 1967.

35. Габасов Р., Наумова С. И.:
К необходимым условиям оптимальности в динамических системах. ДАН БССР, т. 13, № 5, 1968.

36. Габасов Р., Чуракова С. В.:
a) Одна задача оптимального управления в системах с последействием. Дифференциальные уравнения, т. 2, № 10, 1966.
b) О существовании оптимальных управлений в системах с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, т. 3, № 12, 1967.
c) Необходимые условия оптимальности в системах с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, т. 29, № 1, 1968.
d) К необходимым условиям оптимальности в системах с запаздыванием. ДАН БССР, т. 12, № 1, 1968.
e) Достаточные условия оптимальности в системах с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, т. 29, № 2, 1968.

37. Г а л и у л л и н А. С.:
О задачах динамического программирования. Труды Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, т. 5, вып. 2, 1964.
38. Г а м к р е л и д з е Р. В.:
a) К теории оптимальных процессов в линейных системах. ДАН СССР, т. 116, № 1, 1957.
b) Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, № 4, 1958.
c) К общей теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. 123, № 2, 1958.
d) Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, вып. 3, 1960.
e) О скользящих оптимальных режимах. ДАН СССР, т. 143, № 6, 1962.
f) К теории первой вариации. ДАН СССР, т. 161, № 1, 1965.
39. Г а н т м а х е р Ф. Р.:
Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
40. Г и н д е с В. Б.:
a) К задаче минимизации выпуклого функционала на множестве конечных состояний линейной системы управления. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 6, № 6, 1960.
b) Об особом управлении в оптимальных системах. Изв. вузов, Математика, № 7, 1967.
41. Г и р с а н о в И. В.:
Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов. ДАН СССР, т. 136, № 4, 1961.
42. Г н о е н с к и й Л. С.:
К задаче преследования. Прикладная математики и механика, т. 26, № 5, 1962.
43. Г у л ь к о Ф. Б., К о г а н Б. Я.:
Метод оптимального управления с прогнозированием. В сб. «Оптимальные системы. Статистические методы». Труды II конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во «Наука», 1965.
44. Г у р и н Л. С.:
Оптимизация в стохастических моделях. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 4, № 2, 1964.
45. Г у р м а н В. И.:
a) Об оптимальных процессах особого управления. Автоматика и телемеханика, т. 26, № 5, 1965.
b) Метод исследования одного класса оптимальных скользящих режимов. Автоматика и телемеханика, т. 26, № 7, 1965.
46. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж. Т.:
Линейные операторы. ИЛ, 1962.
47. Д е г т я р е в Г. Л., С и р а з е т д и н о в Т. Г.:
Об оптимальном управлении одномерными процессами с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. 28, № 11, 1967.
48. Д е м ь я н о в В. Ф.:
a) К минимизации функций на ограниченных множествах. Кибернетика, № 6, 1965.

b) К решению некоторых минимаксных задач. Кибернетика, т. 2, № 6, 1966.
49. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.:
Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. Вестн. Ленингр. ун-та, № 19, вып. 4, 1964.
50. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.:
a) Некоторые оптимальные задачи для линейных систем. Автоматика и телемеханика, т. 24, № 12, 1963.
b) Задачи на экстремум при наличии ограничений. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 5, № 3, 1965.
c) Вторые вариации в задачах на экстремум с ограничениями. ДАН СССР, т. 160, № 1, 1965.
51. Дынкин Е. Б.:
Управляемые случайные последовательности. Теория вероятн. и ее применение, т. 10, вып. 1, 1965.
52. Егоров А. И.:
a) Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности. Изв. АН СССР, серия матем., т. 29, № 6, 1965.
b) Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами. Матем. сб., т. 69, вып. 3, 1966.
53. Егоров Ю. В.:
a) Некоторые задачи теории оптимального управления. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 3, № 5, 1963.
b) Необходимые условия оптимальности управления в банаховом пространстве. Матем. сб., т. 64, № 1, 1964.
54. Егоров Ю. В., Милютин А. А.:
О достаточных условиях сильного экстремума в классе кривых с ограниченной производной. ДАН СССР, т. 195, № 5, 1964.
55. Зеликин М. И., Тынянский Н. Т.:
Детерминированные дифференциальные игры. УМН, т. 20, вып. 4, 1965.
56. Иванова Г. П.:
О теоремах существования в вариационном исчислении. ДАН СССР, т. 170, № 2, 1966.
57. Исаев В. К., Сонин В. В.:
Об одной нелинейной задаче оптимального управления. Автоматика и телемеханика, т. 23, № 9, 1962.
58. Калман Р. Е.:
a) Об общей теории систем управления. Труды I конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1961.
b) Когда линейная система управления является оптимальной? Труды Америк. об-ва инж.-механиков. Серия Д. Теоретические основы инженерных расчетов, т. 86, № 1, 1964.
59. Карасев И. П.:
О существовании области достижимости. Дифференциальные уравнения, т. 3, № 12, 1967.
60. Карлин С.:
Математические методы в теории игр, программировании, экономике. Изд-во «Мир», 1964.
61. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А.:
Многомерные дискретные системы управления. «Наука», 1966.

