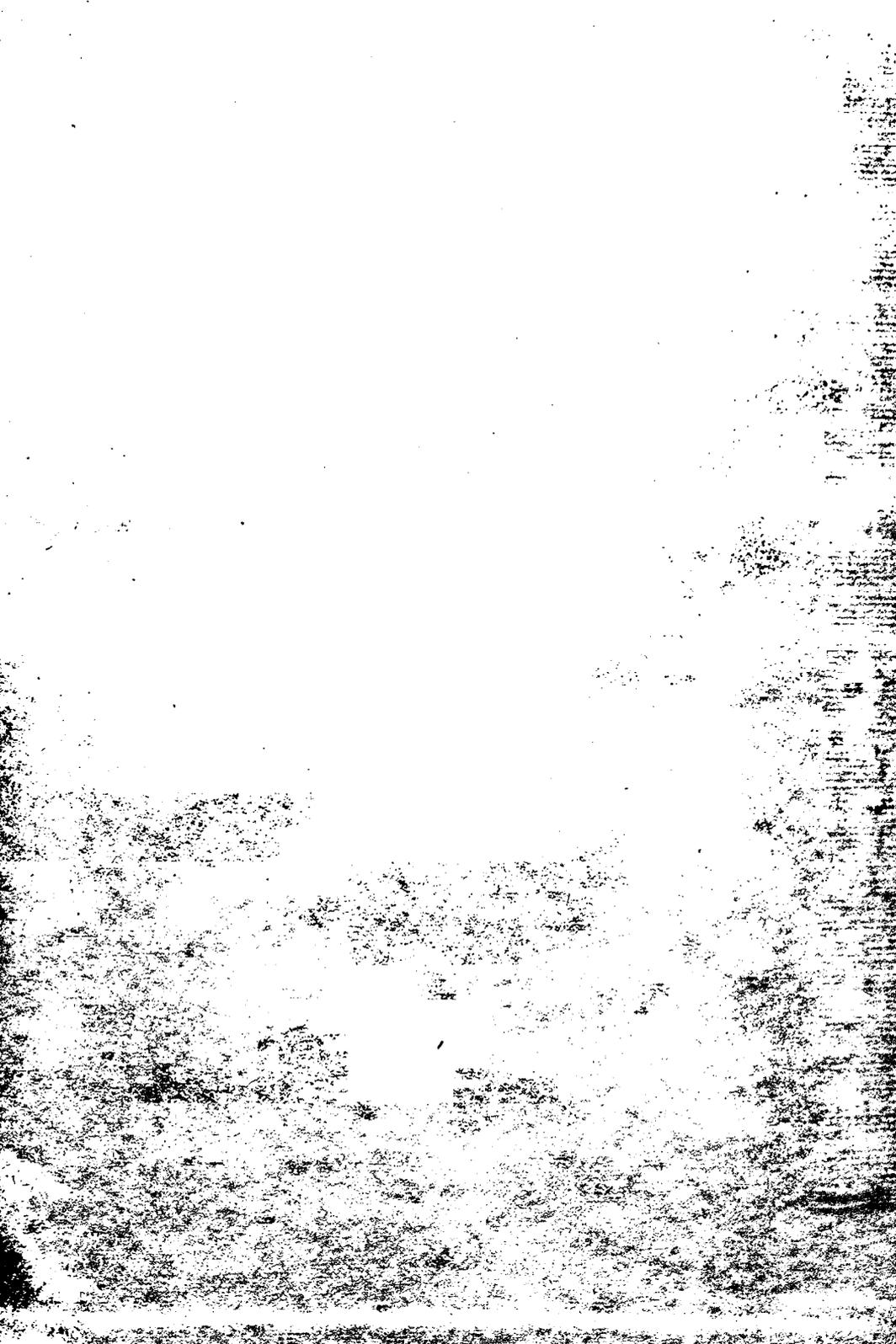


И. П. ГУРСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
ФИЗИКА









И. П. ГУРСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФИЗИКА

С ПРИМЕРАМИ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

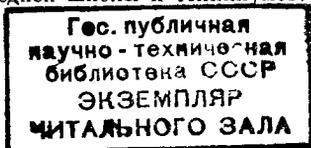


ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

АННОТАЦИЯ

Книга является пособием по физике для поступающих в вузы, ее можно также использовать как введение в вузовский курс физики. В ней последовательно и кратко рассмотрен весь элементарный курс физики, при этом основное внимание обращено на решение типовых задач и примеров.

Рассчитана на учащихся старших классов средней школы, слушателей подготовительных отделений вузов и лиц, занимающихся самообразованием, может быть полезна преподавателям физики средней школы и техникумов.



84
6869

© Издательство «Наука», 1973.

73-28516

Исаак Павлович Гурский

Элементарная физика с примерами решения задач

М., 1973 г., 368 стр. с илл.

Редактор *И. Ш. Слободецкий*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Сигал, Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 5/IV 1973 г. Подписано к печати 7/VIII 1973 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 23. Условн. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 23,09. Тираж 375 000 экз. (1-й завод 1—200000). Т-11176. Цена книги 75 коп. Заказ № 279.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	11
§ 1. Векторы. Некоторые математические действия с векторами	11
§ 2. Общие методические указания к решению задач	14
I. МЕХАНИКА	16
§ 1. Введение. Основные понятия механики	16
Кинематика	18
§ 2. Кинематика поступательного движения	18
§ 3. Равномерное прямолинейное движение. Уравнение этого движения. Скорость. Графики пути и скорости равномерного движения	19
§ 4. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение	20
§ 5. Равнопеременное движение. Формулы и графики скорости и пути в этом движении. Уравнение равнопеременного движения	21
Примеры решения задач (задачи 1—8)	26
Динамика поступательного движения	30
§ 6. Сила	30
§ 7. Первый закон Ньютона (закона инерции)	30
§ 8. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета	31
§ 9. Второй закон Ньютона. Масса и плотность тела. Импульс тела (количество движения). Импульс силы	32
§ 10. Принцип независимости действия сил	34
§ 11. Третий закон Ньютона	35
§ 12. Сложение сил, направленных под углом одна к другой	35
§ 13. Разложение силы на две составляющие, направленные под углом друг к другу	36
§ 14. Закон сохранения импульса	37
§ 15. Понятие о реактивном движении. К. Э. Циолковский — основоположник учения о реактивном движении	38
§ 16°. Трение. Сила трения. Коэффициент трения	41
§ 17°. Сила трения при движении тела в жидкости или в газе	43
§ 18. Силы упругости. Пластичность. Закон Гука	43
§ 19. Закон всемирного тяготения Ньютона. Гравитационная постоянная и ее определение опытным путем. «Гравитационная» масса	45
§ 20. Сила тяжести. Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Влияние сопротивления воздуха	46
§ 21. Вес тела. Взвешивание. Невесомость	47

§ 22.	Системы единиц	50
	Примеры решения задач (задачи 9—26)	51
§ 23.	Механическая работа и мощность	66
§ 24.	Энергия. Кинетическая и потенциальная энергия	69
§ 25.	Превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике	70
	Примеры решения задач (задачи 27—38)	71
Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела		77
§ 26.	Равномерное вращательное движение тела. Угловая скорость. Равно- мерное движение точки по окружности. Линейная скорость	77
§ 27.	Центростремительное ускорение	79
§ 28°.	Сила тяжести, вес тела и сила тяготения	83
§ 29°.	Искусственные спутники Земли. Причины возникновения в них состояния невесомости. Первая космическая скорость	85
	Примеры решения задач (задачи 39—50)	86
Статика		94
§ 30.	Равновесие тела при отсутствии вращения	94
	Примеры решения задач (задачи 51—60)	95
§ 31.	Момент силы	100
§ 32.	Сложение параллельных сил. Пара сил	101
§ 33.	Равновесие тела, имеющего ось вращения (правило моментов)	103
§ 34.	Равновесие тела в общем случае. Условия равновесия	105
	Примеры решения задач (задачи 61—66)	106
§ 35.	Виды равновесия тел. Равновесие тела, закрепленного в одной точке, и тела, опирающегося на горизонтальную плоскость	110
§ 36.	Центр масс и центр тяжести тела	112
§ 37.	Определение центров тяжести (центров масс) тел различной формы	113
	Примеры решения задач (задачи 67—69)	115
II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ЗВУК		117
§ 38.	Колебания. Период и частота колебаний. Амплитуда колебаний. Связь между периодом и частотой колебаний	117
§ 39.	Гармоническое колебание. Фаза колебания	118
§ 40.	Маятник. Период колебания математического маятника	120
§ 41°.	Свободные и вынужденные колебания. Явление механического резонанса	121
§ 42.	Волны. Поперечные и продольные волны	123
§ 43.	Скорость распространения колебаний. Длина волны. Зависимость между длиной волны, скоростью распространения колебаний и частотой (или периодом) колебаний	124
§ 44.	Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука	124
§ 45.	Отражение звука	125
	Примеры решения задач (задачи 70—77)	125
III. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ		130
§ 46.	Давление. Единицы давления. Величина нормального атмосфер- ного давления	130
§ 47.	Закон Паскаля для жидкостей и газов	131
§ 48.	Принцип действия гидравлического пресса	132
§ 49.	Давление жидкости на дно и на стенки сосуда. Закон сообщаю- щихся сосудов	133
§ 50.	Давление атмосферы. Опыт Торичелли. Ртутный и металлический барометры	134
§ 51.	Закон Архимеда для жидкостей и газов. Условия плавания тел. Ареометры	136
	Примеры решения задач (задачи 78—90)	137

IV. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА	144
§ 52. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытные обоснования	144
§ 53. Броуновское движение	145
§ 54. Диффузия в газах, жидкостях, твердых телах	145
§ 55. Взаимодействие молекул	146
§ 56. Движение молекул газов, жидкостей и твердых тел	147
V. ТЕПЛОТА	149
§ 57. Внутренняя энергия	149
§ 58. Изменение внутренней энергии тела. Количество теплоты. Виды теплопередачи	149
§ 59. Единицы количества теплоты	150
§ 60. Закон сохранения и превращения энергии	150
§ 61. Соотношения между внесистемными единицами теплоты и работы	151
§ 62. Разность температур. Абсолютная температурная шкала. Понятие об абсолютном нуле. Единица температуры	151
§ 63. Подсчет количества теплоты, необходимой для нагревания тела. Уравнение теплового баланса	152
§ 64. Определение удельной теплоемкости вещества опытным путем	153
§ 65. Теплотворная способность различных видов топлива	154
§ 66. Коэффициент полезного действия нагревателя	154
§ 67. Плавление. Удельная теплота плавления	154
§ 68. Парообразование. Конденсация. Испарение и кипение. Зависимость температуры кипения от давления	155
Примеры решения задач (задачи 91—99)	157
§ 69. Коэффициенты линейного и объемного расширения. Особенности расширения воды	161
Примеры решения задач (задачи 100—106)	163
Газовые законы	166
§ 70. Расширение газов при постоянном давлении. Закон Гей-Люссака	167
§ 71. Изотермический процесс. Закон Бойля—Мариотта	168
§ 72. Изохорический процесс. Закон Шарля	169
§ 73. Адиабатический процесс	170
§ 74. Формула объединенного закона Бойля—Мариотта—Гей-Люссака	171
§ 75. Уравнение Менделеева—Клапейрона	172
§ 76. Понятие идеального газа. Границы применения газовых законов. Физический смысл абсолютной температуры идеального газа	173
§ 77. Работа газа в газовых процессах	174
§ 78. Смеси газов. Закон Дальтона	175
Примеры решения задач (задачи 107—114)	175
§ 79. Насыщающие и ненасыщающие пары жидкости. Их свойства. Зависимость давления насыщающего пара от температуры	179
§ 80. Абсолютная влажность. Относительная влажность	181
§ 81. Приборы для определения влажности	181
Примеры решения задач (задачи 115—119)	183
VI. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО	185
Электростатика	185
§ 82. Два рода электрических зарядов. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрических зарядов. Электрическое поле. Закон Кулона. Влияние среды на силу взаимодействия зарядов. Диэлектрическая проницаемость вещества. Единицы заряда	185

§ 83.	Равновесие зарядов в металлах. Электростатическая индукция. Распределение электрических зарядов в проводнике	187
§ 84.	Устройство электроскопа	188
§ 85.	Напряженность электрического поля и ее вычисление для поля точечного заряда. Графическое изображение поля—силовые линии электрического поля. Однородное электрическое поле. Поле изолированного заряда	189
§ 86.	Работа перемещения заряда в электрическом поле. Разность потенциалов. Единица разности потенциалов	192
§ 87.	О понятии потенциала. Потенциал поля точечного заряда	193
§ 88.	Связь потенциала с напряженностью для однородного электрического поля	194
§ 89.	Единицы напряженности электрического поля	195
§ 90.	Емкость. Единицы емкости. Емкость проводящей сферы	196
§ 91.	Конденсаторы. Формула плоского конденсатора. Энергия конденсатора	197
	Примеры решения задач (задачи 120—133)	202
Постоянный электрический ток		213
§ 92.	Электрический ток. Сила тока. Электронная теория электрического тока. (Причины возникновения электрического тока.) Единица силы тока—ампер	213
§ 93.	Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Единица сопротивления. Удельное сопротивление и удельная проводимость. Локальный закон Ома	215
§ 94.	Зависимость сопротивления от температуры. Понятие о полупроводниках	217
§ 95.	Последовательное соединение проводников	219
§ 96.	Параллельное соединение проводников	219
§ 97.	Реостаты	220
§ 98.	Источники тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для всей цепи	222
§ 99.	Параллельное и последовательное соединение источников тока	223
§ 100.	Работа и мощность тока. Единицы работы и мощности тока	225
§ 101.	Энергия электрического тока и ее превращение в другие виды энергии. Закон Джоуля—Ленца	226
	Примеры решения задач (задачи 134—158)	226
§ 102.	Электролиз	242
§ 103.	Законы Фарадея для электролиза	243
§ 104°.	Техническое применение электролиза	245
	Примеры решения задач (задачи 159—161)	247
§ 105.	Электрический ток в газах	249
§ 106.	Электронные пучки, их свойства и применение	255
§ 107°.	Ионные пучки	257
	Примеры решения задач (задачи 162—163)	257
Магнитные явления		258
§ 108.	Магнитное поле. Магнитное взаимодействие проводников с током	258
§ 109.	Силовые линии магнитного поля	259
§ 110.	Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Индукция магнитного поля	260
§ 111.	Магнитная проницаемость среды. Напряженность магнитного поля	261
§ 112.	Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Единица СГСМ тока	262

§ 113.	Определение единицы силы тока как одной из основных единиц системы СИ. Определение единицы электрического заряда как производной единицы в системе СИ	263
§ 114.	Магнитный поток. Единицы магнитного потока, магнитной индукции и напряженности магнитного поля	264
§ 115.	Амперметр. Вольтметр	266
Электромагнитные явления		271
§ 116.	Электромагнитная индукция	271
§ 117.	Величина электродвижущей силы индукции	273
§ 118.	Закон Ленца	274
§ 119.	Явление самоиндукции. Индуктивность. Зависимость индуктивности катушки от числа витков и наличия железного сердечника. Единица индуктивности — генри	275
	Примеры решения задач (задачи 164—170)	277
Переменный ток		279
§ 120.	Получение переменного тока	279
§ 121.	Период и частота переменного тока. Действующие (эффективные) значения напряжения и силы переменного тока	281
§ 122.	Передача и распределение электроэнергии	282
§ 123.	Трансформатор	283
§ 124.	Генератор постоянного тока	286
	Примеры решения задач (задачи 171—174)	289
§ 125.	Электронные явления в вакууме. Явление термоэлектронной эмиссии	291
§ 126.	Электронные лампы диод и триод	292
§ 127.	Использование диода для выпрямления переменного тока	293
§ 128.	Электроннолучевая трубка	295
Физические основы радиотехники		296
§ 129.	Электромагнитные колебания и волны	296
§ 130.	Колебательный контур. Превращения энергии в колебательном контуре. Зависимость периода колебаний в контуре от индуктивности и емкости. Электрический резонанс	297
§ 131.	Электронная лампа как генератор	299
§ 132.	Электронная лампа, как усилитель	300
§ 133.	Открытый колебательный контур. Излучение и прием электромагнитных волн. Скорость распространения электромагнитных волн	300
§ 134.	Шкала электромагнитных волн	302
§ 135.	Изобретение радио А. С. Поповым	303
VII. ОПТИКА (СВЕТ)		304
§ 136.	Источники света	304
§ 137.	Прямолинейность распространения света	304
§ 138.	Скорость света. Определение скорости света методом Майкельсона	305
Фотометрия		306
§ 139.	Световой поток. Сила света	306
§ 140.	Освещенность	307
§ 141.	Законы освещенности	307
§ 142.	Сравнение силы света различных источников. Фотометры	309
	Примеры решения задач (задачи 175—177)	310
Геометрическая оптика		311
§ 143.	Законы отражения света	311
§ 144.	Построение изображения в плоском зеркале	312

