

А.Н.МЕЛИХОВ - ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ И КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ



А.Н. МЕЛИХОВ

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ  
ГРАФЫ  
И КОНЕЧНЫЕ  
АВТОМАТЫ

---



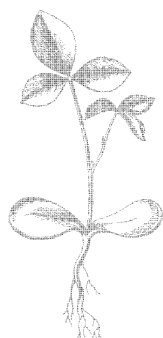


# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1971

**А. Н. МЕЛИХОВ**

# **ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ И КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1971

6 ф 6.5  
М 47  
УДК 62-50

**Ориентированные графы и конечные автоматы.** Мелихов А. Н., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971, 416 стр.

В монографии рассматриваются вопросы преобразования ориентированных графов и излагается систематический подход к логическому проектированию автоматов методами теории графов.

Описываются свойства теоретико-множественных и алгебраических операций над графами и решаются задачи разложения сложных графов на более простые по различным операциям. Определяются основные понятия теории автоматов и формулируются алгоритмы абстрактного анализа и синтеза автоматов. Изучается алгебра абстрактных автоматов и рассматривается проблема декомпозиции автоматов.

Книга рассчитана на специалистов в области теоретической кибернетики и вычислительной техники, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.  
Илл. 163. Библ. 662 назв.

*Аскольд Николаевич Мелихов*

Ориентированные графы и конечные автоматы

М., 1971 г., 416 стр. с илл.

Редактор С. М. Меерков

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры З. В. Автонева, И. Б. Мамулова

---

Сдано в набор 4/XII 1970 г. Подписано к печати 28/V 1971 г.  
Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 21,93.  
Тираж 9000 экз. Т-09610. Цена 1 р. 62 к. Заказ 687.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы,  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати  
при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

3-3-14  
131-71

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
<b>Глава I. Некоторые понятия теории графов . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Ориентированные графы и мультиграфы. Способы задания графов . . . . .	11
§ 2. Смешанные графы . . . . .	17
§ 3. Проблема изоморфизма и изоморфного вложения графов . . . . .	22
§ 4. Алгоритм распознавания изоморфизма графов . . . . .	23
§ 5. Об изоморфном вложении графов . . . . .	29
<b>Глава II. Теоретико-множественные свойства графов . . . . .</b>	<b>34</b>
§ 1. Графы и подграфы . . . . .	34
§ 2. Операции объединения, пересечения и соединения графов . . . . .	40
§ 3. Основные свойства операций. Дистрибутивные и булевы структуры графов . . . . .	50
§ 4. Графы и функции . . . . .	59
<b>Глава III. Алгебраические свойства графов . . . . .</b>	<b>64</b>
§ 1. Декартово произведение множеств . . . . .	64
§ 2. Умножение, суммирование, композиция и суперпозиция графов . . . . .	70
§ 3. Множество операций объединяющего и суперпозиционного типов. Теорема двойственности . . . . .	80
§ 4. Множество операций пересекающего типа . . . . .	87
§ 5. Представление алгебраических операций . . . . .	89
§ 6. Преобразования матриц смежности графов. Операции над смешанными графами . . . . .	92

<b>Глава IV. Разложение графов по алгебраическим и теоретико-множественным операциям . . . . .</b>	<b>99</b>
§ 1. Постановка задачи разложения графов . . . . .	99
§ 2. Теорема разложения графа в произведение двух графов	102
§ 3. Алгоритм разложения графа по операции умножения	112
§ 4. О разложении мультиграфов . . . . .	116
§ 5. Дополнение неразложимых графов до разложимых .	120
§ 6. Представление произвольного графа объединением произведений графов . . . . .	126
§ 7. Теорема разложения графа в сумму двух графов . .	130
§ 8. Оценка числа графов, разложимых по операции суммирования . . . . .	137
§ 9. Разложение графов по операции композиции . . . .	138
§ 10. Разложение графов по операции суперпозиции . . .	144
<b>Глава V. Основные понятия теории автоматов . . . . .</b>	<b>154</b>
§ 1. Автоматы первого и второго рода. Способы задания абстрактных автоматов . . . . .	154
§ 2. Представление событий в автоматах . . . . .	172
§ 3. Задачи анализа и синтеза автоматов . . . . .	182
§ 4. Об изоморфизме и изоморфном вложении абстрактных автоматов . . . . .	187
<b>Глава VI. Абстрактный анализ и синтез автоматов . . . .</b>	<b>196</b>
§ 1. Основные понятия теории линейных переходных графов	196
§ 2. Алгоритм анализа автоматов . . . . .	201
§ 3. Минимальная форма регулярного выражения . . . .	207
§ 4. Задание регулярных выражений в форме графов . . .	212
§ 5. Алгоритм синтеза автоматов . . . . .	216
<b>Глава VII. Алгебра абстрактных автоматов . . . . .</b>	<b>227</b>
§ 1. О содержательном смысле операций над автоматами .	227
§ 2. Теоретико-множественные операции над автоматами .	235
§ 3. Алгебраические операции над автоматами . . . . .	240
§ 4. Операции над вероятностными автоматами . . . . .	265
<b>Глава VIII. Декомпозиция абстрактных автоматов . . . .</b>	<b>273</b>
§ 1. Постановка задачи декомпозиции автоматов . . . . .	273
§ 2. Параллельная декомпозиция автоматов с разделением входов . . . . .	276
§ 3. Параллельная декомпозиция автоматов с общим входом	283
§ 4. Параллельная поочередная декомпозиция автоматов .	290
§ 5. Последовательная декомпозиция автоматов . . . . .	297

§ 6. Общая декомпозиция абстрактных автоматов . . . . .	305
§ 7. Декомпозиция автоматов с выделением заданных стандартных автоматов . . . . .	320
<b>Глава IX. Структурный синтез автоматов . . . . .</b>	<b>335</b>
§ 1. Канонический метод синтеза автоматов . . . . .	335
§ 2. Построение функциональной схемы по графу автомата	348
§ 3. Декомпозиционный метод синтеза автоматов . . . . .	355
§ 4. О синтезе автоматов в универсальных вычислительных средах . . . . .	367
Библиография . . . . .	381
Предметный указатель . . . . .	414



## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Бурное развитие вычислительной техники и перевод дискретных устройств на микроэлектронное исполнение выдвигают много новых задач, которые наряду с классическими необходимо решать при проектировании и создании новых типов вычислительных машин. Разработка и создание достаточно простых и эффективных алгоритмов блочного, логического и топологического синтеза автоматов и вычислительных структур на базе средств микроэлектроники образуют фундамент проектирования современных вычислительных машин и во многом определяют прогресс в области вычислительной техники.

В книге с единых позиций рассматривается подход к логическому проектированию автоматов и вычислительных структур с помощью методов теории графов.

Аппарат теории графов позволяет предложить достаточно простые и эффективные алгоритмы декомпозиции сложных автоматов на более простые (в частном случае элементарные) автоматы и тем самым решать задачи логического проектирования автоматов на абстрактном уровне, целиком или почти целиком исключая структурный этап в логическом проектировании. Следует заметить, что точное решение указанных задач связано с большим перебором, который даже при сравнительно несложных автоматах невозможно выполнять с помощью новейших вычислительных машин. Поэтому в работе почти везде предлагаются алгоритмы направленного поиска, основанные на эвристических приемах, которые не дают абсолютно минимальных вариантов, но тем не менее позволяют получить достаточное для практических целей приближение к ним.

В последние годы при синтезе схем автоматов помимо логического аспекта важную роль приобретает

комбинаторный аспект, который в значительной мере оказывает влияние на сложность схемы и решение которого связано с перебором. Следует отметить, что логическая теория синтеза автоматов достаточно хорошо развита в работах советских и зарубежных авторов, среди которых можно отметить работы К. Шеннона, В. И. Шестакова, Г. Мили, Э. Мура, М. А. Гаврилова, Дж. фон Неймана, С. Клини, В. М. Глушкова, С. В. Яблонского, С. Колдуэлла, М. Фистера, Г. Н. Поварова, О. Б. Лупанова, Ю. И. Журавлева, Н. Е. Кобринского, Б. А. Трахтенброта, Э. А. Якубайтиса, Ж. Флорина, А. Д. Закревского, Д. А. Поспелова, З. Л. Рабиновича, П. П. Пархоменко и многих других.

Комбинаторный аспект в логическом проектировании связан, в основном, с поиском оптимальных вариантов кодирования состояний, входных и выходных сигналов автомата и приводит к задачам декомпозиции сложных автоматов на более простые по тем или иным критериям. Среди работ, которые освещают вопросы комбинаторного порядка в логическом проектировании автоматов, необходимо отметить работы Хартманиса, Стёрнза, А. Гилла, Йоли, Кохави, М. А. Айзермана, Е. Н. Вавилова и др.

Оптимальная декомпозиция абстрактных автоматов решает задачу кодирования состояний автоматов и приводит к синтезу функциональных схем с минимальной комбинационной частью. Поскольку декомпозиция автоматов основана на разложении графов, то вполне понятно то внимание, которое уделяется в книге вопросам разложения сложных графов на более простые графы. Заметим, что задача разложения поставлена и решена для абстрактных графов и поэтому в принципе может быть распространена на любые объекты и системы, которые можно задавать в виде графов, не ограничиваясь только приложением ее в теории автоматов и вычислительных машин. Задача разложения в теории графов играет приблизительно такую же роль, какую играет задача разложения булевых функций на более простые функции в математической логике, и поэтому может найти приложение в теории надежности, в теории игр, распараллеливании алгоритмов и т. п.

Книга содержит 9 глав. Главы I—IV посвящены методам теории графов, на которых основано решение задач логического проектирования автоматов. В них рассматриваются теоретико-множественные и алгебраические операции над ориентированными графами, определяются свойства операций и основные алгебраические структуры, которые они образуют по аналогии с известными структурами множеств. Решаются задачи разложения графов по алгебраическим и теоретико-множественным операциям. Доказываются теоремы о разложении графов по различным операциям, формулируются алгоритмы разложения, даются оценки числа разложимых графов, а также решается задача отыскания минимального дополнения неразложимых графов до разложимых. Главы V—IX посвящены изложению логического проектирования автоматов и вычислительных структур с помощью методов теории графов. Здесь излагается алгебра абстрактных автоматов, которая на абстрактном уровне описывает различные виды соединений автоматов при построении схем сложных автоматов, и проблема декомпозиции абстрактных автоматов, которая заключается в представлении сложного абстрактного автомата совместной работой более простых абстрактных автоматов. Решается задача общей декомпозиции, позволяющая любой абстрактный автомат представлять работой элементарных абстрактных автоматов с минимальным числом связей между ними, и задача декомпозиции автомата на заданные блоки, которая приводит к представлению автомата в виде однородной структуры заданных стандартных блоков, соединенных между собой последовательно, параллельно или произвольным образом. Описывается декомпозиционный метод синтеза автоматов, основанный на решении задачи общей декомпозиции автоматов, исключаяющий этап структурного синтеза и приводящий к единому сквозному синтезу автоматов, который решает задачи логического проектирования на абстрактном уровне.

Автор глубоко признателен М. А. Айзерману и А. В. Каляеву за полезные советы и поддержку, а также благодарен Ю. В. Капитоновой и редактору С. М. Мееркову, которые высказали ряд замечаний, способствовавших улучшению содержания этой книги.

## НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

## § 1. Ориентированные графы и мультиграфы.

## Способы задания графов

Понятие ориентированного графа опирается на понятия множества и отображения. Для того чтобы задать некоторое множество, требуется указать закон, по которому относительно произвольного элемента можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Для задания отображения на множестве необходимо каждому элементу множества сопоставить некоторое подмножество данного множества. Определение графа будет дано ниже посредством описания различных способов его задания.

Среди множества графов различают три типа графов: *ориентированные*, *неориентированные* и *смешанные* графы. Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе. Поскольку здесь речь идет лишь только об ориентированных графах, для краткости вместо слов «ориентированный граф» будем говорить просто «граф».

Существует три эквивалентных способа задания графов: *аналитический*, *геометрический* и *матричный*. Рассмотрим каждый из них.

**Аналитический способ задания графов.** Говорят, что задан граф, обозначаемый  $G = (X, F)$ , если задано множество элементов  $X$  и отображение  $F$  множества  $X$  в  $X$ . Отображение  $F$  может быть как однозначным, так и многозначным. В общем случае на  $X$  и  $F$  никаких ограничений не накладывается. Если число элементов множества  $X$  конечно, то граф называется *конечным*, в противном случае — *бесконечным*. В дальнейшем везде будут рассматриваться только конечные графы.

Пусть дано множество  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , которое имеет мощность  $|X| = n$ . Вместо  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

иногда пишут  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Для того чтобы задать отображение  $F$  на  $X$  или, что то же самое, отображение  $X$  в  $X$ , необходимо каждому элементу  $x_i \in X$  поставить в соответствие некоторое подмножество множества  $X$ . Чтобы подчеркнуть, что элементу  $x_i$  сопоставляется именно то подмножество, которое соответствует отображению  $F$ , это подмножество обозначают через  $Fx_i$ . Поэтому  $Fx_i \subseteq X$ . Совокупность двух объектов: множества  $X$  и отображения  $F$  на  $X$ , задает некоторый граф.

**Пример 1.1.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , а  $Fx_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$ ,  $Fx_2 = \emptyset$ ,  $Fx_3 = \{x_1, x_2, x_5\}$ ,  $Fx_4 = \{x_1\}$ ,  $Fx_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ . Тогда  $(X, F) = G$  есть граф.

Другой формой аналитического способа задания является задание графа как совокупности множества элементов  $X$  и подмножества множества упорядоченных пар элементов  $(x_i, x_j) \in X \times X$ . Подмножество множества пар  $(x_i, x_j)$  декартова \*) произведения  $X \times X$  эквивалентно бинарному отношению  $B$ , заданному на множестве  $X$ . Поэтому множество  $X$  и бинарное отношение  $B$  на множестве  $X$  также определяют некоторый граф  $G$ . В этом случае  $Fx_i$  представляет собой срез или сечение бинарного отношения  $B$  по элементу  $x_i$ . Легко видеть, что множество  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  и множество пар  $\{(x_1, x_1), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_5), (x_4, x_1), (x_5, x_1), (x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_4), (x_5, x_5)\}$  задают граф  $G = (X, F)$  примера 1.1.

Геометрический способ задания графов. Множество элементов  $X$  графа  $G$  изображают кружками и называют множеством вершин. Каждую вершину  $x_i \in X$  соединяют линиями с теми вершинами  $x_j \in X$ , для которых выполняется условие  $x_j \in Fx_i$ . Множество линий, которое соответствует множеству упорядоченных пар вершин  $(x_i, x_j)$ , где  $x_i \in X$ , а  $x_j \in Fx_i$ , называют множеством ребер графа. Если  $x_j \neq x_i$ , то ребро  $(x_i, x_j)$  изображается линией со стрелкой, которая называется дугой и направлена от  $x_i$  к  $x_j$ . Если  $x_i = x_j$ , то ребро  $(x_i, x_i)$  изображается линией без стрелки, которая соединяет вершину  $x_i$  с собой, и называется петлей.

\*) Подробно о декартовом произведении множеств см. гл. III, § 1.

На рис. 1.1 представлено геометрическое задание графа  $G = (X, F)$ , рассмотренного в примере 1.1.

Матричный способ задания графов. Квадратная матрица

$$R = \| r_{ij} \| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix},$$

элементы которой суть нули и единицы, называется матрицей смежности графа  $G = (X, F)$  тогда и только тогда, когда ее элементы образуются по следующему правилу: элемент  $r_{ij}$ , стоящий на пересечении  $x_i$ -й строки и  $x_j$ -го столбца, равен единице, если имеется дуга, идущая из вершины  $x_i$  в вершину  $x_j$ , и  $r_{ij}$  равен нулю в противном случае. Элемент  $r_{ii}$  равен единице, если при вершине  $x_i$  имеется петля, и равен нулю в противном случае. Коротко это можно записать так:

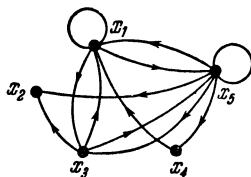


Рис. 1.1:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in Fx_i, \\ 0, & \text{если } x_j \notin Fx_i. \end{cases}$$

Ясно, что любая квадратная матрица  $R$  из нулей и единиц является матрицей смежности некоторого графа  $G$  и наоборот. Например, матрица

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

является матрицей смежности графа  $G = (X, F)$ , показанного на рис. 1.1.

Таким образом, если граф  $G$  задан одним из указанных способов: аналитическим, геометрическим или матричным, всегда легко перейти к любому другому способу задания, а результаты, которые получены на одном

языке, можно интерпретировать в другом. В дальнейшем наиболее часто для задания графов будем использовать аналитический и матричный способы задания, в то время как геометрический способ, в основном, будет служить для иллюстрации полученных результатов.

Введем теперь ряд понятий, которые будут использованы в последующих главах.

Вершина  $x_i$  и ребро  $(x_j, x_l)$  называются *инцидентными*, если  $j = i$  или  $l = i$ . В противном случае вершина  $x_i$  и ребро  $(x_j, x_l)$  называются *не инцидентными*. Говорят, что дуга  $(x_i, x_j)$  *исходит* из вершины  $x_i$  и *заходит* в вершину  $x_j$  или  $x_i$  — начало, а  $x_j$  — конец дуги. Две вершины  $x_i$  и  $x_j$  называются *смежными*, если существует хотя бы одна дуга, инцидентная им обоим. Вершина  $x_i$  смежна сама с собой, если при вершине  $x_i$  имеется петля. Два ребра  $(x_i, x_j)$  и  $(x_j, x_k)$  называются *смежными*, если существует хотя бы одна вершина, инцидентная им обоим.

Пусть  $G = (X, F)$  — некоторый граф и  $x_i \in X$ . По определению графа  $Fx_i$  — множество тех  $x_j \in X$ , в которые отображается вершина  $x_i$ . *Полустепенью исхода*  $s(x_i)$  (или  $s_i$ ) вершины  $x_i$  называют число ребер  $(x_i, x_j)$ , исходящих из вершины  $x_i$ . Так как оно определяется числом элементов множества  $Fx_i$ , то  $s(x_i) = |Fx_i|$ . Если  $F^{-1}$  — отображение, обратное  $F$ , то  $F^{-1}x_i$  представляет собой множество тех  $x_j \in X$ , которые отображаются в  $x_i$ . *Полустепенью захода*  $p(x_i)$  (или  $p_i$ ) вершины  $x_i$  называют число ребер  $(x_j, x_i)$ , заходящих в вершину  $x_i$ . Очевидно, что  $p(x_i) = |F^{-1}x_i|$ .

В том случае, когда граф  $G$  задан матрицей смежности  $R$ , полустепень исхода (захода) вершины  $x_i$  определяется соответственно суммой элементов  $x_i$ -й строки ( $x_j$ -го столбца) ( $j = i$ ). Поэтому

$$s(x_i) = \sum_{j=1}^n r_{ij}, \quad p(x_i) = \sum_{i=1}^n r_{ij}.$$

Например, для графа  $G = (X, F)$ , показанного на рис. 1.1, полустепени исхода и захода соответствующих вершин равны:

$$\begin{aligned} s_1 = 3; \quad p_1 = 4; \quad s_2 = 0; \quad p_2 = 2; \quad s_3 = 3; \quad p_3 = 2; \\ s_4 = 1; \quad p_4 = 1; \quad s_5 = 5; \quad p_5 = 3. \end{aligned}$$

Граф  $G^* = (X, F^{-1})$  называется *транспонированным* по отношению к графу  $G = (X, F)$ . Легко видеть, что матрица смежности  $R^*$  графа  $G^*$  образована из матрицы  $R$  транспонированием элементов.

Определим теперь понятия равенства и изоморфизма графов. Два графа  $G_1 = (X_1, F_1)$  и  $G_2 = (X_2, F_2)$  называются *равными*, если  $X_1 = X_2$ , и для каждого  $x_i \in X_1$  и  $x_j \in X_2$  таких, что  $x_i = x_j$ , выполняется  $F_1 x_i = F_2 x_j$ . Гораздо более важным понятием является изоморфизм графов. Два графа  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение  $f$  множества  $X$  на  $Y$  и для каждого  $x \in X$  и  $y \in Y$  таких, что  $f(x) = y$ , имеет место  $f(Fx) = Py$ . Легко видеть, что отношение изоморфизма графов *рефлексивно, симметрично и транзитивно* и является *отношением эквивалентности*. Поэтому, если известно, что граф  $G$  изоморфен графу  $H$  (обозначается  $G \sim H$ ), то графы  $G$  и  $H$  будем считать эквивалентными или равными с точностью до изоморфизма.

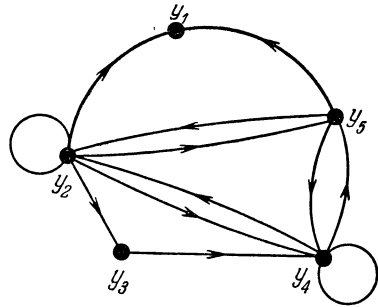


Рис. 1.2.

На рис. 1.2 показан граф  $H = (Y, P)$ , у которого  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ,  $Py_1 = \emptyset$ ,  $Py_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ,  $Py_3 = \{y_4\}$ ,  $Py_4 = \{y_2, y_4, y_5\}$ ,  $Py_5 = \{y_1, y_2, y_4\}$ . Если установить взаимно однозначное соответствие  $f$  между вершинами  $X$  и  $Y$  графов  $G$  (рис. 1.1) и  $H$  (рис. 1.2) следующим образом:

$$x_1 \leftrightarrow y_4, \quad x_2 \leftrightarrow y_1, \quad x_3 \leftrightarrow y_5, \quad x_4 \leftrightarrow y_3, \quad x_5 \leftrightarrow y_2,$$

то получим  $f(Fx_1) = f(x_1, x_3, x_4) = \{y_2, y_4, y_5\} = Py_4$ ,  $f(Fx_2) = Py_1$ ,  $f(Fx_3) = Py_5$ ,  $f(Fx_4) = Py_3$ ,  $f(Fx_5) = Py_2$ . Поэтому графы  $G$  и  $H$  изоморфны.

Рассмотрим некоторые специальные виды графов.

Граф  $G = (X, F)$ , где  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $Fx_i = \emptyset$  для любого  $x_i \in X$ , называется *графом с пустым отображением* ( $n$ -го порядка) и обозначается через  $G_\emptyset$ . Ясно, что матрица смежности  $R_\emptyset$  графа  $G_\emptyset$



содержит только нулевые элементы, т. е.  $r_{ij} = 0$  для всех  $i, j \in I$ . В частности, граф  $G = (X, F)$ , у которого  $X = \{x_1\}$ , а  $Fx_1 = \emptyset$ , будем называть *единичным графом с пустым отображением* и обозначать  $G^0$ .

Граф  $G = (X, F)$ , отображение которого удовлетворяет условию: если  $x_j \in Fx_i$ , то  $x_i \in Fx_j$ , где  $x_i, x_j \in X$ , называется *симметрическим графом*. Граф  $G = (X, F)$ , у которого  $x_j \in Fx_i$  влечет  $x_i \notin Fx_j$ , называется *антисимметрическим графом*.

Наконец, граф  $G = (X, F)$ , где  $X = \{x_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, t\}$ , а  $Fx_j = X$  для любого  $x_j \in X$ , называется *графом с насыщенным отображением* или просто *насыщенным графом* ( $t$ -го порядка) и обозначается через  $G_X$ . Очевидно, что матрица смежности  $R_X$  графа  $G_X$  содержит только единичные элементы, поэтому  $r_{ji} = 1$  для всех  $j, i \in J$ . В частности, граф  $G = (X, F)$ , у которого  $X = \{x_1\}$  и  $Fx_1 = \{x_1\}$ , будем называть *единичным графом* и обозначать через  $G^1$ .

Остановимся теперь на понятии ориентированного мультиграфа, которое обобщает понятие ориентированного графа.

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — некоторое множество элементов. Назовем произвольную, но конечную последовательность элементов из  $X$  словом \*) над множеством  $X$ . Например,  $x_n, x_1x_1x_1, x_3x_1x_2x_2x_1x_n$  — слова над множеством  $X$ . Число элементов в слове называется его длиной. Наибольшее из чисел повторения одного и того же элемента в слове будем называть кратностью данного слова.

Говорят, что задан ориентированный *мультиграф*  $G = (X, F)$ , если задано множество  $X$  и отображение  $F$  множества  $X$  в множество слов над  $X$ . Наибольшая из кратностей всех слов над  $X$  называется мультичислом  $t$  данного мультиграфа  $G$ . Очевидно, что все понятия и определения, введенные для графов, естественно обобщаются на мультиграфы.

**Пример 1.2.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , а  $Fx_1 = x_2x_4x_4$ ,  $Fx_2 = x_1x_2x_2x_2x_3x_3$ ,  $Fx_3 = x_1x_1x_1x_2x_3x_3x_4$ ,  $Fx_4 = \emptyset$ . Тогда  $G = (X, F)$  — мультиграф, мультичисло которого  $t = 3$ . Геометрическая интерпретация мультиграфа  $G$

\*) Более подробно о словах см. гл. V, §§ 1, 2.

показана на рис. 1.3, а матрица смежности  $R$  имеет вид

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что при таком методе задания мультиграфов исчезает индивидуализация петель при одной вершине и дуг, идущих в одном направлении между одними и теми же двумя вершинами, однако в следующем параграфе будет предложен способ задания мультиграфов, который устраняет это обстоятельство. В тех случаях, когда индивидуализация дуг и петель не имеет значения, можно использовать указанный метод задания мультиграфов.

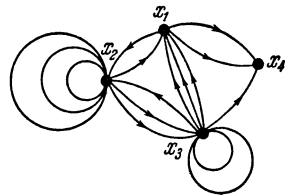


Рис. 1.3.

Если мультичисло  $m$  мультиграфа  $G = (X, F)$  равно единице ( $m = 1$ ), то, очевидно,  $F$  — отображение множества  $X$  в  $X$ , и можно говорить о графе  $G = (X, F)$ .

В дальнейшем ориентированные графы, рассмотренные в этом параграфе, будем называть графами Бержа [23]. Именно графы Бержа будут объектом изучения последующих трех глав, хотя полученные результаты легко обобщаются на другие типы графов.

## § 2. Смешанные графы

В этом параграфе будет дано наиболее общее понятие графа, частным случаем которого являются ориентированные и неориентированные графы\*). Произвольный граф может одновременно содержать ориентированные ребра (дуги) и неориентированные ребра (звенья), как, например, граф, показанный на рис. 1.4. Для описания таких графов необходимо задавать множества вершин и ребер графа. Инцидентность произвольных

\*) При написании этого параграфа использован материал 1 главы монографии А. А. Зыкова [183], в которой эти вопросы освещены более подробно.

вершин и ребер задается с помощью трехместного предиката. Предикат определен на всех упорядоченных тройках элементов, содержащих одно ребро и две вершины. Если на некоторой тройке элементов значение предиката истинно, то данное ребро инцидентно двум указанным вершинам, в противном случае не инцидентно. В общем случае граф можно определить следующим образом.

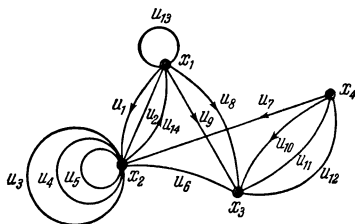


Рис. 1.4.

Говорят, что задан граф  $G = (X, U, P)$ , если даны два множества элементов  $X$  и  $U$  ( $X \cap U = \emptyset$ ), называемых соответственно множеством *вершин* и *ребер*, и трехместный предикат  $P$ , называемый *инцидентором*, который удовлетворяет условиям:

1)  $P$  определен на всех упорядоченных тройках элементов  $x, u, y$ , где  $x, y \in X$ , а  $u \in U$ ;

2)  $(\forall u \in U) (\exists x, y \in X) \{P(x, u, y) \& (\forall x', y' \in X) [P(x', u, y') \rightarrow (x = x' \& y = y') \vee (x = y' \& y = x')]\}$ .

Множество ребер в общем случае таково, что для любого  $u \in U$  истинно одно из трех высказываний:

- $(\forall x, y \in X) [P(x, u, y) \rightarrow \bar{P}(y, u, x)]$ ;
- $(\exists x, y \in X) [P(x, u, y) \& P(y, u, x) \& (x \neq y)]$ ;
- $(\exists x \in X) P(x, u, x)$ .

В зависимости от справедливости того или иного высказывания множество всех ребер  $U$  разбивается на три попарно пересекающихся подмножества  $\{\vec{U}, \tilde{U}, \hat{U}\}$ , называемых соответственно *дугами* (ориентированными ребрами), *звеньями* (неориентированными ребрами) и *петлями*.

Два графа  $G = (X, U, P)$  и  $H = (Y, V, Q)$  называются изоморфными, если существуют взаимно однозначные отображения  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно множеств  $X$  на  $Y$  и  $U$  на  $V$  такие, что выполняется условие

$$(\forall x_1, x_2 \in X) (\exists y_1, y_2 \in Y) (\forall u \in U) (\exists v \in V) \{(\varphi(x_1) = y_1) \& (\varphi(x_2) = y_2) \& (\psi(u) = v) \rightarrow [P(x_1, u, x_2) \leftrightarrow Q(y_1, v, y_2)]\}.$$

В этом случае говорят, что  $\varphi$  и  $\psi$  сохраняют инцидентор.

**Пример 1.3.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\}$ , а инцидентор  $P$  определяется следующим образом: значения  $P(x_1, u_1, x_2)$ ,  $P(x_1, u_{13}, x_1)$ ,  $P(x_1, u_2, x_2)$ ,  $P(x_1, u_8, x_3)$ ,  $P(x_1, u_9, x_3)$ ,  $P(x_2, u_2, x_1)$ ,  $P(x_2, u_3, x_2)$ ,  $P(x_2, u_4, x_2)$ ,  $P(x_2, u_5, x_2)$ ,  $P(x_2, u_{14}, x_1)$ ,  $P(x_2, u_6, x_3)$ ,  $P(x_3, u_6, x_2)$ ,  $P(x_3, u_{11}, x_4)$ ,  $P(x_3, u_{12}, x_4)$ ,  $P(x_4, u_7, x_2)$ ,  $P(x_4, u_{10}, x_3)$ ,  $P(x_4, u_{11}, x_3)$ ,  $P(x_4, u_{12}, x_3)$ , истинны, а значения  $P$  на всех остальных тройках элементов ложны. Тогда  $G = (X, U, P)$  — смешанный граф, у которого множество ребер  $U$  разбивается на подмножества

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \{u_1, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{14}\}, \quad \tilde{U} = \{u_2, u_6, u_{11}, u_{12}\}, \\ \overset{\circ}{U} &= \{u_3, u_4, u_5, u_{13}\}.\end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация графа  $G$  показана на рис. 1.4.

Остановимся теперь подробнее на классификации графов. Графы разделяются на типы в зависимости от вида ребер, из которых состоит множество  $U$ . Граф  $G = (X, U, P)$ , у которого  $\vec{U} \neq \emptyset$ ,  $\tilde{U} \neq \emptyset$  и  $\overset{\circ}{U} \neq \emptyset$ , называется *смешанным* графом. Это наиболее общий тип графа, который между двумя любыми вершинами может содержать несколько звеньев и дуг, идущих в одном направлении, и при одной вершине может иметь несколько петель. Если  $\vec{U} = \emptyset$ , а  $\tilde{U} \neq \emptyset$ , то граф  $G = (X, U, P)$  называется *неориентированным* графом или *неографом*. В том случае, когда  $\vec{U} \neq \emptyset$ , а  $\tilde{U} = \emptyset$ , граф  $G = (X, U, P)$  называется *ориентированным* графом или *орграфом*. Если  $\overset{\circ}{U} = \emptyset$ , то к словам смешанный граф, орграф, неограф добавляются слова «без петель». Очевидно, что орграф и неограф в общем случае являются мультиграфами и определяются однозначно с точностью до индивидуализации ребер. Если орграф  $G = (X, U, P)$  удовлетворяет условию

$$(\forall u, v \in U)(\forall x, y \in X)[P(x, u, y) \& P(x, v, y) \rightarrow (u = v)],$$

т. е. если из вершины в другую вершину может идти не более одной дуги и при вершине может быть не более одной петли, то нетрудно видеть, что орграф  $G$  является

графом Бержа. Действительно, обозначая через  $F$  отображение множества  $X$  в  $X$ , а через  $Fx$  — множество тех  $y \in X$ , для которых истинно высказывание  $(\exists u \in U)P(x, u, y)$ , приходим к известному способу задания графа Бержа в виде  $G = (X, F)$ . Задание графов Бержа в такой форме однозначно с точностью до индивидуализации ребер, так как

$$U = \{(x, y) / y \in Fx\},$$

$$P(x, u, y) \leftrightarrow u = (x, y) \& u \in U \leftrightarrow u = (x, y) \& y \in Fx,$$

где  $(x, y)$  — упорядоченная пара элементов из  $X$ .

Определим понятия матриц инцидентий и смежности для смешанных графов.

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — множество вершин, а  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  — множество ребер графа  $G = (X, U, P)$ . Матрицей инцидентий графа  $G$  называется прямоугольная матрица

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix},$$

где  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ , элементы которой  $a_{ij}$  принимают значения из множества  $\{\xi, \eta, \theta, \zeta, 0\}$  и определяются по графу  $G$  следующим образом:

- если  $u_j$  — дуга, исходящая из вершины  $x_i$ , то  $a_{ij} = \xi$ ;
- если  $u_j$  — дуга, заходящая в  $x_i$ , то  $a_{ij} = \eta$ ;
- если  $u_j$  — петля при вершине  $x_i$ , то  $a_{ij} = \zeta$ ;
- если  $u_j$  — звено, инцидентное  $x_i$ , то  $a_{ij} = \theta$ ;
- если ребро  $u_j$  и вершина  $x_i$  не инцидентны, то  $a_{ij} = 0$ .

Очевидно, что по матрице инцидентий  $A$  однозначно можно определить смешанный граф  $G$ . Заметим, что прямоугольная матрица с элементами  $a_{ij} \in \{\xi, \eta, \theta, \zeta, 0\}$  является матрицей инцидентий некоторого графа в том и только в том случае, если каждый ее столбец содержит либо один, либо два ненулевых элемента, причем если в столбце такой элемент только один, то это  $\zeta$ , а если таких элемента два, то это или  $\xi$  и  $\eta$ , или  $\theta$  и  $\theta$ .

Более часто, чем матрица инцидентий, используется матрица смежности смешанного графа  $G = (X, U, P)$ .

Квадратная матрица  $R = \|r_{ij}\|$ , где  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , называется *матрицей смежности* графа  $G$  тогда и только тогда, когда ее элементы  $r_{ij}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{если } i = j, \text{ то } r_{ii} &= s^0(x_i) \cdot \xi; \\ \text{если } i \neq j, \text{ то } r_{ij} &= s^+(x_i, x_j) \cdot \xi + s^-(x_i, x_j) \cdot \eta + \tilde{s}(x_i, x_j) \cdot \theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s^0(x_i) &\text{— количество петель при вершине } x_i; \\ s^+(x_i, x_j) &\text{— количество дуг, идущих из } x_i \text{ в } x_j; \\ s^-(x_i, x_j) &\text{— количество дуг, идущих из } x_j \text{ в } x_i; \\ \tilde{s}(x_i, x_j) &\text{— количество звеньев, соединяющих } x_i \text{ с } x_j. \end{aligned}$$

Например, матрица инциденций  $A$  и матрица смежности  $R$  графа  $G = (X, U, P)$ , показанного на рис. 1.3, соответственно равны

$$A = \begin{vmatrix} \xi & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \xi & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ \eta & \theta & \xi & \xi & \xi & \theta & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & 0 & \eta & \eta & \eta & \theta & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi & \theta & \theta & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} \xi & \xi + \eta + \theta & 2\xi & 0 \\ \eta + \xi + \theta & 3\xi & \theta & \eta \\ 2\eta & \theta & 0 & \eta + 2\theta \\ 0 & \xi & \xi + 2\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Если  $G = (X, U, P)$  — граф Бержа, то на элементы множества  $\{\xi, \eta, \theta, \zeta\}$  накладываются условия  $\xi = \zeta = 1$ ,  $\eta = \theta = 0$ , а матрица смежности  $R$  приобретает вид

$$\begin{vmatrix} s^0(x) & s^+(x_1, x_2) & \dots & s^+(x_1, x_n) \\ s^+(x_2, x_1) & s^0(x_2) & \dots & s^+(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^+(x_n, x_1) & s^+(x_n, x_2) & \dots & s^0(x_n) \end{vmatrix},$$

где

$$s^0(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\exists u \in U) P(x_i, u, x_i) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } (\exists u \in U) P(x_i, u, x_i) \text{ ложно,} \end{cases}$$

$$s^+(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\exists u \in U) P(x_i, u, x_j) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } (\exists u \in U) P(x_i, u, x_j) \text{ ложно.} \end{cases}$$

Таким образом, приходим к известной нам матрице смежности  $R$  графа  $G = (X, F)$ .

### § 3. Проблема изоморфизма и изоморфного вложения графов

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два произвольных графа Берга. Напомним, что графы  $G$  и  $H$  называются изоморфными, если множества  $X$  и  $Y$  эквивалентны\*) и для любых  $x \in X$  и  $y \in Y$ , которые поставлены во взаимно однозначное соответствие, выполняется  $Fx$  эквивалентно  $P_y$ .

Говорят, что граф  $G$  изоморфно вкладывается в граф  $H$  или граф  $H$  является изоморфным продолжением графа  $G$ , если  $X$  эквивалентно некоторому подмножеству  $Y' \subseteq Y$  и для любых элементов  $x \in X$  и  $y \in Y'$ , поставленных во взаимно однозначное соответствие, выполняется условие  $Fx$  эквивалентно  $P'y$ , где  $P'y \subseteq P_y \cap Y'$ .

Многие практические задачи приводят к необходимости распознавания изоморфизма и изоморфного вложения сложных структур, которые могут быть заданы в форме матриц или графов. С содержательной точки зрения изоморфизм структур означает тождественность их функционирования, что приводит в некоторых случаях к возможности замены одной структуры другой, ей изоморфной. Однако для распознавания изоморфизма применяется алгоритм полного перебора, что делает проблему изоморфизма практически нерешимой уже при сравнительно небольшом числе элементов данной структуры.

В следующем параграфе будет предложен один из возможных методов, ведущий в некоторых случаях к существенному сокращению перебора при решении данной задачи.

Легко видеть, что для распознавания изоморфизма графов  $G$  и  $H$ , которые имеют  $n$  вершин, требуется в общем случае выполнить  $n!$  попарных сравнений, а для распознавания изоморфного вложения графа  $G$ , имеющего  $m$  вершин, в граф  $H$ , который содержит  $n$  вершин ( $m < n$ ), необходимо произвести  $C_n^m \cdot m!$  сравнений. Из приведенных оценок числа сравнений видно, что уже

---

\*) Множества  $X$  и  $Y$  называются эквивалентными, если имеет место  $X \subseteq Y$  и  $Y \subseteq X$ .

при относительно небольшом количестве элементов в графах (около 100) решение задачи об изоморфизме методом полного перебора невозможно даже с помощью новейших вычислительных машин.

В следующем параграфе мы покажем, что из множества графов можно выделить класс графов, имеющих различные пары полустепеней исхода и захода вершин, для которых оценка  $n!$  при установлении изоморфизма завышена, и приведем верхнюю оценку перебора для графов этого класса. Кроме того, мы сформулируем алгоритм распознавания изоморфизма графов данного класса и изложим эвристический прием, который в сочетании с приведенным алгоритмом можно применять для распознавания изоморфизма произвольных графов. В § 5 сделана попытка сократить перебор при практическом решении проблемы изоморфного вложения графов и предложен алгоритм распознавания изоморфного вложения графов. Заметим, что указанные алгоритмы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения графов удобны для реализации на ЦВМ.

#### § 4. Алгоритм распознавания изоморфизма графов

Пусть даны два графа  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , имеющие множества элементов  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I$ , и  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in I$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Каждому элементу  $x_i \in X$  сопоставим пару чисел  $(s_i, p_i)$ , а элементу  $y_j \in Y$  — пару  $(v_j, \omega_j)$ , где соответственно  $s_i$  и  $v_j$  — полустепени исхода, а  $p_i$  и  $\omega_j$  — полустепени захода каждой вершины.

*Лемма 1.1.* Если графы  $G$  и  $H$  изоморфны, то существует подстановка  $t \in T$ , где  $T$  — симметрическая группа подстановок множества элементов, которая ставит во взаимно однозначное соответствие каждому элементу  $x_i \in X$  графа  $G$  элемент  $y_j \in Y$  графа  $H$  такой, что  $s_i = v_j$  и  $p_i = \omega_j$ .

*Доказательство.* Из определения изоморфизма следует, что изоморфные графы отличаются друг от друга только упорядоченностью в обозначениях вершин. Однако перенумерация вершин не изменяет полустепени исхода  $s$  и полустепени захода  $p$  каждой вершины. Поэтому для любого  $x_i \in X$  с парой  $(s_i, p_i)$  можно взаимно



однозначно определить такой  $y_j \in Y$  с парой  $(v_j, w_j)$ , что  $s_i = v_j$  и  $p_i = w_j$ . Тем самым найдена подстановка  $t \in T$ , переводящая граф  $G$  в граф  $H$ .

**Лемма 1.2.** *Если существует подстановка  $t \in T$ , которая переводит матрицу смежности  $A$  графа  $G$  в матрицу смежности  $B$  графа  $H$ , то графы  $G$  и  $H$  изоморфны.*

Это утверждение следует из определения изоморфизма графов.

Сформулируем теперь теорему об изоморфизме двух произвольных графов.

**Теорема 1.1.** *Для того чтобы граф  $G$  был изоморфен графу  $H$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а)  $(\forall x_i \in X)(\exists y_j \in Y)((s_i = v_j) \& (p_i = w_j))$ ;

б)  $\exists t \in T$  такая, что  $G$  переводит в  $H$ .

Необходимость вытекает из леммы 1.1, а достаточность из леммы 1.2.

Следующая теорема дает верхнюю оценку объема перебора при установлении изоморфизма графов, имеющих различные пары полустепеней исхода и захода каждой вершины.

**Теорема 1.2.** *Если даны графы  $G$  и  $H$ , имеющие  $n$  вершин с попарно различными числами  $(s, p)$  и  $(v, w)$ , то установить их изоморфизм можно не более чем за  $\frac{n(n+1)}{2}$  сравнений, причем подстановка  $t \in T$ , переводящая  $G$  в  $H$ , определяется графом соответствия, который имеет  $n$  ребер.*

**Доказательство.** Выпишем все элементы множеств  $X$  и  $Y$  с отнесенными им парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$ . По условию а) теоремы 1.1 для каждого элемента  $x_i \in X$ , начиная с  $x_1$ , ищем элемент  $y_j \in Y$  путем сравнения пар  $(s_i, p_i)$  с  $(v_j, w_j)$ . Если для элемента  $x_1$  условие а) теоремы 1.1 не выполняется, то после  $n$  шагов сравнения приходим к выводу, что графы  $G$  и  $H$  не изоморфны. В противном случае для элемента  $x_2$  будем искать соответствующий элемент  $y_j \in Y$  из множества  $(n-1)$  элементов и т. д. Элемент  $x_n \in X$  сравниваем с оставшимся элементом из  $Y$ . Поэтому после  $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  шагов сравнения при вы-

полнении условия б) теоремы 1.1 устанавливаем, что граф  $G$  изоморфен графу  $H$ . Соединяя элементы множеств  $X$  и  $Y$ , имеющие одинаковые пары, получаем граф соответствия с  $n$  ребрами, который определяет подстановку  $t \in T$ .

Следует заметить, что теоремы 1.1 и 1.2 справедливы и для неориентированных графов, поскольку любой неориентированный граф можно представить ориентированным путем замены каждого ребра парой дуг с противоположной ориентацией.

На основании теорем 1.1 и 1.2 можно предложить следующий алгоритм распознавания изоморфизма двух графов  $G$  и  $H$ .

1°. Подсчитываем число вершин каждого графа. При равенстве переходим к 2°, а при неравенстве к 6°.

2°. Выписываем все элементы обоих графов в естественной упорядоченности и определяем пары  $(s, p)$  и  $(v, w)$  для каждого элемента. Переходим к 3°.

3°. Для каждого элемента  $x$  графа  $G$  ищем такой элемент  $y$  графа  $H$ , что выполняется условие а) теоремы 1.1. Найденные элементы  $x$  и  $y$  соединяем ребром, т. е. строим граф соответствия. Переходим к 4°. В противном случае к 6°.

4°. Выписываем подстановку, определяемую графом соответствия и проверяем выполнение условия б) теоремы 1.1. При выполнении условия переходим к 5°. В противном случае к 6°.

5°. Графы изоморфны.

6°. Графы не изоморфны.

Рассмотрим на примере работу алгоритма.

Пример 1.4. Пусть даны два графа  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , геометрическая интерпретация которых показана соответственно на рис. 1.5 и 1.6. Определим, изоморфны ли графы  $G$  и  $H$ .

В результате подсчета устанавливаем, что число вершин графов одинаково. Запишем элементы графов  $G$  и  $H$  с характеризующими их парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$  и построим граф соответствия так, как это показано на рис. 1.7. Легко видеть, что подстановка

$$t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ y_9 & y_4 & y_{12} & y_{10} & y_8 & y_2 & y_6 & y_1 & y_5 & y_7 & y_{11} & y_3 \end{pmatrix}$$

переводит матрицу смежности графа  $G$  в матрицу смежности графа  $H$ . Следовательно, графы  $G$  и  $H$  изоморфны.

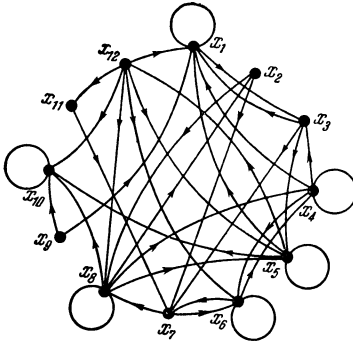


Рис. 1.5.

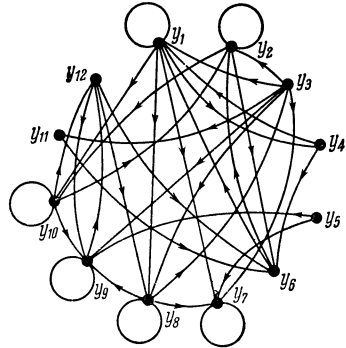


Рис. 1.6.

Полустепени исхода и захода каждой вершины однозначно определяют данный граф. Поэтому для распознавания

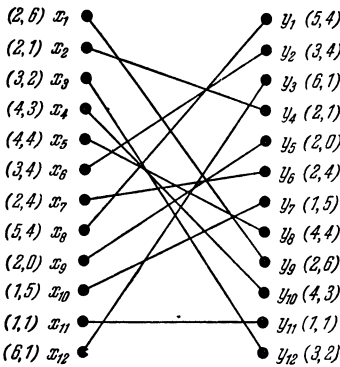


Рис 1.7.

изоморфизма двух графов необходимо отыскивать подстановку, удовлетворяющую условию б) теоремы 1.1. Если графы  $G$  и  $H$  имеют  $k$  ( $k < n$ ) вершин с одинаковыми парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$  каждый, то, используя описанный алгоритм, получаем  $k!$  подстановок вместо одной подстановки при попарно различных числах  $(s, p)$  и  $(v, w)$ . В этом случае, вообще говоря, надо проверить выполнение условия б) теоремы 1.1

для  $k!$  подстановок, что снижает эффективность алгоритма.

Для того чтобы в большинстве случаев уменьшить число подстановок, подлежащих перебору, можно предложить метод, который заключается в следующем. После

записи всех элементов  $x \in X$  и  $y \in Y$  обоих графов с отнесенными им парами чисел  $(s, p)$  и  $(v, w)$  соединяем ребрами те элементы графов, которые удовлетворяют условию а) теоремы 1.1 и не входят в указанные выше  $k$  вершин. Получаем частичную подстановку. Для элементов с одинаковыми парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$  обоих графов записываем в скобках множества  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$ , которые сопоставлены данным элементам  $x$  и  $y$  отображениями  $F$  и  $P$  соответствующих графов. Для элементов  $x \in X'$  выписываем элементы  $y \in Y'$ , определяемые полученной частичной подстановкой. Соединяем ребрами те элементы  $x \in X$  и  $y \in Y$  из указанных  $k$  элементов, для которых множество  $Y'$  одно и то же. Если среди указанных  $k$  элементов графов  $G$  и  $H$  имеется  $l$  элементов ( $l \leq k$ ), у которых множество  $Y'$  одинаково для всех  $l$  элементов и невозможно провести ребра графа соответствия, то для каждого элемента  $x$  и  $y$  обоих графов записываем в скобках множества  $X'' \subseteq X$  и  $Y'' \subseteq Y$ , которые сопоставлены элементам  $x$  и  $y$  отображениями  $F^{-1}$  и  $P^{-1}$ , обратными к отображениям  $F$  и  $P$ . Для элементов  $x \in X''$  выписываем элементы  $y \in Y''$ , определяемые частичной подстановкой, и соединяем ребрами графа соответствия те элементы  $x \in X$  и  $y \in Y$  из рассмотренных  $l$  элементов, у которых множество  $Y''$  одно и то же. Этот процесс продолжаем до получения одной или нескольких подстановок вместо  $k!$  и после проверки условия б) теоремы 1.1 делаем заключение об изоморфизме графов.

Таким образом, можно сформулировать *обобщенный алгоритм* распознавания изоморфизма двух произвольных графов. Чтобы не повторять уже приведенный алгоритм, будем называть его обобщенным, если вместо пункта 3° предыдущего алгоритма записать два новых пункта:

3°. Если графы  $G$  и  $H$  имеют вершины с разными парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$  каждый, то строим граф соответствия, соединяя ребрами такие элементы  $x$  и  $y$  графов  $G$  и  $H$ , для которых выполняется условие а) теоремы 1.1. В противном случае переходим к пункту 6°. Если графы имеют  $k$  ( $k < n$ ) вершин с одинаковыми парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$  каждый, то сначала соединяем ребрами элементы обоих графов, удовлетворяющие

условию а) теоремы 1.1 и не входящие в указанные  $k$  вершин. Получаем частичную подстановку. Переходим к пункту 3° а.

3° а. Используя предложенный метод для элементов с одинаковыми парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$ , получаем одну или несколько подстановок вместо  $k!$  Переходим к пункту 4°.

Нетрудно видеть, что указанный прием можно обобщить на случай, когда графы  $G$  и  $H$  содержат  $k_1, k_2, \dots, k_m$  элементов  $(k_1 + k_2 + \dots + k_m < n)$ , имеющих одинаковые пары  $(s, p)$  только для элементов данной группы  $k_j, j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Пример 1.5. Пусть даны графы  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , показанные соответственно на рис. 1.8 и 1.9. Установим, изоморфны ли данные графы.

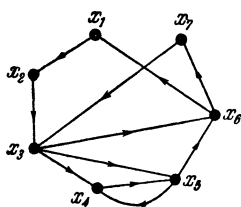


Рис. 1.8.

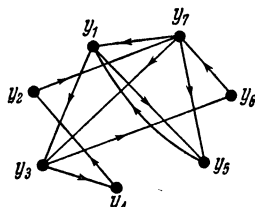


Рис. 1.9.

Запишем элементы  $x \in X$  и  $y \in Y$  с соответствующими им парами и определим частичную подстановку, проведя ребра 1 и 2, показанные на рис. 1.10. Затем последовательно строим ребра 3—7, используя отображения  $F$  и  $P$  и частичные подстановки. В результате получаем подстановку

$$t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ y_4 & y_2 & y_7 & y_5 & y_1 & y_3 & y_6 \end{pmatrix},$$

которая удовлетворяет условию б) теоремы 1.1. Следовательно, графы  $G$  и  $H$  изоморфны.

В заключение отметим, что обобщенный алгоритм распознавания изоморфизма графов является вполне удовлетворительным при решении большинства практи-

ческих задач. Исключение составляют те случаи, когда рассматриваемые графы имеют одинаковое число

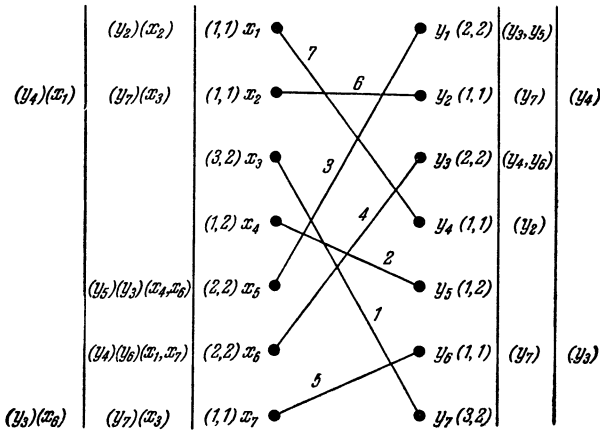


Рис. 1.10.

вершин и все пары полустепеней исхода и захода каждой вершины одинаковы.

### § 5. Об изоморфном вложении графов

Докажем теперь теорему об изоморфном вложении графов и сформулируем алгоритм распознавания изоморфного вложения графа в граф.

Пусть даны графы  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , имеющие множества вершин  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ , и  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ , причем  $m \leq n$ . Пусть также  $s_i$  и  $v_j$  — полустепени исхода, а  $p_i$  и  $\omega_j$  — полустепени захода соответственно вершин  $x_i \in X$  и  $y_j \in Y$ .

Имеют место следующие предложения.

**Лемма 1.3.** Если граф  $G$  изоморфно вложим в граф  $H$ , то существует по крайней мере одна подстановка  $t \in T$ , где  $T$  — симметрическая группа подстановок порядка  $m!$ , которая ставит во взаимно однозначное соответствие каждому элементу  $x_i \in X$  графа  $G$  элемент  $y_j \in Y$  графа  $H$  такой, что  $s_i \leq v_j$  и  $p_i \leq \omega_j$ .

**Доказательство.** Из определения изоморфного вложения следует, что  $G$  изоморфен некоторому

подграфу  $H' = (Y', P')$  графа  $H$ . Так как  $Y' \subseteq Y$ , а  $P'y \subseteq Py \cap Y'$ , то для любого элемента  $y_j \in Y'$  с парой  $(v'_j, w'_j)$  графа  $H'$  в графе  $H$  существует такой элемент  $y_j \in Y$  с парой  $(v_j, w_j)$ , что

$$(v'_j \leq v_j) \& (w'_j \leq w_j). \quad (1.1)$$

Из леммы 1.1 для графов  $G$  и  $H'$  имеет место

$$(\forall x_i \in X)(\exists y_j \in Y')((s_i = v'_j) \& (p_i = w'_j)). \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) определяет подстановку  $t \in T$  множества  $X$  на  $Y'$ . Учитывая (1.1) и (1.2), получаем

$$(\forall x_i \in X)(\exists y_j \in Y)((s_i \leq v_j) \& (p_i \leq w_j)).$$

Лемма 1.3 доказана.

**Лемма 1.4.** *Если существует подстановка  $t \in T$  множества вершин  $X$  графа  $G$  на множество  $Y'$  графа  $H' \subseteq H$ , которая переводит граф  $G$  в граф  $H'$ , то граф  $G$  изоморфно вложим в граф  $H$ .*

Доказательство следует из определения изоморфного вложения графов.

**Теорема 1.3.** *Для того чтобы граф  $G$  изоморфно вкладывался в граф  $H$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) для каждой вершины  $x_i \in X$  графа  $G$  существует по крайней мере одна такая вершина  $y_j \in Y$  в графе  $H$ , что  $s_i \leq v_j$  и  $p_i \leq w_j$ ;

б) существует подстановка  $t \in T$  множества  $X$  на  $Y' \subseteq Y$ , которая переводит граф  $G$  в граф  $H'$ , причем  $H' \subseteq H$ .

Доказательство необходимости вытекает из леммы 1.3, а достаточности из леммы 1.4.

Сформулируем теперь алгоритм распознавания изоморфного вложения графа  $G$  в граф  $H$ .

1°. Подсчитываем число вершин  $m$  графа  $G$  и  $n$  графа  $H$ . Если  $m \leq n$ , то переходим к 2°. Если  $m > n$ , то переходим к 9°.

2°. Выписываем все вершины графов  $G$  и  $H$  с отображениями каждой из них и определяем пары  $(s, p)$  и  $(v, w)$  для каждой вершины  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Переходим к 3°.

3°. Проверяем выполнение условия а) теоремы 1.3. Если оно выполняется, то переходим к 4°, в противном случае — к 9°.

4°. Вершине  $x_i \in X$  графа  $G$  с максимальным числом  $s_i$  сопоставим такую вершину  $y_j \in Y$  графа  $H$ , для которой выполняется условие а) теоремы 1.3. Переходим к 5°.

5°. Каждой вершине  $x_j \in Fx_i$  ставим во взаимно однозначное соответствие одну из вершин  $y_k \in Py_j$  так, чтобы выполнялось условие а) теоремы 1.3. Получаем частичную подстановку  $t_1$  множества  $X$  на  $Y' \subset Y$ . Переходим к 7°. Если условие а) теоремы 1.3 для вершин  $x_j$  и  $y_k$  не выполняется, то переходим к 6°.

6°. Вершине  $x_i \in X$  графа  $G$  с максимальным числом  $s_i$  сопоставим другую вершину  $y_l \in Y$  графа  $H$ , для которой выполняется условие а) теоремы 1.3. Переходим к 5°. Если такой вершины не найдется, то переходим к 9°.

7°. Используя частичную подстановку  $t_1$ , проверяем ее для остальных  $m - 1$  вершин графа  $G$ . Если подстановка  $t_1$  не противоречит отображениям элементов  $y \in Y$ , то доопределяем ее для остальных элементов множества  $X$ , не входящих в частичную подстановку  $t_1$ . Получаем подстановку  $t \in T$  множества  $X$  на  $Y' \subseteq Y$ . Переходим к 8°. Если полученную частичную подстановку нельзя доопределить, то переходим к 5°, устанавливая новое соответствие между вершинами  $x_j$  и  $y_k$ .

8°. Граф  $G$  изоморфно вложим в граф  $H$ .

9°. Граф  $G$  изоморфно не вкладывается в граф  $H$ . Заметим, что если  $m \geq n$ , то можно использовать предложенный алгоритм для распознавания изоморфного вложения графа  $H$  в граф  $G$ . Когда  $m = n$ , возможны следующие случаи:

- а) граф  $G$  изоморфно вкладывается в граф  $H$ ;
- б) граф  $H$  изоморфно вкладывается в граф  $G$ ;
- в) граф  $G$  изоморфно вложим в граф  $H$ , а граф  $H$  изоморфно вложим в граф  $G$ , т. е. графы  $G$  и  $H$  изоморфны;
- г) графы  $G$  и  $H$  изоморфно не вложимы друг в друга.

Работу алгоритма покажем на примере.



Пример 1.6. Пусть даны графы  $G$  и  $H$ , показанные соответственно на рис. 1.11 и 1.12. Определим, существует ли отношение изоморфного вложения между графами  $G$  и  $H$ .

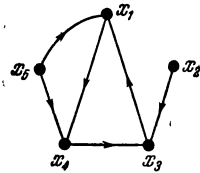


Рис. 1.11.

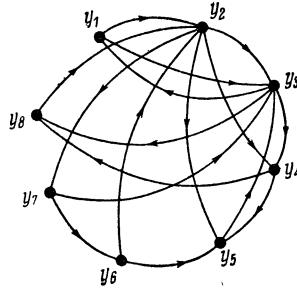


Рис. 1.12.

Так как число вершин графа  $G$  меньше числа вершин графа  $H$ , то будем искать изоморфное вложение графа  $G$  в граф  $H$ .

Выпишем вершины графов  $G$  и  $H$  в естественной упорядоченности с отображением каждой из них и парами  $(s, p)$  и  $(v, w)$ . Получим

$G$	$H$
$x_1 \mid (1,2) \mid \{x_4\},$	$y_1 \mid (2,1) \mid \{y_2, y_3\},$
$x_2 \mid (2,0) \mid \{x_3, x_5\},$	$y_2 \mid (4,3) \mid \{y_3, y_4, y_5, y_7\},$
$x_3 \mid (1,3) \mid \{x_1\},$	$y_3 \mid (3,4) \mid \{y_1, y_4, y_8\},$
$x_4 \mid (1,2) \mid \{x_3\},$	$y_4 \mid (2,2) \mid \{y_5, y_8\},$
$x_5 \mid (3,1) \mid \{x_1, x_3, x_4\},$	$y_5 \mid (1,3) \mid \{y_3\},$
	$y_6 \mid (2,1) \mid \{y_2, y_5\},$
	$y_7 \mid (2,1) \mid \{y_3, y_6\},$
	$y_8 \mid (1,2) \mid \{y_2\}.$

Условие а) теоремы 1.3 выполняется для графов  $G$  и  $H$ . Вершине  $x_5$  графа  $G$  с максимальным числом исходов можно сопоставить только вершины  $y_2$  и  $y_3$  графа  $H$ , так как для остальных вершин не выполняется условие а) теоремы 1.3. Однако для множеств  $Fx_5$  и  $Pu_3$  также не выполняется условие а) теоремы 1.3. Поэтому вершине  $x_5$  ставим в соответствие вершину  $y_2$ . Сопостав-

ляя множества  $Fx_5$  и  $Pu_2$ , возьмем следующую частичную подстановку

$$t_1 = \begin{pmatrix} x_5 & x_1 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix}$$

так, чтобы для элементов выполнялось условие а) теоремы 1.3. Проверим полученную частичную подстановку для остальных вершин графа  $G$ . Видим, что в графе  $G$  отображение  $Fx_1 = \{x_4\}$ . Из подстановки  $t_1$  следует, что  $Pu_3$  должно включать  $y_5$ , что не соответствует действительности. Таким образом, необходимо взять другую частичную подстановку  $t_2$ . Выберем

$$t_2 = \begin{pmatrix} x_5 & x_1 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_5 & y_4 \end{pmatrix},$$

для элементов которой также выполняется условие а) теоремы 1.3. Проверяем подстановку  $t_2$  для вершин  $x_1, x_3, x_4$ . Так как  $t_2$  не противоречит отображениям элементов  $y_3, y_4, y_5$ , то доопределяем ее следующим образом. Устанавливаем соответствие между вершинами  $x_2$  и  $y_6$  из сравнения отображений  $Fx_2$  и  $Pu_6$ .

Полученная подстановка  $t$  множества  $X$  на множество  $Y' \subset Y$  имеет вид

$$t = \begin{pmatrix} x_5 & x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \\ y_2 & y_3 & y_5 & y_4 & y_6 \end{pmatrix}$$

и показывает, что граф  $G$  изоморфно вложим в граф  $H$ .

## ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ

## § 1. Графы и подграфы

В этой главе исследуются свойства теоретико-множественных операций объединения, пересечения, соединения и дополнения над графами Бержа с точки зрения абстрактной теории множеств. Показано, что множество подграфов произвольного непустого графа образует дистрибутивную структуру по операциям объединения и пересечения графов, а множество суграфов произвольного графа по операциям объединения, пересечения и дополнения над графами является булевой структурой или булевой алгеброй. Соответствующие операции и их свойства легко обобщаются на смешанные графы. В заключение определяются однозначные функции на графах и приводятся их основные свойства. Теоретико-множественные операции используются при изучении алгебраических операций над графами и при разложении графов по алгебраическим операциям, а методы разложения графов, в свою очередь, являются фундаментом, на котором основаны теоремы и алгоритмы декомпозиции абстрактных автоматов.

В данном параграфе определяются понятия подграфа, множества подграфов данного графа и дается оценка числа подграфов, которые можно образовать на произвольном непустом множестве элементов.

Пусть  $G = (X, F)$  — произвольный граф Бержа. Граф  $G' = (X', F')$  называется *подграфом* графа  $G$ , если множество  $X' \subseteq X$  или для всех  $x \in X'$  имеет место  $F'x \subseteq Fx \cap X'$ . Граф  $G$  в этом случае называется *надграфом* графа  $G'$ .

Некоторые авторы, например К. Берж [23], А. А. Зыков [183], используют три понятия: суграф, подграф и часть графа. Так, граф  $G' = (X', F')$  называется *сугра-*

фом графа  $G$ , если  $X' = X$  и  $F'x \subseteq Fx$ . Другими словами, суграф образуется из графа  $G$  удалением некоторых ребер. Граф  $G' = (X', F')$  называется *подграфом* графа  $G$ , если  $X' \subseteq X$  и  $F'x = Fx \cap X'$ , или, иначе говоря, подграф образуется из графа  $G$  удалением некоторых вершин, причем все ребра, инцидентные этим вершинам, также удаляются. Граф  $G' = (X', F')$  называется *частью* графа  $G$ , если  $X' \subseteq X$  и  $F'x \subseteq Fx \cap X'$ , т. е. это понятие совпадает с нашим определением подграфа, и образуется часть из графа  $G$  одновременным применением обеих указанных операций.

Пример 2.1. Пусть  $G = (X, F)$  — граф, рассмотренный в примере 1.1. Тогда граф  $G_1 = (X_1, F_1)$ , где  $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , а  $F_1x_1 = \{x_1, x_3\}$ ,  $F_1x_2 = \emptyset$ ,  $F_1x_3 = \{x_1, x_2, x_5\}$ ,  $F_1x_4 = \emptyset$ ,  $F_1x_5 = \{x_1, x_2, x_4\}$  — суграф графа  $G$ . Граф  $G_2 = (X_2, F_2)$ , где  $X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , а  $F_2x_1 = \{x_1, x_3\}$ ,  $F_2x_2 = \emptyset$ ,  $F_2x_3 = \{x_1, x_2\}$ ,  $F_2x_4 = \{x_1\}$  — подграф графа  $G$ . Граф  $G_3 = (X_3, F_3)$ , где  $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ , а  $F_3x_1 = \{x_1, x_3\}$ ,  $F_3x_2 = \emptyset$ ,  $F_3x_3 = \{x_2\}$  — часть графа  $G$ . Геометрическая интерпретация графов  $G_1, G_2, G_3$  показана соответственно на рис. 2.1, а, б, в.

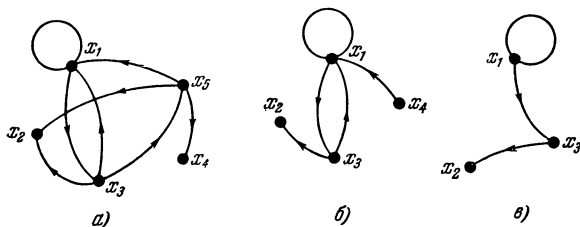


Рис. 2.1.

Таким образом, употребляя термин подграф, мы подразумеваем любое из трех указанных понятий. Иногда, впрочем, для обозначения подграфа специального вида будем использовать термин суграф.

Введем теперь понятия пустого и универсального графов. Граф  $G = (X, F)$  называется *пустым* графом и обозначается через  $\Lambda$ , если  $X = \emptyset$ . Очевидно, что  $F\emptyset = \emptyset$ . *Универсальным* графом называется такой насыщенный граф  $L$ , что все графы, рассматриваемые в данном круге

задач, являются подграфами графа  $L$ . Из наших определений вытекает, что существует только один пустой граф или, по-другому, все пустые графы равны, в то время как существует сколько угодно различных универсальных графов.

Определим понятия включения и изоморфного вложения для произвольных графов. Для этого предварительно дадим определение сужению и продолжению отображений. Пусть  $X$  и  $Y$  — два произвольных множества элементов,  $F$  — отображение  $X$  в  $Y$ , а  $A$  — произвольное подмножество множества  $X$ . Отображение  $F_A$  подмножества  $A$  в  $Y$ , принимающее на произвольном элементе  $x \in A$  значение  $Fx \in Y$ , называют *сужением отображения*  $F$  на подмножество  $A$ . Обратное,  $F$  называют *продолжением отображения*  $F_A$  на множество  $X$ . Другими словами, пусть  $X, Y$  и  $V, W$  — произвольные множества, а  $F$  и  $P$  — соответственно отображения  $X$  в  $Y$  и  $V$  в  $W$ . Если  $X \subseteq V, Y \subseteq W$  и отображение  $P$  совпадает с  $F$  на  $X$ , то говорят, что  $P$  есть продолжение отображения  $F$  на множество  $V$  или что  $P$  продолжает  $F$  на  $V$ . Тогда  $F$  называют сужением отображения  $P$  на множество  $X$ .

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два произвольных графа. Если  $x \in X$  влечет  $x \in Y$  и  $P$  есть продолжение отображения  $F$  на множество  $Y$ , то граф  $G$  *содержится в графе* (включается в граф)  $H$  или граф  $H$  *содержит* (включает) граф  $G$ . Это обозначается  $G \subseteq H$  или  $H \supseteq G$ . Говорят также, что граф  $G$  является *подграфом* графа  $H$ , а граф  $H$  — *надграфом* графа  $G$  или что граф  $G$  является *сужением* графа  $H$ , а граф  $H$  — *продолжением* графа  $G$ .

Очевидно, что для любого графа  $G$  имеет место

$$\Lambda \subseteq G \quad \text{и} \quad G \subseteq G.$$

Подграфы  $\Lambda$  и  $G$  называются *несобственными* подграфами графа  $G$ . Все остальные подграфы графа  $G$  называются *собственными* подграфами.

Для произвольных графов  $G, H$  и  $Q$  выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} G \subseteq H \quad \text{и} \quad H \subseteq Q \quad \text{влечет} \quad G \subseteq Q, \\ G \subseteq H \quad \text{и} \quad H \subseteq G \quad \text{эквивалентно} \quad G = H, \end{aligned} \quad (2.1)$$

справедливость которых вытекает из определения  $\subseteq$ . Граф  $G$  называется *истинным* подграфом графа  $H$ , если  $G \subseteq H$  и  $G \neq H$ . В этом случае пишут  $G \subset H$ . Поэтому

$$G \subset H \text{ эквивалентно } G \subseteq H \text{ и } G \neq H.$$

Легко видеть, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} G \subseteq H \text{ эквивалентно } G \subset H \text{ или } G = H, \\ G \subset H \text{ и } H \subset Q \text{ влечет } G \subset Q. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $G$ ,  $H$  и  $Q$  — некоторые графы. Если  $G$  изоморфен  $H$  ( $G \sim H$ ), а  $H$  содержится в  $Q$  ( $H \subseteq Q$ ), то говорят, что граф  $G$  *изоморфно вкладывается* в граф  $Q$  или граф  $Q$  *изоморфно содержит* граф  $G$ , или, наконец, граф  $Q$  является *изоморфным продолжением* графа  $G$ , а граф  $G$  — *изоморфным сужением* графа  $Q$ . Это обозначают  $G \subseteq Q$  или  $Q \supseteq G$ . Далее, если  $G \sim H$  и  $H \subset Q$ , то граф  $G$  *строго изоморфно вкладывается* в граф  $Q$ . Будем обозначать строгое изоморфное вложение знаком  $\Subset$ . Тогда  $G \Subset Q$ .

Можно показать, что для произвольных графов справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} G \subseteq G, \\ G \subseteq H \text{ и } H \subseteq Q \text{ влечет } G \subseteq Q, \\ G \subseteq H \text{ и } H \subseteq G \text{ эквивалентно } G \sim H, \\ G \subseteq H \text{ эквивалентно } G \subseteq H \text{ и } G \text{ не изоморфен } H \\ \text{(т. е. } G \not\sim H), \\ G \subseteq H \text{ эквивалентно } G \Subset H \text{ или } G \sim H, \\ G \subseteq H \text{ и } H \subseteq Q \text{ влечет } G \Subset Q. \end{aligned}$$

Прежде, чем определить понятие множества подграфов данного графа, напомним понятие множества подмножеств данного множества. Пусть  $X$  — произвольное множество элементов. *Множеством подмножеств* множества  $X$  называют и через  $\mathfrak{P}(X)$  обозначают множество, элементами которого являются *все подмножества* множества  $X$ . Поэтому  $\emptyset \in \mathfrak{P}(X)$ ,  $X \in \mathfrak{P}(X)$  и, каков бы ни был  $x \in X$ ,  $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ . Например, если  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ , то  $\mathfrak{P}(X) = \{\{\emptyset\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ .

В общем случае, если множество  $X$  содержит  $n$  элементов, то множество  $\mathfrak{P}(X)$  состоит из  $2^n$  элементов, или, короче, если  $|X| = n$ , то  $|\mathfrak{P}(X)| = 2^n$ .

Пусть  $G = (X, F)$  — произвольный граф. Множеством подграфов графа  $G$  будем называть и через  $\mathfrak{P}(G)$  обозначать множество, элементами которого являются все подграфы графа  $G$ . По определению  $\Lambda \in \mathfrak{P}(G)$ ,  $G \in \mathfrak{P}(G)$ , и, каков бы ни был  $G'$ , если  $G' \subseteq G$ , то  $G' \in \mathfrak{P}(G)$ . Для графа  $G = (X, F)$  множество  $\mathfrak{P}(G)$  образовано двумя множествами ( $\mathfrak{P}(X)$ ,  $\mathfrak{F}$ ), где  $\mathfrak{P}(X)$  — множество подмножеств множества  $X$ , а  $\mathfrak{F}$  — множество сужений отображения  $F$  на множество подмножеств  $\mathfrak{P}(X)$ . Поэтому  $\emptyset \in \mathfrak{P}(X)$  и  $\emptyset \in \mathfrak{F}$ ,  $X \in \mathfrak{P}(X)$  и  $F \in \mathfrak{F}$ , каковы бы ни были  $x \in X$  и  $F'$ ,  $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ , и если  $F'x \subseteq Fx$ , то  $F' \in \mathfrak{F}$ .

Аналогично множеством суграфов произвольного графа  $G$  будем называть и через  $\mathfrak{S}(G)$  обозначать множество, элементами которого служат все суграфы графа  $G$ . Следовательно,  $G_\emptyset \in \mathfrak{S}(G)$ ,  $G \in \mathfrak{S}(G)$ , и каков бы ни был  $G'$ , если  $G'$  — суграф графа  $G$ , то  $G' \in \mathfrak{S}(G)$ . Ясно, что для любого  $G$  ( $G \neq \Lambda$ ) множество суграфов графа  $G$  является подмножеством множества подграфов графа  $G$ , т. е.  $\mathfrak{S}(G) \subset \mathfrak{P}(G)$ .

Приведем теперь оценки числа суграфов и подграфов, которые можно образовать на произвольном непустом множестве элементов  $X$ . Пусть  $|X| = n$ . Насыщенный граф  $n$ -го порядка, множеством вершин которого служит множество  $X$ , обозначим, как обычно, через  $G_X$ . Тогда справедливы следующие предложения.

**Теорема 2.1.**

$$|\mathfrak{S}(G_X)| = 2^{n^2}.$$

**Доказательство.** Пусть  $G = (X, F)$  — некоторый граф из множества  $\mathfrak{S}(G_X)$ . Каждому элементу  $x \in X$  можно поставить в соответствие любой элемент из множества  $\mathfrak{P}(X)$  подмножеств множества  $X$ . Так как  $|\mathfrak{P}(X)| = 2^n$ , то число различных отображений  $F$  элемента  $x$  или, другими словами, число различных подмножеств  $Fx$  будет  $2^n$ . Поскольку  $|X| = n$ , постольку число суграфов, образованных на множестве элементов  $X$ , определяется произведением

$$\underbrace{2^n \cdot 2^n \cdot \dots \cdot 2^n}_{n \text{ раз}} = 2^{n^2}.$$

Этот результат можно получить более коротким путем. Действительно, число суграфов, которое можно построить на множестве  $X$ , определяется числом матриц смежности  $R = \|r_{ij}\|$ ,  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $r_{ij} \in \{0, 1\}$ . Так как число элементов матрицы  $R$  равно  $n^2$ , а каждый элемент  $r_{ij}$  может принимать два значения, то число различных матриц, очевидно, будет  $2^{n^2}$ .

**Т е о р е м а 2.2.**

$$|\mathfrak{F}(G_X)| = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot 2^{i^2}.$$

**Доказательство.** Число подграфов, построенных на множестве  $X$ , определяется суммой, в которую входят суграфы, образованные на множестве  $X$ , на множестве  $X$  без одного элемента  $x \in X$ , без двух элементов  $x, y \in X$  и т. д. вплоть до пустого графа  $\Lambda$ . На основании теоремы 2.1 число суграфов на множестве  $X$  равно  $2^{n^2}$ . Очевидно, что на множестве  $X$  без одного элемента  $x \in X$  можно построить

$$\underbrace{2^{(n-1)^2} + \dots + 2^{(n-1)^2}}_{C_n^{n-1} \text{ раз}}$$

суграфов. Поэтому число подграфов на множестве  $X$  равно

$$\underbrace{2^{n^2}}_{C_n^n \text{ раз}} + \underbrace{2^{(n-1)^2} + \dots + 2^{(n-1)^2}}_{C_n^{n-1} \text{ раз}} +$$

$$+ \underbrace{2^{(n-2)^2} + \dots + 2^{(n-2)^2}}_{C_n^{n-2} \text{ раз}} + \dots + \underbrace{2^0}_{C_n^0 \text{ раз}},$$

откуда следует то, что и требовалось доказать.

Введенные выше понятия и определения можно обобщить на смешанные графы. В качестве примера определим понятие подграфа и отношение включения для смешанных графов.

Пусть  $G = (X, U, P)$  — произвольный смешанный граф, у которого  $x, y \in X$ , а  $u \in U$ . Граф  $G' = (X', U', P')$  называется подграфом графа  $G$ , если  $X' \subseteq X$ ,  $U' \subseteq U$ , а инцидентор  $P'$  индуцируется  $P$ . Другими словами,



трехместный предикат  $P'$  определяется на основании  $P$  следующим образом:

$$(\forall x, y \in X')(\forall u \in U')(P(x, u, y) \leftrightarrow P'(x, u, y)).$$

В том случае, когда  $X' = X$ , граф  $G'$  называется суграфом графа  $G$ .

Это определение можно распространить на понятие включения для смешанных графов. Пусть  $G = (X, U, P)$  и  $H = (Y, V, R)$  — произвольные подграфы графа  $L$ . Если  $x \in X$  влечет  $x \in Y$ ,  $u \in U$  влечет  $u \in V$ , а значения истинности предиката  $R$  на упорядоченных тройках элементов  $(x, u, y)$ , где  $x, y \in X$ ,  $u \in U$ , совпадают со значениями  $P$  на тех же тройках элементов, то говорят, что граф  $G$  включается в граф  $H$ , а граф  $H$  содержит граф  $G$ , и пишут  $G \subseteq H$ . Иначе говоря, если  $X \subseteq Y$ ,  $U \subseteq V$  и

$$(\forall x, y \in X)(\forall u \in U)(R(x, u, y) \leftrightarrow P(x, u, y)),$$

то граф  $G$  является подграфом или сужением графа  $H$ , а  $H$  — надграфом или продолжением графа  $G$ . Далее, если  $G \sim H'$ , а  $H' \subseteq H$ , то граф  $G$  изоморфно вкладывается в граф  $H$ , а  $H$  изоморфно продолжает  $G$  ( $G \subseteq H$ ) или  $G$  является изоморфным сужением графа  $H$ , а  $H$  — изоморфным продолжением графа  $G$ .

Очевидно, что для произвольных смешанных графов и знаков  $\subseteq$  и  $\supseteq$  имеют место соотношения, аналогичные приведенным соотношениям для графов Бержа. Кроме того, для смешанных графов можно ввести понятие множества подграфов и множества суграфов данного графа и обобщить результаты, полученные для графов Бержа. Эту возможность мы предоставляем читателю.

## § 2. Операции объединения, пересечения и соединения графов

Прежде, чем определить теоретико-множественные операции над графами, напомним основные операции над множествами.

Пусть  $X$  и  $Y$  — произвольные подмножества множества  $V$ . *Объединением множеств*  $X$  и  $Y$  называют множество, обозначаемое  $X \cup Y$ , элементы которого принадлежат множеству  $X$  или множеству  $Y$ . Следовательно,

$$x \in X \cup Y \leftrightarrow x \in X \text{ или } x \in Y.$$

*Пересечением множеств*  $X$  и  $Y$  называют множество, обозначаемое  $X \cap Y$ , элементы которого принадлежат множеству  $X$  и множеству  $Y$ . Поэтому

$$x \in X \cap Y \leftrightarrow x \in X \text{ и } x \in Y.$$

*Разностью множеств*  $X$  и  $Y$  называют и через  $X \setminus Y$  обозначают множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат  $X$  и не принадлежат  $Y$ . Таким образом,

$$x \in X \setminus Y \leftrightarrow x \in X \text{ и } x \notin Y.$$

*Дополнением множества*  $X$  до множества  $V$  называют и через  $\bar{X}$  обозначают разность множеств  $V$  и  $X$ . Следовательно,  $\bar{X} = V \setminus X$ . Подчеркнем, что операция разности множеств может применяться к произвольным множествам  $X$  и  $Y$ , в то время как взятие дополнения множества  $X$  до множества  $V$  имеет смысл только в том случае, когда  $X \subseteq V$ . Очевидно, что имеет место равенство

$$X \setminus Y = X \cap \bar{Y},$$

где, конечно,  $Y \subseteq V$ .

*Суммой множеств*  $X$  и  $Y$  называют и через  $X + Y$  обозначают объединение множеств  $X'$  и  $Y'$  таких, что существуют взаимно однозначные отображения соответственно  $X$  на  $X'$  и  $Y$  на  $Y'$ . Другими словами, сумма множеств  $X$  и  $Y$  представляет собой объединение пронумерованных множеств  $X'$  и  $Y'$ . Множества  $X'$  и  $Y'$  образуются следующим образом. Введем множество индексов  $I = \{1, 2\}$ , равное числу суммируемых множеств, и положим  $X' = \{1\} \times X$  и  $Y' = \{2\} \times Y$ . Ясно, что отображения  $x \rightarrow (1, x)$  и  $y \rightarrow (2, y)$  суть взаимно однозначные отображения  $X$  на  $X'$  и  $Y$  на  $Y'$ . Поэтому

$$X + Y = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y).$$

Говорят, что сумма множеств  $X$  и  $Y$  образуется *присоединением* множества  $Y$  к множеству  $X$ . Если  $X \cap Y = \emptyset$ , то в этом и только в этом частном случае объединение множеств  $X$  и  $Y$  совпадает с их суммой, т. е.  $X + Y = X \cup Y$ . Если заранее ничего не известно о множествах

$X$  и  $Y$ , то в общем случае сумма двух множеств образуется указанным выше способом.

Наконец, *дизъюнктивной суммой* множеств  $X$  и  $Y$  называют и через  $X \oplus Y$  обозначают множество, элементы которого принадлежат или множеству  $X$  или множеству  $Y$  (разделительное «ИЛИ»). Таким образом,

$$x \in X \oplus Y \leftrightarrow x \in X \cup Y \quad \text{и} \quad x \notin X \cap Y \leftrightarrow x \in X \setminus Y \\ \text{или} \quad x \in Y \setminus X.$$

Перейдем теперь к операциям над графами.

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — произвольные подграфы графа  $L$ . Граф  $Q = (A, S)$  называется *объединением графов*  $G$  и  $H$  и обозначается  $Q = G \cup H$ , если

$$A = X \cup Y, \quad (2.2)$$

$$Sx = Fx \cup Px, \quad (2.3)$$

где  $x \in A$ . Заметим, что если  $x \notin X$ , то  $Fx = \emptyset$ , или если  $x \notin Y$ , то  $Px = \emptyset$ .

**Пример 2.2.** Пусть даны графы  $G = (X, F)$ , где  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Fx_1 = \{x_2\}$ ,  $Fx_2 = Fx_3 = \{x_1, x_2\}$ , и  $H = (Y, P)$ , где  $Y = \{x_1, x_2\}$ ,  $Px_1 = \{x_1\}$ ,  $Px_2 = \{x_1, x_2\}$ , геометрическая

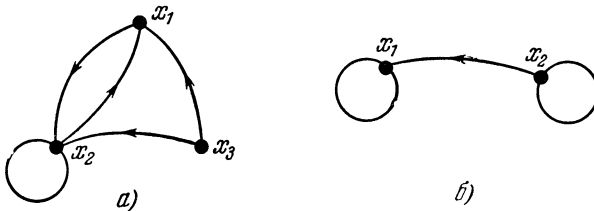


Рис. 2.2.

интерпретация которых показана соответственно на рис. 2.2, а и б. Найти граф  $Q$ , равный объединению графов  $G$  и  $H$ .

Используя выражения (2.2) и (2.3), находим множество  $A$  и отображение  $S$  графа  $Q$ :

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad Sx_1 = Sx_2 = Sx_3 = \{x_1, x_2\}.$$

На рис. 2.3, а показана геометрическая интерпретация графа  $Q = G \cup H$ .

По аналогии можно определить объединение трех, четырех и вообще  $n$  графов. Если  $G_1 = (X_1, F_1)$ ,  $G_2 = (X_2, F_2), \dots, G_n = (X_n, F_n)$  — произвольные графы, то граф  $G = (X, F)$ , обозначаемый

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n = \bigcup_{i \in I} G_i, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\},$$

называется объединением графов  $G_i$ , если  $X$  и  $F$  определяются выражениями

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

$$Fx = F_1x \cup F_2x \cup \dots \cup F_nx = \bigcup_{i \in I} F_ix,$$

где  $x \in X$ , причем если  $x \notin X_i$ , то  $F_ix = \emptyset$ .

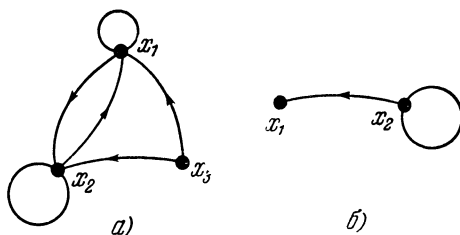


Рис. 2.3.

Перейдем к операции пересечения графов. Граф  $K = (B, T)$  называется *пересечением графов*  $G$  и  $H$  и обозначается  $K = G \cap H$ , если

$$B = X \cap Y, \quad (2.4)$$

$$Ty = Fy \cap Py, \quad (2.5)$$

где  $y \in B$ .

Пример 2.3. Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — графы, рассмотренные в примере 2.2. Определить граф, равный пересечению графов  $G$  и  $H$ .

Применяя (2.4) и (2.5), находим  $B$  и  $T$  графа  $K$ :

$$B = \{x_1, x_2\}, \quad Tx_1 = \emptyset, \quad Tx_2 = \{x_1, x_2\},$$

геометрическая интерпретация которого показана на рис. 2.3, б).

Если  $G \cap H = \Lambda$  (в том случае, когда  $X \cap Y = \emptyset$ ), то говорят, что  $G$  и  $H$  не пересекаются или  $G$  и  $H$  — непересекающиеся графы. Если  $G \cap H \neq \Lambda$  (когда  $X \cap Y \neq \emptyset$ ), то говорят, что графы  $G$  и  $H$  пересекаются. Подчеркнем, что пересечение существует у любых двух графов, в том числе и у непересекающихся, только у непересекающихся графов оно равно пустому графу.

Аналогично тому, как это сделано для объединения, определяется пересечение  $n$  графов. Граф  $G = (X, F)$  называется пересечением графов  $G_i, i \in I$ , и обозначается

$$G = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n = \bigcap_{i \in I} G_i,$$

если множество  $X$  и отображение  $F$  определяются по формулам

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = \bigcap_{i \in I} X_i,$$

$$Fx = F_1x \cap F_2x \cap \dots \cap F_nx = \bigcap_{i \in I} F_ix,$$

где  $x \in X$ .

Определим теперь понятие дополнения по отображению и понятие разности графов. В отличие от рассмотренных выше операций, дополнение по отображению и разность графов определяются только для двух графов.

Пусть  $G = (X, F)$  — произвольный подграф графа  $L$ . Дополнением по отображению графа  $G$  до насыщенного графа  $G_X$  называют граф  $\bar{G} = (X, \bar{F})$ , у которого  $\bar{F}x = X \setminus Fx$ , где  $x \in X$ . Если  $G_Y$  — другой насыщенный граф такой, что  $X \subseteq Y$ , то дополнением по отображению графа  $G$  до графа  $G_Y$  называют граф  $\bar{G} = (Y, \bar{F})$ , где  $\bar{F}y = Y \setminus Fy$  и  $y \in Y$ , причем для  $y \notin X$  полагаем  $Fy = \emptyset$ . Аналогично определяется дополнение по отображению графа  $G$  до графа  $L$ .

Если  $R = \|r_{ij}\|, r_{ij} \in \{0, 1\}$ , — матрица смежности графа  $G$ , то матрица смежности  $\bar{R} = \|\bar{r}_{ij}\|$  дополнения по отображению графа  $G$  до графа  $G_X$  образуется из матрицы  $R$  путем замены всех единичных элементов на нулевые и всех нулевых на единичные.

Дополнение по отображению графа можно определять не только до насыщенного графа, но и до любого графа, в который включается данный граф. Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два графа и  $G \subseteq H$ . Тогда *дополнением по отображению графа  $G$  до графа  $H$*  называют граф  $\bar{G}_H = (Y, \bar{F})$ , у которого  $\bar{F}y = Py \setminus Fy$ , где  $y \in Y$ , причем  $Fy = \emptyset$ , если  $y \notin X$ .

Операцию разности двух произвольных графов определим теперь следующим образом. Пусть  $G$  и  $H$  — произвольные подграфы графа  $L$ . Говорят, что граф, обозначаемый  $Q = G \setminus H$ , называется *разностью графов  $G$  и  $H$* , если он определяется по формуле

$$Q = G \cap \bar{H}, \quad (2.6)$$

где  $\bar{H}$  — дополнение по отображению графа  $H$  до графа  $L$ . Аналогично разностью графов  $H$  и  $G$  называется граф  $K = H \setminus G$ , определяемый выражением

$$K = H \cap \bar{G}, \quad (2.7)$$

где  $\bar{G}$  — дополнение по отображению графа  $G$  до графа  $L$ . Разность графов в общем случае не коммутативна, поэтому  $G \setminus H \neq H \setminus G$ .

Поясним введенные определения на примере.

Пример 2.4. Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два графа, рассмотренных в примере 2.2. В качестве универсального графа в данном случае выберем насыщенный граф третьего порядка  $G_x$ , где  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Найдите дополнения по отображению графов  $G$  и  $H$  до графа  $G_x$  и разности графов  $G \setminus H$  и  $H \setminus G$ .

Используя соответствующие определения, находим графы  $\bar{G} = (X, \bar{F})$  и  $\bar{H} = (Y, \bar{P})$ , где  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  и  $\bar{F}x_1 = \{x_1, x_3\}$ ,  $\bar{F}x_2 = \bar{F}x_3 = \{x_3\}$ , а  $\bar{P}x_1 = \{x_2, x_3\}$ ,  $\bar{P}x_2 = \{x_3\}$ ,  $\bar{P}x_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Геометрическая интерпретация графов  $\bar{G}$  и  $\bar{H}$  показана соответственно на рис. 2.4, а и б.

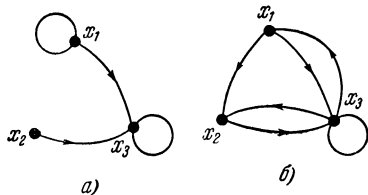


Рис. 2.4.

Матрицы смежности  $R_G$ ,  $R_H$  и  $\bar{R}_G$ ,  $\bar{R}_H$  графов  $G$ ,  $H$  и  $\bar{G}$ ,  $\bar{H}$  имеют вид

$$R_G = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{R}_G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$R_H = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{R}_H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

По формулам (2.6) и (2.7) находим графы  $Q = (A, S)$  и  $K = (B, T)$ , где  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Sx_1 = \{x_2\}$ ,  $Sx_2 = \emptyset$ ,  $Sx_3 = \{x_1, x_2\}$  и  $B = \{x_1, x_2\}$ ,  $Tx_1 = \{x_1\}$ ,  $Tx_2 = \emptyset$ . Интерпретация графов  $Q = G \setminus H$  и  $K = H \setminus G$  дана на рис. 2.5, а и б.

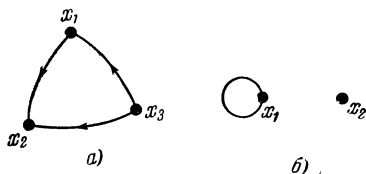


Рис. 2.5.

Перейдем к операции соединения графов, в основе которой лежит операция суммы множеств \*). Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — произвольные графы. Граф  $M = (C, U)$  называется *соединением графов*  $G$  и  $H$  и обозначается  $M = G \boxplus H$ , если

$$C = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y), \quad (2.8)$$

$$U(i, z) = ((\{1\} \times Fz) \cup (\{2\} \times Y)) \cup U((\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Pz)), \quad (2.9)$$

где  $(i, z) \in C$ ,  $i \in I = \{1, 2\}$ , причем, если  $z \notin X$ , то  $Fz = \emptyset$  и полагаем  $((\{1\} \times Fz) \cup (\{2\} \times Y)) = \emptyset$ . Аналогично, если  $z \notin Y$ , то  $Pz = \emptyset$  и считаем, что  $((\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Pz)) = \emptyset$ .

Пример 2.5. Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — графы из примера 2.2. Найти граф, равный соединению графов  $G$  и  $H$ .

\*) У читателя может возникнуть вопрос, почему эта операция называется соединением, а не суммой графов. Объясняется это тем, что термин «операция суммирования» графов используется для обозначения известной операции (см., например, Берж [23]), которая ниже будет изучаться как одна из основных операций алгебраического типа.

На основании (2.8) и (2.9) определяем множество  $C$  и отображение  $U$  графа  $M$ :

$$\begin{aligned} C &= \{(1, x_1), (1, x_2), (1, x_3), (2, x_1), (2, x_2)\}, \\ U(1, x_1) &= \{(1, x_2), (2, x_1), (2, x_2)\}, \\ U(1, x_2) &= \{(1, x_1), (1, x_2), (2, x_1), (2, x_2)\}, \\ U(1, x_3) &= \{(1, x_1), (1, x_2), (2, x_1), (2, x_2)\}, \\ U(2, x_1) &= \{(1, x_1), (1, x_2), (1, x_3), (2, x_1)\}, \\ U(2, x_2) &= \{(1, x_1), (1, x_2), (1, x_3), (2, x_1), (2, x_2)\}. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация графа  $M = G \boxplus H$  показана на рис. 2.6.

Операцию соединения графов можно обобщить на случай  $n$  графов. Если  $G_1 = (X_1, F_1)$ ,  $G_2 = (X_2, F_2), \dots$

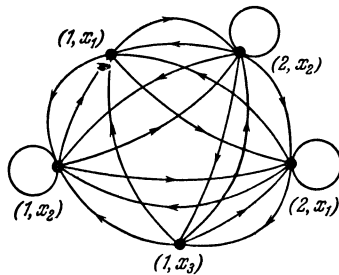


Рис. 2.6.

$\dots, G_n = (X_n, F_n)$  — произвольные графы, то граф  $G = (X, F)$ , обозначаемый  $G = G_1 \boxplus G_2 \boxplus \dots \boxplus G_n$ , называется соединением графов  $G_i$ ,  $i \in I$ , если множество  $X$  и отображение  $F$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} X &= (\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times X_2) \cup \dots \cup (\{n\} \times X_n), \\ F(i, x_i) &= ((\{1\} \times F_1 x_i) \cup (\{2\} \times F_2 x_i) \cup \dots \cup (\{n\} \times F_n x_i)) \cup \\ &\quad \cup ((\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times F_2 x_i) \cup \dots \cup (\{n\} \times X_n)) \cup \dots \\ &\quad \dots \cup ((\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times X_2) \cup \dots \cup (\{n\} \times F_n x_i)), \end{aligned}$$

где  $(i, x_i) \in X$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , причем если  $x_i \notin X_i$ , то  $F_i x_i = \emptyset$  и полагаем, как и прежде,  $((\{1\} \times X_1) \cup \dots \cup (\{i\} \times F_i x_i) \cup \dots \cup (\{n\} \times X_n)) = \emptyset$ .



Определим теперь операцию дизъюнктивной суммы графов по аналогии с указанной операцией для множеств. Учитывая, что эта операция не является независимой и определяется через уже введенные операции над графами, будем говорить, что *дизъюнктивной суммой графов*  $G$  и  $H$  называется граф, обозначаемый  $Q = G \oplus H$ , который образуется по любой из следующих эквивалентных формул:

$$G \oplus H = (G \cup H) \setminus (G \cap H) = (G \cup H) \cap (\overline{G \cap H}) = \\ = (G \cap \bar{H}) \cup (\bar{G} \cap H).$$

**Пример 2.6.** Нетрудно видеть, что дизъюнктивной суммой графов  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , заданных в примере 2.2, является граф  $Q = (Z, S)$ , где  $Z = \{x_1, x_2, x_3\}$  и  $Sx_1 = \{x_1, x_2\}$ ,  $Sx_2 = \emptyset$ ,  $Sx_3 = \{x_1, x_2\}$ , геометрическая интерпретация которого показана на рис. 2.7.

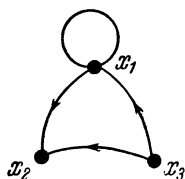


Рис. 2.7.

В заключение параграфа покажем, каким образом обобщить некоторые из введенных операций на смешанные графы.

Пусть  $G_1 = (X_1, U_1, P_1)$  и  $G_2 = (X_2, U_2, P_2)$  — произвольные подграфы универсального смешанного графа  $L$ . Граф  $G = (X, U, P)$  называется объединением графов  $G_1$  и  $G_2$  и обозначается  $G = G_1 \cup G_2$ , если

$$X = X_1 \cup X_2, \quad U = U_1 \cup U_2,$$

а инцидентор  $P$  определяется на основании  $P_1$  и  $P_2$  следующим образом:

$$P(x, u, y) \leftrightarrow (\forall x, y \in X) (\forall u \in U) [(P_1(x, u, y) \rightarrow \\ \rightarrow P(x, u, y)) \vee (P_2(x, u, y) \rightarrow P(x, u, y))].$$

Граф  $G' = (X', U', P')$  называется пересечением графов  $G_1$  и  $G_2$  и обозначается  $G' = G_1 \cap G_2$ , если

$$X' = X_1 \cap X_2, \quad U' = U_1 \cap U_2,$$

а инцидентор

$$P(x, u, y) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall x, y \in X) (\forall u \in U) (P_1(x, u, y) \& P_2(x, u, y) \rightarrow P(x, u, y)).$$

Пусть  $H = (X, U, P)$  — произвольный смешанный граф, а  $G = (X_1, U_1, P_1)$  — подграф графа  $H$ , т. е.  $G \subseteq H$ . Дополнением графа  $G$  до графа  $H$  называется граф, обозначаемый  $\bar{G} = (X_2, U_2, P_2)$ , у которого

$$X_2 = X, \quad U_2 = U \setminus U_1,$$

а инцидентор

$$P_2(x, u, y) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall x, y \in X) (\forall u \in U) (P(x, u, y) \& \bar{P}_1(x, u, y) \rightarrow P_2(x, u, y)).$$

Аналогично определяется понятие дополнения графа  $G$  до универсального графа  $L$ .

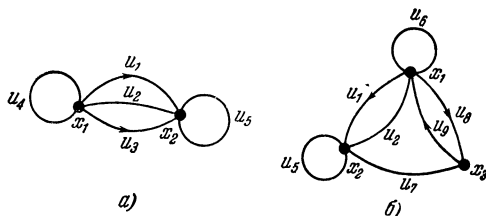


Рис. 2.8.

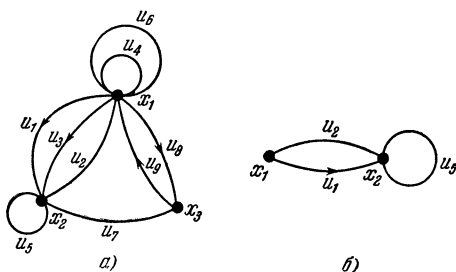


Рис. 2.9.

Пример 2.7. Если даны смешанные графы  $G_1$  и  $G_2$ , представленные соответственно на рис. 2.8, а и б, то графы  $G = G_1 \cup G_2$  и  $G' = G_1 \cap G_2$  имеют вид, показанный на рис. 2.9, а и б. Если даны смешанные графы  $G$  и  $H$

(рис. 2.10, а и б), причем  $G \subseteq H$ , то дополнением графа  $G$  до графа  $H$  является граф  $\bar{G}$ , показанный на рис. 2.11.

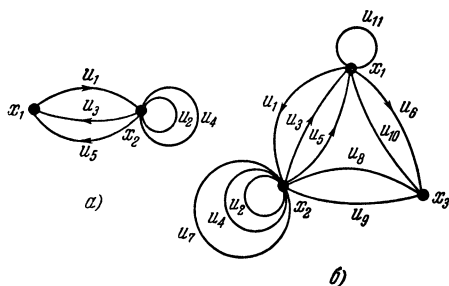


Рис. 2.10.

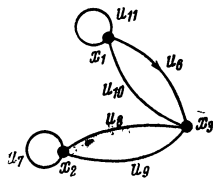


Рис. 2.11.

Предоставляем возможность читателю обобщить остальные операции, введенные для графов Бержа, на смешанные графы.

### § 3. Основные свойства операций. Дистрибутивные и булевы структуры графов

Рассмотрим свойства операций объединения, пересечения, дополнения по отображению и соединения графов и определим структуры, которые образуют по этим операциям множества подграфов и суграфов. Использование различных свойств операций позволяет выполнять эквивалентные преобразования графов, а знание структур позволяет переносить на графы все результаты, известные в алгебре для структур данного типа.

Пусть  $M$  — произвольный граф Бержа и  $\mathfrak{F}(M)$  — множество подграфов графа  $M$ . Сформулируем основные свойства операций  $-, \cup, \cap$  над множеством  $\mathfrak{F}(M)$ . Везде  $G, H, Q$  суть произвольные графы из  $\mathfrak{F}(M)$ , а черта над графом или графами означает дополнение по отображению до универсального графа  $L$ .

Каков бы ни был граф  $G$ , имеют место соотношения

$$G \cup G = G, \quad G \cap G = G \quad (\text{идемпотентность}), \quad (2.10)$$

$$G \cup \bar{G} = L, \quad G \cap \bar{G} = G\emptyset, \quad (2.11)$$

$$G \cup \Lambda = G, \quad G \cap L = G, \quad (2.12)$$

$$G \cup L = L, \quad G \cap \Lambda = \Lambda. \quad (2.13)$$

Каковы бы ни были графы  $G$  и  $H$ , справедливы соотношения

$$G \subseteq G \cup H \supseteq H, \quad G \supseteq G \cap H \subseteq H, \quad (2.14)$$

$G \subseteq H$  эквивалентно  $G \cup H = H$  эквивалентно  $G \cap H = G$ , (2.15)

$$\left. \begin{array}{l} G \cup H = H \cup G, \\ G \cap H = H \cap G \end{array} \right\} \text{ (коммутативность),} \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{G \cup H} = \overline{G} \cap \overline{H}, \\ \overline{G \cap H} = \overline{G} \cup \overline{H} \end{array} \right\} \text{ (правила де Моргана).} \quad (2.17)$$

Каковы бы ни были  $G$ ,  $H$  и  $Q$ , выполняются соотношения:

$$G \subseteq H \text{ влечет } G \cup Q \subseteq H \cup Q \text{ и } G \cap Q \subseteq H \cap Q, \quad (2.18)$$

$$G \subseteq H \text{ и } G \subseteq Q \text{ эквивалентно } G \subseteq H \cap Q, \quad (2.19)$$

$$G \subseteq H \text{ и } H \subseteq Q \text{ эквивалентно } G \cup H \subseteq Q, \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{array}{l} (G \cup H) \cup Q = G \cup (H \cup Q), \\ (G \cap H) \cap Q = G \cap (H \cap Q) \end{array} \right\} \text{ (ассоциативность),} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} G \cup (H \cap Q) = (G \cup H) \cap (G \cup Q), \\ G \cap (H \cup Q) = (G \cap H) \cup (G \cap Q) \end{array} \right\} \text{ (дистрибутивность).} \quad (2.22)$$

Соотношения (2.10) — (2.22) доказываются теоретико-множественным способом. Естественно, что мы не будем доказывать все свойства. Заметим только, что соотношения со знаком  $\subseteq$  доказываются на основании определений понятия включения и операций объединения и пересечения графов, а соотношения со знаком равенства доказываются на основании выражения (2.1). Следовательно, для доказательства  $G = H$  произвольных графов  $G, H \in \mathfrak{B}(M)$  необходимо показать, что  $G \subseteq H$  и  $H \subseteq G$ .

В качестве примера проведем доказательства дистрибутивности операции объединения относительно операции пересечения графов и одного из правил де Моргана.

Вначале докажем, что

$$G \cup (H \cap Q) = (G \cup H) \cap (G \cup Q).$$

Для этого надо показать, что  $G \cup (H \cap Q) \subseteq (G \cup H) \cap (G \cup Q)$  и  $(G \cup H) \cap (G \cup Q) \subseteq G \cup (H \cap Q)$ . Докажем вначале

правое включение. Из (2.14) следует, что  $H \cap Q \subseteq H$  и одновременно  $H \cap Q \subseteq Q$ . Поэтому на основании (2.18) можно записать  $G \cup (H \cap Q) \subseteq G \cup H$  и  $G \cup (H \cap Q) \subseteq G \cup Q$ , откуда по определению пересечения вытекает  $G \cup (H \cap Q) \subseteq (G \cup H) \cap (G \cup Q)$ .

Для доказательства левого включения запишем соотношения для множеств элементов и отображений графов  $G = (X, F)$ ,  $H = (Y, P)$  и  $Q = (Z, S)$ :

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$

$$F_x \cup (P_y \cap S_z) = (F_x \cup P_y) \cap (F_x \cup S_z),$$

где  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $z \in Z$ , и покажем, что  $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z)$ . Пусть  $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ . По определению пересечения это означает, что  $x \in X \cup Y$  и  $x \in X \cup Z$ . Если  $x \in X$ , то по определению объединения  $x \in X \cup (Y \cap Z)$ . Если  $x \notin X$ , то из  $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$  следует, что  $x \in Y$  и  $x \in Z$ , т. е.  $x \in Y \cap Z$  и снова  $x \in X \cup (Y \cap Z)$ . Поэтому  $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z)$ . Поскольку  $F_x \subseteq X$ ,  $P_y \subseteq Y$ ,  $S_z \subseteq Z$ , постольку  $(F_x \cup P_y) \cap (F_x \cup S_z) \subseteq F_x \cup (P_y \cap S_z)$  справедливо. Таким образом,  $(G \cup H) \cap (G \cup Q) \subseteq G \cup (H \cap Q)$  и первое соотношение (2.22) доказано. Аналогично можно доказать дистрибутивность операции пересечения относительно операции объединения графов.

Теперь докажем справедливость выражения

$$\overline{G \cup H} = \bar{G} \cap \bar{H}.$$

Пусть  $E$  — множество элементов универсального графа  $L$ . По определению понятия дополнения по отображению для множеств элементов графов  $G$  и  $H$  получаем тождество

$$E \cup E = E \cap E = E.$$

Что касается отображений, то надо доказать, что

$$\overline{F_x \cup P_y} = \bar{F}_x \cap \bar{P}_y.$$

Пусть  $x \in \overline{F_x \cup P_y}$ . Тогда по определению дополнения  $x \in E \setminus (F_x \cup P_y)$ , откуда, учитывая определение разности, получаем  $x \in E$  и  $x \notin F_x \cup P_y$ . Отсюда следует, что  $x \in E$  и  $x \notin F_x$  и  $x \notin P_y$ , которое влечет  $x \in E \setminus F_x$  и  $x \in E \setminus P_y$ , т. е.  $x \in \bar{F}_x \cap \bar{P}_y$  и  $\overline{F_x \cup P_y} \subseteq \bar{F}_x \cap \bar{P}_y$ . Наоборот, пусть  $x \in \bar{F}_x \cap \bar{P}_y$ . Тогда  $x \in E \setminus F_x$  и  $x \in E \setminus P_y$ .

По определению  $x \in E$  и  $x \notin Fx$  и  $x \in E$  и  $x \notin Py$ . Поэтому  $x \in E$  и  $x \notin Fx$  и  $x \notin Py$ , откуда  $x \in E$  и  $x \notin Fx \cup Py$ . Следовательно,  $x \in E \setminus (Fx \cup Py)$  и  $\overline{Fx} \cap \overline{Py} \subseteq \overline{Fx \cup Py}$ . Таким образом, доказательство завершено. Аналогично доказывается второе правило де Моргана.

Из соотношений (2.17) вытекает теорема де Моргана, которую иногда называют *правилом двойственности* для графов Бержа.

**Теорема 2.3.** Для любого графа  $K \in \mathfrak{F}(M)$ , полученного из других графов  $G, H, Q \in \mathfrak{F}(M)$  применением операций  $\bar{\phantom{x}}, \cup, \cap$ , дополнение по отображению графа  $K$  до графа  $L$  образуется путем замены графов  $G, H, Q$  их дополнениями по отображению до графа  $L$  и заменой операций  $\cup, \cap$  в порядке их следования соответственно операциями  $\cap, \cup$ .

Например, если

$$K = G_1 \cap G_2 \cup \bar{G}_3 \cap \bar{G}_4 \cap G_5 \cup G_6,$$

то на основании теоремы 2.3 сразу можно записать дополнение по отображению графа  $K$ , которое имеет вид

$$\bar{K} = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2 \cap G_3 \cup G_4 \cup \bar{G}_5 \cap \bar{G}_6.$$

Пусть дано равенство  $K = N$  двух произвольных графов из  $\mathfrak{F}(M)$ . Рассмотрим равносильное ему равенство дополнений по отображению  $\bar{K} = \bar{N}$ . Если заменить  $\bar{K}$  и  $\bar{N}$  выражениями, которые образуются применением правила двойственности (теорема 2.3), а затем в полученных выражениях входящие в них графы заменить их дополнениями по отображению и наоборот, то получим равенство, называемое *двойственным* к  $K = N$ . Аналогично можно оперировать со знаками включения  $\subseteq$  и  $\supseteq$ , не забывая каждый раз заменять их друг на друга. Учитывая это, можно сказать, что соотношения, записанные под номерами (2.10), (2.14), (2.16), (2.17), (2.21), (2.22), двойственны друг другу.

Особо подчеркнем, что из (2.11) и определения дополнения по отображению графа до универсального графа следует, что для произвольного графа  $G \in \mathfrak{F}(M)$  не выполняется свойство

$$\bar{\bar{G}} = G,$$

поэтому, вообще говоря, операцию пересечения графов нельзя определить через операции объединения и дополнения по отображению по формуле

$$G \cap H = \overline{\overline{G} \cup \overline{H}},$$

которая не имеет места для произвольных подграфов графа  $M$ .

Из алгебры известно (см., например, А. Г. Курош [247]), что множество  $X$  с двумя бинарными операциями объединения и пересечения является *структурой*, если эти операции удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} x \cup x &= x, & x \cap x &= x, \\ x \cup y &= y \cup x, & x \cap y &= y \cap x, \\ (x \cup y) \cup z &= x \cup (y \cup z), & (x \cap y) \cap z &= x \cap (y \cap z), \\ x \cup (x \cap y) &= x, & x \cap (x \cup y) &= x, \end{aligned}$$

где  $x, y, z \in X$ . Если, кроме того, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} x \cup (y \cap z) &= (x \cup y) \cap (x \cup z), \\ x \cap (y \cup z) &= (x \cap y) \cup (x \cap z), \end{aligned}$$

то множество  $X$  по операциям  $\cup$  и  $\cap$  является *дистрибутивной структурой*. Всякая дистрибутивная структура, которая содержит 0 и 1, называется *булевой структурой* или *булевой алгеброй*, если для любого  $x \in X$  существует элемент  $\bar{x} \in X$ , называемый дополнением  $x$ , такой, что имеет место

$$x \cup \bar{x} = 1, \quad x \cap \bar{x} = 0.$$

Из рассмотрения свойств операций над графами вытекает следующее предложение.

*Множество  $\mathfrak{F}(M)$  подграфов произвольного непустого графа  $M$  по операциям объединения и пересечения графов является дистрибутивной структурой  $\mathfrak{D}$ , которая изоморфна некоторой структуре множеств.*

Действительно, то, что  $\mathfrak{F}(M)$  — дистрибутивная структура по операциям  $\cup$  и  $\cap$ , немедленно следует из (2.10), (2.16), (2.21) и (2.22). Так как любая дистрибутивная структура  $\mathfrak{D}$  изоморфна некоторой структуре множеств [247], то наше предложение доказано.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств операций над множеством суграфов произвольного непустого графа Бержа. Пусть  $M$  — произвольный граф Бержа с множеством элементов  $X$  и  $\mathfrak{S}(M)$  — множество суграфов графа  $M$ . Обозначим, как и прежде, через  $G, H, Q$  произвольные суграфы из  $\mathfrak{S}(M)$ , а через  $M_\emptyset \in \mathfrak{S}(M)$  граф с пустым отображением. Черта над суграфом в данном случае будет означать дополнение по отображению до графа  $M$ .