62. Келенджеридзе Д. Л.:
К теории оптимального преследования. ДАН СССР, т. 138, № 3, 1961.
63. Келли Г.:
a) Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации. Ракетная техника и космонавтика, т. 2, № 8, 1964.
b) Метод градиентов. В сб. «Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета». Изд-во «Наука», 1965.
64. Кириллова Ф. М.:
a) О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. вузов, Математика, № 4, 1958.
b) О предельном переходе в решении одной задачи оптимального регулирования. Прикладная математика и механика, т. 24, вып. 2, 1960.
c) К оптимальным процессам регулирования. Труды Уральского политехн. ин-та, Свердловск, Сборник № 113, 1961.
d) К проблеме существования оптимальных траекторий нелинейных систем. Изв. вузов, Математика, № 2, 1961.
e) О непрерывной зависимости решения одной задачи оптимального регулирования от начальных данных и параметров. УМН, т. 17, вып. 4 (106), 1962.
f) Некоторые вопросы теории оптимального регулирования. Изв. вузов, Математика, № 3, 1962.
g) К задаче существования оптимального управления линейной системы со случайным возмущением. Сибирский матем. журнал, № 1, 1964.
h) Оптимальное управление в одной статистической задаче. Дифференциальные уравнения, т. 2, № 11, 1966.
i) Об одном направлении в теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, т. 28, № 11, 1967.
65. Кириллова Ф. М., Полетаева И. А.:
О некоторых задачах преследования. Аннотации докл. Международного конгресса математиков. Изд-во «Наука», 1966.
66. Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.:
a) К проблеме управляемости линейных систем с последействием. Дифференциальные уравнения, т. 3, № 3, 1967.
b) Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием. ДАН СССР, т. 174, № 6, 1967.
67. Кирин Н. Е.:
a) Об одном численном методе в задаче о линейных быстродействиях. Методы вычислений, вып. 2, Изд-во Ленингр. ун-та, 1963.
b) К решению общей задачи линейного быстродействия. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 1, 1964.
68. Кожевников Ю. В.:
К оптимизации в среднем линейных систем со случайными параметрами. В сб. «Оптимальные системы автоматического управления». Изд-во «Наука», 1967.