§ 145.	Построение изображения в сферических зеркалах. Фокус зеркала	313
§ 146.	Сферическая абберация	316
	Примеры решения задач (задачи 178—183)	317
§ 147.	Законы преломления света. Показатель преломления	321
§ 148.	Полное внутреннее отражение. Предельный угол	322
§ 149.	Ход лучей в плоскопараллельной пластинке	323
§ 150.	Ход лучей в призме	324
§ 151.	Собирающие и рассеивающие линзы	325
§ 152.	Формула линзы. Оптическая сила линзы	327
§ 153.	Построение изображения в линзах	328
	Примеры решения задач (задачи 184—194)	331
Оптические приборы		337
§ 154.	Прожектор	337
§ 155.	Проекционный аппарат	338
§ 156.	Фотоаппарат	339
§ 157.	Лупа	341
§ 158.	Глаз как оптический прибор	342
§ 159.	Аккомодация глаза. Близорукость и дальновзоркость. Очки	343
	Примеры решения задач (задачи 195—198)	344
Состав света. Невидимые лучи		346
§ 160.	Дисперсия света. Спектр	346
§ 161.	Спектроскоп	347
§ 162.	Невидимые лучи (инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра)	347
§ 163.	Спектры испускания. Спектры поглощения	348
§ 164.	Спектр Солнца. Фраунгоферовы линии	349
§ 165.	Понятие о спектральном анализе	350
Теория света		350
§ 166.	Понятие о волновой и квантовой природе света	350
Объяснение некоторых явлений оптики волновой природой света		352
§ 167.	Интерференция света. Когерентные источники света	352
§ 168.	Дифракция света	354
§ 169.	Фотоэлектрический эффект. Работы А. Г. Столетова по фотоэлектрическому эффекту	356
§ 170.	Фотоэлементы и их применение	358
§ 171.	Действия света	359
VIII. СТРОЕНИЕ АТОМА		361
§ 172.	Явления, подтверждающие сложное строение атома	361
§ 173.	Способы наблюдения частиц	361
§ 174.	Строение атома—электронная оболочка и ядро	364
§ 175.	Составные части ядра атома—протоны и нейтроны	364
§ 176.	Радиоактивность	365
§ 177.	Излучение и поглощение энергии атомом	367
§ 178.	Деление ядер урана. Цепная реакция	367

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена для поступающих в высшие учебные заведения в качестве пособия при подготовке к вступительным экзаменам по физике. Ее содержание и последовательность изложения в основном соответствуют программе вступительных экзаменов (1972 г.). Немногие параграфы, включенные сверх программы вступительных экзаменов, помечены кружочками (°). Автор поставил себе целью изложить основы элементарной физики в возможно сжатой форме, чтобы помочь учащимся повторить и усвоить эти основы с минимальной затратой времени.

Все разделы снабжены задачами, которые помогают усвоению материала.

Обратите внимание на запись первых задач, приведенных в соответствующих параграфах. Именно таким образом рекомендуется записывать решение задач.

Автор



ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Векторы. Некоторые математические действия с векторами

Вектор определяется абсолютной величиной (модулем) и направлением (рис. 1).

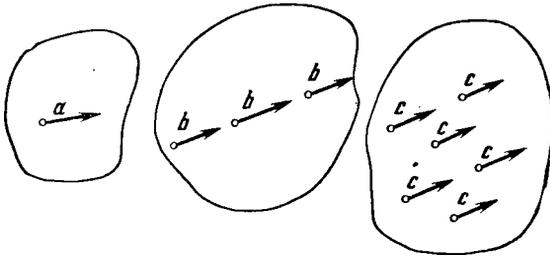


Рис. 1.

Вектор обозначается полужирной буквой (P , F , v , a и т. д.)

Сумма двух векторов, приложенных в одной точке тела, изображается по модулю и направлению диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах как на сторонах, исходящей из этой точки (рис.2). Построение параллелограмма можно заменить построением треугольника (рис.3). Из конца одного вектора,

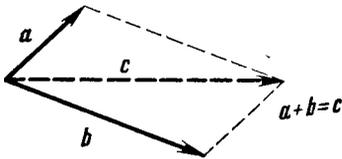


Рис. 2.

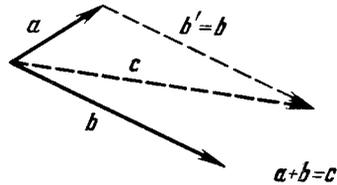


Рис. 3.

например, a , проводится вектор b' , равный по величине и параллельный вектору b . Соединив начало первого вектора a с концом второго вектора b' , получим вектор их суммы. Как видно

из сравнения с рис. 2, здесь вместо параллелограмма строится один из составляющих его треугольников. Это построение носит название правила треугольника.

Сложение нескольких векторов, расположенных в одной плоскости и приложенных в одной точке под углом друг к другу, можно делать постепенно: сначала находят вектор суммы двух векторов, затем складывают этот вектор с каким-либо третьим вектором и т. д.; либо складывают векторы попарно, затем полученные векторы опять складывают попарно и т. д.

На рис. 4, а проведено последовательное сложение четырех векторов по правилу треугольника. Складываем векторы F_1 и F_2 и

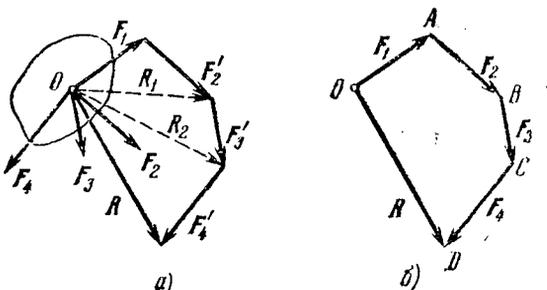


Рис. 4.

получаем вектор их суммы R_1 ; этот вектор складываем по правилу треугольника с вектором F_3 , получаем их сумму — вектор R_2 и, наконец, сложив вектор R_2 с вектором F_4 , получаем вектор R суммы всех заданных четырех векторов.

Можно всех этих промежуточных построений и не делать, а провести более простое построение, как показано на рис. 4, б. Из конца A первого вектора F_1 проводим вектор \overrightarrow{AB} , равный вектору F_2 , затем из конца построенного вектора проводим вектор, равный вектору F_3 , и продолжаем так поступать, пока не исчерпаем всех заданных векторов. Получим незамкнутый многоугольник $OABCD$. Вектор \overrightarrow{OD} , замыкающий многоугольник и направленный противоположно обводу незамкнутого многоугольника, построенного на заданных векторах, изображает сумму заданных векторов.

Приведенное правило нахождения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**.

Таким же образом проводится сложение нескольких векторов, если *линии их действия* пересекаются в одной точке. Так как векторы можно перенести по линиям их действия в точку пересечения этих линий, то вектор суммы приложен в этой же точке, или на прямой, проходящей через эту точку и совпадающей с вектором суммы. На рис. 5, а проведено сложение трех векторов

F_1 , F_2 и F_3 , линии действия которых пересекаются в точке O . Многоугольник векторов построен отдельно на рис. 5, б. Вектор суммы приложен в точке O либо в любой точке, лежащей на прямой AOB , например в точке C .

Сложение векторов, линии действия которых не пересекаются в одной точке, можно производить попарно (по правилу параллелограмма или треугольника).

В частном случае сложения векторов, направленных по одной прямой, многоугольник превращается в прямую линию, на которой к концу одного вектора, прикладывается другой, к концу этого — третий и т. д. На рис. 5, г проведено сложение трех

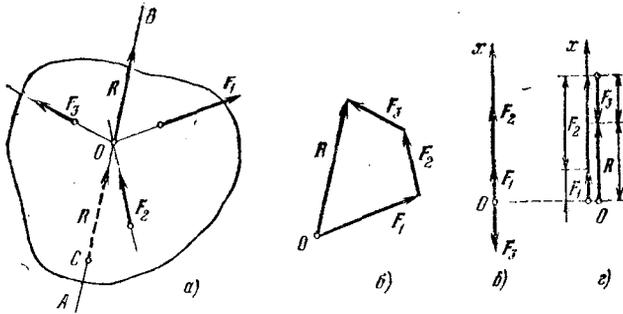


Рис. 5.

векторов F_1 , F_2 и F_3 , приложенных в точке O (рис. 5, в), причем один из слагаемых векторов F_3 и вектор суммы R условно несколько смещены.

Из сказанного следует, что, в отличие от алгебраического сложения скалярных величин, векторы складываются геометрически.

Вычитание одного вектора из другого заменяется действием сложения «уменьшаемого» вектора с вектором, равным по величине и направленным противоположно «вычитаемому» вектору.

Сложение и вычитание векторов, направленных по одной прямой, можно упростить, заменив геометрическое сложение (и вычитание) алгебраическим сложением их проекций на ось, направленную вдоль той же прямой. При этом, как обычно, проекции векторов, направленных так же как и выбранная ось, считаются положительными, а направленных в противоположную сторону — отрицательными. Например, на рисунке 5, в векторы F_1 и F_2 направлены так же как и ось Ox и их проекции положительны. Проекция же вектора F_3 на эту ось отрицательна. И вместо векторного равенства

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

можно написать скалярное равенство

$$R = F_1 + F_2 - F_3.$$

Если модуль вектора $F_3 > F_1 + F_2$, то тогда сумма R трех векторов получится отрицательной, т. е. вектор R на рис. 5, 2 будет направлен в ту же сторону, что и вектор F_3 .

Можно видеть, что при умножении вектора F на скалярную величину α получается вектор αF , приложенный в той же точке, модуль которого в $|\alpha|$ раз больше модуля F умножаемого вектора. Направление вектора-произведения совпадает с направлением исходного вектора, если $\alpha > 0$, и противоположно ему при $\alpha < 0$.

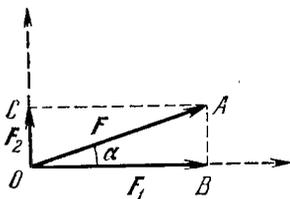


Рис. 6.

Разложение вектора по двум направлениям производится по правилу параллелограмма, в котором разлагаемый вектор является диагональю, а результирующие векторы — сторонами. В частном случае разложения вектора по двум взаимно перпендикулярным направлениям параллелограмм превращается в прямоугольник. На рис. 6 показано разложение вектора $F = \vec{OA}$ по координатным осям на векторы $F_1 = \vec{OB}$ и $F_2 = \vec{OC}$. Модули составляющих векторов:

$$F_1 = F \cos \alpha, \quad F_2 = F \sin \alpha.$$

§ 2. Общие методические указания к решению задач

Основная особенность физической задачи та, что в ней рассматривается физический процесс, и хотя решение задачи и сводится к ряду математических действий, правильное решение задачи по физике возможно только в том случае, если правильно понят физический процесс, к которому относится данная задача.

Поэтому можно дать следующие общие указания к решению задач по физике.

1. Условие задачи следует читать с большим вниманием, неоднократно, — пока не станет ясным, какой именно физический процесс рассматривается в данной задаче.

2. Затем записываются заданные и искомые в задаче физические величины. Запись условия задачи следует вести тщательно, ничего не пропуская, и записывать также и те величины, числовые значения которых не задаются, но о них можно судить по условию задачи. Например, если задача относится к торможению до остановки, следует записать, что конечная скорость $v_k = 0$, если в задаче сказано, что какой-то величиной x пренебречь, обязательно записать: $x \approx 0$ или $x = 0$, и т. п.

3. Вспомнить, какими математическими формулами описывается данный физический процесс и управляющие им физические законы. Если формул несколько, то сличить величины, входящие в различные формулы, с величинами, заданными и искомыми в данной задаче.

4. Как правило, задача по физике решается в общем виде, т. е. выводится формула, в которой искомая величина выражена через величины, заданные в задаче. В последней строке решения в найденную формулу подставляются численные значения заданных величин и размерность этих величин и таким образом определяется численное значение и размерность искомой величины. При таком решении задачи не происходит накопления погрешностей, что неизбежно, если вычислять с некоторым приближением значения промежуточных величин и эти приближенные значения вставлять в формулу для подсчета значения искомой величины. Исключения из данного правила крайне редки и бывают двух родов: 1) если формула для какой-нибудь промежуточной величины настолько громоздка, что вычисление этой величины значительно упрощает дальнейшую запись решения и 2) если решение задачи в цифрах значительно проще, нежели вывод формулы, и притом не влияет на точность полученного ответа.

5. Прежде чем подставлять числовые значения заданных величин в полученные расчетные формулы для искомого величин, следует произвести пересчет всех данных в одной системе единиц — предпочтительно в системе СИ. Исключение из этого правила составляют формулы, в которых какая-либо величина входит множителем в числитель и знаменатель, — эти величины могут быть выражены в любых, но, разумеется, в одних и тех же единицах.

6. Правильность полученного ответа до некоторой степени проверяется размерностью. Если в расчетную формулу входят алгебраические суммы, то следует обратить внимание на совпадение размерностей слагаемых выражений.

7. Полученные при решении задачи цифровые результаты не должны искажать рассматриваемое в задаче физическое явление, т. е. должны быть допустимы с точки зрения реальности данного физического процесса.

В данном пособии задачи по каждой теме располагаются, насколько это возможно, в порядке возрастающей трудности по данной теме, причем задачи повышенной трудности отмечены звездочками (*).

I. МЕХАНИКА

§ 1. Введение. Основные понятия механики

Механика — раздел физики, изучающий движение тел, т. е. изменение их положения в пространстве с течением времени.

Положение тела в пространстве можно определить только относительно какого-нибудь другого тела или других тел. Поэтому, когда речь идет о движении, то имеется в виду относительное движение, т. е. движение тела относительно другого тела, которое условно принимается за неподвижное. Если в теле, принятом за неподвижное, выбрать точку и мысленно провести произвольно систему координат, жестко связанную с этим телом, приняв выбранную точку за начало координат, то эта система координат вместе с выбранным способом измерения времени образует систему отсчета, а тело, с которым она связана, называют телом отсчета.

При изучении движения тела его положение в каждый момент времени определяется по отношению к системе отсчета, принятой за «неподвижную».

Обычно пользуются прямоугольной системой координат, представляющей собой совокупность трех взаимно перпендикулярных осей Ox , Oy и Oz (рис. 7, а).

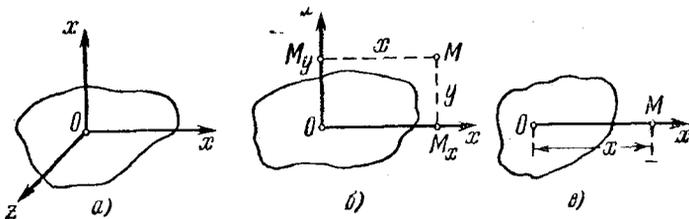


Рис. 7.

При изучении земных движений, т. е. в обычной «земной» практике, в большинстве случаев за «неподвижную» систему отсчета можно принять систему осей координат, жестко связанных с поверх-

ностью Земли. Когда приходится учитывать вращение Земли, например, при расчете движения спутников Земли, то за «неподвижную» систему отсчета принимают *геоцентрическую систему отсчета*—с началом, совпадающим с центром Земли, и осями, направленными к трем выбранным «неподвижным» звездам. В тех случаях, когда требуется учесть движение Земли и других планет солнечной системы относительно Солнца, например, при изучении движения космических кораблей, посылаемых к планетам солнечной системы, за неподвижную принимается *гелиоцентрическая система отсчета*—с началом, совпадающим с центром Солнца и осями, направленными к трем отдаленным «неподвижным» звездам.

Если изучаемое движение тела происходит в одной плоскости, то достаточно двух осей координат Ox и Oy (рис. 7, б), так как положение любой точки на плоскости (например, точки M) определяется двумя координатами— $x = OM_x$ и $y = OM_y$, представляющими собой расстояния от начала координат до точек M_x и M_y оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на соответствующие оси координат.

Если тело движется вдоль прямой, то, совместив одну из координатных осей с этой прямой, положение точки в любой момент времени можно определить одной координатой—расстоянием этой точки до выбранного начала отсчета (рис. 7, в). Для изучения движения тела в этом случае достаточно иметь только одну ось координат.

В большинстве случаев при изучении движения тел их деформации не учитываются,—тела рассматриваются как абсолютно твердые.

Абсолютно твердое тело—это такое тело, у которого взаимное расположение частиц остается при движении тела неизменным.

