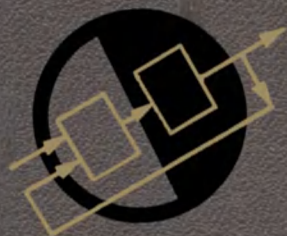


А.А.РАЙКИН · МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ УСТРОЙСТВ



А.А.РАЙКИН

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ
МОДЕЛИ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ
РЕЗЕРВИРОВАННЫХ
УСТРОЙСТВ



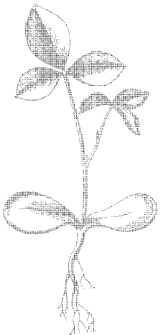


**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

А. Л. РАЙКИН

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ
МОДЕЛИ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ
РЕЗЕРВИРОВАННЫХ
УСТРОЙСТВ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

6Ф6.5

P18

УДК 62-50

Вероятностные модели функционирования резервированных устройств. Райкин А. Л., Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1971, 216 стр.

Книга посвящена важному разделу теории надежности. Математически описываются процессы функционирования резервированных устройств различного назначения. Рассмотрены модели схем резервирования и обеспечения готовности к действию резервного и запасного оборудования.

Особое внимание уделяется методам оптимального планирования состава резерва системы и использования резерва в ходе работы. Изложение сопровождается числовыми примерами. Отдельные главы посвящены методам прогнозирования потребностей в запасных деталях и оптимизации процесса технического обслуживания.

Книга рассчитана на широкий круг инженерно-технических работников, занимающихся проектированием и организацией эксплуатации сложных систем, а также на студентов, изучающих основы теории надежности.

Табл. 12. Илл. 18. Библ. 173 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 1. Модели проведения аварийных замен — резервирование замещением	11
1.1. Аварийные замены — уравнение восстановления	13
1.2. Аварийные замены при облегченном режиме хранения резерва	16
1.3. Аварийные замены отказавших элементов резервной группы при случайном отборе резервных элементов	23
1.4. Модель, учитывающая неисправности двух типов	27
1.5. Двухступенчатое резервирование при регулярном контроле исправности элементов	29
1.6. Автоматическое включение резервных элементов с помощью ненадежного переключателя	38
1.7. Влияние перераспределения нагрузки на надежность в схемах резервирования.	45
Глава 2. Модели резервирования с восстановлением отказавших элементов	54
2.1. Обслуживание резервированных устройств специализированным ремонтным персоналом	58
2.2. Обслуживание и ремонт неспециализированным ремонтным персоналом	73
2.3. Ремонт резервной группы при регулярном контроле исправности резервных элементов	81
Глава 3. Оптимальное резервирование и обеспечение запасным оборудованием	90
3.1. Оптимальное резервирование при одном ограничении	91
3.2. Оптимальное резервирование при более чем одном ограничении	106
3.3. Оптимальное обеспечение запасным оборудованием из выделенного фонда — планирование поставок	110
3.4. Байесовский план обеспечения запасами одного наименования	119

Глава 4. Планы оптимального использования резервного и запасного оборудования	124
4.1. Отсутствие восстановления отказавших элементов	125
4.2. Восстановление отказавших элементов	136
4.3. Случай адаптивного планирования включений	139
Глава 5. Планирование проверок исправности систем, находящихся в состоянии готовности к действию и на хранении	145
5.1. Планирование проверок с учетом «стоимости» проверок и потерь от необнаружения неисправности	146
5.2. Планирование проверок по минимаксному критерию	150
5.3. Планирование проверок исправности изделий при ограничениях на расход технического ресурса при проведении контроля	155
5.4. Планирование проверок, осуществляемых после замены оборудования	163
Глава 6. Методы прогнозирования потребностей в запчастях и материалах	167
Приложение	190
Литература	204
Предметный указатель	214

ПРЕДИСЛОВИЕ

Применение различных способов резервирования объясняется желанием застраховаться от некоторых обстоятельств. Автомобилисты, к примеру, стремятся иметь по крайней мере одно запасное колесо, хоккеисты берут на игру запасные клюшки и т. д. Аналогично обстоит дело при создании различных систем и сооружений, неисправности и повреждения которых могут иметь пагубные последствия. Наличие запасных средств, или, другими словами, резервов позволяет обеспечить относительную своевременность принятия тех или иных мер, а также непрерывность работы систем, от которых часто зависит многое. Если в простейших ситуациях решение о необходимых резервах напрашивается само по себе, то при планировании работы сложной системы решение о том, что резервировать и в какой мере, перерастает в самостоятельную проблему, не менее важную, чем разработка самой системы и ее конструирование.

Теперь не вызывает сомнения тот факт, что вопросы обеспечения резервами должны решаться на стадии разработки. Может так оказаться, что замена отказавших образцов оборудования или устройств вручную потребует значительных затрат времени по обнаружению и установлению причины неисправности, по проверке исправности запасного устройства и его вводу в нормальный режим функционирования. Автоматизация этих операций, с другой стороны, требует дополнительных средств

диагностики неисправностей, контроля и переключения. Дополнительное усложнение системы за счет этих средств может свести на нет возможный выигрыш в смысле повышения уровня, надежности.

Таким образом, резервирование и своевременное обеспечение запасным оборудованием на практике связано с решением ряда вопросов:

— какой способ резервирования осуществим в каждом конкретном случае,

— как при этом увеличивается уровень достигаемой надежности или как при этом снижается риск пагубных последствий,

— какой ценой достигается это увеличение?

Для ответов на эти вопросы необходимо иметь математическую модель обеспечения резервами, чтобы с ее помощью проанализировать возможные варианты решений, используя, например, методологию исследования операций.

Выбор критерия сравнения (перебора) вариантов решения обычно диктуется конечными целями разработчика и представляет собой самостоятельную задачу, которую нужно уметь решать на предварительном этапе. В большинстве случаев создания ответственных устройств, обеспечивающих безопасность человека и непрерывность процессов, следует добиваться максимума показателя надежности при наличии ограничений, характеризующих современные возможности реализации. Эти ограничения накладываются, например, на стоимость и вес. Ограничения могут создаваться и технологическими особенностями процесса, надежность которого требуется обеспечить. И наконец, ограничения возникают по организационным причинам, когда, скажем, имеются лимиты на штат обслуживающего персонала, недостаточна его квалификация и т. п.

С точки зрения используемых исходных данных при построении модели эти вопросы можно рассматривать как в рамках априорного анализа, когда, постулируя некоторые условия и уровни показателей надежности используемых элементов, делаются выводы о показателях надежности устройства в целом, так и в рамках анализа достоверности этих данных. Второй подход обычно основан на использовании методов теории статистических решений.

В данной книге рассматриваются различные стороны проблемы обеспечения запасным оборудованием или резервами в широком смысле с целью достижения оптимальных уровней надежности. Аналогичные задачи возникают в теории управления запасами, в основе которой находятся вопросы изучения и своевременного обеспечения спроса предложением. Однако большая часть рассмотренных в книге математических моделей имеет определенную специфику и в значительной степени отличается от обычных моделей управления запасами. Эта специфика, по-видимому, порождается специфичностью самой проблемы обеспечения надежности в технических системах. Между тем, когда это отличие не столь существенно проявляется, можно без труда провести аналогию с результатами теории управления запасами и указать их взаимную связь.

Не конкретизируя причины возникновения событий или ситуаций, требующих использования резервов и проведения некоторых мероприятий по повышению уверенности в успешном исходе, отметим, что изложение ведется в терминах интенсивностей возникновения этих событий на рассматриваемом временном интервале. Поэтому заинтересованный читатель может с одинаковым успехом интерпретировать «отказ» как «спрос», «гибель», и разрушение объекта под действием определенных

факторов, распространяя полученные результаты на конкретные области своей практической деятельности.

В книгу включены главным образом оригинальные результаты, сопровождаемые обзором состояния вопроса и библиографическими ссылками. Естественно, что при таком построении изложения нецелесообразно стремиться к исчерпывающему охвату большинства результатов, связанных с созданием аварийных резервов и запасов. Автор все же надеется, что ему в какой-то мере удалось одновременно осветить основные направления и тенденции исследований в указанной области.

Книга адресована инженерам, научно-техническим работникам, занимающимся проектированием, конструированием и организацией эксплуатации изделий, устройств и систем различного назначения, а также студентам старших курсов технических специальностей. В ходе окончательной подготовки рукописи были учтены замечания, высказанные рецензентом книги доктором технических наук проф. Я. Б. Шором, которому автор выражает благодарность.

Автор

МОДЕЛИ ПРОВЕДЕНИЯ АВАРИЙНЫХ ЗАМЕН — РЕЗЕРВИРОВАНИЕ ЗАМЕЩЕНИЕМ

Использование аппаратурной, информационной, структурной избыточности *) в одном из вариантов ее реализации — резервировании, позволяет, по крайней мере принципиально, добиться неограниченного повышения уровня надежности. Это было применительно к автоматам указано Дж. фон Нейманом, предложившим общий метод синтеза более надежных автоматов из недостаточно надежных элементов [152]. Этот метод использует правило большинства при голосовании выходных сигналов, характеризующих состояние элементов. Голосующие элементы являются статистически независимыми повторениями (версиями) ненадежного элемента или цепи. Для двухполюсных релейно-контактных схем, контакты в которых могут отказывать при «замыкании» и «размыкании», важный результат о возможностях повышения надежности получен К. Шенноном и Э. Муром [43]. Обе работы в значительной степени стимулировали дальнейшие исследования методов повышения надежности введением избыточности и, в частности, с помощью резервирования. Позднее были предложены метод усреднения выходных сигналов элементов — повторений [110], разработана теория адаптации при голосовании [46] при условии, что в орган голосования вводится некоторое статистическое решающее правило [45]. Применительно к анализу релейных устройств М. А. Гаврилов предложил рассматривать релейные структуры с точки зрения анализа информационной избыточности в теории сигналов. Несколько раньше более частная задача синтеза релейных устройств была рассмотрена К. Н. Курдюковым [31].

Наряду с этим развивалось направление, связанное с анализом надежности аппаратурно избыточных и резер-

*) Относительно применимости термина «избыточность» см. [94].

вированных систем. Одни из первых работ, посвященные методам расчета надежности и анализа простейших способов резервирования, относятся к более раннему периоду [73], [39]. Основной упор в них делался на изучение эффекта применения резервных элементов, уровня и кратности резервирования. Из числа зарубежных работ в этом направлении следует отметить работу Б. Эпстейна и Т. Хосфорда [111].

В 1960 г. при исследовании более сложных схем резервирования в технике стали применять известные теоретико-вероятностные модели и, в частности, марковскую схему «гибели», нашедшую до этого широкое применение при статистических исследованиях в области биологии и ядерной физики [101]. Марковская модель «гибели» применительно к анализу способов резервирования при облегченном режиме резервных элементов [50] была, по-видимому, одной из первых в этом цикле работ. Несколько позднее были опубликованы аналогичные модели [153]. Исследованию различных способов резервирования без восстановления отказавших элементов посвящены математически глубокие работы А. Д. Соловьева [79].

Для структур устройств, представляемых последовательно-параллельным и параллельно-последовательным соединениями элементов были изучены вопросы выбора оптимальных «ширины» и «длины» структурной схемы [97]. Эти задачи, перекликающиеся с [43], относятся к области синтеза более надежных структур из ненадежных элементов. Как известно, анализ и оценка надежности двухполюсных структур, построенных из элементов различной надежности, представляет значительные теоретические трудности [131]. Эзари и Прошан [97] предложили интересный способ отыскания верхней и нижней оценок надежности таких структур, основанный на введении понятий связанной системы (coherent system), минимальных путей и минимальных сечений. Согласно [97] путь представляет совокупность элементов, нормальная (надежная) работа которых обеспечивает нормальную (надежную) работу системы, а сечение является совокупностью элементов, отказ которых гарантирует отказ системы. Полезность таких оценок не вызывает сомнения, так как для систем сложной структуры точное аналити-

ческое выражение для показателя надежности получить не удается.

Простейшая форма статистической зависимости наблюдается у элементов, несущих общую нагрузку, перераспределяемую при отказах отдельных элементов по мере того, как оставшиеся исправными элементы принимают на себя нагрузку отказавших. Если интенсивности отказов отдельных элементов зависят от уровня действующих на них нагрузок, то при анализе приходится иметь дело с нелинейной марковской моделью «гибели» [52], которая обобщает модели резервирования, изученные в [101].

Резервирование замещением, осуществляемое автоматически ненадежным устройством — переключателем, изучено еще в 1956 г. [39]. А. Д. Соловьев исследовал практически важные случаи резервирования с ненадежным переключателем. В [63] были предложены обобщения марковской модели «гибели» при условии, что переключатель может иметь неисправности двух типов. В основу этого обобщения положен принцип минимального расширения пространства состояний по сравнению со схемой резервирования без переключателя.

Следует отметить, что модели резервирования без восстановления (технического обслуживания) отказавших элементов охватывают модели замен за пренебрежимо малое время. Поэтому в разделе невозстанавливаемых резервированных систем с полным основанием можно рассматривать результаты теории восстановления [155], которая как раз посвящена исследованию схем замены.

1.1. Аварийные замены — уравнение восстановления

В связи со сказанным выше рассмотрим вначале такую схему замены. Работающий образец оборудования (устройство или элемент) при возникновении отказа (аварийно) заменяется совершенно новым в этот момент образцом (устройством или элементом). Пусть время безотказной работы образцов случайно и одинаково распределено согласно функции $F(t)$, имеющей непрерывную первую производную $f(t)$. Если замены осуществлять за пренебрежимо малое время, производя их всякий раз при

отказе очередного работающего образца, то среднее число замен за время $[0, t)$ будет равно

$$U(t) = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i(t),$$

где $P_i(t)$ — вероятность возникновения точно i отказов:

$$P_i(t) = \mathbf{P}\{X(t) = i\}.$$

Но событие $\{X(t) \geq i\}$ означает, что $\left\{ \sum_{k=1}^i \xi_k \leq t \right\}$, где индекс k определяет очередность отказа. И потому, учитывая независимость времен ξ_k , можно записать для распределения их суммы следующее соотношение:

$$\mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^i \xi_k \leq t \right\} = \int_0^t F^{(i-1)}(t - \tau) dF(\tau) = F^{(i)}(t).$$

Иначе вероятность $P_i(t)$ представляется как $\mathbf{P}\{X(t) \geq i\} - \mathbf{P}\{X(t) \geq i+1\}$. На этом основании уравнение для $U(t)$ приобретает такой вид:

$$U(t) = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(i)}(t).$$

Из него получаем интегральное уравнение, называемое уравнением восстановления:

$$\begin{aligned} U(t) &= F(t) + \int_0^t \sum_{i=2}^{\infty} F^{(i-1)}(t - \tau) dF(\tau) = \\ &= F(t) + \int_0^t U(t - \tau) dF(\tau). \end{aligned}$$

Продифференцировав по t обе части последнего уравнения и учтя, что $U(0) = f(0) = 0$, получим

$$\frac{dU(t)}{dt} = u(t) = f(t) + \int_0^t u(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Если ввести преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, & \bar{U}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} U(t) dt, \\ \bar{u}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt, & \bar{F}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \end{aligned}$$

то на основании теоремы о композиции имеем

$$\bar{U}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{1 - \bar{f}(s)} \quad \text{и} \quad \bar{u}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{1 - \bar{f}(s)}.$$

В частности, когда $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, $\bar{u}(s) = \frac{\lambda}{s}$, и потому $u(t) = \lambda$. Когда рассматриваемый интервал времени неограниченно возрастает, то при произвольном распределении вероятностей времени безотказной работы каждого образца оборудования $F_i(t) = F(t) = \mathbf{P}\{\xi \leq t\}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{M[\xi]},$$

где $M[\xi]$ — математическое ожидание случайной величины ξ .

Кокс и Смит изучали такую схему замены при условии, что отдельные образцы имеют различные распределения [155]. Джевелл [124] несколько усложнил модель, введя интервал времени $[-\tau, 0]$, в течение которого неизвестно точно состояние образца оборудования. Если $P_i(t | \tau)$ — вероятность возникновения точно i аварий, а следовательно, и замен на интервале $[0, t)$ при условии, что последнее наблюдение состояния образца осуществлялось в момент $-\tau$, то

$$\begin{aligned} P_0(t | \tau) &= \int_t^{\infty} f(x | \tau) dx, \\ P_1(t | \tau) &= \int_0^t f(x | \tau) P_0(t - x | 0) dx, \\ &\dots \dots \dots \\ P_i(t | \tau) &= \int_0^t f(x | \tau) P_{i-1}(t - x | 0) dx, \quad (i = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

где $f(t | \tau) dt$ — вероятность того, что первая наблюдаемая авария после возобновления наблюдений произойдет на интервале $(t, t + dt)$, при условии, что последняя авария и замена до прекращения наблюдений произошли в момент $-\tau$. Вероятности $P_i(t | \tau)$ образуют распределение, и поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t | \tau) = 1,$$

причем

$$U(t | \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i(t | \tau).$$

Если ввести двойное преобразование Лапласа

$$\bar{f}(s | p) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-p\tau} f(t | \tau) dt d\tau,$$

то

$$\bar{f}(s | p) = \{\bar{f}(s) - \bar{f}(p)\} / (p - s) [1 - \bar{f}(p)].$$

В практике резервирования и проведения аварийных замен отказавших образцов оборудования предположение о том, что замена осуществляется *абсолютно новым образцом*, т. е. *исправным и имеющим нулевой возраст*, сужает возможности применения многочисленных результатов теории восстановления.

На самом деле условия хранения запасного оборудования, резервной техники и материалов далеко не всегда идеальны, и потому нужно учитывать возможность выхода из строя оборудования, порчи техники и материалов при хранении.

1.2. Аварийные замены при облегченном режиме хранения резерва

Один из основных способов повышения надежности системы объектов (элементов), когда надежность или защищенность отдельных элементов повысить не удастся, состоит в *резервировании* этих элементов или, другими словами, создании резерва.

Рассмотрим в связи с этим совокупность $z + x$ идентичных элементов, x из которых находятся в резерве. В данной совокупности z элементов должны взаимодействовать, как условно показано на рис. 1.1, и потому отказ или авария любого из них должна сопровождаться введением в действие любого из исправных резервных элементов. Отвлекаясь сначала от «механизма» самого

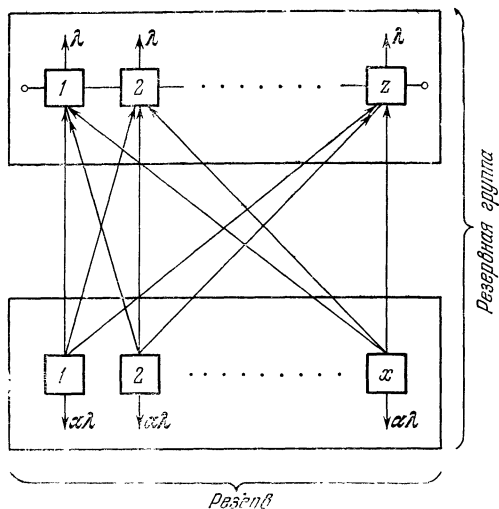


Рис. 1.1.

процесса введения в действие резервного элемента, будем для простоты считать, что если включение автоматическое, то оно абсолютно надежно, а если такое включение производится вручную, то время переключения пренебрежимо мало. Затем будут изучены возможности учета этих факторов.

Находясь в резерве элементы также могут отказать или попасть в аварийное состояние, причем режим функционирования элемента отличается от режима пребывания его в резерве. Поэтому в качестве показателя надежности элемента следует рассматривать интенсивности отказов или аварий в каждом из режимов: $\lambda_1(t, \tau)$ и $\lambda_2(\tau)$,

где τ — время пребывания элемента в резерве, а t — текущее время ($t \geq \tau$). Естественно, что при этом не учитывается возможность перевода исправного рабочего элемента в резерв. Вероятность отказа рабочего элемента на интервале $(t, t + \Delta t)$ при указанных выше условиях

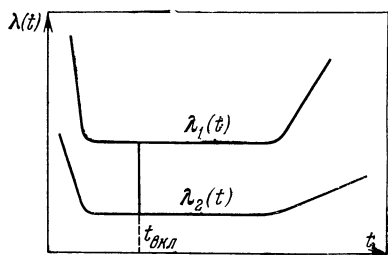


Рис. 1.2.

равна $\lambda_1(t, \tau) \Delta t$, если он находился в резерве время τ и при этом не отказал. Для резервного элемента, не участвовавшего в работе, аналогичная вероятность отказа равна $\lambda_2(\tau) \Delta t$. Ограничимся случаем, когда $\lambda_1(t, \tau) = \lambda_1(t)$, а $\lambda_2(t) = \alpha \lambda_1(t) = \alpha \lambda(t)$, как показано на рис. 1.2 ($\alpha = \text{const}$, $0 \leq \alpha \leq 1$).

Описанная схема в теории надежности получила название схемы *скользящего резервирования* дробной кратности (так как x/z может быть, вообще говоря, не целым числом) с облегченным режимом резервных элементов. Для случайной величины $X(t)$, устанавливающей общее число отказавших элементов к моменту времени t , введем вероятности

$$P_i(t) = P \{X(t) = i\} \quad (i = 0, 1, \dots, x + 1).$$

Тогда вероятность безотказной работы системы $z + x$

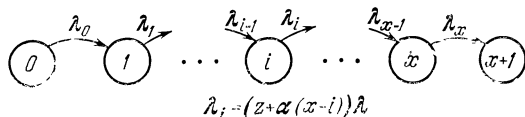


Рис. 1.3.

элементов, именуемой *резервной группой*, определится как

$$P \{X(t) \leq x\} = \sum_{i=0}^x P_i(t). \quad (1.1)$$

Введя новую переменную

$$\tau = \int_0^t \lambda(u) du \quad (1.2)$$

и учитывая, что $\alpha = \text{const}$, можно убедиться, что матрица инфинитезимальных вероятностей переходов согласно диаграмме переходов, представленной на рис. 1.3, имеет такой вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} -(z + \alpha x) \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -(z + \alpha(x - i + 1)) & (z + \alpha(x - i + 1)) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -(z + \alpha(x - i)) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -z \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\}. \quad (1.3)$$

Введя преобразование Лапласа

$$\bar{P}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} P_i(\tau) d\tau \quad (i = 0, 1, \dots, x + 1) \quad (1.4)$$

и предполагая, что в начальный момент $t = 0$ ($\tau = 0$) все элементы исправны, т. е.

$$P_i(\tau) = \begin{cases} 0, & i \neq 0, \\ 1, & i = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

путем последовательного вычисления $\bar{P}_j(s)$ ($j = 0, 1, \dots, i$) получим

$$\bar{P}_i(s) = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x - j))}{\prod_{j=0}^i (s + z + \alpha(x - j))} \quad (i = 1, \dots, x), \quad (1.6)$$

причем

$$\bar{P}_0(s) = \frac{1}{(s + z + \alpha x)}. \quad (1.7)$$

Если $\lambda_1 = \text{const}$ и $\lambda_2 = \text{const}$, то выражения (1.6) и (1.7) имеют такой вид:

$$\bar{P}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_i(t) dt = \frac{\lambda^i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j))}{\prod_{j=0}^i (s + \lambda(z + \alpha(x-j)))} \quad (0 \leq i \leq x)$$

и

$$\bar{P}_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_0(t) dt = \frac{1}{(s + \lambda(z + \alpha x))}.$$

С помощью обратного преобразования Лапласа (по формуле разложения) получаем

$$P_i(\tau) = \begin{cases} \binom{\frac{z}{\alpha} + x}{i} e^{-\left(\frac{z}{\alpha} + x - i\right)\tau} (1 - e^{-\tau})^i, & 0 \leq i \leq x, \\ 0, & i > x + 1, \end{cases} \quad (1.8)$$

где

$$\binom{\frac{z}{\alpha} + x}{i} = \frac{\left(\frac{z}{\alpha} + x\right) \left(\frac{z}{\alpha} + x - 1\right) \dots \left(\frac{z}{\alpha} + x - i + 1\right)}{i!}, \quad (1.9)$$

а $\binom{\frac{z}{\alpha} + x}{0} = 1$ по определению.

Из (1.8) непосредственно следует выражение для $P_i(t)$:

$$P_i(t) = \begin{cases} \binom{\frac{z}{\alpha} + x}{i} e^{-\alpha \left(\frac{z}{\alpha} + x - i\right) \int_0^t \lambda(u) du} \left(1 - e^{-\alpha \int_0^t \lambda(u) du}\right)^i, & 0 \leq i \leq x, \\ 0, & i > x + 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

Обозначив $\exp\left\{-\alpha \int_0^t \lambda(u) du\right\}$ через P_t , получим на основании (1.10), что

$$P_i(t) = \begin{cases} \binom{\frac{z}{\alpha} + x}{i} P_t^{\frac{z}{\alpha} + x - i} (1 - P_t)^i, & 0 \leq i \leq x, \\ 0, & i > x + 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Таким образом, вероятность выхода из строя точно i элементов резервной группы в данной схеме резервирования представляет $(i + 1)$ -й член распределения, который назовем *обобщенным биномиальным* распределением по аналогии с биномиальным распределением, так как z/α в общем случае уже не является целым числом. Это распределение, по существу, представляет композицию двух биномиальных распределений с разными параметрами.

При $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = \alpha\lambda$ имеем $P_t = \exp\{-\alpha\lambda t\}$, а

$$P_i(t) = \begin{cases} \binom{\frac{z}{\alpha} + x}{i} e^{-(z + \alpha(x-i))\lambda t} (1 - e^{-\alpha\lambda t})^i, & 0 \leq i \leq x, \\ 0, & i > x + 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Вероятность безотказной работы систем элементов или резервной группы вычисляется по формуле (1.1), если в нее подставить $P_i(t)$ из (1.10), (1.12). Можно также проинтегрировать последнее уравнение, соответствующее матрице (1.3), подставив предварительно в него $P_x(t)$ из (1.10) или (1.12). В этом случае показатель надежности выражается знакопеременным рядом, которым неудобно пользоваться при больших значениях x и при $P_t \rightarrow 1$. А. Д. Соловьев [79] для условия больших x и $z = 1$ при $P_t \rightarrow 1$ оценил ненадежность резервной группы с относительной ошибкой, не превосходящей

$$\lambda \left(1 + \frac{\alpha x}{2}\right) t.$$

Среднее время до отказа или до аварии системы из $z + x$ элементов, x из которых резервные, можно определить непосредственно:

$$T(x) = \bar{R}(s)|_{s=0} = \sum_{i=0}^x \bar{P}_i(s)|_{s=0},$$

так как $\bar{R}(s)$ является моментной производящей функцией случайной величины — времени до отказа системы или резервной группы из $z + x$ элементов. Другими словами,

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{\lambda(z + \alpha x)} + \sum_{i=1}^x \frac{\lambda^i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x - j))}{\lambda^{i+1} \prod_{j=0}^i (z + \alpha(x - j))} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^x \frac{1}{(z + \alpha i)}. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Исследуем выражение $\Delta T(x) = T(x + 1) - T(x)$ ($x = 0, 1, \dots$), которое характеризует эффективность введения дополнительных резервных элементов в смысл роста надежности. На основании (1.13) устанавливаем что

$$(I) \quad \Delta T(x) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{z + \alpha(x + 1)} \right)$$

является убывающей функцией x , причем при $x \rightarrow \infty$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta T(x) = 0.$$

(III) Допустим далее, что число резервных элементов неограниченно возрастает ($x \rightarrow \infty$). Тогда для фиксированных значений $t = t_0$, z и α вероятность безотказной работы резервной группы стремится к 1.

Из (1.1) и (1.8) следует, что $\Delta R_3(x) = \ln \sum_{i=0}^{x+1} P_i(\tau_0) -$
 $-\ln \sum_{i=0}^x P_i(\tau_0)$, или

$$\Delta R_3(x) = \ln \left\{ e^{-\alpha\tau_0} \frac{1 + \sum_{i=1}^{x+1} u_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x+1-j))}{1 + \sum_{i=1}^x u_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j))} \right\}, \quad (1.14)$$

где $u_i = (\exp\{-\alpha\tau_0\} - 1)^i / \alpha^i i!$.

(IV) Укажем еще одно свойство вероятности безотказной работы резервной группы как функции x при фиксированных значениях $t = t_0$, z , α , $\tau = \tau_0 = \int_0^{t_0} \lambda(u) du$:

$$\Delta R_3(x) - \Delta R_3(x+1) > 0 \quad (x = 1, 2, \dots) \quad (\text{см. [50]}).$$

Последнее неравенство означает, что логарифмический рост надежности убывает с ростом числа резервных элементов. Это свойство вероятности безотказной работы (а в дальнейшем мы докажем такое свойство и для коэффициента готовности резервной группы с восстановлением отказавших элементов) позволяет использовать методы маргинального анализа [86] при решении ряда задач оптимального резервирования.

1.3. Аварийные замены отказавших элементов резервной группы при случайном отборе резервных элементов

В большинстве случаев о состоянии резервного элемента можно судить, осуществив его пробное включение в работу, а такая возможность может представиться только при необходимости замены отказавшего его рабочего элемента.

Сохранив все предположения предыдущего раздела, будем считать, что замена отказавшего элемента *успешна*, если с первой попытки наугад выбран исправный резервный элемент. Таким образом, отказ работающего элемента

влечет за собой аварийную проверку резерва. Переходя к изучению указанной разновидности процедуры замен, введем двумерную случайную величину, одна из компонент которой, $X_1(t)$, будет представлять общее число отказавших элементов резервной группы, а вторая, $X_2(t)$, число обнаруженных неисправных элементов (отказов) к некоторому моменту t . Замены считаются успешными, если

общее число отказавших (неисправных) элементов не превысит численности резерва x ,

каждая замена отказавшего рабочего элемента осуществляется с первой попытки.

Характеризуя совокупность возможных значений случайного вектора $\{X_1(t), X_2(t)\}$ парами чисел $\{i, j\}$ ($i = 0, 1, \dots, x + 1; j = 0, 1, \dots, i$) и предполагая условие ординарности потока возникающих отказов, можно записать дифференциально-разностные уравнения для вероятностей $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{X_1(t) = i, X_2(t) = j\}$ той совокупности траекторий переходов, которые не связаны с нарушением условий надежности или успешности замен:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{00}(t)}{dt} &= -(z + \alpha x)\lambda P_{00}(t), \\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt} &= -(z + \alpha(x - i))\lambda P_{ij}(t) + z\lambda P_{i-1, j-1}(t)\rho(i, j) + \\ &+ \alpha(x - i + 1)\lambda P_{i-1, j}(t) \\ &\quad (i = 2, \dots, x, j = 1, \dots, i - 1), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\frac{dP_{ii}(t)}{dt} = -(z + \alpha(x - i))\lambda P_{ii}(t) + z\lambda P_{i-1, i-1}(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{i0}(t)}{dt} &= -(z + \alpha(x - i))\lambda P_{i0}(t) + \alpha(x - i + 1)\lambda P_{i-1, 0}(t) \\ &\quad (i = 1, \dots, x; \alpha \neq 0). \end{aligned}$$

Переход из состояния $(i - 1, j - 1)$ в состояние (i, j) происходит при отказе одного из z работающих элементов и при условии выбора с первой попытки исправного резервного из совокупности $(x - i + 1)$ резервных элементов, часть из которых может находиться в неисправном состоянии. Вероятность успешного выбора или извлечения исправного резервного элемента определяется

при этом как

$$\rho(i, j) = \frac{(x - i + 1)}{(x - j + 1)} \leq 1 \quad (x > 1; j = 1, \dots, i - 1). \quad (1.16)$$

Решение уравнений (1.15) в общем виде затруднительно, и поэтому приступим к поиску подходящей аппроксимации (1.15), которая позволила бы вычислять вероятности $P_{ij}(t)$ в компактной форме. Для этой цели просуммируем при фиксированных $i \geq 0$ по всем j правые и левые части уравнений (1.15). Введя обозначения

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=0}^i \frac{dP_{ij}(t)}{dt}, \quad P_i(t) = \sum_{j=0}^i P_{ij}(t), \quad P_{i-1}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} P_{i-1,j}(t),$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(z + \alpha x) \lambda P_0(t), \\ \frac{dP_i(t)}{dt} &= -(z + \alpha(x - i)) \lambda P_i(t) + \sum_{j=0}^{i-1} z \lambda \rho(i, j) P_{i-1,j}(t) + \\ &+ \alpha(x - i + 1) \lambda P_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, x). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Заменим вероятность $\rho(i, j)$ ее нижней оценкой, не зависящей от j . Тогда получаем возможность найти решение уравнений (1.17) в форме, аналогичной (1.8), (1.10):

$$P_0(t) = \exp\{-(z + \alpha x) \lambda t\} \quad (\alpha \neq 0),$$

$$P_i(t) = u_i \prod_{j=0}^{i-1} (z \rho(j+1) + \alpha(x - j)) \quad (i = 1, \dots, x), \quad (1.18)$$

$$u_i = \exp\{-(z + \alpha x) \lambda t\} (\exp\{\alpha \lambda t\} - 1)^i / \alpha^i i!,$$

$$\rho(i) = \frac{(x - i + 1)}{x} \quad (x > 1; i < x),$$

где $\rho(i)$ — вероятность выбора с первой попытки исправного резервного элемента в наилучшем случае, когда все отказы до последнего возникали среди резервных элементов и потому не были обнаружены.

Вероятность безотказной работы резервной группы зависит от вероятности успешного выбора исправного

резервного элемента. Указанная зависимость в значительной степени затрудняет анализ свойств функций $\Delta R_3(x)$ и $T(x)$ для этого случая.

Среднее время до отказа резервной группы определяется аналогично (1.13):

$$T(x) = \frac{1}{(z + \alpha x)\lambda} + \sum_{i=1}^x \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (z\rho(j+1) + \alpha(x-j))}{\lambda \prod_{j=0}^i (z + \alpha(x-j))}. \quad (1.19)$$

Последнее выражение является пессимистической оценкой фактического среднего времени до отказа резервной группы, поскольку условия, принятые для определения вероятности успешного выбора, реализуются только в том случае, когда отказы возникают у резервных элементов. Исследование асимптотического поведения функций $\Delta R_3(x)$ и $T(x)$ при различных α представляет интересную область, связанную с выявлением роли информации о состоянии элементов резервной группы.

В качестве еще одного практически важного случая функционирования резервной группы рассмотрим внезапное изменение интенсивности отказов элементов резерва в результате стохастического изменения обстановки или действия поражающих факторов. Предположим, что резерв состоит из x элементов, причем вероятность отказа на интервале $(t, t + \Delta t)$ любого одного из них при наличии обстановки A_1 будет $x\alpha_1\lambda\Delta t$, а при наличии обстановки A_2 — $x\alpha_2\lambda\Delta t$ ($\alpha_2 \gg \alpha_1$). Считая, что обстановка A_1 невозвратна и сменяется с интенсивностью λ , представим процесс истощения запаса элементов системой дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

$$P_{i1}(t) = \mathbf{P} \{X(t) = i, Y(t) = 1\},$$

$$P_{i0}(t) = \mathbf{P} \{X(t) = i, Y(t) = 0\} \quad (i = 0, \dots, x),$$

где $Y(t) = 1$ означает, что в момент t элементы находятся в обстановке A_1 , а $Y(t) = 0$ — в обстановке A_2 , $X(t)$

указывает общее число отказавших элементов в момент t :

$$\frac{dP_{0,1}(t)}{dt} = -\lambda(1 + x\alpha_1)P_{0,1}(t),$$

$$\frac{dP_{i,1}(t)}{dt} = -\lambda(1 + (x-i)\alpha_1)P_{i,1}(t) + \alpha_1\lambda(x-i+1)P_{i-1,1}(t) \\ (i = 1, \dots, x),$$

$$\frac{dP_{0,0}(t)}{dt} = -\lambda(x\alpha_2)P_{0,0}(t) + \lambda P_{0,1}(t),$$

$$\frac{dP_{i,0}(t)}{dt} = -\lambda(x-i)\alpha_2 P_{i,0}(t) + \lambda P_{i,1}(t) + \\ + \alpha_2\lambda(x-i+1)P_{i-1,0}(t) \quad (i = 1, \dots, x).$$

1.4. Модель, учитывающая неисправности двух типов

В изученной выше модели резервирования отказ любого элемента не влияет на работу резервной группы в целом (за исключением, конечно, факта полного истощения резерва). Это позволяет вычислять вероятность безотказной работы резервной группы как

$$P \{X(t) \leq x\}.$$

При постоянном включении резервных элементов неисправности определенного типа могут повлиять на остальные элементы резервной группы. Так, при параллельном соединении в электрических и электронных схемах короткое замыкание одного из элементов приводит к отказу всей схемы. Аналогичная ситуация возникает при обрыве одного из последовательно соединенных элементов. В таких случаях вид неисправности элемента определяет дальнейшую работу схемы. Если имеется, скажем, $(x+1)$ параллельно включенных элементов, неисправности которых делятся на *активные*, т. е. оказывающие влияние на схему в целом, и *пассивные*, приводящие к отказу только одного элемента, то надежность резервной группы нужно определить как

$$P \{X_1(t) = 0, X_2(t) \leq x\}, \quad (1.20)$$

где $X_1(t)$ — число активных, а $X_2(t)$ — число пассивных неисправностей к моменту t . Если исправность и неисправности двух типов для каждого элемента суть события взаимно исключающие, то для любого момента времени t справедливо соотношение:

$$p_t + q_{1t} + q_{2t} = 1, \quad (1.21)$$

где p_t — вероятность того, что элемент исправен к моменту t , q_{1t} — вероятность появления активной неисправности к моменту t , q_{2t} — вероятность появления пассивной неисправности к моменту t . На основании (1.21) и (1.20) можно записать:

$$R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x+1}{i} p_i^{x+1-i} q_{2t}^i. \quad (1.22)$$

Если интенсивность появления любой неисправности равна λ , в β^0 % случаев возникают пассивные неисправности, а в остальных — активные, то можно убедиться,

что

$$q_{2t} = \beta^0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (1.23)$$

Когда схема с постоянно включенными резервными элементами

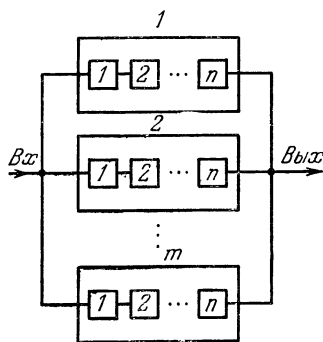


Рис. 1.4.

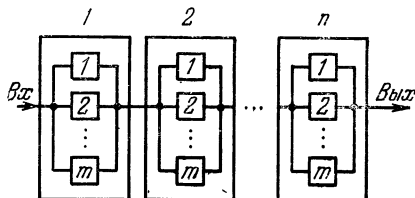


Рис. 1.5.

тами имеет вид параллельно-последовательного и последовательно-параллельного соединений, как показано на рис. 1.4 и 1.5, то m обычно называют «шириной» схемы, а n — «длиной». При фиксированных n , q_{1t} и q_{2t} максимум вероятности безотказной работы схем, показанных на этих рисунках, достигается при некоторых значениях m . Эти значения были установлены Барлоу, Прошаном и

Хантером [98], а позднее при несколько отличных исходных условиях Л. Кубатом [131]. Максимум вероятности безотказной работы схемы, показанной на рис. 1. 4, достигается при $m = [m_1] + 1$, где $[m_1]$ — наибольшее целое неотрицательное число, удовлетворяющее соотношению

$$m_1 \approx n \frac{\ln(1 - q_2) - \ln(q_1)}{\ln(1 - q_1^n) - \ln(1 - (1 - q_2)^n)}, \quad (1.24)$$

а для схемы, показанной на рис. 1.5, при $m = [m_2] + 1$, где $[m_2]$ — наибольшее неотрицательное целое число, удовлетворяющее соотношению

$$m_2 \approx n \frac{\ln(1 - q_1) - \ln(q_2)}{\ln(1 - q_2^n) - \ln(1 - (1 - q_1)^n)}. \quad (1.25)$$

Позднее Рау [145] обобщил эти результаты, предположив, что существует некоторое целое положительное число, или «порог», k ($1 \leq k \leq n$), определяющее способность схемы сохранять свою работоспособность.

Когда $q_{1t} = q_{2t}$, неисправности элементов называют *симметричными*. В ряде случаев неисправности обоих типов нельзя считать *независимыми*, так как с некоторой вероятностью один тип повреждения может перейти затем в другой. Например, короткое замыкание, сопровождающееся электрической дугой, может в результате привести к выгоранию материала и к последующему обрыву закоротки, и на этом факте основано действие релейной защиты электрических линий, которая отстраивается от перемежающихся коротких замыканий, приводящих к выгоранию случайных закороток. Самостоятельный интерес представляет анализ надежности схем с элементами такого типа в тех случаях, когда условная вероятность возникновения повреждения одного вида зависит от режима или состояния нагрузки элемента.

1.5. Двухступенчатое резервирование при регулярном контроле исправности элементов

Двухступенчатое резервирование представляет частный случай более общей схемы многоступенчатого резервирования, когда различным группам одинаковых резервных или запасных элементов назначается определенная

степень готовности к действию. К числу систем, в которых принято использовать многоступенчатое резервирование, относятся подвижные или автономные системы, работающие без постоянного обслуживания вдали от ремонтно-эксплуатационных баз. Многоступенчатое резервирование и замены могут быть оправданы и чисто экономическими соображениями, особенно, когда замены элементов носят характер профилактики. Иногда целесообразность, а скорее необходимость двухступенчатого резервирования вызвана тем, что проверки исправности, а следовательно, и возможные включения и отключения элементов производятся регулярно через равные интервалы времени, скажем, после окончания сеансов работы или после возвращения системы на базу технического обслуживания.

Примеры технических систем, в которых применимо двухступенчатое резервирование в качестве рационального способа обеспечения необходимого уровня надежности, весьма разнообразны.

Рассмотрим вначале резервную группу, которая состоит из $m - 1$ элементов в нагруженном резерве (+1 элемент основной, или рабочий). По мере того как эти элементы выходят из строя, их в моменты проверок, следующие через равные интервалы времени τ , заменяют исправными элементами второй ступени (т. е. элементами, находящимися, скажем, в режиме хранения). Для определенности пусть вначале на второй ступени резервирования имеется n элементов, причем $n < \infty$. Пока элементы второй ступени не исчерпаны возможными заменами отказавших элементов первой ступени или неисправностями, возникающими при их хранении, правило замен напоминает известную стратегию управления запасами (s, S) , т. е. если во время очередной проверки оказалось, что такие-то элементы первой ступени вышли из строя, то их полностью заменяют исправными элементами второй ступени [86]. Но отличие состоит в том, что на вторую ступень элементы *извне* не поступают, т. е. запас *непополняем*, и поэтому не всегда оптимально использовать «жесткую» стратегию замены типа стратегии управления запасами (s, S) . В этом можно будет убедиться далее, в разделе 3.1.

Допустим сначала, что элементы второй ступени абсолютно надежны, что означает, что при хранении они не могут выйти из строя. Элементы первой ступени могут выйти из строя на любом интервале длительности τ с вероятностью q_τ , зависящей от τ , но не зависящей от того, сколько времени до этого элемент работал или находился на хранении. Нарушение надежности или отказ резервной группы возможен по двум причинам; *

1) в один из интервалов длительности τ к текущему моменту времени t при наличии исправных запасных элементов на второй ступени на первой ступени произойдет более $(m - 1)$ отказов;

2) общее число отказавших элементов к текущему моменту t превысит $(m + n - 1)$ ($t = k\tau + \Delta\tau$, где $0 \leq \Delta\tau \leq \tau$, $k = 0, 1, \dots$).

Будем рассматривать резервную группу, состоящую из первой и второй ступеней, в k -й момент ($k = 0, 1, \dots$), каждый раз после проведения регулярной проверки через интервал τ . Пренебрегая длительностью самой проверки и замены, мы не учтем возможных неисправностей за эти «малые» отрезки времени. Обозначим состояние резервной группы в этот момент времени через $\{k, i\}$, если к моменту k отказало в сумме ровно i элементов. Вероятность такого состояния в момент времени k обозначим через $P_{k,i}$. Если элементы второй ступени абсолютно надежны (условие, которое в дальнейшем будет снято), то текущее число отказавших элементов i не может превысить ни mk , ни $m + n$, и поэтому

$$i \leq \min(mk, m + n). \quad (1.26)$$

Ясно, что для

$$i > \min(mk, m + n) \text{ все } P_{k,i} \equiv 0. \quad (1.27)$$

Если фиксировать число отказов только в моменты времени t_{k+0} после проверок, то состояния системы $\{k, i\}$ образуют марковскую цепь с поглощающим состоянием аварии или отказа [128]. Если задан вектор вероятностей состояний в начальный момент времени $t = 0$, $P(0)$, то аналогичный вектор вероятностей для момента $t = k\tau$ определится как

$$P(k\tau) = P(0) P^{(1)} \dots P^{(u)} \dots P^{(k)}, \quad (1.28)$$

где $P^{(u)}$ — квадратная матрица вероятностей переходов, которая в данном конкретном случае зависит от номера интервала $1 \leq u \leq k$, меняя свой размер от $m + 1$ до $m + n + 1$, определяемый условиями (1.26). Так как матрица вероятностей переходов зависит от u , то сокращения объема вычислений от применения матричной формы записи получить не удастся [128]. Для вероятностей состояний в моменты $k = 0, 1, \dots$ справедливы рекуррентные соотношения:

$$P_{k,i} = \sum_{j=0}^m P_{k-1, i-j} a_{i-j, j} \quad (i - j \leq n), \quad (1.29)$$

где вероятности перехода равны

$$a_{i-j, i} = \binom{m}{i} p_{\tau}^{m-j} (1 - p_{\tau})^j,$$

или

$$a_{i-j, i} = \binom{m}{j} p_{\tau}^m \left(\frac{1}{p_{\tau}} - 1 \right)^j, \quad p_{\tau} = 1 - q_{\tau},$$

а при $i - j > n$, $m > q = i - j - n > 0$

$$P_{k,i} = \sum_{j=0}^{m-q} P_{k-1, i-j} a_{i-j, i}^*, \quad (1.30)$$

где

$$a_{i-j, i}^* = \binom{m-q}{j} p_{\tau}^{m-q} \left(\frac{1}{p_{\tau}} - 1 \right)^j.$$

Для определения вероятности безотказной работы к моменту времени $t = k\tau + \Delta\tau$ ($k = 0, 1, \dots$) используем соотношения (1.29) и (1.30), изменив лишь пределы суммирования с m и $m - q$ соответственно на $m - 1$ и $m - q - 1$:

$$R(t = k\tau + \Delta\tau) = \sum_{i=0}^{i_1} P_{k+\Delta\tau, i}, \quad (1.31)$$

где $i_1 = \min \{m + n - 1, (m - 1)(k + 1)\}$, $P_{k+\Delta\tau, i}$ — вероятность того, что в момент времени $k\tau + \Delta\tau$ повреждено точно i элементов. Если число элементов второй ступени неограниченно возрастает ($n \rightarrow \infty$), то условием

надежности является лишь условие 1), и потому

$$R(t) = \exp \{-mk\lambda\tau\} \left\{ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left[\sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} (e^{\lambda\tau} - 1)^j \right]^k \right\} \times \\ \times \left[\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} e^{-m\lambda\Delta\tau} (e^{\lambda\Delta\tau} - 1)^j \right]. \quad (1.32)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда на первой ступени применено дублирование, т. е. $m = 2$, а $n < \infty$. Ясно, что для обеспечения надежной работы резервной группы на любом интервале длительности τ между двумя проверками может отказывать только один элемент и не больше, и потому

$$R(t = k\tau) = \left\{ \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i} (e^{\lambda\tau} - 1)^i \right\} \exp \{-2\lambda k\tau\} \quad (k \leq n). \quad (1.33)$$

Другими словами,

$$R(t = k\tau) = [e^{-2\lambda\tau} + 2e^{-2\lambda\tau} (e^{\lambda\tau} - 1)]^k.$$

Из (1.33) следует, что

$$P_{k,i} = 2^i \binom{n}{i} \exp \{-2\lambda k\tau\} (e^{\lambda\tau} - 1)^i, \quad (1.34)$$

$$P_{n,i} = 2^i \binom{n}{i} \exp \{-2\lambda n\tau\} (e^{\lambda\tau} - 1)^i. \quad (1.35)$$

Для момента времени с номером $(n + 1)$ справедливо такое рекуррентное соотношение:

$$P_{n+1,i} = P_{n,i} p_\tau^2 + P_{n,i-1} 2p_\tau^2 \left(\frac{1}{p_\tau} - 1 \right) = \\ = 2^i \binom{n+1}{i} \exp \{-2\lambda(n+1)\tau\} (e^{\lambda\tau} - 1)^i. \quad (1.36)$$

По индукции убедимся в справедливости соотношения (1.36) для любого $j = 1, \dots, k - n$. При переходе от

момента времени $(n + j - 1)$ к моменту $(n + j)$ имеем

$$P_{n+j, i} = P_{n+j-1, i} \exp\{-2\lambda\tau\} + P_{n+j-1, i-1} 2 \exp\{-\lambda\tau\} (e^{\lambda\tau} - 1),$$

или

$$P_{n+j, i} = \exp\{-2\lambda(n + j)\tau\} 2^i (e^{\lambda\tau} - 1)^i \binom{n - j}{i} \quad (1.37)$$

$$(j = 1, 2, \dots, k - n).$$

Выражение для $P_{k, n+1}$ ($k > n + 1$) получим, учитывая, что для состояния резервной группы $(n + j, n + 1)$ имеется только один исправный элемент, и поэтому

$$P_{n+2, n+1} = \exp\{-2\lambda(n + 1)\tau\} 2^{n+1} (e^{\lambda\tau} - 1)^{n+1} \times \\ \times \left[\binom{n + 1}{n} \exp\{-2\lambda\tau\} + \binom{n}{n} \exp\{-\lambda\tau\} \right], \quad (1.38)$$

$$P_{n+3, n+1} = \exp\{-2\lambda(n + 1)\tau\} \times \\ \times 2^{n+1} (e^{\lambda\tau} - 1)^{n+1} \left[\binom{n + 2}{n} \exp\{-4\lambda\tau\} + \right. \\ \left. + \binom{n + 1}{n} \exp\{-3\lambda\tau\} + \binom{n}{n} \exp\{-2\lambda\tau\} \right]. \quad (1.39)$$

Аналогично имеем:

$$P_{k, n+1} = \exp\{-2\lambda(n + 1)\tau\} 2^{n+1} (e^{\lambda\tau} - 1)^{n+1} \sum_{l=1}^{k-n} \binom{k-l}{n} \times \\ \times \exp\{-(2(k-n) - l - 1)\lambda\tau\}. \quad (1.40)$$

По индукции убеждаемся в справедливости (1.40) при переходе от момента времени с номером k к моменту с номером $k + 1$:

$$P_{k+1, n+1} = P_{k, n+1} 2 \exp\{-2\lambda\tau\} (e^{\lambda\tau} - 1) + P_{k, n+1} \exp\{-\lambda\tau\} = \\ = \exp\{-2\lambda(n + 1)\tau\} 2^{n+1} (e^{\lambda\tau} - 1) \left[\binom{k}{n} \times \right. \\ \times \exp\{-2\lambda(k - n)\tau\} + \exp\{-\lambda\tau\} \times \\ \left. \times \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k-l}{n} \exp\{-2[\lambda(k - n) + (l + 1)\lambda]\tau\} \right].$$

Вероятность безотказной работы резервной группы с двумя ступенями резервирования, когда на первой ступени используется дублирование элементов, можно представить как

$$R(t = k\tau + \Delta\tau) = \exp\{-2\lambda k\tau\} \times \\ \times \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} 2^i (e^{\lambda\tau} - 1)^i \right\} (e^{-2\lambda\Delta\tau} + 2e^{-2\lambda\Delta\tau} (e^{\lambda\Delta\tau} - 1)) + \\ + P_{k, n+1} \exp\{-\lambda\Delta\tau\}. \quad (1.41)$$

При $k \leq n + 1$ и $n > 0$ имеем

$$R(k\tau + \Delta\tau) \exp\{-2k\lambda\tau\} \times \\ \times \left\{ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 2^i (e^{\lambda\tau} - 1)^i \right\} (e^{-2\lambda\Delta\tau} + 2e^{-2\lambda\Delta\tau} (e^{\lambda\Delta\tau} - 1)).$$

А при $n = 0$ соответственно

$$R(t) = \\ = \exp\{-2\lambda(k\tau + \Delta\tau)\} (1 + 2(\exp\{(k\tau + \Delta\tau)\lambda\} - 1)) = \\ = 2\exp\{-2\lambda t\} (\exp\{\lambda t\} - 1) + \exp\{-2\lambda t\}$$

Таким образом, для резервной группы с двумя ступенями резервирования вероятность безотказной работы выражается явно через k , λ и n . Можно определить и среднее число отказавших элементов за время t для этой схемы резервирования, используя выражение

$$\sum_{i=0}^{i_1} iP_{k+\Delta\tau, i}, \quad (1.42)$$

где верхний предел суммирования $i_1 = \min\{n + 2, (k + 1), 2\}$.