69. Колмогоров А. Н., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.:
Об одной вероятностной задаче оптимального управления. ДАН СССР, т. 145, № 5, 1962.
70. Колосов Г. Е., Стратонович Р. Л.:
Асимптотический метод решения статистических задач оптимального управления квазигармоническими системами. Автоматика и телемеханика, т. 28, № 2, 1967.
71. Копп Р., Мойер Г.:
Необходимые условия оптимальности особых экстремалей. Ракетная техника и космонавтика, т. 3, № 8, 1965.
72. Крамер Д.:
Об управлении линейными системами с запаздыванием. В сб. переводов «Механика», № 4, 1963.
73. Красовский А. А.:
Статистическая теория переходных процессов в системах управления, Изд-во «Наука», 1968.
74. Красовский Н. Н.:
a) К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 18, № 11, 1957.
b) Об одной задаче оптимального регулирования. Прикладная математика и механика, т. 21, вып. 5, 1957.
c) Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. Прикладная математика и механика, т. 23, вып. 2, 1959.
d) К достаточным условиям оптимальности. Прикладная математика и механика, т. 23, вып. 3, 1959.
e) К проблеме существования оптимальных траекторий. Изв. вузов, Математика, № 6, 1959.
f) К теории оптимального регулирования. Прикладная математика и механика, т. 23, вып. 4, 1959.
g) Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. Прикладная математика и механика, т. 24, вып. 1, 1960.
h) О среднеквадратичной оптимальной стабилизации при случайных затухающих возмущениях. Прикладная математика и механика, т. 25, вып. 5, 1961.
i) Об одной задаче преследования. Прикладная математика и механика, т. 27, вып. 2, 1963.
j) О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. Прикладная математика и механика, т. 27, вып. 4, 1963.
k) К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления. Прикладная математика и механика, т. 29, вып. 2, 1965.
l) К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. Прикладная математика и механика, т. 28, вып. 1, 1964.
m) Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. В сб. «Оптимальные системы. Статистические методы». Труды II конгресса ИФАК, т. 2. Изд-во «Наука», 1965.
n) Теория управления движением. Изд-во «Наука», 1968.

75. Красовский Н. Н., Куржанский А. Б.:
К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, т. 2, № 3, 1966.
76. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е.:
О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
77. Кротов В. Ф.:
a) Разрывные решения вариационных задач. Изв. вузов, Математика, № 5, 1960.
b) О разрывных решениях в вариационных задачах. Изв. вузов, Математика, № 2, 1961.
c) Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. I—III. Автоматика и телемеханика, т. 23, № 12, 1962; т. 24, № 5, 1963; т. 25, № 7, 1964.
78. Кротов В. Ф., Гурман В. И.:
Об оптимальных скользящих режимах в вариационных задачах динамики полета. В сб. «Исследования по динамике полета», вып. 1. Изд-во «Машиностроение», 1965.
79. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.:
О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 2, № 6, 1962.
80. Куликовский Р.:
Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1967.
81. Куржанский А. Б.:
a) О построении методом моментов оптимального управления, минимизирующего среднеквадратичную ошибку. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 5, 1964.
b) О вычислении оптимального управления в системе с неполной информацией. Диффер. уравнения, т. 1, № 3, 1965.
82. Ларичев О. И.:
Оптимальное управление одним классом многосвязных систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1964.
83. Ла Саль Дж. П.:
Принцип оптимального релейного управления. Труды I Конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
84. Левитин Е. С., Поляк Б. Т.:
Методы минимизации при наличии ограничений. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 6, № 5, 1966.
85. Лейтманн Г.:
Об оптимальных траекториях ракеты. Прикладная математика и механика, т. 25, вып. 6, 1961.
86. Лернер А. Я.:
О предельном быстродействии систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, т. 15, № 6, 1954.
87. Летов А. М.:
a) Аналитическое конструирование регуляторов, I—V. Автоматика и телемеханика, т. 21, № 4—6, 1960; т. 22, № 4, 1961; т. 23, № 11, 1962.

b) Проблематика научных исследований в области автоматического управления. Автоматика и телемеханика, т. 27, № 8, 1966.
88. Литовченко И. А.:
a) Теория оптимальных систем. Итоги науки. Серия «Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование», 1962.
b) Оптимизация систем при ступенчатых ограничениях на управление. Автоматика и телемеханика, т. 26, № 8, 1965.
89. Лоуден Д. Ф.:
Оптимальные траектории для космической навигации. Изд-во «Мир», 1966.
90. Лузин Н. Н.:
К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. Автоматика и телемеханика, № 5, 1940.
91. Лузин Н. Н., Кузнецов П. И.:
К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 51, №№ 4, 5, 1946; т. 80, № 3, 1951.
92. Лурье А. И., Троицкий В. А.:
Задача Майера — Больца и оптимальные процессы управления. Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. II, изд-во «Наука», 1964.
93. Лурье К. А.:
Задача Майера — Больца для кратных интегралов в оптимизации поведения систем с распределенными параметрами. Прикладная математика и механика, т. 27, вып. 5, 1963.
94. Миеле А.:
Расширение теории оптимальной программы расходования топлива реактивным самолетом при горизонтальном полете. В сб. «Исследование оптим. режимов движения ракет», Оборонгиз, 1959.
95. Михалевич В. С., Шор Н. З.:
О численных методах решения многовариантных плановых и технико-экономических задач. Научно-методические материалы экономико-матем. семинара, ВЦ АН СССР, вып. 1, Киев, 1962.
96. Михлин С. Г.:
Интегральные уравнения и их приложения. Гостехиздат, 1949.
97. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.:
a) Об одной статистической задаче оптимального управления. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 4, 1961.
b) Линейные дифференциальные игры. ДАН СССР, т. 174, № 1, 1967.
98. Моисеев Н. Н.:
a) Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. I—II. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 4, № 3, 1964; т. 5, № 1, 1965.
b) Численные методы, использующие вариацию в пространстве состояний. Труды Международного конгресса математиков. Изд-во «Мир», 1968.