Часто, рассматривая движение тела, можно пренебречь его размерами и особенностями формы. В таких случаях изучение движения абсолютно твердого тела может быть заменено изучением движения «материальной точки».

Под материальной точкой понимают *тело, размерами которого можно в данной задаче пренебречь.*

Замена твердого тела материальной точкой представляет собой известную абстракцию и может оказаться допустимой при изучении одних движений этого тела и недопустимой при изучении других его движений. Например, изучая движение Земли вокруг Солнца, можно Землю и Солнце считать материальными точками. При изучении же движения Земли вокруг своей оси принимать Землю за материальную точку нельзя.

Нас будут главным образом интересовать два случая, в которых тело можно рассматривать как материальную точку. Это можно сделать во-первых, если размеры тела малы по сравнению с расстоянием, пройденным телом при его движении или расстояниями от этого тела до других тел, во-вторых, когда все

точки тела движутся одинаково — имеют в любой момент времени одинаковые скорости и движутся по одинаковым линиям — траекториям (рис. 8). Такое движение тела называется поступательным движением.

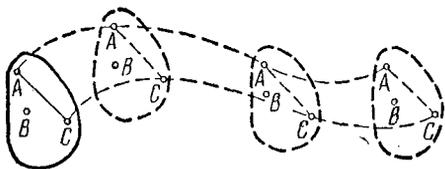


Рис. 8.

Движение тел можно разделить на два типа движений по виду траектории движения — прямолинейное

движение, если траектория движения прямая, и криволинейное движение, если траектория — произвольная кривая.

КИНЕМАТИКА

§ 2. Кинематика поступательного движения

При поступательном движении тела все точки тела движутся одинаково, и вместо того чтобы рассматривать движение каждой точки тела, можно рассматривать движение только одной его точки. Поэтому изучение поступательного движения тела сводится к изучению движения материальной точки.

Основные характеристики движения материальной точки — траектория движения, перемещение точки, пройденный ею путь, скорость и ускорение точки.

Перемещением материальной точки за некоторый промежуток времени называется *вектор, направленный от положения точки в начале этого промежутка времени к ее положению в конце промежутка*.

Пройденный путь представляет собой *скалярную величину, равную расстоянию, пройденному материальной точкой по ее траектории*. Пройденный путь равен длине вектора перемещения только при движении тела по прямой в одном направлении. Во всех других случаях модуль перемещения меньше длины пути. Например, если тело совершает колебательное движение около некоторой точки, то в отдельные моменты величина его перемещения может быть равной нулю. Пройденный же путь — это положительная скалярная величина, не убывающая со временем.

Скорость материальной точки представляет собой вектор, характеризующий направление и быстроту перемещения материальной точки. Аналогично вектор ускорения характеризует быстроту и направление изменения скорости материальной точки относительно тела отсчета.

В кинематике имеет место закон независимости движений: *Если материальная точка одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение точки равно векторной сумме перемещений, совершаемых ею в каждом из движений.*

§ 3. Равномерное прямолинейное движение.

Уравнение этого движения. Скорость. Графики пути и скорости равномерного движения

Равномерным прямолинейным движением называется такое движение, при котором материальная точка движется по прямой и в любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.

Вектор скорости равномерного прямолинейного движения материальной точки направлен вдоль ее траектории в сторону движения. Вектор скорости при равномерном движении измеряется отношением вектора перемещения за любой промежуток времени, к этому промежутку времени

$$v = \frac{s}{t}.$$

Примем линию, по которой движется тело, за ось координат, причем за положительное направление оси выберем направление движения тела. Тогда, спроектировав векторы s и v на эту ось, для проекций s и v этих векторов мы можем записать

$$v = \frac{s}{t}.$$

Отсюда получаем уравнение равномерного движения

$$s = v \cdot t.$$

При равномерном прямолинейном движении путь l , пройденный

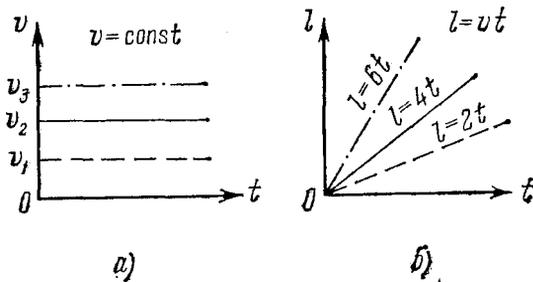


Рис. 9.

телом, равен абсолютной величине вектора перемещения. Поэтому мы можем записать также

$$l = v \cdot t.$$

На рис. 9 представлены графики зависимости пути и скорости равномерного прямолинейного движения от времени. Чем больше скорость, тем круче прямая графика зависимости пути, пройденного телом, от времени.

§ 4. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение

Переменное или неравномерное движение—это движение, при котором скорость тела изменяется во времени.

Средней скоростью называется величина, равная отношению перемещения тела за некоторый промежуток времени Δt к этому промежутку

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\Delta t}.$$

Иногда под средней скоростью понимают скалярную величину $v_{\text{ср}}$, равную отношению пути Δl , пройденного телом за некоторый промежуток времени, к этому промежутку

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Именно эта скорость имеется в виду, когда, например, говорят о средней скорости движения автомобиля в городе или средней скорости поезда.

Движение материальной точки в каждый данный момент времени, т. е. в каждой точке траектории, характеризуется, так называемой, мгновенной скоростью или просто скоростью.

Мгновенная скорость равна пределу, к которому стремится средняя скорость при бесконечном уменьшении промежутка времени Δt , за который она определяется:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s}{\Delta t}.$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения тела (рис. 10). По абсолютной величине он равен,

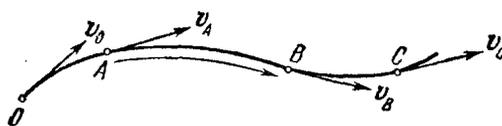


Рис. 10.

очевидно, пределу отношения пути, пройденного телом за промежуток времени Δt , к этому промежутку:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{l}{\Delta t}.$$

При неравномерном движении тела его скорость непрерывно изменяется. Как быстро изменяется скорость тела, показывает величина, которая называется ускорением тела.

Средним ускорением тела за некоторый промежуток времени называется величина, равная отношению разности векторов скоростей к соответствующему промежутку времени:

$$a_{\text{ср}} = \frac{v - v_0}{\Delta t}.$$

Ускорение материальной точки в данный момент времени получим, если найдем предел среднего ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$. Обозначая изменение вектора скорости $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}$, ускорение найдем как предел, к которому стремится в данный момент времени отношение изменения вектора скорости $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ к соответствующему промежутку времени Δt при беспредельном уменьшении промежутка времени:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

§ 5. Равнопеременное движение. Формулы и графики скорости и пути в этом движении. Уравнение равнопеременного движения

Равноускоренным (иногда — равнопеременным) движением называется движение с постоянным по величине ускорением.

Вектор ускорения \mathbf{a} при таком движении равен

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{\Delta t}.$$

Если скорость \mathbf{v}_0 — это скорость тела в начальный момент времени, то Δt просто равно времени с начала движения, а \mathbf{v} — скорость тела в момент времени t . Тогда

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t}.$$

Очевидно, что равноускоренное движение — движение прямолинейное. Поэтому, если за ось координат выбрать прямую, по которой движется тело, и за ее положительное направление принять направление вектора начальной скорости \mathbf{v}_0 , то ускорение можно «вычислять» как скалярную величину — проекцию вектора ускорения, имеющую знак (+), если направление вектора ускорения совпадает с вектором скорости \mathbf{v}_0 , и знак (—) в случае противоположного направления этих векторов. В этом случае ускорение тела можно вычислять по формуле

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Отсюда получим формулу для скорости равнопеременного движения в заданный момент времени t :

$$v = v_0 + at.$$

При пользовании этой формулой следует иметь в виду, что одна из осей системы отсчета направлена по вектору \mathbf{v}_0 начальной скорости. В случае противоположного направления вектора ускорения величина v скорости в некоторый момент времени может

оказаться отрицательной,— это означает, что скорость в этот момент времени направлена противоположно направлению v_0 .

В частном случае движения из состояния покоя, т. е. $v_0 = 0$,

$$v = at.$$

В этом случае направление вектора v всегда совпадает с направлением a .

График зависимости скорости равноускоренного движения материальной точки от времени представляет собой прямую (рис. 11). Тангенс угла α наклона этой прямой к оси «времени»

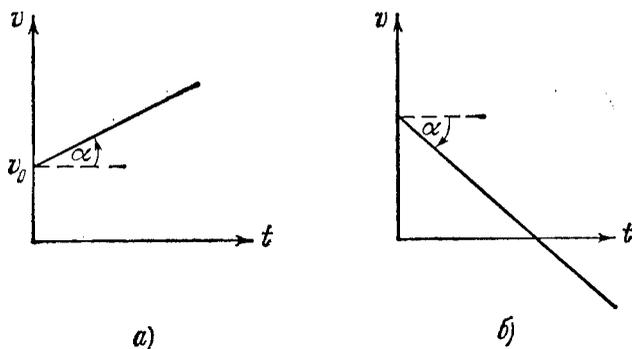


Рис. 11.

равен ускорению a тела. Если ускорение положительно (направление вектора ускорения a совпадает с направлением вектора скорости v_0), то $\operatorname{tg} \alpha > 0$ (рис. 11, а), если ускорение отрицательно, то и $\operatorname{tg} \alpha < 0$ (рис. 11, б).

Разобьем время движения на ряд промежутков (для простоты на рис. 12 взято три промежутка). Путь, пройденный телом (материальной точкой), можно тогда подсчитать так:

$$l = v_{\text{ср}1} \cdot \Delta t_1 + v_{\text{ср}2} \cdot \Delta t_2 + v_{\text{ср}3} \Delta t_3.$$

Правая часть этого равенства численно равна площади фигуры, ограниченной сверху ломаной линией $abcdef$. Ясно, что

с увеличением количества промежутков эта ломаная линия все больше будет приближаться к прямой AB . Следовательно, путь, пройденный телом, численно равен площади трапеции, ограниченной сверху прямой AB , а снизу осью Ot

$$l = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (1)$$

$(v_0 + v)/2$ —это, очевидно, средняя скорость движения тела за время t (это следует из того, что $l = v_{\text{ср}} t$ *).

Как мы знаем,

$$v = v_0 + at. \quad (2)$$

Подставляем это выражение для v в предыдущую формулу, получим

$$l = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} t,$$

или

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

В частном случае равноускоренного движения из состояния покоя

$$v = at \quad \text{и} \quad l = \frac{at^2}{2}.$$

Если движение неравнопеременное, т. е. $a \neq \text{const}$, то график скорости такого движения будет не прямой линией, а какой-то кривой. Однако и в этом случае путь, пройденный телом, равен площади ограниченной этой кривой и осью t .

На рис. 13 приведен график скорости прямолинейного движения с ускорением, направленным противоположно вектору скорости. Из графика видно, что до момента t_1 , когда скорость становится равной нулю ($v_1 = 0$), средняя скорость движения, как и в предыдущем случае, равна полусумме скоростей в начале и в конце движения:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{v_0 + 0}{2} = \frac{v_0}{2}.$$

*) Средняя скорость равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей тела только при его равнопеременном движении, когда, как говорят, зависимость скорости от времени линейная: $v = v_0 + at$.

Найдем, например, среднюю скорость автомобиля, двигавшегося из города A в город B со скоростью v_1 , а из города B в город A —со скоростью v_2 . По определению средней скорости

$$v_{\text{ср}} = \frac{2l}{t},$$

где l —расстояние между городами, т. е. путь, пройденный автомобилем, а t —время движения.

Но

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2}.$$

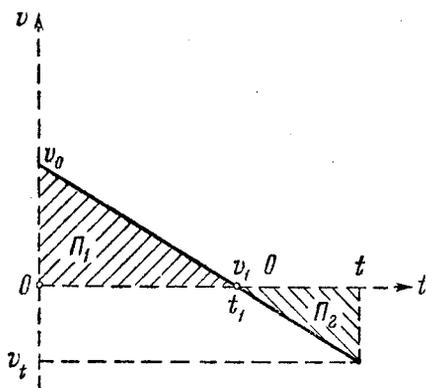
Отсюда

$$v_{\text{ср}} = \frac{2l}{(l/v_1) + (l/v_2)} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad \left(\text{а не } \frac{v_1 + v_2}{2} ! \right).$$

Пройденный путь в этом движении численно равен площади Π_1 и вычисляется по той же формуле (3), что и в предыдущем случае.

Так как движение в обоих рассмотренных случаях происходит в одном направлении — в направлении вектора скорости, то вектор перемещения тела направлен в сторону вектора скорости, а абсолютная величина вектора перемещения равна длине пути.

Если с направлением движения совместить ось абсцисс, начало которой поместить в той точке, в которой находилось тело в момент времени $t=0$, то перемещение в каждый момент времени равно координате x тела в этот момент, т. е.



$$s = x = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (4)$$

Рис. 13.

Ускорение a в этой формуле отрицательно ($a < 0$).

Если тело, после того как его скорость становится равной нулю, продолжает движение с тем же ускорением, — теперь уже в противоположную сторону, — то абсолютная величина вектора перемещения, или координата x , уменьшается — она численно равна разности площадей Π_1 и Π_2 . Нетрудно доказать, что и в этом случае координату тела в момент времени t нужно вычислять по той же формуле (4)

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

напомним еще раз, что ускорение a в этой формуле отрицательно!

В дальнейшем движении перемещение может стать равным нулю ($x=0$) и далее становится отрицательным ($x < 0$), как то и следует из формулы.

Длина же пройденного пути и после момента времени t_1 продолжает увеличиваться и не может быть вычислена по формуле (4). Она равна сумме, а не разности площадей Π_1 и Π_2 . С момента t_1 длину пути следует вычислять, как для движения с совпадающими направлениями векторов скорости и ускорения, приняв за начало отсчета времени момент, в который скорость тела равна нулю.

Графики зависимости ускорения, скорости и координаты тела от времени при равнопеременном движении приведены на рис. 14.

На рис. 15 сплошная кривая — это график зависимости координаты тела от времени, а пунктирная — график зависимости пути от времени — для случая, когда ускорение тела отрицательно. Эти графики совпадают только до момента времени $t=t_1$, в ко-

торый скорость тела становится равной нулю. Ясно, что при $t > t_1$ график пути это просто отраженный относительно горизонтальной прямой, проходящей через точку $(t_1; v_1)$, график координаты.

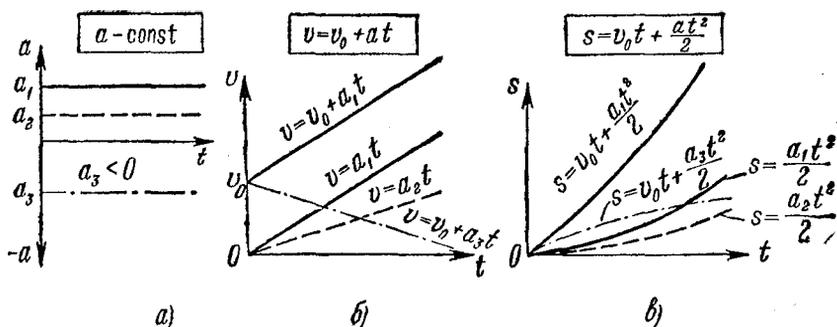


Рис. 14.

Часто уравнение движения с отрицательным ускорением записывают так:

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

В этом случае стоящее в формуле ускорение a — это положительная величина — модуль, абсолютное значение вектора ускорения. Знак (—) перед a показывает, что вектор ускорения направлен противоположно оси координат.

Движение с постоянным отрицательным ускорением иногда называют равнозамедленным движением.

Отметим важную особенность графика координаты тела: тангенс угла между касательной к графику координаты тела и осью Ot равен скорости

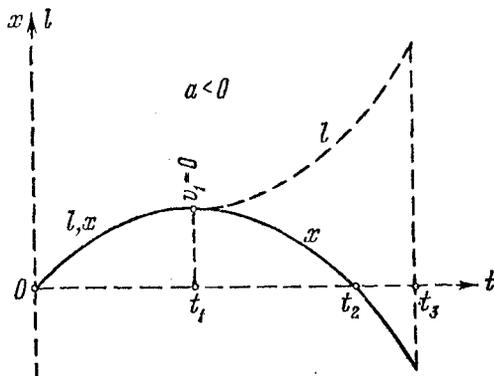


Рис. 15.

тела в данный момент времени. Так как скорость тела не может измениться скачком, мгновенно, то графики координаты и скорости тела не могут иметь изломов (касательные к графику слева и справа от точки излома имели бы разные углы наклона, а это означало бы, что скорость в тот момент, в который график координаты или пути имеет излом, изменилась скачком).