Элементы второй ступени резервной группы могут также выйти из строя, но, вообще говоря, с отличной от q_τ вероятностью отказа. Если, как и выше, считать, что на первой ступени резервной группы имеется m одинаковых элементов, а на второй ступени $n < \infty$ элемен-

тов в запасе, то все ранее полученные соотношения остаются справедливыми с тем лишь различием, что в выражении для вероятности безотказной работы $R(t)$ меняется верхний предел суммирования:

$$R(t) = \sum_{i=0}^{m+n-1} P_{k+\Delta\tau, i}, \quad (1.43)$$

где

$$P_{k+\Delta\tau, i} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m+n-1} P_{k, i-j} a_{i-j, i}(\Delta\tau), & \text{если } i - j \geq 0, k = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{если } i - j < 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Элементы матрицы вероятностей переходов соответствующей марковской цепи определяются теперь из условия, что j отказов или аварий за время t могут произойти при различных сочетаниях отказов элементов первой и второй ступеней резервной группы. Если через l обозначить число отказавших элементов первой ступени, то для состояний со вторым индексом $i - j \leq n$ можно записать

$$a_{i-j, i}(\tau) = \sum_{l=l_1}^{l_2} \binom{m}{l} {}^1p_{\tau}^{m-l} (1 - {}^1p_{\tau})^l \binom{n+j-i}{j-l} \times \\ \times {}^2p_{\tau}^{n+j-i-l} (1 - {}^2p_{\tau})^{j-l}, \quad (1.45)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \max \{0, i - n\}, \\ l_2 &= \min \{j, m - 1\}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Пределы суммирования определяются двумя соображениями.

1) для обеспечения надежности резервной группы число отказов на первой ступени не должно превышать как $m - 1$, так и общее число отказов, возникших за этот период τ , т. е. $l \leq m - 1$, $l < j$;

2) число отказавших элементов второй ступени не должно превысить число элементов этой ступени в начале периода τ и общее число отказов, возникших за этот период, т. е. $j - l \leq n - i + j$, $j - l \leq j$.

При $i - j > n$ и $i \leq m + n - 1$ элементы матрицы вероятностей переходов определяются как

$$a_{i-j,i}^*(\tau) = \binom{m-q}{j} p_\tau^{m-q-j} (1 - p_\tau)^j, \quad i - j = n + q > n, \quad (1.47)$$

так как все элементы второй ступени уже исчерпаны, и надежность резервной группы обеспечивается лишь за счет элементов первой ступени.

Далее рассмотрим случай, когда характеристики надежности элементов известны лишь с некоторой неопределенностью, т. е. являются случайными величинами с заданными распределениями $h_1(\lambda_1)$ и $h_2(\lambda_2)$.

Тогда при вычислении вероятности безотказной работы резервной группы по формулам (1.43) — (1.44) нужно использовать усреднение вероятностей переходов $a_{i-j,i}$ и $a_{i-j,i}^*$ по $h_1(\lambda_1)$ и $h_2(\lambda_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i-j,i} &= \int_0^\infty \int_0^\infty a_{i-j,i}(\lambda_1, \lambda_2) h_1(\lambda_1) h_2(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= \sum_{l=l_1}^{l_2} \binom{m}{l} \int_0^\infty e^{-m\lambda_1\tau} (e^{\lambda_1\tau} - 1)^l h_1(\lambda_1) d\lambda_1 \binom{n-i+j}{j-l} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-(n-i+j)\lambda_2\tau} (e^{\lambda_2\tau} - 1)^{j-l} h_2(\lambda_2) d\lambda_2 \quad (1.48) \\ &\quad (i - j \leq n, \quad i \leq m + n - 1), \end{aligned}$$

$$\bar{a}_{i-j,i}^* = \binom{m-q}{j} \int_0^\infty e^{-(m-q)\lambda_1\tau} (e^{\lambda_1\tau} - 1)^j h_1(\lambda_1) d\lambda_1. \quad (1.49)$$

Например, если

$$h_1(\lambda) = \frac{t^a \lambda^{a-1} e^{-\lambda t}}{(a-1)!}, \quad a > 0, \quad (1.50)$$

то

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i-j,i}^* &= \binom{m-q}{j} \left(\frac{t}{\tau}\right)^a \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l \frac{1}{\left(m-q-j+\frac{t}{\tau}-l\right)^a}, \\ &\quad i - j = n + q, \quad i \leq m + n - 1. \quad (1.51) \end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить и $\bar{a}_{i-j,i}$. Если задать верхний и нижний пределы интегрирования в (1.48) и (1.49) $\lambda_{1\gamma}$ и $\lambda_{2\gamma}$, то вероятности $a_{i-j,i}$, $a_{i-j,i}^*$ получим с доверительным уровнем, соответствующим установленному доверительному интервалу ($\lambda_{1\gamma}$, $\lambda_{2\gamma}$).

1.6. Автоматическое включение резервных элементов с помощью ненадежного переключателя

Общая модель скользящего резервирования заменением разработана на основе предположения о пренебрежимо малом времени переключения и абсолютно надежном механизме отключения неисправных элементов и включения вместо них исправных резервных, или запасных. Допустим, что в резервной группе $z = 1$, а x элементов резерва имеют одинаковую интенсивность отказов $\alpha\lambda$ ($0 < \alpha < 1$), тогда как рабочий элемент обладает интенсивностью отказов λ . Если переключатель, осуществляющий необходимые операции автоматически, снабжен органом, чувствительным к отказам элементов, то его неисправности будем различать по таким признакам:

1) при необходимости переключения с неисправного рабочего элемента на исправный резервный учтем возможность неисправности переключателя, которая сделает такое переключение невозможным (вероятность возникновения такой неисправности на интервале $(t, t + \Delta t)$ равна $\beta_1\lambda\Delta t$);

2) при исправно работающем основном элементе независимо от наличия исправных резервных элементов учтем возможность возникновения с вероятностью $\beta_2\lambda\Delta t$ на интервале $(t, t + \Delta t)$ неисправности переключателя, которая немедленно приводит к отказу всей резервной группы [63].

Таким образом, принятая модель «поведения» переключателя при наличии неисправности такова: она может находиться в этом состоянии до возникновения очередной неисправности одного из работающих элементов, либо, отказав, немедленно привести к отказу всей резервной группы.

Основная идея такой классификации неисправностей переключателя состоит в том, чтобы за счет *минималь-*

ного расширения пространства возможных состояний резервной группы в модели без переключателя учесть и неисправности самого переключателя. Действительно, тогда состояния резервной группы с переключателем, как и ранее, удобнее классифицировать по общему числу отказавших элементов при наличии исправного переключателя. Обозначим эти состояния индексами i ($i = 0, \dots, x$), как показано на рис. 1.6. Введем еще одно состояние E_a ,

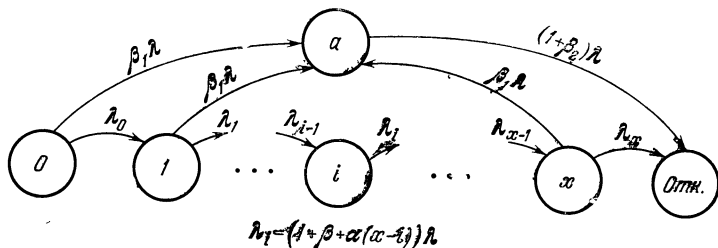


Рис. 1.6.

при котором в переключателе имеется неисправность первого типа, а общее число отказавших элементов к моменту t не превышает x . Таким образом, резервная группа, находясь в состоянии E_a , может работать до очередного отказа рабочего, или основного элемента. Если же возникает неисправность переключателя второго типа, то это равносильно немедленному отказу всех оставшихся исправными элементов, т. е. отказу резервной группы. По сравнению с уравнениями, соответствующими (1.3), добавляется еще одно уравнение для вероятности $P_a(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(1 + \beta + \alpha x) \lambda P_0(t), \\ \frac{dP_i(t)}{dt} &= -(1 + \beta + \alpha(x - i)) \lambda P_i(t) + \\ &+ (1 + \alpha(x - i + 1)) \lambda P_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, x; \beta = \beta_1 + \beta_2), \\ & \hspace{15em} (1.52) \\ \frac{dP_a(t)}{dt} &= -(1 + \beta_2) \lambda P_a(t) + \beta_1 \lambda \sum_{i=0}^x P_i(t). \end{aligned}$$

Если в момент $t = 0$ все элементы и переключатель исправны, то

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases}$$

$$P_a(0) = 0. \quad (1.53)$$

Первые $(x + 1)$ уравнений (1.52) аналогичны уравнениям (1.3), и поэтому

$$P_i(t) = \binom{\frac{1}{\alpha} + x}{i} p_t^{\frac{1}{\alpha} + x - i} (1 - p_t)^i p_{1t} \quad (i = 0, 1, \dots, x), \quad (1.54)$$

где $p_t = \exp\{-\alpha\lambda t\}$, $p_{1t} = \exp\{-\beta\lambda t\}$; p_{1t} — множитель, появляющийся из-за возможности отказов переключателя. Для определения вероятности безотказной работы резервной группы, которая содержит переключатель, остается вычислить $P_a(t)$ из уравнения (1.52) для $P_a(t)$:

$$P_a(t) = \exp\{-(1 + \beta_2)\lambda t\} C(t). \quad (1.55)$$

Так как $P_a(0) = 0$, то и $C(0) = 0$. Используя (1.55), перепишем последнее уравнение (1.52) в виде

$$\frac{dC(t)}{dt} = \beta_1\lambda \exp\{-(1 + \beta_2)\lambda t\} \sum_{i=0}^x P_i(t). \quad (1.56)$$

На основании (1.53) из (1.56) получим

$$C(t) = \beta_1 \sum_{i=0}^x \binom{\frac{1}{\alpha} + x}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \times$$

$$\times \frac{\{1 - \exp\{-(\beta_1 + \alpha(x - i + j))\lambda t\}\}}{(\beta_1 + \alpha(x - i + j))}, \quad (1.57)$$

или, окончательно,

$$P_a(t) = \beta_1 \exp\{-(1 + \beta_2)\lambda t\} \sum_{i=0}^x \binom{\frac{1}{\alpha} + x}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \times$$

$$\times \frac{[1 - \exp\{-\beta_1 + \alpha(x - i + j)\lambda t\}]}{(\beta_1 + \alpha(x - i + j))}. \quad (1.58)$$

Вероятность безотказной работы резервной группы с переключателем равна

$$R(t)_x^{(n)} = \sum_{i=0}^x P_i(t)^{(n)} + P_a(t). \quad (1.59)$$

При $\alpha = 0$ $P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-(1+\beta)\lambda t}$, и потому

$$P_a(t) = \begin{cases} \exp\{-(1+\beta_2)\lambda t\} \sum_{i=0}^x \left(\frac{1}{\beta_1}\right)^i \left[1 - e^{-V} \sum_{j=0}^i \frac{V^j}{j!}\right], & \text{если } \beta_1 \neq 0, \\ 0, & \text{если } \beta_1 = 0, \end{cases}$$

где $V = \beta_1 \lambda t$. При $\beta_1 = 0$ $R(t)_x^{(n)} = \sum_{i=0}^x P_i(t)$, где

$$P_i(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha} + x\right) p t^{\frac{1}{\alpha} + x - i} (1-p)^i p_{2i}, & \text{если } \alpha \neq 0, \\ \exp\{-(1+\beta_2)\lambda t\} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, & \text{если } \alpha = 0, \end{cases}$$

где $p_{2i} = \exp\{-\beta_2 \lambda t\}$. Отметим, что вероятность $P_a(t)$ выражается суммой знакопеременных членов, и потому для вероятностей безотказной работы резервных элементов, близких 1, и для больших значений x нужно обеспечить достаточно высокую точность расчета.

Среднее время до отказа резервной группы с ненадежным автоматическим переключателем можно вычислить аналогично (1.15), учитывая, что теперь

$$T_x^{(n)} = \left[\sum_{i=0}^x \bar{P}_i(s)_i^{\dagger} + \bar{P}_a(s) \right]_{s=0},$$

и поэтому

$$T_x^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \frac{(1+\beta)}{(1+\beta_2)} \left\{ \sum_{i=1}^x \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (1+\alpha(x-j))}{\prod_{j=0}^{i-1} (1+\beta+\alpha(x-j))} + \frac{1}{(1+\beta_2+\alpha x)} \right\}. \quad (1.61)$$

Для ненагруженного резерва ($\alpha = 0$) имеем

$$T_x^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \frac{(1 + \beta)}{(1 + \beta_2)} \left\{ \sum_{i=1}^x \frac{1}{(1 + \beta)^{i+1}} + \frac{1}{(1 + \beta)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(1 + \beta_2)} \sum_{i=0}^x \frac{1}{(1 + \beta)^i}.$$

Когда число резервных элементов неограниченно растет, ($x \rightarrow \infty$) $T_x^{(n)}$ остается конечным из-за конечной ненадежности переключателя

$$T^{(n)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda (1 + \beta_2)} \sum_{i=0}^x \frac{1}{(1 + \beta)^i} = \frac{(1 + \beta)}{(1 + \beta_2) \beta \lambda}.$$

Если $\beta_1 = 0$, то $T^{(n)} = \frac{1}{\beta_2 \lambda}$, а при $\beta_2 = 0$

$$T^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \frac{1}{\lambda}.$$

Мажоритарная схема «два из трех» с автоматическим ненадежным переключателем. Мажоритарные схемы, реализующие логику большинства при голосовании сигналов идентичных цепей, позволяют повысить уровень надежности и, в частности, повысить достоверность информационных устройств при наличии помех, вызывающих сбой в работе. Мажоритарные схемы одновременно используются и как средство борьбы с последствиями отказов (поломок) элементов, но тогда необходимо восстанавливать их работоспособность, применяя автоматическую замену элементов.

Рассмотрим для простоты схему голосования «два из трех» с ненадежным автоматическим переключателем и «идеальным» в смысле надежности органом голосования. Кроме трех голосующих элементов (цепей), имеется x таких же резервных, или запасных элементов, неисправности которых могут возникать с интенсивностью в $\frac{1}{\alpha}$ раз меньше интенсивности отказов голосующих элементов. Предположим, что переключатель аналогичен рассмотренному выше. Однако теперь нужно ввести еще одно состояние E_b , при котором любые два голосующих элемента

исправны, а в состоянии E_a исправны все три голосующих элемента. Переходы, связанные с отказами элементов, описываются следующими дифференциальными уравнениями для вероятностей состояний:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(3 + \beta + \alpha x) \lambda P_0(t), \\ \frac{dP_i(t)}{dt} &= -(3 + \beta + \alpha(x - i)) \lambda P_i(t) + \\ &+ (3 + \alpha(x - i + 1)) \lambda P_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, x) \quad (1.62) \end{aligned}$$

$$\frac{dP_a(t)}{dt} = -(3 + \beta_2) \lambda P_a(t) + \beta_1 \lambda \sum_{i=0}^x P_i(t),$$

$$\frac{dP_b(t)}{dt} = -(2 + \beta_2) \lambda P_b(t) + 3 \lambda P_a(t) \quad (\beta = \beta_1 + \beta_2),$$

причем $R(t)$ теперь определяется как

$$R(t) = \sum_{i=0}^x P_i(t) + P_a(t) + P_b(t),$$

и так как первые $(x + 1)$ уравнений аналогичны уравнениям (1.52), то

$$P_i(t) = \binom{\frac{3}{\alpha} + x}{i} p_t^{\frac{3}{\alpha} + x - i} (1 - p_t)^i p_{1t} \quad (i = 0, 1, \dots, x), \quad (1.63)$$

где $p_t = \exp\{-\alpha \lambda t\}$, $p_{1t} = \exp\{-\beta \lambda t\}$; отличие выражений (1.63) от (1.54) проявляется лишь в замене выражения $\frac{1}{\alpha}$ на $\frac{3}{\alpha}$. Аналогичным образом определяется вероятность

$$\begin{aligned} P_a(t) &= \beta_1 \exp\{-(3 + \beta_2) \lambda t\} \sum_{i=0}^x \binom{\frac{3}{\alpha} + x}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \times \\ &\times \frac{[1 - \exp\{-(\beta_1 + \alpha(x - i + j)) \lambda t\}]}{(\beta_1 + \alpha(x - i + j))}. \quad (1.64) \end{aligned}$$

Вероятность $P_b(t)$ находится из последнего уравнения (1.62)

$$P_b(t) = 3\beta_1 K(t) \sum_{i=0}^x \left(\frac{3}{\alpha} + x \right) \sum_{j=0}^{x-i} (-1)^j \binom{i}{j} \times \\ \times \left(\frac{1}{\beta_1 + \alpha(x-i+j)} \right) - 3\beta_1 \sum_{i=0}^x \left(\frac{3}{\alpha} + x \right) \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \times \\ \times \frac{[e^{-(2+\beta_2)\lambda t} - e^{-(3+\beta_2)\lambda t}]}{(\beta_1 + \alpha(x-i+j))(1 + \beta_1 + \alpha(x-i+j))}, \quad (1.65)$$

где $K(t) = [e^{-(2+\beta_2)\lambda t} - e^{-(3+\beta_2)\lambda t}]$. Основная сложность проведения анализа и расчетов показателей надежности по полученным формулам связана вовсе не с трудоемкостью вычислений, а с тем, что в конкретной функциональной схеме нужно установить те физические элементы, неисправности которых можно классифицировать как отказы индивидуальных цепей и как соответствующие неисправности переключателя. В этом и состоит своеобразная «плата» за минимальное расширение пространства возможных состояний резервной группы. Другими словами, необходимо провести дополнительный этап анализа, сводящийся к классификации элементарных событий — неисправностей реальной схемы. Как и модель резервирования без переключателя, рассмотренная выше, данная модель допускает обобщение на случай, когда $\lambda(t) = f(t)$, но $\alpha = \text{const}$, $\beta_1 = \text{const}$ и $\beta_2 = \text{const}$.

Уравнения для вероятностей состояний при числе голосующих элементов $m > 3$. Рассмотрим мажоритарную схему с порогом v органа голосования, который при простом правиле большинства определяется как

$$v = \begin{cases} \frac{m+1}{2}, & \text{если } m \text{ нечетно,} \\ \frac{m}{2} + 1, & \text{если } m \text{ четно,} \end{cases}$$

где m — общее число голосующих элементов ($m > 3$). Уравнения (1.62) для такого случая несколько видоизменяются (но вывод их основан на тех же соображениях,

что и выше)

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(m + \beta + \alpha x) \lambda P_0(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_i(t)}{dt} = & -(m + \beta + \alpha(x - i)) \lambda P_i(t) + \\ & + (m + \alpha(x - i + 1)) \lambda P_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, x), \end{aligned}$$

$$\frac{dP_\alpha(t)}{dt} = -(m + \beta_2) \lambda P_\alpha(t) + \beta_1 \lambda \sum_{i=0}^x P_i(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\alpha_j}(t)}{dt} = & -(m + \beta_2 - j) \lambda P_{\alpha_j}(t) + (m + 1 - j) \lambda P_{\alpha, j-1}(t) \\ & (j = 1, 2, \dots, m - v). \end{aligned}$$

Естественно, что пока число отказавших элементов резервной группы не превосходит x , т. е. возможности замен полностью не исчерпаны, порог органа голосования можно не менять, но как только $i > x$, может оказаться целесообразным с точки зрения достигаемого уровня надежности в оставшееся время менять порог мажоритарной схемы. Практическая реализация такой возможности маневрирования исправными элементами зависит прежде всего от того, можно ли достаточно просто в аппаратурном отношении выполнить орган голосования с перестраиваемым порогом [45], [46].

1.7. Влияние перераспределения нагрузки на надежность в схемах резервирования

Экспериментально установлено, что интенсивность отказов для ряда радиоэлектронных и механических элементов зависит от уровня нагрузки, причем эту зависимость зачастую можно аппроксимировать как

$$\frac{\lambda}{\lambda_n} = \left(\frac{Q}{Q_n} \right)^{\bar{m}},$$

где λ — интенсивность отказа, соответствующая нагрузке Q , λ_n — интенсивность отказа, соответствующая нагрузке Q_n , принятой за номинальную, а \bar{m} — коэффициент формы этой зависимости (рис. 1.7).

Так, для электрических конденсаторов $\bar{m} = 5/2$, если Q — приложенное напряжение в вольтах. Наличие этой зависимости и работа группы элементов на общую нагрузку обуславливают *статистическую зависимость* простейшего типа между ее элементами.

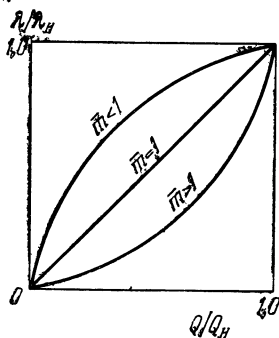


Рис. 1.7.

Допустим, что x элементов, каждый из которых номинально рассчитан на общую нагрузку Q , равномерно несут эту нагрузку. Примерами могут служить жилы буксирного или подъемного тросов, полупроводниковые выпрямители блока питания и т. д. Если состояния резервной группы, как уже было принято, классифицировать по числу вышедших из строя элементов i , то вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots, x$) за время $(t, t + \Delta t)$ будет равна $\lambda_i (x - i) \Delta t + o(\Delta t)$, но теперь интенсивность отказов каждого элемента в состоянии E_i зависит явно от индекса состояния i . Если, например, один элемент рассчитан на общую нагрузку Q , то когда $(x - 1)$ элементов резервной группы выходят из строя, оставшийся исправным элемент работает в номинальном режиме, характеризуемом интенсивностью отказа λ . Последнее условие позволяет выразить λ_i как функцию индекса i :

$$\lambda_i = \lambda \left(\frac{Q}{Q(x-i)} \right)^{\bar{m}} = \frac{\lambda}{(x-i)^{\bar{m}}}. \quad (1.66)$$

Для вероятностей состояний $P_i(t) = P \{X(t) = i\}$ можно записать с учетом (1.66):

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -x\bar{\beta}\lambda P_0(t), \\ \frac{dP_i(t)}{dt} &= -(x-i)\bar{\beta}\lambda P_i(t) + (x-i+1)\bar{\beta}\lambda P_{i-1}(t) \quad (1.67) \\ &\quad (i = 1, \dots, x-1), \end{aligned}$$

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = \lambda P_{x-1}(t),$$

где $\bar{\beta} = 1 - \bar{m}$. В данном случае $X(t)$ является нелинейным марковским процессом «гибели», для которого при

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

в терминах преобразования Лапласа имеем

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(s) &= \frac{1}{(s + \lambda x^{\bar{\beta}})}, \\ \bar{P}_i(s) &= \frac{\lambda^i \prod_{j=0}^{i-1} (x-j)^{\bar{\beta}}}{\prod_{j=0}^i (s + \lambda(x-j))^{\bar{\beta}}} \quad (i = 1, \dots, x-1), \\ \bar{P}_x(s) &= \frac{\lambda^x \prod_{j=0}^{x-1} (x-j)^{\bar{\beta}}}{s \prod_{j=0}^x (s + \lambda(x-j))^{\bar{\beta}}}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

По формуле разложения из (1.68) следует, что

$$P_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} (x-j)^{\bar{\beta}} \sum_{j=0}^i \frac{\exp\{-(x-j)^{\bar{\beta}} \lambda t\}}{\prod_{\substack{l=0 \\ j \neq l}}^i ((x-l)^{\bar{\beta}} - (x-j)^{\bar{\beta}})} \quad (1.69)$$

$$(i = 1, \dots, x-1),$$

причем $\bar{\beta} \neq 0$, так как при $\bar{\beta} = 0$ имеет место случай кратных корней, для которого формула (1.69) неверна. Вероятность $P_0(t)$ определяется непосредственно:

$$P_0(t) = \exp\{-x^{\bar{\beta}} \lambda t\}. \quad (1.70)$$

Вероятность безотказной работы резервной группы получим, суммируя вероятности $P_i(t)$:

$$R(t)_{x-1} = \sum_{i=0}^{x-1} P_i(t).$$

Среднее время до отказа резервной группы определяем снова с помощью моментной производящей функции:

$$\bar{R}(s) = \sum_{i=0}^{x-1} \bar{P}_i(s) \quad (i = 0, \dots, x-1),$$

$$T_{x-1}^{(0)} = \left[\bar{P}_0(s) + \sum_{i=1}^{x-1} \bar{P}_i(s) \right]_{s=0}.$$

Иначе говоря,

$$T_{x-1}^{(0)} = \frac{1}{x^{\bar{\beta}\lambda}} + \sum_{i=1}^{x-1} \frac{1}{\lambda(x-i)^{\bar{\beta}}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2^{\bar{\beta}}} + \dots + \frac{1}{x^{\bar{\beta}}} \right), \quad \bar{\beta} \neq 0. \quad (1.71)$$

При $\bar{m} = 0$, т. е в случае отсутствия зависимости интенсивности отказов от нагрузки,

$$P_i(t) = \binom{x}{i} p_i^{x-i} (1-p_i)^i,$$

где $p_i = \exp\{-\lambda t\}$.

При $\bar{m} = 1$ уравнения (1.67) имеют такой вид:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t),$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, x-1), \quad (1.72)$$

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = -\lambda P_{x-1}(t).$$

Поэтому ясно, что вероятность безотказной работы резервной группы выражается суммой первых x членов распределения Пуассона, а

$$T_{x-1}^{(0)} = \frac{x}{\lambda}.$$

При $\bar{\beta} = -1$ $T_{x-1}^{(0)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^x i = \frac{1}{\lambda} \frac{x(x+1)}{2}$. Если у элементов резервной группы могут возникать неисправности

двух типов, т. е., $\lambda_i = \lambda_i' + \lambda_i''$ [причем $\lambda_i' = \rho \lambda_i$, $\lambda_i'' = (1 - \rho) \lambda_i$, а $0 \leq \rho \leq 1$, которое от индекса состояния i не зависит], то в формуле (1.69) появляется дополнительный коэффициент $(1 - \rho)^i$.

Пример анализа надежности схемы логического элемента с помощью модели аварийного перераспределения нагрузки. В некоторых схемах параллельно включенные элементы находятся под воздействием суммарных нагрузок, перераспределяющихся при возникновении неисправностей в параллельных цепях. Рассмотрим одну из модификаций только что изученной модели данного раздела применительно к анализу надежности схемы логического элемента И на k входов, выполненного на магнитных гистерезисных элементах, как показано на

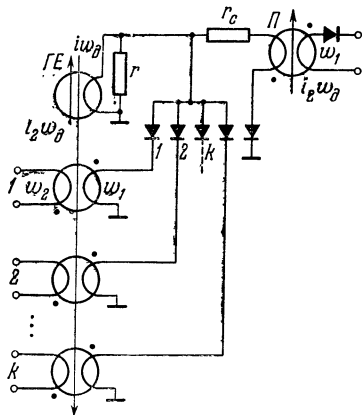


Рис. 1.8.

рис. 1.8 [57]. Сигнал на выходе схемы (элемент П на рис. 1.8) будет появляться только в том случае, когда на входы с индексами 1, 2, ..., k одновременно поданы все управляющие сигналы. В этом случае диоды с индексами 1, 2, ..., k запираются, и «генератор единиц» ГЕ производит запись информации в элемент П. В противном случае цепь хотя бы одного открытого диода шунтирует обмотку w_2 элемента П, и сигнал от генератора ГЕ не может быть записан в элемент П. Определим вероятность того, что логический элемент И может работать на r ($r \leq k$) входов.

Известно, что отказы элементов и деталей электронных схем могут вызываться как отказами (поломками), так и нестабильностью параметров, проявляющейся в начальных разбросах и последующих дрейфах характеристик этих элементов. Учтем лишь поломки деталей схемы, определив для них соответствующие интенсивности отказов.

Пусть

$$\lambda_0 = \lambda_{\Phi_1} + \lambda_{r_c} + \lambda_{\Phi_2} + \lambda_{дв},$$

где λ_{Φ_1} — интенсивность отказа гистерезисного элемента ΓE_{Φ_1} , λ_{r_c} — интенсивность отказа сопротивления «связи» r_c , λ_{Φ_2} — интенсивность отказа гистерезисного элемента ΓE_{Φ_2} , $\lambda_{дв}$ — интенсивность отказа диода на выходе.

Структура логической схемы И, показанной на рис. 1.8, такова, что в цепях индивидуальных входов нужно учитывать два типа неисправностей: активные и пассивные. Для диода D_i обозначим через $\lambda_1 (1 - \alpha_1)$ интенсивность пассивного повреждения типа «обрыв», а интенсивность пассивного отказа для гистерезисного элемента индивидуального входа через $\lambda_2 (1 - \alpha_2)$, где $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.

Коэффициент влияния нагрузки на интенсивность отказов диодов, как и раньше, обозначим через $\bar{\beta}$. Имеем

$$\left(\frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{1,k-1}} \right) = \frac{1}{(k-1)^{\bar{\beta}}}$$

при условии, что $\lambda_{1,k-1} = \lambda$, т. е. диод номинально рассчитан на общий ток ГЕ в импульсе. Уравнения для соответствующих вероятностей нетрудно записать, составив соответствующую диаграмму переходов:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_0 + k\bar{\beta} + k\lambda_2)P_0(t),$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -(\lambda_0 + (k-i)\bar{\beta}\lambda_1 + (k-i)\lambda_2)P_i(t) +$$

$$+ ((1 - \alpha_1)(k-i+1)\bar{\beta}\lambda_1 + (1 - \alpha_2)(k-i+1)\lambda_2)P_{i-1}(t) \quad (i = 1, \dots, k-2). \quad (1.73)$$

Если $P_0(0) = 1$, то решение в терминах преобразования Лапласа имеет вид

$$\bar{P}_i(s) = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} ((1 - \alpha_1)(k-j)\bar{\beta}\lambda_1 + (1 - \alpha_2)(k-j)\lambda_2)}{\prod_{j=1}^k (s + \lambda_0 + (k-j)\bar{\beta}\lambda_1 + (k-j)\lambda_2)}, \quad (1.74)$$

$$\text{и} \quad \bar{P}_0(s) = \frac{1}{(s + \lambda_0 + k^{\bar{\beta}}\lambda_1 + k\lambda_2)}, \quad (1.75)$$

следовательно, вероятности $P_i(t)$ определяются как

$$P_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \alpha_1) \lambda_1 (k - j)^{\bar{\beta}} + (1 - \alpha_2) \lambda_2 (k - j) \times \\ \times \sum_{j=0}^i \frac{\exp\{-(\lambda_0 + (k - j)^{\bar{\beta}}\lambda_1 + (k - j)\lambda_2)t\}}{i \prod_{\substack{l=0 \\ j \neq l}}^i ((k - l)^{\bar{\beta}}\lambda_1 + (k - l)\lambda_2 - (k - j)^{\bar{\beta}}\lambda_1 - (k - j)\lambda_2)} \quad (1.76) \\ (i = 1, \dots, k - 2),$$

$$P_0(t) = \exp\{-(\lambda_0 + k^{\bar{\beta}}\lambda_1 + k\lambda_2)t\}.$$

Если отказ логического элемента определить как событие, при котором число отказов-обрывов индивидуальных цепей $\{X(t) > k - 2\}$, то вероятность его безотказной работы будет равна

$$R(t) = \sum_{i=0}^{k-2} P_i(t),$$

а среднее время до отказа выразится как

$$T_{k-2} = \frac{1}{(\lambda_0 + k^{\bar{\beta}}\lambda_1 + k\lambda_2)} + \\ + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} ((1 - \alpha_1)(k - j)^{\bar{\beta}}\lambda_1 + (1 - \alpha_2)(k - j)\lambda_2)}{\prod_{j=0}^i (\lambda_0 + (k - j)^{\bar{\beta}}\lambda_1 + (k - j)\lambda_2)}.$$

Когда влиянием перераспределения нагрузки можно пренебречь, т. е. $\bar{\beta} = 1$, то

$$P_0(t) = \exp\{-(\lambda_0 + k(\lambda_1 + \lambda_2))t\}$$

и

$$P_i(t) = \left(\frac{\Lambda^i}{\lambda^i} \right) \exp \{ -(\lambda_0 + k\lambda)t \} \binom{k}{i} (e^{\lambda t} - 1)^i$$

$$(i = 1, \dots, k-2),$$

где $\Lambda = ((1 - \alpha_1)\lambda_1 + (1 - \alpha_2)\lambda_2)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Условные вероятности α_1 и α_2 определяются из анализа последствий поломок по наблюдаемой выборке элементов. Коэффициент $\bar{\beta}$ также устанавливается экспериментально [23].

Пример расчета. Логический элемент И имеет r входов. Оценки интенсивностей отказов $\hat{\lambda}_i$ ($i = 0, 1, 2$) взяты по данным статистической обработки результатов опытной эксплуатации систем телеуправления, выполненных на бесконтактных феррит-диодных элементах [23]:

$$\hat{\lambda}_0 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ 1/час}, \quad \hat{\lambda}_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ 1/час}, \quad \hat{\lambda}_2 = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ 1/час},$$

$$\alpha_1 = 0,7, \quad \alpha_2 = 0,1.$$

Зафиксируем два конкретных значения для времени работы: $t_1 = 2 \cdot 10^3$ час и $t_2 = 10^4$ час. Расчет проведем для набора из трех значений коэффициента $\bar{\beta}$: $\bar{\beta}_1 = -2$; $\bar{\beta}_2 = -1$; $\bar{\beta}_3 = 0,5$; используя формулы (1.76), получим результаты, представленные в табл. 1.1.

Таблица 1.1

$\bar{\beta}$	t , час	$P\{r \geq 2\}$	$P\{r = 3\}$
-2	$2 \cdot 10^3$	0,9984	0,99805
-1	$2 \cdot 10^3$	0,9982	0,99797
0,5	$2 \cdot 10^3$	0,9976	0,99741
-2	10^4	0,9832	0,98060
-1	10^4	0,9828	0,97970
0,5	10^4	0,9761	0,97400

Как видно из табл. 1.2, увеличение числа входов k от 2 до 10 в схеме логического элемента И при заданных условиях практически мало влияет на изменение

Таблица 1.2

t , час	$\bar{\beta}$	$P \{r = 2\}$	$P \{r = 3\}$	$P \{r = 4\}$	$P \{r = 5\}$	$P \{r = 6\}$
$2 \cdot 10^3$	-2	0,99810	0,99805	0,99797	0,99788	0,99779
	-1	0,99800	0,99797	0,99790	0,99782	0,99773
	0,5	0,99760	0,99741	0,99720	0,99711	0,99682
t , час	$\bar{\beta}$	$P \{r = 7\}$	$P \{r = 8\}$	$P \{r = 9\}$	$P \{r = 10\}$	
$2 \cdot 10^3$	-2	0,99769	0,99759	0,99749	0,99740	
	-1	0,99764	0,99755	0,99746	0,99738	
	0,5	0,99664	0,99647	0,99630	0,99614	

вероятности $P \{r = k\}$. Этот факт можно объяснить увеличением уровня надежности элементов D_1, \dots, D_k , нагрузка в которых аварийно перераспределяется, причем этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше m , или меньше $\bar{\beta}$.

МОДЕЛИ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ОТКАЗАВШИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Техническое обслуживание изделий, устройств и систем, состоящих из большого числа элементов или узлов, во многом напоминает ситуации, возникающие при массовом обслуживании, а именно: в системе случайно возникают неисправности, неполадки, разрегулировки и т. п., а эксплуатационный или ремонтный персонал должен своевременно устранить эти неполадки [4]. Задачи об обслуживании нескольких станков или машин оператором-ремонтником, задачи об обслуживании и ремонте большого числа однотипных машин ремонтной бригадой с малым числом ремонтников возникли первоначально в теории массового обслуживания, так как в рамках этой теории основное внимание обращалось на изучение продолжительности простоев машин и изысканию способов рациональной организации труда обслуживающего ремонтного персонала [15], [101]. Еще в 1932 г. А. Я. Хинчин исследовал задачу обслуживания одним рабочим ряда станков, у которых нужно при необходимости ликвидировать возникающие неполадки [87]. Позднее аналогичная задача изучалась Пальмом [139]. Задачи этого типа составили раздел теории массового обслуживания, который в зарубежной литературе фигурирует под названием «Machine Interference» [137], [138], [101]. Позднее стало ясно, что многие задачи, возникающие при изучении надежности технических систем, могут быть решены методами теории массового обслуживания, если входящий поток заявок или требований отождествить с событиями возникновения или обнаружения отказов (неисправностей), когда контроль исправности осуществляется *не непрерывно*, а процесс ремонта или восстановления считать процессом обслуживания. Поскольку резервная группа содержит однотипные элементы, которые могут выходить из строя, образуя поток требований на обслуживание или ремонт, то при анализе ее надежности и при оценке эффективности

способов ее эксплуатации могут быть использованы многие известные результаты теории массового обслуживания.

Остановимся кратко на теоретико-вероятностной модели «гибели и размножения», которая нашла широкое применение при изучении процессов массового обслуживания, ряда биологических, экономических и физических явлений. Позднее она оказалась эффективной и при изучении надежности резервированных восстанавливаемых систем [80], [28]. Обычно для этой модели делается предположение, что времена между последовательными отказами и времена ремонтов распределены по показательному закону. В этих предположениях для резервной группы, содержащей z взаимодействующих и x резервных (запасных) элементов, находящихся в облегченном режиме, Ашар в 1960 г. получил выражения для k -х моментов случайной величины — времени до отказа. С практической точки зрения более важен *стационарный* режим работы резервированной системы или резервной группы, когда наступает режим статистического равновесия [63], [72], хотя с точки зрения теории более интересным кажется нестационарный период работы [95], [125]. Рядом авторов были исследованы условия, при которых в системе наступает статистическое равновесие [7], [28]. Следует отметить, что модель «гибели и размножения» применительно к резервированным восстанавливаемым системам отличается конечным числом возможных состояний или (конечным источником требований), классифицируемых обычно по числу исправных или отказавших элементов. Эта «конечность» источника в значительной степени затрудняет исследование ряда конкретных схем резервирования с восстановлением резерва, например, при произвольном распределении времени между отказами и при произвольном распределении продолжительности ремонтов. Для сравнения укажем, что Кендалл в 1948 г. опубликовал статью, в которой дается обобщение модели «гибели и размножения» для случая, когда интенсивности рождения и гибели являются произвольными функциями времени, а множество возможных состояний счетное [127].
Указанную модель можно видоизменить, если число ремонтников меньше возможного числа одновременно

отказавших резервных элементов [28], [63]. Выражения для вероятностей состояний такой модели в стационарном режиме были получены для ряда практически важных случаев резервирования и эксплуатации. Нестационарный режим был изучен А. Д. Соловьевым [80].

Для перечисленных выше работ, посвященных исследованию моделей резервирования и замен с восстановлением отказавших элементов, характерно предположение о наличии у ремонтного персонала жесткой специализации, когда определенный ремонтник может обслуживать лишь оборудование, соответствующее его прямой специализации. В [64] предложены модели надежности резервированных систем, когда такое ограничение специализации ремонтника не наложено.

Начиная с работы Эпштейна и Хосфорда 1960 г., ряд исследований был посвящен изучению надежности дублированных систем с восстановлением [80], [118]. Для схемы ненагруженного дублирования Б. В. Гнеденко предложил способ отыскания распределения длительности безотказной работы, основанный на введении события, реализуемого на счетном множестве исходов [16]. Этот способ позволяет эффективно использовать метод производящих функций и, в частности, преобразование Лапласа. Интересно заметить, что весьма близкие идеи применительно к восстанавливаемым системам, обрабатывающим случайные задания, изложены Гейвером [118].

Для дублированной системы с восстановлением, когда отказы возникают согласно показательному закону, а распределение времени ремонта произвольно, Ю. К. Беляев [7] применил аппарат линейчатых марковских процессов. Если ремонтный персонал неограничен, интегро-дифференциальные уравнения Ю. К. Беляева для вероятностей состояний можно легко обобщить на случай $x > 1$.

Ряд работ, посвященных изучению свойств вероятностей безотказной работы и коэффициента готовности восстанавливаемых резервированных систем, позволяет выяснить влияние введения одного дополнительного резервного элемента в резервную группу и по своей сущности близки так называемому маргинальному анализу — методу, широко используемому в ряде экономических

работ [86]. При оптимизации экономических систем часто используется этот прием для определения наиболее эффективных путей достижения максимальных доходов или минимальных издержек. В [67] были доказаны неравенства для коэффициента готовности в стационарном режиме, которые гарантируют единственность решения задачи оптимального резервирования. В частном случае такое доказательство было проведено Блитцем [105].

При изучении надежности резервированных систем с восстановлением неспециализированным ремонтным персоналом возникают задачи оптимизации дисциплины обслуживания, введения оптимальной шкалы приоритетов при обслуживании — ремонте и т. п. Это направление нашло отражение в [58], [59] и в настоящее время продолжает развиваться [8], [9]. Сюда же с равным основанием можно отнести исследования оптимальных способов эксплуатации резервированных устройств при наличии технического обслуживания. На практике, например, актуален вопрос о том, куда направить дополнительные средства: на создание резерва (приобретение резервных, или запасных элементов) или на увеличение штата ремонтного персонала [142], [64]. В [142] подобная задача решается для специализированной ремонтной бригады, а в [64] дано приближенное решение, когда специализация ремонтников не ограничивается одним типом устройств или приборов.

Если исправность резервных и запасных устройств не контролируется непрерывно, то могут возникнуть дополнительные задержки в ремонте даже при неограниченных возможностях ремонтников. Для случая регулярного контроля восстанавливаемой системы можно составить рекуррентные соотношения, аналогичные тем, которые использовались в разделе 1.5. Однако до сих пор, по-видимому, не изучены способы контроля исправности резервированных *восстанавливаемых* устройств в случае, когда исправность резервных элементов проверяется лишь в момент отказа основного, или рабочего элемента (скажем, замена неисправного блока запасным, взятым наугад, об исправности которого нет предварительной информации). Такой способ контроля и обслуживания представляет пример взаимодействия двух случайных по-

токов: потока отказов рабочего элемента и потока отказов резервных элементов, причем первый поток как бы «управляет» вторым, если рассматривать результирующий поток поступления неисправных элементов на ремонт.

2.1. Обслуживание резервированных устройств специализированным ремонтным персоналом

Специализация ремонтно-обслуживающего персонала означает, что устройства определенного типа могут быть отремонтированы лишь персоналом, специально подготовленным для выполнения этих операций. С точки зрения сложности анализа надежности предположение о специализации обслуживающего персонала в значительной степени является упрощающим, так как ремонтников одной

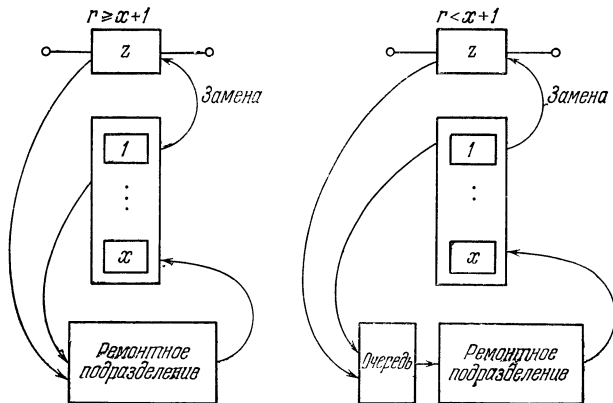


Рис. 2.1.

специализации можно рассматривать как (пользуясь терминологией теории массового обслуживания) однотипные каналы обслуживания, а совокупность одинаковых элементов, у которых могут возникать неисправности, составляет обычно конечный «источник» заявок или требований на проведение ремонта. Если число ремонтников, каждый из которых одновременно может обслуживать только один отказавший элемент, меньше максимально возможного числа простаивающих из-за

неполадок элементов (ограниченное восстановление [28]), то может возникнуть очередь, приводящая к дополнительным задержкам в ремонте или простоя. Рассмотрим одинаковые элементы общей численностью $z + x$, из которых x представляет набор резервных, или запасных элементов. Эту резервную группу вместе с ее ремонтным персоналом численностью r можно представить в виде системы массового обслуживания, как показано на рис. 2.1. Пусть $X(t)$ — общее число неисправных элементов данного типа в момент t . Если интенсивности отказов элементов не зависят от времени или если эта зависимость не нарушает марковского свойства процесса возникновения отказов (как, скажем, в случае, когда $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ зависят от времени, но их отношение $\alpha = \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)} = \text{const}$), а продолжительность ремонта имеет показательное распределение, то для анализа надежности можно применить модель «гибель и размножения» [101].

В [63] установлено, что в стационарном режиме

$${}^{(r)}\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{X(t) = i\} = {}^0u_i b_i^{(r)} \pi_0 \quad (r > i > 0) \quad (2.1)$$

и

$${}^{(r)}\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{X(t) = i\} = {}^1u_i b_i^{(r)} \pi_0 \quad (x + 1 \geq i \geq r), \quad (2.2)$$

где

$${}^0u_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / i!, \quad {}^1u_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / r! r^{i-r}, \quad b_i = \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x - j)). \quad (2.3)$$

Используя условие нормировки $\sum_{i=0}^{x+1} {}^{(r)}\pi_i = 1$, можно установить, что

$${}^{(r)}\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} {}^0u_i b_i + \sum_{i=r}^{x+1} {}^1u_i b_i \right]^{-1}. \quad (2.4)$$

Теперь нетрудно вычислить все остальные вероятности, в том числе и ${}^{(r)}\pi_{x+1}$, которая является вероятностью простоя резервной группы, или коэффициентом неготовности. Выше приведены результаты для случая

облегченного резерва $0 \leq \alpha \leq 1$, но если $\alpha = 0$, то

$${}^{(r)}\pi_{x+1} = {}^1u_{x+1} \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} {}^0u_i + \sum_{i=r}^{x+1} {}^1u_i \right]^{-1},$$

где

$${}^1u_i = \left(\frac{z\lambda}{\mu} \right)^i / r! r^{i-r},$$

а при $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} {}^{(r)}\pi_{x+1} &= \frac{\rho^{x+1}}{r! r^{x+1-r}} \prod_{j=0}^x (z + x - j) \times \\ &\times \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z + x - j) + \sum_{i=r}^{x+1} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} (z + x - j) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В частности, когда имеется всего один ремонтник, вероятность ${}^{(1)}\pi_{x+1}$ равна

$${}^1\pi_{x+1} = \rho^{x+1} \prod_{j=0}^x (z + x - j) \left[1 + \sum_{i=1}^{x+1} \rho^i \prod_{j=0}^{i-1} (z + x - j) \right]^{-1}.$$

Отказавшие элементы можно подразделить на ожидающие ремонта, или элементы в очереди, и находящиеся в процессе ремонта. Среднюю длину очереди можно определить с помощью выражения

$$L = \sum_{i=0}^{x+1} i\pi_i - \sum_{i=0}^{r-1} i\pi_i - r \sum_{i=r}^{x+1} \pi_i,$$

где π_i и π'_i вычисляются на основе формул (2.1), (2.2).

Сравнение с моделью Пальма ремонта ненадежных машин. В 1947 г. Пальмом была изучена модель обслуживания m машин ($m = z + x$) специализированными ремонтниками численностью r ($r < m$) человек, которые идентичны по своим техническим возможностям. Следуя Наору [137], выражения для стационарных вероятностей состояний, полученные Пальмом, можно представить с помощью

распределения Пуассона:

$$p(i, a) = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad P(i, \bar{a}) = \sum_{j=i}^{\infty} p_j^*(j, a).$$

Другими словами

$$\begin{aligned} {}^{(r)}\pi_i &= \frac{\left(\frac{r^i}{i!}\right) p(m-i, r\mu/\lambda)}{S(m, r, \mu/\lambda)} \quad (i < r), \\ {}^{(r)}\pi_i &= \frac{(r^{r-1}/(r-1)!) p(m-i, r\mu/\lambda)}{S(m, r, r\mu/\lambda)} \quad (r < i \leq m), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} S(m, r, \mu/\lambda) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{r^i}{i!} p\left(m-i, \frac{r\mu}{\lambda}\right) + \\ &+ \frac{r^{r-1}}{(r-1)!} \left(1 - P\left(m-r+1, \frac{r\mu}{\lambda}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В этих же обозначениях можно представить другие важные показатели системы обслуживания, а именно: среднее число работоспособных машин

$$\frac{r\mu}{\lambda} \frac{S(m-1, r, \mu/\lambda)}{S(m, r, \mu/\lambda)}, \quad (2.7)$$

среднее число машин в очереди

$$m - \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) r \frac{S(m-1, r, \mu/\lambda)}{S(m, r, \mu/\lambda)} \quad (2.8)$$

и среднее число незагруженных работой ремонтников

$$r \left\{ 1 - \frac{S(m-1, r, \mu/\lambda)}{S(m, r, \mu/\lambda)} \right\}. \quad (2.9)$$

Не представляет труда установить, что модель данного раздела является обобщением модели Пальма, так как элементы резервной группы, отождествляемые с машинами, могут находиться в двух различных режимах с разными интенсивностями возникновения отказов. Практически это означает, что резервные, или запасные элементы находятся под непрерывным контролем.