99. Мороз А. И.:
Синтез оптимального по быстродействию управления для линейных дискретных объектов третьего порядка. I—III. Автоматика и телемеханика, т. 26, №№ 2, 3, 8, 1965.
100. Нгуен Тхань Банг:
Об управляемости квазилинейных систем. Прикладная математика и механика, т. 31, № 1, 1967.
101. Нейштадт Л. В.:
Синтез оптимальных по быстродействию систем.
102. Немыцкий В. В., Степанов В. В.:
Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1950.
103. Никольский С. М.:
Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изв. АН СССР, сер. матем., № 7, 1943.
104. Ожиганова И. А.:
a) К теории оптимального регулирования систем с запаздыванием. Труды семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом, т. 2. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1963.
b) Об условиях инвариантности для одной линейной задачи с запаздыванием. Труды семинара по теории дифференц. уравнений с откл. аргументом, т. 3. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965.
105. Питтель Б. Г.:
О некоторых задачах оптимального управления. I—II. Автоматика и телемеханика, т. 24, №№ 9, 11, 1963.
106. Полетаева И. А.:
Оптимальные системы с ограниченной среднеквадратичной ошибкой. Автоматика и телемеханика, т. 27, № 6, 1966.
107. Поляк Б. Т.:
Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений. ДАН СССР, т. 166, № 2, 1966.
108. Понтрягин Л. С.:
a) Оптимальные процессы регулирования. УМН, т. 14, вып. 1, 1959.
b) О некоторых дифференциальных играх. ДАН СССР, т. 156, № 4, 1964.
c) К теории дифференциальных игр. УМН, т. 21, № 4, 1966.
109. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.:
Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
110. Пропой А. И.:
О принципе максимума для дискретных систем управления. Автоматика и телемеханика, т. 26, № 7, 1965.
111. Пшеничный Б. Н.:
Выпуклое программирование в нормированных пространствах. Кибернетика, № 5, 1965.
112. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.:
Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954.

113. Роббинс Г.:
Оптимальность активных участков промежуточной тяги траекторий ракеты. Ракетная техника и космонавтика, т. 3, № 6, 1965.
114. Розоноэр Л. И.:
a) О достаточных условиях оптимальности. ДАН СССР, т. 127, № 3, 1959.
b) Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II, III. Автоматика и телемеханика, т. 20, №№ 10, 11, 12, 1959.
c) Вариационный подход к проблеме инвариантности. I, II. Автоматика и телемеханика, т. 24, №№ 6, 7, 1963.
115. Ройтенберг Я. Н.:
Некоторые задачи управления движением. Физматгиз, 1963.
116. Савелов А. А.:
Плоские кривые. Физматгиз, 1960.
117. Симакова Э. Н.:
Дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, т. 27, № 11, 1966.
118. Сиразетдинов Т. Г.:
К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 4, 1964.
119. Соболев С. Л.:
Уравнения математической физики. Изд-во «Наука», 1966.
120. Стратонович Р. Л.:
Новейшее развитие методов динамического программирования и их применение для синтеза оптимальных систем. Оптимальные системы. Статистические методы. Труды II конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во «Наука», 1965.
121. Троицкий В. А.:
a) Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. Прикладная математика и механика, т. 25, вып. 4, 1961.
b) О вариационных задачах оптимизации процессов управления. Прикладная математика и механика, т. 26, вып. 1, 1962.
122. Фан Лянь-цэнь, Вань Чу-сень:
Дискретный принцип максимума. Изд-во «Мир», 1967.
123. Фань Цзи:
Теоремы о минимаксе. В сб. «Бесконечные антагонистические игры». Физматгиз, 1963.
124. Фельдбаум А. А.:
a) Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 14, № 5, 1953.
b) Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
c) Основы теории оптимальных автоматических систем. Изд-во «Наука», 1966.
125. Филиппов А. Ф.:
О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ, сер. матем., мех., астр., физ., хим., № 2, 1959.
126. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А.:
Теория матриц и ее приложения. ИЛ, 1950.