Если из уравнений (2) и (3) исключить время t , то получим прямую зависимость между скоростью равнопеременного

движения тела и пройденным путем:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2al}.$$

Для частного случая движения из состояния покоя, т. е. при $v_0 = 0$ $v = \sqrt{2al}$.

Примеры решения задач

1. *Равномерное движение.* Задачи на равномерное движение в общем довольно просты. Некоторые затруднения обычно представляет перевод скорости движения из одних единиц в другие, например из [км/ч] в [м/с]. Допустим задана скорость $v = 45$ км/ч. Учашийся рассуждает так: чтобы перевести км в м надо заданную величину помножить на 1000, — получим скорость в [м/ч]; а в секунду численное значение скорости будет в 3600 раз меньше. Получаем

$$v = \frac{45 \cdot 1000}{3600} = 12,5 \text{ м/с.}$$

Все это, в общем, верно. Проще, однако, запомнить, что 3,6 км/ч соответствуют 1 м/с и заданную величину скорости в [км/ч] делить на 3,6:

$$v = \frac{45}{3,6} = 12,5 \text{ м/с.}$$

Задача 1. Катер проходит расстояние между двумя пунктами на реке вниз по течению за время $t_1 = 8$ ч, обратно — за $t_2 = 12$ ч. За сколько часов катер прошел бы то же расстояние в стоячей воде?

Решение

$t_1 = 8 \text{ ч}$ $t_2 = 12 \text{ ч}$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> Определить t	Обозначим расстояние между пунктами L , скорость движения катера в стоячей воде v и скорость течения воды в реке u .
---	--

Затем запишем уравнение движения катера вниз по течению реки: $L = (v + u) t_1$. То же — вверх по течению: $L = (v - u) t_2$.

Из этих уравнений необходимо определить величину $t = L/v$. Перепишем их так, чтобы исключить u :

$$\frac{L}{t_1} = v + u, \quad \frac{L}{t_2} = v - u.$$

Сложив эти уравнения, получим $\frac{L}{t_1} + \frac{L}{t_2} = 2v$. Отсюда

$$t = \frac{L}{v} = \frac{2}{1/t_1 + 1/t_2}, \quad t = \frac{2}{1/8 \text{ ч} + 1/12 \text{ ч}} = \underline{9,6 \text{ ч.}}$$

Задача 2. Пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью 72 км/ч, видит встречный поезд, идущий со скоростью 31,4 км/ч, в течение 10 секунд. Определить длину встречного поезда.

Решение. Встречный поезд по отношению к пассажиру движется со скоростью $v = v_1 + v_2$.

Длина поезда l , очевидно, равна $l = (v_1 + v_2) t$.

Переведем скорости в м/с

$$v_1 = \frac{72 \text{ км}}{3,6 \text{ ч}} = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v_2 = \frac{31,4}{3,6} = 9 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тогда

$$l = (20 \text{ м/с} + 9 \text{ м/с}) \cdot 10 \text{ с} = \underline{290 \text{ м.}}$$

Задача 3. Один автомобиль идет с юга на север со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, другой с запада на восток со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти скорость 2-го автомобиля относительно 1-го (ее величину и направление).

Решение. Пусть в некоторый момент времени 1-й автомобиль находится в точке A , а 2-й — в точке B (рис. 16). Первый автомобиль примем за тело отсчета, с которым связываем систему координат xy . Ее мы будем считать неподвижной.

Точка B земли в нашей системе координат имеет скорость, равную по величине v_1 и направленную с севера на юг:

$$v_{B-1} = v_1 = 80 \text{ км/ч.}$$

Второй автомобиль относительно точки B земли имеет скорость с запада на восток, величина которой

$$v_{2-B} = v_2 = 60 \text{ км/ч.}$$

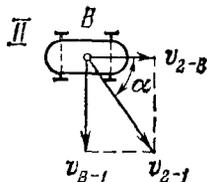
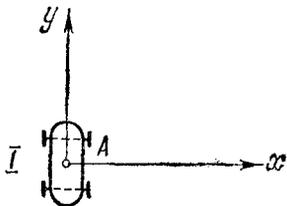


Рис. 16.

Сложив оба вектора скорости v_{B-1} и v_{2-B} , по правилу параллелограмма найдем

$$v_{2-1} = \sqrt{80^2 - 60^2} = 100 \text{ км/ч.}$$

Эта скорость направлена по диагонали прямоугольника, построенного на векторах v_{2-B} и v_{B-1} как на сторонах. Вектор v_{2-1} составляет с осью x угол α такой, что

$$\sin \alpha = \frac{v_{2-B}}{v_{2-1}} = \frac{60}{100} = 0,60.$$

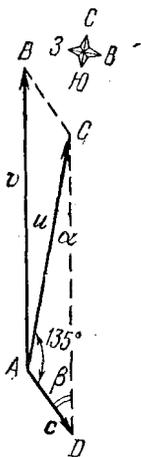


Рис. 17.

Задача 4. Самолет летит из пункта A со скоростью $v = 500$ км/ч относительно воздуха и направляется в пункт C , расположенный от пункта A на расстоянии $L = 2000$ км (рис. 17). На всем пути дует северо-западный ветер со скоростью $c = 100$ км/ч. Через какое время после вылета самолет прибудет к пункту назначения, если будет лететь по прямой и скорость v направлена на север?

Решение. Скорость u самолета относительно земли будет векторной суммой скорости v самолета относительно воздуха и скорости c воздуха относительно земли, т. е. будет диагональю параллелограмма, стороны которого равны v и c , причем скорость c направлена с северо-запада на юго-восток, а скорость v — с юга на север.

Величину скорости u найдем из $\triangle ACD$ (или $\triangle ABC$), у которого известны две стороны $AD = 100$ и $CD = 500$ и $\angle A = 135^\circ$.

Воспользуемся теоремой синусов: $\frac{\sin \alpha}{\sin 135^\circ} = \frac{c}{v}$, откуда $\sin \alpha = \frac{c}{v} \sin 135^\circ =$

$$= \frac{100}{500} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,14. \text{ Так как}$$

$$\frac{u}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

а

$$\sin \beta = \sin [180^\circ - (\alpha + 135^\circ)] = \sin (135^\circ + \alpha) = \sin 135^\circ \cos \alpha + \cos 135^\circ \sin \alpha = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} (0,99 - 0,14) \approx 0,6,$$

то $u = c \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 100 \frac{0,6}{0,14} \approx 430$ км/ч. Теперь нетрудно найти время полета:

$$t = \frac{L}{u} = \frac{2000 \text{ км}}{430 \text{ км/ч}} \approx 4,72 \text{ ч.}$$

2. *Равнопеременное прямолинейное движение.* При решении задач на равнопеременное движение в тех случаях, когда ускорение не задается, а задаются скорости движения, — для вычисления перемещения удобно пользоваться не формулой $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, а формулой $s = v_{cp} t$, где $v_{cp} = \frac{v_0 + v}{2}$.

Задача 5. Поезд, имея скорость 70 км/ч, стал двигаться равнозамедленно и через 10 с снизил скорость до 52 км/ч. С каким ускорением двигался поезд на этом участке? Какое он при этом прошел расстояние?

Решение. Переводим скорости в [м/с]:

$$v_0 = \frac{70}{3,6} \text{ м/с}; \quad v = \frac{52}{3,6} \text{ м/с.}$$

Величину ускорения находим из его определения:

$$a = \frac{v - v_0}{t}, \quad a = \frac{\frac{52}{3,6} \text{ м/с} - \frac{70}{3,6} \text{ м/с}}{10 \text{ с}} = \underline{\underline{-0,5 \text{ м/с}^2.}}$$

Ускорение поезда имеет отрицательный знак, так как оно направлено противоположно скорости поезда.

Пройденный поездом путь в данном случае равен его перемещению:

$$l = s = v_{cp} t = \frac{v_0 + v}{2} t, \\ l = \frac{\frac{70}{3,6} \text{ м/с} + \frac{52}{3,6} \text{ м/с}}{2} \cdot 10 \text{ с} \approx \underline{\underline{190 \text{ м.}}}$$

Задача 6. Поезд, двигаясь со станции с ускорением 0,4 м/с², прошел путь 0,5 км. Какой скорости достиг при этом поезд и сколько времени он разогнался?

Решение. Для определения скорости поезда воспользуемся формулой $v = \sqrt{2at}$, так как в задаче заданы все величины, входящие в правую часть этой формулы

$$v = \sqrt{2 \cdot 0,4 \text{ м/с}^2 \cdot 500 \text{ м}} = 20 \text{ м/с} = \underline{\underline{72 \text{ км/ч.}}}$$

Время движения поезда равно

$$t = \frac{v}{a}, \quad t = \frac{20 \text{ м/с}}{0,4 \text{ м/с}^2} = \underline{\underline{50 \text{ с.}}}$$

Задача 7. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло за 6 секунд 450 метров. На каком расстоянии от начального положения оно находилось через 4 секунды после начала движения?

Решение. Перемещение тела за время t равно

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad (1)$$

а за время t_1 :

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2}. \quad (2)$$

Разделим второе равенство на первое:

$$\frac{s_1}{s} = \frac{t_1^2}{t^2} = \left(\frac{t_1}{t}\right)^2. \quad \text{Отсюда } s_1 = s \left(\frac{t_1}{t}\right)^2,$$
$$s_1 = 450 \text{ м} \left(\frac{4\text{с}}{6\text{с}}\right)^2 = \underline{200 \text{ м}}.$$

Примечание. Часто подобные задачи решают так: Из 1-го уравнения находят ускорение и подставляют его во 2-е уравнение. В этом, однако, нет необходимости, так как ускорение легко исключается делением обеих частей уравнений.

Задача 8. Материальная точка начала равнопеременное движение с запада на восток с начальной скоростью 20 м/с и ускорением 0,5 м/с², направленным противоположно вектору скорости. Найти пройденный ею путь и перемещение через 0,5 минуты и через 2 минуты после начала движения.

Решение. Вначале найдем перемещение точки за время t_1 . Ось координат направим вдоль вектора v_0 . Тогда $s_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2}$, где $a = -0,5$ м/с.

$$s_1 = 20 \text{ м/с} \cdot 30 \text{ с} + \frac{-0,5 \text{ м/с}^2 \cdot 30^2 \text{ с}^2}{2} = \underline{375 \text{ м}}.$$

Аналогично

$$s_2 = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2}, \quad s_2 = 20 \text{ м/с} \cdot 120 \text{ с} + \frac{-0,5 \text{ м/с}^2 \cdot 120^2 \text{ с}^2}{2} = \underline{-1200 \text{ м}}.$$

Материальная точка через 0,5 мин. от начала движения будет находиться на расстоянии 375 м к востоку от начала движения, а через 2 мин. — на расстоянии 1200 м к западу от него.

Пройденный путь в общем случае представляет собой сумму двух расстояний: от начала движения до точки, в которой скорость $v=0$ (это максимальное перемещение тела в направлении вектора v_0), и расстояния, пройденного материальной точкой в противоположном направлении.

Для того чтобы найти эти расстояния, нам нужно знать время от начала движения, через которое скорость тела станет равной нулю, т. е. время, через которое тело начнет двигаться в направлении, противоположном первоначальному.

Зависимость скорости тела от времени определяется формулой

$$v = v_0 + at.$$

Подставим в эту формулу значение скорости тела в интересующий нас момент времени. Получим $0 = v_0 + at$.

$$\text{Отсюда } t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{20 \text{ м/с}}{-0,5 \text{ м/с}^2} = 40 \text{ с}.$$

Так как $t_1 < 40$ с, то путь, пройденный за время t_1 , равен величине перемещения за то же время:

$$l_1 = s_1 = \underline{375 \text{ м}}.$$

Путь, пройденный за время t_2 , найдем как сумму $l_2 = l'_2 + l''_2$, где l'_2 — путь, пройденный за время $t = 40$ с, а l''_2 — путь, пройденный в противоположном направлении.

Путь l'_2 равен перемещению s тела за время t :

$$l'_2 = s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 400 \text{ м}.$$

Путь l_2'' можно найти, приняв точку, в которой находилось тело в момент времени t за начало новой системы координат с осью x , направленной противоположно вектору \mathbf{v}_0 . В этой системе координат тело до интересующего нас момента времени движется в течение времени $t_3 = t_2 - t = 80$ с с начальной скоростью, равной нулю, и с положительным ускорением $a' = 0,5$ м/с. Очевидно путь l_2'' равен перемещению тела в этой системе координат

$$l_2'' = \frac{a' t_3^2}{2} = 1600 \text{ м} \quad \text{и} \quad l_2 = l_1' + l_2'' = 400 \text{ м} + 1600 \text{ м} = \underline{2000 \text{ м}}.$$

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 6. Сила

Изменение движения какого-либо тела, т. е. изменение по величине и направлению вектора его скорости (ускорение тела) вызывается действием на него других тел.

Мерой действия одного тела на другое, вызывающего ускорение последнего, является векторная величина, которой присвоено особое название—сила.

При изучении движения какого-либо тела действие на него других тел изображается приложенными к этому телу векторами — силами. Это позволяет не рассматривать процесс взаимодействия тел и движение тел, действующих на данное тело, а считать, что телу, движение которого изучается, сообщает ускорение приложенная к нему сила.

Если силу или систему сил, приложенных к телу, можно заменить другой силой или системой сил, не изменяя при этом состояния движения тела, то такие силы или системы сил называются эквивалентными. В частности, *когда система сил заменяется одной силой, то эта сила называется равнодействующей.*

Опыт показывает, что равнодействующая системы нескольких сил, действующих по прямым, пересекающимся в одной точке, приложена в этой же точке и равна геометрической сумме всех сил системы.

§ 7. Первый закон Ньютона (закон инерции)

Первый закон Ньютона можно сформулировать следующим образом:

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если действия на нее со стороны других тел взаимно компенсируются.

Или:

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если равнодействующая всех приложенных к нему сил равна нулю.

Явление сохранения телом скорости движения при отсутствии внешних воздействий на него со стороны других тел называется инерцией, а это свойство тела — инертностью.

§ 8. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета

Движение тела, как мы знаем, *относительно* и зависит от того, какое тело принято за тело отсчета, т. е. от системы отсчета. Можно привести такой простейший пример:—водитель автомобиля, движущегося с ускорением, находится в покое относительно системы отсчета, связанной с автомобилем; относительно же системы отсчета, связанной с человеком, стоящим на обочине дороги, водитель движется с ускорением, равным ускорению автомобиля. Поэтому, формулируя законы движения, мы должны, очевидно, указать, в какой системе координат рассматривается движение тела. Сформулированный выше первый закон Ньютона—закон инерции—справедлив не во всех системах отсчета.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной системой отсчета.

Система отсчета, в которой закон инерции не выполняется, называется неинерциальной системой отсчета.

Поясним сказанное примерами.

В вагоне поезда на совершенно гладком столике лежит гладкий шарик. До тех пор, пока поезд стоит или движется прямолинейно и равномерно, шарик лежит на месте. Наблюдатель, находящийся на земле, видит шарик находящимся на месте, если поезд стоит, и движущимся с постоянной скоростью, равной скорости поезда, если поезд движется прямолинейно равномерно; наблюдатель в поезде в обоих случаях видит шарик находящимся в покое. Движение шарика и в той и в другой системе отсчета подчиняется первому закону Ньютона. Обе системы отсчета, — связанная с землей и связанная с поездом, — инерциальные.

Но как только вагон получает ускорение, наблюдатель в поезде видит, что шарик откатывается назад, хотя действие на него других тел не изменилось, — система отсчета связанная с наблюдателем в поезде, движущемся с ускорением, не является, таким образом, инерциальной. Это — неинерциальная система отсчета. В то же время для наблюдателя на Земле шарик сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения с точностью, доступной глазу наблюдателя; с этой точностью система отсчета, связанная с поверхностью Земли является инерциальной системой.

Однако же относительно Солнца и звезд Земля движется по криволинейной траектории. Кроме того, Земля вращается вокруг своей оси. При этом скорость любой точки Земли относительно Солнца непрерывно меняет свое направление и величину, т. е. движение любой точки Земли относительно Солнца происходит с *ускорением*. Следовательно, геоцентрическая система отсчета,

связанная с центром Земли, и система отсчета, связанная с поверхностью Земли, не являются в точности инерциальными системами. Но требуемая обычно при рассмотрении движения автомобилей, поездов, самолетов и других тел точность позволяет эти системы отсчета считать инерциальными.

Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы отсчета с постоянной скоростью, т. е. прямолинейно и равномерно, является также инерциальной системой отсчета.