Для любого суграфа  $G$  вместо (2.11) выполняется

$$G \cup \bar{G} = M, \quad G \cap \bar{G} = M_\emptyset. \quad (2.23)$$

Помимо соотношений (2.10), (2.12) — (2.22) для произвольных суграфов из  $\mathfrak{S}(M)$  имеют место следующие свойства:

$$\bar{\bar{G}} = G \quad (\text{инволюция}), \quad (2.24)$$

$$G \subseteq H \quad \text{эквивалентно} \quad \bar{H} \subseteq \bar{G}, \quad (2.25)$$

$$G \cap H = M_\emptyset \quad \text{эквивалентно} \quad G \subseteq \bar{H} \quad \text{эквивалентно} \quad H \subseteq \bar{G}, \quad (2.26)$$

$$G \cup H = M \quad \text{эквивалентно} \quad \bar{G} \subseteq H \quad \text{эквивалентно} \quad \bar{H} \subseteq G. \quad (2.27)$$

Более того, можно показать, что свойства (2.10), (2.12) — (2.27) операций над множеством  $\mathfrak{S}(M)$  следуют из ряда независимых соотношений, которые приведены ниже. Будем рассматривать только две операции — дополнение по отображению до  $M$  и объединение суграфов и потребуем выполнения соотношений

$$G \cup H = H \cup G, \quad (2.28)$$

$$(G \cup H) \cup Q = G \cup (H \cup Q), \quad (2.29)$$

$$(\overline{G \cup H}) \cup (\overline{G \cup H}) = G. \quad (2.30)$$

Определим операцию пересечения и знак включения формулами:

$$G \cap H \text{ по определению равно } \overline{\overline{G \cup H}}, \quad (2.31)$$

$$G \subseteq H \text{ по определению означает } G \cup H = H. \quad (2.32)$$

Тогда свойства (2.10), (2.12) — (2.27) вытекают из (2.28) — (2.32).



Учитывая это, можно сформулировать следующее предложение.

*Множество  $\mathfrak{S}(M)$  суграфов произвольного непустого графа  $M$  по операциям объединения, пересечения и дополнения по отображению является булевой структурой  $\mathfrak{B}$  или булевой алгеброй, которая изоморфна некоторой булевой структуре множеств.*

Из того, что множество  $\mathfrak{F}(M)$  является дистрибутивной структурой  $\mathfrak{D}$ , следует, что  $\mathfrak{S}(M)$  — дистрибутивная структура. Далее, дистрибутивная структура  $\mathfrak{D}$  с нулем и единицей является булевой структурой  $\mathfrak{B}$  или булевой алгеброй, если любой элемент  $G \in \mathfrak{D}$  обладает дополнением  $\bar{G} \in \mathfrak{D}$  и

$$G \cup \bar{G} = 1, \quad G \cap \bar{G} = 0.$$

Из (2.23) легко видеть, что роль единицы и нуля играют соответственно граф  $M$  и граф с пустым отображением  $M_\emptyset$ . Поэтому  $\mathfrak{S}(M)$  — булева структура  $\mathfrak{B}$ . Поскольку всякая булева структура  $\mathfrak{B}$  изоморфна некоторой булевой структуре множеств [247], то наше предложение доказано.

Рассмотрим теперь свойства операции дизъюнктивной суммы графов на множествах  $\mathfrak{F}(M)$  и  $\mathfrak{S}(M)$ .

Пусть  $M$  — произвольный непустой граф,  $\mathfrak{F}(M)$  — множество подграфов графа  $M$ , а  $G, H, Q \in \mathfrak{F}(M)$ . Можно показать, что дизъюнктивная сумма обладает следующими свойствами:

$$G \oplus H = H \oplus G \text{ (коммутативность)}, \quad (2.33)$$

$$(G \oplus H) \oplus Q = G \oplus (H \oplus Q) \text{ (ассоциативность)}, \quad (2.34)$$

$$G \cap (H \oplus Q) = (G \cap H) \oplus (G \cap Q) \text{ (дистрибутивность } \cap \text{ относительно } \oplus). \quad (2.35)$$

Заметим попутно, что дистрибутивность  $\cup$  относительно  $\oplus$  не имеет места. На основании (2.33) и (2.34) приходим к выводу, что множество  $\mathfrak{F}(M)$  по операции  $\oplus$  образует коммутативную полугруппу, которую обозначим через  $\mathfrak{F}_\oplus$ . Учитывая свойства (2.16) и (2.21) операции пересечения графов, можно прийти к аналогичному выводу, что множество  $\mathfrak{F}(M)$  по операции  $\cap$  образует коммутативную полугруппу  $\mathfrak{F}_\cap$ . Если операцию  $\oplus$  считать аддитивной операцией, а операцию  $\cap$  мультипликатив-

ной, то с учетом (2.35) множество  $\mathfrak{F}(M)$  по этим двум бинарным операциям является *ассоциативно-коммутативным полукольцом*  $\mathfrak{F}_{\oplus, \cap}$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{S}(M)$  — множество суграфов графа  $M$  и  $G, H, Q \in \mathfrak{S}(M)$ . В этом случае, кроме соотношений (2.33) — (2.35), выполняются следующие свойства:

$$G \oplus M_{\emptyset} = M_{\emptyset} \oplus G = G \quad (\text{существование нейтрального элемента}), \quad (2.36)$$

$$G \oplus G = M_{\emptyset} \quad (\text{существование обратного элемента}). \quad (2.37)$$

Поэтому множество  $\mathfrak{S}(M)$  по операции  $\oplus$  образует *коммутативную или абелеву группу*  $\mathfrak{S}_{\oplus}$ . Добавление операции  $\cap$  превращает эту группу в *ассоциативно-коммутативное кольцо*  $\mathfrak{S}_{\oplus, \cap}$ .

Теперь осталось сказать несколько слов о свойствах операции соединения графов над множеством  $\mathfrak{F}(M)$ . Легко видеть, что операция соединения обладает следующими свойствами:

$$G \boxplus H \sim H \boxplus G \quad (\text{коммутативность с точностью до изоморфизма графов}),$$

$$(G \boxplus H) \boxplus Q \sim G \boxplus (H \boxplus Q) \quad (\text{ассоциативность с точностью до изоморфизма графов}),$$

$$\left. \begin{aligned} G \boxplus (H \cup Q) &= (G \boxplus H) \cup (G \boxplus Q), \\ G \boxplus (H \cap Q) &= (G \boxplus H) \cap (G \boxplus Q) \end{aligned} \right\} \quad (\text{дистрибутивность}).$$

Поэтому множество  $\mathfrak{F}(M)$  по операции  $\boxplus$  образует *коммутативную полугруппу*  $\mathfrak{F}_{\boxplus}$  с точностью до изоморфизма графов, а по двум операциям  $\cup, \boxplus$  и  $\cap, \boxplus$  — соответственно *ассоциативно-коммутативные полукольца*  $\mathfrak{F}_{\cup, \boxplus}$  и  $\mathfrak{F}_{\cap, \boxplus}$  с точностью до изоморфизма графов.

Отметим еще одно свойство операции соединения графов. Покажем, что из единичного графа  $G^1$  с помощью простого рекуррентного соотношения можно построить насыщенный граф произвольного порядка, а из единичного графа с пустым отображением  $G^0$  — полный симметрический граф. Действительно, если дан единичный граф  $G^1 = (X_1, F_1)$ , то насыщенный граф второго порядка  $G_2 = (X_2, F_2)$  получаем соединением двух единичных графов:  $G_2 = G^1 \boxplus G^1$ . По формулам (2.8) и (2.9) находим

множество  $X_2$  и отображение  $F_2$  графа  $G_2$ :

$$X_2 = \{(1, x), (2, x)\},$$

$$F_2(1, x) = \{(1, x), (2, x)\}, \quad F_2(2, x) = \{(1, x), (2, x)\}.$$

Насыщенный граф третьего порядка  $G_3$  получаем соединением графов  $G^1$  и  $G_2$  и т. д. Продолжая этот процесс, построим насыщенный граф  $k$ -го порядка  $G_k = (X_k, F_k)$  по формуле

$$G_k = G^1 \boxplus G_{k-1}. \quad (2.38)$$

Множество  $X_k$  и отображение  $F_k$  приобретают вид

$$X_k = \{(1, x), (2(1, x)), \dots, \underbrace{(2(2 \dots (2, x) \dots))}_{k-1 \text{ раз}}\},$$

$$F_k(1, x) = X_k,$$

$$F_k(2(1, x)) = X_k,$$

$$\dots$$

$$F_k(\underbrace{2(2 \dots (2, x) \dots)}_{k-1 \text{ раз}}) = X_k.$$

Аналогично из единичного графа с пустым отображением  $G^0$ , используя рекуррентное соотношение, подобное (2.38), можно построить полный симметрический граф  $n$ -го порядка  $G_n = (X_n, F_n)$ . Множество  $X_n$  и отображение  $F_n$  будут иметь вид

$$X_n = \{(1, x), (2(1, x)), \dots, \underbrace{(2(2 \dots (2, x) \dots))}_{n-1 \text{ раз}}\},$$

$$F_n(1, x) = X_n \setminus \{(1, x)\},$$

$$F_n(2(1, x)) = X_n \setminus \{(2(1, x))\},$$

$$\dots$$

$$F_n(\underbrace{2(2 \dots (2, x) \dots)}_{n-1 \text{ раз}}) = X_n \setminus \{\underbrace{2(2 \dots (2, x) \dots)}_{n-1 \text{ раз}}\}.$$

На этом мы закончим изучение свойств теоретико-множественных операций над графами Бержа. Нетрудно видеть, что свойства операций над смешанными графами аналогичны рассмотренным свойствам над графами Бержа, поэтому не будем на них специально останавливаться.

## § 4. Графы и функции

В этом параграфе мы определим однозначные функции или отображения, заданные на графах Бержа, и покажем, какими свойствами они обладают\*). Так как здесь рассматриваются графы Бержа, а не весь класс ориентированных графов, то приходится ограничиваться исследованием свойств инъективных и биективных отображений, определения которых приводятся ниже.

Пусть  $V$  и  $W$  — два произвольных множества элементов, не обязательно различных. Если для каждого элемента  $x \in V$  существует и единствен элемент  $y \in W$ , то говорят, что задана *функция*, обозначаемая через  $f$ , которая *определена* на  $V$  и *принимает значения* в  $W$ . Говорят также, что  $y$  — значение  $f$  для элемента  $x$ , а соотношение  $y = f(x)$  *функционально* по  $y$ , которое определяет  $f$ . Другими словами,  $f$  — отображение (однозначное)  $V$  в  $W$ .

Пусть  $f$  — отображение  $V$  в  $W$  и  $X$  — произвольное подмножество множества  $V$ . *Образом  $X$  по отображению  $f$*  называется множество  $Y \subseteq W$ , образованное теми элементами  $y \in W$ , для которых выполняется свойство: существует  $x \in V$  такой, что  $x \in X$  и  $y = f(x)$ . Этим задано соотношение между  $X$  и  $Y$ , функциональное по  $Y$  и определяющее отображение множества  $\mathfrak{P}(V)$  в  $\mathfrak{P}(W)$ , которое называется *прямым распространением отображения  $f$  на множества подмножеств*. Поэтому можно записать  $Y = f(X)$ .

С другой стороны, пусть  $Y$  — произвольное подмножество множества  $W$ . *Полным прообразом  $Y$  по отображению  $f$*  называется множество  $X \subseteq V$ , образованное теми элементами  $x \in V$ , которые обладают свойством  $f(x) \in Y$ . Тем самым определено соотношение между  $X$  и  $Y$ , функциональное по  $X$ , или отображение множества  $\mathfrak{P}(W)$  в  $\mathfrak{P}(V)$ , которое называется *обратным распространением отображения  $f$  на множества подмножеств*. Обозначим это отображение через  $f^{-1}$  и запишем  $X = f^{-1}(Y)$ . Если  $y$  — произвольный элемент множества  $W$ , то  $f^{-1}(y)$  будет

---

\* \*) Свойства однозначных отображений, заданных на произвольных множествах элементов, подробно изложены в [44, 482].

множеством тех  $x \in V$ , для которых  $f(x) = y$ . Поэтому соотношения  $f(x) = y$  и  $x \in f^{-1}(y)$  эквивалентны.

Если  $f$  — отображение  $V$  в  $W$ , для которого  $f(V) = W$ , т. е. для любого  $y \in W$  существует по крайней мере один  $x \in V$  такой, что  $y = f(x)$ , то говорят, что  $f$  — *отображение  $V$  на  $W$* , или *сюръективное отображение*.

Если  $f$  — такое отображение  $V$  в  $W$ , что для всякого  $y \in W$  существует не более одного  $x \in V$ , для которого  $f(x) = y$ , т. е.  $f^{-1}(y)$  либо пусто, либо сводится к единственному элементу, то  $f$  называется *взаимно однозначным отображением  $V$  в  $W$* , или *инъективным отображением*.

Наконец, если  $f$  — отображение  $V$  в  $W$ , причем для любого  $y \in W$  существует и единствен  $x \in V$ , для которого  $f(x) = y$ , иначе говоря,  $f^{-1}(y)$  сводится к одному элементу, то  $f$  называется *взаимно однозначным отображением  $V$  на  $W$* , или *биективным отображением*.

Пусть  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{E}$  — соответственно множества графов Бержа, образованных на  $\mathfrak{P}(V)$  и  $\mathfrak{P}(W)$ , а  $f$  — инъективное отображение  $V$  в  $W$ . *Образом графа  $G = (X, F)$  из  $\mathfrak{G}$  по отображению  $f$  называют граф  $H \in \mathfrak{E}$ , множеством элементов которого является множество  $Y$  из  $W$ , образованное теми элементами  $y \in W$ , которые обладают свойством: существует  $x \in V$  такой, что  $x \in X$  и  $y = f(x)$ , а отображение  $P$  элемента  $y = f(x)$  образовано теми  $y \in Y$ , для которых выполняется соотношение: существует  $Fx \subseteq V$  такое, что  $Fx \subseteq X$  и  $P_y = f(Fx)$ . Следовательно, в графе  $H = (Y, P)$  множество  $Y$  — образ множества  $X$ , а  $P_y$  — образ подмножества  $Fx$  по отображению  $f$ . Этим задано соотношение между  $G$  и  $H$ , функциональное по  $H$  и тем самым определяющее отображение  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{E}$ , называемое *прямым распространением отображения  $f$  на множества подграфов*. Функцию, определяемую таким образом на  $\mathfrak{G}$  и принимающую свои значения в  $\mathfrak{E}$ , обозначим снова через  $f$  и запишем  $H = f(G)$ .*

Заметим теперь, что если  $f$  — произвольное или сюръективное отображение  $V$  в  $W$  и  $G$  — граф Бержа из  $\mathfrak{G}$ , то образом графа  $G$  по отображению  $f$ , вообще говоря, будет граф  $f(G)$ , который не является ориентированным графом, и поэтому  $f(G) \notin \mathfrak{E}$ .

Пусть  $f$  — инъективное отображение  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{E}$  и  $G, Q$  — произвольные графы из  $\mathfrak{G}$ . Имеют место следующие

соотношения:

$$f(\Lambda) = \Lambda, \quad (2.39)$$

$$G \neq \Lambda \text{ эквивалентно } f(G) \neq \Lambda, \quad (2.40)$$

$$G \subseteq Q \text{ влечет } f(G) \subseteq f(Q), \quad (2.41)$$

$$f(G \cup Q) = f(G) \cup f(Q), \quad (2.42)$$

$$f(G \cap Q) = f(G) \cap f(Q). \quad (2.43)$$

Свойства (2.39) и (2.40) очевидны. Докажем, например, (2.43). На основании (2.14) можно записать  $G \cap Q \subseteq G$  и  $G \cap Q \subseteq Q$ , откуда, учитывая (2.41), следует  $f(G \cap Q) \subseteq f(G)$  и  $f(G \cap Q) \subseteq f(Q)$ . Поэтому из (2.19) получаем  $f(G \cap Q) \subseteq f(G) \cap f(Q)$ . Для доказательства обратного включения запишем графы в виде  $G = (X, F)$ ,  $Q = (Z, T)$ , где  $x \in X$ ,  $z \in Z$ , и соответствующие равенства

$$f(X \cap Z) = f(X) \cap f(Z), \quad (2.44)$$

$$f(Fx \cap Tz) = f(Fx) \cap f(Tz). \quad (2.45)$$

Достаточно показать левое включение для (2.44), так как (2.45) вытекает из (2.44). Пусть  $y \in f(X) \cap f(Z)$ . Это означает, что  $y \in f(X)$  и  $y \in f(Z)$ . Так как  $f$  — инъекция, то существует такой  $x \in V$ , что  $f^{-1}(y) = x$ . Тогда  $f^{-1}(y) \in f^{-1}(f(X))$  и  $f^{-1}(y) \in f^{-1}(f(Z))$ . Поэтому\*)  $x \in X$  и  $x \in Z$ , т. е.  $x \in X \cap Z$ . Учитывая, что  $f(x) = y$  и  $f(x) \in f(X \cap Z)$ , получаем  $f(X) \cap f(Z) \subseteq f(X \cap Z)$ . Таким образом, (2.43) доказано.

Пусть  $f$  — инъективное отображение  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{E}$ , а  $H = (Y, P)$  — произвольный граф из  $\mathfrak{E}$ . *Прообразом графа  $H \in \mathfrak{E}$  относительно  $f$  называют граф  $G \in \mathfrak{G}$ , множеством элементов которого служит подмножество  $X \subseteq V$ , являющееся прообразом  $Y$  относительно  $f$ , а отображение  $F$  элемента  $x \in X$  такого, что  $f(x) = y$ , где  $y \in Y$ , представляет прообраз множества  $P_y$  относительно  $f$ .* Обозначая отображение, обратное  $f$ , через  $f^{-1}$ , можно записать  $X = f^{-1}(Y)$  и  $Fx = f^{-1}(Py)$  для  $x \in X$  такого, что  $f(x) = y$ . Этим задано соотношение между  $G$  и  $H$ , функциональное по  $G$ , и, следовательно, отображение  $\mathfrak{E}$  в  $\mathfrak{G}$ , называемое *обратным распространением отображения  $f$  на множества подграфов*. Обозначим его также через  $f^{-1}$ . Тогда запишем  $G = f^{-1}(H)$ .

\*) Доказательство того, что  $X = f^{-1}(f(X))$  будет дано ниже.

Очевидно, что  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ . Заметим, что для некоторого графа  $M \in \mathfrak{G}$  такого, что  $M \neq \Lambda$ , может иметь место  $f^{-1}(M) = \Lambda$ . Можно показать, что для того чтобы  $M \neq \Lambda$  влекло  $f^{-1}(M) \neq \Lambda$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f$  было биективным отображением  $V$  на  $W$ .

Пусть  $f$  — инъекция  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{G}$ , а  $H = (Y, P)$ ,  $K = (A, S)$  — произвольные графы из  $\mathfrak{G}$ . Тогда

$$H \subseteq K \text{ влечет } f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(K), \quad (2.46)$$

$$f^{-1}(H \cup K) = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K), \quad (2.47)$$

$$f^{-1}(H \cap K) = f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K). \quad (2.48)$$

Действительно, для множеств элементов графов  $H$  и  $K$  выражение (2.46) имеет вид:

$$Y \subseteq A \text{ влечет } f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(A). \quad (2.49)$$

Пусть  $y \in Y$ . Тогда из  $Y \subseteq A$  имеем  $y \in A$ . Если  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , то (2.49) тривиально. Если  $f^{-1}(y) = x$ , где  $x \in V$ , то из  $f^{-1}(y) \in f^{-1}(Y)$  и  $y \in A$  сразу следует  $f^{-1}(y) \in f^{-1}(A)$  и  $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(A)$ . Аналогично для отображений графов  $H$  и  $K$ . Поэтому (2.46) доказано.

В случае соотношения (2.48) включение  $f^{-1}(H \cap K) \subseteq f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K)$  доказывается так же, как для (2.43). Покажем обратное включение. Тогда запишем

$$f^{-1}(Y \cap A) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(A).$$

Пусть  $x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(A)$ . Это означает, что  $f(x) \in Y$  и  $f(x) \in A$ , откуда  $f(x) \in Y \cap A$ . Поэтому  $x \in f^{-1}(Y \cap A)$ . Следовательно,  $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(Y \cap A)$ . Аналогично для отображений графов. Таким образом, (2.48) доказано.

В заключение сформулируем следующие свойства инъективных и биективных отображений графов Берга.

Если  $f$  — инъекция  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{G}$ , а  $G$  — произвольный граф из  $\mathfrak{G}$  и  $H$  — произвольный граф из  $\mathfrak{G}$ , то

$$G = f^{-1}(f(G)), \quad (2.50)$$

$$f(f^{-1}(H)) \subseteq H. \quad (2.51)$$

Если  $f$  — биекция  $\mathfrak{G}$  на  $\mathfrak{G}$ , то для тех же графов

$$G = f^{-1}(f(G)), \quad (2.52)$$

$$f(f^{-1}(H)) = H. \quad (2.53)$$

Докажем (2.50) и (2.51). Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ . Тогда для (2.50) запишем

$$X = f^{-1}(f(X)), \quad Fx = f^{-1}(f(Fx)).$$

Пусть  $x \in X$ . По определению  $f$  это означает  $(\exists y)(y = f(x))$ , которое влечет  $(\exists y)(y = f(x) \text{ и } y \in f(X))$ . Соотношение  $y = f(x)$  эквивалентно  $x \in f^{-1}(y)$ . Следовательно, из  $(\exists y)(y = f(x) \text{ и } x \in f^{-1}(y))$  получаем  $x \in f^{-1}(f(X))$ . Поэтому  $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ . Аналогично можно показать, что  $Fx \subseteq f^{-1}(f(Fx))$ . С другой стороны, пусть  $x \in f^{-1}(f(X))$ . Это эквивалентно  $f(x) \in f(X)$  и, следовательно, соотношению  $(\exists z)(z \in X \text{ и } f(z) = f(x))$ . Но это означает, что  $f(z) = f(x)$  влечет  $z = x$ . Поэтому  $x \in X$  и  $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ . Аналогично  $f^{-1}(f(Fx)) \subseteq Fx$  и, таким образом, (2.50) доказано.

Для графа  $H$  можно записать

$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y, \quad f(f^{-1}(Py)) \subseteq Py.$$

Пусть  $y \in f(f^{-1}(Y))$ . Это означает, что  $(\exists x)(x \in V \text{ и } y = f(x))$ , которое влечет  $(\exists x)((\exists z)(z \in Y \text{ и } z = f(x)))$ . Поэтому из  $(\exists x)((\exists z)(z \in Y \text{ и } z = f(x)) \text{ и } y = f(x))$  следует  $(\exists z)(z \in Y \text{ и } y = z)$ , откуда  $y \in Y$ . Тем самым  $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ . Аналогично для отображений и (2.51) доказано.

Известно [54], что если  $f$  — сюръекция  $V$  на  $W$ , а  $X \subseteq V$  и  $Y \subseteq W$ , то имеют место соотношения

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)), \quad f(f^{-1}(Y)) = Y.$$

Поэтому справедливость (2.52) и (2.53) немедленно следует из того, что  $f$  есть одновременно сюръекция и инъекция  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{E}$ .

Если  $f$  — биекция, то  $f^{-1}$  — также биекция, поэтому графы  $G$  и  $f(G)$  так же, как графы  $H$  и  $f^{-1}(H)$ , изоморфны. Отображения  $(f^{-1}f)$  и  $(ff^{-1})$  суть тождественные отображения соответственно графов  $G \in \mathfrak{G}$  и  $H \in \mathfrak{E}$ .



## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ

## § 1. Декартово произведение множеств

В этой главе рассматриваются свойства алгебраических операций на множестве графов Бержа. Особое внимание уделяется операциям суперпозиции, умножения, суммирования и композиции графов. Содержательный смысл этих операций станет более прозрачным при изучении алгебры конечных автоматов. Здесь мы только отметим, что автоматная интерпретация соответствующих операций над графами описывает различные способы построения сложных автоматов из более простых на абстрактном уровне. Ниже будет показано, что различные операции над графами можно разделить на три множества алгебраических операций: операции объединяющего, пересекающего и суперпозиционного типов. Кроме того, для каждого множества операций объединяющего или пересекающего типа можно ввести множество операций, двойственных к множеству операций данного типа, и сформулировать две теоремы двойственности. Оказывается, что любую операцию над графами из множества операций данного типа можно представить объединением нескольких «более простых» операций из того же множества операций. В заключение главы излагаются операции над графами Бержа на языке преобразования матриц смежности и показывается, каким образом введенные операции можно обобщить на смешанные графы.

Подчеркнем, что знакомство с алгебраическими операциями и их свойствами необходимо для чтения последующих глав книги. Так, в следующей главе рассматриваются методы разложения графов по различным алгебраическим операциям. Более того, теоретико-множественные и алгебраические операции над графами естественным образом распространяются на конечные автоматы, а проблема декомпозиции автоматов сводится к разложению автоматов по таким операциям как супер-

позиция, умножение, суммирование и др. Декомпозиция автоматов, в свою очередь, решает проблему кодирования внутренних состояний автомата и на структурном уровне приводит к синтезу оптимальных схем с точки зрения простоты комбинационной части автомата.

В основе алгебраических операций над графами лежат операции объединения, пересечения и декартова (прямого) произведения множеств. Поскольку первые две операции подробно изучены в предыдущей главе, то в этом параграфе мы остановимся на свойствах декартова произведения множеств.

Пусть  $X$  и  $Y$  — два произвольных множества элементов. Множество  $Z = X \times Y$  называется *декартовым или прямым произведением множеств  $X$  и  $Y$* , если для любого  $z \in Z$  имеет место  $z = (x, y)$ , где  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Другими словами, произвольный элемент  $z$  есть *пара*, на первом месте которой стоит произвольный элемент  $x$ , а на втором — произвольный элемент  $y$ . Две пары  $(x, y)$  и  $(x', y')$  считаются равными тогда и только тогда, когда  $x = x'$  и  $y = y'$ . Например, если  $X = \{x_1, x_2\}$ , а  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ , то декартовым произведением множеств  $X$  и  $Y$  является множество

$$Z = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}.$$

Для произвольного элемента  $z \in Z$  соотношения « $x$  есть первый элемент пары  $z$ » и « $y$  есть второй элемент пары  $z$ » функциональны соответственно по  $x$  и по  $y$ . Они определяют отображения  $X \times Y$  на  $X$  и  $X \times Y$  на  $Y$ , которые обозначаются через  $pr_1$  и  $pr_2$  и называются *первой* и *второй* проекцией. Вместо « $x$  есть первый элемент пары  $z$ » говорят « $x$  первая проекция  $z$ » и пишут  $x = pr_1(z)$  или  $pr_1(z) \in X$ . Соотношение « $x = pr_1(z)$  и  $y = pr_2(z)$ » эквивалентно соотношению  $z = (x, y)$ . Распространение  $pr_1$  и  $pr_2$  на множества подмножеств множества  $Z$  также обозначается и называется первой и второй проекцией. Если  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$ , то имеет место

$$pr_1(X' \times Y') = X',$$

$$pr_2(X' \times Y') = Y',$$

$$pr_1^{-1}(X') = X' \times Y,$$

$$pr_2^{-1}(Y') = X \times Y',$$

$$Z \subseteq pr_1(Z) \times pr_2(Z).$$

Отображение  $f$ , которое ставит элементу  $(x, y) \in X \times Y$  элемент  $(y, x) \in Y \times X$ , есть взаимно однозначное отображение или биекция множества  $X \times Y$  на  $Y \times X$ , называемая *канонической биекцией*. Обратное, отображение  $g$ , которое сопоставляет элементу  $(y, x) \in Y \times X$  элемент  $(x, y) \in X \times Y$ , также каноническая биекция. Говорят, что  $f$  и  $g$  реализуют взаимно однозначное соответствие между  $X \times Y$  и  $Y \times X$ , которое будем называть *каноническим*.

Если множество  $X$  содержит  $n$  элементов, а множество  $Y$  —  $m$  элементов, то декартово произведение  $X \times Y$  содержит  $nm$  элементов. Или, короче, если  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ , то  $|X \times Y| = nm$ . Ясно, что  $|\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(Y)| = 2^{n+m}$ , так как  $|\mathfrak{P}(X)| = 2^n$  и  $|\mathfrak{P}(Y)| = 2^m$ , а  $|\mathfrak{P}(X \times Y)| = 2^{nm}$ .

Покажем, какими свойствами обладает декартово произведение.

Пусть  $X$  и  $Y$  — два произвольных множества. Имеют место следующие соотношения:

$$X \times Y = \emptyset \text{ эквивалентно } X = \emptyset \text{ или } Y = \emptyset, \quad (3.1)$$

$$X' \subseteq X \text{ и } Y' \subseteq Y \text{ эквивалентно } X' \times Y' \subseteq X \times Y. \quad (3.2)$$

Докажем вначале (3.1). Предположим, что  $z \in X \times Y$ . Это влечет  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y$  и, следовательно,  $X \neq \emptyset$  и  $Y \neq \emptyset$ . С другой стороны  $x \in X$  и  $y \in Y$  влечет  $(x, y) \in X \times Y$ , поэтому  $X \times Y \neq \emptyset$ . Таким образом, соотношение  $X \times Y \neq \emptyset$  эквивалентно  $X \neq \emptyset$  и  $Y \neq \emptyset$ , откуда вытекает (3.1).

Докажем теперь (3.2). Пусть  $x \in X'$  и  $y \in Y'$ . Тогда  $(x, y) \in X' \times Y'$ . Из  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$  следует  $x \in X$  и  $y \in Y$ , откуда  $(x, y) \in X \times Y$ . Поэтому  $X' \times Y' \subseteq X \times Y$ . Обратное, покажем, что соотношение  $X' \times Y' \subseteq X \times Y$  влечет  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$ . Пусть  $z \in X' \times Y'$ . Это означает, что  $z$  — пара и  $pr_1(z) \in X'$  и  $pr_2(z) \in Y'$ . Из того, что  $X' \times Y' \subseteq X \times Y$ , вытекает, что  $z \in X \times Y$ . Поэтому  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y$ . Таким образом,  $X' \times Y' \subseteq X \times Y$  влечет  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$  и (3.2) доказано.

Очевидно, что декартово произведение обладает следующими свойствами:

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z \text{ (ассоциативность),}$$

$$X \times Y \sim Y \times X \text{ (коммутативность),}$$

где знак  $\sim$  обозначает «жесткий изоморфизм», т. е. установление канонического соответствия между  $(x, y) \in X \times Y$  и  $(y, x) \in Y \times X$ .

Кроме того, для произвольных  $X, Y, Z$  справедливы следующие законы дистрибутивности:

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z), \quad (3.3)$$

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z), \quad (3.4)$$

$$X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z). \quad (3.5)$$

Докажем, например, (3.3). Обозначим левую и правую части (3.3) через  $A$  и  $B$  соответственно. Пусть  $z \in A$ . Это означает, что  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y$  или  $pr_2(z) \in Z$ , которое влечет  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y$  или  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Z$ , т. е.  $z \in X \times Y$  или  $z \in X \times Z$ , откуда  $z \in B$ . Таким образом,  $A \subseteq B$ . Легко показать, что  $B \subseteq A$ . Поэтому (3.3) доказано. Аналогично можно доказать (3.4) и (3.5).

Для любых  $X, X'$  и  $Y, Y'$  имеет место

$$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y'), \quad (3.6)$$

$$(X \times Y) \cup (X' \times Y') \subseteq (X \cup X') \times (Y \cup Y'). \quad (3.7)$$

Обозначим через  $A$  и  $B$  левую и правую части (3.6) и предположим, что  $z \in A$ . Тогда  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y$  и  $pr_1(z) \in X'$  и  $pr_2(z) \in Y'$ , из которого следует  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_1(z) \in X'$  и  $pr_2(z) \in Y$  и  $pr_2(z) \in Y'$ , откуда  $z \in B$ . Поэтому  $A \subseteq B$ . Аналогично  $B \subseteq A$ , и (3.6) доказано.

Что касается (3.7), то при соответственном обозначении  $A \subseteq B$  доказывается подобно (3.6). Покажем, что обратное включение в общем случае не имеет места. Пусть  $z \in B$ . Тогда  $pr_1(z) \in X$  или  $pr_1(z) \in X'$  и  $pr_2(z) \in Y$  или  $pr_2(z) \in Y'$ , откуда вытекает  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y$  или  $pr_1(z) \in X'$  и  $pr_2(z) \in Y$  или  $pr_1(z) \in X$  и  $pr_2(z) \in Y'$ , или  $pr_1(z) \in X'$  и  $pr_2(z) \in Y'$ . Следовательно,  $z \in (X \times Y) \cup (X' \times Y) \cup (X \times Y') \cup (X' \times Y')$ , которое обозначим  $z \in C$ . Сравнивая  $A$  и  $C$ , видим, что  $A$  строго содержится в  $C$ , т. е.  $A \subset C$ . Поэтому существует такое  $z \in B$ , что  $z \notin A$ . Этим доказательство (3.7) завершено.

Нетрудно показать, что знак  $\subseteq$  в соотношении (3.7) можно заменить на знак равенства тогда и только тогда, когда  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$  или  $X \subseteq X'$  и  $Y \subseteq Y'$ .

Для того чтобы доказать последующие свойства, нам потребуются соотношения

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z), \quad (3.8)$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z). \quad (3.9)$$

Докажем, например, (3.8). Пусть  $x \in X \setminus (Y \cup Z)$ . Тогда  $x \in X$  и  $x \notin Y \cup Z$ . Из этого следует,  $x \in X$  и  $x \notin Y$  и  $x \notin Z$ , которое влечет  $x \in X \setminus Y$  и  $x \in X \setminus Z$ , т. е.  $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$ . Наоборот, пусть  $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$ . Это означает  $x \in X \setminus Y$  и  $x \in X \setminus Z$ . По определению  $x \in X$  и  $x \notin Y$  и  $x \in X$  и  $x \notin Z$ . Поэтому  $x \in X$  и  $x \notin Y$  и  $x \notin Z$ , откуда  $x \in X$  и  $x \notin Y \cup Z$ . Следовательно,  $x \in X \setminus (Y \cup Z)$  и (3.8) доказано. Аналогично проводится доказательство соотношения (3.9).

Если  $X' \subseteq X$  и  $Y' \subseteq Y$ , то справедливы следующие соотношения:

$$(X \times Y) \setminus (X' \times Y') = ((X \setminus X') \times Y) \cup (X \times (Y \setminus Y')), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} (X \setminus X') \times (Y \setminus Y') &= \\ &= (X \times Y) \setminus [(X' \times Y') \cup ((X \setminus X') \times Y') \cup (X' \times (Y \setminus Y'))]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Докажем вначале (3.10). Используя дистрибутивность декартова произведения относительно разности множеств (3.5), правую часть (3.10) запишем в виде

$$((X \times Y) \setminus (X' \times Y')) \cup ((X \times Y) \setminus (X \times Y')),$$

откуда, учитывая (3.9) и (3.6), получаем

$$\begin{aligned} (X \times Y) \setminus ((X' \times Y') \cap (X \times Y')) &= \\ &= (X \times Y) \setminus ((X' \cap X) \times (Y' \cap Y)) = (X \times Y) \setminus (X' \times Y'). \end{aligned}$$

Таким образом, (3.10) доказано.

Для доказательства (3.11) запишем равенства

$$\begin{aligned} X &= (X \setminus X') \cup X', & (X \setminus X') \cap X' &= \emptyset, \\ Y &= (Y \setminus Y') \cup Y', & (Y \setminus Y') \cap Y' &= \emptyset \end{aligned}$$

и образуем декартовы произведения

$$((X \setminus X') \cup X') \times ((Y \setminus Y') \cup Y') = X \times Y, \quad (3.12)$$

$$(X \setminus X') \cap X' \times (Y \setminus Y') \cap Y' = \emptyset. \quad (3.13)$$

Учитывая (3.3) и (3.4), выражения (3.12) и (3.13) перепишем в форме

$$\begin{aligned} ((X \setminus X') \times (Y \setminus Y')) \cup ((X \setminus X') \times Y') \cup \\ \cup (X' \times (Y \setminus Y')) \cup (X' \times Y') = X \times Y, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((X \setminus X') \times (Y \setminus Y')) \cap ((X \setminus X') \times Y') \cap \\ \cap (X' \times (Y \setminus Y')) \cap (X' \times Y') = \emptyset. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Легко видеть, что (3.14) и (3.15) образуют разбиение множества  $X \times Y$  на непересекающиеся подмножества, откуда вытекает справедливость (3.11).

Понятие декартова произведения можно обобщить на случай  $n$  множеств. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — произвольные множества. Множество

$$Z = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

называется прямым или декартовым произведением множеств  $X_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , если для любого  $z \in Z$  имеет место  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т. е. произвольный элемент  $z$  есть  $n$ -строка, на первом месте которой стоит элемент  $x_1 \in X_1$ , на втором — элемент  $x_2 \in X_2$  и т. д., на  $n$ -м — элемент  $x_n \in X_n$ . В дальнейшем  $n$ -строку будем называть просто  $n$ -кой, а декартово произведение  $n$  множеств обозначать через

$$Z = \prod_{i \in I} X_i, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Отображения  $\prod_{i \in I} X_i$  на  $X_i$  обозначим, как и ранее, через  $pr_1, pr_2, \dots, pr_n$  и назовем соответственно первой, второй и т. д.,  $n$ -й проекцией. Тогда соотношение  $(x_1 = pr_1(z)) \& (x_2 = pr_2(z)) \& \dots \& (x_n = pr_n(z))$  эквивалентно соотношению  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Заметим попутно, что если  $X$  — произвольное множество, то декартово произведение

$$X^k = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{k \text{ раз}}$$

называется  $k$ -й степенью множества  $X$ . Очевидно, что  $k \geq 2$ . Полагая

$$\begin{aligned} X^1 &= X, \\ X^0 &= \{\emptyset\}, \end{aligned}$$

получаем определение  $k$ -й степени для любого множества  $X$  и любого целого неотрицательного  $k$ .

Доказанные свойства декартова произведения можно обобщить на случай  $n$  множеств. Эти соотношения будут иметь вид:

$$\prod_{i \in I} X_i = \emptyset \text{ эквивалентно } (X_1 = \emptyset) \vee (X_2 = \emptyset) \vee \dots \vee (X_n = \emptyset), \quad (3.16)$$

$(X'_1 \subseteq X_1) \& (X'_2 \subseteq X_2) \& \dots \& (X'_n \subseteq X_n)$  эквивалентно

$$\prod_{i \in I} X'_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i, \quad (3.17)$$

$$X \times \left( \bigcup_{i \in I} Y_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \times Y_i), \quad (3.18)$$

$$X \times \left( \bigcap_{i \in I} Y_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \times Y_i), \quad (3.19)$$

$$\left( \prod_{i \in I} X_i \right) \cap \left( \prod_{i \in I} X'_i \right) = \prod_{i \in I} (X_i \cap X'_i), \quad (3.20)$$

$$\left( \prod_{i \in I} X_i \right) \cup \left( \prod_{i \in I} X'_i \right) \subseteq \prod_{i \in I} (X_i \cup X'_i), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i \in I} X_i \right) \setminus \left( \prod_{i \in I} X'_i \right) &= ((X_1 \setminus X'_1) \times X_2 \times \dots \times X_n) \cup \\ &\cup (X_1 \times (X_2 \setminus X'_2) \times \dots \times X_n) \cup (X_1 \times X_2 \times \dots \times (X_n \setminus X'_n)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} (X_i \setminus X'_i) &= \left( \prod_{i \in I} X_i \right) \setminus \left[ \left( \prod_{i \in I} X'_i \right) \cup \right. \\ &\left. \cup ((X_1 \setminus X'_1) \times X'_2 \times \dots \times X'_n) \cup (X'_1 \times (X_2 \setminus X'_2) \times \dots \times X'_n) \cup \dots \right. \\ &\left. \dots \cup (X'_1 \times X'_2 \times \dots \times (X_n \setminus X'_n)) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

## § 2. Умножение, суммирование, композиция и суперпозиция графов

В этом параграфе мы определим основные алгебраические операции над графами, содержательный смысл которых заключается в том, что они описывают совместную работу нескольких конечных автоматов. В основе этих операций лежит декартово произведение множеств.

Операции умножения и суммирования задают параллельную работу автоматов, а операция суперпозиции соответствует последовательному соединению автоматов. Операция композиции графов не имеет автоматной интерпретации, однако она помогает глубже понять взаимосвязь между различными алгебраическими операциями над графами, которые рассматриваются в следующем параграфе.

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два произвольных графа Бержа. Граф  $Q = (Z, U)$  называется *произведением графов*  $G$  и  $H$  и обозначается  $Q = G \times H$ , если множество  $Z$  и отображение  $U$  множества  $Z$  в себя определяются следующим образом:

$$Z = X \times Y, \quad (3.24)$$

$$Uz = Fx \times Py, \quad (3.25)$$

где  $z \in Z$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $z = (x, y)$ . Следовательно, результат умножения графов  $G$  и  $H$  образуется как декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$ , а отображение произвольного элемента  $z$  этого произведения, в свою очередь, является декартовым произведением подмножеств множеств  $X$  и  $Y$ , соответствующих отображению  $F$  элемента  $pr_1(z) = x$  и отображению  $P$  элемента  $pr_2(z)$ . Так как  $pr_1(z) = x$  и  $pr_2(z) = y$ , то вместо записи

$$Uz = F(pr_1(z)) \times P(pr_2(z))$$

используем выражение (3.25).

**Пример 3.1.** Пусть даны графы  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , где  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Fx_1 = \{x_2\}$ ,  $Fx_2 = \{x_1, x_2\}$  и  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ ,  $Py_1 = \{y_1, y_3\}$ ,  $Py_2 = \{y_2\}$ ,  $Py_3 = \{y_1, y_2\}$ . Найдите граф, равный произведению графов  $G$  и  $H$ .

Вначале находим множество элементов  $Z$ . Из (3.24) получаем

$$Z = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}.$$

Обозначим элементы  $Z$  следующим образом:  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_1, y_2)$ ,  $z_3 = (x_1, y_3)$ ,  $z_4 = (x_2, y_1)$ ,  $z_5 = (x_2, y_2)$ ,  $z_6 = (x_2, y_3)$ . Тогда

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}.$$



Используя (3.25), находим отображение  $U$  множества  $Z$  в себя:

$$Uz_1 = Fx_1 \times Py_1 = \{z_4, z_6\},$$

$$Uz_2 = Fx_1 \times Py_2 = \{z_5\},$$

$$Uz_3 = Fx_1 \times Py_3 = \{z_4, z_5\},$$

$$Uz_4 = Fx_2 \times Py_1 = \{z_1, z_3, z_4, z_6\},$$

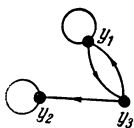
$$Uz_5 = Fx_2 \times Py_2 = \{z_2, z_5\},$$

$$Uz_6 = Fx_2 \times Py_3 = \{z_1, z_2, z_4, z_5\}.$$

Таким образом, граф  $Q = (Z, U)$  является произведением графов  $G$  и  $H$ . Поэтому  $Q = G \times H$ . Геометрическая интерпретация графов  $G$  и  $H$  показана на рис. 3.1, а, б, а графа  $Q$  — на рис. 3.2.



а)



б)

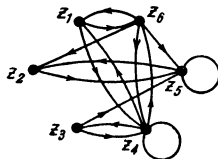


Рис. 3.2.

Рис. 3.1.

Определим теперь граф, равный произведению графов  $H$  и  $G$ . В этом случае, применяя формулы (3.24) и (3.25), находим множество

$$Z' = \{(y_1, x_1), (y_1, x_2), (y_2, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_1), (y_3, x_2)\},$$

которое, вводя обозначения  $z_1 = (y_1, x_1)$ ,  $z_2 = (y_1, x_2)$ ,  $z_3 = (y_2, x_1)$ ,  $z_4 = (y_2, x_2)$ ,  $z_5 = (y_3, x_1)$ ,  $z_6 = (y_3, x_2)$ , перепишем в виде

$$Z' = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\},$$

и отображение  $U'$  множества  $Z'$  в себя

$$U'z_1 = \{z_2, z_6\},$$

$$U'z_2 = \{z_1, z_2, z_5, z_6\},$$

$$U'z_3 = \{z_4\},$$

$$U'z_4 = \{z_3, z_4\},$$

$$U'z_5 = \{z_2, z_4\},$$

$$U'z_6 = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}.$$

Граф  $Q' = (Z', U')$  является произведением графов  $H$  и  $G$ , т. е.  $Q' = H \times G$ , и показан на рис. 3.3.

Легко видеть, что, устанавливая каноническое соответствие между  $(x, y) \in X \times Y$  и  $(y, x) \in Y \times X$ , получаем подстановку

$$t = \begin{pmatrix} z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 \\ z_1, z_3, z_5, z_2, z_4, z_6 \end{pmatrix},$$

которая переводит граф  $Q$  в  $Q'$ . По этому графы  $Q$  и  $Q'$  изоморфны.

Операцию умножения можно обобщить на случай трех, четырех и вообще  $n$  графов. Пусть  $G_1 = (X_1, F_1)$ ,  $G_2 = (X_2, F_2)$ , ...,  $G_n = (X_n, F_n)$  — произвольные графы. Граф  $G = (X, F)$  называется произведением графов  $G_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , и обозначается

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \prod_{i \in I} G_i,$$

если множество  $X$  и отображение  $F$  определяются по формулам

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$Fx = F_1x_1 \times F_2x_2 \times \dots \times F_nx_n = \prod_{i \in I} F_ix_i,$$

где  $x \in X$ ,  $x_1 \in X_1$ ,  $x_2 \in X_2$ , ...,  $x_n \in X_n$ . Здесь  $x$  есть  $n$ -ка, т. е.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и вместо  $F_i(pr_i(x))$  пишем просто  $F_ix_i$ , так как  $pr_i(x) = x_i$ .

Определим теперь операцию суммирования двух графов  $G$  и  $H$ . Граф  $N = (Z, R)$  называется *суммой графов*  $G$  и  $H$  и обозначается  $N = G + H$ , если  $Z$  и  $R$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} Z &= X \times Y, \\ Rz &= (Fx \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Py), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $z \in Z$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $z = (x, y)$ . В (3.26) один из членов декартова произведения представляет собой множество, сводящееся к одному элементу. Например,  $\{x\}$  — множество, элементом которого является  $x = pr_1(z)$ .

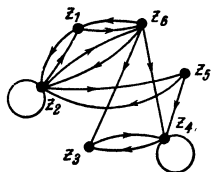


Рис. 3.3.

Пример 3.2. Пусть даны графы  $G$  и  $H$ , рассмотренные в примере 3.1. Найти граф, равный сумме графов  $G$  и  $H$ .

По формулам (3.24) и (3.26) находим множество

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$$

и отображение  $R$  множества  $Z$  в себя:

$$Rz_1 = (Fx_1 \times \{y_1\}) \cup (\{x_1\} \times Py_1) = \{z_1, z_3, z_4\},$$

$$Rz_2 = (Fx_1 \times \{y_2\}) \cup (\{x_1\} \times Py_2) = \{z_2, z_5\},$$

$$Rz_3 = (Fx_1 \times \{y_3\}) \cup (\{x_1\} \times Py_3) = \{z_1, z_2, z_6\},$$

$$Rz_4 = (Fx_2 \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Py_1) = \{z_1, z_4, z_6\},$$

$$Rz_5 = (Fx_2 \times \{y_2\}) \cup (\{x_2\} \times Py_2) = \{z_2, z_5\},$$

$$Rz_6 = (Fx_2 \times \{y_3\}) \cup (\{x_2\} \times Py_3) = \{z_3, z_4, z_5, z_6\}.$$

Граф  $N = (Z, R)$ , геометрическая интерпретация которого дана на рис. 3.4, является суммой графов  $G$  и  $H$ . Поэтому  $N = G + H$ .

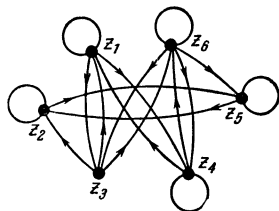


Рис. 3.4.

Операцию суммирования можно обобщить на случай  $n$  графов. Если  $G_i = (X_i, F_i)$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , — произвольные графы, то граф  $G = (X, F)$  называется суммой графов  $G_i$  и обозначается

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i \in I} G_i$$

в том случае, когда  $X$  и  $F$  определяются следующими формулами:

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$Fx = (F_1x_1 \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\}) \cup (\{x_1\} \times F_2x_2 \times \dots \times \{x_n\}) \cup \dots \cup (\{x_1\} \times \dots \times F_nx_n).$$

По аналогии с операцией суммирования легко определить операцию композиции графов  $G$  и  $H$ . Граф  $K = (Z, T)$  называется композицией графов  $G$  и  $H$  и обо-

значается  $K = G \otimes H$ , если  $Z$  и  $T$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} Z &= X \times Y, \\ Tz &= (Fx \times Y) \cup (X \times Py), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $z \in Z$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $z = (x, y)$ .

Пример 3.3. Найти композицию графов  $G$  и  $H$ , рассмотренных в примере 3.1.

Используя (3.24) и (3.27), определим множество

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$$

и отображение  $T$  множества  $Z$  в себя

$$Tz_1 = \{z_1, z_3, z_4, z_5, z_6\},$$

$$Tz_2 = \{z_2, z_4, z_5, z_6\},$$

$$Tz_3 = \{z_1, z_2, z_4, z_5, z_6\}$$

$$Tz_4 = Tz_5 = Tz_6 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}.$$

Граф  $K = (Z, T)$  является композицией графов  $G$  и  $H$ .

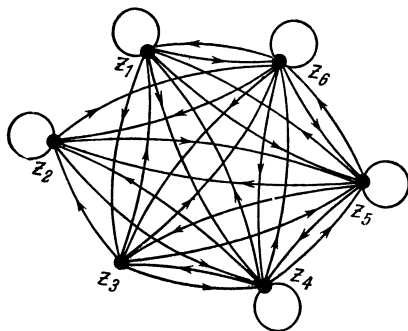


Рис. 3.5.

Геометрическая интерпретация графа  $K = G \otimes H$  дана на рис. 3.5.

Далее, граф  $G = (X, F)$  называется композицией графов  $G_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , и обозначается

$$G = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_n = \bigotimes_{i \in I} G_i,$$

если  $X$  и  $F$  имеют следующий вид:

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$Fx = (F_1x_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \cup (X_1 \times F_2x_2 \times \dots \times X_n) \cup \dots \\ \dots \cup (X_1 \times X_2 \times \dots \times F_nx_n).$$

Основные законы, которым удовлетворяют операции умножения, суммирования и композиции графов, будут рассмотрены в следующем параграфе. Сейчас отметим одно простое свойство этих операций.

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — произвольные графы, а  $G^* = (X, F^{-1})$  и  $H^* = (Y, P^{-1})$  — транспонированные графы. Найдем граф, равный произведению графов  $G^*$  и  $H^*$ . Для этого запишем

$$X \times Y = Z, \\ F^{-1}x \times P^{-1}y = U^{-1}(x, y) = U^{-1}z.$$

Получаем транспонированный граф  $Q^* = (Z, U^{-1})$ . Следовательно,

$$(G \times H)^* = G^* \times H^*.$$

Аналогично транспонированная сумма (композиция) графов равна сумме (композиции) транспонированных графов. Поэтому инвариантность транспонирования относительно операций  $\times$ ,  $+$ ,  $\otimes$  графов можно записать в виде

$$\left( \prod_{i \in I} G_i \right)^* = \prod_{i \in I} G_i^*, \\ \left( \sum_{i \in I} G_i \right)^* = \sum_{i \in I} G_i^*, \\ \left( \otimes_{i \in I} G_i \right)^* = \otimes_{i \in I} G_i^*.$$

Определим теперь операцию суперпозиции графов, которая, как будет показано ниже, на автоматном уровне соответствует последовательной работе двух или более автоматов. Предварительно заметим, что аналитическая запись операции суперпозиции графов не так прозрачна, как предыдущие операции. Это объясняется спецификой последовательной работы автоматов. Гораздо удобнее операцию суперпозиции задавать в матричной форме, которая будет приведена в § 6 этой главы.

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — произвольные графы Бержа. Предположим, что  $X = \{x_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ , а  $Y = \{y_l\}$ ,  $l \in L = \{1, 2, \dots, k\}$ . Для произвольного элемента  $x \in X$  обозначим через  $F^{(j)}x$  отображение элемента  $x$  в элемент  $x_j$ . Если  $x_j \in Fx$ , то  $F^{(j)}x = \{x_j\}$ , если же  $x_j \notin Fx$ , то  $F^{(j)}x = \emptyset$ . Тогда подмножество  $Fx \subseteq X$  для любого  $x \in X$  можно представить в виде

$$Fx = F^{(1)}x \cup F^{(2)}x \cup \dots \cup F^{(m)}x = \bigcup_{j \in J} F^{(j)}x. \quad (3.28)$$

Выражение (3.28) будем называть приведением отображения  $F$  элемента  $x$  к канонической форме. Легко видеть, что в этом случае  $Fx$  взаимно однозначно соответствует строке матрицы смежности графа  $G$  для элемента  $x \in X$ . Аналогично каноническая форма отображения  $P$  элемента  $y \in Y$  имеет вид

$$Py = P^{(1)}y \cup P^{(2)}y \cup \dots \cup P^{(k)}y = \bigcup_{l \in L} P^{(l)}y.$$

Граф  $M = (Z, S)$  называется *суперпозицией графов*  $G$  и  $H$  и обозначается  $M = G * H$ , если множество  $Z$  и отображение  $S$  определяются по формулам

$$Z = X \times Y, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} Sz &= (F^{(1)}x \times P_1y) \cup (F^{(2)}x \times P_2y) \cup \dots \cup (F^{(m)}x \times P_my) = \\ &= \bigcup_{j \in J} (F^{(j)}x \times P_jy), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $z \in Z$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $z = (x, y)$ . В выражении (3.30)  $P_jy \subseteq Py$ , причем для  $j, i \in J$  ( $j \neq i$ )  $P_jy \cap P_iy$ , вообще говоря, не пусто, а  $\bigcup_{j \in J} P_jy = Py$ . Другими словами,

$\bigcup_{j \in J} P_jy$  — разбиение  $Py$  на  $m$  классов. Особо подчеркнем,

что в общем случае операция суперпозиции неоднозначна из-за неоднозначности выбора разбиения  $Py$ . Для того чтобы суперпозиция была определена однозначно, необходимо для каждого  $y \in Y$  однозначно указать разбиение  $Py$  на  $m$  классов.

Очевидно, что можно говорить о суперпозиции графов  $H$  и  $G$ , причем результат операции в общем случае

отличен от суперпозиции  $G$  и  $H$ . Действительно, граф  $M' = (Z', S')$  является суперпозицией графов  $H$  и  $G$ , если

$$Z' = Y \times X, \quad (3.31)$$

$$S'z = \bigcup_{l \in L} (P^{(l)}y \times F_lx), \quad (3.32)$$

где  $z \in Z'$ ,  $y \in Y$ ,  $x \in X$ ,  $z = (y, x)$ , а  $\bigcup_{l \in L} F_lx$  — разбиение  $Fx$  на  $l$  классов.

**Пример 3.4.** Пусть даны графы  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ , рассмотренные в примере 3.1. Найти граф, равный суперпозиции графов  $G$  и  $H$ , если разбиение  $P_y$  на два класса имеет следующий вид:

$$P_1y_1 = \{y_1\}, \quad P_2y_1 = \{y_3\},$$

$$P_1y_2 = \{y_2\}, \quad P_2y_2 = \emptyset,$$

$$P_1y_3 = \{y_1\}, \quad P_2y_3 = \{y_2\}.$$

По формулам (3.29) и (3.30) находим множество  $Z$  и отображение  $S$  множества  $Z$  в себя

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\},$$

$$Sz_1 = (F^{(1)}x_1 \times P_1y_1) \cup (F^{(2)}x_1 \times P_2y_1) = \{z_6\},$$

$$Sz_2 = (F^{(1)}x_1 \times P_1y_2) \cup (F^{(2)}x_1 \times P_2y_2) = \emptyset,$$

$$Sz_3 = (F^{(1)}x_1 \times P_1y_3) \cup (F^{(2)}x_1 \times P_2y_3) = \{z_5\},$$

$$Sz_4 = (F^{(1)}x_2 \times P_1y_1) \cup (F^{(2)}x_2 \times P_2y_1) = \{z_1, z_6\},$$

$$Sz_5 = (F^{(1)}x_2 \times P_1y_2) \cup (F^{(2)}x_2 \times P_2y_2) = \{z_2\},$$

$$Sz_6 = (F^{(1)}x_2 \times P_1y_3) \cup (F^{(2)}x_2 \times P_2y_3) = \{z_1, z_5\}.$$

В результате получаем граф  $M = (Z, S)$ . Геометрическая интерпретация графа  $M = G * H$  показана на рис. 3.6.

Найдем суперпозицию графов  $H$  и  $G$ , если разбиение  $Fx$  на три класса имеет вид

$$F_1x_1 = \{x_2\}, \quad F_2x_1 = \emptyset, \quad F_3x_1 = \emptyset,$$

$$F_1x_2 = \emptyset, \quad F_2x_2 = \{x_1\}, \quad F_3x_2 = \{x_2\}.$$

Используя выражения (3.31) и (3.32), получаем граф  $M' = (Z', S')$ , у которого

$$\begin{aligned} Z' &= \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}, \\ S'z_1 &= \{z_2\}, \quad S'z_2 = \{z_6\}, \quad S'z_3 = \emptyset, \\ S'z_4 &= \{z_3\}, \quad S'z_5 = \{z_2\}, \quad S'z_6 = \{z_3\}. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация графа  $M' = H * G$  дана на рис. 3.7. Легко видеть, что графы  $M$  и  $M'$  не изоморфны.

Операцию суперпозиции можно обобщить на случай  $n$  графов. Пусть  $G_1 = (X_1, F_1)$ ,  $G_2 = (X_2, F_2), \dots, G_n = (X_n, F_n)$  — произвольные графы, причем множество  $X_1$

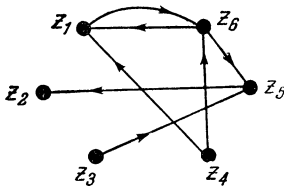


Рис. 3.6.

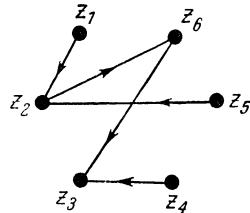


Рис. 3.7.

графа  $G_1$  содержит  $m$  элементов. Граф  $G = (X, F)$  будем называть суперпозицией графов  $G_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , и обозначать

$$G = G_1 * G_2 * \dots * G_n = \underset{I \in i}{*} G_i,$$

если множество  $X$  и отображение  $F$  определяются следующим образом:

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$\begin{aligned} Fx &= (F_1^{(1)}x_1 \times F_{21}x_2 \times \dots \times F_{n1}x_n) \cup \\ &\quad \cup (F_1^{(2)}x_1 \times F_{22}x_2 \times \dots \times F_{n2}x_n) \cup \dots \\ &\quad \dots \cup (F_1^{(m)}x_1 \times F_{2m}x_2 \times \dots \times F_{nm}x_n) = \\ &= \bigcup_{j \in J} (F_1^{(j)}x_1 \times F_{2j}x_2 \times \dots \times F_{nj}x_n), \end{aligned}$$



где  $J = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $x \in X$ ,  $x_1 \in X_1$ ,  $x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$  и  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Здесь

$$\bigcup_{j \in J} F_{2j}x_2, \dots, \bigcup_{j \in J} F_{nj}x_n$$

соответственно разбиение множеств  $F_2x_2, \dots, F_nx_n$  на  $m$  классов. Аналогично можно определить суперпозицию  $n$  графов в обратном порядке.

### § 3. Множество операций объединяющего и суперпозиционного типов. Теорема двойственности

Прежде, чем рассматривать основные свойства алгебраических операций над графами Бержа, заметим, что операции умножения, суммирования, композиции и суперпозиции графов, по всей вероятности, должны обладать «похожими» свойствами, так как они основаны на декартовом произведении множеств. Поэтому целесообразно определить некоторые классы алгебраических операций над графами, в которые входят указанные операции, и изучить свойства произвольной операции данного класса. Такими классами операций являются два класса алгебраических операций: множество операций объединяющего типа и множество операций суперпозиционного типа. Определим вначале множество операций объединяющего типа.

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два произвольных графа Бержа. Назовем множеством алгебраических операций *объединяющего* типа множество операций, обозначаемое через  $A$ , применяя которые к исходным графам  $G$  и  $H$ , получаем множество графов, точнее, суграфов,  $\mathfrak{G} = (Z, \mathfrak{A})$ , где

$$Z = X \times Y,$$

$\mathfrak{A}$  — множество отображений, определяемое выражением

$$\mathfrak{A}(z) = (Fx \times \mathfrak{F}(Y)) \cup (\mathfrak{F}(X) \times Py), \quad (3.33)$$

причем  $z \in Z$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $z = (x, y)$ , а  $\mathfrak{F}(X)$ ,  $\mathfrak{F}(Y)$  — соответственно множества подмножеств множеств  $X$  и  $Y$ .

Из (3.33) следует, что различные алгебраические операции из  $A$  отличаются друг от друга отображениями или, другими словами, выбором элементов из  $\mathfrak{F}(X)$  и  $\mathfrak{F}(Y)$ .

Если  $X' \in \mathfrak{P}(X)$  и  $Y' \in \mathfrak{P}(Y)$  — произвольные подмножества множеств  $X$  и  $Y$ , то они определяют произвольную операцию, обозначаемую через  $\circ \in A$ , которая двум графам  $G$  и  $H$  ставит в соответствие граф  $Q = G \circ H$ , причем  $Q = (Z, A)$ , где

$$\begin{aligned} Z &= X \times Y, \\ Az &= (Fx \times Y') \cup (X' \times Py). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Множество операций объединяющего типа можно обобщить на случай  $n$  графов. Если  $G_1 = (X_1, F_1)$ ,  $G_2 = (X_2, F_2)$ , ...,  $G_n = (X_n, F_n)$  — произвольные графы, то множеством операций объединяющего типа будем называть множество операций, применяя которые к графам  $G_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , получаем множество графов  $\mathfrak{G} = (X, \mathfrak{F})$ , причем множества  $X$  и  $\mathfrak{F}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \\ \mathfrak{F}(x) &= (F_1 x_1 \times \mathfrak{P}(X_2) \times \dots \times \mathfrak{P}(X_n)) \cup \\ &\quad \cup (\mathfrak{P}(X_1) \times F_2 x_2 \times \dots \times \mathfrak{P}(X_n)) \cup \dots \\ &\quad \dots \cup (\mathfrak{P}(X_1) \times \mathfrak{P}(X_2) \times \dots \times F_n x_n), \end{aligned}$$

где  $x \in X$ ,  $x_1 \in X_1$ ,  $x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а  $\mathfrak{P}(X_1), \mathfrak{P}(X_2), \dots, \mathfrak{P}(X_n)$  — соответственно множества подмножеств множеств  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Выбирая произвольные подмножества  $X'_1 \in \mathfrak{P}(X_1)$ ,  $X'_2 \in \mathfrak{P}(X_2)$ , ...,  $X'_n \in \mathfrak{P}(X_n)$ , задаем произвольную операцию из данного множества операций, которая графам  $G_i$  ставит в соответствие граф  $G = (X, F)$ , обозначаемый через  $G = G_1 \circ G_2 \circ \dots \circ G_n$ . Множество  $X$  и отображение  $F$  имеют вид

$$\begin{aligned} X &= \prod_{i \in I} X_i, \\ Fx &= (F_1 x_1 \times X'_2 \times \dots \times X'_n) \cup (X'_1 \times F_2 x_2 \times \dots \times X'_n) \cup \dots \\ &\quad \dots \cup (X'_1 \times X'_2 \times \dots \times F_n x_n). \end{aligned}$$

Выделим из множества  $A$  ряд операций, которые обычно используются для преобразования графов.

В дальнейшем для краткости будем определять алгебраические операции объединяющего типа только с помощью отображений, учитывая, что множество вершин для различных операций остается одним и тем же.

Пусть  $Y' = \emptyset$  и  $X' = \emptyset$ . Тогда получаем операцию, определяемую выражением

$$Cz = (Fx \times \emptyset) \cup (\emptyset \times Py) = \emptyset,$$

которая любым двум графам  $G$  и  $H$  сопоставляет граф с пустым отображением  $Q = (Z, \emptyset)$ .

Выбирая  $y \in \mathfrak{P}(Y)$ , а  $x \in \mathfrak{P}(X)$ , получим отображение

$$Rz = (Fx \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Py),$$

которое определяет известную операцию суммирования графов.

В том случае, когда выбираем  $Py \in \mathfrak{P}(Y)$ , а  $Fx \in \mathfrak{P}(X)$ , приходим к операции умножения, определяемой выражением

$$Uz = Fx \times Py.$$

Если взять  $Y \in \mathfrak{P}(Y)$ , а  $X \in \mathfrak{P}(X)$ , то получаем операцию композиции

$$Tz = (Fx \times Y) \cup (X \times Py).$$

Наконец, если  $Y' \in \mathfrak{P}(Y)$ , а  $X' \in \mathfrak{P}(X)$ , причем  $Y' \subseteq Py$ , а  $X' \subseteq Fx$ , то операцию, определяемую выражением

$$Az = (Fx \times Y') \cup (X' \times Py),$$

будем называть *квазисуммирующей* операцией, а для  $Y'' \in \mathfrak{P}(Y)$ ,  $X'' \in \mathfrak{P}(X)$  таких, что  $Py \subseteq Y''$ , а  $Fx \subseteq X''$ , операцию

$$Az = (Fx \times Y'') \cup (X'' \times Py)$$

назовем операцией *квазикомпозиционного* типа.

Рассмотрим основные свойства операций объединяющего типа. Пусть  $\circ$  — произвольная алгебраическая операция из  $\mathfrak{A}$ , определяемая отображением  $A \in \mathfrak{A}$ , а  $G = (X, F)$ ,  $H = (Y, P)$ ,  $Q = (Z, S)$  — произвольные графы.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$G \circ H \sim H \circ G \text{ (коммутативность),} \quad (3.35)$$

$$(G \circ H) \circ Q = G \circ (H \circ Q) = G \circ H \circ Q \text{ (ассоциативность),} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} G \circ (H \cup Q) &= (G \circ H) \cup (G \circ Q) \\ G \circ (H \cap Q) &= (G \circ H) \cap (G \circ Q) \end{aligned} \right\} \text{ (дистрибутивность).} \quad (3.37)$$

Соотношения (3.35) и (3.36) очевидны. Докажем выражение (3.37). Из (3.3) вытекает справедливость для множеств элементов графов. Для отображений можно записать

$$\begin{aligned} (Fx \times (Y' \cup Z')) \cup (X' \times (Py \cup Sz)) &= \\ &= (Fx \times Y') \cup (Fx \times Z') \cup (X' \times Py) \cup (X' \times Sz) = \\ &= (Fx \times Y') \cup (X' \times Py) \cup (Fx \times Z') \cup (X' \times Sz). \end{aligned}$$

Поэтому (3.37) доказано. Аналогично доказывается соотношение (3.38).

Определим множество алгебраических операций с множеством отображений  $\overline{\mathfrak{A}}$ , двойственных отображениям множества  $\mathfrak{A}$ . В дальнейшем черта над графом будет обозначать дополнение по отображению до соответствующего насыщенного графа, а над подмножеством — дополнение до соответствующего множества элементов графа. Тогда, учитывая (3.10), получим

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}}(x, y) &= \overline{(Fx \times \mathfrak{P}(Y)) \cup (\mathfrak{P}(X) \times Py)} = \\ &= \overline{(Fx \times \mathfrak{P}(Y))} \cap \overline{(\mathfrak{P}(X) \times Py)} = ((X \times Y) \setminus (Fx \times \mathfrak{P}(Y))) \cap \\ &\quad \cap ((X \times Y) \setminus (\mathfrak{P}(X) \times Py)) = \\ &= (((X \setminus Fx) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus \mathfrak{P}(Y)))) \cap \\ &\quad \cap (((X \setminus \mathfrak{P}(X)) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus Py))) = \\ &= ((\overline{Fx} \times Y) \cup (X \times \overline{Py})) \cap ((\overline{\mathfrak{P}(X)} \times Y) \cup (X \times \overline{Py})), \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{P}(\overline{X})$  и  $\mathfrak{P}(\overline{Y})$  — множество подмножеств множеств  $(X \setminus \mathfrak{P}(X))$  и  $(Y \setminus \mathfrak{P}(Y))$ , элементы которых образуются как разность между множествами  $X$  и  $Y$  и соответственно элементами из  $\mathfrak{P}(X)$  и  $\mathfrak{P}(Y)$ . Заменяя  $\overline{Fx}$  на  $Fx$  и  $\overline{Py}$  на  $Py$  и вводя обозначение

$$\mathfrak{B}(z) = ((Fx \times Y) \cup (X \times \mathfrak{P}(\overline{Y}))) \cap ((\mathfrak{P}(\overline{X}) \times Y) \cup (X \times Py)), \quad (3.39)$$

получаем множество отображений, определяющих множество алгебраических операций  $B$ , двойственных множеству операций  $A$ .

Если  $\bar{X}' = X \setminus X'$  и  $\bar{Y}' = Y \setminus Y'$  — произвольные множества из  $\mathfrak{P}(\bar{X})$  и  $\mathfrak{P}(\bar{Y})$ , то они определяют операцию  $\square \in B$ , которая графам  $G$  и  $H$  сопоставляет граф  $Q = G \square H$ , причем  $Q = (Z, B)$ , где

$$Z = X \times Y,$$

а

$$Bz = ((Fx \times Y) \cup (X \times \bar{Y}')) \cap ((\bar{X}' \times Y) \cup (X \times Py)). \quad (3.40)$$

Легко видеть, что для произвольной операции  $\square \in B$  справедливы свойства (3.35) — (3.38). Кроме того, из (3.34) и (3.40) вытекает, что

$$\overline{G \circ H} = \bar{G} \square \bar{H},$$

$$\overline{G \square H} = \bar{G} \circ \bar{H},$$

откуда, учитывая, что  $\bar{\bar{G}} = G$ , следует

$$G \circ H = \overline{\bar{G} \square \bar{H}},$$

$$G \square H = \overline{\bar{G} \circ \bar{H}}.$$

На основании этого можно утверждать, что справедлива следующая теорема двойственности.

**Теорема 3.1.** *Для любого графа  $M$ , выраженного через  $\circ, \square$ , других графов, дополнение  $M$  по отображению до насыщенного графа (т. е.  $\bar{M}$ ) может быть получено заменой исходных графов их дополнениями по отображению до соответствующих насыщенных графов и заменой операций  $\circ, \square$  в порядке их следования соответственно операциями  $\square, \circ$ .*

По аналогии с теоретико-множественными операциями для алгебраических операций объединяющего типа можно ввести понятие равенства, двойственного данному, однако надо помнить, что здесь дополнение по отображению берется не до универсального графа  $L$ , а до соответствующего насыщенного графа.

Пусть дано равенство  $K = N$  двух произвольных графов Бержа. Рассмотрим равносильное ему равенство

$\bar{K} = \bar{N}$ . Если заменить  $\bar{K}$  и  $\bar{N}$  выражениями, которые образуются применением теоремы 3.1, а затем в полученных выражениях входящие в них графы заменить их дополнениями по отображению и наоборот, то получим равенство, двойственное к  $K = N$ .

Определим операцию, двойственную операции умножения графов. Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$ . Тогда  $G \times H = Q = (Z, U)$ , где  $U \in \mathfrak{A}$ ,  $\times \in A$  и

$$Uz = Fx \times Py.$$

Подставляя в (3.40)  $\bar{F}x$  и  $\bar{P}y$ , получаем выражение

$$\bar{U}z = ((\bar{F}x \times Y) \cup (X \times \bar{P}y)) \cap ((\bar{F}x \times Y) \cup (X \times \bar{P}y)),$$

которое соответствует операции композиции дополнений по отображению исходных графов

$$Tz = (\bar{F}x \times Y) \cup (X \times \bar{P}y).$$

Поэтому  $T \in \mathfrak{B}$  и  $\circ \in B$ . С другой стороны, определяя операцию, двойственную композиции, получим операцию умножения дополнений по отображению исходных графов, т. е. из  $T \in \mathfrak{A}$  и  $\circ \in A$  следует  $\bar{T} = U$ ,  $U \in \mathfrak{B}$  и  $\times \in B$ .

Таким образом, операции умножения и композиции графов являются замечательными операциями и принадлежат как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ .

В связи с этим докажем два соотношения (3.43) и (3.44), которые справедливы лишь для операций умножения и композиции.

Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два произвольных графа, а  $\bar{G} = (X, \bar{F})$  и  $\bar{H} = (Y, \bar{P})$  — соответственно их дополнения по отображению. Применим к графам  $G$  и  $H$  операцию  $E \in \mathfrak{A}$ , определяемую выбором множеств  $(Y \setminus Py) \in \mathfrak{F}(Y)$  и  $(X \setminus Fx) \in \mathfrak{F}(X)$ . Тогда, учитывая (3.5), можно записать

$$\begin{aligned} Ez &= (Fx \times (Y \setminus Py)) \cup ((X \setminus Fx) \times Py) = \\ &= ((Fx \times Y) \setminus (Fx \times Py)) \cup ((X \times Py) \setminus (Fx \times Py)) = \\ &= ((Fx \times Y) \cup (X \times Py)) \setminus (Fx \times Py). \end{aligned} \quad (3.41)$$

С другой стороны, так как  $Y \setminus Py = \bar{P}y$  и  $X \setminus Fx = \bar{F}x$ , то

$$Ez = (Fx \times \bar{P}y) \cup (\bar{F}x \times Py). \quad (3.42)$$

Приравнивая (3.41) и (3.42) и учитывая, что для произвольных множеств  $X$  и  $X'$  справедливо  $(X \setminus X') \cup X' = X$ , получаем

$$(Fx \times Y) \cup (X \times Py) = (Fx \times \bar{P}y) \cup (\bar{F}x \times Py) \cup (Fx \times Py).$$

Переходя к графам, запишем

$$G \circ H = (G \times H) \cup (G \times \bar{H}) \cup (\bar{G} \times H). \quad (3.43)$$

Используя теорему 3.1 и применяя правило двойственности для теоретико-множественных операций, получим выражение

$$G \times H = (G \circ H) \cap (G \circ \bar{H}) \cap (\bar{G} \circ H), \quad (3.44)$$

двойственное (3.43).

Остановимся теперь коротко на множестве операций суперпозиционного типа. Пусть  $G = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — два произвольных графа, где  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ . Множеством операций суперпозиционного типа будем называть множество операций  $\mathfrak{T}$ , применяя которые к графам  $G$  и  $H$ , получаем множество суграфов  $\mathfrak{R} = (Z, \mathfrak{R})$ , где  $Z$  — декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$ , а  $\mathfrak{R}$  — множество отображений, определяемое формулой

$$\mathfrak{R}(z) = \bigcup_{i \in I} (F^{(i)}x \times \mathfrak{R}(Py)). \quad (3.45)$$

В выражении (3.45)  $\mathfrak{R}(Py)$  — множество разбиений множества  $Py$ , каждое из которых (разбиение) содержит точно  $n$  классов.

Так как в общем случае эти операции не удовлетворяют закону коммутативности, то можно говорить о множестве операций суперпозиционного типа графов  $H$  и  $G$ , взятых в обратном порядке. Тогда множество отображений  $\mathfrak{S}$  имеет вид

$$\mathfrak{S}(z) = \bigcup_{i \in J} (P^{(i)}y \times \mathfrak{R}(Fx)),$$

где  $\mathfrak{R}(Fx)$  — множество разбиений  $Fx$  на  $m$  классов.

Если  $\bigcup_{i \in I} P_i y$  — произвольное разбиение  $Py$  на  $n$  классов, то оно определяет произвольную операцию

$\diamond \in T$ , которая графам  $G$  и  $H$  сопоставляет граф  $G \diamond H = Q = (Z, S)$ , где

$$Sz = \bigcup_{i \in I} (F^{(i)}x \times P_i y).$$

Вообще говоря, произвольная операция суперпозиционного типа  $\diamond \in T$  не ассоциативна, не коммутативна и не дистрибутивна относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения графов. Это понятие операции суперпозиционного типа слишком широко, чтобы его можно было использовать для преобразования графов.

Если разбиения на классы отображений элементов графов выбирать не произвольно, а определенным образом, например, так, как это делается в случае автоматов (см. гл. VII, § 3), то такая операция из  $T$  удовлетворяет закону ассоциативности. Ее будем обозначать, как и прежде, через  $*$   $\in T$  и называть суперпозицией. По сути дела, именно эта операция рассматривалась в § 2. Все остальные операции  $\diamond \in T$  будем называть *квазисуперпозиционными* операциями.

Таким образом, для произвольных графов  $G, H, Q$  имеет место

$$(G * H) * Q = G * (H * Q).$$

Кроме того, можно показать, что выполняются следующие законы дистрибутивности:

$$G * (H \cup Q) = (G * H) \cup (G * Q),$$

$$G * (H \cap Q) = (G * H) \cap (G * Q).$$

На этом мы закончим изложение свойств операций объединяющего и суперпозиционного типов над графами Бержа.

#### § 4. Множество операций пересекающего типа

По аналогии с множеством операций объединяющего типа  $A$  можно рассматривать множество операций *пересекающего* типа  $A'$ . Множество отображений операций из  $A'$  определяется формулой

$$\mathfrak{E}(z) = (Fx \times \mathfrak{F}(Y)) \cap (\mathfrak{F}(X) \times Py), \quad (3.46)$$



а произвольная операция  $\Delta \in A'$  двум графам  $G$  и  $H$  ставит в соответствие граф  $Q' = G \Delta H$ , причем  $Q' = (Z, R)$ , где

$$Z = (X \times Y)$$

и

$$Rz = (Fx \times Y') \cap (X' \times Py). \quad (3.47)$$

Учитывая (3.6), выражение (3.46) представим в виде

$$\mathfrak{C}(z) = (Fx \cap \mathfrak{F}(X)) \times (\mathfrak{F}(Y) \cap Py).$$

Так как  $Fx \cap \mathfrak{F}(X)$  представляет собой множество подмножеств множества  $Fx$ , то обозначим его через  $\mathfrak{F}(Fx)$ . Аналогично введем  $\mathfrak{F}(Py)$ . Тогда

$$\mathfrak{C}(z) = \mathfrak{F}(Fx) \times \mathfrak{F}(Py). \quad (3.48)$$

Выбирая  $Fx \in \mathfrak{F}(Fx)$  и  $Py \in \mathfrak{F}(Py)$ , приходим к операции умножения графов

$$U(x, y) = Fx \times Py.$$

Очевидно, что произвольная операция из (3.48) определяет граф  $Q' = (Z, R)$ , который включается в граф  $Q = (Z, U)$ , т. е.  $G \Delta H \subseteq G \times H$ .

Рассмотрим множество операций, определяемых множеством отображений  $\overline{\mathfrak{C}}$ . Используя выражение (3.46), можно записать

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{C}}(z) &= (\overline{Fx} \times \mathfrak{F}(Y)) \cap (\mathfrak{F}(X) \times Py) = \\ &= (\overline{Fx} \times Y) \cup (X \times \mathfrak{F}(\overline{Y})) \cup (\mathfrak{F}(\overline{X}) \times Y) \cup (X \times \overline{Py}). \end{aligned}$$

Заменяя  $\overline{Fx}$  на  $Fx$  и  $\overline{Py}$  на  $Py$  и обозначая

$$\mathfrak{D}(z) = (Fx \times Y) \cup (X \times \mathfrak{F}(\overline{Y})) \cup (\mathfrak{F}(\overline{X}) \times Y) \cup (X \times Py), \quad (3.49)$$

получаем множество отображений, определяющих множество алгебраических операций  $B'$ , двойственных множеству операций  $A'$ .

Можно получить более прозрачную формулу для выражения (3.49), если использовать (3.48). Тогда

$$\overline{\mathfrak{C}}(z) = \overline{\mathfrak{F}(Fx) \times \mathfrak{F}(Py)} = (\mathfrak{F}(\overline{Fx}) \times Y) \cup (X \times \mathfrak{F}(\overline{Py}))$$

или

$$\mathfrak{D}(z) = (\mathfrak{F}(Fx) \times Y) \cup (X \times \mathfrak{F}(Py)). \quad (3.50)$$

Легко видеть из (3.50), что операция композиции, определяемая  $K \in \overline{\mathfrak{C}}$ , двойственна операции умножения

$U \in \mathfrak{G}$ , причем граф  $\bar{Q} = (Z, K)$  включается в граф  $\bar{Q}' = (Z, T)$ , т. е.  $\bar{G} \otimes \bar{H} \subseteq \bar{G} \nabla \bar{H}$ , где  $\nabla$  — произвольная операция из  $B'$ , определяемая отображением  $T \in \mathfrak{D}$ .

Можно показать, что для алгебраических операций из  $B'$  справедливы свойства (3.35) — (3.38) и теорема, подобная теореме 3.1. Кроме того, сравнивая (3.33) с (3.46), а (3.39) с (3.49), приходим к выводу, что  $A' \subset A$ , а  $B \subset B'$ .

## § 5. Представление алгебраических операций

Сейчас мы покажем, что различные алгебраические операции из множеств операций объединяющего, пересекающего и двойственных им типов можно представлять через другие операции из соответствующих множеств операций. Под представлением операций понимается выражение данной операции через несколько в некотором смысле более простых или более сложных операций из того же множества операций. Разумеется, что термины «простая» или «сложная» операция условны. О сложности операции можно судить по отображению графа, получаемого в результате применения указанной операции к двум исходным графам. Чем сложнее операция, тем более результирующий граф приближается к насыщенному, и наоборот, чем проще операция, тем более результирующий граф приближается к графу с пустым отображением. Оказывается, что сложные операции можно представлять объединением простых операций, в то время как простые операции в некоторых случаях можно выражать пересечением сложных операций. Сформулируем и докажем теперь теоремы о представлении алгебраических операций объединяющего и пересекающего типов. Они используются при решении задач разложения произвольных графов по различным алгебраическим операциям.

*Теорема 3.2. Любую операцию объединяющего типа  $\circ \in A$  можно представить объединением двух или более операций из  $A$ , отличных от  $\circ$ .*

*Доказательство.* Запишем произвольную операцию, определяемую отображением  $A \in \mathfrak{A}$ :

$$Az = (Fx \times Y') \cup (X' \times Py),$$

где  $Y' \in \mathfrak{F}(Y)$ , а  $X' \in \mathfrak{F}(X)$ . Представим  $Y'$  объединением двух подмножеств  $Y' = Y_1 \cup Y_2$ . Тогда, учитывая (3.3), получим

$$Az = (Fx \times (Y_1 \cup Y_2)) \cup (X' \times Py) = \\ = (Fx \times Y_1) \cup (X' \times Py) \cup ((Fx \times Y_2) \cup (X' \times Py)) = A_1z \cup A_2z,$$

где  $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ . Далее, так как множества  $X'$  и  $Y'$  можно представить объединением элементов, т. е.  $X' = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}$  и  $Y' = \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \dots \cup \{y_m\}$ , где, допустим,  $m > n$ , то

$$Az = (Fx \times (\{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \dots \cup \{y_m\})) \cup \\ \cup ((\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}) \times Py) = \\ = ((Fx \times \{y_1\}) \cup (\{x_1\} \times Py)) \cup ((Fx \times \{y_2\}) \cup (\{x_2\} \times Py)) \cup \dots \\ \dots \cup ((Fx \times \{y_n\}) \cup (\{x_n\} \times Py)) \cup \dots \\ \dots \cup ((Fx \times \{y_m\}) \cup (\{x_n\} \times Py)) = \\ = A_1z \cup A_2z \cup \dots \cup A_nz \cup \dots \cup A_mz.$$

Очевидно, что  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_m \in \mathfrak{A}$ . Таким образом, теорема доказана.

**Теорема 3.3.** *Существует такая операция объединения типа  $\circ \in \mathfrak{A}$ , которую можно представить в виде пересечения двух или более операций из  $\mathfrak{A}$ , отличных от  $\circ$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\circ$  — некоторая операция из  $\mathfrak{A}$ , определяемая отображением

$$S(x, y) = (Fx \times Y'') \cup (X'' \times Py).$$

Если  $Y''$  можно выразить пересечением двух множеств, т. е.  $Y'' = Y_1 \cap Y_2$ , то, учитывая (3.4) и дистрибутивность  $\cup$  относительно  $\cap$ , можно записать

$$Sz = (Fx \times (Y_1 \cap Y_2)) \cup (X' \times Py) = \\ = ((Fx \times Y_1) \cup (X' \times Py)) \cap ((Fx \times Y_2) \cup (X' \times Py)) = S_1z \cap S_2z,$$

где  $S_1, S_2 \in \mathfrak{A}$ . В том случае, когда  $Y'' = Y_1 \cap Y_2$ , а  $X'' = X_1 \cap X_2$ , получаем

$$Sz = (Fx \times (Y_1 \cap Y_2)) \cup ((X_1 \cap X_2) \times Py) = \\ = ((Fx \times Y_1) \cup (X_1 \times Py)) \cap ((Fx \times Y_2) \cup (X_1 \times Py)) \cap \\ \cap ((Fx \times Y_1) \cup (X_2 \times Py)) \cap ((Fx \times Y_2) \cup (X_2 \times Py)) = \\ = S_1z \cap S_2z \cap S_3z \cap S_4z.$$

Наконец, при  $Y'' = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_k$ , а  $X'' = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_l$  можно показать, что

$$Sz = S_{1z} \cap S_{2z} \cap \dots \cap S_{klz},$$

причем  $S_1, S_2, \dots, S_{kl} \in \mathfrak{A}$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.4.** Любую операцию пересекающего типа  $\Delta \in A'$  можно представить объединением двух или более операций из  $A'$ , отличных от  $\Delta$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Delta$  — произвольная операция из  $A'$ , определяемая отображением  $R \in \mathfrak{G}$ :

$$Rz = (Fx \times Y') \cap (X' \times Py).$$

Представим  $Y'' = Y_1 \cup Y_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} Rz &= (Fx \times (Y_1 \cup Y_2)) \cap (X' \times Py) = \\ &= ((Fx \times Y_1) \cap (X' \times Py)) \cup (Fx \times Y_2) \cap (X' \times Py) = R_{1z} \cup R_{2z}. \end{aligned}$$

Выражая  $X' = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}$  и  $Y' = \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \dots \cup \{y_m\}$ , получаем

$$\begin{aligned} Rz &= (Fx \times (\{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \dots \cup \{y_m\})) \cap \\ &\quad \cap ((\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}) \times Py) = \\ &= ((Fx \times \{y_1\}) \cap (\{x_1\} \times Py)) \cup ((Fx \times \{y_1\}) \cap (\{x_2\} \times Py)) \cup \dots \\ &\quad \cup ((Fx \times \{y_m\}) \cap (\{x_n\} \times Py)) = R_{1z} \cup R_{2z} \cup \dots \cup R_{mnz}, \end{aligned}$$

где  $R_1, R_2, \dots, R_{mn} \in \mathfrak{G}$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.5.** Существует такая операция пересекающего типа  $\Delta \in A'$ , которую можно представить в виде пересечения двух или более операций из  $A'$ , отличных от  $\Delta$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Delta$  — некоторая операция, определяемая отображением

$$Kz = (Fx \times Y'') \cap (X'' \times Py),$$

где  $K \in \mathfrak{G}$ , причем выполняется условие  $Y'' = Y_1 \cap Y_2$  или  $X'' = X_1 \cap X_2$ . В этом случае получаем

$$\begin{aligned} Kz &= (Fx \times (Y_1 \cap Y_2)) \cap ((X_1 \cap X_2) \times Py) = \\ &= ((Fx \times Y_1) \cap (X_1 \times Py)) \cap ((Fx \times Y_2) \cap (X_2 \times Py)) = K_{1z} \cap K_{2z}. \end{aligned}$$

Если  $X'' = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_l$ , а  $Y'' = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_p$ , причем положим  $p > l$ , то

$$Kz = K_{1z} \cap K_{2z} \cap \dots \cap K_{lz} \cap \dots \cap K_{pz},$$

где, очевидно,  $K_1, K_2, \dots, K_l, \dots, K_p \in \mathfrak{G}$ . Тем самым теорема доказана.

В заключение параграфа сформулируем без доказательства теоремы для двойственных операций.

*Теорема 3.6. Любую операцию  $\square \in V(\nabla \in V')$ , двойственную операции объединяющего (пересекающего) типа, можно представить пересечением двух или более операций из  $V(V')$ , отличных от  $\square(\nabla)$ .*

*Теорема 3.7. Существует такая операция  $\square \in V(\nabla \in V')$ , двойственная операции объединяющего (пересекающего) типа, которую можно представить в виде объединения двух или более операций из  $V(V')$ , отличных от  $\square(\nabla)$ .*

Заметим, что аналогичные теоремы о представлении операций можно сформулировать для множества операций суперпозиционного типа, однако на этом мы не будем останавливаться.

## § 6. Преобразования матриц смежности графов. Операции над смешанными графами

До сих пор мы рассматривали теоретико-множественные и алгебраические операции над графами, заданными в аналитической форме. В некоторых случаях алгебраические операции над графами удобнее определять на языке преобразования матриц смежности графов. Особенно наглядно преимущество матричного языка перед аналитическим становится ощутимым при изучении алгебраических операций над смешанными графами. Кроме того, при формулировке критериев разложения графов по алгебраическим операциям приходится обращаться к различным видам матриц смежности графов, по которым легко получить соответствующее разложение графа по той или иной операции.

Матричный язык, определяющий алгебраические операции над графами, базируется на тензорном или прямом произведении матриц и операциях объединения и пересечения квадратных матриц одного и того же порядка. Остановимся более подробно на прямом произведении матриц, которое в дальнейшем будет играть важную роль.

Пусть  $R_1 = \|r_{ij}\|$ ,  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , и  $R_2 = \|r_{kl}\|$ ,  $k, l \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ , — произвольные квадратные ма-

трицы соответственно порядка  $n$  и  $m$ . Квадратная матрица  $R'$  порядка  $nm$  называется правым прямым произведением матриц  $R_1$  и  $R_2$  и обозначается  $R' = R_1 \times \cdot R_2 = \|r_{\alpha\beta}\|$ , где  $r_{\alpha\beta} = r_{ij} \cdot r_{kl}$ ,  $\alpha = (i, k)$ ,  $\beta = (j, l)$ ,  $\alpha, \beta \in A = I \times J = \{1, 2, \dots, nm\}$ , если индексы элементов  $r_{\alpha\beta}$  упорядочены в *лексикографическом* или *словарном* порядке, который определяется выражением

$$(\alpha < \beta) \leftrightarrow [(i < j) \& (k \leq l) \vee (i = j) \& (k < l)]. \quad (3.51)$$

Если индексы элементов  $r_{\alpha\beta}$  упорядочены в соответствии с выражением

$$(\alpha < \beta) \leftrightarrow [(i \leq j) \& (k < l) \vee (i < j) \& (k = l)], \quad (3.52)$$

то квадратная матрица  $R''$  порядка  $nm$  называется левым прямым произведением матриц  $R_1$  и  $R_2$  и обозначается  $R'' = R_1 \cdot \times R_2$ . Из (3.51) и (3.52) вытекает

$$R_1 \cdot \times R_2 = R_2 \cdot \times R_1.$$

В дальнейшем будем рассматривать только правое прямое произведение матриц, называть его прямым произведением и обозначать  $R = R_1 \times R_2$ .

Пусть  $R_1 = \|r_{ij}\|$  и  $R_2 = \|r_{kl}\|$  — матрицы смежности произвольных графов Бержа, т. е.  $r_{ij}, r_{kl} \in \{0, 1\}$ . Тогда элементы матрицы  $R$  определяются следующим образом:

$$r_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } r_{ij} = 1 \quad \text{и} \quad r_{kl} = 1, \\ 0, & \text{если } r_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad r_{kl} = 0. \end{cases}$$

Легко показать, что прямое произведение матриц удовлетворяет закону ассоциативности и коммутативно с точностью до переобозначения индексов элементов

$$\begin{aligned} (R_1 \times R_2) \times R_3 &= R_1 \times (R_2 \times R_3), \\ R_1 \times R_2 &\sim R_2 \times R_1. \end{aligned}$$

Определим теперь некоторые алгебраические операции над графами в матричной форме. Если  $R_G$  и  $R_H$  — матрицы смежности графов  $G$  и  $H$ , то матрица смежности  $R_Q$  графа  $Q = G \times H$  равна прямому произведению матриц

$$R_Q = R_G \times R_H. \quad (3.53)$$

Матрица смежности  $R_N$  графа  $N = G + H$  определяется выражением

$$R_N = (R_G \times E_H) \cup (E_G \times R_H), \quad (3.54)$$

где  $E_G$  и  $E_H$  — соответственно единичные матрицы порядка  $R_G$  и  $R_H$ , а матрица смежности  $R_K$  графа  $K = G \otimes H$  образуется по формуле

$$R_K = (R_G \times P_H) \cup (P_G \times R_H), \quad (3.55)$$

в которой  $P_G$  и  $P_H$  — матрицы порядка  $R_G$  и  $R_H$ , составленные из всех единиц. Так как в выражениях (3.54) и (3.55) производится объединение матриц одинаковых порядков, то применение этой операции не вызывает затруднений.

Что касается операции суперпозиции, то матричную форму записи можно определить следующим образом.

Пусть  $R_G = \|r_{ij}\|$ , где  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , — матрица смежности порядка  $n$ . Тогда матрица смежности  $R_M$  графа  $M = G * H$  по матрицам  $R_G$  и  $R_H$  находится из выражения

$$\begin{aligned} R_M &= (R_G^{(1)} \times R_{H1}) \cup (R_G^{(2)} \times R_{H2}) \cup \dots \cup (R_G^{(n)} \times R_{Hn}) = \\ &= \bigcup_{i \in I} (R_G^{(i)} \times R_{Hi}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

где  $R_G^{(i)} = x_i$  — столбец матрицы  $R_G$ , а  $R_{Hi}$  — такие матрицы (порядка  $R_H$ ), что  $\bigcup_{i \in I} R_{Hi} = R_H$ . Ясно, что матрицы  $R_{Hi}$

образуют разбиение матрицы  $R_H$  на подматрицы того же порядка. Это разбиение обязательно задается при нахождении матрицы  $R_M$ .

Покажем построение матриц смежности на примере графов, рассмотренных в § 2.

**Пример 3.5.** Матрицы смежности графов  $G$  и  $H$ , заданных в примере 3.1, равны

$$R_G = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|, \quad R_H = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Разбиение матрицы  $R_H$  на две подматрицы имеет вид

$$R_{H1} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad R_{H2} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Требуется найти матрицы смежности графов, соответствующих произведению, сумме, композиции и суперпозиции графов  $G$  и  $H$ .

Используя формулы (3.53)—(3.56), получаем матрицы смежности

$$R_Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R_N = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$R_K = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$R_M = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

которые определяют графы, показанные соответственно на рис. 3.2, 3.4—3.6.

Из примера 3.5 видно, что использование матричного языка приводит к более экономным методам получения



результатирующих графов по сравнению с аналитической формой задания операций.

Ясно, что множества операций объединяющего, пересекающего и суперпозиционного типов над графами можно определить в матричной форме. Покажем это на примере операций объединяющего типа.

Пусть  $R_G$  и  $R_H$  — матрицы смежности произвольных графов Бержа. Множество  $\mathfrak{R}$  матриц смежности, соответствующих применению множества операций объединяющего типа к матрицам  $R_G$  и  $R_H$ , определяется выражением

$$\mathfrak{R} = (R_G \times \mathfrak{F}(P_H)) \cup (\mathfrak{F}(P_G) \times R_H),$$

где  $\mathfrak{F}(P_G)$  и  $\mathfrak{F}(P_H)$  — соответственно множества подматриц матриц  $P_G$  и  $P_H$ . Если  $P'_G \in \mathfrak{F}(P_G)$  и  $P'_H \in \mathfrak{F}(P_H)$  — произвольные подматрицы, то они определяют произвольную матрицу смежности  $R \in \mathfrak{R}$ , задаваемую формулой

$$R = (R_G \times P'_H) \cup (P'_G \times R_H).$$

Аналогично можно определить множества операций пересекающего и суперпозиционного типов в матричной форме.

В заключение главы рассмотрим некоторые алгебраические операции над смешанными графами. Чтобы их определить в аналитической форме так, как, например, в случае теоретико-множественных операций, потребовалось бы ввести сложные операции над множествами ребер и специальные преобразования трехместных предикатов. Если использовать матрицы смежности, то, задав правила умножения над элементами  $\xi, \eta, \theta, \zeta$ , алгебраические операции над смешанными графами можно свести к известным преобразованиям матриц.

Определим результат умножения любых двух элементов из множества  $(\xi, \eta, \theta, \zeta, 0)$  следующим образом:

- 1)  $\xi \cdot 0 = \eta \cdot 0 = \theta \cdot 0 = \zeta \cdot 0 = 0$ ;
- 2)  $\xi \cdot \xi = \theta \cdot \xi = \zeta \cdot \xi = \xi, \quad \eta \cdot \xi = 0$ ;
- 3)  $\eta \cdot \eta = \theta \cdot \eta = \zeta \cdot \eta = \eta$ ;
- 4)  $\theta \cdot \theta = \zeta \cdot \theta = \theta$ ;
- 5)  $\zeta \cdot \zeta = \zeta$ .

Роль единичной матрицы  $E$  и матрицы из всех единиц  $P$ , которые используются при суммировании композиции, в случае смешанных графов играют следующие матрицы произвольных порядков:

$$E = \begin{pmatrix} \xi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \xi & \theta & \dots & \theta \\ \theta & \xi & \dots & \theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta & \theta & \dots & \xi \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (3.53)—(3.55) и учитывая введенное правило умножения элементов  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ , можно находить матрицы смежности графов, получаемых в результате умножения, суммирования и композиции двух или более смешанных графов. От матрицы смежности

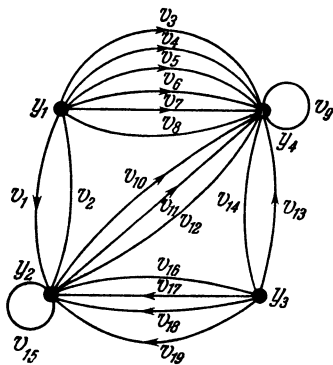


Рис. 3.8.

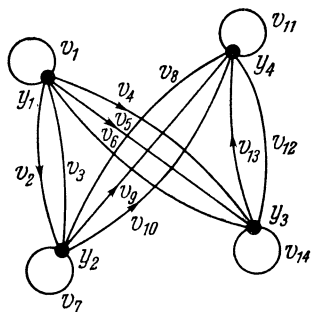


Рис. 3.9.

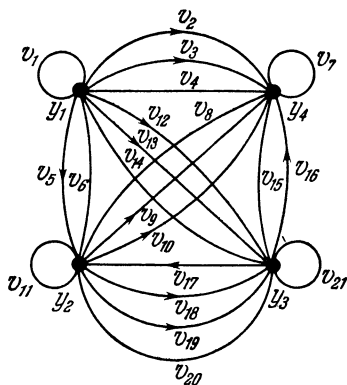


Рис. 3.10.

легко перейти к геометрической интерпретации смешанного графа, множество вершин которого равно произведению множеств вершин исходных графов, а множество ребер и инцидентор однозначно определяются по элементам матрицы смежности.

**Пример 3.6.** Пусть даны смешанные графы  $G_1 = (X_1, U_1, P_1)$  и  $G_2 = (X_2, U_2, P_2)$ , показанные соответственно на рис. 2.8, *a* и 2.9, *a*. Найти графы  $G = G_1 \times G_2$ ,  $H = G_1 + G_2$ ,  $Q = G_1 \otimes G_2$ , равные произведению, сумме и композиции графов  $G_1$  и  $G_2$ .

Вначале запишем матрицы смежности графов  $G_1$  и  $G_2$ , которые имеют вид

$$R_1 = \begin{vmatrix} \zeta & 2\xi + \theta \\ 2\eta + \theta & \zeta \end{vmatrix}, \quad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & \xi + \theta \\ \eta + \theta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Затем, учитывая правила 1—5, по формулам (3.53) — (3.55) находим матрицы смежности

$$R_G = \begin{vmatrix} 0 & \xi + \theta & 0 & 5\xi + \theta \\ \eta + \theta & \zeta & 2\xi + \eta + \theta & 2\xi + \theta \\ 0 & 2\eta + \xi + \theta & 0 & \xi + \theta \\ 5\eta + \theta & 2\eta + \theta & \eta + \theta & \zeta \end{vmatrix},$$

$$R_H = \begin{vmatrix} \zeta & \xi + \theta & 2\xi + \theta & 0 \\ \eta + \theta & \zeta & 0 & 2\xi + \theta \\ 2\eta + \theta & 0 & \zeta & \xi + \theta \\ 0 & 2\eta + \theta & \eta + \theta & \zeta \end{vmatrix},$$

$$R_Q = \begin{vmatrix} \zeta & \xi + \theta & 2\xi + \theta & 2\xi + \theta \\ \eta + \theta & \zeta & 2\xi + \eta + \theta & 2\xi + \theta \\ 2\eta + \theta & 2\eta + \xi + \theta & \zeta & \xi + \theta \\ 2\eta + \theta & 2\eta + \theta & \eta + \theta & \zeta \end{vmatrix}.$$

По матрицам  $R_G$ ,  $R_H$  и  $R_Q$  строим графы  $G$ ,  $H$  и  $Q$ , геометрическая интерпретация которых показана соответственно на рис. 3.8, 3.9 и 3.10.

## РАЗЛОЖЕНИЕ ГРАФОВ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫМ ОПЕРАЦИЯМ

### § 1. Постановка задачи разложения графов

Одной из важных проблем теории графов является проблема разложения сложных графов на более простые по различным операциям. Решение задачи разложения играет в теории графов такую же роль, какую в математической логике играет общая задача разложения булевых функций. Методы, применяемые для разложения графов, обобщаются на конечные автоматы (см. гл. VIII), что приводит к решению так называемой проблемы декомпозиции автоматов.

В этой главе излагается постановка задачи разложения графов в классе эквивалентности по отношению изоморфизма. Доказываются теоремы о необходимом и достаточном условии разложения графов по операциям умножения, суммирования, композиции и суперпозиции и приводятся алгоритмы разложения по указанным операциям. Формулируются теоремы и даются алгоритмы разложения графов по двум операциям — одной теоретико-множественной (объединение или пересечение) и одной алгебраической (умножение или композиция) операции. Кроме того, решается задача о минимальном дополнении неразложимых графов до разложимых по одной операции (умножение) и по двум операциям (объединение и умножение и др.).

В этом параграфе вначале вводится понятие о разложении графов на более простые по какой-либо операции, а затем формулируется постановка задачи разложения в терминах полугрупп и полуколец.

Обозначим через  $\mathfrak{G}$  множество графов Бержа, и пусть  $G$  — произвольный граф из  $\mathfrak{G}$ . Требуется определить, можно ли данный граф  $G$  представить произведением или, допустим, суммой более простых графов  $G_1$  и  $G_2$ , где  $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ , таких, что  $G_1 \times G_2 = G$  или  $G_1 + G_2 = G$ .

В этом случае задача разложения особого труда не представляет. Действительно, достаточно найти критерий разложения графа по соответствующей операции и тогда относительно любого графа  $G \in \mathfrak{G}$  можно сказать, разложим он по данной операции или нет.

Обобщим эту задачу на класс изоморфных графов. Пусть  $\mathfrak{R}(G)$  — множество графов, изоморфных графу  $G$ . Если  $G \in \mathfrak{G}$  — неразложимый граф, то среди всех графов, изоморфных  $G$ , надо определить, существует ли граф  $G' \in \mathfrak{R}(G)$ , который можно представить произведением или суммой графов  $G_1$  и  $G_2$ . Когда граф  $G'$  существует, необходимо найти такие  $G_1$  и  $G_2$ , что  $G_1 \times G_2 \sim \sim G$  или  $G_1 + G_2 \sim G$ . Теперь понятие разложения распространяется на множество графов, изоморфных графу  $G$ , и поиск разложимого графа ведется в классе эквивалентности по отношению изоморфизма. Это сразу усложняет задачу разложения, так как связывает ее с проблемой изоморфизма, решение которой, в свою очередь, требует большого перебора. В связи с этим задачу разложения графа  $G \in \mathfrak{G}$  по какой-либо операции можно условно разбить на две задачи:

а) найти критерий, по которому за небольшое число шагов можно определить, разложим ли граф  $G' \in \mathfrak{R}(G)$  (в частном случае  $G$ ) по указанной операции;

б) если граф  $G'$  разложим, то предложить метод, позволяющий находить графы  $G_1$  и  $G_2$ , на которые он разлагается по данной операции.

Сформулируем задачи разложения по одной и по двум операциям в терминах полугрупп и полуколец. В качестве операций выберем умножение и объединение графов.

Пусть  $G, H, Q$  — произвольные графы из  $\mathfrak{G}$ , а  $\times$  — операция умножения графов, заданная на множестве  $\mathfrak{G}$ . Тогда  $(\forall G, H, Q \in \mathfrak{G}) (\exists G^1 \in \mathfrak{G})$ , причем выполняются соотношения

$$(G \times H) \times Q = G \times (H \times Q),$$

$$G \times H \sim H \times G,$$

$$G \times G^1 \sim G^1 \times G \sim G,$$

где  $G^1$  — единичный граф. Поэтому множество  $\mathfrak{G}$  по операции умножения графов образует коммутативную с точ-

ностью до изоморфизма графов *полугруппу* с нейтральным элементом  $G^1$ , которую обозначим через  $\mathfrak{G}_\times$ . Из полугруппы можно выделить *подполугруппу*  $\Gamma_\times \subset \mathfrak{G}_\times$  графов, нетривиально разложимых по операции умножения. Под тривиальным подразумевается разложение  $G \sim G^1 \times G$ , которое справедливо для любого  $G \in \mathfrak{G}_\times$ . Тогда задача разложения произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}_\times$  в произведение графов  $G_1$  и  $G_2$  ставится как отыскание такого графа  $G' \in \mathfrak{R}(G)$ , который принадлежит  $\Gamma_\times$  и, следовательно,  $G' = G_1 \times G_2$ , причем  $G_1 \not\sim G \not\sim G_2$ . Вообще говоря, на графы  $G_1$  и  $G_2$  никаких ограничений, кроме указанного, не накладывается, поэтому задача разложения неоднозначна. Если  $G$  — разложимый граф, то обычно надо найти хотя бы одно разложение на графы  $G_1$  и  $G_2$  такие, чтобы  $G_1 \times G_2 \sim G$ .

Пусть  $\cup$  — операция объединения графов, заданная на множестве  $\mathfrak{G}$ . Известно, что  $(\forall G, H, Q \in \mathfrak{G}) (\exists \Lambda \in \mathfrak{G})$  и

$$(G \cup H) \cup Q = G \cup (H \cup Q),$$

$$G \cup H = H \cup G,$$

$$G \cup \Lambda = \Lambda \cup G = G,$$

где  $\Lambda$  — пустой граф. Следовательно, множество  $\mathfrak{G}$  по операции объединения графов является коммутативной полугруппой  $\mathfrak{G}_\cup$  с нейтральным элементом  $\Lambda$ . Кроме того, операции  $\cup$  и  $\times$  на  $\mathfrak{G}$  обладают свойствами

$$(G \cup H) \times Q = (G \times Q) \cup (H \times Q),$$

$$G \times (H \cup Q) = (G \times H) \cup (G \times Q),$$

$$G \times \Lambda = \Lambda \times G = \Lambda.$$

Если считать  $\cup$  аддитивной операцией, а  $\times$  — мультипликативной, то по этим двум операциям множество  $\mathfrak{G}$  является ассоциативным и коммутативным с точностью до изоморфизма графов *полукольцом*, которое обозначим через  $\mathfrak{G}_{\cup, \times}$ .

Из полукольца  $\mathfrak{G}_{\cup, \times}$  можно выделить *подполукольцо*  $\mathfrak{E}_{\cup, \times} \subset \mathfrak{G}_{\cup, \times}$  графов, каждый из которых разложим по двум операциям объединения и умножения графов. Задача разложения графа  $G \in \mathfrak{G}_{\cup, \times}$  по двум операциям сводится к нахождению критерия принадлежности графа  $G$  подполукольцу  $\mathfrak{E}_{\cup, \times}$  и построению алгоритма

разложения любого  $G \in \Xi_{U, X}$  в объединение произведений графов из  $\mathfrak{G}_{U, X}$ . Если  $G \in \Xi_{U, X}$ , то алгоритм позволяет отыскать такие графы  $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathfrak{G}_{U, X}$ , что  $G = (G_1 \times G_2) \cup \dots \cup (G_{k-1} \times G_k)$ .

Отметим, что если  $G \in \Gamma_X$ , то это влечет  $G \in \Xi_{U, X}$ , но обратное утверждение несправедливо. Поэтому граф, разложимый по операции умножения, заведомо разложим по двум операциям объединения и умножения.

Критерием принадлежности графа  $G \in \mathfrak{G}_X$  подполугруппе  $\Gamma_X$  фактически служит критерий разложения графа  $G$  в произведение графов из  $\mathfrak{G}_X$  (точнее говоря, существование такого критерия для изоморфного графа). Пусть  $G \in \mathfrak{G}_X$  — неразложимый граф, т. е. не существует такого  $G' \in \mathfrak{R}(G)$ , который принадлежит  $\Gamma_X$ . Тогда возникает следующая проблема, обобщающая задачу разложения графа: для неразложимого графа  $G$  надо найти *минимальный* надграф  $H(G \subseteq H)$  такой, что  $H \in \Gamma_X$ . Другими словами, задача сводится к отысканию минимального дополнения\*) графа  $G$  до разложимого графа  $H \in \Gamma_X$ . Аналогично, если  $G \in \mathfrak{G}_{U, X}$  — неразложимый граф, т. е.  $G \notin \Xi_{U, X}$ , то надо найти такой *минимальный* надграф  $H$ , чтобы  $H \in \Xi_{U, X}$ .

Таким образом, в общем случае можно говорить о разложении произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}$  по одной или по двум операциям на два или большее число графов из  $\mathfrak{G}$ , подразумевая, что для любого  $G$  можно найти граф  $H(G \subseteq H)$ , для которого такое разложение имеет место.

## § 2. Теорема разложения графа в произведение двух графов

Пусть  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$  — произвольные графы Бержа. Предположим, что граф  $G_1$  имеет  $k$  вершин, а граф  $G_2$  —  $l$  вершин. Обозначим их через  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ , и  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, l\}$  соответственно. Тогда граф  $G = (Z, U)$ , равный произведению графов  $G_1$  и  $G_2$ , содержит  $n = k \cdot l$  вершин, множество которых обозначим через  $Z = \{z_\alpha\}$ ,  $\alpha \in A = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Если  $R_1 = \|r_{i_1 i_2}\|$ ,  $i_1, i_2 \in I$ , и  $R_2 = \|r_{j_1 j_2}\|$ ,  $j_1, j_2 \in J$ , — соответственно матрицы смежности порядков  $k$  и  $l$  гра-

\*) Это понятие дополнения графа не надо смешивать с введенным в гл. II понятием дополнения по отображению.

фов  $G_1$  и  $G_2$ , то, как известно, матрица смежности  $R$  графа  $G$  будет иметь вид

$$R = R_1 \times R_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} r_{11} \cdot r_{11} & r_{11} \cdot r_{12} & \cdots & r_{11} \cdot r_{1l} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1k} \cdot r_{11} & r_{1k} \cdot r_{12} & \cdots & r_{1k} \cdot r_{1l} \\ r_{11} \cdot r_{21} & r_{11} \cdot r_{22} & \cdots & r_{11} \cdot r_{2l} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1k} \cdot r_{21} & r_{1k} \cdot r_{22} & \cdots & r_{1k} \cdot r_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{11} \cdot r_{l1} & r_{11} \cdot r_{l2} & \cdots & r_{11} \cdot r_{ll} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1k} \cdot r_{l1} & r_{1k} \cdot r_{l2} & \cdots & r_{1k} \cdot r_{ll} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k1} \cdot r_{11} & r_{k1} \cdot r_{12} & \cdots & r_{k1} \cdot r_{1l} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{kk} \cdot r_{11} & r_{kk} \cdot r_{12} & \cdots & r_{kk} \cdot r_{1l} \\ r_{k1} \cdot r_{21} & r_{k1} \cdot r_{22} & \cdots & r_{k1} \cdot r_{2l} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{kk} \cdot r_{21} & r_{kk} \cdot r_{22} & \cdots & r_{kk} \cdot r_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k1} \cdot r_{l1} & r_{k1} \cdot r_{l2} & \cdots & r_{k1} \cdot r_{ll} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{kk} \cdot r_{l1} & r_{kk} \cdot r_{l2} & \cdots & r_{kk} \cdot r_{ll} \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Разобьем матрицу  $R$  на  $k^2$  клеток, каждая из которых является квадратной матрицей  $R_{i_1 i_2}$  порядка  $l$ . Из (4.1) следует, что любая клетка  $R_{i_1 i_2} = r_{i_1 i_2} \cdot R_2$  матрицы  $R$  равна либо  $R_2$  (при  $r_{i_1 i_2} = 1$ ), либо нулевой матрице  $R_0$  (при  $r_{i_1 i_2} = 0$ ). Матрицу смежности вида (4.1), у которой все ненулевые клетки равны между собой, будем называть *правильной клеточной матрицей* (ПКМ).