127. Харатишвили Г. Л.:
Оптимальные процессы с запаздываниями. Тбилиси, изд-во «Мецниереба», 1966.
128. Цыпкин Я. З.:
Оптимальные процессы в импульсных автоматических системах. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 4, 1960.
129. Чанг Ш. С. Л.:
Синтез оптимальных систем автоматического управления. Изд-во «Машиностроение», 1964.
130. Черноусько Ф. Л.:
Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Журнал вычислит. матем. и матем. физики, т. 5, № 4, 1965.
131. Шарль Ж.:
Принцип максимума для дискретных систем. В сб. переводов «Механика», № 5 (105), 1967.
132. Шатровский Л. И.:
Об одном численном методе решения задач оптимального управления. Ж. выч. матем. и матем. физики, т. 2, № 3, 1962.
133. Энеев Т. М.:
О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления. Космич. исследования, т. 4, вып. 5, 1966.
134. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.:
Исследования по линейному и нелинейному программированию. ИЛ, 1962.
135. Antosiewicz H. A.:
Linear control systems. Arch. Rational Mech. and Anal., v. 12, № 4, 1963.
136. Astrom K. J.:
Optimal control of Markov processes with incomplete state information. J. Math. Anal. and Appl., v. 10, № 1, 1965.
137. Balakrishnan A. V.:
a) Optimal control problems in Banach spaces. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 3, № 1, 1965.
b) On the controllability of a nonlinear system. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 55, № 3, 1966.
138. Bellman R., Glicksberg I., Gross O.:
On the «bang-bang» control problem. Quart. Appl. Math., v. 14, № 1, 1956.
139. Berkovitz L. D.:
a) Variational methods in problems of control and programming. J. Math. Anal. and Appl., v. 3, № 1, 1961.
b) A survey of differential games. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
140. Bittner L.:
Lineare, zeitoptimale Prozesse bei konvexem Steuer- und Phasengebiet. Abhandl. Dtsch. Acad. Wiss. Berlin, Kl. Math., Phys. und Techn., № 2, 1966.
141. Bryson A. E., Denham W. F., Carroll F. J., Mikami K.:
Determination of lift or drag programs to minimize re-entry heating. J. Aerospase Sci., v. 29, № 4, 1962.

142. B u s h a w D. W.:
Experimantal towing tank. Stevens Institute of Technology, Report 469, Hoboken, N. J., 1953.
143. C h y u n g D. H., L e e E. B.:
Optimization theory optimal systems with time delays. Third Congress IFAC, Abstracts, London, 1966.
144. C a n o n M., C u l l u m C., P o l a k E.:
Constrained minimization problems in finite-dimensional spaces. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 4, № 3, 1966.
145. C e s a r i L.:
An existence theorem in problems of optimal control. J. Soc. Industr. and Appl. Math., Ser. A3, № 1, 1965.
146. C h e n C h i - T s o n g:
Output controllability of composite systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 12, № 2, 1967.
147. C o n t i R.:
Sui problema della controllabilita di un sistema lineare. Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., t. 37, № 3, 4, 1964.
148. D a t k o R.:
An implicit function theorem with an application to control theory. Michigan Math. J., v. 11, № 4, 1964.
149. D e s o e r C. A., W i n g J.:
An optimal strategy satyrating sampled-data system. IRE Trans. Automat. Control, v. 6, № 1, 1961.
150. E a t o n J. H.:
a) An iterative solution to time-optimal control. J. Math. Anal. and Appl., v. 5, № 2, 1962.
b) Identification for control purposes. IEEE Internat. Convent. Res., v. 15, № 3, 1967.
151. F a l b P. L.:
Infinite dimensional control problems. J. Math. Anal. and Appl., v. 9, № 1, 1964.
152. F a n c h e r P.:
Iterative computation procedures for an optimum control problem. IEEE Trans. Automat. Control, v. 10, № 3, 1965.
153. F a r i s o n J. B.:
Parameter identification for a class of linear discrete systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 12, № 1, 1967.
154. F a t t o r i n i H. O.:
a) On complete controllability of linear systems. J. Different. Equat., v. 3, № 3, 1967.
b) Controllability of higher order linear systems. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
155. F l e m i n g W. H.:
Stochastic Lagrange multipliers. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
156. G a m k r e l i d z e R. V.:
On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 3, № 11, 1965.