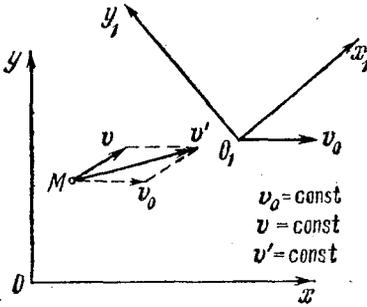


Рис. 18.

В самом деле, рассмотрим движение какой-нибудь материальной точки M в двух системах отсчета, — xOy и $x_1O_1y_1$ (рис. 18), о которых известно, что вторая система инерциальная и движется с постоянной скоростью v_0 относительно первой системы. Пусть скорость точки M относительно системы отсчета $x_1O_1y_1$ постоянна и

равна v_1 . Тогда скорость v этой точки относительно системы xOy будет равна геометрической сумме скоростей v_0 и v_1 , т. е. будет изображаться диагональю параллелограмма, построенного на векторах v_0 и v_1 , и также будет величиной постоянной. Следовательно, и система отсчета xOy тоже инерциальна.

§ 9. Второй закон Ньютона. Масса и плотность тела. Импульс тела (количество движения). Импульс силы

Второй закон в формулировке Ньютона гласит:

«Изменение движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

Под изменением движения следует понимать вектор ускорения; тогда второй закон записывается так:

$$a = \frac{F}{m}. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности $1/m$ характеризует инертность тела. Чем больше знаменатель этого «коэффициента», тем меньше при той же величине силы ускорение тела, т. е. тем меньше меняется движение тела и тем больше его движение похоже на движение по инерции. Физическую величину m называют массой.

Учитывая сказанное, второй закон Ньютона можно сформулировать так:

Сила, приложенная к телу, сообщает телу ускорение в направлении действия силы, равное отношению этой силы к массе тела.

Очевидно, что если к телу приложено несколько сил, то ускорение тела будет равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых каждой из сил, т. е. равно отношению равнодействующей всех сил, приложенных к телу:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{R}}{m}. \quad (2)$$

Модуль (абсолютная величина) вектора ускорения вычисляется по формуле

$$a = \frac{F}{m}, \quad \text{или} \quad a = \frac{R}{m}.$$

Величина, измеряемая отношением массы тела к его объему, называется плотностью:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Дадим еще одну формулировку второго закона Ньютона. Предварительно введем два новых понятия — импульса или количества движения тела и импульса силы.

Импульсом тела (количеством движения) называется вектор, равный произведению массы тела m на его скорость \mathbf{v} ($m\mathbf{v}$).

Импульсом силы ($\mathbf{F}\Delta t$) называется вектор, равный произведению силы \mathbf{F} на время действия этой силы Δt .

Вернемся ко второму закону Ньютона. Умножим обе части формулы (1) на время действия силы Δt , в результате чего получим

$$\mathbf{a}\Delta t = \frac{\mathbf{F}\Delta t}{m}.$$

Умножим обе части этого равенства на m :

$$m\mathbf{a}\Delta t = \mathbf{F}\Delta t.$$

Но произведение $\mathbf{a}\Delta t$ равно изменению скорости тела $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

Следовательно,

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}\Delta t. \quad (3)$$

Это означает, что второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом.

Изменение импульса или количества движения тела под действием приложенной к нему силы равно импульсу этой силы за тот же промежуток времени.

Если действующая на тело сила меняется со временем, то равенство (3) справедливо для такого малого промежутка времени Δt , для которого силу можно было считать постоянной: $\mathbf{F} \approx \text{const}$.

Если движение происходит из состояния покоя, то $v_1 = 0$ и $\Delta t = t$. Тогда

$$mv = Ft \quad (3, a)$$

(импульс тела равен импульсу силы).

Приведем несколько примеров действия второго закона Ньютона:

1) Наковальни делаются по возможности более массивными, так как ускорение, сообщаемое наковальне силой удара молота, тем меньше, чем больше масса наковальни.

2) Шарик, притягиваемый магнитом, движется с возрастающим ускорением, так как по мере приближения шарика к полюсу магнита растет сила притяжения.

§ 10. Принцип независимости действия сил

Принцип независимости действия сил заключается в том, что каждая действующая на данное тело сила сообщает ему ускорение, величина которого не зависит ни от состояния движения тела, ни от действия на тело других сил.

Примеры действия принципа независимости действия сил:

1) Пассажир роняет из окна вагона гирьку. Время, за которое падающая гирька достигнет уровня рельсов, и скорость ее падения (т. е. вертикальная составляющая скорости движения) в этот момент будут одними и теми же независимо от скорости хода поезда, так как действие силы тяжести, под влиянием которого происходит вертикальное перемещение гирьки, не зависит от горизонтального движения гирьки по инерции.

2) Время и вертикальная составляющая скорости падения на Землю снаряда в результате горизонтального выстрела, произведенного на некоторой высоте над Землей, равны времени и скорости падения тела с этой же высоты.

З а м е ч а н и е. Если в уравнении (2) второго закона Ньютона положить $R = 0$, то получим, что ускорение $a = 0$, т. е. если действия на данное тело других тел взаимно компенсируются, то его ускорение равно нулю. Казалось бы, отсюда можно сделать вывод, что первый закон Ньютона является следствием второго закона. В действительности же это не так, и первый закон имеет самостоятельное значение,— *физический смысл первого закона Ньютона заключается в том, что он определяет инерциальные системы отсчета.*

Первый закон Ньютона утверждает, что инерциальные системы отсчета существуют. Это такие системы отсчета, в которых тело, на которое не действуют другие тела, или действия на которые других тел компенсируются, движутся прямолинейно и равномерно. (Покой—это частный случай прямолинейного и равномерного движения.)

Второй закон Ньютона выполняется только в инерциальных системах отсчета. Например, шарик на полу вагона поезда, движущегося равномерно и прямолинейно, находится в покое относительно системы отсчета, связанной с поездом и движется равномерно и прямолинейно относительно системы отсчета, связанной с рельсами. Как только поезд получит ускорение, шарик относительно системы отсчета, связанной с поездом, станет двигаться с ускорением, направленным противоположно ускорению поезда, хотя действия на шарик других тел не изменились.

§ 11. Третий закон Ньютона

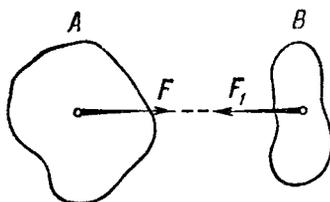
Третий закон Ньютона заключается в следующем.

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны (рис. 19):

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1.$$

Силы взаимодействия тел приложены к разным телам, взаимодействующим между собой.

Если рассматривается движение совокупности обоих взаимодействующих тел как одного целого, то силы их взаимодействия являются внутренними силами, приложенными к одному телу; они взаимно уравновешиваются, как равные и противоположно направленные, и не оказывают влияния на движение системы обоих тел относительно других тел.



$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1$$

Рис. 19.

§ 12. Сложение сил, направленных под углом одна к другой

Сложением сил называется нахождение их равнодействующей.

Равнодействующей двух или нескольких сил называется сила, действие которой эквивалентно действию этих сил.

При сложении сил руководствуются следующим основным положением, подтвержденным опытом.

Две силы, приложенные к твердому телу, равные по величине и направленные по прямой, соединяющей их точки приложения, в противоположные стороны, не изменяют движения тела (рис. 20).

Отсюда — важное следствие. Не изменяя действия данной силы на абсолютно твердое тело точку приложения силы можно переносить по линии ее действия в любую точку тела.

Действительно, пусть на тело действует сила \mathbf{F} , приложенная в точке A (рис. 21). Возьмем какую-нибудь точку B на линии действия силы \mathbf{F} и приложим в этой точке две силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , равные по модулю силе \mathbf{F} и направленные в противоположные

стороны по линии действия силы F , т. е. по прямой AB . Так как силы F и F_2 взаимно уравниваются, то эти силы можно отбросить, не изменяя движения тела. Остается действие силы F_1 , равной данной силе F и приложенной в точке B .

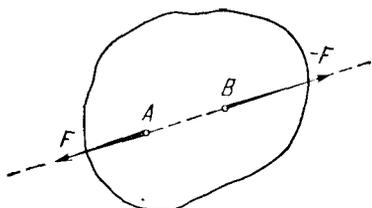


Рис. 20.

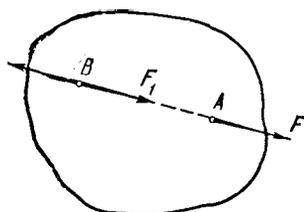


Рис. 21.

Сложение и вычитание двух сил, направленных под углом одна к другой, производится по правилу параллелограмма или треугольника.

Сложение нескольких сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, производится по правилу многоугольника.

Если линии действия сил расположены в одной плоскости*), но не пересекаются в одной точке, то сложение их производится поэтапно.

Геометрическое сложение сил, действующих по одной прямой, можно заменить алгебраическим сложением их проекций.

§ 13. Разложение силы на две составляющие, направленные под углом друг к другу

Разложением силы называется замена одной заданной силы двумя или несколькими другими силами, действие которых эквивалентно действию данной силы.

В данном пособии рассматривается только задача о разложении силы на две составляющие. Рассмотрим два случая разложения.

1. Разложение силы на две, действующие под углом друг к другу, производится по тому же правилу параллелограмма, что и сложение. Разлагаемая сила является диагональю параллелограмма, а составляющие его сторонами, исходящими из точки приложения разлагаемой силы.

Задача имеет однозначное решение, если помимо силы, которую требуется разложить, заданы еще линии действия обеих составляющих, либо величина и направление одной из составляющих. Она сводится к геометрической задаче построения параллелограмма, в частном случае прямоугольника, по трем известным величинам:

*) Сложение сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости, выходит за пределы данного курса.

1) По диагонали (данная разлагаемая сила) и двум прилежащим углам (направления составляющих)—рис. 22.

Дана сила R , которую требуется разложить по направлениям AB и CD . Через точку приложения O и конец K силы проводим прямые, параллельные AB и CD до их взаимного пересечения в точках M и N . Составляющие F_1 и F_2 совпадают со сторонами полученного параллелограмма, пересекающимися в точке приложения O разлагаемой силы, и приложены в той же точке.

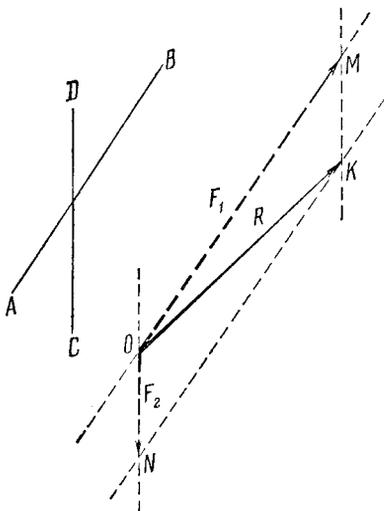


Рис. 22.

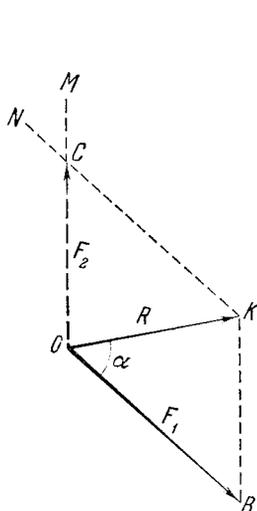


Рис. 23.

2) По диагонали (данная сила), стороне (величина одной составляющей) и углу между диагональю и стороной параллелограмма (направление составляющей)—рис. 23.

Дана разлагаемая сила R и одна из составляющих F_1 —ее модуль (OB) и направление (угол α). Соединяем концы обеих заданных сил R и F_1 , из точки приложения O проводим прямую $OM \parallel BK$, а затем из точки K —прямую $KN \parallel OB$ до точки пересечения C . Вектор \overline{OC} и есть вторая составляющая F_2 .

§ 14. Закон сохранения импульса

Сумма импульсов взаимодействующих тел, составляющих изолированную систему, т. е. импульс изолированной системы тел, не меняется, а является величиной постоянной:

$$\sum m_i v_i = \text{const} \quad \text{при} \quad (Ft)_{\text{внешн}} = 0.$$

Закон сохранения импульса (количества движения) вытекает из второго и третьего законов Ньютона.

Действительно, если два тела взаимодействуют между собой, то силы F_1 и F_2 , с которыми они действуют друг на друга, согласно третьему закону Ньютона, равны по абсолютной величине и противоположны по направлению $F_1 = -F_2$. Умножим это равенство на время Δt взаимодействия тел

$$F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t. \quad (1)$$

Но $F_1 \Delta t$ равно изменению импульса первого тела $m_1 v_2 - m_1 v_1$, а $F_2 \Delta t$ — изменению импульса второго тела $m_2 v_2' - m_2 v_1'$. Следовательно, $m_1 v_2 - m_1 v_1 = -(m_2 v_2' - m_2 v_1')$. Отсюда

$$m_1 v_1 + m_2 v_1' = m_1 v_2 + m_2 v_2'. \quad (2)$$

В этом равенстве слева стоит сумма импульсов тел до взаимодействия, а справа — после него. Следовательно, сумма импульсов двух тел при их взаимодействии остается постоянной.

В наших рассуждениях рассматривалось взаимодействие тел между собой, но не с другими телами. Такая система тел, на которую не действуют другие «внешние» силы, или действия этих сил взаимно скомпенсированы, называется *изолированной*. Если система тел не изолирована и на нее действует внешняя сила F , то импульс системы не остается постоянным. Его изменение равно импульсу силы F .

Действительно, если, например, сила F действует непосредственно на первое тело, то изменение его импульса равно $(F_1 + F) \Delta t$, т. е. $m_1 v_2 - m_1 v_1 = (F_1 + F) \Delta t$, а

$$F_1 \Delta t = m_1 v_2 - m_1 v_1 - F \Delta t.$$

Подставив это выражение для $F_1 \Delta t$ в формулу (1), получим после преобразований $m_1 v_1 + m_2 v_1' = m_1 v_2 + m_2 v_2' + F \Delta t$.

Положение не меняется, если рассматриваемая механическая система состоит не из двух, а из многих взаимодействующих тел.

Примеры действия третьего закона Ньютона и закона сохранения импульса. 1) Человек идет по земле, отталкиваясь от нее ногами. Сила, с которой земля действует на человека, равна по величине силе действия человека на землю.

2) Снаряд разорвался в воздухе на несколько частей. При этом геометрическая (векторная) сумма импульсов всех осколков равна импульсу снаряда до разрыва.

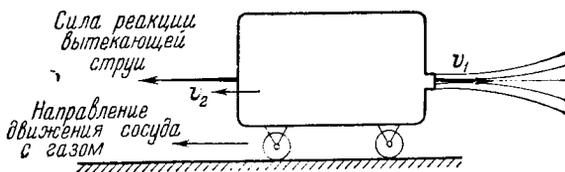
§ 15. Понятие о реактивном движении.

К. Э. Циолковский — основоположник учения о реактивном движении

Принцип реактивного движения можно проиллюстрировать на простейшем примере (рис. 24).

Сосуд с отверстием, расположенный на тележке, заполнен под давлением газом (или жидкостью). При закрытом отверстии

сосуд находится в покое. Откроем отверстие так, что из него будет вытекать «струя» газа (или жидкости). Тогда сосуд начнет двигаться в направлении, противоположном направлению вытекающей струи.



Реактивное действие

Рис. 24.

На основании закона сохранения импульса, поскольку на сосуд с газом не действуют в горизонтальном направлении никакие силы, импульс системы сосуд—газ останется неизменным. До открытия отверстия импульс системы равнялся нулю,— таким он останется и при открытом отверстии:

$$m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{v}_2 = 0.$$

В этом выражении m —масса вытекающей струи газа, M —масса сосуда с оставшимся в нем газом, \mathbf{v}_1 —вектор скорости частиц вытекающей струи; \mathbf{v}_2 —вектор скорости сосуда с газом.

Из этого равенства получаем

$$M\mathbf{v}_2 = -m\mathbf{v}_1,$$

или

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m}{M}\mathbf{v}_1.$$

Вектор скорости \mathbf{v}_2 сосуда с газом направлен противоположно вектору скорости \mathbf{v}_1 вытекающей струи. Абсолютная величина скорости сосуда

$$v_2 = \frac{m}{M}v_1.$$

(В действительности скорость сосуда будет несколько меньше скорости, вычисленной нами, так как формула не учитывает внешних сопротивлений движению.)