Правильная клеточная матрица смежности графа  $G$ , по сути дела, служит *критерием разложения данного графа  $G$  в произведение двух графов* [316] и, следовательно, *критерием принадлежности  $G$  подполугруппе  $\Gamma_{\times}$* .

Если матрица смежности графа  $G$  не является ПКМ, то для того, чтобы определить, существует ли граф  $G' \sim G$ , который разложим по операции умножения, надо построить матрицы смежности всех графов, изоморфных графу  $G$ , и установить, существует ли среди них граф  $G'$  с ПКМ. Если такой граф существует, то считаем, что граф  $G \in \Gamma_{\times}$ . В противном случае после просмотра  $n!$  матриц смежности всех изоморфных графов устанавливаем, что  $G \notin \Gamma_{\times}$ , и, таким образом,  $G$  не разложим по операции умножения в произведение двух графов.



Легко видеть, что для построения всех изоморфных графов графа  $G$  требуется применить все подстановки симметрической группы подстановок множества вершин данного графа. Ясно, что алгоритм полного перебора пригоден для разложения графов с небольшим числом вершин. В случае большого  $n$  надо предложить прием, позволяющий просматривать не все подстановки, а только такие, которые учитывают особенности приведения матрицы смежности к правильному клеточному виду.

В связи с этим определим понятие разбиения множества вершин графа и докажем, что каждая подстановка может быть задана парой разбиений множества вершин. Ниже мы покажем, каким образом находить пары разбиений определенного вида, чтобы значительно сократить перебор для отыскания подстановки при разложении графа.

Пусть  $G = (V, S)$  — произвольный граф с  $n$  вершинами, причем  $n$  не является простым числом, например  $n = k \cdot l$ . Считаем, что множество вершин  $V = \{v_\alpha\}$  графа  $G$  упорядочено по индексам  $\alpha \in A = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Рассмотрим семейство  $\{V\} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  непересекающихся подмножеств множества  $V$ . Введем множество  $v = \{v_\beta\}$ , где  $\beta \in B = \{1, 2, \dots, m\}$ , и назовем его *разбиением* множества  $V$ , если установлено взаимно однозначное соответствие между  $\{V\}$  и  $v$ . После установления взаимно однозначного соответствия класс  $v_\beta$  разбиения  $v$  отождествляется с соответствующим ему подмножеством из  $\{V\}$ . Разбиения  $v'$  и  $v''$  будем считать отличными друг от друга, если они получены путем установления различных взаимно однозначных соответствий между  $\{V\}$  и  $v$ .

Обозначим через  $\pi = \{\pi_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$  такое разбиение  $V$ , в каждом классе  $\pi_i$  которого содержится  $l$  элементов  $v \in V$ , а через  $\rho = \{\rho_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, l\}$ , — разбиение, в каждом классе  $\rho_j$  которого содержится  $k$  элементов. Образует такую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, что пересечение любых двух классов разбиений  $\pi$  и  $\rho$  содержит единственный элемент  $v \in V$ , т. е. выполняется условие

$$(\forall i \in I) (\forall j \in J) (\pi_i \cap \rho_j = \{v\}). \quad (4.2)$$

Тогда справедливо следующее предложение.

Множество пар  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , удовлетворяющих условию (4.2), эквивалентно симметрической группе подстановок  $T$  множества  $V$ .

Доказательство. Покажем, что если задана некоторая пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , то она однозначно определяет подстановку  $t \in T$ , и наоборот, если задана некоторая подстановка  $t \in T$  множества  $V$ , то по ней можно найти одну пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , удовлетворяющую условию (4.2).

Пусть задана пара  $(\pi, \rho)$  разбиений, где  $\pi = \{\pi_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\rho = \{\rho_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, l\}$ , множества  $V = \{v_\alpha\}$ , упорядоченного по индексам  $\alpha \in A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Так как пара  $(\pi, \rho)$  разбиений удовлетворяет условию (4.2), то упорядоченность по индексам  $i \in I$  и  $j \in J$  классов разбиений  $\pi$  и  $\rho$  соответствует некоторой новой упорядоченности элементов  $V$ , отличной в общем случае от той, которая установлена индексами  $\alpha \in A$ . Определим эту новую упорядоченность лексикографическим образом. Тогда если  $\pi_{i_1} \cap \rho_{j_1} = \{v_\alpha\}$ , а  $\pi_{i_2} \cap \rho_{j_2} = \{v_\beta\}$ , то

$$(\alpha > \beta) \leftrightarrow (i_1 > i_2) \& (j_1 \leq j_2) \vee (i_1 = i_2) \& (j_1 > j_2), \quad (4.3)$$

где  $\alpha, \beta \in A$ ,  $i_1, i_2 \in I$  и  $j_1, j_2 \in J$ . Образы пересечения всех классов  $\pi_i$  и  $\rho_j$  разбиений  $\pi$  и  $\rho$  и упорядочивая элементы  $v \in V$  в соответствии с (4.3), получаем взаимно однозначное отображение множества  $V$  на себя, которое определяет искомую подстановку  $t \in T$ .

Пусть  $t \in T$  — произвольная подстановка множества  $V$ . Построим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , удовлетворяющую (4.2). Элемент  $v_\alpha \in V$ , образ которого  $v_\alpha \cdot t = v_1$ , отнесем к классу  $\pi_i$  разбиения  $\pi$  и классу  $\rho_1$  разбиения  $\rho$ . Элемент  $v_\beta \in V$ , образ которого  $v_\beta \cdot t = v_2$ , отнесем к классам  $\pi_1$  и  $\rho_2$  и т. д. Вообще, элемент  $v_\gamma \in V$  ( $\gamma \in A$ ), образ которого  $v_\gamma \cdot t = v_{(i-1)+j}$ , относим к классам  $\pi_i$  и  $\rho_j$  разбиений  $\pi$  и  $\rho$ . При  $i = k$  и  $j = l$  последний элемент  $v_n \in V$  поместим в класс  $\pi_k$  разбиения  $\pi$  и класс  $\rho_l$  разбиения  $\rho$ . Очевидно, что построенная пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , соответствующая подстановке  $t \in T$ , удовлетворяет условию (4.2). Этим наше предложение доказано.

Сформулируем теперь теорему разложения графа в произведение графов.

**Теорема 4.1.** *Для того чтобы граф  $G = (V, S)$  разлагался в произведение двух графов, необходимо и достаточно существование подстановки  $t \in T$  множества  $V$ , которая переводит матрицу смежности  $R$  графа  $G$  в правильную клеточную матрицу.*

Необходимость следует из определения операции умножения и понятия ПКМ смежности графа.

**Достаточность.** Предположим, что граф  $G = (V, S)$  удовлетворяет условию теоремы, т. е. существует подстановка  $t \in T$  или пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , которая переводит граф  $G$  в  $G'$  с ПКМ  $R'$ . Построим графы  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$  следующим образом. Обозначим классы  $\pi_i$  разбиения  $\pi$  через  $x_i$  и положим, что  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I$ , — множество вершин графа  $G_1$ , а классы  $\rho_j$  разбиения  $\rho$  через  $y_j$ , из которых образуется множество вершин  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in J$  графа  $G_2$ . Отображение  $F$  графа  $G_1$  определяется матрицей смежности  $R_1 = \|r_{i_1 i_2}\|$ , элементы которой получаются из матрицы  $R'$  по правилу

$$r_{i_1 i_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } R_{i_1 i_2} \neq R_0, \\ 0, & \text{если } R_{i_1 i_2} = R_0. \end{cases}$$

Матрица  $R_2 = \|r_{j_1 j_2}\|$ , которая совпадает с любой ненулевой клеткой порядка  $l$  матрицы  $R'$ , определяет отображение  $P$  графа  $G_2$ . Очевидно, что  $R_1 \times R_2 = R'$  и  $G_1 \times G_2 = G' \sim G$ . Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 4.1 вытекает критерий принадлежности произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}_\times$  подполугруппе  $\Gamma_\times$ . Если существует подстановка  $t \in T$  или пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества вершин графа  $G$ , переводящая  $R$  в ПКМ, то  $G \in \Gamma_\times$ . В противном случае  $G \notin \Gamma_\times$ .

Докажем теорему, которая позволяет сократить перебор по сравнению с полным при поиске разложения графа  $G$ .

**Теорема 4.2.** *Для определения принадлежности произвольного графа  $G = (V, S)$  с  $n = k \cdot l$  вершинами подполугруппе  $\Gamma_\times$  достаточно перебрать не более  $\frac{n!}{k!l!} - 1$  подстановок  $t$  симметрической группы  $T$  множества  $V$ .*

**Доказательство.** Пусть  $G = (V, S)$  — произвольный граф с  $n$  вершинами, причем  $n = k \cdot l$ . Предположим,

что  $V = X \times Y$ , где множества  $X$  и  $Y$  содержат соответственно  $k$  и  $l$  элементов. Обозначим через  $T_1$  и  $T_2$  симметрические группы подстановок множеств  $X$  и  $Y$ , а через  $t' \in T_1$  и  $t'' \in T_2$  — произвольные подстановки этих множеств. Рассмотрим подстановку  $t$  множества  $V$ , которая определяется парой подстановок  $(t', t'') \in T_1 \times T_2$  следующим образом:  $vt = (xt', yt'')$ , где  $v = (x, y)$  и  $v \in V$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Легко видеть, что множество пар  $(t', t'') \in T_1 \times T_2$  порождает подгруппу подстановок  $\tilde{T}$  симметрической группы  $T$  множества  $V$ . Поэтому  $\tilde{T} = T_1 \times T_2$  и любая подстановка  $t \in \tilde{T}$  может быть представлена парой  $t = (t', t'')$ , у которой  $t' \in T_1$  и  $t'' \in T_2$ .

Предположим, что  $G$  — граф, разложимый по операции умножения, однако его матрица смежности  $R$  не является ПКМ. Из этого следует, что существует граф  $G'$  ( $G' \sim G$ ), матрица  $R'$  которого является ПКМ, и что  $G$  получен из  $G'$  некоторой подстановкой  $t_1 \in T$  множества  $V$ . Нетрудно установить, что подстановка  $t_1 \in T$ , переводящая граф  $G'$  в граф  $G$ , не может принадлежать  $\tilde{T}$ . Действительно, из определения подгруппы  $\tilde{T}$  вытекает, что любая подстановка  $t \in \tilde{T}$  переводит граф  $G'$  в такой изоморфный граф  $G''$ , матрица смежности  $R''$  которого будет ПКМ. Поэтому  $t_1 \notin \tilde{T}$ .

В результате перебора надо отыскать такую подстановку  $t_2 \in T$ , что  $t_1 \cdot t_2 = t \in \tilde{T}$ . В частном случае  $t_2$  может совпадать с подстановкой, обратной  $t_1$ . Отсюда следует, что  $t_2 \notin \tilde{T}$ , ибо в противном случае получаем, что обратный элемент  $t_2^{-1} \in \tilde{T}$ . Тогда из  $t_1 = t \cdot t_2^{-1}$  и  $t \cdot t_2^{-1} \in \tilde{T}$  следует  $t_1 \in \tilde{T}$ , т. е. приходим к противоречию.

Если  $t_2 \in T$  — такая подстановка, что  $t_1 \cdot t_2 \notin \tilde{T}$ , то для всех подстановок  $t$  из класса  $t_2 \cdot \tilde{T}$  разложения группы  $T$  обязательно выполняется условие  $t_1 \cdot t \notin \tilde{T}$ , и следовательно, ни одна из подстановок  $t$  не переводит матрицу  $R$  графа  $G$  в ПКМ. Поэтому вместо всех подстановок  $t$  из  $t_2 \cdot \tilde{T}$  достаточно проверить только одну подстановку  $t_2 \in T$ , а все остальные подстановки не проверять. Затем выбираем подстановку  $t_3 \in T$  так, что  $t_3 \notin t_2 \cdot \tilde{T}$ , и проверяем, выполняется ли  $t_1 \cdot t_3 \in \tilde{T}$ . Если это условие не выполняется, то все подстановки  $t$  из класса  $t_3 \cdot \tilde{T}$  отбрасываем и т. д. Поскольку мы предположили,

что  $G$  — разложимый граф, то найдется такая подстановка  $t_p \in T$ , что  $t_1 \cdot t_p \in \bar{T}$  и любая подстановка  $t$  из класса  $t_p \cdot \bar{T}$  переведет матрицу  $R$  графа  $G$  в ПКМ. Различные подстановки  $t$  будут приводить к различным ПКМ, т. е. к изоморфным разложимым графам.

Предположим, что  $G$  — граф неразложимый по операции умножения. Тогда после перебора всех тех и только тех подстановок  $t \in T$ , а именно — по одной подстановке  $t$  из каждого класса  $t \cdot \bar{T}$  разложения группы  $T$  по подгруппе  $\bar{T}$ , за исключением класса подстановок  $t_0 \cdot \bar{T}$ , где  $t_0$  — тождественная подстановка, устанавливаем, что не существует подстановки, переводящей матрицу  $R$  графа  $G$  в ПКМ. Учитывая, что порядок группы  $T$  равен  $n!$ , а порядок подгруппы  $\bar{T}$  равен  $k!!!$ , получим верхнюю оценку числа применяемых подстановок, которая составляет

$$\frac{n! - k!!!}{k!!!}$$

в случае неразложимого графа. Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что в теореме 4.2 вместо подстановок  $t \in T$  можно рассматривать пары  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ . Действительно, если определены подмножества  $V$ , относящиеся к различным классам разбиений  $\pi$  и  $\rho$ , то различные варианты упорядоченности этих классов порождают множество подстановок  $t \cdot \bar{T}$ . Поэтому достаточно рассмотреть пару  $(\pi, \rho)$  разбиений с одной произвольной, но фиксированной нумерацией классов  $\pi_i$  и  $\rho_j$ , а остальные пары, получаемые из данной перенумерацией классов, не рассматривать. Пары  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , которые образуются из данной пары изменением нумерации классов, будем называть изоморфными, так как в случае разложения графа  $G$  на два графа  $G_1$  и  $G_2$  множество таких пар порождает графы, изоморфные  $G_1$  и  $G_2$ .

Рассмотрим построение пар  $(\pi, \rho)$  разбиений множества вершин произвольного графа на примере.

**Пример 4.1.** Пусть дан граф  $G$ , множество вершин которого  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , а матрица смежности  $R$  не является ПКМ. Требуется построить множество пар  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , определяющее множество подстановок  $t \in T$ , которые надо применить к мат-

рице  $R$ , чтобы установить, принадлежит ли граф  $G$  подполугруппе  $\Gamma \times$  или нет.

По теореме 4.2 достаточно проверить не более  $\frac{4!}{2!2!} - 1 = 5$  пар  $(\pi, \rho)$  разбиений или подстановок  $t \in T$ , в то время как по алгоритму полного перебора получаем  $4! = 24$  подстановки или пары разбиений множества  $V$ . Допустим, что  $G$  — неразложимый граф. Тогда требуется найти все пять пар  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$  и построить подстановки, которые надо применить к матрице  $R$ .

Найдем указанные пары  $(\pi, \rho)$  разбиений следующим образом. Вначале строим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, соответствующую тождественной подстановке

$$t_0 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix},$$

которую не надо применять к матрице  $R$ , так как уже известно, что  $R$  не является ПКМ. Такое построение делается для того, чтобы от этой пары  $(\pi, \rho)$  разбиений сразу перейти к паре  $(\pi, \rho)$  разбиений, определяющей подстановку, не принадлежащую классу  $t_0 \cdot T$ .

Так как  $n = 4 = 2 \cdot 2$ , то начальная пара  $(\pi, \rho)$  разбиений содержит два класса в каждом разбиении. Обозначим их следующим образом:

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2\}, \quad \rho = \{\rho_1, \rho_2\}.$$

По определению разбиения строим классы  $\pi_i$  и  $\rho_j$  с учетом условия (4.2). Получаем

$$\pi_1 = \{v_1, v_2\}, \quad \pi_2 = \{v_3, v_4\}, \quad \rho_1 = \{v_1, v_3\}, \quad \rho_2 = \{v_2, v_4\}. \quad (4.4)$$

Ясно, что попарное пересечение классов  $\pi$  и  $\rho$  разбиений определяет подстановку  $t_0$ . Действительно,

$$\pi_1 \cap \rho_1 = \{v_1\}, \quad \pi_1 \cap \rho_2 = \{v_2\}, \quad \pi_2 \cap \rho_1 = \{v_3\}, \quad \pi_2 \cap \rho_2 = \{v_4\}.$$

Используя (4.4), строим первую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, которая отличается от (4.4) классами  $\rho$  разбиения. Имеем

$$\pi_1 = \{v_1, v_2\}, \quad \pi_2 = \{v_3, v_4\}, \quad \rho_1 = \{v_1, v_4\}, \quad \rho_2 = \{v_2, v_3\},$$

попарное пересечение которых эквивалентно подстановке

$$t_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем остальные пары  $(\pi, \rho)$  разбиений

$$\pi_1 = \{v_1, v_3\}, \quad \pi_2 = \{v_2, v_4\}, \quad \rho_1 = \{v_1, v_2\}, \quad \rho_2 = \{v_3, v_4\},$$

$$\pi_1 = \{v_1, v_3\}, \quad \pi_2 = \{v_2, v_4\}, \quad \rho_1 = \{v_2, v_3\}, \quad \rho_2 = \{v_1, v_4\},$$

$$\pi_1 = \{v_1, v_4\}, \quad \pi_2 = \{v_2, v_3\}, \quad \rho_1 = \{v_1, v_2\}, \quad \rho_2 = \{v_3, v_4\},$$

$$\pi_1 = \{v_1, v_4\}, \quad \pi_2 = \{v_2, v_3\}, \quad \rho_1 = \{v_1, v_3\}, \quad \rho_2 = \{v_2, v_4\},$$

которые соответственно определяют следующие подстановки множества  $V$ :

$$t_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_3 & v_2 & v_4 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_1 & v_2 & v_4 \end{pmatrix},$$

$$t_4 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_4 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \quad t_5 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_4 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

В результате перебора получили подстановки  $t_1, \dots, \dots, t_5 \in T$ , которые, как предполагаем, перевели матрицу смежности  $R$  графа  $G$  в неправильную клеточную матрицу. Образует подстановки  $t_1^{-1}, \dots, t_5^{-1} \in T$ , обратные  $t_1, \dots, t_5$ , и применим их к матрице  $R$ . Поскольку мы условились, что  $G$  — неразложимый граф, то ни одна из подстановок  $t_i^{-1}$  не переведет матрицу смежности  $R$  в ПКМ. Поэтому  $G \notin \Gamma_{\times}$ . Если предположим, что  $G$  — разложимый граф, то в результате применения некоторой подстановки  $t_i^{-1} \in T$  к матрице  $R$  получим ПКМ  $R'$  и, следовательно, представим граф  $G' \sim G$  произведением двух графов.

Таким образом, на основании теоремы 4.2 можно утверждать, что для установления принадлежности произвольного графа  $G \in \mathcal{G}_{\times}$  подполугруппе  $\Gamma_{\times}$  достаточно ограничиться существенно меньшим перебором по сравнению с полным. Однако при больших  $n$  применение сокращенного перебора приводит к большим трудностям из-за быстрого роста числа подстановок. Поэтому даль-

нейшее сокращение перебора при решении задачи разложения графов в некоторых случаях достигается за счет использования различных *эвристических* приемов. Опишем один из таких методов.

Пусть  $G = (V, S)$  — разложимый граф. Для каждого  $v_\alpha \in V$ ,  $\alpha \in A$ , запишем пару  $(s_\alpha, p_\alpha)$ , где  $s_\alpha$  — полустепень исхода, а  $p_\alpha$  — полустепень захода элемента  $v_\alpha$ . Так как  $V = X \times Y$ , то для любого элемента  $v_\alpha = (x_i, y_j)$  можно образовать множества возможных разложений чисел  $s_\alpha$  и  $p_\alpha$  на два множителя:

$$s_\alpha = s(v_\alpha) = s(x_i, y_j) = s(x_i) \cdot s(y_j) = s_{1\alpha} \cdot s_{2\alpha},$$

$$p_\alpha = p(v_\alpha) = p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j) = p_{1\alpha} \cdot p_{2\alpha}.$$

Пусть  $v_\alpha, v_\beta \in V$ . Элементы  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  будем относить к соответствующим классам  $\pi_i$  и  $\rho_j$  пары  $(\pi, \rho)$  разбиений, если среди множеств всех возможных разложений чисел  $s_\alpha, s_\beta$  и  $p_\alpha, p_\beta$  на два множителя существуют такие фиксированные разложения  $(s_{1\alpha} \cdot s_{2\alpha})$ ,  $(s_{1\beta} \cdot s_{2\beta})$  и  $(p_{1\alpha} \cdot p_{2\alpha})$ ,  $(p_{1\beta} \cdot p_{2\beta})$ , для которых выполняются соотношения

$$(s_{1\alpha} = s_{1\beta}) \& (p_{1\alpha} = p_{1\beta}) \rightarrow (v_\alpha, v_\beta \in \pi_i), \quad (4.5)$$

$$(s_{2\alpha} = s_{2\beta}) \& (p_{2\alpha} = p_{2\beta}) \rightarrow (v_\alpha, v_\beta \in \rho_j), \quad (4.6)$$

$$\sum_{\alpha \in A} s_{1\alpha} = \sum_{\alpha \in A} p_{1\alpha}, \quad \sum_{\alpha \in A} s_{2\alpha} = \sum_{\alpha \in A} p_{2\alpha}. \quad (4.7)$$

Таким образом, для построения пары  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$  поступаем следующим образом. Записываем числа  $s$  и  $p$  всех элементов  $V$  и образуем множества возможных разложений этих чисел на два множителя  $(s_1 \cdot s_2)$  и  $(p_1 \cdot p_2)$ . Из этих множеств выбираем по одному фиксированному разложению так, чтобы для образующихся наборов выполнялось (4.7). Затем для построения класса  $\pi_i$  разбиения  $\pi$  берем такие элементы  $v_\alpha$  и  $v_\beta$ , для которых совпадают первые множители  $(s_{1\alpha} = s_{1\beta}$  и  $p_{1\alpha} = p_{1\beta})$  в разложениях чисел  $s_\alpha, s_\beta$  и  $p_\alpha, p_\beta$ , а для образования класса  $\rho_j$  разбиения  $\rho$  выбираем элементы  $v_\alpha$  и  $v_\beta$ , у которых совпадают вторые множители в разложениях  $(s_{2\alpha} = s_{2\beta}$  и  $p_{2\alpha} = p_{2\beta})$ , т. е. добиваемся выполнения соотношений (4.5), (4.6). Пример разложения графа будет приведен в следующем параграфе после формулировки алгоритма разложения.



Оценим теперь число графов, представимых произведением двух графов среди общего числа графов, имеющих  $n = k \cdot l$  вершин. Точную оценку, к сожалению, получить не удастся. Однако приближенно это число можно оценить, основываясь на следующих рассуждениях.

Пусть  $G = (X, F)$  — произвольный граф с  $n$  вершинами. Из теоремы 2.1 следует, что число графов с  $n$  вершинами, включая изоморфные графы, не превышает величины  $\Phi = 2^{n^2}$ . Обозначим число графов, разложимых по операции умножения, через  $\psi$ . Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.3.**

$$\frac{e^{k+l-n}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{k^2+l^2} \frac{n^n}{k^k \cdot l^l} < \psi < \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} 2^{k^2+l^2} \cdot n^n.$$

**Доказательство.** Из определения операции умножения графов и теоремы 2.1 следует, что из общего числа графов  $\Phi$  с  $n = k \cdot l$  вершинами можно выделить  $2^{k^2} \cdot 2^{l^2}$  графов с правильными клеточными матрицами смежности. Если предположить, с одной стороны, что каждый из этих графов является представителем изоморфного класса графов, то получаем

$$\psi < 2^{k^2+l^2} \cdot n!.$$

С другой стороны, если из числа  $2^{k^2+l^2} \cdot n!$  графов заведомо исключить изоморфные, то получим

$$\psi > \frac{2^{k^2+l^2} \cdot n!}{k!l!}.$$

Применяя формулу Стирлинга для факториала, которая имеет вид

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} n^n,$$

приходим к оценке, указанной в теореме 4.3.

### § 3. Алгоритм разложения графа по операции умножения

Пусть дан произвольный граф  $G = (V, S)$ . Эвристический алгоритм разложения графа  $G$  в произведение двух графов можно сформулировать следующим образом.

1°. Подсчитываем число вершин  $n$  графа  $G$ . Если  $n$  можно представить в виде  $n = k \cdot l$ , то переходим к 2°. Если  $n$  — простое число, то переходим к 8°.

2°. Записываем матрицу смежности  $R$  графа  $G$  и разбиваем ее на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Если  $R$  — правильная клеточная матрица, то переходим к 7°. Если  $R$  не является правильной клеточной матрицей, то переходим к 3°.

3°. Для каждой вершины  $v \in V$  определяем пару чисел  $(s, p)$ . образуем множества возможных разложений чисел  $s$  и  $p$  на два множителя. Переходим к 4°.

4°. Из множеств разложений чисел  $s$  и  $p$  каждой вершины выбираем по одному фиксированному разложению так, чтобы выполнялись соотношения (4.5) — (4.7). Получаем пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ . Переходим к 5°. Если указанной пары  $(\pi, \rho)$  разбиений не существует, то переходим к 8°.

5°. По найденной паре  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$  записываем подстановку  $t \in T$ . Обратную подстановку  $t^{-1} \in T$  применяем к матрице  $R$ . Если получаем правильную клеточную матрицу, то переходим к 7°. В противном случае к 6°.

6°. Строим новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , удовлетворяющую соотношениям (4.5) — (4.7). Переходим к 5°. Если нельзя образовать новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, то переходим к 8°.

7°. По правильной клеточной матрице строим матрицы смежности  $R_1$  и  $R_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  так, как это показано в теореме 4.1.

8°. Граф  $G$  не разложим в произведение двух графов.

Работу алгоритма покажем на примере.

Пример 4.2. Пусть дан граф  $G = (V, S)$ , геометрическая интерпретация которого показана на рис. 4.1. Установим, разложим ли граф  $G$  по операции умножения. Если  $G$  — разложимый граф, то представим его произведением двух графов.

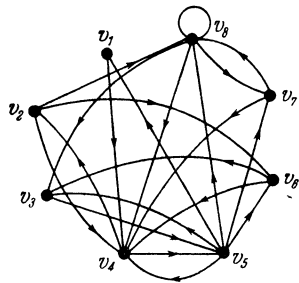


Рис. 4.1.

Так как  $n = 8$ , то положим  $k = 2$ ,  $l = 4$ . Запишем матрицу смежности  $R$  графа  $G$  и разобьем ее на четыре клетки. Имеем

$$R = \begin{array}{|cccc|cccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

откуда видно, что она не является ПКМ. Будем искать пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , которая вводит новую упорядоченность  $V$  таким образом, что матрица  $R$  преобразуется в ПКМ.

Выпишем числа  $s$  и  $p$  для каждой вершины  $v \in V$  и образуем множества возможных разложений этих чисел на два множителя. Получим

$$\begin{array}{l} v_1 \left| s_1 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \right. \\ v_2 \left| s_2 = 3 = \underline{1 \cdot 3}, \underline{3 \cdot 1}, \right. \\ v_3 \left| s_3 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \right. \\ v_4 \left| s_4 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \right. \\ v_5 \left| s_5 = 6 = \underline{1 \cdot 6}, \underline{6 \cdot 1}, \underline{2 \cdot 3}, \underline{3 \cdot 2}, \right. \\ v_6 \left| s_6 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \right. \\ v_7 \left| s_7 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \right. \\ v_8 \left| s_8 = 4 = \underline{1 \cdot 4}, \underline{4 \cdot 1}, \underline{2 \cdot 2}, \right. \\ p_1 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ p_2 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ p_3 = 3 = \underline{1 \cdot 3}, \underline{3 \cdot 1}, \\ p_4 = 6 = \underline{1 \cdot 6}, \underline{6 \cdot 1}, \underline{2 \cdot 3}, \underline{3 \cdot 2}, \\ p_5 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \\ p_6 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \\ p_7 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \\ p_8 = 4 = \underline{1 \cdot 4}, \underline{4 \cdot 1}, \underline{2 \cdot 2}. \end{array}$$

Из этих множеств выбираем по одному фиксированному разложению, для которых выполняются соотношения (4.5)—(4.7). Эти разложения подчеркнуты одной чертой снизу. Пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ , построенная в соответствии с подчеркнутыми разложениями, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, \\ \pi_1 &= \{v_4, v_5, v_6, v_8\}, & \pi_2 &= \{v_1, v_2, v_3, v_7\}, \\ \rho_1 &= \{v_1, v_6\}, & \rho_2 &= \{v_3, v_4\}, & \rho_3 &= \{v_7, v_8\}, & \rho_4 &= \{v_2, v_5\}. \end{aligned}$$

Эта пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_6 & v_4 & v_8 & v_5 & v_1 & v_3 & v_7 & v_2 \end{pmatrix}$$

множества  $V$ , которая, как предполагаем, привела матрицу смежности графа  $G$  к неправильному виду. Применяем подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_5 & v_8 & v_6 & v_2 & v_4 & v_1 & v_7 & v_3 \end{pmatrix}$$

к матрице  $R$ . В результате получаем матрицу

$$R' = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

графа  $G' \sim G$ . По матрице  $R'$  строим матрицы смежности

$$R_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

графов  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$ , геометрическая интерпретация которых показана соответственно на рис. 4.2, *a* и *б*.

Таким образом,  $G$  — разложимый граф и, как легко проверить,  $G_1 \times G_2 = G' \sim G$ .

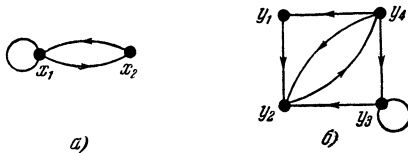


Рис. 4.2.

Вообще говоря, разложение графа в произведение двух графов неоднозначно с точностью до изоморфизма графов. Действительно, пусть даны графы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ ,  $G_4$ , показанные соответственно на рис. 4.3, *a*, *б*, *в*, *г*. Нетрудно проверить, что граф  $G$ , показанный на рис. 4.4,

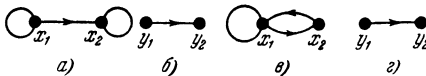


Рис. 4.3.



Рис. 4.4.

изоморфен произведениям  $G_1 \times G_2$  и  $G_3 \times G_4$ . Поэтому в факторполугруппе  $\mathfrak{G}_\times/S$  полугруппы графов  $\mathfrak{G}_\times$  по отношению изоморфизма  $S$  может не выполняться закон сокращения, т. е. из  $G_1 \times G_2 \sim G_3 \times G_4$  и  $G_2 \sim G_4$  не всегда следует  $G_1 \sim G_3$ . Для выявления неизоморфных разложений графа необходимо строить все пары  $(\pi, \rho)$  разбиений, за исключением изоморфных, или все подстановки  $t \in T$ , удовлетворяющие теореме 4.2.

#### § 4. О разложении мультиграфов

Рассмотрим теперь метод разложения мультиграфов по операции умножения. Мультиграфы будем задавать в форме  $G = (X, F)$ , где  $X$  — множество вершин, а  $F$  — отображение  $X$  в множество слов над  $X$ .

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — произвольные мультиграфы, заданные матрицами смежности  $R_1 = \|r_{i_1 i_2}\|$  и  $R_2 = \|r_{j_1 j_2}\|$ , где  $i_1, i_2 \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $j_1, j_2 \in J = \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $r_{i_1 i_2} \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $r_{j_1 j_2} \in \{0, 1, \dots, g\}$ , причем  $k$  и  $l$  — соответственно порядок матриц  $R_1$  и  $R_2$ , а  $m$  и  $g$  — мультичисла  $G_1$  и  $G_2$ . Матрица смежности  $R$  порядка  $n = k \cdot l$  мультиграфа  $G = G_1 \times G_2$  образуется прямым произведением матриц  $R_1$  и  $R_2$ . Из выражения (4.1) для мультиграфов следует, что в матрице  $R$  любая клетка  $R_{i_1 i_2} = r_{i_1 i_2} \cdot R_2$ , где  $r_{i_1 i_2} \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Матрицу такого вида назовем *мультиправильной клеточной матрицей*.

Если  $G$  — разложимый мультиграф и его матрица смежности  $R$  является мультиправильной клеточной матрицей, то существуют такие  $a_{i_1 i_2}$  ( $0 < a_{i_1 i_2} \leq 1$ ), причем их обратные величины  $\frac{1}{a_{i_1 i_2}}$  — целые числа, что матрица

$$R' = \|a_{i_1 i_2} \cdot R_{i_1 i_2}\|$$

является правильной клеточной матрицей, элементы которой суть целые числа. Тогда матрица смежности  $R_2$  мультиграфа  $G_2$  принимается равной любой ненулевой клетке матрицы  $R'$ , а элементы  $r_{i_1 i_2}$  матрицы смежности  $R_1$  мультиграфа  $G_1$  равны

$$r_{i_1 i_2} = \begin{cases} \frac{1}{a_{i_1 i_2}}, & \text{если } R_{i_1 i_2} \neq R_0, \\ 0, & \text{если } R_{i_1 i_2} = R_0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Очевидно, что  $R_1 \times R_2 = R$  и  $G_1 \times G_2 = G$ .

Теорему разложения мультиграфов можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 4.4.** *Для того чтобы мультиграф  $G = (Z, U)$  разлагался в произведение двух мультиграфов, необходимо и достаточно существование подстановки  $t \in T$  множества  $Z$ , которая переводит матрицу смежности  $R$  мультиграфа  $G$  в мультиправильную клеточную матрицу.*

Алгоритм представления мультиграфа  $G$  произведением двух мультиграфов  $G_1$  и  $G_2$  подобен алгоритму разложения графов.

Пример 4.3. Пусть дан мультиграф  $G = (Z, U)$ , показанный на рис. 4.5. Если  $G$  — разложимый мультиграф, то представить его произведением двух мультиграфов  $G_1$  и  $G_2$ .

Матрица смежности  $R$  мультиграфа  $G$  имеет вид

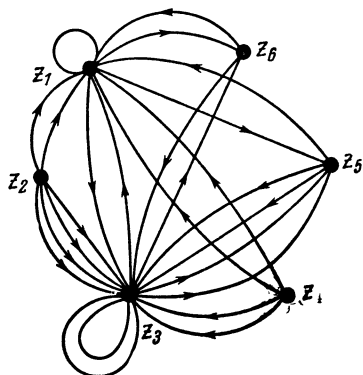


Рис. 4.5.

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и не является мультиправильной клеточной матрицей.

Построим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ , используя разложение чисел  $s$  и  $p$  каждой вершины  $z \in Z$ .

Получим

$$\begin{array}{l} z_1 \left| s_1 = 4 = 1 \cdot 4, 4 \cdot 1, \underline{2 \cdot 2}, \right. \\ z_2 \left| s_2 = 6 = 1 \cdot 6, 6 \cdot 1, \underline{2 \cdot 3}, \underline{3 \cdot 2}, \right. \\ z_3 \left| s_3 = 6 = 1 \cdot 6, 6 \cdot 1, \underline{2 \cdot 3}, \underline{3 \cdot 2}, \right. \\ z_4 \left| s_4 = 4 = 1 \cdot 4, 4 \cdot 1, \underline{2 \cdot 2}, \right. \\ z_5 \left| s_5 = 3 = 1 \cdot 3, \underline{3 \cdot 1}, \right. \\ z_6 \left| s_6 = 2 = 1 \cdot 2, \underline{2 \cdot 1}, \right. \\ p_1 = 8 = 1 \cdot 8, 8 \cdot 1, \underline{2 \cdot 4}, 4 \cdot 2, \\ p_2 = 0 = 0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 0 \cdot 1, 2 \cdot 0, 0 \cdot 2, \underline{3 \cdot 0}, 0 \cdot 3, \\ p_3 = 12 = 1 \cdot 12, 12 \cdot 1, \underline{3 \cdot 4}, 4 \cdot 3, 2 \cdot 6, 6 \cdot 2, \\ p_4 = 0 = 0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 0 \cdot 1, \underline{2 \cdot 0}, 0 \cdot 2, 3 \cdot 0, 0 \cdot 3, \\ p_5 = 3 = 1 \cdot 3, \underline{3 \cdot 1}, \\ p_6 = 2 = 1 \cdot 2, \underline{2 \cdot 1}. \end{array}$$

Подчеркнутые разложения образуют следующую пару

разбиений:

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \\ \pi_1 &= \{z_1, z_4, z_6\}, & \pi_2 &= \{z_2, z_3, z_5\}, \\ \rho_1 &= \{z_1, z_3\}, & \rho_2 &= \{z_2, z_4\}, & \rho_3 &= \{z_5, z_6\}. \end{aligned}$$

Эта пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_4 & z_6 & z_3 & z_2 & z_5 \end{pmatrix}$$

множества  $Z$ . Применяя подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_5 & z_4 & z_2 & z_6 & z_3 \end{pmatrix}$$

к матрице  $R$ , получим мультиправильную клеточную матрицу

$$R' = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Запишем матрицу  $R'$  в виде

$$R' = \left\| \begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array} \right\|.$$

Тогда система чисел  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 1$ ,  $a_{22} = \frac{1}{2}$  такова, что матрица

$$R'' = \left\| \begin{array}{c|c} a_{11} \cdot R_{11} & a_{12} \cdot R_{12} \\ \hline a_{21} \cdot R_{21} & a_{22} \cdot R_{22} \end{array} \right\|$$

является ПКМ.

Матрица смежности  $R_2$  мультиграфа  $G_2 = (Y, P)$  равна

$$R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

а матрица смежности  $R_1$  мультиграфа  $G_1 = (X, F)$ ,



определяемая на основании (4.8), имеет вид

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Мультиграфы  $G_1$  и  $G_2$  показаны соответственно на рис. 4.6, а и б. Легко проверить, что  $G_1 \times G_2 = G' \sim G$ .

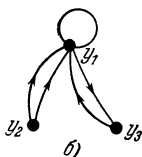
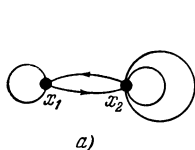


Рис. 4.6.

Следует отметить, что может существовать несколько различных систем чисел  $a_{i_1 i_2}$ , удовлетворяющих поставленным выше условиям. Это может быть, например, в том случае, когда все ненулевые

элементы матрицы смежности  $R_2$  мультиграфа  $G_2$  являются четными числами. Тогда различным системам чисел  $a_{i_1 i_2}$  будут соответствовать различные разложения мультиграфа  $G$ .

## § 5. Дополнение неразложимых графов до разложимых

В этом параграфе рассматривается задача, обобщающая разложение графа в произведение двух графов. Пусть  $G \in \mathfrak{G}_\times$  — граф, неразложимый по операции умножения. Надо найти такой минимальный надграф  $H$  графа  $G$ , что  $H \in \Gamma_\times$ , и, следовательно,  $H$  представим произведением двух графов из  $\mathfrak{G}_\times$ . Минимальный надграф  $H$  образуется из графа  $G$  добавлением минимального числа вершин и ребер. В заключение параграфа сформулируем обобщенный алгоритм разложения произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}_\times$  в произведение двух графов  $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_\times$ . Если  $G$  — разложимый граф, то, применяя обобщенный алгоритм, найдем графы  $G_1$  и  $G_2$  такие, что  $G_1 \times G_2 = G' \sim G$ . Если  $G$  — неразложимый граф, то найдем такие графы  $G_1$  и  $G_2$ , что  $G_1 \times G_2 = H$ , причем  $G \subseteq H$  и  $H$  — минимальный надграф графа  $G$ .

Пусть  $G$  — произвольный граф с  $n$  вершинами. Если  $n$  — простое число, то матрица смежности  $R$  графа  $G$  не может иметь вид ПКМ, так как  $n$  нельзя представить произведением  $k \cdot l$ . Очевидно, что добавление одной

изолированной вершины в граф  $G$  приводит к возможности получения ПКМ, поскольку в этом случае  $n = k \cdot l$ .

Опишем стандартный прием приведения матрицы смежности  $R$  произвольного графа  $G$  к правильному виду. Если  $n$  — простое число, то этот прием включает процедуру добавления вершин. Далее представим  $n = k \cdot l$ . Разобьем матрицу смежности на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Построим клетку  $R_l$  порядка  $l$ , равную объединению всех  $k^2$  клеток. Дополняя каждую из  $k^2$  клеток, за исключением нулевых, до клетки  $R_l$ , приходим к ПКМ графа  $H$ , который является продолжением графа  $G$ .

В результате применения стандартного приема к матрице смежности графа  $G$  получили ПКМ, которая пополнена некоторым числом единичных элементов. Добавление единичных элементов в матрицу смежности соответствует появлению новых ребер в исходном графе. Обозначим общее число единиц, добавленных в матрицу смежности для приведения ее к ПКМ через  $\varphi$ . Так как перед нами стоит задача отыскания минимального надграфа графа  $G$ , то надо найти такой граф  $H$ , матрица смежности которого содержит минимальное число добавляемых единиц  $\varphi_{\min}$ .

Тривиальный алгоритм нахождения ПКМ с минимальным числом единиц для графа  $G$  заключается в следующем. Зафиксируем число  $\varphi$  добавляемых единиц в матрицу  $R$  после приведения ее к виду ПКМ. Применим произвольную подстановку  $t \in T$  к матрице  $R$ , где  $T$  — симметрическая группа подстановок. Получим матрицу  $R_1$ . Используя стандартный прием, матрицу  $R_1$  приведем к виду ПКМ с числом добавленных единиц  $\varphi_1$ . Сравнивая  $\varphi$  и  $\varphi_1$ , выбираем ПКМ с наименьшим числом единиц. Продолжая этот процесс, после  $n!$  сравнений находим матрицу смежности графа  $H$ , который является минимальным изоморфным продолжением графа  $G$ , и разложим по операции умножения в произведение двух графов с  $k$  и  $l$  вершинами соответственно.

Можно показать, что справедлива следующая теорема о сокращенном переборе при поиске минимального надграфа графа  $G$ .

**Теорема 4.5.** Для приведения матрицы смежности  $R$  произвольного графа  $G$  с  $n = k \cdot l$  вершинами к ПКМ

с  $\varphi_{\min}$  достаточно применить к матрице  $R \frac{n!}{k!l!} - 1$  подстановки  $t \in T$ .

Доказательство этой теоремы проводить не будем. Подобная теорема для автоматов будет доказана в гл. VIII, § 6 (теорема 8.15). Вопрос о том, какие подстановки  $t \in T$  надо применять к матрице  $R$  графа  $G$  при поиске минимального разложимого надграфа, рассмотрен в § 2 этой главы.

Укажем сейчас необходимый, но недостаточный критерий разложения графа по операции умножения относительно общего числа единиц  $m$  матрицы смежности  $R$  графа  $G$ , который будет использован при построении обобщенного алгоритма разложения графов.

Для разложения графа  $G$  с  $n = k \cdot l$  вершинами и  $m$  ребрами в произведение двух графов с  $k$  и  $l$  вершинами необходимо, чтобы  $m$  удовлетворяло условию

$$m = u \cdot \omega, \quad (4.9)$$

где  $u \in U = \{1, 2, \dots, k^2\}$ ,  $\omega \in W = \{1, 2, \dots, l^2\}$ .

Справедливость этого предложения вытекает из определения прямого произведения матриц, описывающего разложимые графы. Если общее число единиц  $m$  матрицы  $R$  графа  $G$  не удовлетворяет условию (4.9), то граф  $G$  не разложим по операции умножения.

Сформулируем обобщенный алгоритм разложения произвольного графа  $G = (V, S)$  в произведение двух графов. Если  $G$  — разложимый граф, то обобщенный алгоритм работает так же, как и описанный в § 3. Если  $G$  — неразложимый граф, то находим минимальный разложимый надграф  $H (G \subseteq H)$ , который представим произведением двух графов.

1°. Подсчитываем число вершин  $n$  и ребер  $m$  графа  $G = (V, S)$ . Представляем  $n$  произведением чисел  $k \cdot l$ . Если  $n$  — простое число, то, добавляя одну изолированную вершину, получаем  $n = k \cdot l$ . Переходим к 2°.

2°. Матрицу смежности  $R$  графа  $G$  разбиваем на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Если  $R$  — правильная клеточная матрица, то переходим к 3°. В противном случае к 3°.

3°. Для каждой вершины  $v \in V$  записываем полустепень исхода  $s$  и полустепень захода  $p$  и образуем мно-

жества возможных разложений этих чисел на два множителя. Переходим к 4°.

4°. Проверяем выполнение условия (4.9) для числа ребер  $t$  графа  $G$ . Если условие (4.9) выполняется, то переходим к 5°. В противном случае к 6°.

5°. Из множеств разложений чисел  $s$  и  $r$  каждой вершины выбираем по одному фиксированному разложению так, чтобы выполнялись соотношения (4.5)—(4.7). Образуем пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ . Переходим к 7°. Если указанной пары  $(\pi, \rho)$  разбиений не существует, то переходим к 6°.

6°. Строим матрицу смежности  $R$  графа  $H (G \subseteq H)$  путем добавления в матрицу  $R$  графа  $G$  наименьшего возможного числа единиц так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) единицу можно ставить только в те места матрицы  $R$ , где был нуль (чтобы не образовывать мультиграфы);

б) полученное общее число единиц матрицы  $R$  графа  $H$  должно удовлетворять условию (4.9);

в) вновь образованные множества разложений чисел  $s$  и  $r$  позволяют найти такие фиксированные разложения, удовлетворяющие условиям (4.5)—(4.7), которые определяют пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $V$ . Переходим к 7°.

7°. По найденной паре  $(\pi, \rho)$  разбиений записываем подстановку  $t \in T$ . Обратную подстановку  $t^{-1} \in T$  применяем к матрице смежности. Если получаем правильную клеточную матрицу, то переходим к 9°. В противном случае к 8°.

8°. Строим новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества вершин, удовлетворяющую соотношениям (4.5)—(4.7). Переходим к 7°. Если нельзя образовать новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, то переходим к 6°.

9°. По правильной клеточной матрице строим матрицы смежности  $R_1$  и  $R_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  так, как это показано в доказательстве теоремы 4.1.

Покажем работу обобщенного алгоритма разложения на примере.

Пример 4.4. Пусть дан граф  $G$ , показанный на рис. 4.7. Представить его произведением двух графов. Если  $G$  — неразложимый граф, то найти минимальный

надграф  $H$ , который представим произведением двух графов.

Так как  $n = 6$ , то положим  $k = 2$ ,  $l = 3$ . Разобьем матрицу смежности  $R$  графа  $G$  на четыре клетки. Получим

$$R = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

откуда видно, что  $R$  не является ПКМ.

Запишем числа  $s$  и  $p$  для каждой вершины  $z \in Z$  и образуем множества возможных разбиений этих чисел на два множителя

$$\begin{array}{l|l} z_1 & s_1 = 2 = 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, & p_1 = 1 = 1 \cdot 1, \\ z_2 & s_2 = 1 = 1 \cdot 1, & p_2 = 1 = 1 \cdot 1, \\ z_3 & s_3 = 2 = 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, & p_3 = 2 = 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, \\ z_4 & s_4 = 1 = 1 \cdot 1, & p_4 = 2 = 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, \\ z_5 & s_5 = 1 = 1 \cdot 1, & p_5 = 1 = 1 \cdot 1, \\ z_6 & s_6 = 4 = 1 \cdot 4, 4 \cdot 1, 2 \cdot 2, & p_6 = 4 = 1 \cdot 4, 4 \cdot 1, 2 \cdot 2. \end{array}$$

Проверяем условие (4.9) для множества ребер графа  $G$ . Поскольку  $m = 11 = 1 \cdot 11$ , то условие (4.9) не выполняется. Следовательно,  $G$  — неразложимый граф.

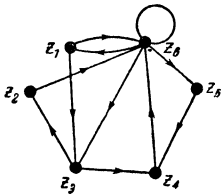


Рис. 4.7.

Построим матрицу смежности  $P$ , добавляя в матрицу  $R$  один единичный элемент. В этом случае общее число единиц  $m$  матрицы  $P$  удовлетворяет условию (4.9), так как  $m = 2 \cdot 6$  или  $m = 3 \cdot 4$ . Из рассмотрения матрицы  $R$  и попытки найти фиксированные разложения чисел  $s$  и  $p$ , удовлетворяющие условиям (4.5)–(4.7), делаем вывод, что единицу можно добавить в матрицу

$R$  на пересечении четвертой строки и первого столбца. Тогда получим

$$P = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Множества возможных разложений чисел  $s$  и  $p$  будут иметь вид

$$\begin{array}{l|l} z_1 & s_1 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, 2 \cdot 1, & p_1 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, 2 \cdot 1, \\ z_2 & s_2 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_2 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ z_3 & s_3 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, & p_3 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \\ z_4 & s_4 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, & p_4 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \\ z_5 & s_5 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_5 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ z_6 & s_6 = 4 = \underline{1 \cdot 4}, \underline{4 \cdot 1}, \underline{2 \cdot 2}, & p_6 = 4 = \underline{1 \cdot 4}, \underline{4 \cdot 1}, \underline{2 \cdot 2}. \end{array}$$

Фиксированные разложения, подчеркнутые чертой снизу, удовлетворяют (4.5)—(4.7) и образуют следующую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ :

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \\ \pi_1 &= \{z_1, z_2, z_5\}, & \pi_2 &= \{z_3, z_4, z_6\}, \\ \rho_1 &= \{z_1, z_6\}, & \rho_2 &= \{z_2, z_4\}, & \rho_3 &= \{z_3, z_5\}. \end{aligned}$$

Эта пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_2 & z_5 & z_6 & z_4 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_2 & z_6 & z_5 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

к матрице  $P$ , получим ПКМ, которая имеет вид

$$P' = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрица  $P'$  определяет граф  $H = (Z, U)$ , показанный на рис. 4.8, который является минимальным надграфом графа  $G$ , разложимым по операции умножения.

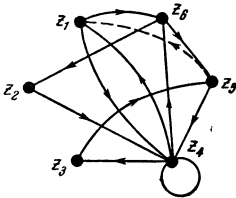


Рис. 4.8.

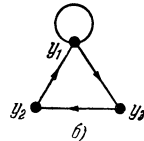
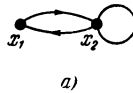


Рис. 4.9.

Пунктиром показана дуга, образованная добавленным единичным элементом. По матрице  $P'$  находим матрицы смежности

$$R_1 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

графов  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$ , геометрическая интерпретация которых дана соответственно на рис. 4.9, а и б.

## § 6. Представление произвольного графа объединением произведений графов

В этом параграфе рассмотрим разложение графов по двум операциям объединения и умножения графов. Вначале докажем теорему, из которой следует критерий принадлежности графа  $G \in \mathfrak{G}_{U, \times}$  подполукольцу  $\Xi_{U, \times}$

графов, разложимых в объединение произведений двух или более графов из  $\mathfrak{G}_{U, X}$ . На основании теоремы сформулируем алгоритм представления графа  $G \in \mathfrak{E}_{U, X}$  объединением произведений графов и укажем способ минимального дополнения неразложимых графов до разложимых по двум операциям.

**Теорема 4.6.** *Любой граф  $G$  с непрым числом  $n$  вершин можно представить объединением произведений графов с простым числом вершин. Если*

$$n = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_s,$$

где  $k_i, i \in I = \{1, 2, \dots, s\}$ , — простые сомножители, причем выполняется условие  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_s$ , то число членов в объединении будет не больше  $l = k_1^2 \cdot k_2^2 \cdot \dots \cdot k_{s-1}^2$  и каждый член объединения будет содержать  $s$  сомножителей.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — произвольный граф с непрым числом вершин  $n$ , а  $R = \|r_{ij}\|$  — матрица смежности графа  $G$ , где  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Если  $n = k_1 \cdot k'$ , то матрицу смежности  $R$  можно разбить на  $k_1^2$  ( $k_1$  — простое число) клеток, каждая из которых является квадратной подматрицей  $R_{i_1 i_2}$  порядка  $k'$ . Представим матрицу  $R$  объединением  $k_1^2$  матриц порядка  $n$  (если все клетки отличны от нулевой), каждая из которых содержит в точности одну из клеток  $R_{i_1 i_2}$ , а остальные  $k_1^2 - 1$  суть нулевые клетки. В этом случае каждая из матриц  $R_{i_1 i_2}$  является ПКМ и разложима в произведение двух матриц, одна из которых порядка  $k_1$ , а другая  $k'$ . Поэтому в матричной форме можно записать

$$\| \|_n = \underbrace{(\| \|_{k_1} \times \| \|_{k'}) \cup (\| \|_{k_1} \times \| \|_{k'}) \cup \dots \cup (\| \|_{k_1} \times \| \|_{k'})}_{\text{не более } k_1^2 \text{ членов}}.$$

Далее, если  $k' = k_2 \cdot k''$ , то каждую полученную матрицу порядка  $k'$  разложим в объединение  $k_2^2$  произведений матриц порядка  $k_2$  и  $k''$  и т. д. до тех пор, пока не получим разложение  $n$  на простые сомножители. Следовательно, в матричной форме выражения будут иметь



ВИД

$$\| \|_{k'} = \underbrace{(\| \|_{k_2} \times \| \|_{k''}) \cup (\| \|_{k_2} \times \| \|_{k''}) \cup \dots \cup (\| \|_{k_2} \times \| \|_{k''})}_{\text{не более } k_2^2 \text{ членов}},$$

. . . . .

$$\| \|_{k(s-2)} =$$

$$= \underbrace{(\| \|_{k_{s-1}} \times \| \|_{k_s}) \cup (\| \|_{k_{s-1}} \times \| \|_{k_s}) \cup \dots \cup (\| \|_{k_{s-1}} \times \| \|_{k_s})}_{\text{не более } k_{s-1}^2 \text{ членов}}.$$

Последовательно применяя принцип суперпозиции к матрицам различных порядков и используя дистрибутивность умножения относительно объединения, приходим к оценке, указанной в теореме 4.6. Этим доказательство завершено.

Таким образом, из теоремы 4.6 вытекает, что критерием принадлежности графа  $G$  подполукольцу  $\Xi_{\cup, \times}$  графов, разложимых по операции объединения и умножения графов, является непростое число вершин.

На основании теоремы 4.6 можно сформулировать алгоритм разложения произвольного графа  $G$  в объединение произведений графов с простым числом вершин.

1°. Подсчитываем число вершин  $n$  графа  $G$ . Если  $n = k_i \cdot n_i$ , где  $k_i$  — наименьший делитель числа  $n$ , а  $i = 1, 2, \dots, (s-1)$  — номер цикла работы алгоритма, то переходим к 2°. Если  $n$  — простое число, то к 6°.

2°. Матрицу смежности графа  $G$  разбиваем на  $k_i^2$  клеток порядка  $n_i$  и представляем объединением матриц так, как это указано в теореме 4.6. Переходим к 3°.

3°. Используя метод разложения графа по операции умножения, каждую из полученных правильных клеточных матриц раскладываем в произведение двух матриц соответственно порядка  $k_i$  и  $n_i$ . Переходим к 4°.

4°. Если  $n_i$  — простое число, то переходим к 5°. Если  $n_i$  — непростое число, то переходим к 2°, начиная следующий цикл работы алгоритма.

5°. По матрицам порядка  $k_i$  и  $n_i$  строим графы.

6°. Граф  $G$  не разложим в объединение произведений.

Пример 4.5. Пусть дан граф  $G = (X, F)$ , геометрическая интерпретация которого показана на рис. 4.10.

Матрица смежности графа  $G$  имеет вид

$$R = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

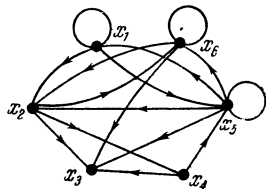


Рис. 4.10.

Так как  $n = 6 = 2 \cdot 3$ , то разобьем матрицу  $R$  на четыре клетки третьего порядка каждая. Представим  $R$  в виде объединения матриц

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cup \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cup$$

$$\cup \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cup \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Поскольку каждая из этих матриц является ПКМ, то имеет место

$$R = (R_{11} \times R_{12}) \cup (R_{21} \times R_{22}) \cup (R_{31} \times R_{32}) \cup (R_{41} \times R_{42}) =$$

$$= \left( \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right) \cup \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right) \cup$$

$$\cup \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \right) \cup \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right).$$

Полученное представление матрицы  $R$  определяет следующее разложение графа:

$$G = (G_{11} \times G_{12}) \cup (G_{21} \times G_{22}) \cup (G_{31} \times G_{32}) \cup (G_{41} \times G_{42}),$$

где графы  $G_{11}$ ,  $G_{12}$  и т. д. изображены соответственно на рис. 4.11, а, б, в, г, д, е, ж, з.

Легко видеть, что если граф  $G$  имеет простое число вершин, т. е.  $G \notin \Xi_{\cup, \times}$ , то достаточно добавить одну изолированную вершину в граф  $G$ , чтобы получить минимальный надграф  $H (G \subset H)$  такой, что  $H \in \Xi_{\cup, \times}$ , и,

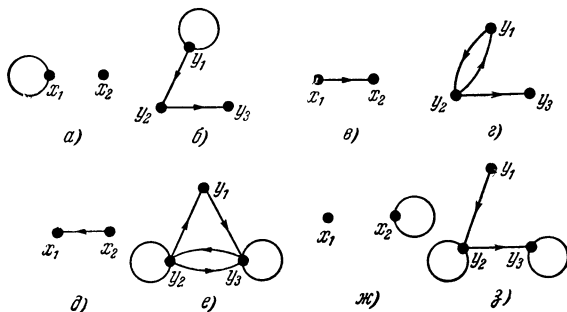


Рис. 4.11.

следовательно,  $H$  представим объединением произведений двух или более графов. Последовательное добавление изолированных вершин к любому графу  $G$  приводит к возможности представления произвольного графа с числом вершин  $n > 2$  объединением произведений только с двумя вершинами.

## § 7. Теорема разложения графа в сумму двух графов

До сих пор рассматривались методы разложения графов по операции умножения. Покажем теперь, что, используя аналогичный подход, можно решить задачу разложения графов по операции суммирования [319]. В этом параграфе мы докажем теорему о необходимом и достаточном условии разложения графа  $G \in \mathfrak{G}_+$  в сумму двух или более графов, т. е. найдем критерий принадлежности произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}_+$  подполугруппе  $\Gamma_+$  графов, разложимых по операции суммирования, и сформули-

руем алгоритм представления графа  $G \in \Gamma_+$  суммой двух графов из  $\mathfrak{G}_+$ .

Пусть  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$  — произвольные графы Бержа, а  $R_1 = \|r_{i_1 i_2}\|$ , где  $i_1, i_2 \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ , и  $R_2 = \|r_{j_1 j_2}\|$ , где  $j_1, j_2 \in J = \{1, 2, \dots, l\}$  — соответственно их матрицы смежности порядков  $k$  и  $l$ . Известно, что матрица смежности  $R$  графа  $G = G_1 + G_2$  образуется по формуле

$$R = (R_1 \times E_2) \cup (E_1 \times R_2),$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — соответственно единичные матрицы порядков  $k$  и  $l$ . Поэтому матрицу  $R$  можно представить в виде

$$R = \left\| \begin{array}{cccc} r_{11}E_2 & r_{12}E_2 & \dots & r_{1k}E_2 \\ r_{21}E_2 & r_{22}E_2 & \dots & r_{2k}E_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}E_2 & r_{k2}E_2 & \dots & r_{kk}E_2 \end{array} \right\| \cup \left\| \begin{array}{cccc} R_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_2 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} r_{11}E_2 \cup R_2 & r_{12}E_2 & \dots & r_{1k}E_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{21}E_2 & r_{22}E_2 \cup R_2 & \dots & r_{2k}E_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}E_2 & r_{k2}E_2 & \dots & r_{kk}E_2 \cup R_2 \end{array} \right\|. \quad (4.10)$$

Разобьем матрицу  $R$  на  $k^2$  клеток (разбиение показано пунктиром), каждая из которых является квадратной матрицей  $R_{i_1 i_2}$  порядка  $l$ . Из (4.10) следует, что  $R$  может содержать не более четырех типов клеток:

$$\text{если } i_1 \neq i_2, \text{ то } R_{i_1 i_2} = \begin{cases} E_0 & \text{при } r_{i_1 i_2} = 0, \\ E_2 & \text{при } r_{i_1 i_2} = 1; \end{cases}$$

$$\text{если } i_1 = i_2, \text{ то } R_{i_1 i_2} = \begin{cases} R_2 & \text{при } r_{i_1 i_2} = 0, \\ E_2 \cup R_2 & \text{при } r_{i_1 i_2} = 1. \end{cases}$$

Здесь  $E_0$  обозначает нулевую матрицу порядка  $l$ . Матрицу смежности вида (4.10) будем называть *регулярной клеточной матрицей* (РКМ).

Из рассмотрения РКМ вытекает необходимое, но недостаточное условие принадлежности графа  $G = (Z, S)$  подполугруппе  $\Gamma_+$ . Пусть  $s$  и  $p$  — полустепени исхода и захода элемента  $z \in Z$ . Тогда для любого элемента  $z \in Z$

разложимого графа  $G$  должно выполняться следующее условие:

$$s \leq k + l - 1 \quad \text{и} \quad p \leq k + l - 1, \quad (4.11)$$

которое будет использовано при формулировке алгоритма разложения графов по операции суммирования. Из (4.11) следует, в частности, что насыщенный граф  $G_2$  с  $n = k \cdot l$  вершинами не разложим в сумму двух графов  $G_1$  и  $G_2$  соответственно с  $k$  и  $l$  вершинами, в то время как он разложим по операции умножения.

*Теорема 4.7.* Для того чтобы граф  $G = (Z, S)$  разлагался в сумму двух графов, необходимо и достаточно существование подстановки  $t \in T$  множества  $Z$ , преобразующей матрицу смежности  $R$  графа  $G$  в регулярную клеточную матрицу.

Необходимость следует из определения операции суммирования и понятия РКМ смежности графа.

*Достаточность.* Предположим, что существует подстановка  $t \in T$  или пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ , которая переводит граф  $G$  в  $G'$  с РКМ  $R'$ . Построим графы  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$  следующим образом. Обозначим, как и в доказательстве теоремы 4.1, классы  $\pi_i$  разбиения  $\pi$  через  $x_i$  и положим, что  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I$ , — множество вершин графа  $G_1$ , а классы  $\rho_j$  разбиения  $\rho$  через  $y_j$ , из которых образуется множество вершин  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in J$  графа  $G_2$ . Отображение  $F$  графа  $G_1$  определяется матрицей смежности  $R_1 = \|r_{i_1 i_2}\|$ , элементы которой получаются из матрицы  $R'$  по правилу:

$$\begin{aligned} \text{для } i_1 \neq i_2 \quad r_{i_1 i_2} &= \begin{cases} 1, & \text{если } R_{i_1 i_2} = E_2, \\ 0, & \text{если } R_{i_1 i_2} = E_0; \end{cases} \\ \text{для } i_1 = i_2 \quad r_{i_1 i_2} &= \begin{cases} 1, & \text{если } R_{i_1 i_2} = R_2 \cup E_2, \\ 0, & \text{если } R_{i_1 i_2} = R_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Матрица  $R_2 = \|r_{j_1 j_2}\|$ , определяющая отображение  $P$  графа  $G_2$ , совпадает с такой клеткой  $R_{i_1 i_2}$  ( $i_1 = i_2$ ) в главной диагонали матрицы  $R'$ , которая соответствует элементу  $r_{i_1 i_2} = 0$  матрицы  $R_1$ . Если в главной диагонали матрицы  $R_1$  отсутствует нулевой элемент, то матрица  $R_2$  определяется неоднозначно и может иметь любой вид от  $R_{i_1 i_2} \setminus E_2$  до  $R_{i_1 i_2}$  ( $i_1 = i_2$ ). Очевидно, что  $R_1 + R_2 = R'$  и  $G_1 + G_2 = G' \sim G$ . Этим теорема доказана.

Из теоремы 4.7 вытекает критерий принадлежности произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}_+$  подполугруппе  $\Gamma_+$ . Если существует подстановка  $t \in T$  или пара  $(\pi, \rho)$  разбиений множества вершин графа  $G$ , переводящая  $R$  в РКМ, то  $G \in \Gamma_+$ . В противном случае  $G \notin \Gamma_+$ .

Вместе с тем легко видеть, что справедлива следующая теорема.

*Теорема 4.8. Для определения принадлежности произвольного графа  $G = (Z, S)$  с  $n = k \cdot l$  вершинами подполугруппе  $\Gamma_+$  достаточно перебрать не более  $\frac{n!}{k!l!} - 1$  подстановок  $t$  симметрической группы  $T$  множества  $Z$ .*

Доказательство теоремы 4.8 аналогично доказательству теоремы 4.2.

Предложим эвристический прием, который позволяет в некоторых случаях сократить перебор при поиске разложения графа  $G$  в сумму двух графов.

Пусть  $G = (Z, S)$  — граф, разложимый по операции суммирования. Так как  $V = X \times Y$ , то для любого элемента  $z_\alpha = (x_i, y_j)$  можно образовать множества возможных разложений чисел  $s_\alpha$  и  $p_\alpha$  на два слагаемых:

$$s_\alpha = s(z_\alpha) = s(x_i) + s(y_j) = s_{1\alpha} + s_{2\alpha},$$

$$p_\alpha = p(z_\alpha) = p(x_i) + p(y_j) = p_{1\alpha} + p_{2\alpha}.$$

Если при элементе  $z_\alpha$  имеется петля, то образуем также множества

$$s_\alpha + 1 = s^*(z_\alpha) = s_{1\alpha}^* + s_{2\alpha}^*,$$

$$p_\alpha + 1 = p^*(z_\alpha) = p_{1\alpha}^* + p_{2\alpha}^*.$$

Элементы  $z_\alpha, z_\beta \in Z$  будем относить соответствующим классам  $\pi_i$  и  $\rho_j$  пары  $(\pi, \rho)$  разбиения, если среди множеств всех возможных разложений чисел  $s_\alpha, s_\beta$  и  $p_\alpha, p_\beta$  или  $s_\alpha^*, s_\beta^*$  и  $p_\alpha^*, p_\beta^*$  (при наличии петель) на два слагаемых существуют такие фиксированные разложения  $(s_{1\alpha} + s_{2\alpha})$ ,  $(s_{1\beta} + s_{2\beta})$  и  $(p_{1\alpha} + p_{2\alpha})$ ,  $(p_{1\beta} + p_{2\beta})$  или  $(s_{1\alpha}^* + s_{2\alpha}^*)$ ,  $(s_{1\beta}^* + s_{2\beta}^*)$  и  $(p_{1\alpha}^* + p_{2\alpha}^*)$ ,  $(p_{1\beta}^* + p_{2\beta}^*)$ , для которых

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & ((s_{1\alpha} = s_{1\beta}) \& (p_{1\alpha} = p_{1\beta})) \vee ((s_{1\alpha}^* = s_{1\beta}^*) \& (p_{1\alpha}^* = p_{1\beta}^*)) \vee \\ & \vee ((s_{1\alpha} = s_{1\beta}^*) \& (p_{1\alpha} = p_{1\beta}^*)) \rightarrow (z_\alpha, z_\beta \in \pi_i), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & ((s_{2\alpha} = s_{2\beta}) \& (p_{2\alpha} = p_{2\beta})) \vee ((s_{2\alpha}^* = s_{2\beta}^*) \& (p_{2\alpha}^* = p_{2\beta}^*)) \vee \\ & \vee ((s_{2\alpha} = s_{2\beta}^*) \& (p_{2\alpha} = p_{2\beta}^*)) \rightarrow (z_\alpha, z_\beta \in \rho_j), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\sum_{\alpha \in I} s_{1\alpha} = \sum_{\alpha \in I} p_{1\alpha}, \quad \sum_{\alpha \in I} s_{2\alpha} = \sum_{\alpha \in I} p_{2\alpha}. \quad (4.14)$$

Сформулируем теперь эвристический алгоритм разложения произвольного графа  $G = (Z, S)$  в сумму двух графов.

1°. Подсчитываем число вершин  $n$  графа  $G$ . Если  $n = k \cdot l$ , то переходим к 2°. Если  $n$  — простое число, то к 9°.

2°. Матрицу смежности  $R$  графа  $G$  разбиваем на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Если  $R$  — регулярная клеточная матрица, то переходим к 8°. Если  $R$  не является регулярной клеточной матрицей, то переходим к 3°.

3°. Для каждой вершины  $z \in Z$  определяем пару чисел  $(s, p)$ . Если условие (4.11) для  $s$  и  $p$  выполняется, то переходим к 4°. В противном случае к 9°.

4°. Образум множества возможных разложений чисел  $s$  и  $p$  на два слагаемых. Переходим к 5°.

5°. Из множеств разложений чисел  $s$  и  $p$  каждой вершины выбираем по одному фиксированному разложению так, чтобы выполнялись соотношения (4.12) — (4.14). Строим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ . Переходим к 6°. Если указанной пары  $(\pi, \rho)$  разбиений не существует, то переходим к 9°.

6°. По найденной паре  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$  записываем подстановку  $t \in T$ . Обратную подстановку  $t^{-1} \in T$  применяем к матрице  $R$ . Если получаем регулярную клеточную матрицу, то переходим к 8°. В противном случае к 7°.

7°. Строим новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ , удовлетворяющую соотношениям (4.12) — (4.14). Переходим к 6°. Если нельзя образовать новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, то переходим к 9°.

8°. По регулярной клеточной матрице строим матрицы смежности  $R_1$  и  $R_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  так, как это показано в теореме 4.7.

9°. *Граф  $G$  не разложим в сумму двух графов.*

Пример 4.6. Пусть дан граф  $G = (Z, S)$ , геометрическая интерпретация которого показана на рис. 4.12. Определить, разложим ли граф  $G$  по операции суммирования. Если разложим, то представить его суммой двух графов  $G_1$  и  $G_2$ .

Матрица смежности  $R$  графа  $G = (Z, S)$  имеет вид

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

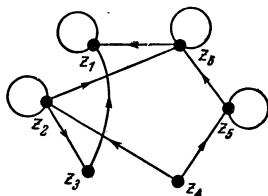


Рис. 4.12.

и не является РКМ.

Запишем числа  $s$  и  $p$  для каждой вершины  $z \in Z$  и образуем множества возможных разложений этих чисел на два слагаемых. Полустепени исхода и захода вершин, имеющих петли, пометим звездочками и образуем для них также множества разложений чисел  $s + 1$  и  $p + 1$ . Получим

$$\begin{aligned} z_1 & \left| \begin{array}{l} s_1^* = 1 = 0 + 1, \underline{1+0}, 0+2, 2+0, 1+1, \\ p_1^* = 3 = 0+3, 3+0, \underline{1+2}, 2+1, 0+4, 4+0, 1+3, 3+1, 2+2, \end{array} \right. \\ z_2 & \left| \begin{array}{l} s_2^* = 3 = 0+3, 3+0, \underline{1+2}, 2+1, 0+4, 4+0, 1+3, 3+1, 2+2, \\ p_2^* = 2 = \underline{0+2}, 2+0, 1+1, 0+3, 3+0, 1+2, 2+1, \end{array} \right. \\ z_3 & \left| \begin{array}{l} s_3 = 1 = 0+1, \underline{1+0}, \\ p_3 = 1 = \underline{0+1}, 1+0, \end{array} \right. \\ z_4 & \left| \begin{array}{l} s_4 = 2 = 0+2, 2+0, \underline{1+1}, \\ p_4 = 0 = \underline{0+0}, \end{array} \right. \\ z_5 & \left| \begin{array}{l} s_5^* = 2 = 0+2, 2+0, \underline{1+1}, 0+3, 3+0, 1+2, 2+1, \\ p_5^* = 2 = 0+2, \underline{2+0}, 1+1, 0+3, 3+0, 1+2, 2+1, \end{array} \right. \\ z_6 & \left| \begin{array}{l} s_6^* = 2 = 0+2, 2+0, 1+1, 0+3, 3+0, \underline{1+2}, 2+1, \\ p_6^* = 3 = 0+3, 3+0, 1+2, 2+1, 0+4, 4+0, 1+3, 3+1, \underline{2+2}. \end{array} \right. \end{aligned}$$



Фиксированные разложения, которые удовлетворяют соотношениям (4.12) — (4.14), подчеркнуты одной чертой и



Рис. 4.13.

определяют следующую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ :

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \\ \pi_1 &= \{z_1, z_5, z_6\}, & \pi_2 &= \{z_2, z_3, z_4\}, \\ \rho_1 &= \{z_1, z_3\}, & \rho_2 &= \{z_2, z_6\}, & \rho_3 &= \{z_4, z_5\}. \end{aligned}$$

Эта пара эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_6 & z_5 & z_3 & z_2 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_5 & z_4 & z_6 & z_3 & z_2 \end{pmatrix}$$

к матрице  $R$ , получаем матрицу  $R'$ , которая имеет вид

$$R' = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

и является РКМ.

По матрице  $R'$  строим матрицы

$$R_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

которые определяют графы  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$ , показанные соответственно на рис. 4.13, а и б.

### § 8. Оценка числа графов, разложимых по операции суммирования

Докажем теорему об оценке числа графов, представимых суммой двух графов, среди множества графов, которые могут быть построены на множестве из  $n$  элементов. Обозначим через  $\psi$  число графов, разложимых по операции суммирования, среди общего числа  $\Phi = 2^{n^2}$  графов с  $n = k \cdot l$  вершинами. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.9.

$$\frac{e^{k+l-n}}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{k^2+l^2-(k+l)} \cdot ((2^k - 1)(2^l - 1) + 1) \cdot n^n}{k^k \cdot l^l} < \psi < \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \cdot 2^{k^2+l^2-(k+l)} \cdot ((2^k - 1)(2^l - 1) + 1) n^n.$$

Доказательство. Из теоремы 4.7 следует, что регулярная клеточная матрица, содержащая в главной диагонали все единицы, раскладывается в сумму двух матриц неоднозначно. В этом случае одно из двух слагаемых обязательно содержит в главной диагонали все единицы. Очевидно, что при суммировании матриц, которые не содержат в главной диагонали всех единиц одновременно, мы никогда не получим матрицу, которая раскладывалась бы по операции суммирования неоднозначно.

Определим количество различных матриц порядка  $k$ , исключая случай наличия всех единиц в главной диагонали. Нетрудно видеть, что число различных матриц с нулевыми элементами в главной диагонали составляет  $2^{k^2-k}$ . К этому числу добавим число матриц с одной единицей, которая может находиться в любом месте главной диагонали, т. е.  $2^{k^2-k} \cdot C_k^1$ . Затем добавим число матриц с двумя единицами в главной диагонали, которое составляет  $2^{k^2-k} \cdot C_k^2$  и т. д. Таким образом, общее число всевозможных различных матриц, за исключением указанного случая, равно

$$\psi_k = 2^{k^2-k} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i = 2^{k^2-k} (2^k - 1).$$

Аналогично рассуждая, получим количество матриц порядка  $l$ :

$$\psi_l = 2^{l^2-l}(2^l - 1).$$

Тогда число различных регулярных матриц, которые однозначно раскладываются по операции суммирования, составляет

$$\psi_1 = \psi_k \cdot \psi_l = 2^{k^2-k} \cdot (2^k - 1) \cdot 2^{l^2-l}(2^l - 1).$$

Каждую матрицу порядка  $k$  или  $l$  без единиц в главной диагонали можно дополнить до матрицы со всеми единицами в главной диагонали, т. е. до неоднозначно разложимой матрицы. Поэтому число неоднозначно разложимых матриц равно

$$\psi_2 = 2^{k^2-k} \cdot 2^{l^2-l}.$$

Таким образом, общее число различных регулярных клеточных матриц  $\psi_r$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \psi_r = \psi_1 + \psi_2 &= 2^{k^2-k}(2^k - 1) \cdot 2^{l^2-l}(2^l - 1) + 2^{k^2-k} \cdot 2^{l^2-l} = \\ &= 2^{k^2+l^2-(k+l)} \cdot ((2^k - 1)(2^l - 1) + 1). \end{aligned}$$

Если предположить, что каждая из указанных матриц, которая задает некоторый граф, является представителем класса изоморфных графов, то число разложимых графов

$$\psi < \psi_r \cdot n!$$

В то же время, если предварительно исключить в матрицах порядка  $k$  и  $l$  изоморфные, то число разложимых графов

$$\psi > \frac{\psi_r}{k! l!} \cdot n!$$

Используя формулу Стирлинга для факториала, получаем указанную оценку для  $\psi$ . Теорема доказана.

## § 9. Разложение графов по операции композиции

Рассмотрим задачу разложения графа по операции композиции. Докажем теорему о необходимом и достаточном условии разложения графа  $G \in \mathfrak{G}_\otimes$  в композицию двух графов, из которой вытекает критерий принад-

лежности произвольного графа  $G$  подполугруппе  $\Gamma_{\otimes}$ . Поскольку решение задачи разложения графа по операции композиции основано на разложении графов по операции умножения, то подробно на этом останавливаться не будем. Затем изложим задачу разложения графа по двум операциям — пересечения и композиции графов.

Докажем теорему разложения графа в пересечение композиций графов и покажем, что любой граф  $G \in \mathfrak{G}_{\cap, \otimes}$  можно дополнить минимальным образом до графа  $H \in \mathfrak{E}_{\cap, \otimes}$ , разложимого по двум операциям.

**Теорема 4.10.** *Для того чтобы граф  $G = (Z, S)$  разлагался в композицию двух графов, необходимо и достаточно существование подстановки  $t \in T$  множества  $Z$ , которая преобразует матрицу смежности  $\bar{R}$  графа  $\bar{G}$  (дополнение по отображению графа  $G$  до насыщенного  $G_Z$ ) в правильную клеточную матрицу.*

**Доказательство.** Из теоремы двойственности (теорема 3.1) вытекает, что для графа  $G = (Z, S)$  такого, что  $G = G_1 \otimes G_2$ , выполняется  $\bar{G} = \bar{G}_1 \times \bar{G}_2$ . Тогда, учитывая равенство матриц смежности  $\bar{R} = \bar{R}_1 \times \bar{R}_2$ , из теоремы 4.1 немедленно следует справедливость теоремы 4.10.

Легко видеть, что при определении принадлежности графа  $G \in \mathfrak{G}_{\otimes}$  подполугруппе  $\Gamma_{\otimes}$  имеет место теорема, подобная теореме 4.2, а алгоритм представления графа  $G = (Z, S)$  композицией двух графов можно сформулировать, используя алгоритм разложения графа по операции умножения.

**Пример 4.7.** Пусть дан граф  $G = (Z, S)$ , геометрическая интерпретация которого показана на рис. 4.14. Если  $G$  — граф, разложимый по операции композиции, то представить его композицией двух графов.

Матрица смежности  $R$  графа  $G$  имеет вид

$$R = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

По матрице  $R$  запишем матрицу  $\bar{R}$  графа  $\bar{G}$  и разобьем ее на четыре клетки. Получим матрицу

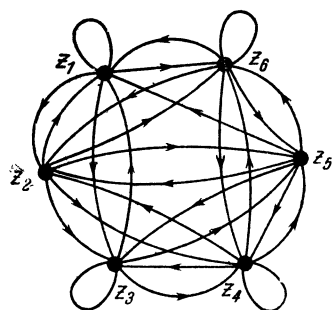


Рис. 4.14.

$$\bar{R} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

которая не является ПКМ.

Образует множества возможных разложений чисел  $s$  и  $p$  на два множителя:

$$\begin{array}{l|l} z_1 & s_1 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, 2 \cdot 1, & p_1 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ z_2 & s_2 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_2 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, 2 \cdot 1, \\ z_3 & s_3 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, 2 \cdot 1, & p_3 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ z_4 & s_4 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_4 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ z_5 & s_5 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_5 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, 2 \cdot 1, \\ z_6 & s_6 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_6 = 1 = \underline{1 \cdot 1}. \end{array}$$

Фиксированные разложения, удовлетворяющие соотношениям (4.5) — (4.7) и подчеркнутые чертой снизу, образуют следующую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ :

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \\ \pi_1 &= \{z_1, z_4, z_5\}, & \pi_2 &= \{z_2, z_3, z_6\}, \\ \rho_1 &= \{z_1, z_3\}, & \rho_2 &= \{z_2, z_5\}, & \rho_3 &= \{z_4, z_6\}. \end{aligned}$$

Эта пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_1 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_6 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку  $t^{-1}$ , которая в данном случае совпадает с  $t$ , к матрице  $\bar{R}$ , получим матрицу

$$\bar{R}' = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

По матрице  $\bar{R}'$  строим матрицы

$$\bar{R}_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \bar{R}_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

по которым находим матрицы

$$R_1 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|,$$

определяющие графы  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$ . Легко проверить, что  $G_1 \otimes G_2 = G' \sim G$ . Геометрическая интерпретация графов  $G_1$  и  $G_2$  показана соответственно на рис. 4.15, а, б.

Заметим, что из теоремы 4.1 и теоремы 4.10 вытекает

**Следствие 4.1.** Любой насыщенный граф  $Q$  с непростым числом  $n = k \cdot l$  вершин можно представить

объединением двух подграфов  $Q_1$  и  $Q_2$  ( $Q_1 \cap Q_2 = Q_\emptyset$ ), один из которых  $Q_1$  разложим в произведение графов  $G$  и  $H$  ( $Q_1 = G \times H$ ), имеющих соответственно  $k$  и  $l$  вершин, а другой  $Q_2$  — в композицию дополнений по отображению тех же графов ( $Q_2 = \bar{G} \otimes \bar{H}$ ).

Рассмотрим теперь разложение графов по двум операциям.

**Теорема 4.11.** Любой граф  $G$  с  $n = k \cdot l$  вершинами можно представить пересечением композиций графов с  $k$  и  $l$  вершинами.



Рис. 4.15.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — граф с  $n = k \cdot l$  вершинами и  $R$  — его матрица смежности. Разобьем матрицу  $R$  на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Представим матрицу  $R$  пересечением  $k^2$  матриц порядка  $n$ , каждая из которых содержит в точности одну из указанных клеток, а остальные суть клетки, составленные из всех единиц. Тогда получим

$$R = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ \hline R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \cap$$

$$\cap \left\| \begin{array}{cccc} 1 & R_{12} & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\| \cap \dots \cap \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & R_{kk} \end{array} \right\| = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k^2}.$$

Поскольку инверсия каждой из матриц  $R_j$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, k^2\}$ , является ПКМ, то на основании теоремы 4.10 разложим матрицы  $R_j$  в композицию двух матриц  $R_{1j}$  и  $R_{2j}$  соответственно порядков  $k$  и  $l$ . Поэтому представление матрицы  $R$  в виде

$$R = (R_{11} \otimes R_{21}) \cap (R_{12} \otimes R_{22}) \cap \dots \cap (R_{1k^2} \otimes R_{2k^2})$$

завершает доказательство.

Можно показать, что имеет место следующая теорема, частным случаем которой является теорема 4.11.

**Теорема 4.12.** *Любой граф  $G$  с непростым числом  $n$  вершин можно представить пересечением композиций графов с простым числом вершин. Если  $n = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m$ , где  $k_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ , — простые сомножители, причем выполняется условие  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$ , то число членов в пересечении будет  $l = k_1^2 \cdot k_2^2 \cdot \dots \cdot k_{m-1}^2$  и каждый член пересечения будет содержать  $m$  сомножителей.*

Из теоремы 4.12 вытекает, что критерием принадлежности произвольного графа  $G \in \mathfrak{G}_{\cap, \otimes}$  подполукольцу  $\mathfrak{E}_{\cap, \otimes}$  является непростое число вершин графа  $G$ . Если

$G \notin \Xi_{n, \otimes}$ , то достаточно добавить одну изолированную вершину в граф  $G$ , чтобы получить минимальный надграф  $H \in \Xi_{n, \otimes}$ , представимый пересечением композиций двух или более графов.

Пример 4.8. Пусть дан граф  $G = (Z, S)$ , показанный на рис. 4.16. Представить его пересечением композиций двух графов.

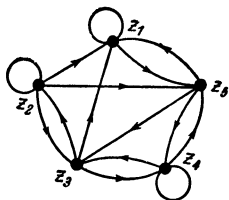


Рис. 4.16.

Так как  $n = 5$ , то граф  $G$  не разложим в пересечение композиций двух графов. Строим надграф  $H$  графа  $G$ , добавляя в  $G$  изолированную вершину  $z_6$ . Получаем  $n = 6 = 2 \cdot 3$ . Матрицу смежности  $R$  графа  $H$  представим в виде

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap$$

$$\cap \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Инверсия каждой из полученных матриц является ПКМ. Поэтому

$$R = (R_{11} \otimes R_{12}) \cap (R_{21} \otimes R_{22}) \cap (R_{31} \otimes R_{32}) \cap (R_{41} \otimes R_{42}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cap$$

$$\cap \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Полученное представление матрицы  $R$  определяет следующее разложение графа  $H$ , который является

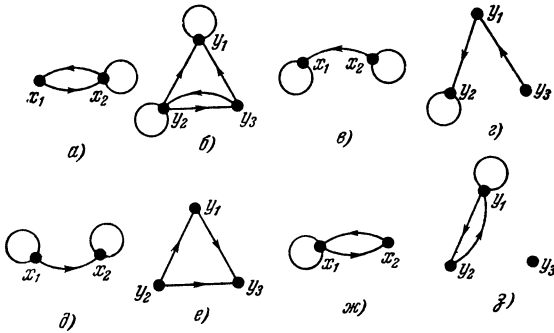


Рис. 4.17.

минимальным разложимым надграфом графа  $G$ :

$$H = (G_{11} \otimes G_{12}) \cap (G_{21} \otimes G_{22}) \cap (G_{31} \otimes G_{32}) \cap (G_{41} \otimes G_{42}).$$

Геометрическая интерпретация графов  $G_{11}$ ,  $G_{12}$  и т. д. показана соответственно на рис. 4.17, а, б, в, г, д, е, ж, з.

## § 10. Разложение графов по операции суперпозиции

Рассмотрим метод решения задачи разложения графа  $G \in \mathfrak{G}_*$  по операции суперпозиции [320]. Пусть  $G_1 = (X, F)$  и  $H = (Y, P)$  — произвольные графы Берга, а  $R_G = \|r_{ij}\|$ ,  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ , и  $R_H$  — матрицы смежности порядков  $k$  и  $l$  графов  $G$  и  $H$ . Если задано разбиение матрицы  $R_H$  на  $k$  подматриц  $\bigcup_{i \in I} R_{Hi}$  порядка  $l$  каждая, то как известно, матрица смежности  $R$  графа  $Q = G * H$  определяется по формуле

$$R = R_G * R_H = \bigcup_{i \in I} (R_G^{(i)} \times R_{Hi}),$$

где  $R_G^{(i)}$  —  $x_i$  — столбец матрицы  $R_G$ .

Запишем матрицу  $R$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R = R_G * R_H = & \left\| \begin{array}{ccc|ccc} r_{11}R_{H1} & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{12}R_{H2} & \dots & 0 \\ r_{21}R_{H1} & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{22}R_{H2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1}R_{H1} & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{k2}R_{H2} & \dots & 0 \end{array} \right\| \cup \dots \\
 \dots \cup & \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \dots & r_{1k}R_{Hk} & \dots & \dots & \dots & r_{1k}R_{Hk} \\ 0 & 0 & \dots & r_{2k}R_{Hk} & \dots & \dots & \dots & r_{2k}R_{Hk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk}R_{Hk} & \dots & \dots & \dots & r_{kk}R_{Hk} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} r_{11}R_{H1} & r_{12}R_{H2} & \dots & r_{1k}R_{Hk} & \dots & \dots & \dots & r_{1k}R_{Hk} \\ r_{21}R_{H1} & r_{22}R_{H2} & \dots & r_{2k}R_{Hk} & \dots & \dots & \dots & r_{2k}R_{Hk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}R_{H1} & r_{k2}R_{H2} & \dots & r_{kk}R_{Hk} & \dots & \dots & \dots & r_{kk}R_{Hk} \end{array} \right\|. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Из (4.15) следует, что матрица  $R$  содержит  $k^2$  клеток  $R_{ij} = r_{ij} \cdot R_{Hi}$  порядка  $l$ , причем  $R_{ij} = R_{Hi}$ , если  $r_{ij} = 1$ , и  $R_{ij} = R_0$ , если  $r_{ij} = 0$ . Так как  $x_i$  — столбец матрицы  $R_G$  — умножается на матрицу  $R_{Hi}$ , то все ненулевые клетки  $R_{ij}$  матрицы  $R$ , соответствующие одному и тому же столбцу матрицы  $R_G$ , одинаковы между собой, а ненулевые клетки  $R_{ij}$  матрицы  $R$ , соответствующие одной строке матрицы  $R_G$ , отличны друг от друга. Таким образом, матрица  $R$  может содержать не более  $k$  различных клеток  $R_{ij}$  порядка  $l$ , каждая из которых представляет собой одну из матриц  $R_{Hi}$ . Матрицу вида (4.15) назовем *k-правильной клеточной матрицей*.

Изменяя упорядоченность элементов графа  $Q$ , т. е. применяя подстановки  $t \in T$ , где  $T$  — симметрическая группа подстановок множества вершин, получим  $n!$  графов, изоморфных графу  $Q$ . Такие графы будем в дальнейшем называть разложимыми по операции суперпозиции. С другой стороны, применяя подстановки  $t_1 \in T_1$  и  $t_2 \in T_2$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — соответственно симметрические группы подстановок множеств  $X$  и  $Y$ , получим  $k!$  и  $l!$  графов, изоморфных графам  $G$  и  $H$ . Суперпозиция любых двух графов из соответствующих множеств изоморфных графов образует множество графов, изоморфных графу  $Q$  и имеющих  $k$ -правильные клеточные матрицы смежности. Таким образом, из группы  $T$  можно выделить подгруппу  $\tilde{T} = T_1 \times T_2$  подстановок, которые не выводят

матрицу  $R$  графа  $Q$  из класса  $k$ -правильных клеточных матриц.

Сформулируем теорему, из которой вытекает критерий принадлежности графа  $G$  подмножеству  $\Gamma_* \subset \mathfrak{G}_*$  графов, разложимых по операции суперпозиции\*).

**Теорема 4.13.** *Для того чтобы граф  $G = (Z, S)$  разлагался в суперпозицию двух графов, необходимо и достаточно существование подстановки  $t \in T$  множества  $Z$ , переводящей матрицу смежности  $R$  графа  $G$  в  $k$ -правильную клеточную матрицу.*

Необходимость следует из определения операции суперпозиции и понятия  $k$ -правильной клеточной матрицы.

**Достаточность.** Предположим, что существует подстановка  $t \in T$ , переводящая матрицу смежности  $R$  порядка  $n = k \cdot l$  графа  $G$  в  $k$ -правильную клеточную матрицу  $R'$  графа  $G' \sim G$ .

Найдем матрицы  $R_1$  и  $R_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  следующим образом. Разобьем матрицу смежности  $R'$  на  $k^2$  клеток  $R_{ij}$  порядка  $l$  каждая, где  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ . Тогда элементы матрицы  $R_1 = \|r_{ij}\|$  определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } R_{ij} \neq R_0, \\ 0, & \text{если } R_{ij} = R_0, \end{cases}$$

а так как ненулевые клетки  $R_{ij}$  образуют разбиение матрицы  $R_2$ , то

$$R_2 = \bigcup_{i, j \in I} R_{ij}.$$

По матрицам смежности  $R_1$  и  $R_2$  строим графы  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$ . Очевидно, что  $R_1 * R_2 = R'$  и  $G_1 * G_2 = G' \sim G$ . Таким образом, теорема доказана.

Из свойств разложения симметрической группы  $T$  по подгруппе  $\bar{T}$  вытекает следующая

**Теорема 4.14.** *Для определения принадлежности произвольного графа  $G = (Z, S)$  с  $n = k \cdot l$  вершинами*

---

\* ) Здесь множество  $\mathfrak{G}_*$  и подмножество  $\Gamma_*$  графов не являются соответственно полугруппой и подполугруппой, поскольку операция суперпозиции графов в общем случае неоднозначна.

подмножеству  $\Gamma_*$  достаточно перебрать не более  $\frac{n!}{k!l!} - 1$  подстановок  $t$  симметрической группы  $T$  множества  $Z$ .

На основании теорем 4.13 и 4.14 сформулируем алгоритм разложения графа  $G = (Z, S)$  в суперпозицию двух графов.

Предварительно заметим, что из определения  $k$ -правильной клеточной матрицы следует, что общее число  $m$  единиц матрицы (4.15) удовлетворяет условию

$$m \leq k \cdot l^2. \quad (4.16)$$

Алгоритм разложения графа  $G$  по операции суперпозиции.

1°. Подсчитываем число  $n$  вершин графа  $G$ . Если  $n = k \cdot l$ , то переходим к 2°. Если  $n$  — простое число, то к 9°.

2°. Записываем матрицу смежности  $R$  графа  $G$  и проверяем выполнение условия (4.16). Если условие выполняется, то переходим к 3°, в противном случае к 9°.

3°. Разбиваем матрицу  $R$  графа  $G$  на  $k^2$  клеток порядка  $l$ . Если  $R$  —  $k$ -правильная клеточная матрица, то переходим к 8°. В противном случае к 4°.

4°. Множество вершин  $Z$  графа  $G$  разбиваем на  $k$  непересекающихся подмножеств по  $l$  вершин в каждом, образуя классы  $\pi_i$  разбиения  $\pi$ . Выбирая по одному элементу из каждого класса разбиения  $\pi$ , строим классы  $\rho_j$  разбиения  $\rho$ . Переходим к 5°.

5°. Находим попарное пересечение классов  $\pi_i$  и  $\rho_j$  всех изоморфных пар  $(\pi, \rho)$  разбиений, получая множество подстановок  $t \cdot T$ . Переходим к 6°.

6°. Применяем обратную подстановку  $t^{-1}$  любой подстановки из класса подстановок  $t \cdot T$  к исходной матрице  $R$ . Если получаем  $k$ -правильную клеточную матрицу, то переходим к 8°. В противном случае к 7°.

7°. Образует новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества вершин  $Z$  графа  $G$  и переходим к 5°. Если нельзя образовать новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, то переходим к 9°.

8°. По  $k$ -правильной клеточной матрице строим графы  $G_1$  и  $G_2$  так, как это показано в теореме 4.13.

9. Граф  $G$  не разложим по операции суперпозиции.

Пример 4.9. Пусть дан граф  $G = (Z, S)$ , показанный на рис. 4.18. Определим, разложим ли граф  $G$  по операции суперпозиции.

Положим  $n = 2 \cdot 3$  и запишем матрицу смежности  $R$ , которая в рассматриваемом случае имеет вид

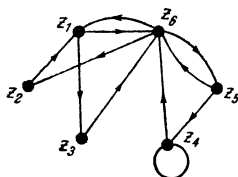


Рис. 4.18.

$$R = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

и не является  $k$ -правильной клеточной матрицей.

Образуем произвольным образом пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Z$ :

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2\}, \quad \rho = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\},$$

где

$$\pi_1 = \{z_1, z_2, z_5\}, \quad \pi_2 = \{z_3, z_4, z_6\},$$

$$\rho_1 = \{z_1, z_3\}, \quad \rho_2 = \{z_2, z_4\}, \quad \rho_3 = \{z_5, z_6\}.$$

Полученная пара  $(\pi, \rho)$  разбиений порождает множество изоморфных пар  $(\pi, \rho)$  разбиений. Проверка показывает, что применение подстановки, обратной любой из класса подстановок  $t \in \mathcal{T}$ , не переводит матрицу  $R$  в  $k$ -правильную клеточную матрицу. Поэтому надо образовать новую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, не совпадающую ни с одной из предыдущих изоморфных пар.

В результате перебора различных пар  $(\pi, \rho)$  разбиений придем к следующей паре разбиений:

$$\pi_1 = \{z_1, z_4, z_6\}, \quad \pi_2 = \{z_2, z_3, z_5\},$$

$$\rho_1 = \{z_2, z_6\}, \quad \rho_2 = \{z_1, z_3\}, \quad \rho_3 = \{z_4, z_5\}.$$

Выбирая подстановку  $t$ , эквивалентную одной из изоморфных пар данного класса, например

$$t = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_6 & z_4 & z_1 & z_2 & z_5 & z_3 \end{pmatrix},$$

и применяя обратную подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_3 & z_4 & z_6 & z_2 & z_5 & z_1 \end{pmatrix}$$

к матрице  $R$ , получим матрицу

$$R' = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

которая является  $k$ -правильной клеточной матрицей.

По матрице  $R'$  находим матрицы

$$R_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

определяющие графы  $G_1 = (X, F)$  и  $G_2 = (Y, P)$ , которые показаны соответственно на рис. 4.19, а, б.



Рис. 4.19.

Приведем оценку числа графов, разложимых по операции суперпозиции.

Обозначим через  $\psi$  число графов, разложимых в суперпозицию двух графов, среди множества  $\Phi$  всех графов с  $n = k \cdot l$  вершинами, число которых, как известно, равно  $\Phi = 2^{n^2}$ . Имеет место

Теорема 4.15.

$$\frac{e^{k+l-n}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{k(k+l^2)} \frac{n^n}{k^k \cdot l^l} < \psi < \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \cdot 2^{k(k+l^2)} \cdot n^n.$$

Доказательство. Обратимся к формуле (3.56), определяющей матричную форму записи операции суперпозиции двух графов  $G$  и  $H$ , и определим число различных матриц вида  $R_G^{(i)} \times R_{Hi}$ , где  $R_G^{(i)}$  —  $x_i$ -й столбец матрицы смежности  $R_G$  графа  $G$ , а  $R_{Hi}$  — один из классов разбиения матрицы смежности  $R_H$  графа  $H$  на  $k$  подматриц.

Так как матрица  $R_G$  имеет порядок  $k$ , а единичные элементы матрицы могут находиться в любом месте столбца  $R_G^{(i)}$ , то множество разложимых столбцов вида  $R_G^{(i)}$  состоит из  $\sum_{i=0}^k C_k^i = 2^k$  элементов. Далее, поскольку подматрица  $R_{Hi}$ , так же как и матрица смежности  $R_H$ , имеет порядок  $l$  и в частном случае может совпадать с матрицей  $R_H$ , то число разложимых матриц вида  $R_{Hi}$  состоит из  $2^{l^2}$  элементов. Поэтому число различных матриц вида  $R_G^{(i)} \times R_{Hi}$  равно произведению  $2^k \cdot 2^{l^2} = 2^{k+l^2}$ . Обозначим это множество через  $M_i$ .

Из (4.15) следует, что в результирующей матрице  $R = R_G * R_H$  множество матриц  $M$  образует множество различных видов одного столбца из клеток порядка  $l$  каждая. Так как в матрице  $R$  таких столбцов  $k$ , то легко видеть, что множество  $M$  различных матриц  $R$  вида (4.15) является декартовым произведением множеств  $M_i$ , т. е.

$$M = \underbrace{M_i \times M_i \times \dots \times M_i}_{k \text{ раз}}$$

Отсюда получаем число  $\psi_M$  различных матриц множества  $M$ , которое составляет

$$\psi_M = (2^{k+l^2})^k = 2^{k(k+l^2)}.$$

Если предположить, что каждая матрица смежности  $R$  из множества  $M$  является представителем класса изоморфных графов, то получаем

$$\psi < \psi_M \cdot n!$$

С другой стороны, если из множества  $M$  заведомо исключить матрицы изоморфных графов, то получим

$$\psi > \psi_M \frac{n!}{k!l!}.$$

Применяя формулу Стирлинга для факториала, приходим к оценке, указанной в теореме 4.15.

Рассмотрим теперь разложение графов по двум операциям объединения и суперпозиции графов. Докажем теорему, из которой следует критерий принадлежности графа  $G \in \mathfrak{G}_{U, *}$  подмножеству  $\mathfrak{E}_{U, *}$  графов, разложимых в объединение суперпозиций графов, и укажем способ минимального дополнения неразложимых графов до разложимых по двум операциям.

**Теорема 4.16.** *Любой граф  $G$  с непростым числом  $n = k \cdot l$  вершин можно представить объединением суперпозиций графов с  $k$  и  $l$  вершинами, причем число объединяемых членов не превышает  $k$ .*

**Доказательство.** Пусть  $G$  — граф с  $n = k \cdot l$  вершинами, а  $R$  — его матрица смежности. Разобьем матрицу  $R$  на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая и представим объединением матриц следующего вида:

$$\begin{aligned}
 R &= \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \cup \\
 &\cup \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \cup \dots \cup \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{array} \right\| = \\
 &= R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k.
 \end{aligned}$$

Так как каждая из матриц  $R_i, i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ , по определению является  $k$ -правильной клеточной матрицей, то ее можно представить суперпозицией двух матриц так, как это показано в теореме 4.13. Поэтому

$$R = (R_{11} * R_{12}) \cup (R_{21} * R_{22}) \cup \dots \cup (R_{k1} * R_{k2}),$$

и теорема 4.16 доказана.

Из теоремы 4.16 вытекает, что критерием принадлежности графа  $G \in \mathfrak{G}_{U, *}$  подмножеству  $\mathfrak{E}_{U, *}$  графов, разложимых в объединение суперпозиций, является простое число вершин.

На основании теоремы 4.16 можно сформулировать алгоритм разложения графа  $G \in \mathfrak{E}_{U, *}$  в объединение суперпозиций графов, однако, приводить его не будем.



Пример 4.10. Пусть дан граф  $G$ , показанный на рис. 4.20. Представить его объединением суперпозиций более простых графов.

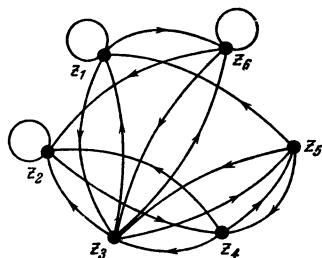


Рис. 4.20.

Так как  $n = 6$ , то положим  $n = 2 \cdot 3$  и представим матрицу смежности  $R$  графа  $G$  в виде

$$\begin{aligned}
 R &= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \\
 &= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cup \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = R_1 \cup R_2.
 \end{aligned}$$

Каждая из полученных матриц  $R_1$  и  $R_2$  является  $k$ -правильной клеточной матрицей, поэтому

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 \cup R_2 = (R_{11} * R_{12}) \cup (R_{21} * R_{22}) = \\
 &= \left( \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \right) \cup \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \right).
 \end{aligned}$$

Графы  $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ , задаваемые матрицами смежности  $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ , определяют разложение графа  $G$  в объединение суперпозиций и показаны соответственно на рис. 4.21, *а, б, в, г*.

Легко видеть, что если граф  $G$  имеет простое число вершин, т. е.  $G \notin \Xi_U, *$ , то достаточно добавить одну изолированную вершину в граф  $G$ , чтобы получить минимальный надграф  $H (G \subset H)$ , который  $H \in \Xi_U$  и, следовательно, представим объединением суперпозиций

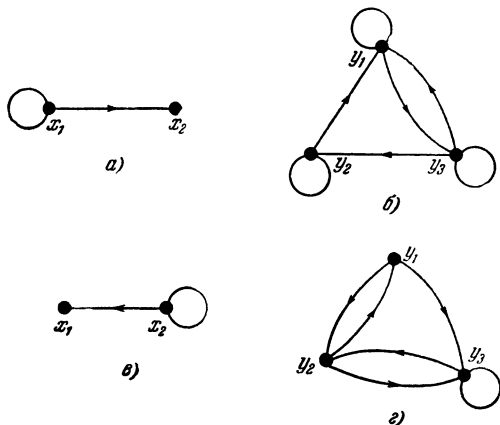


Рис 4.21

двух или более графов. Последовательное добавление изолированных вершин к любому графу  $G$  приводит к возможности представления произвольного графа с числом вершин  $n > 2$  объединением суперпозиций графов только с двумя вершинами.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

**§ 1. Автоматы первого и второго рода.  
Способы задания абстрактных автоматов**

В этой и в последующих главах книги рассматриваются вопросы теории конечных автоматов. Основное внимание уделяется построению алгоритмов синтеза автоматов на абстрактном и структурном уровнях. На абстрактном уровне эти алгоритмы позволяют уменьшить общий объем памяти автомата, а на структурном уровне приводят к построению схемы автомата с минимальной комбинационной частью. Конечные автоматы задаются ориентированными графами со взвешенными ребрами, а алгоритмы синтеза автоматов удобно реализуются в ЦВМ. Подробно рассматриваются формальные операции над автоматами, которые на структурном уровне соответствуют различным способам соединения автоматов между собой. Излагается проблема декомпозиции автоматов и ее решение, основанное на разложении автоматов, которое приводит к синтезу оптимальных структурных схем автоматов. Поэтому язык графов, изложенный в предыдущих главах, является весьма удобным языком для решения задач теории автоматов. Наряду с этим некоторые вопросы теории автоматов, такие как минимизация абстрактных автоматов и теория булевых функций, используются в книге без особых пояснений, так как они подробно описаны в литературе \*).

Понятие абстрактного автомата будет дано ниже с помощью одного из способов задания автоматов.

---

\*) См., например, М. А. Гаврилов [94], В. М. Глушков [113, 115], Н. Е. Кобринский и Б. А. Трахтенброт [216], М. А. Айзерман и др. [3], А. Гилл [106], М. Фистер [450], Е. Н. Вавилов, Г. П. Портной [57], Д. А. Поспелов [369].

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  и  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  — два произвольных множества элементов, которые будем называть *алфавитами*, а их элементы — *буквами алфавитов*. Конечную упорядоченную последовательность букв назовем *словом в данном алфавите*. Обозначим через  $\mathfrak{S}(X)$  и  $\mathfrak{S}(Y)$  соответственно множества всех слов в алфавитах  $X$  и  $Y$ . Тогда произвольное преобразование дискретной информации можно задать как однозначное отображение  $f$  множества слов  $\mathfrak{S}(X)$  в множество слов  $\mathfrak{S}(Y)$ . Отображение  $f$  обычно называют *алфавитным отображением* или *алфавитным оператором*, а алфавиты  $X$  и  $Y$  — соответственно входным и выходным алфавитами оператора  $f$ . Каждому входному слову  $p = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_k}$  оператор  $f$  сопоставляет выходное слово  $r = y_{i_1}y_{i_2} \dots y_{i_k}$ . Поэтому для каждого  $p \in \mathfrak{S}(X)$  существует  $r \in \mathfrak{S}(Y)$  такое, что  $r = f(p)$ . В этом случае  $f$  есть функция, область определения которой  $\mathfrak{S}(X)$ , а область значений  $\mathfrak{S}(Y)$ .

В дальнейшем под алфавитным отображением будем подразумевать в общем случае *частичное* отображение, а не всюду определенное. Это позволяет рассматривать отображение  $f$  как оператор в одном и том же расширенном алфавите. Действительно, объединяя алфавиты  $X$  и  $Y$ , получим алфавит  $Z = \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Образует множество  $\mathfrak{S}(Z)$  всех слов в этом алфавите. Очевидно, что частичное отображение  $f$  множества  $\mathfrak{S}(Z)$  в себя, определенное на словах, состоящих только из букв  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , можно выбрать таким образом, что оно будет совпадать с отображением  $f$  множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ . Любой абстрактный автомат *реализует некоторый оператор  $f$*  или, как говорят, *индуцирует некоторое отображение  $f$* . Условия, накладываемые на автоматные отображения, будут рассмотрены в следующем параграфе.

Отметим ряд допущений, связанных с понятием абстрактного автомата:

1) наличие произвольного числа отличных друг от друга состояний автомата и свойства мгновенного перехода из одного состояния в другое;

2) переход из одного состояния в другое оказывается возможным не ранее чем через некоторый промежуток времени  $\Delta$  ( $\Delta > 0$  — интервал дискретности);

3) число различных входных и выходных сигналов конечно;

4) входные сигналы — причина перехода автомата из одного состояния в другое, а выходные сигналы — реакция автомата на входные сигналы, они относятся к моментам времени, определяемым соответствующими переходами автомата.

Учитывая эти обстоятельства, можно говорить, что абстрактный автомат функционирует в дискретном времени  $t$ , которое принимает значения  $t = 0, 1, 2, \dots$ . На каждый входной сигнал  $x(t)$  ( $t > 0$ ) автомат реагирует выходным сигналом  $y(t)$ .

Различают два вида автоматов: *синхронные* и *асинхронные*. В синхронных автоматах переходы из одних состояний в другие осуществляются через равные временные промежутки, задаваемые обычно генератором тактовых импульсов, в то время как в асинхронных автоматах эти переходы совершаются через неравные между собой промежутки времени. В дальнейшем будем рассматривать синхронные автоматы.

Остановимся более подробно на *законах функционирования* автоматов. Состояние  $q(t)$  автомата в момент времени  $t$  однозначно определяется предыдущим состоянием  $q(t-1)$  и входным сигналом  $x(t)$ . Поэтому можно записать

$$q(t) = \Phi(q(t-1), x(t)), \quad (5.1)$$

где  $\Phi$  — функция, определяющая последующее состояние автомата, которая обозначается просто  $\Phi(q, x)$  и называется *функцией переходов*.

Выходной сигнал  $y(t)$  реального автомата всегда появляется после входного сигнала  $x(t)$ . Однако относительно момента времени  $t$  перехода автомата из состояния  $q(t-1)$  в состояние  $q(t)$  выходной сигнал  $y(t)$  может появиться либо раньше, либо позже этого момента времени. Поэтому справедливы выражения

$$y(t) = \Psi(q(t-1), x(t)), \quad (5.2)$$

$$y(t) = \Psi(q(t), x(t)), \quad (5.3)$$

где  $\Psi(q, x)$  — *функция выходов* обычная (5.2) или сдвинутая (5.3). Она однозначно определяет выходную букву автомата в зависимости от состояния  $q(t-1)$  в преды-

душий момент времени и входного сигнала  $x(t)$ , если это обычная функция выходов, а в случае сдвинутой — от состояния  $q(t)$ , в которое автомат переходит в текущий момент времени, и входного сигнала  $x(t)$ .

Учитывая работу реальных автоматов, различают два рода абстрактных автоматов. Автоматами *первого рода* называют автоматы, описываемые следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}q(t) &= \varphi(q(t-1), x(t)), \\y(t) &= \psi(q(t-1), x(t)),\end{aligned}$$

которые определяют закон функционирования этих автоматов, а автоматами *второго рода* называют автоматы, закон функционирования которых задается уравнениями

$$\begin{aligned}q(t) &= \varphi(q(t-1), x(t)), \\y(t) &= \psi(q(t), x(t)),\end{aligned}$$

где  $t = 1, 2, \dots$

Абстрактные автоматы любого рода называются *правильными*, если выходной сигнал  $y(t)$  не зависит явно от входного сигнала  $x(t)$ , а определяется лишь состоянием  $q(t-1)$  или  $q(t)$ . В дальнейшем автоматы первого рода, следуя В. М. Глушкову [113], будем называть автоматами Мили, а правильные автоматы второго рода — автоматами Мура.

Остановимся теперь на способах задания автоматов. Существует несколько эквивалентных способов задания абстрактных автоматов, среди которых по аналогии с графами можно назвать три: *аналитический*, *геометрический* и *матричный*.

Говорят, что задан абстрактный автомат  $A$ , если задана совокупность пяти объектов: конечного множества  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, t\}$ , называемого входным алфавитом автомата, конечного множества  $Y = \{y_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ , называемого выходным алфавитом автомата, произвольного множества  $Q$ , называемого алфавитом состояний, элемента  $q_1 \in Q$ , называемого начальным состоянием автомата, и отображения  $F$  множества  $Q$  в себя, которое любому  $q \in Q$  и каждой входной букве  $x \in X$  сопоставляет состояние  $q_x \in Q$ , определяющее функцию переходов  $\varphi(q, x)$ , и выходную букву  $y \in Y$ ,

определяющую обычную или сдвинутую функцию выходов  $\psi(q, x)$ . Следовательно, запись  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  обозначает произвольный абстрактный автомат. Если  $A$  — автомат первого рода, то  $\psi(q, x)$  — обычная функция выходов, если же  $A$  — автомат второго рода, то  $\psi(q, x)$  — сдвинутая функция выходов.

Если множество  $Q$  конечно, то автомат  $A$  называется *конечным* автоматом, в противном случае  $A$  — *бесконечный* автомат. Все реальные автоматы являются конечными. Именно они будут объектом дальнейшего изучения. Тем не менее это не означает отказа от рассмотрения в некоторых случаях автоматов с произвольным, в том числе и с бесконечным числом состояний.

Покажем теперь, каким образом определить отображение, индуцируемое заданным конечным автоматом  $A$ . Как известно, автомат функционирует в дискретном времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  автомат всегда находится в начальном состоянии  $q_1 \in Q$ . В каждый момент времени, отличный от начального, на вход автомата подается входной сигнал  $x(t)$  — произвольная буква входного алфавита  $X$ , а на выходе возникает некоторый выходной сигнал  $y(t)$  — буква выходного алфавита  $Y$ . Пусть  $\mathfrak{S}(X)$  и  $\mathfrak{S}(Y)$  — соответственно множества входных и выходных слов автомата  $A$  и  $p = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_k}$  — произвольное входное слово, т. е.  $p \in \mathfrak{S}(X)$ . Подача на вход автомата  $A$ , установленного в начальное состояние, конечной последовательности  $x(1) = x_{i_1}, x(2) = x_{i_2}, \dots, x(k) = x_{i_k}$  на основании известного отображения  $F$  вызывает появление однозначно определенной конечной последовательности  $y(1) = y_{j_1}, y(2) = y_{j_2}, \dots, y(k) = y_{j_k}$  на выходе автомата, которая соответствует выходному слову  $r = y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_k}$  из  $\mathfrak{S}(Y)$ . Поэтому  $r = f(p)$ . Относя каждому входному слову  $p \in \mathfrak{S}(X)$  соответствующее ему выходное слово  $r \in \mathfrak{S}(Y)$ , получим искомое отображение  $f$ , которое и является отображением, индуцируемым конечным автоматом  $A$ .