157. G i l b e r t E. G.:
Controllability and observability in multivariable control systems. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, A1, № 2, 1963.
158. G o l d s t e i n A. A.:
Convex programming and optimal control. J. Soc. Industr. and Appl. Math., A3, № 1, 1965.
159. G o o d m a n G. S.:
On a theorem Scorza — Dragoni and its application to optimal control. Math. Theory Control, New York and London, Acad. Press, 1967.
160. H a l k i n H.:
a) Liapounov's theorem on the range of a vector measure and Pontryagin's maximum principle. Arch. Rat. Mech. and Anal., v. 10, № 4, 1962.
b) Optimal control for systems described by difference equations. Advances Control Syst., v. 1, New York — London, Acad. Press, 1964.
c) Nonlinear nonconvex programming in an infinite dimensional space. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
161. H a l k i n H., J o r d a n B. W., P o l a k E., R o s e n J. B.:
Theory of optimum discrete time systems. Third Congress IFAC, Abstracts, London, 1966.
162. H a l k i n H., N e u s t a d t L. W.:
General necessary conditions for optimization problems. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 56, № 4, 1966.
163. H a r v e y C. A., L e e E. B.:
On the uniqueness of time-optimal control for linear processes. J. Math. Anal. and Appl., v. 5, № 2, 1962.
164. H e r m e s H.:
The equivalence and approximation of optimal control problems. J. Different. Equat., v. 1, № 4, 1965.
165. H e s t e n e s M. R.:
On variational theory and optimal control theory. J. Soc. Industr. and Appl. Math., A3, № 1, 1965.
166. H o B. L., K a l m a n R. E.:
Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. Regelungstechnik, Bd. 14, № 12, 1966.
167. H o l t z m a n J. M.:
a) Convexity and the maximum principle for discrete systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 11, № 1, 1966.
b) On the maximum principle for nonlinear discrete-time systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 11, № 2, 1966.
168. H o l t z m a n J. M., H a l k i n H.:
Directional convexity and the maximum principle for discrete systems. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 4, № 2, 1966.
169. H o p k i n A. M.:
A phase-plane approach to the compensation of saturating servomechanisms. Trans. AIEE, part I, v. 70, 1951.
170. H s i n C h u:
A remark on complete controllability. J. Soc. Industr. and Appl. Math., A3, № 3, 1965.