Так как сосуд начал двигаться, т. е. изменилась его скорость, то это означает, что на него при вытекании струи газа действовала сила. Эту силу называют силой реакции вытекающей струи. Ее можно найти из равенства

$$M\mathbf{v}_2 = F\mathbf{t}.$$

Отсюда

$$F = \frac{Mv_2}{t} = -\frac{mv_1}{t}.$$

Сила реактивного действия струи направлена в сторону движения сосуда, т. е. в сторону, противоположную вектору скорости струи.

Точно такая же по абсолютной величине сила, но направленная в другую сторону действовала на газ.

Обозначив массу газа жидкости, вытекающую в 1 секунду, $m/t = m_c$, получим для величины силы реактивного действия струи

$$F = m_c v_1.$$

Реактивные двигатели по виду топлива делятся на двигатели, работающие на твердом топливе (ракеты осветительные, реактивные снаряды) и на жидком топливе—керосине, бензине и специальных топливах.

На рис. 25 приведена схема работы жидкостно-реактивного двигателя, применяемого на ракетах и ракетных снарядах, а также на высокоскоростных самолетах. Топливо и окислитель

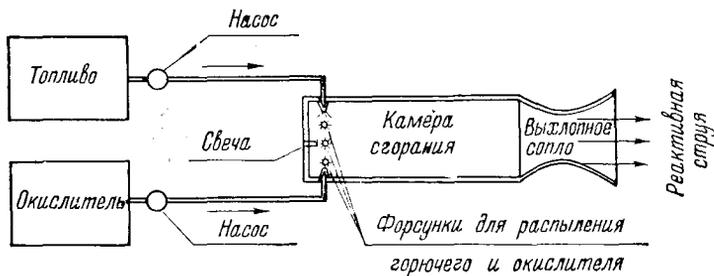


Рис. 25.

из баллонов подаются с помощью насосов в форсунки камеры сгорания, где распыляются, смешиваются и поджигаются. Расширяясь, газы (продукты сгорания) вылетают из сопла с большой скоростью и обладают большим импульсом. Под действием реакции струи на противоположную стенку камеры сгорания реактивный двигатель и машина, на которой он установлен, получают ускорение в направлении, противоположном направлению вытекающей струи продуктов сгорания.

На рис. 26 показана схема работы турбо-компрессорного двигателя, применяемого на самолетах. Работает он так: в камеру сгорания двигателя поступают под давлением воздух и распыленное форсунками горючее. Здесь эта смесь поджигается и сгорает. Продукты сгорания с большой скоростью вылетают

из сопла двигателя, вращая при этом турбину, мимо лопаток которой они проходят. Эта турбина вращает компрессор, подающий воздух в камеру сгорания. Таким образом, вытекающая

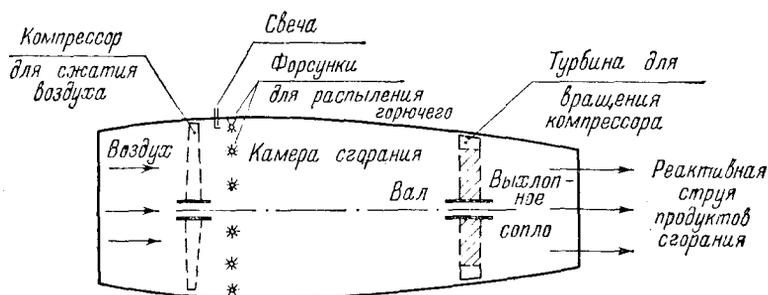


Рис. 26.

из сопла двигателя струя газа действует на двигатель с реактивной силой и, кроме того, вращает турбину, обеспечивающую работу двигателя.

Основоположником теории реактивного движения является знаменитый русский ученый Константин Эдуардович Циолковский (1857—1935), который создал общие основы теории реактивного движения, разработал основные принципы и дал схемы реактивных летательных аппаратов, близкие к схеме современных реактивных самолетов. Он показал возможность использования ракеты для межпланетных сообщений и дал первые идеи и расчеты межпланетных полетов, первый дал схему цельнометаллического дирижабля и так далее. Идеи Циолковского в области межпланетных полетов, как известно, успешно осуществлены в СССР при постройке искусственных спутников.

К. Э. Циолковский был преподавателем средней школы в городе Калуге. Его научная деятельность особенно развернулась после Великой Октябрьской социалистической революции. В последние годы своей жизни К. Э. Циолковский в Москве занимался исключительно разработкой своих научных идей, завещав все свои труды «Партии большевиков и Советской власти—подлинным руководителям прогресса человеческой культуры».

§ 16°. Трение. Сила трения. Коэффициент трения

Трение—один из видов взаимодействия соприкасающихся тел, проявляющий себя в сопротивлении относительному перемещению этих тел.

Сила трения—это сила, препятствующая вследствие трения относительному перемещению двух соприкасающихся тел по поверхности их соприкосновения.

В зависимости от характера относительного перемещения соприкасающихся твердых тел различаются два вида трения: 1) трение скольжения, возникающее при скольжении одного тела по другому; 2) трение качения, возникающее при качении одного тела по другому.

Здесь будут рассматриваться только силы трения скольжения. Эти силы направлены вдоль поверхности соприкосновения тел в сторону, противоположную перемещению. Для одних и тех же твердых тел величина силы трения скольжения приблизительно пропорциональна величине силы, прижимающей одно тело к другому, т. е. силы нормального давления одного тела на другое, перпендикулярной к поверхности, по которой соприкасаются эти тела:

$$F_{\text{тр}} = fN.$$

Коэффициент пропорциональности f , представляющий собой отношение силы трения к силе нормального давления, называется коэффициентом трения:

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{N}.$$

Если на тело, расположенное на поверхности другого тела, параллельно этой поверхности действует сила, величина которой недостаточна для того, чтобы вызвать скольжение, то возникающая при этом сила сопротивления скольжению, называется силой трения покоя, иногда — статическим трением. Отличие силы трения покоя от силы трения скольжения в том, что величина силы трения покоя равна по модулю составляющей равнодействующей всех остальных сил, действующих на тело, параллельной поверхности, по которой может скользить тело. Она не может превысить произведения коэффициента трения на силу нормального давления (fN), но может быть меньше ее — в зависимости от составляющей равнодействующей внешних сил, направленной вдоль поверхности соприкосновения. Как и сила трения скольжения, сила трения покоя направлена противоположно этой составляющей, однако пока она меньше произведения fN ($R < fN$), сила трения равна ей, т. е. и $F_{\text{тр}} < fN$. По мере роста этой составляющей внешних сил растет и сила трения покоя, пока модули этих сил не станут равными произведению fN , — это наибольшая возможная сила трения покоя:

$$\max F_{\text{тр}} = fN.$$

При дальнейшем росте равнодействующей внешних сил, направленной вдоль плоскости соприкосновения, начинается скольжение одного тела по другому, а сила трения не меняется. График зависимости силы трения от приложенной силы R показан на рис. 27.

Таким образом, сила трения покоя, в отличие от силы трения скольжения может быть любой по абсолютной величине — от 0 до fN .

Коэффициент трения покоя несколько (незначительно) больше, чем коэффициент трения скольжения — сдвинуть тело с места труднее, чем продолжать начавшееся его скольжение. Коэффициент трения скольжения в небольшой степени увеличивается с увеличением давления и в большинстве случаев уменьшается с увеличением скорости относительного перемещения. Исключения представляют собой резина и некоторые полимеры, для которых коэффициент трения сравнительно сильно растет с увеличением скорости скольжения. При решении многих практических задач можно с приемлемой точностью считать коэффициент трения постоянной величиной.

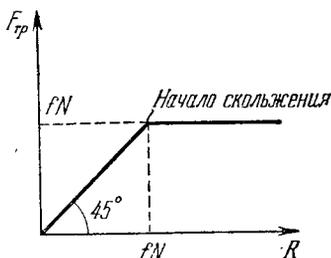


Рис. 27.

§ 17°. Сила трения при движении тела в жидкости или в газе

При движении тела в жидкости или в газе тоже возникает сила, препятствующая движению тела. Эта сила действует на тело со стороны частиц жидкости или газа. Сила сопротивления в этом случае, однако, отличается от силы трения, возникающей между двумя твердыми поверхностями, одной важной особенностью — отсутствием силы трения покоя. Тело, плавающее в жидкости, можно сдвинуть с места сколь угодно малой силой.

Сила трения, действующая на тело в жидкости или газе, так же как и сила трения между твердыми поверхностями, всегда направлена противоположно направлению движения тела. Величина силы трения зависит от скорости тела. При достаточно малых скоростях можно считать, что сила трения пропорциональна скорости тела

$$F_{\text{мал}} = \alpha v,$$

а при больших — квадрату скорости

$$F_{\text{больш}} = \beta v^2,$$

α и β — коэффициенты, которые зависят от свойств жидкости или газа и от формы и размеров движущегося тела.

§ 18. Силы упругости. Пластичность. Закон Гука

Некоторые задачи механики требуют учета деформации тела при действии приложенных к нему сил. Деформация тела характеризуется его относительным удлинением ϵ — отношением

изменения длины тела к его первоначальной длине:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1)$$

где Δl —удлинение или укорочение тела, l —первоначальная длина, ε —относительное удлинение.

Удлинение тела при действии на него силы связано с возникновением напряжения в теле.

Напряжением растяжения или сжатия называется величина отношения действующей силы (растягивающей или сжимающей) к площади сечения тела, перпендикулярного к направлению силы:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (2)$$

где F —действующая сила, S —площадь сечения, перпендикулярно силе, σ —напряжение.

Опыт показывает, что если под действием приложенных сил деформация тела (относительное удлинение) не превысит некоторой определенной для каждого материала величины, то тело после прекращения действия деформирующих сил восстанавливает свою первоначальную форму.

Способность деформированного тела восстанавливать свою первоначальную форму после прекращения действия деформирующей силы называется упругостью.

В теле при его деформации и вследствие ее развиваются силы, которые и обеспечивают восстановление формы тела. Эти силы называются силами упругости или упругими силами.

Предельная величина деформации, до которой тело сохраняет упругие свойства, называется пределом упругости.

Предел упругости задается либо в виде предельного относительного удлинения $\varepsilon_{\text{упр}}$, при котором материал еще сохраняет упругие свойства, либо чаще в виде предельного упругого напряжения $\sigma_{\text{упр}}$. Каждый материал в данном физическом состоянии (в частности, при данной температуре) имеет свой определенный предел упругости.

Если деформация превышает предел упругости, свойственный материалу деформируемого тела, то тело по прекращении действия деформирующих сил не восстанавливает полностью первоначальную форму,—остается так называемая «остаточная деформация».

Деформация тела за пределом упругости называется пластической, в отличие от упругой деформации, имеющей место в пределах упругости.

Тела, имеющие весьма малые пределы упругости (тела из свинца, из мягкой глины, воска и так далее), называются пластичными; прочие—упругими телами.

Зависимость между упругой деформацией и деформирующей силой выражается законом Гука:

Упругая деформация изменяется пропорционально действующей силе, вызывающей эту деформацию.

Пластические деформации растут быстрее, нежели действующие силы.

На рис. 28 приведена зависимость между напряжением и относительной деформацией—удлинением растянутого или укорочением сжатого тела. Из графика видно, что в пределах упругости относительное удлинение растет пропорционально действующей силе по закону Гука. Математическое выражение закона Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3)$$

где E —модуль упругости, представляющий собой упругую характеристику материала, из которого сделано деформируемое тело. Так как ε —величина безразмерная, то модуль упругости имеет размерность напряжения.

За пределом упругости удлинение растет быстрее роста действующей силы—пластическая деформация.

Подставим в формулу (3) $\sigma = F/S$ и $\varepsilon = \Delta l/l$. Тогда мы получим

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad F = \frac{ES}{l} \Delta l, \quad \text{т. е.} \quad F \sim \Delta l.$$

Это верно для любых упругих деформаций $F = k \Delta l$. Коэффициент пропорциональности k зависит от упругих свойств материала, его начальной длины и сечения. Для упругого тела $k = ES/l$. Когда говорят о пружине или резиновом жгуте, то k называют жесткостью.

§ 19. Закон всемирного тяготения Ньютона.

Гравитационная постоянная и ее определение опытным путем.
«Гравитационная» масса

Закон всемирного тяготения установлен И. Ньютоном в 1687 г. и формулируется так:

Две материальные точки притягиваются друг к другу с силами, прямо пропорциональными их массам и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

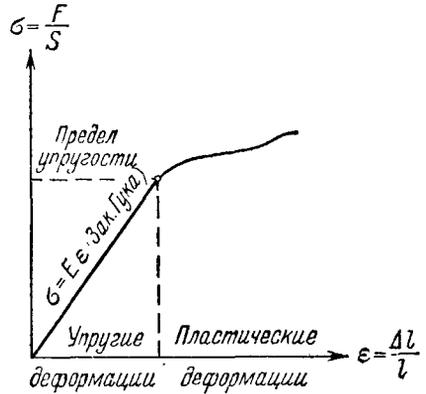


Рис. 28.

где γ —гравитационная постоянная, имеющая одну и ту же величину для всех тел.

Величина гравитационной постоянной определяется экспериментально. Впервые эта величина получена Кэвендишем из измерений с помощью крутильных весов силы притяжения между двумя известными массами. Схема опыта Кэвендиша приведена на рис. 29. Два свинцовых шара известной массы m подвешивались на коромысле к упругой нити вблизи двух неподвижных шаров массы M . По углу закручивания нити определялся крутящий момент сил притяжения шаров « m » шарами « M » и величина этих сил.

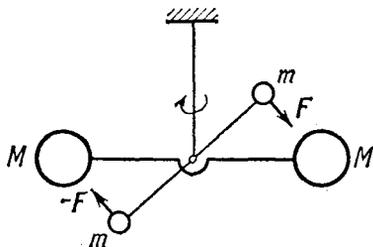


Рис. 29.

В последующем многими учеными проводились опыты по уточнению величины гравитационной постоянной

и, причем в наиболее точных из этих опытов использовалась идея крутильных весов. Однако сами опыты были усложнены с целью устранения посторонних влияний—магнитного поля Земли, упругих свойств нити и т. д.

В настоящее время величина гравитационной постоянной принимается:

$$\gamma \approx \frac{1}{15 \cdot 10^9} \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \quad \left(\text{или} \left[\frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \right] \right).$$

Тяготение (гравитационное взаимодействие) между телами осуществляется с помощью поля тяготения (гравитационного поля), порождаемого телами, и, как сказано во введении, являющегося одной из форм существования материи.

В формулу (1) для силы гравитационного взаимодействия тел входят величины m_1 и m_2 —массы тел. Эти массы характеризуют гравитационное взаимодействие тел. С другой стороны, как установлено ранее, масса проявляет себя в качестве меры инертности в явлениях, описываемых вторым законом Ньютона. Поэтому иногда называют первую гравитационной массой, вторую инертной массой. Поскольку в настоящее время эквивалентность этих обеих масс можно считать доказанной, в дальнейшем не будем их различать, но будем помнить, что одной и той же величиной—массой—характеризуются два различных свойства тела.

§ 20. Сила тяжести. Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Влияние сопротивления воздуха

Одним из проявлений силы взаимного тяготения является сила тяжести, то есть сила притяжения тел к Земле.

Если на тело действует только сила тяжести, то оно совершает свободное падение.

Следовательно:

Свободное падение—это движение тела в безвоздушном пространстве—вакууме—под действием силы тяжести.

Свободное падение—это прямолинейное равноускоренное движение, так как оно происходит под действием постоянной по величине и направлению силы—силы тяжести.

Ускорение свободного падения (обозначается g) на данной географической широте для всех тел одинаково и равно:

$$\begin{array}{ll} \text{на полюсе} & g = 9,83 \text{ м/с}^2, \\ \text{на экваторе} & g = 9,78 \text{ м/с}^2, \\ \text{на широте } \varphi = 45^\circ & g = 9,80 \text{ м/с}^2. \end{array}$$

В дальнейшем при решении задач будем принимать среднее значение:

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Зависимости между кинематическими характеристиками свободного падения получаются из формул для равноускоренного движения из состояния покоя, если в этих формулах положить $a = g$:

$$v = gt; \quad H = \frac{gt^2}{2}; \quad v = \sqrt{2gH}.$$

Практически воздух всегда оказывает сопротивление движению падающего тела, причем для данного тела сопротивление воздуха тем больше, чем больше скорость падения. Следовательно, по мере увеличения скорости падения сопротивление воздуха увеличивается, ускорение тела уменьшается и, когда сопротивление воздуха сделается равным силе тяжести, ускорение свободно падающего тела станет равным нулю. В дальнейшем движение тела будет равномерным движением.