Очевидно, что отображение  $F$  множества  $Q$  в  $Q$  однозначно задает функции  $\varphi(q, x)$  и  $\psi(q, x)$ , определяющие закон функционирования автомата  $A$ , и наоборот. Эти функции можно представить в виде прямоугольных

таблиц (матриц), строки которых соответствуют различным буквам входного алфавита  $X$ , а столбцы — различным состояниям алфавита  $Q$ . На пересечении  $x_i$  строки и  $q_h$  столбца таблицы переходов  $\varphi(q, x)$  ставится состояние  $q_l$  автомата, в которое он переходит из состояния  $q_h$  под действием входного сигнала  $x_i$ , а в таблице выходов  $\psi(q, x)$  ставится выходная буква  $y_j$ , которая появляется на выходе автомата. Еще раз подчеркнем, что род автомата определяет, является ли таблица выходов  $\psi(q, x)$  обычной или сдвинутой.

Два абстрактных автомата  $A$  и  $B$  с одинаковыми входным  $X$  и выходным  $Y$  алфавитами называются эквивалентными, если они индуцируют одно и то же отображение  $f$  множества  $\mathfrak{E}(X)$  в  $\mathfrak{E}(Y)$ .

Установим взаимосвязь между автоматами первого и второго рода. Пусть дан автомат второго рода  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ . Запишем функцию переходов  $\varphi(q, x)$  и сдвинутую функцию выходов  $\psi(q, x)$  автомата  $A$ . Последняя, как известно, выражает зависимость

$$y(t) = \psi(q(t), x(t)).$$

Подставим в это уравнение значение

$$q(t) = \varphi(q(t-1), x(t)).$$

Тогда получим уравнение

$$y(t) = \psi(\varphi(q(t-1), x(t)), x(t)) = \psi'(q(t-1), x(t)),$$

определяющее обычную функцию выходов  $\psi'(q, x)$ , которая характеризует автомат первого рода. Таким образом, подставляя в сдвинутую функцию выходов  $\psi(q, x)$  автомата второго рода функцию переходов  $\varphi(q, x)$ , получаем автомат первого рода  $A' = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F'(x \in X/y \in Y))$ , который индуцирует то же самое отображение, что и автомат  $A$ . Такое сведение автомата второго рода к эквивалентному автомату первого рода называется *интерпретацией автомата второго рода автоматом первого рода*. Несколько сложнее показать, что для любого автомата первого рода можно построить эквивалентный ему автомат второго рода [113].

Мы рассмотрели аналитический способ задания абстрактных автоматов. Остановимся коротко на остальных способах задания. *Геометрический* способ задания



автомата, по существу, сводится к изображению ориентированного графа, вершинами которого являются состояния автомата, обозначаемые различными буквами  $q \in Q$ , а около каждого ребра  $(q_h, q_l)$  ставятся буква входного алфавита  $x_i \in X$ , вызывающая переход автомата из состояния  $q_h$  в  $q_l$ , и буква выходного алфавита  $y_j \in Y$ , которая появляется на выходе автомата. Если автомат первого рода, то выходная буква  $y_j$  определяется парой  $(q_h, x_i)$ , а в случае автомата второго рода  $y_j$  зависит от  $(q_l, x_i)$ . Начальное состояние автомата обозначается буквой  $q_1 \in Q$ . Таким образом, ориентированный граф, ребра которого нагружены буквами входного и выходного алфавита, однозначно задает некоторый абстрактный автомат. Графы с нагруженными ребрами (весовыми функциями на ребрах) обычно называют *графоидами*. Поэтому *ориентированный графоид* — геометрическая интерпретация абстрактного автомата.

От графоида легко перейти к заданию автомата с помощью нагруженного прадерева, которое является примером структурного графа [315]. Нагруженное прадеерево задает отображение множества всех входных слов в множество всех выходных слов автомата или в терминологии Н. Е. Кобринского и Б. А. Трахтенброта [216] однозначно характеризует ограниченно-детерминированный оператор, реализуемый конечным автоматом. По графоиду прадеерево автомата строится следующим образом. Фиксируется вершина, соответствующая начальному состоянию  $q_1 \in Q$ . Она объявляется вершиной первого ранга или корнем прадеерева. Из вершины первого ранга проводится  $m$  дуг, называемых дугами первого ранга, число которых равно числу букв входного алфавита автомата. Каждая дуга заходит в вершину второго ранга ( $m$  вершин). Из каждой вершины второго ранга проводится  $m$  дуг второго ранга, которые заканчиваются вершинами третьего ранга (всего  $m^2$  вершин) и т. д. Каждой дуге первого и последующих рангов приписываются буква  $x_i \in X$  входного и в скобках  $y_j \in Y$  выходного алфавита, а каждой вершине второго и последующих рангов состояние  $q_h \in Q$ , определяемое по графоиду автомата. Таким образом, прадеерево автомата — граф, в каждую вершину которого, кроме корня  $q_1$ , заходит одна дуга и который не содержит контуров.

Конечные и бесконечные прадеревья используются в некоторых случаях как исходный язык задания автоматных отображений (ограниченно-детерминированных операторов). Теоретический и практический интерес представляет обратная задача — построение графоида автомата по нагруженному прадереву детерминированного оператора, которая фактически представляет задачу абстрактного синтеза автоматов. Однако в дальнейшем будет использоваться другой язык задания автоматных отображений. Поэтому задачи свертывания нагруженного прадеревя в графоид автомата касаться не будем.

Рассмотрим *матричный* способ задания абстрактных автоматов.

Одной из разновидностей его являются описанные выше прямоугольные матрицы, называемые *таблицами переходов и выходов*, которые определяют функции  $\varphi(q, x)$  и  $\psi(q, x)$  абстрактного автомата. Поскольку в этих матрицах присутствуют все буквы входного и выходного алфавитов, а также алфавита состояний, то они полностью и однозначно задают некоторый автомат.

Более часто, чем указанные матрицы, используется квадратная матрица, называемая матрицей *соединений* автомата, которая строится следующим образом. Строки и столбцы матрицы соединений соответствуют различным состояниям автомата, причем первая строка и первый столбец соответствует начальному состоянию  $q_1 \in Q$ . На пересечении  $q_k$ -й строки и  $q_l$ -го столбца ставится буква входного алфавита  $x_i \in X$  или дизъюнкция входных букв, вызывающих переход автомата из состояния  $q_k$  в  $q_l$ , а в скобках — буква выходного алфавита  $y_j \in Y$  или дизъюнкция выходных букв, которые появляются на выходе автомата. Если ни одна из букв входного алфавита не переводит автомат из состояния  $q_k$  в  $q_l$ , то на соответствующем пересечении ставится нуль.

Матрица соединений автомата обладает тем свойством, что в любой ее строке каждая буква входного алфавита должна встречаться не более одного раза. Это условие связано с однозначностью функций переходов и выходов автомата и называется условием однозначности.

Покажем на примере различные способы задания автоматов и интерпретацию автомата второго рода автоматом первого рода.

Пример 5.1. Пусть задан абстрактный автомат  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , где  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$ , а отображение  $F$  множества  $Q$  в  $Q$  определяется следующим образом:

$$Fq_1 = \{q_2(x_1/y_1), q_4(x_2/y_1), q_1(x_3/y_2)\},$$

$$Fq_2 = \{q_1(x_1/y_2), q_3(x_2/y_1), q_4(x_3/y_1)\},$$

$$Fq_3 = \{q_1(x_1/y_1), q_4(x_2/y_2), q_2(x_3/y_2)\},$$

$$Fq_4 = \{q_4(x_1/y_2), q_1(x_2/y_1), q_3(x_3/y_1)\}.$$

Предположим, что автомат  $A$  является автоматом первого рода.

Подача на вход автомата  $A$ , установленного в начальное состояние  $q_1$ , входного слова  $p_1 = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$

вызывает появление на выходе слова  $r_1 = y_1y_2y_1y_1y_2y_1$ , а входное слово  $p_2 = x_3x_2x_2x_1x_1x_3x_1x_2$

приводит к появлению выходного слова  $r_2 = y_2y_1y_1y_1y_2y_2y_1y_1$ .

На основании отображения  $F$  множества  $Q$  в себя легко построить таблицы переходов и выходов автомата  $A$ . Таблица переходов, определяющая функцию переходов  $\varphi(q, x)$ ,

имеет вид табл. 5.1, а таблица выходов, определяющая обычную функцию выходов  $\psi(q, x)$ , показана на табл. 5.2.

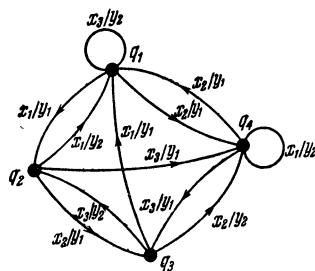


Рис. 5.1.

Таблица 5.1

Q		X			
		q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>
x <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>4</sub>	
x <sub>2</sub>	q <sub>4</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>	q <sub>1</sub>	
x <sub>3</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>4</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	

Таблица 5.2

Q		X			
		q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>
x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	
x <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	
x <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	

Графонд автомата  $A$  изображен на рис. 5.1, а нижние три яруса нагруженного прадерева, построенные по графонду, показаны на рис. 5.2.

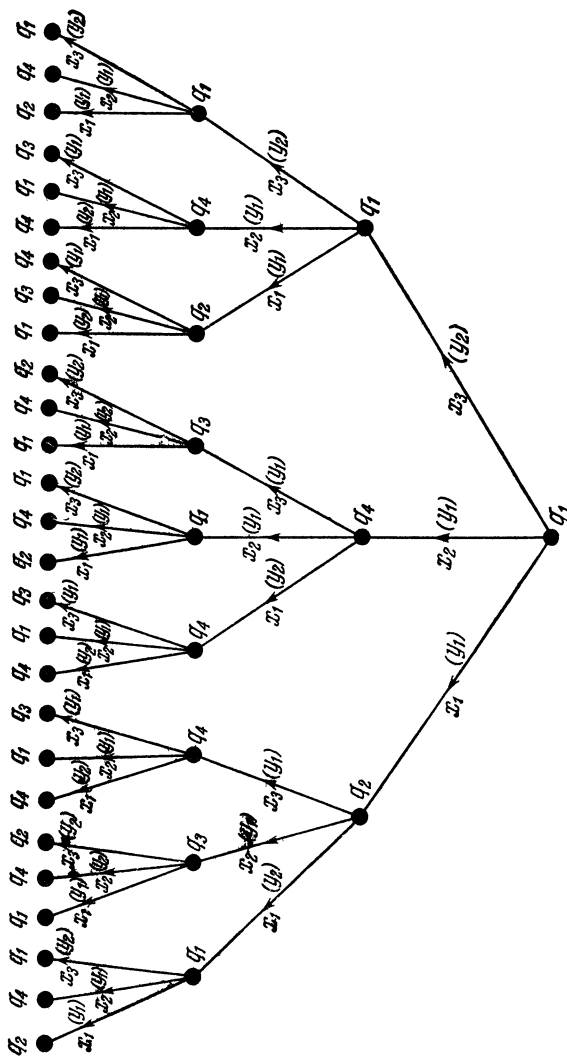


Рис. 5.2.

Матрица соединений  $R$  автомата  $A$  имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} x_3(y_2) & x_1(y_1) & 0 & x_2(y_1) \\ x_1(y_2) & 0 & x_2(y_1) & x_3(y_1) \\ x_1(y_1) & x_3(y_2) & 0 & x_2(y_2) \\ x_2(y_1) & 0 & x_3(y_1) & x_1(y_2) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Предположим, теперь, что автомат  $A$  является автоматом второго рода. Тогда табл. 5.1 определяет функцию переходов  $\varphi(q, x)$ , а табл. 5.2 — сдвинутую функцию выходов  $\psi(q, x)$  автомата  $A$ . Графоид автомата второго рода показан на рис. 5.1, а матрица соединений имеет вид (5.4). Если на вход автомата  $A$ , установленного предварительно в начальное состояние  $q_1$ , подать входные слова  $p_1 = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$  и  $p_2 = x_3x_2x_2x_1x_1x_3x_1x_2$  такие же, как и в случае автомата первого рода, то на выходе получим слова  $r_1 = y_2y_1y_1y_2y_1y_2$  и  $r_2 = y_2y_1y_1y_2y_1y_2y_2$ , которые отличаются от соответствующих выходных слов

Таблица 5.3

$X \backslash Q$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$
$x_1$	$y_2$	$y_1$	$y_1$	$y_2$
$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_1$
$x_3$	$y_2$	$y_1$	$y_1$	$y_2$

автомата первого рода. Поэтому отображение  $f$ , индуцируемое абстрактным автоматом  $A$  первого рода, отлично от отображения  $g$ , которое индуцирует абстрактный автомат  $A$  второго рода.

Построим абстрактный автомат  $A'$  первого рода, эквивалентный автомату  $A$  второго рода. Подставляя в сдвинутую функцию выходов  $\psi(q, x)$  (табл. 5.2) функцию переходов  $\varphi(q, x)$  (табл. 5.1) автомата  $A$ , получим обычную функцию выходов  $\psi'(q, x)$ , определяемую табл. 5.3. Функция  $\psi'(q, x)$  задает абстрактный автомат первого рода  $A' = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F'(x \in X/y \in Y))$ , отображение  $F'$  которого определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} F'q_1 &= \{q_2(x_1/y_2), q_4(x_2/y_1), q_1(x_3/y_2)\}, \\ F'q_2 &= \{q_1(x_1/y_1), q_3(x_2/y_2), q_4(x_3/y_1)\}, \\ F'q_3 &= \{q_1(x_1/y_1), q_4(x_2/y_1), q_2(x_3/y_1)\}, \\ F'q_4 &= \{q_4(x_1/y_2), q_1(x_2/y_1), q_3(x_3/y_2)\}. \end{aligned}$$

Графоид автомата  $A'$  показан на рис. 5.3, а матрица соединений  $R'$  имеет вид

$$R' = \begin{pmatrix} x_3(y_2) & x_1(y_2) & 0 & x_2(y_1) \\ x_1(y_1) & 0 & x_2(y_2) & x_3(y_1) \\ x_1(y_1) & x_3(y_1) & 0 & x_2(y_1) \\ x_2(y_1) & 0 & x_3(y_2) & x_1(y_2) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что при подаче на вход автомата  $A'$  входных слов  $p_1$  и  $p_2$  на выходе получим слова  $r_1$  и  $r_2$  такие же, как и в случае автомата второго рода  $A$ . Поэтому абстрактный автомат  $A'$  интерпретирует автомат  $A$ .

Скажем несколько слов о способах задания частного случая автоматов второго рода, так называемых автоматов Мура. Что касается автоматов Мили (автоматы первого рода), то они подробно рассмотрены в примере 5.1. Как известно, выходной сигнал автомата Мура зависит только от состояния, т. е.

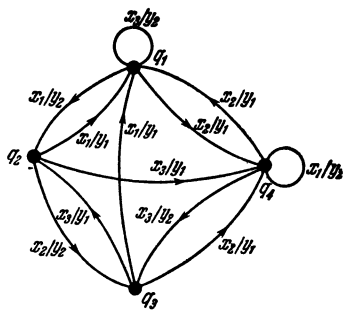
$$y(t) = \psi(q(t)).$$


Рис. 5.3.

Поэтому каждое состояние  $q \in Q$  отмечено некоторой выходной буквой  $y \in Y$ , которая ставится в скобках около элемента  $q \in Q$  в левой части записи отображения  $F$  множества  $Q$ . Это приводит к тому, что аналитически автомат Мура может быть задан в форме  $B = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X))$ , где отображение  $F$  множества  $Q$  в себя любому  $q \in Q$  и каждой букве  $x \in X$  сопоставляет состояние  $q_h \in Q$ , определяющее функцию переходов  $\varphi(q, x)$ , а каждому  $q \in Q$  — выходную букву  $y \in Y$ , определяющую сдвинутую функцию выходов  $\psi(q)$ . Таблица выходов автомата Мура сводится, таким образом, к одной строке. Располагая эту строку над буквами алфавита состояний таблицы переходов, приходим к так называемой *отмеченной* таблице переходов, которая однозначно задает некоторый автомат Мура. При геометрической интерпретации автомата Мура буквы выходного

алфавита  $y \in Y$  ставятся в скобках около соответствующих букв  $q \in Q$  алфавита состояний, а в матрице соединений записываются над соответствующим столбцом.

Пример 5.2. Пусть дан автомат Мура  $B = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X))$ , где  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$ , причем

$$Fq_1(y_2) = \{q_2(x_1), q_3(x_2)\},$$

$$Fq_2(y_1) = \{q_3(x_1), q_2(x_2)\},$$

$$Fq_3(y_2) = \{q_1(x_1), q_2(x_2)\}.$$

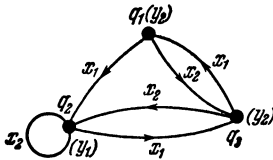


Рис. 5.4.

Графоид автомата  $B$  показан на рис. 5.4. По нему легко воспроизводится отмеченная таблица переходов, определяющая закон функционирования автомата Мура (функции  $\varphi(q, x)$  и  $\psi(q)$ ), которая пока-

Таблица 5.4

Y	$y_2$	$y_1$	$y_2$
X \ Q	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$x_1$	$q_2$	$q_3$	$q_1$
$x_2$	$q_3$	$q_2$	$q_2$

Таблица 5.5

Q	$q_1$	$q_2$	$q_3$
X	$y_1$	$y_2$	$y_2$
$x_1$	$y_1$	$y_2$	$y_2$
$x_2$	$y_2$	$y_1$	$y_1$

зана на табл. 5.4. Матрица соединений  $R_B$  автомата  $B$  имеет вид

$$R_B = \begin{vmatrix} (y_2) & (y_1) & (y_2) \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Построим автомат Мили  $A$ , интерпретирующий автомат Мура  $B$ . Используя табл. 5.4, строим обычную функцию выходов  $\psi(q, x)$  (табл. 5.5), определяющую автомат Мили  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , у которого

$$Fq_1 = \{q_2(x_1/y_1), q_3(x_2/y_2)\},$$

$$Fq_2 = \{q_3(x_1/y_2), q_2(x_2/y_1)\},$$

$$Fq_3 = \{q_1(x_1/y_2), q_2(x_2/y_1)\}.$$

Геометрическая интерпретация автомата Мили  $A$  показана на рис. 5.5, а матрица соединений

$$R_A = \begin{vmatrix} 0 & x_1(y_1) & x_2(y_2) \\ 0 & x_2(y_1) & x_1(y_2) \\ x_1(y_2) & x_2(y_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Легко проверить, что автомат Мили  $A$  индуцирует то же отображение множества слов  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ , что и автомат Мура  $B$ .

До сих пор рассматривались автоматы первого и второго рода, у которых отображение  $F$  множества состояний  $Q$  в себя определено для любой пары элементов  $(q, x)$ , где  $q \in Q$  и  $x \in X$ . Такие автоматы называются *вполне определенными*. Автоматы (любого рода), у которых отображение  $F$  множества  $Q$  в себя определено не для всех пар  $q \in Q$  и  $x \in X$ , называются *частичными* автоматами. Понятие частичного автомата можно также определить, используя функции переходов и выходов автомата. Частичным автоматом называется автомат, у которого функции переходов или функция выходов или обе эти функции определены не для всех значений пар элементов  $q \in Q$  и  $x \in X$ . В тех местах таблиц переходов и выходов, а также матриц соединений автоматов, в которых соответствующие переходы и выходы не определены, будем ставить нули или черточки.

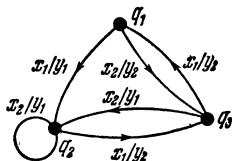


Рис. 5.5.

Рассмотрим отображение, индуцируемое частичным автоматом. Будем подавать на вход автомата, установленного предварительно в начальное состояние, различные слова входного алфавита. Предположим, что при подаче входной буквы  $x_{i_k}$  некоторого слова  $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$  соответствующий ей выходной сигнал окажется не определен. В этом случае говорят, что входное слово  $p$  является *запрещенным* для данного частичного автомата. Совокупность всех запрещенных слов образует *область запрета* данного автомата. Слова, не являющиеся запрещенными, называются *допустимыми*, а их совокупность — множеством допустимых слов автомата. Таким



образом, отображение, индуцируемое частичным автоматом, является не чем иным, как частичным отображением, областью определения которого служит множество допустимых слов данного автомата. Поскольку ранее мы договорились, что под термином отображение будем понимать в общем случае частичное отображение, постольку под термином абстрактный автомат в общем случае будем понимать частичный автомат.

Определим понятие *связного* автомата [113], которое играет важную роль при изучении частичных автоматов.

Состояние  $q_1 \in Q$  абстрактного автомата называется *достижимым*, если оно совпадает с начальным состоянием или если существует такое достижимое состояние  $q_k \in Q$  и такая буква входного алфавита  $x_i \in X$ , что  $q_1(x_i) \in Fq_k$ . В противном случае состояние  $q_1$  называется *недостижимым*. Абстрактный автомат, все состояния которого достижимы, называется *связным*.

Легко видеть, что автомат не может перейти в недостижимое состояние из начального под действием допустимых входных слов. Поэтому в матрице соединений автомата строки и столбцы, помеченные недостижимыми состояниями, можно вычеркнуть. В этом случае индуцируемое автоматом отображение не изменится. Следовательно, при изучении автоматных отображений, которые будут описаны в следующем параграфе, можно ограничиться рассмотрением лишь связных автоматов.

Остановимся теперь на понятии *автономного* автомата. Пусть дан автомат Мили  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ . Различают два вида автономных автоматов Мили: *автономные автоматы по входам* и *автономные автоматы по выходам*.

Автономным автоматом по входной букве  $x \in X$  называется автомат, обозначаемый через  $A_x = (\{x\}, Q, q_1 \in Q, F(x))$ , входной алфавит которого состоит из множества  $\{x\}$ , а отображение  $F$  множества  $Q$  в себя определяется таким образом, что любому  $q \in Q$  сопоставляется такое состояние  $q_k \in Q$ , переход в которое совершается только по входной букве  $x$ . Выходные буквы автомата  $A_x$  не рассматриваются.

Если задан графоид автомата  $A$ , то в нем надо вычеркнуть все ребра, помеченные входными буквами, отличными от  $x$ , а на ребрах, отмеченных буквой  $x$ ,

зачеркнуть обозначения этой буквы  $x$  и всех выходных букв. С помощью указанной процедуры приходим к графу автономного автомата  $A_x$ . Подчеркнем, что автономный автомат задается графом (Бержа), а не графоидом. Что касается матрицы соединений автомата  $A_x$ , то она образуется из матрицы соединений автомата  $A$  заменой всех элементов, отличных от буквы  $x$ , на нуль и вычеркиванием букв выходного алфавита, записанных в скобках около буквы  $x$ .

Автономным автоматом по выходной букве  $y \in Y$  называется автомат, обозначаемый через  $A_y = (Q, \{y\}, q_1 \in Q, F(y))$ , выходной алфавит которого состоит из множества  $\{y\}$ , а отображение  $F$  множества  $Q$  в себя определяется таким образом, что любому  $q \in Q$  сопоставляется такое состояние  $q_1 \in Q$ , переход в которое вызывает появление только выходной буквы  $y$ . Входные буквы автомата  $A_y$  во внимание не принимаются. По графоиду автомата  $A$  по аналогии с автономным автоматом  $A_x$  можно построить граф автономного автомата  $A_y$ .

Таким образом, автомат Мили  $A$  может быть задан как совокупность автономных автоматов по всем буквам входного и выходного алфавита. В случае автоматов Мура имеет смысл говорить об автономных автоматах по входным буквам.

В качестве примера на рис. 5.6, а, б показаны графы автономных автоматов по буквам входного алфавита  $x_1$

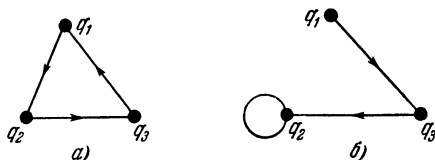


Рис. 5.6.

и  $x_2$  соответственно, а на рис. 5.7, а, б — графы автономных автоматов по буквам выходного алфавита  $y_1$  и  $y_2$  автомата Мили, графоид которого показан на рис. 5.5.

Наряду с понятием эквивалентности автоматов введем очень важное понятие *изоморфизма* автоматов. Два абстрактных автомата  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (Z, V, U, v_1 \in V, P(z \in Z/u \in U))$  одного и

того же рода называются *изоморфными*, если существуют три биективных отображения  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно

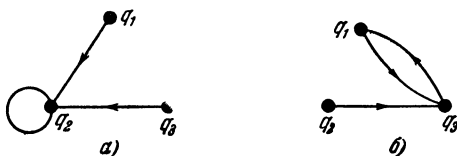


Рис. 5.7.

$X$  на  $Z$ ,  $Q$  на  $V$ ,  $Y$  на  $U$  таких, что  $\beta(q_1) = v_1$ , и для любых элементов  $q \in Q$ ,  $x \in X$  и  $y \in Y$  выполняется соотношение

$$\beta(Fq(x \in X/y \in Y)) = P(\beta(q))(\alpha(x) \in Z/\gamma(y) \in U),$$

причем  $\alpha(x) = z$ ,  $\beta(q) = v$ ,  $\gamma(y) = u$ .

Отношение изоморфизма между автоматами обозначается  $\sim$  и, как легко показать, обладает следующими свойствами:

$A \sim A$  (рефлексивность),

$A \sim B$  влечет  $B \sim A$  (симметричность),

$A \sim B$  и  $B \sim C$  влечет  $A \sim C$  (транзитивность).

Поэтому отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности. Изоморфные автоматы при соответствующем переобозначении индуцируют одно и то же автоматное отображение  $f$ .

В случае частных автоматов помимо эквивалентности и изоморфизма автоматов часто используются понятия *эквивалентного* и *изоморфного продолжения* автоматов.

Пусть даны абстрактные автоматы одного и того же рода  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (Z, V, U, v_1 \in V, P(z \in Z/u \in U))$ , причем  $f$  — отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ , индуцируемое автоматом  $A$ , а  $g$  — отображение множества  $\mathfrak{S}(Z)$  в  $\mathfrak{S}(U)$ , индуцируемое автоматом  $B$ . Если  $X \subseteq Z$  и  $Y \subseteq U$ , а отображение  $g$  продолжает  $f$  на  $\mathfrak{S}(Z)$ , то автомат  $B$  содержит (вклю-

чает) автомат  $A$  или автомат  $A$  содержится (включается) в автомате  $B$ . В этом случае говорят, что  $B$  есть *эквивалентное продолжение* или *надавтомат* автомата  $A$ , а  $A$  — *эквивалентное сужение* или *подавтомат* автомата  $B$ , и обозначают  $A \subseteq B$  или  $B \supseteq A$ . Автомат  $A$  называется *истинным подавтоматом* автомата  $B$  и обозначается  $A \subset B$ , если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ .

Пусть теперь  $A$ ,  $B$  и  $C$  — абстрактные автоматы одного и того же рода. Если  $A \sim B$  и  $B \subseteq C$ , то автомат  $A$  изоморфно вкладывается в автомат  $C$ , или  $C$  изоморфно содержит автомат  $A$ . Говорят также, что автомат  $C$  является *изоморфным продолжением* автомата  $A$ , а автомат  $A$  — *изоморфным сужением* автомата  $C$ . Если  $A \sim B$  и  $B \subset C$ , то автомат  $A$  *строго изоморфно вкладывается* в автомат  $C$ . Изоморфное вложение будем обозначать знаком  $\subseteq$ , а строгое изоморфное вложение знаком  $\subset$ .

Можно показать, что отношения включения и изоморфного вложения автоматов по аналогии с графами обладают следующими свойствами:

$A \subseteq A$ ,  $A \subseteq A$  (рефлексивность),

$A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$  влечет  $A = B$ ,

$A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$  влечет  $A \sim B$  (антисимметричность),

$A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$  влечет  $A \subseteq C$ ,

$A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$  влечет  $A \subseteq C$  (транзитивность).

Поэтому отношения  $\subseteq$  и  $\subseteq$  суть *отношения квазиупорядка*.

По аналогии с графами для произвольного абстрактного автомата  $A$  можно определить *множество*  $\mathfrak{F}(A)$  *подавтоматов автомата*  $A$ , полагая, что любой автомат  $A'$ , который является эквивалентным сужением автомата  $A$ , есть элемент множества  $\mathfrak{F}(A)$ . Однако на этом и других подобных понятиях останавливаться не будем.

В дальнейшем для простоты при изучении алгебраических операций над автоматами и методов разложения автоматов будем рассматривать абстрактные автоматы без выходов, обозначаемые через  $A = (X, Q, q_1 \in Q, F(x \in X))$ . При желании такой автомат можно пополнить выходным алфавитом и превратить в автомат Мили или Мура.

## § 2. Представление событий в автоматах \*)

В предыдущем параграфе было сказано, что любое отображение можно свести к частичному алфавитному отображению. Однако не всякое алфавитное отображение является автоматным. Рассмотрим подробнее автоматные отображения и взаимосвязь между автоматным отображением и произвольным алфавитным отображением.

Исходя из условий работы абстрактного автомата, может показаться, что требование прихода входного сигнала  $x(t)$  и выдача выходного сигнала  $y(t)$  в каждый момент автоматного времени  $t = 1, 2, \dots$  не выполняется в случае реальных автоматов. Однако оно может быть легко удовлетворено, если ввести специальную букву  $e$ , называемую *пустой* буквой, и рассматривать ее наравне с другими буквами входного и выходного алфавитов.

Появление буквы  $e$  на входе автомата соответствует тому, что на вход автомата в действительности ничего не подается, а появление пустой буквы на выходе означает отсутствие какого-либо сигнала на выходе автомата.

Пусть  $X$  и  $Y$  — соответственно входной и выходной алфавиты произвольного абстрактного автомата, а  $\mathfrak{S}(X)$  и  $\mathfrak{S}(Y)$  — множества входных и выходных слов этих алфавитов. Предположим, что абстрактный автомат индуцирует частичное отображение  $f$  множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ . Из определения отображения  $f$  вытекает, что оно удовлетворяет следующим условиям:

1) любому допустимому входному слову  $p \in \mathfrak{S}(X)$  отображение  $f$  сопоставляет выходное слово  $f(p) \in \mathfrak{S}(Y)$ , имеющее одинаковую длину со словом  $p$ ;

2) если  $p$  — допустимое входное слово, а  $p_1$  — начальный отрезок слова  $p$ , то  $f(p_1)$  существует и совпадает с некоторым начальным отрезком слова  $f(p)$ .

Указанные условия называются *условиями автоматности* отображения, а любое алфавитное отображение, удовлетворяющее этим условиям, является *автоматным* отображением.

---

\*) При написании этого параграфа использован, в основном, материал § 1 и 2 гл. III книги В. М. Глушкова [115].

На первый взгляд кажется, что условия автоматности накладывают жесткие ограничения на алфавитные отображения, индуцируемые абстрактными автоматами. Например, равенство длин входных и выходных слов для произвольных (разумеется, однозначных) алфавитных отображений, как правило, не выполняется. Тем не менее любое алфавитное отображение может быть превращено в автоматное отображение с помощью следующего *стандартного* приема.

Предположим, что  $f$  — произвольное частичное отображение множества слов  $\mathfrak{S}(X)$  в множество  $\mathfrak{S}(Y)$ . Введем в алфавиты  $X$  и  $Y$  пустую букву  $e$ , которая первоначально в них не содержится, и образуем новые алфавиты  $X' = X \cup \{e\}$  и  $Y' = Y \cup \{e\}$ . Рассмотрим произвольное слово  $p \in \mathfrak{S}(X)$ , имеющее длину  $n$ , которому отображение  $f$  сопоставляет слово  $r = f(p)$ ,  $r \in \mathfrak{S}(Y)$  длины  $m$ . Обозначим через  $p' \in \mathfrak{S}(X')$  слово в алфавите  $X'$ , которое образуется из слова  $p$  приписыванием справа  $m$  раз буквы  $e$ , а через  $r' \in \mathfrak{S}(Y')$  слово в алфавите  $Y'$ , получающееся путем приписывания к слову  $r$  слева  $n$  раз буквы  $e$ . В результате получаем одинаковую длину слов  $p'$  и  $r'$ , которая равна  $n + m$ . Повторяя этот прием для каждого слова  $p \in \mathfrak{S}(X)$ , на котором определено отображение  $f$ , и полагая  $r' = f'(p')$ , получим новое частичное отображение  $f'$  множества  $\mathfrak{S}(X')$  в  $\mathfrak{S}(Y')$ .

Доопределим отображение  $f'$  на всех начальных отрезках  $p'_i$  любого слова  $p' \in \mathfrak{S}(X')$ . Эту операцию будем называть пополнением отображения  $f'$ . Смысл ее заключается в следующем. Если  $p'_i$  — некоторый начальный отрезок слова  $p'$  из области определения отображения  $f'$ , то полагаем  $f'(p'_i)$  равным начальному отрезку слова  $f'(p')$ , имеющему равную с отрезком  $p'_i$  длину. В результате применения операции пополнения к отображению  $f'$  получаем новое отображение  $f''$ , область определения которого удовлетворяет условию полноты. Если отображение  $f''$  — однозначное отображение, то очевидно, что оно удовлетворяет условиям автоматности и, таким образом, является искомым автоматным отображением. Однако в ряде случаев пополнение отображения неоднозначно, так как одно и то же слово может

входить в качестве начального отрезка в несколько различных слов. Покажем, что построенное нами отображение  $f''$  является однозначным.

Пусть  $p' = pee \dots e$  — произвольное слово из  $\mathfrak{S}(X')$ , причем слово  $p \in \mathfrak{S}(X)$  имеет длину  $n$  и не содержит буквы  $e$ , а  $r' \in \mathfrak{S}(Y')$  — образ  $p'$  по отображению  $f'$ , который имеет вид  $r' = ee \dots er$ , где  $r \in \mathfrak{S}(Y)$  — слово длины  $m$ , не содержащее буквы  $e$ ;  $p'_1$  — любой начальный отрезок слова  $p'$ . Рассмотрим два возможных случая.

Допустим, что слово  $p'_1$  содержит хотя бы одну букву  $e$ . Тогда оно имеет вид  $p'_1 = pe \dots$ . Задание любого слова такого вида однозначно определяет слово  $p$ , а следовательно, и слово  $p'$ . Таким образом, слово  $p'_1$  совпадает с начальным отрезком одного лишь слова  $p'$ , и если  $p'_1$  является начальным отрезком другого слова  $g' = ge \dots$ , то, поскольку  $g$  не содержит буквы  $e$ , слова  $p'$  и  $g'$  должны совпадать между собой. Поэтому образ  $f''(p'_1)$  определяется однозначно.

Предположим теперь, что слово  $p'_1$  не содержит ни одной буквы  $e$ . В этом случае длина слова  $p'_1$  не превосходит длину слова  $p$  и, в силу определения операции выравнивания длин, соответствующий начальный отрезок слова  $r'_1 = f''(p'_1)$  будет состоять из одних только пустых букв  $e$ . Так будет, очевидно, не только для слова  $p'$ , но и для любого слова, начальным отрезком которого является слово  $p'_1$ . Поэтому возникновение неоднозначности исключено и в этом случае.

Таким образом, частичное отображение  $f''$ , построенное из произвольного алфавитного отображения  $f$ , по самому способу построения удовлетворяет условиям автоматности и является частичным автоматным отображением.

Следует заметить, что стандартный прием преобразования любого частичного отображения в автоматное отображение, в силу своей общности, не всегда приводит к экономному решению с точки зрения расходования дополнительных букв.

Докажем теперь теорему существования абстрактного автомата для любого автоматного отображения.

**Теорема 5.1.** *Всякое частичное автоматное отображение  $f$  может быть индуцировано с помощью некоторого абстрактного автомата  $A$ .*

**Доказательство.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  и  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  — соответственно входной и выходной алфавиты частичного автоматного отображения  $f$ , осуществляющего отображение множества  $\mathfrak{E}(X)$  в  $\mathfrak{E}(Y)$ . Построим абстрактный автомат первого рода  $A$ , входным алфавитом которого является  $X$ , выходным алфавитом  $Y$ , а множеством состояний служит множество всех допустимых слов входного алфавита, которое обозначим через  $Q$ . В качестве начального состояния автомата  $A$  выбираем пустое слово  $e \in Q$ . Функцию переходов  $\varphi(q, x)$  автомата  $A$ , которая задает отображение  $F$  множества  $Q$  в себя, определим следующим образом: если  $q_h \in Q$  — любое состояние автомата (допустимое слово), а  $x_i$  — произвольная входная буква, то будем считать, что  $\varphi(q_h, x_i)$  равняется слову  $q_h x_i = q_l$  (которое получается в результате приписывания буквы  $x_i$  к слову  $q_h$ ), если слово  $q_l \in Q$  (т. е. является допустимым), и что  $\varphi(q_h, x_i)$  не определено в противном случае (т. е.  $q_l \notin Q$ ). Функцию выходов  $\psi(q, x)$ , которая задает выходные буквы  $y \in Y$  автомата  $A$ , определим соотношением  $\psi(q_h, x_i) = y_j$ , где  $y_j$  — последняя буква слова  $f(q_h, x_j)$ . Таким образом, построен абстрактный автомат  $A = (X, Q, Y, e \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , индуцирующий отображение  $f$ .

В том случае, когда область определения отображения  $f$  конечна, автомат  $A$  является конечным, в противном случае — бесконечным. Легко видеть, что при геометрической интерпретации абстрактный автомат  $A$  задается конечным или бесконечным нагруженным прадеревом с корнем  $e$ .

До сих пор мы подробно не останавливались на способах задания частичных отображений, полагая, что любое алфавитное отображение с конечной областью определения задается *таблицей соответствия*, в левой части которой в любом порядке выписаны все входные слова, на которых определяется отображение, а в правой части соответствующие им выходные слова. Что касается автоматных отображений, то их, естественно, также можно задавать таблицей соответствия, если



область определения автоматного отображения конечна. Как правило, для автоматных отображений записывают такую таблицу, в которой никакое входное слово не является начальным отрезком какого-либо другого входного слова. Такая таблица называется *сокращенной таблицей соответствия*. Используя второе условие автоматности отображения, от сокращенной таблицы в случае необходимости легко перейти к полной таблице соответствия. Однако при синтезе автоматов наибольший интерес представляют произвольные автоматные отображения, в том числе и с бесконечной областью определения, задание которых невозможно с помощью таблиц соответствия. Удобной формой задания произвольных автоматных отображений является задание их с помощью *событий*, к рассмотрению которых мы и перейдем.

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  — произвольный алфавит, а  $\mathfrak{S}(X)$  — множество всех слов в этом алфавите. Любое подмножество множества  $\mathfrak{S}(X)$  называется *событием* в алфавите  $X$ .

Пусть  $A$  — абстрактный автомат с входным алфавитом  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  и выходным алфавитом  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , который индуцирует частичное отображение  $f$  множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ . *Событием  $R_j$ , представленным в автомате  $A$  выходным сигналом  $y_j$  ( $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ ), называется множество всех слов  $p \in \mathfrak{S}(X)$  этого автомата, для которых слово  $f(p)$  определено и оканчивается буквой  $y_j$* . Если  $N \subseteq Y$  — некоторое подмножество выходных сигналов, то событием, представленным в автомате  $A$  множеством  $N$ , называется *объединение* событий, представляемых всеми элементами этого множества. В том случае, когда  $N$  совпадает с алфавитом  $Y$ , соответствующее ему событие называется *каноническим множеством событий  $R_1, R_2, \dots, R_n$  автомата  $A$* .

Сформулируем теперь важное предложение, которое подводит базу под изучение автоматных отображений.

**Теорема 5.2.** *Задание частичного автоматного отображения  $f$  множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$  произвольного абстрактного автомата  $A$  с входным алфавитом  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  и выходным алфавитом  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  эквивалентно заданию канонического множества событий  $R_1, R_2, \dots, R_n$  данного автомата.*

Для доказательства теоремы 5.2 достаточно показать справедливость двух утверждений.

*Лемма 5.1. Задание частичного автоматного отображения  $f$  множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$  произвольного абстрактного автомата  $A$  однозначно определяет каноническое множество событий  $R_1, R_2, \dots, R_n$  автомата  $A$ .*

*Лемма 5.2. Задание канонического множества событий  $R_1, R_2, \dots, R_n$  произвольного абстрактного автомата  $A$  однозначно задает частичное отображение  $f$ , индуцируемое автоматом  $A$ .*

Докажем вначале лемму 5.1. Пусть  $f$  — частичное автоматное отображение  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$  и  $p$  — произвольное слово из  $\mathfrak{S}(X)$ . Если образ  $f(p)$  существует и оканчивается буквой  $y_j$ , то входное слово  $p$  отнесем к множеству  $R_j$ , отмеченному выходным сигналом  $y_j$ . Если хотя бы для одной входной буквы слова  $p$  не определена выходная буква, то слово  $p$  является запрещенным и его относим к множеству  $S$  — области запрета автомата  $A$ . Легко видеть, что в результате просмотра всех слов  $p \in \mathfrak{S}(X)$  множество  $\mathfrak{S}(X)$  разбивается на  $n + 1$  попарно непересекающихся подмножеств  $R_1, R_2, \dots, R_n$  и  $S$ . Множества  $R_1, R_2, \dots, R_n$  являются событиями, представленными в автомате  $A$  выходными сигналами  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , и, следовательно, образуют каноническое множество событий автомата  $A$ , а множество  $S$  — событие, состоящее из всех тех слов  $p \in \mathfrak{S}(X)$ , которые не вошли ни в одно из событий  $R_j, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ . Таким образом, лемма 5.1 доказана.

Покажем справедливость леммы 5.2. Пусть дано каноническое множество событий  $R_1, R_2, \dots, R_n$  абстрактного автомата  $A$ . Покажем, каким образом определить частичное отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ , индуцируемое автоматом  $A$ , не используя отображения  $F$  множества состояний  $Q$  в себя или, другими словами, не прибегая к помощи таблиц переходов и выходов автомата  $A$ . Предположим, что  $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$  — произвольное входное слово из  $\mathfrak{S}(X)$ . Для каждого  $x_{i_l}$  ( $1 \leq l \leq k$ ) найдем выходную букву  $y_{j_l}$  по следующему правилу:  $y_{j_l}$  есть выходной сигнал, представляющий в автомате  $A$  событие  $R_{j_l}$ , которое содержит начальный отрезок

$x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_l}$  длины  $l$  входного слова  $p$ . Если для всех  $l = 1, 2, \dots, k$  существуют соответствующие им  $y_{i_l}$ , то полагаем  $f(p) = f(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_k}) = y_{i_1}y_{i_2} \dots y_{i_k}$ . Если хотя бы для одного  $l$  не существует  $y_{i_l}$ , то полагаем, что отображение  $f$  на слове  $p$  не определено и  $p \in S$ . Этим лемма 5.2 и, следовательно, теорема 5.2 доказаны.

Таким образом, из теоремы 5.2 вытекает, что *произвольные автоматные отображения* можно задавать с помощью разбиений множества  $\mathfrak{S}(X)$  всех слов во входном алфавите на конечное число попарно непересекающихся событий. Для эффективного описания конечных и некоторых классов бесконечных событий рассмотрим так называемую *алгебру событий*.

Как известно [247], алгеброй называется всякое множество элементов  $M$ , на котором определена конечная или бесконечная система  $n$ -арных алгебраических операций. Задать  $n$ -арную алгебраическую операцию  $\omega$  на  $M$  — значит для любых  $n$  элементов  $g_1, g_2, \dots, g_n \in M$  указать элемент  $g \in M$ , который является результатом применения операции  $\omega$  к элементам  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Это записывают следующим образом:  $g = \omega(g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Операция  $\omega$  может быть определена не для всех наборов  $g_1, g_2, \dots, g_n \in M$  в так называемых частичных алгебрах, но требование однозначности операции  $\omega$  обязательно.

*Алгеброй событий* в алфавите  $X$  называется множество всех событий в этом алфавите, на котором задана система трех операций: двух бинарных, называемых *дизъюнкцией* и *умножением*, и одной унарной, называемой *итерацией*.

*Дизъюнкцией* событий  $R$  и  $S$  называется событие  $P$ , обозначаемое  $P = R \vee S$ , которое образуется теоретико-множественным объединением событий  $R$  и  $S$ .

*Произведением* событий  $R$  и  $S$  называется событие  $U$ , обозначаемое  $U = R \cdot S$ , состоящее из всех слов вида  $u = r \cdot s$ , где  $u \in U$ ,  $r \in R$  и  $s \in S$ . Следовательно, слова события  $U$  образуются приписыванием справа любого слова события  $S$  к любому слову события  $R$ , но не наоборот.

*Итерацией* события  $R$  называется событие, обозначаемое  $\{R\}^*$ , которое определяется как дизъюнкция пу-

стого слова  $e$ , события  $R$ , события  $R \cdot R$ , события  $R \cdot R \cdot R$  и т. д. до бесконечности, т. е.

$$\{R\}^* = e \vee R \vee R \cdot R \vee R \cdot R \cdot R \vee \dots$$

Рассмотрим в качестве примера алфавит  $X = \{x_1, x_2\}$ . Пусть заданы события  $R = \{x_1, x_2x_1\}$  и  $S = \{x_2x_2, x_1x_2\}$  в алфавите  $X$ . На основании определений легко построить события  $R \vee S$ ,  $R \cdot S$ ,  $\{R\}^*$ , которые имеют вид

$$R \vee S = \{x_1, x_2x_1, x_2x_2, x_1x_2\},$$

$$R \cdot S = \{x_1x_2x_2, x_1x_1x_2, x_2x_1x_2x_2, x_2x_1x_1x_2\},$$

$$\{R\}^* = \{e, x_1, x_2x_1, x_1x_1, x_1x_2x_1, x_2x_1x_1, x_2x_1x_2x_1, x_1x_1x_1, \\ x_1x_2x_1x_1, x_2x_1x_1x_1, x_2x_1x_2x_1x_1, x_1x_1x_2x_1, x_1x_2x_1x_2x_1, \\ \dots, x_2x_1x_1x_2x_1, x_2x_1x_2x_1x_2x_1, \dots\}.$$

Одноэлементные события, т. е. события, состоящие из одного слова, будем обозначать символом этого слова. Заметим, что событие  $e$ , образованное пустым словом  $e$ , состоит из одного слова нулевой длины и играет вспомогательную роль в теории автоматов. Условимся не считать различными события, отличающиеся друг от друга только пустым словом  $e$ . Кроме события  $e$  будем также рассматривать пустое событие  $\emptyset$ , которое состоит из пустого множества букв входного алфавита, и поэтому является частью любого события.

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  — произвольный алфавит. Введем теперь важное понятие *регулярного выражения* в алфавите  $X$ , которое определяется рекурсивно следующим образом:

1) символы  $x_1, x_2, \dots, x_m, e$  и  $\emptyset$  являются *регулярными выражениями*;

2) если  $R$  и  $S$  — *регулярные выражения*, то таковыми являются  $R \vee S$ ,  $R \cdot S$  и  $\{R\}^*$ ;

3) *никакое другое выражение не является регулярным, если оно не получено путем конечного числа применений правил 1 и 2.*

Таким образом, регулярное выражение — *формула* в алгебре событий, причем одно и то же событие может быть по-разному выражено через одноэлементные события и операции дизъюнкции, умножения и итерации. Те

события, для которых существуют регулярные выражения, называются *регулярными* событиями. В противном случае событие называется *нерегулярным*.

Большое значение в алгебре событий имеет установление законов эквивалентного преобразования регулярных выражений. Мы ограничимся рассмотрением основных свойств операций  $\vee$ ,  $\cdot$ ,  $\{ \}^*$ , которые вытекают из определений. Пусть  $P, R, S$  — произвольные регулярные события из  $\mathfrak{E}(X)$ . Тогда имеют место соотношения

$$P \vee \emptyset = \emptyset \vee P = P,$$

$$P \cdot \emptyset = \emptyset \cdot P = \emptyset,$$

$$P \cdot e = e \cdot P = P,$$

$$\{\emptyset\}^* = e,$$

$$\{e\}^* = e,$$

$$\left. \begin{aligned} P \vee R &= R \vee P, \\ P \cdot \{P\}^* &= \{P\}^* \cdot P \end{aligned} \right\} \text{ (коммутативность дизъюнкции и итерации),}$$

$$\left. \begin{aligned} P \vee (R \vee S) &= (P \vee R) \vee S, \\ P \cdot (R \cdot S) &= (P \cdot R) \cdot S \end{aligned} \right\} \text{ (ассоциативность дизъюнкции и умножения),}$$

$$\left. \begin{aligned} P \cdot (R \vee S) &= (P \cdot R) \vee (P \cdot S), \\ (P \vee R) \cdot S &= (P \cdot S) \vee (R \cdot S) \end{aligned} \right\} \text{ (левая и правая дистрибутивность умножения относительно дизъюнкции),}$$

$$\{P\}^* = e \vee P \cdot \{P\}^* \text{ (развертывание итерации),}$$

$$\left. \begin{aligned} P \vee P &= P, \\ \{\{P\}^*\}^* &= \{P\}^* \end{aligned} \right\} \text{ (идемпотентность дизъюнкции и итерации),}$$

$$\{P\}^* \vee P = \{P\}^* \text{ (дизъюнктивное поглощение итерации).}$$

$$\{P\}^* \cdot \{P\}^* = \{P\}^* \text{ (мультипликативное поглощение итерации).}$$

Фигурные скобки со звездочкой  $\{ \}^*$ , используемые для обозначения итерации, называются итерационными скобками. Для указания порядка выполнения операций в алгебре событий вводятся обыкновенные скобки. При отсутствии обычных скобок первыми выполняются итерации, затем умножения и в последнюю очередь дизъюнкции.

*Циклической глубиной регулярного выражения* называется максимальное число вложенных друг в друга

пар итерационных скобок. Например, выражение  $\{x_1\{x_2\{x_1\}^*x_1\}^*\vee x_3\}^*\vee x_2$  имеет циклическую глубину 3, а выражение  $(\{x_2\}^*\cdot\{x_1x_3\}^*)\cdot x_2\vee\{x_1x_2\}^*$  — циклическую глубину 1. Все конечные выражения имеют нулевую циклическую глубину. Под *циклической глубиной регулярного события* подразумевают минимальную циклическую глубину представляющих его регулярных выражений.

Рассмотрим некоторые примеры регулярных событий в алфавите  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

1) Событие, называемое универсальным, которое состоит из всех слов алфавита  $X$ , может быть записано в виде

$$P = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}^*.$$

2) Событие, которое содержит только трехбуквенные слова алфавита  $X$ , имеет вид

$$R = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

3) Событие, состоящее из всех слов, в которых хотя бы один раз встречается отрезок  $x_1x_2x_1$ , можно записать в форме

$$S = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}^* \cdot x_1x_2x_1 \cdot \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}^*.$$

4) Событие, состоящее из всех слов, которые начинаются буквой  $x_1$  или  $x_3$ , а оканчиваются отрезком  $x_1x_2$ :

$$T = (x_1 \vee x_3) \cdot \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}^* \cdot x_1x_2.$$

5) Событие, содержащее все слова, длина которых кратна двум:

$$U = \{(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\}^*.$$

6) Событие, состоящее из таких слов, начало которых есть любое слово из букв  $x_1$  или  $x_2$ , затем следует двухбуквенное слово из  $x_2$  или  $x_3$  и, наконец, окончание содержит, по крайней мере, одну букву  $x_1$ :

$$Q = \{x_1 \vee x_2\}^* \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot x_1 \cdot \{x_1\}^*.$$

Из рассмотрения операций  $\vee, \cdot, \{ \}^*$  алгебры событий вытекает, что все конечные события регулярны. Это следует из того, что любое слово события выражается произведением букв, а любое конечное событие — дизъюнкцией образующих его слов.

Применение итерации приводит к появлению бесконечных регулярных событий. Однако, как легко заметить, большинство бесконечных событий являются нерегулярными. Действительно, множество слов в непустом конечном алфавите так же, как и множество всех регулярных выражений, счетно, в то время как множество всех событий в таком алфавите имеет мощность континуума.

Построим пример нерегулярного события следующим образом. Выберем бесконечную возрастающую последовательность целых чисел  $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$  так, что разности  $n_{i+1} - n_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) не ограничены в совокупности, т. е. для любого сколь угодно большого числа  $N$  найдется такое  $i$ , что  $n_{i+1} - n_i > N$ . Этому условию удовлетворяет, например, последовательность квадратов, кубов и т. д. чисел натурального ряда. Теперь в любом входном алфавите  $X$  построим событие  $S$ , состоящее из всех слов, имеющих длины, равные  $n_1, n_2, \dots$ . Покажем, что событие  $S$  обязательно нерегулярно. Допустим противное и предположим, что  $R$  — некоторое регулярное выражение события  $S$ . Поскольку событие  $S$  бесконечно, это выражение содержит хотя бы одни итерационные скобки, заключающие внутри себя выражение, отличное от пустого слова  $\epsilon$ . Заменим все остальные итерационные скобки в выражении  $R$  пустым словом, а выделенные скобки — выражением  $\{p\}^*$ , где  $p$  — произвольное непустое слово из события  $S$ . В результате получим регулярное выражение  $R_1$  для некоторого события, содержащегося в  $S$ . Из выражения  $R_1$  следует, что в событие  $S$  входят слова вида  $rg, rpg, rppg, rpppg, \dots$ , длины которых составляют бесконечную возрастающую арифметическую прогрессию. Но это противоречит способу построения события  $S$ . Следовательно, событие  $S$  не может быть представлено никаким регулярным выражением и является нерегулярным событием.

### § 3. Задачи анализа и синтеза автоматов

Основными задачами теории автоматов являются задачи *анализа* и *синтеза* автоматов. Под анализом автомата понимают установление отображения, реализуемого схемой заданного автомата  $A$ , а под синтезом —

построение схемы автомата, который индуцирует заданное отображение  $f$ . Точная постановка задач анализа и синтеза автоматов будет дана ниже.

В теории автоматов обычно выделяют несколько этапов (уровней), среди которых особое значение имеют *абстрактный* и *структурный* этапы.

На абстрактном уровне рассматриваются задачи, связанные с распознаванием эквивалентности, изоморфизма и изоморфного вложения автоматов, абстрактного анализа и синтеза автоматов, минимизации автоматов, изучаются вопросы алгебры автоматов и методы разложения автоматов по различным операциям, которые решают проблему последовательной, параллельной и общей декомпозиции абстрактных автоматов.

Если в абстрактной теории автоматов везде под автоматом подразумевается абстрактный автомат, заданный либо графом, либо матрицей соединений, то в структурной теории автоматов, говоря об автомате, имеют в виду структурную схему, состоящую из элементов некоторого стандартного комплекса, в который входят набор элементарных автоматов и функционально полный набор логических элементов. Поэтому на структурном уровне изучаются методы перехода от графа или матрицы соединений автомата к структурной схеме автомата, приемы построения схем сложных автоматов из схем элементарных автоматов и логических элементов, рассматриваются способы кодирования состояний, входных и выходных сигналов автомата, различные варианты которых определяют, в конечном счете, сложность структурной схемы автомата при неизменном законе его функционирования.

Методы теории графов позволяют успешно решать задачи абстрактной и структурной теории автоматов.

Так, алгоритмы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения абстрактных автоматов основаны на аналогичных алгоритмах ориентированных графов, а задачи абстрактного анализа и синтеза автоматов решаются методом теории линейных переходных графов [519]. Что касается структурной теории автоматов, то методы построения схем сложных автоматов на основе композиции более простых автоматов соответствуют заданию теоретико-множественных и алгебраических



операций на множестве автоматов, подобных операциям над графами, а проблема кодирования состояний автомата сводится к задачам разложения автоматов по алгебраическим операциям. Алгоритмы разложения автоматов решают проблему последовательной и параллельной декомпозиции автоматов, а общая декомпозиция автоматов приводит к декомпозиционному методу синтеза, который основные трудности структурного синтеза, связанные с кодированием состояний автомата, решает на абстрактном уровне.

В абстрактной теории автоматов важное значение имеют задачи анализа и синтеза автоматов, а на структурном уровне на первый план ставится проблема синтеза автоматов, которой посвящено большинство работ, связанных со структурной теорией автоматов.

Задачи абстрактного анализа и синтеза автоматов противоположны друг другу. Различают *канонические* и *общие* задачи абстрактного анализа и синтеза автоматов.

*Канонические* задачи анализа и синтеза формулируются следующим образом:

1) *по заданному абстрактному автомату Мили или Мура  $A$  найти соответствующее ему каноническое множество событий  $M$ ;*

2) *по заданному автоматному множеству событий  $M$  найти абстрактный автомат Мили или Мура  $A$ , каноническое множество событий которого совпадает с  $M$ .*

Известно, что каноническое множество событий, задающее индуцируемое автоматом отображение, определяется однозначно по абстрактному автомату. В этом смысле каноническая задача анализа автоматов однозначна. Вместе с тем, одно и то же событие допускает несколько эквивалентных форм регулярных выражений. Поэтому в результате анализа требуется отыскать регулярное выражение, имеющее минимальную циклическую глубину.

Что касается канонической задачи синтеза автоматов, то она по своему существу неоднозначна. Это объясняется тем, что абстрактный автомат не определяется однозначно соответствующим ему каноническим множеством событий, поскольку одно и то же автоматное отображение может индуцироваться различными аб-

страктными автоматами. Поэтому в результате решения канонической задачи синтеза находим один из возможных автоматов, а затем ставится задача минимизации абстрактных автоматов, которая заключается в отыскании автомата с минимальным числом состояний.

*Общие задачи анализа и синтеза автоматов формулируются следующим образом:*

1) *по заданному абстрактному автомату Мили или Мура А найти событие, которое представлено в автомате А любым множеством выходных букв или состояний автомата;*

2) *по любому конечному множеству событий построить абстрактный автомат Мили или Мура А, который представляет каждое событие этого множества некоторым множеством выходных букв или состояний.*

Легко видеть, что общая и каноническая задачи анализа автоматов родственны друг другу. Действительно, если найдено каноническое множество событий данного автомата, то нетрудно найти событие, представленное в автомате любым множеством выходных сигналов как объединение некоторых событий канонического множества, и, наоборот, решая общую задачу анализа, можно последовательно найти все события, составляющие каноническое множество данного автомата.

Вопрос о близости общей и канонической задач синтеза автоматов не столь очевиден. Тем не менее существует стандартный прием сведения общей задачи синтеза автоматов к канонической задаче синтеза, которая всегда имеет решение, основанный на следующем утверждении.

Для любого конечного (а не только автоматного) множества событий в произвольном конечном алфавите существует каноническое разбиение, которое представляет собой автоматное множество событий (см. В. М. Глушков [113]).

Решение общих задач анализа и синтеза для конечных автоматов и регулярных событий будет дано в гл. VI. Именно там сформулируем алгоритмы абстрактного анализа и синтеза автоматов, которые вытекают из справедливости фундаментальной теоремы С. К. Клини о представлении событий в конечных автоматах.

**Теорема 5.3 (Клини)\*.** *Класс событий, представимых в конечных автоматах, совпадает с классом регулярных событий.*

По сути дела, теорема 5.3 состоит из двух теорем, которые часто называют *первой* и *второй* теоремами Клини.

**Теорема 5.3а.** *Событие, представленное в произвольном конечном автомате Мили или Мура некоторым множеством выходных сигналов или состояний, обязательно регулярно.*

**Теорема 5.3б.** *Любое регулярное событие может быть представлено в конечном автомате Мили или Мура некоторым множеством выходных сигналов или состояний.*

Конструктивное доказательство этих теорем как раз и приводит к алгоритмам абстрактного анализа и синтеза автоматов. Теорема 5.3 является фундаментальной теоремой абстрактной теории автоматов, поскольку из нее следует, что язык регулярных выражений оказывается достаточным для описания отображений, индуцируемых произвольными конечными автоматами.

В структурной теории автоматов наибольшее распространение получил канонический метод синтеза автоматов, основная идея которого заключается в следующем.

По графоиду абстрактного автомата или по таблицам переходов и выходов, учитывая таблицы элементарных автоматов (которые выбраны предварительно), строится кодированная таблица переходов и выходов исходного автомата [57]. По ней находят функции возбуждения и выходов элементарных автоматов, совместная работа которых соответствует синтезируемому автомату. После минимизации функций возбуждения и выходов элементарных автоматов по ним составляют структурную схему синтезированного автомата. Основная трудность канонического метода синтеза заключается в построении кодированной таблицы переходов и выходов исходного автомата, так как выбор того или иного

---

\*) Строгое доказательство теоремы 5.3 можно найти в работах С. К. Клини [212], В. М. Глушкова [113], М. А. Айзермана и др. [3].

варианта кодирования состояний, входных и выходных сигналов автомата определяет сложность структурной схемы автомата.

Общая декомпозиция абстрактных автоматов решает проблему кодирования состояний автомата и приводит к декомпозиционному методу структурного синтеза, который состоит в следующем. Состояниям матрицы соединений абстрактного автомата приписывается произвольный, но фиксированный вариант кодирования (например, двоичное разложение десятичного номера состояния). Матрица соединений абстрактного автомата дополняется до правильной клеточной матрицы с некоторым числом запрещенных переходов. Путем преобразования матрицы соединений автомата отыскивается такой изоморфный автомат, матрица соединений которого содержит минимальное число запрещенных переходов и обеспечивает наилучший или близкий к нему вариант кодирования состояний. По этой матрице записываются обобщенные функции переходов и выходов автомата, из которых после минимизации получаются функции возбуждения и выходов элементарных автоматов. По функциям возбуждения и выходов строится близкая к оптимальной (с точки зрения минимального числа логических элементов) структурная схема синтезированного автомата.

Заметим, что выделение абстрактного и структурного уровней в теории автоматов до некоторой степени условно, и не всегда можно четко провести границу между двумя этапами синтеза автоматов. Основная тенденция разрабатываемого декомпозиционного метода синтеза автоматов заключается в том, чтобы трудности структурного этапа преодолеть на абстрактном уровне, создав тем самым единый или сквозной метод синтеза, приводящий к минимальной структурной схеме автомата.

#### **§ 4. Об изоморфизме и изоморфном вложении абстрактных автоматов**

Покажем, каким образом, используя результаты, полученные для графов (см. гл. I, § 4, 5), можно сформулировать алгоритмы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения абстрактных автоматов.

Известно, что если абстрактные автоматы  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (Z, V, U, v_1 \in V, P(z \in Z/u \in U))$  одного и того же рода имеют  $m$  состояний,  $l$  входных и  $r$  выходных букв, то теоретически для установления изоморфизма автоматов  $A$  и  $B$  в общем случае требуется выполнить  $m! l! r!$  попарных сравнений, а если автомат  $A$  содержит  $m$  состояний,  $l$  входных и  $r$  выходных букв, а автомат  $B$  —  $n$  состояний,  $k$  входных и  $p$  выходных букв, причем  $m \leq n$ ,  $l \leq k$ ,  $r \leq p$ , то для распознавания изоморфного вложения автомата  $A$  в автомат  $B$  требуется в общем случае проделать

$$C_n^m C_k^l C_p^r \cdot m! l! r!$$

попарных сравнений.

Для упрощения дальнейшего изложения будем предполагать, что рассматриваются абстрактные автоматы без выходов.

Пусть даны абстрактные автоматы  $A = (X, Q, q_1 \in Q, F(x \in X))$  и  $B = (Y, V, v_1 \in V, P(y \in Y))$ , где  $X = \{x_k\}$ ,  $k \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ , и  $Y = \{y_l\}$ ,  $l \in J$ , — соответственно входные алфавиты, а  $Q = \{q_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , и  $V = \{v_j\}$ ,  $j \in I$ , — алфавиты состояний автоматов  $A$  и  $B$ .

*Лемма 5.3. Если автоматы  $A$  и  $B$  изоморфны, то существует такая подстановка  $t \in T$  алфавита состояний и подстановка  $z \in Z$  входного алфавита, которые переводят  $A$  в  $B$ .*

Справедливость этой леммы следует из определения изоморфизма автоматов.

Представим каждый абстрактный автомат объединением автономных автоматов по буквам входного алфавита.

Тогда запишем

$$A = \bigcup_{x \in X} A_x \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{y \in Y} B_y.$$

Так как  $A_x$  и  $B_y$  являются графами, то к ним можно применить теорему 1.1. В дальнейшем граф  $A_x$  будем называть графом класса  $X$ , а  $B_y$  — графом класса  $Y$ . Полустепени исхода и захода вершин  $q_i \in Q$  и  $v_j \in V$  обозначим соответственно через  $s_i$ ,  $u_j$  и  $p_i$ ,  $w_j$ . Из теоремы 1.1 и леммы 5.3 вытекает следующая теорема.

**Теорема 5.4.** *Для того чтобы автоматы  $A$  и  $B$  были изоморфны, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) для любого графа класса  $X$  существует такой граф класса  $Y$ , что

$$(\forall q_i)(q_i \in Q)[(\exists v_j)(v_j \in V)((s_i = u_j) \& (p_i = w_j))];$$

б)  $(\exists t)(t \in T)(\exists z)(z \in Z)$  ( $q_1$  переводит в  $v_1$ ) &  
& ( $A$  переводят в  $B$ ).

По аналогии с теоремой 1.2 для графов имеет место следующая теорема для автоматов.

**Теорема 5.5.** *Если даны автоматы  $A$  и  $B$ , имеющие  $n$  состояний и  $m$  входов, причем каждый из автоматов  $A_x(x \in X)$  и  $B_y(y \in Y)$  соответственно не содержит одинаковых пар чисел  $(s, p)$  и  $(u, w)$ , то установить изоморфизм автоматов и определить подстановки  $t \in T$  и  $z \in Z$ , переводящие  $A$  в  $B$ , можно не более чем за*

$$\frac{nm(n+1)(m+1)}{4} \text{ шагов сравнения.}$$

**Доказательство.** Так как каждый автомат  $A$  и  $B$  можно представить объединением  $m$  графов с  $n$  вершинами, то, используя теорему 1.2, можно не более чем за  $\frac{n(n+1)}{2} m$  шагов сравнения установить изоморфизм графа  $A_{x_i}$  класса  $X$  и одного из графов  $B_{y_i}$  класса  $Y$  построением графа соответствия алфавита состояний из  $n$  ребер. Таким образом находим подстановку  $t_1 \in T$  и частичную подстановку  $z_1$ , определяющую одно ребро графа соответствия букв входного алфавита. Для графа  $A_{x_2}$  и одного из графов  $B_{y_j}$  установим изоморфизм и получим подстановки  $t_2 \in T$  и  $z_2$  не более чем за  $\frac{n(n+1)}{2} (m-1)$  шагов сравнения и т. д. В результате не более чем за

$$\frac{n(n+1)}{2} m + \frac{n(n+1)}{2} (m-1) + \dots + \frac{n(n+1)}{2},$$

т. е.

$$\frac{nm(n+1)(m+1)}{4}$$

шагов сравнения получим подстановки  $t_1, t_2, \dots, t_m \in T$

и  $z \in Z$ . Если  $t_1 = t_2 = \dots = t_m = t \in T$  и  $z \in Z$  удовлетворяют условию б) теоремы 5.4, то автоматы изоморфны. Этим теорема доказана.

Вообще говоря, если рассматривать произвольные автоматы  $A$  и  $B$ , то каждый из автоматов  $A_x (x \in X)$  и  $B_y (y \in Y)$  может содержать элементы с одинаковыми парами чисел  $(s, p)$  и  $(u, w)$ . Поэтому ниже мы сформируем обобщенный алгоритм распознавания изоморфизма автоматов, который использует метод решения аналогичной задачи для графов с одинаковыми парами чисел  $(s, p)$  и  $(u, w)$ .

Алгоритм распознавания изоморфизма абстрактных автоматов  $A$  и  $B$ .

1°. Подсчитываем числа состояний и букв входных алфавитов автоматов. При их равенстве переходим к 2°, а при неравенстве к 9°.

2°. Представляем каждый из автоматов  $A$  и  $B$  в виде объединения автоматов (графов). Переходим к 3°.

3°. Выписываем все элементы состояний каждого из графов класса  $X$  и класса  $Y$  в естественной упорядоченности и определяем пары  $(s, p)$  и  $(u, w)$  для каждого элемента. Переходим к 4°.

4°. Для графа  $A_x$  класса  $X$  ищем такой граф  $B_y$  класса  $Y$ , чтобы выполнялось условие а) теоремы 5.4. Получаем одну или несколько (при наличии одинаковых пар  $(s, p)$  и  $(u, w)$ ) подстановок  $T_1 \subset T$  и частичную подстановку  $z_1$ . Переходим к 5°. В противном случае к 9°.

5°. Последовательно применяем 4° для каждого графа  $A_x$  класса  $X$ . Получаем множество подстановок  $T_2 \subset T, \dots, T_m \subset T$  и подстановку  $z \in Z$ . Переходим к 6°.

6°. Находим множество подстановок  $T_0 = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_m$ . Если  $T_0 = \emptyset$ , то переходим к 9°. В противном случае к 7°.

7°. Для полученных подстановок  $t \in T_0$  и  $z \in Z$  проверяем выполнение условия б) теоремы 5.4. Если оно выполняется, то переходим к 8°; в противном случае к 9°.

8°. Автоматы изоморфны.

9°. Автоматы не изоморфны.

Пример 5.3. Пусть даны автоматы  $A = (X, Q, q_1 \in Q, F(x \in X))$  и  $B = (Y, V, v_2 \in V, P(y \in Y))$ , геометрическая интерпретация которых показана на рис. 5.8 и 5.9. Требуется установить, изоморфны ли автоматы  $A$  и  $B$ .

Представим автоматы  $A$  и  $B$  по буквам входных алфавитов  $A_x (x \in X)$  и  $B_y (y \in Y)$  в соответствии с рис. 5.10.

Применяя алгоритм, получим множество подстановок:

$$T_1 = \{t_1\}, \quad \text{где } t_1 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_2 & v_4 & v_5 & v_1 & v_3 \end{pmatrix};$$

$$T_2 = \{t_1, t_2\}, \quad \text{где } t_1 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_2 & v_4 & v_5 & v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_2 & v_5 & v_4 & v_1 & v_3 \end{pmatrix};$$

$$T_3 = \{t_1, t_3\}, \quad \text{где } t_1 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_2 & v_4 & v_5 & v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_2 & v_4 & v_3 & v_1 & v_5 \end{pmatrix};$$

$$z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_3 & y_2 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Подстановки  $z$  и  $t \in T_0 = T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{t_1\}$  удовлетворяют условию б) теоремы 5.4. Поэтому автоматы  $A$  и  $B$  изоморфны.

Рассмотрим теперь вопрос об изоморфном вложении автоматов. Пусть  $A = (X, Q, q_1 \in Q, F(x \in X))$  и  $B =$

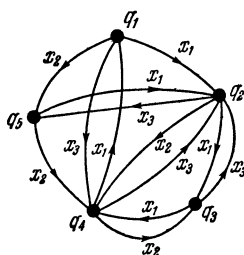


Рис. 5.8.

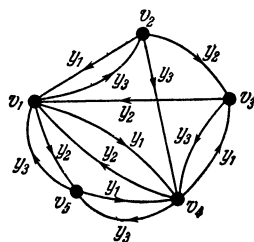


Рис. 5.9.

$= (Y, V, v_1 \in V, P(y \in Y))$  — абстрактные автоматы без выходов, у которых  $Q = \{q_i\}, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ , и  $V = \{v_j\}, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ , — соответственно множества состояний, а  $X = \{x_\alpha\}, \alpha \in A = \{1, 2, \dots, l\}$ , и  $Y = \{y_\beta\}, \beta \in B = \{1, 2, \dots, k\}$ , — множества входных сигналов, причем  $m \leq n$  и  $l \leq k$ .

По аналогии с леммой 1.3 и теоремой 1.3 для автоматов справедливы следующие предложения.



**Лемма 5.4.** Если автомат  $A$  изоморфно вложим в автомат  $B$ , то существуют такая подстановка  $t \in T$  множества состояний  $Q$  на  $V' \subseteq V$  и такая подстановка  $z \in Z$  множества букв входного алфавита  $X$  на  $Y' \subseteq Y$ , которые переводят автомат  $A$  в автомат  $B' \subseteq B$ .

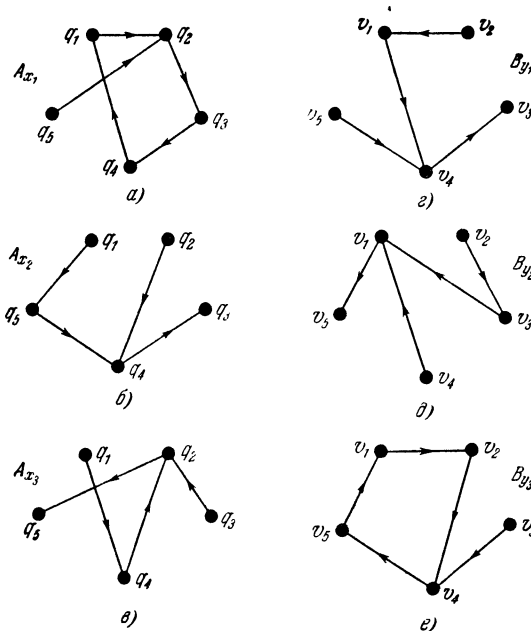


Рис. 5.10.

**Теорема 5.6.** Для того чтобы автомат  $A$  изоморфно вкладывался в автомат  $B$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) для любого графа класса  $X$  существует такой граф класса  $Y$ , что

$$(\forall q_i \in Q) (\exists v_j \in V) ((s_i \leq u_j) \& (p_i \leq w_j));$$

б)  $(\exists t \in T) (\exists z \in Z) ((q_1 \text{ переводит в } v_1) \& \\ \& (A \text{ переводят в } B' \subseteq B)).$

Используя алгоритм распознавания изоморфного вложения графов и теорему 5.6, можно сформулировать

алгоритм распознавания изоморфного вложения автомата  $A$  в автомат  $B$ .

1°. Подсчитываем числа состояний  $m$ ,  $n$  и букв входных алфавитов  $l$  и  $k$  автоматов  $A$  и  $B$ . Если выполняется  $m \leq n$  и  $l \leq k$ , то переходим к 2°. Если  $m > n$  или  $l > k$ , то переходим к 7°.

2°. Представим автомат  $A$  в виде объединения графов класса  $X$ , а автомат  $B$  — объединением графов класса  $Y$ . Переходим к 3°.

3°. Применяя алгоритм распознавания изоморфного вложения графов и учитывая, что состоянию  $q_1$  соответствует состояние  $v_1$ , определяем вложение графа  $A_{x_1}$  в каждый из графов класса  $Y$ . Каждая из частичных подстановок состояний автоматов  $t_{1i}$ , полученных на основании установления вложения графа  $A_{x_1}$ , в какой-либо из графов класса  $Y$ , задает частичную подстановку  $z_{1i}$  букв входных алфавитов. Таких частичных подстановок  $z_{1i}$  в общем случае может быть несколько. Переходим к 4°. Если граф  $A_{x_1}$  изоморфно не вложим ни в один из графов класса  $Y$ , то переходим к 7°.

4°. Определяем по аналогии с 3° изоморфное вложение графа  $A_{x_2}$  в каждый из графов класса  $Y$ . Если он изоморфно не вкладывается, то переходим к 7°. Если он вложим, то получим одну или несколько частичных подстановок состояний автоматов  $t_{2i}$  и одну или несколько частичных подстановок  $z_{2i}$  букв входных алфавитов автоматов. Одна из подстановок  $t_{2i}$  должна доопределять или быть эквивалентной какой-либо из подстановок  $t_{1i}$  и, кроме того, доопределять подстановку  $z_{1i}$  букв входных алфавитов. Если это выполняется, то переходим к 5°, в противном случае к 7°.

5°. Последовательно определяем изоморфное вложение остальных графов класса  $X$  в графы класса  $Y$ . Если какой-либо из графов  $A_{x_\alpha}$  изоморфно не вложим ни в один из графов класса  $Y$ , то переходим к 7°. Если все графы класса  $X$  изоморфно вложимы в разные графы класса  $Y$ , что определяет подстановку  $z \in Z$  букв входных алфавитов, и подстановка состояний автоматов доопределена до полной  $t \in T$ , которая совместно с подстановкой  $z \in Z$  переводит автомат  $A$  в  $B' \subseteq B$ , то переходим к 6°.

6°. Автомат  $A$  изоморфно вложим в автомат  $B$ .

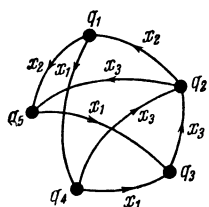


Рис. 5.11.

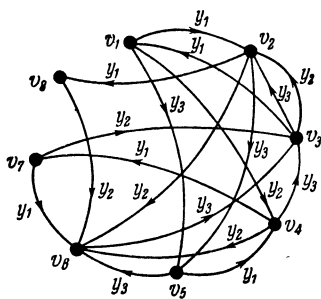


Рис. 5.12.

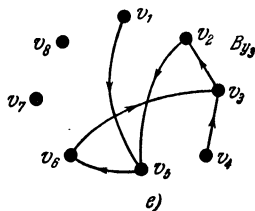
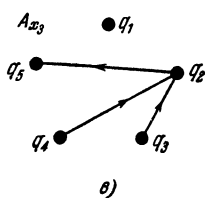
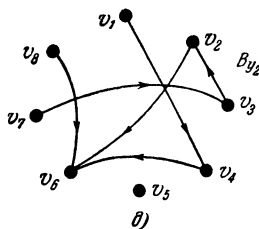
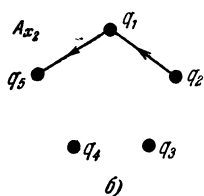
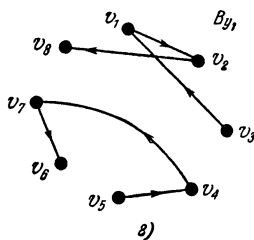
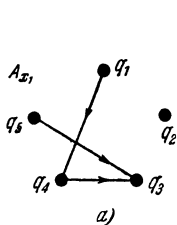


Рис. 5.13.

7°. Автомат  $A$  изоморфно не вложим в автомат  $B$ .

Покажем работу алгоритма на примере.

Пример 5.4. Пусть даны автоматы  $A$  и  $B$ , показанные соответственно на рис. 5.11 и 5.12. Требуется установить, вкладывается ли изоморфно автомат  $A$  в автомат  $B$ .

Разложим автоматы  $A$  и  $B$  по буквам входных алфавитов так, как показано на рис. 5.13.

В результате применения алгоритма распознавания изоморфного вложения графов видим, что граф  $A_{x_1}$  изоморфно вкладывается только в граф  $B_{y_1}$ . Этим определены частичные подстановки

$$t_1 = \begin{pmatrix} q_1 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_1 & v_6 & v_4 & v_2 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Граф  $A_{x_2}$  изоморфно вкладывается лишь в граф  $B_{y_1}$ , определяя подстановки

$$t_2 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_5 \\ v_1 & v_3 & v_2 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Подстановки  $t_2$  и  $z_2$  не противоречат подстановкам  $t_1$  и  $z_1$  и доопределяют их до подстановок

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_1 & v_3 & v_6 & v_4 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad z' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что граф  $A_{x_3}$  изоморфно вкладывается только в граф  $B_{y_3}$ . Полученные при этом подстановки

$$t_3 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ v_1 & v_3 & v_6 & v_4 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad z_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

не противоречат ранее найденным  $t$  и  $z'$  и доопределяют  $z'$  до полной подстановки

$$z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Так как подстановки  $t$  и  $z$  переводят автомат  $A$  в  $B' \subset B$ , то автомат  $A$  изоморфно вложим в автомат  $B$ .

## АБСТРАКТНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ АВТОМАТОВ

## § 1. Основные понятия теории линейных переходных графов \*)

В этой главе формулируются алгоритмы абстрактного анализа и синтеза автоматов, основанные на методах теории линейных переходных графов или, как говорят, линейных графов сигналов (signal flow graphs), а также на решении систем уравнений в алгебре событий.

*Переходным графом сигналов* принято называть такой ориентированный граф, каждой вершине  $i$  которого соответствует сигнал (весовая функция)  $a_i$ , зависящий некоторым образом от сигналов (весовых функций) на других вершинах [596, 597].

Путь на графе представляет собой последовательность смежных дуг, причем каждой дуге, соединяющей вершины  $a_i$  и  $a_j$ , соответствует одна из букв алфавита  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , через которые обозначены веса дуг. Вес каждой дуги, соединяющей вершины  $a_i$  и  $a_j$ , соответствует переходу  $t_{ij}$ , показывающему, как сигнал  $a_j$  относится к сигналу  $a_i$ . Если обозначить вершины графа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то путь, проходящий через вершины с возрастающим номером, называется *прямым* путем, а путь, вдоль которого номера вершин убывают, называется *обратным* путем. Путь на графе может быть *открытым*, если одна и та же вершина встречается не более одного раза, и *замкнутым*, если путь возвращается к начальной вершине. Путь может быть и незамкнутым, и неоткрытым. Последовательность дуг, входящих в замкнутый путь, называется *контуром обратной связи*. Дуги и вершины, не входящие в контур обратной связи, называются *каскадными*. Вершина называется *стоком*, если она

---

\*) Первые три параграфа этой главы по просьбе автора написаны В. П. Карелиным и В. М. Курейчиком.

имеет только входящие дуги, и *источником*, если она имеет только выходящие дуги. Две вершины или дуги, лежащие в общем контуре обратной связи, называются *спаренными*.

На рис. 6.1 показан переходный граф сигналов. Пути  $x_1x_2x_7x_8x_{13}$ ,  $x_1x_3x_{11}x_{13}$ ,  $x_1x_4x_8x_{13}$  являются прямыми, а путь  $x_9x_5$  — обратным. Все эти пути являются открытыми, тогда как  $x_9x_5x_4$ ,  $x_{10}$ ,  $x_6$  — замкнутыми, а пути  $x_1x_3x_{10}x_{12}$ ,  $x_1x_2x_6x_7$  и не открыты, и не замкнуты. Дуги, соединяющие вершины  $a_1$  и  $a_2$ ,  $a_5$  и  $a_6$ ,  $a_4$  и  $a_6$ ,  $a_4$  и  $a_7$ ,  $a_6$  и  $a_7$ , — каскадные, а остальные — дуги обратной связи.

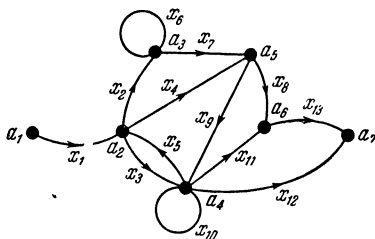


Рис. 6.1.

Вершина  $a_1$  является источником, а вершина  $a_7$  — стоком. Вершины  $a_2, a_3, a_4, a_5$  — вершины обратной связи, а вершины  $a_1, a_6, a_7$  — каскадные. Вершины  $a_2$  и  $a_4$  спаренные, так как они лежат в общем контуре обратной связи.

Граф, состоящий только из каскадных вершин, называется *каскадным*, а граф, содержащий одну или более вершин обратной связи, называется *графом обратной связи*. Соединение обратной связи представляет собой подграф, в котором каждая пара вершин спарена. Такой подграф состоит только из вершин и ветвей обратной связи.

Поскольку те вершины графа, которые являются стоком и истоком, всегда каскадные, то любую из вершин соединения обратной связи можно сделать каскадной с помощью операции, называемой *расщеплением вершины* [519].

Произвольная вершина  $a_j$  в этом случае расщепляется на две вершины:  $a'_j$ , которая является истоком, и  $a''_j$ , которая служит стоком. На рис. 6.2 показан пример расщепления вершины  $a_4$  графа, приведенного на рис. 6.1.

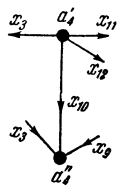


Рис. 6.2.

Минимальное число вершин, которые нужно расщепить, чтобы разбить все контуры обратной связи, назы-

вается *индексом соединения* обратной связи. Расщепленные вершины называются *индексными* вершинами.

Переходный граф сигналов можно упростить, удалив ряд вершин и приведя ветевой переход к значению пути через устраненные вершины. Полученный граф называется *остатком* первоначального графа. Вершина, входящая в остаточный граф, называется *остаточной*. Путь, если он связывает остаточную вершину с собой или с заданной остаточной вершиной и не проходит через любые другие остаточные вершины, кроме указанных, также является *остаточным*.

Исключая в исходном графе все вершины, кроме источников, стоков и индексных вершин, получим *индексный остаток* переходного графа. Пример индексного остатка графа, приведенного на рис. 6.1, показан на рис. 6.3, а. В качестве индексной вершины выбрана вершина  $a_4$ , так как ее расщепление устраняет все контуры

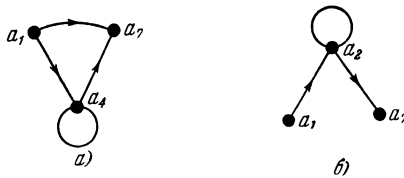


Рис. 6.3.

обратной связи. Вместо вершины  $a_4$  может быть выбрана вершина  $a_2$ . Тогда индексный остаток графа имеет вид рис. 6.3, б. Пути  $x_1x_2x_7x_8x_{13}$  и  $x_1x_4x_8x_{13}$  на графе рис. 6.3, а являются примерами остаточных путей. Путь  $x_1x_3x_5x_4x_8x_{13}$  не является остаточным, так как он проходит через остаточную вершину  $a_4$ .

Если необходимо сохранить вершину  $a_i$ , которая не является ни источником, ни стоком, ни индексной вершиной, то это можно сделать путем соединения вершины  $a_i$  с новой вершиной  $a'_i$  дугой с весом  $e$ , а затем удалением вершины  $a_i$ . Сигнал  $x'_i$ , таким образом, равен сигналу  $x_i$ , и так как вершина  $a'_i$  не имеет других связей, то она является истоком. Аналогично вершина может быть превращена в сток путем подстановки но-

вой вершины  $a_i''$  с соединением перехода от  $a_i$  к  $a_i''$ , а затем удалением вершины  $a_i$ .

Переходный граф сигналов является *линейным*, если сигнал на каждой вершине  $a_i$  является линейной комбинацией сигналов на других вершинах:

$$a_i = \sum_j a_j t_{ij}, \quad i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Нетрудно убедиться [519], что графоид автомата является линейным переходным графом сигналов, если:

1) сигнал, соответствующий каждой вершине  $a_i$ , является множеством  $x_{1i}$  последовательностей, которые переводят автомат из начального состояния  $a_1$  в состояние  $q_i$ ;

2) ветвевой переход  $t_{ij}$  дуги, связывающей вершины  $a_i$  и  $a_j$  (или состояния  $q_i$  и  $q_j$ ), является входным сигналом  $x \in X$ , который вызывает переход автомата из состояния  $q_i$  в состояние  $q_j$ ;

3) к сигналу, соответствующему начальному состоянию  $q_1$ , добавляется пустая буква  $e$  для обозначения того, что последовательность нулевой длины оставляет автомат в состоянии  $q_1$ .

Сигнал на каждой вершине  $q_j$ , т. е. множество последовательностей  $x_{1j}$ , можно записать следующим образом:

$$x_{1j} = \sum_{q_i \in p_j} x_{1i} t_{ij} + \delta(q_j), \quad (6.1)$$

где  $t_{ij}$  — дизъюнкция входных букв, переводящих автомат из состояния  $q_i$  в  $q_j$  и  $\delta(q_j) = e$ , если  $j = 1$ , и  $\delta(q_j) = \emptyset$ , если  $j \neq 1$ , где  $q_1$  — начальное состояние автомата. Следовательно, тождественные преобразования, применяемые к линейным переходным графам, естественным образом распространяются и на графоиды автоматов, с учетом лишь того, что умножение здесь не коммутативно.

На рис. 6.4 показаны элементарные тождества для каскадных переходных графов сигналов. Из рис. 6.4, а следует, что из вершины  $a_1$  можно попасть в  $a_2$  по дуге с весом  $x_1$  или  $x_2$ , а из рис. 6.4, б видно, что из  $a_1$  в  $a_3$  можно попасть, пройдя последовательно дугу с весом  $x_1$ ,



а затем дугу с весом  $x_2$ . На рис. 6.4, в показано преобразование узла в четырехугольник.

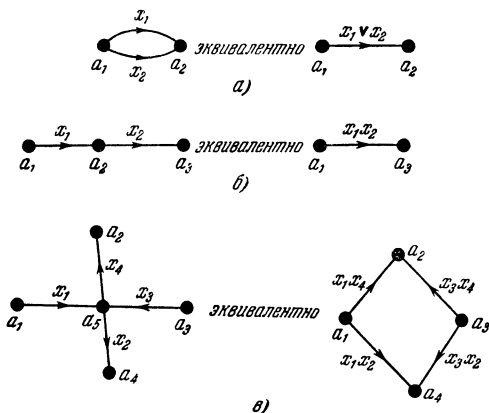


Рис. 6.4.

В теории переходных графов сигнала петля соответствует делению. По формуле (6.1) для графа, показанного



Рис. 6.5.

на рис. 6.5, можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = e, \\ a_2 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x, \\ a_3 = a_2 (-1). \end{cases} \quad (6.2)$$

Решая систему (6.2) относительно  $a_2$ , находим

$$\begin{aligned} a_2 - a_2 x &= a_1 \cdot 1, \\ a_2 (1 - x) &= a_1 \cdot 1, \\ a_2 &= \frac{a_1 \cdot 1}{1 - x}. \end{aligned}$$

Известно, что для  $|x| < 1$  имеет место

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (6.3)$$

В алгебре событий это аналогично итерации

$$\{x\}^* = e \vee x \vee x^2 \vee x^3 \vee \dots, \quad (6.4)$$

геометрическая интерпретация которой имеет вид, показанный на рис. 6.6.



Рис. 6.6.

Переходный граф с контуром обратной связи показан на рис. 6.7. Нетрудно установить, что множество

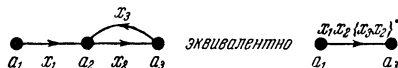


Рис. 6.7.

путей, ведущих из вершины  $a_1$  в вершину  $a_3$ , является бесконечной суммой

$$\begin{aligned} R &= x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 x_2 + x_1 x_2 (x_3 x_2)^2 + x_1 x_2 (x_3 x_2)^3 + \dots = \\ &= x_1 x_2 [1 + x_3 x_2 + (x_3 x_2)^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Учитывая (6.3) и (6.4), можно записать

$$R = x_1 x_2 [e \vee x_3 x_2 \vee (x_3 x_2)^2 \vee \dots] = x_1 x_2 \{x_3 x_2\}^*.$$

Поэтому описанные тождественные преобразования можно использовать для получения регулярных выражений по графоиду автомата.

## § 2. Алгоритм анализа автоматов

Одной из важных проблем теории автоматов является проблема анализа, состоящая в отыскании регулярного выражения, представимого в конечном автомате. Вопросы анализа конечных автоматов рассмотрены

в работах В. М. Глушкова [113], Бжозовского и Мак-Класки [519], В. Г. Боднарчука [40], М. А. Спивака [414] и др. Было предложено несколько подходов и методов решения данной проблемы.

Существующие в настоящее время методы анализа можно разделить на графические и аналитические. Впервые алгоритм получения регулярных выражений графическим методом по графоиду автомата был дан Мак-Ноттоном и Ямадой [603], однако он довольно громоздок, и в дальнейшем Бжозовским и Мак-Класки был предложен более простой алгоритм, использующий методы теории переходных графов сигналов. В. М. Глушков [113] построил алгоритм анализа конечных автоматов, состоящий в последовательном применении операции расширения. В других работах проблема анализа автоматов сводится к решению ряда линейных уравнений в алгебре событий.

Ниже приводятся алгоритмы графического и аналитического методов анализа автоматов Мура. Заметим, что указанные методы можно распространить на автоматы Мили [519].

Рассмотрим графический метод анализа конечных автоматов. Отыскание регулярного выражения, означающего множество слов, переводящих графоид автомата из состояния  $q_i$  в  $q_j$ , сводится к нахождению ветвевых переходов из вершины  $q_i$  в  $q_j$ . В этом случае графоид автомата приводится к переходному графу, имеющему только два состояния  $q_i$  и  $q_j$ . Если в начале приведения вершина  $q_i$  является источником, а  $q_j$  — стоком, то полученный граф будет иметь только один непустой переход от  $q_i$  к  $q_j$ , и вес этого перехода как раз и является искомым регулярным выражением.

При сведении графоид автомата к переходному графу с двумя вершинами остальные вершины должны быть удалены.

Пусть необходимо устранить в графе вершину  $q_k$  с петлевым переходом  $t_{kk}$ . Причем вершины  $q_p$  и  $q_s$  соответственно являются предшествующей и последующей по отношению к вершине  $q_k$ . Очевидно, что регулярное выражение, переводящее графоид из  $q_p$  в  $q_s$ , будет иметь вид

$$R_1 = t_{pk} \cdot \{t_{kk}\}^* \cdot t_{ks},$$

а если устраним вершину  $q_k$ , то регулярное выражение запишется следующим образом:

$$R = t_{ps} \vee t_{pk} \cdot \{t_{kk}\}^* \cdot t_{ks}. \quad (6.5)$$

Таким образом, любой графоид автомата можно свести к линейному переходному графу с двумя вершинами  $q_i$  и  $q_j$ , ветвевой переход между которыми является искомым регулярным выражением, представимым в автомате состоянием  $q_j$  при условии, что  $q_i$  — начальное состояние автомата.

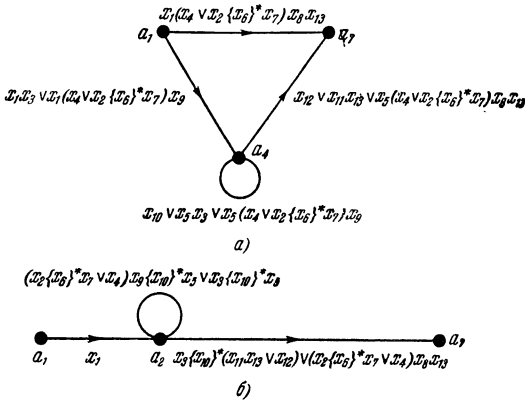


Рис. 6.8.

При анализе графоид автомата, как правило, необходимо приводить к индексному остатку. Любой графоид автомата можно привести к индексному остатку с помощью элементарных преобразований, показанных на рис. 6.4. Однако на практике используют приведение к индексному остатку с проверкой по правилу, которое заключается в том, что между остаточными вершинами  $q_i$  и  $q_j$  в переходном графе должна быть дуга, если в первоначальном графоиде есть, по крайней мере, один остаточный путь между  $q_i$  и  $q_j$ . Вес такой дуги равен дизъюнкции всех приращений остаточных путей от  $q_i$  к  $q_j$ . Прирост пути от вершины  $q_i$  к  $q_j$  определяется произведением приращений дуг, образующих этот путь.

Взвешенные индексные остатки графа (рис. 6.1.) показаны на рис. 6.8. Остаточные пути от вершины  $q_4$

к вершине  $q_7$  на рис. 6.8, а суть  $x_{12}$ ,  $x_{11}x_{13}$ ,  $x_5(x_4 \vee \vee x_2\{x_6\}^*x_7)x_8x_{13}$ . Следовательно, приращение новой ветви будет

$$x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_5(x_4 \vee x_2\{x_6\}^*x_7)x_8x_{13}.$$

Пути  $x_5x_4x_9x_{12}$  и  $x_5x_4x_9x_{11}x_{13}$  не являются остаточными, так как они проходят через вершину  $q_4$ . Легко видеть, что приращение ветви от вершины  $q_2$  к вершине  $q_7$  (рис. 6.8, б) имеет вид

$$x_3\{x_{10}\}^*(x_{11}x_{13} \vee x_{12}) \vee (x_2\{x_6\}^*x_7 \vee x_4)x_8x_{13}.$$

В случае, когда индексный остаток включает сложный контур обратной связи, устранимые вершины могут быть исключены путем расщепления вершин. Для удаления вершины  $q_k$  все другие вершины расщепляются на источники и стоки; а переходы источник — сток вычисляются и заменяются единичными дугами. Затем расщепленные вершины соединяются вновь. Если вершина  $q_k$  должна быть устранена, то приращение новой дуги между вершинами  $q_p$  и  $q_s$  определяется по формуле, аналогичной (6.5), т. е. состоит из дизъюнкции приращений прямого пути от  $q_p$  к  $q_s$  и приращения пути от  $q_p$  к  $q_s$  через вершину  $q_k$ .

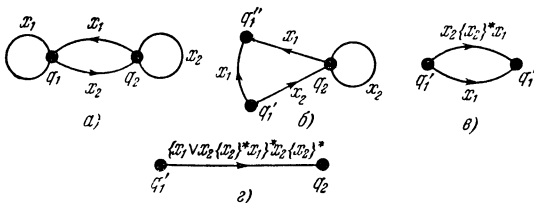


Рис. 6.9.

На рис. 6.9 показан пример расщепления и удаления вершин для определения регулярного выражения, представимого в автомате  $A$  состоянием  $q_2$ .

Сформулируем теперь алгоритм анализа абстрактных автоматов, основанный на методах теории переходных графов.

1°. По графоиду автомата находим источник и сток. Если их нет, то начальная вершина  $q_i$  соединяется с вер-

шиной  $q'_i$  дугой с весом  $e$ , и конечная вершина  $q_j$  соединяется с вершиной  $q'_i$  дугой с весом  $e$ . После этого  $q'_i$  берется как источник, а  $q'_j$  — как сток. Переходим к 2°.

2°. Все параллельные пути приводятся к форме  $x_h \vee x_s$  и все последовательные пути к форме  $x_h \cdot x_s$ . Переходим к 3°.

3°. Получаем индексный остаток графоида, отмечая вершины  $q_i$  и  $q_j$  и индексные вершины. Находим приращения остаточных дуг. Переходим к 4°.

4°. Устраняем последовательно индексные вершины индексного остатка графоида автомата. Приращение пути от вершины  $q_i$  к вершине  $q_j$  есть регулярное выражение, представимое в автомате состоянием  $q_j$ , при условии, что  $q_i$  — начальное состояние автомата.

Работу алгоритма покажем на примере.

Пример 6.1. Пусть дан автомат Мура  $A$ , графоид которого показан на рис. 6.10, а. Найти событие, представимое состоянием  $q_5$ .

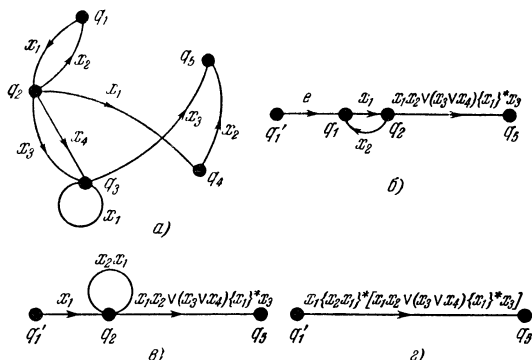


Рис. 6.10.

Так как графоид имеет сток, но не имеет источника, то добавляем вершину  $q'_1$ , из которой в  $q_1$  проводим дугу, нагруженную пустой буквой  $e$ . Затем в соответствии с п. 2° алгоритма преобразуем графоид к виду, показанному на рис. 6.10, б. Индексный остаток графа приведен на рис. 6.10, в. Исключая индексную вершину  $q_2$ , получаем ветвевой переход (рис. 6.10, г), который определяет

искмое регулярное выражение

$$R = x_1 \cdot \{x_2 x_1\}^* \cdot [x_1 x_2 \vee (x_3 \vee x_4) \cdot \{x_1\}^* x_3].$$

Аналитический метод анализа абстрактных автоматов состоит в нахождении регулярного выражения события, представимого в автомате, путем решения системы линейных уравнений в алгебре событий.

Известно [510], что любой графоид автомата может быть представлен системой линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} R_1 = R_1 \vee x_1 \vee R_2 \vee x_2 \vee \dots \vee R_n \vee x_n \vee e, \\ R_2 = R_1 \vee y_1 \vee R_2 \vee y_2 \vee \dots \vee R_n \vee y_n, \\ R_n = R_1 \vee z_1 \vee R_2 \vee z_2 \vee \dots \vee R_n \vee z_n, \end{cases} \quad (6.6)$$

где  $R_i$  ( $i \in I = 1, 2, \dots, n$ ) — событие, представимое в автомате состоянием  $q_i$ , т. е. множество путей, ведущих из состояния  $q_1$  в  $q_i$ , где  $q_1$  — начальное состояние;  $\vee x_i$  — дизъюнкция весов дуг, ведущих из вершины  $q_i$  в  $q_1$ ;  $\vee y_i$  — дизъюнкция весов дуг, ведущих из вершины  $q_i$  в  $q_2$ , и т. д.;  $\vee z_i$  — дизъюнкция весов дуг, ведущих из  $q_i$  в  $q_n$ .

Приведенная система сводится к решению уравнения

$$R = RX \vee C,$$

где  $X$  — матрица соединений автомата,  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ , а

$$C = \begin{cases} e, & \text{если } R = \{R_1\}, \\ \emptyset, & \text{если } R = \{R_2, R_3, \dots, R_n\}. \end{cases}$$

Если графоид автомата не содержит ни одного цикла, то система уравнений (6.6) имеет единственное решение

$$R = C \cdot \{X\}^*.$$

В противном случае, т. е. когда существуют циклы, решение системы (6.6) неоднозначно и имеет вид

$$R = (C \vee T) \{X\}^*,$$

где  $T$  — любое событие. В результате решения системы (6.6) можно найти каноническое множество событий данного автомата.

Пример 6.2. Пусть дан автомат  $A$ , графическая интерпретация которого показана на рис. 6.11. Найти событие, представимое в автомате  $A$  состоянием  $q_4$ , полагая, что  $q_1$  — начальное состояние.

По графоиду автомата запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1 = e, \\ R_2 = R_1x_1 \vee R_3x_2, \\ R_3 = R_1x_2 \vee R_2x_1 \vee R_3x_3, \\ R_4 = R_3x_3. \end{cases}$$

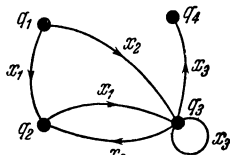


Рис. 6.11.

Систему уравнений решаем методом последовательного исключения неизвестных. Исключим вначале неизвестное  $R_2$ . Получим

$$\begin{aligned} R_2 &= x_1 \vee R_3x_2, \\ R_3 &= x_2 \vee (x_1 \vee R_3x_2)x_1 \vee R_3x_3. \end{aligned}$$

Затем находим

$$R_4 = (x_2 \vee x_1x_1)\{x_2x_1 \vee x_3\}^*x_3,$$

которое является регулярным выражением события, представимого в автомате  $A$  состоянием  $q_4$ .

### § 3. Минимальная форма регулярного выражения

Известно, что в результате анализа абстрактных автоматов графическим или аналитическим методами получается некоторое множество эквивалентных форм регулярных выражений события, представимого в автомате. Эти регулярные выражения различны по своей сложности. Поэтому возникает проблема получения минимальной формы регулярного выражения.

Регулярное выражение называется *минимальным*, если оно имеет наименьшую циклическую глубину  $s$ . При равной циклической глубине нескольких регулярных выражений минимальным будет выражение, обладающее меньшей длиной  $l$ , где  $l$  — количество букв, входящих в регулярное выражение.

Нетрудно убедиться, что при аналитическом и графическом методах анализа конечного автомата получается



конечное число эквивалентных форм регулярных выражений, задающих работу автомата. Поэтому минимальная форма регулярного выражения одного и того же события может быть получена за конечное число раз применения алгоритма анализа к графоиду автомата.

Для того чтобы получить упрощенную (близкую к минимальной) форму регулярного выражения в процессе однократного применения алгоритма анализа, ниже предлагается ряд правил. Введем предварительно некоторые понятия.

Графоид называется *типичным*, если он имеет источник и сток, *слабо типичным*, если он имеет только источник, и *нетипичным*, если он не содержит ни источника, ни стока или имеет лишь сток.

Следует иметь в виду, что полустепень захода вершины  $q_i$  равна количеству вершин, из которых в  $q_i$  ведет хотя бы одна дуга.

*Правило 1. Для типичного графоида, имеющего только прямые пути, минимальная форма регулярного выражения определяется последовательным исключением неизвестных (вершин) в системе уравнений в любом порядке.*

Для такого автомата существует всего одно регулярное выражение.

*Правило 2. Для типичного графоида, имеющего контуры обратной связи, исключение неизвестных (вершин) начинается с неизвестного  $R_i$ , соответствующего вершине  $q_i$ , имеющей наименьшую полустепень захода. Исключение нельзя начинать с неизвестного  $R_i$ , соответствующего конечной вершине  $q_i$ . Дальнейшее исключение следует проводить по возрастающей величине полустепени захода.*

*Правило 3. Для слаботипичного графоида исключение неизвестных (вершин) следует начинать с неизвестного  $R_i$ , соответствующего вершине  $q_i$ , имеющей наименьшую полустепень захода.*

*Правило 4. Для нетипичного графоида, отмеченная вершина которого является стоком, исключение неизвестных (вершин) производится, как и для типичного графоида, по правилу 2. Для нетипичного графоида, отмеченная вершина которого не является стоком, исключение следует производить в соответствии с правилом 3.*

В общем случае может оказаться, что в несколько уравнений системы входит одинаковое число неизвестных (на графоиде это соответствует наличию нескольких вершин с одинаковыми полустепенями захода). Тогда неясно, с какого неизвестного (вершины) следует начинать исключение. Всего таких случаев может быть три, которые показаны на рис. 6.12, а, б, в. В зависимости от

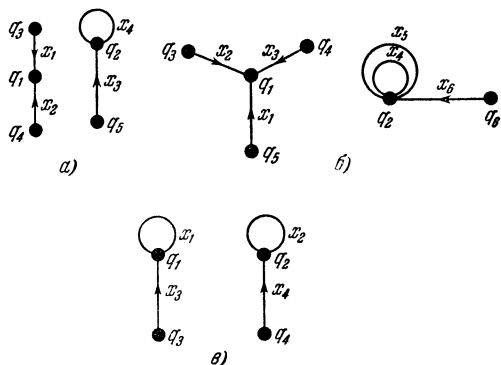


Рис. 6.12.

того, какая из вершин является начальной, получим три следующих варианта.

1) На рис. 6.12, а, б, в показаны части некоторых автоматов, ни одна вершина которых не является начальным состоянием.

Система уравнений для графоидов, показанных на рис. 6.12, а, имеет вид

$$\begin{cases} R_1 = R_3x_1 \vee R_4x_2, \\ R_2 = R_5x_3 \vee R_2x_4, \end{cases} \quad (6.7)$$

откуда

$$R_2 = R_5x_3\{x_4\}^*.$$

Следовательно, исключение нужно начинать с неизвестного  $R_2$ .

Система уравнений для графоидов, показанных на рис. 6.12, б, запишется в форме

$$\begin{cases} R_1 = R_5x_1 \vee R_3x_2 \vee R_4x_3, \\ R_2 = R_2x_4 \vee R_2x_5 \vee R_6x_6, \end{cases} \quad (6.8)$$

откуда

$$R_2 = R_6 x_6 \{x_4 \vee x_5\}^*.$$

Поэтому исключение следует начинать с неизвестного  $R_2$ .

Наконец, для графоидов, показанных на рис. 6.12, *в*, система уравнений которых запишется в виде

$$\begin{cases} R_1 = R_1 x_1 \vee R_3 x_3, \\ R_2 = R_2 x_2 \vee R_4 x_4, \end{cases} \quad (6.9)$$

исключение неизвестных можно проводить в любом порядке.

2) Предположим, что  $q_1$  — начальное состояние некоторых частей автоматов, показанных на рис. 6.12, *а*, *б*, *в*. Тогда в системы уравнений (6.7), (6.8) и (6.9) для  $R_1$  добавляется буква  $e$ . Это усложняет уравнение  $R_1$ . Поэтому исключение неизвестных (вершин на графоиде) во всех случаях следует начинать с  $R_2$ .

3) Допустим теперь, что начальным состоянием автоматов служит вершина  $q_2$  (рис. 6.12, *а*, *б*, *в*).

Тогда системы уравнений, описывающих графоиды, показанные на рис. 6.12, *а* и *б*, принимают вид

$$\begin{cases} R_1 = R_3 x_1 \vee R_4 x_2, \\ R_2 = R_5 x_3 \vee R_2 x_4 \vee e \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} R_1 = R_5 x_1 \vee R_3 x_2 \vee R_4 x_3, \\ R_2 = R_2 x_4 \vee R_2 x_5 \vee R_6 x_6 \vee e, \end{cases}$$

а их решениями будут соответственно

$$\begin{aligned} R_2 &= (R_5 x_3 \vee e) \{x_4\}^*, \\ R_2 &= (R_6 x_6 \vee e) \{x_4 \vee x_5\}^*, \end{aligned}$$

с которых следует начинать исключение неизвестного. Для графоида, показанного на рис. 6.12, *в*, исключение следует начинать с неизвестного  $R_1$ , так как уравнение (6.9) для  $R_2$  усложняется добавлением буквы  $e$ .

Пример 6.3. Пусть дан автомат  $A$ , графоид которого показан на рис. 6.13. Необходимо найти минимальное регулярное выражение события, представимого в автомате состоянием  $q_4$ .

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} R_1 = R_1x_1 \vee R_2x_2 \vee R_4x_3 \vee e, \\ R_2 = R_1x_1 \vee R_2x_2, \\ R_3 = R_2x_3 \vee R_3x_3 \vee R_3x_1, \\ R_4 = R_3x_2. \end{cases}$$

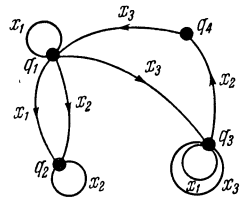


Рис. 6.13.

Исключая последовательно неизвестные  $R_2, R_1, R_3$ , определим  $R_4$ :

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1x_1\{x_2\}^*, \\ R_1 &= R_1x_1 \vee R_1x_1\{x_2\}^*x_2 \vee R_4x_3 \vee e, \\ R_1 &= (R_4x_3 \vee e)\{x_1 \vee x_1\{x_2\}^*x_2\}^*, \\ R_3 &= (R_4x_3 \vee e)\{x_1 \vee x_1\{x_2\}^*x_2\}^*x_1\{x_2\}^*x_3 \vee R_3(x_3 \vee x_1), \\ R_4 &= R_4x_3\{x_1 \vee x_1\{x_2\}^*x_2\}^*x_1\{x_2\}^*x_3\{x_3 \vee x_1\}^*x_2 \vee \\ &\quad \vee \{x_1 \vee x_1\{x_2\}^*x_2\}^*x_1\{x_2\}^*x_3\{x_3 \vee x_1\}^*x_2, \\ R_4 &= \{x_1 \vee x_1\{x_2\}^*x_2\}^*x_1\{x_2\}^*\{x_3 \vee x_1\}^*x_2 \cdot \{x_3\{x_1 \vee x_1\{x_2\}^*\}^* \cdot \\ &\quad \cdot x_1\{x_2\}^*x_3\{x_3 \vee x_1\}^*\}x_2. \end{aligned}$$

Искомое регулярное выражение имеет длину  $l = 19$  и циклическую глубину  $s = 3$ .

Найдем минимальное регулярное выражение того же события. Используя правило 4, исключим вначале неизвестное  $R_4$ , а затем  $R_2$ . Далее по правилу 2, исключая  $R_3$  и, наконец,  $R_1$ , находим  $R_4$ :

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1x_1\{x_2\}^*, \\ R_3 &= R_1x_1\{x_2\}^* \vee R_3x_3 \vee R_3x_1, \\ R_3 &= R_1x_1\{x_2\}^*\{x_3 \vee x_1\}^*, \\ R_1 &= R_1x_1 \vee R_1x_1\{x_2\}^* \vee R_1x_1\{x_2\}^*\{x_3 \vee x_1\}^*x_2x_3 \vee e, \\ R_1 &= \{x_1 \vee x_1\{x_2\}^* \vee x_1\{x_2\}^*\{x_3 \vee x_1\}^*x_2x_3\}^*, \\ R_4 &= \{x_1 \vee x_1\{x_2\}^* \vee x_1\{x_2\}^*\{x_3 \vee x_1\}^*x_2x_3\}^*x_1\{x_2\}^*\{x_3 \vee x_1\}^*x_2. \end{aligned}$$

Как видно, данное регулярное выражение имеет  $l = 14$  и  $s = 2$ .

В заключение этого параграфа отметим, что в общем случае при анализе абстрактных автоматов целесообразно комбинировать графический и аналитический методы анализа, применяя вначале к графоиду автомата тождественные преобразования, а затем составляя и решая систему уравнений.

#### § 4. Задание регулярных выражений в форме графов

Любое регулярное выражение можно представить в виде графа [3]. Графы элементарных регулярных выражений, соответствующих дизъюнкции  $x_i \vee x_j$ , умножению  $x_i \cdot x_j$  и итерации  $\{x_i\}^*$ , показаны на рис. 6.14, а, б, в.