Если состояние запасных элементов не контролируется, как, скажем, при заменах вручную взятым наугад элементом, модель поддержания эксплуатационной надежности резко усложняется. Об этом уже говорилось в разделе 1.1

Перейдем теперь к доказательству ряда свойств стационарных вероятностей состояний резервной группы, обслуживаемой ограниченным ремонтным персоналом. Эти свойства используются в задачах оптимального резервирования и оптимизации структуры эксплуатации в главе 3.

Зафиксируем в выражении для π_{x+1} [см. (2.3), (2.4)] параметры ρ , α , r , характеризующие режим системы обслуживания и показатели надежности элементов. Докажем, что в условиях статистического равновесия отношения коэффициентов π_{x+1} , π_{x+2} , π_{x+3} удовлетворяют неравенству

$$\frac{\pi_{x+1}}{\pi_{x+2}} > \frac{\pi_{x+2}}{\pi_{x+3}}$$

для всех $x = 0, 1, 2, \dots$ и $0 < \rho < 1$.

Используя выражение для π_{x+1} при x резервных элементах, выпишем неравенство, которое нужно доказать:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{x+1}}{r! r^{x+1-r}} \prod_{j=0}^x A_j \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} A_j + \sum_{i=r}^{x+1} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} A_j \right]^{-1} > \\ & \frac{\rho^{x+2}}{r! r^{x+2-r}} \prod_{j=0}^{x+1} A_j^{(0)} \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} + \sum_{i=r}^{x+2} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} \right]^{-1} > \\ & > \frac{\rho^{x+2} \cdot \prod_{j=0}^{x+1} A_j^{(0)} \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} A_j^{(0)} + \sum_{i=r}^{x+2} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} \right]^{-1}}{\frac{\rho^{x+3}}{r! r^{x+3-r}} \prod_{j=0}^{x+2} A_j^{(1)} \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(1)} + \sum_{i=r}^{x+3} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(1)} \right]^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $A_j = (z + \alpha(x - j))$, $A_j^{(0)} = (z + \alpha(x + 1 - j))$,

$$\begin{aligned}
A_j^{(1)} &= (z + \alpha(x + 2 - j)). \text{ После преобразований получим} \\
(z + \alpha(x + 2)) &\left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} + \sum_{i=r}^{x+2} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} \right] \\
\frac{}{(z + \alpha(x + 1)) &\left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j + \sum_{i=r}^{x+1} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j \right]} > \\
&> \frac{\left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(1)} + \sum_{i=r}^{x+3} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(1)} \right]}{\left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} + \sum_{i=r}^{x+2} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} \right]}, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

где $l_i = \frac{\rho^i}{i!}$, а $l'_i = \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}}$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{a},$$

где

$$\begin{aligned}
a &= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x + 1 - j)) + \\
&\quad + \sum_{i=r}^{x+2} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x + 1 - j)), \\
b &= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x - j)) + \sum_{i=r}^{x+1} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x - j)), \\
c &= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x + 2 - j)) + \\
&\quad + \sum_{i=r}^{x+3} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x + 2 - j)).
\end{aligned}$$

Запишем новое отношение e/f такое, что $\frac{c}{a} = \frac{a+e}{b+f}$, $c = a + e$, $a = b + f$, т. е. $\frac{c}{a}$ является медиантой двух дробей с положительными знаменателями и потому всегда

заклучена между ними по величине [88]:

$$\frac{e}{f} = \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(1)} + \sum_{i=r}^{x+2} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(1)} + l'_{x+3} \prod_{j=0}^{x+2} A_j^{(1)} - 1 - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} - \sum_{i=r}^{x+2} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} \right] \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=r}^{x+1} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j^{(0)} + l'_{x+2} \prod_{j=0}^{x+1} A_j^{(0)} - 1 - \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j - \sum_{i=r}^{x+1} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} A_j \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Деля числитель и знаменатель e/f на $l_1 = \rho$ и учитывая, что $il_i/l_1 = l_{i-1}$ и $rl'_i/l'_1 = l'_{i-1}$ ($l_1 = l'_1$), получим

$$\frac{e}{f} = \frac{a + l'_{x+2} \prod_{j=0}^{x+2} (z + \alpha(x+2-j))(x+2)}{b + l'_{x+1} \prod_{j=0}^{x+1} (z + \alpha(x+1-j))(x+3)}.$$

Далее доказательство повторяет этапы доказательства аналогичного свойства для вероятности безотказной работы невозстанавливаемой системы (см. [63]), и потому здесь не приводится.

Справедливость неравенства $(\pi_{x+1}/\pi_{x+2}) > (\pi_{x+2}/\pi_{x+3})$ позволяет установить свойство коэффициента готовности: *приращение логарифма коэффициента готовности для стационарного режима системы убывает с ростом x для $0 < \rho < 1$ и $x = 0, 1, \dots, t. e.$*

$$\ln \left(\frac{1 - \pi_{x+2}}{1 - \pi_{x+1}} \right) > \ln \left(\frac{1 - \pi_{x+3}}{1 - \pi_{x+2}} \right) \quad (x = 0, 1, \dots),$$

где π_{x+1} , π_{x+2} и π_{x+3} определяются, как и выше, для соответствующего числа резервных элементов x , $x+1$, $x+2$. Для доказательства этого свойства достаточно показать, что

$$(1 - \pi_{x+2})^2 > (1 - \pi_{x+1})(1 - \pi_{x+3}). \quad (2.13)$$

Предварительно нужно доказать, что вероятности π_{x+1} , π_{x+2} , π_{x+3} убывают с ростом x для $x = 0, 1, \dots$. Для доказательства неравенства $\pi_{x+1} > \pi_{x+2}$ докажем, что

$$1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x+1-j)) + \sum_{i=r}^{x+2} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x+1-j)) - \frac{\rho(z + \alpha(x+1))}{r} \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + \sum_{i=r}^{x+1} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) \right] > 0. \quad (2.14)$$

Разделив левую и правую часть (2.14) на заведомо положительное число $l'_1 = l_1 = \rho > 0$ и замечая, что $\frac{l_i}{l_1} = \frac{l_{i-1}}{l_1}$ и $\frac{l'_i}{l'_1} = \frac{l'_{i-1}}{l'_1}$, после вынесения за скобку $(z + \alpha(x+1))$ получаем в левой части заведомо положительное число, т. е.

$$\frac{1}{\rho} + (z + \alpha(x+1)) \left[\sum_{i=1}^{r-1} \frac{l_i(r-i)}{ir} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + l'_{x+2} \prod_{j=0}^{x+1} (z + \alpha(x-j)) \right] > 0.$$

Аналогично проводится доказательство того, что $\pi_{x+2} > \pi_{x+3}$. Учитывая неравенство $\pi_{x+1} > \pi_{x+2} > \pi_{x+3}$, представим π_{x+1} как $\pi_{x+2} + \Delta_1$, и π_{x+2} как $\pi_{x+3} + \Delta_2$, где $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$.

Используя эти обозначения, неравенство (2.13) можно представить в виде

$$(1 - \pi_{x+2})^2 - (1 - \pi_{x+2} - \Delta_1)(1 - \pi_{x+2} + \Delta_2) > 0, \quad (2.15)$$

или

$$(1 - \pi_{x+2})(\Delta_1 - \Delta_2) + \Delta_1 \Delta_2 > 0. \quad (2.16)$$

Неравенство (2.16) справедливо, если $\Delta_1 > \Delta_2$. Для этого обратимся к известному неравенству

$$\frac{\pi_{x+1} + \pi_{x+3}}{2} \geq \sqrt{\pi_{x+1} \pi_{x+3}}. \quad (2.17)$$

На основании ранее доказанного свойства коэффициента готовности имеем

$$\pi_{x+1} \pi_{x+3} > \pi_{x+2}^2, \quad \text{или} \quad \sqrt{\pi_{x+1} \pi_{x+3}} > \pi_{x+2}.$$

Заменяя в (2.17) $\sqrt{\pi_{x+1} \pi_{x+3}}$ на заведомо меньшее число π_{x+2} , получим

$$\frac{\pi_{x+1} \pi_{x+3}}{2} > \pi_{x+2}, \quad (2.18)$$

или, другими словами,

$$\Delta_1 = \pi_{x+1} - \pi_{x+2} > \Delta_2 = \pi_{x+2} - \pi_{x+3}.$$

Поэтому неравенство (2.16) справедливо, а отсюда следует доказываемое утверждение.

Если в выражениях для стационарных вероятностей состояний зафиксировать ρ , α , z и x , то эти вероятности будут зависеть лишь от численности ремонтной бригады r . Можно показать, что *вероятность $\pi_0(r)$ как функция r монотонно возрастает с ростом r* (но естественно, что такой рост будет наблюдаться лишь при $r < x + 1$, так как при $r \geq x + 1$ вероятность π_0 уже от r не зависит). Действительно, на основании (2.4) имеем

$$\pi_0(r) = \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + \sum_{i=r}^{x+1} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) \right]^{-1}, \quad (2.19)$$

$$\pi_0(r+1) = \left[1 + \sum_{i=1}^r \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + \sum_{i=r+1}^{x+1} \frac{\rho^i}{(r+1)! (r+1)^{i-r-1}} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) \right]^{-1}. \quad (2.20)$$

Вычислим разность $\pi_0(r+1) - \pi_0(r) = \Delta_0(r)$. Как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} \Delta_0(r) = & \frac{1}{\pi_0(r)\pi_0(r+1)} \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + \right. \\ & + \sum_{i=r}^{x+1} l'_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) - 1 - \sum_{i=1}^{r-1} l_i \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) - \\ & \left. - \sum_{i=r+1}^{x+1} l'_{i(r+1)} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) \right] > 0, \end{aligned}$$

так как $l'_i(r)$, $l'_{i(r+1)}$, определяемые из выражений

$$l'_i(r) = \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}}, \quad l'_{i(r+1)} = \frac{\rho^i}{(r+1)! (r+1)^{i-r-1}},$$

удовлетворяют соотношению $[l'_i(r)/l'_{i(r+1)}] > 1$, $\pi_0(r) > 0$, $\pi_0(r+1) > 0$.

Случай, когда в отказавшей резервной группе продолжается возникновение поломок элементов. Выше мы считали, что когда резервная группа простаивает по причине отказа больше, чем x ее элементов, дальнейшие поломки в период простоя *не возникают*. Такое предположение, по-видимому, справедливо для производственных систем, включающих в себя станки, механические узлы и т. п. Однако в системах, содержащих электронное оборудование, процесс поломок не прекращается и при простое системы, на что указано в частности, в [154].

Пусть в резервной группе из $z+x$ элементов после очередного отказа элемента, приведшего к простое, оставшиеся исправными элементы приобретают интенсивность отказов $\alpha\lambda$, свойственную режиму хранения. Естественно, что число возможных состояний увеличится с $x+2$ до максимум $z+x+1$. По аналогии с (2.3) можно установить, что в стационарном режиме

$${}^{(r)}\pi_i = \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) {}^{(r)}\pi_0 \quad (i = 1, \dots, r-1), \quad (2.21)$$

$${}^{(r)}\pi_i = \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) {}^{(r)}\pi_0 \quad (i = r, \dots, x+1), \quad (2.22)$$

$${}^{(r)}\pi_i = \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^x (z + \alpha(x-j)) \prod_{j=1}^{i-x-1} (\alpha(z-j)) \quad (2.23)$$

$$(i = x+2, \dots, z+x).$$

Из условия нормировки $\sum_{i=0}^{z+x} {}^{(r)}\pi_i = 1$ находим ${}^{(r)}\pi_0$:

$${}^{(r)}\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + \right. \\ \left. + \sum_{i=r}^{x+1} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^{i-1} (z + \alpha(x-j)) + \right. \\ \left. + \sum_{i=x+2}^{z+x} \frac{\rho^i}{r! r^{i-r}} \prod_{j=0}^x (z + \alpha(x-j)) \prod_{j=1}^{i-x-1} (\alpha(z-j)) \right]^{-1}. \quad (2.24)$$

Здесь, как и выше, молчаливо предполагается постоянным контроль исправности элементов, включая периоды простоя системы.

Изучим теперь ту же систему обслуживания, если ремонт осуществляется «неограниченным» [28] персоналом ремонтников и время, затрачиваемое каждым ремонтником на ремонт одного элемента, является случайной величиной, имеющей произвольное распределение. Математическая модель такой системы обслуживания основывается на введении дополнительной переменной, указывающей, сколько времени до текущего момента длился ремонт, если элемент находится в ремонте в этот момент [7].

Произвольное распределение времени ремонта — случай r ремонтников ($r > x$). Если времена «жизни» рабочих и резервных элементов имеют показательные распределения, а времена ремонта имеют произвольное распределение $G(t)$, то удобно ввести в рассмотрение следующие вероятности:

$P_0(t)$ — вероятность того, что в момент времени t в резервной группе нет неисправных элементов,

$p_i(t, u_1, \dots, u_i) du_1, \dots, du_i$ — вероятность того, что в резервной группе неисправны и ремонтируются $i > 0$ элементов, причем на их ремонт к текущему ремонту t уже затрачены соответственно времена $u_1 < \eta_1(t) < u_1 +$

+ $du_1, \dots, u_i \leq \eta_i(t) < u_i + du_i$ ($i = 1, \dots, x$). Если известно, что в момент времени $t = 0$ i -й элемент исправен, а в момент $t \neq 0$ ремонтируется, то $0 \leq u_i \leq t$, в противном случае $0 \leq u_i < \infty$. Поскольку соображения, используемые при составлении уравнений, связывающих указанные вероятности для случая дублированной системы подробно изложены в [7] и [63], то интегро-дифференциальные уравнения будут выписаны без вывода. Предполагается, что один ремонтник может обслуживать одновременно один элемент, а число ремонтников $r > x$. Учет ограниченного числа ремонтников потребовал бы введения для каждого неисправного элемента помимо переменной, указывающей, сколько времени до настоящего момента длился ремонт, еще и переменной, указывающей, сколько времени перед тем, как ремонт был начат, элемент находился в очереди в ожидании ремонта.

Ограничиваясь предположением, что $r > x$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(z + \alpha(x))\lambda P_0(t) + \int_0^t p_1(t, u_1)\mu(u_1) du_1, \\ p_1(t, 0) &= (z + \alpha x)\lambda P_0(t), \\ \frac{\partial p_i(t, u_1, \dots, u_i)}{\partial t} + \dots + \frac{\partial p_i(t, u_1, \dots, u_i)}{\partial u_i} &= \\ &= - \left[\sum_{j=1}^i \mu(u_j) + (z + \alpha(x-i))\lambda \right] p_i(t, u_1, \dots, u_i) + \\ &+ \mu(u_{i+1}) p_{i+1}(t, u_1, \dots, u_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} p_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0) &= \\ &= (z + \alpha(x-i+1))\lambda p_{i-1}(t, u_1, \dots, u_{i-1}) \quad (i = 2, \dots, x+1), \end{aligned}$$

$$\text{где } \mu(t) dt = \frac{g(t) dt}{(1-G(t))}, \quad g(t) = \frac{dG(t)}{dt}.$$

Вероятность безотказной работы определяется через $P_0(t)$, $p_i(t, u_1, \dots, u_i)$ ($i = 1, \dots, x$) как

$$R(t) = P_0(t) + \sum_{i=1}^x \int_0^t \dots \int_0^t p_i(t, u_1, \dots, u_i) du_1, \dots, du_i. \quad (2.26)$$

Пределы интегрирования в (2.26) соответствуют начальным условиям $P_0(0) = 1$, а граничные условия, задаваемые теперь системой уравнений, отражают возможность прямых переходов в модели «гибели и размножения». При $x > 1$ систему уравнений (2.25) можно решить численными методами, а при $x=1$ она допускает решение в терминах преобразования Лапласа искомых вероятностей и плотностей вероятности.

С л у ч а й д у б л и р о в а н н о й с и с т е м ы. При $x = 1$, $z = 1$ уравнения (2.25) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(1 + \alpha)\lambda P_0(t) + \int_0^t e^{-\lambda u} q_1(t, u) du, \\ \frac{\partial q_1(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial q_1(t, u)}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

со следующим граничным условием $q_1(t, 0) = (1 + \alpha)\lambda P_0(t)$, $p_1(t, u) = e^{-\lambda u} q_1(t, u) (1 - G(u))$.

Из второго уравнения (2.27) и граничного условия можно заключить, что

$$q_1(t, u) = \begin{cases} (1 + \alpha)\lambda P_0(t - u), & t > u, \\ 0, & t \leq u. \end{cases} \quad (2.28)$$

Действительно, применив ко второму уравнению (2.27) преобразование Лапласа

$$\bar{q}_1(s, u) = \int_0^{\infty} e^{-st} q_1(t, u) dt,$$

получим $s\bar{q}_1(s, u) + \frac{\partial \bar{q}_1(s, u)}{\partial u} = 0$, откуда непосредственно следует, что

$$\bar{q}_1(s, u) = \bar{q}_1(s, 0) e^{-su}.$$

Сомножитель e^{-su} указывает на запаздывание, и поэтому на основании граничного условия

$$q_1(t, u) = \begin{cases} (1 + \alpha)\lambda P_0(t - u), & t > u, \\ 0, & t \leq u. \end{cases}$$

Теперь первое уравнение (2.27) с учетом (2.28) можно записать в виде

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(1 + \alpha)\lambda P_0(t) + (1 + \alpha)\lambda \int_0^t e^{-\lambda u} P_0(t - u) du, \quad (2.29)$$

или в терминах преобразования Лапласа:

$$s\bar{P}_0(s) - 1 = -(1 + \alpha)\lambda\bar{P}_0(s) + (1 + \alpha)\lambda \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t P_0(t - u) g(u) e^{-\lambda u} du \right\} dt. \quad (2.30)$$

Изменив порядок интегрирования, после ряда несложных преобразований получим

$$\bar{P}_0(s) = [s + (1 + \alpha)\lambda(1 - \bar{g}(\lambda + s))]^{-1}. \quad (2.31)$$

Для определения

$$\bar{p}_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t p_1(t, u) du \right\} dt$$

из уравнения (2.28) используем замену:

$$p_1(t, u) = q_1(t, u) e^{-\lambda u} (1 - G(u)).$$

Запишем следующее уравнение:

$$\bar{p}_1(s) = (1 + \alpha)\lambda \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda u} P_0(t - u) (1 - G(u)) du \right\} dt.$$

Применяя те же преобразования, что и для решения (2.29), получаем

$$\bar{p}_1(s) = \bar{P}_0(s) \frac{(1 + \alpha)\lambda [1 - \bar{g}(s + \lambda)]}{(\lambda + s)}. \quad (2.32)$$

Вероятность безотказной работы определяется как

$$R(t) = P_0(t) + \int_0^t p_1(t, u) du,$$

и потому

$$\bar{R}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} R(t) dt = \frac{(\lambda + s) + (1 + \alpha)\lambda [1 - \bar{g}(s + \lambda)]}{(\lambda + s) \{s + (1 + \alpha)\lambda [1 - \bar{g}(s + \lambda)]\}}. \quad (2.33)$$

Применяя к (2.33) обратное преобразование Лапласа, можно найти функцию $R(t)$. Определим среднее время T до первого отказа системы через $\bar{R}(s)$ — моментную производящую функцию случайной величины времени наступления первого отказа резервной группы. Другими словами,

$$T = \bar{R}(s)|_{s=0} = \frac{(2 + \alpha) - (1 + \alpha)\bar{g}(\lambda)}{(1 + \alpha)\lambda(1 - \bar{g}(\lambda))}, \quad (2.34)$$

где $\bar{g}(\lambda)$ — преобразование Лапласа для плотности $g(t)$ при $s = \lambda$.

1. Пусть $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$ ($\alpha = 1$); тогда преобразование Лапласа для $g(t)$ при $s = \lambda$ будет равно

$$\bar{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Из (2.34) следует, что

$$T = \frac{3 - 2 \frac{\mu}{\lambda + \mu}}{2\lambda \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)} = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2},$$

т. е. получаем известную формулу для среднего времени до отказа дублированной системы с восстановлением [111].

2. Если распределение времени ремонта — гиперэкспоненциальное:

$$G(t) = 1 - ae^{-\mu_1 t} - be^{-\mu_2 t} \quad (a + b = 1),$$

то

$$\bar{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [\mu_1 a e^{-\mu_1 t} + \mu_2 b e^{-\mu_2 t}] dt = \frac{\mu_1 a}{\lambda + \mu_1} + \frac{\mu_2 b}{\lambda + \mu_2}$$

и

$$T = \frac{3}{2\lambda} + \frac{a\lambda\mu_1 + b\lambda\mu_2 + \mu_1\mu_2}{2\lambda^2(\lambda + a\mu_2 + b\mu_2)}.$$

3. Для равномерного распределения времени ремонта

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t < a, t > b \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\gamma(t-a) - \gamma(t-b)) \frac{1}{b-a} dt = \\ &= \frac{e^{-a\lambda} (1 - e^{-(b-a)\lambda})}{\lambda(b-a)}, \end{aligned}$$

где $\gamma(\cdot)$ — единичная функция, и

$$T = \frac{3\lambda(b-a) - 2e^{-a\lambda}(1 - e^{-(b-a)\lambda})}{2\lambda[\lambda(b-a) - e^{-a\lambda}(1 - e^{-(b-a)\lambda})]}.$$

Случайные процессы, именуемые *линейчатыми* в связи с дополнением фазового пространства полупрямой, были изучены Ю. К. Беляевым [7]. Им же была показана применимость линейчатого марковского процесса в модели надежности дублированной системы с восстановлением, когда $x = 1$. Как было выше показано, уравнения для вероятностей состояний резервной группы при $x = 1$ легко обобщаются и на случай $x > 1$, если только ремонтный персонал, обслуживающий отказавшие элементы, неограничен.

2.2. Обслуживание и ремонт неспециализированным ремонтным персоналом

Отсутствие специализации ремонтного персонала в практике эксплуатации технологического оборудования технических систем означает, что одному и тому же ремонтнику или ремонтной бригаде приходится выполнять разнотипные операции, требующие различных трудовых затрат.

Действительно, техник, обслуживающий автоматические устройства, зачастую сталкивается с необходимостью ремонтировать или настраивать как электронно-управляющую часть, так и механическую, проявляя при этом различные стороны своей квалификации. Например, мастерская по ремонту электробытовых приборов выполняет различные операции в зависимости от типа ремонтируемого прибора и характера его неисправности, используя на этой работе одних и тех же людей. С точки зрения формального описания процесса технического обслуживания ненадежного оборудования на языке теории массового обслуживания такой случай представляет обслуживание разнотипных заявок, характеризующихся различными интенсивностями поступления и различными продолжительностями обслуживания. Здесь уже становится важным порядок (дисциплина), в котором происходит ремонтно-техническое обслуживание отдельных элементов или узлов оборудования. Если с простыми отдельными образцами оборудования связаны различные, но заранее фиксированные потери, или если потеря отдельной заявки (при отсутствии свободного ремонтника и нежелания ждать в очереди) также связана с конкретными потерями, то назначение приоритетов в обслуживании заявок определенного типа создает предпосылки минимизации общих потерь в системе при ее эксплуатации. Выбор оптимальной последовательности приоритетов исследуется в работах [8], [9], [59].

Рассмотрим ремонтно-техническое обслуживание s типов элементов, если заявки на обслуживание поступают согласно простейшему потоку с соответствующим параметром λ_i ($i = 1, \dots, s$). Пусть обслуживание элемента i -го типа требует случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром μ_i ($i = 1, \dots, s$), а заявки пронумерованы в таком порядке, что заявка с меньшим номером имеет право преимущественного обслуживания перед заявками с большим номером. Предположим, что обслуживание заявки с фиксированным номером происходит только в том случае, если в момент ее поступления обслуживающий ремонтник свободен или занят обслуживанием заявки с большим номером и за время обслуживания заявки с меньшим номером не по-

ступали. Очередь в системе не возникает, так как заявки, не принятые к обслуживанию, и заявки, обслуживание которых было прервано, теряются. В качестве примера подобной ситуации можно представить работу ремонтной мастерской с «нетерпеливыми» клиентами различной, но заранее фиксированной «важности», определяющей приоритеты в обслуживании. С другой стороны, такая ситуация характерна для систем сбора и передачи информации без устройств памяти и, в частности, для телефонной связи с прерываемыми разговорами [4].

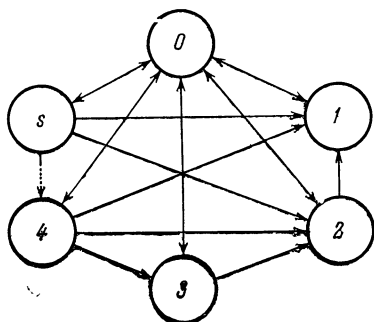


Рис. 2.2.

Ограничимся изучением стационарного режима системы обслуживания при $r = 1$, вводя в рассмотрение пределы для вероятностей $P_i(t)$ того, что в момент t происходит обслуживание i -го элемента. Стационарная вероятность означает долю времени по обслуживанию заявок i -го типа, а p_0 представляет долю времени в установившемся режиме, когда в системе нет заявок на обслуживание. Учитывая принятую структуру обслуживания и соответствующую диаграмму переходов, показанную на рис. 2.2, получаем систему уравнений (записанную в матричной форме):

$AP =$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 \lambda_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 \\
 \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots & \lambda_2 \\
 \lambda_3 & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_3) & \dots & \lambda_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \lambda_s & 0 & 0 & 0 & \dots & -\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i + \mu_s\right)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 p_0 \\
 p_1 \\
 p_2 \\
 p_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 p_s
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 0
 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

дополненную условием нормировки,

$$\sum_{i=1}^s p_i = 1.$$

По правилу Крамера

$$p_i = A_{1(i+1)}/D \quad (i = 0, \dots, s), \quad (2.36)$$

где D — определитель матрицы A , а $A_{1(i+1)}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{1(i+1)}$ матрицы A .

Разделим каждый элемент i -й строки определителя D на λ_{i-1} ($i = 2, \dots, s+1$):

$$D = \prod_{i=1}^s \lambda_i \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -v_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & -v_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -v_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -v_s \end{vmatrix}, \quad (2.37)$$

где $v_i = \frac{\Lambda_{i-1} + \mu_i}{\lambda_i}$, $\Lambda_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j$ ($i = 1, \dots, s$), $\Lambda_0 = 0$. Преобразуем определители к треугольному виду. Вычитая первый столбец определителя D из всех остальных его столбцов, имеем

$$D = (-1)^s \prod_{j=1}^s \lambda_j \prod_{j=1}^s (v_j + 1). \quad (2.38)$$

Из (2.37) следует, что

$$A_{11} = (-1)^s \prod_{j=1}^s (\lambda_j v_j). \quad (2.39)$$

Выражение для $A_{1(i+1)}$ получим, перенося i -ю строку определителя на первое место и вычитая ее затем из всех

ОСТАЛЬНЫХ:

$$A_{1(i+1)} = (-1)^{s+2i} \prod_{j=1}^s \lambda_j \prod_{r=1}^{i-1} v_r \prod_{k=i+1}^s (v_k + 1) \quad (i = 1, \dots, s).$$

Тогда из (2.36) следует, что

$$p_0 = \frac{A_{11}}{D} = \prod_{i=1}^s \frac{v_i}{v_i + 1} = \prod_{i=1}^s \frac{\Lambda_{i-1} + \mu_i}{\Lambda_i + \mu_i} \quad (2.40)$$

и

$$p_i = \frac{A_{1(i+1)}}{D} = \frac{1}{v_i} \prod_{j=1}^i \frac{v_j}{v_j + 1} \quad (i = 1, \dots, s). \quad (2.41)$$

В результате видим, что p_0 зависит от параметров λ_i и μ_i для всех s потоков, а p_i — только от параметров потоков от 1-го до i -го включительно, что и отражает структуру обслуживания с приоритетами рассматриваемого типа.

Зная стационарные вероятности состояний системы обслуживания, можно вычислить вероятностей полного обслуживания элемента (заявки) i -го типа, которая определяется произведением двух вероятностей: вероятности того, что заявка i -го типа будет принята на обслуживание и вероятности того, что обслуживание этой заявки не будет прервано из-за поступления заявки с меньшим индексом. Первый сомножитель равен

$$1 - \sum_{j=1}^i p_j = p_0^{(i)},$$

где индекс (i) означает, что соответствующая величина характеризует систему при $s = i$. Второй сомножитель равен

$$\int_0^{\infty} e^{-\Lambda_{i-1}t} d(1 - e^{-\mu_i t}) = \frac{\mu_i}{\Lambda_{i-1} + \mu_i} = \frac{1}{\rho_i v_i}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i},$$

и поэтому вероятность полного обслуживания заявки i -го типа равна

$$\pi_i = p_0^{(i)} \frac{1}{\rho_i v_i} = \frac{1}{\rho_i v_i} \prod_{j=1}^i \frac{v_j}{v_j + 1} = \frac{p_i}{\rho_i}. \quad (2.42)$$

Вероятность полного обслуживания заявки из суммарного потока с интенсивностью $\Lambda = \sum_{i=1}^s \lambda_i$ численно равна доле обслуженных заявок:

$$P_{\text{п.о}} = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{\Lambda} \pi_i.$$

Вероятность полного обслуживания заявки из суммарного потока равна вероятности того, что в стационарном режиме система свободна от заявок:

$$P_{\text{п.о}} = P_0.$$

Перейдем к доказательству последнего равенства.

Используя (2.40) и (2.41), представим последнее равенство в виде

$$P_{\text{п.о}} = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{\Lambda_s} \pi_i = \prod_{i=1}^s \frac{v_i}{v_i + 1} = P_0. \quad (2.43)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для $s = 1$ оно выполняется. Предположив, что (2.43) верно для $s = k$, покажем, что оно справедливо и при $s = k + 1$, т. е.

$$\frac{1}{\Lambda_k + \lambda_{k+1}} \left[\Lambda_k P_0^{(k)} + \frac{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}{\Lambda_k + \lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} P_0^{(k)} \right] = \frac{\Lambda_k + \mu_{k+1}}{\Lambda_k + \lambda_{k+1} + \mu_{k+1}}. \quad (2.44)$$

Сократив обе части (2.44) на $P_0^{(k)}$, легко проверить, что оно является тождеством, так как в скобках в левой части (2.44) после приведения к общему знаменателю получаем

$$\frac{\Lambda_k^2 + \Lambda_k \mu_{k+1} + \Lambda_k \lambda_{k+1} + \lambda_{k+1} \mu_{k+1}}{\Lambda_k + \lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} = \frac{(\Lambda_k + \mu_{k+1})(\Lambda_k + \lambda_{k+1})}{\Lambda_k + \lambda_{k+1} + \mu_{k+1}}.$$

Для системы обслуживания без приоритетов такой результат очевиден и не требует доказательства.

В работе [58] было указано правило назначения последовательности приоритетов для заявок различных типов. Оказалось, что *независимо от величин интенсивностей*

поступления заявок право первоочередного обслуживания следует предоставлять той заявке, среднее время обслуживания которой меньше, т. е. заявки различных типов нужно пронумеровать так, чтобы

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s.$$

(Доказательство см. в [59].) При этом достигается максимума вероятность полного обслуживания заявки из суммарного потока. Эта вероятность служит мерой эффективности работы системы обслуживания. В [8] учтен факт различной ценности заявок, а в [9] — возможность образования очереди из поступающих заявок.

Предположим, что в системе из s резервных групп, каждая из которых имеет z_l рабочих и x_l ($l = 1, \dots, s$) резервных элементов (резерв ненагруженный), ремонтное обслуживание осуществляется бригадой неспециализированных ремонтников численностью r в порядке возникновения отказов элементов. В этом случае необходимо ввести в рассмотрение вероятность такого состояния системы, при котором общее число отказавших элементов

из всех резервных групп равно h ($h = 0, \dots, 1 + \sum_{l=1}^s x_l$),

а перечисление l_1, \dots, l_h указывает порядок и принадлежность элементов, вышедших из строя, той или иной резервной группе. При этом обслуживанию или ремонту подвергаются элементы групп l_1, \dots, l_r , а остальные находятся в очереди в порядке перечисления l_{r+1}, \dots, l_h ($1 \leq l_j \leq s$, $j = 1, \dots, h$). Обозначим через i_l общее число отказавших элементов l -й резервной группы, а через $i_l^{(r)}$ число отказавших элементов l -й группы среди первых r отказавших, т. е. $\{r\}$ — перечисление резервных групп, элементы которых находятся среди первых r отказавших элементов. Если наступает отказ системы по причине отказа одной из ее резервных групп, то

$$i_{l_h} = x_{l_h} + 1,$$

где l_h — индекс отказавшей резервной группы. Для вероятностей p_h (i_1, \dots, i_h) можно составить следующие дифференциальные уравнения, отражающие динамику эк-

СПЛУАТАЦИИ СИСТЕМЫ ПОД ВЛИЯНИЕМ ПРОИСХОДЯЩИХ ОТКАЗОВ И ПРОИЗВОДИМЫХ РЕМОНТОВ:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{0(0)}}{dt} &= - \sum_{l=1}^s z_l \lambda_l P_{0(0)} + \sum_{l=1}^s \mu_{l_1} P_{1(l)}, \\ \frac{dP_{h(l_1, \dots, l_h)}}{dt} &= \sum_{j=1}^h z_{l_j} \lambda_{l_j} P_{h-1}(l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_h) + \\ &+ \sum_{l_0=1}^s i_{l_0} \mu_{l_0} P_{h+1}(l_0, l_1, \dots, l_h) - \left(\sum_{l=1}^{i_h} \mu_l + \sum_{l=1}^s z_l \lambda_l \right) P_{h(l_1, \dots, l_h)} \\ &\quad (i_l \leq x_l, l = 1, \dots, s; h < r), \\ \frac{dP_{h(l_1, \dots, l_h)}}{dt} &= z_{l_h} \lambda_{l_h} P_{h-1}(l_1, \dots, l_{h-1}) + \\ &+ \sum_{l_r \in \{r\}} \sum_{l_0=1}^s i_{l_0}^{(r)} \mu_{l_0} P_{h+1}(l_0, l_1, \dots, l_r', l_{r+1}', \dots, l_h) - \\ &- \left[\sum_{l=l_1}^{l_r} \mu_l + \sum_{l=1}^s z_l \lambda_l \right] P_{h(l_1, \dots, l_h)} \quad (i_l \leq x_l, l_1 = 1, \dots, s; h \geq r), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{h(l_1, \dots, l_h)}}{dt} &= z_{l_h} \lambda_{l_h} P_{h-1}(l_1, \dots, l_{h-1}) + \sum_{\substack{l_0=1 \\ l_0 \neq l_h}}^s i_{l_0} \mu_{l_0} P_{h+1}(l_0, \dots, l_h) - \\ &- \sum_{l=l_1}^{l_h} \mu_l P_{h(l_1, \dots, l_h)} \quad (i_{l_h} = x_{l_h} + 1, h < r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{h(l_1, \dots, l_h)}}{dt} &= \\ &= z_{l_h} \lambda_{l_h} P_{h-1}(l_1, \dots, l_{h-1}) + \sum_{l_r \in \{r\}} \sum_{\substack{l_0=1 \\ l_0 \neq l_r}}^s i_{l_0}^{(r)} \mu_{l_0} P_{h+1}(l_0, \dots, l_r', l_{r+1}', \dots, l_h) - \\ &- \sum_{l=l_1}^{l_r} \mu_l P_{h(l_1, \dots, l_h)} \quad (i_{l_h} = x_{l_h} + 1, h \geq r). \end{aligned}$$

Сняв предположение о ненагруженности резерва каждой группы, мы еще более усложним модель, так как придется учитывать и возможности поломок резервных элементов. Рассуждения, связанные с составлением уравнений (2.45), аналогичны рассуждениям, которыми руководствуются при изучении обслуживания специализированными ремонтниками с тем лишь отличием, что теперь оказывается существенным порядок отказов элементов различных резервных групп. Для решения уравнений (2.45) можно рекомендовать приближенные методы, аппроксимируя данную систему в первом приближении системой со специализированным ремонтным обслуживанием. Расчеты, проведенные В. А. Лотоцким, показали, что вероятности отказа двух систем: исходной и системы со специализированным ремонтным обслуживанием, оказываются близкими (т. е. относительная ошибка не превышает 10%) даже в том случае, если показатель траффика

$$R = \sum_{l=1}^s \frac{z_l \lambda_l}{\mu_e r} \text{ в пересчете на одного рабочего равен } 0,4.$$

Структура уравнений (2.45) упрощается, если ремонтное обслуживание проводится по правилу приоритетов, фиксированных для каждой резервной группы ($1 \leq l \leq s$).

2.3. Ремонт резервной группы при регулярном контроле исправности резервных элементов

Контроль исправности резервных элементов может проводиться: 1) непрерывно, что, по существу, означает поддержание рабочего режима; 2) аварийно, при выходе из строя основного, или рабочего, элемента; 3) регулярно через равные интервалы времени, определяемые периодичностью проверок. Непрерывный контроль может осуществляться и при более легких с точки зрения надежности условиях или режимах, например, при неполном напряжении питания электронных устройств и т. п. Аварийный контроль обычно проводится в полевых или походных условиях, когда отказавший блок заменяют взятым наугад запасным, в исправности которого до проведения замены нет уверенности. Регулярный контроль исправности представляет промежуточный случай, когда имеется воз-

возможность обнаружения неисправности с большей степенью своевременности, но, с другой стороны, исключается необходимость непрерывного контроля, сопряженного с расходом энергии и более интенсивным срабатыванием технического ресурса устройств.

В инженерной практике существуют довольно противоречивые мнения относительно преимуществ указанных способов контроля исправности резервного оборудования. Так, в ряде случаев отмечается увеличение интенсивности отказов резервного оборудования за счет частых проверок, сопровождающихся включениями и отключениями и соответствующими перегрузками переходных режимов. С другой стороны, в тех устройствах, где режимы элементов нормально облегчены, режим постоянного включения не приводит к существенному увеличению интенсивности отказов, а наоборот, содействует повышению стабильности работы. Решение этих вопросов в каждом конкретном случае требует экспериментальной проверки условий работы. Остановимся на одной задаче анализа надежности восстанавливаемой резервной группы при наличии и отсутствии контроля исправности резервного элемента. При этом предполагается, что в отключенном состоянии резервный элемент имеет меньшую, чем в рабочем режиме, интенсивность отказов. Установим области оптимального использования первого и второго способов контроля исправности. Для третьего способа — регулярного контроля — будут приведены рекуррентные соотношения для вычисления вероятностей состояний. Следует, однако, заметить, что как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения вопросы выбора оптимальной в смысле надежности периодичности проверок почти не разработаны. Например, неясно, как частота проверок связана с интенсивностью отказов резервного элемента и, вообще, в каких случаях такая зависимость существенна, а в каких ею можно пренебречь.

Пусть резервный элемент (блок) при нормальной работе основного находится в отключенном состоянии и потому характеризуется интенсивностью отказа λ_2 меньшей, чем λ_1 для рабочего режима. Если рабочий элемент выходит из строя, а резервный исправен, то резервный вступает в работу, а отказавший блок начинают ремонтировать. Бу-

дем для простоты считать, что случайное время ремонта имеет распределение

$$G(t) = P\{\eta \leq t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Среднее время до отказа резервной группы (т. е. события, при котором оба элемента находятся в неисправном состоянии) определится как [54]

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1 + \mu}{\lambda_1^2 + \lambda_2\mu + \lambda_1\lambda_2}. \quad (2.46)$$

Не составляет принципиальных трудностей вычислить среднее время до отказа и при произвольном виде распределения $G(t)$. Уравнения (2.27) дополняются еще одним уравнением для вероятности состояния системы, когда резервный элемент отказал, но его ремонт не производится до отказа рабочего элемента. Это уравнение имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda P_1(t) + \alpha \lambda P_0(t) & (\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \alpha\lambda), \\ q_1(t, 0) &= \lambda P_0(t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

При непрерывном контроле резервного элемента, находящегося для этих целей во включенном состоянии ($\alpha = 1$), среднее время до отказа равно на основании (2.34)

$$T_1 = \frac{3\lambda_1 + \mu}{2\lambda_1^2}. \quad (2.48)$$

Зависимости $T_1(\mu, \lambda_2)$ и $T_2(\mu, \lambda_2)$ при фиксированном значении λ_1 показаны на рис. 2.3, из которого видно, что при некоторых значениях интенсивности ремонта, зависящих, вообще говоря, от λ_1, λ_2 , наблюдается равенство T_1 и T_2 . Из последнего условия $T_1 = T_2$ и определяются эти значения μ , которые будем называть *критическими*. Решая относительно $\mu_{кр}$ уравнение

$$\frac{3\lambda_1 + \mu_{кр}}{2\lambda_1^2} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1 + \mu_{кр}}{\lambda_1^2 + \lambda_2\mu_{кр} + \lambda_1\lambda_2}, \quad (2.49)$$

получим

$$\mu_{\text{кр}} = \frac{1}{2\lambda_2} \left\{ -\lambda_1(2\lambda_2 - \lambda_1) - \sqrt{\lambda_1^2(2\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right\}. \quad (2.50)$$

Отбрасывая отрицательное значение $\mu_{\text{кр}}$ как противоречащее физическому смыслу, устанавливаем, что

$$\mu_{\text{кр}} = \frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2}, \quad \lambda_1 > \lambda_2. \quad (2.51)$$

Таким образом, выбор наилучшего с точки зрения достигаемой надежности способа контроля резервного элемента

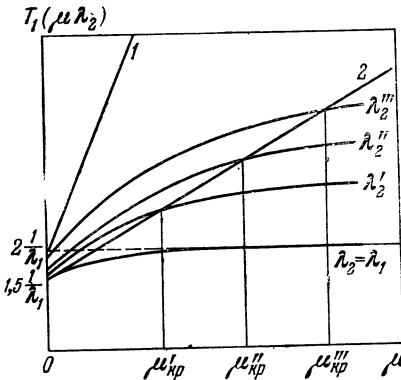


Рис. 2.3.

определяется возможной скоростью проведения ремонта, а с другой стороны, — зависит от соотношения интенсивностей отказов λ_1 и λ_2 , характеризующих режимы работы и хранения. Так, если $\mu > \mu_{\text{кр}}$, то с точки зрения повышения надежности выгоднее применить первый способ контроля, т. е. непрерывно контролировать исправность резервного элемента, поддерживая его для этих целей в рабочем режиме. Если контроль

осуществляется с помощью специального устройства, то надежность последнего может повлиять на выбор оптимального решения. В этом случае выражения для вероятностей состояний и для средних времен до отказа крайне громоздки.

Сохранив все предположения предыдущего раздела, изменим лишь способ проверок. Будем считать, что рабочий элемент контролируется непрерывно, а резервный — периодически через равные интервалы времени τ ; продолжительность проверки мала [66]. Введем следующие состояния:

состояние I , когда оба элемента исправны,

состояние 2, когда один элемент работает исправно, а другой находится в ремонте,

состояние 3, когда оба элемента неисправны, что означает отказ резервной группы,

состояние 4, когда один элемент работает исправно, второй находится в отказавшем состоянии и не ремонтируется (рис. 2.4).

При регулярном контроле состояние 4 может существовать только до ближайшей проверки, когда возникший отказ резервного элемента выявляется. Для постоянных во времени интенсивностей переходов λ_1 , λ_2 , μ можно записать следующие уравнения:

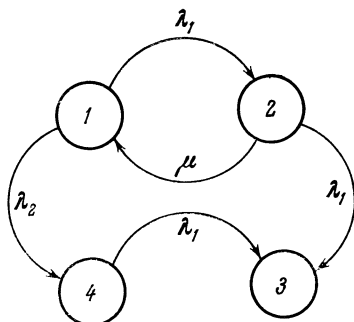


Рис. 2.4.

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_1(t)}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2) P_1(t) + \mu P_2(t), \\
 \frac{dP_2(t)}{dt} &= -(\lambda_1 + \mu) P_2(t) + \lambda_1 P_1(t), \\
 \frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda_1 P_2(t) + \lambda_1 P_4(t), \\
 \frac{dP_4(t)}{dt} &= -\lambda_1 P_4(t) + \lambda_2 P_1(t),
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

где $n\tau \leq t < (n+1)\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Для начальных условий

$$\begin{aligned}
 P_1(t) = P_1(n\tau), \quad P_2(t) = P_2(n\tau), \quad P_3(t) = P_3(n\tau), \\
 P_4(t) = P_4(n\tau) = 0
 \end{aligned}$$

из первых двух уравнений (2.52) получаем

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= \frac{1}{(k_1 - k_2)} P_1(n\tau) \{ (k_1 + \lambda_1 + \mu) e^{k_1(t-n\tau)} - \\
 &- (k_1 + \lambda_1 + \mu) e^{k_2(t-n\tau)} \} + \frac{1}{(k_1 - k_2)} P_2(n\tau) (e^{k_1(t-n\tau)} - e^{k_2(t-n\tau)}),
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda_1}{(k_1 - k_2)} P_1(n\tau) (e^{k_1(t-n\tau)} - e^{k_2(t-n\tau)}) - \\ - \frac{1}{(k_1 - k_2)} P_2(n\tau) ((k_2 + \lambda_1 + \mu) e^{k_1(t-n\tau)} - (k_1 + \lambda_1 + \mu) e^{k_2(t-n\tau)}),$$

где

$$k_1, k_2 = \frac{1}{2} \{ -(2\lambda_1 + \mu + \lambda_2) \pm \\ \pm \sqrt{(2\lambda_1 + \mu + \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1^2 + \lambda_2\mu + \lambda_1\lambda_2)} \}. \quad (2.54)$$

Из последнего уравнения (2.52) находится $P_4(t)$:

$$P_4(t) = \frac{\lambda_2}{(k_1 - k_2)} P_1(n\tau) \left\{ \frac{(k_1 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 + \lambda_1)} (e^{k_1(t-n\tau)} - e^{-\lambda_1(t-n\tau)}) + \right. \\ \left. + \frac{(k_2 + \lambda_1 + \mu)}{(k_2 + \lambda_1)} (e^{-\lambda_1(t-n\tau)} - e^{k_2(t-n\tau)}) \right\} + \\ + \frac{\mu\lambda_2}{(k_1 - k_2)} P_2(n\tau) \left\{ \frac{1}{(k_1 + k_2)} (e^{k_1(t-n\tau)} - e^{-\lambda_1(t-n\tau)}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(k_1 + k_2)} (e^{-\lambda_1(t-n\tau)} - e^{k_2(t-n\tau)}) \right\}. \quad (2.55)$$

Остается определить $P_3(t)$ из предпоследнего уравнения (2.52):

$$P_3(t) = \frac{1}{(k_1 - k_2)} P_1(n\tau) \left\{ (k_1 - k_2) - \frac{\lambda_2\mu(k_1 - k_2)}{(k_1 + \lambda_1)(k_2 + \lambda_1)} \times \right. \\ \left. \times e^{-\lambda_1(t-n\tau)} - \frac{\lambda_1(k_1 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 + \lambda_1)} e^{-\lambda_1(t-n\tau)} + \frac{\lambda_1(k_2 + \lambda_1 + \mu)}{(k_2 + \lambda_1)} e^{k_2(t-n\tau)} \right\} + \\ + \frac{1}{(k_1 - k_2)} P_2(n\tau) \left\{ (k_1 - k_2) - \frac{\lambda_2\mu(k_1 - k_2)}{(k_1 + \lambda_1)(k_2 + \lambda_1)} e^{-\lambda_1(t-n\tau)} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_1\mu}{(k_1 + \lambda_1)} e^{-k_1(t-n\tau)} + \frac{\lambda_1\mu}{(k_2 + \lambda_1)} e^{k_2(t-n\tau)} \right\} + P_3(n\tau). \quad (2.56)$$

Так как в моменты проверок исправности резервного элемента состояние 4 автоматически переходит в состояние 2, то вероятность пребывания резервной группы в состоянии 2 в момент времени $t = (n + 1)\tau$ складывается из вероятностей $P_2((n + 1)\tau)$ и $P_4((n + 1)\tau)$, найденных выше.

Итак, начав с момента времени $t = 0$ и продолжив процедуру отыскания вероятностей состояний по формулам

(2.53), (2.55) и (2.56) до момента $t = n\tau$, получим

$$\begin{pmatrix} P_1(n\tau) \\ P_2(n\tau) \\ P_3(n\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} + a_{41} & a_{22} + a_{42} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ P_3(0) \end{pmatrix}, \quad (2.56a)$$

где

$$a_{11} = \frac{(k_1 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 - k_2)} e^{k_1\tau} - \frac{(k_2 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 - k_2)} e^{k_2\tau}, \quad (2.57)$$

$$a_{12} = \frac{\mu}{(k_1 - k_2)} (e^{k_1\tau} - e^{k_2\tau}), \quad (2.58)$$

$$a_{21} = \frac{\lambda_2}{(k_1 - k_2)} (e^{k_1\tau} - e^{k_2\tau}), \quad (2.59)$$

$$a_{22} = \frac{(k_2 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 - k_2)} e^{k_1\tau} + \frac{(k_1 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 - k_2)} e^{k_2\tau}, \quad (2.60)$$

$$a_{31} = 1 - \frac{\lambda_2\mu}{(k_1 + \lambda_1)(k_2 + \lambda_1)} e^{-\lambda_1\tau} - \frac{\lambda_1(k_1 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 + \lambda_1)(k_1 - k_2)} e^{k_1\tau} + \frac{\lambda_2(k_2 + \lambda_1 + \mu)}{(k_2 + \lambda_1)(k_1 - k_2)} e^{k_2\tau}, \quad (2.61)$$

$$a_{32} = 1 - \frac{\lambda_2\mu}{(k_1 + \lambda_1)(k_2 + \lambda_1)} e^{-\lambda_1\tau} - \frac{\lambda_1\mu}{(k_1 + \lambda_1)(k_1 - k_2)} e^{k_1\tau} + \frac{\lambda_1\mu}{(k_2 + \lambda_1)(k_1 - k_2)} e^{k_2\tau}, \quad (2.62)$$

$$a_{41} = \frac{\lambda_2}{(k_1 - k_2)} \left\{ \frac{(k_1 + \lambda_1 + \mu)}{(k_1 + \lambda_1)} (e^{k_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau}) + \frac{(k_2 + \lambda_1 + \mu)}{(k_2 + \lambda_1)} (e^{-\lambda_1\tau} - e^{k_2\tau}) \right\}, \quad (2.63)$$

$$a_{42} = \frac{\mu\lambda_2}{(k_1 - k_2)} \left\{ \frac{1}{(k_1 + \lambda_1)} (e^{k_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau}) + \frac{1}{(k_2 + \lambda_1)} (e^{-\lambda_1\tau} - e^{k_2\tau}) \right\}. \quad (2.64)$$

Для момента времени, заключенного в интервале между двумя последовательными проверками $t = n\tau + \Delta\tau$, $0 < \Delta\tau < \tau$, соотношение в матричной форме (2.56a)

несколько видоизменяется:

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(n\tau) \\ P_2(n\tau) \\ P_3(n\tau) \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

где под a_{ij} следует понимать выписанные выше выражения с заменой τ на $\Delta\tau$.