171. Hwang C. L., Fan L. T.:
A discrete version of Pontryagin's maximum principle. Operat. Res., v. 15, № 1, 1967.
172. Jackson R., Horn F.:
On discrete analogues of Pontryagin's maximum principle. Internat. J. Control, v. 1, № 4, 1965.
173. Jacobs M. Q.:
Remarks on some recent extensions of Filippov's implicit functions lemma. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 5, № 4, 1967.
174. Johnson C. D.; Gibson J. E.:
Singular solutions in problems of optimal control. IEEE Trans. Automat. Control, v. AC-8, № 1, 1963.
175. Jordan B. W., Polak E.:
Theory of a class of discrete optimal control systems. J. Electron. and Control, v. 17, № 6, 1964.
176. Kalman R. E.:
The theory of optimal control and the calculus of variations. RIAS, Baltimore, Maryland, RIAS, Tech. Rept. 61-3, 1961.
177. Katz S.:
A discrete version of Pontryagin's maximum principle. J. Electron. and Control, v. 13, № 2, 1962.
178. Kelley H. J.:
a) A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems. J. Soc. Industr. and Appl. Math., Ser. A2, № 2, 1964.
b) A second variation test for singular extremals. AIAAJ, v. 2, № 8, 1964.
179. Kharatishvili G. L.:
A maximum principle in extremal problems with delays. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
180. Kirillova F. M.:
a) On the application of functional analysis to the theory of optimal processes. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 5, Ser. A, № 1, 1967.
b) The application of functional analysis to problems of pursuit. Proc. Conf. Math. Theory Control, USA Acad. Press, 1967.
181. Knudsen H. K.:
An iterative procedure for computing time-optimal controls. IEEE Trans. Automat. Control, AC-9, № 1, 1964.
182. Kokotović P., Heller J.:
Direct and ajoint sensitivity equations for parameter optimization. IEEE Trans. Automat. Control, v. 12, № 5, 1967.
183. Kushner H. J.:
On stochastic extremum problems: calculus. J. Math. Anal. and Appl., v. 10, № 2, 1965.
184. Larson R. E., Peschon J.:
A dynamic programming approach to trajectory estimation. IEEE Trans. Automat. Control, v. 11, № 3, 1966.
185. La Salle J. P.:
Time optimal control systems. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 45, № 4, 1959.

186. L e e E. B.:
A sufficient condition in the theory of optimal control. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, A1, № 3, 1963.
187. L e e E. B., M a r k u s L.:
Optimal control of nonlinear processes. Arch. Rational Mech. Anal., v. 8, № 1, 1961.
188. L u e n b e r g e r D. G.:
Observers for multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 11, № 2, 1966.
189. M a l a n o w s k i K., R o l e w i c z S.:
Zastosowanie metody płaszczyzn podpierajacych do wyznaczania sterowania czasowooptymalnego. Arch. automat. i telemech., v. 10, № 2, 1965.
190. M c S h a n e E. J.:
a) On multipliers for Lagrange problem. Amer. J. Math., 61, 1939.
b) Optimal controls, relaxed and ordinary. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
191. M i e l e A.:
Generalized variational approach to the optimum thrust programming for the vertical flight of a rocket. Zeit. Flug-Wissenschaften, Bd. 6, № 3, 1958.
192. M i s h c h e n k o E. F.:
On a certain problem for parabolic differential equations connected with optimal pursuit. J. Soc. Industr. and Appl. Math., A3, № 1, 1965.
193. M i t t e r S. K.:
Theory of inequalities and the controllability of linear systems. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
194. N e u s t a d t L. W.:
a) Time optimal control systems with position and integral limits. J. Math. Anal. and Appl., v. 3, № 3, 1961.
b) The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions. J. Math. Anal. and Appl., v. 7, № 1, 1963.
c) An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 4, № 3, 1966.
195. O g u z t o r e l i M. N.:
Time-Lag Control Systems, New York and London, Acad. Press, 1966.
196. O h a p R. F., S t u b b e r u d A. R.:
A technique for estimating the state of a nonlinear system. IEEE Trans Automat. Control, v. 10, № 2, 1965.
197. O k a m u r a K.:
Some mathematical theory of the penalty method for solving optimum control problems. J. Soc. Industr. and Appl. Math.. A2, № 3, 1965.
198. O l d e n b u r g e r R.:
Theorie und Anwendung optimaler nichtlinearer Regelungen. Regelungstechnik, Bd. 11, № 4, 1963.