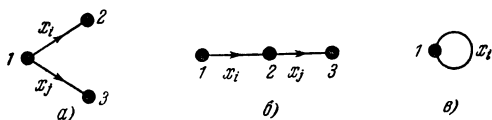


Рис. 6.14.

Вершинам графа обычно приписываются номера из множества  $1, 2, 3, \dots$ . В некоторых случаях они вовсе опускаются. В каждом графе регулярного выражения фиксируются вершина, которая является началом (обычно номер один), и вершины (одна или несколько), которые служат концом.

В следующем параграфе излагается простой алгоритм абстрактного синтеза автоматов по графам регулярных выражений\*). Однако в графах регулярных выражений возможны случаи образования ложных путей, которые соответствуют входным словам, не принадлежащим исходным регулярным выражениям. Поэтому в этом параграфе доказывается утверждение о полноте системы правил, устраняющих ложные пути в графах регулярных выражений с помощью введения *пустых стрелок*.

\*) Точнее говоря, по нагруженным графам регулярных выражений, т. е. по графоидам. Поскольку этот термин используется для задания автомата, нагруженные графы регулярных выражений будем называть просто графами.

Используя графы элементарных регулярных выражений, можно индуктивно построить граф сколь угодно сложного регулярного выражения. Например, граф регулярного выражения

$$R = x_1 x_3 \cdot \{x_2 x_1\}^* \vee x_4 \{x_1\}^* x_2 \vee \{x_3\}^*$$

имеет вид, показанный на рис. 6.15. Начальной вершиной графа является вершина 1, а конечными — вершины 3, 6 и 1.

Каждому пути в графе регулярного выражения от начала к любому из концов должна соответствовать последовательность входных букв, принадлежащая данному регулярному выражению и, наоборот, каждая последовательность, задаваемая регулярным выражением, определяет некоторый путь в графе регулярного выражения. Необходимо отметить, что в графах, построенных по регулярным выражениям определенного вида, могут возникать ложные последовательности, не задаваемые регулярным выражением. Так, путь на графе

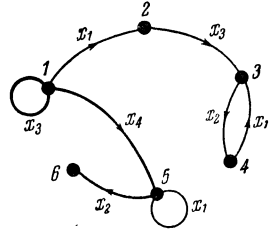


Рис. 6.15.

рис. 6.15, выделенный жирными дугами, соответствует слову  $x_3 x_4 x_2$ , которое не принадлежит регулярному выражению  $R$ .

Возникновение ложных последовательностей можно избежать введением в графе пустых стрелок, обозначающих мгновенный переход из одной вершины графа в другую.

О. П. Кузнецовым [3] рассмотрены случаи возникновения и устранения ложных последовательностей в графах регулярных выражений. Например, исправленный граф регулярного выражения  $R$  показан на рис. 6.16.

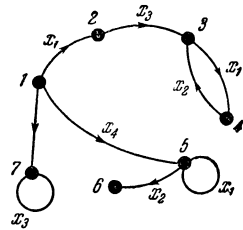


Рис. 6.16.

Приведем систему правил, определяющих типы регулярных выражений, графы которых должны содержать пустые стрелки, и докажем утверждение о ее полноте.

Правило 1. Пустые стрелки на графе регулярного выражения  $S$  вводятся в случае произведения двух или более итераций

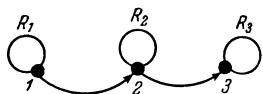


Рис. 6.17.

$$S = \prod_{i \in I} \{R_i\}^*$$

где  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $R_i$  — произвольное регулярное выражение.

Геометрическая интерпретация правила 1 при  $I = \{1, 2, 3\}$  показана на рис. 6.17.

Правило 2. Пустые стрелки на графе регулярного выражения  $S$ , которое начинается и заканчивается итерационными скобками, вводятся в случаях

- а)  $S = \{\{P\}^* \cdot R\}^*$ ;  
 б)  $S = \{R \cdot \{N\}^*\}^*$ ;  
 в)  $S = \{\{P\}^* \cdot R \cdot \{N\}^*\}^*$ ,

где  $P, R, N$  — любые регулярные выражения.

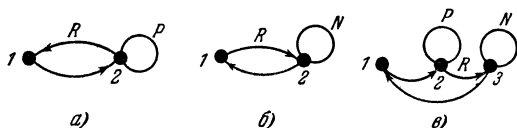


Рис. 6.18.

Применение правила 2 показано на рис. 6.18, а, б, в.

Правило 3. Пустые стрелки на графе регулярного выражения  $S$  вводятся в случае дизъюнкции, если хотя бы один из дизъюнктивных членов начинается с итерации

$$S = \{R\}^* \cdot Q \vee \{P\}^* \vee \dots \vee Q,$$

где  $Q$  — регулярное выражение, не содержащее итерационных скобок. Правилу 3 соответствует граф регулярного выражения, показанный на рис. 6.19.

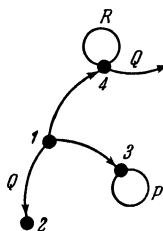


Рис. 6.19.

Правило 4. Пустые стрелки на графе регулярного выражения  $S$  вводятся при умножении слева на дизъюнкцию, если хотя бы один из дизъюнктивных членов заканчивается итерацией

$$S = (Q \cdot \{P\}^* \vee \{R\}^* \vee \dots \vee Q) \cdot N.$$

Граф регулярного выражения  $S$  показан на рис. 6.20. Следует отметить, что в частном случае регулярные выражения  $P$ ,  $R$ ,  $N$ ,  $Q$  могут состоять из одной буквы.

Справедливо следующее утверждение.

*Система правил 1—4 введения пустых стрелок для исключения ложных путей в графах регулярных выражений является полной.*

**Доказательство.** Любое регулярное выражение в алгебре событий образуется в результате применения конечного числа операций дизъюнкции ( $\vee$ ), умножения ( $\cdot$ ) и итерации ( $\{\}^*$ ). Прежде, чем рассматривать различные сочетания из этих трех операций, заметим, что необходимость в использовании пустых стрелок появляется лишь тогда, когда регулярное выражение содержит итерацию. Одна лишь операция итерации как при однократном, так и при многократном применении не приводит к появлению пустых стрелок в графе регулярного выражения. Поэтому можно утверждать, что при построении графа регулярного выражения необходимость в использовании пустых стрелок может возникнуть только в случае сочетания следующих операций ( $\cdot$ ,  $\{\}^*$ ), ( $\vee$ ,  $\{\}^*$ ), ( $\cdot$ ,  $\vee$ ,  $\{\}^*$ ). Однако не всегда наличие итерации в регулярном выражении приводит к появлению пустой стрелки. Определим, в каких случаях необходимо использование пустых стрелок в графах регулярных выражений.

Рассмотрим регулярные выражения, полученные применением всех трех операций. Обозначим регулярные выражения в базисе ( $\cdot$ ,  $\vee$ ) через  $P$ , ( $\cdot$ ,  $\{\}^*$ ) — через  $Q$ , ( $\vee$ ,  $\{\}^*$ ) — через  $R$  и в базисе ( $\cdot$ ,  $\vee$ ,  $\{\}^*$ ) — через  $V$ .

Нетрудно видеть, что итерация над  $P$  не требует использования пустой стрелки. Применение итерации к  $R$ ,  $Q$ ,  $V$  приводит к появлению пустых стрелок. Эти случаи описываются правилом 2.

Рассматривая попарно дизъюнкции всех регулярных выражений, видим, что  $P \vee P$  не требует использования пустой стрелки. Все остальные случаи описываются правилом 3.

Осталось разобрать все возможные попарные произведения из  $P$ ,  $R$ ,  $Q$  и  $V$ . Ясно, что  $P \cdot P$ ,  $P \cdot Q$ ,  $P \cdot R$ ,  $P \cdot V$

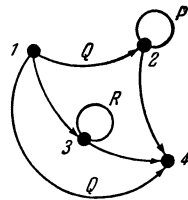


Рис. 6.20.



и  $Q \cdot P$  не требуют использования пустых стрелок. Введение пустых стрелок в графах  $Q \cdot Q$ ,  $Q \cdot R$  и  $Q \cdot V$  описывается правилом 1. Произведения  $R \cdot P$ ,  $V \cdot P$  описываются правилом 4, а  $R \cdot Q$ ,  $R \cdot R$ ,  $R \cdot V$ ,  $V \cdot Q$ ,  $V \cdot R$  и  $V \cdot V$  описываются правилами 1 и 4.

Таким образом, нами рассмотрены все возможные виды регулярных выражений и показано, что сочетания операций ( $\cdot$ ,  $\vee$ ,  $\{\}^*$ ), которые приводят к появлению пустых стрелок в графах регулярных выражений, полностью описываются правилами 1—4. Этим наше утверждение доказано.

## § 5. Алгоритм синтеза автоматов

Известно, что методы теории переходных графов сигналов, разработанные для анализа электрических и электронных схем, могут успешно применяться для абстрактного анализа конечных автоматов. С точки зрения практического применения наибольшее значение имеют алгоритмы абстрактного синтеза автоматов, среди которых широкое распространение получили методы, предложенные В. М. Глушковым [113]. Однако алгоритмы абстрактного синтеза автоматов [113] предполагают использование правил подчинения мест в регулярном выражении, которые, по сути дела, сводятся к перебору всех возможных слов, входящих в данное регулярное выражение. Применение правил подчинения мест не всегда удобно и затрудняет использование алгоритма.

Геометрической интерпретацией основного алгоритма абстрактного синтеза автоматов В. М. Глушкова [113] является метод построения таблицы переходов (графов да автомата) по графам регулярных выражений, описанный О. П. Кузнецовым в [3]. В этом параграфе приводится алгоритм абстрактного синтеза автоматов по графам регулярных выражений, который приводит к такому же результату, как и усовершенствованный алгоритм синтеза В. М. Глушкова [113]. Предлагаемый алгоритм обеспечивает построение автоматов с частично минимизированным числом состояний и обладает меньшей трудоемкостью по сравнению с [3], так как упрощается индексация вершин на графе регулярного выражения. В результате применения указанного алгоритма отожде-

ствляются подобные и квазиподобные места [113] в регулярных выражениях, хотя, вообще говоря, не требуется разметки мест и использования правил их подчинения.

Прежде, чем строить граф регулярного выражения, необходимо каждый из членов конечного множества регулярных выражений, представимых в автомате разными выходными сигналами  $y_i$ , преобразовать следующим образом. Используя закон коммутативности дизъюнкции, сгруппируем дизъюнктивные члены с одинаковыми конечными последовательностями входных букв и вынесем общие множители вправо за скобки \*). На графе регулярного выражения это приводит к объединению вершин  $i$  и  $j$  таких, что

а) любая последовательность стрелок, выходящая из  $i$ , имеет аналогичную последовательность, выходящую из  $j$ , и наоборот;

б) конечные вершины этих последовательностей должны быть отмечены одинаковыми выходными индексами.

Из определения квазиподобных мест [113] следует, что объединение вершин  $i$  и  $j$  на графе регулярного выражения соответствует частичному отождествлению квазиподобных мест в регулярном выражении. Ясно, что в результате такого преобразования регулярного выражения получаем эквивалентную форму того же события.

В процессе построения графа регулярного выражения все начальные вершины графов, представляющих каждое из регулярных выражений, объединяются в одну вершину, которой присваивается индекс 1. Далее, всем остальным вершинам графа регулярного выражения присваиваем по одному неповторяющемуся индексу из множества 2, 3, ... Подобная индексация вершин графа позволяет присвоить один индекс  $n$  подобным и один индекс  $m$  квазиподобным местам в регулярном выражении.

Индекс вершины графа, из которой выходит пустая стрелка, приписывается слева к индексу вершины, в которую эта пустая стрелка входит. Такая индексация вершин, связанных между собой пустыми стрелками, определяет правильный порядок следования по графу от

---

\*) При вынесении за скобки общих множителей нельзя допустить, чтобы дизъюнктивный член в скобках превращался в пустое слово.

начальной вершины к конечной. Это обеспечивает построение автомата, представляющего множеством выходных сигналов заданное регулярное выражение.

Таким образом, в результате построения графа регулярного выражения с учетом правил 1—4 и указанного порядка присвоения индексов вершинам происходит отождествление подобных и квазиподобных мест в исходном регулярном выражении.

Сформулируем теперь алгоритм абстрактного синтеза автоматов.

1°. Преобразовываем каждое регулярное выражение, вынося общие множители вправо за скобку, и объединяя их знаками дизъюнкции. Получаем регулярное выражение  $R$ .

2°. Используя правила 1—4, строим граф регулярного выражения  $R$ .

3°. Присваиваем вершинам графа индексы из множества  $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

4°. Строим таблицу переходов автомата. Строки таблицы соответствуют различным буквам  $x_i$  входного алфавита, содержащимся в  $R$ . Первый столбец таблицы обозначим символом «1» начальной вершины графа и с нее начинаем построение таблицы переходов автомата. В клетку таблицы, стоящую на пересечении  $q_j$  столбца и  $x_i$  строки, записывается дизъюнкция индексов тех вершин графа, в которые входят стрелки с буквами  $x_i$ , выходящие из любой вершины, индексы которой включены в множество индексов состояния  $q_j$ . В начале построения таблицы в состоянии  $q_j$  входит один индекс начальной вершины. Если таких стрелок нет, в клетку вписывается «—» — символ пустого состояния автомата. После заполнения клеток столбца таблицы содержимое каждой клетки, если оно полностью не совпадает с содержимым состояний, отмечающих столбцы, выписывается как новое отмечающее состояние. Процесс построения таблицы переходов считается законченным, если все содержимое каждой клетки таблицы выписано как отмечающее состояние. Если вершина графа имеет несколько индексов, то в клетку таблицы переходов записывается только крайний справа индекс.

5°. Состояние  $q_j$ , в множество индексов которого входит индекс конечной вершины графа, отмечается выход-

ным сигналом  $y_i$ , соответствующим данной конечной вершине графа. Если в множество индексов входят индексы нескольких конечных вершин, то такое состояние отмечается дизъюнкцией выходных сигналов.

6°. Производя перекодировку состояний и выходных букв, получаем отмеченную таблицу переходов автомата.

Рассмотрим работу алгоритма на примерах.

Пример 6.4. Пусть задано событие, регулярное выражение которого имеет вид

$$R = \{x_1 \vee x_2\}^* \cdot (x_1 \{x_1\}^* \cdot \\ \cdot \{x_3\}^* x_2 \vee x_1 \{x_3\}^* x_2 \vee x_3 \{x_3\}^* x_2).$$

Построить автомат Мура  $A$ , представляющий это событие выходной буквой  $y$ .

Вынося общие множители за скобки, запишем выражение  $R$  в форме

$$R = \{x_1 \vee x_2\}^* \cdot (x_1 \{x_1\}^* \vee x_1 \vee x_3) \cdot \{x_3\}^* x_2.$$

Учитывая правило 4, строим граф регулярного выражения  $R$ , который показан на рис. 6.21. Приписываем номера вершинам графа. Начальная вершина графа помечена номером 1, а конечная — номером 4.

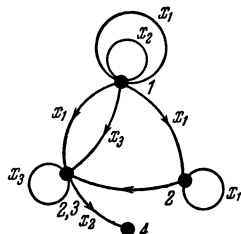


Рис. 6.21.

Т а б л и ц а 6.1

$Y$	-	-	-	$y$	$y$
$X$	1	$1 \vee 2 \vee 3$	3	$1 \vee 4$	4
$x_1$	$1 \vee 2 \vee 3$	$1 \vee 2 \vee 3$	-	$1 \vee 2 \vee 3$	-
$x_2$	1	$1 \vee 4$	4	1	-
$x_3$	3	3	3	3	-

По графу регулярного выражения строим отмеченную таблицу переходов, которая имеет вид, показанный на табл. 6.1. Производя перекодировку состояний, окончательно получаем отмеченную таблицу переходов

(табл. 6.2) автомата Мура  $A$ , графоид которого показан на рис. 6.22.

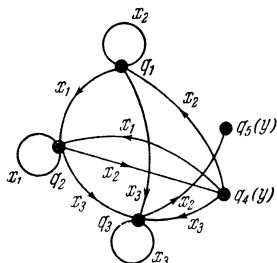


Рис. 6.22.

Таблица 6.2

$Y$	-	-	-	$y$	$y$
$X \backslash Q$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
$x_1$	$q_2$	$q_2$	-	$q_2$	-
$x_2$	$q_1$	$q_4$	$q_5$	$q_1$	-
$x_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$	-

Пример 6.5. Требуется синтезировать автомат, моделирующий выработку условного рефлекса с забыванием [93]. Входной алфавит автомата обозначим через  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ , где  $x_1$  — наличие условного раздражителя и отсутствие безусловного,  $x_2$  — наличие безусловного раздражителя и отсутствие условного,  $x_3$  — одновременная подача условного и безусловного раздражителей. Выходной алфавит автомата состоит из двух букв  $Y = \{y_1, y_2\}$ . Автомат вырабатывает условный рефлекс после некоторого этапа обучения и реагирует выходной буквой  $y_2$  на действие условного раздражителя  $x_1$  так же, как и на действие безусловного  $x_2$  или совместное действие обоих раздражителей  $x_3$ . В остальных случаях на выходе появляется буква  $y_1$ . Этап обучения заключается в одновременном действии условного и безусловного раздражителей. Таких совпадений за время обучения автомата должно быть не меньше  $n$ . Если в процессе обучения между двумя последовательными совпадениями раздражителей произошло более чем  $k$  несовпадений, то процесс обучения нарушается и его нужно начинать заново. Если после выработки автоматом условного рефлекса произойдет более чем  $m$  последовательных несовпадений действия условного и безусловного раздражителей, то рефлекс забывается.

Считаем, что условный рефлекс с забыванием вырабатывается при следующих параметрах:  $k \leq 1$ ,  $n \geq 2$ ,  $m > 2$ .

Переходя от описательной формы работы автомата к заданию алгоритма на языке регулярных выражений, получим

$$R = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}^* [(x_2 \vee x_3) \vee x_3 ((x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_3) \cdot \{x_3\}^* \{(x_1 \vee x_2) \cdot x_3\}^* \cdot ((x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_2))].$$

Граф регулярного выражения  $R$  показан на рис. 6.23.

По графу строим отмеченную таблицу переходов (табл. 6.3). Состояния  $(1 \vee 2 \vee 8 \vee 4)$  и  $(1 \vee 2 \vee 8 \vee 5)$

Таблица 6.3

$Y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$X \backslash I$	1	1∨8	1∨2∨8	1∨3
$x_1$	1	1	1∨3	1
$x_2$	1∨8	1∨8	1∨8∨3	1∨8
$x_3$	1∨2∨8	1∨2∨8	1∨2∨8∨4	1∨2∨8∨4
$Y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$X \backslash I$	1∨8∨3	1∨2∨8∨4	1∨2∨8∨6∨7	1∨2∨8∨5
$x_1$	1	1∨3∨8∨6∨7	1∨8	1∨3∨6∨8∨7
$x_2$	1∨8	1∨8∨3∨6∨7	1∨8	1∨8∨3∨6∨7
$x_3$	1∨2∨8∨4	1∨2∨8∨4	1∨2∨8∨5	1∨2∨8∨4

отождествляем, так как им соответствуют одинаковые столбцы в табл. 6.3. Производим перекодировку состояний следующим образом:

$$\begin{aligned} (1) &\rightarrow q_1, & (1 \vee 8) &\rightarrow q_2, & (1 \vee 2 \vee 8) &\rightarrow q_3, & (1 \vee 3) &\rightarrow q_4, \\ & & (1 \vee 8 \vee 3) &\rightarrow q_5, & (1 \vee 2 \vee 8 \vee 4) &\rightarrow q_6, \\ & & (1 \vee 3 \vee 8 \vee 6 \vee 7) &\rightarrow q_7, & (1 \vee 2 \vee 8 \vee 5) &\rightarrow q_6. \end{aligned}$$

Окончательный вариант отмеченной таблицы переходов автомата имеет вид табл. 6.4, а графоид автомата показан на рис. 6.24.

Рассмотрим теперь алгебраический метод синтеза абстрактных автоматов, состоящий в нахождении по регулярному выражению системы уравнений, которая определяет графоид автомата, представляющий заданное регулярное выражение.

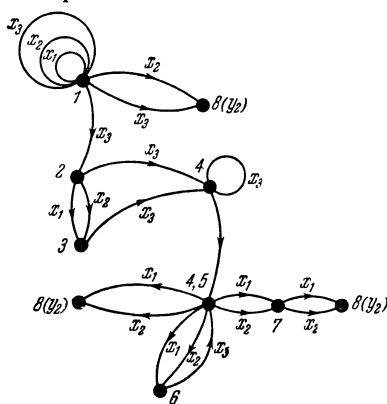


Рис. 6.23.

Разработкой этого метода занимались Бжозовский [517], М. А. Спивак [413], Б. Г. Миркин [328].

М. А. Спивак [412] ввел понятие *базиса* в языке регулярных выражений. Конечную систему регулярных выражений  $R_1, \dots, R_m$  в алфавите

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  назовем базисом, если имеет место равенство

$$R_i = R_1x_1 \vee R_2x_2 \vee \dots \vee R_nx_n \vee C, \quad (6.10)$$

где

$$C = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } e \notin R_i, \\ e, & \text{если } e \in R_i, \end{cases}$$

а  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ . В результате построения уравнений базиса получаем систему уравнений, определяющую графоид автомата.

Таблица 6.4

$Y$	$y_1$	$y_2$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_2$	$y_2$
$Q$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$
$x_1$	$q_1$	$q_1$	$q_4$	$q_1$	$q_1$	$q_7$	$q_2$
$x_2$	$q_2$	$q_2$	$q_5$	$q_2$	$q_2$	$q_7$	$q_2$
$x_3$	$q_3$	$q_3$	$q_6$	$q_6$	$q_6$	$q_6$	$q_6$

Рассмотрим примеры построения систем уравнений для простейших регулярных выражений.

1) Пусть  $R = x_1$ . Используя (6.10), запишем систему уравнений, которая является базисом

$$\begin{cases} R_2 = R_1 x_1, \\ R_1 = e. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация системы уравнений показана на рис. 6.25.

2) Пусть  $R = x_1 \vee x_2$ . Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} R_2 = R_1 (x_1 \vee x_2), \\ R_1 = e. \end{cases}$$

3) Пусть  $R = x_1 \cdot x_2$ . Тогда система уравнений запишется в форме

$$\begin{cases} R_3 = R_1 x_1 x_2 = R_2 x_2, \\ R_2 = R_1 x_1, \\ R_1 = e. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация системы показана на рис. 6.26.

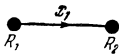


Рис. 6.25.

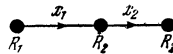


Рис. 6.26.

4) Пусть  $R = \{S\}^*$ . Система уравнений сводится к одному уравнению:

$$R_1 = R_1 S \vee e,$$

где  $S$  может принимать, например, следующие значения:

- а)  $S = x_1$ ;
- б)  $S = x_1 \vee x_2$ ;
- в)  $S = x_1 \cdot x_2$ .

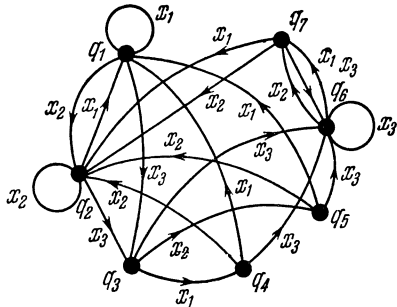


Рис. 6.24.



Тогда системы уравнений имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & R_1 = R_1 \cdot x_1 \vee e; \\ \text{б)} \quad & R_1 = R_1 (x_1 \vee x_2) \vee e; \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} R_2 = R_2 x_1 x_2 \vee e = R_1 \cdot x_2 \vee e, \\ R_1 = R_2 x_1, \end{cases} \end{aligned}$$

а их геометрическая интерпретация показана на рис. 6.27, а, б, в.

Заметим, что при синтезе автомата по регулярному выражению, граф которого содержит ложные последовательности входных слов, возникают некоторые трудности.

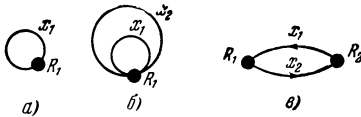


Рис. 6.27.

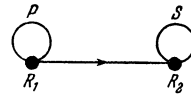


Рис. 6.28.

Рассмотрим, например, регулярное выражение  $R = \{P\}^* \cdot \{S\}^*$ , граф которого (см. § 4) имеет ложный путь. Запишем систему уравнений, определяющую базис

$$\begin{cases} R_2 = R_1 \vee R_2 \cdot S, \\ R_1 = R_1 \cdot P \vee e, \end{cases}$$

интерпретация которой показана на рис. 6.28. Из него видно, что мы получили граф регулярного выражения  $R$ , а не графоид автомата, представляющий это регулярное выражение. Для того чтобы базис соответствовал графоиду автомата, необходимо в уравнении  $R_2$  член  $R_1$  умножить на  $S$ . Тогда система примет вид

$$\begin{cases} R_2 = R_1 \cdot S \vee R_2 \cdot S, \\ R_1 = R_1 \cdot P \vee e. \end{cases} \quad (6.11)$$

Аналогичные трудности возникают в других случаях, за исключением умножения слева на дизъюнкцию, один из членов которой заканчивается итерацией.

Для устранения указанных затруднений можно воспользоваться правилом развертывания итерации

$$\{S\}^* = S \cdot \{S\}^* \vee e$$

или тождеством

$$\{S\}^* = \{S \vee e\}^*,$$

которые позволяют находить базис, определяющий графoid автомата. Однако число состояний такого автомата слишком велико, и в дальнейшем обязательно требуется провести этап минимизации автомата.

Пример 6.6. Пусть заданы регулярные выражения

$$P = x_1 \cdot \{x_3 x_2\}^* \cdot (x_4 \vee x_3 x_5)$$

и

$$S = \{x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_1\}^* \cdot \{x_1 \{x_2 x_3\}^*\}^*.$$

Построить автоматы  $A_1$  и  $A_2$ , представляющие выражения  $P$  и  $S$  некоторым множеством своих состояний.

Запишем выражение  $P$  в форме многочлена

$$P = x_1 \{x_3 x_2\}^* x_4 \vee x_1 \{x_3 x_2\}^* \cdot x_3 \cdot x_5.$$

Используя построение базиса для простейших регулярных выражений и последовательно разворачивая выражение  $P$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} R_4 = R_2 \cdot x_4 \vee R_3 \cdot x_5, \\ R_2 = R_1 \cdot x_1 \vee R_2 x_3 x_2 = R_1 \cdot x_1 \vee R_3 \cdot x_2, \\ R_1 = e, \\ R_3 = R_2 \cdot x_3, \end{cases}$$

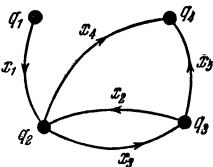


Рис. 6.29.

определяющую автомат  $A_1$ , графoid которого показан на рис. 6.29. Автомат  $A_1$  представляет выражение  $P$  состоянием  $q_4$ , в которое ведут все пути, оканчивающиеся буквами  $x_4$  или  $x_5$ .

На основании (6.11) для выражения  $S$  запишем

$$\begin{cases} R_2 = R_1 x_1 \{x_2 x_3\}^* \vee R_2 x_1 \{x_2 x_3\}^*, \\ R_1 = R_1 \cdot (x_1 x_2 \vee x_1 x_3 x_1) \vee e. \end{cases}$$

Последовательно находим одночлены, входящие в выражения  $R_1$  и  $R_2$ :

$$R_1 = R_1 x_1 x_2 \vee R_1 x_1 x_3 x_1 \vee e = R_3 x_2 \vee R_4 x_1 \vee e,$$

$$R_3 = R_1 x_1,$$

$$R_4 = R_3 x_3,$$

$$R_2 = R_1 x_1 \vee R_2 x_1 \vee R_2 x_2 x_3 = R_1 x_1 \vee R_2 x_1 \vee R_5 x_3,$$

$$R_5 = R_2 x_3.$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} R_1 = R_3x_2 \vee R_4x_1 \vee e, \\ R_2 = R_1x_1 \vee R_2x_1 \vee R_5x_2, \\ R_3 = R_1x_1, \\ R_4 = R_3x_3, \\ R_5 = R_2x_3, \end{cases}$$

которая определяет автомат  $A_2$ , представляющий событие  $S$  состояниями  $q_1$  и  $q_2$ . Графoid автомата  $A_2$  показан на рис. 6.30.

В заключение отметим, что если регулярное выражение минимально, то при синтезе получаем автомат, число

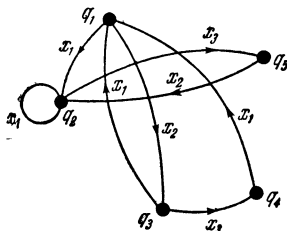


Рис. 6.30.

состояний которого меньше или, по крайней мере, равно числу состояний автомата, построенного по любому другому регулярному выражению [249]. Минимальную форму регулярного выражения можно найти с помощью тождественных преобразований, описанных в работах Ю. И. Янова [505], Х. Гирона [547], В. П. Кутепова [249].

## АЛГЕБРА АБСТРАКТНЫХ АВТОМАТОВ

**§ 1. О содержательном смысле операций над автоматами**

В этой главе рассматриваются свойства теоретико-множественных и алгебраических операций на множестве абстрактных автоматов. Из теоретико-множественных операций определяются две операции: объединение и пересечение автоматов, а из алгебраических — четыре: умножение, суммирование, суперпозиция и композиция автоматов. Формальные операции над абстрактными автоматами играют большую роль при синтезе автоматов, так как на структурном уровне они соответствуют различным способам соединения простых (элементарных) автоматов между собой при построении структурных схем сложных автоматов.

Множество абстрактных автоматов вместе с операциями над автоматами образует алгебру абстрактных автоматов, которую не надо смешивать с алгеброй событий на множестве слов входного алфавита произвольного абстрактного автомата. Мы рассмотрим алгебраические структуры, которые образуют абстрактные автоматы по различным операциям, и подойдем, таким образом, к проблеме декомпозиции абстрактных автоматов, решение которой сводится к разложению автоматов по различным операциям.

Формальные операции над абстрактными автоматами, заданными в виде графоидов или матриц соединений, и их свойства, будут описаны ниже, а в этом параграфе подробнее остановимся на содержательном смысле операций и покажем, как связаны отображения, индуцируемые результирующими автоматами с отображениями, индуцируемыми исходными автоматами.

Задать некоторую операцию на множестве абстрактных автоматов — значит указать закон, по которому

любым двум автоматам из данного множества сопоставляется третий автомат из того же множества автоматов. Какое именно множество автоматов имеется в виду в каждом конкретном случае будет оговариваться, а равенство абстрактных автоматов почти везде понимается с точностью до изоморфизма автоматов.

Теоретико-множественные операции объединения и пересечения автоматов играют вспомогательную роль при задании алгебраических операций. Впрочем, их можно рассматривать как самостоятельные операции на множестве  $\mathfrak{F}(L)$  подавтоматов произвольного непустого абстрактного автомата  $L$ . Тогда объединение двух автоматов  $A \in \mathfrak{F}(L)$  и  $B \in \mathfrak{F}(L)$  представляет собой автомат  $C \in \mathfrak{F}(L)$ , который является эквивалентным продолжением автоматов  $A$  и  $B$ , а пересечение указанных автоматов представляет автомат  $D \in \mathfrak{F}(L)$ , по отношению к которому автоматы  $A$  и  $B$  являются эквивалентными продолжениями.

Наиболее часто операция объединения автоматов применяется для представления произвольного абстрактного автомата объединением автономных автоматов по буквам входного и выходного алфавитов, которое используется при решении различных задач теории автоматов.

Важное значение для структурной теории автоматов имеют алгебраические операции умножения, суммирования и суперпозиции абстрактных автоматов, которые описывают различные способы соединения и варианты работы автоматов. Операции умножения и суммирования могут применяться к произвольным абстрактным автоматам, множество которых обозначим через  $\mathfrak{A}$ . Что касается операции суперпозиции, то она применяется к таким автоматам, у которых входной и выходной алфавиты совпадают между собой, или, по крайней мере, их пересечение не является пустым множеством. На структурном уровне это ограничение несущественно, так как все автоматы строятся из схем элементарных автоматов, которые функционируют в одном и том же структурном алфавите (например, двоичном), однако на абстрактном уровне это обстоятельство необходимо учитывать.

Произведение автоматов  $A \in \mathfrak{A}$  и  $B \in \mathfrak{A}$  порождает автомат, изоморфный автомату  $K \in \mathfrak{A}$ , который соответ-

ствует параллельной работе двух автоматов  $A$  и  $B$ . Сумма автоматов  $A$  и  $B$  представляет собой автомат, изоморфный автомату  $M \in \mathfrak{A}$ , который соответствует параллельной неодновременной работе автоматов  $A$  и  $B$ . Наконец, суперпозиция двух автоматов  $A \in \mathfrak{A}$  и  $B \in \mathfrak{A}$  (учитывая ограничения на входные и выходные алфавиты) приводит к автомату, изоморфному автомату  $N \in \mathfrak{A}$ , который соответствует последовательной работе автоматов  $A$  и  $B$ , взятых в указанном порядке. Остановимся подробнее на этих операциях.

Пусть даны произвольные автоматы  $A$  и  $B$  с входными алфавитами  $X_1$  и  $X_2$  и выходными алфавитами  $Y_1$  и  $Y_2$ , причём  $x_1 \in X_1$ ,  $x_2 \in X_2$  и  $y_1 \in Y_1$ ,  $y_2 \in Y_2$  — произвольные входные и выходные буквы соответствующих алфавитов. Автомат  $K$  (рис. 7.1) с входным алфавитом  $X = X_1 \times X_2$  и выходным алфавитом  $Y = Y_1 \times Y_2$  соответствует *параллельной одновременной* работе автоматов  $A$  и  $B$ . Другими словами, автомат  $K$  является *декартовым* или *прямым произведением* автоматов  $A$  и  $B$ , поэтому  $K = A \times B$ , где знак равенства, естественно, понимается с точностью до изоморфизма. Подача на вход автомата  $K$  в любой момент времени  $t = 1, 2, \dots$  входной буквы  $x \in X$  и появление на выходе буквы  $y \in Y$  соответствует тому, что на входы автоматов  $A$  и  $B$  одновременно и независимо друг от друга подаются входные

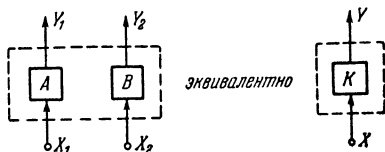


Рис. 7.1.

буквы  $x_1 \in X_1$  и  $x_2 \in X_2$ , а на выходах их возникают выходные буквы  $y_1 \in Y_1$  и  $y_2 \in Y_2$ , причём  $x = (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$ .

Рассмотрим автомат  $M = A + B$ , который соответствует *параллельной неодновременной* работе автоматов  $A$  и  $B$  (рис. 7.2). Входной  $X$  и выходной  $Y$  алфавиты автомата  $M$  образуются как *сумма* соответствующих

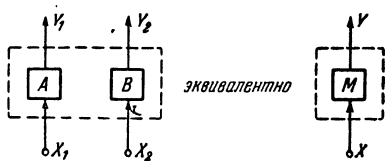


Рис. 7.2.

алфавитов автоматов  $A$  и  $B$ , т. е.  $X = X_1 + X_2$ , а  $Y = Y_1 + Y_2$ . В том случае, когда  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  и  $Y = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ , входной и выходной алфавиты определяются выражениями  $X = X_1 \cup X_2$  и  $Y = Y_1 \cup Y_2$ . Любое входное слово в алфавите  $X$  автомата  $M$  образуется чередованием букв  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих алфавитам  $X_1$  и  $X_2$ . Аналогично выходное слово представляет собой последовательность чередующихся букв  $y_1 \in Y_1$  и  $y_2 \in Y_2$ . В момент времени  $t = 1, 2, \dots$  на вход автомата  $M$  подается буква  $x \in X$ , а на выходе появляется соответствующая ей буква  $y \in Y$ . Если в момент  $t$  на вход автомата  $M$  подается буква  $x_1 \in X$ , которая принадлежит алфавиту  $X_1$ , то в момент  $t + 1$  на вход автомата  $M$  обязательно поступит буква  $x_2 \in X$ , которая принадлежит алфавиту  $X_2$ . Выходная буква  $y_1 \in Y$  автомата  $M$  в момент  $t$  является буквой алфавита  $Y_1$ , а в момент  $t + 1$  выходная буква  $y_2 \in Y$  является буквой алфавита  $Y_2$ . На уровне автоматов  $A$  и  $B$  это соответствует тому, что в момент времени  $t$  на вход автомата  $A$  поступает входная буква  $x_1 \in X_1$ , а на вход автомата  $B$  подается пустая буква  $e$ ; в момент времени  $t + 1$  на вход автомата  $A$  поступает пустая буква  $e$ , а на вход автомата  $B$  подается входная буква  $x_2 \in X_2$ . На выходе автомата  $A$  в момент  $t$  возникает буква  $y_1 \in Y_1$ , а на выходе автомата  $B$  — пустая

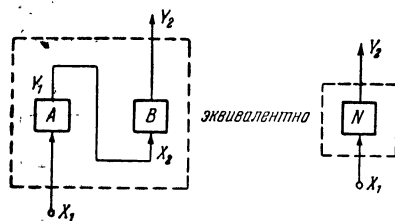


Рис. 7.3.

буква  $e$ , а в момент  $t + 1$  на выходе  $A$  — пустая буква  $e$ , а на выходе  $B$  — буква  $y_2 \in Y_2$ .

Что касается автомата  $N = A * B$ , то он соответствует последовательной работе автоматов  $A$  и  $B$  (рис. 7.3). Входной алфавит автомата  $N$  совпадает с входным алфавитом  $X_1$  автомата  $A$ , а выходной алфавит — с выходным алфавитом  $Y_2$  автомата  $B$ . Кроме того, по условию, выходной алфавит  $Y_1$  автомата  $A$  совпадает с входным алфавитом  $X_2$  автомата  $B$ , т. е.  $Y_1 = X_2$ . На вход автомата  $N$  в любой момент времени  $t = 1, 2, \dots$  может подаваться любая буква  $x_1 \in X_1$ , а на выходе появляется некоторая буква  $y_2 \in Y_2$ . Выходная буква  $y_2 \in Y_2$  авто-

мата  $N$  определяется по автоматам  $A$  и  $B$  следующим образом. Если в момент  $t$  на вход автомата  $A$  поступает входная буква  $x_1 \in X_1$ , то на выходе автомата  $A$  ей соответствует выходная буква  $y_1 \in Y_1$ . Так как  $y_1 \in X_2$ , то в момент  $t$  буква  $y_1$  поступает на вход автомата  $B$ , на выходе которого ей как раз и соответствует выходная буква  $y_2 \in Y_2$ .

Используя параллельную и последовательную работу автоматов, можно описать более сложные способы

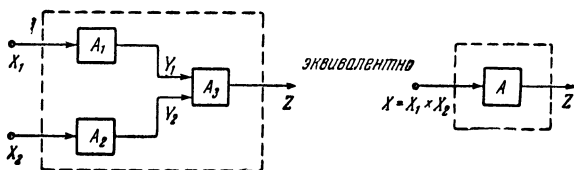


Рис. 7.4.

соединений автоматов такие, как, например, параллельно-последовательный (рис. 7.4) и последовательно-параллельный (рис. 7.5), которые обычно называют смешанным соединением автоматов. Рассмотрим теперь взаимосвязь

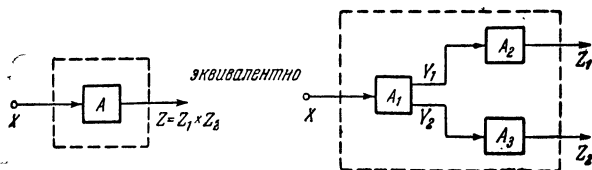


Рис. 7.5.

между отображениями, которые индуцируют исходные и результирующие автоматы.

Пусть  $A$  и  $B$  — подавтоматы автомата  $M$ , автомат  $C = A \cup B$ , причем  $X_1$  и  $X_2$  — соответственно входные,  $Y_1$  и  $Y_2$  — выходные алфавиты автоматов  $A$  и  $B$ , а  $X$  — входной,  $Y$  — выходной алфавит автомата  $C$ . Пусть, кроме того,  $f_1$  — отображение множества  $\mathfrak{E}(X_1)$  в  $\mathfrak{E}(Y_1)$ , индуцируемое автоматом  $A$ ,  $f_2$  — отображение множества



$\mathfrak{S}(X_2)$  в  $\mathfrak{S}(Y_2)$ , индуцируемое автоматом  $B$ , а  $f$  — отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ , индуцируемое автоматом  $C$ . Так как входной и выходной алфавиты автомата  $C$  определяются выражениями  $X = X_1 \cup X_2$  и  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , то имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(X_1) &\subseteq \mathfrak{S}(X) \supseteq \mathfrak{S}(X_2), \\ \mathfrak{S}(Y_1) &\subseteq \mathfrak{S}(Y) \supseteq \mathfrak{S}(Y_2).\end{aligned}$$

Поэтому отображение  $f$ , индуцируемое автоматом  $C$ , есть продолжение отображений  $f_1$  и  $f_2$ , индуцируемых автоматами  $A$  и  $B$ , на множество  $\mathfrak{S}(X)$ .

Пусть теперь автомат  $D = A \cap B$ , причем  $X$  — входной,  $Y$  — выходной алфавит автомата  $D$ , а  $f$  — отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ , индуцируемое автоматом  $D$ . Поскольку  $X = X_1 \cap X_2$  и  $Y = Y_1 \cap Y_2$ , то имеет место

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(X_1) &\supseteq \mathfrak{S}(X) \subseteq \mathfrak{S}(X_2), \\ \mathfrak{S}(Y_1) &\supseteq \mathfrak{S}(Y) \subseteq \mathfrak{S}(Y_2).\end{aligned}$$

Следовательно,  $f$  — сужение отображений  $f_1$  и  $f_2$ , индуцируемых автоматами  $A$  и  $B$ , на подмножество  $\mathfrak{S}(X)$ .

Перейдем к рассмотрению отображений, характеризующих алгебраические операции над автоматами, и покажем, что операции над автоматами определяют известные операции над отображениями, индуцируемыми абстрактными автоматами.

Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные автоматы из  $\mathfrak{A}$  с входными алфавитами  $X_1$  и  $X_2$ , выходными алфавитами  $Y_1$  и  $Y_2$ , а  $K = A \times B$  — автомат, соответствующий параллельной одновременной работе автоматов  $A$  и  $B$ , входной алфавит которого  $X$  и выходной алфавит  $Y$ . Обозначим отображения, индуцируемые автоматами  $A$  и  $B$  соответственно через  $f$  и  $g$ , а отображение, индуцируемое автоматом  $K$ , — через  $\alpha$ .

Пусть  $p_1 \in \mathfrak{S}(X_1)$  и  $p_2 \in \mathfrak{S}(X_2)$  — слова в алфавитах  $X_1$  и  $X_2$ , имеющие одинаковую длину. Предположим, что

$$\begin{aligned}p_1 &= x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, & p_2 &= x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k} & \text{и} \\ f(p_1) &= y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}, & g(p_2) &= y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k}.\end{aligned}$$

Слово  $p \in \mathfrak{S}(X)$  является декартовым произведением слов  $p_1$  и  $p_2$  и обозначается  $p = p_1 \times p_2$ , если каждая

буква слова  $p$  есть пара, образованная соответствующими буквами слов  $p_1$  и  $p_2$ . Поэтому

$$p = (x_{i_1}, x_{j_1})(x_{i_2}, x_{j_2}) \cdots (x_{i_k}, x_{j_k})$$

и

$$\alpha(p) = (y_{i_1}, y_{j_1})(y_{i_2}, y_{j_2}) \cdots (y_{i_k}, y_{j_k}).$$

Если областью определения частичного отображения  $f$  служит множество допустимых слов  $p_1 \in \mathfrak{S}(X_1)$ , а областью определения частичного отображения  $g$  является множество допустимых слов  $p_2 \in \mathfrak{S}(X_2)$ , то областью определения частичного отображения  $\alpha$  служит множество таких слов  $p \in \mathfrak{S}(X)$ , которые построены из допустимых слов  $p_1, p_2$  и имеют одинаковую длину. Учитывая это, можно записать

$$\alpha(p) = \alpha(p_1 \times p_2) = f(p_1) \times g(p_2) = r_1 \times r_2 = r,$$

где  $r_1 \in \mathfrak{S}(Y_1)$ ,  $r_2 \in \mathfrak{S}(Y_2)$ , а  $r \in \mathfrak{S}(Y)$ . Отображение  $\alpha$  называется *произведением отображений*  $f$  и  $g$  и обозначается

$$\alpha = f \times g.$$

Пусть теперь  $M = A + B$  — автомат, соответствующий параллельной одновременной работе рассмотренных выше автоматов  $A$  и  $B$  из  $\mathfrak{A}$ . Обозначим отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  в  $\mathfrak{S}(Y)$ , индуцируемое автоматом  $M$ , через  $\beta$ .

Допустим, что  $p_1 \in \mathfrak{S}(X_1)$  и  $p_2 \in \mathfrak{S}(X_2)$  — слова, длины которых отличаются друг от друга не более чем на одну букву, например,  $p_1 = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$  и  $p_2 = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{k-1}}$ . Слово  $p \in \mathfrak{S}(X)$  называется сплетением слов  $p_1$  и  $p_2$ , обозначается  $p = p_1 \checkmark p_2$  и образуется из слов  $p_1$  и  $p_2$  следующим образом. Берется первая буква  $x_{i_1}$  слова  $p_1$  и к ней справа приписывается первая буква  $x_{j_1}$  слова  $p_2$ , затем к отрезку  $x_{i_1} x_{j_1}$  приписываются справа соответственно буквы  $x_{i_2}$  и  $x_{j_2}$  и т. д. В результате получаем слово

$$p = x_{i_1} x_{j_1} x_{i_2} x_{j_2} \cdots x_{i_{k-1}} x_{j_{k-1}} x_{i_k},$$

которое после переобозначения индексов можно записать в виде

$$p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2k-1}}.$$

Сплетение двух слов удовлетворяет обязательному условию: любые две стоящие рядом буквы  $x_{i_1} x_{i_2}$  слова  $p$  не могут принадлежать одному и тому же входному алфавиту автомата  $A$  или автомата  $B$ , т. е. порядок вхождения букв слова из одного алфавита чередуется с порядком вхождения букв слова из другого алфавита.

Если областью определения частичного отображения  $f$  служит множество допустимых слов  $p_1 \in \mathfrak{S}(X_1)$ , а областью определения частичного отображения  $g$  является множество допустимых слов  $p_2 \in \mathfrak{S}(X_2)$ , то областью определения частичного отображения  $\beta$  служит множество слов  $p \in \mathfrak{S}(X)$ , полученных сплетением пар допустимых слов  $p_1$  и  $p_2$ , длина которых отличается друг от друга не более чем на одну букву. Поэтому можно записать

$$\beta(p) = \beta(p_1 \checkmark p_2) = f(p_1) \checkmark g(p_2) = r_1 \checkmark r_2 = r,$$

где  $r_1 \in \mathfrak{S}(Y_1)$ ,  $r_2 \in \mathfrak{S}(Y_2)$ , а  $r \in \mathfrak{S}(Y)$ . Отображение  $\beta$  называется сплетением отображений  $f$  и  $g$  и обозначается

$$\beta = f \checkmark g.$$

Пусть  $A$  и  $B$  — такие автоматы, у которых выходной алфавит  $Y_1$  автомата  $A$  совпадает с входным алфавитом  $X_2$  автомата  $B$ , т. е.  $Y_1 = X_2$ . Автомат  $N = A * B$ , соответствующий последовательной работе автоматов  $A$  и  $B$ , индуцирует отображение  $\gamma$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  в  $\mathfrak{S}(Y_2)$ .

Тогда для любого допустимого входного слова  $p_1 \in \mathfrak{S}(X_1)$  автомата  $A$  существует выходное слово  $r_1 \in \mathfrak{S}(Y_1)$  такое, что  $r_1 = f(p_1)$ , и для любого допустимого входного слова  $r_1 \in \mathfrak{S}(X_2)$  автомата  $B$  (так как  $Y_1 = X_2$ ) существует выходное слово  $r_2 \in \mathfrak{S}(Y_2)$  такое, что  $r_2 = g(r_1)$ . Поэтому можно записать

$$r_2 = g(f(p_1)) = \gamma(p_1).$$

Отображение  $\gamma$  называется композицией отображений  $f$  и  $g$  и обозначается  $\gamma = f \circ g$ .

Легко видеть, что отображение  $\gamma$  определено на всех тех словах  $p_1 \in \mathfrak{S}(X_1)$ , для образов  $r_1 = f(p_1)$  которых существует отображение  $g$  такое, что  $g(r_1) = r_2$ . Если

одно из отображений  $f$  или  $g$  является частичным отображением, то независимо от того, каким является другое отображение (полностью определенным или частичным), отображение  $\gamma$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  в  $\mathfrak{S}(Y_2)$  будет частичным отображением.

## § 2. Теоретико-множественные операции над автоматами

Перейдем теперь к формальному заданию операций объединения и пересечения над абстрактными автоматами. Предварительно заметим, что автомат  $A$ , у которого входной алфавит  $X$ , выходной алфавит  $Y$  и алфавит состояний  $Q$  равны пустому множеству, т. е.  $X = Q = Y = \emptyset$ , будем называть пустым автоматом и обозначать по аналогии с пустым графом через  $\Lambda$ .

Пусть  $L$  — произвольный непустой автомат Мили, а  $\mathfrak{P}(L)$  — множество подавтоматов автомата  $L$ . Пусть также  $A \in \mathfrak{P}(L)$  и  $B \in \mathfrak{P}(L)$  — некоторые подавтоматы автомата  $L$ , причем автоматы  $A$  и  $B$  имеют одно и то же начальное состояние, которое совпадает с начальным состоянием автомата  $L$ . Предположим, что  $A = (X_1, Q_1, Y_1, q_1 \in Q_1, F_1(x \in X_1/y \in Y_1))$ , а  $B = (X_2, Q_2, Y_2, q_1 \in Q_2, F_2(x \in X_2/y \in Y_2))$ . Автомат  $C = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  называется *объединением* автоматов  $A$  и  $B$ , если множества  $X, Q, Y$  и отображение  $F$  определяются по формулам:

$$X = (\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times X_2), \quad (7.1)$$

$$Q = Q_1 \cup Q_2, \quad (7.2)$$

$$Y = (\{1\} \times Y_1) \cup (\{2\} \times Y_2), \quad (7.3)$$

$$Fq = F_1q \cup F_2q, \quad (7.4)$$

где  $q \in Q$ . В том случае, когда  $q \notin Q_1$ , полагаем  $F_1q = \emptyset$ , а при  $q \notin Q_2$  имеем  $F_2q = \emptyset$ .

Если

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad (7.5)$$

и

$$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \quad (7.6)$$

то (7.1) и (7.3) можно записать в виде

$$X = X_1 \cup X_2, \quad (7.7)$$

$$Y = Y_1 \cup Y_2, \quad (7.8)$$

т. е. сумму множеств можно заменить их объединением. Это связано со следующим обстоятельством. Если среди множеств состояний, входных и выходных алфавитов автоматов  $A$  и  $B$  имеются взаимно пересекающиеся множества, то при некоторых фиксированных элементах  $q \in Q$ ,  $x \in X$  и  $y \in Y$  может не выполняться равенство

$$F_1q(x/y) = F_2q(x/y) \quad (7.9)$$

(когда оба отображения не являются пустыми), что приводит к нарушению условий однозначности функций переходов и выходов автомата  $C$ . Поэтому входной  $X$  и выходной  $Y$  алфавиты автомата  $C$  определяются суммой входных (7.1) и выходных (7.3) алфавитов автоматов  $A$  и  $B$ , т. е. одинаковые буквы из алфавитов  $X_1$  и  $X_2$ , а также  $Y_1$  и  $Y_2$  в алфавитах  $X$  и  $Y$  считаются различными. В том случае, когда выполняется (7.9), так же как и при выполнении (7.5) и (7.6), входной  $X$  и выходной  $Y$  алфавиты автомата  $C$  определяются по (7.7) и (7.8).

При несовпадении начальных состояний автоматов  $A$  и  $B$  начальное состояние автомата  $C$ , вообще говоря, определяется неоднозначно, поэтому целесообразно применять операцию объединения к автоматам с одинаковыми начальными состояниями. Если  $A$  и  $B$  — вполне определенные автоматы и множества состояний совпадают между собой, то при объединении получаем вполне определенный автомат  $C$ , в противном случае автомат  $C$  будет частичным.

**Пример 7.1.** Пусть даны автоматы Мили  $A = (X_1, Q_1, Y_1, q_1 \in Q_1, F_1(x \in X_1/y \in Y_1))$ , где

$$X_1 = \{x_1, x_2\}, \quad Q_1 = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad Y_1 = \{y_1, y_2\},$$

$$F_1q_1 = \{q_1(x_1/y_2), q_2(x_2/y_1)\},$$

$$F_1q_2 = \{q_3(x_1/y_1), q_2(x_2/y_2)\},$$

$$F_1q_3 = \{q_1(x_1/y_2), q_2(x_2/y_1)\},$$

графоид которого показан на рис. 7.6, и  $B = (X_2, Q_2, Y_2, q_1 \in Q_2, F_2(x \in X_2/y \in Y_2))$ , где

$$X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad Q_2 = \{q_1, q_2\}, \quad Y_2 = \{y_1, y_2, y_3\},$$

$$F_2q_1 = \{q_1(x_1/y_2), q_1(x_3/y_3), q_2(x_2/y_1)\},$$

$$F_2q_2 = \{q_2(x_2/y_2), q_1(x_3/y_3)\},$$

графоид которого показан на рис. 7.7. Найти автомат, равный объединению автоматов  $A$  и  $B$ .

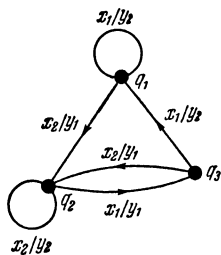


Рис. 7.6.

Так как для любого  $q \in Q$  не имеет места нарушение автоматности, то по формулам (7.2), (7.4), (7.7) и (7.8) находим входной и выходной алфавиты,

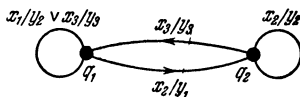


Рис. 7.7.

а также множество состояний и отображение автомата  $C = A \cup B$ :

$$\begin{aligned}
 X &= \{x_1, x_2, x_3\}, & Q &= \{q_1, q_2, q_3\}, & Y &= \{y_1, y_2, y_3\}, \\
 Fq_1 &= \{q_1(x_1/y_2), q_1(x_3/y_3), q_2(x_2/y_1)\}, \\
 Fq_2 &= \{q_3(x_1/y_1), q_2(x_2/y_2), q_1(x_3/y_3)\}, \\
 Fq_3 &= \{q_1(x_1/y_1), q_2(x_2/y_1)\}.
 \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация автомата  $C$  показана на рис. 7.8.

Операцию объединения можно распространить на  $n$  автоматов. Пусть  $A_i = (X_i, Q_i, Y_i, q_1 \in Q_i, F_i(x \in X_i/y \in Y_i))$  —  $n$  автоматов Мили с одним и тем же начальным состоянием  $q_1$ , которые являются подавтоматами автомата  $L$ . Автомат  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  является объединением автоматов  $A_i$ , если

$$\begin{aligned}
 X &= (\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times X_2) \cup \dots \\
 &\quad \dots \cup (\{n\} \times X_n),
 \end{aligned}$$

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n = \bigcup_{i \in I} Q_i,$$

$$\begin{aligned}
 Y &= (\{1\} \times Y_1) \cup (\{2\} \times Y_2) \cup \dots \\
 &\quad \dots \cup (\{n\} \times Y_n),
 \end{aligned}$$

$$Fq = F_1q \cup F_2q \cup \dots \cup F_nq = \bigcup_{i \in I} F_iq,$$

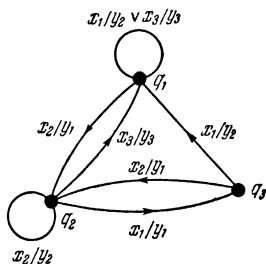


Рис. 7.8.

где  $q \in Q$ , причем  $F_iq = \emptyset$  при  $q \notin X_i$ .

Если не происходит нарушения автоматности в  $A$  или если входные и выходные алфавиты автоматов  $A_i$

удовлетворяют условиям

$$(\forall i, j \in I)(X_i \cap X_j = \emptyset), \quad (\forall i, j \in I)(Y_i \cap Y_j = \emptyset), \\ I = \{1, 2, \dots, n\},$$

то входной  $X$  и выходной  $Y$  алфавиты автомата  $A$  определяются выражениями

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{i \in I} X_i, \\ Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n = \bigcup_{i \in I} Y_i.$$

Попутно заметим, что каждый автомат Мили, графoid которого после вычеркивания букв входного и выходного алфавитов не является мультиграфом, можно представить объединением автономных автоматов в виде

$$A = \left( \bigcup_{x \in X} A_x \right) \cup \left( \bigcup_{y \in Y} A_y \right) = \bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} A_{xy},$$

который будет использоваться в дальнейшем при разложении автоматов по различным операциям.

При задании операции объединения автоматов Мура возникают трудности, которые заключаются в том, что одинаковые состояния разных автоматов могут быть отмечены различными выходными сигналами (в частности, начальные состояния автоматов). Для преодоления их проще всего интерпретировать автоматы Мура эквивалентными им автоматами Мили и затем по известным формулам построить объединение автоматов.

Перейдем теперь к операции пересечения автоматов Мили. Пусть  $A = (X_1, Q_1, Y_1, q_1 \in Q_1, F_1(x \in X_1/y \in Y_1))$  и  $B = (X_2, Q_2, Y_2, q_1 \in Q_2, F_2(x \in X_2/y \in Y_2))$  — подавтоматы автомата  $L$ . Автомат  $D = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  называется *пересечением* автоматов  $A$  и  $B$ , если  $X, Q, Y$  и  $F$  определяются по формулам

$$X = X_1 \cap X_2, \quad (7.10)$$

$$Q = Q_1 \cap Q_2, \quad (7.11)$$

$$Y = Y_1 \cap Y_2, \quad (7.12)$$

$$Fq = F_1q \cap F_2q, \quad (7.13)$$

где  $q \in Q$ .

Пример 7.2. Если заданы автоматы  $A$  и  $B$ , рассмотренные в примере 7.1, то, используя (7.10)–(7.13), можно найти автомат  $D$ , равный пересечению автоматов  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2\}, & Q &= \{q_1, q_2\}, & Y &= \{y_1, y_2\}, \\ Fq_1 &= \{q_1(x_1/y_2), q_2(x_2/y_1)\}, \\ Fq_2 &= \{q_2(x_2/y_2)\}. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация автомата  $D$  показана на рис. 7.9.

По аналогии с операцией объединения, операцию пересечения можно распространить на  $n$  автоматов. Пусть  $A_i = (X_i, Q_i, Y_i, q_i \in Q_i, F_i(x \in X_i/y \in Y_i))$  —  $n$  подавтоматов автомата  $L$ . Автомат  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  является пересечением автоматов  $A_i$ , если



Рис. 7.9.

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = \bigcap_{i \in I} X_i,$$

$$Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n = \bigcap_{i \in I} Q_i,$$

$$Y = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n = \bigcap_{i \in I} Y_i,$$

$$Fq = F_1q \cap F_2q \cap \dots \cap F_nq = \bigcap_{i \in I} F_iq,$$

где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $q \in Q$ .

Если необходимо применить операцию пересечения к автоматам Мура, то предварительно интерпретируем их автоматами Мили, а затем по указанным формулам находим пересечение.

Легко видеть, что, по аналогии с графами, операции объединения и пересечения автоматов удовлетворяют законам ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности. Поэтому множество  $\mathfrak{F}(L)$  подавтоматов произвольного непустого автомата Мили  $L$  по операциям объединения  $\cup$  и пересечения  $\cap$  автоматов является дистрибутивной структурой.



### § 3. Алгебраические операции над автоматами

Рассмотрим теперь задание операций умножения, суммирования, суперпозиции и композиции абстрактных автоматов и выясним, какие алгебраические структуры они образуют на множестве абстрактных автоматов. Напомним еще раз, что везде равенство автоматов понимается с точностью до изоморфизма автоматов.

Операция умножения графов приводит к двум операциям умножения автоматов. *Первая операция умножения*, обозначаемая  $\times$ , применяется к произвольным абстрактным автоматам с *раздельными входами*, а *вторая операция умножения*, обозначаемая  $\otimes$ , применяется к абстрактным автоматам, имеющим *общий вход*, т. е. *один и тот же входной алфавит*. Рассмотрим отдельно эти две операции умножения автоматов, а в следующей главе установим взаимосвязь между автоматами, разложимыми по этим операциям.

Пусть  $\mathfrak{A}$  — бесконечное множество абстрактных автоматов Мили и  $A, B \in \mathfrak{A}$  — произвольные непустые автоматы. Обозначим их через  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (U, W, V, w_1 \in W, P(u \in U/v \in V))$ , где  $X, U$  и  $Y, V$  — соответственно входные и выходные алфавиты,  $Q$  и  $W$  — алфавиты состояний, а  $F$  и  $P$  — отображения соответственно  $Q$  и  $W$  в себя. Автомат Мили  $K = (Z, H, S, h_1 \in H, R(z \in Z/s \in S))$ , обозначаемый  $K = A \times B$ , называется *произведением* автоматов  $A$  и  $B$ , если

$$Z = X \times U, \quad (7.14)$$

$$H = Q \times W, \quad (7.15)$$

$$S = Y \times V, \quad (7.16)$$

$$Rh = Fq \times Pw, \quad (7.17)$$

где  $q \in Q$ ,  $w \in W$ ,  $h \in H$ , причем  $h = (q, w)$ ,  $z = (x, u)$ ,  $s = (y, v)$ . Очевидно, что *начальным* состоянием автомата  $K$  будет состояние  $h_1 = (q_1, w_1)$ . Если  $A$  и  $B$  — вполне определенные автоматы, то автомат  $K$  является вполне определенным автоматом. Если хотя бы один из исходных автоматов является частичным автоматом, то в результате умножения получаем частичный автомат  $K$ .

Пример 7.3. Пусть даны автоматы Мили  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , где

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2\}, & Q &= \{q_1, q_2\}, & Y &= \{y_1, y_2\}, \\ Fq_1 &= \{q_2(x_1/y_2), q_1(x_2/y_1)\}, \\ Fq_2 &= \{q_1(x_1/y_1)\}, \end{aligned}$$

и  $B = (U, W, V, w_1 \in W, P(u \in U/v \in V))$ , где

$$\begin{aligned} U &= \{u_1, u_2\}, & W &= \{w_1, w_2, w_3\}, & V &= \{v_1, v_2\}, \\ Pw_1 &= \{w_2(u_1/v_2), w_3(u_2/v_2)\}, \\ Pw_2 &= \{w_3(u_1/v_2), w_2(u_2/v_1)\}, \\ Pw_3 &= \{w_3(u_1/v_2), w_1(u_2/v_1)\}. \end{aligned}$$

Графоиды автоматов  $A$  и  $B$  показаны соответственно на рис. 7.10 и 7.11. Найти автомат, равный произведению автоматов  $A$  и  $B$ .

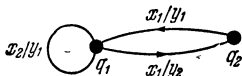


Рис. 7.10.

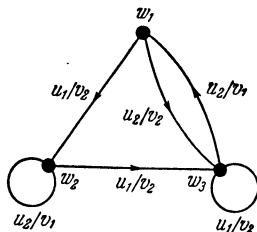


Рис. 7.11.

По формулам (7.14)–(7.16) находим множества

$$\begin{aligned} Z &= \{(x_1, u_1), (x_1, u_2), (x_2, u_1), (x_2, u_2)\}, \\ H &= \{(q_1, w_1), (q_1, w_2), (q_1, w_3), (q_2, w_1), (q_2, w_2), (q_2, w_3)\}, \\ S &= \{(y_1, v_1), (y_1, v_2), (y_2, v_1), (y_2, v_2)\}, \end{aligned}$$

которые после переобозначений можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \\ H &= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}, \\ S &= \{s_1, s_2, s_3, s_4\}. \end{aligned}$$

На основании (7.17) находим отображение  $R$  множества  $H$  в себя

$$Rh_1 = \{h_5(z_1/s_4), h_6(z_2/s_4), h_2(z_3/s_2), h_3(z_4/s_2)\},$$

$$Rh_2 = \{h_6(z_1/s_4), h_5(z_2/s_3), h_3(z_3/s_2), h_2(z_4/s_1)\},$$

$$Rh_3 = \{h_6(z_1/s_4), h_4(z_2/s_3), h_3(z_3/s_2), h_1(z_4/s_1)\},$$

$$Rh_4 = \{h_2(z_1/s_2), h_3(z_2/s_2)\},$$

$$Rh_5 = \{h_3(z_1/s_2), h_2(z_2/s_1)\},$$

$$Rh_6 = \{h_3(z_1/s_2), h_1(z_2/s_1)\}.$$

Графоид автомата  $K = A \times B$  показан на рис. 7.12.

Операцию умножения автоматов с отдельными входами можно обобщить на случай трех, четырех и вообще  $n$  автоматов. Пусть  $A_i =$

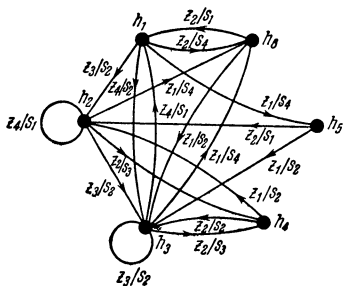


Рис. 7.12.

$= (X_i, Q_i, Y_i, q_{i0} \in Q_i, F_i(x_i \in X_i/y_i \in Y_i))$  — произвольные непустые автоматы Ми-ли. Автомат  $A = (X, Q, Y, q_0 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  называется произведением автоматов  $A_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  и обозначается

$$A = \prod_{i \in I} A_i,$$

если соответствующие множества и отображение определяются по формулам

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$Q = \prod_{i \in I} Q_i,$$

$$Y = \prod_{i \in I} Y_i,$$

$$Fq = \prod_{i \in I} F_i q_i,$$

где  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n, x \in X$ , причем  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2, \dots, q_n \in Q_n, q \in Q$ , причем  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \dots, y_n \in Y_n, y \in Y$ , причем  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , т. е.  $x, y, q$  суть  $n$ -ки.

Что касается произведения автоматов Мура, то очевидно, что операция умножения, определяемая формулами (7.14) — (7.17), в равной степени применима к автоматам Мура, так же как и к автоматам Мили.

Определим операцию умножения  $\times$  автоматов в матричной форме.

Пусть  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (U, W, V, w_1 \in W, P(u \in U/v \in V))$  — произвольные автоматы Мили из  $\mathfrak{A}$ . Предположим, что

$$R_A = \| r_{ij}(x/y) \|,$$

где  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, m\}$  и

$$r_{ij}(x/y) = \begin{cases} x/y, & \text{если } q_j \in Fq_i \text{ по букве } x \in X \text{ с вы-} \\ & \text{ходом } y \in Y, \\ 0, & \text{если } q_j \notin Fq_i, \end{cases}$$

— матрица соединений автомата  $A$ , а

$$R_B = \| r_{kl}(u/v) \|,$$

где  $k, l \in J = \{1, 2, \dots, n\}$  и

$$r_{kl}(u/v) = \begin{cases} u/v, & \text{если } w_l \in Pw_k \text{ по букве } u \in U \text{ с вы-} \\ & \text{ходом } v \in V, \\ 0, & \text{если } w_l \notin Pw_k, \end{cases}$$

— матрица соединений автомата  $B$ .

Тогда матрица соединений  $R_K$  автомата  $K = A \times B$  равна *прямому произведению* матриц  $R_A$  и  $R_B$ , т. е.

$$R_K = R_A \times R_B. \quad (7.18)$$

Обозначим ее через

$$R_K = \| r_{\alpha\beta}(z/s) \|.$$

Элементы матрицы определяются, очевидно, из выражения

$$r_{\alpha\beta}(z/s) = \begin{cases} (x, u)/(y, v), & \text{если } r_{ij} = x/y \text{ и } r_{kl} = u/v, \\ 0, & \text{если } r_{ij} = 0 \text{ или } r_{kl} = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta \in A = \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $p = mn$ ,  $z = (x, u)$ ,  $s = (y, v)$ .

В качестве примера рассмотрим построение матрицы соединений автомата, равного произведению автоматов  $A$  и  $B$ , показанных на рис. 7. 10 и 7. 11. Матрица

соединений автомата  $A$  имеет вид

$$R_A = \begin{vmatrix} x_2/y_1 & x_1/y_2 \\ x_1/y_1 & 0 \end{vmatrix},$$

а автомата  $B$  — вид

$$R_B = \begin{vmatrix} 0 & u_1/v_2 & u_2/v_2 \\ 0 & u_2/v_1 & u_1/v_2 \\ u_2/v_1 & 0 & u_1/v_2 \end{vmatrix}.$$

По формуле (7.18) с учетом принятых ранее переобозначений находим матрицу соединений автомата  $K = A \times B$ , показанного на рис. 7.12, которая запишется в форме

$$R_K = \begin{vmatrix} 0 & z_3/s_2 & z_4/s_2 & 0 & z_1/s_4 & z_2/s_4 \\ 0 & z_4/s_1 & z_3/s_2 & 0 & z_2/s_3 & z_1/s_4 \\ z_1/s_1 & 0 & z_3/s_2 & z_2/s_3 & 0 & z_1/s_4 \\ 0 & z_1/s_2 & z_2/s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2/s_1 & z_1/s_2 & 0 & 0 & 0 \\ z_2/s_1 & 0 & z_1/s_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Перейдем ко второй операции умножения автоматов. Пусть  $\mathfrak{A}(X)$  — множество абстрактных автоматов Мили, имеющих один и тот же входной алфавит  $X$ , а  $A = (X, Q, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (X, W, U, w_1 \in W, P(x \in X/u \in U))$  — произвольные непустые автоматы из  $\mathfrak{A}(X)$ . Автомат Мили  $K = (X, V, S, v_1 \in V, R(x \in X/s \in S))$ , обозначаемый  $K = A \otimes B$ , называется *произведением* автоматов  $A$  и  $B$ , если

$$V = Q \times W, \quad (7.19)$$

$$S = Y \times U, \quad (7.20)$$

$$Rv = \bigcup_{x \in X} (F_x q \times P_x w), \quad (7.21)$$

где  $v \in V$ ,  $q \in Q$ ,  $w \in W$ , причем  $v = (q, w)$ , а  $F_x q$  и  $P_x w$  — соответственно отображения состояний  $q$  и  $w$  по букве входного алфавита  $x \in X$ .

Заметим, что, строго говоря, входной алфавит автомата  $K = A \otimes B$  равен *главной диагонали*  $\Delta$  *декартова произведения*  $X \times X$ . Поскольку между множествами  $\Delta$  и  $X$  существует каноническое соответствие, то каждый элемент  $(x, x) \in \Delta$  можно заменить элементом  $x \in X$  и считать алфавит  $X$  входным алфавитом автомата  $K$ .

Если операция умножения  $\otimes$  применяется к вполне определенным автоматам, то в результате получаем вполне определенный автомат, если же хотя бы один из исходных автоматов частичный, то в результате получим частичный автомат.

Пример 7.4. Пусть будут даны автоматы Мили  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , где  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$ ,

$$Fq_1 = \{q_1(x_1/y_1), q_2(x_2/y_2)\},$$

$$Fq_2 = \{q_2(x_1/y_1), q_1(x_2/y_1)\},$$

и  $B = (X, W, U, w_1 \in W, P(x \in X/u \in U))$ , где

$$X = \{x_1, x_2\}, \quad W = \{w_1, w_2, w_3\},$$

$$U = \{u_1, u_2\},$$

$$Pw_1 = \{w_2(x_1/u_2), w_3(x_2/u_1)\},$$

$$Pw_2 = \{w_1(x_2/u_1)\},$$

$$Pw_3 = \{w_2(x_1/u_1), w_3(x_2/u_2)\},$$

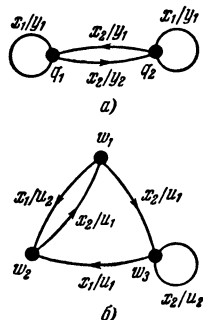


Рис. 7.13.

геометрическая интерпретация которых показана соответственно на рис. 7.13, а, б. Найти автомат, равный произведению автоматов  $A$  и  $B$ .

По формулам (7.19) и (7.20) находим множества

$$V = \{(q_1, w_1), (q_1, w_2), (q_1, w_3), (q_2, w_1), (q_2, w_2), (q_2, w_3)\},$$

$$S = \{(y_1, u_1), (y_1, u_2), (y_2, u_1), (y_2, u_2)\},$$

которые после переобозначений запишем в виде

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}.$$

На основании (7.21) находим отображение  $R$  множества  $V$  в себя

$$Rv_1 = \{(F_{x_1}q_1 \times P_{x_1}w_1) \cup (F_{x_2}q_1 \times P_{x_2}w_1)\} = \{v_2(x_1/s_2), v_6(x_2/s_3)\},$$

$$Rv_2 = \{v_4(x_2/s_3)\},$$

$$Rv_3 = \{v_2(x_1/s_1), v_6(x_2/s_4)\},$$

$$Rv_4 = \{v_5(x_1/s_2), v_3(x_2/s_1)\},$$

$$Rv_5 = \{v_1(x_2/s_1)\},$$

$$Rv_6 = \{v_5(x_1/s_1), v_3(x_2/s_2)\}.$$

Таким образом, получен автомат  $K = A \otimes B$ , графоид которого показан на рис. 7.14.

Отметим также, что операцию умножения автоматов с общим входом можно обобщить на случай  $n$  автоматов Мили и использовать для нахождения произведения автоматов Мура.

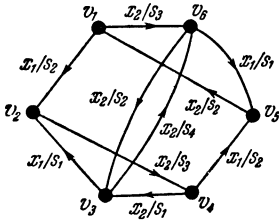


Рис. 7.14.

Пусть теперь  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и  $B = (X, W, U, \omega_1 \in W, P(x \in X/u \in U))$  — произвольные непустые автоматы Мили из  $\mathfrak{A}(X)$ , а  $R_A$  и  $R_B$  — соответственно их матрицы соединений.

Представим матрицы  $R_A$  и  $R_B$  объединением матриц автономных автоматов по буквам входного алфавита  $x \in X$ :

$$R_A = \bigcup_{x \in X} R_{Ax}, \quad R_B = \bigcup_{x \in X} R_{Bx}.$$

Тогда матрица соединений  $R_K$  автомата  $K = A \otimes B$  определяется по формуле

$$R_K = \bigcup_{x \in X} (R_{Ax} \times R_{Bx}), \quad (7.22)$$

т. е. равна объединению прямых произведений матриц автономных автоматов.

Например, по матрицам соединений

$$R_A = \begin{vmatrix} x_1/y_1 & x_2/y_2 \\ x_2/y_1 & x_1/y_1 \end{vmatrix},$$

$$R_B = \begin{vmatrix} 0 & x_1/u_2 & x_2/u_1 \\ x_2/u_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1/u_1 & x_2/u_2 \end{vmatrix}$$

автоматов  $A$  и  $B$ , показанных на рис. 7.13, а, б, по формуле (7.22) легко найти матрицу соединений автомата

$K = A \otimes B$ , которая после соответствующих переобозначений имеет вид

$$R_K = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & x_1/s_2 & 0 & 0 & 0 & x_2/s_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2/s_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_1/s_1 & 0 & 0 & 0 & x_2/s_4 \\ 0 & 0 & x_2/s_1 & 0 & x_1/s_2 & 0 \\ x_2/s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2/s_2 & 0 & x_1/s_1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Определим операцию суммирования двух автоматов Мили. Пусть  $A$  и  $B$  — введенные выше произвольные абстрактные автоматы из  $\mathfrak{A}$ . Автомат  $M = (Z, H, S, h_1 \in H, R(z \in Z/s \in S))$ , обозначаемый  $M = A + B$ , называется *суммой* автоматов  $A$  и  $B$  в том случае, когда

$$Z = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times U), \quad (7.23)$$

$$H = Q \times W, \quad (7.24)$$

$$S = (\{1\} \times Y) \cup (\{2\} \times V), \quad (7.25)$$

$$Rh = (Fq \times \{w\}) \cup (\{q\} \times Pw), \quad (7.26)$$

где  $q \in Q$ ,  $w \in W$ ,  $h \in H$ , причем  $h = (q, w)$ . Начальным состоянием автомата  $M$  служит  $h_1 = (q_1, w_1)$ .

Если входные и выходные алфавиты автоматов  $A$  и  $B$  удовлетворяют условиям

$$X \cap U = \emptyset,$$

$$Y \cap V = \emptyset,$$

то входной  $Z$  и выходной  $S$  алфавиты автомата  $M$  определяются выражениями

$$Z = X \cup U, \quad (7.27)$$

$$S = Y \cup V. \quad (7.28)$$

Вопрос о полной и частичной определенности автоматов при суммировании решается так же, как и в случае произведения автоматов.

**Пример 7.5.** Пусть даны автоматы Мили  $A$  и  $B$ , рассмотренные в примере 7.3. Найти автомат, равный сумме автоматов  $A$  и  $B$ .

Поскольку входные и выходные алфавиты автоматов  $A$  и  $B$  взаимно не пересекаются, то по формулам



(7.27), (7.24), (7.28) и (7.26) находим алфавиты и отображение автомата  $M$ , которые имеют вид

$$Z = \{x_1, x_2, u_1, u_2\},$$

$$H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\},$$

$$S = \{y_1, y_2, v_1, v_2\},$$

$$Rh_1 = \{h_4(x_1/y_2), h_1(x_2/y_1), h_2(u_1/v_2), h_3(u_2/v_2)\},$$

$$Rh_2 = \{h_5(x_1/y_2), h_2(x_2/y_1), h_3(u_1/v_2), h_2(u_2/v_1)\},$$

$$Rh_3 = \{h_6(x_1/y_2), h_3(x_2/y_1), h_3(u_1/v_2), h_1(u_2/v_1)\},$$

$$Rh_4 = \{h_1(x_1/y_1), h_5(u_1/v_2), h_6(u_2/v_2)\},$$

$$Rh_5 = \{h_2(x_1/y_1), h_6(u_1/v_2), h_5(u_2/v_1)\},$$

$$Rh_6 = \{h_3(x_1/y_1), h_6(u_1/v_2), h_4(u_2/v_1)\}.$$

Графоид автомата  $M = A + B$  показан на рис. 7.15.

Операцию суммирования, так же как и операцию умножения, можно обобщить на случай трех, четырех и

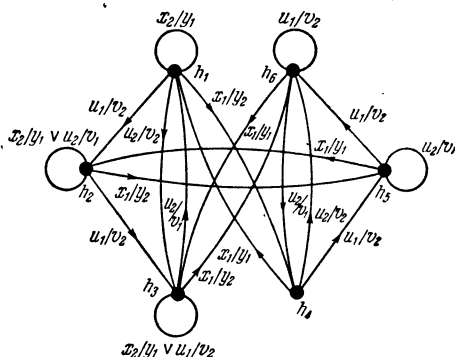


Рис. 7.15.

вообще  $n$  автоматов. Пусть  $A_i = (X_i, Q_i, Y_i, q_i \in Q_i, F_i(x_i \in X_i/y_i \in Y_i))$  — произвольные автоматы Мили. Автомат  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  называется суммой автоматов  $A_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  и

обозначается

$$A = \sum_{i \in I} A_i,$$

если

$$X = (\{1\} \times X_1) \cup (\{2\} \times X_2) \cup \dots \cup (\{n\} \times X_n),$$

$$Q = \prod_{i \in I} Q_i,$$

$$Y = (\{1\} \times Y_1) \cup (\{2\} \times Y_2) \cup \dots \cup (\{n\} \times Y_n),$$

$$Fq = (F_1 q_1 \times \{q_2\}) \times \dots \times \{q_n\} \cup \dots$$

$$\dots \cup (\{q_1\} \times F_2 q_2 \times \dots \times \{q_n\}) \cup \dots \cup (\{q_1\} \times \{q_2\} \times \dots \times F_n q_n),$$

где  $q \in Q$ ,  $q_1 \in Q_1$ ,  $q_2 \in Q_2$ , ...,  $q_n \in Q_n$ , причем

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Если входные и выходные алфавиты автоматов  $A_i$  попарно не пересекаются между собой, то выражения  $X$  и  $Y$  можно записать в виде

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i,$$

который используется вместо суммирования множеств.

Заметим, что при суммировании автоматов Мура можно использовать те же формулы, что и в случае автоматов Мили.

Пусть  $R_A$  и  $R_B$  — матрицы соединений автоматов  $A$ ,  $B \in \mathfrak{A}$ . Тогда матрица соединений  $R_M$  автомата

$$M = A + B$$

определяется по формуле

$$R_M = (R_A \times E_B) \cup (E_A \times R_B), \quad (7.29)$$

где  $E_A$  и  $E_B$  — соответственно единичные матрицы порядков  $R_A$  и  $R_B$ .

По формуле (7.29) можно найти матрицу соединений автомата  $M$ , равного сумме рассмотренных ранее автоматов (рис. 7.15), которая будет иметь вид

$$R_M = \left\| \begin{array}{cccccc} x_2/y_1 & 0 & 0 & x_1/y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2/y_1 & 0 & 0 & x_1/y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2/y_1 & 0 & 0 & x_1/y_2 \\ x_1/y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1/y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1/y_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cup \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & u_1/v_2 & u_2/v_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2/v_1 & u_1/v_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2/v_1 & 0 & u_1/v_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1/v_2 & u_2/v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2/v_1 & u_1/v_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_2/v_1 & 0 & u_1/v_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccc} x_2/y_1 & u_1/v_2 & u_2/v_2 & x_1/y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2/y_1 \vee u_2/v_1 & u_1/v_2 & 0 & x_1/y_2 & 0 \\ u_2/v_1 & 0 & x_2/y_1 \vee u_1/v_2 & 0 & 0 & x_1/y_2 \\ x_1/y_1 & 0 & 0 & 0 & u_1/v_2 & u_2/v_2 \\ 0 & x_1/y_1 & 0 & 0 & u_2/v_1 & u_1/v_2 \\ 0 & 0 & x_1/y_1 & u_2/v_1 & 0 & u_1/v_2 \end{array} \right\|.$$

Что касается свойств операций умножения и суммирования на множестве абстрактных автоматов  $\mathfrak{A}$ , то они подобны свойствам аналогичных операций на множестве графов Берга  $\mathfrak{G}$ .

Действительно, для произвольных автоматов Мили  $A, B, C$  из  $\mathfrak{A}$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (A \times B) \times C &= A \times (B \times C), \\ A \times B &\sim B \times A, \\ A \times E &\sim E \times A \sim A, \end{aligned}$$

где  $E$  — единичный автомат. Легко видеть, что роль единичного автомата по операции умножения  $\times$  играет автомат  $E = (X, Q, Y, q \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , где  $X = \{x\}$ ,  $Q = \{q\}$ ,  $Y = \{y\}$ , а  $Fq = \{q(x/y)\}$ . Поэтому множество  $\mathfrak{A}$  по операции умножения  $\times$  образует коммутативную с точностью до изоморфизма автоматов полугруппу с нейтральным элементом  $E$ , которую обозначим через  $\mathfrak{A}_\times$ .

Что касается операции умножения  $\otimes$ , то очевидно, что для любых автоматов  $A$ ,  $B$  и  $C$  из множества  $\mathfrak{A}(X)$  абстрактных автоматов с общим входным алфавитом  $X$  выполняются соотношения, записанные выше, причем роль единичного автомата играет автомат  $E = (X, Q, Y, q \in Q, F(x \in X/y \in Y))$ , где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  — входной алфавит, который совпадает с входным алфавитом автоматов из  $\mathfrak{A}(X)$ ,  $Q = \{q\}$ ,  $Y = \{y\}$ , а  $Fq = \{q(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_p/y)\}$ . Следовательно, множество  $\mathfrak{A}(X)$  по операции умножения  $\otimes$  образует коммутативную с точностью до изоморфизма автоматов полугруппу  $\mathfrak{A}(X)_{\otimes}$  с нейтральным элементом  $E$ .

Аналогично множество  $\mathfrak{A}$  по операции суммирования автоматов образует полугруппу, которую обозначим через  $\mathfrak{A}_+$ .

Далее, так как для автоматов с одним и тем же начальным состоянием имеет место

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cup B &= B \cup A, \\ A \cup \Lambda &= \Lambda \cup A = A,\end{aligned}$$

где  $\Lambda$  — пустой автомат, и, кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C), \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \times \Lambda &= \Lambda \times A = \Lambda,\end{aligned}$$

то по этим двум операциям  $\cup$  и  $\times$  множество абстрактных автоматов  $\mathfrak{A}$  (считая  $\cup$  аддитивной, а  $\times$  мультипликативной операциями) является ассоциативно-коммутативным с точностью до изоморфизма автоматов полугруппом, которое обозначим через  $\mathfrak{A}_{\cup, \times}$ .

Перейдем теперь к суперпозиции абстрактных автоматов. Пусть  $\mathfrak{B}$  — бесконечное множество абстрактных автоматов Мили, входные и выходные алфавиты которых являются не обязательно различными подмножествами универсального алфавита  $U$ . Предположим, что  $A = (X_1, Q, Y_1, q_1 \in Q, F(x \in X_1/y \in Y_1))$  и  $B = (X_2, W, Y_2, \omega_1 \in W, P(x \in X_2/y \in Y_2))$  — некоторые автоматы из  $\mathfrak{B}$ , индуцирующие соответственно отображения  $f$  и  $g$ , а пересечение  $Y_1 \cap X_2 = Z$ , вообще говоря, не пусто.

Отображение произвольного состояния  $q \in Q$  автомата  $A$  можно представить в виде

$$Fq = F_{y_1}q \cup F_{y_2}q \cup \dots \cup F_{y_p}q = \bigcup_{y \in Y_1} F_y q,$$

где  $p$  — число букв входного алфавита  $Y_1$ , а  $F_y q$  — отображение состояния  $q$ , при котором на выходе появляется буква  $y \in Y_1$ . Отображение произвольного состояния  $w \in W$  автомата  $B$  представим в форме

$$Pw = P_{x_1}w \cup \dots \cup P_{x_s}w = \bigcup_{x \in X_2} P_x w,$$

где  $s$  — число букв входного алфавита  $X_2$ , а  $P_x w$  — отображение состояния  $w$  по букве  $x \in X_2$ .

Автомат  $N = (X_1, H, Y_2, h_1 \in H, S(x \in X_1/y \in Y_2))$  называется *суперпозицией* автоматов  $A$  и  $B$  и обозначается  $N = A * B$ , если множество состояний

$$H = Q \times W, \quad (7.30)$$

входной алфавит совпадает с входным алфавитом  $X_1$  автомата  $A$ , выходной алфавит — с выходным алфавитом  $Y_2$  автомата  $B$ , а отображение  $S$  множества  $H$  в себя определяется выражением

$$\begin{aligned} Sh &= (F_{z_1}q \times P_{z_1}w) \cup (F_{z_2}q \times P_{z_2}w) \cup \dots \cup (F_{z_m}q \times P_{z_m}w) = \\ &= \bigcup_{z \in Z} (F_z q \times P_z w), \quad (7.31) \end{aligned}$$

где  $h \in H$ ,  $q \in Q$ ,  $w \in W$ , причем  $h = (q, w)$ , а  $z \in Z = Y_1 \cap X_2$ , причем  $m$  — число букв алфавита  $Z$ .

Пример 7.6. Пусть даны автоматы  $A = (X, Q, Z, q_1 \in Q, F(x \in X/z \in Z))$ , где

$$X = \{x_1, x_2\}, \quad Q = \{q_1, q_2\}, \quad Z = \{z_1, z_2, z_3\},$$

$$Fq_1 = \{q_2(x_1/z_2), q_2(x_2/z_3)\},$$

$$Fq_2 = \{q_1(x_2/z_3), q_2(x_1/z_1)\},$$

и  $B = (Z, W, Y, w_1 \in W, P(z \in Z/y \in Y))$ , где

$$Z = \{z_1, z_2, z_3\}, \quad W = \{w_1, w_2, w_3\}, \quad Y = \{y_1, y_2\},$$

$$Pw_1 = \{w_1(z_3/y_1), w_2(z_1/y_2)\},$$

$$Pw_2 = \{w_1(z_2/y_1), w_2(z_3/y_2), w_3(z_1/y_2)\},$$

$$Pw_3 = \{w_1(z_1/y_2)\}.$$

Графоиды автоматов  $A$  и  $B$  показаны соответственно на рис. 7.16 и 7.17. Найти автомат, равный суперпозиции автоматов  $A$  и  $B$ .

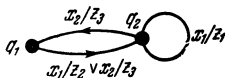


Рис. 7.16.

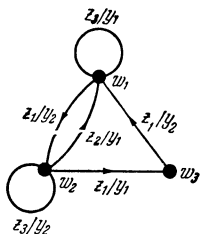


Рис. 7.17.

По формулам (7.30) и (7.31) определяем множество состояний  $H$  и отображение  $S$  множества  $H$  в себя

$$H = \{(q_1, w_1), (q_1, w_2), (q_1, w_3), (q_2, w_1), (q_2, w_2), (q_2, w_3)\}.$$

Введем следующие обозначения:  $h_1 = (q_1, w_1)$ ,  $h_2 = (q_1, w_2)$ ,  $h_3 = (q_1, w_3)$ ,  $h_4 = (q_2, w_1)$ ,  $h_5 = (q_2, w_2)$ ,  $h_6 = (q_2, w_3)$ . Отображение  $S$  элемента  $w_1 \in W$  находим по формуле

$$Sh_1 = (F_{z_1}q_1 \times P_{z_1}w_1) \cup (F_{z_2}q_1 \times P_{z_2}w_1) \cup (F_{z_3}q_1 \times P_{z_3}w_1).$$

Поскольку  $F_{z_1}q_1 = \emptyset$  и  $P_{z_2}w_1 = \emptyset$ , то  $F_{z_1}q_1 \times P_{z_1}w_1 = \emptyset$  и  $F_{z_2}q_1 \times P_{z_2}w_1 = \emptyset$ . Поэтому

$$Sh_1 = F_{z_3}q_1 \times P_{z_3}w_1 = \{h_4(x_2/y_1)\}.$$

Аналогично находим

$$Sh_2 = \{h_4(x_1/y_1), h_5(x_2/y_2)\},$$

$$Sh_3 = \emptyset,$$

$$Sh_4 = \{h_1(x_2/y_1), h_5(x_1/y_2)\},$$

$$Sh_5 = \{h_6(x_1/y_2), h_2(x_2/y_2)\},$$

$$Sh_6 = \{h_4(x_1/y_2)\}.$$

Графоид автомата  $N = A * B$  показан на рис. 7.18.

Заметим, что автомат  $N$  не является минимальным. Построение канонической минимизации приводит к эквивалентному автомату, графоид которого показан на рис. 7.19.

Операцию суперпозиции абстрактных автоматов можно записать, используя представление каждого автомата объединением автономных автоматов.

Автомат  $A$  представим объединением автономных автоматов по буквам выходного алфавита (сохраняя

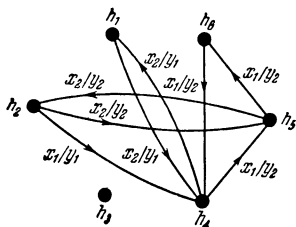


Рис. 7.18.

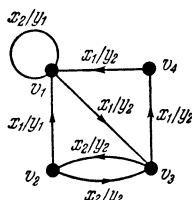


Рис. 7.19.

в каждом автономном автомате буквы входного алфавита), т. е.

$$A = \bigcup_{y \in Y_1} A_y,$$

а автомат  $B$  представим объединением автономных автоматов по буквам входного алфавита (сохраняя буквы выходного алфавита), т. е.

$$B = \bigcup_{x \in X_2} B_x.$$

Тогда автомат  $N = A * B$  определится по формуле

$$\begin{aligned} N &= (A_{z_1} \times B_{z_1}) \cup (A_{z_2} \times B_{z_2}) \cup \dots \cup (A_{z_n} \times B_{z_n}) = \\ &= \bigcup_{z \in Z} (A_z \times B_z), \end{aligned} \quad (7.32)$$

где  $Z = Y_1 \cap X_2$ .

Из выражения (7.32) следует, что операция суперпозиции абстрактных автоматов соответствует композиции отображений  $f$  и  $g$  исходных автоматов, если  $Y_1 = X_2$ .

Если же  $Y_1 \neq X_2$ , причем  $Y_1 \cap X_2 = Z$ , то в этом случае получаем композицию сужений отображений  $f$  и  $g$  на множество  $Z$ . Нетрудно видеть, что операция суперпозиции ассоциативна, но некоммутативна, так же как

и композиция отображений. Поэтому множество  $\mathfrak{A}$  абстрактных автоматов Мили по операции суперпозиции образует *полугруппу*  $\mathfrak{A}_*$ . Полугруппа  $\mathfrak{A}_*$  содержит автоматы, у которых число состояний может быть произвольным, а множества входных  $X$  и выходных  $Y$  алфавитов являются не обязательно различными подмножествами универсального алфавита  $U$ .

Если  $X \cap Y = \emptyset$ , т. е. композиция отображений  $f$  и  $g$  не существует, то в результате суперпозиции получаем автомат с пустым отображением, который эквивалентен автомату с одним состоянием без переходов. Этот автомат выполняет роль нуля в полугруппе  $\mathfrak{A}_*$ .

Рассмотрим запись операции суперпозиции в матричной форме. Пусть  $A$  и  $B$  — некоторые автоматы Мили из  $\mathfrak{A}$ , а  $R_A = \|r_{ij}(x/y)\|$  и  $R_B = \|r_{kl}(x/y)\|$  — соответственно матрицы соединений этих автоматов.

Представим матрицу соединений  $R_A$  автомата  $A$  в виде объединения матриц автономных автоматов по буквам выходного алфавита  $y \in Y_1$ :

$$R_A = \bigcup_{y \in Y_1} R_{Ay},$$

и из каждой автономной матрицы исключим ту букву, по которой выделена эта матрица.

Матрицу соединений  $R_B$  автомата  $B$  представим в виде объединения матриц соединений автономных автоматов по буквам входного алфавита  $x \in X_2$ :

$$R_B = \bigcup_{x \in X_2} R_{Bx},$$

аналогично исключая ту букву, по которой выделена данная автономная матрица.

Матрица соединений  $R_N$  автомата  $N$ , равного суперпозиции автоматов  $A$  и  $B$  в том случае, когда  $Y_1 \cap X_2 = Z \neq \emptyset$ , определяется формулой

$$\begin{aligned} R_N &= (R_{Az_1} \times R_{Bz_1}) \cup (R_{Az_2} \times R_{Bz_2}) \cup \dots \cup (R_{Az_n} \times R_{Bz_n}) = \\ &= \bigcup_{z \in Z} (R_{Az} \times R_{Bz}). \quad (7.33) \end{aligned}$$



Запишем матрицы соединений  $R_A$  и  $R_B$  автоматов  $A$  и  $B$ , показанных на рис. 7.16 и 7.17:

$$R_A = \begin{vmatrix} 0 & x_1/z_2 \vee x_2/z_3 \\ x_2/z_3 & x_1/z_1 \end{vmatrix},$$

$$R_B = \begin{vmatrix} z_3/y_1 & z_1/y_2 & 0 \\ z_2/y_1 & z_3/y_2 & z_1/y_2 \\ z_1/y_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

По формуле (7.33) строим матрицу соединений  $R_N$  автомата  $N = A * B$ :

$$R_N = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x_2/y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/y_1 & x_2/y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2/y_1 & 0 & 0 & 0 & x_1/y_2 & 0 \\ 0 & x_2/y_2 & 0 & 0 & 0 & x_1/y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/y_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

которая после минимизации принимает вид

$$R_N = \begin{vmatrix} x_2/y_1 & 0 & x_1/y_2 & 0 \\ x_1/y_1 & 0 & x_2/y_2 & 0 \\ 0 & x_2/y_2 & 0 & x_1/y_2 \\ x_1/y_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и задает автомат, показанный на рис. 7.19.

Определим теперь понятия единичного и обратного автоматов на множестве  $\mathfrak{B}$ .

Под единичным автоматом  $E$  будем понимать такой автомат, который любое слово из входного алфавита  $X$  автомата  $E$  преобразует в такое же выходное слово. Единичный автомат индуцирует тождественное отображение на множестве слов  $\mathfrak{S}(X)$  алфавита  $X$ .

Матрица соединений единичного автомата  $E$  имеет вид

$$R_E = \|(x_1/x_1) \vee (x_2/x_2) \vee \dots \vee (x_n/x_n)\|$$

и является матрицей первого порядка.

Обратным автоматом  $A^{-1}$  к автомату  $A$ , индуцирующему отображение  $f$  множества входных слов  $\mathfrak{S}(X)$  на множество выходных слов  $\mathfrak{S}(Y)$ , называется такой ав-

томат, который индуцирует обратное отображение  $f^{-1}$ . Очевидно, что обратный автомат существует только тогда, когда отображение  $f$  является биективным отображением. В этом случае в любой строке его матрицы соединений не может быть двух пар вход — выход, которые имеют одинаковые выходные сигналы. Поэтому для построения матрицы соединений обратного автомата  $A^{-1}$  достаточно в матрице соединений  $R$  автомата  $A$  в каждой паре вход — выход поменять местами элементы этой пары.

Выделим из множества абстрактных автоматов  $\mathfrak{A}$  подмножество автоматов  $\mathfrak{D}$ , индуцирующих биективное отображение. Имеет место следующее предложение.

*Подмножество абстрактных автоматов  $\mathfrak{D}$  по операции суперпозиции образует группу  $\mathfrak{D}_*$ .*

Доказательство. Так как операция суперпозиции соответствует на абстрактном уровне композиции отображений, индуцируемых абстрактными автоматами, а композиция биективных отображений ассоциативна и является биективным отображением, то множество  $\mathfrak{D}$  по операции суперпозиции — подполугруппа  $\mathfrak{D}_*$  полугруппы  $\mathfrak{A}_*$ .

Для любого автомата  $A \in \mathfrak{D}$  существуют такие автоматы  $E \in \mathfrak{D}$  и  $A^{-1} \in \mathfrak{D}$ , для которых выполняются соотношения

$$A * E = A \quad (7.34)$$

(существование правого нейтрального элемента),

$$A * A^{-1} = E \quad (7.35)$$

(существование правого обратного элемента).

Справедливость выражений (7.34) и (7.35) следует из определений операции суперпозиции, единичного и обратного автоматов.

Известно [247], что полугруппа, в которой существует, по крайней мере, одна правая единица, удовлетворяющая (7.34), и один правый обратный элемент, удовлетворяющий (7.35), является группой. Поэтому наше предложение доказано.

Рассмотрим теперь наиболее общий случай совместной работы абстрактных автоматов, задаваемый операцией композиции, и покажем, что различные способы

соединений и виды работы автоматов, такие как параллельная, последовательная, одновременная и поочередная работа автоматов, задаваемые описанными выше операциями, являются частными случаями операции композиции.

Пусть даны произвольные абстрактные автоматы  $A = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X, t \in T/l \in L))$  и  $B = (Y, W, T, w_1 \in W, P(y \in Y, l \in L/t \in T))$  из  $\mathfrak{A}$ . Здесь  $X$  — входной алфавит автомата  $A$ ,  $V$  — алфавит состояний,  $L$  — выходной алфавит,  $F$  — отображение множества  $V$  в себя по буквам входного алфавита  $x \in X$  и выходного алфавита  $t \in T$  автомата  $B$ , при котором на выходе автомата  $A$  появляется выходная буква  $l \in L$ . Аналогично для автомата  $B$ .

Отображение  $F$  состояния  $v \in V$  автомата  $A$  и отображение  $P$  состояния  $w \in W$  автомата  $B$  представим в виде объединения отображений по буквам алфавитов  $t \in T$  и  $l \in L$ , т. е.

$$Fv = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{l \in L} F_{t/l}v,$$

$$Pw = \bigcup_{l \in L} \bigcup_{t \in T} P_{l/t}w.$$

Автомат  $C = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$ , равный композиции автоматов  $A$  и  $B$ , обозначаемый  $C = A \circ B$ , определяется по формулам

$$Z = X \times Y, \quad (7.36)$$

$$Q = V \times W, \quad (7.37)$$

$$M = L \times T, \quad (7.38)$$

$$Kq = \bigcup_{\substack{l \in L \\ t \in T}} (F_{t/l}v \times P_{l/t}w), \quad (7.39)$$

где  $q = (v, w)$ ,  $q \in Q$ ,  $v \in V$ ,  $w \in W$ , а  $F_{t/l}v$  — отображение состояния  $v$  по букве  $t \in T$ , при котором на выходе появляется  $l \in L$ ,  $P_{l/t}w$  — отображение состояния  $w$  по букве  $l \in L$ , при котором на выходе появляется  $t \in T$ .

С точки зрения функционирования автомат  $C$ , равный композиции автоматов  $A$  и  $B$ , эквивалентен совместной работе автоматов  $A$  и  $B$ , показанной на рис. 7.20.

Учитывая, что автомат  $A$  можно представить объединением автономных автоматов по входным буквам  $t \in T$ , т. е.

$$A = \bigcup_{t \in T} A_t,$$

а каждый автономный автомат  $A_t$ , в свою очередь, можно записать как объединение подавтоматов по выходным буквам

$$A_t = \bigcup_{l \in L} A_{tl},$$

получим

$$A = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} A_{tl}. \quad (7.40)$$

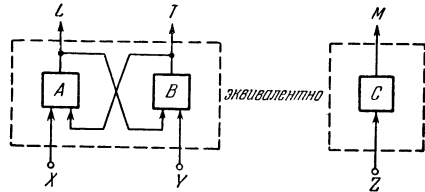


Рис. 7.20.

Аналогично представим автомат

$$B = \bigcup_{\substack{l \in L \\ t \in T}} B_{lt}. \quad (7.41)$$

Из формул (7.36) — (7.39), (7.40) и (7.41) следует, что автомат  $C$ , полученный в результате композиции автоматов  $A$  и  $B$ , можно найти по формуле

$$C = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} A_{tl} \times B_{lt}. \quad (7.42)$$

Из (7.42) легко получить запись операции композиции в матричной форме. Если  $R_A = \|r_{\alpha\beta}(xt/l)\|$  — матрица соединений автомата  $A$ , у которой элементы

$$r_{\alpha\beta}(xt/l) = \begin{cases} xt/l, & \text{если } v_\beta \in Fv_\alpha \text{ по буквам } x \in X, t \in T \\ & \text{с выходом } l \in L, \\ 0, & \text{если } v_\beta \notin Fv_\alpha, \alpha, \beta \in A = \{1, 2, \dots, k\}, \end{cases}$$

причем  $k$  — число состояний автомата  $A$ , а матрица  $R_B = \|r_{\gamma\delta}(yl/t)\|$  — матрица соединений автомата  $B$ , у которой

$$r_{\gamma\delta}(yl/t) = \begin{cases} yl/t, & \text{если } w_\delta \in Pw_\gamma \text{ по буквам } y \in Y, l \in L \\ & \text{с выходом } t \in T, \\ 0, & \text{если } w_\delta \notin Pw_\gamma, \gamma, \delta \in B = \{1, 2, \dots, l\}, \end{cases}$$

причем  $l$  — число состояний автомата  $B$ , то матрица соединений  $R_C$  автомата  $C = A \circ B$  определяется выражением

$$R_C = R_A \circ R_B = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} (R_{A(t/l)} \times R_{B(l/t)}), \quad (7.43)$$

где  $R_{A(t/l)}$  — матрица соединений автономного подавтомата  $A_{t/l}$ , причем буква  $t \in T$ , по которой выделен автономный подавтомат, исключается из матрицы, а  $R_{B(l/t)}$  — матрица соединений автономного подавтомата  $B_{l/t}$ , в которой исключена буква  $l \in L$ .

Пример 7.7. Пусть даны автоматы  $A$  и  $B$ , показанные на рис. 7.21, а, б. Найти автомат  $C$ , равный композиции автоматов  $A$  и  $B$ .

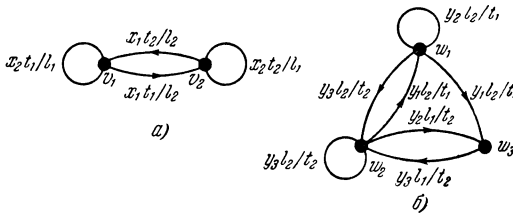


Рис. 7.21.

Матрицы соединений  $R_A$  и  $R_B$  имеют вид

$$R_A = \begin{vmatrix} x_2 t_1 / l_1 & x_1 t_1 / l_2 \\ x_1 t_2 / l_2 & x_2 t_2 / l_1 \end{vmatrix},$$

$$R_B = \begin{vmatrix} y_2 l_1 / t_1 & y_3 l_2 / t_2 & y_1 l_2 / t_1 \\ y_1 l_2 / t_1 & y_3 l_2 / t_2 & y_2 l_1 / t_2 \\ 0 & y_3 l_1 / t_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Находя матрицы соединений автономных подавтоматов  $R_{A(t/l)}$  и  $R_{B(l/t)}$  и используя формулу (7.43), после минимизации получим матрицу соединений

$$R_C = \begin{vmatrix} z_5 / m_1 & 0 & 0 & 0 & z_1 / m_3 \\ 0 & 0 & z_1 / m_3 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 / m_4 & z_5 / m_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 / m_4 & 0 & 0 & z_5 / m_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_6 / m_2 & 0 \end{vmatrix}$$

автомата  $C = A \circ B$ , показанного на рис. 7.22.

Здесь введены следующие обозначения для входного и выходного алфавитов автомата  $C$ :

$$z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_1, y_2), \quad z_3 = (x_1, y_3),$$

$$z_4 = (x_2, y_1), \quad z_5 = (x_2, y_2), \quad z_6 = (x_2, y_3),$$

$$m_1 = (l_1, t_1), \quad m_2 = (l_1, t_2), \quad m_3 = (l_2, t_1), \quad m_4 = (l_2, t_2).$$

Вообще говоря, кроме входных алфавитов  $X$  и  $Y$  автоматы  $A$  и  $B$  могут иметь также общий входной алфавит  $N$ .

Действительно, если  $A = (N, X, V, L, v_1 \in V, F(n \in N, x \in X, t \in T/t \in L))$  и  $B = (N, Y, W, T, \omega_1 \in W, P(n \in N, y \in Y, l \in L/t \in T))$ , то автомат  $C = A \circ B$  определяется выражением

$$C = \bigcup_{n \in N} (A_n \circ B_n),$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — автономные автоматы по входным буквам  $n \in N$ . Используя (7.42), получаем

$$C = \bigcup_{n \in N} \left( \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} (A_n(t/l) \times B_n(l/t)) \right),$$

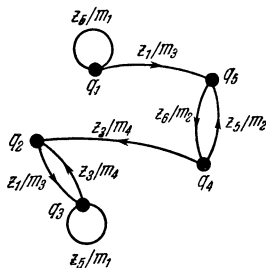


Рис. 7.22.

т. е. автомат  $C = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$  находится по формулам

$$Z = N \times X \times Y, \tag{7.44}$$

$$Q = V \times W, \tag{7.45}$$

$$M = L \times T, \tag{7.46}$$

$$Kq = \bigcup_{n \in N} \left( \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} (F_n(t/l)v \times P_n(l/t)\omega) \right). \tag{7.47}$$

Для автоматов  $A, B, C \in \mathfrak{A}$ , используя (7.44) — (7.47), можно показать, что справедливы соотношения

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C),$$

$$A \circ B \sim B \circ A.$$

Поэтому множество  $\mathfrak{A}$  по операции композиции образует полугруппу, коммутативную с точностью до изоморфизма автоматов, которую обозначим  $\mathfrak{A}_\circ$ .

Покажем, что в частных случаях совместной работы автоматов  $A$  и  $B$  операция композиции соответствует рассмотренным ранее операциям умножения, суперпозиции и суммирования автоматов.

Пусть  $A = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  и  $B = (Y, W, T, w_1 \in W, P(y \in Y/t \in T))$  — независимо работающие автоматы из  $\mathfrak{A}$ . Поскольку автоматы  $A$  и  $B$  имеют различные входные алфавиты  $X$  и  $Y$  ( $X \cap Y = \emptyset$ ), то для получения автомата  $C$  применим формулы (7.36) — (7.39). Так как отображение  $F$  состояния  $v \in V$  автомата  $A$  не зависит от выходов  $t \in T$  автомата  $B$ , а отображение  $P$  состояния  $w \in W$  автомата  $B$  не зависит от выходов  $l \in L$  автомата  $A$ , то

$$\bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} F_{l,t} v = Fv, \quad \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} P_{l,t} w = Pw.$$

Поэтому автомат  $C = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$  находится по формулам

$$Z = X \times Y, \quad Q = V \times W, \quad M = L \times T, \quad Kq = Fv \times Pw,$$

которые задают операцию умножения  $\times$  автоматов  $A$  и  $B$  с раздельными входами.

В случае автоматов  $A = (N, V, L, v_1 \in V, F(n \in N/l \in L))$  и  $B = (N, W, T, w_1 \in W, P(n \in N/t \in T))$ , учитывая, что переходы в автомате  $A$  не зависят от выходов автомата  $B$  и переходы в автомате  $B$  не зависят от выходов автомата  $A$ , формулы (7.44) — (7.47), определяющие автомат  $C = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$ , равный композиции автоматов  $A$  и  $B$ , приобретают вид

$$Z = N, \quad Q = V \times W, \quad M = L \times T, \quad Kq = \bigcup_{n \in N} (F_n v \times P_n w)$$

и, следовательно, задают операцию умножения  $\circledast$  автоматов  $A$  и  $B$  с общим входом.

Таким образом, доказано следующее предложение.

*Полугруппа автоматов  $\mathfrak{A}_\times$  и полугруппы автоматов  $\mathfrak{A}(N)_{\circledast}$  вкладываются в полугруппу  $\mathfrak{A}_{\circ}$  абстрактных автоматов по операции композиции.*

Далее, пусть  $A = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  и  $B = (L, W, T, \omega_1 \in W, P(l \in L/t \in T))$  — произвольные автоматы из  $\mathfrak{A}$ . Для построения автомата  $C = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$ , равного композиции автоматов  $A$  и  $B$ , воспользуемся формулами (7.36) — (7.39).

Так как переходы в автомате  $A$  не зависят от выходных букв  $t \in T$  автомата  $B$ , то представим отображение  $F$  состояния  $v \in V$  автомата  $A$  объединением отображений по буквам выходного алфавита  $l \in L$ :

$$Fv = \bigcup_{l \in L} F_l v.$$

Ввиду того, что выходной алфавит автомата  $C$  совпадает с выходным алфавитом автомата  $B$ , представим отображение  $P$  состояния  $\omega \in W$  автомата  $B$  объединением отображений по буквам входного алфавита  $l \in L$ :

$$P\omega = \bigcup_{l \in L} P_l \omega.$$

Тогда формулы (7.36) — (7.39) приобретают вид

$$Z = X, \quad M = T, \quad Q = V \times W, \quad Kq = \bigcup_{l \in L} (F_l v \times P_l \omega)$$

и задают операцию суперпозиции автоматов  $A$  и  $B$ .

Заметим, что в случае, когда рассматривается последовательная работа автоматов  $A = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X, t \in T/l \in L))$  и  $B = (L, W, T, \omega_1 \in W, P(l \in L/t \in T))$  с обратной связью с выхода автомата  $B$  на вход автомата  $A$ , результирующий автомат  $C = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$  также определяется по формулам (7.30) — (7.31) с учетом того, что  $Z = X \times T$ .

Поэтому доказано следующее предложение.

*Полугруппа автоматов  $\mathfrak{A}_*$  вкладывается в полугруппу  $\mathfrak{A}$  абстрактных автоматов по операции композиции.*

Пусть, наконец  $A' = (Z, V, M, v_1 \in V, F(z \in Z/m \in M))$  и  $B' = (Z, W, M, \omega_1 \in W, P(z \in Z/m \in M))$  — два абстрактных автомата таких, что  $Z = XU Y$ ,  $M = LUT$ , причем  $XUY = \emptyset$  и  $L \cap T = \emptyset$ .

Предположим, что матрицы соединений  $R_{A'}$  и  $R_{B'}$  автоматов  $A'$  и  $B'$  имеют вид

$$R_{A'} = R_{AX} \cup R_{AY} = \parallel r_\alpha(x/l) \parallel \cup \parallel r_{\alpha\beta}(y/t) \parallel,$$



где

$$r_{\alpha\beta}(x/l) = \begin{cases} x/l, & \text{если } v_\beta \in Fv_\alpha \text{ по букве } x \in X \text{ с выходом } l \in L, \\ 0, & \text{если } v_\beta \notin Fv_\alpha, \alpha, \beta \in A = \{1, 2, \dots, k\}, \end{cases}$$

$$r_{\alpha\beta}(y/t) = \begin{cases} Y/T, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

а

$$R_{B'} = R_{BY} \cup R_{BX} = \| r_{\gamma\delta}(y/t) \| \cup \| r_{\gamma\delta}(x/l) \|,$$

где

$$r_{\gamma\delta}(y/t) = \begin{cases} y/t, & \text{если } w_\delta \in Pw_\gamma \text{ по букве } y \in Y \text{ с выходом } t \in T, \\ 0, & \text{если } w_\delta \notin Pw_\gamma, \gamma, \delta \in B = \{1, 2, \dots, l\}, \end{cases}$$

$$r_{\gamma\delta}(x/l) = \begin{cases} X/L, & \text{если } \gamma = \delta, \\ 0, & \text{если } \gamma \neq \delta. \end{cases}$$

Учитывая это предположение, выделим из автомата  $A'$  автомат  $A = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  с матрицей соединений  $R_A = R_{AX}$ , а из автомата  $B'$  автомат  $B = (Y, W, T, w_1 \in W, P(y \in Y/t \in T))$  с матрицей соединений  $R_B = R_{BY}$ .