§ 21. Вес тела. Взвешивание. Невесомость

Весом тела называется сила, с которой покоящееся относительно Земли тело действует на горизонтальную абсолютно гладкую подставку, или на вертикальную подвеску вследствие тяготения к Земле. Это определение относится к весу тела в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли. Оно соответствует практике определения веса в земных условиях на пружинных весах (рис. 30).

В дальнейшем мы будем иметь в виду только этот способ взвешивания. Взвешивание на рычажных весах представляет собой в сущности не определение непосредственно веса данного тела, а сравнение его веса с весом стандартных гирь, который известен заранее. Перенесение рычажных весов в другое место Земли ничего не изменит в этом сравнении, а между тем при таком перенесении вес гирь и взвешиваемого тела изменятся; неизменными оста-

нутя только их массы. Если взвешивается тело, движущееся относительно поверхности Земли прямолинейно и равномерно, например, если взвешивание производится в вагоне поезда, движущегося прямолинейно равномерно, то результат будет тот же, что и при взвешивании на Земле.

Вообще, во всех инерциальных системах отсчета вес тела один и тот же и равен силе тяжести. Однако эти две силы

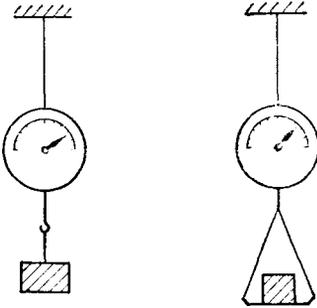


Рис. 30.

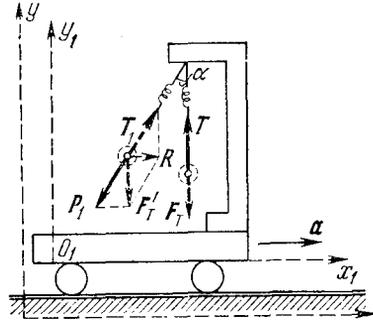


Рис. 31.

нельзя отождествлять. Вес тела—это сила, приложенная к подставке или подвесу со стороны тела. Сила же тяжести приложена к телу со стороны Земли. В неинерциальных системах отсчета вес тела отличен от силы тяжести.

На рис. 31 показано взвешивание тела в горизонтально движущейся тележке. Пока тележка находится в покое или движется без ускорения прямолинейно и равномерно, подвеска с грузом расположена вертикально и стрелка пружинных весов покажет тот же вес тела $P = F_T$ (F_T —сила тяжести), что и в системе отсчета xOy , связанной с поверхностью Земли. Если тележка начнет двигаться вправо с ускорением a относительно Земли, то подвеска с грузом отклонится влево на некоторый угол α и в таком положении будет двигаться вместе с тележкой с тем же ускорением.

На рассматриваемое тело действуют две силы—сила тяжести $F_{T'} = F_T$ и сила натяжения пружины T_1 . Их равнодействующая R имеет направление ускорения a тележки. Из рис. 31 видно, что сила натяжения подвески T_1 в системе отсчета $x_1O_1y_1$, связанной с тележкой, больше силы тяжести, а значит, и больше веса тела в системе отсчета xOy :

$$T_1 = P_1 > F_T = T.$$

Рассмотрим взвешивание тела, подвешенного в лифте. Пока лифт находится в покое, или движется равномерно, показание пружинных весов, а значит, и вес тела равны величине силы тяжести $P = F_T$ (рис. 32).

Когда лифт получает ускорение a , направленное вверх (рис. 33), пружина динамометра растягивается, и вследствие этого тело относительно системы отсчета, связанной с поверхностью Земли, будет двигаться с тем же ускорением a , что и лифт. Это ускорение сообщается телу равнодействующей двух сил,

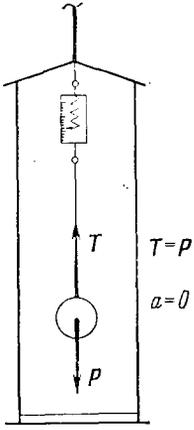


Рис. 32.

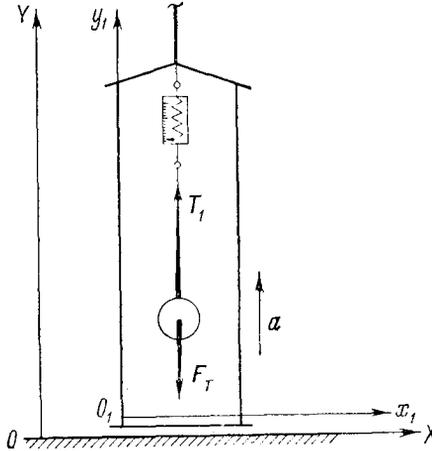


Рис. 33.

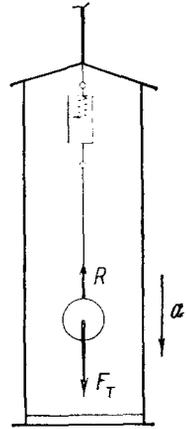


Рис. 34.

приложенных к взвешиваемому телу — силы тяжести F_T (действие Земли) и силы T_1 , действующей со стороны подвески. По абсолютной величине эта равнодействующая равна

$$R = T_1 - F_T.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$R = ma.$$

Следовательно,

$$T_1 - F_T = ma.$$

Отсюда сила натяжения подвески

$$T_1 = F_T + ma.$$

Следовательно, вес тела в системе отсчета $x_1 O_1 y_1$, связанной с лифтом, равен показанию динамометра, больше силы тяжести:

$$P_1 = T_1 > F_T.$$

Рассмотрим лифт, движущийся с ускорением, направленным вниз (рис. 34). Теперь ускорение телу сообщается силой:

$$R = F_T - T_2$$

или

$$ma = F_T - T_2.$$

Отсюда

$$T_2 = F_T - ma,$$

т. е. вес тела меньше силы тяжести:

$$P_2 = T_2 < F_T.$$

Если лифт движется с ускорением свободного падения, то показание динамометра будет

$$T = F_T - mg = mg - mg = 0.$$

Вес тела в свободно падающем лифте оказывается равным нулю—положение тела в падающем лифте не изменится, если его подвеску к динамометру перерезать. Так же будет вести себя тело на горизонтальной подставке, скрепленной со свободно падающим лифтом,— оно не будет оказывать давления на площадку и не изменит своего положения, относительно лифта, если подставка будет убрана.

Важно отметить, что при свободном падении исчезают не только силы, действующие со стороны тела на подставку и на подвес, но также и силы, действующие внутри тела со стороны одной его части на другую (кроме сил взаимного тяготения частей тела, величина которых, однако, исчезающе мала по сравнению с силами взаимного тяготения тела и Земли). Физиологическое ощущение весомости—как раз результат этих взаимодействий в теле живого организма. В свободном падении в условиях пренебрежимо малого сопротивления среды человек ощущает состояние невесомости.

Состояние тела, когда его вес и вес всех его частиц равен нулю, называют *невесомостью*. Из сказанного выше видно, что тело, движущееся только под действием силы тяжести, находится в состоянии невесомости.

Сила тяжести возникает вследствие тяготения тела к Земле и, как будет выяснено ниже, составляет часть силы тяготения. Следовательно, в системе отсчета, связанной с центром Земли,—всякое тело, движущееся только под действием силы тяготения к Земле, находится в состоянии невесомости. В более общем случае движения в Космосе—*всякое тело, движущееся только под действием сил всемирного тяготения, находится в состоянии невесомости.*

§ 22. Системы единиц

Измерить физическую величину—это значит сравнить ее с такой же физической величиной, условно принятой за единицу. Для каждой величины можно было бы выбрать свою единицу измерения независимо от других величин. Но можно поступить иначе—единицы измерения нескольких величин (их называют *основными единицами*) установить независимо, а остальные—

выразить через эти величины, используя физические закономерности. Например, скорость выражается через две независимые величины — длину и время. Те единицы, которые устанавливаются не независимо, а на основании формул, связывающих их с основными единицами, называются производными единицами. Совокупность основных и производных единиц называют системой единиц.

В механике достаточно выбрать три независимые друг от друга величины и соответственно три независимые единицы. Используя математические выражения физических зависимостей одних величин от других можно через них выразить все остальные единицы механических величин. Система единиц механики является частью общей системы единиц физики.

В 1960 г. XI Генеральной конференцией по мерам и весам в Париже принята Международная система единиц СИ (SI — System International). Она состоит из шести основных единиц: три единицы механики, — метр (м), килограмм (кг), секунда (с) и, кроме них, Кельвин (К), ампер (А), кандела (кд).

В физике иногда удобнее пользоваться другой системой единиц — системой СГС (CGS). Основные единицы этой системы — сантиметр (см), грамм (г), секунда (с).

В этих системах сила является производной единицей.

В системе СИ единица силы — это «ньютон» (Н) — сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с². В системе СГС единица силы — дина (дин) — сила, которая массе в 1 г сообщает ускорение 1 см/с².

Перевод единиц из одной системы в другую производится довольно просто на основе размерностей единиц. Например, размерность ньютона кг·м/с², размерность дин г·см/с²; так как в килограмме 10³ г и в метре 10² см, то 1 Н = 10⁵ дин *).

Примеры решения задач

В задачах этого раздела рассматривается движение различных тел (груз, автомобиль, снаряд и т. д.), которые в условиях данной задачи могут рассматриваться как материальные точки. Основная задача динамики материальной точки состоит в определении ускорения тела по действующим на него силам либо, наоборот, — в определении сил по заданным характеристикам движения. Задача решается составлением уравнения, выражающего в той или иной форме второй закон Ньютона.

*) До недавнего времени, кроме систем единиц СИ и СГС, использовалась так называемая техническая система единиц МкГСС. Основные единицы в ней: единица длины 1 м; единица времени 1 с; единица силы 1 кГ (1 кГ = 9,8 Н).

Единица массы в этой системе единиц — производная единица, — техническая единица массы (т. е. м). 1 т. е. м. — это масса такого тела, которому сила 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с².

$$1 \text{ т. е. м.} = \frac{1 \text{ кГ}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 1 \frac{\text{кГ} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$$

При решении большинства этих задач, записав коротко условие, нужно сделать схематический рисунок, на котором обозначить силы, действующие на движущиеся тела. При этом надо отчетливо представлять себе, со стороны каких тел действуют силы, и учитывать, что силы взаимодействия двух тел подчиняются третьему закону Ньютона. Все силы, действующие на тело, принято за материальную точку, прикладываются к его центру тяжести независимо от того, к каким точкам тела они приложены в действительности.

Разобравшись с силами, действующими на тела, запишите уравнения их движения — уравнения второго закона Ньютона, или, если система изолированная, закон сохранения импульса. Это позволит найти ускорения тел, или их скорости, или силы, если ускорения тел известны. При этом не забудьте, что если тела связаны, то их ускорения не независимы. Поэтому прежде, чем решать уравнения движения, необходимо установить связь между ускорениями этих тел.

Уравнение второго закона Ньютона $\sum F_i = ma = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$ векторное, а при равенстве двух векторов равны между собой и проекции этих векторов на любые оси. Поэтому, спроектировав все силы, действующие на тело, и ускорения тела на произвольные оси, можно вместо векторного уравнения движения записать несколько скалярных уравнений для проекций сил и ускорений. В общем случае можно записать три независимых скалярных уравнения движения. Если движение тела происходит в плоскости, то записываются два скалярных уравнения. Обычно в качестве осей удобно выбрать две взаимно перпендикулярные оси — одну по направлению движения тела, а вторую — перпендикулярную ему.

Если все силы, действующие на тело, параллельны некоторой прямой, то вдоль этой прямой будет направлено и ускорение тела. Поэтому в этом случае достаточно записать одно скалярное уравнение движения.

Если в задаче речь идет о движении нескольких тел, то для каждого тела можно выбрать свои оси, на которые проектируются силы и ускорения.

То же самое можно сказать и о законе сохранения импульса. Его тоже удобно записывать для проекций векторов импульсов на различные оси.

Задача 9. По наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, скользит тело. Найти его ускорение, если коэффициент трения f равен 0,3.

$$\begin{aligned} \angle \alpha &= 30^\circ \\ f &= 0,3 \end{aligned}$$

Найти a

Решение

На тело действуют следующие силы (рис. 35):

1) сила тяжести $P = mg$, приложенная в центре тяжести тела;

2) сила N нормальной реакции наклонной плоскости, приложенная к плоскости тела, соприкасающейся с опорой, — эта сила перпендикулярна (нормальна) наклонной плоскости;

3) сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$, параллельная наклонной плоскости и направленная противоположно скорости движения тела.

Ось Ox системы отсчета xOy , связанной с наклонной плоскостью, направим вдоль наклонной плоскости так, что ее положительное направление совпадает с направлением вектора ускорения a .

Найдем проекции всех сил на ось Ox . Сила N перпендикулярна оси Ox , и поэтому ее проекция на ось Ox равна 0. Сила $F_{\text{тр}}$ параллельна оси Ox , но ее направление противоположно направлению оси Ox . Поэтому проекция силы F на ось Ox равна $-F_{\text{тр}}$. Проекция силы P , как видно из рис. 35, равна $P \cdot \sin \alpha = mg \sin \alpha$. Теперь, зная проекции всех сил на ось Ox , мы можем в соответствии со вторым законом Ньютона записать:

$$P \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma. \quad (1)$$

Так как тело движется, то $F_{\text{тр}} = fN$. Следовательно,

$$P \sin \alpha - fN = ma. \quad (2)$$

Ускорение тела вдоль оси Oy (проекция вектора a на ось Oy) равно нулю. Поэтому для проекции на ось Oy всех сил, действующих на тело, мы можем записать:

$$P \cos \alpha - N = 0. \quad (3)$$

Отсюда $N = P \cos \alpha$. Подставляя это выражение для величины N в уравнение (2), получим $P \sin \alpha - fP \cos \alpha = ma$. Отсюда

$$\begin{aligned} a &= \frac{P(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{m} = \\ &= \frac{mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Исследуем ответ, прежде чем подставить в него численные значения всех величин.

При $\sin \alpha = f \cos \alpha$, т. е. при $\operatorname{tg} \alpha = f$, $a = 0$, тело или покоится или скользит по плоскости равномерно.

Ясно, что $a \geq 0$, т. к. ускорение тела не может быть направлено вверх по наклонной плоскости. Это означает, что наше решение справедливо только при $\sin \alpha \geq f \cos \alpha$, т. е. при $\operatorname{tg} \alpha \geq f$ или $\alpha \geq \operatorname{arctg} f$. Если $\alpha < \operatorname{arctg} f$ тело не может скользить по наклонной плоскости и $F_{\text{тр}} \neq fN$. В этом случае

$$P \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad \text{т. е.} \quad F_{\text{тр}} = P \sin \alpha.$$

Теперь, подставив в формулу (4) численные значения g и α , получим

$$a = 9,8 \text{ м/с}^2 \left(\frac{1}{2} - 0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{2,35 \text{ м/с}^2}.$$

Задача 10. Из орудия вылетает снаряд массой 10 кг со скоростью 500 м/с. Найти силу давления пороховых газов, считая ее постоянной во все время движения снаряда внутри ствола орудия, равное 0,01 с.

Решение. Из равенства $Ft = mv$ находим

$$F = \frac{mv}{t}, \quad F = \frac{10 \text{ кг} \cdot 500 \text{ м/с}}{0,01 \text{ с}} = \underline{5 \cdot 10^5 \text{ Н}}.$$

В этой задаче силу F , действующую на снаряд, и его скорость v в момент вылета из орудия мы проектировали на ось ствола, хотя и не указывали этого специально.

З а м е ч а н и е. Часто подобные задачи решают так: сначала выражают силу давления через ускорение снаряда: $F = ma$, затем записывают: $a = v/t$ и, подставляя это выражение для ускорения в предыдущее равенство, получают: $F = mv/t$ — выражение, вытекающее из равенства $Ft = mv$. Но это другая запись второго закона Ньютона, которой можно пользоваться непосредственно, и незачем делать этот вывод заново.

Задача 11. Вагон массой 10 т с автоматической сцепкой, движущийся со скоростью 12 м/с, догоняет такой же вагон массой 20 т, движущийся со скоростью 6 м/с, и сцепляется с ним. Двигаясь дальше вместе, оба вагона сталкиваются со стоящим на рельсах третьим вагоном массой 7,5 т. Найти скорости движения вагонов на разных участках пути. Силами трения пренебречь.

Решение. На основании закона сохранения импульса имеем $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_4 = (m_1 + m_2 + m_3) v_5$, где v_4 — общая скорость движения двух вагонов, v_5 — трех вагонов.