Полученные рекуррентные соотношения позволяют выразить для любого момента времени вероятность безотказной работы резервной группы в зависимости от ее параметров, а именно: λ_1 , λ_2 , μ и τ . Кроме того, сопоставив затраты, связанные с проведением регулярных проверок, и потери от простоя, можно выбрать наилучшую стратегию контроля, т. е. периодичность контроля τ . Однако при этом нужно будет как-то учесть влияние периодичности проверок τ на λ_2 . Этот вопрос, как говорилось выше, по-видимому, до сих пор еще не подвергся серьезным экспериментальным исследованиям.

При постоянных интенсивностях переходов λ_1 , λ_2 и произвольном распределении времени ремонта можно составить интегро-дифференциальные уравнения, как и в разделе 2.1:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2)P_1(t) + \int_0^t q_2(u, t) dG(u), \\ q_2(u, t) &= \frac{p_2(u, t)}{1 - G(u)}, \\ \frac{\partial q_2(u, t)}{\partial u} + \frac{\partial q_2(u, t)}{\partial t} &= -\lambda_1 q_2(u, t), \\ \frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda_1 P_4(t) + \lambda_1 \int_0^t q_2(u, t)(1 - G(u)) du, \\ \frac{dP_4(t)}{dt} &= -\lambda_1 P_4(t) + \lambda_2 P_1(t); \end{aligned} \quad (2.66)$$

начальные и граничные условия представляются следующим

образом:

$$P_1(t) = P_1(n\tau), P_3(t) = P_3(n\tau), P_4(t) = 0, \quad (2.67)$$

$$q_2(u, t) = q_2(u, nt), q_2(0, t) = \lambda_1 P_1(t).$$

Решив второе уравнение (2.66), получим

$$q_2(u, t) = \lambda_1 P_1(t - u) e^{-\lambda_1 u}. \quad (2.68)$$

С учетом (2.68), уравнения (2.66) будут иметь такой вид:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) P_1(t) + \lambda_1 \int_0^t P_1(t - u) e^{-\lambda_1 u} dG(u),$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_1 P_4(t) + \lambda_1^2 \int_0^t P(t - u) e^{-\lambda_1 u} (1 - G(u)) du, \quad (2.69)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = -\lambda_1 P_4(t) + \lambda_2 P_1(t), \quad q_2(u, t) = \lambda_1 P_1(t - u) e^{-\lambda_1 u}.$$

Для решения уравнений (2.69) можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Для примера приведем результаты вычисления вероятностей состояний, если $\lambda_1 = 10^{-3}$ 1/час, $\lambda_2 = 10^{-4}$ 1/час, $\mu = 10^{-1}$ 1/час, $\tau = 100$ час для моментов времени $t = \tau, 2\tau, 3\tau, 3,5\tau$, при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ система полностью исправна.

Таблица 2.

t , час	$P_1(t)$	$P_2(t)$	$P_3(t)$	$P_4(t)$	$\sum_{i=1}^4 P_i(t)$
100	0,9795	0,0191	0,0014	0	1,0000
200	0,9780	0,0190	0,0030	0	1,0000
300	0,9764	0,0190	0,0046	0	1,0000
350	0,9802	0,0097	0,0054	0,0047	1,0000

Заметим, что для момента времени $3,5\tau$ возрастание $P_1(t)$ объясняется скачкообразным изменением вероятности $P_4(t)$.

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ И ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАПАСНЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ

С проблемами резервирования и обеспечения запасными деталями и оборудованием приходится сталкиваться проектировщику любой специальности, который хотел бы на отведенные средства получить наиболее надежный вариант устройства, изделия, системы. В распоряжении проектировщика имеется несколько возможностей: можно попытаться внести структурные изменения, т. е. изменить характер взаимодействия элементов, пересмотреть функционально-конструктивные идеи, положенные в основу проекта, включая применение других принципов построения и, наконец, можно, используя дополнительные средства, ввести резерв, обеспечить систему запасными элементами. Естественно использование комбинации указанных способов [63], [72]. Обычно ограничения возможностей конструктора связаны со стоимостью системы, а в ряде случаев ограничения могут быть наложены на суммарный вес и объем. Если проблему обеспечения запасным оборудованием или деталями рассматривать под углом зрения управления запасами, то случайным отказам и авариям отдельных образцов оборудования соответствуют заявки или спрос. Задачу выбора номенклатуры и числа резервных или запасных элементов порождает многотипность используемых элементов, когда элементы отличаются надежностью, стоимостью и т. д.

При оптимальном распределении ограниченных средств обычно ищется максимум (минимум) функции многих переменных при наличии ограничений в виде одного или нескольких неравенств.

Далее рассматриваются различные варианты постановок задачи оптимального резервирования и эффективные методы их решения. Последние представляются особенно важными из-за того, что на сегодняшний день число предложенных способов решения задачи

оптимального резервирования весьма велико и соизмеримо с общим числом работ, опубликованных по этому вопросу (см. библиографию, приведенную в [83]).

3.1. Оптимальное резервирование при одном ограничении

Существует определенная аналогия между поддержанием фиксированного уровня запаса при наличии случайного спроса на этот запас и поддержанием надежности (бездефицитности), когда спрос порождается выходами из строя (отказами) отдельных элементов. Одна из проблем организации работы пункта по прокату s различных типов изделий, спрос на которые определяется интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ поступающих требований в единицу времени, торгового предприятия и т. п., состоит в том, чтобы минимизировать риск отказа клиенту из-за нехватки изделий какого-либо типа за время t . Для этого в начале периода создается запас изделий на общую сумму, не превышающую W^0 .

Для многокомпонентной технической системы это означает необходимость максимизировать функцию $R_2(x)$, характеризующую вероятность безотказной работы. Если элементы разных типов составляют *основное соединение* независимых резервных групп, отказ каждой из которых приводит к отказу системы, то

$$R_2(x) = \prod_{k=1}^s R_{2k}(x) \Big|_{t=t_{0k}}, \quad (3.1)$$

$$R_{2k}(x) = R_{2k}(x_k) \Big|_{t=t_{0k}} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (3.2)$$

где x_k — число резервных элементов k -й резервной группы. Другими словами, нужно найти

$$\max_{x=(x_1, \dots, x_s)} R_2(x) = \max_x \left\{ \prod_{k=1}^s R_{2k}(x_k) \right\} \quad (3.3)$$

при наличии ограничения (в случае, когда стоимости, веса или объемы элементов каждого типа постоянны) вида

$$J(x) = W^0 - \sum_{k=1}^s w_k x_k > 0, \quad (3.4)$$

где $w_k > 0$ ($k = 1, \dots, s$) и $x_k = 0, 1, \dots$. Задача (3.3), (3.4) представляет задачу целочисленного нелинейного программирования, так как x_k принимают целые значения, а функции $R_{2k}(x_k)$ обычно нелинейны. Заметим, что в качестве функций $R_2(x)$ и $R_{2k}(x_k)$ могут фигурировать не только вероятности безотказной работы, но и коэффициенты готовности, если отказавшие элементы восстанавливаются.

Обратная задача формулируется следующим образом:
найти

$$\min_{(x_1, \dots, x_s)} \sum_{k=1}^s w_k x_k \quad (3.5)$$

при наличии ограничения

$$R_2(x) = \prod_{k=1}^s R_{2k}(x_k) \geq R_0 \quad (1 > R_0 > 0), \quad (3.6)$$

$$x_k = 0, 1, \dots \quad (k = 1, \dots, s).$$

Для решения задачи из-за целочисленности допустимого множества $\{x_k\}$ ($k = 1, \dots, s$) прежде всего напрашивается простой перебор, однако уже при небольших значениях x_k этот способ крайне трудоемок, а зачастую просто нереализуем в течение разумного отрезка времени. Прологарифмировав обе части (3.3), получим так называемую задачу с сепарабельными функциями (все R_{2k} зависят только от x_k):

найти

$$\max_x \sum_{k=1}^s \ln R_{2k}(x_k) \quad (3.7)$$

при наличии ограничения

$$J(x) = W^0 - \sum_{k=1}^s w_k x_k \geq 0, \quad x_k = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

Доказано [65], что функция $\ln R_{2k}(x_k)$ для схемы резервирования замещением при $\alpha \neq 1$ монотонно воз-

растает с ростом x_k , а $\Delta \ln R_{2k}(x_k)$, определяемая как $\Delta R_{3k}(x_k) = \ln R_{2k}(x_k + 1) - \ln R_{2k}(x_k)$ ($k = 1, \dots, s$), убывает с ростом x_k для ($k = 1, \dots, s$). Это свойство позволяет использовать два алгоритма «быстрого» приближения к точке оптимума. Первый из них является *параметрическим* обобщением метода множителей Лагранжа на случай дискретных переменных:

1) на первом шаге выбираем произвольное положительное число $\theta_1 > 0$,

2) вычисляем значения $\theta_1 w_k$ для всех $k = 1, \dots, s$,

3) определяем для каждого k наибольшее целое число $[x_k]_1$, при котором еще выполняется неравенство $\Delta R_{3k}([x_k]_1) \geq \theta_1 w_k$, т. е. решаем s неравенств в целых числах,

4) вычисляем оптимальное значение $x_{k_1}^*$ для первого шага как $[x_k]_1 + 1$, причем для тех k , для которых выполняется неравенство $\Delta R_{3k}(0) < \theta_1 w_k$, значения x_{k_1} принимаются равными нулю,

5) проверяем выполнение неравенства (3.8), служащего ограничением задачи,

6) в случае равенства в (3.8) отыскание оптимального вектора x^* , доставляющего максимум функции $R_2(x)$, на этом прекращается,

7) если $\sum_{k=1}^s w_k x_{k_1}^* > W^0$, то на втором шаге значение θ_2 выбираем из условия $\theta_2 > \theta_1$ (как схематически показано на рис. 3.1), а если $\sum_{k=1}^s w_k x_{k_1}^* < W^0$, то из условия $\theta_2 < \theta_1$.

Далее процедура вычислений для второго шага остается без изменений по сравнению с производимыми операциями для первого шага.

Выбор шага изменения θ осуществляется в процессе решения конкретной задачи.

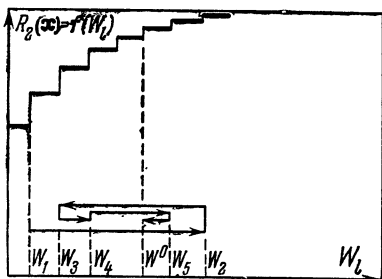


Рис. 3.1.

Различным шагам алгоритма соответствуют различные значения θ_l , $R_2(x_1^*, \dots, x_s^*)$ и $W_l = \sum_{k=1}^s w_k x_k^*$, причем x_k^* означает оптимальное значение x_k для l -го шага, а θ_l , представляющее, по существу, аналог множителя Лагранжа на дискретный случай, *упорядоченно изменяется*. Применение описанного алгоритма обеспечивает отыскание оптимального решения, так как выбор вектора (x_1^*, \dots, x_s^*) на l -м шаге обеспечивает максимум функции $R_2(x)$ для всех x таких, что $W(x) \leq W(x_l^*)$. Каждая точка на кривой $\bar{R}_2(x) = f(W_l)$, представленной на рис. 3.1, обладает *оптимальным* свойством. Поэтому данный алгоритм позволяет не только получить решение (если оно существует), но и найти оптимальные шаги в сторону снижения или увеличения суммарных ресурсов W . Однако в силу целочисленности x_k в ряде случаев описанный алгоритм дает только *приближение* к решению задачи, обуславливая необходимость различных форм перебора на границе допустимых значений x .

Второй алгоритм состоит в следующей последовательности шагов:

1) выбираем в качестве исходной точки x_1 , вектор $x_1 = (0_1, \dots, 0_s)$, соответствующий нулевым размещаемым ресурсам (стоимости, объему или весу), т. е. $W_1 = 0$,

2) на первом шаге добавляем один резервный элемент типа β , для которого отношение (градиент) $\Delta R_{z\beta}(0)/w_\beta$ оказывается максимальным, $\beta \in \{1, \dots, s\}$,

3) вычисляем $\Delta R_{z\beta}(1)/w_\beta$ и на втором шаге добавляем один резервный элемент того типа, для которого на данном шаге указанное отношение максимально и т.д.

Если точное решение не достигается, но оно существует, то для его отыскания остается провести перебор на границе области возможных решений. В [63] описан алгоритм, позволяющий найти точное решение и одновременно обладающий достоинствами только что описанных процедур быстрого приближения к границе области. Так как ограничения задачи являются *существенными*, то этим самым осуществляется быстрое приближение к точке оптимума. Упомянутый алгоритм точного решения

задачи оптимального резервирования состоит в первоначальном использовании одной из двух процедур, описанных выше, с последующим применением метода динамического программирования [6].

Коэффициент готовности можно повысить как за счет увеличения числа резервных элементов, так и увеличения численности ремонтной бригады, причем увеличение численности ремонтной бригады приводит к увеличению коэффициента готовности лишь при $r < x + 1$. Если число ремонтников фиксировано, а обслуживание специализировано по типам элементов, т.е. каждую резервную группу можно рассматривать независимо, то задача (3.3), (3.4) может быть интерпретирована несколько иначе. Действительно, будем понимать в (3.3) под R_2 коэффициент готовности системы, состоящей из s независимых резервных групп, а под R_{2k} — соответствующие коэффициенты готовности. Тогда необходимо найти

$$\max_{\substack{x=(x_1, \dots, x_s) \\ r=(r_1, \dots, r_s)}} R_2(x, r) = \max_{x, r} \prod_{k=1}^s R_{2k}(x_k, r_k) \quad (3.9)$$

при наличии ограничения

$$J(x, r) = W^0 - \sum_{k=1}^s w_{1k} x_k - \sum_{k=1}^s w_{2k} r_k \geq 0, \quad (3.10)$$

$$x_k = 0, 1, \dots; \quad r_k = 1, 2, \dots, x_k.$$

Здесь w_{2k} — удельные расходы по содержанию одного ремонтника k -й специализации, а w_{1k} — стоимость элемента. В случае, если w_{1k} — стоимость элемента, а w_{2k} — удельные расходы содержания, то W^0 представляет суммарные средства, которые можно расходовать на приобретение резервных, или запасных элементов, на увеличение численности ремонтной бригады, прием на работу более квалифицированных специалистов, обеспечивающих ремонт с большей интенсивностью. При обслуживании специализированным ремонтным персоналом для $r_k < x_k + 1$ и $0 < \alpha_k < 1$ приращения логарифмов стационарного коэффициента готовности по x_k и r_k имеют

СООТВЕТСТВЕННО ВИД:

$$\ln \frac{\left\{ 1 - {}^1\bar{u}_{k, x_k+2}^{(1)} \left[1 + \sum_{i=1}^{r_k-1} {}^0\bar{u}_{k,i}^{(1)} + \sum_{i=r_k}^{x_k+2} {}^1\bar{u}_{k,i}^{(1)} \right]^{-1} \right\}}{\left\{ 1 - {}^1\bar{u}_{k, x_k+1}^{(0)} \left[1 + \sum_{i=1}^{r_k-1} {}^0\bar{u}_{k,i}^{(0)} + \sum_{i=r_k}^{x_k+1} {}^1\bar{u}_{k,i}^{(0)} \right]^{-1} \right\}}, \quad (3.11)$$

$$\ln \frac{\left\{ 1 - {}^1u_{k, x_k+1} \left[1 + \sum_{i=1}^{r_k} {}^0u_{k,i} + \sum_{i=r_k+1}^{x_k+1} {}^1\bar{u}_{k,i} \right]^{-1} \right\}}{\left\{ 1 - {}^1u_{k, x_k+1} \left[1 + \sum_{i=1}^{r_k-1} {}^0u_{k,i} + \sum_{i=r_k}^{x_k+1} {}^1u_{k,i} \right]^{-1} \right\}},$$

где

$${}^0\bar{u}_{k,i}^{(0,1)} = \frac{\rho_k^i \bar{b}_{k,i}^{(0,1)}}{i!} \quad (i = 1, \dots, r_k - 1),$$

$${}^1\bar{u}_{k,i}^{(0,1)} = \frac{\rho_k^i \bar{b}_{k,i}^{(0,1)}}{r_k! r_k^{i-r_k}} \quad (i = r_k, \dots, x_k + 2),$$

$${}^0\bar{u}_{k,i} = \frac{\rho_k^i \bar{b}_{k,i}}{i!} \quad (i = 1, \dots, r_k),$$

$${}^1u_{k,i} = \frac{\rho_k^i \bar{b}_{k,i}}{(r_k + 1)! (r_k + 1)^{i - (r_k + 1)}} \quad (i = r_k + 1, \dots, x_k + 1),$$

$$\bar{b}_{k,i}^{(1)} = \prod_{j=0}^{i-1} (z_k + \alpha_k (x_k + 1 - j)) \quad (i = 1, \dots, r_k - 1),$$

$$\bar{b}_{k,i}^{(0)} = \prod_{j=0}^{i-1} (z_k + \alpha_k (x_k - j)) \quad (i = r_k, \dots, x_k + 2),$$

$$\bar{b}_{k,i} = \prod_{j=0}^{i-1} (z_k + \alpha_k (x_k - j)),$$

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k} \quad (r_k = 1, \dots, x_k + 1; x_k = 0, 1, \dots).$$

Если все функции

$$\ln \left\{ \frac{R_{2k}(x_k + 1, r_k)}{R_{2k}(x_k, r_k)} \right\} \text{ и } \ln \left\{ \frac{R_{2k}(x_k, r_k + 1)}{R_{2k}(x_k, r_k)} \right\} \quad (k = 1, \dots, s)$$

убывают соответственно с ростом x_k и r_k в указанных выше пределах при фиксированном значении второй переменной, то первый и второй алгоритмы с незначительными изменениями применимы для решения задачи.

Теперь на каждом шаге для выбранного значения $\theta_1 > 0$ нужно решить систему двух неравенств для каждого k :

$$\ln \left\{ \frac{R_{2k}(x_k + 1, r_k)}{R_{2k}(x_k, r_k)} \right\} \geq \theta_1 w_{1k}, \quad \ln \left\{ \frac{R_{2k}(x_k, r_k + 1)}{R_{2k}(x_k, r_k)} \right\} \geq \theta_1 w_{2k},$$

а для выбора значения θ_2 на следующем шаге вычислить

$$\text{сумму } \sum_{k=1}^s w_{1k} x_{k_1}^* + \sum_{k=1}^s w_{2k} r_{k_1}^* \text{ и сравнить ее с } W^0.$$

Решение системы двух неравенств в целых числах представляет, по существу, перебор возможных решений на каждом шаге и упорядоченный переход к следующему шагу.

В результате, если при наличии s переменных и при ограничении вида (3.8) удастся быстро подойти к оптимуму, то при наличии $2s$ переменных перебор по объему сопоставим с последовательным перебором по методике динамического программирования, если s велико.

В качестве примера рассмотрим численное решение задачи (3.9), (3.10) с помощью известного алгоритма Кеттеля [129]. Этот алгоритм, основанный на идеях Беллмана [6], позволяет находить точное решение (если оно существует) задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов нескольких видов. Вводится определение *доминирующей последовательности*, или *последовательности оптимальных решений*, по существу, являющееся определением оптимальности в s -шаговом процессе решения. Отыскание доминирующих последовательностей на каждом шаге s -шагового процесса и означает последовательно упорядоченный перебор.

Согласно этому алгоритму будем последовательно объединять резервные группы или типы элементов, вычисляя на

каждом шаге процесса коэффициент простоя, а также соответствующие суммарные расходы в единицу времени. Так, например, для j -го варианта первой резервной группы и i -го варианта второй суммарные расходы определим как

$$W_{ij} = W_{2i}(x_{2i}, r_{2i}) + W_{1j}(x_{1j}, r_{1j}) \quad (3.12)$$

где

$$W_{2i}(x_{2i}, r_{2i}) = w_{12}x_{2i} + w_{22}(r_{2i} - 1), \quad (3.13)$$

$$W_{1j}(x_{1j}, r_{1j}) = w_{11}x_{1j} + w_{21}(r_{1j} - 1) \quad (3.14)$$

$$(i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots),$$

а коэффициент простоя равен

$$\pi_{ij} = \pi_{2i}(x_{2i}, r_{2i}) + \pi_{1j}(x_{1j}, r_{1j}) - \pi_{2i}(x_{2i}, r_{2i})\pi_{1j}(x_{1j}, r_{1j}). \quad (3.15)$$

Для каждого варианта объединения определяются доминирующая последовательность значений пар: коэффициент готовности — суммарные расходы в единицу времени. Каждое решение о размещении средств включает пару значений π_l и W_l . Оптимальность промежуточных решений определяется так, что при меньших или равных суммарных расходах W_l ($l = 1, \dots$) нельзя обеспечить меньший уровень коэффициента простоя π_l . Подробнее эти вопросы изложены в [129]. Для исходных данных, представленных в табл. 3.1, найдем такие целочисленные значения x_k, r_k ($k = 1, 2, 3$), чтобы коэффициент

Таблица 3.1

k	λ_k	z_k	α_k	μ_k	w_{1k}	w_{2k}	$W^0 = 30$
1	0,05	1	0,2	20	2	20	
2	0,10	2	0,1	5	10	2	
3	0,15	3	0,15	10	3	3	

готовности (3.14) достигал максимума при наличии ограничений (3.10) и ограничения, связанного с существованием стационарного режима:

$$r_k \geq \max \left\{ \frac{\alpha_k \lambda_k x_k + \lambda_k z_k}{\gamma \mu_k} \right\} \quad (\gamma < 1).$$

1) Примем такой порядок объединения резервных групп: первую объединим со второй, а полученное объединение — с третьей.

2) Используя формулы (2.2), (2.3), вычислим коэффициент готовности первой и второй резервных групп при различных x_k и r_k ($k = 1, 2, \dots$), учтя ограничения $W^0 = 30$, (3.10) и ограничение из-за стационарности. Результаты вычислений представлены в табл. 3.2.

3) Вычислим показатели W_{ij} и π_{ij} для различных вариантов объединения первой и второй резервных групп, используя соотношения (3.12) — (3.15). Заполнив все клетки табл. 3.2, приступим к определению членов доминирующей последовательности размещений средств. Эти члены в табл. 3.2 выделены звездочками.

4) Найденную доминирующую последовательность решений запишем в верхнюю строку табл. 3.3, а в левую графу запишем значения пар (коэффициент простоя π_l , W_l) для третьей резервной группы, вычисленные аналогично тому, как это делалось для первой и второй резервных групп.

5) В табл. 3.3 повторяем вычисления, указанные в п. 3)

6) Находим результирующую доминирующую последовательность решений для объединения трех резервных групп.

Если ремонтный персонал неспециализирован, то задача (3.9), (3.10) несколько видоизменяется:

найти

$$\max_{\substack{(x_1, \dots, x_s) \\ r_1}} R_1(x, r_1) = \max_{\substack{(x_1, \dots, x_s) \\ r_1}} (1 - \pi(x, r_1)) \quad (3.16)$$

при наличии ограничения

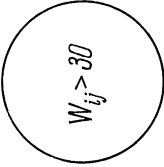
$$J(x, r_1) = W^0 - \sum_{k=1}^s w_{1k}x_k - w'_{21}r_1 \geq 0, \quad (3.17)$$

$$r_1 \geq \max \left\{ \frac{\sum_{k=1}^s (\alpha_k \lambda_k x_k + z_k \lambda_k)}{\gamma \mu_1}, 1 \right\}, \quad s + \sum_{k=1}^s x_k \geq r_1.$$

Однако в этом случае явные выражения для $\pi(x, r_1)$

Таблица 3.2

(x_1, τ_1) (x_2, τ_2) x_{21}, W_{21}	(0;1)	(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)
$3 \cdot 10^{-3}$	$0,039408^*$ 0 (1) —	$0,0370172^*$ 2 (2)	$0,0370102^*$ 4 (3)	$0,0370104^*$ 6 (4)	$468,25 \cdot 10^{-5}$ 8 (5)	$23,1 \cdot 10^{-16}$ 10	$3,74 \cdot 10^{-6}$ 22	$6,54 \cdot 10^{-9}$ 24	$13,07 \cdot 10^{-22}$ 26	$22,35 \cdot 10^{-25}$ 28	$40 \cdot 10^{-18}$ 30
$1,55 \cdot 10^{-3}$	$0,0^4 4036^*$ 10 (6)	$0,0^4 55745^*$ 12 (7)	$0,0^4 550^4 3^*$ 14	$0,0^4 550^4 104^*$ 16	$0,0^4 550^4 47^*$ 18	$0,0^4 550^4 28$ 20	$0,037010^4$ 22	$0,037010^4$ 24	$0,037010^4$ 26	$0,037010^4$ 28	$0,037010^4$ 30
$6,76 \cdot 10^{-6}$	$0,0^4 255769$ 20	$0,0^4 525195$ 22	$0,0^4 6778607$ 24	$0,0^4 67760104$ 26	$0,0^4 67760^4 5$ 28	$0,0^4 67760^4$ 30					
$3,105 \cdot 10^{-6}$	$0,0^4 243339$ 30										
$1,2$	$0,0^4 32929$ 12	$0,0^4 812453^*$ 14 (8)	$0,0^4 8162025^*$ 16 (9)	$0,0^4 81620^4 104^*$ 18 (10)	$0,0^4 81620^4 46^*$ 20 (11)	$0,0^4 81620^4 22$ 22 (12)					
$1,7, 6 \cdot 10^{-3}$	$0,0^4 252916$ 22	$0,0^4 512987^*$ 24 (13)	$0,0^4 165907^*$ 26 (14)	$0,0^4 1650104^*$ 28	$0,0^4 1650^4 6$ 30						
$1,79 \cdot 10^{-6}$	$0,0^4 201161$ 24	$0,0^4 42649$ 26	$0,0^4 181606^*$ 28 (15)	$0,0^4 1730104^*$ 30 (16)							



Таблиця 3.3

(e)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
$\frac{2x_1^2 + 3x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$	$0,038408$	$0,0370172$	$0,037010^2$	$0,037010^4$	$0,037010^7$	$0,0^24086$	$0,0^285745$	$0,0^2812453$	$0,0^2805206$	$0,0^28050104$	$0,0^28050046$
$\frac{2x_1^2 + 3x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$	$0,0789639$	$0,07670172$	$0,076689480^2$	$0,076689480^4$	$0,076689480^7$	$0,0460796$	$0,0427032$	$0,04198697$	$0,04198185$	$0,041981826$	$0,041981823$
$4,2 \cdot 10^{-2}$	$0,042715$	$0,0388653$	$0,03887820^2$	$0,03887820^4$	$0,03887820^7$	$0,0^249681$	$0,0^2494942$	$0,0^2495087$	$0,0^2494946$	$0,0^2494946$	$0,0^2494946$
$1,5 \cdot 10^{-3}$	$0,0394986$	$0,0370191$	$0,03701910^2$	$0,03701910^4$	$0,03701910^7$	$0,0^2491306$	$0,0^249557$	$0,0^24978$	$0,0^249039$	$0,0^24903732$	$0,0^24903781$
$2,5 \cdot 10^{-5}$	$0,0394271$	$0,0370219$	$0,0370140^2$	$0,0370140^4$	$0,0370140^7$	$0,0^249408$	$0,0^2495235$	$0,0^2491735$	$0,0^2490993$	$0,0^2490993$	$0,0^2490993$
$4,5 \cdot 10^{-6}$	$0,0394082$	$0,03701745$	$0,03701020^2$	$0,03701020^4$	$0,03701020^7$	$0,0^2493626$	$0,0^249577$	$0,0^24912716$	$0,0^2490523$	$0,0^2490526$	$0,0^2490526$
$2,64 \cdot 10^{-7}$	$0,0394080$	$0,03701720$	$0,037010^5$	$0,037010^7$	$0,037010^{11}$	$0,0^249360^2$	$0,0^249576$	$0,0^24912462$	$0,0^2490523$	$0,0^2490526$	$0,0^2490526$
$0,01 \cdot 10^{-6}$	$0,039408$	$0,0370172$	$0,037010^5$	$0,037010^7$	$0,037010^{11}$	$0,0^249360^2$	$0,0^2495745$	$0,0^24912462$	$0,0^2490523$	$0,0^2490526$	$0,0^2490526$
$0,66244 \cdot 10^{-9}$	$0,039408$	$0,0370172$	$0,037010^5$	$0,037010^7$	$0,037010^{11}$	$0,0^249360^2$	$0,0^2495745$	$0,0^24912462$	$0,0^2490523$	$0,0^2490526$	$0,0^2490526$
$1,0 \cdot 10^{-3}$	$0,0393680$	$0,0375927$	$0,03798550^2$	$0,03798550^4$	$0,03798550^7$	$0,0^249449$	$0,0^249568$	$0,0^249292$	$0,0^249172$	$0,0^24917846$	$0,0^24917845$
$2,5 \cdot 10^{-6}$	$0,0394320$	$0,0370428$	$0,0370340^2$	$0,0370340^4$	$0,0370340^7$	$0,0^249609$	$0,0^249624$	$0,0^24937$	$0,0^2493001$	$0,0^2492998$	$0,0^2492998$
$6,5 \cdot 10^{-6}$	$0,039408$	$0,0370178$	$0,037010620^2$	$0,037010620^4$	$0,037010620^7$	$0,0^249366$	$0,0^249398$	$0,0^249102$	$0,0^24905675$	$0,0^2490566$	$0,0^2490566$
$17,30 \cdot 10^{-9}$	$0,03940801$	$0,0370172$	$0,037010^2$	$0,0397010^4$	$0,037010^7$	$0,0^2493601$	$0,0^2495746$	$0,0^2492470$	$0,0^249172$	$0,0^24917846$	$0,0^24917845$

получить трудно, и поэтому в [64] было предложено использовать аппроксимацию неспециализированного обслуживания специализированным.

Когда простой системы, вызванные неисправностями отдельных подсистем, можно оценить как экономические потери, связанные с невыпуском продукции и т. п., то задачу оптимизации структуры обслуживания естественно решать по критерию минимума суммарных эксплуатационных потерь, или расходов.

Пусть простой k -й подсистемы в единицу времени обходится в c_{0k} руб. Тогда оптимальные значения (x_k^*, r_k^*) должны быть таковы, чтобы достигали минимума суммарные эксплуатационные расходы, т. е. чтобы реализовался

$$\min_{\substack{(x_1, \dots, x_s) \\ (r_1, \dots, r_s)}} \left\{ C_1(x, r) = \sum_{k=1}^s c_{0k} \pi_{x_k+1}(x_k r_k) + \sum_{k=1}^s (w_{1k} x_k + w_{2k} r_k) \right\}, \quad (3.18)$$

где w_{1k} и w_{2k} имеют тот же смысл, что и в (3.10).

Ясно, что если ремонтный персонал специализирован, то задача распадается на s независимых задач.

Когда резервные группы независимы, а обслуживание осуществляется специализированными ремонтниками, выделяемыми для каждой группы в отдельности, то задача оптимизации может формулироваться так:

найти

$$\min_{\substack{(x_1, \dots, x_s) \\ (r_1, \dots, r_s)}} \left\{ C_2(x, r) = c_0 \left[1 - \prod_{k=1}^s (1 - \pi_{x_k+1}(x_k, r_k)) \right] + \sum_{k=1}^s (w_{1k} x_k + w_{2k} r_k) \right\} \quad (3.19)$$

при

$$x_k + 1 \geq r_k \geq \max \left\{ \frac{\alpha_k \lambda_k x_k + \lambda_k s_k}{\gamma \mu_k}, 1 \right\}, \quad \gamma < 1; \quad k = 1, \dots, s,$$

а при неспециализированном обслуживании требуется найти

$$\min_{\substack{(x_1, \dots, x_s) \\ r_1}} \left\{ C_3(x, r_1) = c_0 \pi(x, r_1) + \sum_{k=1}^s w_{1k} x_k + w'_{21} r_1 \right\} \quad (3.20)$$

при

$$\left(s + \sum_{k=1}^s x_k \right) > r_1 \geq \max \left\{ \frac{\sum_{k=1}^s (\alpha_k \lambda_k x_k + z_k \lambda_k)}{\gamma \mu_1}, 1 \right\}, \quad \gamma < 1,$$

причем издержки будут зависеть от той стратегии, или дисциплины обслуживания, которая принята в системе. Предположения об отсутствии специализации ремонтного персонала выдвигает ряд новых проблем по отысканию наилучших способов обслуживания разнотипного оборудования: предоставления приоритетов оборудованию конкретного типа, выбора шкалы приоритетов и т. п.

Случай, когда в системе уже есть резервные элементы. Задача оптимального резервирования может быть обобщена предположением, что начальный вариант системы характеризуется наличием резервных элементов. Если в системе уже есть так называемый «начальный» резерв, задаваемый вектором ${}^0x = ({}^0x_1, \dots, {}^0x_s)$, то возможны два случая. Дополнительно нужно распределить суммарные средства W^0 на введение резервных элементов так, чтобы это дополнительное резервирование обеспечило максимум вероятности безотказной работы системы, или максимум ее коэффициента готовности.

Первый случай допускает тривиальное обобщение задачи, рассмотренной выше, а именно: начальный вариант резервирования уже оптимален, т. е. соответствует такой точке на оптимальной кривой $R_2(x_i^*) = f(W_i)$, в которой $W_i = {}^0W$. Тогда, суммируя затраты на реализацию начального резерва и W^0 :

$$W_0 = {}^0W + W^0,$$

решаем задачу по $x = (x_1, \dots, x_s)$ для нового ограничения:

$$J({}^0x + x) = W_0 - \sum_{k=1}^s w_k ({}^0x_k + x_k) \geq 0.$$

Во втором случае, характеризуемом неоптимальностью начального варианта резервирования, необходимо так распределить дополнительные средства W^0 , чтобы дости-

гаемая надежность или коэффициент готовности системы были максимальны для заданного значения $W^0 > 0$. Теперь различным шагам первого алгоритма, т. е. различным значениям θ_l ($l = 1, 2, \dots$), соответствуют различные значения

$$R_3({}^0x_1 + x_{1l}^*, \dots, {}^0x_s + x_{sl}^*) \text{ и } W_l = \sum_{k=1}^s w_k x_{kl}^*.$$

Выбор вектора $x_l = (x_{1l}^*, \dots, x_{sl}^*)$ на l -м шаге обеспечивает максимум функции $R_3({}^0x + x)$ для всех x таких, что

$$W(x) \leq W(x_l^*), \quad x_i > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_s)$$

Следуя [97], покажем, что для $x \neq x_l^*$ при выполнении неравенства

$$W(x) \leq W(x_l^*)$$

выполняется неравенство

$$R_3({}^0x + x) \leq R_3({}^0x + x_l^*).$$

Предположим, как в [97], что значения k ($k = 1, \dots, s$) составляют две совокупности, I_1 и I_2 , и для всех значений k из совокупности I_1 выполняется соотношение

$$x_k > x_{k_l}^*,$$

а для всех k из совокупности I_2 —

$$x_k < x_{k_l}^*.$$

Тогда для значений k из I_1 ($k(I_1)$) можно записать, что

$$\Delta R_{3k}({}^0x_k + x_k^* + j) < \theta_l w_k$$

при $j = 1, 2, \dots, (x_k - x_{k_l}^*)$, так как $\Delta R_{2k}(x_k)$ убывает с ростом x_k для вероятности безотказной работы и коэффициента готовности системы [67].

По этой же причине для всех k из I_2 имеем

$$\Delta R_{3k}({}^0x_k + x_{k_l}^* - j) > \theta_l w_k$$

при

$$j = 1, 2, \dots, (x_{k_l}^* - x_k).$$

Просуммировав $\Delta R_{3k}(x_k)$ по всем k из I_1 и I_2 , получим

$$\begin{aligned} R_3(0x + x) - R_3(0x + x_l^*) &= \\ &= \sum_{k(I_1)} \sum_{j=1(x_l^*)}^{x_k - x_{k_l}^*} \Delta R_3(0x_k + x_{k_l}^* + j) - \\ &- \sum_{k(I_2)} \sum_{j=1(x_l^*)}^{x_{k_l}^* - x_k} \Delta R_3(0x_k + x_{k_l}^* - j) \leq \\ &\leq \theta_l \left\{ \sum_{k(I_1)} w_k (x_k - x_{k_l}^*) - \sum_{k(I_2)} w_k (x_{k_l}^* - x_k) \right\} = \\ &= \theta_l \sum_{k=1}^s w_k (x_k - x_{k_l}^*) = \theta_l \{W(x) - W(x_l^*)\}. \end{aligned}$$

Но так как $\theta_l > 0$ и $W(x) \leq W(x_l^*)$ по условию, то

$$R_3(0x + x) \leq R_3(0x + x_l^*),$$

что и требовалось доказать.

Обобщение на случай связывающих сетей без петель. Если имеется ряд точек, соединенных между собой звеньями так, что при этом не образуются петли, причем каждое звено служит связью между указанными точками, или полюсами, то изложенную выше задачу оптимального резервирования с одним ограничением можно несколько видоизменить [53]. Пусть каждому звену соответствует некоторый «вес», который отражает снижение «качества» сети при выходе из строя — нарушении связи, реализуемой этим звеном, при условии, что все остальные связи не нарушены. Обозначим этот «вес» через $v_k > 0$ ($k = 1, \dots, s$). Предполагая, что мы можем повышать уровень надежности сети лишь образованием параллельных связей к уже существующим, не создавая при этом петель, будем решать такую задачу:

найти

$$\max_{x=(x_1, \dots, x_s)} \sum_{k=1}^s v_k \ln R_{2k}(x_k) = \max_x \sum_{k=1}^s v_k R_{3k}(x_k) \quad (3.19a)$$

при наличии ограничения

$$J(x) = W^0 - \sum_{k=1}^s w_k x_k \geq 0 \quad (3.20a)$$

$$(w_k > 0; k = 1, \dots, s; x_k = 0, 1, \dots),$$

где $R_{zk}(x_k)$ — логарифм вероятности безотказной работы k -й связи при наличии x_k резервных звеньев, а v_k — «весовой» коэффициент для k -й связи.

W^0 может означать, например, суммарную длину или суммарную стоимость параллельных (резервных) звеньев.

Заметим, что здесь не рассматривается вопрос о том, как оптимально осуществить соединение точек в смысле суммарной длины связей. Такое соединение можно осуществить, следуя алгоритму Прима [48]. Соотношение (3.19) характеризует снижение связности сети от 100% с учетом различной значимости отдельных звеньев, выражаемой «весами» v_k .

При оптимальном резервировании связывающей сети без петель используются те же алгоритмы, что и для решения задачи (3.7), (3.8) с тем лишь отличием, что теперь на каждом шаге нужно проверять выполнение условий:

$$\Delta R_{zk}(x_k) \geq \frac{\theta_1 w_k}{v_k} \quad \text{или} \quad \Delta R_{zk}(0) < \frac{\theta_1 w_k}{v_k} \quad (k = 1, \dots, s).$$

В работе [63] доказано, что убывание $\Delta R_{zk}(x_k)$ с ростом x_k ($k = 1, \dots, s$) гарантирует оптимальность решений на каждом шаге.

3.2. Оптимальное резервирование при более чем одном ограничении

При распределении средств и ресурсов на повышение надежности, достигаемое за счет образования резерва, ограничения могут быть наложены сразу на несколько показателей: стоимость, вес, объем, потребление энергии и т. д. При наличии нескольких подобных ограничений поиск решения производится последовательно отбрасыванием поочередно одного за другим ограничений с целью проверить, являются ли они существенными, т. е. дости-

гается ли экстремум на границе области. Так, в случае двух ограничений задача сначала решается при отсутствии обоих ограничений. Если полученная точка им удовлетворяет, то полученное решение и будет решением задачи с ограничениями. Если оба ограничения не выполняются, то по крайней мере одно из них будет существенным. Затем поочередно отбрасывается по одному ограничению, и если в обоих случаях одно из них не выполняется, то этот факт гарантирует существенность обоих ограничений. Аналогично следует поступать и при наличии более двух ограничений.

Будем рассматривать ситуацию, когда имеются ограничения вида]

$$J_i(x) = V_i^0 - \sum_{k=1}^s w_{ik} x_k \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (3.21)$$

причем они являются существенными. Если ограничений вида (3.21) всего два, т. е.

$$\begin{aligned} J_1(x) &= W_1^0 - \sum_{k=1}^s w_{1k} x_k \geq 0, \\ J_2(x) &= W_2^0 - \sum_{k=1}^s w_{2k} x_k \geq 0 \quad (x_k = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (3.22)$$

то можно воспользоваться идеей Беллмана, согласно которой, чтобы не рассматривать последовательности функций, зависящих от двух переменных (по числу ограничений), вводится множитель Лагранжа θ . Вместо максимизации функции

$$\prod_{k=1}^s R_{1k}(x_k)$$

при наличии ограничений (3.22) решается задача о нахождении

$$\max_x \left[\prod_{k=1}^s R_{1k}(x_k) \right] e^{-\theta \sum_{k=1}^s w_{2k} x_k}, \quad (3.23)$$

причем допустимая область уже задается одним ограничением:

$$J_1(x) = W_1^0 - \sum_{k=1}^s w_{1k} x_k \geq 0, \quad (3.24)$$

и потому следует максимизировать функцию

$$\sum_{k=1}^s R_{2k}(x_k) - \theta \sum_{k=1}^s w_{2k} x_k. \quad (3.25)$$

Разбив процесс решения на s шагов (по числу резервных групп), можно по принципу оптимальности Беллмана записать:

$$f_s(W_1^0) = \max_{0 \leq x_s \leq \left[\frac{W_1^0}{w_{1s}} \right]} \{R_{1s}(x_s) e^{-\theta w_{2s} x_s} f_{s-1}(W_1^0 - w_{1s} x_s)\} \quad (3.26)$$

для $s = 2, 3, \dots$ и

$$f_1(W_1^0) = \max_{0 \leq x_1 \leq \left[\frac{W_1^0}{w_{11}} \right]} \{R_{11}(x_1) e^{-\theta w_{21} x_1}\} \quad (3.27)$$

для $s = 1$.

Здесь квадратные скобки, как всегда, означают наибольшее целое число x_k , такое, что $x_k \leq W_1^0/w_{1k}$ ($k = 1, \dots, s$).

Начав с уравнения (3.27), продолжаем решение согласно уравнению

$$f_k(W_1^0) = \max_{0 \leq x_k \leq \left[\frac{W_1^0}{w_{1k}} \right]} \{R_{1k}(x_k) e^{-\theta w_{2k} x_k} f_{k-1}(W_1^0 - w_{1k} x_k)\}. \quad (3.28)$$

Процесс разбивается на ряд ступеней: выбираем положительное число $\theta_1 > 0$ и для него из (3.27) и (3.28) находим

компоненты вектора x_1^* ; вычисляем $\sum_{k=1}^s w_{2k} x_{k1}^*$, проверяем знак неравенства во втором ограничении (3.22). В случае, если (3.22) обращается в равенство, найденный

вектор является *решением* задачи, а если

$$\sum_{k=1}^s w_{2k} x_{k_1} > W_2^0,$$

то на втором шаге выбираем такое θ_2 , что $\theta_2 > \theta_1$, а если оказалось, что

$$\sum_{k=1}^s w_{2k} x_{k_1} < W_2^0,$$

то $\theta_2 < \theta_1$, и нужно продолжать поиск.

Изложенный алгоритм при наличии двух линейных ограничений является *комбинированным*, так как на каждой ступени (соответствующей выбранному значению θ) используется принцип оптимальности Беллмана, а переход от одной ступени к другой производится *упорядоченно*, как и в задаче (3.7), (3.8), до тех пор, пока не достигается знак равенства во втором ограничении. Комбинацией упорядоченного изменения множителя θ и метода последовательной максимизации Беллмана достигается сокращение объема вычислений.

Представляет интерес случай более двух существенных ограничений. Прошан и Брей [144] предложили модификацию алгоритма Кеттеля для решения задачи оптимального резервирования при наличии m линейных ограничений вида

$$J_i(x) = W_i^0 - \sum_{k=1}^s w_{ik} x_k \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.29)$$

В [144] вводится понятие доминирования вектора резервных элементов: x^1 доминирует над вектором x^2 , если

$$\sum_{k=1}^s w_{ik} x_k^1 \leq \sum_{k=1}^s w_{ik} x_k^2 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (3.30)$$

в то время как

$$R_2(x^1) > R_2(x^2),$$

где $R_2(x^1)$ и $R_2(x^2)$ — соответствующие значения надежности системы. Если хотя бы одно неравенство строгое, то x^1 *строго доминирует* над x^2 .

Последовательность размещений резерва x^v с соответствующими значениями $R_2(x^v)$ такими, что

$$J_i(x^v) \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m),$$

называется *доминирующей*, если ни для одного из x^v нельзя найти строго доминирующего над ним вектора из этой последовательности. На основе этих определений оптимальности членов доминирующей последовательности предлагается обобщение алгоритма Кеттеля на случай $s = 2$, а затем и на s -шаговый процесс ($s > 2$).

Алексеев О. Г. и Якушев В. И. [2] предложили модифицировать алгоритм Кеттеля на несколько иной основе. В рассмотренном ими случае трех линейных ограничений вводится некоторый коэффициент, учитывающий возможности резервирования по каждому из типов ресурсов, задаваемых одним из ограничений. Далее пужно, как и в алгоритме Кеттеля, строить доминирующую последовательность на каждом шаге, но парами значений в этой последовательности будут вероятность безотказной работы и коэффициент A , учитывающий жесткость каждого из ограничений. Для A вводятся единицы, единые для всех ресурсов (например, объем и вес приводятся к стоимости).

Увеличение числа ограничений при достаточно большом числе типов элементов (порядка $15 \div 20$) приводит к резкому увеличению объема вычислений, что и служит препятствием на пути применения численных методов динамического программирования.

Практически слабым утешением является тот факт, что хотя ограничений в реальной задаче может быть несколько, далеко не все из них будут существенными.

Еще одна возможность решения задачи оптимального резервирования с несколькими ограничениями возникает при использовании метода ветвей и границ.

3.3. Оптимальное обеспечение запасным оборудованием из выделенного фонда — планирование поставок

При распределении материалов и запасного оборудования (запчастей) по системе фондирования каждому потребителю или группе потребителей выделяются лимиты на соответствующие типы материалов и запчастей. Осо-

бенно это относится к тем типам материалов и запчастей, на которые спрос превышает предложение. Фонды устанавливаются на достаточно длительный период, скажем, полугодие или год, причем зачастую указывается распределение поставок по времени, т. е. указываются календарные сроки поставок. Однако обычно потребности в материалах и особенно потребности в запчастях нельзя указать точно, так как работа основного технологического оборудования нарушается в результате поломок, аварий и ряда других случайных причин. Наличие у потребителя запаса резервных элементов (например, режущего инструмента, деталей автомобилей и т. п.) создает предпосылки снижения простоя основного оборудования и связанных с этим простым потерь производства. Между тем централизованный поставщик, ведающий распределением и снабжением соответствующих потребителей, зачастую не в состоянии учесть возможные вариации потребностей и спроса на различные типы запасных частей и материалов. В результате могут возникнуть задержки и дефицит, снижающий возможности потребителя.

Рассмотрим в связи с этим модель обеспечения потребителя или группы потребителей запасным оборудованием и запчастями, предполагая, что имеется централизованное распределение фондов на данный тип оборудования или запчастей, а у потребителя остается лишь возможность оперативно планировать поставки выделенного ему по фондам оборудования, сообразуясь с текущими потребностями и имеющимися ограничениями.

Критерием планирования могут служить эксплуатационные издержки, связанные как с непроизводительными простоями основного оборудования потребителя из-за отсутствия запчастей, так и с транспортировкой и хранением этих запчастей у потребителя. Если, скажем, удельные издержки хранения весьма малы, но данный тип запасного оборудования или деталей крайне дефицитен, то в эти издержки могут быть включены начисления за хранение без использования. В качестве модели обеспечения или модели поставок используем марковскую модель с доходами [63]. Конечно, эта модель снабжения является лишь аппроксимацией фактической системы поставок, которая занимает промежуточное место между

жесткой системой фондирования с поставками в жесткие сроки без учета случайных колебаний потребностей и системой оптовых закупок.

Введение показателей стоимости в случайный процесс, описывающий функционирование системы, позволяет учесть экономические показатели производственного процесса. Если каждому состоянию производства потребителя поставить в соответствие некоторый доход или убыток, который создается пребыванием его производственной системы в этом состоянии в течение единичного отрезка времени, то марковский процесс, описывающий ее поведение, порождает *последовательность доходов*, обусловленных пребыванием системы в определенных состояниях и переходами из одного состояния в другое.

Рассмотрим для большей конкретности комплекс, состоящий из потребителя запасного оборудования и деталей данного типа, его прямого поставщика и базы снабжения, которые производят поставку этого оборудования и деталей. Ограничиваясь случаем однопродуктовых поставок, т. е. поставок запчастей одного типа от конкретного поставщика или базы, предположим, что прикрепление потребителя к поставщику осуществлено и у потребителя имеется лишь выбор между прямыми поставками и поставками через базу снабжения. Фонд выделяется заранее на период времени длительности $T = st$, распадающихся на s подынтервалов, по окончании каждого из которых имеется возможность по текущему состоянию, т. е. по текущим потребностям с учетом выделенных фондов и уже произведенным поставкам, принять решение о размере поставки в начале следующего периода. Для простоты считаем, что поставка осуществляется через один подынтервал после подачи заявки на текущую поставку, хотя в принципе можно учесть и случайное запаздывание поставок [86].

Для каждого подынтервала τ считается известным распределение объема спроса на запчасти данного наименования:

$$f_n(x) = \mathbf{P} \{ \xi_n = x \} \quad (n = 1, 2, \dots, s), \quad (3.31)$$

хотя прогноз спроса, представляющий прогноз надежности основного технологического оборудования, ставит

самостоятельную задачу, решение которой должно предшествовать планированию поставок. Если оборудование не претерпевает износа, а поломки обусловлены катастрофическими отказами, описываемыми, как известно, показательным законом распределения, то объем спроса на запчасть описывается распределением Пуассона. Если возможны групповые поломки, т. е. в любой момент времени из строя может выйти несколько элементов, то объем спроса характеризуется квазипуассоновским распределением, или составным пуассоновским распределением. Тогда остается лишь оценить параметры этих распределений.