Так как автоматы  $A'$  и  $B'$  работают независимо друг от друга и имеют абщий алфавит  $Z$ , то на основании предложения, доказанного выше, для получения матрицы соединений  $R_C$  автомата  $C$ , равного композиции автоматов  $A'$  и  $B'$ , можно использовать операцию умножения  $\otimes$ . Поэтому

$$R_C = R_{A'} \circ R_{B'} = R_{A'} \otimes R_{B'} = \bigcup_{z \in Z} (R_{A'Z} \times R_{B'Z}). \quad (7.48)$$

Поскольку  $Z = X \cup Y$ ,  $R_{A'} = R_{AX} \cup R_{AY}$  и  $R_{B'} = R_{BY} \cup R_{BX}$ , выражение (7.48) можно представить в виде

$$R_C = \bigcup_{x \in X} (R_{Ax} \times R_{Bx}) \cup \bigcup_{y \in Y} (R_{Ay} \times R_{By}) = \\ = (R_{AX} \otimes R_{BX}) \cup (R_{AY} \otimes R_{BY}).$$

Из задания автомата  $A'$  ( $B'$ ) легко видеть, что матрица соединений  $R_{AY}$  ( $R_{BX}$ ) представляет собой матрицу соединений, диагональные элементы которой содержат все буквы входного и выходного алфавитов  $Y/T$  ( $X/L$ ), т. е.

тождественно равны единице. Иначе говоря, вместо матрицы соединений  $R_{AY}(R_{BX})$  можно записать такого же порядка единичную матрицу смежности  $E_A(E_B)$ . Тогда получим

$$R_C = (R_{AX} \otimes E_B) \cup (E_A \otimes R_{BY}).$$

Так как  $E_A$  и  $E_B$  — матрицы смежности, то операцию умножения  $\otimes$  можно заменить прямым произведением матриц. Учитывая, что  $R_{AX} = R_A$ , а  $R_{BY} = R_B$ , в итоге приходим к формуле

$$R_C = (R_A \times E_B) \cup (E_A \times R_B),$$

которая в матричной форме задает операцию суммирования автоматов  $A$  и  $B$ .

Поэтому доказано следующее предложение.

*Для полугруппы  $\mathfrak{A}_0$  можно построить такую полугруппу  $\mathfrak{A}'_0$ , что полугруппа  $\mathfrak{A}_+$  вкладывается в полугруппу  $\mathfrak{A}'_0$  абстрактных автоматов по операции композиции.*

#### § 4. Операции над вероятностными автоматами

До сих пор рассматривались теоретико-множественные и алгебраические операции над детерминированными абстрактными автоматами, состояния которых в текущий момент времени однозначно определяются состояниями в предыдущий момент времени и буквами входного алфавита в текущий момент времени. Наряду с детерминированными автоматами естественно рассматривать вероятностные конечные автоматы. Практическая аргументация в пользу исследования таких автоматов состоит в том, что поведение даже обычных электронных схем, которые должны работать детерминированно, из-за случайных сбоев имеет стохастический или вероятностный характер.

Для простоты будем рассматривать вероятностные автоматы без выходов.

Вероятностный конечный автомат  $A$  считается заданным, если определена совокупность объектов:

$$A = (X, Q, q_1 \in Q, \varphi(q, x)),$$

где  $X = \{x_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$  — входной алфавит,  $Q = \{q_i\}$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество состояний, причем  $q_1 \in Q$  — начальное состояние автомата,  $\varphi(q, x)$  —

функция, которая задает отображение множества  $Q \times X$  в множество матриц  $P = \{P_j\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ , называемая таблицей переходных вероятностей, такая, что для пары  $(q, x) \in Q \times X$  имеет место

$$\begin{aligned} \varphi(q, x) &= \{p_1(q, x), p_2(q, x), \dots, p_n(q, x)\}, \\ p_i(q, x) &\geq 0, \quad \sum_{i \in I} p_i(q, x) = 1. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Из (7.49) следует, что любая матрица  $P_j \in P$  имеет вид  $P_j = \|p_{ik}(x)\|$  (эта запись означает то же, что  $P_j = \|p_k(q_i, x)\|$ ), где  $i, k \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , причем все элементы  $p_{ik}(x)$  каждой из матриц представляют собой неотрицательные вещественные числа, не превосходящие единицу, а сумма элементов любой из строк равняется единице. Будем предполагать также, что в автомате нет состояний, вероятности перехода в которые из всех других состояний были бы равными нулю, т. е. в матрицах  $P_j$  отсутствуют столбцы, составленные из одних лишь нулей. Матрицы, обладающие перечисленными свойствами, называются стохастическими матрицами.

В том случае, когда вероятностные автоматы рассматриваются с точки зрения представления событий подобно тому, как это имеет место в случае детерминированных автоматов, при задании вероятностного автомата  $A$  указывается множество  $Q' \subseteq Q$  отмеченных состояний.

Из определения вероятностного автомата следует, что вместо функции  $\varphi(q, x)$  можно задать множество стохастических матриц  $P$ . Тогда вероятностный автомат можно записать в форме

$$A = (X, Q, q_1 \in Q, P), \quad (7.50)$$

которой мы будем пользоваться в дальнейшем. Более того, для задания любого вероятностного конечного автомата достаточно задать систему стохастических матриц  $P = \{P_j\}$ ,  $j \in J$ , и начальное состояние автомата  $q_1 \in Q$ , однако мы будем использовать выражение (7.50) для большей наглядности при определении операций над вероятностными автоматами.

Таким образом, в вероятностном автомате задание пары элементов  $q(t-1)$ ,  $x(t)$  определяет лишь вероятности  $p_{ik}(x)$  перехода автомата из состояния  $q(t-1)$ , обозначаемого через  $q_i$ , в любое состояние  $q_k$  ( $q_i, q_k \in Q$ )

под действием входного сигнала  $x(t)$  такого, что  $x \in X$ .

Легко видеть, что детерминированный конечный автомат можно рассматривать как частный случай вероятностного автомата, у которого для каждого  $x \in X$  при любом данном  $i \in I$  точно одна из вероятностей  $p_{ih}(x)$  равна единице, а все остальные вероятности равны нулю.

Очевидно, что в вероятностном автомате существуют определенные вероятности перехода из состояния  $q_i$  в состояние  $q_k$  при подаче на вход слова  $r \in \mathfrak{S}(X)$ , состоящего из букв входного алфавита  $X$ . Действительно, если  $r = x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_l}$ , то вероятности перехода  $p_{ik}(x)$  вычисляются посредством умножения стохастических матриц  $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_l}$ , которые являются квадратными матрицами порядка  $n$ , по формуле

$$P = P_{j_1} \cdot P_{j_2} \cdot \dots \cdot P_{j_l} = \| p_{ik}(r) \|,$$

где  $i, k \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Если  $Q' = \{q_\alpha\}$ ,  $\alpha \in J' = \{1, 2, \dots, k\}$ , — множество отмеченных состояний автомата, то вероятность

$$p(r) = \sum_{\alpha \in J'} p_{1\alpha}(r)$$

есть вероятность того, что автомат перейдет из состояния  $q_1$  в одно из состояний множества  $Q'$  при подаче на вход слова  $r \in \mathfrak{S}(X)$ .

Вероятностные конечные автоматы можно задавать с помощью графоидов так же, как и детерминированные автоматы, учитывая, однако, то обстоятельство, что около каждой дуги графоида, обозначающей переход из состояния  $q_i$  в  $q_k$ , кроме буквы входного алфавита  $x \in X$  ставится значение вероятности  $p_{ik}(x)$  этого перехода. В случае актуальных автоматов, для которых вероятности  $p_{ik}(x) > 0$  (строго положительны), графоиды представляют собой насыщенные мультиграфы, порядок которых определяется числом элементов множества  $Q$ , а мультичисло — числом букв входного алфавита  $X$ . Естественно, что аналитический способ записи и геометрическая интерпретация графоида неудобны для задания вероятностного автомата даже при сравнительно небольшом числе букв входного алфавита, поэтому вероятностный автомат удобнее задавать системой стохастических матриц в указанной ранее форме.

Используя такой способ задания вероятностных автоматов, можно ввести теоретико-множественные операции объединения и пересечения вероятностных автоматов по аналогии с операциями над детерминированными автоматами, накладывая, правда, некоторые ограничения на множество стохастических матриц, которые делают довольно узким класс вероятностных автоматов, к которым применимы данные операции. При этом выводы, полученные для теоретико-множественных операций над детерминированными автоматами, справедливы для операций над вероятностными автоматами, разумеется, при сохранении накладываемых ограничений на стохастические матрицы. Поэтому, не останавливаясь на этих операциях, перейдем сразу к алгебраическим операциям умножения, суммирования и суперпозиции, которые применимы к произвольным вероятностным автоматам.

Пусть даны два вероятностных автомата  $A = (X, Q, q_1 \in Q, P)$  и  $B = (Y, V, v_1 \in V, S)$ . Вероятностный автомат  $C = (Z, W, \omega_1 \in W, R)$  называется произведением автоматов  $A$  и  $B$  и обозначается  $C = A \times B$ , если множества  $Z$ ,  $W$  и  $R$  определяются по формулам

$$Z = X \times Y, \quad (7.51)$$

$$W = Q \times V, \quad (7.52)$$

$$R = P \times S, \quad (7.53)$$

причем  $\omega_1 = (q_1, v_1)$ . Заметим, что формулы (7.51) и (7.52) являются обычными декартовыми произведениями множеств  $X$  и  $Y$ , в то время как выражение (7.53) представляет собой декартово произведение, образуемое по правилу прямого произведения стохастических матриц из  $P$  и  $S$ .

Что касается суммирования вероятностных автоматов, то вероятностный автомат  $D = (Z, W, \omega_1 \in W, R)$  называется суммой автоматов  $A$  и  $B$  и обозначается  $D = A + B$ , если

$$Z = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y), \quad (7.54)$$

$$W = Q \times V, \quad (7.55)$$

$$R = (P \times E_B) \cup (E_A \times S), \quad (7.56)$$

где  $\omega_1 = (q_1, v_1)$ , а  $E_A$  и  $E_B$  — единичные матрицы, имеющие порядок, соответственно равный порядку стохастических матриц из  $P$  и  $S$ , причем произведения в круглых скобках выражения (7.56) являются прямыми произведениями стохастических и единичных матриц. Заметим, что порядки стохастических матриц из  $P$  и  $S$  совпадают соответственно с числом элементов множеств  $Q$  и  $V$ .

Если входные алфавиты  $X$  и  $Y$  вероятностных автоматов  $A$  и  $B$  не пересекаются между собой, то их сумма совпадает с объединением и формулу (7.54) можно записать в виде

$$Z = X \cup Y, \quad (7.57)$$

принимая, конечно, во внимание, что стохастические матрицы, соответствующие различным буквам из входных алфавитов, должны быть отличны друг от друга.

Поясним указанные операции на примере.

Пример 7.8. Пусть даны вероятностные автоматы  $A = (X, Q, q_1 \in Q, P)$ , где  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $P = \{P_{x_1}, P_{x_2}\}$ , причем

$$P_{x_1} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right\|, \quad P_{x_2} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

и  $B = (Y, V, v_1 \in V, S)$ , где  $Y = \{y_1, y_2\}$ ,  $V = \{v_1, v_2\}$ ,  $S = \{S_{y_1}, S_{y_2}\}$ , причем

$$S_{y_1} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right\|, \quad S_{y_2} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right\|.$$

Найти вероятностные автоматы, равные произведению и сумме автоматов  $A$  и  $B$ .

По формулам (7.51) — (7.53) находим множества  $Z$ ,  $W$  и  $R$ , которые с учетом соответствующих переобозначений имеют вид

$$\begin{aligned} Z &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \\ W &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \\ R &= \{R_{z_1}, R_{z_2}, R_{z_3}, R_{z_4}\}, \end{aligned}$$

где

$$R_{z_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad R_{z_2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$R_{z_3} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R_{z_4} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вероятностный автомат  $C = (Z, W, \omega_1 \in W, R)$  является произведением автоматов  $A$  и  $B$ .

Далее, используя (7.55)–(7.57), находим множества  $Z$ ,  $W$  и  $R$ , имеющие вид

$$Z = \{x_1, x_2, y_1, y_2\},$$

$$W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

$$R = \{R_{x_1}, R_{x_2}, R_{y_1}, R_{y_2}\},$$

где

$$R_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \quad R_{x_2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R_{y_1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \quad R_{y_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix},$$

которые задают вероятностный автомат  $D = (Z, W, \omega_1 \in W, R)$ , равный сумме автоматов  $A$  и  $B$ .

Легко видеть, что операции умножения и суммирования вероятностных автоматов можно обобщить на случай  $n$  автоматов.

Определим операцию суперпозиции над вероятностными автоматами. Так как рассматриваются автоматы без выходов, то полагаем, что алфавит состояний первого автомата совпадает с входным алфавитом второго автомата, к которому применяется операция суперпозиции. Учитывая это, обозначим исходные автоматы  $A = (X, Q, q_1 \in Q, P)$  и  $B = (Q, V, v_1 \in V, S)$ . Вероятностный автомат  $C = (X, W, \omega_1 \in W, R)$  называется суперпозицией автоматов  $A$  и  $B$  и обозначается  $C = A * B$ , если  $W$  и  $R$  определяются по формулам

$$W = Q \times V, \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} R &= (P^{(q_1)} \times S_{q_1}) \cup (P^{(q_2)} \times S_{q_2}) \cup \dots \cup (P^{(q_n)} \times S_{q_n}) = \\ &= \bigcup_{i \in I} (P^{(q_i)} \times S_{q_i}), \quad (7.59) \end{aligned}$$

где  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\omega_1 = (q_1, v_1)$ , а  $P^{(q_i)}$  — матрица порядка  $n$ , получаемая из стохастической матрицы  $P_{x_i}$  заменой всех столбцов, отличных от  $q_i$ -го нулевыми столбцами.

**Пример 7.9.** Пусть даны вероятностные автоматы  $A$  и  $B$ , рассмотренные в примере 7.8, с учетом того, что  $Y = Q = \{q_1, q_2\}$  и  $S = \{S_{q_1}, S_{q_2}\}$ . Найти вероятностный автомат, равный суперпозиции автоматов  $A$  и  $B$ .

Очевидно, что множеством состояний  $W$  автомата  $C$  является множество

$$W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

входным алфавитом служит

$$X = \{x_1, x_2\},$$

а множество стохастических матриц

$$R = \{R_{x_1}, R_{x_2}\},$$



определяемое по формуле (7.59), имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_{x_1} &= \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right\| \right) \cup \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right\| \right) = \\
 &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{array} \right\| \cup \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array} \right\|, \\
 R_{x_2} &= \left( \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right\| \right) \cup \left( \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right\| \right) = \\
 &= \left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right\|.
 \end{aligned}$$

Таким образом, автомат  $C = (X, W, \omega_1 \in W, R)$  является суперпозицией автоматов  $A$  и  $B$ .

В заключение главы отметим, что с содержательной точки зрения операции над вероятностными автоматами означают то же, что и в случае детерминированных автоматов, а свойства, которыми они обладают, повторяют свойства операций над детерминированными автоматами.

## ДЕКОМПОЗИЦИЯ АБСТРАКТНЫХ АВТОМАТОВ

## § 1. Постановка задачи декомпозиции автоматов

В этой главе рассматривается задача декомпозиции произвольных абстрактных автоматов. *Под декомпозицией в общем случае понимают представление сложного автомата работой нескольких более простых (в частности, элементарных) автоматов, которые на структурном уровне с помощью отождествления входных и выходных каналов образуют функциональную или структурную схему сложного автомата.* Обычно ставится задача *оптимальной* декомпозиции, которая заключается в отыскании *минимального числа элементарных автоматов, образующих схему сложного автомата.*

Как известно, при синтезе автоматов используют два класса элементарных автоматов: элементарные автоматы с памятью и элементарные автоматы без памяти — логические элементы. Поэтому схема любого конечного автомата содержит две части: запоминающую часть, состоящую из элементарных автоматов с памятью, и комбинационную часть, образованную логическими элементами. В результате оптимальной декомпозиции конечного автомата осуществляется *минимизация числа логических элементов, входящих в комбинационную часть автомата.*

На абстрактном уровне декомпозиция сложного абстрактного автомата соответствует параллельной, последовательной или смешанной работе более простых абстрактных автоматов, т. е. сводится к разложению абстрактного автомата по операции умножения, суммирования, суперпозиции или по нескольким операциям. Поэтому можно рассматривать несколько видов декомпозиции абстрактных автоматов: *параллельную, последовательную и смешанную декомпозицию.*

*Параллельная* декомпозиция соответствует разложению абстрактного автомата в произведение или сумму двух или большего числа абстрактных автоматов, каждый из которых проще, чем исходный автомат. В зависимости от разложения автомата по операции умножения или суммирования можно говорить о *параллельной одновременной* и о *параллельной неодновременной (последовательной)* декомпозиции абстрактных автоматов. *Последовательная* декомпозиция соответствует разложению автомата по операции суперпозиции, а *смешанная* — одновременно по двум операциям, например, умножения и суперпозиции и т. п.

Все перечисленные случаи декомпозиции абстрактных автоматов представляют собой так называемые «чистые» случаи декомпозиции автоматов. Таких автоматов, которые раскладываются только в параллельную или в последовательную или даже в смешанную работу автоматов, незначительное число по сравнению с множеством автоматов, которые не представимы параллельной, последовательной или смешанной декомпозицией. В связи с этим вводится понятие *общей* декомпозиции абстрактного автомата, которая понимается как представление абстрактного автомата совместной работой элементарных абстрактных автоматов со связями между ними. Общая декомпозиция соответствует разложению абстрактного автомата в композицию двух или большего числа абстрактных автоматов. Заметим, что в качестве элементарных абстрактных автоматов могут быть выбраны абстрактные автоматы с любым числом состояний, а параллельную, последовательную и смешанную декомпозиции абстрактных автоматов можно рассматривать как частные случаи общей декомпозиции автоматов.

Впервые поставил и решил задачу параллельной и последовательной декомпозиции Хартманис [562, 563], который ввел специальный язык парной алгебры на множестве состояний абстрактного автомата. Впоследствии появляется большое число работ, продолжающих и развивающих методы декомпозиции абстрактных автоматов, к которым относятся работы Хартманиса и Стёрнза [565, 566], Иоли [659], Кохави [584] и др. В нашей стране известны работы М. А. Гаврилова [98, 102], Е. И. Пийль [358, 359], О. Б. Ершовой [159], А. К. Григорян [132, 133],

А. Н. Мелихова и Ю. А. Дворянцева [316], А. Н. Мелихова и Л. С. Берштейна [320, 321], Л. К. Ларина и Л. М. Осинского [259, 260], О. П. Кузнецова [241] и др.

Задачи параллельной и последовательной декомпозиции абстрактных автоматов можно сформулировать как задачи разложения абстрактных автоматов по операциям умножения, суммирования и суперпозиции автоматов по аналогии с графами, как это было сделано в гл. II. Поэтому изучение свойств формальных операций над абстрактными автоматами, задаваемых на языке теории графов, имеет большое значение в теории автоматов.

В последнее время в связи с бурным развитием микроэлектроники и однородных вычислительных структур [153, 375], возникла задача *декомпозиции* сложного автомата на *заданные блоки (автоматы)*. В общем случае требуется, если это возможно, выделить из сложного автомата заданный автомат так, чтобы он с оставшейся частью сложного автомата работал последовательно (справа или слева) либо параллельно одновременно, либо параллельно поочередно и т. п. Использование алгебраических операций позволяет на абстрактном уровне решать задачу декомпозиции сложного автомата на заданные стандартные автоматы путем сведения ее к формальному решению суперпозиционных уравнений над автоматами.

Ниже будет показано, что любой абстрактный автомат может быть построен из элементарных абстрактных автоматов, в качестве которых можно выбрать автоматы с любым числом состояний, используя две формальные операции — умножение автоматов и запреты переходов. С содержательной точки зрения это означает, что произвольный автомат может быть представлен совместной работой более простых автоматов с некоторым числом связей между ними, при помощи которых реализуются запреты переходов. Приводится алгоритм декомпозиции произвольного абстрактного автомата на элементарные абстрактные автоматы, который соответствует представлению произвольного автомата композицией элементарных абстрактных автоматов. Решается задача оптимальной декомпозиции, при которой число связей между элементарными автоматами, представляющими работу произвольного автомата, минимально. Это приводит

к минимальным функциям возбуждения элементарных автоматов и, следовательно, к упрощению комбинационной части автомата.

Предлагаемая методика абстрактной декомпозиции автоматов позволяет решить задачу размещения состояний автомата на абстрактном уровне и свести этап структурного синтеза к непосредственной записи функций возбуждения и функций выходов по матрицам соединений элементарных абстрактных автоматов. Поэтому оптимальная декомпозиция автомата на элементарные абстрактные автоматы, приводящая к декомпозиционному методу синтеза, решает задачу структурного синтеза автоматов, которая рассматривается в следующей главе, на абстрактном этапе.

## § 2. Параллельная декомпозиция автоматов с разделением входов

В этом параграфе докажем теорему о необходимом и достаточном условии представления автомата *параллельной одновременной работой двух более простых автоматов с отдельными входами* и сформулируем алгоритм такого разложения автомата [316]. Другими словами, опишем критерий принадлежности произвольного автомата  $A \in \mathfrak{A}_X$  подполугруппе  $A_X$  автоматов, представимых параллельной одновременной работой двух или более автоматов с отдельными входами из  $\mathfrak{A}_X$ . В данном случае  $\mathfrak{A}_X$  — бесконечная полугруппа абстрактных автоматов Мили.

Пусть  $A = (X, V, N, v_1 \in V, F(x \in X/n \in N))$  и  $B = (Y, W, S, w_1 \in W, P(y \in Y/s \in S))$  — произвольные абстрактные автоматы Мили. Если

$$R_A = \| r_{\alpha\beta}(x/n) \|,$$

где  $\alpha, \beta \in I = \{1, 2, \dots, k\}$  — матрица соединений автомата  $A$ , а

$$R_B = \| r_{\gamma\delta}(y/s) \|,$$

где  $\gamma, \delta \in J = \{1, 2, \dots, l\}$  — матрица соединений автомата  $B$ , то как известно (гл. VII, § 3), матрица соединений  $R_C$  автомата  $C$ , равного произведению автоматов  $A$  и  $B$ ,

будет иметь вид

$$R_C = R_A \times R_B = \begin{vmatrix} r_{11}(x/n) \cdot R_B & r_{12}(x/n) \cdot R_B & \dots & r_{1k}(x/n) \cdot R_B \\ r_{21}(x/n) \cdot R_B & r_{22}(x/n) \cdot R_B & \dots & r_{2k}(x/n) \cdot R_B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}(x/n) \cdot R_B & r_{k2}(x/n) \cdot R_B & \dots & r_{kk}(x/n) \cdot R_B \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} R_{11}(z/m) & R_{12}(z/m) & \dots & R_{1k}(z/m) \\ R_{21}(z/m) & R_{22}(z/m) & \dots & R_{2k}(z/m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1}(z/m) & R_{k2}(z/m) & \dots & R_{kk}(z/m) \end{vmatrix} = \| R_{\alpha\beta}(z/m) \|, \quad (8.1)$$

где  $R_{\alpha\beta}(z/m)$ ,  $\alpha, \beta \in I$  — клетки порядка  $l$ .

Из (8.1) следует, что  $R_C$  может содержать следующие типы клеток:

1) если  $r_{\alpha\beta}(x/n) = 0$ , то  $R_{\alpha\beta}(z/m) = R_0$ , где  $R_0$  — нулевая матрица порядка  $l$ ;

2) если  $r_{\alpha\beta}(x/n) \neq 0$ , то существуют такие элементы  $r_{\alpha\beta}(x_i/n_i) = x_i/n_i$  и  $r_{\alpha\beta}(x_j/n_j) = x_j/n_j$ , что матрицы

$$R_{\alpha\beta}(z_i/m_i) = \begin{vmatrix} (x_i/n_i) r_{11}(y/s) & (x_i/n_i) r_{12}(y/s) & \dots & (x_i/n_i) r_{1l}(y/s) \\ (x_i/n_i) r_{21}(y/s) & (x_i/n_i) r_{22}(y/s) & \dots & (x_i/n_i) r_{2l}(y/s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_i/n_i) r_{l1}(y/s) & (x_i/n_i) r_{l2}(y/s) & \dots & (x_i/n_i) r_{ll}(y/s) \end{vmatrix}$$

и

$$R_{\alpha\beta}(z_j/m_j) = \begin{vmatrix} (x_j/n_j) r_{11}(y/s) & (x_j/n_j) r_{12}(y/s) & \dots & (x_j/n_j) r_{1l}(y/s) \\ (x_j/n_j) r_{21}(y/s) & (x_j/n_j) r_{22}(y/s) & \dots & (x_j/n_j) r_{2l}(y/s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_j/n_j) r_{l1}(y/s) & (x_j/n_j) r_{l2}(y/s) & \dots & (x_j/n_j) r_{ll}(y/s) \end{vmatrix}$$

по буквам входного (выходного) алфавитов либо равны в случае  $x_i = x_j$  ( $n_i = n_j$ ), либо между буквами  $z_i$  и  $z_j$  ( $m_i$  и  $m_j$ ), стоящими на соответствующих местах клеток, можно установить взаимно однозначное соответствие.

Матрицу соединений вида (8.1) назовем *правильной клеточной матрицей соединений* (ПКМС).

Сформулируем теперь следующее предложение.

**Теорема 8.1.** Автомат  $A$  с  $n = k \cdot l$  состояниями представим произведением автоматов  $A_1$  и  $A_2$  соответственно с  $k$  и  $l$  состояниями (параллельной одновремен-

ной работой двух автоматов с отдельными входами), если и только если существует подстановка  $t \in T$  алфавита состояний, которая преобразует матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  к виду правильной клеточной матрицы соединений.

Необходимость следует из определения правильной клеточной матрицы соединений автомата.

Приведем доказательство достаточности. Пусть матрица соединений  $R$  автомата  $A$  является ПКМС или существует подстановка  $t \in T$ , которая приводит ее к виду ПКМС. По матрице  $R$  строим матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$  следующим образом. Матрица  $R_1$  порядка  $k$  (алфавит состояний  $V$  с начальным состоянием  $v_1$ ) имеет столько переходов, сколько содержится ненулевых клеток порядка  $l$  в матрице  $R$ . Переходам (выходам), соответствующим различным клеткам матрицы  $R$ , приписываем различные буквы  $x \in X (l \in L)$ , а одинаковым клеткам — одинаковые буквы  $x \in X (l \in L)$  входного (выходного) алфавита. Матрица  $R_2$  порядка  $l$  (алфавит состояний  $W$  с начальным состоянием  $w_1$ ) совпадает с любой ненулевой клеткой порядка  $l$  матрицы  $R$ , если заменить различные буквы  $z \in Z (m \in M)$  входного (выходного) алфавита различными буквами  $y \in Y (s \in S)$ , а одинаковые — одинаковыми буквами  $y \in Y (s \in S)$ . Легко видеть, что  $A_1 \times A_2 = A$ . Теорема доказана.

Сформулируем теперь алгоритм представления произвольного автомата  $A \in \mathfrak{A}_X$  произведением двух автоматов с отдельными входами.

1°. Подсчитываем число  $n$  состояний автомата  $A$ . Если  $n = k \cdot l$ , то переходим к 2°. Если  $n$  — простое число, то к 7°.

2°. Матрицу соединений  $R_A$  автомата  $A$  разбиваем на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Если  $R_A$  — правильная клеточная матрица соединений, то переходим к 6°. В противном случае к 3°.

3°. По матрице соединений  $R_A$  записываем матрицу смежности  $R$  автомата  $A$ . Переходим к 4°.

4°. Применяя метод разложения графов в произведение двух графов (см. гл. II, § 2), ищем подстановку, переводящую матрицу смежности  $R$  в правильную клеточную матрицу  $R'$ . Если  $t \in T$  — искомая подстановка, то

переходим к 5°. Если такая подстановка не существует, то переходим к 7°.

5°. Применяем полученную подстановку к матрице соединений  $R_A$  автомата  $A$ . Если получаем правильную клеточную матрицу соединений  $R'_A$ , то переходим к 6°. В противном случае к 7°.

6°. По матрице  $R'_A$  строим матрицы соединений  $R_{A_1}$  и  $R_{A_2}$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$  так, как это показано в доказательстве достаточности теоремы 8.1.

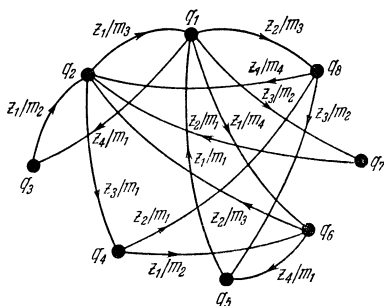


Рис. 8.1.

7°. Автомат  $A$  не разложим по операции умножения. Пример 8.1. Пусть

$$A = (Z, Q, M; q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$$

— абстрактный автомат, графоид которого показан на рис. 8.1. Определить, разложим ли автомат  $A$  по операции умножения, и если да, то представить его произведением двух автоматов.

Матрица соединений  $R_A$  автомата  $A$  имеет вид

$$R_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_4/m_1 & 0 & 0 & z_1/m_4 & z_3/m_2 & z_2/m_3 \\ z_1/m_3 & 0 & 0 & z_3/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1/m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1/m_2 & 0 & z_2/m_1 \\ \hline z_1/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2/m_3 & 0 & 0 & z_4/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1/m_4 & 0 & 0 & z_3/m_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Запишем по ней матрицу смежности

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $R$  не является правильной клеточной матрицей, то определим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений так, как показано в § 2 гл. II. Выпишем полустепени исхода  $s$  и захода  $p$  каждой вершины графа автомата и образуем множества возможных разложений этих чисел на два сомножителя. Получим

$$\begin{array}{l|l} q_1 & s_1 = 4 = 1 \cdot 4, \quad 4 \cdot 1, \quad \underline{2 \cdot 2}, \\ q_2 & s_2 = 2 = 1 \cdot 2, \quad \underline{2 \cdot 1}, \\ q_3 & s_3 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ q_4 & s_4 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \quad 2 \cdot 1, \\ q_5 & s_5 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ q_6 & s_6 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \quad \underline{2 \cdot 1}, \\ q_7 & s_7 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ q_8 & s_8 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \quad \underline{2 \cdot 1}, \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 = 2 = 1 \cdot 2, \quad \underline{2 \cdot 1}, \\ p_2 = 4 = 1 \cdot 4, \quad 4 \cdot 1, \quad \underline{2 \cdot 2}, \\ p_3 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ p_4 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ p_5 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \quad 2 \cdot 1, \\ p_6 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \quad \underline{2 \cdot 1}, \\ p_7 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ p_8 = 2 = 1 \cdot 2, \quad \underline{2 \cdot 1}. \end{array}$$

Подчеркнутые разложения определяют следующие разбиения:

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, \\ \pi_1 &= \{q_1, q_2, q_6, q_8\}, & \pi_2 &= \{q_3, q_4, q_5, q_7\}, \\ \rho_1 &= \{q_1, q_4\}, & \rho_2 &= \{q_6, q_7\}, & \rho_3 &= \{q_3, q_8\}, & \rho_4 &= \{q_2, q_5\}. \end{aligned}$$

Найденная пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ q_1 & q_6 & q_8 & q_2 & q_4 & q_7 & q_3 & q_5 \end{pmatrix}$$

алфавита состояний. Применяя подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ q_1 & q_4 & q_7 & q_5 & q_8 & q_2 & q_6 & q_3 \end{pmatrix},$$

обратную  $t$ , к матрице соединений  $R_A$ , получим

$$R'_A = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 0 & z_1/m_4 & z_2/m_3 & 0 & 0 & z_3/m_2 & z_4/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2/m_3 & 0 & 0 & 0 & z_4/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & z_1/m_4 & 0 & 0 & 0 & z_3/m_2 \\ z_1/m_3 & 0 & 0 & 0 & z_3/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & z_1/m_2 & z_2/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1/m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

которая является правильной клеточной матрицей соединений. По матрице  $R'_A$  строим матрицы соединений

$$R_{A_1} = \left\| \begin{array}{cc} x_1/n_2 & x_2/n_1 \\ x_1/n_1 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_{A_2} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & y_1/s_2 & y_2/s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2/s_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_1/s_2 \\ y_1/s_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

определяющие автоматы

$$A_1 = (X, V, N, v_1 \in V, F(x \in X/n \in N))$$

и

$$A_2 = (Y, W, S, w_1 \in W, P(y \in Y/s \in S)),$$

показанные на рис. 8.2 и 8.3.

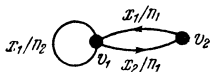


Рис. 8.2.

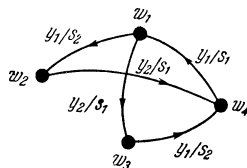


Рис. 8.3.

Приведем оценку числа автоматов, разложимых по операции умножения  $\times$ .

Пусть  $A$  — автомат с  $n = k \cdot l$  состояниями,  $m = p \cdot r$  входами и  $t = v \cdot s$  выходами. Обозначим через  $\psi_{\times}$  число автоматов, представимых произведением двух автоматов  $A_1$  и  $A_2$  соответственно с  $k$  и  $l$  состояниями,  $p$  и  $r$  входами и  $v$  и  $s$  выходами, среди множества  $\Phi$  автоматов с  $n$  состояниями,  $m$  входами и  $t$  выходами. Имеет место следующая теорема.

Теорема 8.2.

$$\frac{(k+1)^{kpv} \cdot (l+1)^{lrs}}{k!l!} n! < \psi_{\times} < (k+1)^{kpv} \cdot (l+1)^{lrs} \cdot n!$$

Доказательство. Определим вначале число различных автоматов с  $k$  состояниями,  $p$  входами и  $v$  выходами. Представим матрицу соединений  $R_1$  порядка  $k$  автомата  $A_1$  объединением автономных матриц по буквам входного алфавита

$$R_1 = \bigcup_{i \in I} R_{1i},$$

где  $I = \{1, 2, \dots, p\}$ . Так как каждая автономная матрица  $R_{1i}$  в любой строке не может содержать более одной входной буквы (в противном случае происходит нарушение условия автоматности), то множество  $M_{1i}$  автоматов с  $k$  состояниями и одним входом (без учета выходных букв), включая частичные автоматы, содержит не более  $(C_k^1 + 1)^k = (k+1)^k$  элементов. Очевидно, что множество  $M_1$  различных матриц вида  $R_1$  равно декартову произведению

$$M_1 = \underbrace{M_{1i} \times M_{1i} \times \dots \times M_{1i}}_{pv \text{ раз}}.$$

Поэтому число  $\psi_{M_1}$  элементов множества  $M_1$  и тем самым число автоматов с  $k$  состояниями,  $p$  входами и  $v$  выходами составляет  $\psi_{M_1} = (k+1)^{kpv}$ .

Аналогично находим, что число  $\psi_{M_2}$  автоматов с  $l$  состояниями,  $r$  входами и  $s$  выходами составляет

$$\psi_{M_2} = (l+1)^{lrs}.$$

Из формулы (8.1) следует, что множество  $M$  автоматов с  $n = k \cdot l$  состояниями,  $m = p \cdot r$  входами и  $t = v \cdot s$  выходами, обладающих правильной клеточной матрицей

соединений и, следовательно, представимых произведением двух автоматов, состоит из

$$\psi_M = (k+1)^{kpv} \cdot (l+1)^{lrs}$$

элементов.

Если предположить, что каждая матрица соединений из множества  $M$  является представителем класса изоморфных автоматов, то получим

$$\psi_X < \psi_M \cdot n!$$

С другой стороны, если из множества  $M$  заведомо исключить изоморфные автоматы, то получим

$$\psi_X > \psi_M \cdot \frac{n!}{k!l!}.$$

Этим теорема 8.2 доказана.

Таким образом, число  $\psi_X$  автоматов, представимых параллельной одновременной работой двух автоматов с отдельными входами, невелико по сравнению с общим числом  $\Phi = (n+1)^{nmt}$  автоматов с  $n$  состояниями,  $m$  входами и  $t$  выходами.

### § 3. Параллельная декомпозиция автоматов с общим входом

Рассмотрим задачу разложения абстрактного автомата Мили по операции умножения  $\otimes$ , которая соответствует представлению сложного автомата *параллельной одновременной работой более простых автоматов с одним и тем же, что и исходный автомат, входным алфавитом*. Докажем теорему, из которой следует критерий принадлежности произвольного автомата  $A \in \mathfrak{A}(X) \otimes$  подполугруппе  $A(X) \otimes$  автоматов, представимых произведением двух или более автоматов из  $\mathfrak{A}(X) \otimes$  с общим входным алфавитом  $X$ , и сформулируем алгоритм разложения автомата  $A \in A(X) \otimes$  по операции умножения  $\otimes$ . Кроме того, покажем, что любой автомат  $A$ , разложимый по операции умножения  $\times$ , который представим произведением двух автоматов с отдельными входами, разложим также по операции умножения  $\otimes$ , т. е. представим произведением двух автоматов с тем же входным алфавитом, что и автомат  $A$ .

**Теорема 8.3.** *Автомат  $A$  с  $n = k \cdot l$  состояниями и входным алфавитом  $X$  представим произведением автоматов  $A_1$  и  $A_2$  соответственно с  $k$  и  $l$  состояниями и входным алфавитом  $X$  (параллельной одновременной работой двух автоматов с общим входом), если и только если существует подстановка  $t \in T$  алфавита состояний, которая преобразует матрицы соединений всех автономных\*) автоматов  $A_x$ ,  $x \in X$ , к виду правильных клеточных матриц соединений.*

**Доказательство.** Покажем необходимость существования правильных клеточных матриц для всех автономных автоматов  $A_x$ ,  $x \in X$ , автомата  $A$ , представимого произведением двух автоматов. Действительно, если  $A$  представим произведением автоматов  $A_1$  и  $A_2$ , то его матрица соединений  $R$  в соответствии с (7.32) будет иметь вид

$$R = R_1 \otimes R_2 = \bigcup_{x \in X} (R_{1x} \times R_{2x}) = \bigcup_{x \in X} R_x,$$

из которого вытекает, что матрица соединений  $R_x$  каждого автономного автомата  $A_x$  является прямым произведением матриц соединений  $R_{1x}$  и  $R_{2x}$  автономных автоматов  $A_{1x}$  и  $A_{2x}$  и, следовательно, на основании (8.1) представляет собой правильную клеточную матрицу соединений.

Покажем достаточность. Пусть все матрицы  $R_x$  автономных автоматов  $A_x$ ,  $x \in X$ , имеют вид правильных клеточных матриц соединений или существует подстановка  $t \in T$  алфавита состояний, которая приводит их к этому виду. Построим по матрице  $R$  матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$ . Для этого вначале по матрице  $R_x$  автономного автомата  $A_x$  строим матрицы  $R_{1x}$  и  $R_{2x}$  автономных автоматов  $A_{1x}$  и  $A_{2x}$  следующим образом. Матрица  $R_{1x} = \|r_{ij}(x/y)\|$ , где  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ , содержит столько переходов по букве  $x \in X$ , сколько ненулевых клеток  $R_{ij}$  порядка  $l$  в матрице  $R_x$ , причем различным выходным буквам матрицы  $R_x$  приписываем различные выходные буквы  $y \in Y$ , а одинаковым — одинаковые буквы  $y \in Y$  матрицы  $R_{1x}$ . Если клетка  $R_{ij}$  матрицы  $R_x$  равна нулевой клетке  $R_0$ , то элемент  $r_{ij}(x/y) = 0$ .

---

\*) Имеются в виду автономные автоматы с выходами.

Матрица  $R_{2x}$  совпадает с любой ненулевой клеткой порядка  $l$  матрицы  $R_x$  с учетом того, что выходные буквы матрицы  $R_{2x}$  определяются так же, как и для  $R_{1x}$ . Подобным образом находим матрицы  $R_{1x}$  и  $R_{2x}$  для всех  $x \in X$ .

Матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$  находим объединением полученных матриц

$$R_1 = \bigcup_{x \in X} R_{1x}, \quad R_2 = \bigcup_{x \in X} R_{2x}.$$

Легко проверить, что  $R_1 \otimes R_2 = R$  и  $A_1 \otimes A_2 = A$ . Этим теорема доказана.

Сформулируем теперь алгоритм представления произвольного автомата  $A \in \mathfrak{A}(X)_{\otimes}$  произведением двух автоматов с общим входом.

1°. Подсчитываем число  $n$  состояний автомата  $A$ . Если  $n = k \cdot l$ , то переходим к 3°. Если  $n$  — простое число, то к 2°.

2°. Добавляем одно изолированное состояние, чтобы выполнялось  $n = k \cdot l$ . Переходим к 3°.

3°. Матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  представляем объединением матриц  $R_x$  автономных автоматов  $A_x$  по буквам входного алфавита  $x \in X$ . Переходим к 4°.

4°. Матрицы соединений  $R_x$  разбиваем на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Если каждая  $R_x$ ,  $x \in X$ , — правильная клеточная матрица соединений, то переходим к 9°. В противном случае к 5°.

5°. По одной из матриц соединений  $R_{x_i}$  записываем матрицу смежности  $R_i$  графа автономного автомата  $A_{x_i}$ , заменяя каждую пару букв  $x_i/t_i$  в матрице  $R_{x_i}$  единицей. Переходим к 6°.

6°. Применяя метод разложения графов в произведение двух графов (см. гл. II, § 2), ищем подстановку, переводящую матрицу смежности  $R_i$  в правильную клеточную матрицу  $R'_i$ . Если  $t \in T$  — искомая подстановка, то переходим к 7°. Если такая подстановка не существует, то переходим к 10°.

7°. Применяем полученную подстановку ко всем остальным матрицам соединений  $R_x$ . Если каждая из матриц преобразуется к виду правильной клеточной матрицы соединений, то переходим к 9°. Если хотя бы одна из

матрицу  $R_x$  не преобразуется к искомому виду, то переходим к 8°.

8°. По матрице смежности  $R_i$  ищем новую подстановку  $t' \notin t \cdot T$ , переводящую матрицу  $R_i$  в правильную клеточную матрицу. Если  $t'$  — искомая подстановка, то переходим к 7°. Если такой подстановки не существует, то переходим к 10°.

9°. По правильным клеточным матрицам соединений  $R_x$ ,  $x \in X$ , строим матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$  так, как это показано в доказательстве теоремы 8.3.

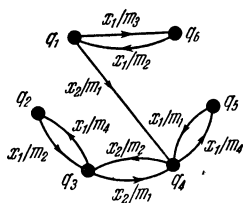


Рис. 8.4.

10°. Автомат  $A$  не разложим по операции умножения  $\otimes$ .

Пример 8.2. Пусть дан автомат  $A = (X, Q, M, q_1 \in Q, K(x \in \equiv y/m \in M))$ , графоид которого показан на рис. 8.4. Определить, разложим ли автомат  $A$  по операции умножения, и если да, то пред-

ставить его произведением двух автоматов с общим входом.

По графоиду запишем матрицы соединений  $R_x$  и  $R$  автономных автоматов  $A_{x_1}$  и  $A_{x_2}$ , которые имеют вид

$$R_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1/m_3 \\ 0 & 0 & x_1/m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1/m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1/m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/m_1 & 0 & 0 \\ x_1/m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_2/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2/m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и не являются правильными клеточными матрицами соединений.

Запишем матрицу смежности  $R_2$  графа автономного автомата  $A_{x_2}$

$$R_2 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

и найдем подстановку  $t \in T$ , приводящую  $R_2$  к виду правильной клеточной матрицы. Выпишем полустепени исхода  $s$  и захода  $p$  каждой вершины графа автомата и образуем множества возможных разложений этих чисел на два сомножителя. Получим

$$\begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} \left| \begin{array}{ll} s_1 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_1 = 0 = \underline{0 \cdot 1}, \underline{1 \cdot 0}, \\ s_2 = 0 = \underline{0 \cdot 1}, & p_2 = 0 = \underline{0 \cdot 1}, \\ s_3 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_3 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, \\ s_4 = 1 = \underline{1 \cdot 1}, & p_4 = 2 = \underline{1 \cdot 2}, \underline{2 \cdot 1}, \\ s_5 = 0 = \underline{0 \cdot 1}, & p_5 = 0 = \underline{0 \cdot 0}, \\ s_6 = 0 = \underline{1 \cdot 1}, & p_6 = 0 = \underline{0 \cdot 1}, \underline{0 \cdot 2}. \end{array} \right.$$

Подчеркнутые разложения определяют следующую пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Q$ :

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \\ \pi_1 &= \{q_1, q_3, q_4\}, & \pi_2 &= \{q_2, q_5, q_6\}, \\ \rho_1 &= \{q_1, q_5\}, & \rho_2 &= \{q_2, q_3\}, & \rho_3 &= \{q_4, q_6\}. \end{aligned}$$

Найденная пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_1 & q_3 & q_4 & q_5 & q_2 & q_6 \end{pmatrix}$$

алфавита состояний. Применяя подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_1 & q_5 & q_2 & q_3 & q_4 & q_6 \end{pmatrix}$$



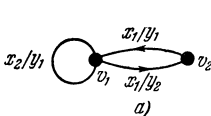
к матрицам  $R_{x_1}$  и  $R_{x_2}$ , получим матрицы

$$R'_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1/m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1/m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1/m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1/m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R'_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

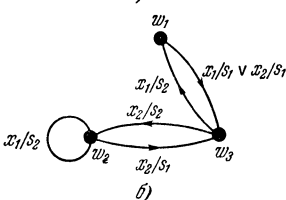
которые являются правильными клеточными матрицами соединений.

По матрицам  $R'_{x_1}$  и  $R'_{x_2}$  строим матрицы соединений



$$R_{A_1} = \begin{pmatrix} x_2/y_1 & x_1/y_2 \\ x_1/y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и



$$R_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1/s_1 \vee x_2/s_1 \\ 0 & x_1/s_2 & x_2/s_1 \\ x_1/s_2 & x_2/s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

определяющие автоматы  $A_1 = (X, V, Y, v_1 \in V, F(x \in X/y \in Y))$  и  $A_2 = (X, W, S, w_1 \in W, P(x \in X/s \in S))$  с общим входным алфавитом  $X$ , показанные соответственно на рис. 8.5, а, б.

Приведем оценку числа автоматов, представимых параллельной одновременной работой автоматов с общим входом.

Пусть  $A$  — автомат с  $n = k \cdot l$  состояниями,  $m$  входами и  $t = v \cdot s$  выходами. Если через  $\psi_{\otimes}$  обозначить число автоматов, разложимых по операции умножения  $\otimes$ , то справедлива следующая теорема.

Теорема 8.4.

$$\frac{(k+1)^{kmv} \cdot (l+1)^{lms}}{k!l!} \cdot n! < \psi_{\otimes} < (k+1)^{kmv} \cdot (l+1)^{lms} \cdot n!.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8.2.

Заметим, что, хотя по сравнению с общим числом автоматов с  $n$  состояниями,  $m$  входами и  $l$  выходами, число автоматов, представимых параллельной одновременной работой с общим входом, невелико, однако, как следует из теорем 8.2 и 8.4, оно в

$$(k+1)^{kmv} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot (l+1)^{lms} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

раз больше числа автоматов, представимых параллельной одновременной работой с отдельными входами.

Покажем теперь, что любой абстрактный автомат, разложимый по операции умножения  $\times$ , разложим также и по операции умножения  $\otimes$ , иначе говоря, *параллельная декомпозиция автоматов с разделением входов является частным случаем параллельной декомпозиции автоматов с общим входом.*

Теорема 8.5. *Подполугруппа  $A_{\times}$  автоматов, разложимых по операции умножения  $\times$ , вкладывается в подполугруппу  $A(Z)_{\otimes}$  автоматов, разложимых по операции умножения  $\otimes$ .*

Доказательство. Пусть  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$  — автомат, который принадлежит подполугруппе  $A_{\times}$ . Тогда справедливо  $A = A_1 \times A_2$ , где  $A_1 = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  и  $A_2 = (Y, W, S, w_1 \in W, P(y \in Y/s \in S))$ .

Представляя автоматы  $A_1$  и  $A_2$  объединением автономных автоматов по буквам входных алфавитов  $X$  и  $Y$  и учитывая дистрибутивность объединения относительно умножения автоматов, можно записать

$$\begin{aligned} A = A_1 \times A_2 &= \bigcup_{x \in X} A_{1x} \times \bigcup_{y \in Y} A_{2y} = \\ &= \bigcup_{(x, y) \in X \times Y} (A_{1x} \times A_{2y}) = \bigcup_{z \in Z} (A_{1x} \times A_{2y}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

В каждом автономном автомате  $A_{1x}$  выражения (8.2) заменим букву  $x \in X$  на такую букву  $z \in Z$ , для которой

выполняется  $pr_1z = x$ . Это всегда можно сделать, так как  $Z = X \times Y$ , и поэтому  $z = (x, y)$ . Аналогично, в каждом автономном автомате  $A_{2y}$  заменим букву  $y \in Y$  на такую букву  $z \in Z$ , что  $pr_2z = y$ . Тогда получим

$$A = \bigcup_{z \in Z} (A_{1z} \times A_{2z}) = A'_1 \otimes A'_2,$$

где  $A'_1 = \bigcup_{z \in Z} A_{1z}$  и  $A'_2 = \bigcup_{z \in Z} A_{2z}$ . Таким образом, от  $A = A_1 \times A_2$  перешли к  $A = A'_1 \otimes A'_2$ . Поэтому  $A \in \mathfrak{A}(Z)_{\otimes}$ . Этим теорема доказана.

#### § 4. Параллельная поочередная декомпозиция автоматов

Рассмотрим теперь *параллельную неодновременную (поочередную) декомпозицию автоматов с отдельными входами* [319]. Пусть  $A \in \mathfrak{A}_+$  — произвольный абстрактный автомат Мили. Требуется найти критерий принадлежности автомата  $A$  подполугруппе  $\mathfrak{A}_+$  автоматов, представимых суммой двух или более автоматов, и сформулировать алгоритм разложения автомата  $A \in \mathfrak{A}_+$  в сумму двух автоматов.

Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные абстрактные автоматы Мили, а  $R_A = \|r_{\alpha\beta}(x/n)\|$  и  $R_B = \|r_{\gamma\delta}(y/s)\|$  — их матрицы соединений.

Матрица соединений  $R_C$  автомата  $C$ , равного сумме автоматов  $A$  и  $B$ , будет, как известно, иметь вид

$$R_C = (R_A \times E_B) \cup (E_A \times R_B) = \left\| \begin{array}{cccc} r_{11}(x/n) \cdot E_B \cup R_B & r_{12}(x/n) \cdot E_B & \dots & r_{1k}(x/n) \cdot E_B \\ r_{21}(x/n) \cdot E_B & r_{22}(x/n) \cdot E_B \cup R_B & \dots & r_{2k}(x/n) \cdot E_B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}(x/n) \cdot E_B & r_{k2}(x/n) \cdot E_B & \dots & r_{kk}(x/n) \cdot E_B \cup R_B \end{array} \right\|. \quad (8.3)$$

Из (8.3) следует, что матрица  $R_C$  может содержать следующие типы клеток  $R_{\alpha\beta}$ :

1) если  $\alpha \neq \beta$ , то

$$R_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}(x_i/n_i) \cdot E_B = \left\| \begin{array}{cccc} x_i/n_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_i/n_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_i/n_i \end{array} \right\|$$

при  $r_{\alpha\beta}(x_i/n_i) = x_i/n_i$  и

$$R_{\alpha\beta} = E_0 \text{ при } r_{\alpha\beta}(x_i/n_i) = 0,$$

где  $E_0$  — нулевая матрица порядка  $l$ ;

2) если  $\alpha = \beta$ , то

$$R_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}(x_j/n_j) \cdot E_B \cup R_B =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} x_j/n_j \vee r_{11}(y/s) & r_{12}(y/s) & \dots & r_{1l}(y/s) \\ r_{21}(y/s) & x_j/n_j \vee r_{22}(y/s) & \dots & r_{2l}(y/s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l1}(y/s) & r_{l2}(y/s) & \dots & x_j/n_j \vee r_{ll}(y/s) \end{array} \right\|$$

при  $r_{\alpha\beta}(x_j/n_j) = x_j/n_j$  и

$$R_{\alpha\beta} = R_B \text{ при } r_{\alpha\beta}(x_j/n_j) = 0.$$

Матрицу соединений вида (8.3) будем называть *регулярной клеточной матрицей соединений*.

Очевидно, что, заменяя каждую букву входного алфавита в регулярной клеточной матрице соединений единицей, а дизъюнкцию букв — суммой единиц, получим матрицу смежности  $R_C$  автомата  $C$ , которая является регулярной клеточной матрицей.

Сформулируем теперь теорему, из которой следует критерий принадлежности автомата  $A \in \mathfrak{A}_+$  подполугруппе  $A_+$ , причем каждый автомат из  $A_+$  разложим в сумму, по крайней мере, двух автоматов из  $\mathfrak{A}_+$ .

**Теорема 8.6.** *Автомат  $A$  с  $n = k \cdot l$  состояниями представим суммой двух автоматов  $A_1$  и  $A_2$  соответственно с  $k$  и  $l$  состояниями (параллельной поочередной работой двух автоматов), если и только если существует подстановка  $t \in T$  алфавита состояний, которая преобразует матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  к виду регулярной клеточной матрицы соединений.*

Доказательство нетрудно провести по аналогии с доказательством теоремы 8.1.

Следует отметить, что замена дизъюнкций букв входного алфавита суммой единиц при переходе от матрицы соединений к матрице смежности исключает неоднозначность разложения автомата в сумму двух автоматов. Поэтому, если найденная подстановка  $t \in T$  алфавита  $Q$  преобразует матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  в регулярную клеточную матрицу соединений, то из (8.3) вытекает, что множество входных (выходных) букв алфавита

$Z(M)$  разбивается на два непересекающихся подмножества  $Z_1$  и  $Z_2$  ( $M_1$  и  $M_2$ ), каждому из которых можно поставить во взаимно однозначное соответствие входные (выходные) алфавиты  $X(N)$  и  $Y(S)$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$ .

Для автоматов, разложимых по операции суммирования, как и для графов, справедливо следующее утверждение: число мест, отличных от нуля, в каждой строке и в каждом столбце матрицы соединений не превышает  $k + l - 1$ .

Сформулируем алгоритм представления автомата  $A \in \mathfrak{A}_+$  параллельной поочередной работой двух автоматов с раздельными входами.

1°. Подсчитываем число  $n$  состояний автомата  $A$ . Если  $n = k \cdot l$ , то переходим к 2°. Если  $n$  — простое число, то к 8°.

2°. Матрицу соединений  $R_A$  автомата  $A$  разбиваем на  $k^2$  клеток порядка  $l$  каждая. Если  $R_A$  — регулярная клеточная матрица соединений, то переходим к 7°. В противном случае к 3°.

3°. Проверяем критерий о числе мест, отличных от нуля, в матрице соединений  $R_A$ . Если критерий выполняется, то переходим к 4°, в противном случае к 8°.

4°. По матрице соединений  $R_A$  строим матрицу смежности  $R$  автомата  $A$ . Переходим к 5°.

5°. Применяя алгоритм разложения графа по операции суммирования (см. гл. IV, § 7), ищем подстановку, переводящую матрицу смежности  $R$  в регулярную клеточную матрицу. Если  $t \in T$  — искомая подстановка, то переходим к 6°. Если указанной подстановки не существует, то переходим к 8°.

6°. Применяем полученную подстановку  $t \in T$  к матрице соединений  $R_A$  автомата  $A$ . Если приходим к регулярной клеточной матрице соединений, то переходим к 7°. В противном случае к 8°.

7°. По регулярной клеточной матрице соединений строим матрицы соединений  $R_{A_1}$  и  $R_{A_2}$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$ , подобно тому, как это сделано в определении регулярной клеточной матрицы соединений.

8°. Автомат  $A$  не разложим по операции суммирования.

Пример 8.3. Пусть дан автомат  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/t \in M))$ , графоид которого показан на рис. 8.6.

Матрица соединений  $R_A$  автомата  $A$  имеет вид

$$R_A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & z_1/m_4 & z_4/m_2 & z_3/m_1 \\ 0 & z_1/m_4 \vee z_3/m_2 & z_4/m_1 & 0 & 0 & z_2/m_3 \\ 0 & 0 & z_1/m_4 & 0 & z_2/m_3 & 0 \\ \hline z_2/m_3 & z_3/m_1 & z_4/m_2 & z_1/m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1/m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1/m_4 & 0 & 0 & z_4/m_1 & z_3/m_2 \end{array} \right\|$$

и не является регулярной клеточной матрицей соединений. Запишем матрицу смежности  $R$ , соответствующую  $R_A$ :

$$R = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Используя алгоритм разложения графа по операции суммирования, находим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества  $Q$ :

$$\begin{array}{l} q_1 \mid s_1 = 3 = 0 + 3, 3 + 0, \underline{1 + 2}, 2 + 1, \\ q_2 \mid s_2 = 4 = 0 + 4, 4 + 0, 1 + 3, 3 + 1, \underline{2 + 2}, \\ q_3 \mid s_3 = 2 = 0 + 2, \underline{2 + 0}, 1 + 1, \\ q_4 \mid s_4 = 4 = 0 + 4, 4 + 0, 1 + 3, 3 + 1, \underline{2 + 2}, \\ q_5 \mid s_5 = 1 = 0 + 1, \underline{1 + 0}, \\ q_6 \mid s_6 = 3 = 0 + 3, 3 + 0, \underline{1 + 2}, 2 + 1, \\ \rho_1 = 1 = 0 + 1, \underline{1 + 0}, \\ \rho_2 = 4 = 0 + 4, 4 + 0, 1 + 3, 3 + 1, \underline{2 + 2}, \\ \rho_3 = 4 = 0 + 4, 4 + 0, 1 + 3, 3 + 1, \underline{2 + 2}, \\ \rho_4 = 2 = 0 + 2, \underline{2 + 0}, 1 + 1, \\ \rho_5 = 3 = 0 + 3, 3 + 0, \underline{1 + 2}, 2 + 1, \\ \rho_6 = 3 = 0 + 3, 3 + 0, \underline{1 + 2}, 2 + 1. \end{array}$$

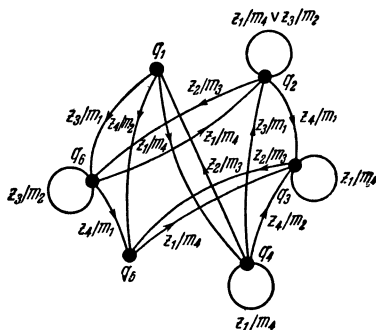


Рис. 8.6.

Пара разбиений множества  $Q$  имеет вид

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \{q_1, q_5, q_6\}, & \pi_2 &= \{q_2, q_3, q_4\}, \\ \rho_1 &= \{q_1, q_4\}, & \rho_2 &= \{q_2, q_6\}, & \rho_3 &= \{q_3, q_5\}.\end{aligned}$$

Полученная пара  $(\pi, \rho)$  разбиений эквивалентна подстановке

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_1 & q_6 & q_5 & q_4 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_1 & q_5 & q_6 & q_4 & q_3 & q_2 \end{pmatrix}$$

к матрице соединений  $R_A$ , приходим к регулярной клеточной матрице соединений

$$R'_A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & z_3/m_1 & z_4/m_2 & z_1/m_4 & 0 & 0 \\ 0 & z_3/m_2 & z_4/m_1 & 0 & z_1/m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1/m_4 \\ \hline z_2/m_3 & 0 & 0 & z_1/m_4 & z_3/m_1 & z_4/m_2 \\ 0 & z_2/m_3 & 0 & 0 & z_1/m_4 \vee z_3/m_2 & z_4/m_1 \\ 0 & 0 & z_2/m_3 & 0 & 0 & z_1/m_4 \end{array} \right\|.$$

По матрице  $R'_A$  строим матрицы соединений

$$R_{A_1} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & z_1/m_4 \\ z_2/m_3 & z_1/m_4 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad R_{A_2} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & z_3/m_1 & z_4/m_2 \\ 0 & z_3/m_2 & z_4/m_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Обозначая состояния через  $V$  и  $W$ , входные алфавиты через  $X = \{x_1, x_2\}$  и  $Y = \{y_1, y_2\}$ , выходные алфавиты через  $N = \{n_1, n_2\}$  и  $S = \{s_1, s_2\}$ , получим автоматы  $A_1$  и  $A_2$ , которые показаны на рис. 8.7, а, б. Очевидно, что  $A_1 + A_2 \sim A$ .

Приведем оценку числа автоматов, представимых параллельной поочередной работой двух автоматов с раздельными входами.

Пусть  $A$  — автомат с  $n = k \cdot l$  состояниями,  $m = s + t$  входами и  $p = r + v$  выходами. Обозначим через  $\psi_+$  число автоматов, представимых суммой двух автоматов

$A_1$  и  $A_2$  соответственно с  $k$  и  $l$  состояниями,  $s$  и  $t$  входами и  $r$  и  $v$  выходами среди общего числа  $(n+1)^{nmp}$  автоматов с  $n$  состояниями,  $m$  входами и  $p$  выходами. Тогда справедлива следующая теорема.

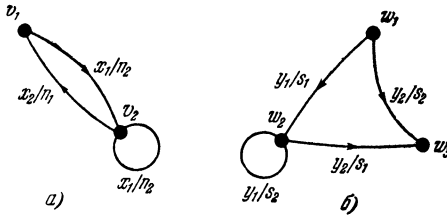


Рис. 8.7.

Теорема 8.7.

$$\frac{(k+1)^{ksr} \cdot (l+1)^{ltv}}{k!l!} \cdot n! < \psi_+ < (k+1)^{ksr} \cdot (l+1)^{ltv} \cdot n!$$

Доказательство легко провести, основываясь на теоремах 4.9 и 8.2.

Покажем теперь, что любой абстрактный автомат, разложимый по операции суммирования, разложим также и по операции умножения  $\otimes$ , т. е. *параллельная поочередная декомпозиция автоматов с раздельными входами является частным случаем параллельной декомпозиции автоматов с общим входом.*

Теорема 8.8. *Подполугруппа  $A_+$  автоматов, разложимых по операции суммирования, вкладывается в подполугруппы  $A(Z) \otimes$  автоматов, разложимых по операции умножения  $\otimes$ .*

Доказательство. Пусть  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$  — автомат, принадлежащий подполугруппе  $A_+$ . Тогда имеет место  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_1 = (X, V, N, v_1 \in V, F(x \in X/n \in N))$  и  $A_2 = (Y, W, S, w_1 \in W, P(y \in Y/s \in S))$ .

Пусть также  $R, R_1, R_2$  — матрицы соединений автоматов  $A, A_1, A_2$ . Запишем сумму двух автоматов в матричной форме

$$R = (R_1 \times E_2) \cup (E_1 \times R_2),$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — единичные матрицы смежности порядка  $R_1$  и  $R_2$ .



Матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  перепишем в виде  $R_{1x}$  и  $R_{2y}$  с учетом входных алфавитов автоматов  $A_1$  и  $A_2$ . Так как диагональные элементы матриц смежности  $E_1$  и  $E_2$  равны единице, то вместо каждого единичного элемента матрицы  $E_1$  можно записать дизъюнкцию всех букв входного и выходного алфавитов  $Y/S$ , а вместо каждого единичного элемента матрицы  $E_2$  можно записать дизъюнкцию всех букв входного и выходного алфавитов  $X/N$ . В результате получим матрицы соединений  $E_{1Y}$  и  $E_{2X}$ , которые соответственно задают автоматы с тождественными переходами по всем буквам входного алфавита  $Y$  и  $X$ . Тогда запишем

$$R = (R_{1X} \times E_{2X}) \cup (E_{1Y} \times R_{2Y}).$$

Поскольку автоматы, задаваемые матрицами соединений в круглых скобках этого выражения, имеют одинаковые входные алфавиты, операцию умножения  $\times$  можно заменить операцией умножения  $\otimes$ . Поэтому

$$\begin{aligned} R &= (R_{1X} \otimes E_{2X}) \cup (E_{1Y} \otimes R_{2Y}) = \\ &= \bigcup_{x \in X} (R_{1x} \times E_{2x}) \cup \bigcup_{y \in Y} (E_{1y} \times R_{2y}). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $X \cup Y = Z$  (так же как  $N \cup S = M$ ), и обозначая  $R_{1x} \cup E_{1y} = R'_{1z}$  и  $E_{2x} \cup R_{2y} = R'_{2z}$ , окончательно приходим к выражению

$$\begin{aligned} R &= \bigcup_{z \in Z} ((R_{1x} \cup E_{1y}) \times (E_{2x} \cup R_{2y})) = \\ &= \bigcup_{z \in Z} (R'_{1z} \times R'_{2z}) = R'_1 \otimes R'_2. \end{aligned}$$

Таким образом, от  $A = A_1 + A_2$  перешли к  $A = A'_2 \otimes A'_1$ . Поэтому  $A \in A(Z)_{\otimes}$ .

Автоматы  $A'_1$  и  $A'_2$ , задаваемые матрицами соединений  $R'_1$  и  $R'_2$ , определяются, очевидно, следующим образом:

$$R'_1 = R_{1X} \cup E_{1Y},$$

где  $R_{1X}$  — матрица соединений автомата  $A_1$ , а  $E_{1Y} = \|r_{\alpha\beta}(y/s)\|$ , причем

$$r_{\alpha\beta}(y/s) = \begin{cases} Y/S, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

— матрица соединений такого же порядка, что и  $R_1$ , которая соответствует автомату с тождественными переходами по буквам входного алфавита  $y \in Y$  автомата  $A_2$ .

Аналогично

$$R'_2 = R_{2Y} \cup E_{2X},$$

где  $R_{2Y}$  — матрица соединений автомата  $A_2$ , а  $E_{2X} = \|r_{\gamma\delta}(x/n)\|$ , причем

$$r_{\gamma\delta}(x/n) = \begin{cases} X/N, & \text{если } \gamma = \delta, \\ 0, & \text{если } \gamma \neq \delta, \end{cases}$$

— матрица соединений такого же порядка, что и  $R_2$ , которая соответствует автомату с тождественными переходами по буквам входного алфавита  $x \in X$  автомата  $A_1$ . Этим теорема доказана.

## § 5. Последовательная декомпозиция автоматов

В этом параграфе доказывается теорема, из которой следует критерий принадлежности автомата  $A \in \mathfrak{B}_*$  подполугруппе  $B_*$  автоматов, разложимых по операции суперпозиции. Приводится оценка числа автоматов, представимых последовательной работой двух автоматов. Кроме того, будет показано, что различные виды параллельной совместной работы автоматов, описанные выше, можно свести, в конечном счете, к последовательной работе автоматов. Для простоты при доказательстве теоремы разложения автоматов по операции суперпозиции рассматриваются абстрактные автоматы без выходов. Поэтому при последовательном соединении двух автоматов считаем, что входной алфавит второго автомата совпадает с алфавитом состояний первого автомата.

Пусть  $A = (X, Y, y_1 \in Y, F(x \in X))$  и  $B = (Y, V, v_1 \in V, P(y \in Y))$  — некоторые автоматы из  $\mathfrak{B}_*$ , а

$$R_A = \|r_{\alpha\beta}(x)\|,$$

где

$$r_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } y_\beta \in Fy_\alpha \text{ по букве } x \in X, \\ 0, & \text{если } y_\beta \notin Fy_\alpha, \alpha, \beta \in I = \{1, 2, \dots, k\}, \end{cases}$$

и

$$R_B = \|r_{\gamma\delta}(y)\|,$$

где

$$r_{\gamma\delta}(y) = \begin{cases} y, & \text{если } v_\delta \in Pv_\gamma \text{ по букве } y \in Y, \\ 0, & \text{если } v_\delta \notin Pv_\gamma, \gamma, \delta \in J = \{1, 2, \dots, l\}, \end{cases}$$

— соответственно их матрицы соединений.

Матрицу соединений  $R_C$  автомата  $C = A * B$  можно записать в виде

$$R_C = R_A * R_B = \begin{vmatrix} r_{11}(x) \cdot R_{y_1} & r_{12}(x) \cdot R_{y_2} & \dots & r_{1k}(x) \cdot R_{y_k} \\ r_{21}(x) \cdot R_{y_1} & r_{22}(x) \cdot R_{y_2} & \dots & r_{2k}(x) \cdot R_{y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}(x) \cdot R_{y_1} & r_{k2}(x) \cdot R_{y_2} & \dots & r_{kk}(x) \cdot R_{y_k} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) & \dots & R_{1k}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) & \dots & R_{2k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1}(x) & R_{k2}(x) & \dots & R_{kk}(x) \end{vmatrix}, \quad (8.4)$$

где  $R_{y_i}$ ,  $i \in I$ , — матрица смежности автомата  $B$  по букве  $y_i$ .

Из (8.4) следует, что матрица  $R_C$  содержит  $k^2$  клеток  $R_{\alpha\beta}(x)$ ,  $\alpha, \beta \in I$ , таких, что любые две ненулевые клетки  $R_{\nu\beta}(x)$  и  $R_{\mu\beta}(x)$ ,  $\nu, \mu \in I$ , с одинаковым индексом  $\beta$  либо равны между собой, если  $r_{\nu\beta}(x) = r_{\mu\beta}(x)$ , либо между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Таким образом, матрица  $R_C$  может содержать не более  $k$  различных клеток порядка  $l$  с точностью до установления взаимно однозначного соответствия. Поэтому матрицу вида (8.4) будем называть *k-правильной клеточной матрицей соединений*.

**Теорема 8.9.** *Автомат  $A$  представим последовательной работой двух автоматов  $A_1$  и  $A_2$ , если и только если существует подстановка  $t \in T$ , переводящая матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  в  $k$ -правильную клеточную матрицу соединений.*

Доказательство необходимости вытекает из определения  $k$ -правильной клеточной матрицы соединений автомата.

**Достаточность.** Предположим, что матрица соединений  $R$  автомата  $A$  является  $k$ -правильной клеточной матрицей. Тогда матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$  построим следующим образом. Матрица  $R_1$  порядка  $k$  имеет столько переходов, сколько содержится

ненулевых клеток  $R_{\alpha\beta}(x)$  в матрице  $R$ , причем переходу, соответствующему какой-либо клетке  $R_{\alpha\beta}(x)$ , приписываем ту букву  $x \in X$ , по которой выполняются переходы в этой клетке. Алфавит состояний автомата  $A_1$  обозначим через  $Y = \{y_i\}$ , где  $i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$ , а  $y_1 \in Y$  — начальное состояние  $A_1$ , причем алфавит  $Y$  является входным алфавитом автомата  $A_2$ . Объединяя все ненулевые клетки  $R_{\alpha\beta}(x)$  по соответствующим буквам входного алфавита  $y \in Y$ , получим матрицу соединений  $R_2$  автомата  $A_2$ , алфавит состояний которого обозначим через  $V = \{v_j\}$ , где  $j \in J = \{1, 2, \dots, l\}$ , причем  $v_1 \in V$  — начальное состояние  $A_2$ . Нетрудно проверить, что  $A_1 * A_2 = A$ . Поэтому теорема доказана.

Алгоритм разложения автоматов по операции суперпозиции аналогичен алгоритму, приведенному для графов (см. гл. IV, § 10).

Приведем теперь оценку числа автоматов без выходов, которые могут быть представлены суперпозицией двух автоматов.

Пусть  $A$  — автомат с  $n = k \cdot l$  состояниями и  $m$  входами. Обозначим через  $\psi_*$  число автоматов, представимых суперпозицией двух автоматов из общего числа автоматов с  $n$  состояниями и  $m$  входами. Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 8.10.**

$$\frac{2^{k^2 m} \cdot (l+1)^n}{k!l!} \cdot n! < \psi_* < 2^{k^2 m} \cdot (l+1)^n \cdot n!$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.15.

Из теоремы 8.10 следует, что число  $\psi_*$  автоматов, представимых последовательной работой двух автоматов, невелико по сравнению с множеством  $\Phi$  автоматов с  $n$  состояниями и  $m$  входами, которое составляет  $\Phi = (n+1)^{nm}$ .

Покажем теперь, что *различные виды параллельной работы автоматов можно свести, в конечном итоге, к последовательной работе автоматов*. Точнее говоря, докажем ряд теорем, из которых вытекает, что любой автомат, представимый параллельной одновременной работой двух автоматов с отдельными или общим входами, а также любой автомат, представимый параллельной

поочередной работой двух автоматов, либо совместной работой двух автоматов, представим последовательной работой двух автоматов, отличных, в общем случае, от автоматов сомножителей. Этот результат играет важную роль при решении задачи декомпозиции сложного автомата на заданные стандартные автоматы, которая рассматривается в последнем параграфе этой главы. При доказательстве теорем будем иметь дело с автоматами Мили.

*Теорема 8.11. Подполугруппа  $A_{\times}$  автоматов, разложимых по операции умножения  $\times$ , вкладывается в подполугруппу  $B_{*}$  автоматов, разложимых по операции суперпозиции.*

*Доказательство.* Пусть  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$  — некоторый автомат Мили и  $A \in A_{\times}$ . Тогда имеет место  $A = A_1 \times A_2$ , где  $A_1 = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  и  $A_2 = (Y, W, U, \omega_1 \in W, P(y \in Y/u \in U))$ .

Представим автомат  $A_1$  объединением автономных автоматов по буквам выходного алфавита  $l \in L$ :

$$A_1 = \bigcup_{l \in L} A_{1l},$$

а автомат  $A_2$  объединением автономных автоматов по буквам входного алфавита  $y \in Y$ :

$$A_2 = \bigcup_{y \in Y} A_{2y}.$$

Тогда

$$A = \bigcup_{l \in L} A_{1l} \times \bigcup_{y \in Y} A_{2y}.$$

Учитывая, что  $A_{1l} \times E_l = A_{1l}$  и  $A_{2y} \times E_y = A_{2y}$  (с точностью до изоморфизма автоматов), где  $E_l$  и  $E_y$  — единичные автоматы полугруппы  $\mathfrak{A}_{\times}$  по буквам  $l \in L$  и  $y \in Y$ , а также дистрибутивность умножения относительно объединения автоматов и, наконец, коммутативность умножения автоматов, можно записать

$$\begin{aligned} A &= \left( \bigcup_{l \in L} (A_{1l} \times E_l) \right) \times \left( \bigcup_{y \in Y} (A_{2y} \times E_y) \right) = \\ &= \bigcup_{\substack{l \in L \\ y \in Y}} (A_{1l} \times E_l \times A_{2y} \times E_y) = \bigcup_{\substack{l \in L \\ y \in Y}} (A_{1l} \times E_y \times E_l \times A_{2y}). \end{aligned}$$

Обозначим  $L \times Y = S$ . Тогда, учитывая, что  $A_{1l} \times E_y = A_{1s}$  и  $E_l \times A_{2y} = A_{2s}$ , в итоге получим выражение

$$A = \bigcup_{s \in S} (A_{1s} \times A_{2s}),$$

которое на основании (7.32) определяет суперпозицию двух автоматов. Поэтому можно записать  $A = A'_1 * A'_2$ , откуда следует, что  $A \in B_*$ . Этим теорема 8.11 доказана.

Легко видеть, что автоматы  $A'_1$  и  $A'_2$  определяются по формулам

$$A'_1 = \bigcup_{s \in S} A_{1s} = \bigcup_{\substack{l \in L \\ y \in Y}} (A_{1l} \times E_y) = \bigcup_{l \in L} A_{1l} \times \bigcup_{y \in Y} E_y = A_1 \times E_Y,$$

где  $E_Y$  — единичный автомат, который выполняет роль единицы в полугруппе  $\mathfrak{B}_*$  по алфавиту  $Y$ , а

$$A'_2 = \bigcup_{s \in S} A_{2s} = \bigcup_{\substack{l \in L \\ y \in Y}} (E_l \times A_{2y}) = \bigcup_{l \in L} E_l \times \bigcup_{y \in Y} A_{2y} = E_L \times A_2,$$

где  $E_L$  — единичный автомат, который выполняет роль единицы в полугруппе  $\mathfrak{B}_*$  по алфавиту  $L$ .

**Теорема 8.12.** *Подполугруппы  $A(X)_{\otimes}$  автоматов, разложимых по операции умножения  $\otimes$ , вкладываются в подполугруппу  $B_*$  автоматов, разложимых по операции суперпозиции.*

**Доказательство.** Пусть  $A \in A(X)$ , и следовательно, имеет место  $A = A_1 \otimes A_2$ , где  $A = (X, Q, M, q_1 \in Q, K(x \in X/m \in M))$ ,  $A_1 = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  и  $A_2 = (X, W, U, w_1 \in W, P(x \in X/u \in U))$ .

Представляя автоматы  $A_1$  и  $A_2$  соответственно объединением автономных автоматов по буквам выходного и входного алфавитов, запишем

$$\begin{aligned} A &= \left( \bigcup_{l \in L} A_{1l} \right) \otimes \left( \bigcup_{x \in X} A_{2x} \right) = \\ &= \left( \bigcup_{l \in L} (A_{1l} \times E_l) \right) \otimes \left( \bigcup_{x \in X} (A_{2x} \times E_x) \right). \end{aligned}$$

Переходя от умножения  $\otimes$  к умножению  $\times$ , получим

$$A = \bigcup_{x \in X} \left( \left( \bigcup_{l \in L} (A_{1lx} \times E_{lx}) \right) \times \left( \bigcup_{x \in X} (A_{2x} \times E_x) \right) \right).$$

Так как  $E_l$  не зависит от букв  $x \in X$ , то  $E_{lx} = E_l$ . Учитывая дистрибутивность умножения относительно объединения и коммутативность умножения автоматов, запишем

$$A = \bigcup_{x \in X} \left( \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} (A_{1lx} \times E_x \times E_l \times A_{2x}) \right).$$

Вводя обозначения  $L \times X = S$ ,  $A_{1lx} \times E_x = A_{1sx}$ ,  $E_l \times A_{2x} = A_{2s}$  и учитывая коммутативность объединения автоматов, приходим к выражению

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{s \in S} \left( \bigcup_{x \in X} (A_{1sx} \times A_{2s}) \right) = \bigcup_{s \in S} \left( \left( \bigcup_{x \in X} A_{1sx} \right) \times A_{2s} \right) = \\ &= \bigcup_{s \in S} (A_{1s} \times A_{2s}), \end{aligned}$$

которое соответствует суперпозиции двух автоматов. Поэтому  $A = A'_1 * A'_2$  и  $A \in \mathbf{B}_*$ . Этим теорема 8.12 доказана.

Здесь автомат  $A'_1$  определяется выражением

$$\begin{aligned} A'_1 &= \bigcup_{x \in X} \left( \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} (A_{1lx} \times E_x) \right) = \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} \left( \bigcup_{x \in X} (A_{1lx} \times E_x) \right) = \\ &= \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} (A_{1l} \otimes E_x) = \left( \bigcup_{l \in L} A_{1l} \right) \otimes E_X = A_1 \otimes E_X, \end{aligned}$$

где  $E_X$  — автомат, выполняющий роль единицы полугруппы  $\mathfrak{B}_*$  по алфавиту  $X$ , а

$$\begin{aligned} A'_2 &= \bigcup_{x \in X} \left( \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} (E_l \times A_{2x}) \right) = \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} \left( \bigcup_{x \in X} (E_l \times A_{2x}) \right) = \\ &= \bigcup_{\substack{l \in L \\ x \in X}} (E_l \times A_2) = E_L \times A_2, \end{aligned}$$

где  $E_L$  — автомат, выполняющий роль единицы полугруппы  $\mathfrak{B}_*$  по алфавиту  $L$ .

*Теорема 8.13. Подполугруппа  $A_+$  автоматов, разложимых по операции суммирования, вкладывается в подполугруппу  $\mathbf{B}_*$  автоматов, разложимых по операции суперпозиции.*

**Доказательство.** Пусть  $A \in A_+$ . В этом случае  $A = A_1 + A_2$ , где  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$ ,  $A_1 = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  и  $A_2 = (Y, W, U, w_1 \in W, P(y \in Y/u \in U))$ .

Представляя матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$  объединением матриц соединений автономных автоматов, запишем

$$\begin{aligned} R &= \left( \bigcup_{l \in L} R_{1l} \right) + \left( \bigcup_{y \in Y} R_{2y} \right) = \\ &= \left( \left( \bigcup_{l \in L} R_{1l} \right) \times E_2 \right) \cup \left( E_1 \times \left( \bigcup_{y \in Y} R_{2y} \right) \right) = \\ &= \left( \bigcup_{l \in L} (R_{1l} \times E_2) \right) \cup \left( \bigcup_{y \in Y} (E_1 \times R_{2y}) \right). \end{aligned}$$

Вместо тождественно истинных переходов в единичных матрицах  $E_2$  и  $E_1$  вводим буквы соответствующих алфавитов  $L$  и  $Y$ . Учтя, что объединение с единичными матрицами дистрибутивно относительно умножения, и обозначая  $L \cup Y = S$ , получим

$$\begin{aligned} R &= \left( \bigcup_{l \in L} (R_{1l} \times E_{2l}) \right) \cup \left( \bigcup_{y \in Y} (E_{1y} \times R_{2y}) \right) = \\ &= \bigcup_{s \in S} ((R_{1l} \cup E_{1y}) \times (E_{2l} \cup R_{2y})) = \bigcup_{s \in S} (R_{1s} \times R_{2s}) = R'_1 * R'_2. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  представили суперпозицией матриц  $R'_1$  и  $R'_2$  автоматов  $A'_1$  и  $A'_2$ . Поэтому  $A = A'_1 * A'_2$  и  $A \in B_*$ . Этим теорема 8.13 доказана.

Матрицы соединений  $R'_1$  и  $R'_2$  автоматов  $A'_1$  и  $A'_2$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} R'_1 &= \bigcup_{s \in L \cup Y} (R_{1l} \cup E_{1y}) = R_1 \cup E_{1Y} = \\ &= (R_1 \times \{1\}) \cup (E_1 \times R_{EY}) = R_1 + R_{EY}, \end{aligned}$$

где  $R_{EY}$  — матрица соединений автомата  $E_Y$ , который играет роль единицы полугруппы  $\mathfrak{B}_*$  по алфавиту  $Y$ .

$$\begin{aligned} R'_2 &= \bigcup_{s \in L \cup Y} (E_{1l} \cup R_{2y}) = E_{2L} \cup R_2 = \\ &= (R_{EL} \times E_2) \cup (\{1\} \times R_2) = R_{EL} + R_2, \end{aligned}$$



где  $R_{E_L}$  — матрица соединений автомата  $E_L$ , который играет роль единицы полугруппы  $\mathfrak{B}_*$  по алфавиту  $L$ .

**Теорема 8.14.** *Подполугруппа  $A_0$  автоматов, разложимых по операции композиции, вкладывается в подполугруппу  $B_*$  автоматов, разложимых по операции суперпозиции.*

**Доказательство.** Пусть  $A \in A_0$ . Тогда  $A = A_1 \circ A_2$ , где  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$ ,  $A_1 = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X, u \in U/l \in L))$  и  $A_2 = (Y, W, U, w_1 \in W, P(y \in Y, l \in L/u \in U))$ .

Представим автоматы  $A_1$  и  $A_2$  объединением автоматов соответственно по буквам выходного  $l \in L$  и входных  $y \in Y, l \in L$  алфавитов. Учитывая (7.42), запишем

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{l \in L} A_{1l} \circ \bigcup_{\substack{y \in Y \\ l \in L}} A_{2yl} = \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L}} \left( \left( \bigcup_{l \in L} A_{1l} \right)_{u/l} \times \left( \bigcup_{\substack{y \in Y \\ l \in L}} A_{2yl} \right)_{l/u} \right) = \\ &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L}} \left( \left( \bigcup_{l \in L} A_{1(u/l)} \right) \times \left( \bigcup_{\substack{y \in Y \\ l \in L}} A_{2(y/l/u)} \right) \right) = \\ &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L}} \left( \left( \bigcup_{l \in L} A_{1(u/l)} \times E_u \times E_l \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \bigcup_{\substack{y \in Y \\ l \in L}} A_{2(y/l/u)} \times E_y \times E_l \times E_u \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая дистрибутивность умножения относительно объединения автоматов и коммутативность умножения, получим

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L}} \left( \bigcup_{\substack{y \in Y \\ l \in L}} (A_{1(u/l)} \times E_u \times E_l \times A_{2(y/l/u)} \times E_y \times E_l \times E_u) \right) = \\ &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L \\ y \in Y}} ((A_{1(u/l)} \times E_y \times E_u \times E_l) \times (A_{2(y/l/u)} \times E_l \times E_u)) = \\ &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L \\ y \in Y}} (A_{1(ylu/ylu)} \times A_{2(ylu/ylu)}). \end{aligned}$$

Обозначая  $Y \times L \times U = S$ , окончательно получаем

$$A = \bigcup_{s \in S} (A_{1s} \times A_{2s}) = A'_1 * A'_2.$$

Таким образом,  $A \in \mathfrak{B}_*$ , и теорема 8.14 доказана. Здесь

$$\begin{aligned} A'_1 &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L \\ y \in Y}} (A_{1(u/l)} \times E_y \times E_u \times E_l) = \\ &= \left( \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L}} A_{1(u/l)} \right) \circ \left( \bigcup_{y \in Y} E_y \right) \circ \left( \bigcup_{u \in U} E_u \right) \circ \left( \bigcup_{l \in L} E_l \right) = \\ &= A_1 \circ E_Y \circ E_U \circ E_L \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A'_2 &= \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L \\ y \in Y}} (A_{2(y/l/u)} \times E_l \times E_u) = \\ &= \left( \bigcup_{\substack{u \in U \\ l \in L \\ y \in Y}} A_{2(y/l/u)} \right) \circ \left( \bigcup_{l \in L} E_l \right) \circ \left( \bigcup_{u \in U} E_u \right) = A_2 \circ E_L \circ E_U, \end{aligned}$$

причем  $E_Y$ ,  $E_L$  и  $E_U$  — соответственно единицы по алфавитам  $Y$ ,  $L$  и  $U$  полугруппы  $\mathfrak{B}_*$ .

## § 6. Общая декомпозиция абстрактных автоматов

Как было показано в предыдущих параграфах, число автоматов, обладающих специальными видами матриц соединений такими, например, как правильная и регулярная клеточные матрицы, невелико по сравнению с общим числом автоматов. Поэтому автоматы, представимые параллельной или последовательной работой двух или более автоматов, составляют небольшое число всего множества автоматов. В связи с этим необходимо научиться представлять произвольные автоматы совместной работой более простых автоматов. Такое представление сводится, по сути дела, к разложению произвольного автомата по операции композиции автоматов.

Основная идея излагаемого ниже метода состоит в том, что матрицы соединений каждого из автономных

автоматов по входам исходного автомата приводятся к виду правильной клеточной матрицы с запрещенными переходами, представляются прямым произведением матриц сомножителей с отмеченными переходами, в которые затем вводятся необходимые зависимости от состояний соседних автоматов, устраняющие запрещенные переходы. В итоге получаем разложение произвольного автомата в совместную работу более простых автоматов с тем же входным алфавитом, что и исходный автомат. *Представление автомата совместной работой элементарных автоматов со связями между ними назовем общей декомпозицией абстрактных автоматов.* В качестве элементарных абстрактных автоматов могут быть выбраны автоматы с любым числом состояний (например, двумя, тремя, пятью и т. д.).

Заметим, что при разложении автомата по операции композиции ставится, как правило, задача оптимальной декомпозиции, т. е. представление произвольного автомата совместной работой элементарных абстрактных автоматов с минимальным числом связей между ними. Решение задачи оптимальной декомпозиции приводит, в конечном счете, к минимальной комбинационной части автомата на уровне функциональных схем.

Введем теперь понятие *правильной клеточной матрицы соединений с запрещенными переходами* и рассмотрим методику общей декомпозиции произвольного абстрактного автомата.

Пусть  $R = \|r_{\mu\nu}(z/m)\|$ ,  $\mu, \nu \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ , — матрица соединений произвольного автомата Мили  $A = (Z, Q, M, q_1 \in Q, K(z \in Z/m \in M))$ , причем  $R$  не является ПКМС или каким-либо другим ранее определенным типом матрицы соединений.

Представим матрицу соединений  $R$  объединением матриц автономных автоматов по буквам входного алфавита  $z \in Z$ :

$$R = \bigcup_{z \in Z} R_z$$

и дальнейшие преобразования проводим над матрицей  $R_z$ . Если число состояний  $n = k \cdot l$ , то разобьем матрицу  $R_z$  на  $k^2$  клеток порядка  $l$ . Если  $n$  — простое число, то, добавляя одно изолированное состояние, получим  $n =$

$= k \cdot l$ . Все ненулевые клетки порядка  $l$  объединим до универсальной клетки  $R_{zl}$  порядка  $l$ , элементы которой являются дизъюнктивным объединением пар  $z/m$  букв входного и выходного алфавита, стоящих на соответствующих местах каждой клетки. Каждую ненулевую клетку матрицы  $R_z$  дополним через дизъюнкцию по буквам входного и выходного алфавита до  $R_{zl}$ . В этом случае получим матрицу соединений  $R'_z$  с запрещенными переходами.

Под *запрещенными переходами*, которые будем отмечать на матрице соединений квадратиками, имеем в виду те переходы, которых не было в исходной матрице соединений  $R_z$ .

Так как  $R'_z$  является ПКМС, то на основании теоремы 8.1 представим ее произведением матриц  $R'_{1z}$  и  $R'_{2z}$  с *отмеченными* переходами следующим образом:

$$R'_z = \| r_{\mu\nu}(z/m) \| = \| r_{\alpha\beta}(z/m) \| \times \| r_{\gamma\delta}(z/m) \| = R'_{1z} \times R'_{2z},$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= (\alpha, \gamma), \quad \nu = (\beta, \delta), \quad \alpha, \beta \in I = \{1, 2, \dots, k\}, \\ \gamma, \delta &\in J = \{1, 2, \dots, l\}. \end{aligned}$$

В матрице  $R'_{1z} = \| r_{\alpha\beta}(z/m) \|$  содержится только одна входная буква  $z \in Z$  (именно та, по которой выделен автономный автомат  $A_z$ ), так как все клетки порядка  $l$  матрицы  $R'_z$ , отличные от нулевой, равны между собой. Аналогично для выходной буквы  $m \in M$ . Поскольку для устранения запрещенных переходов в матрице  $R'_z$  будут использоваться выходные сигналы, совпадающие с состояниями памяти автоматов  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$ , то выходную букву  $m \in M$  в матрице  $R'_{1z}$  можно исключить и считать, что матрица

$$R'_{1z} = \| r_{\alpha\beta}(z) \parallel$$

задает автомат Мура, выходные сигналы которого совпадают с состояниями его памяти.

Для фиксирования отмеченных переходов в матрицах  $R'_{1z}$  и  $R'_{2z}$  введем  $k^2$  различных *меток*. Если переход  $r_{\mu\nu}(z/m)$  в матрице  $R'_z$  помечен квадратиком, т. е. является запрещенным по буквам  $z \in Z$  и  $m \in M$ , то

соответствующие переходы  $r_{\alpha\beta}(z)$  в матрице  $R'_{1z}$  и  $r_{\gamma\delta}(z/m)$  в матрице  $R'_{2z}$  необходимо отметить одной и той же меткой. С содержательной точки зрения это означает, что в автоматах  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$  не могут одновременно совершаться переходы, помеченные одной и той же меткой, тогда как переходы, помеченные различными метками, допустимы.

Заметим, что запрещенные переходы в матрице  $R'_z$  могут быть двух типов. Одна часть запрещенных переходов, возникающих в матрице  $R_z$  при приведении ее к правильному виду, определяется наличием связей между автоматами  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$ , т. е. противоречивостью их работы, а другая часть запрещенных переходов возникает из-за наличия противоречий выходной (комбинационной) части автомата  $A_{2z}$ , поскольку одной и той же входной букве  $z \in Z$  могут соответствовать различные выходные буквы  $m_1 \in M$  и  $m_2 \in M$ .

Перейдем теперь от матриц  $R'_{1z}$  и  $R'_{2z}$  с отмеченными переходами к матрицам соединений  $R_{1z}$  и  $R_{2z}$ , в которых переходы зависят не только от входного алфавита  $Z$ , но и от состояний соответствующих автоматов. Эту процедуру назовем *введением связей* в матрицы соединений  $R'_{1z}$  и  $R'_{2z}$ . Обозначим состояния автомата  $A_{1z}$  через  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , а состояния автомата  $A_{2z}$  через  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l\}$ . Пусть  $r_{\alpha\beta}(z)$  — отмеченный переход в матрице  $R'_{1z}$ . Выбираем в матрице  $R'_{2z}$  все те переходы  $r_{\gamma\delta}(z/m)$ , которые не помечены меткой перехода  $r_{\alpha\beta}(z)$ . Так как переход  $r_{\alpha\beta}(z)$  возможен одновременно только с выбранными переходами  $r_{\gamma\delta}(z/m)$ , то вместо перехода  $r_{\alpha\beta}(z)$  в матрицу  $R'_{1z}$  вводим дизъюнкцию конъюнктивных членов соответствующих состояний  $\omega \in W$  и входных букв  $z \in Z$  указанных переходов  $r_{\gamma\delta}(z/m)$  матрицы  $R'_{2z}$ . Далее, если  $r_{\gamma\delta}(z/m)$  — отмеченный переход в матрице  $R'_{2z}$ , то вместо входной буквы  $z \in Z$  указанного перехода матрицы  $R'_{2z}$  вводим дизъюнкцию конъюнктивных членов соответствующих состояний  $v \in V$  и входной буквы  $z \in Z$  переходов  $r_{\alpha\beta}(z)$  матрицы  $R'_{1z}$ , не помеченных меткой перехода  $r_{\gamma\delta}(z/m)$ .

После выполнения описанной процедуры получаем матрицы соединений  $R_{1z} = \|r_{\alpha\beta}(\omega z)\|$  и  $R_{2z} = \|r_{\gamma\delta}(vz/m)\|$  автономных автоматов  $A_{1z}$  и  $A_{2z}$ .

Аналогично поступаем с каждым автономным автоматом  $A_z (z \in Z)$ . В результате объединения автономных матриц соединений  $R_{1z}$  и  $R_{2z}$  получаем матрицы соединений

$$R_1 = \bigcup_{z \in Z} R_{1z}, \quad R_2 = \bigcup_{z \in Z} R_{2z},$$

определяющие автоматы  $A_1 = (Z, V, v_1 \in V, F (w \in W, z \in Z/v \in V))$  и  $A_2 = (Z, W, M, \omega_1 \in W, P (v \in V, z \in Z/m \in M))$ , первый из которых  $A_1$  является автоматом Мура, а второй  $A_2$  — автоматом Мили. Легко показать, что  $R_1 \circ R_2 = R$ , т. е.  $A_1 \circ A_2 = A$ .

Учитывая приведенные выше построения, можно утверждать, что справедливо следующее предложение.

*Любой автомат Мили с числом состояний  $n > 2$  можно представить совместной работой (композицией) двух или большего числа простых автоматов, один из которых является автоматом Мили, а остальные — автоматами Мура.*

Покажем методику общей декомпозиции автомата на примере.

**Пример 8.4.** Пусть дан автомат Мили  $A$ , показанный на рис. 8.8. Представить его композицией двух автоматов  $A_1$  и  $A_2$ .

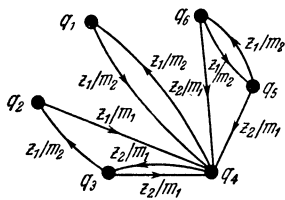


Рис. 8.8.

Матрица соединений  $R$  автомата  $A$  имеет вид

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & z_1/m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1/m_2 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 \\ z_1/m_2 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2/m_1 & 0 & z_1/m_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_2/m_1 & z_1/m_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Приводя матрицы соединений  $R_{z_1}$  и  $R_{z_2}$  к виду правильных клеточных матриц соединений с запрещенными переходами, получим матрицы

$$R'_{z_1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{z_1/m_2} & 0 & 0 & z_1/m_2 & 0 & 0 \\ \boxed{z_1/m_2} & 0 & \boxed{z_1/m_2} & z_1/m_2 & 0 & \boxed{z_1/m_2} \\ 0 & z_1/m_2 & 0 & 0 & \boxed{z_1/m_2} & 0 \\ \hline z_1/m_2 & 0 & 0 & \boxed{z_1/m_2} & 0 & 0 \\ \boxed{z_1/m_2} & 0 & \boxed{z_1/m_2} & \boxed{z_1/m_2} & 0 & z_1/m_2 \\ 0 & \boxed{z_1/m_2} & 0 & 0 & z_1/m_2 & 0 \end{array} \right),$$

$$R'_{z_2} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{z_2/m_1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{z_2/m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 & \boxed{z_2/m_1} \\ \boxed{z_2/m_1} & 0 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 \\ \boxed{z_2/m_1} & 0 & 0 & z_2/m_1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

которые содержат 15 запретов.

Представим матрицы  $R'_{z_1}$  и  $R'_{z_2}$  прямым произведением двух матриц и одинаковыми метками из набора  $(-, \sim, \circ, \bullet)$ , отметим те переходы в матрицах сомножителях, совместная работа которых образует запрещенные переходы в матрицах  $R'_{z_1}$  и  $R'_{z_2}$ . Тогда получим

$$R'_{z_1} = R'_{1z_1} \times R'_{2z_1} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \left\| \begin{array}{cc} z_1 & z_1 \\ z_1 & \bullet \\ \circ & \bullet \end{array} \right\| \times \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccc} \boxed{z_1/m_2} & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & \boxed{z_1/m_2} \\ \circ & \bullet & \sim \circ \\ 0 & z_1/m_2 & 0 \\ \circ & & \circ \end{array} \right\|,$$

$$R'_{z_2} = R'_{1z_2} \times R'_{2z_2} = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 0 & z_2 \\ z_2 & z_2 \end{matrix} \right\| \times \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & z_2/m_1 \\ z_2/m_1 & 0 & 0 \\ z_2/m_1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Введем связи в матрицы сомножителей  $R'_{1z_2}$  и  $R'_{2z_2}$ . Для этого вместо элемента  $z_1$  в матрице  $R'_{1z_2}$  следует записать

$$\begin{aligned} \underline{z_1} &= \omega_3 z_1, \\ \sim z_1 &= \omega_1 z_1 \vee \omega_2 z_1 = (\omega_1 \vee \omega_2) z_1, \\ z_1 &= \omega_1 z_1, \\ \circ & \\ z_1 &= \omega_2 z_1 \vee \omega_3 z_1 = (\omega_2 \vee \omega_3) z_1, \\ \bullet & \end{aligned}$$

а в матрице  $R'_{2z_2}$  соответственно

$$\begin{aligned} \underline{z_1} &= v_1 z_1 \vee v_2 z_1 = (v_1 \vee v_2) z_1 = z_1, \\ \bullet & \\ z_1 &= v_1 z_1, \\ \circ \bullet & \\ z_1 &= v_2 z_1, \\ \sim \circ & \\ z_1 &= v_1 z_1 \vee v_2 z_1 = (v_1 \vee v_2) z_1 = z_1, \\ \sim \circ & \end{aligned}$$

так как  $v_1 \vee v_2 = 1$ , т. е. образует тождественно истинный набор состояний.

После введения связей в матрицы  $R'_{1z_2}$ ,  $R'_{2z_2}$  и объединения соответствующих матриц автономных автоматов в итоге получаем матрицы

$$R_1 = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} \omega_3 z_1 & (\omega_1 \vee \omega_2) z_1 \vee \omega_3 z_1 \\ \omega_1 (z_1 \vee z_2) & (\omega_2 \vee \omega_3) (z_1 \vee z_2) \end{matrix} \right\|$$

и

$$R_2 = \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} z_1/m_2 & 0 & v_2 z_2/m_1 \\ v_1 z_1/m_1 \vee v_2 z_2/m_1 & 0 & v_2 z_1/m_2 \\ z_2/m_1 & z_1/m_2 & 0 \end{matrix} \right\|,$$



которые определяют автоматы  $A_1$  и  $A_2$ , показанные соответственно на рис. 8.9, а, б.

Нами рассмотрена абстрактная декомпозиция произвольного автомата. Если исходный автомат  $A$  имеет ПКМС, в которой отсутствуют запрещенные переходы, то в результате декомпозиции получим автоматы  $A_1$  и

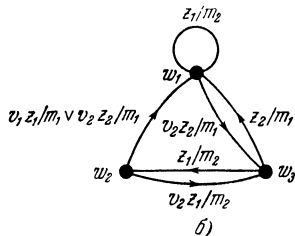
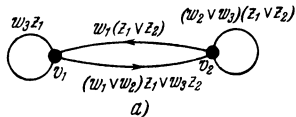


Рис. 8.9.

$A_2$ , между которыми нет ни одной связи. Если при построении ПКМС в  $A'$  возникает хотя бы один запрещенный переход, то при декомпозиции это приведет к образованию связи между автоматами  $A_1$  и  $A_2$ . Увеличение числа запрещенных переходов ведет к увеличению числа связей между автоматами  $A_1$  и  $A_2$ . Возникновение новых связей, в свою очередь, приводит к появлению новых переменных в функциях возбуждения элементарных автоматов, т. е. к усложнению комбинационной части авто-

мата. Отсюда следует, что нужно проводить декомпозицию автомата  $A$  на элементарные автоматы с минимальным числом связей между ними. Так как число связей зависит от числа запрещенных переходов в матрице соединений исходного автомата, то требуется таким образом изоморфно преобразовать матрицу соединений  $R$  автомата  $A$ , чтобы она содержала минимальное число запрещенных переходов.

Тривиальным алгоритмом нахождения ПКМС с минимальным числом запретов является алгоритм полного перебора в классе эквивалентности по отношению изоморфизма алфавита состояний автомата. Он заключается в следующем.

После приведения всех автономных матриц  $R_z$  автомата  $A$  с  $n$  состояниями к виду ПКМС подсчитываем число запрещенных переходов, которое обозначим через  $\phi_1$ . Применим произвольную подстановку  $t_1 \in T$ , где  $T$  — симметрическая группа подстановок алфавита состояний, к матрицам  $R_z$  и построим ПКМС  $R'$  с общим

числом запретов  $\varphi_2$ . Сравним  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Продолжая этот процесс, после  $n!$  сравнений найдем ПКМС, число запретов в которой составляет  $\varphi_{\min}$ . *Правильную клеточную матрицу соединений с минимальным числом запрещенных переходов  $\varphi_{\min}$  будем называть квазиправильной матрицей соединений.*

Очевидно, что алгоритм полного перебора малоэффективен. Покажем, что при поиске квазиправильной матрицы соединений можно сократить перебор по сравнению с полным, если воспользоваться следующей теоремой.

*Теорема 8.15. Для того чтобы матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  с  $n = k \cdot l$  состояниями привести к виду квазиправильной матрицы соединений  $R'$ , достаточно применить к матрице  $R$  не более  $\frac{n!}{k! l!} - 1$  подстановок  $t \in T$ .*

*Доказательство.* Пусть дан произвольный автомат  $A$  с  $n$  состояниями. Представим матрицу соединений  $R$  объединением автономных матриц  $R_z$  по буквам входного алфавита  $z \in Z$  и разобьем каждую из них на  $k^2$  клеток порядка  $l$ . Если матрицы  $R_z$  не являются правильными клеточными матрицами соединений, то, применяя стандартный прием, представим каждую из них правильной клеточной матрицей соединений с числом запретов в каждой из матриц  $R_z$ , равным  $\varphi_{0z}$ . Ясно, что общее число  $\varphi_0$  запретов в матрице  $R$  равно  $\varphi_0 = \sum_{z \in Z} \varphi_{0z}$ . Разложим матрицу  $R$  в произведение матриц  $R_1$  порядка  $k$  с числом отмеченных переходов каждой из автономных матриц  $R_{1z}$ , равным  $\varphi_{1z}$ , и  $R_2$  порядка  $l$  с числом отмеченных переходов в каждой из матриц  $R_{2z}$ , равным  $\varphi_{2z}$ . Пусть число различных меток равно  $m$ . Тогда легко показать, что

$$\varphi_{0z} = \frac{1}{m} (\varphi_{1z} \cdot \varphi_{2z})$$

и

$$\varphi_0 = \sum_{z \in Z} \frac{1}{m} (\varphi_{1z} \cdot \varphi_{2z}).$$

Применим к любой из матриц  $R_{1z}$ ,  $z \in Z$ , произвольную подстановку  $t_1 \in T_1$ , где  $T_1$  — симметрическая

группа подстановок порядка  $k!$ . Очевидно, что число  $\varphi_{1z}$  отмеченных переходов в матрице  $R_{1z}$  остается постоянным при любом изоморфном преобразовании матрицы  $R_{1z}$ . В матрице  $R_z$  это соответствует перестановке клеток порядка  $l$ . Далее, применение к матрице  $R_{2z}$  произвольной подстановки  $t_2 \in T_2$ , где  $|T_2| = l!$ , также не изменяет числа  $\varphi_{2z}$  отмеченных переходов в матрице  $R_{2z}$ . На уровне  $R_z$  применение  $t_2$  эквивалентно одновременному изоморфному преобразованию клеток порядка  $l$ .

Таким образом, любая подстановка  $t = t_1 \times t_2$ , т. е.  $t \in \tilde{T}$ , где  $\tilde{T} = T_1 \times T_2$ , не изменяет числа  $\varphi_{0z}$  запрещенных переходов в матрице  $R_z$ , а следовательно, и общего числа  $\varphi_0$  запретов матрицы  $R$ . Так как  $|\tilde{T}| = k!l!$ , то для нахождения матрицы  $R'$  с числом запретов  $\varphi_{\min}$  достаточно проверить по одной подстановке из каждого класса разложения симметрической группы  $T$  по подгруппе  $\tilde{T}$ , за исключением подстановок из  $t_0 \cdot \tilde{T}$ , где  $t_0$  — тождественная подстановка алфавита состояний. Этим теорема 8.15 доказана.

Из теоремы 8.15 вытекает следствие.

**Следствие 8.1.** *Для любого автомата  $A$  с  $n = k \cdot l$  состояниями существует  $k!l!$  подстановок  $t \in T$ , которые преобразуют матрицу соединений  $R$  в квазиправильную матрицу соединений  $R'$ .*

Использование теоремы 8.15 позволяет значительно сократить перебор по сравнению с полным, однако при большом  $n$  число подстановок, подлежащих перебору, достаточно велико. Поэтому предложим эвристический прием, ведущий к существенному сокращению перебора при поиске подстановки, приводящей матрицу соединений автомата к виду квазиправильной матрицы соединений.

Определим предварительно понятия *состояний с тождественными переходами и выходами*.

Два состояния  $q_i$  и  $q_j$  автомата  $A$  имеют *тождественные переходы по букве входного алфавита  $x$* , если по этой букве они образуют следующие переходы:

- а)  $q_i$  переходит в  $q_k$  и  $q_j$  переходит в  $q_k$ ;
- б)  $q_i$  переходит в  $q_k$ , а переход из  $q_j$  неопределен или наоборот;
- в) переход из  $q_i$  и  $q_j$  по букве  $x$  неопределен;

г)  $q_i, q_j$  переходят в  $q_i, q_j$  или в такую пару состояний, для которых ранее были найдены тождественные переходы.

Аналогично два состояния  $q_i$  и  $q_j$  имеют *тождественные выходы по букве входного алфавита  $x$* , если при подаче на вход автомата этой буквы на выходе его появляются следующие выходные сигналы:

а) в том случае, когда автомат находится в состоянии  $q_i$  или  $q_j$ , выходной сигнал равен  $y_k$ ;

б) в том случае, когда автомат находится в состоянии  $q_i$ , выходной сигнал равен  $y_k$ , а когда автомат находится в состоянии  $q_j$ , выходной сигнал неопределен или наоборот;

в) в том случае, когда автомат находится в состоянии  $q_i$  или  $q_j$ , выходной сигнал неопределен.

Понятия состояний с тождественными переходами и выходами дает возможность найти пару  $(\pi, \rho)$  разбиений алфавита состояний, эквивалентную подстановке, переводящей матрицу соединений  $R$  автомата  $A$  с  $n = k \cdot l$  состояниями в квазиправильную матрицу соединений следующим образом:

1) по таблице переходов или графу автомата определяем  $l$  классов  $\rho$  разбиения по  $k$  элементов в каждом классе. Для этого в один класс  $\rho_i$  разбиения  $\rho$  включаем такие  $k$  состояний, которые имеют максимальное число тождественных переходов и выходов по всем буквам входного алфавита;

2) определяем  $k$  классов  $\pi$  разбиения по  $l$  элементов в каждом классе так, чтобы число тождественных переходов и выходов в каждом классе  $\pi_j$  разбиения  $\pi$  было максимальным и выполнялось свойство  $\pi_j \cap \rho_i = \{q\}$ ;

3) попарное пересечение классов  $\rho$  и  $\pi$  разбиений определяет подстановку  $t \in T$ , обратную подстановке, переводящей матрицу соединений  $R$  в квазиправильную матрицу соединений;

4) подстановку  $t^{-1}$  применяем к матрице  $R$ .

Если при определении классов  $\pi, \rho$  разбиений в каждом классе окажутся тождественными все переходы, то матрица соединений подстановкой  $t^{-1}$  будет переведена в правильную клеточную матрицу соединений.

Предложенную методику декомпозиции произвольного абстрактного автомата на два более простых

автомата с минимальным числом связей между ними можно обобщить на случай декомпозиции автомата на элементарные абстрактные автоматы.

Сформулируем теперь алгоритм декомпозиции произвольного абстрактного автомата  $A$  на элементарные абстрактные автоматы с минимальным числом связей между ними. В качестве элементарных автоматов выбираем автоматы с двумя состояниями.

1°. Подсчитываем число  $n$  состояний автомата  $A$ . Если  $n = 2 \cdot l$ , то переходим к 2°. Если  $n \neq 2l$ , то добавляем одно изолированное состояние и переходим к 2°.

2°. Записываем матрицы соединений  $R_z$  автономных автоматов  $A_z$  и разбиваем их на 4 клетки. Если каждая матрица  $R_z$  является ПКМС, то переходим к 6°. Если хотя бы одна из матриц  $R_z$  не является ПКМС, то переходим к 3°.

3°. Используя эвристический прием, строим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, определяющую прямую  $t$  и обратную  $t^{-1}$  подстановки множества состояний автомата  $A$ . Переходим к 4°.

4°. Применяем подстановку  $t^{-1}$  к матрице  $R$  и преобразуем ее в квазиправильную матрицу соединений. Если  $\varphi_{\min} = 0$ , то переходим к 6°. В противном случае к 5°.

5°. Представляем квазиправильную матрицу соединений композицией матриц  $R_1 = \bigcup_{z \in Z} R_{1z}$  и  $R_2 = \bigcup_{z \in Z} R_{2z}$ .

Матрица соединений  $R_1$  является матрицей соединений элементарного абстрактного автомата  $A_1$ . Переходим к 7°.

6°. Представляем полученную ПКМС произведением матриц  $R_1$  и  $R_2$  автоматов  $A_1$  и  $A_2$ . Автомат  $A_1$  представляет собой элементарный абстрактный автомат. Переходим к 7°.

7°. Если число состояний автомата  $A_2$  равно  $l = 2$ , то переходим к 8°. Если  $l > 2$ , то переходим к 1° и проводим декомпозицию автомата  $A_2$  так, как это сделано с автоматом  $A$ .

8°. Учитывая примененные подстановки, закодируем соответствующие переходы в элементарных абстрактных автоматах наборами полученных элементарных автоматов и запишем матрицы соединений элементарных абст-

рактных автоматов с учетом перекодировок. Конец работы алгоритма.

Проиллюстрируем работу этого алгоритма на примере.

**Пример 8.5.** Пусть дан автомат Мили  $A$ , рассмотренный в предыдущем примере. Требуется провести декомпозицию автомата  $A$  на элементарные автоматы с минимальным числом связей между ними.

Если привести матрицу соединений  $R$  к виду ПКМС с запретами, то она будет содержать 15 запрещенных переходов.