199. Paiewonsky B. H., Woodraw P. G., Brunner W., Halbert P.:
Synthesis of optimal controllers using hybrid analog-digital computers. Comput. Methods in Opt. Problems, Acad. Press, New York, 1964.
200. Pearson J. D.:
a) On the duality between estimation and control. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, v. 4, № 4, 1966.
b) On controlling a string of moving vehicles. IEEE Trans. Automat. Control, v. 12, № 3, 1967.
201. Pearson J. D., Jr., Sridhar R.:
A discrete optimal control problem. IEEE Trans. Automat. Control, v. 11, № 2, 1966.
202. Polak E.:
Minimal time control of a discrete system with a nonlinear plant. IEEE Trans. Automat. Control, v. AC-8, № 1, 1963.
203. Ragg B. C.:
Necessary conditions for the optimal control of a system with time-varying transport lags. IEEE Trans. Automat. Control, v. 11, № 4, 1966.
204. Reynolds P. A., Cadzow J. A.:
Solution of an optimization problem for linear discrete systems through ordinary calculus. IEEE Trans. Automat. Control, v. 10, № 2, 1965.
205. Roxin E.:
The existence of optimal controls. Michigan Math. J., v. 9, № 2, 1962.
206. Sancho N. G. F.:
Optimization of linear stochastic control systems operating over a finite time interval. Intern. J. Control, v. 3, № 4, 1966.
207. Sarachik P. E.:
Identification of the steady state operator for discrete selfoptimizing systems. IEEE Trans. Autom. Contr, v. 10, № 1, 1965.
208. Sarachik P. E., Kreindler E.:
Controllability and observability of linear discrete-time systems. Intern. J. Control, v. 1, № 5, 1965.
209. Scorza-Dragoni G.:
Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variable. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 17, 1948.
210. Shemer. J. E., Gupta S. C.:
Applications of Butkovskii's form of discrete maximum principle. ISA Trans., v. 5, № 4, 1966.
211. Silva L. M.:
Predictor control optimalizes control system performance. Trans. ASME, v. 77, № 8, 1955.
212. Silverman L. M., Meadows H. E.:
Controllability and time-variable unilateral networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, v. CT-12, № 3, 1965.
213. Sivan R.:
On the controllability of the heat equation. Third Congress IFAC, Abstracts, London, 1966.

214. S n o w D. R.:
Singular optimal controls for a class of minimum effort problems. J. Soc. Industr. and Appl. Math., A2, № 2, 1964.
215. T a r n o v e I.:
A controllability problem for nonlinear systems. Math. Theory Control, New York — London, Acad. Press, 1967.
216. T o u J. T.:
a) Optimum control of discrete systems subject to saturation. Proc. IEEE, v. 52, № 1, 1964.
b) Die zeitoptimale Regelung diskontinuierlicher Systeme mit Begrenzung des Regelsignals. Regelungstechnik, Bd. 12, № 11, 1964.
217. T u n g F., S t r i e b e l C. T.:
A stochastic optimal control problem and its applications. J. Math. Anal. and Appl., v. 12, № 2, 1965.
218. V o g t W. G., C u l l e n C. G.:
The minimum number of inputs required for the complete controllability of a linear stationary dynamical system. IEEE Trans. Automat. Control, v. AC-12, № 3, 1967.
219. W a l t F. M.:
An engineering approach. Hierarchical optimization criteria. IEEE Trans. Automat. Control, v. 12, № 2, 1967.
220. W a n g P. K. C.:
Invariance, uncontrollability, and unobservability in dynamical systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 10, № 3, 1965.
221. W a r g a J.:
a) Relaxed variational problems. J. Math. Anal. and Appl., v. 4, № 1, 1962.
b) Necessary conditions for minimum in relaxed variational Problems. J. Math. Anal. and Appl., v. 4, № 1, 1962.
222. W a z e w s k i T.:
Systèmes de commande et équations au contingent. Bull. Acad. polon. sci., Sér. math., astr., phys., v. 9, № 3, 1961.
223. W e l l s C. H.:
Minimum norm control of discrete systems. IEEE Internat. Convent. Res., v. 15, № 3, 1967.
224. W i t s e n h a u s e n H. S.:
On the sensitivity of optimal control systems. IEEE Trans. Automat. Control, v. 10, № 4, 1965.
225. W o n h a m W. M.:
Stochastic problems in optimal control. IEEE Internat. Convent. Rec., v. 11, № 2, 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Рафаил Габасов,
Фаина Михайловна Кириллова

Качественная теория оптимальных процессов
(Серия: «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1971 г., 508 стр.

Редактор *Д. С. Фурманов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Т. А. Панькова*

Сдано в набор 16/II 1971 г. Подписано к печати 15/VII 1971 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 15,875. Условн. печ. л. 26,67. Уч.-изд. л. 27,89. Тираж 8000 экз. Т-12328. Цена книги 2 руб. Заказ № 782.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16.
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9