Обозначим через u_n и v_n размеры заявок на поставку на n -м подынтервале, или шаге, поданные соответственно на базу снабжения и поставщику. Величины поставок с базы η_n и прямо от поставщика χ_n представляют в общем виде случайные величины, определяемые условными распределениями $p_n(u|u_n)$ и $q_n(v|v_n)$ ($n = 1, \dots, s$). Эти распределения характеризуют реакцию на спрос и зависят от ряда факторов, зачастую не поддающихся аналитическому заданию, в результате чего возможна лишь статистическая оценка этих распределений. При введении этих распределений можно учитывать интересы поставщика, а именно, желательность поставок запчастей большими партиями крупным потребителям, а также невозможность поставок запчастей тем потребителям, которые уже перерасходовали выделенные им фонды. Короче говоря, предполагая заданными распределения $p_n(u|u_n)$ и $q_n(v|v_n)$, считаем, что этому этапу предшествовал этап изучения спроса, подобный этапу изучения и прогнозирования потребностей в запчастях.

Учтем следующие показатели издержек: B_1 — удельные расходы по транспортировке одной запчасти данного типа с базы, B_2 — удельные расходы по транспортировке одной запчасти прямо от поставщика, c_1 — штраф за нехватку одной запчасти в течение одного подынтервала времени τ , т. е. времени между двумя возможными последовательными заявками на поставку, c_2 — удельные издержки хранения в пересчете на одну запчасть в течение того же времени τ . В $\{c_2\}$ можно включить пени за продолжительное неиспользование запчастей, если по

системе в целом наблюдается дефицит по этому типу запчастей.

Пусть состояние потребителя, т. е. его текущие потребности в запчастях данного типа и произведенные поставки с базы и прямо от поставщика заданы вектором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где α_1 — суммарная потребность в запчастях с начала периода планирования, α_2 — суммарная поставка, осуществленная транзитом с базы за это же время, α_3 — суммарная поставка, произведенная непосредственно поставщиком.

Обозначим через $P_{\alpha\beta}$ вероятность перехода из состояния α в состояние β на n -м шаге ($n = 1, \dots, s$), а через $a_{\alpha\beta}$ — соответствующие расходы, сопутствующие такому переходу.

Используя исходные данные, устанавливаем по формуле полной вероятности, что

$$P_{\alpha\beta} = f_n(\beta_1 - \alpha_1) p_n(\beta_2 - \alpha_2 | u_n) q_n(\beta_3 - \alpha_3 | v_n), \quad (3.32)$$

так как спрос и реакцию поставщика можно считать с определенными оговорками статистически независимыми. К одному поставщику обычно прикрепляется достаточно много потребителей, и потому флуктуации спроса отдельных независимых потребителей не влияют на реакцию поставщика.

Одновременно для $a_{\alpha\beta}$ устанавливаем, что

$$a_{\alpha\beta} = B_1(\beta_2 - \alpha_2) + B_2(\beta_3 - \alpha_3) + c_1(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)l_\beta + c_2(\beta_2 + \beta_3 - \beta_1)(1 - l_\beta), \quad (3.33)$$

где

$$l_\beta = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 < 0, \\ 1, & \text{если } \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $V_\alpha(n)$ означает ожидаемые издержки, связанные с n -шаговым процессом решения о поставках запчастей, если система за n шагов до конца периода планирования находится в состоянии α , а при планировании используется оптимальная политика заявок $U_{\alpha n}$, т. е. решений о размерах поставок в каждый последующий момент времени из конкретных источников — с базы или прямо от поставщика. Тогда на основании принципа оптимальности Белл-

мана можно записать следующие соотношения для ожидаемых издержек:

$$V_{\alpha}^*(n) = \min_{\{u_n, v_n\}} \sum_{\substack{\beta \\ \beta \geq \alpha}} P_{\alpha\beta} (a_{\alpha\beta} + V_{\beta}^*(n-1)), \quad V_{\alpha}^*(0) = 0, \quad (3.34)$$

где $n = 1, 2, \dots, s$, причем область возможных решений о размерах и адресах заявок задается вполне естественными неравенствами

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0, \quad v_n \geq 0, & (3.35) \\ u_n + v_n &\leq W_0 - \alpha_2 + \alpha_3, \quad (n = 1, \dots, s), \\ v_n &= k_n Q_0, \quad k_n = 0, 1, \dots, \left[\frac{V_0 - \alpha_2 - \alpha_3 - u_n}{Q_0} \right]; \end{aligned}$$

Q_0 — минимально возможный объем грузопоставки от поставщика (например, емкость железнодорожного вагона).

При $n = 1$, поскольку $V_{\alpha}(0) = 0$, имеем

$$V_{\alpha}^*(1) = \min_{\{u, v\}} \sum_{\beta} P_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = \min_{\{u, v\}} d_{\alpha}, \quad (3.36)$$

т. е. на первом шаге выбирается решение, минимизирующее непосредственно ожидаемые издержки. Отметим попутно, что вероятности перехода $P_{\alpha\beta}$ и ожидаемые расходы $a_{\alpha\beta}$ зависят от номера шага и, конечно, от принимаемого на этом шаге решения. При решении уравнений (3.34) можно воспользоваться рекуррентным методом «движения» с конца планируемого периода.

Рассмотрим в заключение некоторые свойства оптимальных решений о заявках на каждом шаге, используя при этом выражения издержек за один шаг. Если $c_1 \leq \leq \min(B_1, B_2)$, то оптимальное решение на первом шаге ($n = 1$) состоит в том, чтобы ничего не заказывать. Действительно, издержки за один шаг, являющиеся функцией принимаемого на этом шаге решения, выражаются как

$$\begin{aligned} d_{\alpha}(u_n, v_n) = \sum_{\beta \geq \alpha} P_{\alpha\beta} [& B_1(\beta_2 - \alpha_2) + B_2(\beta_3 - \alpha_3) + \\ & + c_1(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)l_{\beta} + c_2(\beta_2 + \beta_3 - \beta_1)(1 - l_{\beta})], \quad (3.37) \end{aligned}$$

но

$$d_{\alpha}(u_n, v_n) \geq \sum_{\beta \geq \alpha} P_{\alpha\beta} [\min(B_1, B_2)(\beta_2 + \beta_3 - \alpha_2 - \alpha_3) + \\ + c_1(\beta_1 - \alpha_2 - \alpha_3)l_{\beta} - c_1(\beta_2 + \beta_3 - \alpha_2 - \alpha_3)l_{\beta} + \\ + c_2(\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1)(1 - l_{\beta})], \quad (3.38)$$

так как вместо B_1, B_2 используется минимальный коэффициент $\min(B_1, B_2)$, а в последнем слагаемом вместо β_2, β_3 используются заведомо меньшие или равные значения α_2 и α_3 . Другими словами,

$$d_{\alpha}(u_n, v_n) \geq [\min(B_1, B_2) - c_1] \sum_{\beta \geq \alpha} P_{\alpha\beta} (\beta_2 + \beta_3 - \alpha_2 - \alpha_3) + \\ + \sum_{\beta \geq \alpha} P_{\alpha\beta} [c_1(\beta_1 - \alpha_2 - \alpha_3)l_{\beta} + c_2(\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1)(1 - l_{\beta})]. \quad (3.39)$$

Но при отсутствии заявок на n -м шаге $\beta_2 = \alpha_2$ и $\beta_3 = \alpha_3$, и поэтому

$$d_{\alpha}(0, 0) = \sum_{\beta \geq \alpha} P_{\alpha\beta} [c_1(\beta_1 - \alpha_2 - \alpha_3)l_{\beta} + c_2(\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1)(1 - l_{\beta})]. \quad (3.40)$$

Следовательно, ввиду того, что $[\min(B_1, B_2) - c_1] > 0$,

$$d_{\alpha}(u_n, v_n) \geq d_{\alpha}(0, 0). \quad (3.41)$$

Суммарные ожидаемые транспортные издержки за период планирования зависят лишь от β и α , если начальное состояние будет α , а конечное β . Издержки из-за дефицита запчастей и из-за хранения их у потребителя зависят от промежуточных состояний, составляющих траекторию эволюции системы. Отсюда, в частности, следует, что при $c_2 = 0$ оптимальная политика заявок состоит в получении максимального числа запчастей в начале периода планирования.

Оценим теперь ожидаемые издержки $V_{\alpha}^*(n)$. Пусть

$$m(n) = \min_{\alpha} V_{\alpha}^*(n).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 m(n) &= \min_{\alpha} \min_{\{u_n, v_n\}} \sum_{\beta \geq \alpha} P_{\alpha\beta} (a_{\alpha\beta} + V_{\beta}^* (n-1)) \geq \\
 &\geq \min_{\alpha} \min_{\{u_n, v_n\}} \sum_{\beta \geq \alpha} [P_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta} m(n-1)] = \\
 &= m(n-1) + \min_{\alpha} \min_{\{u_n, v_n\}} \sum_{\beta > \alpha} P_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = \\
 &= m(n-1) + \min_{\alpha} \min_{\{u_n, v_n\}} d_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Итерируя этот процесс оценки издержек по шагам, имеем

$$m(n) = \sum_{i=1}^n \min_{\alpha} \min_{\{u_i, v_i\}} d_{\alpha}(i),$$

где аргумент i в $d_{\alpha}(i)$ — величине непосредственно ожидаемых издержек — подчеркивает зависимость от номера шага. Обозначив через $M(n) = \max_{\alpha} V_{\alpha}^*(n)$, можно аналогичным образом показать, что

$$M(n) \leq \sum_{i=1}^n \max_{\alpha} \min_{\{u_i, v_i\}} d_{\alpha}(i).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n \min_{\alpha} \min_{\{u_i, v_i\}} d_{\alpha}(i) \leq V_{\alpha}^*(n) \leq \sum_{i=1}^n \max_{\alpha} \min_{\{u_i, v_i\}} d_{\alpha}(i). \quad (3.42)$$

В некоторых случаях размерность марковского процесса с доходами, используемого в качестве модели оперативного планирования поставок, можно понизить. Пусть спрос неслучаен или выполняется такое условие:

$$\sqrt{\sigma_n^2} = \sqrt{M[\xi_n - w_n]^2} = (0,03 \div 0,05) w_n, \quad (3.43)$$

где $w_n = M[\xi_n]$ ($n = 1, \dots, s$).

Тогда состояние потребителя (снабжение и потребности) достаточно полно характеризуются двумерным вектором $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3)$, компоненты которого имеют тот же

смысл, что и ранее. В этом случае

$$P_{\alpha\beta} = p_n(\beta_2 - \alpha_2 | u_n) q_n(\beta_3 - \alpha_3 | v_n) \quad (n = 1, \dots, s), \quad (3.44)$$

$$a_{\alpha\beta} = B_1(\beta_2 - \alpha_3) + B_2(\beta_3 - \alpha_3) +$$

$$+ c_1 \left(\sum_{i=n}^s w_i - \beta_2 - \beta_3 \right) l_\beta(n) + c_2 \left(\beta_2 + \beta_3 - \sum_{i=n}^s w_i \right) (1 - l_\beta(n)),$$

где

$$(3.45)$$

$$l_\beta(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{i=n}^s w_i < \beta_2 + \beta_3, \\ 1, & \text{если } \sum_{i=n}^s w_i \geq \beta_2 + \beta_3. \end{cases}$$

Для ожидаемых издержек уравнения, выписанные выше, сохраняют справедливость.

Укажем еще на одну возможность использования двумерной марковской модели планирования. Обозначим состояние объекта через $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$, где α_0 представляет суммарную величину поставки запасных частей данного типа, а α_1 , как и ранее, — суммарная потребность в запчастях за период с начала планирования поставок. Тогда $P_{\alpha\beta}$ определится как

$$P_{\alpha\beta} = f_n(\beta_1 - \alpha_1) \varphi_n(\beta_0 - \alpha_0 | u_n, v_n), \quad (3.46)$$

где

$$\varphi_n(x | u_n, v_n) = P\{\eta_n + \chi_n = x | u_n, v_n\} \quad (n = 1, \dots, s)$$

или, другими словами, композиция распределений p_n и q_n :

$$\varphi_n(x | u_n, v_n) = p_n(x | u_n) * q_n(x | v_n),$$

а $a_{\alpha\beta}$ выражается как

$$a_{\alpha\beta} = B_1 M[\eta_n | \beta_0 - \alpha_0; u_n, v_n] + B_2 M[\chi_n | \beta_0 - \alpha_0; u_n, v_n] + c_1(\beta_1 - \beta_0) l_\beta + c_2(\beta_0 - \beta_1)(1 - l_\beta), \quad (3.47)$$

где

$$l_\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_0 - \beta_1 \leq 0, \\ 0, & \text{если } \beta_0 - \beta_1 > 0. \end{cases}$$

Первые два слагаемых в (3.47) представляют условные математические ожидания величин поставок с базы и прямо от поставщика при условии, что суммарная величина поставки равна $(\beta_0 - \alpha_0)$ и была подана заявка (u_n, v_n) . Эти слагаемые вычисляются с помощью условных распределений вида

$$P \{ \eta_n = u \mid \eta_n + \chi_n = \beta_0 - \alpha_0; u_n, v_n \} = \frac{p_n(u|u_n)q_n(\beta_0 - \alpha_0 - u|v_n)}{\varphi_n(\beta_0 - \alpha_0 | u_n, v_n)}$$

и

$$P \{ \chi_n = v \mid \eta_n + \chi_n = \beta_0 - \alpha_0; u_n, v_n \} = \frac{q_n(v|v_n)p_n(\beta_0 - \alpha_0 - v|u_n)}{\varphi_n(\beta_0 - \alpha_0 | u_n, v_n)},$$

причем $p_n(u|u_n)q_n(\beta_0 - \alpha_0 - u|v_n) = P \{ \eta_n = u, \eta_n + \chi_n = \beta_0 - \alpha_0 \mid u_n, v_n \}$, а $\varphi_n(\beta_0 - \alpha_0 | v_n, u_n) = P \{ \eta_n + \chi_n = \beta_0 - \alpha_0 \mid u_n, v_n \}$. Вычисление вероятностей перехода и издержек за один шаг при этом усложняется по сравнению с трехмерной моделью планирования.

Выше считалось, что поставка осуществляется за один подынтервал или за один шаг процесса планирования. Модель планирования сохраняет свою структуру, если поставка выполняется за время

$$\rho \tau \leq \theta \leq (\rho + 1) \tau \quad (\rho < s - 1),$$

где τ — длительность одного шага планирования. При этом состояние дел потребителя нужно характеризовать вектором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2\rho+3})$, где α_1, α_2 и α_3 сохраняют прежний смысл, а

$$\alpha_4 = u_{n+1}, \alpha_5 = v_{n+1}, \dots, \alpha_{2\rho+2} = u_{n+\rho}, \alpha_{2\rho+3} = v_{n+\rho}.$$

3.4. Байесовский план обеспечения запасами одного наименования

Перейдем теперь к другой модели обеспечения случайных потребностей, если с обеспечением связаны издержки, складывающиеся из издержек хранения и издержек (штрафов) за дефицит, или нехватку. Предположим для простоты, что потребности распределены по закону Пуассона с некоторым параметром Λ , а время доставки пополнения равно нулю.

Рассмотрим, следуя [156], планирование уровней запаса в начале каждого периода по критерию минимума суммарных ожидаемых издержек за s периодов ($s \geq 1$):

$$\bar{V}_s = M \left\{ \sum_{i=1}^s V(X_i, \alpha_i) \right\},$$

где X_i — случайная величина потребностей на i -м периоде, α_i — уровень запаса в начале i -го периода, $V(X_i, \alpha_i)$ — издержки, зависящие от X и α следующим образом:

$$V(x, \alpha) = \begin{cases} c_1(\alpha - x), & x \leq \alpha, \\ c_2(x - \alpha), & x > \alpha, \end{cases} \quad (3.48)$$

т. е. если потребность превышает наличный запас, то платится штраф $c_2(x - \alpha)$; в противном случае издержки связаны с хранением. Для каждого X_i можно записать, что

$$P\{X_i = x\} = e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^x}{x!} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (3.49)$$

но если параметр Λ в свою очередь является случайной величиной с распределением

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^{a_1-1} t_1^{a_1} e^{-\lambda t_1}}{(a_1-1)!}, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

где $a_1 > 1$, то усредненное по $g(\lambda)$ распределение потребностей имеет вид:

$$\bar{P}\{X_i = x\} = \frac{t^x t_1^{a_1} (a_1 + x - 1)!}{(t + t_1)^{x+a_1} x! (a_1 - 1)!} = f(x | a_1, t_1). \quad (3.51)$$

Пусть $s = 1$, когда о X_1 имеется только информация в виде априорного распределения $f(x | a_1, t_1)$. Оптимальный начальный запас α_1^* минимизирует выражение

$$\bar{V}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} V(x, \alpha) f(x | a_1, t_1), \quad (3.52)$$

где a_1 и t_1 параметры распределения $g(\lambda)$. Для любого распределения $P(x)$ имеем согласно (3.48)

$$\bar{V}(\alpha, P) = \int_{(x \leq \alpha)} c_1(x - \alpha) dP(x) + \int_{(x > \alpha)} c_2(x - \alpha) dP(x). \quad (3.53)$$

Известно, что если α — непрерывная величина, то оптимальное значение α_1^* отыскивается приближенно в виде $\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\right)$ -го квантиля распределения $P(x)$. В данном случае это будет $\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\right)$ -й квантиль отрицательного биномиального распределения с параметрами Ψ, ν

$$G(k | \Psi, \nu) = \sum_{x=0}^k \frac{(x + \nu - 1)!}{(\nu - 1)! x!} \Psi^x (1 - \Psi)^\nu,$$

где

$$\Psi = \frac{1}{1 + t_1},$$

$$\nu = a_1 + 1.$$

$G_\gamma(\Psi, \nu)$ — γ -й квантиль ($0 < \gamma < 1$) отрицательного биномиального распределения — является неотрицательным целым числом, удовлетворяющим условию

$$G_\gamma(\Psi, \nu) = \min \{k : k \geq 0, G(k | \Psi, \nu) \geq \gamma\}. \quad (3.54)$$

$G(k | \Psi, \nu)$, выражается через биномиальное распределение, если параметр ν представляет целое число:

$$G(k | \Psi, \nu) = \sum_{x=\nu}^{\nu+k} \binom{\nu+k}{x} (1 - \Psi)^x \Psi^{\nu+k-x}.$$

Апостериорное распределение потребностей на периоде планирования остается отрицательным биномиальным

$$G(x | \Psi_{n+1}, \nu_{n+1}) = \frac{\Gamma(x + \nu_{n+1})}{\Gamma(\nu_{n+1}) \Gamma(x + 1)} \Psi_{n+1}^x (1 - \Psi_{n+1})^{\nu_{n+1}} \quad (3.55)$$

$$(x = 0, 1, \dots),$$

где $v_{n+1} = S_n + v$, $n = 0, 1, \dots$ и

$$\Psi_{n+1} = \frac{\frac{1}{1+t_1}}{1 + (n+1) \frac{1}{1+t_1}},$$

причем $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, а $S_0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай $s > 1$ периодов на интервале планирования. Каков бы ни был план создания начальных запасов в начале каждого периода за первые $(s-1)$ периодов, решение на последнем определяется из условия

$$\alpha_s^*(\Psi_s, v_s) \cong G_{\frac{c_2}{c_1+c_2}}(\Psi_s, v_s), \quad (3.56)$$

где Ψ_s, v_s — параметры, заменяющие Ψ, v в (3.54). Обозначив через $V_0(\Psi_s, v_s)$ ожидаемые издержки, связанные с оптимальным обеспечением на s -м периоде, получим

$$V_0(\Psi_s, v_s) = \sum_{x=0}^{\infty} V(x, \alpha_s^*(\Psi_s, v_s)) G(x | \Psi_s, v_s).$$

Можно показать, что для любого Ψ и любого v

$$V_0(\Psi, v) \cong (c_1 + c_2) \frac{\Gamma(\alpha^*(\Psi, v) + v + 1)}{\Gamma(v) \Gamma(\alpha^*(\Psi, v) + 1)} \Psi^{\alpha^*(\Psi, v) + 1} (1 - \Psi)^{v-1}, \quad (3.57)$$

где $\alpha^*(\Psi, v) = \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\right)$ -й квантиль распределения $G(x | \Psi, v)$ [156].

Для $(s-1)$ -го периода оптимальный уровень запаса в начале $(s-1)$ -го периода при условии, что параметры распределения $G(x | \Psi, v)$ равны Ψ_{s-1} и v_{s-1} , определяется из условия минимума выражения

$$M_{X_{s-1} | \Psi_{s-1}, v_{s-1}} \{V(X_{s-1}; \alpha) + V_0(\Psi_s, v_{s-1} + X_{s-1})\}, \quad (3.58)$$

где $M \{ \}$ означает усреднение по отрицательному биномиальному распределению с параметрами Ψ и v .

Далее можно определить $V_1^*(\Psi_{s-1}, \nu_{s-1})$ как минимум по α выражения (3.58). Так как распределение $G(x | \Psi_{s-1}, \nu_{s-1})$ не зависит от уровня запаса α_{s-1} , то из (3.57) следует, что

$$V_1^*(\Psi_{s-1}, \nu_{s-1}) = \min_{0 \leq \alpha < \infty} M_{X_{s-1} | \Psi_{s-1}, \nu_{s-1}} \{V(X_{s-1}, \alpha)\} + \\ + M_{X_{s-1} | \Psi_{s-1}, \nu_{s-1}} \{V_0^*(\Psi_s, \nu_{s-1} + X_{s-1})\}. \quad (3.59)$$

Поэтому из (3.59) имеем

$$\alpha_{s-1}^*(\Psi_{s-1}, \nu_{s-1}) \cong G_{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}(\Psi_{s-1}, \nu_{s-1}). \quad (3.60)$$

Кроме того, можно записать, что

$$V_1^*(\Psi_{s-1}, \nu_{s-1}) = V_0^*(\Psi_{s-1}, \nu_{s-1}) + \\ + \sum_{x=0}^{\infty} V_0^*(\Psi_s, \nu_{s-1} + x) G(x | \Psi_{s-1}, \nu_{s-1}). \quad (3.61)$$

В общем случае для $j = 1, \dots, s$ имеем

$$M_{X_{s-j} | \Psi_{s-j}, \nu_{s-j}} \{V(X_{s-j}; \alpha) + V_{j-1}^*(\Psi_{s-j+1}, \nu_{s-j} + X_{s-j})\} = \\ = R_j(\alpha, \Psi_{s-j}, \nu_{s-j}) \quad (3.62)$$

$$V_j^* = \min_{0 \leq \alpha < \infty} R_j(\alpha, \Psi_{s-j}, \nu_{s-j}). \quad (3.63)$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\alpha_{s-j}^*(\Psi_{s-j}, \nu_{s-j}) \cong G_{\frac{c_1}{c_1 + c_2}}(\Psi_{s-j}, \nu_{s-j}) \text{ для всех } j = 0, \dots, s-1,$$

а $V_{s-1}(\Psi_1, \nu_1)$ представляют минимальные ожидаемые издержки для априорного гамма-распределения параметра спроса и оптимального байесова правила пополнения запасов, установленного в виде отыскания целого числа

$\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\right)$ -го квантиля отрицательного биномиального распределения, параметры которого каждый раз пересчитываются, причем $\nu_n = \nu + S_{n-1}$, где $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$.

ПЛАНЫ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕЗЕРВНОГО И ЗАПАСНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Схемы многоуровневого или многоступенчатого резервирования и, в частности, двухступенчатого резервирования, изученные в разделе 1.5, порождают ряд важных в практическом отношении задач и прежде всего задач оптимального планирования маневров по переводу резервного оборудования из одной ступени в другую. Если системы с резервом на нескольких ступенях подвергаются периодическим проверкам или если указанные маневры возможны также в дискретные моменты времени, то задачи оптимального планирования представляются в виде последовательных процессов решения. Обычно ступени резервирования или ступени готовности оборудования различаются показателями надежности, трудоемкостью и

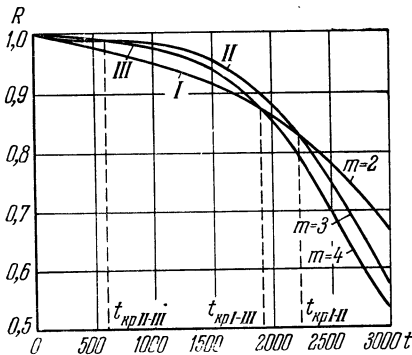


Рис. 4.1.

стоимостью контроля, профилактик и т. п. [100], [133]. Ограничимся рассмотрением различий лишь в показателях надежности, что особенно важно в тех случаях, когда основным предъявляемым требованием является непрерывность или надежность работы в течение заданного периода времени, или «горизонт планирования». Анализ схем многоступенчатого резервирования, а также схем многоступенчатых замен с учетом экономических факторов при наличии ряда допущений проведен в [99], [100]; однако в этих исследованиях «горизонт планирования» не является определяющим, а источник пополнений выходящего из строя

многоступенчатого резервирования, а также схем многоступенчатых замен с учетом экономических факторов при наличии ряда допущений проведен в [99], [100]; однако в этих исследованиях «горизонт планирования» не является определяющим, а источник пополнений выходящего из строя

оборудования считается неограниченным по емкости [133]. Исследования надежности схемы двухступенчатого резерва, описанной в разделе 1.5, проведенные при различных, но фиксированных значениях m , n , τ и времени kt , показали (рис. 4.1, 4.2), что по ходу эксплуатации не будет оптимальным придерживаться правила замен для поддержания на первой ступени *ровно* t исправных образцов

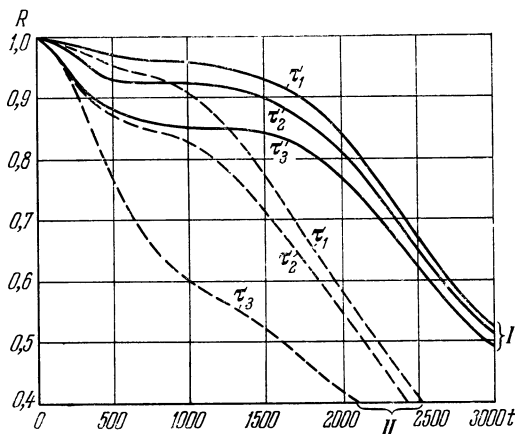


Рис. 4.2.

оборудования, резервирующих друг друга, пока это возможно (т. е. не исчерпаны все n образцов второй ступени) [63]. В связи с этим возникла задача *оперативного маневрирования* запасным оборудованием в двухступенчатой схеме в зависимости от числа элементов, вышедших к текущему моменту из строя, от времени, оставшегося до конца периода планирования и от тех различий в показателях надежности, которые возникают из-за различий в режимах готовности на каждой из ступеней.

4.1. Отсутствие восстановления отказавших элементов

Предположим, что резервная группа с двухступенчатой схемой резервирования должна проработать конечное время T , составляющее период планирования, и кратное интервалу между проверками и возможными маневрами

τ , $T = s\tau$ ($s > 1$). Вначале имеется r одинаковых элементов или образцов оборудования, которые могут находиться как на первой, так и на второй ступени. Если элементы выходят из строя, то они не ремонтируются в течение планируемого времени эксплуатации T . Ступени резервирования отличаются вероятностями отказа элемента за время τ . Естественно считать, что при более легком режиме второй ступени, по существу, режиме хранения или неполной нагрузки, и вероятность отказа будет меньше:

$$q_{1\tau} > q_{2\tau} \geq 0.$$

Если в течение одного из интервалов длительности τ выйдут из строя больше, чем $m - z - 1$ элементов первой ступени, где z — число, определяющее своеобразный «порог» надежной работы, а m — общее число элементов на первой ступени резервирования к началу указанного интервала, то *непрерывность* или *надежность* работы резервной группы будет *нарушена*. «Порог» определяется той конкретной схемой резервирования, которая используется на первой ступени.

Так, при использовании нагруженного резерва $z = 1$. При использовании схемы голосования « v из m » $z = v$. Порогом мажоритарной схемы также можно *управлять*, если, конечно, аппаратурные усложнения, связанные с конструированием перестраиваемого порога органа голосования, не сведут на нет тот выигрыш в надежности, который достигается от такой перестройки.

Будем планировать маневры так, чтобы обеспечивалась максимальная непрерывность или надежность работы резервной группы за время оставшееся, до окончания периода планирования.

Пусть $X_1(n)$ — число элементов на первой ступени в течение интервала времени, оставшегося до конца периода планирования, а $X_2(t_n)$ — число элементов, отказавших к моменту t_n , т. е. за n шагов до конца периода планирования. Ясно, что $X_2(t_n)$ является случайной величиной, которая меняется скачками во времени. На эволюции резервной группы, использующей двухступенчатую схему резервирования, т. е. на изменение $X_1(n)$, будут влиять отказы элементов первой и второй ступеней и *последовательность решений* о маневрах, которая

состоит из решения в момент t_n и всех последующих за ним решений в моменты $n - 1, n - 2, \dots, 1$. Обозначим эту последовательность решений через $M^{(n)}$. Решение в момент t_n указывает число элементов на первой ступени в зависимости от n и состояния системы, характеризуемого числом i ($n = 1, \dots, s; i = 0, 1, \dots, r - z$). Введем вероятность

$$P_i(M_{in}, n) = P\{X_1(n) \geq z \mid X_2(t_n) = i; M_{in}\}, \quad (4.1)$$

которая зависит от последовательности решений M_{in} как от переменной. Множество всех возможных последовательностей \mathfrak{M}_{in} задается естественными неравенствами

$$z \leq m_{jk} \leq r - j, \quad 1 \leq k < n; \quad i \leq j \leq r - z, \quad (4.2)$$

т. е. $M_{in} \in \mathfrak{M}_{in}$.

Будем обеспечивать максимум вероятности (4.1) на каждом шаге для каждого возможного исхода:

$$\max_{M_{in} \in \mathfrak{M}_{in}} P_i(M_{in}, n) \quad (i = 0, \dots, r - z; n = 1, \dots, s). \quad (4.3)$$

Поскольку вероятность (4.1) зависит лишь от того, какое текущее значение принимает X_2 в момент t_n и не зависят от траекторий попадания резервной группы в это состояние, максимизация (4.1) может быть осуществлена методами динамического программирования [6]. На этом же основании выражение (4.1) можно представить в рекуррентной форме:

$$P_i(n) = \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{in}, n) P_j(n-1) \quad (i = 0, \dots, r - z; n = 1, \dots, s), \quad (4.4)$$

где a_{ij} — условная вероятность того, что резервная группа, находявшаяся в момент t_n в состоянии $X_2(t_n) = i$, окажется в следующий момент t_{n-1} в состоянии $X_2(t_{n-2}) = j$.

Вычисление a_{ij} проводится, как было показано в разделе 1.5, с тем лишь отличием, что теперь m не фиксируется жестко, а меняется в зависимости от i и n . В результате

имеем

$$a_{ij}(m_{in}, n) = \sum_{l=l_1}^{l=l_2} \binom{m_{in}}{l} q_{1\tau}^l (1 - q_{1\tau})^{m_{in}-l} \binom{r-m_{in}-i}{j-i-l} q_{2\tau}^{j-i-l} \times \\ \times (1 - q_{2\tau})^{r-m_{in}-j+l}, \quad (4.5)$$

где

$$l_1 = \max \{0, j + m_{in} - r\}, \quad (4.6)$$

$$l_2 = \min \{m_{in} - z, j - i\}.$$

Формула (4.5) представляет свертку двух биномиальных распределений с параметрами $q_{1\tau}$ и $q_{2\tau}$, а l — число отказов, наблюдаемых на первой ступени на интервале (t_n, t_{n-1}) . Соотношения (4.6) получены из тех же соображений, которые были указаны в разделе 1.5. Определим $P_i^*(n)$ как

$$\max_{M_{in} \in \mathbb{R}_{in}} P_i(M_{in}, n). \quad (4.7)$$

Используя принцип оптимальности Беллмана, задачу оптимального планирования маневров можно сформулировать в виде следующих уравнений:

$$P_i^*(n) = \max_{z \leq m_{in} \leq r-i} \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{in}, n) P_j^*(n-1) \quad (4.8) \\ \text{для } i = 0, 1, \dots, r-z; n = 1, \dots, s, \\ P^*(0) = 1 \text{ для } i = 0, 1, \dots, r-z,$$

причем

$$P_j(n) \equiv 0 \text{ для всех } n \text{ при } r-z < j \leq r,$$

так как в этом случае нарушается условие надежной работы, определяемое порогом z .

Для решения уравнений (4.8) применим рекуррентный метод «движения» с конца планируемого периода, но на первом шаге необходимо знать граничные условия. Ясно, что $P_j(0) = 1$ ($i \leq j \leq r-z$), так как при $j > r-z$ резервная группа уже не может нормально функционировать.

На первом шаге в качестве m_{i1}^* следует всегда выбирать наибольшее из возможных значений m_{i1} , т. е. не оставлять

на второй ступени ни одного элемента. Действительно,

$$P_i^*(1) = \max_{m_{i1}} \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{i1}, 1) = \max_{m_{i1}} \left\{ 1 - \left(1 - \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{i1}, 1) \right) \right\}, \quad (4.9)$$

$$1 - \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{i1}, 1) = P_z(m_{i1}).$$

Поэтому достаточно показать, что $P_z(m_{i1})$ убывает с ростом m_{i1} , и тогда минимум достигается при $m_{i1} = r - i$.

Нетрудно видеть, что

$$P_z(m_{i1}) = \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m_{i1}}{l} (1 - q_{1\tau})^l q_{1\tau}^{m_{i1}-l},$$

или, другими словами,

$$P_z(m_{i1}) = P\{X_1(1) < z \mid X_2(t_1) = i; m_{i1}\}. \quad (4.10)$$

Покажем, что разность $\Delta = P_z(m) - P_z(m+1)$ больше нуля для всех $m \geq z - 1$. На основании (4.10) имеем

$$\Delta = \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m}{l} (1 - q)^l q^{m-l} - \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m+1}{l} (1 - q)^l q^{m+1-l}. \quad (4.11)$$

Учитывая, что

$$\binom{m+1}{l} = \binom{m}{l} + \binom{m}{l-1},$$

представим (4.11) как

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m}{l} (1 - q)^l q^{m-l} - \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m}{l} (1 - q)^l q^{m+1-l} - \\ &\quad - \sum_{l=1}^{z-1} \binom{m}{l-1} (1 - q)^l q^{m+1-l} = \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m}{l} (1 - q)^l q^{m-l} - \\ &\quad - q \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m}{l} (1 - q)^l q^{m-l} - (1 - q) \sum_{l=1}^{z-2} \binom{m}{l} (1 - q)^l q^{m-l} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{z-1} \binom{m}{l} (1-q)^l q^{m-l} - \sum_{l=0}^{z-2} \binom{m}{l} (1-q)^l q^{m-l} - \binom{m}{z-1} \times \\ \times (1-q)^{z-1} q^{m-z+2} = \binom{m}{z-1} (1-q)^{z-1} (q^{m-z+1} - q^{m-z+2}),$$

но $0 < q < 1$, и поэтому $\Delta > 0$, что и требовалось доказать.

При $z = 1$ это свойство следует непосредственно:

$$P_1(m_{i1}) = q_{1\tau}^{m_{i1}}, \Delta_i = q_{1\tau}^{m_{i1}} (1 - q_{1\tau}),$$

т. е. Δ монотонно убывает с ростом m_{i1} , и поэтому минимум достигается при максимально возможном m_{i1} , т. е. при $r - i$.

Получив решения на первом шаге, переходим ко второму и т. д. В результате получим последовательность оптимальных векторов-решений: $\|m_{0s}^*, \dots, m_{r-z,s}^*\|, \dots, \|m_{01}^*, \dots, m_{r-z,1}^*\|$, компоненты которых соответствуют определенным исходам эксплуатации двухступенчатой резервной группы.

Ч и с л о в о й п р и м е р. Пусть $r = 4$, $z = 1$, т. е. применяется метод нагруженного резервирования на первой ступени, причем $q_{1\tau} = 1 - e^{-\lambda_1\tau}$. Период планирования $T = 4\tau$; $(\lambda_1\tau)$ таково, что $q_{1\tau} = 0,3$, а элементы второй ступени тоже могут выйти из строя ($q_{2\tau} = 0,1$). Результаты вычислений сведены в табл. 4.1.

Перейдем к доказательству одного неравенства, которое используется для оценки вероятности $P_i^*(n)$. Выше было показано, что максимум вероятности $P_i^*(1)$ достигается при $m_{i1} = r - i$, т. е.

$$P_i^*(1) = 1 - P_z(r - i), \quad (4.12)$$

а так как вероятность $P_z(r - i)$ убывает при уменьшении i , то $P_i^*(1)$ *возрастает при уменьшении i , т. е.*

$$P_{i+1}^*(1) < P_i^*(1) \quad (i = 0, 1, \dots, r - z - 1).$$

Пусть неравенство $P_{i+1}^*(k) < P_i^*(k)$ выполняется для всех k ($k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$). Докажем это неравенство

Таблица 4.1

i	n	1				2			
	m_{in}	1	2	3	4	1	2	3	4
0	a_{00}	0,700	0,490	0,343	0,240	0,510	0,397	0,309	0,240
	a_{01}	—	0,240	0,441	0,412	0,170	0,428	0,431	0,412
	a_{02}	—	—	0,189	0,265	0,019	0,080	0,214	0,265
	a_{03}	—	—	—	0,076	0,001	0,004	0,019	0,076
	$P_0(n)$	0,700	0,910	0,973	0,992	0,689	0,886	0,934	0,933
1	a_{11}	—	—	0,343	—	0,567	0,441	0,343	—
	a_{12}	—	—	0,441	—	0,126	0,427	0,441	—
	a_{13}	—	—	0,189	—	0,007	0,042	0,189	—
	$P_1(n)$	0,700	0,910	0,973	—	0,670	0,845	0,855	—
	2	a_{22}	—	0,490	—	—	0,630	0,490	—
a_{23}		—	0,420	—	—	0,070	0,420	—	—
$P_2(n)$		0,700	0,910	—	—	0,601	0,739	—	—
3		a_{33}	0,700	—	—	—	0,700	—	—
	$P_3(n)$	0,700	—	—	—	0,490	—	—	—
i	n	3				4			
	m_{in}	1	2	3	4	1	2	3	4
0	a_{00}	0,510	0,397	0,309	0,240	0,510	0,397	0,309	0,240
	a_{01}	0,170	0,428	0,431	0,412	0,170	0,428	0,431	0,412
	a_{02}	0,019	0,080	0,214	0,265	0,019	0,080	0,214	0,265
	a_{03}	0,001	0,004	0,019	0,076	0,001	0,004	0,019	0,076
	$P_0(n)$	0,637	0,804	0,830	0,812	0,556	0,683	0,693	0,670
1	a_{11}	0,567	0,441	0,343	—	0,567	0,441	0,343	—
	a_{12}	0,126	0,427	0,441	—	0,126	0,427	0,441	—
	a_{13}	0,007	0,042	0,189	—	0,007	0,042	0,189	—
	$P_1(n)$	0,584	0,718	0,714	—	0,480	0,572	0,561	—
	2	a_{22}	0,630	0,490	—	—	0,630	0,490	—
a_{23}		0,070	0,420	—	—	0,070	0,420	—	—
$P_2(n)$		0,498	0,567	—	—	0,381	0,422	—	—
3		a_{33}	0,700	—	—	—	0,700	—	—
	$P_3(n)$	0,343	—	—	—	0,240	—	—	—

при $k = n$. По определению,

$$P_i^*(n) = \max_{z \leq m_{in} \leq r-i} P_i(m_{in}, n),$$

где

$$\max_{z \leq m_{in} \leq r-i} P_i(m_{in}, n) = \max \{P_i(r-i, n); \max_{z \leq m_{in} \leq r-i-1} P_i(m_{in}, n)\},$$

или

$$P_i^*(n) = \max \{P_i(r-i, n); \bar{P}_i(n)\} \geq \bar{P}_i(n),$$

где

$$\bar{P}_i(n) = \max_{z \leq m_{in} \leq r-i-1} P_i(m_{in}, n) \quad (i = 0, 1, \dots, r-z-1).$$

Для того, чтобы выразить вероятность $\bar{P}_i(n)$ через соответствующие вероятности на предыдущем шаге, используем такие рассуждения: будем считать, что первая ступень резервирования, характеризуемая вероятностью $q_{2\tau}$, состоит из двух подгрупп. В первой подгруппе имеется всего один элемент, а во второй $(r - m_{in} - i - 1)$ элементов.

На интервале $(t_n, t_{n-1}]$ возможные эволюции могут слагаться из таких исходов, не нарушающих надежной работы системы:

на первой ступени произойдет l_1 отказов ($0 \leq l_1 \leq m_{in} - z$) с вероятностью

$$a_{l_1}(m_{in}, q_1) = \binom{m_{in}}{l_1} q_1^{l_1} (1 - q_1)^{m_{in} - l_1}. \quad (4.13)$$

Во второй подгруппе второй ступени выйдут из строя l_2 элементов ($0 \leq l_2 \leq r - m_{in} - i - 1$) с вероятностью

$$\begin{aligned} a_{l_2}(r - m_{in} - i - 1, q_2) &= \\ &= \binom{r - m_{in} - i - 1}{l_2} q_2^{l_2} (1 - q_2)^{r - m_{in} - i - 1 - l_2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

а один элемент первой подгруппы второй ступени либо откажет с вероятностью q_2 , и общее число отказавших элементов станет равным $i + l_1 + l_2 + 1$, либо останется исправным с вероятностью $1 - q_2$, и общее число отказав-

ших элементов составит $i + l_1 + l_2$. На этом основании можно записать:

$$\bar{P}_i(n) = \max_{z \leq m_{in} \leq r-i-1} \sum_{l_1=0}^{m_{in}-z} a_{l_1}(m_{in}, q_1) \sum_{l_2=0}^{r-m_{in}-i-1} a_{l_2}(r-m_{in}-i-1-l_2) \{q_2 P_{i+l_1+l_2+1}^*(n-1) + (1-q_2) P_{i+l_1+l_2}^*(n-1)\}. \quad (4.15)$$

Но так как для $k = n - 1$

$$P_{i+l_1+l_2}^*(n-1) > P_{i+l_1+l_2+1}^*(n-1),$$

то, заменив в (4.15) вероятность $P_{i+l_1+l_2}^*(n-1)$ на меньшую вероятность $P_{i+l_1+l_2+1}^*(n-1)$, получим

$$\bar{P}_i(n) > \max_{z \leq m_{in} \leq r-i-1} \sum_{l_1=0}^{m_{in}-z} a_{l_1}(m_{in}, q_1) \sum_{l_2=0}^{r-m_{in}-i-1} a_{l_2}(r-m_{in}-i-1-l_2) P_{i+l_1+l_2+1}^*(n-1), \quad (4.16)$$

или, другими словами,

$$\bar{P}_i(n) > P_{i+1}^*(n). \quad (4.17)$$

Из неравенства (4.17) и из определения вероятности $P_i^*(n)$ ($P_i^*(n) \geq \bar{P}_i(n)$) следует, что

$$P_i^*(n) > P_{i+1}^*(n) \quad (k = n). \quad (4.18)$$

Воспользуемся неравенством (4.18), чтобы дать верхнюю и нижнюю оценки вероятности $P_i^*(n)$. Напомним, что

$$\sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{in}) = \{1 - P_z(m_{in})\},$$

где $P_z(m_{in})$ строго убывает с ростом m_{in} . Таким образом, для $P_i^*(n)$ имеем

$$P_i^*(n) = \max_{z \leq m_{in} \leq r-i} \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{in}) P_j^*(n-1).$$

Но так как $P_j^*(n-1) > P_{j+1}^*(n-1)$, то, заменяя все $P_j^*(n-1)$ на заведомо большее значение $P_i^*(n-1)$ и вынося его за знак суммы, получим

$$P_i^*(n) < P_i^*(n-1) \max_{z \leq m_{in} \leq r-i} \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{in}), \quad [(4.19)]$$

или

$$\begin{aligned} P_i^*(n) < P_i^*(n-1) \max_{z \leq m_{in} \leq r-i} \{1 - P_z(m_{in})\} = \\ = P_i^*(n-1) \{1 - P_z(r-i)\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Аналогично, оценивая сверху вероятности $P_i^*(n-1)$, $P_i^*(n-2), \dots$, получим

$$P_i^*(n) < \{1 - P_z(r-i)\}^n. \quad (4.21)$$

Для нижней оценки осуществляются аналогичные операции, но за знак суммы выносится самое меньшее значение из всех $P_j^*(n-1)$, а именно, $P_{r-z}^*(n-1)$

$$P_i^*(n) > P_{r-z}^*(n-1) \max_{z \leq m_{in} \leq r-i} \sum_{j=i}^{r-z} a_{ij}(m_{in}). \quad (4.22)$$

Но вероятность $P_{r-z}^*(n-1)$ легко вычислить, так как для поддержания надежности резервной группы в оставшееся время не должен отказать ни один элемент из z оставшихся. Поэтому

$$P_{r-z}^*(n-1) = (1 - q_1)^{(n-1)z}. \quad (4.23)$$

Учитывая (4.22) и (4.23), получим

$$P_i^*(n) > (1 - q_1)^{(n-1)z} \{1 - P_z(r-i)\}. \quad (4.24)$$

Из таблицы 4.1 следует, что оптимальные решения, соответствующие фиксированным исходам процесса, не возрастают с ростом n , т. е. при удалении от конца периода планирования:

$$m_{in}^* \leq m_{i, n-1}^*. \quad (4.25)$$

С другой стороны, можно подметить и другую закономерность, а именно: отношение $P_j^*(n-2)/P_j^*(n-1)$ монотонно возрастает с ростом j .

В работе [40] показано, что для того, чтобы оптимальное решение m_{in}^* было меньше $m_{i,n-1}^*$, достаточно, чтобы отношение вида

$$P_j^*(n-2)/P_j^*(n-1)$$

монотонно возрастало с ростом j для всех $i \leq j \leq r-z$. Доказательство этого утверждения основывается на свойстве сумм с монотонно возрастающими слагаемыми, а также на свойстве биномиальных коэффициентов. Если это условие выполняется при всех n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{in}^* = m_{i,z}^* \quad (4.26)$$

так как числа m_{in}^* , представляющие решения на каждом шаге, образуют монотонно убывающую и ограниченную снизу последовательность ($m_{in}^* \geq z$). В ряде примеров, которые просчитывались для различных значений q_1 , q_2 и r , условие, являющееся достаточным для выполнения неравенства

$$m_{in}^* \leq m_{i,n-1}^*,$$

удовлетворялось для всех n .

В связи с этим обычный перебор решений в области

$$z \leq m_{in} \leq r-i \quad (4.27)$$

сужался до перебора в области, определяемой неравенством

$$z \leq m_{in} \leq m_{i,n-1}^*. \quad (4.28)$$

Аналогично можно показать что для того, чтобы m_{in}^* было больше $m_{i+1,n}^*$, достаточно монотонного возрастания отношения вида

$$P_j^*(n-1)/P_{j+1}^*(n-1)$$

с ростом j для всех j таких, что $i \leq j \leq r-z-1$.

Когда для фиксированного i выполняются оба достаточных условия, оптимальное решение на каждом шаге ищется в области, удовлетворяющей неравенству

$$m_{i+1, n}^* \leq m_{in} \leq m_{i, n-1}^* \quad (4.29)$$

4.2. Восстановление отказавших элементов

Если отказавшие элементы ремонтируются, то, маневрируя запасными элементами, следует учитывать этот восстановительный процесс. Пусть ремонт отказавшего элемента имеет фиксированную продолжительность (т. е. время ремонта не случайно); тогда, учитывая периодическую структуру проверок и возможных маневров, естественно принять это время кратным τ . Предположим, что ремонт длится $k\tau$ часов независимо от числа одновременно неисправных элементов. Если $k \geq s$, то этот случай планирования соответствует маневрированию запасными элементами в невозстанавливаемой двухступенчатой резервной группе. Введем обозначения. Пусть α_1 представляет число элементов, отказавших на интервале $(t_{n+1}, t_n]$, α_2 — число элементов, отказавших на интервале $(t_{n+2}, t_{n+1}]$, ..., α_k — число элементов отказавших на интервале $(t_{n+k}, t_{n+k-1}]$. Аналогично, пусть β_1 означает число элементов, вышедших из строя на интервале $(t_n, t_{n-1}]$, ..., β_k — число элементов, отказавших в течение $(t_{n+k-1}, t_{n+k-2}]$. В связи с окончанием ремонтов через $k\tau$ часов, имеют место следующие соотношения:

$$i = \sum_{l=1}^k \alpha_l, \quad j = \sum_{l=1}^k \beta_l, \quad (4.30)$$

где i и j сохраняют свой прежний смысл.

Обозначим через $E_\alpha(t_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ состояние двухступенчатой резервной группы такое, что в момент t_n имеется точно $\sum_{l=1}^k \alpha_l$ неисправных элементов, причем эти неисправности возникали так, что на каждом из предыдущих интервалов наблюдалось соответственно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ отказов. Учитывая соотношение (4.30), можно

заметить что

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2, \alpha_2 = \beta_3, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_k, \\ j - i + \alpha_k &= \sum_{l=1}^k \beta_l - \sum_{l=1}^k \alpha_l + \alpha_k = \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l + \beta_1 - \sum_{l=1}^k \alpha_l + \alpha_k = \beta_1. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Используя тот же критерий планирования маневров, введем вероятность $P_\alpha(n)$ того, что если в момент t_n резервная группа находится в состоянии E_α , то в течение оставшегося времени $n\tau$ на первой ступени будет оставаться исправным по крайней мере z элементов, причем при маневровании элементами используется политика M_{α_n} :

$$P_\alpha(n, M_{\alpha_n}) = \mathbf{P}\{X_1(n) \geq z \mid E_\alpha(t_n), M_{\alpha_n}\}. \quad (4.32)$$

На m_{α_n} накладывается ограничение

$$z \leq m_{\alpha_n} \leq r - i. \quad (4.33)$$

Вероятности переходов из состояния $E_\alpha(t_n)$ в состояние $E_\beta(t_{n-1})$ отличны от нуля только для тех индексов, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=1}^k \alpha_l \leq r - z, \quad \sum_{l=1}^k \beta_l \leq r - z, \quad (4.34)$$

так как условие

$$\sum_{l=1}^k \alpha_l = r$$

означает, что к моменту t_n все элементы неисправны и ни один из них к моменту t_{n-0} не восстановлен (т. е. нарушается условие непрерывной исправной работы резервной группы).