Используя эвристический прием, по графу автомата  $A$  построим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества состояний, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, & \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, \\ \rho_1 &= \{q_1, q_2\}, & \rho_2 &= \{q_3, q_4\}, & \rho_3 &= \{q_5, q_6\}, \\ \pi_1 &= \{q_2, q_4, q_5\}, & \pi_2 &= \{q_1, q_3, q_6\}. \end{aligned}$$

Пересекая классы  $\pi$  и  $\rho$  разбиений, получим подстановку

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_2 & q_4 & q_5 & q_1 & q_3 & q_6 \end{pmatrix}.$$

Применяя обратную подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_4 & q_1 & q_5 & q_2 & q_3 & q_6 \end{pmatrix}$$

к матрице  $R$  и приводя ее к правильному виду, получим квазиправильную матрицу соединений

$R' =$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & z_1/m_1 \vee \overline{z_1/m_2} & 0 & 0 & \overline{z_1/m_1} \vee \overline{z_1/m_2} & 0 \\ \overline{z_1/m_2} & \overline{z_2/m_1} & 0 & z_1/m_2 & z_2/m_1 & 0 \\ 0 & z_2/m_1 & \overline{z_1/m_2} & 0 & \overline{z_2/m_1} & z_1/m_2 \\ \hline 0 & z_1/m_2 \vee \overline{z_1/m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1/m_2 & z_2/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2/m_1 & z_1/m_2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

которая содержит 8 запретов. Представим автономные матрицы  $R'_{z_1}$  и  $R'_{z_2}$  произведением двух матриц с отмеченными переходами

$$R'_{z_1} = R'_{1z_1} \times R'_{2z_1} = \begin{vmatrix} v_1 & \underline{z_1} & \underline{z_1} \\ v_2 & \underline{z_1} & 0 \\ & \circ & \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & z_1/m_1 \vee z_1/m_2 & 0 \\ \omega_2 & z_1/m_2 & 0 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 & z_1/m_2 \end{vmatrix},$$

$$R'_{z_2} = R'_{1z_2} \times R'_{2z_2} = \begin{vmatrix} v_1 & \underline{z_2} & \underline{z_2} \\ v_2 & \underline{z_2} & 0 \\ & & \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & z_2/m_1 & 0 \\ \omega_3 & 0 & z_2/m_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вводя связи в матрицы сомножители и объединяя их по буквам входного алфавита, получим матрицы соединений  $R_1$  и  $R_2$ , которые имеют вид

$$R_1 = \begin{vmatrix} v_1 & \omega_1 z_1 \vee \omega_3 z_2 & (\omega_2 \vee \omega_3) z_1 \vee \omega_2 z_2 \\ v_2 & z_1 \vee z_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & v_1 z_1/m_1 \vee v_2 z_1/m_2 & 0 \\ \omega_2 & z_1/m_2 & z_2/m_1 & 0 \\ \omega_3 & 0 & z_2/m_1 & z_1/m_2 \end{vmatrix}.$$

Проведем теперь декомпозицию автомата  $A_2$ , заданного матрицей соединений  $R_2$ . Для этого дополним матрицу соединений  $R_2$  изолированным состоянием  $w_4$ . Используя эвристический прием, по графу автомата  $A_2$  находим пару  $(\pi', \rho')$  разбиений множества состояний

$$\begin{aligned} \pi' &= \{\pi'_1, \pi'_2\}, & \rho' &= \{\rho'_1, \rho'_2\}, \\ \pi'_1 &= \{w_1, w_4\}, & \pi'_2 &= \{w_2, w_3\}, \\ \rho'_1 &= \{w_1, w_2\}, & \rho'_2 &= \{w_3, w_4\}, \end{aligned}$$

которая эквивалентна подстановке

$$t_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1 & w_4 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку

$$t_1^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 & w_2 \end{pmatrix}$$

к дополненной матрице соединений  $R_2$  и вводя запрещенные переходы, получим квазиправильную матрицу соединений

$$R'_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & v_1 z_1 / m_1 \vee v_2 z_1 / m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 / m_2 & 0 & z_2 / m_1 \vee \boxed{z_1 / m_2} & 0 \\ 0 & \boxed{z_1 / m_2} & z_2 / m_1 & z_1 / m_2 \end{array} \right\|.$$

Проводя разложение матрицы  $R'_2$ , приходим к матрицам соединений  $R_{21}$  и  $R_{22}$  элементарных абстрактных

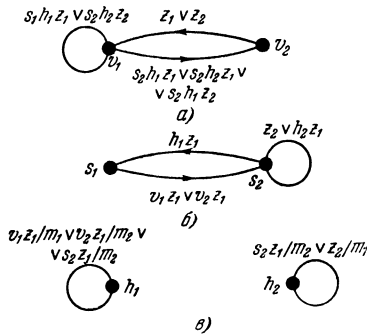


Рис. 8.10.

автоматов  $A_{21}$  и  $A_{22}$ , которые имеют вид

$$R_{21} = \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 0 & v_1 z_1 \vee v_2 z_1 \\ h_1 z_1 & z_2 \vee h_2 z_1 \end{array} \right\|,$$

$$R_{22} = \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} v_1 z_1 / m_1 \vee v_2 z_1 / m_2 \vee s_2 z_1 / m_2 & 0 \\ 0 & s_2 z_1 / m_2 \vee z_2 / m_1 \end{array} \right\|.$$

Учитывая подстановку  $t_1$ , перекодируем состояния автомата  $A_2$  следующим образом:

$$w_1 = (s_1, h_1), \quad w_2 = (s_2, h_1), \quad w_3 = (s_2, h_2), \quad w_4 = (s_1, h_2).$$

Тогда матрицу соединений  $R_1$  элементарного абстрактного автомата  $A_1$  можно переписать в форме

$$R_1 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} s_1 h_1 z_1 \vee s_2 h_2 z_2 & s_2 h_1 z_1 \vee s_2 h_2 z_1 \vee s_2 h_1 z_2 \\ z_1 \vee z_2 & 0 \end{array} \right\|.$$



В итоге построена декомпозиция абстрактного автомата Мили  $A$  на три элементарных абстрактных автомата  $A_1, A_{21}, A_{22}$ , показанных соответственно на рис. 8.10,  $a, б, в$ , каждый из которых содержит два состояния.

### § 7. Декомпозиция автоматов с выделением заданных стандартных автоматов

При синтезе автоматов в однородных вычислительных средах [153, 375], построенных на основе больших интегральных схем, возникает следующая задача. Пусть имеется сложный абстрактный автомат, который необходимо реализовать в вычислительной среде, и задан один или несколько стандартных автоматов (например, большая интегральная схема), из которых строится вычислительная среда. Требуется определить возможность реализации сложного автомата в вычислительной среде с помощью последовательного, параллельного или смешанного соединения стандартных автоматов. Если это невозможно, то необходимо выделить из исходного сложного автомата наибольшее число стандартных автоматов так, чтобы оставшийся нестандартный автомат совместно с выделенными автоматами функционировал бы как исходный автомат. Эту задачу будем называть *декомпозицией автоматов с выделением заданных стандартных автоматов*.

Если рассматривать полугруппы автоматов по различным операциям, которые содержательно соответствуют различным видам соединений автоматов между собой, то задачу декомпозиции автоматов с выделением стандартных автоматов формально можно трактовать как задачу делимости в полугруппах автоматов и сводить, таким образом, к решению уравнений в полугруппах абстрактных автоматов.

Сравнительно простое решение задачи делимости найдено в полугруппе  $\mathfrak{A}_*$  автоматов по операции суперпозиции. Решая суперпозиционные уравнения в этой полугруппе, мы тем самым решаем задачу последовательной декомпозиции с выделением заданных автоматов. Использование теорем 8.11—8.14 позволяет сводить задачи параллельной декомпозиции с выделением стандартных автоматов к решению суперпозиционных уравнений.

Рассмотрим вначале задачу *последовательной декомпозиции с выделением стандартных автоматов*. Решение этой задачи сводится к решению *суперпозиционных уравнений* вида

$$A * G = B, \tag{8.5}$$

$$H * C = B, \tag{8.6}$$

где  $B$  — исходный автомат,  $A$  и  $C$  — заданные стандартные автоматы, а  $G$  и  $H$  — неизвестные автоматы.

Пусть  $\mathfrak{A}_*$  — бесконечная полугруппа абстрактных автоматов Мили. Для произвольного автомата  $A \in \mathfrak{A}_*$ , индуцирующего частичное отображение множества слов  $\mathfrak{S}(X)$  алфавита  $X$  на множество слов  $\mathfrak{S}(Y)$  алфавита  $Y$ , можно определить левый  $E_X$  и правый  $E_Y$  единичные автоматы (см. гл. VII, § 3) такие, что

$$\left. \begin{aligned} E_X * A &= A, \\ A * E_Y &= A. \end{aligned} \right\} \tag{8.7}$$

Для автомата  $A \in \mathfrak{A}_*$ , индуцирующего биективное отображение  $\mathfrak{S}(X)$  на  $\mathfrak{S}(Y)$ , справедливо

$$\left. \begin{aligned} A * A^{-1} &= E_X, \\ A^{-1} * A &= E_Y. \end{aligned} \right\} \tag{8.8}$$

Если автомат  $A$  индуцирует биективное отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  на себя, то

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E. \tag{8.9}$$

Сформулируем теперь две теоремы, из которых следует метод решения суперпозиционных уравнений.

**Теорема 8.16.** Пусть автомат  $A$  индуцирует биективное отображение  $\varphi$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_1)$ , а автомат  $B$  индуцирует произвольное отображение  $\eta$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ . В этом случае автомат  $G$ , индуцирующий отображение  $\psi$  множества  $\mathfrak{S}(Y_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ , такой, что  $A * G = B$ , существует и однозначно определяется по формуле

$$G = A^{-1} * B. \tag{8.10}$$

**Доказательство.** Пусть  $B = A * G$ . Для любого  $G$  из (8.7) и (8.8) справедливо  $G = A^{-1} * A * G$ ,

Следовательно, учитывая ассоциативность суперпозиции,  $G = A^{-1} * B$ . Покажем, что найденное  $G$  есть решение уравнения (8.5). Пусть  $G = A^{-1} * B$ . Имеем  $A * A^{-1} * B = B$ . Отсюда  $A * G = B$ . Докажем единственность. Пусть уравнение (8.5) имеет два разных решения  $G$  и  $G_1$ , т. е.  $A * G = B$  и  $A * G_1 = B$ . Отсюда  $A^{-1} * A * G = A^{-1} * B$  и  $A^{-1} * A * G_1 = A^{-1} * B$ . Теперь из ассоциативности суперпозиции, соотношений (8.7) и (8.8) получаем  $E * G = A^{-1} * B$  и  $E * G_1 = A^{-1} * B$ . Поэтому  $G = G_1$ . Этим теорема 8.16 доказана.

**Теорема 8.17.** Пусть автомат  $C$  индуцирует биективное отображение  $\psi$  множества  $\mathfrak{S}(X_2)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ , а автомат  $B$  индуцирует произвольное отображение  $\eta$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ . В этом случае автомат  $H$ , индуцирующий отображение  $\varphi$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(X_2)$ , такой, что  $H * C = B$ , существует и однозначно определяется по формуле

$$H = B * C^{-1}. \quad (8.11)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.16.

Из (8.9) и теорем 8.16 и 8.17 вытекает следствие.

**Следствие 8.2.** Множество абстрактных автоматов  $\mathfrak{D}$ , индуцирующих биективное отображение множества  $\mathfrak{S}(X)$  алфавита  $X$  на себя, по операции суперпозиции образует группу  $\mathfrak{D}_*$ .

Это предложение независимо от теорем 8.16 и 8.17 было доказано в §3 гл. VII.

Проиллюстрируем решение уравнений типа (8.5) на примере.

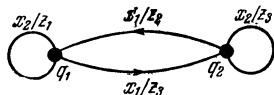


Рис. 8.11.

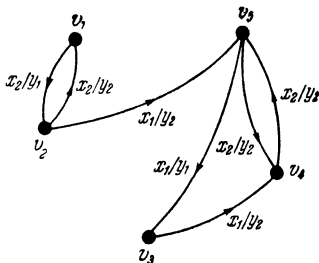


Рис. 8.12.

**Пример 8.6.** Даны автоматы  $A$  и  $B$ , показанные на рис. 8.11- и 8.12. Найти автомат  $G$ , являющийся решением уравнения  $A * G = B$ ,

Запишем матрицы соединений  $R_A$  и  $R_B$  автоматов  $A$  и  $B$ :

$$R_A = \begin{vmatrix} x_2/z_1 & x_1/z_3 \\ x_1/z_2 & x_2/z_3 \end{vmatrix},$$

$$R_B = \begin{vmatrix} 0 & x_2/y_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2/y_2 & 0 & 0 & 0 & x_1/y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2/y_2 \\ 0 & 0 & x_1/y_1 & x_2/y_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Определим матрицу соединений автомата  $A^{-1}$ . Получим

$$R_{A^{-1}} = \begin{vmatrix} z_1/x_2 & z_3/x_1 \\ z_2/x_1 & z_3/x_2 \end{vmatrix}.$$

По формуле (8.10) находим автомат  $G$ , матрица соединений которого имеет вид

$$R_G = \begin{vmatrix} 0 & z_1/y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1/y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3/y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3/y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1/y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1/y_2 & 0 & 0 & 0 & z_3/y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3/y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_2/y_2 & z_3/y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2/y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3/y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3/y_2 \end{vmatrix}.$$

После минимизации получим

$$R_G = \begin{vmatrix} 0 & z_1/y_1 & 0 \\ z_1/y_2 & 0 & z_3/y_2 \\ 0 & z_3/y_2 & z_2/y_1 \end{vmatrix}.$$

Графоид автомата  $G$  показан на рис. 8.13. Легко проверить, что  $A * G = B$ .

При решении уравнений (8.5) и (8.6) мы полагали, что заданные стандартные автоматы реализуют биективное отображение. Поскольку они могут индуцировать произвольное отображение, то необходимо рассматривать случай сюръективного отображения.

Пусть автомат  $A$  индуцирует сюръективное отображение множества слов  $\mathfrak{S}(X)$  на множество слов  $\mathfrak{S}(Y)$ . Матрица соединений  $R_A$  такого автомата содержит в какой-либо строке такие пары вход — выход, которые имеют одинаковые выходные сигналы. Поэтому матрица соединений  $R_{A^{-1}}$  не будет автоматной матрицей.

Для автомата  $A$  введем понятие *иссечения*. Иссечением автомата  $A$  называется такой автомат  $A^0$ , для которого выполняется соотношение

$$A^0 * A = E_Y. \quad (8.12)$$

Чтобы найти матрицу соединений  $R_{A^0}$  автомата  $A^0$ , необходимо в матрице  $R_{A^{-1}}$  произвольным образом исключить неоднозначные переходы. Очевидно, что полученные иссечения неоднозначно.

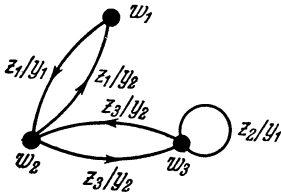


Рис. 8.13.

Сформулируем теоремы для случая, когда заданный стандартный автомат реализует сюръективное отображение.

**Теорема 8.18.** Пусть автомат  $A$  индуцирует сюръективное отображение  $\varphi$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_1)$ , а автомат  $B$  индуцирует произвольное отображение  $\eta$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ . Если существует автомат  $A^0$  такой, что  $A * A^0 = E_X$ , то автомат  $G$ , индуцирующий отображение  $\psi$  множества  $\mathfrak{S}(Y_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ , такой, что  $A * G = B$ , существует и определяется выражением

$$G = A^0 * B. \quad (8.13)$$

**Теорема 8.19.** Пусть автомат  $C$  индуцирует сюръективное отображение  $\psi$  множества  $\mathfrak{S}(X_2)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ , а автомат  $B$  индуцирует произвольное отображение  $\eta$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(Y_2)$ . Если существует автомат  $C^0$  такой, что  $C * C^0 = E_{X_2}$ , то автомат  $H$ , индуцирующий отображение  $\varphi$  множества  $\mathfrak{S}(X_1)$  на  $\mathfrak{S}(X_2)$ , такой, что  $H * C = B$ , существует и определяется выражением

$$H = B * C^0. \quad (8.14)$$

Проведем доказательство теоремы 8.19. Пусть  $H * C = B$ . Если  $C * C^0 = E_{X_2}$ , то  $H * C * C^0 = B * C^0$ . Тогда, учитывая (8.7), получим  $H = B * C^0$ . Покажем, что

найденное  $H$  является решением уравнения (8.6). Если  $H = B * C^0$ , то  $H * C = B * C^0 * C$ . Используя ассоциативность суперпозиции и (8.12), получим  $B = H * C$ . Этим теорема доказана.

Заметим, что найденные в соответствии с теоремами 8.18 и 8.19 решения не являются единственными, так как не единственны иссечения автоматов  $A$  и  $C$ .

Покажем на примере решение уравнения вида (8.6), полагая, что исходный стандартный автомат индуцирует сюръективное отображение.

Пример 8.7. Даны автоматы  $B$  и  $C$ , показанные соответственно на рис. 8.14 и 8.15. Найти автомат  $H$ , который будучи последовательно соединен с автоматом  $C$ , совместно с ним функционировал бы как автомат  $B$ .

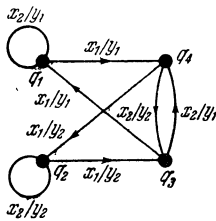


Рис. 8.14.

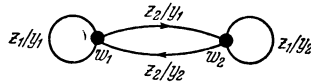


Рис. 8.15.

Запишем матрицы соединений  $R_B$  и  $R_C$  автоматов  $B$  и  $C$ :

$$R_B = \begin{vmatrix} x_2/y_1 & 0 & 0 & x_1/y_1 \\ 0 & x_2/y_2 & x_1/y_2 & 0 \\ x_1/y_1 & 0 & 0 & x_2/y_1 \\ 0 & x_1/y_2 & x_2/y_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R_C = \begin{vmatrix} z_1/y_1 & z_2/y_1 \\ z_2/y_2 & z_1/y_2 \end{vmatrix}.$$

Найдем иссечение  $C^0$  автомата  $C$ , матрица соединений которого имеет вид

$$R_{C^0} = \begin{vmatrix} 0 & y_1/z_2 \\ 0 & y_2/z_1 \end{vmatrix}.$$

Проверяем выполнение условия  $C * C^0 = E_z$ . Беря суперпозицию  $R_C$  и  $R_{C^0}$ , после минимизации получим

$$R_{Ez} = \begin{vmatrix} z_1/z_1 & \\ & z_2/z_2 \end{vmatrix}.$$

По формуле (8.14) находим автомат  $H$ , матрица соединений которого после минимизации принимает вид

$$R_H = \begin{vmatrix} x_2/z_1 & x_1/z_2 \\ x_1/z_1 & x_2/z_2 \end{vmatrix}.$$

Легко убедиться, что  $H * C = B$ . Автомат  $H$  показан на рис. 8.16.

Рассмотрим теперь *декомпозицию с выделением стандартных автоматов*, когда выделяемый стандартный автомат и оставшаяся нестандартная часть автомата работают *параллельно* друг с другом. Эту задачу можно трактовать как задачу *решения уравнений* вида

$$G \times A \sim A \times G \sim B, \quad (8.15)$$

$$H \otimes A \sim A \otimes H \sim B, \quad (8.16)$$

$$K + A \sim A + K \sim B, \quad (8.17)$$

$$N \circ A \sim A \circ N \sim B, \quad (8.18)$$

где  $B$  — исходный автомат,  $A$  — заданный стандартный автомат, а  $G, H, K, N$  — неизвестные автоматы.

Вообще говоря, используя только операции, записанные в уравнениях (8.15) — (8.18), нельзя предложить

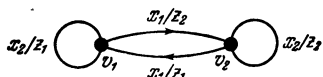


Рис. 8.16.

метод решения этих уравнений, за исключением того случая, когда заведомо известно, что исходный автомат принадлежит подполугруппе разложимых автоматов по

данной операции, да и то этот метод сводится к полному перебору в классе изоморфизма автоматов.

Доказанные в предыдущем параграфе теоремы 8.11 — 8.14 позволяют сводить уравнения (8.15) — (8.18) к *суперпозиционным уравнениям* и определять случаи, когда в результате решения полученных суперпозиционных уравнений находим *решения уравнений по другим операциям*.

Действительно, если имеется исходный автомат  $B = (Z, Q, M, q_1 \in Q, U(z \in Z/m \in M))$  и задан стандартный автомат  $A = (Y, W, T, \omega_1 \in W, P(y \in Y/t \in T))$ , то для определения автомата  $G = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$ , который является решением уравнения

(8.15), на основании теоремы 8.11 можно перейти к двум суперпозиционным уравнениям вида

$$(G \times E_Y) * (E_L \times A) = B, \tag{8.19}$$

$$(A \times E_X) * (E_T \times G) = B, \tag{8.20}$$

т. е.

$$G' * A' = B, \tag{8.19'}$$

$$A'' * G'' = B. \tag{8.20'}$$

Решая уравнение (8.19'), находим автомат  $G'$ . Если автомат  $G'$  может быть представлен в виде  $G' = G \times E_Y$ , то автомат  $G$  — решение уравнения (8.15).

Если автомат  $G'$  не представим в виде  $G' = G \times E_Y$ , то в результате решения уравнения (8.19') из автомата



Рис. 8.17.

$B$  выделен стандартный автомат  $A$ , который совместно с автоматом  $G'$  работает так, как это показано на рис. 8.17.

Если решается уравнение (8.20') и автомат  $G''$  можно представить в виде  $G'' = E_T \times G$ , то автомат  $G$  является решением уравнения (8.15). В том случае, когда автомат  $G''$  нельзя представить в виде  $G'' = E_T \times G$ , то



Рис. 8.18.

в результате решения уравнения (8.20') из автомата  $B$  выделяется стандартный автомат  $A$ , который совместно с оставшейся частью  $G''$  работает так, как это показано на рис. 8.18.



Пример 8.8. Пусть имеется автомат  $B$ , матрица соединений которого имеет вид

$$R_B = \begin{vmatrix} z_1/m_1 & z_2/m_2 & 0 & 0 & z_3/m_3 & z_4/m_4 \\ z_2/m_1 & z_1/m_2 & 0 & 0 & z_4/m_3 & z_3/m_4 \\ z_3/m_1 & z_4/m_2 & 0 & 0 & z_1/m_3 & z_2/m_4 \\ z_4/m_1 & z_3/m_2 & 0 & 0 & z_2/m_3 & z_1/m_4 \\ 0 & 0 & z_1/m_1 & z_2/m_2 & z_3/m_3 & z_4/m_4 \\ 0 & 0 & z_2/m_1 & z_1/m_2 & z_4/m_3 & z_3/m_4 \end{vmatrix},$$

и задан стандартный автомат  $A$  с матрицей соединений

$$R_A = \begin{vmatrix} y_1/t_1 & y_2/t_2 \\ y_2/t_1 & y_1/t_2 \end{vmatrix}.$$

Необходимо найти автомат  $G = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$ , параллельная одновременная работа которого с автоматом  $A$  эквивалентна функционированию автомата  $B$ . Другими словами, необходимо найти автомат, который является решением уравнения (8.15).

Так как  $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ,  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  и  $Y = \{y_1, y_2\}$ ,  $T = \{t_1, t_2\}$ , а для того, чтобы автомат  $G$  был решением уравнения (8.15), необходимо выполнение условий  $Z \subseteq X \times Y$  и  $M \subseteq L \times T$ , предположим, что входной и выходной алфавиты автомата  $G$  соответственно равны  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $L = \{l_1, l_2\}$ .

Определим  $R_{A'}$ . Обозначим  $S = L \times Y = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ,  $M = L \times T = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  в естественной упорядоченности пар. Тогда

$$R_{A'} = R_{E_L} \times R_A = \begin{vmatrix} s_1/m_1 \vee s_3/m_3 & s_2/m_2 \vee s_4/m_4 \\ s_2/m_1 \vee s_4/m_3 & s_1/m_2 \vee s_3/m_4 \end{vmatrix}.$$

Матрица соединений  $R_{A'}^{-1}$  автомата, обратного автомату  $A'$ , имеет вид

$$R_{A'}^{-1} = \begin{vmatrix} m_1/s_1 \vee m_3/s_3 & m_2/s_2 \vee m_4/s_4 \\ m_1/s_2 \vee m_3/s_4 & m_2/s_1 \vee m_4/s_3 \end{vmatrix}.$$

В результате решения суперпозиционного уравнения (8.19') по формуле (8.11) получим матрицу соединений

$$R_G = \begin{vmatrix} z_1/s_1 \vee z_2/s_2 & 0 & z_3/s_3 \vee z_4/s_4 \\ z_3/s_1 \vee z_4/s_2 & 0 & z_1/s_3 \vee z_2/s_4 \\ 0 & z_1/s_1 \vee z_2/s_2 & z_3/s_3 \vee z_4/s_4 \end{vmatrix},$$

которую, как нетрудно видеть, можно представить произведением матриц

$$R_G = \begin{vmatrix} x_1/l_1 & 0 & x_2/l_2 \\ x_2/l_1 & 0 & x_1/l_2 \\ 0 & x_1/l_1 & x_2/l_2 \end{vmatrix}$$

и

$$R_{E_Y} = \| y_1/y_1 \vee y_2/y_2 \|.$$

Таким образом, найдено решение уравнения (8.15), которое определяет автомат  $G$ . Легко проверить, что

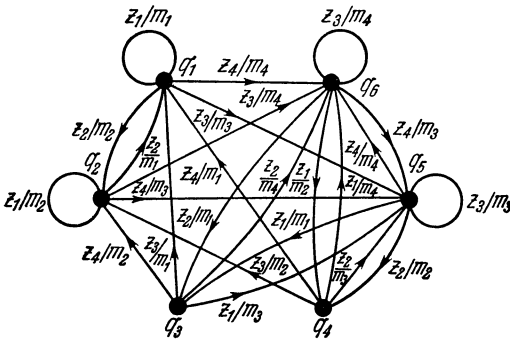


Рис. 8.19.

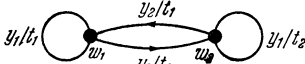


Рис. 8.20.

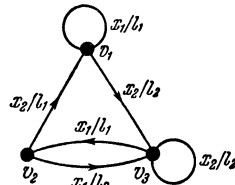


Рис. 8.21.

$G \times A \sim B$ . Автоматы  $B$ ,  $A$  и  $G$  показаны соответственно на рис. 8.19, 8.20 и 8.21.

Пусть необходимо найти решение уравнения (8.16), в котором  $B = (X, Q, M, q_1 \in Q, U(x \in X/m \in M))$  — исходный автомат,  $A = (X, W, T, w_1 \in W, P(x \in X/t \in T))$  — заданный стандартный автомат, а  $H = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X/l \in L))$  — неизвестный автомат.

На основании теоремы 8.12 от уравнения (8.16) можно перейти к двум уравнениям

$$(H \otimes E_X) * (E_L \times A) = B, \quad (8.21)$$

$$(A \otimes E_X) * (E_T \times H) = B, \quad (8.22)$$

т. е.

$$H' * A' = B, \quad (8.21')$$

$$A'' * H'' = B. \quad (8.22')$$

Решая суперпозиционное уравнение (8.21'), находим автомат  $H'$ . Если автомат  $H'$  можно представить в виде  $H' = H \otimes E_X$ , то найденный таким образом автомат  $H$  является решением уравнения (8.16). Если из автомата



Рис. 8.22.

$H'$  нельзя извлечь  $E_X$ , то в результате решения (8.21') из автомата  $B$  выделен стандартный автомат  $A$ , который совместно с автоматом  $H'$  работает так, как это показано на рис. 8.22.

Аналогично рассуждая, если при решении уравнения (8.22') из автомата  $H''$  можно выделить  $E_T$  по формуле  $H'' = E_T \times H$ , то автомат  $H$  — решение уравнения (8.16). В противном случае при решении уравнения

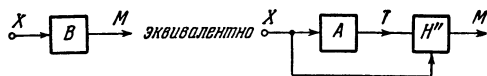


Рис. 8.23.

(8.22') получаем декомпозицию автомата  $B$  на заданный автомат  $A$  и автомат  $H''$ , совместная работа которых, показанная на рис. 8.23, эквивалентна функционированию исходного автомата  $B$ .

Далее на основании теоремы 8.13 от уравнения (8.17) можно перейти к уравнениям

$$(K + E_Y) * (E_L + A) = B, \quad (8.23)$$

$$(A + E_X) * (E_T + K) = B, \quad (8.24)$$

т. е.

$$K' * A' = B, \tag{8.23'}$$

$$A'' * K'' = B. \tag{8.24'}$$

Решением уравнения (8.23') является автомат  $K'$ . Если  $K'$  можно представить в виде  $K' = K + E_Y$ , то автомат  $K$  — решение уравнения (8.17). Если из  $K'$  нельзя извлечь  $E_Y$ , то в результате решения уравнения (8.23')



Рис. 8.24.

из автомата  $B$  выделяем стандартный автомат  $A$ , который совместно с автоматом  $K'$  работает так, как показано на рис. 8.24.

Если в результате решения уравнения (8.24') автомат  $K''$  нельзя представить в виде  $K'' = E_T + K$ , то получаем декомпозицию автомата  $B$  на стандартный автомат  $A$  и автомат  $K''$ , совместная работа которых, показанная на рис. 8.25, эквивалентна работе автомата  $B$ .



Рис. 8.25.

**Пример 8.9.** Пусть имеется автомат  $B$ , матрица соединений которого имеет вид

$$R_B = \left\| \begin{array}{cccccc} y_1/t_1 & y_2/t_2 & x_1/l_2 & 0 & x_2/l_2 & 0 \\ y_2/t_2 & y_1/t_1 & 0 & x_1/l_2 & 0 & x_2/l_2 \\ x_2/l_1 & 0 & y_1/t_1 & y_2/t_2 & x_1/l_2 & 0 \\ 0 & x_2/l_1 & y_2/t_2 & y_1/t_1 & 0 & x_1/l_2 \\ 0 & 0 & x_1/l_1 & 0 & x_2/l_2 \vee y_1/t_1 & y_2/t_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/l_1 & y_2/t_2 & x_2/l_2 \vee y_1/t_1 \end{array} \right\|,$$

и задан стандартный автомат  $A$  с матрицей соединений

$$R_A = \left\| \begin{array}{cc} y_1/t_1 & y_2/t_2 \\ y_2/t_2 & y_1/t_1 \end{array} \right\|.$$

Необходимо найти автомат  $K = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X | l \in L))$ , который является решением уравнения (8.17).

Так как  $Z = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ ,  $M = \{l_1, l_2, t_1, t_2\}$ , а  $Y = \{y_1, y_2\}$ ,  $T = \{t_1, t_2\}$ , то для того, чтобы автомат  $K$  был

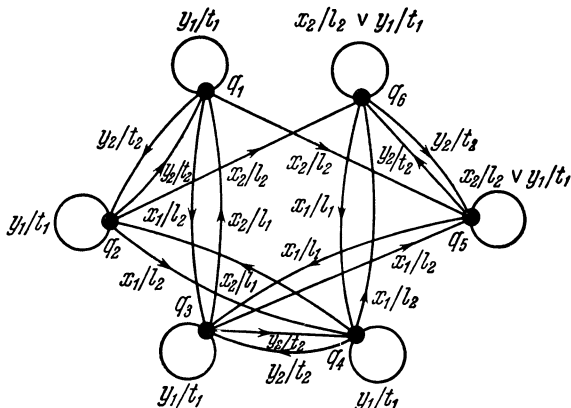


Рис. 8.26.

решением уравнения (8.17), необходимо  $Z = X \cup Y$ ,  $M = T \cup L$ . Поэтому положим, что  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $L = \{l_1, l_2\}$ .

На основании теоремы 8.13 находим матрицу соединений  $R_{A'}$  автомата  $A'$ . Получим

$$R_{A'} = R_{E_L} + R_A = \begin{vmatrix} l_1/l_1 \vee l_2/l_2 \vee y_1/t_1 & y_2/t_2 \\ y_2/t_2 & l_1/l_1 \vee l_2/l_2 \vee y_1/t_1 \end{vmatrix}.$$

Решая суперпозиционное уравнение (8.23') по формуле (8.11), находим матрицу соединений  $R_{K'}$  автомата  $K'$ , которая имеет вид

$$R_{K'} = \begin{vmatrix} y_1/y_1 \vee y_2/y_2 & x_1/l_2 & x_2/l_2 \\ x_2/l_1 & y_1/y_1 \vee y_2/y_2 & x_1/l_2 \\ 0 & x_1/l_1 & y_1/y_1 \vee y_2/y_2 \vee x_2/l_2 \end{vmatrix}.$$

Матрицу  $R_{K'}$  представляем суммой матриц  $R_K$  и  $R_{E_Y}$ . Получаем матрицы

$$R_K = \begin{vmatrix} 0 & x_1/l_2 & x_2/l_2 \\ x_2/l_1 & 0 & x_1/l_2 \\ 0 & x_1/l_1 & x_2/l_2 \end{vmatrix}$$

и

$$R_{E_Y} = \| y_1/y_1 \vee y_2/y_2 \|,$$

которые определяют автоматы  $K$  и  $E_Y$ .

Таким образом, результатом решения уравнения (8.17) является автомат  $K$ . Легко проверить, что

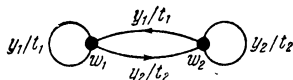


Рис. 8.27.

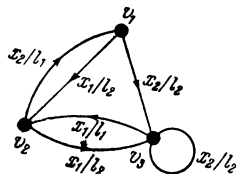


Рис. 8.28.

$K + A \sim B$ . Автоматы  $B$ ,  $A$  и  $K$  показаны соответственно на рис. 8.26, 8.27 и 8.28.

Наконец, пусть требуется решить композиционное уравнение вида (8.18), в котором  $B = (Z, Q, M, q_1 \in Q,$

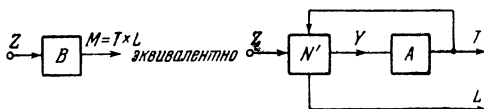


Рис. 8.29.

$U(z \in Z/m \in M)$  — исходный автомат,  $A = (Y, W, T, w_1 \in W, P(y \in Y, l \in L/t \in T))$  — заданный стандартный

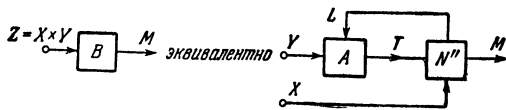


Рис. 8.30.

автомат, а  $N = (X, V, L, v_1 \in V, F(x \in X, t \in T/l \in L))$  — неизвестный автомат.

На основании теоремы 8.14 от уравнения (8.18) можно перейти к уравнениям

$$(N \circ E_Y \circ E_T \circ E_L) * (A \circ E_L \circ E_T) = B, \quad (8.25)$$

$$(A \circ E_X \circ E_T \circ E_L) * (N \circ E_L \circ E_T) = B, \quad (8.26)$$

т. е.

$$N' * A' = B, \quad (8.25')$$

$$A'' * N'' = B. \quad (8.26')$$

Автомат  $N'$  является решением уравнения (8.25'). Если  $N'$  можно представить композицией автоматов  $N' = N \circ E_Y \circ E_T \circ E_L$ , то автомат  $N$  — решение уравнения (8.18). Если из  $N'$  нельзя извлечь  $E_Y$ ,  $E_T$  и  $E_L$ , то в результате решения уравнения (8.25') из автомата  $B$  выделяем стандартный автомат  $A$ , который совместно с автоматом  $N'$  работает так, как показано на рис. 8.29.

Если в результате решения уравнения (8.26') автомат  $N''$  нельзя представить в виде  $N'' = N \circ E_L \circ E_T$ , то получаем декомпозицию автомата  $B$  на стандартный автомат  $A$  и автомат  $N''$ , совместная работа которых эквивалентна работе автомата  $B$  и показана на рис. 8.30.

## ГЛАВА IX

# СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ АВТОМАТОВ

### § 1. Канонический метод синтеза автоматов

В этой главе автоматы будут рассматриваться на структурном уровне или, другими словами, будет изучаться функционирование автоматов на уровне построения сложных схем из более простых. Основной задачей структурного синтеза автоматов является построение *функциональной (структурной) схемы* сложного автомата из более простых автоматов, которые называют *элементарными* автоматами, по графу исходного автомата. Более точно задачу можно сформулировать следующим образом [113]. *Пусть задано некоторое конечное множество элементарных автоматов и задан произвольный конечный автомат  $A$ . Необходимо найти алгоритм, позволяющий по заданному графу или матрице соединений автомата строить некоторую композицию\*) элементарных автоматов так, чтобы полученный в результате композиции автомат индуцировал отображение, совпадающее с отображением или продолжающее отображение, индуцируемое автоматом  $A$ .*

Естественно, что не для всякого конечного множества элементарных автоматов данная задача разрешима. Систему элементарных автоматов называют *структурно полной*, если в пределах этой системы поставленная задача имеет решение.

Существует два класса элементарных автоматов: элементарные автоматы с памятью — *запоминающие элементы* и элементарные автоматы без памяти — *комбинационные* или *логические элементы*. Обычно в качестве запоминающих элементов выбираются автоматы Мура,

---

\*) Здесь под композицией понимается отождествление (соединение) входных и выходных полюсов элементарных автоматов, в результате которого образуется схема сложного автомата из схем элементарных автоматов.



к которым предъявляются *требования полноты системы переходов* и *полноты системы выходов*.

Требование полноты системы переходов предусматривает для любой упорядоченной пары состояний элементарного автомата наличие некоторого входного сигнала, который переводит первый элемент этой пары во второй.

Требование полноты системы выходов означает, что для каждого состояния элементарного автомата имеется соответствующий ему выходной сигнал, который отличается от выходных сигналов, соответствующих другим состояниям элементарного автомата. Если это требование не выполняется, то в общем случае нельзя отличить два различных состояния элементарного автомата Мура.

Что касается системы логических элементов, то к ней предъявляется требование функциональной полноты, которое предусматривает возможность реализации любой булевой функции с помощью логических элементов из данной системы.

*Всякая система элементарных автоматов, которая содержит автомат Мура с нетривиальной памятью, обладающий полной системой переходов и полной системой выходов, и какую-нибудь функционально полную систему логических элементов, является структурно полной системой.* Проблема полноты в классе автоматов Мура разработана в работах В. М. Глушкова [113], А. А. Летищевского [269, 272], В. Б. Кудрявцева [233, 234] и др.

Существует общий конструктивный прием, называемый каноническим методом структурного синтеза, позволяющий свести задачу структурного синтеза произвольных конечных автоматов к задаче структурного синтеза логических схем. Остановимся подробнее на каноническом методе структурного синтеза автоматов.

Предварительно рассмотрим понятие кодирования состояний, входных и выходных сигналов конечного автомата. Пусть имеется автомат  $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X/y \in Y))$  и набор запоминающих элементов  $U_1, U_2, \dots, U_p$ , обладающих полной системой переходов и полной системой выходов. Пусть также произведение чисел состояний элементарных автоматов  $U_1, U_2, \dots, U_p$  не меньше числа состояний автомата  $A$ . Каждому состоянию  $q$  автомата  $A$  поставим в соответствие конеч-

ную упорядоченную последовательность  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  состояний автоматов  $U_1, U_2, \dots, U_p$  так, что различным состояниям автомата  $A$  ставятся в соответствие различные последовательности состояний элементарных автоматов. Таким образом, состояния автомата  $A$  кодируются наборами состояний элементарных автоматов  $U_1, U_2, \dots, U_p$ , в результате чего возникают структурные состояния автомата  $A$ . Так как при практическом синтезе схем используются, в основном, элементарные автоматы с двумя устойчивыми состояниями, которым присваиваются значения 0 и 1, то обычно состояния автомата  $A$  кодируются наборами  $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_p$  двоичных переменных  $U_1, U_2, \dots, U_p$ , причем  $\bar{U}_i$  — нулевое или единичное состояние элементарного автомата  $U_i$ . Такое кодирование называют двоичным. В дальнейшем будем пользоваться только двоичным кодированием при синтезе автоматов. Аналогично осуществляется кодирование входных и выходных сигналов автомата  $A$ .

Необходимо отметить, что в зависимости от того, каким образом выполнить *кодирование состояний, входных и выходных сигналов*, структурные схемы одного и того же автомата могут получиться различными, так как каждому варианту кодирования соответствует структурная схема определенной сложности. Различным вариантам кодирования при одном и том же неизменном законе функционирования автомата соответствуют схемы различной сложности. Поэтому так называемая проблема кодирования состояний, входных и выходных сигналов заключается в том, чтобы из всего множества вариантов кодирования выбрать тот, которому соответствует *минимальная по сложности структурная схема автомата*. Более подробно вопросы кодирования в автоматах будут рассмотрены ниже.

При каноническом методе синтеза обычно считают, что кодирование состояний, входных и выходных сигналов уже выполнено. Поэтому задача структурного синтеза автоматов сводится к выбору типов элементарных автоматов и отысканию такого способа их соединения между собой с помощью логических элементов, при котором структурная схема автомата функционирует в соответствии с заданными кодированными таблицами переходов и выходов.

Рассмотрим задание этих таблиц на примере автомата, моделирующего условный рефлекс с забыванием (см. § 5 гл. VI). Для кодирования состояний этого автомата используем три двоичные переменные  $U_1, U_2, U_3$ .

Таблица 9.1

$Q \backslash U$	$U_1$	$U_2$	$U_3$
$q_1$	0	0	0
$q_2$	0	0	1
$q_3$	0	1	0
$q_4$	0	1	1
$q_5$	1	0	0
$q_6$	1	0	1
$q_7$	1	1	0

Пусть начальное состояние  $q_1$  автомата закодировано набором трех двоичных переменных 000, состояние  $q_2$  — набором 001 и т. д.,  $q_7$  — набором 110, как это показано в таблице кодирования состояний (табл. 9.1).

Таким образом, мы определили некоторый вариант кодирования состояний автомата. Пусть, далее, входные

сигналы  $x_1, x_2$  и  $x_3$  закодированы некоторым образом двумя двоичными переменными  $\tilde{m}_1$  и  $\tilde{m}_2$  (табл. 9.2).

Кодированная таблица переходов этого автомата показана на табл. 9.3. Эта таблица определяет зависимость

Таблица 9.2

$X \backslash M$	$m_1$	$m_2$
$x_1$	1	0
$x_2$	0	1
$x_3$	1	1

состояний элементарных автоматов  $U_1(t+1), U_2(t+1), U_3(t+1)$  в момент времени  $t+1$  от значений закодированных входных сигналов  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  и внутренних состояний  $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$  элементарных автоматов в предыдущий момент времени  $t$ .

Так как выходных сигналов в данном автомате всего два, то они кодируются одной двоичной переменной  $l$ :  $y_2 \rightarrow l = 1, y_1 \rightarrow \bar{l} = 0$ .

Заметим, что таблицы кодирования состояний, входных и выходных сигналов, а также кодированная таблица переходов совершенно одинаковы в автоматах Мили и Мура. Что же касается кодированной таблицы выходов, то они отличны друг от друга. В кодированной таблице выходов автомата Мили выходные переменные  $l_1, l_2, \dots, l_h$ , наборами которых кодируются выходные сигналы, определены в зависимости от значений входного сигнала в момент времени  $t$  и внутренних состояний

Таблица 9.3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
	$m_1(t)$	$m_2(t)$	$U_1(t)$	$U_2(t)$	$U_3(t)$	$U_1(t+1)$	$U_2(t+1)$	$U_3(t+1)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	1	1
4	1	0	0	1	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	1	1	0
7	1	0	1	1	0	0	0	1
8	0	1	0	0	0	0	0	1
9	0	1	0	0	1	0	0	1
10	0	1	0	1	0	1	0	0
11	0	1	0	1	1	0	0	1
12	0	1	1	0	0	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1	1	0
14	0	1	1	1	0	0	0	1
15	1	1	0	0	0	0	1	0
16	1	1	0	0	1	0	1	0
17	1	1	0	1	0	1	0	1
18	1	1	0	1	1	1	0	1
19	1	1	1	0	0	1	0	1
20	1	1	1	0	1	1	0	1
21	1	1	1	1	0	1	0	1

элементарных автоматов в тот же момент времени. Столбцы такой таблицы совпадали бы со столбцами 1, 2, 3, 4, 5 табл. 9.3, а вместо переменных  $U_1(t+1)$ ,  $U_2(t+1)$ ,  $U_3(t+1)$  в остальных столбцах стояли бы переменные  $l_1(t)$ ,  $l_2(t)$ , ...,  $l_k(t)$ .

В нашем примере автомат является автоматом Мура. Выходной сигнал, как известно, зависит только от состояний элементарных автоматов в момент времени  $t$ . Поэтому кодированная таблица имеет вид табл. 9.4.

Одна из основных задач, решаемых в процессе структурного синтеза автоматов, заключается в том, чтобы определить значение входных сигналов, которые необходимо подавать на каждый элементарный автомат и

которые обеспечивают условия правильного функционирования автомата, заданные таблицами вида 9.3 и 9.4. Правильную работу элементарных автоматов обеспечи-

Таблица 9.4

$Q \backslash U, l$	$U_1$	$U_2$	$U_s$	$l$
$q_1$	0	0	0	0
$q_2$	0	0	1	1
$q_3$	0	1	0	1
$q_4$	0	1	1	0
$q_5$	1	0	0	1
$q_6$	1	0	1	1
$q_7$	1	1	0	1

вают с помощью так называемых *функций возбуждения элементарных автоматов* (ф. в. э. а.), которые реализуют зависимость входного сигнала  $u_{ij}(t)$  на  $i$ -м входе элементарного автомата  $U_j$  от внутренних состояний всех элементарных автоматов в момент времени  $t$  и от входных сигналов  $x(t)$ . Функции возбуждения элементарного автомата  $U_j$ , так же как и функция выходов  $l_i(t)$ , яв-

ляются булевыми функциями и записываются в общем виде следующим образом:

$$u_{ij}(t) = f_1[U_1(t), \dots, U_s(t), m_1(t), \dots, m_r(t)], \quad (9.1)$$

$$l_i(t) = f_2[U_1(t), \dots, U_s(t), m_1(t), \dots, m_r(t)], \quad (9.2)$$

где  $s$  — число элементарных автоматов, а  $r$  — число двоичных переменных, кодирующих входные сигналы.

В качестве элементарных автоматов могут применяться различные типы запоминающих элементов: линии задержки, триггеры с раздельными и со счетным входами и их комбинациями. Выбор типов элементарных автоматов производится до получения ф. в. э. а. Вопрос рационального выбора элементарных автоматов рассмотрен, например, Е. Н. Вавиловым и Г. П. Портным [57].

Элементарные автоматы можно задавать таблицами переходов и матрицами переходов. Рассмотрим способ задания элементарных автоматов с помощью матриц переходов. Предварительно отметим, что в элементарных автоматах с двумя устойчивыми состояниями возможны только четыре типа переходов: из «0» в «0», из «0» в «1», из «1» в «0» и из «1» в «1». Для каждого из этих переходов имеются входные сигналы элементарного автомата, вызывающие этот переход. Если число входов ав-

томата больше чем один, для некоторых переходов элементарного автомата значения входных сигналов на одном или нескольких входах могут не влиять на переход элементарного автомата. Такие сигналы будем обозначать неопределенными коэффициентами  $b_i$ .

Матрица переходов произвольного элементарного автомата имеет вид

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} \left\| \begin{array}{c} \overline{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n} \\ c_1^1 \quad c_2^1 \quad \dots \quad c_n^1 \\ c_1^2 \quad c_2^2 \quad \dots \quad c_n^2 \\ c_1^3 \quad c_2^3 \quad \dots \quad c_n^3 \\ c_1^4 \quad c_2^4 \quad \dots \quad c_n^4 \end{array} \right\| . \quad (9.3)$$

В этой матрице строки помечены всеми возможными переходами элементарного автомата  $U(t) \rightarrow U(t+1)$ . Число столбцов равно числу входов элементарного автомата. Элемент матрицы  $c_j^i$  обозначает входной сигнал на  $j$ -м входе элементарного автомата, под действием которого происходит переход элементарного автомата, соответствующий  $i$ -й строке матрицы. Элемент матрицы  $c_j^i$  может принимать одно из трех значений: 0, 1 и  $b$ .

В качестве примера приведем матрицу переходов триггера с отдельными входами

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} \left\| \begin{array}{c} \overline{u_0 \quad u_1} \\ b_1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \\ 0 \quad b_2 \end{array} \right\| . \quad (9.4)$$

Здесь  $u_0$  и  $u_1$  — входные сигналы, подаваемые соответственно на нулевой и единичный входы триггера. Переход триггера из нулевого состояния в нулевое осуществляется подачей на единичный вход триггера сигнала  $u_1 = 0$ . Неопределенный коэффициент  $b_1$  показывает, что подача сигналов 0 либо 1 на нулевой вход не влияет на данный переход триггера. Это нетрудно понять из содержательного рассмотрения работы триггера.

Линия задержки имеет всего один вход, поэтому ее матрица переходов имеет вид

$$\begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overline{u} \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 1
 \end{array}
 \left\| \right.
 \cdot
 \quad (9.5)$$

Триггеру со счетным входом соответствует матрица переходов

$$\begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overline{u} \\
 0 \\
 1 \\
 1 \\
 0
 \end{array}
 \left\| \right.
 \cdot
 \quad (9.6)$$

После выбора (или задания) типа элементарных автоматов по кодированной таблице переходов с использованием матриц переходов элементарных автоматов находят ф. в. э. а.

Для автомата, заданного табл. 9.3, в качестве элементарных автоматов выберем триггеры с отдельными входами и построим новую кодированную таблицу переходов (табл. 9.5), определяющую зависимость функций  $u_{01}(t)$ ,  $u_{11}(t)$ ,  $u_{02}(t)$ ,  $u_{12}(t)$ ,  $u_{03}(t)$ ,  $u_{13}(t)$  от типов переходов элементарных автоматов  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  и от переменных  $m_1$ ,  $m_2$  следующим образом. Из матрицы переходов триггера с отдельными входами (9.4) следует, что для перевода первого элементарного автомата  $U_1$  из состояния  $U_1(t) = 0$  в состояние  $U_1(t+1) = 0$  на единичный вход  $u_{11}(t)$  необходимо подать сигнал, равный нулю, а на нулевом входе  $u_{01}(t)$  значение сигнала произвольно, т. е. не определено. Так как в табл. 9.5 такие переходы для элементарного автомата  $U_1$  имеются в 1, 2, 3, 4, 8, 9, 14, 15 и 16 строках, то на пересечении этих строк со столбцами 9 и 10 необходимо записать  $u_{01} = b_i$ ,  $u_{11} = 0$ . На пересечении 10, 17 и 18 строк со столбцами 9 и 10 записаны входные сигналы  $u_{01} = 0$  и  $u_{11} = 1$ , обеспечивающие переходы типа «0» → «1» элементарного автомата  $U_1$ .

Таблица 9.5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$m_1(t)$	$m_2(t)$	$U_1(t)$	$U_2(t)$	$U_3(t)$	$U_1(t+1)$	$U_2(t+1)$	$U_3(t+1)$	$u_0(t)$	$u_{11}(t)$	$u_{02}(t)$	$u_{12}(t)$	$u_{03}(t)$	$u_{13}(t)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	$b_1$	0	$b_1$	0	$b_1$	0
2	1	0	0	0	1	0	0	0	$b_2$	0	$b_2$	0	1	0
3	1	0	0	1	0	0	1	0	$b_3$	0	0	$b_3$	0	1
4	1	0	0	1	1	0	0	0	$b_4$	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	$b_4$	0	$b_2$	0
6	1	0	1	0	1	1	1	0	0	$b_5$	0	1	1	0
7	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
8	0	1	0	0	0	0	0	1	$b_6$	0	$b_5$	0	0	1
9	0	1	0	0	1	0	0	1	$b_7$	0	$b_6$	0	0	1
10	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	$b_4$	$b_3$
11	0	1	1	0	1	0	0	1	$b_8$	0	1	0	0	$b_5$
12	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
13	0	1	1	1	1	1	0	0	0	$b_9$	0	1	1	0
14	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
15	1	1	0	0	0	0	1	0	$b_{10}$	0	0	1	$b_6$	0
16	1	1	0	0	1	0	1	0	$b_{11}$	0	0	1	1	0
17	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
18	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	$b_7$
19	1	1	1	0	0	1	0	1	0	$b_{12}$	0	0	0	1
20	1	1	1	0	1	1	0	1	0	$b_{13}$	0	0	0	$b_8$
21	1	1	1	1	0	1	0	1	0	$b_{14}$	1	0	0	1



Аналогично заполняются клетки табл. 9.5 для остальных переходов первого элементарного автомата, а также столбцы, соответствующие второму и третьему элементарным автоматам.

Если бы в качестве элементарных автоматов были выбраны другие типы элементарных автоматов, то вместо матрицы переходов (9.4) нужно было бы использовать матрицы, соответствующие выбранному типу элементарных автоматов.

Результатом составления табл. 9.5 является получение ф. в. э. а., после чего производят минимизацию этих функций. Так как исходный автомат является частичным, то функции возбуждения будут представлять собой непольностью определенные булевы функции, поэтому их минимизация сводится, по существу, к минимизации непольностью определенных булевых функций (см., например, [57]).

Найдем минимальную форму ф. в. э. а. Для этого воспользуемся методом минимизации булевых функций с помощью диаграмм Вейча (карт Карно). Диаграмма Вейча составляется для каждой функции возбуждения отдельно.

Таблица 9.6

		$U_1$		$\bar{U}_1$				
		$\bar{U}_2$		$U_2$		$\bar{U}_2$		
$m_1$		1	0	1	$b_3$	$b_4$	$b_2$	$b_1$
		0	0	0	0	0	$b_{11}$	$b_{10}$
$\bar{m}_1$		1	0	1	0	$b_8$	$b_7$	$b_6$
		$\bar{U}_3$		$U_3$		$\bar{U}_3$		

Таблица 9.7

		$U_1$		$\bar{U}_1$			
		$\bar{U}_2$		$U_2$		$\bar{U}_2$	
$m_1$		0	$b_5$	0	0	0	0
		$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$	1	1	0
$\bar{m}_1$		0	$b_9$	0	1	0	0
		$\bar{U}_3$		$U_3$		$\bar{U}_3$	

В клетке диаграммы Вейча ставится 0, 1 либо  $b_i$  в зависимости от того, какое значение имеет функция возбуждения на наборе аргументов, соответствующем этой клетке диаграммы. В случае частичных автоматов некоторые клетки диаграммы оказываются незаполненными.

При минимизации они заполняются таким образом, чтобы функции возбуждения были минимальны.

На табл. 9.6 и 9.7 показаны примеры заполнения диаграмм Вейча для функций  $u_{01}(t)$  и  $u_{11}(t)$  соответственно. Приравнявая коэффициенты  $b_2, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}$  нулю, а коэффициенты  $b_1, b_3, b_{14}$  — единице и заполнив пустые клетки так, как это показано на

Таблица 9.8

		$U_1$			$\bar{U}_1$				
		$\bar{U}_2$	$U_2$	$\bar{U}_2$	$\bar{U}_2$	$U_2$	$\bar{U}_2$		
$m_1$	}	1	0	0	1	1	0	0	$\bar{m}_2$
		0	0	0	0	0	0	0	
$\bar{m}_1$	}	1	0	0	1	0	0	0	$m_2$
		1	0	0	1	1	0	0	
		$\bar{U}_3$	$U_3$	$\bar{U}_3$	$U_3$	$\bar{U}_3$	$U_3$	$\bar{U}_3$	

Таблица 9.9

		$U_1$			$\bar{U}_1$				
		$\bar{U}_2$	$U_2$	$\bar{U}_2$	$\bar{U}_2$	$U_2$	$\bar{U}_2$		
$m_1$	}	0	0	0	0	0	0	0	$\bar{m}_2$
		0	0	1	1	1	1	0	
$\bar{m}_1$	}	0	0	0	0	1	0	0	$m_2$
		0	0	0	0	0	0	0	
		$\bar{U}_3$	$U_3$	$\bar{U}_3$	$U_3$	$\bar{U}_3$	$U_3$	$\bar{U}_3$	

табл. 9.8 и 9.9, получаем минимальные формы функций возбуждения первого элементарного автомата  $U_1$ :

$$u_{01}(t) = \bar{m}_2 \bar{U}_3 \vee \bar{m}_1 U_1 \bar{U}_3,$$

$$u_{11}(t) = m_1 m_2 U_2 \vee m_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3.$$

Аналогично находим функции возбуждения элементарных автоматов  $U_2$  и  $U_3$ , минимальные формы которых имеют вид

$$u_{02}(t) = U_2 (m_2 \vee U_1 \vee U_3),$$

$$u_{12}(t) = (\bar{m}_1 \vee \bar{m}_2) U_1 U_3 \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2,$$

$$u_{03}(t) = \bar{m}_2 U_3 \vee m_1 U_1 U_3 \vee m_1 \bar{U}_1 U_2,$$

$$u_{13}(t) = m_1 U_2 \bar{U}_3 \vee m_2 U_1 \bar{U}_3 \vee \bar{m}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3.$$

Получение функций выходов автомата в принципе не отличается от построения функций возбуждения. Если синтезируемый автомат является автоматом Мили, в кодированной таблице переходов и функций возбуждения

надо было бы добавить столько столбцов, сколько двоичных переменных  $l_1, l_2, \dots, l_k$  потребовалось бы для кодирования выходных сигналов. Так как каждой строке такой таблицы соответствует подача входного сигнала  $x_i$  на автомат, находящийся в состоянии  $q_j$ , то эта строка отмечается соответствующим набором выходных переменных  $l_1, l_2, \dots, l_k$ . Затем для каждой двоичной переменной  $l_i$  находится минимальное выражение таким же образом, как и для ф. в. э. а.

В том случае, когда синтезируемый автомат является автоматом Мура, функцию выходов можно получить непосредственно по таблице кодированных выходов (см., например, табл. 9.4). В нашем примере функция выходов представляется одной переменной  $l$ , которая является функцией трех аргументов —  $U_1, U_2, U_3$ . Диаграмма

Таблица 9.10

	$U_1$		$\bar{U}_1$	
$U_3$	1	0	1	0
$\bar{U}_3$	1	1	1	0
	$\bar{U}_2$		$U_2$	

Таблица 9.11

	$U_1$		$\bar{U}_1$	
$U_3$	1	1	0	1
$\bar{U}_3$	1	1	1	0
	$\bar{U}_2$		$U_2$	

Вейча этой функции выглядит так, как показано на табл. 9.10. Доопределяя функцию, получим табл. 9.11. Минимальная форма функции выходов имеет вид

$$l = U_1 \vee U_2 \bar{U}_3 \vee \bar{U}_2 U_3.$$

По функциям возбуждения и выходов нетрудно построить структурную схему автомата (рис. 9.1), моделирующего условный рефлекс с забыванием.

На рис. 9.1 элементарные автоматы  $U_1, U_2, U_3$  — триггеры с отдельными входами. На нулевые входы триггеров подаются сигналы, соответствующие функциям возбуждения  $u_{0i}(t)$ , на единичные входы —  $u_{1i}(t)$ . Эти функции реализованы с помощью функционально полной системы логических элементов в базисе ( $\&, \vee, -$ ). Каждая из ф. в. э. а. зависит как от переменных, кодирующих входные сигналы, так и от состояний элементарных автоматов. Прямые значения аргументов  $U_1, U_2, U_3$

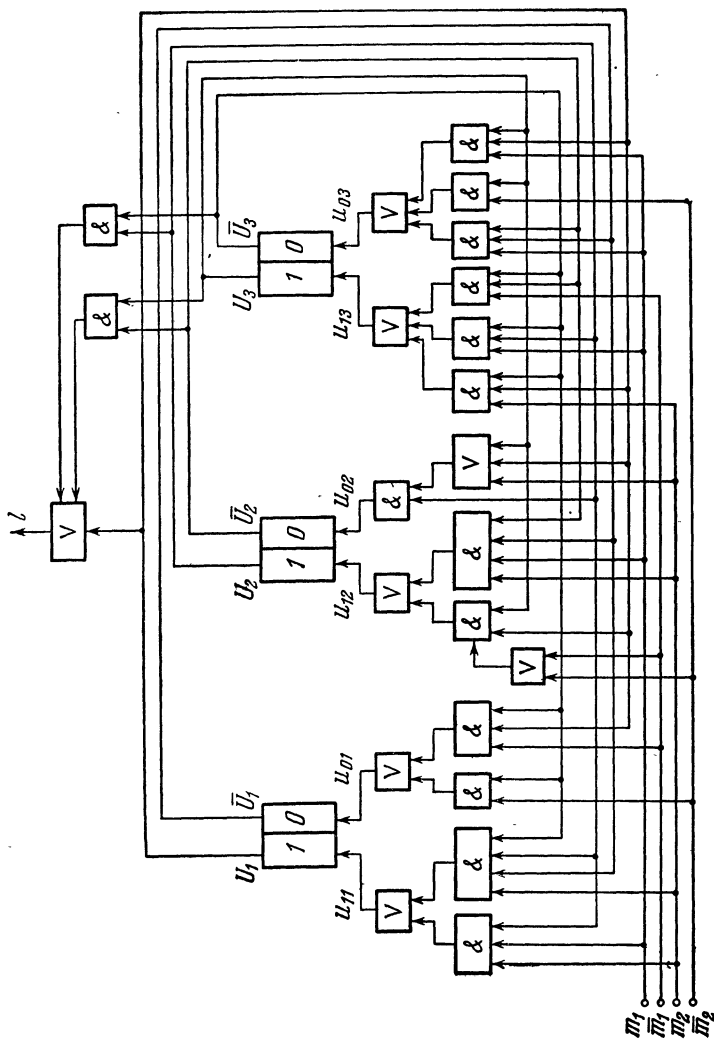


Рис. 9.1.

снимаются с единичных выходов триггеров, инверсные значения  $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3$  — с нулевых выходов. Прямое значение сигнала  $l$  на выходе схемы представляет кодированный выходной сигнал  $y_2$ , а инверсное значение  $\bar{l}$  — выходной сигнал  $y_1$ . Входные сигналы автомата  $x_1, x_2, x_3$  появляются в закодированном виде на входных полюсах  $m_1, \bar{m}_1, m_2, \bar{m}_2$ .

## § 2. Построение функциональной схемы по графу автомата

Рассмотрим теперь метод получения функций возбуждения элементарных автоматов и функций выходов по графу автомата или по матрице соединений. Эта методика менее громоздка, чем построение функций возбуждения по кодированной таблице переходов автомата в случае канонического метода синтеза, и очень удобна для перехода от этапа абстрактной декомпозиции к функциональной схеме автомата.

Если автомат  $A$  содержит  $n$  состояний, то число элементарных автоматов, необходимых для его построения, как известно, определяется выражением  $p \geq \log_2 n$ .

Выберем в качестве элементарных автоматов множество автоматов  $\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$  и закодируем внутренние состояния автомата  $A$  фиксированными наборами состояний множества элементарных автоматов произвольным образом. Например, состояние  $q_1$  закодируем набором состояний  $U_1, U_2, \dots, U_{p-1}, U_p$ , состояние  $q_2$  — набором  $U_1, U_2, \dots, U_{p-1}, \bar{U}_p$ , состояние  $q_3$  — набором  $U_1, U_2, \dots, \bar{U}_{p-1}, U_p$ , состояние  $q_4$  — набором  $U_1, U_2, \dots, \bar{U}_{p-1}, \bar{U}_p$  и т. д.

По матрице соединений автомата  $A$  запишем *обобщенные функции переходов элементарных автоматов*, которые имеют вид

$$U_i(t+1) = \varphi'_i(\bar{U}_1(t), \dots, \bar{U}_p(t), z_1(t), \dots, z_k(t)),$$

$$\bar{U}_i(t+1) = \varphi''_i(\bar{U}_1(t), \dots, \bar{U}_p(t), z_1(t), \dots, z_k(t)),$$

где  $i \in I = \{1, 2, \dots, p\}$ ,

$U_i(t+1)$  — единичное состояние  $i$ -го элементарного автомата в момент времени  $t+1$ ;

$\bar{U}_i(t+1)$  — нулевое состояние  $i$ -го элементарного автомата в момент времени  $t+1$ ;

$U_i(t)$  — нулевое или единичное состояние  $i$ -го элементарного автомата в момент времени  $t$ , которое входит в выражения с инверсией или без нее;

$z_j(t)$  — входной сигнал в момент времени  $t$ .

Известно [57], что  $U_i(t+1)$  и  $\bar{U}_i(t+1)$  можно представить в следующей форме:

$$U_i(t+1) = g'_{1i} \bar{U}_i(t) \vee g''_{1i} U_i(t), \quad (9.7)$$

$$\bar{U}_i(t+1) = g'_{0i} U_i(t) \vee g''_{0i} \bar{U}_i(t), \quad (9.8)$$

где  $g'_{1i}$ ,  $g''_{1i}$ ,  $g'_{0i}$ ,  $g''_{0i}$  — булевы функции аргументов  $U_1(t), \dots, U_{i-1}(t), U_{i+1}(t), \dots, U_p(t), z_1(t), \dots, z_k(t)$ .

Из содержательного рассмотрения выражений (9.7) и (9.8) вытекает, что переключательные функции  $g''_{1i}$  и  $g''_{0i}$  могут принимать произвольные значения из множества  $\{0, 1\}$ , не влияя на правильное функционирование автомата. Поэтому значения  $g''_{1i}$  и  $g''_{0i}$  выбираются с целью получения минимальных форм функций возбуждения элементарных автоматов. Учитывая это, выражения (9.7) и (9.8) запишем

$$U_i(t+1) = g'_{1i} \bar{U}_i(t) \vee b_{1i} g''_{1i} U_i(t), \quad (9.9)$$

$$\bar{U}_i(t+1) = g'_{0i} U_i(t) \vee b_{0i} g''_{0i} \bar{U}_i(t), \quad (9.10)$$

где  $b_{1i}$  и  $b_{0i}$  — неопределенные коэффициенты, которые при различных дизъюнктивных членах  $b_{1i} g''_{1i} U_i(t)$  и  $b_{0i} g''_{0i} \bar{U}_i(t)$  могут принимать различные независимые друг от друга значения из  $\{0, 1\}$ .

Если в качестве элементарных автоматов выбираются триггеры с отдельными входами, то выражения (9.9) и (9.10) являются, по сути дела, функциями возбуждения элементарных автоматов, которые представляют работу вполне определенного абстрактного автомата, когда  $\log_2 n$  — целое число. В том случае, если  $\log_2 n$  не равен целому числу или исходный автомат является частичным, функции возбуждения будут иметь следующий вид:

$$u_{1i}(t) = g'_{1i} \bar{U}_i(t) \vee b_{1i} g''_{1i} U_i(t) \vee a_{1i} S,$$

$$u_{0i}(t) = g'_{0i} U_i(t) \vee b_{0i} g''_{0i} \bar{U}_i(t) \vee a_{0i} S,$$

где  $a_{1i}$  и  $a_{0i}$  — неопределенные коэффициенты, а  $S = U_i(t+1) \vee \bar{U}_i(t+1)$  и вводится для получения минимальной формы функций возбуждения элементарных автоматов.

Из выражений (9.7) и (9.8) можно получить функцию возбуждения для триггера со счетным входом

$$u_{si}(t) = g'_{1i} \bar{U}_i(t) \vee g'_{0i} U_i(t) \vee b_i S.$$

По аналогии нетрудно записать выражения для функций возбуждения других типов элементарных автоматов.

Определим теперь по матрице соединений автомата функции выходов. С помощью переменных  $l_i$  выполним двоичное кодирование выходных сигналов  $h_1, h_2, \dots, h_r$  по аналогии с кодированием состояний таким образом, что каждая из выходных переменных  $l_i$  осуществляет разбиение множества выходных сигналов на два непересекающихся подмножества, которые кодируются через  $l_i$  и  $\bar{l}_i$ . Функции выходов  $l_i(t)$  по матрице соединений автомата в общем виде можно записать следующим образом:

$$l_i(t) \bigvee_{\substack{j \in J \\ s \in S}} z_j q_s, \quad (9.11)$$

где  $J = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $z_j q_s$  — пара вход — состояние, отмеченная выходной буквой  $h$ , входящей в подмножество  $l_i$ . Заметим, что в  $l_i$  будет входить столько дизъюнктивных членов, сколько содержится в матрице соединений ненулевых элементов, отмеченных выходными буквами из подмножества  $l_i$ . Функции выходов (9.11) являются булевыми функциями и их минимизация выполняется известными методами.

Рассмотрим построение функциональной схемы по графу автомата на примере.

**Пример 9.1.** Пусть дан автомат  $A$ , показанный на рис. 9.2. Требуется найти функции возбуждения элементарных автоматов и функции выходов и построить функциональную схему автомата  $A$ . В качестве элементарных автоматов использовать триггеры с отдельными входами, а в качестве функционально полного набора логических элементов — элементы, реализующие функции (&,  $\vee$ ,  $-$ ).

Выбираем множество из трех элементарных автоматов  $\{U_1, U_2, U_3\}$  и наборами состояний элементарных

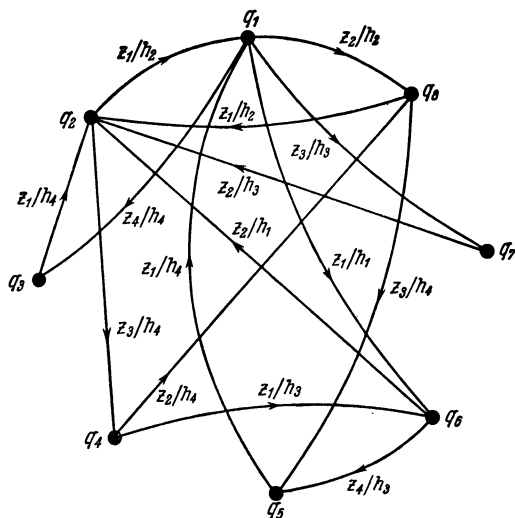


Рис. 9.2.

автоматов закодируем внутренние состояния автомата  $A$  на матрице соединений  $R$  следующим образом:

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} & \overbrace{U_1} & & & \overbrace{\bar{U}_1} & & & \\ & \overbrace{U_2} & \overbrace{\bar{U}_2} & & \overbrace{U_2} & \overbrace{\bar{U}_2} & & \\ & \overbrace{U_3} & \overbrace{\bar{U}_3} & \overbrace{U_3} & \overbrace{\bar{U}_3} & \overbrace{U_3} & \overbrace{\bar{U}_3} & \\ & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \end{array} \\ U_1 \left\{ \begin{array}{l} U_2 \left\{ \begin{array}{l} U_3 \{ q_1 \\ \bar{U}_3 \{ q_2 \end{array} \right. \\ \bar{U}_2 \left\{ \begin{array}{l} U_3 \{ q_3 \\ \bar{U}_3 \{ q_4 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \bar{U}_1 \left\{ \begin{array}{l} U_2 \left\{ \begin{array}{l} U_3 \{ q_5 \\ \bar{U}_3 \{ q_6 \end{array} \right. \\ \bar{U}_2 \left\{ \begin{array}{l} U_3 \{ q_7 \\ \bar{U}_3 \{ q_8 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \left. \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & z_4/h_4 & 0 & 0 & z_1/h_1 & z_3/h_3 & z_2/h_2 \\ z_1/h_2 & 0 & 0 & z_3/h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1/h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1/h_3 & 0 & z_2/h_4 \\ z_1/h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2/h_1 & 0 & 0 & z_4/h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2/h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1/h_2 & 0 & 0 & z_3/h_4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \end{array}$$



Выбирая две двоичные переменные  $m_1$  и  $m_2$  для кодирования входных сигналов, будем иметь

$$z_1 \rightarrow m_1 m_2, \quad z_2 \rightarrow m_1 \bar{m}_2, \quad z_3 \rightarrow \bar{m}_1 m_2, \quad z_4 \rightarrow \bar{m}_1 \bar{m}_2.$$

По матрице соединений  $R$  записываем обобщенную функцию переходов элементарного автомата  $U_1$ :

$$\begin{aligned} U_1(t+1) = & \bar{m}_1 \bar{m}_2 U_1 U_2 U_3 \vee m_1 m_2 U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \bar{m}_1 m_2 U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ & \vee m_1 m_2 U_1 \bar{U}_2 U_3' \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 U_2 U_3 \vee m_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ & \vee m_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 U_3 \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, \\ \bar{U}_1(t+1) = & m_1 m_2 U_1 U_2 U_3 \vee \bar{m}_1 m_2 U_1 U_2 U_3 \vee m_1 \bar{m}_2 U_1 U_2 U_3 \vee \\ & \vee m_1 m_2 U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee m_1 \bar{m}_2 U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee \bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ & \vee \bar{m}_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем функции возбуждения первого элементарного автомата

$$\begin{aligned} u_{11}(t) = & m_1 m_2 \bar{U}_1 U_2 U_3 \vee m_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3 \vee m_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 U_3 \vee \\ & \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee b_1 \bar{m}_1 \bar{m}_2 U_1 U_2 U_3 \vee b_2 m_1 m_2 U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ & \vee b_3 \bar{m}_1 m_2 U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee b_4 m_1 m_2 U_1 \bar{U}_2 U_3 \vee b_{14} S, \\ u_{01}(t) = & m_1 m_2 U_1 U_2 U_3 \vee \bar{m}_1 m_2 U_1 U_2 U_3 \vee m_1 \bar{m}_2 U_1 U_2 U_3 \vee \\ & \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee m_1 \bar{m}_2 U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee b_1 \bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ & \vee b_2 \bar{m}_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee b_{01} S, \end{aligned}$$

где  $S = \overline{U_1(t+1) \vee \bar{U}_1(t+1)}$ .

Аналогично можно получить функции возбуждения элементарных автоматов  $U_2$  и  $U_3$ . После минимизации функции возбуждения элементарных автоматов  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{11}(t) = & m_1 \bar{U}_1, & u_{01}(t) = & \bar{m}_1 m_2 U_3 \vee m_1 U_1 U_2 U_3 \vee U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, \\ u_{12}(t) = & \bar{U}_1 \vee m_2 \bar{U}_2, & u_{02}(t) = & U_1 (\bar{m}_1 \vee \bar{m}_2), \\ u_{13}(t) = & \bar{m}_1 \bar{U}_1 \vee m_1 m_2 U_2 \bar{U}_3, & u_{03}(t) = & m_1 U_1 U_3 \vee m_1 \bar{m}_2. \end{aligned}$$

Покажем получение функций выходов автомата  $A$  по матрице соединений  $R$ . Пусть кодирование выходных сиг-

налов  $h_1, h_2, h_3, h_4$  выполнено с помощью двух переменных  $l_1$  и  $l_2$  следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1 &\rightarrow l_1 l_2 \\ h_2 &\rightarrow l_1 \bar{l}_2, \\ h_3 &\rightarrow \bar{l}_1 l_2, \\ h_4 &\rightarrow \bar{l}_1 \bar{l}_2. \end{aligned}$$

Так как подмножество выходных сигналов, отмеченное прямым значением переменной  $l_1$ , состоит из двух выходных сигналов  $h_1$  и  $h_2$ , то функция  $l_1(t)$  содержит все пары  $z_j q_s$ , отмеченные на матрице соединений  $R$  выходными сигналами  $h_1$  и  $h_2$ . Получаем

$$l_1(t) = z_1 q_1 \vee z_2 q_1 \vee z_1 q_2 \vee z_2 q_6 \vee z_1 q_8.$$

Аналогично запишем

$$\begin{aligned} \bar{l}_1(t) = z_4 q_1 \vee z_3 q_1 \vee z_3 q_2 \vee z_1 q_3 \vee z_1 q_4 \vee z_2 q_4 \vee \\ \vee z_1 q_5 \vee z_4 q_6 \vee z_2 q_7 \vee z_3 q_8. \end{aligned}$$

Подставив вместо  $z_j$  и  $q_s$  их кодированные значения, получим

$$\begin{aligned} l_1(t) = m_1 m_2 U_1 U_2 U_3 \vee m_1 \bar{m}_2 U_1 U_2 U_3 \vee m_1 m_2 U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ \vee m_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3 \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, \\ l(t) = \bar{m}_1 \bar{m}_2 U_1 U_2 U_3 \vee \bar{m}_1 m_2 U_1 U_2 U_3 \vee \bar{m}_1 m_2 U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee \\ \vee m_1 m_2 U_1 \bar{U}_2 U_3 \vee m_1 m_2 U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee m_1 \bar{m}_2 U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee \\ \vee m_1 m_2 \bar{U}_1 U_2 U_3 \vee \bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3 \vee m_1 \bar{m}_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 U_3 \vee \\ \vee \bar{m}_1 m_2 \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3. \end{aligned}$$

После минимизации находим следующую форму функции выходов:

$$l_1(t) = m_1 U_1 U_2 \vee m_1 \bar{U}_1 \bar{U}_3 = m_1 (U_1 U_2 \vee \bar{U}_1 \bar{U}_3).$$

Аналогично получаем минимальную форму функции выходов

$$l_2(t) = \bar{m}_2 \bar{U}_1 \vee m_2 U_1 (U_2 U_3 \vee \bar{U}_2 \bar{U}_3).$$

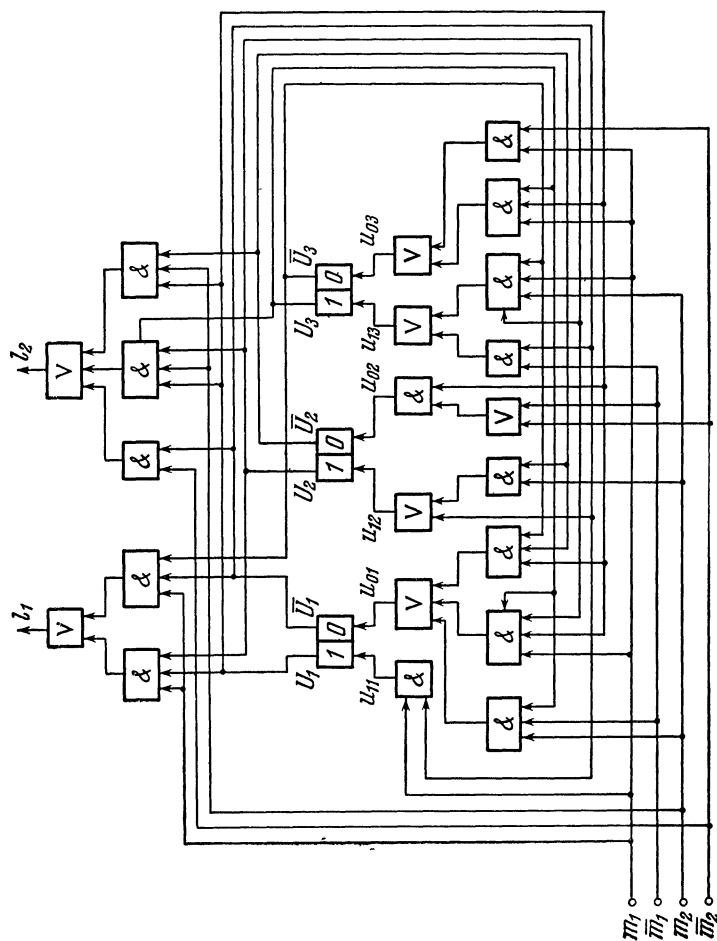


Рис. 9.3.

По найденным функциям возбуждения элементарных автоматов и функциям выходов можно построить функциональную схему автомата  $A$ , которая показана на рис. 9.3.

### § 3. Декомпозиционный метод синтеза автоматов

В § 6 гл. VIII рассмотрена оптимальная декомпозиция произвольных абстрактных автоматов на элементарные абстрактные автоматы, в качестве которых могут быть выбраны любые абстрактные автоматы с простым числом состояний, в частности, автоматы с двумя состояниями. В результате декомпозиции получаем матрицы соединений элементарных абстрактных автоматов, совместная работа которых эквивалентна функционированию исходного абстрактного автомата. Выбирая конкретные типы элементарных автоматов (триггеры, линии задержки и т. п.), по матрицам соединений элементарных абстрактных автоматов легко построить функции возбуждения и функции выходов конкретных элементарных автоматов, представляющих работу исходного автомата. Получение функций возбуждения и выходов конкретных элементарных автоматов, как известно, является заключительным этапом структурного синтеза, так как по ним однозначно определяется структурная схема автомата. Поэтому структурный синтез автоматов, по сути дела, выносится на абстрактный этап и сводится к оптимальной декомпозиции автомата на элементарные абстрактные автоматы и записи функций возбуждения и функций выходов конкретных элементарных автоматов по матрицам соединений элементарных абстрактных автоматов.

Преимущество декомпозиционного метода синтеза автоматов по сравнению с каноническим методом заключается, во-первых, в том, что не требуется строить сложную кодированную таблицу переходов, во-вторых, решается проблема оптимального кодирования состояний автомата, которая приводит к минимальной комбинационной части функциональной схемы автомата, и, в-третьих, он позволяет строить оптимальную или близкую к ней функциональную схему автомата при использовании элементарных автоматов со многими устойчивыми состояниями (например, тремя, пятью и т. д.) и логическими элементами в не двоичной логике (троичной,

пятеричной и т. д.). Другими словами, декомпозиционный метод позволяет осуществлять синтез цифровых автоматов при использовании логики более высокого порядка по сравнению с двоичной.

Рассмотрим применение декомпозиционного метода синтеза на примере построения схем двух автоматов, один из которых является автоматом Мура, а второй — автоматом Мили.

**Пример 9.2.** Построить оптимальную структурную схему автомата  $A$ , моделирующего выработку условного рефлекса с забыванием, отмеченная таблица переходов которого имеет вид табл. 6.4.

Дополним таблицу переходов автомата  $A$  одним изолированным состоянием и запишем матрицу соединений, которая будет иметь вид

$$R_A = \begin{pmatrix} (y_1) & (y_2) & (y_2) & (y_1) & (y_2) & (y_2) & (y_2) & (-) \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_1 \vee x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \vee x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если привести матрицу  $R_A$  к виду правильной клеточной матрицы с запретами, то она будет содержать 39 запрещенных переходов.

Найдем пару  $(\pi, \rho)$  разбиений множества состояний автомата  $A$ , определяющую подстановку, преобразующую матрицу соединений  $R_A$  к виду квазиправильной матрицы соединений. Используя прием, описанный в § 6 гл. VIII, находим  $\rho$  разбиение, в каждом классе которого содержится максимальное число состояний с тождественными переходами\*). Получаем

$$\begin{aligned} \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, & \rho_1 &= \{q_1, q_2\}, & \rho_2 &= \{q_3, q_8\}, \\ & & \rho_3 &= \{q_4, q_5\}, & \rho_4 &= \{q_6, q_7\}. \end{aligned}$$

\*) Так как рассматривается автомат Мура, то выходы во внимание можно не принимать.

После этого находим  $\pi$  разбиение, которое имеет вид

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2\}, \quad \pi_1 = \{q_1, q_3, q_4, q_6\}, \quad \pi_2 = \{q_2, q_8, q_5, q_7\}.$$

На этом заканчивается первый шаг декомпозиции. Для приведения второй матрицы соединений (после разбиения  $R_A$  на две матрицы) к виду квазиправильной матрицы соединений упорядочим классы  $\rho$  разбиения, т. е. выполним второй шаг декомпозиции. Строим пару  $(\pi', \rho')$  разбиения множества классов разбиения  $\rho$ . Получаем

$$\begin{aligned} \rho' &= \{\rho'_1, \rho'_2\}, & \rho'_1 &= \{\rho_1, \rho_2\}, & \rho'_2 &= \{\rho_3, \rho_4\}, \\ \pi' &= \{\pi'_1, \pi'_2\}, & \pi'_1 &= \{\rho_1, \rho_3\}, & \pi'_2 &= \{\rho_2, \rho_4\}. \end{aligned}$$

В результате находим следующую подстановку классов  $\rho$  разбиения:

$$t_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 \\ \rho_1 & \rho_3 & \rho_2 & \rho_4 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что необходимо брать классы  $\rho$  разбиения в следующей упорядоченности:

$$\rho_1 = \{q_1, q_2\}, \quad \rho_2 = \{q_4, q_5\}, \quad \rho_3 = \{q_3, q_8\}, \quad \rho_4 = \{q_6, q_7\}.$$

Пересекая классы  $\pi$  и нового  $\rho$  разбиения, окончательно получаем следующие подстановки:

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ q_1 & q_4 & q_3 & q_6 & q_2 & q_5 & q_8 & q_7 \end{pmatrix}$$

и

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ q_1 & q_5 & q_3 & q_2 & q_6 & q_4 & q_8 & q_7 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку  $t^{-1}$  к матрице  $R_A$  и преобразуя ее в квазиправильную матрицу соединений,

приходим к матрице

$$R'_A = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} x_1 & 0 & x_3 & 0 & \overline{x_1} \vee x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_3 & \overline{x_1} \vee x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_3 & 0 & \overline{x_1} \vee x_2 & 0 & 0 \\ \overline{x_1} & 0 & 0 & \overline{x_1} \vee x_3 & \overline{x_1} \vee \overline{x_2} & 0 & 0 & x_1 \vee x_2 \\ \hline x_1 & 0 & x_3 & 0 & \overline{x_1} \vee x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_3 & \overline{x_1} \vee x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{x_1} & 0 & \overline{x_3} & 0 & \overline{x_1} \vee \overline{x_2} & 0 & 0 \\ \overline{x_1} & 0 & 0 & \overline{x_1} \vee x_3 & x_1 \vee x_2 & 0 & 0 & \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \end{array} \right\|,$$

которая содержит 17 запрещенных переходов.

Разложим матрицу  $R'_A$  на две матрицы  $R_1$  и  $R'_2$  с отмеченными переходами. Тогда получим

$$R_1 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} \overline{x_1} \vee x_3 & \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \\ \overline{x_1} \vee x_3 & \overline{x_1} \vee x_2 \end{array} \right\|,$$

$$R'_2 = \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} x_1 \vee x_2 & 0 & x_3 & 0 \\ x_1 \vee x_2 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & \overline{x_1} \vee \overline{x_2} & 0 & \overline{x_3} \\ \overline{x_1} \vee \overline{x_2} & 0 & 0 & \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \end{array} \right\|.$$

После введения связей в матрицы  $R_1$  и  $R'_2$  запишем их в виде

$$R_1 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} (w_1 \vee w_2 \vee w_3) x_1 \vee x_3 & w_4 x_1 \vee x_2 \\ w_1 (x_1 \vee x_3) \vee w_2 (x_1 \vee x_3) \vee w_4 x_3 & w_1 x_2 \vee w_2 x_2 \vee w_4 (x_1 \vee x_2) \end{array} \right\|,$$

$$R'_2 = \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} x_1 \vee x_2 & 0 & x_3 & 0 \\ x_1 \vee x_2 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & v_1 x_1 \vee v_1 x_2 & 0 & v_1 x_3 \\ v_2 x_1 \vee v_2 x_2 & 0 & 0 & v_1 x_1 \vee v_1 x_2 \vee x_3 \end{array} \right\|.$$

Приведем матрицу  $R'_2$  к правильной клеточной матрице с запретами

$$R'_2 = \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} v_1x_1 \vee v_2x_1 \vee \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} & v_1x_3 & \overline{v_1x_3} & \\ \overline{v_1x_2} \vee v_2x_2 & 0 & v_1x_3 & \\ \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_2x_1} \vee \overline{v_1x_2} \vee \overline{v_2x_2} & v_1x_1 \vee v_1x_2 & \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} \vee \overline{v_1x_3} & \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} \vee v_1x_3 \\ \overline{v_1x_1} \vee v_2x_1 \vee \overline{v_1x_2} \vee v_2x_2 & \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} & \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} & v_1x_1 \vee v_1x_2 \vee v_1x_3 \end{array} \right\|.$$

Разложим матрицу  $R'_2$  на две матрицы  $R_2$  и  $R_3$  с отмеченными переходами

$$R_2 = h_1 \left\| \begin{array}{ccc} \overline{v_1x_1} \vee v_2x_1 \vee v_1x_2 \vee v_2x_2 & v_1x_3 & \\ v_1x_1 \vee v_2x_1 \vee v_1x_2 \vee v_2x_2 & v_1x_1 \vee v_1x_2 \vee v_1x_3 & \end{array} \right\|,$$

$$R_3 = s_1 \left\| \begin{array}{ccc} \overline{v_1x_1} \vee v_2x_1 \vee v_1x_2 \vee v_2x_2 \vee v_1x_3 & \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} \vee v_1x_3 & \\ v_1x_1 \vee v_2x_1 \vee v_1x_2 \vee v_2x_2 & \overline{v_1x_1} \vee \overline{v_1x_2} \vee v_1x_3 & \end{array} \right\|.$$

Вводя связи в матрицы  $R_2$  и  $R_3$ , получим

$$R_2 = h_1 \left\| \begin{array}{ccc} v_1x_1 \vee v_2x_1 \vee v_1x_2 \vee v_2x_2 & v_1x_3 & \\ s_1v_1x_1 \vee s_2v_2x_1 \vee s_1v_1x_2 \vee s_2v_2x_2 & s_2v_1x_1 \vee s_2v_1x_2 \vee v_1x_3 & \end{array} \right\|,$$

$$R_3 = s_1 \left\| \begin{array}{ccc} h_1v_1x_1 \vee h_1v_2x_1 \vee h_1v_1x_2 \vee \vee h_1v_2x_2 \vee h_1v_1x_3 & h_2v_1x_1 \vee h_2v_1x_2 \vee h_2v_1x_3 & \\ h_1v_1x_1 \vee v_2x_1 \vee h_1v_1x_2 \vee v_2x_2 & h_2v_1x_1 \vee h_2v_1x_2 \vee h_2v_1x_3 & \end{array} \right\|.$$

Таким образом, в результате декомпозиции автомата  $A$  получены три элементарных абстрактных автомата, заданных матрицами соединений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , совместная работа которых определяет работу автомата  $A$ .

Закодируем состояния элементарных абстрактных автоматов и входные буквы автомата  $A$  следующим образом:

$$\begin{array}{l} x_1 \rightarrow m_1m_2, \\ v_1 \rightarrow U_1, \quad h_1 \rightarrow U_2, \quad s_1 \rightarrow U_3, \quad x_2 \rightarrow m_1\bar{m}_2, \\ v_2 \rightarrow \bar{U}_1, \quad h_2 \rightarrow \bar{U}_2, \quad s_2 \rightarrow \bar{U}_3, \quad x_3 \rightarrow \bar{m}_1m_2. \end{array}$$



Тогда матрицы соединений элементарных абстрактных автоматов можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 R_1 = & \begin{array}{c} U_1 \\ \bar{U}_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{U_2 U_3 m_1 m_2 \vee U_2 \bar{U}_3 m_1 m_2 \vee} \\ \quad \vee \bar{U}_2 U_3 m_1 m_2 \vee \bar{m}_1 m_2 \\ U_2 U_3 m_1 m_2 \vee U_2 U_3 \bar{m}_1 m_2 \vee \\ \quad \vee U_2 \bar{U}_3 m_1 m_2 \vee \\ \vee U_2 \bar{U}_3 \bar{m}_1 m_2 \vee \bar{U}_2 \bar{U}_3 \bar{m}_1 m_2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \overbrace{\bar{U}_2 \bar{U}_3 m_1 m_2 \vee m_1 \bar{m}_2} \\ \bar{U}_2 \bar{U}_3 m_1 m_2 \vee U_2 U_3 m_1 \bar{m}_2 \vee \\ \vee U_2 \bar{U}_3 m_1 \bar{m}_2 \vee \bar{U}_2 \bar{U}_3 m_1 \bar{m}_2 \end{array} \right. , \\
 R_2 = & \begin{array}{c} U_2 \\ \bar{U}_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{U_1 m_1 m_2 \vee \bar{U}_1 m_1 m_2 \vee} \\ \quad \vee U_1 m_1 \bar{m}_2 \vee \bar{U}_1 m_1 \bar{m}_2 \\ U_1 U_3 m_1 m_2 \vee \bar{U}_1 \bar{U}_3 m_1 m_2 \vee \\ \quad \vee U_1 U_3 m_1 \bar{m}_2 \vee \bar{U}_1 \bar{U}_3 m_1 \bar{m}_2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \overbrace{U_1 \bar{m}_1 m_2} \\ U_1 \bar{U}_3 m_1 m_2 \vee U_1 \bar{U}_3 m_1 \bar{m}_2 \vee \\ \vee U_1 \bar{m}_1 m_2 \end{array} \right. , \\
 R_3 = & \begin{array}{c} U_3 \\ \bar{U}_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{U_1 U_2 m_1 m_2 \vee \bar{U}_1 U_2 m_1 m_2 \vee} \\ \quad \vee U_1 U_2 m_1 \bar{m}_2 \vee \\ \vee \bar{U}_1 U_2 m_1 \bar{m}_2 \vee U_1 U_2 \bar{m}_1 m_2 \\ U_1 U_2 m_1 m_2 \vee \bar{U}_1 m_1 m_2 \vee \\ \quad \vee U_1 U_2 m_1 \bar{m}_2 \vee \bar{U}_1 m_1 \bar{m}_2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \overbrace{U_1 \bar{U}_2 m_1 m_2 \vee U_1 \bar{U}_2 m_1 \bar{m}_2 \vee} \\ \quad \vee U_1 \bar{U}_2 \bar{m}_1 m_2 \\ U_1 \bar{U}_2 m_1 m_2 \vee U_1 \bar{U}_2 m_1 \bar{m}_2 \vee \\ \quad \vee U_1 \bar{U}_2 \bar{m}_1 m_2 \end{array} \right. .
 \end{aligned}$$

Выбирая в качестве элементарных автоматов триггеры с раздельными входами, по матрицам соединений элементарных абстрактных автоматов можно построить функции возбуждения конкретных элементарных автоматов (триггеров), которые определяются дизъюнкцией соответствующих элементов столбцов матриц соединений (разумеется, с учетом неопределенных коэффициентов  $b_i$ ). По матрицам  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  после минимизации получаем функции возбуждения триггеров, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \bar{m}_1 \vee m_2 U_2, \\
 u_{01} &= \bar{m}_2 \vee m_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, \\
 u_{12} &= m_1 (\bar{U}_1 \vee U_3), \\
 u_{02} &= \bar{m}_1, \\
 u_{13} &= m_1 (\bar{U}_1 \vee U_2), \\
 u_{03} &= U_1 \bar{U}_2.
 \end{aligned}$$

Найдем функцию выходов автомата  $A$ . Закодируем выходной сигнал  $y_2$  через  $l$ , а сигнал  $y_1$  через  $\bar{l}$ . Так как  $A$  — автомат Мура, то, используя естественное кодирование состояний по матрице  $R'_A$  и учитывая подстановку  $t$ , преобразующую  $R'_A$  в  $R_A$ , функцию выходов  $l$  запишем в форме

$$l = U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee U_1 \bar{U}_2 U_3 \vee U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \vee \bar{U}_1 U_2 U_3 \vee \bar{U}_1 \bar{U}_2 U_3 \vee \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3,$$

которая после минимизации принимает вид

$$l = \bar{U}_2 \vee \bar{U}_1 U_3 \vee U_1 \bar{U}_3.$$

По полученным функциям возбуждения и функции выходов можно построить структурную схему автомата, которая показана на рис. 9.4.

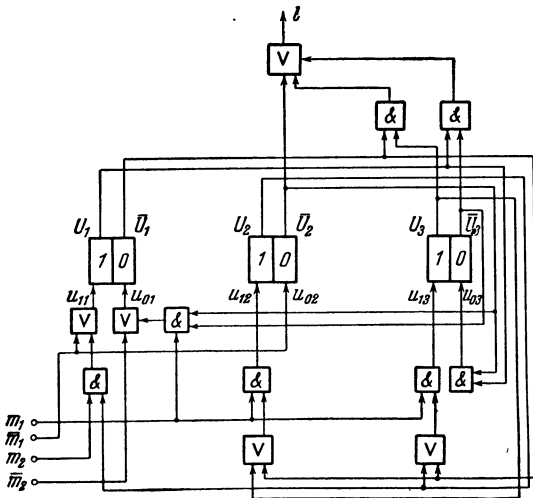


Рис. 9.4.

Пример 9.3. Требуется синтезировать автомат Мили — схему дешифратора последовательного действия, на вход которого поступают трехразрядные двоичные числа. Обозначим входные сигналы через  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$ . Выходной алфавит  $Y$  автомата состоит из девяти букв

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\}$ . При подаче на вход дешифратора различных триад на выходе его появляются следующие сигналы:

Вход: 000 001 010 011 100 101 110 111

Выход:  $y_8$   $y_7$   $y_6$   $y_5$   $y_4$   $y_3$   $y_2$   $y_1$

причем считаем, что младшие разряды расположены слева. При подаче любых других последовательностей, которые могут состоять из одной или двух входных букв, на выходе дешифратора появляется сигнал  $y_9$ .

Матрица соединений автомата, полученная в результате этапа абстрактного синтеза (см. [57]) и дополненная одним изолированным состоянием, имеет вид

$$R = \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{array} \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & x_1/y_9 & x_2/y_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1/y_9 & x_2/y_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1/y_9 & x_2/y_9 & 0 \\ x_1/y_1 \vee x_2/y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1/y_3 \vee x_2/y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1/y_5 \vee x_2/y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1/y_7 \vee x_2/y_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Если привести ее к виду правильной клеточной матрицы, то получим 27 запрещенных переходов. Находим пару  $(\pi, \rho)$  разбиений, где

$$\begin{aligned} \pi &= \{\pi_1, \pi_2\}, & \rho &= \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, \\ \pi_1 &= \{q_1, q_3, q_4, q_5\}, & \pi_2 &= \{q_2, q_6, q_7, q_8\}, \\ \rho_1 &= \{q_4, q_6\}, & \rho_2 &= \{q_2, q_3\}, & \rho_3 &= \{q_5, q_7\}, & \rho_4 &= \{q_1, q_8\}, \end{aligned}$$

которая определяет подстановки  $t$  и  $t^{-1}$  множества состояний автомата

$$\begin{aligned} t &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ q_4 & q_3 & q_5 & q_1 & q_6 & q_2 & q_7 & q_8 \end{pmatrix}, \\ t^{-1} &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ q_4 & q_6 & q_2 & q_1 & q_3 & q_5 & q_7 & q_8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применяя подстановку  $t^{-1}$  к матрице  $R$  и преобразуя ее к виду правильной клеточной матрицы, получим

$R' =$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\
 \hline
 q_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1/y_1 \vee x_2/y_2 \vee}{\sqrt{x_1/y_5} \sqrt{x_2/y_6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{x_1/y_1} \sqrt{x_2/y_2} \vee}{\sqrt{x_1/y_5} \sqrt{x_2/y_6}} \\
 q_2 & \sqrt{x_1/y_9} & 0 & \sqrt{x_2/y_9} & 0 & x_1/y_9 & 0 & x_2/y_9 & 0 \\
 q_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1/y_3 \vee x_2/y_4 \vee}{\sqrt{x_1/y_7} \sqrt{x_2/y_8}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{x_1/y_3} \sqrt{x_2/y_4} \vee}{\sqrt{x_1/y_7} \sqrt{x_2/y_8}} \\
 q_4 & 0 & \frac{x_2/y_9 \vee}{\sqrt{x_1/y_9}} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1/y_9 \vee}{\sqrt{x_2/y_9}} & 0 & 0 \\
 \hline
 q_5 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1/y_5 \vee x_2/y_6 \vee}{\sqrt{x_1/y_1} \sqrt{x_2/y_2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_6 & x_1/y_9 & 0 & x_2/y_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_7 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1/y_7 \vee x_2/y_8 \vee}{\sqrt{x_1/y_3} \sqrt{x_2/y_4}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_8 & 0 & \frac{\sqrt{x_1/y_9} \vee}{\sqrt{x_2/y_9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Разложим матрицу  $R'$  на две матрицы

$$R_1 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} \underline{x}_1 \vee \underline{x}_2 & \underline{x}_1 \vee \underline{x}_2 \\ \underline{x}_1 \vee \underline{x}_2 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$R'_2 = \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \hline \omega_1 & 0 & 0 & \frac{\underline{x}_1/\underline{y}_1 \vee \underline{x}_1/\underline{y}_5 \vee \underline{x}_2/\underline{y}_2 \vee \underline{x}_2/\underline{y}_6}{\circ} \\ \omega_2 & \underline{x}_1/\underline{y}_9 & 0 & \underline{x}_2/\underline{y}_9 \\ \omega_3 & 0 & 0 & \frac{\underline{x}_1/\underline{y}_3 \vee \underline{x}_1/\underline{y}_7 \vee \underline{x}_2/\underline{y}_4 \vee \underline{x}_2/\underline{y}_8}{\circ} \\ \omega_4 & 0 & \frac{\underline{x}_1/\underline{y}_9 \vee \underline{x}_2/\underline{y}_9}{\circ} & 0 \end{array} \right\|,$$

которые после введения связей принимают вид

$$R_1 = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\omega_1 \vee \omega_3)(x_1 \vee x_2) \vee \omega_4 x_2 & (\omega_2 \vee \omega_4)x_1 \vee \omega_2 x_2 \\ (\omega_1 \vee \omega_2 \vee \omega_3)(x_1 \vee x_2) & 0 \end{vmatrix},$$

$$R'_2 = \begin{matrix} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \dot{x}_1/y_9 \end{array} \right. & & & & \\ \omega_2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ x_2/y_9 \end{array} \right. & & & & \\ \omega_3 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ v_1 x_1/y_3 \vee v_2 x_1/y_7 \vee \\ v_1 x_2/y_4 \vee v_2 x_2/y_8 \end{array} \right. & & & & \\ \omega_4 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ v_1 x_1/y_9 \vee v_1 x_2/y_9 \end{array} \right. & & & & 0 \end{matrix}.$$

Применяя к матрице  $R'_2$  подстановку

$$t_1^{-1} = t_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_4 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 \end{pmatrix},$$

определяемую парой  $(\pi', \rho')$  разбиений, где

$$\pi' = \{\pi'_1, \pi'_2\}, \quad \rho = \{\rho'_1, \rho'_2\}, \quad \pi'_1 = \{\omega_2, \omega_4\}, \quad \pi'_2 = \{\omega_1, \omega_3\}, \\ \rho'_1 = \{\omega_3, \omega_4\}, \quad \rho'_2 = \{\omega_1, \omega_2\},$$

и приводя ее к ПКМС с запретами, получим

$$R''_2 =$$

$$= \begin{matrix} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1 \left\{ \begin{array}{l} \boxed{v_1 x_1/y_3} \vee \boxed{v_1 x_2/y_4} \\ v_1 x_1/y_9 \vee \\ v_1 x_2/y_9 \end{array} \right. & & \boxed{v_1 x_1/y_3} \vee \boxed{v_2 x_1/y_7} \vee \\ & & \vee \boxed{v_1 x_2/y_4} \vee \boxed{v_2 x_2/y_8} & \vee \boxed{v_1 x_1/y_9} \vee \\ \omega_2 \left\{ \begin{array}{l} \boxed{v_1 x_1/y_1} \vee \boxed{v_1 x_2/y_2} \vee \\ \vee \boxed{v_1 x_2/y_9} \end{array} \right. & \boxed{v_1 x_1/y_9} & \vee \boxed{v_1 x_2/y_9} \vee \boxed{v_1 x_2/y_9} \vee \\ & & \vee \boxed{v_2 x_2/y_6} \vee v_2 x_2/y_9 & v_1 x_1/y_9 \vee \\ \omega_3 \left\{ \begin{array}{l} v_1 x_1/y_3 \vee v_2 x_1/y_7 \vee \\ \vee v_1 x_2/y_4 \vee v_2 x_2/y_8 \end{array} \right. & \boxed{v_1 x_1/y_9} \vee \\ & & \vee \boxed{v_1 x_2/y_9} & 0 & 0 \\ \omega_4 \left\{ \begin{array}{l} v_1 x_1/y_1 \vee v_2 x_1/y_2 \vee \\ \vee v_1 x_2/y_2 \vee \boxed{v_1 x_2/y_9} \vee \\ \vee v_2 x_2/y_6 \vee \boxed{v_2 x_2/y_9} \end{array} \right. & \boxed{v_1 x_1/y_9} \vee \\ & & \vee \boxed{v_2 x_2/y_9} & 0 & 0 \end{matrix}.$$

После разложения матрицы  $R_2''$  на матрицы  $R_2$  и  $R_3$  и введения в них связей будем иметь

$$R_2 = \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix} \left\| \begin{array}{cc} s_1 v_1 (x_1 \vee x_2) & s_2 (x_1 \vee x_2) \\ x_1 \vee x_2 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$R_3 = \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \left\| \begin{array}{cc} h_2 v_1 x_1 / y_3 \vee h_2 v_2 x_1 / y_1 \vee \\ \vee h_2 v_1 x_2 / y_4 \vee h_2 v_2 x_2 / y_8 & h_1 v_1 x_1 / y_9 \vee h_1 v_1 x_2 / y_9 \end{array} \right\| \\ \left\| \begin{array}{cc} h_2 v_1 x_1 / y_1 \vee h_2 v_2 x_1 / y_5 \vee \\ \vee h_2 v_1 x_2 / y_2 \vee h_1 v_1 x_2 / y_9 \vee \\ \vee h_2 v_2 x_2 / y_6 \vee h_1 v_2 x_2 / y_9 & h_1 v_1 x_1 / y_9 \vee h_1 v_2 x_1 / y_9 \end{array} \right\| \end{array} \right\}.$$

Закодируем входные сигналы и состояния элементарных абстрактных автоматов следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow m, & v_1 &\rightarrow U_1, & h_1 &\rightarrow U_2, & s_1 &\rightarrow U_3, \\ x_2 &\rightarrow \bar{m}, & v_2 &\rightarrow \bar{U}_1, & h_2 &\rightarrow \bar{U}_2, & s_2 &\rightarrow \bar{U}_3. \end{aligned}$$

Выберем в качестве элементарных автоматов триггеры с отдельными входами. Тогда по матрицам соединений элементарных абстрактных автоматов после минимизации получим функции возбуждения триггеров

$$\begin{aligned} u_{11} &= \bar{U}_1, \\ u_{01} &= U_1 U_2 \bar{U}_3 \vee m U_1 U_2, \\ u_{12} &= \bar{U}_2, \\ u_{02} &= U_2 \bar{U}_3, \\ u_{13} &= \bar{U}_2 \vee m \bar{U}_3, \\ u_{03} &= U_2 U_3. \end{aligned}$$

Найдем функции выходов автомата. По матрице соединений  $R_3$  с учетом перекодировки можно записать

$$\begin{aligned} y_1 &= m U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, & y_6 &= \bar{m} \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, \\ y_2 &= \bar{m} U_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, & y_7 &= m \bar{U}_1 \bar{U}_2 U_3, \\ y_3 &= m U_1 \bar{U}_2 U_3, & y_8 &= \bar{m} \bar{U}_1 \bar{U}_2 U_3, \\ y_4 &= \bar{m} U_1 \bar{U}_2 U_3, & y_9 &= m U_2 U_3 \vee \bar{m} U_2 U_3 \vee \bar{m} U_2 \bar{U}_3 \vee m U_2 \bar{U}_3, \\ y_5 &= m \bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3, \end{aligned}$$

Закодируем выходные сигналы четырьмя переменными  $l_1, l_2, l_3, l_4$  следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1 l_2 l_3 l_4, & y_6 &= l_1 \bar{l}_2 l_3 \bar{l}_4, \\ y_2 &= l_1 l_2 l_3 \bar{l}_4, & y_7 &= l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 l_4, \\ y_3 &= l_1 l_2 \bar{l}_3 l_4, & y_8 &= l_1 \bar{l}_2 l_3 l_4, \\ y_4 &= l_1 l_2 \bar{l}_3 \bar{l}_4, & y_9 &= \bar{l}_1 l_2 l_3 l_4, \\ y_5 &= l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3 l_4, \end{aligned}$$

После минимизации функции выходов будут иметь вид

$$\begin{aligned} l_1 &= \bar{U}_2, \\ l_2 &= U_1 \vee U_2, \\ l_3 &= U_2 \vee \bar{U}_3, \\ l_4 &= U_2 \vee m. \end{aligned}$$

По найденным функциям возбуждения триггеров и функ-

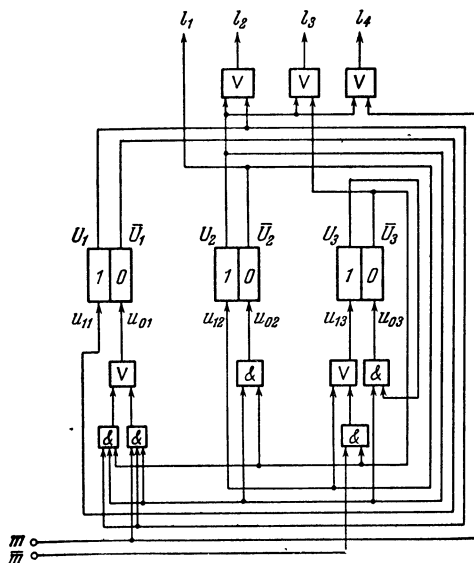


Рис. 9.5.

циям выходов легко построить структурную схему дешифратора, которая показана на рис. 9.5.

#### **§ 4. О синтезе автоматов в универсальных вычислительных средах**

Успехи микроэлектроники привели к необходимости разработки вопросов синтеза цифровых автоматов на новой основе. Примером этому служит задача представления исходного автомата совместной работой заданных стандартных автоматов в виде больших интегральных схем на МОП-транзисторах, которая рассмотрена в предыдущей главе. Весьма перспективным направлением по созданию надежных, быстродействующих автоматов в микроэлектронном исполнении являются однородные универсальные вычислительные среды [153, 375], использование которых позволяет применять методы автоматического синтеза цифровых автоматов с программно изменяемой структурой.

Задача синтеза автоматов в вычислительной среде (ВС) состоит из двух задач: общей задачи синтеза автоматов в ВС и задачи реализации логических сетей автоматов в ВС. Эти задачи заключаются в получении программы настройки элементов вычислительной среды либо по абстрактному автомату, заданному графом или матрицей соединений, либо по структурной схеме (логической сети) автомата, причем задача реализации логической сети в ВС является частью общей задачи синтеза автоматов в ВС. Оптимизация синтеза автоматов в ВС, по существу, сводится к минимизации числа элементов вычислительной среды, настраиваемых на схему синтезируемого автомата. Задача оптимизации синтеза автомата в ВС состоит из двух задач: оптимизации синтеза структурной схемы автомата (логический аспект оптимизации) и оптимизации размещения логической сети автомата в среде (топологический аспект оптимизации). Задача оптимизации структурной схемы заключается в минимизации числа функциональных элементов, образующих схему автомата, а задача оптимизации топологического размещения логической сети в среде сводится к минимизации количества связей и минимизации суммарной длины связей в схеме автомата. Оптимальная декомпозиция автоматов решает задачу минимизации числа функциональных элементов структурной схемы и задачу минимизации количества связей в схеме автомата.



Что касается задачи минимизации суммарной длины связей в схеме автомата, то этот вопрос обычно рассматривается не в логическом, а в топологическом проектировании схем цифровых автоматов.

В настоящее время известно несколько подходов к проблеме синтеза автоматов в ВС. В работах [222, 403] предлагаются методы, основанные на таком преобразовании графа логической сети, в результате которого получается программа настройки ВС. Заметим, что решению важных задач оптимального топологического размещения логических сетей в ВС посвящены работы [155, 222]. Известен подход, основанный на реализации автомата в ВС по временным логическим функциям [398]. В работах [15, 16] предлагаются методы реализации автоматов в криотронной ВС по каноническим уравнениям и по графу автомата без составления и преобразования логической сети. Достоинство этих методов — в простоте получения программы настройки криотронной ВС.

В этом параграфе излагается канонический метод синтеза произвольных автоматов в универсальной вычислительной среде, использующий идеи, предложенные в работах [15, 16] для криотронной среды. В качестве функционального элемента среды может использоваться универсальный логический элемент, например, стрелка Пирса или штрих Шеффера, а в качестве соединительного — элемент, реализующий функции  $P$ ,  $D$  и  $0$  [153].

Условное обозначение соединительного элемента среды показано на рис. 9.6. Функции  $P$ ,  $D$  и  $0$ , на одну из которых настраивается соединительный элемент, определяются матрицами

$$P = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \end{matrix}, \quad D = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \end{matrix}$$

и  $0$  — нулевой матрицей того же порядка.

Задачу синтеза конечного автомата в вычислительной среде сформулируем следующим образом. Пусть элемент ВС обладает автоматной и соединительной полнотой, т. е. элемент среды реализует логическую функцию ИЛИ—НЕ (стрелка Пирса), задержку, а также

соединительные функции  $P$ ,  $D$ ,  $0$ , и имеется автомат, заданный либо системой функций возбуждения элементарных автоматов и функций выходов, либо матрицей соединений. Требуется получить программы настройки ВС для указанных способов задания автомата.

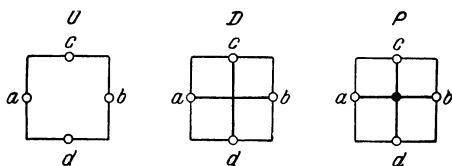


Рис. 9.6.

Рассмотрим вначале реализацию элементарных логических функций в ВС. Как известно [153], инверсию переменной, а также конъюнкцию и дизъюнкцию двух переменных в среде можно представить так, как показано

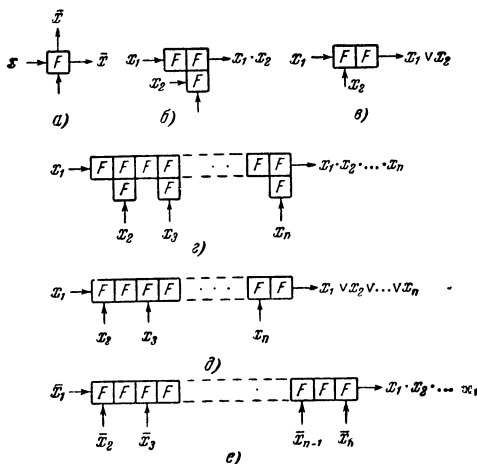


Рис. 9.7.

на рис. 9.7, *а, б, в*, где  $F$  — элемент среды, выполняющий логическую операцию ИЛИ — НЕ. Реализация в среде конъюнкции и дизъюнкции  $n$  переменных показана соответственно на рис. 9.7, *г, д*. В том случае, когда переменные подаются своими инверсными значениями, конъюнкцию  $n$  переменных можно реализовать в среде в виде

одной строки, как и дизъюнкцию  $n$  переменных (рис. 9.7, е).

Перейдем теперь к реализации в среде булевой функции. Будем считать, что она задана в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), которую в общем виде можно записать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^r \bar{x}_{i_1} \cdot \bar{x}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_{i_{k_i}},$$

где  $r$  — число элементарных конъюнкций (членов) ДНФ,  $k_i \in K = \{1, 2, \dots, n\}$ , а  $\bar{x}_i$  — прямое или инверсное значение переменной  $x_i$ .

Вся программа реализации ДНФ функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в среде состоит из программы  $P_{\&}$  реализации элементарных конъюнкций и программы  $P_{\vee}$  реализации дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Программа  $P_{\&}$  получается из матрицы  $M_{\&}$ , которая строится по следующему алгоритму.

1°. Нумеруем все члены ДНФ по порядку  $1, 2, \dots, r$ . Переходим к 2°.

2°. Подсчитываем число  $t$  различных переменных в ДНФ. Если одна и та же переменная входит в ДНФ как в прямом, так и в инверсном виде, считаем, что это две различные переменные. Переходим к 3°.

3°. Строим матрицу размерности  $r \times 2t$ . Каждые два столбца отмечаем одной переменной. Если переменная  $x_i$  входит в ДНФ прямым и инверсным значениями, то условимся инверсное значение  $\bar{x}_i$  ставить слева рядом с ее прямым значением. Строки матрицы, начиная сверху, нумеруются по порядку. Переходим к 4°.

4°. На пересечении строки, соответствующей  $j$  члену ДНФ и двух столбцов, отмеченных переменной  $\bar{x}_i$ , ставим две единицы, если  $\bar{x}_i$  входит в  $j$ -член ДНФ. В противном случае ставим нули. Переходим к 5°.

5°. В каждой строке вычеркиваем вторую слева и первую справа единицы. Затем исключаем столбцы, содержащие только вычеркнутые единицы. Конец работы алгоритма.

Программа  $P_{\&}$  получается из матрицы  $M_{\&}$  следующим образом. Первые слева единицы в каждой строке заменяются на элементы  $P$ , остальные единицы — на

элементы  $F$ . После этого производим коррекцию полученной программы. Если одна переменная используется в  $k$  строках, то увеличиваем количество столбцов этой переменной в  $k$  раз и оставляем в каждом столбце только один элемент  $F$ . Это делается для того, чтобы нижние элементы  $F$  не влияли на работу верхних элементов среды в одном и том же столбце. Коррекции не подлежат лишь такие ситуации, когда в одном столбце находятся несколько элементов  $P$  или ниже элемента  $F$  находится один или несколько элементов  $P$ . После этого заменяем нулевые элементы на элементы  $D$ , а все значения переменных, подаваемых на  $\Pi_{\&}$ , заменяем на инверсные. В построенной программе  $\Pi_{\&}$  справа на выходе каждой строки получается соответствующий член ДНФ.

Покажем построение  $\Pi_{\&}$  на примере. Пусть дизъюнктивная нормальная форма функции имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 x_5 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_3 x_5 \vee \bar{x}_1 x_3. \quad (9.12)$$

Здесь  $r = 5$ ,  $m = 6$ . Строим матрицу размером  $5 \times 12$  и отмечаем столбцы различными переменными. Ставим единицы и нули в соответствующих клетках матрицы.

0	0	0	0	1	х	0	0	0	0	1	х
0	0	0	0	0	0	1	х	1	х	0	0
0	0	1	х	1	1	0	0	1	х	0	0
0	0	0	0	0	0	1	х	0	0	1	х
1	х	0	0	0	0	1	х	0	0	0	0

$\uparrow$              $\uparrow$              $\uparrow$              $\uparrow$              $\uparrow$              $\uparrow$   
 $\bar{x}_1$      $x_1$              $x_2$              $x_3$              $x_4$              $x_5$

Рис. 9.8.

		$P$				$F$
				$P$	$F$	
	$P$	$F$	$F$		$F$	
				$P$		$F$
$P$				$F$		

$\uparrow$      $\uparrow$      $\uparrow$              $\uparrow$      $\uparrow$      $\uparrow$   
 $\bar{x}_1$   $x_1$   $x_2$      $x_3$   $x_4$   $x_5$

Рис. 9.9.

Получаем вначале матрицу  $M_{\&}$  (рис. 9.8), затем нескорректированную программу  $\Pi_{\&}$  (рис. 9.9). После коррекции приходим к программе  $\Pi_{\&}$  настройки среды (рис. 9.10), реализующей данную функцию.

Легко видеть, что при реализации произвольного члена ДНФ  $\bar{x}_{i_1} \cdot \bar{x}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_{i_{k_i}}$  первая по порядку переменная  $\bar{x}_{i_1}$  подается в программе  $\Pi_{\&}$  не на элемент  $F$ , а на элемент  $P$ . Назовем эту переменную образующей переменной данного члена ДНФ. Оказывается, что сложность  $\Pi_{\&}$  (количество столбцов) в общем случае

зависит от выбора образующих переменных. Если переменная  $\tilde{x}_i$  является образующей переменной в  $n$  членах ДНФ, то вместо  $n$  столбцов можно использовать один столбец с  $n$  элементами  $P$ . Помимо этого, как уже отмечалось, в одном столбце могут находиться одновременно один элемент  $F$  и несколько элементов  $P$  под ним, но не наоборот. Следовательно, упорядоченность членов ДНФ влияет на сложность программы  $\Pi_{\&}$

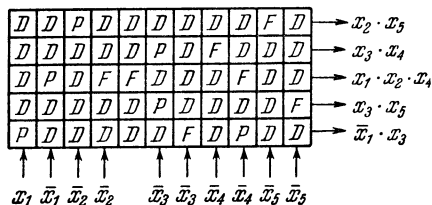


Рис. 9.10.

Учитывая эти обстоятельства, можно предложить следующий алгоритм оптимизации программы  $\Pi_{\&}$  реализации логической функции.

1°. Подсчитываем число вхождений  $\lambda^{(0)}(\tilde{x}_i)$  каждой переменной  $\tilde{x}_i$  во все члены ДНФ. Выбираем первую образующую переменную  $\tilde{x}_{i_0}$ , у которой наибольшая величина  $\lambda^{(0)}(\tilde{x}_i)$ . Включаем переменную  $\tilde{x}_{i_0}$  в множество образующих переменных  $M_1$ . Получаем  $M_1 = \{\tilde{x}_{i_0}\}$ . Переходим к 2°.

2°. Исключаем из множества членов ДНФ такие, которые содержат переменную  $\tilde{x}_{i_0}$ . Получаем сокращенное множество  $T_1$  членов ДНФ. Если множество  $T_1 \neq \emptyset$ , то переходим к 4°, в противном случае — к 9°.

3°. Исключаем из множества  $T_{k-1}$ , где  $k \in K = \{1, 2, \dots, p\}$  — номер цикла работы алгоритма, такие члены ДНФ, которые содержат переменную  $\tilde{x}_{i_{k-1}}$ . Получаем множество  $T_k$ . Если  $T_k \neq \emptyset$ , то переходим к 4°, в противном случае — к 8°.

4°. Из множества  $N_k$  всех переменных, входящих в члены ДНФ множества  $T_k$ , выбираем подмножество  $R_k$  таких переменных, которые входят совместно с одной из переменных множества  $M_k$  хотя бы в один из исключенных ранее членов ДНФ. Если множество  $R_k \neq \emptyset$ , то переходим к 5°, в противном случае — к 6°.

5°. Подсчитываем для каждой переменной  $\tilde{x}_i$  из множества  $R_k$  число вхождений  $\lambda^{(k)}(\tilde{x}_i)$  в множество  $T_k$ . Выбираем  $\tilde{x}_{ik}$  с наибольшей величиной  $\lambda^{(k)}(\tilde{x}_i)$ . Переходим к 7°.

6°. Подсчитываем для каждой переменной  $\tilde{x}_i$  из множества  $N_k$  число вхождений  $\lambda^{(k)}(\tilde{x}_i)$  в множество  $T_k$ . Выбираем  $\tilde{x}_{ik}$  с наибольшей величиной  $\lambda^{(k)}(\tilde{x}_i)$ . Переходим к 8°.

7°. Получаем множество  $M_{k+1}$ , включая переменную  $\tilde{x}_{ik}$  в множество  $M_k$ . Члену ДНФ, называемому отмеченным, в который образующая переменная  $\tilde{x}_{ik}$  входит совместно с одной переменной множества  $M_k$ , присваиваем порядковый номер  $(q+1)$ , где  $q$  — количество отмеченных ранее членов ДНФ\*). Переходим к 3°.

8°. Получаем множество  $M_{k+1}$ , включая переменную  $\tilde{x}_{ik}$  в множество  $M_k$ . Переходим к 3°.

9°. Конец работы алгоритма.

Отметим, что если в ходе выполнения алгоритма окажется, что несколько переменных имеют одинаковое число вхождений  $\lambda^{(k)}$ , то необходимо выполнить перебор этих вариантов.

В результате алгоритма получаем упорядоченное множество образующих переменных  $M_p = \{\tilde{x}_{i_0}, \tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_p}\}$  и упорядоченное множество отмеченных членов ДНФ. Образующие переменные из множества  $M_p$  располагаются по порядку в матрице  $M_\&$ , а отмеченные члены ДНФ реализуются в соответствующих строках, начиная сверху. Неотмеченные члены ДНФ и необразующие переменные располагаются в матрице  $M_\&$  произвольным образом. Далее  $M_\&$  и  $P_\&$  строятся так, как описано выше.

Покажем работу алгоритма оптимизации на примере функции, программа которой дана на рис. 9.10.

Находим вначале  $M_1 = x_3$ . Тогда  $T_1 = \{x_2x_5, x_1x_2x_4\}$ ,  $N_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ ,  $R_1 = \{x_4, x_5\}$ . Так как  $\lambda^{(1)}(x_4) = \lambda^{(1)}(x_5) = 1$ , то получаем подмножества  $M'_2 = \{x_3, x_4\}$  и  $M''_2 = \{x_3, x_5\}$ . Далее, во втором цикле алгоритма для  $M'_2$  находим  $T'_2 = \{x_2x_5\}$ ,  $N'_2 = \{x_2, x_5\}$ ,  $R'_2 = \{x_5\}$  и,

\*) На  $k+1$  цикле работы алгоритма в пункте 4° при выборе подмножества  $R_{k+1}$  отмеченные члены ДНФ не учитываются.

следовательно,  $M'_3 = \{x_3, x_4, x_5\}$ . В первом цикле алгоритма отмечаем член  $x_3x_4$  номером 1, а во втором цикле член  $x_3x_5$  — номером 2. Поскольку  $T'_3 = \emptyset$ , строим оптимизированную программу  $\Pi'_\&$ , которая показана на рис. 9.11. В случае выбора  $M''_2$  получается программа  $\Pi''_\&$  такой же сложности.

Отметим, что, несмотря на оптимизацию, такая реализация программ  $\Pi_\&$  требует большого числа элементов, особенно тогда, когда в каждом члене ДНФ содержится более двух переменных. Причиной этого служит то обстоятельство, что в общем случае для каждого нахождения переменной требуется два столбца в программе  $\Pi_\&$ . Это является существенным недостатком такой программы.

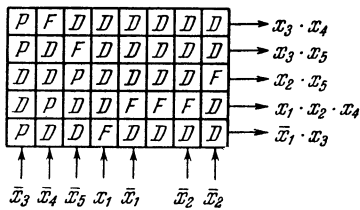


Рис. 9.11.

Перейдем теперь к получению программы  $\Pi_V$ , которая в общих чертах строится

следующим образом. Множество  $r$  всех строк программы  $\Pi_\&$  разбивается на пары, начиная сверху. Для каждой пары рядом с первой сверху переменной ставятся в одной строке два элемента  $F$ , а во второй строке — элементы  $P$  и  $0$  соответственно. Для исключения влияния элементов различных пар друг на друга элементы  $i + 1$  пары сдвигаются на один столбец вправо по отношению к элементам  $i$  пары. Получаем, таким образом,  $\left] \frac{r}{2} \left[$  переменных,

для которых разбиение на пары и расстановка элементов  $F$ ,  $P$  и  $0$  повторяется вновь. Этот процесс продолжается до тех пор, пока на выходе не получится одна переменная. В последнем столбце под элементом  $F$  ставятся нули, а в незаполненных клетках программы — элементы  $D$ . Отметим два обстоятельства.

1) Элементы  $F$ ,  $F$ ,  $P$  и  $0$  очередной пары можно сдвигать влево на один столбец, если слева от первого элемента  $F$  стоит пустая клетка; элемент  $P$  в этом случае не ставится.

2) При нечетном числе переменных на  $i$  шаге образования пар переменных последняя нечетная переменная





Общая блок-программа реализации конечного автомата в ВС показана на рис. 9.13.

Программа  $\Pi_{\&}$  служит для получения членов ДНФ в выражениях (9.13) и (9.14). На программах  $\Pi_{\vee}^{ij}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, s\}$ ,  $i \in I$ , получается функция возбуждения по  $i$  входу  $j$  элементарного автомата. Функции выходов  $l_1(t)$ ,  $l_2(t), \dots, l_p(t)$  реализуются соответственно на программах  $\Pi_{\vee}^{1j}$ ,  $\Pi_{\vee}^{2j}, \dots, \Pi_{\vee}^{pj}$ . Для того чтобы соседние программы  $\Pi_{\vee}$  для функций выходов и функций возбуждения элементарных автоматов не влияли друг на друга, между ними должны быть нулевые разделительные строки. В программе  $\Pi_{U_j}$ ,  $j \in J$ , реализуется элементарный автомат  $U_j$ . Про-

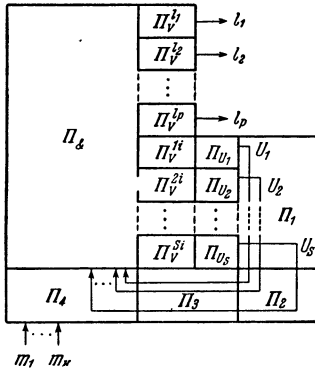


Рис. 9.13.

граммы  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  служат для подачи внутренних, а  $\Pi_4$  — входных и внутренних переменных на программу  $\Pi_{\&}$ .

Блок-программа реализации автомата в ВС в конкретном случае может оказаться намного экономичнее, если строить программы  $\Pi_{\&}$  и  $\Pi_{\vee}$  для групп элементарных автоматов или для каждого элементарного автомата в отдельности. Очевидно, что в этом

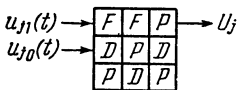


Рис. 9.14.

случае программы  $\Pi_1 - \Pi_4$  будут строиться соответственно для каждой группы элементарных автоматов или для каждого элементарного автомата. В конкретных случаях блок-программу можно также частично видоизменить с целью уменьшения площади, занимаемой этой программой.

Элементарный автомат, в качестве которого будем использовать триггер с отдельными входами, можно выполнить из функциональных и соединительных элементов ВС так, как это показано на рис. 9.14. Если необходимо применить другой тип элементарных автома-

тов, то очевидно, что описываемый метод реализации автоматов в ВС можно использовать и в этом случае.

Программы  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  получаются из матриц  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$ . В матрице  $M_1$  число строк равно числу строк, занимаемых программами  $P_\nu$ , а число столбцов равно  $s$ . На пересечении  $j$  столбца и строки, на которую подается выход элементарного автомата  $U_j$ , ставится единица, а остальные элементы матрицы  $M_1$  равны нулю. Матрица  $M_2$  является единичной матрицей порядка  $s$ , а  $M_3$  — нулевой прямоугольной матрицей, имеющей  $s$  строк и число столбцов, равное наибольшей сумме числа столбцов в программах  $P_\nu^{it}$  и  $P_{U_j}$ ,  $j \in J$ . Матрица  $M_4$  содержит  $s$  строк и столько столбцов, сколько их имеется в программе  $P_\&$ . В этой матрице ставится единица на пересечении  $j$  строки и  $i$  столбца, если на  $i$  столбец программы  $P_\&$  подается переменная  $U_j$ . Остальные элементы матрицы  $M_4$  равны нулю.

Для того чтобы получить программы  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$ , необходимо в соответствующих матрицах заменить все единицы на элементы  $P$ , а нули — на элементы  $D$ .

Между программами  $P_4$  и  $P_\&$  необходимо иметь строку элементов ВС, которую назовем строкой сопряжения. Каждый элемент этой строки настраивается на выполнение либо функции  $D$ , либо функции  $F$ , либо функции  $P$  в зависимости от того, подается ли на программу  $P_\&$  соответственно прямое значение переменной  $x_i$ , инверсное значение  $\bar{x}_i$  или переменная не подается. Для того чтобы в строке сопряжения исключить взаимное влияние соседних элементов  $F$ , на которые подаются различные переменные, необходимо либо реализовать инверсию одной из переменных на другом участке ВС, либо поставить между ними элемент 0, а следовательно, в программе  $P_\&$  ввести столбец из элементов  $D$ .

Как уже отмечалось ранее, основной причиной, ведущей к усложнению программы  $P_\&$ , является то, что в одном столбце нельзя поместить два и более элементов  $F$ . Программу реализации автомата в ВС можно построить с меньшей затратой элементов, если несколько видоизменить элемент среды  $F$  следующим образом: на вертикальном выходе, который существенно не используется в программе  $P_\&$ , будем получать не функцию,

а переменную, которая подается на вертикальный вход элемента  $F$ . На горизонтальном выходе элемента  $F$ , как и ранее, будет получаться функция двух переменных. В программе  $\Pi_{\&}$ , построенной из таких модифицированных элементов, количество столбцов не зависит от числа вхождений переменных, а зависит только от числа различных переменных.

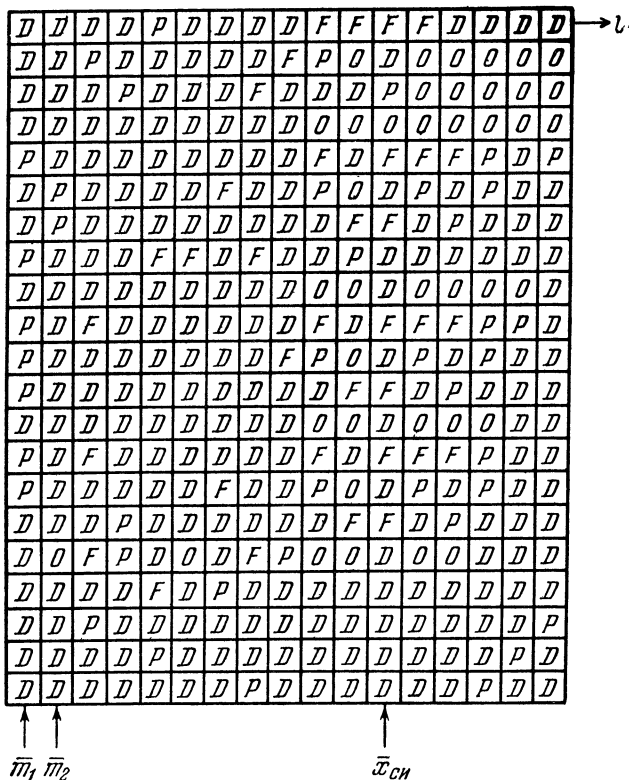


Рис. 9.15.

Блок-программа реализации автомата в модифицированной ВС остается прежней. Отметим только, что при получении программы  $\Pi_{\&}$  из матрицы  $M_{\&}$  отпадает необходимость в ее коррекции и несущественно видо-

изменяется программа  $\Pi_V$ , так как в модифицированном элементе  $F$  нельзя получить функцию с вертикального выхода.

Приведенный метод реализации автоматов в ВС подразумевал, строго говоря, реализацию в среде асинхронных автоматов. Однако этот метод можно использовать и при реализации синхронных автоматов. В этом

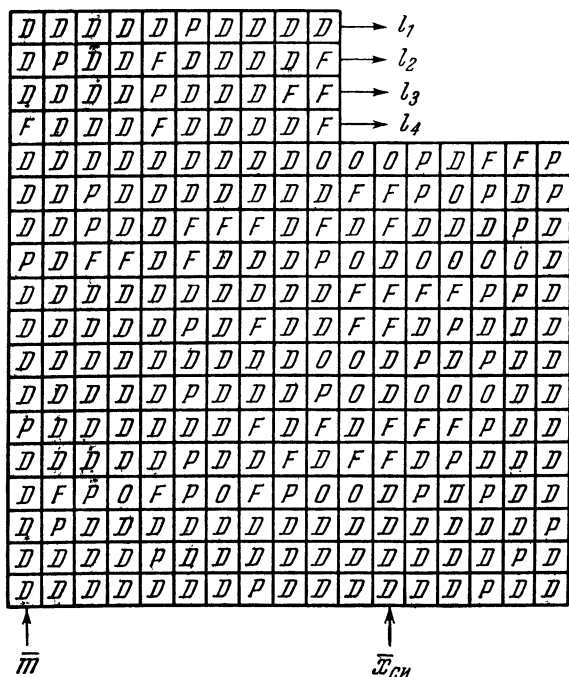


Рис. 9.16.

случае на выходе каждой программы  $\Pi_V^i$ ,  $j \in J$ ,  $i \in I$ , на последний элемент  $F$  подается инверсное значение синхронизирующего сигнала. В общем случае для этого вводится дополнительный столбец из элементов ВС, а в среде с модифицированным элементом  $F$  дополнительные элементы ВС не требуются.

При синтезе абстрактных автоматов в ВС исходным заданием автомата является представление его в виде

графа или матрицы соединений. По графу автомата или матрице соединений требуется получить программу настройки ВС, реализующую отображение, индуцируемое исходным автоматом. Для этого вначале по матрице соединений автомата производим оптимальную декомпозицию, в результате которой получаем матрицы соединений элементарных абстрактных автоматов. По ним записываем функции возбуждения элементарных автоматов и функции выходов, минимизируем их и описанным выше способом получаем программу настройки ВС.

В качестве примера синтеза синхронных автоматов в ВС на рис. 9.15 и 9.16 соответственно показаны программы настройки ВС, в которой используется модифицированный элемент, на реализацию автомата, моделирующего выработку условного рефлекса (пример 9.2) и дешифратора последовательного действия (пример 9.3), построенные по минимизированным функциям возбуждения триггеров и функциям выходов, найденным в результате декомпозиции.

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. Агасандян Г. А., Автоматы с переменной структурой. ДАН СССР, 1967, 174, № 3.
2. Айзерман М. А., Гусев Л. А., Розоноэр Л. И., Смирнова И. М., Таль А. А., Конечные автоматы. I, II. Автоматика и телемеханика, 1960, № 2, № 3.
3. Айзерман М. А., Гусев Л. А., Розоноэр Л. И., Смирнова И. М., Таль А. А., Логика. Автоматы. Алгоритмы. Физматгиз, М., 1963.
4. Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Теоретические основы метода потенциальных функций в задаче об обучении автоматов разделению входных ситуаций на классы. Автоматика и телемеханика, 1964, № 6.
5. Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Метод потенциальных функций в задаче о восстановлении характеристики функционального преобразователя по случайно наблюдаемым точкам. Автоматика и телемеханика, 1964, № 12.
6. Андон Ф. И., Брона И. И., Войтова Е. Л., Капитонова Ю. В., Малая система проектирования схем цифровых автоматов. Сб. «Вопросы теоретической кибернетики», «Наукова думка», Киев, 1965.
7. Анисимов В. Н., Некоторые вопросы теории линейных графов. Автоматика и телемеханика, 1967, № 8.
8. Атамов Ф. А., Об одном методе синтеза абстрактных конечных асинхронных автоматов. Труды Вычислительного центра АН Азерб. ССР, 1965, № 3.
9. Ауфенкамп Д. Д., Хон Ф. Е., Сешу С., Теория сетей. «Математика», периодический сборник переводов иностр. статей, 3 : 3, 1959.
10. Ауфенкамп Д. Д., Хон Ф. Е., Анализ последовательностных машин. I и II. «Математика», периодический сборник переводов иностр. статей, 3 : 3, 1959; 3 : 6, 1959.
11. Базилевский Ю. Я., Логика конечных автоматов. Сб. «Вопросы теории математических машин», М., 1962, вып. 2.
12. Базилевский Ю. Я., Шрейдер Ю. А., Методы оценки производительности универсальных цифровых машин с программным управлением. Сб. «Вопросы теории математических машин», М., 1958, вып. 1.
13. Базилевский Ю. Я., О некоторых преобразованиях конечных автоматов. Сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем», М., 1960.

14. Базилевский Ю. Я., Вопросы теории временных логических функций. Сб. «Вопросы теории математических машин», М., 1958, № 1.
15. Бандман О. Л., Реализация автоматов в криотронной вычислительной среде. Сб. «Вычислительные системы». Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, Новосибирск, 1968, вып. 3.
16. Бандман О. Л., Реализация автоматов в криотронной вычислительной среде по заданному графу состояний. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1969, вып. 33.
17. Баранов С. И., О синтезе схем на автоматах памяти со многими состояниями. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
18. Баранов С. И., Россиков В. В., Синтез абстрактного автомата по графу алгоритма. Электронная техника, сер. 6, Микроэлектроника, М., 1967, вып. 1.
19. Барздинь Я. М., Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга, Проблемы кибернетики, М., 1965, вып. 15.
20. Барздинь Я. М., Моделирование логических сетей на автоматах Неймана—Черча. Проблемы кибернетики, М., 1966, вып. 17.
21. Барздинь Я. М., Емкость среды и поведение автоматов. ДАН СССР, 1965, 160, № 2.
22. Берендс Т. К., Таль А. А., Пневматические релейные схемы. Автоматика и телемеханика, 1959, № 11.
23. Берж К., Теория графов и ее применения. ИЛ, М., 1962.
24. Бёркс А., Райт Дж., Теория логических сетей. Кибернетический сб., М., 1962, № 4.
25. Бёркс А., Клеточные автоматы. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
26. Бионди Е., Гуардабасси Г., Ринальди С., Об анализе дискретных марковских систем при помощи стохастических графов. Автоматика и телемеханика, 1967, № 2.
27. Биркгоф Г., Теория структур. ИЛ, М., 1952.
28. Блох А. Ш., Синтез переключательных схем. Наука и техника, Минск, 1966.
29. Блох А. Ш., Об управляющих машинах. ДАН БССР, 1965, 9, № 5.
30. Блох А. Ш., Канонический метод синтеза контактных схем. Автоматика и телемеханика, 1961, № 6.
31. Блох А. Ш., Синтез релейно-контактных схем. ДАН СССР, 1957, 117, № 4.
32. Блох А. Ш., Синтез многотактных схем. Тр. Ин-та машиноведения и автоматизации АН БССР, 1961, № 1.
33. Блох А. Ш., О задачах, решаемых последовательностными машинами. Проблемы кибернетики, М., 1960, вып. 3.
34. Блох А. Ш., Канонический метод синтеза переключательных схем. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
35. Боголюбов И. Н., Варшавский В. И., Троичные пороговые элементы и вопросы их синтеза. Сб. «Синтез релей-

- ных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
36. Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я., Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов. Сб. «Сети передачи информации и их автоматизация», «Наука», М., 1965.
  37. Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я., Метод синтеза в мажоритарном базисе. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
  38. Боднарчук В. Г., О событиях, представляемых в конечном автомате одним состоянием. УМЖ, 1962, № 2.
  39. Боднарчук В. Г., Система уравнений в алгебре событий. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, № 6.
  40. Боднарчук В. Г., Анализ взвешенных графов методом решения системы уравнений в алгебре событий. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, М., 1965.
  41. Борковский Б. А., Пухов Г. Е., Квазианалоговые дискретные моделирующие среды. Кибернетика, 1967, № 5.
  42. Бородянский Ю. М., Эксперименты с конечными автоматами Мура. Кибернетика, 1965, № 6.
  43. Бузурханов В., Об одном методе перехода от матричных форм задания конечных автоматов к табличным и обратно. Сб. «Вопросы кибернетики и вычислительной математики», Ташкент, 1966, вып. 4.
  44. Бурбаки Н., Теория множеств, «Мир», М., 1965.
  45. Бурков В. Н., Ловецкий С. Е., Методы решения экстремальных комбинаторных задач. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 4.
  46. Бусленко Н. П., К теории сложных систем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 6.
  47. Бутрименко А. В., О поиске кратчайших путей по графу при его изменениях. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 6.
  48. Бутрименко А. В., О среднем расстоянии между вершинами графа. Сб. «Сети передачи информации и их автоматизация», «Наука», М., 1965.
  49. Бутрименко А. В., Лазарев В. Г., Система поиска оптимальных путей передачи сообщений. Сб. «Проблемы передачи информации», 1965, 1, 1.
  50. Бутрименко А. В., Лазарев В. Г., Игры автоматов и управление сетями связи. Сб. «Самонастраивающиеся системы. Распознавание образов. Релейные устройства и конечные автоматы», «Наука», М., 1967.
  51. Бухараев Р. Г., Автоматное преобразование вероятностных последовательностей. Сб. «Вероятностные методы и кибернетика», Казань, 1966, вып. 4.
  52. Бухараев Р. Г., Вероятностные автоматы. Кибернетика, 1968, № 2.
  53. Буцан Г. П., Варвак Л. П., К вопросу об играх на графе. Алгебра и математическая логика. Изд-во Киевского университета, 1966.



54. Бучма Т. Я., Карташев В. И., Автоматизация получения наилучшего объединения микропрограммных автоматов. Сб. Теория дискретных автоматов, «Зинатне», Рига, 1967.
55. Вавилов Е. Н., Лобанов Л. П., Об одном способе задания автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 3.
56. Вавилов Е. Н., Лобанов Л. П., Синтез автоматов с минимальной частотой срабатывания элементов памяти. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 3.
57. Вавилов Е. Н., Портной Г. П., Синтез схем электронных цифровых машин. «Советское радио», М., 1964.
58. Вавилов Е. Н., Осинский Л. М., Об одном методе структурного синтеза конечных автоматов. Автоматика, 1963, № 2.
59. Вавилов Е. Н., Шишков Д. Б., Об одном методе экономичного кодирования автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 2.
60. Вавилов Е. Н., Шишков Д. Б., Анализ и синтез автоматов, заданных системой функций возбуждения и выходов. Кибернетика, 1967, № 4.
61. Вавилов Е. Н., Лобанов Л. П., Количественный способ задания конечных автоматов. Сб. «Теория автоматов», Киев, 1967, вып. 2.
62. Вайсборд Э. М., Розенштейн Г. Ш., Об одном методе построения оптимальных сред для неустойчивых автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 2.
63. Валигурский С., Алгоритм упрощения булевых выражений на вычислительной машине. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
64. Ванге Х. Л., Получение исходных данных для диагностики конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 1.
65. Ванге Х. Л., Минимальная длина полной проверки асинхронного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 2.
66. Варшавский В. И., Некоторые вопросы теории логических сетей, построенных из пороговых элементов. Сб. «Вопросы теории математических машин», «Наука», М., 1962, вып. 2.
67. Варшавский В. И. и др., Поведение автоматов в периодических случайных средах и задача синхронизации при наличии помех. Сб. «Проблемы передачи информации», 1965, 1, I.
68. Варшавский В. И., Воронцова И. П., Стохастические автоматы с переменной структурой. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
69. Варшавский В. И., Гершт А. М., Поведение непрерывных автоматов в случайных средах. Сб. «Проблемы передачи информации», 1966, 2, 3.
70. Варшавский В. И., Мараховский В. Б., Песчанский В. А., О задаче голосования в цепи автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 4.
71. Вартапетов Э. А., Кодирование абстрактных автоматов нормальными кодами. I. Кибернетика, 1968, № 6.

72. Василевский А. В., Моделирование механизмов релейными устройствами. Вычислительная техника в машиностроении. Минск, 1967.
73. Васильев И. Б., Пятецкий-Шапиро И. И., О времени приспособления автомата к внешней среде. Автоматика и телемеханика, 1967, № 7.
74. Васильева Н. П., Гашковец Н., Пильц З., Алгебраический метод определения функций возбуждения триггеров. Автоматика и телемеханика, 1967, № 5.
75. Ващенко В. П., Метод синтеза одного класса схем на основе функциональной разделимости. Кибернетика, 1969, № 1.
76. Вейц А. В., Принципы адаптации на однородных структурах. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
77. Вейц А. В., Прангишвили И. В., Однородная самоорганизующаяся матрица и некоторые аспекты ее применения. Автоматика и телемеханика, 1966, № 8.
78. Ветухновский Ф. Я., Задачи о покрытиях графа системой окрестностей его вершин. Проблемы кибернетики, М., 1967, вып. 19.
79. Визирев И. С., Синтез схем логических автоматов без соединений при произвольном числе входных сигналов. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 6.
80. Визинг В. Г., О числе ребер в графе с данным радиусом. ДАН СССР, 1967, 173, № 6.
81. Визинг В. Г., Декартово произведение графов. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1963, вып. 9.
82. Визинг В. Г., Хроматический класс мультиграфа. Кибернетика, 1965, № 3.
83. Визинг В. Г., Критические графы с данным хроматическим классом. Сб. «Дискретный анализ», Новосибирск, 1965, вып. 5.
84. Визинг В. Г., Плесневич Г. С., К проблеме минимальной раскраски вершин графа. Сиб. матем. журнал, 1965, 6, № 1.
85. Визинг В. Г., Об оценке хроматического класса графа. Сб. «Дискретный анализ», Новосибирск, 1964, вып. 3.
86. Визинг В. Г., Гольдберг В. С., О длине обхода сильно связного графа. Кибернетика, 1969, № 1.
87. Винер Н., Кибернетика. «Советское радио», М., 1968.
88. Виноград С., Коуэн Дж., Надежные вычисления при наличии шумов, «Наука», М., 1968.
89. Витавер Л. М., Об одной вершинно-реберной функции от графов. ДАН СССР, 1962, 145, № 2.
90. Войшвилло Е. К., Об одном формализованном языке для описания двухполюсных сетей и контактных схем. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
91. Воловник Г. А., Оценка надежности конечного автомата с учетом переживающих отказов. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 1.
92. Воржева В. В., Метод получения свободной от составлений частной минимальной формы булевых функций. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.

93. Гаазе-Раппопорт М. Г., Автоматы и живые организмы. Физматгиз, М., 1962.
94. Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1950.
95. Гаврилов М. А., Основные формулы синтеза релейных схем. Автоматика и телемеханика, 1954, № 10.
96. Гаврилов М. А., Минимизация булевых функций, характеризующих релейные цепи. Автоматика и телемеханика, 1950, № 9.
97. Гаврилов М. А., Структурная избыточность и надежность работы релейных устройств. Труды I Международного конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, М., 1961, т. 3.
98. Гаврилов М. А., Построение релейных устройств и конечных автоматов из блоков. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963.
99. Гаврилов М. А., Современное состояние теории релейных устройств. Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, М., 1963.
100. Гаврилов М. А., Об уточнении оценки для определения числа состояний при композиции конечных автоматов. Автоматика и телемеханика, 1964, № 11.
101. Гаврилов М. А., Оценка условий работы релейных устройств с точки зрения сложности их реализации. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
102. Гаврилов М. А., Проблемы поиска минимальных решений при синтезе структуры релейных устройств. Сб. «Самонастраивающиеся системы. Распознавание образов. Конечные автоматы и релейные устройства», «Наука», М., 1967.
103. Гаврилов М. А., Синтез таблиц переходов методом обобщенных состояний. Автоматика и телемеханика, 1967, № 1.
104. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., О континуальных моделях управляющих систем. ДАН СССР, 1960, 131, № 6.
105. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., О некоторых способах управления сложными системами. УМН, 1962, 17, № 1.
106. Гилл А., Введение в теорию конечных автоматов. «Наука», М., 1966.
107. Глебский Ю. В., Кодирование автоматов с конечной внутренней памятью. Проблемы кибернетики, 1962, вып. 7.
108. Глинский Г., Теоретико-информационные проблемы теории ненадежных автоматов. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
109. Глушков В. М., Об одном алгоритме синтеза абстрактных автоматов. УМЖ, 1960, 12, № 2.
110. Глушков В. М., Об одном методе анализа абстрактных автоматов. ДАН УССР, 1960, № 9.
111. Глушков В. М., Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, 1, № 3.
112. Глушков В. М., Абстрактная теория автоматов. УМН, 1961, 16, № 5.

113. Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, М., 1962.
114. Глушков В. М., Самоорганизующиеся системы и абстрактная теория автоматов. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1962, № 3.
115. Глушков В. М., Введение в кибернетику. Киев, Изд-во АН УССР, 1964.
116. Глушков В. М., О применении абстрактной теории автоматов для минимизации микропрограмм. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 1.
117. Глушков В. М., Теория автоматов и вопросы проектирования цифровых машин. Кибернетика, 1965, № 1.
118. Глушков В. М., Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. Кибернетика, 1965, № 5.
119. Глушков В. М., Об определяющих соотношениях в двухсумматорном операционном устройстве. Кибернетика, 1966, № 1.
120. Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летический А. А., Об автоматизации проектирования вычислительных машин. Кибернетика, 1967, № 5.
121. Глушков В. М., О полноте систем операций в электронных вычислительных машинах. Кибернетика, 1968, № 2.
122. Гобземис А. Ю., Минимизация числа промежуточных переменных при синтезе последовательных асинхронных логических схем. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
123. Гобземис А. Ю., Два критерия оценки эффективности метода инерционных подавтоматов. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 2.
124. Голубев-Новожилов Ю. С., Многомашинные комплексы вычислительных средств. «Советское радио», М., 1967.
125. Гольдберг М. Г., О диаметре сильно связанного графа. ДАН СССР, 1966, 170, № 4.
126. Горбатов В. А., Синтез графов одного класса и применение его при решении некоторых задач кибернетики. Сб. «Кибернетика», «Наука», М., 1967.
127. Горбатов В. А., Синтез логических схем в произвольном базисе. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
128. Горобец В. Г., Синтез и минимизация последовательностных схем на основе истинностно-полных элементов. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
129. Городовой В. Р., Кучеров В. М., Пархоменко П. П., Томфельд Ю. Л., Логическая машина для автоматического синтеза контактных  $(1, k)$  полюсников. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
130. Горохов Ю. П., Соколов Г. А., Об одном способе кодирования информации при решении на ЭВМ некоторых комбинаторных задач. Сб. «Цифровая вычислительная техника и программирование», «Советское радио», М., 1967, вып. 3.
131. Гращенко В. С., Об одной частной задаче синтеза сложных систем. Сб. «Надежность и эксплуатация радиоэлектронной техники», Киев, 1965, вып. 2.

132. Григорьян А. К., Метод декомпозиции конечных автоматов. Автоматика и телемеханика, 1968, № 5.
133. Григорьян А. К., Метод декомпозиции конечных автоматов с выделением выходного и входного автоматов. Автоматика и телемеханика, 1968, № 10.
134. Григорьян Ю. Г., Использование вычислительных машин для синтеза цифровых автоматов. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1963, 16, № 6.
135. Гринберг В. С., Детерминизация систем графов и синтез конечных автоматов. Сиб. матем. журнал, 1966, 7, № 6.
136. Гринберг В. С., Некоторые новые оценки в теории конечных автоматов. ДАН СССР, 1966, 166, № 5.
137. Гурвиц Е. П., К синтезу одного типа синхронных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 4.
138. Гурвиц Е. П., Синтез кодирующих устройств циклических корректирующих кодов. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
139. Гурвиц Е. П., Синтез декодирующих устройств кодов с исправлением пачек ошибок. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
140. Гусев Л. А., Таль А. А., О возможности построения алгоритмов абстрактного синтеза последовательностных машин в анкетном языке. Автоматика и телемеханика, 1965, № 3.
141. Давыдов Э. Г., О конечных графах и их автоморфизмах. Проблемы кибернетики, М., 1966, вып. 17.
142. Давыдов Э. Г., Об автоморфизмах объединений прямых произведений конечных графов. Кибернетика, 1968, № 6.
143. Девятков В. В., Реализация конечного автомата на двух сдвиговых регистрах. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 3.
144. Диденко В. П., Некоторые методы минимизации булевых функций. Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, М., 1963.
145. Диденко В. П., Построение мостиковых структур релейных устройств. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
146. Диденко В. П., Минимизация структур релейных устройств со многими выходами при предварительном выделении ядра. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
147. Дьяченко В. Ф., Построение граф-схем алгоритмов. Сб. «Проблемы передачи информации», 1963, вып. 12.
148. Дьяченко В. Ф., Преобразование логических схем алгоритмов. Сб. «Принципы построения сетей и систем управления», «Наука», М., 1964.
149. Евреинов Э. В., О возможности построения вычислительных систем в условиях запаздывания сигналов. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1962, вып. 3.
150. Евреинов Э. В., О микроструктуре элементарных машин вычислительной системы. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1962, вып. 4.

151. Евреинов Э. В., Косарев Ю. Г., О вычислительных системах высокой производительности. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, № 4.
152. Евреинов Э. В., Теоретические основы построения вычислительных сред. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1965, вып. 16.
153. Евреинов Э. В., Косарев Ю. Г., Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1966.
154. Егоров И. П., Ускач М. А., Способ реализации элементов и узлов электронных устройств на решетчатых структурах. Сб. «Новые бесконтактные электронные устройства», МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского, 1966.
155. Егоров И. П., Канонический метод отображения автомата на однородную сеть. Труды межвузовской научной конференции по теории и принципам построения цифровых моделей и цифровых интегрирующих машин, Таганрог, 1969.
156. Егоров И. П., Прангишвили И. В., Ускач М. А., Однородная микроэлектронная структура и реализация в ней логических функций. Автоматика и телемеханика, 1967, № 7.
157. Емельянов-Ярославский А. Е., Принципы неформальноорганизуемого автомата. Сб. «Самонастраивающиеся автоматические системы», «Наука», М., 1965.
158. Ершов П. П., Сведение задачи распределения памяти при составлении программ к задаче раскраски вершин графов. ДАН СССР, 1962, 142, № 4.
159. Ершова Э. Б., Способ оптимального кодирования внутренних состояний конечного автомата. Сб. «Проблемы передачи информации», 1964, вып. 17.
160. Ершова Э. Б., Оценка сложности микропрограммного датчика. Сб. «Проблемы передачи информации», 1964, вып. 17.
161. Жук К. Д., Метод синтеза структур многосвязных систем при помощи графов сигналов. Автоматика, Киев, 1965, № 6.
162. Журавлев Ю. И., Об отделимости подмножеств вершин  $n$ -мерного единичного куба. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Изд-во АН СССР, М., 1958, т. 51.
163. Журавлев Ю. И., О невозможности построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики в одном классе алгоритмов. ДАН СССР, 1960, 132, № 3.
164. Журавлев Ю. И., Теоретико-множественные методы в алгебре логики. Проблемы кибернетики, М., 1962, вып. 8.
165. Задыхайло И. Б., Алгоритм выделения всех вершин ориентированного графа, принадлежащих контурам. Сб. «Цифровая вычислительная техника и программирование», «Советское радио», М., 1967, вып. 2.
166. Закревский А. Д., К синтезу последовательностных автоматов. Труды СФТИ, Томск, 1960, вып. 40.
167. Закревский А. Д., Универсальная система для решения задач типа синтеза релейных схем. Труды СФТИ, Томск, 1963, вып. 42.
168. Закревский А. Д., ЛЯПАС — логический язык представления алгоритмов синтеза. Сб. «Теория автоматов», Киев, 1964.

169. Закревский А. Д., Метод синтеза функционально устойчивых автоматов. ДАН СССР, 1959, 129, № 4.
170. Закревский А. Д., К теории линейных преобразователей двоичных последовательностей. Автоматика и телемеханика, 1962, № 11.
171. Закревский А. Д., О сокращении переборов при решении некоторых задач синтеза дискретных автоматов. Изв. вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 1.
172. Закревский А. Д., Алгоритмический язык ЛЯПАС и автоматизация синтеза дискретных автоматов. Изд-во Томского университета, Томск, 1966.
173. Закревский А. Д., Янковская А. Е., Практические алгоритмы кодирования внутренних состояний асинхронных автоматов. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 3.
174. Зарецкий К. А., Построение дерева по набору расстояний между тысячами вершинами. УМН, 1965, № 6.
175. Зарецкий К. А., О гамильтоновом цикле и гамильтоновой цепи в декартовом произведении двух графов. Кибернетика, 1966, № 5.
176. Зиман Ю. Л., О графах специального типа. ДАН СССР, 1965, 162, № 4.
177. Зуховицкий С. И., Радчик И. А., Математические методы сетевого планирования. «Наука», М., 1965.
178. Зыков А. А., О некоторых свойствах линейных комплексов. Матем. сб., 1949, 24 (66), № 2.
179. Зыков А. А., Алгебра комплексов. Матем. сб., 1957, 41, № 2.
180. Зыков А. А., Функции от графов, определяемые линейными уравнениями. Сообщ. 1, Изв. СО АН СССР, 1959, № 5; Сообщ. 2, 1960, № 9.
181. Зыков А. А., Реберно-вершинные функции и распределительные свойства графов. ДАН СССР, 1961, 139, № 4.
182. Зыков А. А., Цикломатические и распределительные свойства мультиграфов. ДАН СССР, 1962, 143, № 6.
183. Зыков А. А., Теория конечных графов. «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1969.
184. Иванова О. Н., Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Синтез электронных схем дискретного действия. «Связь», М., 1964.
185. Иван Ш., Об автоматах конечного порядка без потери информации. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
186. Игнатущенко В. В., Об одном способе размещения логических сетей в однородных универсальных структурах. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
187. Илзиня И. Г., О нахождении клик графа. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 2.
188. Кабулов В. К., О графах Мура и Мили. Изв. АН Узб. ССР, сер. техн. наук, 1965, № 5.
189. Казakov В. Д., Нахождение минимального числа простых импликантов произвольной логической функции  $n$  переменных. Сб. «Автоматическое регулирование и управление», Изд-во АН СССР, М., 1960.

190. Казаков В. Д., Нахождение минимальных нормальных форм логической функции методом ограниченного перебора. Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, М., 1963.
191. Казаков В. Д., Минимизация булевых функций с учетом операции вынесения за скобки. Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, М., 1963.
192. Казаков В. Д., Алгоритмы нахождения абсолютно минимальных выражений логических функций. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
193. Каляев А. В., Дворянцев Ю. А., Мелихов А. Н., Применение методов теории графов к синтезу потенциальных схем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 4.
194. Каляев А. В., Алгоритмы вычислительных структур, состоящих из цифровых интеграторов. Сб. «Вычислительные системы». Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, Новосибирск, 1968, вып. 2.
195. Каляев А. В., Теория цифровых интегрирующих машин и структур. «Советское радио», М., 1970.
196. Кальмар Л., О вложении теории автоматических цифровых вычислительных машин в алгебраическую теорию автоматов Мура, Мили и Глушкова. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов», «Наука», М., 1965.
197. Канделаки Н. П., Церцвадзе Г. Н., О поведении некоторых классов автоматов (стохастических) в случайных средах. Автоматика и телемеханика, 1966, № 6.
198. Капитонова Ю. В., Кодирование абстрактных автоматов с-кодами. Кибернетика, 1965, № 1.
199. Капитонова Ю. В., Об изоморфизме абстрактных автоматов. I, II. Кибернетика, 1965, № 3, № 5.
200. Капитонова Ю. В., Рабинович З. Л., Общие принципы синтеза комбинационных схем. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, М., 1965.
201. Карацуба А. А., Решение одной задачи из теории конечных автоматов. УМН, 1960, 15, № 3.
202. Карибский В. В., Пархоменко П. П., Согомонян Е. С., Техническая диагностика комбинационных устройств. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
203. Карибский В. В. и др., Вопросы контроля работоспособности и поиска неисправностей в конечных автоматах. ДАН СССР, 1965, 161, № 1.
204. Карибский В. В. и др., Метод построения программ проверки устройств с памятью, описываемых моделью конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 2.
205. Карташев В. И., Применение автоматов в блоках управления цифровых вычислительных машин. Автоматика, 1963, № 6.
206. Карташева С. П., Рациональное кодирование автоматов с помощью канонических графов. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 6; 1969, № 4.



207. Келлер Ф. Э., Синтез кодирующих устройств телемеханики на основе графов кодовых пересечений. Изв. Вузов, Приборостроение, 1966, № 4.
208. Кельманс А. К., О свойствах характеристического многочлена графа. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», М.—Л., 1967, № 4.
209. Кельманс А. К., О метрических свойствах деревьев. Сб. «Кибернетика и управление», М., 1967.
210. Кельманс А. К., О построении кратчайшей связывающей сети. Сб. «Кибернетика и управление», М., 1967.
211. Кельманс А. К., О числе деревьев графа. I, II. Автоматика и телемеханика, 1965, № 12; 1966, № 2.
212. Клини С. К., Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. Сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956.
213. Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957.
214. Клосс Б. М., Малышев В. А., Определение регулярности автомата по его каноническим уравнениям. ДАН СССР, 1967, 172, № 3.
215. Колосовский Н. Г., Выделение множества существенных путей в стохастическом графе. I. Кибернетика, 1969, № 1.
216. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А., Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, М., 1962.
217. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А., О построении общей теории логических сетей. Сб. «Логические исследования», Изд-во АН СССР, М., 1959.
218. Кобринский Я. Н., Логический синтез схем микроселекционных ЦВМ. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 2.
219. Козмидиadi В. А., Чернявский В. С., Об упорядочении множества автоматов. Сб. «Вопросы теории математических машин», М., 1962, вып. 2.
220. Козмидиadi В. А., Чернявский В. С., О некоторых понятиях теории математических машин. Сб. «Вопросы теории математических машин», М., 1962, вып. 2.
221. Козырев В. П., О вычислении функции на сетях с большим числом вершин. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», М.—Л., 1968, т. 4.
222. Койфман А. А., Скоробогатов В. А., Программирование для вычислительной среды. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1967, вып. 26.
223. Колдуэлл С., Логический синтез релейных устройств. ИЛ, М., 1962.
224. Колмогоров А. Н., Успенский Е. А., К определению алгоритма, УМН. 1958, 13, № 4.
225. Колмогоров А. Н., Барздинь Я. М., О реализации сетей в 3-мерном пространстве. Проблемы кибернетики, М., 1967, вып. 19.
226. Копи И. М., Элгот К. С., Райт Д. Б., Реализация событий логическими сетями. Кибернетический сборник, М., 1961, № 3.
227. Корой-Неделку М., Об анализе и синтезе бесконтактных многотактных схем. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.

228. Коршунов А. Д., Асимптотические оценки числа неизоморфных автоматов. Сб. «Дискретный анализ», 1965, вып. 6.
229. Коршунов А. Д., Об асимптотических оценках числа конечных автоматов. Кибернетика, 1967, № 2.
230. Крейнин Г. В., Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Синтез одного типа микропрограммных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 3.
231. Криницкий Н. А., Применение операторного метода в теории автоматов. Сб. научных трудов, М., 1964.
232. Кристаль С., Метод синтеза релейных устройств, нечувствительных к несимметрическим отказам. Автоматика и телемеханика, 1965, № 12.
233. Кудрявцев В. Б., Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. ДАН СССР, 1960, 132, № 2.
234. Кудрявцев В. Б., Вопросы полноты для систем автоматов. ДАН СССР, 1960, 130, № 6.
235. Кузичев А. С., Диаграммы Венна. «Наука», М., 1968.
236. Кузичев А. С., Построение надежных нейронных сетей из не вполне надежных элементов с помощью исчисления предикатов. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», М.—Л., 1968, т. 4.
237. Кузнецов А. В., Об одном свойстве функций, реализуемых неплоскими неповторными схемами. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Изд-во АН СССР, 1958, т. 51.
238. Кузнецов О. П., Релейные устройства и конечные автоматы. Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, М., 1963.
239. Кузнецов О. П., Представление регулярных событий в асинхронных автоматах. Автоматика и телемеханика, 1965, № 6.
240. Кузнецов О. П., Временной анализ автономных асинхронных логических сетей. Автоматика и телемеханика, 1965, № 5.
241. Кузнецов О. П., Параллельная декомпозиция автоматов с разделением входов. Автоматика и телемеханика, 1969, № 3.
242. Курмит А. А., Обобщенные обратные автоматы. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 3.
243. Курмит А. А., Обращение автоматов по отношению к регулярному событию. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 4.
244. Курмит А. А., Решение некоторых задач из теории абстрактных конечных автоматов с помощью теории графов. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 1.
245. Курмит А. А., Типы состояний сильносвязных вполне определенных автоматов без потери информации конечного порядка. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 4.
246. Курмит А. А., Тесты для распознавания неисправностей конечного автомата с заданной подробностью. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 1.
247. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре. Физматгиз, М., 1962.
248. Курош А. Г., Теория групп. «Наука», М., 1967.
249. Кутепов В. П., О тождественных преобразованиях регулярных выражений. Сб. «Цифровая вычислительная техника и программирование», «Советское радио», М., 1967, вып. 2.

250. Лазарев В. Г., Методика определения числа реле, необходимого для построения релейных схем по заданным условиям работы. Сб. «Проблемы передачи информации», 1959, вып. 13.
251. Лазарев В. Г., О построении системы управления сетью передачи и распределения информации. Сб. «Проблемы передачи информации», 1963, вып. 15.
252. Лазарев В. Г., Матричный метод минимизации числа внутренних состояний конечных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 1.
253. Лазарев В. Г., О синтезе микропрограммных автоматов. Сб. «Проблемы передачи информации», 1965, 1, 2.
254. Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Метод синтеза конечных автоматов. Автоматика и телемеханика, 1961, № 9.
255. Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Уменьшение числа состояний одного класса конечных автоматов. ДАН СССР, 1962, 143, № 5.
256. Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Определение числа внутренних состояний одного класса конечных автоматов. Сб. «Проблемы передачи информации», 1963, вып. 12.
257. Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Синтез асинхронных конечных автоматов. «Наука», М., 1964.
258. Ларин Л. К., Осинский Л. М., Об одном способе экономичного кодирования состояний частичного автомата. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 5.
259. Ларин Л. К., Осинский Л. М., Построение схем конечных автоматов с выделением однородной структуры в виде сдвигающего регистра. Сб. «Теория автоматов», Киев, 1967, вып. 1.
260. Ларин Л. К., Осинский Л. М., Автоматы с последовательной однородной структурой. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 1.
261. Левенштейн В. И., Об обращении конечных автоматов. ДАН СССР, 1962, 147, № 6.
262. Левенштейн В. И., О самонастраивающихся автоматах. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
263. Левин В. И., Асимптотические методы анализа надежности конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 5.
264. Левин В. И., Вероятностный анализ конечных автоматов и их надежность. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 5.
265. Левин В. И., Метод анализа надежности цифровых устройств. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 5.
266. Левин В. И., Обобщенный показатель поведения конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 2.
267. Левин В. И., Обобщение асимптотического анализа однородных конечных автоматов. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 1.
268. Ледли Р., Применение булевых матриц к синтезу многотактных схем. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
269. Летичевский А. А., Условие полноты для конечных автоматов. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, 1, № 4.

270. Летичевский А. А., Об обращении конечных автоматов. ДАН СССР, 1962, 147, № 6.
271. Летичевский А. А., О минимизации конечных автоматов. Кибернетика, 1965, № 1.
272. Летичевский А. А., Условие полноты в классе автоматов Мура. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики, 1963, т. 1, № 2.
273. Летичевский А. А., Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием. I, II. Кибернетика, 1967, № 1; 1968, № 4.
274. Летичевский А. А., О синтезе конечных автоматов. ДАН УССР, 1967, № 2.
275. Летичевский А. А., Об отношениях, представимых в push-down автоматах. Кибернетика, 1969, № 1.
276. Летичевский А. А., Функциональная эквивалентность дискретных преобразователей. I. Кибернетика, 1969, № 2.
277. Лецкий Э. К., К вопросу об объеме памяти обучающегося автомата табличного типа. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 2.
278. Линский В. С., Алгоритмическое проектирование цифровых устройств. Изд-во ВЦ АН СССР, М., 1963.
279. Литвинов В. В., Некоторые вопросы теории однозначных и пороговых функций. Сб. «Вопросы теоретической кибернетики», «Наукова думка», Киев, 1965.
280. Лихтенбаум Л. М., Характеристические числа неособенного графа. Труды III Всесоюзного матем. съезда, 1956, т. 1.
281. Лихтенбаум Л. М., Следы степеней матриц соседства вершин и ребер неособенного графа. Изв. высших уч. заведений. Математика, 1959, № 5.
282. Лоренц А. А., Обобщенно квазидефинитные конечные вероятностные автоматы и некоторые алгоритмические проблемы. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 5.
283. Лоренц А. А., Экономия состояний конечных вероятностных автоматов. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 2.
284. Лунц А. Г., Приложение матричной булевой алгебры к анализу и синтезу релейно-контактных схем. ДАН СССР, 1950, 70, № 3.
285. Лунц А. Г., Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем. Изв. АН СССР, сер. математика, 1952, т. 16.
286. Лунц А. Г., Конечные  $p$ -адические автоматы. ДАН СССР, 1963, 150, № 4.
287. Лунц А. Г., Метод анализа конечных автоматов. ДАН СССР, 1965, 160, № 4.
288. Лупанов О. Б., Об асимптотических оценках числа графов и сетей с  $n$  ребрами. Проблемы кибернетики, М., 1960, вып. 4.
289. Лупанов О. Б., О возможности синтеза схем из разнообразных элементов. ДАН СССР, 1955, 103, № 4.
290. Лупанов О. Б., Об одном методе синтеза схем. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, № 1.
291. Лупанов О. Б., О принципе локального кодирования и реализации функций из некоторых классов схемами из функциональных элементов. ДАН СССР, 1967, 140, № 2.

292. Львовский Л. С., Использование графов в задачах синтеза конечных автоматов. Автоматика и телемеханика, 1965, № 5.
293. Львовский Л. С., Выбор воспринимающих элементов конечного автомата. Автоматика и телемеханика, 1966, № 12.
294. Ляпунов А. А., О логических схемах программ. Проблемы кибернетики, М., 1958, вып. 1.
295. Ляпунов А. А., Шестопал Г. А., Об алгоритмическом описании процессов управления. Сб. «Матем. просвещение», Физматгиз, М., 1957, вып. 2.
296. Майстрова Т. Л., Линейное программирование и задача минимизации нормальных форм булевых функций. Сб. «Проблемы передачи информации», 1963, вып. 12.
297. Майстрова Т. Л., Минимальное покрытие графа. Сб. «Самонастраивающиеся системы. Распознавание образов. Релейные устройства и конечные автоматы», «Наука», М., 1967.
298. Макаров В. Л., Машины Тьюринга и конечные автоматы. Сиб. матем. журнал, 1964, 5, № 1.
299. Макаров С. В., О реализации стохастических матриц конечными автоматами. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1963, вып. 9.
300. Мальцев А. И., Алгебраические системы. «Наука», М., 1970.
301. Марков А. А., Теория алгорифмов. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Изд-во АН СССР, М., 1954, т. 42.
302. Мартынюк В. В., Соотношение между памятью и некоторыми возможностями конечного автомата. Проблемы кибернетики, М., 1961, вып. 5.
303. Матиенко Б. Г., Анализ и синтез управления одним автоматом с переменной структурой. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
304. Матюшков В. В., Вершинная функция от направленных графов. ДАН СССР, 1962, 146, № 1.
305. Матюшков В. В., Исследование информации о графе, определяемой рекуррентными соотношениями. Кибернетика, 1965, № 5.
306. Матюшков Л. П., Динамическая надежность автомата. Сб. «Самонастраивающиеся системы. Распознавание образов. Релейные устройства и конечные автоматы», «Наука», М., 1967.
307. Мацевитый Л. В., Алгоритм минимизации схем микропрограмм. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 1.
308. Мацевитый Л. В., Чайка Н. С., Кодирование состояний многотактного устройства с учетом некоторых логических свойств применяемых элементов. Кибернетика, 1966, № 4.
309. Мацевитый Л. В., Денисенко Е. Л., О кодировании внутренних состояний некоторых многотактных устройств. Кибернетика, 1966, № 1.
310. Медведев Ю. Т., О классе событий, допускающих представление о конечном автомате. Сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956.
311. Медведев О. В., Минимизация числа состояний последовательностной машины при входных последовательностях, не содержащих двух одинаковых символов подряд. Автоматика и телемеханика, 1966, № 5.

312. Мекклер Я. И., Упрощение алгебраического синтеза релейных схем. Автоматика и телемеханика, 1958, № 12.
313. Мелихов А. Н., Некоторые операции над графами. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 6.
314. Мелихов А. Н., Преобразования мультиграфов. Сб. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», Киев, 1965, вып. 3.
315. Мелихов А. Н., Структурные графы и их применение к синтезу цифровых автоматов. Сб. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», Киев, 1955, вып. 3.
316. Мелихов А. Н., Дворянцев Ю. А., Разложение графов и конечных автоматов относительно операции умножения. Кибернетика, 1965, № 3.
317. Мелихов А. Н., Дворянцев Ю. А., Теоретико-множественные и алгебраические операции над конечными автоматами. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 3.
318. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Карелин В. П., Об изоморфизме графов и конечных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
319. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Карелин В. П., Разложение графов и конечных автоматов по операции суммирования. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 2.
320. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Последовательная декомпозиция абстрактных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 3.
321. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Абстрактная декомпозиция конечных автоматов. Сб. «Вычислительные системы». Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, вып. 3. Программирование на вычислительных средах. Новосибирск, 1968.
322. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Карелин В. П., Об изоморфном вложении графов и абстрактных автоматов. Сб. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», Киев, 1970, вып. 7.
323. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Карелин В. П., О декомпозиции абстрактных автоматов. Кибернетика, 1969, № 3.
324. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Карелин В. П., Пашкевич А. П., Графы регулярных выражений и абстрактный синтез автоматов. Автоматика и вычислительная техника, Рига, 1969, № 4.
325. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Топольский Н. Г., Декомпозиционный метод структурного синтеза конечных автоматов. I, II Кибернетика, 1969, № 5; 1970, № 3.
326. Миркин Б. Г., К теории многолентных автоматов. Кибернетика, 1966, № 5.
327. Миркин Б. Г., О двойственных автоматах. Кибернетика, 1966, № 1.
328. Миркин Б. Г., Новый алгоритм построения базиса в языке регулярных выражений. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 5.
329. Миркин Б. Г., О языке псевдoreгулярных выражений. Кибернетика, 1966, № 6.

330. Моисил Гр. К., Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств, ИЛ, М., 1963.
331. Мощенский В. А., Об одной задаче теории конечных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 1.
332. Мощенский В. А., Об одной задаче теории синтеза конечных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
333. Мур Э. Ф., Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. Сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956.
334. Мэзон С., Циммерман Г., Электронные цепи, сигналы и системы, ИЛ, М., 1963.
335. Нейман Дж., Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. Сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956.
336. Непомнящий В. А., Об алгоритмах, осуществляемых повторяющимися применениями конечных автоматов. Сб. «Дискретный анализ», Новосибирск, 1965, вып. 5.
337. Нечипоренко В. И., Структурный анализ и методы построения надежных систем. «Советское радио», М., 1968.
338. Нечипорук Э. И., О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами. Проблемы кибернетики, М., 1962, вып. 8.
339. Нечипорук Э. И., О синтезе  $P$ -схем. ДАН СССР, 1961, 137, № 5.
340. Новиков С. В., О сокращении перебора при синтезе оптимальных многоходовых логических схем на стандартных элементах шефферовского типа. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
341. Новоселов В. Г., Оптимальное кодирование состояний последовательностного автомата с помощью УЦВМ. Труды СФТИ, Томск, 1963, вып. 42.
342. Новоселов В. Г., Кирюхин В. В., Метод минимизации булевых функций и их программирование на УЦВМ. Сб. «Синтез релейных структур». Труды международного симпозиума, «Наука», М., 1965.
343. Новоселов В. Г., Выбор оптимального варианта при решении ряда задач синтеза релейных схем. Труды СФТИ, Томск, 1963, вып. 42.
344. Овсиевич Б. Л., Синтез схем из трехзначных мажоритарных элементов методом решения систем логических уравнений. Автоматика и вычислительная техника, 1965, № 12.
345. Озерной В. М., К вопросу о задании конечных автоматов и последовательностных машин. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 6.
346. Оре О., Теория графов. «Наука», М., 1968.
347. Осис Я. Я., Алгоритм нахождения квазиоптимального покрытия множества. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 2.
348. Островский Ю. И., Метод кодирования строк матрицы переходов. Автоматика и телемеханика, 1964, № 3.
349. Островский Ю. И., Алгоритм синтеза многотактных схем, в которых невозможны состязания реле. Автоматика и телемеханика, 1965, № 5.

350. Пархоменко П. П., Универсальная машина большой емкости для анализа релейных схем. Сб. «Промышленная телемеханика», Изд-во АН СССР, М., 1960.
351. Пархоменко П. П., Томфельд Ю. Л., Минимизация числа существенных связей между строками таблицы переходов. Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, М., 1963.
352. Пархоменко П. П., Синтез релейных структур на различных функционально полных системах логических элементов. Автоматика и телемеханика, 1964, № 6.
353. Пархоменко П. П., Синтез структур релейных устройств методом замены входных переменных. Автоматика и телемеханика, 1967, № 1.
354. Петросян А. В., О разбиениях автоматов. Труды Выч. центра АН Арм. ССР и Ереванского ун-та, 1964, вып. 2.
355. Плесневич Г. С., Расположение графа на плоскости. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1963, вып. 6.
356. Пийль Е. И., Способ размещения внутренних состояний асинхронного конечного автомата. Сб. «Проблемы передачи информации», 1964, вып. 17.
357. Пийль Е. И., О кодировании внутренних состояний конечного автомата. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 2.
358. Пийль Е. И., Способ размещения внутренних состояний асинхронного конечного автомата с импульсно-потенциальными элементами памяти. Сб. «Проблемы передачи информации», 1965, 1, 2.
359. Пийль Е. И., Некоторые вопросы кодирования конечных автоматов. Сб. «Проблемы синтеза цифровых автоматов», «Наука», М., 1967.
360. Поваров Г. Н., О функциональной разделимости булевых функций. ДАН СССР, 1954, 94, № 5.
361. Поваров Г. Н., К изучению симметричных булевых функций с точки зрения релейно-контактных схем. ДАН СССР, 1955, 104, № 2.
362. Поваров Г. Н., О логическом синтезе электронных вычислительных и управляющих схем. Сб. «Логические исследования», Изд-во АН СССР, М., 1959.
363. Поваров Г. Н., О структурной теории сетей связи. Сб. «Проблемы передачи информации», 1959, вып. 1.
364. Поваров Г. Н., Математическая теория синтеза контактных  $n$ -полюсников. ДАН СССР, 1959, 160, № 5.
365. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961.
366. Поспелов Д. А., Фальк В. Н., Реализация троичных функций с помощью трехфазных кодов. Изв. Вузов. Радиофизика, 1962, вып. 4.
367. Поспелов Д. А., Пяткин В. П., Вопросы минимизации функции алгебры логики на современных вычислительных машинах дискретного действия. Труды МЭИ, 1964, вып. 53.
368. Поспелов Д. А., Теоретические проблемы, связанные с объединением типовых вычислительных машин в единую систему.



- Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
369. Поспелов Д. А., Логические методы анализа и синтеза схем. «Энергия», М., 1968
370. Поттосин Ю. В., Бутаков Е. А., Минимизация числа состояний последовательностного автомата. Труды СФТИ, Томск, 1966, вып. 48.
371. Поттосин Ю. В., Сравнительная оценка двух алгоритмов минимизации числа состояний дискретного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 4.
372. Прангишвили И. В., Итеративные и однородные планарные структуры и соответствующие им графы. Автоматика и телемеханика, 1968, № 3.
373. Прангишвили И. В., Об информационной емкости однородных логических схем. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
374. Прангишвили И. В., Бабичева Е. В., Игнатущенко В. В., Новые принципы реализации логических и вычислительных устройств на основе однородных микроэлектронных структур. Автоматика и телемеханика, 1965, № 10.
375. Прангишвили И. В., Абрамова Н. А., Бабичева Е. В., Игнатущенко В. В., Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. «Наука», М., 1967.
376. Пухов Г. Е., Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. «Наукова думка», Киев, 1967.
377. Пухов Г. Е., Борковский Б. А., Аналоговые и квазианалоговые вычислительные среды. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
378. Рабин М. О., Вероятностные автоматы. Кибернетический сборник, «Мир», М., 1964, № 9.
379. Рабин М. О., Скотт Д., Конечные автоматы и задачи их разрешения. Кибернетический сборник, ИЛ, М., 1962, № 4.
380. Рабинович З. Л., Капитонова Ю. В., Общие принципы синтеза комбинационных схем. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, 3, № 4.
381. Рабинович З. Л., Капитонова Ю. В., Комухаев Э. И., Методика кодирования состояний конечных автоматов с точки зрения минимизации аппаратных затрат. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
382. Рабинович З. Л., Векторно-временные переключательные функции (ВП-функции) как язык для описания схем и процессов переработки информации. I, II. Кибернетика, 1968, № 3, № 4.
383. Редько В. Н., Об алгебре коммутативных событий. УМЖ, 1964, 16, № 2.
384. Редько В. Н., Об определяющей совокупности соотношений алгебры регулярных событий. УМЖ, 1964, 21, № 1.
385. Редько В. Н., О связи автоматов и полугрупп. Сб. «Вопросы теоретической кибернетики». «Наукова думка», Киев, 1965.
386. Ригордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.

387. Робишо Л., Буавер М., Робер Ж., Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. «Энергия», М.—Л., 1964.
388. Рогинский В. Н., Равносильные преобразования релейных схем. Сб. научных работ по проводной связи, 1957, № 6.
389. Рогинский В. Н., Элементы структурного синтеза релейных схем управления. Изд-во АН СССР, М., 1959.
390. Рогинский В. Н., Синтез контактных схем с «реальными» контактами. Автоматика и телемеханика, 1961, № 16.
391. Рогинский В. Н., Работа релейных устройств в переходные периоды. Сб. «Проблемы передачи информации», 1962, вып. 11.
392. Рогинский В. Н., Построение релейных схем управления. «Энергия», М.—Л., 1964.
393. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
394. Сагалович Ю. Л., Метод повышения надежности конечного автомата. Сб. «Проблемы передачи информации», 1965, 1, 2.
395. Сагалович Ю. Л., Сокращение памяти автомата, устойчивого к повреждениям и состязаниям его внутренних элементов. Сб. «Проблемы передачи информации», 1967, 3, 2.
396. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., О синтезе многотактных схем, в которых невозможны критические состязания реле. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 5.
397. Седякин М. М., К вопросу надежности автомата контроля параметров и коммутации элементов. Радиотехника, 1968, № 3.
398. Сидристый Б. А., Мишин А. И., Об одном методе реализации автоматов в вычислительной среде. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
399. Складчевич А. П., Среднее время исправной работы конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1966, № 15.
400. Складчевич А. Н., Функция надежности конечного автомата (учитывающего возможность накопления в автомате нарушений). Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 3.
401. Скорняков Л. А., Об одном классе автоматов (нервные сети). Проблемы кибернетики, М., 1960, вып. 4.
402. Скоробогатов В. А., Некоторые вопросы реализации вычислительной среды на пороговых элементах. Сб. «Вычислительные системы», 1965, вып. 16.
403. Скоробогатов В. А., Койфман А. А., Об одном способе составления программ для вычислительной среды. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.
404. Скоробогатов В. А., Об алгоритмической сложности распознавания изоморфизма неграфов. Тезисы докладов межвузовской научной конференции по теории и принципам построения цифровых моделей и цифровых интегрирующих машин, Таганрог, 1968.
405. Слободянюк Т. Ф., Об одном методе минимизации микропрограмм. Сб. «Кибернетическая техника», «Наукова думка», Киев, 1965.

406. Смоленский Е. А., Об одном способе линейной записи графов. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1962, № 2.
407. Соколов О. Б., К построению функционально-устойчивых автоматов. Сб. «Итоговая научная конференция Казанского ун-та», Казань, 1960.
408. Соколов О. Б., Метод синтеза автоматов с функционально устойчивой структурой. Сб. «Итоговая научная конференция Казанского ун-та», Казань, 1964.
409. Согомонян Е. С., Вопросы анализа комбинационных многополюсников для целей их работоспособности и поиска неисправностей. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», Наука, М., 1966.
410. Соркин Ю. И., Алгоритмическая разрешимость проблемы изоморфизма для автоматов. ДАН СССР, 1961, 137, № 4.
411. Соркин Ю. И., Теория определяющих соотношений для автоматов. Проблемы кибернетики, М., 1963, вып. 9.
412. Спивак М. А., Новый алгоритм абстрактного синтеза автоматов. Сб. «Теория автоматов», Киев, 1963, вып. 3.
413. Спивак М. А., Алгоритм абстрактного синтеза автоматов для расширенного языка регулярных выражений. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 1.
414. Спивак М. А., К методу анализа абстрактных автоматов с помощью уравнений в алгебре событий. Кибернетика, 1965, № 1.
415. Спивак М. А., Некоторые свойства множества экспериментов автомата. Кибернетика, 1966, № 6.
416. Спивак М. А., К минимизации автомата Мура. Кибернетика, 1967, № 1.
417. Спивак М. А., Обобщенные задачи диагноза и установки для конечных автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 3.
418. Срагович В. Г., Флеров Ю. А., Об одном классе стохастических автоматов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 2.
419. Стогний А. А., О принципах построения одной специализированной программирующей программы. Проблемы кибернетики, М., 1959, вып. 2.
420. Стогний А. А., Синтез абстрактного автомата по представляемому им событию. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, 1, № 3.
421. Стогний А. А., Минимизация булевых функций на ЭЦМ. Сб. «Вопросы вычислительной техники», Гостехиздат, УССР, Киев, 1961.
422. Стогний А. А., Некоторые математические вопросы построения цифровой логической машины. Сб. «Принципы построения самообучающихся систем». Гостехиздат, УССР, Киев, 1962.
423. Стоцкий Э. Д., О вложении конечных метрик в графы. Сиб. матем. журнал, 1964, 5, № 5.
424. Страздинь И. Э., Группа самодвойственных преобразований булевых функций. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.

425. Страздинь И. Э., Подалгебры в алгебре булевых функций трех переменных. Автоматика и вычислительная техника, 1962, № 3.
426. Страздинь И. Э., Группы инерции булевых функций четырех переменных. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 5.
427. Сулханишвили И. Г., Некоторые вопросы синтеза автоматов из логических элементов с задержкой. Сб. «Теория автоматов», Киев, 1963, вып. 4.
428. Таль А. А., Анкетный язык и абстрактный синтез минимальных последовательностных машин. Автоматика и телемеханика, 1964, № 6.
429. Таль А. А., Построение статистических асинхронных последовательностных машин из типовых ячеек. Автоматика и телемеханика, 1966, № 12.
430. Титов В. К., Неразделимые сети и графы. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», М.—Л., 1968, т. 4.
431. Толчан А. Я., Об одном способе оптимизации структуры сети связи. Сб. «Проблемы передачи информации», 1962, вып. 11; 1963, вып. 15.
432. Томфельд Ю. Л., Методы размещения состояний (обзор и классификация). Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
433. Томфельд Ю. Л., Устранение соятий преобразованием графа переходов. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
434. Торопов Н. Р., Алгоритм последовательной минимизации слабоопределенной булевой функции. Труды СФТИ, Томск, 1966, вып. 48.
435. Торопов Н. Р., Приближенный алгоритм минимизации систем слабоопределенных булевых функций. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 1.
436. Трахтенброт Б. А., Асимптотическая оценка сложности логических сетей с памятью. ДАН СССР, 1959, 127, № 2.
437. Трахтенброт Б. А., Конечные автоматы и логика одноместных предикатов. ДАН СССР, 1961, 140, № 2.
438. Трахтенброт Б. А., К теории неповторных контактных схем. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, М., 1958, т. 51.
439. Трахтенброт Б. А., Некоторые построения в логике одноместных предикатов. ДАН СССР, 1961, 138, № 2.
440. Трахтенброт Б. А., Об операторах, реализуемых в логических сетях. ДАН СССР, 1957, 112, № 6.
441. Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы (поведение и синтез), «Наука», М., 1970.
442. Туманян Г. Б., Минимизация структуры релейных устройств со многими выходами с помощью правильной и неправильной декомпозиции. Сб. «Абстрактная и структурная теория релейных устройств», «Наука», М., 1966.
443. Туруга Е. Н., Использование структурной избыточности для повышения надежности автоматов. Сб. «Вычислительные системы», Новосибирск, 1966, вып. 25.

444. Турута Е. Н., Об одном методе повышения надежности конечного автомата. Сб. «Проблемы передачи информации», 1966, 2, 4.
445. Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз, М., 1960.
446. Ушаков И. А., Об одном алгоритме проверки связности графа. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 4.
447. Фельдбаум А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, М., 1959.
448. Фет Я. Н., Использование структурных характеристик функций алгебры логики для синтеза логических схем. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
449. Фирсов В. В., Об изометрическом вложении графа в булевский куб. Кибернетика, 1965, № 6.
450. Фистер М., Логическое проектирование ЦВМ. Техника, Киев, 1964.
451. Флорин Ж., Синтез логических устройств и его автоматизация. «Мир», М., 1966.
452. Форд Л. Г., Фалкерсон Д. Р., Потоки в сетях. «Мир», М., 1966.
453. Фрицнович Г. Ф., Способ задания и распознавания эквивалентных устойчивых состояний последовательностных асинхронных логических схем (ПАЛС). Сб «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
454. Хаффман Д. А., Синтез конечных автоматов с минимальным числом усилителей. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, М., 1965.
455. Хоменко Э. Я., Об использовании теории линейных графов в решении систем линейных уравнений. Сб. «Вопросы теоретической кибернетики», «Наукова думка», Киев, 1965.
456. Церцвадзе Г. Н., Об энтропийной оценке надежности функционирования конечных автоматов. Сообщ. АН Груз. ССР, 1966, 42, № 2.
457. Цетлин М. Л., Матричный метод синтеза электронно-импульсных и релейно-контактных (непримитивных) схем. ДАН СССР, 1957, 117, № 6.
458. Цетлин М. Л., О композиции и разбиениях непримитивных схем. ДАН СССР, 1958, 118, № 3.
459. Цетлин М. Л., О непримитивных схемах. Проблемы кибернетики. Физматгиз, 1958, вып. 1.
460. Цетлин М. Л., Некоторые задачи о поведении конечных автоматов. ДАН СССР, 1961, 139, № 4.
461. Цетлин М. Л., О поведении конечных автоматов в случайных средах. Автоматика и телемеханика, 1961, № 10.
462. Цетлин М. Л., Крылов В. Ю., Игры автоматов. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов». Труды международного симпозиума, М., 1965.
463. Цетлин М. Л., Эйдус Г. С., Алгебраический метод синтеза схем на триггерных ячейках. Изв. вузов. Радиофизика, 1965, т. 1, № 5, 6.
464. Цетлин М. Л., Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. «Наука», М., 1970.

465. Цой С., Рогов Е. И., Горбенко В. Н., Управление и теория графов. Казахстан, Алма-Ата, 1965.
466. Цой С., Алгоритм нахождения числа путей от миноранты к мажоранте на связном графе. Сб. «Кибернетика в горном деле», Алма-Ата, 1966.
467. Цой С., Матрица инцидентий и законы сетей. Сб. «Кибернетика в горном деле», Алма-Ата, 1966.
468. Цхай С. М., Об одном алгоритме поиска независимых циклов. Сб. «Кибернетика в горном деле», Алма-Ата, 1966.
469. Чайка Н. С., Об одном методе структурного синтеза управляющих автоматов на логических элементах с ограниченным числом входов. Сб. «Вопросы теории электронно-цифровых математических машин», «Наукова думка», Киев, 1966.
470. Чернышев Ю. О., О возможности минимизации нормальных форм булевых функций методом электрического моделирования. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
471. Чернышев Ю. О., Применение теории графов и линейного программирования к синтезу комбинационных устройств. Сб. «Методы математического моделирования и теория электрических цепей», Киев, 1967, вып. 5.
472. Черч А., Введение в математическую логику. ИЛ, М., 1960.
473. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л., Введение в исследование операций. «Наука», М., 1968.
474. Чирков М. К., К анализу вероятностных автоматов. Сб. «Вычислительная техника и вопросы программирования», Изд-во Ленинградского университета, 1964.
475. Чистов В. П., Гогина М. А., Иванова Р. В., Машинный синтез оптимальных логических структур на базе картинной логики. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.
476. Шайн Б. М., О некоторых применениях теории представлений полугрупп к теории автоматов. Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов», Труды международного симпозиума, М., 1963.
477. Шестаков В. И., Алгебраический метод анализа автономных реле. Автоматика и телемеханика, 1954, № 2; 1964, № 4.
478. Шестаков В. И., Алгебра коммутаторных схем. Сб. «Синтез релейных структур», Труды международного симпозиума, М., 1965.
479. Шестаков В. И., Векторно-алгебраический метод анализа и синтеза многотактных релейных схем. Труды III Всесоюзного матем. съезда, 1956, т. 1.
480. Шеннон К. Э., Универсальная машина Тьюринга с двумя внутренними состояниями. Сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956.
481. Шеннон К. Э., Работы по теории информации и кибернетики. ИЛ, М., 1963.
482. Шиханович Ю. А., Введение в современную математику. «Наука», М., 1965.
483. Шоломов Л. А., Критерии сложности булевых функций. Проблемы кибернетики, М., 1966, вып. 17.
484. Шоломов Л. А., О функционалах, характеризующих сложность систем недоопределенных булевых функций. Проблемы кибернетики, М., 1967, вып. 19.

485. Шукурян Д. Г., Об оптимизации автоматов с заключительным состоянием без циклов. Кибернетика, 1967, № 2.
486. Эсакиа Л. Л., Функционирование конечных автоматов. Релейные устройства, конечные автоматы и кодирование. Сб. рефератов и аннотаций 1962—1963, М., Ин-т. автоматике и телемеханики АН СССР.
487. Эйнгорин М. Я., О системах уравнений алгебры логики и синтеза дискретных управляющих схем с обратными связями. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
488. Эткин В. С., К анализу систем с переменными параметрами с помощью ориентированных графов. Труды 1-й Межвузовской конф. педагогических ин-тов по радиофизике и спектроскопии, М., 1965.
489. Эткин В. С., О возможности использования ориентированных графов при решении некоторых нелинейных задач. Труды 1-й Межвузовской конф. педагогических ин-тов по радиофизике и спектроскопии, М., 1965.
490. Юдицкий Д. И., Вопросы синтеза устройства управления УЦВМ. Сб. «Вопросы теории матем. машин», М., 1962, вып. 2.
491. Яблонский С. В., Функциональные построения в  $k$ -значной логике. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, М., 1958, т. 51.
492. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста. «Наука», М., 1966.
493. Якубайтис Э. А., Асинхронные логические автоматы. «Зинатне», Рига, 1966.
494. Якубайтис Э. А., Законы функционирования моделей конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 1.
495. Якубайтис Э. А., Минимизация длины кода внутренних состояний. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 4.
496. Якубайтис Э. А., Объединение промежуточных сигналов асинхронного логического автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 5.
497. Якубайтис Э. А., Гобземис А. Ю., Фрицнович Г. Ф., Синтез конечных автоматов методом инерционных подавтоматов. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 5.
498. Якубайтис Э. А., Метод кодирования внутренних состояний конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 3.
499. Якубайтис Э. Я., Безызбыточное кодирование асинхронного конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1968, № 4.
500. Якубайтис Э. Я., Модель конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 1.
501. Якубайтис Э. Я., Обобщенная асинхронная модель конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 3.
502. Янковская А. Е., Алгоритмический метод кодирования внутренних состояний асинхронных автоматов. Сб. материалов I республиканской конференции молодых ученых по теоретическим и прикладным вопросам системотехники, Киев, 1968.

503. Янов Ю. И., О матричных схемах. ДАН СССР, 1957, 113, № 2.
504. Янов Ю. И., О логических схемах алгоритмов. Проблемы кибернетики, М., 1958, вып. 1
505. Янов Ю. И., О тождественных преобразованиях регулярных выражений. ДАН СССР, 1962, 147, № 2.
506. Яровицкий Н. В., Вероятностно-автоматное моделирование дискретных систем. Кибернетика, 1966, № 5.
507. Abrahams J. R., Signal flow graph methods III. Control, 1966, 10, № 93.
508. Arbib M. A., Simple self-reproducing universal automata. Inform. and Control, 1966, 9, № 2.
509. Arbib M. A., Turing machines, finite automata and neural nets. JACM, 1961, № 4.
510. Arden D. N., Delayed logic and finite state machines. Proc. AIEE. Second annual symp. on switching theory and logical design, Detroit Mich., October 1961.
511. Armstrong D. B., A programmed algorithm for assigning internal codes to sequential machines. IRE Trans. 1962, EC-11, № 4.
512. Bacon G. C., Minimal-state stochastic state systems. IEEE Trans. Circuit Theory, 1964, № 2.
513. Balzer R., An 8—state minimal time solution to the firing squad synchronisation problem. Inform. and Control, 1967, 10, № 1.
514. Bartee T. C., Computer design of multiple—output logical networks. IRE Trans., 1961, EC-10, № 1.
515. Bautor W., Schmitt. Einführung des verbandes des homomorphen zerlegungen der zustandsmenge eines endlichen automaten. Internat Ser. Numer. Math., 6 Basel—Stuttgart, 1967.
516. Bavel Z., On the structure and automorphisms of finite automata. Doct. diss. Univ. Ill., 1965, «Dissert. Abstrs», 1966, 26, № 12, Part 1.
517. Brzozowski J. A., Derivations of regular expression. JACM, 1964, 11, № 4.
518. Brzozowski J. A., On single-loop realizations of automata. IEEE Conf. Pec. switch. circuit theory and logic design, Ann Arbor, Mich., 1965.
519. Brzozowski J. A., McCluskey E. J., Signal flow graph techniques for sequential circuit state diagrams. IEEE Trans., 1963, EC-12, № 2.
520. Büchi J. R., Weak second-order arithmetic and finite automata. Zeitschrift für Mathematische logik und Grundlagen der math., 1960, Band 6, Heft 1.
521. Büchi J. R., Elgot C. C., Wright J. B., The non-existence of certain algorithms of finite automata theory (Abstracts). Notices Amer. Math. Soc., 1958, № 5.
522. Burkhardt W. H., Theorem minimisation. Proc. ACM, 1952, № 2 and № 3.
523. Burks A., Wang H., The logic of automata. JACM, 1957, 4, № 2.
524. Burks A. W., The logic of fixed and growing automata. Intern. Symp. on the Theory of Switching, 1959, 29, part 1.



525. Cadden W. T., Equivalent sequential circuits. IRE Trans., Circuit Theory, 1959, № 1.
526. Caianiello E. R., Automata Theory. N. Y. — L., Acad. Press, 1966.
527. Cerny J., Information transmission in the case of coding by finite automata. Kybernetika, 1966, 2, № 5.
528. Chan S. Park., Application of graph theory to the synthesis of single-contact networks. J. Franklin Inst., 1965, № 5.
529. Chartrand G., A graph-theoretic approach to a communication problem. J. Appl. Math., 1966, 14, № 4, SIAM.
530. Chen W. K., On directed trees and directed  $R$ -trees of a digraph and their generation. SIAM. J. Appl. Math., 1966, 14, № 3.
531. Chow T., Pae P. H., A note on matrix graphs. IEEE Trans. Circuit Theory, 1963, 10, № 2.
532. Chu J. T., Some methods for simplifying switching circuits using don't care conditions. JACM, 1961, 8, № 4.
533. Culik K., Some notes on finite-state languages and events represent by finite automata using labelled graphs. Casopis pro pěst. Mat., 1961, 86, № 1.
534. Cummis R. L., Hamilton circuits in tree graphs. IEEE Trans. Circuit Theory, 1966, № 1.
535. Curtis H. A., Use of decomposition theory in the solution of the state assignment problem of sequential machines. JACM, 1963, 10, № 3.
536. Dauber P. S., An analysis of errors in finite automata. Inform. and Control, 1965, 8, № 3.
537. Denorsky M. E., Games and graphs. Tech. Eng. News, 1966, № 3.
538. Deuel D. R., Gill A., Some decision problem associated with weighted, directed graphs. SIAM, J. Appl. Math., 1966, № 5.
539. Dolazza E., System states analysis and flow Graph diagrams in reliability. IEEE Trans. on Reliability, 1966, № 3.
540. Eggan L. C., Transition graphs and the star-height of regular events. Michigan Math. J. 1963, 10, № 4.
541. Elgot C. C., Decision problems on finite automata design and related arithmetics. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 98, № 4.
542. Elgot C. C., Rutledge J. D., Operation on finite automata. Symp. on switching circuit theory and logical design, AIEE, Detroit, Michigan, October, 1961.
543. Elsey T., An algorithm for synthesis of large sequential switching circuits. Univ. of Illinois, AD-418163, 1963, May.
544. Elspas B., The theory of autonomous linear sequential networks. IRE Trans. Circuit theory, 1959, № 1.
545. Erdos P., Renyi A., Sos V. T., On a problem of graph theory. Studia scient. Math. Hungarica, 1966, 1, № 1, № 2.
546. Fitch F. B., Representation of sequential circuit in combinatory logic. Philosophy, 1958, 25, № 4.
547. Ghiron H., Rull to manipulate regular expressions of finite automata. IRE Trans., 1962, EC-11, № 4.
548. Gill A., Cascaded finite-state machines. IRE Trans., 1961, EC-10, September.

549. Gill A., Comparison of finite-state models. IRE. Trans., Circuit theory, 1960, № 2.
550. Gill A., State-identification experiments in finite automata. Inform. and Control, 1961, 4, September.
551. Ginsburg S., On the reduction of superfluous states in a sequential machine. JACM, 1959, 6, April.
552. Ginsburg S., Connective properties preserved in minimal state machines. JACM, 1960, 7, № 4.
553. Ginsburg S., Sets of tapes accepted by different types of automata, JACM, 1961, 8, № 1.
554. Ginsburg S., Some remarks on abstract machines. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, № 3.
555. Ginsburg A., Yoeli M., Products of automata and the problem of covering. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 116, № 4.
556. Grasselli A., Lucio F., A method for minimizing the number of internal states in incompletely specified sequential networks. IEEE Trans., 1965, EC, № 3.
557. Halen R., Graphen ohne unendliche Wege. Math. Nachr., 1966, 31, № 1, 2.
558. Harary F., Palmer E., On similar points of a graph. J. Math. and Mech, 1966, 15, № 4.
559. Harrison M. A., On asymptotic estimates in switching and automata theory. JACM, 1966, № 1.
560. Handler W., Einfache diagnostische experimente bei endlichen automaten. Internat. Ser. Numer. Math., Basel—Stuttgart, 1967, 6.
561. Haring D. R., Sequential-circuit synthesis: state assignment aspects, Cambridge, M. J. M. Press, 1966.
562. Hartmanis J., Symbolic analysis of a decomposition of information processing machines. Inform. and Control, 1960, № 2.
563. Hartmanis J., On the state assignments problem for sequential machines. I. IRE Trans., 1961, EC-10, № 2.
564. Hartmanis J., Minimal feedback realisations of sequential machines. IEEE Trans., 1966, EC-15, № 6.
565. Hartmanis J. and Stearns R. E., Pair algebra and its application to automata theory. Inform. and Control, 1964, 7, № 4.
566. Hartmanis J. and Stearns R. E., Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice—Hall, Inc., Englewood, Cliffs, New Jersey, 1966.
567. Hartmanis J., Stearns R., Sets of numbers defined by finite automata. Amer. Math. Monthly, 1967, 74, № 5.
568. Heap B. R., Random matrixes and graphs. Numerische Mat., 1966, 8, № 2.
569. Hedrlin L., Pultr A., On rigid undirected graphs. Canad. J. Math., 1966, 18, № 6.
570. Haffman A. T., On the line graph of the complete bipartite graph. Ann. Math. Statistics, 1964, № 2.
571. Hohn F. E., Schissler L. R., Boolean matrixes and the design of combinational relay switching circuits. Bell. system. Techn. J., 1955, 34
572. Hohn F. E., Application boolean algebra. An elementary introduction. N. Y. McMillan, 1960.

573. Huffman D. A., Synthesis of sequential switching circuits. J. Franklin Institute, 1954, 257, № 4.
574. Huffman D. A., The design and use of hazard-free switching networks. JACM, 1957, № 4.
575. Humphrey W. S., Switching circuits with computer applications. John Wiley & Sons, N. Y., March, 1959.
576. Huzino J., On some sequential machines and experiments. Mem. Fac. Sci. Kyusyn University, 1958, A12, № 2.
577. Huzino J., Reduction theorems on sequential machines. Mem. Fac. Sci. Kyusyn University, 1958, A12, № 2.
578. Huzino J., Theory of finite automata. Mem. Fac. Sci. Kyusyn University, 1962, A16, № 2.
579. Huzino J., Turiny transformation and strong computability of Turiny computers. Mem. Fac. Sci. Kausyn University, 1959, A13, № 2.
580. Huzino J., On some sequential equations. Mem. Fac. Sci. Kyusyn University, 1960, A14, № 1.
581. Ibarra O. H., On the equivalence of finite-state sequential machine models. IEEE Trans., 1967, EC-16, № 1.
582. Jacob T. P., The number of terms in the general gain formulas for Coats and Mason signal flow graphs. IEEE Trans. Circuit Theory, 1965, 12, № 4.
583. Karnaugh M., The map method for synthesis of combinational logic circuits. AIEE Trans., 1953, 72, № 1.
584. Kohavi Z., Secondary state assignment for sequential machines. IRE Trans., 1964, EC-13, № 3.
585. Kohavi Z., Smith E. J., Decomposition of sequential machines. IEEE. Conf. Rec. Switch. Circuit theory and logic design, Ann. Arbor, Mich., 1965.
586. Kotzig A., Cycles in a complete graph oriented in equilibrium. Mat.-fyr. casop., 1966, 16, № 2.
587. Kuo B. C., Analysis and design of sampled-data systems via s state transition flow graphs. Proc. Nat. Electronic Conf. 1962, 18, Pt. 1.
588. Kuntzmann T., Naslin P., Algebre de Boole et machines logiques. Sous ladirect. Paris, Dunod, 1967, 16.
589. Lee C. T., Automata and finite automata. Bell Sys. Tech. J., 1960, 39, September.
590. Lempell A., Cedebaum I., Minimum feedback arc and vertex sets of a directed graph. IEEE Trans. Circuit Theory, 1966, № 4.
591. Lorens C. S., Basic theory of flow graphs: inversion. Massachusetts Inst. Technolog., Res. Lab. Electron., 1956, 4, № 41.
592. Lorens C. S., A proof of the non-intersecting loop rule for the solution of linear equations by flow graphs. Massachusetts Inst. Technol., Res. Lab. Electron., 1956, № 40.
593. Lovász L., On decomposition of graphs. Studia scient. Math. Hungarica, 1966, 1, № 1, № 2.
594. Luccio F., Reduction of the number of columns in flow table minimisation. IEEE Trans., 1966, EC-15.
595. Luce R. D., Two decomposition theorems for a class of finite oriented graphs. Amer. T. Math., 1952, 74.
596. Mason S. J., Feedback theory: some properties of signal flow graphs, Proc. IRE, 1953, № 1, Semptember.

597. Mason S. J., Feedback theory: further properties of signal flow graphs, Proc. IRE, 1956, 44, July.
598. Massey James L., Note on finite-memory sequential machines. IEEE Trans., 1966, EC-15, № 4.
599. Mayeda W., Synthesis of switching functions by linear graph theory. IBMJ. Res. and Developm., 1960, 4, № 3.
600. Mc Cluskey E. J., Minimization of Boolean functions. Bell. Syst. techn. J., 1956, 35.
601. Mc Sluskey E. J., Minimal sums for Boolean functions having many unspecified fundamental products. Communication and Electronics, 1962, November, № 63.
602. Mc Naughton R., Testing and generating infinite sequences by a finite automation. Inform. and Control, 1966, 9, № 5.
603. Mc Naughton and Vamada H., Regular expressing and state graphs for automata, IRE Trans., 1960, March, EC-9.
604. Mealy G. H., A method for synthesizing sequential circuits. Bell. Syst. techn. J., 1955, September, 34.
605. Medina A., Endomorphic forms of finite automata. Rev. mexic. fis., 1966, 15, № 1.
606. Medina A., Logical analysis of organization in finite automata. Rev. mexic. fis., 1966, 15, № 1.
607. Menon V. V., On repeated interchange graphs. Amer. Math. Monthly, 1966, 73, № 9.
608. Mesner D. M., Watkins M. E., Some theorems about  $n$ -vertex connected graphs. J. Math. and Mech., 1966, 16, № 4.
609. Moon J. W., On the line-graph of the complete bigraph. Ann. Math. Statistics, 1963, 34, № 2.
610. Moore E. F., A simplified universal Turing machine. Proc. Assoc. Comp. Mach., 1953.
611. Muller D. E., A theory of asynchronous circuits. Sb. Internat. Symp. on the theory of Switching, 1959, 1.
612. Muller D. E., Infinite sequences and finite machines. Switch circuit theory and logic. Design, New York, 1963.
613. Myhill J., Finite automata and the representation of events. WADC Technical Report, 1957, № 7.
614. Nash-Williams C. St., Euler lines in infinite directed graphs. Canad. J. Math., 1966, 18, № 4.
615. Nash-Williams C. St., On Hamiltonian circuits in finite graphs. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17, № 2.
616. Naslin P., Finite automata. Progr. Control Engug, 1964, 2, New York.
617. Netherwood D. S., Minimal sequential mashines. IRE Trans., 1959, EC-8, № 3.
618. Onicescu Octav, Guiasu Siloiu. Finite abstract random automata. Wahrscheinlichkeitshhev und verw. Geb., 1965, 3, № 4.
619. Ott G., Feinstein N. H., Design of sequential machines from their regular expressions, JACM, 1961, 8, № 4.
620. Pas A., Some aspects of Probabistic automata. Inform. and Control, 1966, 6, № 1.
621. Paul M. C., Unger S. H., Minimizing the number of states in incompletely specified sequential switching functions. IRE Trans., 1959, EC-8, № 3.

622. Percus J. K., Matrix analysis of oriented graphs with irreducible feedback loops. IRE Trans., circuit theory, 1956, 2, № 2.
623. Phister M., Logical design of digital computers. New York, 1957.
624. Pickett H. E., Note concerning the algebraic theory of automata. JACM, 1967, 14, № 2.
625. Preparata F. P., On the realizability of special classes of autonomous sequential networks. IEEE Trans., 1965, EC-14, № 6.
626. Przymusińska Jadwiga, Pewne aspekty teorii automatów skńczonych w zastosowaniu do teorii sterowania. Arch. automat i telemech, 1965, 10, № 3.
627. Pu Ta-Shiang A., Generalized decomposition of incomplete finite automata. Doct. diss. univ. Ill., 1966, 327, № 3.
628. Quine W. V., Way to simplify truth functions. Amer. Math. Monthly, 1955, 62.
629. Ramamoorthy C. V., Analysis of graphs by connectivity considerations. JACM, 1966, 13, № 2.
630. Rosenberg Arnold L., On multi-head finite automata. IEEE Conf. Rec. Switch. circuit theory and logic design, Ann. Arbor, Mich., 1965
631. Roth J. P., Minimization of nonsingular boolean trees. IBM. J. of Research and J. Develop., 1959, 3, № 4.
632. Roth J. P., Minimization over boolean trees. JBM. J. of Research and Develop., 1960, 4, № 5.
633. Roth J. P., Algebraic topological methods for the synthesis of switching systems. J. Trans. Amer. Math. Sos., 1958, 88.
634. Rudeanu S., On solving Boolean equations in the theory of graphs. Rev. roumaine math. pures et appl., 1966, 11, № 6.
635. Sabidussi G., Graphs with given group and given graph-theoretical properties. Canad. T. Math., 1957, 9.
636. Sabidussi G., Sequences of Euler graphs. Canad. Math. Bull., 1966, 9, № 2.
637. Sarkar P. K., Mukherjee T., On Graphical Studied of peN-IM sets of boolean junctions and their minimizations. Part 1, 2. Internat. J. Control, 1965, 1, № 2, First Series.
638. Schubert E. J., Matrix algebra of sequential logic. Communic. and Electronic, 1960, 46, № 1.
639. Schubert E. J., Simultaneous logical equations. Communic. and Electronics, 1960, 46, № 1.
640. Sechu S., On electric circuits and switching circuits. IRE Trans., Circuit theory, 1956, 3, № 3; 1957, 4, № 3.
641. Sechu S., Mathematical models for sequential machines. IRE Convent. Record, 1959, 7, part 2.
642. Sechu S., Miller R. E., Metzger G., Transition matrices of sequential machines. IRE Trans., Circuit theory, 1959, 6, № 1.
643. Shannon C. E., A symbolic analysis of relay and switching circuits. AIEE Trans., 1938, 57.
644. Shannon C. E., The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell system Techn. Journ., 1949, 28, № 2.
645. Shannon C. E., Computers and automata. Proc. IRE, 1953, 43.

646. Shannon C. E., Von Neumann's contributions to automata theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, part 2.
647. Srinivasan C. F., Narasimhan R. On the synthesis of finite sequential machines. Proc. Indian Acad. Sci., 1959, **A50**, № 1.
648. Srinivasan C. F., State diagram of linear sequential machines. J. Franklin Inst., 1962, 273.
649. Starke P. H., Über Experimente an Automaten. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1967, **B**, № 1.
650. Stearns R. E., Hartmanis J., On the state Assignment Problem for sequential machines II. IRE Trans., 1961, **EC-10**, № 4.
651. Tang D. T., Analysis and synthesis techniques of oriented communications nets. IRE Trans., Circuit theory, 1961, **8**, № 1.
652. Trassey T. H., Internal states assignment for asynchronous sequential machines. IEEE Trans., 1966, **EC-15**, № 4.
653. Unger S. H., Hazards and delays in asynchronous sequential switching circuits. IRE Trans., Circuit theory, 1959, **6**, № 1.
654. Urbano R. H., Mueller R. K., A topological method for the determination of minimal forms of boolean functions. IRE Trans., 1956, **EC-5**, № 3.
655. Virant Jernej, Autonomni konačni automati. Automatika, 1966, **7**, № 2—3.
656. Weeg G. P., The group and semigroup associated with automata. Proc. Sympos. Math. Theory Automata, New York, 1963.
657. Weinberg L., A simple and efficient algorithm for determining isomorphism of planar triply connected graphs. IEEE Trans. Circuit. Theory, 1966, **13**, № 2.
658. Wing O., Ladder network analysis by signal flow graphs: application to analog computer programming. IRE, Circuit theory, 1956, 3.
659. Yoeli M., The cascade Decomposition of Sequential Machines. IRE Trans., 1961, **EC-10**, № 4.
660. Yoeli M., Ginzburg A., On homomorphic images of transition graphs. J. Franklin Inst., 1964, **278**, № 5.
661. Zeleznikar A., Sinteza digitalnih avtomatov algebraičnim reševanjem logičnih enačb. Automatika, 1963, **4**, № 3.
662. Zelinka B., Introducing an orientation onto a given non-directed graph. Mat-fys. časop., 1966, **16**, № 1.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомат абстрактный 155  
— автономный 168  
— — по входу 168  
— — по выходу 168  
— асинхронный 156  
— бесконечный 158  
— вероятностный 265  
— вполне определенный 167  
— второго рода 157  
— единичный 256  
— конечный 158  
— обратный 257  
— первого рода (автомат Мили) 157, 165, 169, 171, 184, 202, 300, 309, 356  
— правильный 157  
— — второго рода (автомат Мура) 157, 165, 169, 171, 184, 202, 309, 335, 346, 356  
— связный 168  
— синхронный 156  
— частичный 167  
Автоматность отображения 172  
Автоматы изоморфные 170, 187  
— эквивалентные 159  
Алгебра абстрактных автоматов 227 и д.  
— булева 54  
— событий 178  
Алгоритм анализа абстрактных автоматов 204  
— представления автомата параллельной поочередной работой двух автоматов 292  
— — — произведением двух автоматов с общим входом 285  
— — — — с отдельными входами 278  
— разложения графа в объединение произведений графов 128  
— — — в произведение графов 113, 122  
— — — в сумму графов 134  
— распознавания изоморфизма автоматов 190  
— — — графов 23, 25  
— — — обобщенный 27  
— — изоморфного вложения автоматов 193  
— — — графов 30  
— синтеза автоматов 218  
Алфавит 155  
— входной 155  
— выходной 155  
Анализ автоматов 182, 202
- Базис регулярного выражения 222  
Биекция 60  
Биекция каноническая 66  
Буква алфавита 155  
— — пустая 172
- Вершина графа 12  
— — индексная 198  
— — каскадная 197  
— — остаточная 198  
Вершины смежные 14  
— спаренные 197  
Вложение автомата изоморфное 171, 191  
— — — строгое 171  
— графа изоморфное 22, 29, 36  
— — — строгое 37  
Выражение регулярное 179  
— — минимальное 207
- Глубина циклическая регулярного выражения 180  
— — — события 181
- Граф 11  
— антисимметрический 16  
— Бержа 17, 20  
— —, правило двойственности 53  
— бесконечный 11  
— каскадный 197  
— конечный 11  
— насыщенный (с насыщенным отображением) 16  
— неориентированный 11, 19  
— обратной связи 197  
— ориентированный 11, 19  
— пустой 35  
— разложимый 100  
— с пустым отображением 15  
— — — единичный 16  
— сигналов переходный 196  
— — — линейный 199  
— симметрический 16  
— смешанный 11, 19  
— без петель 19  
— структурный 160  
— транспонированный 15  
— универсальный 35
- Графоид 160  
— нетипичный 208  
— ориентированный 160  
— слаботипичный 208  
— типичный 208
- Графы изоморфные 14, 18, 22 и д.  
— непересекающиеся 44  
— пересекающиеся 43  
— эквивалентные (равные) 15  
— — с точностью до изоморфизма 15

- Декомпозиция автомата 99, 273  
 — на заданные блоки (автоматы) 275  
 — — общая 274, 305  
 — — оптимальная 273  
 — — параллельная неодновременная (поочередная) 274, 290  
 — — — одновременная 274  
 — — — с общим входом 283  
 — — — с разделением входов 276, 290  
 — — последовательная 297  
 — — с выделением заданных стандартных автоматов 320  
 — — смешанная 274  
 Диаграмма Вейча 344  
 Дизъюнкция событий 178  
 Длина слова 16  
 Дополнение графа 120  
 — множества 41  
 — по отображению графа 44, 45  
 Дуга графа 12, 18  
 — — каскадная 197
- Задачи анализа и синтеза автоматов 184, 185  
 Законы функционирования автоматов 156  
 Звено 18
- Изоморфизм автоматов 169, 187  
 — графов 15, 18, 22 и д.  
 — «жесткий» 67  
 Индекс соединения обратной связи 198  
 Интерпретация автомата второго рода автоматом первого рода 159  
 Инцидентность вершины и ребра 14  
 Инцидентор 18, 49  
 Инъекция 60  
 Исечение автомата 324  
 Источник 197  
 Итерация события 178
- Карта Карно 344  
 Композиция автоматов 258  
 — графов 74, 75  
 Контур обратной связи 196  
 Кратность слова 16
- Матрица инцидентов графа 20  
 — клеточная  $k$ -правильная 145  
 — — — соединений автомата 298  
 — — — правильная 103  
 — — — соединений автомата 277  
 — — — с запрещенными переходами 306  
 — — регулярная 131  
 — — — соединений автомата 291  
 — — переходов 340  
 — — триггера с раздельными входами 341  
 — смежности графа 13, 21  
 — соединений автомата 161  
 — — — квазиправильная 313  
 — стохастическая 266
- Множество 11  
 — допустимых входных слов автомата 167  
 — операций объединяющего типа 80  
 — — пересекающего типа 87  
 — — суперпозиционного типа 80, 86  
 — подавтоматов 171  
 — подграфов 38, 40  
 — подмножеств 37  
 — событий каноническое 176  
 — суграфов 38, 40  
 Мультиграф ориентированный 16  
 Мультичисло мультиграфа 16
- Надавтомат 171  
 Надграф 34, 36, 40  
 — минимальный 102, 120  
 Неограф 19  
 — без петель 19
- Область запрета автомата 167  
 Образ по отображению 59, 60  
 Объединение автоматов 235  
 — графов 42  
 — множеств 40  
 — событий 176  
 Оператор алфавитный 155  
 Операция квазикомпозиционная 82  
 — квазисуммирующая 82  
 — квазисуперпозиционная 87  
 Орграф 19  
 — без петель 19  
 Остаток индексный графа 198  
 Отображение автоматное 172  
 — алфавитное 155  
 — биективное 60  
 — инъективное 60  
 — сюръективное 60
- Пары разбиений множества вершин изоморфные 108  
 Пересечение автоматов 238  
 — графов 43, 44, 48  
 — множеств 41  
 Петля графа 12, 18  
 Подавтомат 171  
 — истинный 171  
 Подграф 34—36, 40  
 — истинный 37  
 — несобственный 36  
 — собственный 36  
 Полустепень захода вершины 14  
 — исхода вершины 14  
 Пополнение отображения 173  
 Построение функциональной схемы по графу автомата 348  
 Правила де Моргана 51  
 Правило двойственности для графов Берга 53  
 Прадерево нагруженное 160  
 Приведение отображения к канонической форме 77  
 Присоединение множества 41  
 Продолжение автомата изоморфное 170  
 — — эквивалентное 171



- Продолжение графа 36  
 — — изоморфное 37  
 — отображения 36  
 Проекция декартова произведения  
   вторая 65  
   — — — первая 65  
 Произведение автоматов 240, 244  
 — — вероятностных 268  
 — графов 71, 73  
 — матриц прямое (тензорное) 92  
 — множеств декартово (прямое) 12,  
   65, 69  
 — отображений 233  
 — событий 178  
 Прообраз графа 61  
 — полный по отображению 59  
 Путь на графе замкнутый 196  
 — — — обратный 196  
 — — — открытый 196  
 — — — прямой 196
- Равенство графов 15  
 — —, двойственное данному 84  
 Разбиение множества 104  
 Разложение графа 99 и д.  
 — — в объединение произведений  
   графов 128  
 — — в произведении графов 105, 112  
 — — в сумму графов 130  
 — — по операции композиции 138  
 — — — — суперпозиции 144  
 — — тривиальное 101  
 — мультиграфа по операции умно-  
   жения 116  
 Разность графов 45  
 — множеств 41  
 Расщепление вершины 197  
 Ребра смежные 14  
 Ребро графа 12  
 — — неориентированное 18  
 — — ориентированное 18
- Синтез автоматов 182  
 — — в универсальных вычислитель-  
   ных средах 367  
 — —, декомпозиционный метод 355  
 — —, канонический метод 335 и д.  
 Система элементарных автоматов  
   структурно полная 335  
 Скобки итерационные 180  
 Слово 16, 155  
 — входное допустимое 167  
 — — запрещенное 167  
 Смежность вершин 14  
 — ребер 14  
 Событие 176  
 — нерегулярное 180  
 — одноэлементное 179  
 — регулярное 180  
 Соединение автоматов параллельное  
   229  
 — — последовательное 230  
 — — смешанное 231  
   — графов 46  
 Соответствие каноническое 66  
 Состояние автомата достижимое 168  
 — — недостижимое 168  
 Состояния с тождественными пере-  
   ходами и выходами 314
- Сплетение отображений 234  
 — слов 233  
 Способ задания автоматов аналити-  
   ческий 157  
 — — — геометрический 160  
 — — — матричный 161  
 — — графов аналитический 11  
 — — — геометрический 12  
 — — — матричный 13  
 Степень множества 69  
 Сток 197  
 Стрелка Пирса 368  
 — пустая 212  
 Строка сопряжения 377  
 Структура 54  
 — булева 54  
 — дистрибутивная 54  
 Суграф 35, 40  
 Сужение автомата изоморфное 171  
 — — эквивалентное 171  
   — графа 36  
   — — изоморфное 37  
   — отображения 36  
 Сумма автоматов 247  
 — — вероятностных 268  
 — графов 73  
 — — дизъюнктивная 48, 57  
   — множеств 41  
   — — дизъюнктивная 42  
 Суперпозиция автоматов 252  
 — — вероятностных 271  
 — графов 77, 87
- Таблица кодирования состояний 338  
 — переходов 340  
 — — и выходов 161  
 — — отмеченная 165  
 — — соответствия 175  
 — — сокращенная 176  
 Теорема двойственности 84  
 — де Моргана 53  
 — Клини 186  
 Триггер с отдельными входами 341
- Условия автоматности отображения  
   172
- Формула в алгебре событий 179  
 Функция булева, реализация в вы-  
   числительной среде 370  
 — возбуждения элементарного авто-  
   мата 340  
 — выходов 156  
 — переходов 156  
 — — элементарного автомата обоб-  
   щенная 348
- Часть графа 35
- Штрих Шеффера 368
- Эквивалентность автоматов 159, 170  
 — графов 15