Можно заметить также, что вероятности переходов $a_{\alpha\beta}$ выражаются через вероятности переходов для неремонтируемой резервной группы. Действительно, так как отказавшие на данном интервале элементы вступят в строй

лишь через k интервалов, то

$$a_{\alpha\beta} = a_{i, j+\alpha_k}. \quad (4.35)$$

По принципу оптимальности Беллмана имеем следующие уравнения:

$$P_{\alpha}^*(n) = \max_{z \leq m_{\alpha_n} \leq r-i} \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}(m_{\alpha_n}) P_{\beta}^*(n-1) \quad (4.36)$$

или, учитывая (4.35), имеем

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^*(n) = \max_{m_{\alpha_n}} \sum_{j=i-\alpha_k}^{r-z-\alpha_k} a_{i, j+\alpha_k}(m_{\alpha_n}) P_{j-i+\alpha_k, \dots, \alpha_{k-1}}^*(n-1) \quad (4.37)$$

для всех $i = 0, 1, \dots, r-z$ ($i = \sum_{l=1}^k \alpha_l, \alpha_l \geq 0$) и

$P_{\alpha}^*(0) = 1$ для всех α .

Заменяя индексы $j + \alpha_k$ на j' , получим

$$P_{\alpha}^*(n) = \max_{z \leq m_{\alpha_n} \leq r-i} \sum_{j'=i}^{r-z} a_{i, j'}(m_{\alpha_n}) P_{j'-i, \dots, \alpha_{k-1}}^*(n-1), \quad (4.38)$$

$$i = 0, \dots, r-z \quad \left(i = \sum_{l=1}^k \alpha_l, \alpha_l \geq 0 \right)$$

с начальными условиями $P_{\alpha}^*(0) = 1$ для всех α .

При $i > r-z$, $P_{\alpha}^*(n) = 0$ для $n = 1, \dots, s$, так как тогда нарушается условие надежности.

Начиная с $n = 1$, т. е. с последнего периода длительности τ , исходя из (4.38), найдем $m_{\alpha_1}^*$ для каждого E_{α} в момент t_1 . Далее, последовательно переходя на второй интервал длительности τ , найдем $m_{\alpha_2}^*$ для каждого E_{α} в момент t_2 и т. д. В результате отыскивается последовательность оптимальных решений $m_{\alpha_1}^*, m_{\alpha_2}^*, \dots, m_{\alpha_n}^*$. В [14] считается, что время ремонта имеет геометрическое распределение.

4.3. Случай адаптивного планирования включений

Рассмотрим построение плана оптимального использования запасных элементов в двухступенчатой резервной группе на конечном отрезке времени при условии, что вероятности отказов $q_{1\tau}$ и $q_{2\tau}$ известны не полностью. Одна из возможных идей планирования состоит в том, чтобы по мере работы резервной группы собирать данные об отказах отдельных элементов и на основе этих данных уточнять каждый раз значения $q_{1\tau}$ и $q_{2\tau}$, используемые в качестве параметров плана [63]. В основу такого плана кладутся идеи адаптивного программирования, состоящего в отыскании наилучшей последовательности решений, когда на свойства распределений вероятностей, используемых при выборе этих решений, влияют предыдущие решения и связанные с ними состояния. Адаптивному программированию посвящены основополагающие работы [134], [139]. Показано, в частности, что если этап получения апостериорного распределения вероятностей, влияющих на принимаемые решения на каждом шаге, сводится к оцениванию параметров этого распределения, то не всегда оптимально оптимальную статистическую оценку параметра использовать в процедуре последовательной оптимизации. Это можно делать лишь при очень частных формах эволюций, осуществляемых объектом на каждом шаге [134].

Предположим, что *неизвестны* истинные значения вероятностей $q_{1\tau}$ и $q_{2\tau}$ для двухступенчатой резервной группы на каждом шаге, т. е. за интервал между проверками исправности τ , а известны априорные распределения оценок этих вероятностей $dG_{\text{апр}}(q_1)$ и $dF_{\text{апр}}(q_2)$. Сохраняя в качестве критерия планирования максимум вероятности надежной работы двухступенчатой резервной группы за оставшееся время, заметим, что теперь этот критерий зависит от текущего состояния резервной группы и от апостериорных плотностей распределений $dG_{\text{апс}}(q_1)$ и $dF_{\text{апс}}(q_2)$. Последние будут изменяться от шага к шагу по мере поступления информации, выражаемой в виде чисел i_3, \dots, i_1 , т. е. чисел отказавших элементов.

Если с начала рассматриваемого периода прошло l интервалов времени длительности τ , а осталось еще n

интервалов ($n + l = s$), то для вычисления апостериорных распределений можно использовать формулу Байеса:

$$dG_{\text{анп}}(q_1) = \frac{P_{I_{l_1}}(m, q_1) dG_{\text{анп}}(q_1)}{\int_0^1 P_{I_{l_1}}(m, q_1) dG_{\text{анп}}(q_1)}, \quad (4.39)$$

$$dF_{\text{анп}}(q_2) = \frac{P_{II_{l_2}}(r - m - i, q_2) dF_{\text{анп}}(q_2)}{\int_0^1 P_{II_{l_2}}(r - m - i, q_2) dF_{\text{анп}}(q_2)}, \quad (4.40)$$

где

$$P_{I_{l_1}}(m, q_1) = q_1^{l_1} (1 - q_1)^{m-l_1} \quad (0 \leq l_1 \leq m - z) \quad (4.41)$$

и

$$P_{II_{l_2}}(r - m - i, q_2) = q_2^{l_2} (1 - q_2)^{r-m-i-l_2} \quad (0 \leq l_2 \leq r - m - i). \quad (4.42)$$

Рассмотрим момент времени $t^{(l)}$ или t_n , если отсчет вести с конца. Предположим, что согласно принимаемым решениям о маневрах в моменты $t^{(0)}, \dots, t^{(l-1)}$ на первой ступени имелось $m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)}$ элементов, а на каждом из l предыдущих интервалов произошло a_0, \dots, a_{l-1} отказов элементов на первой ступени и b_0, \dots, b_{l-1} отказов на второй. Ясно, что по условию надежной работы $z \leq m^{(k)} \leq r - i_k$, где

$$i_k = \sum_{v=0}^{k-1} (a_v + b_v).$$

Тогда, если при $t = 0$ априорные распределения вероятностей были равны $dG_0(q_1)$ и $dF_0(q_2)$, то на l -м шаге

$$dG_l(q_1) = \frac{P_{I_{a_0}}(m^{(0)}, q_1) \dots P_{I_{a_{l-1}}}(m^{(l-1)}, q_1) dG_0(q_1)}{\int_0^1 P_{I_{a_0}}(m^{(0)}, q_1) \dots P_{I_{a_{l-1}}}(m^{(l-1)}, q_1) dG_0(q_1)}, \quad (4.43)$$

$$dF_l(q_2) = \frac{P_{II_{b_0}}(r - m^{(0)} - 0, q_2) \dots P_{II_{b_{l-1}}}(r - m^{(l-1)} - i_{l-1}, q_2) dF_0(q_2)}{\int_0^1 P_{II_{b_0}}(r - m^{(0)} - 0, q_2) \dots P_{II_{b_{l-1}}}(r - m^{(l-1)} - i_{l-1}, q_2) dF_0(q_2)}. \quad (4.40)$$

Подставив вместо p_{Ia_k} и p_{Ib_k} их выражения, получим

$$dG_l(q_1) = \frac{\sum_{v=0}^{l-1} a_v \sum_{v=0}^{l-1} (m^{(v)} - a_v)}{q_1 (1-q_1) \sum_{v=0}^{l-1} a_v \sum_{v=0}^{l-1} (m^{(v)} - a_v)} \frac{dG_0(q_1)}{dG_0(q_1)}, \quad (4.45)$$

$$dF_l(q_2) = \frac{\sum_{v=0}^{l-1} b_v \sum_{v=0}^{l-1} (r - m^{(v)} - i_v - b_v)}{q_2 (1-q_2) \sum_{v=0}^{l-1} b_v \sum_{v=0}^{l-1} (r - m^{(v)} - i_v - b_v)} \frac{dF_0(q_2)}{dF_0(q_2)}, \quad (4.46)$$

где

$$i_v = \sum_{k=0}^{v-1} (a_k + b_k), \quad l = 1, 2, \dots, s,$$

или

$$dG_l(q_1) = dG_l(L, K) = C_1(L, K) q_1^L (1 - q_1)^K dG_0(q_1), \quad (4.47)$$

$$C_1(L, K) = \left(\int_0^1 q_1^L (1 - q_1)^K dG_0(q_1) \right)^{-1}. \quad (4.48)$$

$$dF_l(q_2) = dF_l(M, N) = C_2(M, N) q_2^M (1 - q_2)^N dF_0(q_2), \quad (4.49)$$

$$C_2(M, N) = \left(\int_0^1 q_2^M (1 - q_2)^N dF_0(q_2) \right)^{-1}, \quad (4.50)$$

где L, K, M, N — целые числа, которые для неизвестных заранее параметров $m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)}, a_0, \dots, a_{l-1}$ и b_0, \dots, b_{l-1} , удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} L, K, M, N \geq 0, \quad 0 \leq L + M \leq r - z, \quad lz \leq L + K \leq lz, \\ 0 \leq M + N \leq (r - z)l, \quad lz \leq K + N \leq lz, \end{aligned}$$

где

$$L = \sum_{v=0}^{l-1} a_v, \quad K = \sum_{v=0}^{l-1} (m^{(v)} - a_v), \quad M = \sum_{v=0}^{l-1} b_v, \quad (4.51)$$

$$N = \sum_{v=0}^{l-1} (r - m^{(v)} - i_v - b_v), \quad i_v = \sum_{n=0}^{v-1} (b_n - a_n).$$

Неравенства (4.51) определяют область изменения L , K , M , N в момент времени $t^{(l)}$. Если обозначить эту область через D_l , то

$$(L, K, M, N) \in D_l \quad (l = 1, \dots, s).$$

Если в результате наблюдений в течение времени $[0, t^{(l)})$ получены апостериорные распределения $dG_l(L, K)$ и $dF_l(M, N)$, где $(L, K, M, N) \in D_l$, то нам следует вместо $P_i(n, M_{in})$ ввести в рассмотрение вероятность

$$P(n, dG_l(q_1), dF_l(q_2), M_{W_n}) = P(n, W, dG_0, dF_0, M_{W_n}), \quad (4.52)$$

где индекс i уже лишний, а (L, K, M, N) для краткости обозначено через W .

$P(n, W, dG_0, dF_0, M_{W_n})$ означает вероятность того, что резервная группа в течение оставшегося времени будет надежно работать, если при $t = t_n$ состояние системы характеризуется вектором W , а за оставшееся время nl маневры осуществляются согласно политике M_{W_n} . Пусть

$$P^*(n, W, dG_0, dF_0) = \max_{M_{W_n} \in \mathfrak{M}_{W_n}} P(n, W, dG_0, dF_0, M_{W_n}), \quad (4.53)$$

где $W \in D_l$, а \mathfrak{M}_{W_n} — множество возможных политик, аналогичное используемым ранее множествам \mathfrak{M}_{in} и \mathfrak{M}_{a_n} .

Если начать планирование с $t = 0$, то нам нужно найти политику M_{0s}^* , где $W = (0, 0, 0, 0)$, причем эта политика отыскивается в результате максимизации вероятности

такого вида:

$$P(s, 0, dG_0(q_1), dF_0(q_2), M_{0s}). \quad (4.54)$$

На текущем интервале могут произойти следующие события: на первой ступени произойдет l_1 ($0 \leq l_1 \leq m_{W_n} - z$) отказов элементов с вероятностью $a_{l_1}(m_{W_n}, q_1)$, определяемой выражением (4.13), а на второй будет наблюдаться l_2 отказов ($0 \leq l_2 \leq r - m_{W_n} - i$) с вероятностью $a_{l_2}(r - m_{W_n} - i, q_2)$. В результате этого резервная группа перейдет в состояние, характеризующееся вектором

$$W_1(L + l_1, K + m_{W_n} - l_1, M + l_2, N + r - m_{W_n} - i - l_2),$$

так что вместо распределений

$$dG_l(q_1) \text{ и } dF_l(q_2)$$

будут получены распределения

$$\begin{aligned} dG_{l+1}(q_1) &= dG(L + l_1, K + m_{W_n} - l_1) \text{ и } dF_{l+1}(q_2) = \\ &= dF(M + l_2, N + r - m_{W_n} - i - l_2). \end{aligned}$$

Учитывая последние соотношения, можно на основании принципа оптимальности Беллмана записать следующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned} P^*(n, W, dG_0, dF_0) &= \\ &= \max_{z \leq m_{W_n} \leq r - L - M} \left\{ \sum_{l_1=0}^{m_{W_n} - z} \int_0^1 a_{l_1}(m_{W_n}, q_1) dG_l(q_1) \times \right. \\ &\times \sum_{l_2=0}^{r - m_{W_n} - L - M} \int_0^1 a_{l_2}(r - m_{W_n} - L - M, q_2) dF_l(q_2) \times \\ &\times P^*(n - 1, L + l_1, K + m_{W_n} - l_1, M + l_2, \\ &\left. N + r - m_{W_n} - i - l_2) dG_0(q_1) dF_0(q_2) \right\}, \quad (4.55) \end{aligned}$$

где $W = (L, K, M, N) \in D_l$ ($l = 0, 1, \dots, s$), причем $P^*(0, W, dG_0, dF_0) = 1$ для всех $W \in D_s$.

Если, в частности, $q_{2r} = 0$, а для \hat{q}_{1r} априорное распределение будет

$$dG_0(q_1) = C(L_0, K_0) q_1^{L_0} (1 - q_1)^{K_0} dq_1,$$

где $C(L_0, K_0) = \left(\int_0^1 q_1^{L_0} (1 - q_1)^{K_0} dq_1 \right)^{-1}$, то уравнения (4.55)

принимают вид

$$P^*(n, L, K) = \max_{z \leq m_{W_n} \leq r-L} \sum_{l=0}^{m_{W_n}-z} \binom{m_{W_n}}{l} \int_0^1 q_1^l (1 - q_1)^{m_{W_n}-l} \times \\ \times dG(L, K) P^*(n-1, L+l, K+m_{W_n}-l),$$

где

$$dG(L, K) = \frac{q_1^L (1 - q_1)^K dq_1}{\int_0^1 q_1^L (1 - q_1)^K dq_1},$$

а вектор (L, K) принадлежит множеству, задаваемому неравенствами: $0 \leq L \leq r - z$, $0 \leq K \leq (s - n)r$, $z(s - n) \leq K + L \leq (s - n)r$.

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОВЕРКИ ИСПРАВНОСТИ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ В СОСТОЯНИИ ГОТОВНОСТИ К ДЕЙСТВИЮ И НА ХРАНЕНИИ

Планирование и организация проверок исправности оборудования и его обслуживание приобретают особое значение в тех случаях, когда оно длительное время находится в состоянии готовности к действию или на хранении. Если время хранения носит длительный характер, то имеется весьма незначительная уверенность в том, что необходимые задачи будут в результате успешно выполнены. Такой режим готовности характерен для различных средств аварийной защиты и автоматики, сигнализации в промышленности, на транспорте и т. д. Проверки исправности, как правило, сопряжены с тем, что отдельные блоки, изделия и устройства на некоторое время должны быть выведены из состояния готовности для осуществления самой проверки. Это означает, что более частые проверки снижают полезное время готовности, а с другой стороны, более редкие проверки не позволяют быть уверенным в успехе выполнения задачи. Кроме того, проверки исправности могут привести к увеличению интенсивности отказов, особенно в тех случаях, когда проверки сопряжены с расходом технического ресурса, существенно снижая полезное время эксплуатации.

Из сказанного ясно, что существует ряд факторов, оказывающих различное воздействие на надежность и другие эксплуатационные показатели. Эти факторы в значительной степени определяют эффективность выбираемого метода, или стратегии проверок. В основном изучены различные стратегии контроля исправности технического обслуживания без учета ограничений, связанных с расходом технического ресурса устройств и изделий при проведении проверок исправности. Далее будут рассмотрены лишь наиболее характерные случаи планирования проверок исправности; заключается этот раздел изложением оригинальных результатов по планирова-

нию проверок с учетом расхода технического ресурса изделий.

Рассматривая вопросы планирования проверок исправности, различия между основными и резервными средствами не оговариваем, поскольку и с чисто технической и с методологической точек зрения эти различия бывает очень трудно установить. Действительно, аварийный резерв вступает в действие лишь при возникновении аварийной ситуации, но под *аварийной ситуацией* можно понимать достаточно широкий класс событий, и потому многие системы, находящиеся в состоянии готовности к действию, являются, по существу, резервными.

5.1. Планирование проверок с учетом «стоимости» проверок и потерь от обнаружения неисправности

Пусть устройство или изделие находятся длительно в состоянии готовности, подвергаясь проверкам, осуществляемым за пренебрежимо малое время. Пусть проверки не создают дополнительных предпосылок для появления неисправностей. Следуя [97], будем считать, что каждой проверке сопоставлена некоторая «стоимость» C_1 рублей, а пребывание устройства или изделия в неисправном состоянии порождает убытки или штрафы в размере C_2 рублей за каждый час неисправного состояния. Пусть изделие или устройство характеризуется распределением времени до появления неисправности (в состоянии готовности) $F(t)$. Тогда неисправность, возникающая в любой момент времени между k -й и $(k+1)$ -й по счету проверками, вызывает «потери», в среднем равные

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - x)\} dF(x), \quad (5.1)$$

где $F(x)$ — распределение времени до возникновения первой неисправности. Соотношение (5.1) справедливо в тех случаях, когда проверки не связаны с расходом технического ресурса (принудительным «старением»), обуславливающим изменение интенсивности отказов, или «деформацию» закона распределения $F(t)$.

Но неисправность может возникнуть после любой по счету проверки, и потому для определения суммарных ожидаемых потерь следует просуммировать выражения вида (5.1) по всем k от 0 до ∞ :

$$M[\Pi(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - x)\} dF(x). \quad (5.2)$$

В [97] установлено, что если распределение $F(t)$ непрерывно и имеет конечный первый момент, то существует последовательность неотрицательных чисел $\{t_k^*$ — моментов проверок, минимизирующая полные ожидаемые потери вида (5.2). Эту последовательность находят из условия

$$\frac{\partial}{\partial t_k} M[\Pi(t)] = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

Условие (5.3) для потерь вида (5.2) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{C_1 k + C_2(t_k - x)\} dF(x) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{C_1(k+1) + C_2(t_{k+1} - x)\} dF(x) \right\} = 0, \quad (5.4)$$

или

$$t_{k+1} - t_k = \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{f(t_k)} - \frac{C_1}{C_2}, \quad (5.5)$$

где $f(t_k)$ означает производную функции $F(t)$ в точке $t = t_k$.

Рекуррентное соотношение (5.5) позволяет определить, задавшись значением t_1 , все остальные моменты проверок [63]. Если распределение $F(t)$ имеет определенный вид, то процедура выбора момента первой проверки задается определенными условиями. Пусть распределение $F(t)$ имеет возрастающую со временем функцию интенсивности отказов $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$. Выбрав в качестве момента первой проверки некоторое положительное число t_1 и определив с его помощью последующие моменты t_k по рекуррентной формуле (5.5), устанавливаем, что если

t_1 выбрано так, что $t_1 > t_1^*$, то для некоторых положительных целых чисел n имеет место неравенство

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n > \Delta_{n-1} = t_n - t_{n-1},$$

а если $t_1 < t_1^*$, то для некоторых положительных целых n справедливо неравенство

$$\Delta_n < 0.$$

В качестве первого приближения рекомендуется выбирать такое t_1 , которое обеспечивает баланс стоимости одной проверки и стоимости потерь от необнаружения неисправности, возникающей до первой проверки

$$C_1 = C_2 \int_0^{t_1} (t_1 - x) dF(x) = C_2 \int_0^{t_1} F(x) dx. \quad (5.6)$$

Пр и м е р. Пусть распределение времени до появления неисправности имеет такой вид:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\{-\alpha t^\beta\}, & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \text{ причем } \alpha = 1, \beta = 2. \quad (5.7)$$

Стоимость одной проверки составляет 10 руб., а пребывание в неисправном состоянии обходится в 100 руб/час.

Определим оптимальную последовательность проверок из условия минимума потерь вида (5.2). Для выбора первого момента проверки используем соотношение (5.6):

$$0,1 = \int_0^{t_1} (1 - e^{-t^2}) dt,$$

из которого графически находим, что $t \approx 0,7$. Далее, применяя формулу (5.6), вычисляем t_2, t_3, \dots и $\Delta_1, \Delta_2, \dots$

Результаты приведены в табл. 5.1.

Так как $\Delta_4 > \Delta_3$, то на основании сформулированного выше правила в качестве второго приближения для t_1^* выберем значение t_1 меньше, чем 0,7, а именно 0,68, и повторим вычисления t_2, t_3, \dots и $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, как показано в табл. 5.2. Так как $\Delta_7 < 0$, то в качестве третьего

Таблица 5.1

k	t_k	$\Delta_k = t_{k+1} - t_k$
1	0,700	0,350
2	1,050	0,300
3	1,350	0,290
4	1,640	0,315
5	1,955	0,455
6	2,410	1,260
7	3,670	

Таблица 5.2

k	t_k	$\Delta_k = t_{k+1} - t_k$
1	0,680	0,331
2	1,011	0,256
3	1,267	0,222
4	1,489	0,192
5	1,681	0,137
6	1,818	0,070
7	1,888	-0,015
8	1,873	

приближения выберем значение t_1 между 0,7 и 0,68. Пусть $t_1 = 0,69$. Повторив вычисления, убеждаемся на основании результатов, представленных в табл. 5.3, что $\Delta_5 > \Delta_4$, и потому t_1 находится в интервале между 0,68 и 0,69. Можно продолжить эту процедуру итераций, но с точностью, достаточной для практических целей, ограничимся первыми тремя приближениями, выбрав за t_1^* значение $0,5 (0,68 + 0,69) = 0,685$.

Таблица 5.3

k	t_k	$\Delta_k = t_{k+1} - t_k$
1	0,690	0,340
2	1,030	0,287
3	1,317	0,266
4	1,583	0,262
5	1,845	0,301
6	2,146	0,435
7	2,581	

Если по ряду причин проверки с переменным интервалом осуществить сложно, то оптимизацию плана проверок можно осуществить в классе периодических проверок с постоянным интервалом между проверками τ .

В этом случае ожидаемые потери равны

$$M[\Pi(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \{C_1(k+1) + C_2[(k+1)\tau - x]\} dF(x). \quad (5.8)$$

Такие стратегии проверок называют *периодическими*, в отличие от стратегии проверок с переменным интервалом, которые называют *последовательными*.

5.2. Планирование проверок по минимаксному критерию

Теперь представим, что в рассмотренном выше случае закон распределения $F(t)$ неизвестен, а период планирования конечен. Нужно спланировать проверки, т. е. указать их число и моменты их проведения так, чтобы выражение вида

$$M[\Pi(T)] = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - x)\} dF(x) + \int_{t_n}^T \{nC_1 + C_2(T - x)\} dF(x) + nC_1 \int_T^{\infty} dF(x) \quad (5.9)$$

достигало минимума при любом виде распределения $F(t)$.

В этом случае нетрудно выписать выражение эксплуатационных издержек $g(\xi)$, обусловленных неисправностью, возникающей между k -й и $(k+1)$ -й проверками ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Обозначив через ξ момент возникновения неисправности, имеем

$$g(\xi) = \begin{cases} (k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - \xi), & \text{если } t_k < \xi \leq t_{k+1} \\ & (k = 0, \dots, n-1), \\ nC_1 + C_2(T - \xi), & \text{если } t_n < \xi \leq T, \\ nC_1, & \text{если } \xi > T. \end{cases} \quad (5.10)$$

Так как неисправность может возникнуть в любой момент на интервале $[0, T]$ либо не возникнуть вовсе, то полные ожидаемые издержки равны

$$M[\Pi(T)] = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - x)\} dF(x) + \int_{t_n}^T \{nC_1 + C_2(T - x)\} dF(x) + nC_1 \int_T^{\infty} dF(x). \quad (5.11)$$

При выводе (5.11) существенно предполагается, что последняя по счету проверка проводится до истечения времени T .

При неизвестном виде распределения вероятностей $F(t)$ планирование можно осуществить на основе минимаксного критерия, т. е.

$$\min_{\{t_k\}^n} \max_{F(t)} M[\Pi(T)] \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (5.12)$$

Максимально возможные издержки будут достигаться в том случае, когда неисправность возникает сразу же после проведения очередной проверки.

Действительно, для любого распределения вероятностей $F(t)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - x)\} dF(x) + \\ & + \int_{t_n}^T \{nC_1 + C_2(T - x)\} dF(x) + nC_1 \int_T^{\infty} dF(x) \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - x)] [F(t_{k+1}) - F(t_k)] + \\ & + [nC_1 + C_2(T - t_n)] [F(T) - F(t_n)] + nC_1 [1 - F(T)] \leq \\ & \leq \max_k (g_{0,x}, \dots, g_{k,x}, \dots, g_{n,x}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где через $g_{k,x}$ обозначены издержки из-за возникновения неисправности сразу же после проведения очередной k -й проверки ($k = 0, \dots, n$) по графику x , состоящему из n проверок:

$$\begin{aligned} g_{k,x} &= (k+1)C_1 + C_2(t_{k+1} - t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \\ g_{n,x} &= nC_1 + C_2(T - t_n). \end{aligned}$$

Ясно также, что $\max_k (g_{0,x}, \dots, g_{k,x}, \dots, g_{n,x}) = \mu_x$ представляет максимум возможных издержек.

Решение ищется в два этапа: 1) выбор числа проверок n как наибольшего целого числа, удовлетворяющего неравенству

$$C_1 n^2 + C_1 n + 2(C_1 - C_2 T) \leq 0, \quad (5.14)$$

и 2) определение моментов проверок t_k из выражения

$$t_k = k \left[\frac{T}{n+1} + \frac{C_1}{2C_2} \left(\frac{n(n+3)}{(n+1)} - (k+1) \right) \right]. \quad (5.15)$$

Выберем, следуя [407], целое положительное число N так, чтобы выполнялись неравенства

$$N(N-1) \leq \frac{2TC_2}{C_1},$$

$$n(n-1) \geq \frac{2TC_2}{C_1}, \text{ если } n > N.$$

Обозначим через I_n класс всех планов проверок (последовательностей проверок) на интервале времени $[0, T]$, содержащих n проверок, а через I_N — объединение всех классов планов, содержащих от 0 до N проверок. Пусть $x(n)$ представляет план из n проверок, принадлежащий классу I_n (или $x(n) \in I_n$), такой, что потери от возникновения неисправности сразу после любой по счету проверки равны

$$g_{0, x(n)} = g_{1, x(n)} = \dots = g_{n, x(n)} = \mu_{x(n)}$$

для $n \leq N$.

Пусть I^* — класс таких планов $x(0), \dots, x(N)$.

Для того чтобы убедиться, что условия (5.14), (5.15) устанавливают решение задачи, нужно показать, что:

1) если план проверок $x \in I_n$ для $n > N$, то потери, связанные с принятием этого плана, удовлетворяют неравенству $\mu_x > \mu_{x(N)}$ (т. е. если план проверок x^* , удовлетворяющий минимаксной стратегии, существует, то он принадлежит классу I_N);

2) план проверок x^* существует и принадлежит классу I^* и

3) условие (5.14) позволяет найти этот план x^* в классе I^* .

Доказательство. 1) Для любого плана проверок $x \in I_n$ можно записать:

$$g_{k,x} = \begin{cases} (k+1)C_1 + C_2\Delta_k & (\Delta_k = t_{k+1} - t_k; \quad k = 0, \dots, n-1), \\ C_1n + C_2\Delta_n & (\Delta_n = T - t_n, \quad k = n), \end{cases} \quad (5.16)$$

$$g_{k-1,x} = kC_1 + C_2\Delta_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.17)$$

Далее, используя соотношение (5.17), из условия равенства издержек при применении плана $x(n)$ можно получить выражение для t_k и

$$\mu_{x(n)} = \frac{C_2 T + \frac{n C_1}{2} (n + 3)}{(n + 1)} \quad (n = 0, \dots, N),$$

так как $\Delta_k > 0$ ($k = 0, \dots, n$). План $x(n)$ не определен для $n > N$, так как при этом $\Delta_n \leq 0$.

Теперь предположим, что x — любой план из класса I_n , причем $n > N$. Очевидно, что $\mu_x \geq C_1 n$, так как $C_1 n$ представляющая потери от проведения проверок при отсутствии неисправностей или в случае, когда неисправность возникает непосредственно перед n -й проверкой.

Поэтому, учитывая выбор числа N , можно установить, что

$$\begin{aligned} \mu_x - \mu_{x(N)} &\geq C_1 n - \frac{C_2 T + \frac{N C_1}{2} (N + 3)}{(N + 1)} \geq \\ &\geq C_1 (N + 1) - \frac{C_2 T + \frac{N C_1}{2} (N + 3)}{(N + 1)} = \\ &= \frac{C_1}{2} (N + 1) N - C_2 T + C_1 > \frac{C_1}{2} \frac{2 T C_2}{C_1} - C_2 T + C_1 = \frac{C_1}{N + 1} > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2) Зафиксируем число $n < N$. Если $n = 0$, то $x(0)$ — единственный план с полным отсутствием проверок, т. е. план, состоящий в том, чтобы не проверять исправность оборудования.

Пусть для $n > 0$ \bar{x} представляет план проверок такой, что максимально возможные издержки, связанные с его реализацией, меньше потерь, обусловленных реализацией плана $x(n)$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^n g_{k, \bar{x}} < \sum_{k=0}^n g_{k, x(n)}.$$

Просуммируем выражения вида (5.17). Тогда для плана $\bar{x} \in I_n$ имеем

$$\sum_{k=0}^n g_{k, \bar{x}} = \frac{nC_1(n+3)}{2} + C_2T = \sum_{k=0}^n g_{k, x(n)}.$$

Отсюда приходим к заключению, что последнее равенство противоречит условию

$$\sum_{k=0}^n g_{k, \bar{x}} < \sum_{k=0}^n g_{k, x(n)}.$$

Следовательно, такой план \bar{x} не существует, и потому $x^* \in I^*$. Но так как класс I^* содержит конечное число планов, то план x^* существует.

3) Заметим, что

$$\mu_{x(n)} - \mu_{x(n-1)} = \frac{C_1n^2 + C_1n + 2(C_1 - C_2T)}{2(n+1)n}$$

для $n \leq N$, причем знак этой разности соответствует знаку числителя дроби. Следовательно, $\mu_{x(n)}$ не возрастает, пока числитель дроби меньше нуля. Но числитель дроби является возрастающей функцией n и больше нуля при $n = N$. Следовательно, число проверок в плане $x^* = x(n)$ определяется из условия (5.14).

В работе [107] планирование проверок исправности оборудования на конечном интервале времени $[0, T]$ обобщается на случай, когда сама проверка может быть связана с ошибочными решениями, т. е. приводит к обнаружению неисправности с вероятностью $p > 0$. Тогда число проверок в плане определяется из условия

$$C_1p^2n^2 + C_1p(2-p)n + 2(C_1 - pC_2T) \leq 0, \quad (5.18)$$

а сами моменты проверок из выражения

$$t_k = kp \left[\frac{T}{np+1} + \frac{C_1}{2C_2} \left(\frac{n[p(n+1)+2]}{np+1} - (k+1) \right) \right] \quad (5.19)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n).$$

5.3. Планирование проверок исправности изделий при ограничениях на расход технического ресурса при проведении контроля

Организация проверок исправности при хранении приобретает определенную специфику, если число проверок за планируемый период ограничено; отметим, что в системах с несколькими ступенями, или этапами хранения, возникают дополнительно проблемы, связанные с выбором стратегии управления запасами на каждой из ступеней.

Рассмотрим длительное хранение изделий в течение фиксированного времени T , когда проверка исправности и выяснение степени ухудшения рабочих характеристик изделия связаны со срабатыванием его технического ресурса [66]. Это срабатывание означает, с одной стороны, возможное увеличение интенсивности отказов после каждой новой проверки исправности, а с другой, — устанавливается предельное число таких проверок. В отличие от предыдущего раздела, где процедуре технического обслуживания были сопоставлены определенные экономические показатели, будем теперь считать, что экономика хранения изделий и поддержания их в исправном состоянии не является определяющим фактором. Действительно, очень часто пребывание изделия в неисправном состоянии или состоянии пониженного качества весьма трудно оценить в терминах стоимости, поскольку с готовностью изделия может связываться и безопасность людей. В связи с этим необходимо выбрать другой критерий планирования проверок исправности. Считая, что изделия могут понадобиться для использования *случайно* в любой момент времени из заданного интервала $[0, T]$, используем в качестве критерия планирования максимум среднего времени исправного состояния изделия в течение фиксированного времени хранения T .

Если с каждой проверкой изделия его интенсивность отказов *возрастает*, то любой план проверок вызовет *уменьшение* среднего времени исправного состояния, если конечно, не использовать аварийное восстановление. Будем для простоты считать, что восстановление (ремонт) не изменяет характера возникновения неисправностей.

Это возможно, естественно, в тех случаях, когда восстановление сводится к замене узла или детали, имеющих весьма малый удельный «вес» в смысле надежности всего изделия в целом.

Рассмотрим более подробно модель отказов изделия. Предположим, что по характеру работы при использовании по назначению изделие относится к числу стареющих устройств. По-видимому, в противном случае не возникает необходимость нормировать расход технического ресурса. Будем различать *установленный ресурс* изделия, представляющий такое суммарное число часов, проведенное им в рабочем режиме, что с достаточно большой степенью уверенности (скажем, 0,9999) в пределах этого времени изделие при необходимости обеспечивает нормальное функционирование*). Ограничивая степень использования или время работы, обеспечивают страховку или некоторую гарантию успеха при возникновении потребностей в этом изделии.

Например, двигатель самолета после полного расхода установленного ресурса может еще длительное время находиться в эксплуатации, но его снимают с полетов для поддержания высоких гарантий безопасности полетов. Другими словами, если ввести в рассмотрение *предельный ресурс*, то он во много раз превышает установленный, и это превышение представляет своеобразный запас «прочности». Имеются, конечно, случаи, когда по результатам длительной безаварийной эксплуатации установленный ресурс пересматривают в сторону увеличения, применяя иногда для этого ряд дополнительных мер. Предельный ресурс можно понимать как такое суммарное число часов работы, проработав которые изделие уже не может быть использовано по назначению.

Пусть изделие, попавшее на хранение в течение длительного, но фиксированного времени T , имеет уже начальный расход ресурса τ_0 , а по окончании хранения должен иметься остаточный ресурс не менее τ , т. е. при хранении расход ресурса на проверки не должен превышать

$$\tau_{\text{хр}} = \tau - \tau_0. \quad (5.20)$$

*) Иначе $\gamma\%$ -й ресурс ($\gamma = 99,99$).

Предположим, что каждая проверка исправности сопряжена с расходом ресурса $\Delta\tau$, причем $\Delta\tau \ll \tau_{\text{хр}}$.

Проверки исправности кратковременны и создают чередование периодов нагруженного режима и режима «отдыха». Учитывая это, а также условие

$$\tau_{\text{хр}} \ll T, \quad (5.21)$$

примем в качестве рабочей гипотезу о том, что отказы изделия возникают лишь при хранении, а сами проверки лишь увеличивают опасность или интенсивность их возникновения по мере того, как расходуется технический ресурс, т. е., другими словами, интенсивность отказов изделия имеет такой вид:

$$\lambda(t, k, \Delta\tau) = \varphi(t, k) \quad (t > 0, k = 0, 1, \dots), \quad (5.22)$$

где t — текущее время, а k — число проверок, проведенных к этому моменту. Касаясь принятой гипотезы об отказах, укажем, что на практике трудно даже установить, когда произошел отказ: при включении в работу либо самого включения и не было?

В качестве одной из форм аппроксимации вида функции (5.22) можно использовать зависимость

$$\lambda(t, k) = \lambda_0 t^{ak+b} \quad (a > 0, b > 0; k = 0, 1, \dots), \quad (5.23)$$

если за распределение времени «жизни» изделия принять распределение Вейбулла. При $k = 0$ имеем

$$\lambda(t, 0) = \lambda_0 t^b, \quad (5.24)$$

а при $k = 0, b = 0$

$$\lambda(t, 0) = \lambda_0. \quad (5.25)$$

Ступенчатая аппроксимация этой зависимости, по существу, постулирует марковский характер процесса деградации оперативных свойств изделия при периодических проверках. Может быть использована и аппроксимация, связанная с равномерным распределением времени «жизни».

Если обозначить введенный выше критерий планирования через $\max_{\{t_k\}_n} \Phi(t_0, t_1, \dots, t_n)$, где t_0, t_1, \dots, t_n означают моменты последовательных проверок, то задача

состоит в том, чтобы найти

$$\max_{\{t_k\}_n} \Phi(t_0, t_1, \dots, t_n) \quad (5.26)$$

при наличии ограничений, первое из которых устанавливает, что последняя проверка должна быть проведена до завершения хранения, а второе является ограничением на расход технического ресурса при хранении:

$$t_n \leq T, \quad (5.27)$$

$$n \leq \left[\frac{\tau_{xp}}{\Delta\tau} \right]. \quad (5.28)$$

Учитывая что изделие имеет контролируемую и неконтролируемую части (хотя и та, и другая подвергаются действию рабочих режимов) с соответствующими интенсивностями отказов $\lambda(t, k)$ и $\tilde{\lambda}_0(t, k)$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, \dots, t_n) = & \int_{t_0}^{t_1} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \Lambda(\tau, 0) d\tau \right\} dt + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ \exp \left(- \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{\lambda}_0(\tau, i) d\tau \right) \right\} \times \\ & \times \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp \left(- \int_t^{\tau} \Lambda(\tau, k) d\tau \right) dt + \exp \left(- \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{\lambda}_0(\tau, i) d\tau \right) \times \\ & \times \int_{t_n}^T \exp \left(- \int_{t_n}^{\tau} \Lambda(\tau, n) d\tau \right) dt, \quad (5.29) \end{aligned}$$

причем

$$\Lambda(t, k) = \lambda(t, k) + \tilde{\lambda}_0(t, k) \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (5.30)$$

Максимум ищется в классе всех планов, содержащих от 0 до n проверок ($0 \leq k \leq n$). Рассмотрим некоторые частные случаи общей постановки задачи планирования проверок.

1. Пусть контроль исправности полный, т. е.

$$\tilde{\lambda}_0(t, k) = 0 \text{ и } \Lambda(t, k) = \lambda(t, k),$$

а $\lambda(t, k)$ имеет ступенчатый вид, т. е. $\lambda(t, k) = \lambda_k$. Тогда

$$\begin{aligned} {}^0\Phi(t_0, \dots, t_n) = & \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp \left\{ - \int_{t_k}^t \lambda_k d\tau \right\} dt \right] + \\ & + \int_{t_n}^T \exp \left\{ - \int_{t_n}^t \lambda_n d\tau \right\} dt. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Зафиксируем n и будем искать оптимальные значения t_k из условия

$$\frac{\partial {}^0\Phi(n)}{\partial t_1} = \frac{\partial {}^0\Phi(n)}{\partial t_2} = \dots = \frac{\partial {}^0\Phi(n)}{\partial t_n} = 0, \quad (5.32)$$

где для краткости принято, что ${}^0\Phi(n) = {}^0\Phi(t_0, t_1, \dots, t_n)$. Используя (5.31) и (5.32), имеем

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda_0 t_1) - \exp(-\lambda_0(t_2 - t_1)) &= 0, \\ \exp(-\lambda_1(t_2 - t_1)) - \exp(-\lambda_2(t_3 - t_2)) &= 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

.....

$$\exp(-\lambda_{n-1}(t_n - t_{n-1})) - \exp(-\lambda_n(T - t_n)) = 0.$$

Введем обозначения:

$$\Delta_0 = t_1 - t_0, \quad \Delta_1 = t_2 - t_1, \quad \dots, \quad \Delta_n = T - t_n.$$

Тогда на основании (5.33) имеем

$$\lambda_0 \Delta_0 = \lambda_1 \Delta_1 = \lambda_2 \Delta_2 = \dots = \lambda_{n-1} \Delta_{n-1} = \lambda_n \Delta_n. \quad (5.34)$$

Из (5.34) следует, что

$$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = \Delta_n : \Delta_{n-1} : \Delta_{n-2} : \dots : \Delta_1 : \Delta_0, \quad (5.35)$$

причем

$$\sum_{i=0}^n \Delta_i = T.$$

Другими словами,

$$\Lambda_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \Delta_0 = T, \quad \Delta_0^{(n)} = \frac{T}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_0}{\lambda_i}}. \quad (5.36)$$

При фиксированном значении n оптимальный план проверок обеспечивает среднее время исправного состояния за период хранения T , равное

$${}^0\Phi(\Delta_0^{(n)}, \dots, \Delta_n^{(n)}) = \\ = \frac{1}{\lambda_0}(1 - e^{-\lambda_0 \Delta_0^{(n)}}) + \dots + \frac{1}{\lambda_n}(1 - e^{-\lambda_n \Delta_n^{(n)}}). \quad (5.37)$$

Покажем теперь, что с ростом числа проверок n в плане

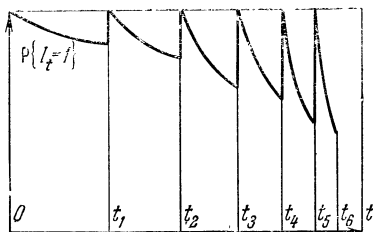


Рис. 5.1.

среднее время ${}^0\Phi(\Delta_0^{(n)}, \dots, \Delta_n^{(n)})$ также растет. Это означает, что ограничение задачи планирования (5.28) является *существенным*, и наибольшее значение ${}^0\Phi(\Delta_0^{(n)}, \dots, \Delta_n^{(n)})$ достигается на границе допустимых значений n , определяющих класс планов проверок. Действительно, для любого n можно записать (рис. 5.1):

$${}^0\Phi(n) = (1 - e^{-\lambda_0 \Delta_0^{(n)}}) \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \right), \quad (5.38)$$

$${}^0\Phi(n+1) = (1 - e^{-\lambda_0 \Delta_0^{(n+1)}}) \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right). \quad (5.39)$$

Учитывая, что

$$\Delta_0^{(n)} = \frac{T}{n + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_0}{\lambda_i}} \quad \text{и} \quad \lambda_0^{(n+1)} = \frac{T}{n+1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_0}{\lambda_i}},$$

представим (5.38) и (5.39) как

$${}^0\Phi(n) = \frac{1}{\lambda^{(n)}}(1 - e^{-\lambda^{(n)}T}), \quad (5.40)$$

$${}^0\Phi(n+1) = \frac{1}{\lambda^{(n+1)}}(1 - e^{-\lambda^{(n+1)}T}), \quad (5.41)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_0^{(n)} = \frac{T - \left(\sum_{i=1}^n \frac{i}{\lambda_i} \right) \ln p}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_0}{\lambda_i}} \quad (5.46)$$

и

$$\Delta_i^{(n)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \Delta_0^{(n)} + \frac{i \ln p}{\lambda_i}. \quad (5.47)$$

Теперь уже заранее указать характер изменения ${}^0\Phi(n)$ с ростом n весьма трудно, так как величина p оказывает существенное влияние на вид этой зависимости. Если, однако, максимум не достигается на одной из границ допустимых значений n , т. е. при $n = 0$ или $n = n_{\max}$, то увеличение λ_n с ростом n и наличие убывающей последовательности коэффициентов p^n позволяет сделать предположение об унимодальности функции ${}^0\Phi(n)$. Это предположение позволяет упорядоченно изменять n при отыскании оптимального плана в заданном классе. Отметим также, что при сделанных допущениях относительно вероятностей p_k план проверок выражается в явном виде через $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ и p .

Учтем теперь временной характер зависимости вероятности от времени. Тогда, в частном случае,

$$\Lambda_k = \lambda_k + \tilde{\lambda}_k \quad (k = 0, \dots, n) \quad (5.48)$$

и критерий планирования выражается как

$$\begin{aligned} \max_{\{t_k\}n} {}^0\Phi(n) = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Lambda_k} (1 - e^{-\Lambda_k \Delta_k}) \exp \left\{ - \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\lambda}_i \Delta_i \right\} + \frac{1}{\Lambda_0} (1 - e^{-\Lambda_0 \Delta_0}). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Определение оптимального плана проверок при этом усложняется

Действительно, из условия

$$\frac{\partial {}^0\Phi(n)}{\partial \Delta_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (5.50)$$

получаем систему уравнений относительно $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$:

$$\begin{aligned} \exp\{-\Lambda_k \Delta_k\} \exp\left\{-\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\lambda}_i \Delta_i\right\} - \sum_{i=k+1}^n \frac{\tilde{\lambda}_k}{\Lambda_i} (1 - e^{-\Lambda_i \Delta_i}) \times \\ \times \exp\left\{-\sum_{j=0}^{i-1} \tilde{\lambda}_j \Delta_j\right\} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5.51) \\ \Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_n = T. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений относительно $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ и означает отыскание оптимального плана проверок при фиксированном n .

Интересно отметить, что даже в ростом ступеней изменения интенсивности отказов λ_n , увеличение числа проверок в плане ведет к увеличению среднего времени исправного состояния изделия за период хранения. Этот факт, однако, не всегда справедлив при неполном контроле исправности.

5.4. Планирование проверок, осуществляемых после замены оборудования

Теперь рассмотрим планирование проверок оборудования, находящегося в состоянии готовности к действию, когда сама проверка проводится только после замены. Пусть оборудование представляет один сменный блок, для которого известно распределение вероятностей $F(t)$ выхода из строя. Если замена осуществляется новым блоком, то при изучении процесса замен на длительном интервале времени можно ограничиться рассмотрением одного интервала времени между заменами.

Пусть стратегия проверок выбирается в классе периодических. Обозначим через τ интервал между двумя последовательными заменами, а через T_3 — среднее время самой замены. Для сравнения заметим, что выше мы пренебрегали временем самих проверок и временем ремонта.

Если стоимость одной замены составляет C_3 рублей, а норма амортизации равна C_a руб/ед. времени, то естественно так выбрать интервал между проверками — заменами τ , чтобы достигали минимума издержки,

связанные с эксплуатацией оборудования, отнесенные к ожидаемому времени исправного состояния в течение цикла.

Эти издержки включают в себя и амортизационные отчисления

$$\frac{C_3 + C_a(\tau + T_3)}{\int_0^{\tau} (1 - F(t)) dt}, \quad (5.52)$$

где $\int_0^{\tau} (1 - F(t)) dt$ — среднее время исправного состояния оборудования за цикл.

Пусть распределение $F(t)$ показательное, т. е.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда, продифференцировав по τ выражение (5.52) и приравняв производную нулю, получим следующее уравнение относительно τ :

$$\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \tau + T_3 + \frac{C_3}{C_a}. \quad (5.53)$$

Оптимальная периодичность замен — проверок определяется приближенно в виде

$$\tau^* \approx \sqrt{2 \left(T_3 + \frac{C_3}{C_a} \right) / \lambda}. \quad (5.54)$$

При показательном распределении времени исправной работы $F(t)$ проверка, выявляющая исправность, обладает восстанавливающим свойством, т. е. после проверки оборудование как бы обновляется и отсчет времени переносится к моменту последней проверки. Планировать проверки можно и по критерию минимума ожидаемых издержек, отнесенных к среднему времени исправного состояния за цикл между заменами. Пусть C_{Π} — стоимость одной проверки, T_{Π} — время одной проверки, а π — вероятность того, что оборудование не выйдет из строя за время проверки.

Цикл определяется соотношением

$$\tau + T_{\Pi} + (1 - \pi e^{-\lambda\tau}) T_3, \quad (5.55)$$

а суммарные ожидаемые издержки, отнесенные к времени исправного состояния, составляют при таком подходе

$$U_3(\tau) = \frac{C_a [\tau + T_{\Pi} + (1 - \pi e^{-\lambda\tau}) T_3] + C_{\Pi} + (1 - \pi e^{-\lambda\tau}) C_3}{\int_0^{\tau} (1 - F(t)) dt}. \quad (5.56)$$

Минимизация выражения (5.56) с введением квадратической аппроксимации позволяет найти τ^* в виде

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2 \left\{ T_{\Pi} + \frac{C_{\Pi}}{C_a} + (1 - \pi) \left(T_3 + \frac{C_3}{C_a} \right) \right\}}{\lambda}}. \quad (5.57)$$

Отметим, что в последней модели планирования проверок замена оборудования производится только при обнаружении неисправности, причем сама проверка может вызвать дополнительные неисправности в системе оборудования.

Если, например, известно, что распределение вероятностей показательное, но параметр его λ в свою очередь случаен с распределением $g(\lambda)$, то первоначальное значение τ_1^* можно найти, усреднив по распределению $g(\lambda)$ выражение издержек

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{\infty} U_3(\tau, \lambda) g(\lambda) d\lambda \right) = 0, \quad (5.58)$$

где

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^{a-1} t_1^a e^{-\lambda t_1}}{(a-1)!}, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Если после принятия начального решения τ_1^* получены дополнительные сведения в виде набора моментов отказов оборудования $t'_1, t'_2, t'_3, \dots, t'_2$, то вычислив по

формуле Байеса апостериорную плотность $g(\lambda | r)$, можно найти τ_2^* из условия

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{\infty} U_0(\tau, \lambda) g(\lambda | r) \right) = 0, \quad (5.59)$$

где

$$g(\lambda | r) = \begin{cases} \frac{\lambda^{r+a-1} (t_1 + t_2)^{r+a} e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{(r+a-1)!}, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

а

$$t_2 = \sum_{i=1}^r t'_i.$$

Здесь $U_0(\tau, \lambda)$ — выражение суммарных ожидаемых издержек за цикл.

Производя необходимые операции в (5.59) с учетом (5.52), получаем такое уравнение относительно τ :

$$\frac{(\tau + t_1 + t_2)^{r+a}}{(t_1 + t_2)^{r+a-1}} - (r+a)\tau - \left(T_3 + \frac{C_3}{C_a} \right) (r+a-1) = (t_1 + t_2), \quad (5.60)$$

которое можно решить численными методами.

Введя обозначения

$$\hat{\lambda} = \frac{r+a}{t_1+t_2}, \quad t = t_1 + t_2,$$

уравнение (5.60) можно переписать в виде

$$\left(1 + \frac{\tau}{t} \right)^{\hat{\lambda}t} - \left(\tau + T_3 + \frac{C_3}{C_a} \right) \hat{\lambda} - \frac{\left(T_3 + \frac{C_3}{C_a} \right)}{t} = 1. \quad (5.61)$$

Если число наблюдаемых отказов r растет, то уравнение (5.61) приобретает вид уравнения (5.53).

Действительно, при $r \rightarrow \infty$ оценка $\hat{\lambda}$ будет стремиться к своему истинному значению λ , первое слагаемое стремится к $\exp\{\lambda\tau\}$, а третье к нулю.

**МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОТРЕБНОСТЕЙ
В ЗАПЧАСТЯХ И МАТЕРИАЛАХ *)**

Одним из основных вопросов использования математических моделей обеспечения и организации снабжения является предсказание или прогноз потребностей. При проведении таких прогнозов могут быть использованы как данные о спросе на данный тип изделий, материалов и запчастей в прошлом, так и прогнозы общего состояния техники в данной области на ближайшее будущее. Существует ряд методов прогноза спроса, но сама процедура прогнозирования независимо от метода обычно делится на следующие этапы.

На *первом этапе* обрабатываются экспериментальные данные о потребностях в прошлом и оценивается достоверность собранной информации. Полученные данные могут быть представлены как в дискретной, так и в непрерывной форме. В дальнейшем через $\{x_t\}$ будем обозначать последовательность наблюдений полученных к моменту времени t . Отсчет времени также может быть как дискретным, так и непрерывным. Предположим далее, что время t дискретно ($t = 0, 1, 2, \dots$).

На *втором этапе* на основании сведений и предположений об исследуемом объекте выбирается математическая модель, соответствующая имеющимся экспериментальным данным. В качестве примера таких моделей можно привести полином (константу, прямую, параболу и т. д.), синусоиду, распределение вероятностей из заданного класса распределений с переменными параметрами и т. д. При выборе адекватной математической модели важную роль играет априорная информация об исследуемом объекте. Дополнительная информация об объекте дает возможность своевременно изменить порядок аппроксимирующего полинома, выбрать модель из другого класса

*) При написании этой главы частично использованы материалы, подготовленные А. С. Манделем.

и т. д. На *следующем этапе* необходимо найти оценки параметров модели.

Имеется противоречие между требованиями точности оценок, с одной стороны, и объемом вычислений (объемом машинной памяти), с другой. Решение задачи интерполяции связывается с выбором некоторой функции из заданного класса функций, в некотором смысле наилучшим образом удовлетворяющей экспериментальным данным. Рассмотрим кратко три метода: *метод наименьших квадратов* (МНК), *метод скользящего среднего* (МСС) и *метод экспоненциального сглаживания* (МЭС). Первый из них дает возможность, используя все имеющиеся экспериментальные данные, построить аппроксимирующую кривую, соответствующую минимальной средней квадратической ошибке. Однако методу наименьших квадратов свойственны два недостатка: 1) из-за сложности вычислений применимость его ограничивается линейными и параболическими моделями, 2) при получении каждой новой экспериментальной точки приходится полностью повторять всю процедуру вычислений.

Для построения оценок в случае константной модели применяется метод скользящего среднего. По этому методу оценку для среднего определяют по формуле

$$M_t = \frac{x_t + x_{t-1} + \dots + x_{t-N+1}}{N}, \quad (6.1)$$

где N — заранее выбранное натуральное число. Указанная оценка минимизирует сумму квадратов отклонений между наиболее поздними N наблюдениями и самой оценкой. Для построения этой оценки используются не все имеющиеся экспериментальные точки, а N последовательных, что снижает точность, но упрощает расчеты. Соотношение (6.1) можно переписать в рекуррентной форме:

$$M_t = M_{t-1} + \frac{x_t - x_{t-N}}{N}. \quad (6.2)$$

Однако это не избавляет от необходимости иметь и запоминать результаты последних N наблюдений. Применимость этого метода существенно ограничена константной моделью. Более удобным является метод оценивания,

для которого оценка в каждый текущий момент времени t рекуррентно зависела бы от наблюдения в момент времени t и предыдущей оценки в момент времени $t - 1$. Обращаясь к (6.2), допустим, что значение x_{t-N} неизвестно (например, из-за ограниченного объема памяти). Тогда наиболее естественно x_{t-N} заменить оценкой M_{t-1} , т. е.

$$M_t = M_{t-1} + \frac{x_t - M_{t-1}}{N},$$

или

$$M_t = \frac{1}{N} x_t + \left(1 - \frac{1}{N}\right) M_{t-1}.$$

Используя эту идею, получим рекуррентное соотношение для оценки в момент времени t :

$$S_t(x) = \alpha x_t + (1 - \alpha) S_{t-1}(x), \quad (6.3)$$

где $0 < \alpha < 1$, $M_t = S_t(x)$, $M_{t-1} = S_{t-1}(x)$.

Описанная процедура получила название экспоненциального сглаживания. Если в формулу (6.3) последовательно подставлять значения $S_k(x)$ для $k = t - 1, t - 2, \dots$, то в результате получим

$$S_t(x) = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} x_0 + \dots \quad (6.4)$$

Оценка $S_t(x)$ является линейной комбинацией всех прошлых наблюдений, взятых с геометрическими весами. Если все случайные наблюдения x_t одинаково распределены, то для математического ожидания $M[S_t]$ справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} M[S_t(x)] &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k M[x_{t-k}] = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k M[x] M[x], \end{aligned}$$

т. е. $S_t(x)$ является *несмещенной оценкой* x . Можно доказать, что оценка $S_t(x)$ обеспечивает минимум суммы квадратов отклонений всех прошлых наблюдений от $S_t(x)$, взятых с геометрическими весами.

Процедура экспоненциального сглаживания позволяет оценить коэффициенты модели в каждый текущий момент времени t . Сглаженную кривую можно использовать для прогнозирования состояния объекта (процесса) во все будущие моменты $t + \tau$ ($\tau = 1, 2, \dots$). Чаще всего используются константные и линейные модели, так как из-за наличия помех при наблюдениях оценки для моделей второго и более высоких порядков ненадежны. Отметим, что в момент времени t для прогноза значений $x_{t+\tau}$ используется некоторая сглаженная кривая P_t , основанная на оценках, полученных к моменту времени t , а в момент времени $t + 1$ для прогноза используется кривая P_{t+1} , соответствующая новым значениям оценки. Вопрос об адекватности используемой модели, например, порядок полинома, решается оперативно по мере накопления экспериментальных данных и установления соответствия прогнозов фактически полученным результатам.

Измерение ошибок прогноза осуществляется на основе сопоставления результатов наблюдений с ранее выполненными прогнозами на эти периоды. Определив последовательность ошибок, ее можно в свою очередь сгладить для определения возможных ошибок прогноза.

Сглаживание по формуле (6.3) можно назвать сглаживанием первого порядка. Аналогично можно рассматривать сглаживание более высокого порядка:

$$S_t^{(n)}(x) = \alpha S_t^{(n-1)}(x) + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(n)}(x), \quad (6.5)$$

где $S_t^{(n)}(x)$, $S_t^{(n-1)}(x)$ — результаты сглаживания n -го и $(n - 1)$ -го порядка соответственно; $t = 1, 2, \dots$; $0 < \alpha < 1$; $n = 2, 3, \dots$.

Если сглаживание первого порядка применяется для прогнозирования с помощью константы, то результаты сглаживания более высокого порядка применяются для построения прогнозирующих полиномов более высокого порядка. В [161*] доказано, что если для прогноза используется полином $x_{t+\tau} = a_t + b_t\tau + \dots + g_t\tau^N$, то оценки коэффициентов a_t , b_t , ..., g_t полинома выражаются линейно через результаты сглаживаний от первого до $(N + 1)$ -го порядков. В частности, для a_t

справедлива следующая формула:

$$a_t = [1 - (1 - S)^{N+1}]_t(x), \quad (6.6)$$

где 1 — единичный оператор ($1x_t = x_t$).

В [161*] предполагается, что прогнозируемая последовательность представляется в виде суммы полинома \tilde{x} и не зависящей от \tilde{x} помехи e . Процедура сглаживания задается соотношениями (6.3), (6.5). Оказывается, что если в качестве оценок коэффициентов полинома в момент времени t использовать линейные комбинации сглаживаний различного порядка, то взвешенная сумма квадратов отклонений оценок полинома от фактических результатов наблюдений будет минимальна. Отдельные составляющие этой суммы складываются с геометрическими весами $(1 - \alpha)^i$. Обозначим через X результат наблюдений, а через P искомую полиномиальную оценку. Тогда

$$S_t^k(P) = S_t^k(X), \quad (6.7)$$

где $k = 1, \dots, N + 1$, а N — степень полинома P . Отсюда можно получить оценки коэффициентов полинома $\hat{a}_t, \hat{b}_t, \dots, \hat{g}_t$, а искомый прогноз будет иметь вид

$$\hat{x}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t\tau + \dots + \hat{g}_t\tau^N. \quad (6.8)$$

В общем случае формулы для оценок $\hat{a}_t, \hat{b}_t, \dots, \hat{g}_t$ достаточно сложны. Поэтому ограничимся оценками $\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{c}_t$ для: 1) константной, 2) линейной и 3) квадратичной моделей.

$$1) \quad \hat{a}_t = S_t(x); \quad (6.9)$$

$$2) \quad \begin{cases} \hat{a}_t = 2S_t(x) - S_t^2(x), \\ \hat{b}_t = \frac{\alpha}{1-\alpha} [S_t(x) - S_t^2(x)]; \end{cases} \quad (6.10)$$

$$3) \quad \begin{cases} \hat{a}_t = 3S_t(x) - 3S_t^2(x) + S_t^3(x), \\ \hat{b}_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} [(6-5\alpha)S_t(x) - \\ - 2(5-4\alpha)S_t^2(x) + (4-3\alpha)S_t^3(x)], \\ \hat{c}_t = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} [S_t(x) - 2S_t^2(x) + S_t^3(x)]. \end{cases} \quad (6.11)$$

Здесь $S_t^k(x)$ для $k = 1 \dots, N + 1$; $t = 2, 3, \dots$ определяются по формуле (6.5). Для вычисления $S_1^k(x)$ необходимы начальные условия $S_0^1(x), \dots, S_0^{N+1}(x)$. Для этого на основе априорной информации задаются значениями $\hat{a}_0, \hat{b}_0, \dots, \hat{g}_0$, а затем по ним находят искомые значения S_0^1, \dots, S_0^{N+1} , а именно:

для константной модели:

$$S_0^1(x) = \hat{a}_0; \quad (6.12)$$

для линейной модели:

$$S_0^1(x) = \hat{a}_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_0, \quad (6.13)$$

$$S_0^2(x) = \hat{a}_0 + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_0;$$

для квадратичной модели:

$$\begin{aligned} S_0^1(x) &= \hat{a}_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_0 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} \hat{c}_0, \\ S_0^2(x) &= \hat{a}_0 + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_0 + \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} \hat{c}_0, \\ S_0^3(x) &= \hat{a}_0 - 3 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_0 + 3 \frac{(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \hat{c}_0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

При доказательстве основного результата для экспоненциального сглаживания Браун и Майер [161*] предполагают, что

$$x_t = \tilde{x}_t + e_t, \quad (6.15)$$

где \tilde{x}_t — полином, а e_t — независимая помеха. Однако оказывается, что это условие не является необходимым. В [162*] предполагается, что $\{x_t\}$ является произвольной последовательностью наблюдений, а $\{P_t\}$ — последовательность прогнозирующих или интерполяционных полиномов $P_{t+\tau}$ степени N . Для того чтобы сумма

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i (x_{t-i} - P_{t-i})^2 \quad (6.16)$$

была минимальна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$S_t^k(x) = S_t^k(P)$$

для $k = 1, \dots, N + 1$. Оператор S^k ($k = 1, \dots, N + 1$) задан с помощью (6.4), (6.15).

Выбор коэффициента экспоненциального сглаживания α представляет самостоятельную задачу. Увеличение α приводит к построению более точной интерполяционной кривой, но одновременно снижается «помехоустойчивость» прогноза. Уменьшение α наряду с помехоустойчивостью увеличивает и инерционность (запаздывание). В общем случае можно говорить об отыскании траектории $\{\alpha_t\}$, связанной с последовательностью наблюдений $\{x_t\}$.

Таким образом, возникает задача отыскания компромиссного решения. Так как характеристики помехи заранее не известны полностью, то целесообразно применить принцип адаптации, т. е. изменять α в соответствии с изменением характера наблюдаемых зависимостей в замерах. Если ошибку e_t определить как

$$e_t = -S_t + x_t, \quad (6.17)$$

то (6.3) можно представить в виде

$$S_t = S_{t-1} + \alpha e_t. \quad (6.18)$$

Алгоритм изменения α должен основываться на величине ошибки e_t , но для исключения реакции на случайные выбросы x_t он должен быть достаточно инерционным, т. е. в нем должны учитываться и прошлые значения ошибки $e_{t'}$ для $t' < t$. Естественно будет и в этом случае использовать экспоненциальное сглаживание. В [172*] предлагается для константной модели использовать следующий алгоритм изменения α :

$$\alpha_t = \frac{|A_t|}{B_t}, \quad (6.18a)$$

где

$$A_t = \gamma e_t + (1 - \gamma) A_{t-1} \quad (0 < \gamma < 1), \quad (6.19)$$

а

$$B_t = \gamma |e_t| + (1 - \gamma) B_{t-1}.$$

Очевидно, что $0 \leq |A_t| \leq B_t$, откуда $0 \leq \alpha \leq 1$.

Экспериментально показано, что устойчивый алгоритм адаптации получается, если α_i изменять в соответствии с формулой (6.18а). Оказывается, что в этом случае интерполяционная кривая не имеет перерегулирования, т. е. в случае внезапного резкого изменения экспериментальных данных от одного постоянного уровня к другому интерполяционная кривая на участке переходного процесса полностью заключена между этими уровнями.

Возможны и другие подходы к прогнозированию потребностей. Если нужно предсказать спрос на запчасти определенного типа в течение определенного периода времени, а такая запчасть используется, скажем, в самолете, то прогноз основан на определении среднего числа запчастей на час полета. Это делается на основе имеющихся данных о степени использования самолета. Математическое ожидание продолжительности полетов в часах для всех самолетов рассматриваемого типа в течение заданного интервала можно оценить по текущим сводкам и планам. Умножая интенсивность использования запчастей на час полета на ожидаемую продолжительность полетов, получаем ожидаемый спрос. Точность такого прогноза зависит как от точности определения интенсивности использования, так и от точности предсказания продолжительности полетов в часах. Особенно трудно оценить степень использования запчастей при низком уровне потребностей, когда самолет снимается с эксплуатации еще до того момента, когда накопится достаточная информация о степени его использования. Элемент случайности в спросе присутствует, если даже продолжительность полетов можно указать точно. Аналогично можно определить ожидаемое количество замен, а следовательно, и потребность в запчастях определенного типа при аварийном обслуживании. Построение вероятностной модели спроса включает в себя оценку параметров модели, которыми являются параметры соответствующих распределений, например, распределения времени безотказной работы.

Если прогнозы осуществляются исключительно по данным потребления в прошлом, то согласно методу *наименьших квадратов* прогноз спроса за j -й период в случае линейной модели представляется как $d_j = aj + b$,

где a , b — константы, определяемые из условия минимума такого выражения:

$$F = \sum_j (d_j - d'_j)^2 = \sum_j (d_j - aj - b)^2, \quad (6.20)$$

где d_j представляет фактический спрос за j -й период. Допустим, что a и b определяются на основе данных о спросе за N предыдущих периодов времени. Если периоды времени $(t - T)$, $(t - T, t - 2T)$, ..., пронумеровать через $0, -1, \dots$, то для оценки a и b нужно использовать данные за периоды с номерами $0, -1, \dots, -(N - 1)$. Дифференцируя F по a и b и приравнявая полученные выражения нулю, решим уравнения относительно a и b . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= -2 \sum_{j=0}^{-(N-1)} j (d_j - aj - b) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= -2 \sum_{j=0}^{-(N-1)} (d_j - aj - b) = 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=0}^{-(N-1)} j = \frac{-(N-1)N}{2}, \quad \sum_{j=0}^{-(N-1)} j^2 = \frac{1}{6} N(N-1)(2N-1),$$

и вводя обозначения

$$U = \sum_{j=0}^{-(N-1)} d_j, \quad V = \sum_{j=0}^{-(N-1)} jd_j,$$

получим

$$a = \frac{12}{N(N-1)(N+1)} \left[V + \frac{N-1}{2} U \right], \quad b = \frac{U}{N} + a \left(\frac{N-1}{2} \right).$$

Другими словами, прогноз спроса по методу наименьших квадратов определяется как

$$\begin{aligned} d'_j &= \frac{U}{N} + a \left[j + \frac{N-1}{2} \right] = \\ &= \frac{U}{N} + 12 \left[\frac{V + \frac{N-1}{2} U}{N(N-1)(N+1)} \right] \left[j + \frac{N-1}{2} \right] \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Последнее соотношение позволяет вычислить прогноз в течение j -го периода ($j = 1, \dots, N$), используя наблюдения за периоды с номерами $0, -1, \dots, -(N-1)$. Периоды в будущем $(t, t+T), (t+T, t+2T)$ пронумерованы через $1, 2, \dots$. Из последнего соотношения (6.22) видно, что прогноз равен среднему спросу за последние N периодов плюс некоторая поправка, учитывающая функцию $\hat{y}(j)$, значения которой в каждой точке j равны математическому ожиданию случайных величин $M[y(j)]$, т. е., другими словами, тренд. От наблюдений в прошлом зависят только величины U и V , причем каждый раз для нового прогноза не обязательно пересчитывать U и V . Пусть, например, \hat{U} и \hat{V} представляют значения этих переменных в момент $t+T$, т. е. вычислены на основе показателей спроса $d_1, d_0, \dots, d_{-(N-2)}$, а U, V вычислены для момента времени t на основе $d_0, d_{-1}, \dots, d_{-(N-1)}$.

Тогда

$$\begin{aligned}\hat{U} &= d_1 + U - d_{-(N-1)}, \\ \hat{V} &= V - U + Nd_{-(N-1)}.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Неопределенность прогноза растет с ростом j , т. е. по мере движения в будущее. Желательно оценить эту неопределенность в функции от j . Мерой неопределенности может служить дисперсия ошибки прогноза. Число периодов наблюдений за спросом в прошлом следует выбирать из соображений обеспечения минимума дисперсии ошибок прогноза при фиксированном времени j . Такую процедуру трудно реализовать вручную, но можно осуществить на ЭЦВМ.

Одним из недостатков метода наименьших квадратов является запоминание данных о спросе за все N предшествующих периодов.

В [157*] изучалась взаимосвязь методов прогноза и календарного планирования загрузки технологических мощностей, а в [162*] рассматривается процедура экспоненциального сглаживания первого порядка для прогноза спроса. Отмечается, что последняя не отражает в достаточной степени устойчивого изменения объема спроса

в системе управления запасами, и потому предложено использовать сглаживание второго порядка. Исследуется отклик системы на случайные помехи, которые поступали в систему, скажем, неточные сведения о спросе. Получены выражения для дисперсии текущего уровня запасов на складах потребителя в случае, если спрос на эти запасы содержит некоррелированные возмущения с единичной дисперсией. Но собственно прогноз на основе экспоненциального сглаживания еще не обеспечивает сглаживания плана.

В [169*] изучаются вопросы управления многопродуктовыми запасами, возникающие при организации снабжения крупного потребителя комплектующими деталями и материалами. Потребности на детали и материалы описываются вероятностными законами, так как потребитель выполняет одновременно достаточно много заказов-контрактов, и потому потребности в деталях и материалах отдельных типов *точно* учесть трудно. Одновременно возникают потребности, которые можно заранее точно учесть, но для них задача прогнозирования не возникает. Снабжение потребителя можно регулировать, подавая в определенные моменты заказы на пополнение. Ввиду того, что показатели стоимости, определяющие выбор оптимального в экономическом смысле плана снабжения или обеспечения материалами и деталями, имеют неустойчивый характер и зачастую точно не известны, предлагается искать решения для совокупности значений этих показателей, а затем выяснить *чувствительность* принимаемых решений к изменениям параметров. В основу прогноза потребностей в деталях и материалах кладется метод экспоненциального сглаживания, но из-за того, что число типов используемых деталей и материалов велико, предлагается использовать наиболее поздние текущие наблюдения о возникающих потребностях. Систему обеспечения подобного типа практически можно реализовать только с помощью ЭЦВМ. Поэтому экспоненциальное сглаживание как методика прогнозирования имеет определенные преимущества, так как нужно запоминать только последнюю оценку спроса, коэффициент сглаживания (весовой коэффициент α), а текущее наблюдение легко переносится на последующую оценку или

прогноз. Этим существенно снижается объем машинной памяти. Выбор значения используемого в процедуре сглаживания представляет самостоятельную задачу, о чем говорилось выше. При больших значениях α прогноз на основе экспоненциального сглаживания будет отставать, если в спросе наблюдается тренд.

Выбор α , вообще говоря, зависит от коэффициента автокорреляции процесса возникновения потребностей и времени поставки требуемых деталей и материалов или, другими словами, от транспортных и прочих задержек. Момент подачи заказа можно определить по формуле, учитывающей прогноз спроса или потребности за период и время поставки пополнения в периодах, а также некоторый запас, называемый *страховым*. Максимально допустимый спрос за время поставки пополнения оценивается на основе прогноза по методу экспоненциального сглаживания плюс поправка, учитывающая среднее квадратическое отклонение. Если число типов изделий велико, то для каждого типа невозможно решать задачу оптимального управления запасами, и потому предлагается всю номенклатуру деталей и материалов делить на *категории* и искать решение для выделенной категории изделий, а затем экстраполировать полученные результаты на всю совокупность используемых деталей и материалов. При чисто экономическом подходе размер заказа Q на пополнение вычисляется по известной формуле Уилсона [163*]

$$Q = \sqrt{2P\bar{D}/cI}, \quad (6.24)$$

где P — стоимость подачи заказа на пополнение, \bar{D} — прогноз потребностей за период, c — стоимость одной запчасти, детали или единицы материала, I — удельные издержки по хранению.

При наличии многих потребителей, снабжаемых из одного источника, предпочтительнее строить интегральные прогнозы спроса по фиксированной номенклатуре деталей или материалов. Такие прогнозы необходимы, если вместо жесткого распределения запчастей и материалов используются источники оптовой торговли. Возникающая при этом задача прогнозирования потребно

стей осложняется тем, что данные о наблюдаемых в прошлом потребностях в данной номенклатуре изделий или материалов имеют обычно различные продолжительности.

Предположим, что интегральный спрос порождается потребностями m потребителей. Обозначим через $x_{t'}^{(l)}$ потребности по данному наименованию l -го потребителя в момент времени t' . Для определенности время измеряется, скажем, годами или кварталами.

Данные о прошлых потребностях задаются совокупностью величин

$$\{x_{t'}^{(l)}\},$$

где

$$l = 1, \dots, m;$$

$$t' = t_1, \dots, t.$$

Если все значения t_l одинаковы, скажем, $t_l = 0$, т. е. начальная информация о потребностях для каждого потребителя датируется одним и тем же числом, то эти величины представляются в виде такой таблицы:

$x_0^{(1)}$	$x_1^{(1)}$	\dots	$x_t^{(1)}$
$x_0^{(2)}$	$x_1^{(2)}$	\dots	$x_t^{(2)}$
\cdot	\cdot		\cdot
\cdot	\cdot		\cdot
\cdot	\cdot		\cdot
$x_0^{(m)}$	$x_1^{(m)}$	\dots	$x_t^{(m)}$

(6.25)

Рассмотрим из данной совокупности l -го потребителя, ограничив заранее возможную степень используемого интерполяционного полинома числом N . Для каждого значения $n \leq N$ можно найти оптимальный интерполяционный полином $P_{t,n}^{(l)}$, которому будет соответствовать ошибка $\varepsilon_{t,n}^{(l)}$. Осуществив такую операцию для каждого

$n \leq N$, получим соответствующие значения ошибок:

$$\varepsilon_{i,0}^{(l)}, \dots, \varepsilon_{i,n}^{(l)}, \dots, \varepsilon_{i,N}^{(l)}.$$

Если выбрать $\varepsilon_{i,n}^{(l)}$ как минимум по n из всех $\varepsilon_{i,n}^{(l)}$, то полином степени n_l будет наилучшим образом (для экспоненциального сглаживания) соответствовать результатам наблюдений за потреблением l -го потребителя. Можно построить оптимальные в указанном смысле интерполяционные полиномы для каждого потребителя $P_{i,n_1}^{(1)}, \dots, P_{i,n_2}^{(2)}, \dots, P_{i,n_m}^{(m)}$. Рассмотрим далее полином

$$\mathcal{P}_t = \sum_{l=1}^m P_{i,n_l}^{(l)}, \quad (6.26)$$

который соответствует суммарным наблюдаемым потребностям по всем потребителям:

$$x_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} + \dots + x_t^{(m)}, \quad (6.27)$$

где $t' = 0, \dots, t$.

Возникает естественный вопрос о том, целесообразно ли для прогноза значений $x_{t+\tau}$ использовать полином \mathcal{P}_t .

Обозначим:

$$n^* = \max_{1 \leq l \leq m} n_l. \quad (6.28)$$

Используя рассуждения, приведенные выше, можно сказать, что n^* является степенью полинома \mathcal{P}_t , или, другими словами,

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_{t, n^*}.$$

Полином \mathcal{P}_{t, n^*} не совпадает с полиномом Q_{t, n^*} , который получается, если операцию сглаживания по формуле (6.3) применить к сумме наблюдаемых потребностей или суммарному наблюдаемому спросу x_t для построения полинома, оптимального по критерию минимума ошибки вида (6.17).

При этом считается, что наилучший в смысле минимума выражения (6.17) интерполяционный полином обеспечивает и наилучший прогноз. Это будет справедливо

в том случае, если выбранная степень полинома (прогноз строится в классе полиномов определенной степени) адекватна реальному процессу потребления. Методологически вопрос об адекватности в рамках теории экспоненциального сглаживания не рассматривается [161*].

Если процедуру построения полинома $Q_{t,n}$ повторить для различных значений $n = 0, 1, \dots, n^*, \dots, N$, а затем по минимальной ошибке

$$\varepsilon_{t, n^{(0)}} = \min_{0 \leq n \leq N} \varepsilon_{t, n}$$

выбрать наилучший из этих полиномов, то полученный прогноз можно улучшить. Отсюда следует, что применение суммы отдельных прогнозов $P_{t,n_i}^{(l)}$ в виде полинома \mathcal{P}_{t,n^*} для прогнозирования суммы вида

$$x_t = \sum_{l=1}^m x_t^{(l)}$$

нецелесообразно. Прогноз следует осуществлять применительно к суммарным наблюдаемым потребностям x_t .

Может, однако, оказаться, что наблюдения по ряду причин имеют различные календарные даты t_l ($l = 1, \dots, m$). Производя перенумерацию потребителей в порядке увеличения t_l , положим, что $t_1 = 0$. Тогда информация о потреблении за различные периоды (годы) представляется в виде следующей таблицы:

$x_0^{(1)}$	$x_1^{(1)}$	\dots	$x_{t_2}^{(1)}$	\dots	$x_{t_m}^{(1)}$	\dots	$x_t^{(1)}$	• (6.29)
		\dots	$x_{t_2}^{(2)}$	\dots	$x_{t_m}^{(2)}$	\dots	$x_t^{(2)}$	
			\vdots		\vdots			
		\dots		\dots	$x_{t_m}^{(m)}$	\dots	$x_t^{(m)}$	

Аналогичная процедура необходима для построения оптимального полинома Q , но ее не удается осуществить,

так как теперь суммарные потребности или спрос по отдельным потребителям определены не для всех значений t' , а только для

$$t' = t_m, \dots, t. \quad (6.30)$$

Можно построить полином $Q_i^{(m)}$, соответствующий части наблюдений, представляемой таблицей

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_{i_m}^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} \\ \hline \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \hline x_{i_m}^{(m)} & \dots & x_i^{(m)} \\ \hline \end{array}, \quad (6.31)$$

но при этом будет утеряна часть информации:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_0^{(1)} & \dots & x_{i_2}^{(1)} & \dots & x_{i_{m-1}}^{(1)} \\ \hline & \dots & x_{i_2}^{(2)} & \dots & x_{i_{m-1}}^{(2)} \\ \hline & & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ \hline & \dots & & \dots & x_{i_{m-1}}^{(m)} \\ \hline \end{array}. \quad (6.32)$$

Можно, вообще говоря, использовать полином

$$\mathcal{P}_{t, n^*} = \sum_{l=1}^m P_{t, n_l}^{(l)},$$

руководствуясь тем, что хотя он и не оптимален, но для его построения используется вся информация о спросе в прошлом. При построении полинома $P_{t, n_l}^{(l)}$ используются $(t - t_l + 1)$ точек наблюдений

$$x_{t_l}^{(l)}, \dots, x_t^{(l)} \quad (l = 1, \dots, m).$$

Можно пойти по другому пути, а именно, использовать полином $P_{l,n_l}^{(l)}$ для экстраполяции в прошлое, т. е. для получения недостающих в прошлом точек наблюдений в моменты $t' < t_l$ для $t' = 0, \dots, t_l - 1$.

В результате можно получить значения

$$\hat{x}_0^{(l)}, \hat{x}_1^{(l)}, \dots, \hat{x}_{t_l-1}^{(l)},$$

которые будут наиболее близки к фактическим значениям не наблюдавшихся по ряду причин потребностей. Осуществив такую процедуру для всех $l = 2, \dots, m$, получим расширенную информацию за счет этой экстраполяции:

$x_0^{(1)}$	$x_1^{(1)}$...	$x_{t_m-1}^{(1)}$	$x_{t_m}^{(1)}$...	$x_t^{(1)}$
$\hat{x}_0^{(2)}$	$\hat{x}_1^{(2)}$...	$x_{t_m-1}^{(2)}$	$x_{t_m}^{(2)}$...	$x_t^{(2)}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
$\hat{x}_0^{(l)}$	$\hat{x}_1^{(l)}$...	$x_{t_m-1}^{(l)}$	$x_{t_m}^{(l)}$...	$x_t^{(l)}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
$\hat{x}_0^{(m)}$	$\hat{x}_1^{(m)}$...	$x_{t_m-1}^{(m)}$	$x_{t_m}^{(m)}$		$x_t^{(m)}$

(6.33)

Новая совокупность данных, представленная в виде (6.33), основывается на исходной таблице и полностью включает ее в себя. Теперь для расширенной таблицы можно определить $\hat{x}_{t'}$:

$$\hat{x}_{t'} = \begin{cases} \sum_{l=1}^m x_{t'}^{(l)} & t_m \leq t' \leq t, \\ \sum_{l=1}^k x_{t'}^{(l)} + \sum_{l=k+1}^m x_{t'}^{(l)}, & t_k \leq t' < t_{k+1}. \end{cases} \quad (6.34)$$

Для $t' \geq t_m$ $\hat{x}_{t'} = x_{t'}$, а при $t' < t_m$ в \hat{x} входят данные из таблицы (6.32). Для величин $\hat{x}_{t'}$ можно по описанной методике экспоненциального сглаживания [формула (6.5)] построить полином Q_t . Этот полином и следует использовать для прогноза суммарных потребностей в случае неодинаковой продолжительности наблюдений по разным потребителям.

В работе [168*] рассмотрены вопросы прогнозирования потребностей в эксплуатационном обслуживании и запасных деталях применительно к крупной транспортной организации с собственным отделом технического обслуживания. Устанавливается определенный порядок проведения капитальных ремонтов после пробега заданного километража, устраняются и небольшие неисправности, связанные с частичными текущими или аварийными ремонтами. Анализ этой системы включает учет издержек из-за содержания запасных двигателей и других деталей, содержания ремонтных подразделений и потерь из-за невыхода автобусов на маршруты по причинам неисправности. Работа ремонтного отдела, связанная одновременно с работой отдела снабжения, моделируется с помощью методов Монте-Карло на ЭЦВМ. Описание этой процедуры выходит за рамки данного обзора, и поэтому коснемся кратко оценки параметров системы обслуживания.

Для оценки интенсивностей мелких ремонтов и ремонтов полукapитальных (если, например, неисправность обнаружена в одном из цилиндров двигателя, и проводится полукapитальный ремонт) используется модель Хайнса и Модера, когда интенсивности отказов оцениваются с помощью выражения:

$$\hat{\lambda}_i = b_0 + b_1(i) + b_2(i^2) + \dots + e_i, \quad (6.35)$$

где e_i представляет случайную ошибку оценки или прогноза, i — «возраст» двигателя, измеряемый в пройденных километрах, b_0, b_1, b_2, \dots — коэффициенты, которые нужно определить. В (6.35) учитывается, что интенсивность отказов растет с «возрастом» или с числом пройденных километров пути. Математическое ожидание оценки определяется как

$$M[\hat{\lambda}_i] = b_0 + b_1(i) + b_2(i^2) + \dots, \quad (6.36)$$

где e_i — независимы по i и нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_i^2 . Дисперсия σ_i^2 предполагается постоянной по всем i . Для оценки коэффициентов этой модели используется метод наименьших квадратов. Показано, что вполне достаточно ограничиться полиномами второй степени. Аналогичный подход использовался для прогноза числа более сложных ремонтов.

В работе [165*] предлагается корректировать прогнозы по формуле Байеса, хотя, как замечает автор, в многопродуктовых системах управления запасами и снабжения прогноз потребления основан обычно на изучении предыстории спроса и применении экспоненциального сглаживания. В ряде случаев при решении задач управления запасами и выбора рациональных форм снабжения используются вероятностные характеристики спроса, и потому прогнозы в заданном классе распределений вероятностей достаточно удобны. Пусть, например, предыстория задана в виде N наблюдений, причем выборочное среднее значение наблюдений равно D . Прогноз определяется условным распределением $p(x | D)$, если наблюдается текущее значение D . Для $p(x | D)$ можно записать:

$$p(x | D) = \frac{p(D | x) p(x)}{\int_x p(D | x) p(x) dx}, \quad (6.37)$$

а условное математическое ожидание прогноза

$$M[x | D] = \frac{\int_x x p(D | x) p(x) dx}{\int_x p(D | x) p(x) dx}. \quad (6.38)$$

Но при таком подходе постулируется вид распределения $p(x)$. Если, например, спрос распределен нормально с неизвестным средним значением и известной дисперсией s^2 , то условная плотность вероятности наблюдения выборочного среднего D в серии из N независимых испытаний определится как

$$p(D | x) = \frac{\sqrt{N}}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -N(D - x)^2 / 2s^2 \right\}. \quad (6.39)$$

Если же имеется информация, позволяющая оценить среднее как u_0 , а дисперсия при этом равна σ^2 и априорное распределение также нормально, то условное математическое ожидание $M[x | D]$ можно представить как

$$M(x | D) = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \frac{s^2}{N}} D + \frac{\frac{s^2/N}{\sigma_0^2 + \frac{s^2}{N}}}{\sigma_0^2 + \frac{s^2}{N}} u_0. \quad (6.40)$$

Иначе говоря, прогноз можно представить как

$$u_1 = (1 - \beta) D + \beta u_0 \quad (6.41)$$

или в виде

$$u_2 = (1 - \theta) D + u_0. \quad (6.42)$$

Когда оценка спроса u_0 смешивается с текущим средним наблюдаемым спросом D , то для него можно определить оптимальное значение коэффициента θ по критерию минимума ошибки прогноза. В [165*] байесовский подход обобщается на случай многономенклатурного спроса.

Байесовский подход позволяет осуществлять не сам прогноз, а лишь корректировать его на основе дополнительно наблюдаемых данных. При стационарном спросе такой подход может быть достаточно эффективен, если, скажем, задача сводится к оцениванию неизвестного параметра распределения, выбранного из заданного класса распределений. Однако возникает естественный вопрос, как *часто* такую корректировку осуществлять, чтобы, с одной стороны, избежать значительных запаздываний, а с другой, — не реагировать на незначительные возмущения из-за помех.

Идеи экспоненциального сглаживания применительно к задачам прогноза спроса восходят к работам Холта, который в 1957 г. предложил двухпараметрический метод прогнозирования. Позднее, в 1959 г., Браун усовершенствовал этот подход, сократив число параметров до одного. Одновременно Бокс и Дженкинс [160*] разработали методы адаптивного сглаживания, но не для задач прогнозирования, а для задач, возникающих при идентификации, фильтрации и управлении с упреждением.

Если в момент t модель прогноза спроса является константой, то прогноз

$$F_k(t) = m_t, \quad (6.43)$$

где m_t определяется на основе сглаживания:

$$m_t = \alpha d_t + (1 - \alpha) m_{t-1}, \quad (6.44)$$

причем d_t представляет наблюдаемый спрос в момент времени t , α — постоянная сглаживания, $F_k(t)$ означает, что прогноз осуществляется на k шагов вперед в момент времени t .

Соотношение (6.44) можно переписать в виде

$$m_t = m_{t-1} + \alpha e_t, \quad (6.45)$$

где

$$e_t = d_t - F_1(t-1). \quad (6.46)$$

Для константной модели прогноза методы Холта, Брауна и Бокса — Дженкинса оказываются тождественными.

В случае линейной модели прогноз спроса можно представить в виде

$$F_k(t) = m_t + kb_t, \quad (6.47)$$

если прогноз осуществляется на k шагов вперед, и

$$F_1(t) = m_t + b_t, \text{ если } k = 1.$$

По методу Холта для m_t и b_t имеем

$$\begin{aligned} m_t &= \alpha d_t + (1 - \alpha)(m_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(m_t - m_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \leq 1$, d_t — наблюдаемый спрос за t -й месяц.

Уравнения (6.48) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} m_t &= m_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t, \\ b_t &= b_{t-1} + \alpha\beta e_t, \end{aligned} \quad (6.49)$$

где ошибка прогноза равна

$$e_t = d_t - F_1(t-1). \quad (6.50)$$

В случае линейного прогноза (6.47) по методу Брауна имеем

$$\begin{aligned} m_t &= m_{t-1} + b_{t-1} + (1 - \beta)^2 e_t, \\ b_t &= b_{t-1} + (1 - \beta)^2 e_t, \end{aligned} \quad (6.51)$$

где β — коэффициент, который следует понимать как некоторый «вес», с которым наблюдения за спросом теряют свою значимость.

Полиномиальная модель Бокса и Дженкинса обеспечивает прогноз на k периодов вперед в виде

$$F_k(t) = \sum_{i=0}^n b_i k^i, \quad (6.52)$$

причем

$$\begin{aligned} b_0(t) &= F_1(t-1) + A_0 e_t, \\ b_1(t) &= \sum_{i=1}^n b_i(t-1) + A_1 e_t, \end{aligned} \quad (6.53)$$

и в общем случае

$$b_k(t) = \sum_{i=k}^n b_i(t-1) + A_k e_t. \quad (6.54)$$

При прогнозировании несезонного спроса метод экспоненциального сглаживания, предложенный Брауном, обладает рядом преимуществ: он

1) основан на использовании концепции «взвешенной» регрессии,

2) является однопараметрическим подходом,

3) достаточно прост в реализации.

Для сезонного характера потребления прогноз строится в аддитивной или мультипликативной форме:

$$F_t = T_t + s_t, \quad (6.55)$$

$$F_t = T_t s_t, \quad (6.56)$$

где T_t означает тренд, а s_t — сезонный фактор. Легко заметить, что операция логарифмирования приводит форму прогноза (6.56) к (6.55).

В работе [164*] предлагается комбинированный метод построения прогноза, основанный на одновременном использовании идей экспоненциального сглаживания и множественной регрессии. Рассматривается прогнозирование в случае, когда в наличии имеются устойчивая составляющая спроса и сезонная составляющая, причем, если в устойчивой составляющей имеется тренд, эта компонента представляется в виде

$$P_t = P_{t-1} + \omega(D_t - P_{t-1}), \quad (6.57)$$

где D_t — наблюдение за период t , а $0 \leq \omega \leq 1$.

Завершая краткий обзор методов прогноза применительно к определению потребностей в запчастях и материалах, отметим, что математическое моделирование систем обеспечения резервным оборудованием, запасами и материалами требует для своего практического использования проверки соответствия модели реальным условиям.

Такое соответствие и может быть проверено, в частности, методами, описанными в обзорной главе 6.

Таблица П.1

Обобщенное биномиальное распределение

$$R_1(x) = \sum_{i=0}^x \binom{\frac{z}{\alpha} + x}{i} (1 - e^{-\alpha a})^i e^{-\alpha a} \left(\frac{z}{\alpha} + x - i\right)$$

$$a = \int_0^{t_0} \lambda(u) du, \quad z = 1$$

α	x					
	0	1	2	3	4	5
α=0,05						
0,05	0,95122	0,99879	0,99998			
0,10	0,90484	0,99532	0,99985			
0,15	0,86071	0,98981	0,99950	0,99998		
0,20	0,81873	0,98248	0,99885	0,99994		
0,25	0,77880	0,97350	0,99784	0,99987	0,99999	
0,30	0,74082	0,96306	0,99640	0,99973	0,99998	
0,35	0,70469	0,95133	0,99449	0,99953	0,99997	
0,40	0,67032	0,93845	0,99207	0,99922	0,99994	
0,45	0,63763	0,92456	0,98912	0,99880	0,99989	
0,50	0,60653	0,90979	0,98561	0,99825	0,99983	0,99999
0,55	0,57695	0,89427	0,98154	0,99753	0,99973	0,99998
0,60	0,54881	0,87810	0,97688	0,99664	0,99961	0,99996
0,65	0,52205	0,86138	0,97166	0,99555	0,99944	0,99994
0,70	0,49659	0,84420	0,96586	0,99425	0,99921	0,99991
0,75	0,47237	0,82664	0,95949	0,99271	0,99894	0,99987
0,80	0,44933	0,80879	0,95258	0,99092	0,99859	0,99982
0,85	0,42741	0,79072	0,94512	0,98887	0,99817	0,99974
0,90	0,40657	0,77248	0,93714	0,98654	0,99766	0,99966
0,95	0,38674	0,75415	0,92866	0,98393	0,99705	0,99954
1,00	0,36788	0,73576	0,91970	0,98101	0,99634	0,99941
1,05	0,34994	0,71737	0,91028	0,97779	0,99551	0,99924
1,10	0,33287	0,69903	0,90042	0,97426	0,99456	0,99903
1,15	0,31664	0,68077	0,89015	0,97041	0,99348	0,99879
1,20	0,30119	0,66263	0,87949	0,96623	0,99225	0,99850
1,25	0,28650	0,64464	0,86847	0,96173	0,99088	0,99816
1,30	0,27253	0,62682	0,85711	0,95690	0,98934	0,99777

Таблица П.1 (продолжение)

α	x					
	0	1	2	3	4	5
1,35	0,25924	0,60921	0,84545	0,95175	0,98763	0,99732
1,40	0,24660	0,59183	0,83350	0,94627	0,98575	0,99680
1,45	0,23457	0,57470	0,82129	0,94048	0,98368	0,99621
1,55	0,22313	0,55783	0,80885	0,93436	0,98142	0,99554
1,50	0,21225	0,54123	0,79620	0,92793	0,97897	0,99479
1,60	0,20190	0,52493	0,78336	0,92119	0,97632	0,99396
1,65	0,19205	0,50893	0,77036	0,91415	0,97346	0,99303
1,70	0,18268	0,49325	0,75722	0,90681	0,97039	0,99200
1,75	0,17377	0,47788	0,74397	0,89919	0,96710	0,99087
1,80	0,16530	0,46884	0,73062	0,89129	0,96359	0,98962
1,85	0,15724	0,44212	0,71720	0,88313	0,95987	0,98826
1,90	0,14957	0,43375	0,70372	0,87470	0,95592	0,98678
1,95	0,14227	0,41971	0,69021	0,86603	0,95175	0,98517
2,00	0,13534	0,40601	0,67668	0,85712	0,94735	0,98344
$\alpha = 0,1$						
0,05		0,99867	0,99997			
0,10		0,99487	0,99980	0,99999		
0,15		0,98885	0,99934	0,99997		
0,20		0,98085	0,99851	0,99990	0,99999	
0,25		0,97109	0,99720	0,99978	0,99998	
0,30		0,95976	0,99535	0,99956	0,99996	
0,35		0,94706	0,99291	0,99922	0,99993	
0,40		0,93316	0,98984	0,99873	0,99986	0,99999
0,45		0,91820	0,98610	0,99805	0,99976	0,99997
0,50		0,90234	0,98168	0,99717	0,99962	0,99995
0,55		0,88570	0,97658	0,99603	0,99942	0,99992
0,60		0,86841	0,97078	0,99463	0,99914	0,99988
0,65		0,85058	0,96430	0,99292	0,99878	0,99981
0,70		0,83231	0,95714	0,99090	0,99832	0,99972
0,75		0,81368	0,94932	0,98853	0,99774	0,99960
0,80		0,79479	0,94087	0,98580	0,99702	0,99944
0,85		0,77571	0,93180	0,98268	0,99616	0,99923
0,90		0,75650	0,92215	0,97918	0,99513	0,99897
0,95		0,73723	0,91194	0,97527	0,99392	0,99865
1,00		0,71796	0,90119	0,97094	0,99251	0,99826
1,05		0,69874	0,88996	0,96620	0,99090	0,99779
1,10		0,67961	0,87826	0,96103	0,98905	0,99722
1,15		0,66031	0,86613	0,95544	0,98697	0,99656
1,20		0,64178	0,85361	0,94942	0,98463	0,99578
1,25		0,62316	0,84072	0,94298	0,98203	0,99488

Т а б л и ц а П.1 (продолжение)

a	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,60476	0,82751	0,93613	0,97916	0,99385
1,35	0,58662	0,81400	0,92887	0,97601	0,99268
1,40	0,56876	0,80024	0,92120	0,97256	0,99135
1,45	0,55119	0,78624	0,91314	0,96881	0,98958
1,50	0,53393	0,77204	0,90471	0,96476	0,98819
1,55	0,51700	0,75767	0,89590	0,96040	0,98634
1,60	0,50041	0,74317	0,88674	0,95573	0,98429
1,65	0,48417	0,72855	0,87724	0,95075	0,98205
1,70	0,46828	0,71385	0,86742	0,94544	0,97960
1,75	0,45276	0,69909	0,85728	0,93982	0,97692
1,80	0,43760	0,68430	0,84686	0,93389	0,97403
1,85	0,42280	0,66950	0,83616	0,92764	0,97090
1,90	0,40838	0,65470	0,82520	0,92108	0,96754
1,95	0,39433	0,63994	0,81400	0,91422	0,96393
2,00	0,38066	0,62524	0,80258	0,90705	0,96008
$\alpha = 0,2$					
0,05	0,99855	0,99997			
0,10	0,99442	0,99974	0,99999		
0,15	0,98790	0,99917	0,99995		
0,20	0,97925	0,99813	0,99985	0,99999	
0,25	0,96871	0,99650	0,99966	0,99997	
0,30	0,95653	0,99421	0,99933	0,99993	0,99999
0,35	0,94289	0,99121	0,99883	0,99986	0,99998
0,40	0,92800	0,98744	0,99810	0,99974	0,99997
0,45	0,91203	0,98288	0,99711	0,99956	0,99994
0,50	0,89513	0,97752	0,99581	0,99929	0,99989
0,55	0,87744	0,97135	0,99417	0,99892	0,99982
0,60	0,85911	0,96437	0,99215	0,99842	0,99971
0,65	0,84024	0,95661	0,98971	0,99779	0,99956
0,70	0,82096	0,94809	0,98684	0,99697	0,99935
0,75	0,80135	0,93883	0,98351	0,99595	0,99908
0,80	0,78151	0,92885	0,97969	0,99472	0,99872
0,85	0,76151	0,91821	0,97537	0,99324	0,99827
0,90	0,74144	0,90693	0,97054	0,99150	0,99771
0,95	0,72135	0,89505	0,96519	0,98946	0,99702
1,00	0,70131	0,88263	0,95932	0,98712	0,99619
1,05	0,68136	0,86968	0,95292	0,98445	0,99520
1,10	0,66155	0,85627	0,94600	0,98144	0,99404
1,15	0,64193	0,84244	0,93857	0,97807	0,99268
1,20	0,62253	0,82822	0,93062	0,97432	0,99111
1,25	0,60338	0,81365	0,92218	0,97020	0,98932

Таблица П.1 (продолжение)

a	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,58451	0,79879	0,91326	0,96568	0,98728
1,35	0,56595	0,78367	0,90387	0,96076	0,98499
1,40	0,54771	0,76832	0,89404	0,95544	0,98243
1,45	0,52982	0,75279	0,88377	0,94971	0,97959
1,50	0,51229	0,73712	0,87309	0,94357	0,97645
1,55	0,49512	0,72133	0,86202	0,93702	0,97301
1,60	0,47834	0,70546	0,85058	0,93007	0,96925
1,65	0,46195	0,68954	0,83881	0,92272	0,96517
1,70	0,44596	0,67361	0,82671	0,91497	0,96076
1,75	0,43036	0,65768	0,81432	0,90683	0,95601
1,80	0,41517	0,64179	0,80166	0,89832	0,95092
1,85	0,40036	0,62596	0,78875	0,88944	0,94549
1,90	0,38599	0,61022	0,77562	0,88020	0,93971
1,95	0,37201	0,59458	0,76229	0,87062	0,93359
2,00	0,35842	0,57906	0,74879	0,86071	0,92712
$\alpha = 0,3$					
0,05	0,99844	0,99996			
0,10	0,99398	0,99969	0,99999		
0,15	0,98695	0,99899	0,99993		
0,20	0,97766	0,99771	0,99979	0,99998	
0,25	0,96638	0,99575	0,99952	0,99995	
0,30	0,95336	0,99299	0,99906	0,99988	0,99999
0,35	0,93882	0,98939	0,99835	0,99976	0,99997
0,40	0,92299	0,98489	0,99733	0,99956	0,99993
0,45	0,90604	0,97948	0,99596	0,99926	0,99987
0,50	0,88815	0,97314	0,99419	0,99883	0,99978
0,55	0,86948	0,96588	0,99195	0,99823	0,99963
0,60	0,85016	0,95772	0,98922	0,99743	0,99942
0,65	0,83034	0,94868	0,98595	0,99641	0,99913
0,70	0,81012	0,93880	0,98213	0,99512	0,99873
0,75	0,78961	0,92811	0,97772	0,99354	0,99821
0,80	0,76891	0,91665	0,97270	0,99163	0,99756
0,85	0,74810	0,90448	0,96706	0,98937	0,99673
0,90	0,72725	0,89165	0,96081	0,98672	0,99571
0,95	0,70643	0,87820	0,95392	0,98366	0,99447
1,00	0,68570	0,86418	0,94642	0,98017	0,99300
1,05	0,66513	0,84966	0,93830	0,97623	0,99126
1,10	0,64474	0,83468	0,92958	0,97182	0,98923
1,15	0,62460	0,81929	0,92028	0,96693	0,98690
1,20	0,60472	0,80354	0,91040	0,96155	0,98423
1,25	0,58515	0,78749	0,89998	0,95568	0,98122

Таблица П.1 (продолжение)

a	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,56591	0,77118	0,88904	0,94930	0,97784
1,35	0,54702	0,75466	0,87760	0,94242	0,97408
1,40	0,52850	0,73797	0,86569	0,93504	0,96992
1,45	0,51037	0,72116	0,85334	0,92716	0,95536
1,50	0,49265	0,70426	0,84058	0,91880	0,96037
1,55	0,47534	0,68737	0,82745	0,90996	0,95496
1,60	0,45845	0,67036	0,81397	0,90065	0,94912
1,65	0,44199	0,65342	0,80017	0,89089	0,94284
1,70	0,42596	0,63654	0,78610	0,88070	0,93613
1,75	0,41036	0,61974	0,77177	0,87009	0,92809
1,80	0,39520	0,60305	0,75722	0,85908	0,92141
1,85	0,38048	0,58649	0,74249	0,84769	0,91341
1,90	0,36618	0,57009	0,72759	0,83594	0,90498
1,95	0,35232	0,55387	0,71257	0,82386	0,89615
2,00	0,33887	0,53785	0,69745	0,81146	0,88691
$\alpha = 0,4$					
0,05	0,99832	0,99995			
0,10	0,99354	0,99962	0,99998		
0,15	0,98602	0,99879	0,99990	0,99999	
0,20	0,97610	0,99727	0,99971	0,99997	
0,25	0,96408	0,99494	0,99934	0,99992	0,99999
0,30	0,95025	0,99169	0,99872	0,99981	0,99997
0,35	0,93484	0,98746	0,99777	0,99962	0,99994
0,40	0,91810	0,98221	0,99643	0,99932	0,99987
0,45	0,90022	0,97592	0,99462	0,99886	0,99977
0,50	0,88139	0,96859	0,99229	0,99820	0,99960
0,55	0,86179	0,96023	0,98939	0,99731	0,99934
0,60	0,84156	0,95088	0,98587	0,99613	0,99898
0,65	0,82085	0,94057	0,98168	0,99463	0,99848
0,70	0,79977	0,92935	0,97681	0,99275	0,99781
0,75	0,77844	0,91726	0,97123	0,99047	0,99695
0,80	0,75695	0,90438	0,96494	0,98774	0,99586
0,85	0,73540	0,89075	0,95791	0,98453	0,99450
0,90	0,71386	0,87644	0,95016	0,98081	0,99285
0,95	0,69240	0,86150	0,94169	0,97655	0,99088
1,00	0,67109	0,84602	0,93252	0,97174	0,98855
1,05	0,64997	0,83004	0,92267	0,96635	0,98583
1,10	0,62910	0,81363	0,91215	0,96038	0,98269
1,15	0,60851	0,79684	0,90100	0,95381	0,97912
1,20	0,58824	0,77974	0,88925	0,94665	0,97509
1,25	0,56833	0,76239	0,87692	0,93889	0,97058

Таблица П.1 (продолжение)

а.	х				
	1	2	3	4	5
1,30	0,54880	0,74483	0,86406	0,93054	0,96558
1,35	0,52966	0,72712	0,85071	0,92161	0,96007
1,40	0,51094	0,70930	0,83689	0,91211	0,95404
1,45	0,49266	0,69143	0,82265	0,90206	0,94749
1,50	0,47481	0,67354	0,80803	0,89147	0,94041
1,55	0,45742	0,65567	0,79308	0,88037	0,93281
1,60	0,44049	0,63787	0,77782	0,86878	0,92468
1,65	0,42402	0,62016	0,76230	0,85673	0,91604
1,70	0,40802	0,60257	0,74656	0,84424	0,90689
1,75	0,39247	0,58515	0,73063	0,83134	0,89725
1,80	0,37740	0,56790	0,71456	0,81807	0,88712
1,85	0,36278	0,55086	0,69838	0,80444	0,87654
1,90	0,34862	0,53405	0,68212	0,79050	0,86550
1,95	0,33491	0,51749	0,66582	0,77627	0,85404
2,00	0,32165	0,50119	0,64950	0,76179	0,84218
$\alpha = 0,5$					
0,05	0,99820	0,99994			
0,10	0,99310	0,99955	0,99997		
0,15	0,98509	0,99857	0,99987	0,99999	
0,20	0,97456	0,99680	0,99962	0,99996	0,99999
0,25	0,96182	0,99408	0,99914	0,99988	0,99998
0,30	0,94720	0,99032	0,99833	0,99972	0,99995
0,35	0,93095	0,98544	0,99711	0,99945	0,99990
0,40	0,91334	0,97941	0,99538	0,99900	0,99979
0,45	0,89457	0,97223	0,99309	0,99834	0,99961
0,50	0,87486	0,96389	0,99015	0,99741	0,99934
0,55	0,85438	0,95443	0,98651	0,99615	0,99893
0,60	0,83330	0,94389	0,98212	0,99450	0,99835
0,65	0,81175	0,93233	0,97694	0,99241	0,99757
0,70	0,78988	0,91980	0,97096	0,98984	0,99653
0,75	0,76779	0,90637	0,96415	0,98673	0,99521
0,80	0,74560	0,89211	0,95651	0,98305	0,99355
0,85	0,72338	0,87709	0,94805	0,97876	0,99152
0,90	0,70123	0,86139	0,93878	0,97383	0,98907
0,95	0,67921	0,84508	0,92871	0,96824	0,98617
1,00	0,65738	0,82824	0,91788	0,96197	0,98279
1,05	0,63580	0,81094	0,90631	0,95501	0,97888
1,10	0,61451	0,79324	0,89405	0,94736	0,97442
1,15	0,59356	0,77521	0,88112	0,93902	0,96940
1,20	0,57298	0,75693	0,86759	0,92999	0,96378
1,25	0,55280	0,73844	0,85348	0,92030	0,95757

Таблица П.1 (продолжение)

α	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,53304	0,71982	0,83884	0,90995	0,95074
1,35	0,51373	0,70111	0,82374	0,89898	0,94329
1,40	0,49488	0,68236	0,80820	0,88739	0,93522
1,45	0,47649	0,66363	0,79229	0,87523	0,92655
1,50	0,45859	0,64495	0,77605	0,86252	0,91727
1,55	0,44118	0,62637	0,75953	0,84930	0,90739
1,60	0,42425	0,60792	0,74278	0,83560	0,89694
1,65	0,40782	0,58965	0,72583	0,82146	0,88593
1,70	0,39189	0,57156	0,70874	0,80693	0,87439
1,75	0,37644	0,55372	0,69155	0,79202	0,86233
1,80	0,36149	0,53612	0,67430	0,77680	0,84979
1,85	0,34701	0,51880	0,65702	0,76129	0,83679
1,90	0,33302	0,50177	0,63975	0,74553	0,82337
1,95	0,31949	0,48505	0,62254	0,72957	0,80956
2,00	0,30643	0,46866	0,60539	0,71343	0,79539
$\alpha = 0,6$					
0,05	0,99808	0,99993			
0,10	0,99266	0,99948	0,99996		
0,15	0,98417	0,99834	0,99998		
0,20	0,97303	0,99630	0,99951	0,99994	0,99999
0,25	0,95960	0,99318	0,99890	0,99983	0,99997
0,30	0,94421	0,98888	0,99788	0,99961	0,99993
0,35	0,92715	0,98334	0,99634	0,99922	0,99984
0,40	0,90870	0,97652	0,99420	0,99861	0,99967
0,45	0,88909	0,96842	0,99137	0,99770	0,99940
0,50	0,86853	0,95908	0,98776	0,99643	0,99898
0,55	0,84723	0,94852	0,98332	0,99473	0,99836
0,60	0,82534	0,93681	0,97800	0,99253	0,99751
0,65	0,80303	0,92402	0,97178	0,98977	0,99635
0,70	0,78043	0,91022	0,96463	0,98639	0,99485
0,75	0,73765	0,89549	0,95654	0,98235	0,99295
0,80	0,73482	0,87992	0,94754	0,97761	0,99060
0,85	0,71201	0,86360	0,93762	0,97212	0,98774
0,90	0,68931	0,84660	0,92682	0,96587	0,98433
0,95	0,66679	0,82902	0,91517	0,95884	0,98034
1,00	0,64452	0,81094	0,90271	0,95102	0,97572
1,05	0,62254	0,79244	0,88949	0,94242	0,97045
1,10	0,60091	0,77359	0,87555	0,93303	0,96450
1,15	0,57967	0,75447	0,86096	0,92288	0,95786
1,20	0,55884	0,73515	0,84576	0,91198	0,95051
1,25	0,53845	0,71570	0,83001	0,90037	0,94215

Таблица П.1 (продолжение)

α	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,51853	0,69618	0,81377	0,88807	0,93368
1,35	0,49910	0,67664	0,79710	0,87512	0,92421
1,40	0,48016	0,65714	0,78006	0,86156	0,91405
1,45	0,46173	0,63772	0,76270	0,84743	0,90322
1,50	0,44382	0,61843	0,74508	0,83277	0,89174
1,55	0,42642	0,59932	0,72726	0,81763	0,87964
1,60	0,40955	0,58041	0,70928	0,80206	0,86695
1,65	0,39320	0,56174	0,69119	0,78610	0,85370
1,70	0,37736	0,54334	0,67305	0,76980	0,83992
1,75	0,36205	0,52523	0,65489	0,75322	0,82566
1,80	0,34724	0,50744	0,63676	0,73639	0,81096
1,85	0,33293	0,48999	0,61869	0,71936	0,79585
1,90	0,31912	0,47290	0,60073	0,70218	0,78038
1,95	0,30580	0,45617	0,58291	0,68488	0,76458
2,00	0,29296	0,43982	0,56525	0,66752	0,74851
$\alpha = 0,7$					
0,05	0,99797	0,99992			
0,10	0,99223	0,99940	0,99996		
0,15	0,98327	0,99810	0,99979	0,99998	
0,20	0,97153	0,99577	0,99939	0,99991	0,99999
0,25	0,95742	0,99224	0,99863	0,99976	0,99996
0,30	0,94128	0,98739	0,99737	0,99946	0,99989
0,35	0,92344	0,98116	0,99549	0,99894	0,99975
0,40	0,90418	0,97353	0,99289	0,99812	0,99951
0,45	0,88376	0,96452	0,98946	0,99692	0,99911
0,50	0,86241	0,95417	0,98513	0,99526	0,99851
0,55	0,84033	0,94252	0,97985	0,99305	0,99763
0,60	0,81769	0,92967	0,97355	0,99022	0,99642
0,65	0,79467	0,91568	0,96624	0,98670	0,99482
0,70	0,77139	0,90065	0,95788	0,98242	0,99275
0,75	0,74799	0,88469	0,94850	0,97736	0,99015
0,80	0,72457	0,86788	0,93811	0,97145	0,98697
0,85	0,70123	0,85033	0,92674	0,96468	0,98315
0,90	0,67805	0,83213	0,91444	0,95703	0,97864
0,95	0,65510	0,81338	0,90124	0,94849	0,97341
1,00	0,63245	0,79417	0,88722	0,93908	0,96742
1,05	0,61014	0,77459	0,87242	0,92879	0,96065
1,10	0,58822	0,75473	0,85691	0,91766	0,95308
1,15	0,56674	0,73465	0,84076	0,90572	0,94471
1,20	0,54572	0,71445	0,82404	0,89299	0,93554
1,25	0,52518	0,69418	0,80681	0,87953	0,92557

Таблица П.1 (продолжение)

α	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,50515	0,67391	0,78915	0,86538	0,91483
1,35	0,48564	0,65370	0,77111	0,85058	0,90333
1,40	0,46666	0,63359	0,75277	0,83520	0,89110
1,45	0,44823	0,61365	0,73419	0,81928	0,87818
1,50	0,43034	0,59391	0,71542	0,80288	0,86461
1,55	0,41300	0,57541	0,69654	0,78606	0,85042
1,60	0,39621	0,55518	0,67758	0,76888	0,83566
1,65	0,37997	0,53626	0,65861	0,75139	0,82038
1,70	0,36427	0,51768	0,63967	0,73364	0,80463
1,75	0,34910	0,49945	0,62081	0,71570	0,78846
1,80	0,33446	0,48160	0,60206	0,69760	0,77191
1,85	0,32034	0,46414	0,58348	0,67941	0,75504
1,90	0,30673	0,44709	0,56508	0,66116	0,73789
1,95	0,29362	0,43046	0,54691	0,64291	0,72052
2,00	0,28100	0,41425	0,52899	0,62470	0,70298
$\alpha = 0,8$					
0,05	0,99785	0,99991			
0,10	0,99180	0,99932	0,99994		
0,15	0,98237	0,99785	0,99974	0,99997	
0,20	0,97005	0,99522	0,99925	0,99988	0,99998
0,25	0,95527	0,99125	0,99832	0,99968	0,99994
0,30	0,93841	0,98584	0,99680	0,99928	0,99984
0,35	0,91981	0,97891	0,99455	0,99861	0,99965
0,40	0,89978	0,97047	0,99144	0,99755	0,99930
0,45	0,87859	0,96055	0,98739	0,99601	0,99875
0,50	0,85648	0,94919	0,98230	0,99389	0,99791
0,55	0,83367	0,93647	0,97611	0,99111	0,99671
0,60	0,81033	0,92249	0,96881	0,98757	0,99508
0,65	0,78664	0,90734	0,96036	0,98321	0,99293
0,70	0,76275	0,89114	0,95079	0,97796	0,99019
0,75	0,73877	0,87400	0,94010	0,97178	0,98679
0,80	0,71483	0,85602	0,92833	0,96464	0,98267
0,85	0,69101	0,83733	0,91553	0,95653	0,97776
0,90	0,66741	0,81802	0,90176	0,94743	0,97204
0,95	0,64409	0,79820	0,88708	0,93735	0,96545
1,00	0,62111	0,77798	0,87156	0,92632	0,95798
1,05	0,59852	0,75745	0,85529	0,91436	0,94962
1,10	0,57637	0,73669	0,83832	0,90152	0,94036
1,15	0,55470	0,71579	0,82076	0,88784	0,93020
1,20	0,53353	0,69483	0,80266	0,87337	0,91918
1,25	0,51389	0,67388	0,78412	0,85816	0,90731

Таблица П.1 (продолжение)

a	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,49279	0,65299	0,76520	0,84229	0,89462
1,35	0,47324	0,63224	0,74599	0,82581	0,88116
1,40	0,45427	0,61167	0,72655	0,80879	0,86696
1,45	0,43586	0,59133	0,70695	0,79129	0,85209
1,50	0,41804	0,57126	0,68726	0,77339	0,83658
1,55	0,40078	0,55150	0,66753	0,75514	0,82051
1,60	0,38410	0,53208	0,64783	0,73661	0,80392
1,65	0,36798	0,51304	0,62820	0,71787	0,78688
1,70	0,35243	0,49438	0,60869	0,69897	0,76944
1,75	0,33743	0,47613	0,58935	0,67997	0,75166
1,80	0,32297	0,45833	0,57021	0,66093	0,73361
1,85	0,30904	0,44095	0,55131	0,64189	0,71534
1,90	0,29564	0,42403	0,53269	0,62299	0,69690
1,95	0,28275	0,40757	0,51438	0,60401	0,67836
2,00	0,27035	0,39157	0,49639	0,58527	0,65975
$\alpha = 0,9$					
0,05	0,99774	0,99990			
0,10	0,99137	0,99923	0,99993	0,99999	
0,15	0,98148	0,99758	0,99969	0,99996	0,99999
0,20	0,96859	0,99464	0,99909	0,99985	0,99997
0,25	0,95315	0,99023	0,99798	0,99958	0,99991
0,30	0,91559	0,98023	0,99617	0,99908	0,99978
0,35	0,90626	0,97660	0,99351	0,99821	0,99951
0,40	0,89549	0,96735	0,98988	0,99688	0,99904
0,45	0,87357	0,95651	0,98515	0,99495	0,99829
0,50	0,85074	0,94415	0,97926	0,99233	0,99717
0,55	0,82724	0,93038	0,97215	0,98891	0,99560
0,60	0,80325	0,91531	0,96380	0,98459	0,99346
0,65	0,77895	0,89905	0,95421	0,97932	0,99069
0,70	0,75448	0,88172	0,94340	0,97303	0,98718
0,75	0,72999	0,86346	0,93141	0,96568	0,98288
0,80	0,70557	0,84439	0,91828	0,95726	0,97771
0,85	0,68133	0,82463	0,90409	0,94775	0,97162
0,90	0,65735	0,80431	0,88891	0,93718	0,96457
0,95	0,63370	0,78352	0,87282	0,92556	0,95654
1,00	0,61045	0,76239	0,85590	0,91293	0,94753
1,05	0,58763	0,74101	0,83825	0,89934	0,93752
1,10	0,56530	0,71947	0,81995	0,88485	0,92654
1,15	0,54348	0,69787	0,80110	0,86951	0,91460
1,20	0,52221	0,67627	0,78178	0,85340	0,90175
1,25	0,50149	0,65475	0,76209	0,83659	0,88803

Таблица П.1 (продолжение)

a	x				
	1	2	3	4	5
1,30	0,48136	0,63338	0,74210	0,81916	0,87348
1,35	0,46182	0,61221	0,72189	0,80117	0,85817
1,40	0,44287	0,59129	0,70154	0,78271	0,84215
1,45	0,42453	0,57066	0,68112	0,76386	0,82550
1,50	0,40678	0,55038	0,66069	0,74468	0,80827
1,55	0,38963	0,53047	0,64032	0,72525	0,79054
1,60	0,37308	0,51096	0,62006	0,70563	0,77238
1,65	0,35711	0,49187	0,59997	0,68591	0,75386
1,70	0,34171	0,47323	0,58008	0,66612	0,73503
1,75	0,32689	0,45505	0,56045	0,64634	0,71598
1,80	0,31262	0,43735	0,54110	0,62663	0,69675
1,85	0,29889	0,42013	0,52207	0,60702	0,67743
1,90	0,28570	0,40340	0,50339	0,58756	0,65805
1,95	0,27302	0,38717	0,48508	0,56831	0,63868
2,00	0,26085	0,37144	0,46717	0,54929	0,61936
$\alpha = 1,0$					
0,05	0,99762	0,99988	0,99999		
0,10	0,99094	0,99914	0,99992	0,99999	
0,15	0,98060	0,99730	0,99962	0,99995	0,99999
0,20	0,96714	0,99404	0,99892	0,99980	0,99996
0,25	0,95107	0,98918	0,99761	0,99947	0,99988
0,30	0,93282	0,98259	0,99549	0,99883	0,99970
0,35	0,91279	0,97425	0,99239	0,99775	0,99934
0,40	0,89131	0,96417	0,98819	0,99611	0,99872
0,45	0,86869	0,95242	0,98276	0,99375	0,99774
0,50	0,84518	0,93908	0,97603	0,99057	0,99629
0,55	0,82103	0,92429	0,96797	0,98645	0,99427
0,60	0,79643	0,90815	0,95856	0,98130	0,99156
0,65	0,77156	0,89082	0,94782	0,97506	0,98808
0,70	0,74657	0,87242	0,93578	0,96767	0,98372
0,75	0,72160	0,85311	0,92250	0,95911	0,97842
0,80	0,69676	0,83302	0,90805	0,94936	0,97236
0,85	0,67215	0,81228	0,89251	0,93845	0,96475
0,90	0,64784	0,79102	0,87598	0,92640	0,95633
0,95	0,62391	0,76936	0,85856	0,91326	0,94681
1,00	0,60042	0,74742	0,84034	0,89907	0,93620
1,05	0,57748	0,72530	0,82143	0,88392	0,92454
1,10	0,55494	0,70309	0,80192	0,86786	0,91184
1,15	0,53301	0,68088	0,78192	0,85098	0,89816
1,20	0,51167	0,65875	0,76153	0,83336	0,88355
1,25	0,49092	0,63678	0,74084	0,81509	0,86807

Т а б л и ц а П.1 (продолжение)

а	х				
	1	2	3	4	5
1,30	0,47079	0,61502	0,71994	0,79626	0,85179
1,35	0,45128	0,59353	0,69890	0,77696	0,83478
1,40	0,43238	0,57236	0,67781	0,75726	0,81712
1,45	0,41412	0,55155	0,65674	0,73726	0,79889
1,50	0,39647	0,53114	0,63576	0,71703	0,78017
1,55	0,37945	0,51116	0,61491	0,69665	0,76103
1,60	0,36303	0,49163	0,59427	0,67619	0,74156
1,65	0,34722	0,47258	0,57387	0,65571	0,72183
1,70	0,33199	0,45403	0,55377	0,63529	0,70191
1,75	0,31735	0,43598	0,53399	0,61497	0,68188
1,80	0,30327	0,41844	0,51457	0,59481	0,66179
1,85	0,28975	0,40143	0,49555	0,57486	0,64171
1,90	0,27677	0,38494	0,47693	0,55517	0,62170
1,95	0,26431	0,36898	0,45875	0,53576	0,60181
2,00	0,25235	0,35354	0,44103	0,51668	0,58209

Приращение логарифма распределения Пуассона

$$\ln \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{x+1} \frac{a^i}{i!}}{\sum_{i=0}^x \frac{a^i}{i!}} \right\}$$

a	x											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0,02	0,01680	0,00020										
0,04	0,03922	0,00077	0,00001									
0,06	0,05827	0,00169	0,00003									
0,08	0,07696	0,00296	0,00008									
0,10	0,09531	0,00454	0,00015									
0,20	0,18232	0,01652	0,00109	0,00005								
0,30	0,26296	0,03403	0,00334	0,00025	0,00002							
0,40	0,33647	0,05557	0,00718	0,00072	0,01006							
0,50	0,40547	0,08004	0,01273	0,00158	0,00016	0,00001						
0,60	0,47000	0,10661	0,02002	0,00297	0,00036	0,00003						
0,70	0,53063	0,13463	0,02897	0,00498	0,00070	0,00008	0,00001					

Таблица II.2 (продолжение)

α	x											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0,80	0,58779	0,16363	0,08946	0,00771	0,00123	0,00016	0,00002					
0,90	0,64185	0,19323	0,05137	0,01420	0,00200	0,00030	0,00004					
1,00	0,69315	0,22314	0,06434	0,01550	0,00307	0,00051	0,00007	0,00001				
1,10	0,74194	0,25316	0,07882	0,02063	0,00448	0,00072	0,00013	0,00002				
1,20	0,78846	0,28913	0,09406	0,02658	0,00627	0,00125	0,00021	0,00003				
1,30	0,83291	0,31290	0,11013	0,03333	0,00849	0,00183	0,00034	0,00005	0,00001			
1,40	0,87547	0,34241	0,12690	0,04087	0,01115	0,00256	0,00052	0,00009	0,00002			
1,50	0,91629	0,37156	0,14423	0,04915	0,01428	0,00354	0,00076	0,00014	0,00004			
1,60	0,95551	0,40032	0,16207	0,05813	0,01791	0,00472	0,00107	0,00022	0,00006	0,00001		
1,70	0,99325	0,42865	0,18028	0,06776	0,02203	0,00615	0,00149	0,00032	0,00006	0,00001		
1,80	1,02962	0,45652	0,19878	0,07800	0,02665	0,00786	0,00201	0,00045	0,00009	0,00002		
1,90	1,06471	0,48392	0,21750	0,08879	0,03178	0,00985	0,00266	0,00063	0,00013	0,00003		
2,00	1,09861	0,51083	0,23639	0,10008	0,03739	0,01216	0,00345	0,00086	0,00019	0,00004	0,00001	
3,00	1,38629	0,75777	0,42488	0,23081	0,11659	0,03357	0,02210	0,00817	0,00271	0,00081	0,00022	
4,00	1,60944	0,95551	0,59912	0,37205	0,22198	0,12461	0,06480	0,03089	0,01343	0,00532	0,00193	
5,00	1,79176	1,12601	0,75430	0,50807	0,33529	0,21300	0,10842	0,07262	0,03918	0,01855	0,00892	
6,00	1,94591	1,27296	0,89200	0,63406	0,44691	0,30778	0,20463	0,12397	0,07812	0,04410	0,02326	
7,00	2,07944	1,40180	1,01486	0,74939	0,55290	0,40246	0,28618	0,19702	0,13022	0,08201	0,04889	
8,00	2,19722	1,51635	1,12536	0,85481	0,65202	0,49389	0,36841	0,26363	0,19421	0,12972	0,08478	
9,00	2,30258	1,61939	1,22552	0,95142	0,74425	0,58074	0,44877	0,34131	0,25399	0,18388	0,12877	

ЛИТЕРАТУРА

1. А л а т ы р ц е в А. А., Применение метода линейного программирования для решения задач теории надежности, «Стандартизация», № 5, 1963.
2. А л е к с е е в О. Г., Я к у ш е в В. И., Об алгоритме оптимального резервирования аппаратуры, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1964.
3. Б е б и а ш в и л и Ш. Л., Н а м и ч е й ш в и л и О. М., Некоторые вопросы оптимального резервирования, Сообщения АН Груз. ССР, т. 37, № 3, 1965.
4. Б а ш а р и н Г. П., Х а р к е в и ч А. Д., Ш п е н с М. А., Массовое обслуживание в телефонии, «Наука», 1968.
5. Б е к к е н б а х З., Б е л л м а н Р., Введение в неравенства, перев. с англ., «Мир», 1965.
6. Б е л л м а н Р., Динамическое программирование, перев. с англ., ИЛ, 1960.
7. Б е л я е в Ю. К., Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, 1960.
8. Б р о н ш т е й н О. И., Р ы к о в В. В., Об оптимальных приоритетах в системах массового обслуживания, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1965.
9. Б р о н ш т е й н О. И., В е к л е р о в Е. Б., Об одной управляемой системе обслуживания, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1967.
10. Б р у е в и ч Н. Г., О надежности и точности автоматического производства, в сб. «Вопросы точности и надежности в машиностроении», Изд-во АН СССР, 1962.
11. В а р ж а п е т я н А. Г., Техническая эффективность и надежность судовых систем управления, «Судостроение», 1969.
12. Г а в р и л о в М. А., Структурная избыточность и надежность работы релейных устройств, Доклад на 1-м конгрессе ИФАК, 1960.
13. Г а р к а в и А. Л., Г о г о л е в с к и й В. Б., О надежности резервированных устройств, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 6, 1962.
14. Г е р ц б а х И. Б., Об оптимальном управлении включением резервных элементов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1966.

15. Гнеденко Б. В., О среднем простое станков при многостаночной работе, Изв. хлопчатобум. промышл., № 11, 1934.
16. Гнеденко Б. В. О ненагруженном дублировании, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1964.
17. Гнеденко Б. В., Наср Ю., О ненагруженном резервировании с восстановлением, Автоматика и телемеханика, № 7, 1968.
18. Гнеденко Б. В., Белая Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, «Наука», 1965.
19. Грабовецкий Б. П., Надежность резервированных групп с учетом запасных блоков, В сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», 1964.
20. Гуревич А. М., Применение динамического программирования к расчету оптимального количества запасных элементов, Труды ВЦНИИ комплексной автом., вып. 14, 1966.
21. Гуд Г., Макол Р., Введение в проектирование больших систем, перев. с англ., «Советское радио», 1962.
22. Дружинин Г. В., Зависимость эффективности резервирования от оперативного времени системы, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1958.
23. Жожикашвили В. А., Шмуклер Ю. И., Определение среднего времени работы бесконтактных устройств телеуправления, Автоматика и телемеханика, № 7, 1962.
24. Зубова А. Ф., О холодном резервировании с восстановлением, Автоматика и телемеханика, № 10, 1965.
25. Ивницкий В. А., Об одной задаче теории резервирования с переключением, в сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», 1964.
26. Каргузов Е. В., Феррит-диодные логические элементы в бесконтактных системах телемеханики, ОНТИПРИБОР, 1966.
27. Кельманс А. К., О некоторых оптимальных задачах теории надежности информационных сетей, Автоматика и телемеханика, № 5, 1964.
28. Козлов Б. А., О резервировании с восстановлением, «Советское радио», 1969.
29. Климов Г. П., Надежность систем из двух дублирующих приборов, в кн. «Вычисл. методы и программирование», Изд-во МГУ, вып. 3, 1965.
30. Коваленко И. Н., Некоторые вопросы надежности сложных систем, в сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», 1964.
31. Курдюков К. Н., К вопросу надежности релейно-контактных устройств, Автоматика и телемеханика, № 4, 1960.
32. Кузнецов И. Н., Алгоритм решения задачи наилучшего резервирования, в кн. «Прикладные задачи технической кибернетики», «Советское радио» 1966.
33. Кулаков Н. Н., Загоруйко А. С., Метод определения оптимального распределения надежности между от-

- дельными элементами системы, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1966.
34. Л е в и н Б. Р., О повышении надежности путем резервирования. Электросвязь, № 11, 1957.
 35. Л е в и н Б. Р., У ш а к о в И. А., Некоторые аспекты современного состояния проблемы надежности, Радиотехника, № 4, 1965.
 36. Л е о н т ь е в Л. П., Об определении оптимального способа соединения основного и резервного элементов, Автоматика и вычисл. техника, № 6, 1963.
 37. Л и н к о в с к и й Ж. Б., О расчете процесса возобновления работы систем многократного действия в теории надежности, Изв. высш. учебн. завед., Электромеханика, № 3, 1965.
 38. Л л о й д Д. К., Л и п о в М., Надежность, организация исследований, методы, математический аппарат, перев. с англ., «Советское радио», 1964.
 39. М а й о р о в А. В., К теории резервирования в системах автоматки, Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1956.
 40. М а н д е л ь А. С., Дипломная работа, МФТИ, 1967.
 41. М а р ь я н о в и ч Т. П., Некоторые вопросы надежности резервированных систем, УМЖ, № 2, 1963.
 42. Математическая теория надежности систем массового обслуживания, под ред. Зубова В. И., «Энергия», 1966.
 43. М у р Э. Ф., Ш е н н о н К. Э., Надежные схемы из ненадежных реле, перев с англ., в сб. «Кибернетический сб.», ИЛ, 1960.
 44. П а д е р н о И. П., О надежности резервированных систем, содержащих однотипное оборудование, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1963.
 45. П и р с У., Построение надежных вычислительных машин, перев. с англ., «Мир», 1968.
 46. П и р с У., Адаптивные органы голосования повышают эффективность введения избыточности, перев с англ., в сб. «Методы введения избыточности для вычислительных систем», «Советское радио», 1966.
 47. П о л о в к о А. М., З а й н а ш е в Н. К., О повышении надежности аппаратуры методом комбинирования общего резервирования замещением и раздельного с постоянно включенным резервом, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1963.
 48. П р и м Р., Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения, перев. с англ., в сб. «Кибернетический сб.», ИЛ, вып. 2, 1962.
 49. П о л я к Д. Г., О двух задачах теории надежности радиоэлектронного оборудования, Радиотехника, № 2, 1960.
 50. Р а й к и н А. Л., Определение оптимального резерва с учетом повреждений блоков в резервном режиме, Автоматика и телемеханика, № 11, 1962.
 51. Р а й к и н А. Л., О моделях резервирования замещением со случайным отбором исправных запасных элементов, «Надежность и контроль качества», № 6, 1970.

52. Р а й к и н А. Л., Надежность схем резервирования с учетом перераспределения нагрузок и напряжений, Автоматика и телемеханика, № 4, 1963.
53. Р а й к и н А. Л., К вопросу синтеза избыточной структуры при наличии ограничения в форме линейного неравенства, Сб. «Теория конечных и вероятностных автоматов», «Наука», 1965.
54. Р а й к и н А. Л., Ж о ж и к а ш в и л и В. А., Определение целесообразного режима работы резервного блока системы, Сб. «Структурная теория релейных устройств», Изд-во АН СССР, 1963.
55. Р а й к и н А. Л., Дополнительные оценки для схемы резервирования с дробной кратностью, Автоматика и телемеханика, № 4, 1964.
56. Р а й к и н А. Л., Р у б ц о в А. Ф., П е н и н В. С., К вопросу о надежности технических систем с регулярно возобновляемым резервом, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1964.
57. Р а й к и н А. Л., К а р т у з о в Е. В., О надежности феррит-диодных логических элементов. Сб. трудов IX Всесоюзного совещания по магнитным элементам автоматики и вычисл. техники, окт. 1963, Ереван, «Наука», 1965.
58. Р а й к и н А. Л., Б р о н ш т е й н О. И., Анализ системы сбора дискретной информации с учетом ее значимости, в сб. «Киберн. пути совершенствования методов измерения и контроля», 1964.
59. Р а й к и н А. Л., Б р о н ш т е й н О. И., Р ы к о в В. В., Об однолинейной системе массового обслуживания с потерями, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
60. Р а й к и н А. Л., Маневрирование аппаратурной избыточностью в реальных системах, в сб. Трудов III Всесоюзного совещания по автоматич. управлению (технической кибернетике), Одесса, сент. 1965, «Наука», 1967.
61. Р а й к и н А. Л., Восстановление работоспособности систем, «Знание», УССР, 1969.
62. Р а й к и н А. Л., М а н д е л ь А. С., Составление оптимального плана включений запасных элементов, Автоматика и телемеханика, № 5, 1967, см. также Реф. сб. «Приборы и средства автоматизации», вып. 3, 1967.
63. Р а й к и н А. Л., Элементы теории надежности для проектирования технических систем, «Советское радио», 1967.
64. Р а й к и н А. Л., Л о т о ц к и й В. А., С а в и ц к и й Ю. П., Оптимальная структура эксплуатации систем с разнотишными элементами, Автоматика и телемеханика, № 4, 1968.
65. Р а й к и н А. Л., М а н д е л ь А. С., Маневрирование запасной аппаратурой в системах с периодическим контролем исправности, в сб. Трудов I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике, Москва, февр. 1967, «Наука», 1971.

66. Райкин А. Л., Кравцов О. С., Никаноров Е. М., О планировании проверок исправности хранимых изделий, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1971.
67. Райкин А. Л., Некоторые свойства функции готовности для восстанавливаемой системы, Автоматика и телемеханика, № 10, 1969.
68. Райкин А. Л., Кравцов О. С., Пенин В. С., Таблицы для расчета надежности и оптимального резерва, «Советское радио», 1971.
68. Райкин А. Л., Оптимизация избыточности при наличии ограничений, Автоматика и телемеханика, № 2, 1965.
70. Райкин А. Л., Кравцов О. С., Нечволодов В. В., Оптимизация структуры эксплуатации многокомпонентной системы при ограничениях эксплуатационных расходов, в сб. «Опыт применения математико-статистических методов в производстве», «Машиностроение», 1971.
71. Рыжиков Ю. И., Оптимальное планирование запасов резервных ячеек и элементов ЭВМ для вычислительных центров, в кн. «Прикладные задачи технической кибернетики», «Советское радио», 1966.
72. Сандлер Дж., Техника надежности систем, перев. с англ., «Наука», 1966.
73. Синица М. А., Методы резервирования радиоаппаратуры, Электросвязь, № 4, 1959.
74. Синица М. А., О резервировании методом замещения, Радиотехника, № 12, 1960.
75. Смит В., Теория восстановления, перев. с англ., в сб. «Математика», ИЛ, 5 : 3, 1961.
76. Смолицкий Х. Л., Чукуреев П. А., К вопросу оптимального резервирования аппаратуры, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 4, 1959.
77. Соловьев А. Д., Математические вопросы теории надежности, Радиоэлектронная промышленность, № 4, 1958.
78. Соловьев А. Д., Об определении резервов для систем многократного действия, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 2, 1962.
79. Соловьев А. Д., О резервировании без восстановления, В сб. «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», 1964.
80. Соловьев А. Д., Надежность систем с восстановлением, в сб., «Кибернетику на службу коммунизму», «Энергия», 1964.
81. Сотсков Б. С., Ростковская С. Е., Характеристики надежности сопротивлений конденсаторов, Автоматика и телемеханика, № 5, 1960.
82. Ушаков И. А., Приближенный алгоритм для построения оптимально надежных систем с произвольной структурой, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1965.
83. Ушаков И. А. (ред.), Сб. переводов «Оптимальные задачи теории надежности», «Стандартизация», 1968.

84. Ушаков И. А., Методы решения простейших задач оптимального резервирования, «Советское радио», 1969.
85. Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, перев. с англ., «Мир», 1967.
86. Хедли Дж., Уайтин Т., Анализ систем управления запасами, перев. с англ., «Наука», 1969.
87. Хинчин А. Я., О среднем времени простоя станков, Матем. сб., т. 40, 1932, стр. 119—123.
88. Хинчин А. Я., Цепные дроби, Физматгиз, 1961.
89. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, глава VIII, «Наука», 1968.
90. Шишонов Н. А., Репкин В. Ф., Барвинский Л. Л., Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники, «Советское радио», 1964.
91. Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, «Советское радио», 1962.
92. Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И., Таблицы для анализа и контроля надежности, «Советское радио», 1968.
93. Юдин Д. Б., Методы количественного анализа сложных систем, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1965, № 2, 1966.
94. Л. Фейн, О неправильном толковании термина «избыточность», в сб. «Методы введения избыточности», перев. с англ. «Советское радио», 1966.
95. Ashar K., A probabilistic model of system operation, Opns. Res., vol. 8, N 5, 1960.
96. Barlow R., Hunter L., Criteria for determining optimum redundancy, IRE Trans. on RQC, N 9, 1960.;
97. Barlow R., Proschan F., Mathematical theory of reliability, John Wiley and Sons, Inc., 1965.
98. Barlow R., Hunter L., Proschan F., Optimum redundancy when components are subject to two kinds of failure, J. Soc. Ind. and Appl. Mathem., vol. 11, N 1, 1963.
99. Bartholomew D. J., Two-stage replacement strategies, Opns. Res. Quart., vol. 14, N 1, 1963.
100. Bartholomew D. J., A multi-stage renewal process, Journ. Roy. Statist. Soc., vol. 25, N 3, 1963.
101. Bharucha-Reid A. T., Elements of the theory of markov processes and their applications McGraw Hill Co., 1960.
102. Black G., Proschan F., Spare part kits at minimum cost, Proc. 5th Nat. Symposium on RQC, 1959.
103. Black G., Proschan F., On optimal redundancy, Opns. Res., vol. 7, N 5, 1959.
104. Birnbaum Z. W., Esary J. B., Saunders S. C., Multicomponent systems and structures and their reliability, «Technometrics», vol. 3, N 1, 1961.
105. Blitz M., Optimum allocation of spare budget, Naval Res. Logist Quart., vol. 10, N 2, 1963.
106. Di Toro M., Reliability criterion for constrained system, IRE Trans. on RQC, Sept., 1956.

107. Derman G., Sacs J., Replacement of periodically inspected equipment, *Naval Res. Logist Quart.*, vol. 7, 1960.
108. Everett III, H., Generalized lagrange multiplier method for solving problems or optimum allocation of resources, *Opns. Res.*, vol. 11, N 3, 1963.
109. Folkman J., Port S., Optimal Procedures for stochastically failing equipment, *Journ. Appl. Probab.*, vol. 3, N 2, 1966.
110. Depian L., Grisamor N., Reliability using redundancy concept, *IRE Trans. on RQC*, N 9, 1960.
111. Epstein B., Hosford T., Reliability of some two unit redundancy systems, *Proc. 6th Nat. Symp. on RQC*, 1960.
112. Feller W., The integral equation of renewal theory, *Ann. of Mathem. Stat.*, vol. 12, 1941.
113. Geisler M., Application of excess distribution to an inventory system study, *Opns. Res.*, vol. 12, N 4, 1964.
114. Geisler M., Karr H., The design of military spare supply tables for spare parts, *Opns. Res.*, Vol. 4, N 4, 1956.
115. Goodwin J., Giese W., Reliability of spare part support for complex system with repair, *Opns. Res.*, Vol. 13, N 3, 1965.
116. Gordon R., Optimum component redundancy for maximum system reliability, *Opns. Res.*, vol. 5, N 2, 1957.
117. Gourary M., On optimum allowance list model, *Naval Res. Logist Quart.*, N 5, 1958.
118. Gaver D., A probability problem arising in reliability and traffic studies, *Opns. Res.*, vol. 12, N 4, 1964.
119. Geisler M., Karr H., A fruitful application of static marginal analysis, *Man. Sci.*, vol. 2, N 4, 1956.
120. Hall A. D. A methodology for system engineering, D. Van Nostrand Inc., 1962.
121. Hall K., Zenkere M., Use of finite marcov chains in reliability analysis of systems, *Proc. Nat. Winter Conf. on Military Electronics*, 1962.
122. Hastings N. A. and all, An economic replacement model, *Opns. Res. Quart.*, vol. 18, pp. 121—138, 1967.
123. Hosford T., Optimal allocation of leased communication lines, *Man. Sci.*, vol. 9, N 4, 1963.
124. Jewell W., The properties of recurrent event process, *Opns. Res.*, vol. 8, N 4, 1960.
125. Karlin S., Mc Gregor J., The classification of birth and death processes, *Trans. Amer. Stat. Mathem. Soc.*, vol. 86, pp. 360—400, 1957.
126. Karush W., A queueing Model for Inventory Problem, *Opns. Res.*, vol. 4, N 5, 1957.
127. Kendall D. G., On the generalized birth and death process, *Ann. Math. Stat.*, vol. 19, pp. 1—15, 1948.
128. Kemeny J., Snell J. L., *Finite markov chains*, D. van Nostrand Inc., Princeton, N. J., 1960.

129. K e t t e l l e J., Leased-cost allocation on reliability investment, *Opns. Res.*, vol. 10, N 2, 1962.
130. K i m m e l I., Accelerated life-testing of paper dielectric capacitors, *Proc. 5th Nat. Symp. on RQC*, 1959.
131. K u b a t L., Note on the reliability of parallel redundant systems. *Trans. of the Third Prague Conf. on Information theory, Statistical Decision Functions, Random Processes*, 1962.
132. M a c k C., S t o o d l e y K., Machine interference with two repairmen when repair time is constant, *New Journ. Statist. and Oper. Res.*, vol. 4, N 2, 1968.
133. M a r a t h e V. P., N a i r K. P., A multi-stage planned replacement strategies, *Opns. Res.*, vol. 14, N 5, 1966.
134. M a r s c h a k J., On adaptive programming, *Man. Sci.*, vol. 9, pp. 517—526, 1963.
135. M i n e H., Reliability of physical system, *IRE Trans.*, vol. CT-6, May, 1959.
136. M o s k o w i t z F., M c L e a n J., Some reliability aspects of system design, *IRE Trans. PGRQC-8*, Sept., 1956.
137. N a o r P. On machine interference, *Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, vol. 18, pp. 280—287, 1956.
138. N a o r P., Normal approximation to machine interference with many repairmen, *Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, vol. 19, pp. 334—341, 1957.
139. P a l m C., The distribution of repairmen in serving automatic machines, *Ind. Nord.*, vol. 75, pp. 75—80, 90—94, 119—123, 1947.
140. P i e r c e W., Adaptive decision elements to improve the reliability of redundant systems, *IRE Trans. Intern. Conv. Rec.*, March., 1962.
141. P o r t S. C., Optimal procedures for installation of a unit subject to stochastic failure, *J. of Mathem. and Appl.*, N 9, 1964
142. P r a n N. W., Provisioning of spare channels when a fixed number of machines run a system, *Jorn. of Industr. Eng.*, vol. 13, N 2, 1966.
143. P r o s c h a n F., Optimum supply system, *Naval Res. Logist Quart.*, N 7, 1960.
144. P r o s c h a n F., B r a y T. A., Optimum redundancy under multiply constraints, *Opns. Res.*, vol. 13, N 5, 1965.
145. R a u J., Redundancy of trichotomous systems, *Journ. Soc. for Industr. and Appl. Mathem.*, vol. 12, N 4, 1964.
146. S a k a g u c h i M., Some examples of bayesian adaptive programming, *J. Inform. and Control*, vol. 9, N 3, 1966.
147. S a s a k y M., A symplified method of obtaining highest system reliability, *Proc. 8th Nat. Symp. on RQC*, 1962.
148. S a s a k y M., An easy allotment method achieving maximum system reliability, *Proc. 9th Nat. Symp. on RQC*, 1963.
149. S c h w e t z e r P., Initial provisioning with spare deterioration, *Opns. Res.*, vol. 15, N 3, 1967.

150. T a y l o r N. M., Markovian sequential replacement processes, *Ann. Math. Stat.*, vol. 36, pp. 1677—1694, 1966.
151. V e r g i n R., Optimal renewal policies for complex systems, *Naval Res. Log. Quart.*, vol. 15, N 4, 1968.
152. V o n N e u m a n n J., Probabilistic Logics and synthesis of reliable organisms from unreliable components, *Ann. of Mathem. Studies*, N 34, Princeton Univer. Press, 1956.
153. W e i s s G., Reliability of a system in which spare parts deteriorate in storage, *Journ. of Res. Nat. Bureau of Standards, Ser. B.*, vol. 66 B, N 4, Dec. 1962.
154. W o o d m a n R. C., Replacement rules for single and multicomponent Equipment. *Appl. Stat.*, vol. 18, No. 1, 1969.
155. W o o d m a n R. C., Replacement policies for component that deteriorate, *Opns. Res. Quart.*, vol. 18, pp. 267—280, 1967.
156. Z a k s S., Bayes Sequential Design of Stock Levels, *Naval Res. Logist. Quart.*, vol. 16, N 2, 1969.
- 157*. A d e l s o n R. M., The dynamic behaviour of linear forecasting and scheduling rules, *Opns. Res. Quart.*, vol. 17, N 4, 1966.
- 158*. B a u m b a c h H. D., Die anwendung des Exponential Smoothing zur Planung der Lagerbestände an Zwischenprodukten, *Rechentechnik*, Bd. 4, N 11, 1967.
- 159*. B o x G. E., J e n k i n s G. M., Time series forecasting and control, Holden Day, San Francisco, 1968.
- 160*. B o x F. E., J e n k i n s G. M., Some recent advance in forecast and control, *J. Appl. Statist.*, vol. 17, N 2, 1968.
- 161*. B r o w n R., M e y e r R., Fundamental teorem of exponential smoothing, *Opns. Res.*, vol. 9, N 5, 1961.
- 162*. B r o w n R. G., Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, Prentice Hall, N. J., 1962.
- 163*. B r o w n R. G., Decision rules for inventory management, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- 164*. C r a n e D., C r o t t y J. R., A two stage forecasting model exponential smoothing and multiply Regression, *Man. Sci.*, vol. 13, N 8, 1967.
- 165*. C o h e n G. D., Bayesian adjustment of sales forecasts in multyitem inventory control systems, *J. Ind. Engng.*, vol. 17 N 9, 1966.
- 166*. C h o w W e n, Adaptive control of the exponential smoothing constant, *J. Ind. Engng.*, vol. 16, N 5, 1965.
- 167*. H u r t e r A., K a m i n s k y F., An application of regenerative stachastic processes to a problem in inventory control, *Opns. Res.*, vol. 17, N 3, 1967.
- 168*. G a n g o l l i M. R., D a t t a N. K., Maintenance capacity prediction and variable inventory control in transport industry, *Intern. J. Product. Res.*, vol. N 1, 1966.

*) Библиография, отмеченная номерами со звездочками, относится к главе 6.

- 169*. P a c k e r A. H., Simulation and adaptive forecasting as applied to inventory control. *Opns. Res.*, vol. 15, N 4, 1967.
- 170*. S o l a n d R., A renewal theoretic approach to the estimation of future demand for replacement parts, *Opns. Res.*, vol. 16, N 1, 1968.
- 171*. T h e i l H., Economic forecasts and policy, 2nd ed. Amsterdam North — Holland Publishing Co., 1960.
- 172*. T r i g g D. W., J e a c h A. G., Exponential smoothing with adaptive response rate, *Opns. Res. Quart.*, vol. 18, N 1, 1967.
- 173*. W i n t e r s P. R., Forecasting sales by exponentially weighted moving averages, *Man. Sci.*, vol. 6, pp. 324—342. 1960.

Аварийная замена 11, 23
Адаптивное программирование 139

Байеса формула 140, 141, 185
Байесовский план 119
Беллмана принцип оптимальности 115, 128, 138
Биномиальное распределение 21, 121
— — обобщенное 21, 190
— — отрицательное 120, 121

Вероятность перехода инфинитезимальная 18
Время безотказной работы 15
— — —, распределение 15, 47

Гамма-распределение 120, 165
Геометрическое распределение 138
Гиперэкспоненциальное распределение 72
Готовность, коэффициент 59

Динамическое программирование 95
Дисперсия 173
Доминирующая последовательность 97
Дублирование без восстановления 35
— с восстановлением 69

Запас страховой 178
Заявка на поставку 113, 116

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Избыточность аппаратурная 11
— структурная 11
Издержки хранения удельные 113, 178

Коэффициент готовности 59
— — стационарный 64
Кратность резервирования 18
— — дробная 18
Критерий минимаксный 150

Лагранжа метод множителей 93
Лапласа преобразование 15, 19, 70
— — двойное 16

Марковский процесс 112
— — линейчатый 73
— — «размножения и гибели» 55
Математическое ожидание 15
Метод множителей Лагранжа 93
— наименьших квадратов 168, 175
— скользящего среднего 168, 169
— экспоненциального сглаживания 169, 187
Минимальное расширение пространства состояний 39
Модель Пальма 60
— Хайнса и Модера 104
Моментная производящая функция 22, 72

Неисправность активная 27
— пассивная 27
— симметричная 29

Ограничение линейное 91
 — нелинейное 90
 — существенное 94, 107
 Основное соединение 91

Период планирования 114
 Преобразование Лапласа 15,
 19, 70
 Приоритет в обслуживании 74,
 81
 Прогноз спроса 167
 Процесс марковский линейча-
 тый 73

Распределение биномиальное
 21, 121
 — — обобщенное 21, 190
 — — отрицательное 120, 121
 — Вейбулла 148, 157
 — геометрическое 138
 — гиперэкспоненциальное 72
 — равномерное 72
 — экспоненциальное 72
 Резервирование 11, 16
 — замещением двухступенчатое
 29

Резервированные замещением
 скользящее 17
 — на груженное 130
 Резервная группа 18
 Ремонт неспециализированный
 73, 102
 — специализированный 58,
 103
 Ресурс установленный 156

Сглаживание экспоненциальное
 169, 188
 — — n -го порядка 170
 Случай связывающих сетей 105
 Случайный отбор резервных
 элементов 25
 Страховой запас 178

Теория восстановления 16

Уравнение восстановления 13
 Условное математическое ожида-
 ние 118, 186
 Условное распределение 113, 118
 Учет «стоимости» проверок 146

Анатолий Львович Райкин

Вероятностные модели функционирования
резервированных устройств

М., 1971 г., 216 стр. с илл.

Редактор *А. А. Могилевский*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 25/V 1971 г. Подписано к печати
1/X 1971 г. Бумага 84×108¹/₂. Физ. печ. л. 6,75.
Условн печ. л. 11,34. Уч.-изд. л. 11,37. Тираж 6500
Т 16406 Цена книги 96 к. Заказ 2518

Издательство «Наука»

Главная редакция Физико-математической
литературы.

Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука».

Москва, Шубинский пер., 10