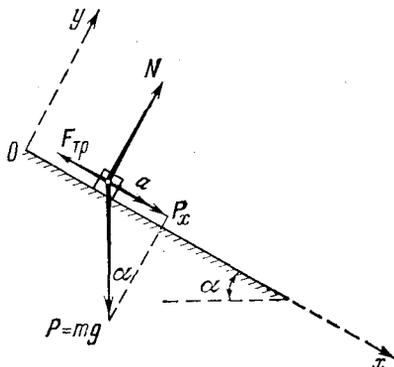


Рис. 35.

Решая уравнение $m_1 v_1 + m_2 v_3 = (m_1 + m_2) v_4$, находим

$$v_4 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_4 = \frac{10^3 \text{ кг} \cdot 12 \text{ м/с} + 2 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 6 \text{ м/с}}{10^3 \text{ кг} + 2 \cdot 10^3 \text{ кг}} = 8 \text{ м/с}.$$

Из уравнения $(m_1 + m_2) v_4 = (m_1 + m_2 + m_3) v_5$, находим

$$v_5 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} v_4, \quad v_5 = \frac{10 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3 + 7,5 \cdot 10^3} \cdot 8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 6,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 12. Пуля вылетает из винтовки со скоростью $v_{\text{п}} = 900 \text{ м/с}$. Найти скорость винтовки при отдаче, если ее масса $m_{\text{в}}$ в 500 раз больше массы пули $m_{\text{п}}$.

Решение. Импульс винтовки с пулей до выстрела равнялся нулю. Поскольку можно считать, что система винтовка—пуля при выстреле изолирована (действующие на систему внешние силы не равны нулю, но уравновешивают друг друга), ее импульс останется неизменным. Спроектировав все импульсы на ось, параллельную вектору скорости пули и совпадающую с ним по направлению, мы можем записать: $m_{\text{п}} v_{\text{п}} + m_{\text{в}} v_{\text{в}} = 0$. Отсюда найдем

$$v_{\text{в}} = -\frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{в}}} v_{\text{п}}, \quad v_{\text{в}} = -\frac{1}{500} \cdot 900 \text{ м/с} = -1,8 \text{ м/с}.$$

Знак (—) указывает, что направление скорости винтовки противоположно направлению вектора скорости пули.

Задача 13. Граната, летевшая со скоростью $v = 15 \text{ м/с}$, разорвалась на две части с массами $m_1 = 6 \text{ кг}$ и $m_2 = 14 \text{ кг}$. Скорость большего осколка $v_2 = 24 \text{ м/с}$ направлена так же, как и скорость гранаты до взрыва. Найти направление и абсолютную величину скорости меньшего осколка.

Решение. За время разрыва гранаты ее импульс меняется из-за действия силы тяжести незначительно, так как изменение импульса гранаты равно $F \Delta t$ (F —сила тяжести), а время Δt разрыва очень мало. Поэтому гранату и ее осколки во время разрыва можно считать изолированной системой. На основании закона сохранения импульса $(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 + m_2 v_2$.

Так как направление векторов скоростей v и v_1 совпадают, то вектор скорости v_2 будет иметь либо то же направление, либо противоположное ему. Совместим с этим направлением ось координат, принимая направление векторов v и v_1 за положительное направление оси.

Спроектируем это уравнение на выбранную ось координат. Получим скалярное уравнение $(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Отсюда

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v - m_2 v_2}{m_1}, \quad v_1 = \frac{(6 \text{ кг} + 14 \text{ кг}) 15 \text{ м/с} - 14 \text{ кг} \cdot 24 \text{ м/с}}{6 \text{ кг}} = -6 \text{ м/с}.$$

Знак (—) указывает, что вектор скорости v_2 направлен в сторону, противоположную направлению полета гранаты.

Задача 14.* Тело массой $m = 5 \text{ кг}$ скользит по поверхности трехгранной призмы массой $M = 35 \text{ кг}$, верхняя плоскость которой наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$. Призма лежит на горизонтальной плоскости, имеющей вертикальный уступ у задней стенки призмы, удерживающий призму в покое. Найти силу давления призмы на уступ плоскости при движении тела по поверхности призмы. Как изменится при движении тела давление призмы на основание плоскости? Трением пренебречь.

Решение. До начала движения тела по наклонной плоскости призмы на систему *призма—тело* действуют силы тяжести Mg и mg , а также реакция горизонтальной плоскости N . Действия этих сил компенсируются, т. е. их векторная сумма равна нулю. Следовательно, и импульс равнодействующей всех сил, действующих на систему *призма—тело*, равен нулю (рис. 36, а).

При движении тела по наклонной плоскости призмы импульс системы *призма—тело* относительно системы отсчета xOy , связанной с плоскостью, становится равным mv . При этом со стороны плоскости на призму действуют

силы N_1 и N . Причем теперь уже $N \neq Mg$, а $Mg - N = \Delta N$ (рис. 36, в). Геометрическая сумма импульсов сил N_1 и ΔN должна равняться импульсу системы, то есть $N_1 t + \Delta N t = mv$. Следовательно, вектор импульса является диагональю прямоугольника, построенного на векторах импульсов $N_1 t$ и $\Delta N t$. Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} N_1 t &= mv \cos \alpha, \\ \Delta N t &= mv \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рассмотрим далее движение тела относительно призмы в системе отсчета $x_1 O_1 y_1$, связанной с призмой (рис. 36, б), видим, что на тело действуют две

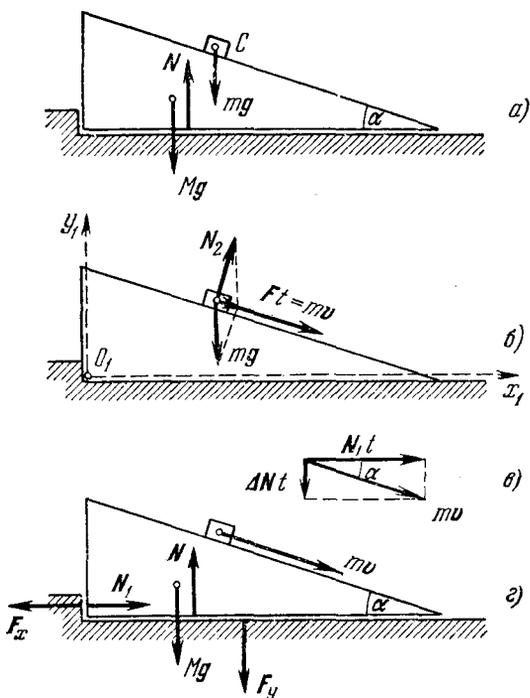


Рис. 36.

силы — сила тяжести mg и сила реакции призмы N_2 . Их равнодействующая F направлена вдоль плоскости и равна по величине

$$F = mg \sin \alpha.$$

Величина импульса этой силы

$$Ft = mgt \sin \alpha.$$

Следовательно, по второму закону Ньютона и величина импульса тела равна

$$mv = mgt \sin \alpha. \quad (2)$$

На основании этого соотношения равенства (1) перепишутся так

$$N_1 t = mgt \sin \alpha \cos \alpha, \quad \Delta N t = mgt \sin^2 \alpha.$$

Отсюда находим дополнительные силы, приложенные к призме со стороны

горизонтальной плоскости и уступа:

$$N_1 = \frac{1}{2} mg \sin 2\alpha; \quad N_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 21,2 \text{ Н},$$

$$\Delta N = mg \sin^2 \alpha; \quad \Delta N = 5 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot \frac{1}{4} = 12,25 \text{ Н}.$$

По третьему закону Ньютона силы давления призмы на плоскость равны найденным силам по величине и имеют противоположное направление: на уступ призма давит с силой $F_x = 21,2 \text{ Н}$, направленной влево (рис. 36, з); на горизонтальную плоскость нормальное давление призмы уменьшилось на $\Delta F_y = 12,25 \text{ Н}$.

Задача 15. На концах нити, перекинутой через блок, подвешенный к потолку, висят два груза с общей массой 30 кг. Грузы движутся с ускорением $a = 0,3g$, направленным для правого груза вниз. Найти массы обоих грузов. Массой блока и силами трения на оси блока пренебречь.

Решение. Рассмотрим движение левого груза (рис. 37). К нему приложены силы: сила тяжести $P_1 = m_1 g$ и сила T натяжения нити.

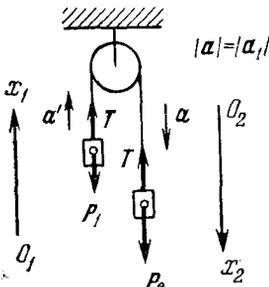


Рис. 37.

Для проекций этих сил на ось $O_1 x_1$ мы можем записать: $T - P_1 = m_1 a$. Аналогично для правого груза, спроектировав все силы на ось $O_2 x_2$, найдем $P_2 - T = m_2 a$. Складывая оба равенства, получим $P_2 - P_1 = (m_2 + m_1) a$ или $(m_2 - m_1) g = (m_2 + m_1) a$. Отсюда $m_2 - m_1 = (m_2 + m_1) \frac{a}{g}$.

Подставляя сюда известные величины, найдем $m_2 - m_1 = 30 \text{ кг} \cdot 0,3 = 9 \text{ кг}$. Таким образом,

$$m_2 + m_1 = 30 \text{ кг}, \quad m_2 - m_1 = 9 \text{ кг}.$$

Отсюда найдем

$$m_1 = \underline{10,5 \text{ кг}}, \quad m_2 = \underline{19,5 \text{ кг}}.$$

Задача 16. Блок с грузами, описанный в предыдущей задаче, подвешен с помощью динамометра к потолку лифта, движущегося с ускорением $0,1g$, направленным вверх. Найти показание динамометра.

Решение. Ускорение левого груза (рис. 38) относительно земли направлено вверх и равно по величине

$$a_1 = a + a_x = 0,3g + 0,1g = 0,4g.$$

Для этого груза $T - P_1 = m_1 a_1$ (1). Ускорение правого груза направлено вниз и равно

$$a_2 = a - a_x = 0,3g - 0,1g = 0,2g.$$

Для этого груза

$$P_2 - T = m_2 a_2. \quad (2)$$

Вычтем второе равенство из первого:

$$2T - (m_1 + m_2) g = m_1 a_1 - m_2 a_2,$$

откуда

$$F_d = 2T = (m_1 + m_2) g + (m_1 a_1 - m_2 a_2) = (m_1 + m_2) (g + a_x) + (m_1 - m_2) a. \quad (3)$$

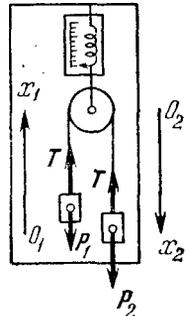


Рис. 38.

Для получения ответа надо найти разность $(m_2 - m_1)$, так как остальные величины в выражении (3) известны; с этой целью складываем равенства (1)

и (2):

$$(m_2 - m_1)g = m_1 a_2 + m_2 a_2 = m_1(a + a_x) + m_2(a - a_x),$$

откуда

$$m_2 - m_1 = (m_1 + m_2) \frac{a}{a_x + g}.$$

Подставляем это выражение в равенство (3):

$$F_d = (m_1 + m_2) \left(g + \frac{a^2}{g + a_x} \right),$$

$$F_d = 30 \text{ кг} \left(g + 0,1g - \frac{0,33g^2}{g + 0,1g} \right) = 30 \text{ кг} \left(1 + 0,1 - \frac{0,09}{1,1} \right) g,$$

$$F_d = \underline{300 \text{ Н}}.$$

Задача 17*. На верхнем краю наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60^\circ$ укреплен блок, через который перекинута нить (см. рис. 39). На свешивающемся с блока конце нити прикреплен груз массой $m_1 = 240$ г, с помощью которого по наклонной плоскости поднимаются с ускорением $0,1g$ прикрепленные к другому концу нити два груза с массами $m_2 = m_3 = 100$ г, связанные между собой веревкой. Найти коэффициент трения между поверхностью наклонной плоскости и грузами и силу натяжения веревки, связывающей поднимаемые грузы. Блок считать невесомым. Силами трения на оси блока пренебречь.

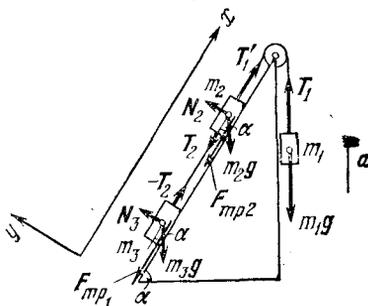


Рис. 39.

Решение. Рассмотрим движение груза m_1 . На него действует сила тяжести m_1g и сила натяжения нити T_1 (рис. 39). Их равнодействующая сообщает грузу ускорение a , направленное вниз. Запишем уравнение движения этого груза, спроектировав все векторы на ось, совпадающую с вектором a :

$$m_1g - T_1 = m_1a, \text{ где } a = 0,1g. \quad (1)$$

Отсюда

$$T_1 = m_1g - m_1a = m_1(a - g).$$

Теперь рассмотрим движение грузов m_2 и m_3 по наклонной плоскости. К системе обоих грузов, связанных нитью, приложены следующие внешние силы:

силы тяжести m_2g и m_3g ;

сила натяжения нити T_1' , по абсолютной величине $T_1' = T_1$;

нормальные реакции плоскости N_2 и N_3 ;

силы трения $F_{тр2}$ и $F_{тр3}$, так как грузы движутся по плоскости, то $F_{тр2} = fN_2$; $F_{тр3} = fN_3$.

Для проекций этих сил на оси Ox и Oy , согласно второму закону Ньютона, мы можем записать

$$T_1 - m_3g \sin \alpha - m_2g \sin \alpha - F_{тр3} - F_{тр2} = (m_2 + m_3) a \quad (2)$$

и

$$N_2 - m_2g \cos \alpha = 0, \quad N_3 - m_3g \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$N_2 = m_2g \cos \alpha, \quad N_3 = m_3g \cos \alpha,$$

$$F_{тр2} = fN_2 = fm_2g \cos \alpha \quad \text{и} \quad F_{тр3} = fN_3 = fm_3g \cos \alpha.$$

Подставляя эти выражения для $F_{\text{тр}2}$ и $F_{\text{тр}3}$ в уравнения (2), получим

$$T_1 - m_3 g \sin \alpha - m_2 g \sin \alpha - f m_3 g \cos \alpha - f m_2 g \cos \alpha = 0$$

или

$$T_1 - g(m_2 + m_3) \sin \alpha - f g(m_2 + m_3) \cos \alpha = 0,$$

но согласно уравнению (1)

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a).$$

Поэтому

$$m_1 (g - a) - g(m_2 + m_3) \sin \alpha = f g(m_2 + m_3) \cos \alpha.$$

Отсюда

$$f = \frac{m_1 (g - a)}{(m_2 + m_3) g \cos \alpha} - \tan \alpha, \quad f = \frac{0,24(1 - 0,1)}{0,2 \cdot 0,5} - \sqrt{3} \approx \underline{0,23}.$$

Силу натяжения веревки T_2 найдем из уравнения движения третьего груза:

$$T_2 - m_3 g \sin \alpha - f m_3 g \cos \alpha = m_3 a.$$

Отсюда

$$T_2 = m_3 a + m_3 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) = m_3 (a + g \sin \alpha + f g \cos \alpha), \quad T_2 = \underline{1,08 \text{ Н}}.$$

Следующие три задачи относятся к вертикальному движению тела в поле тяготения Земли.

Тело, брошенное вертикально вверх с некоторой начальной скоростью, имеет ускорение g , направленное к центру Земли, т. е. противоположно направлению движения тела. Следовательно, если координатную ось направить вверх, то движение тела, брошенного вертикально вверх, равнозамедленное, т. е. движение с постоянным *отрицательным* ускорением, если не учитывать сопротивления воздуха:

$$a = -g \approx -9,8 \text{ м/с}^2.$$

Поэтому скорость тела v через время t после начала движения равна

$$v = v_0 - gt, \quad (*)$$

(v_0 — начальная скорость тела); также

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}, \quad (**)$$

где H — высота подъема тела:

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (***)$$

Так как на максимальной высоте, которая может быть достигнута телом, брошенным вверх, скорость его движения $v = 0$, то на основании равенства (**) найдем

$$0 = v_0^2 - 2gH_{\text{max}}$$

откуда

$$H_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (a)$$

или

$$v_0 = \sqrt{2gH_{\max}}. \quad (6)$$

Из равенства (*) найдем время $t_{\text{п}}$ подъема тела до высоты H_{\max} :

$$0 = v_0 - gt_{\text{п}},$$

откуда

$$t_{\text{п}} = \frac{v_0}{g}. \quad (в)$$

Нетрудно найти время движения тела. Так как в момент падения тела $H=0$, то из уравнения (***) получим

$$0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (г)$$

Отсюда

$$t_1 = 0 \text{ — момент бросания; } t_2 = \frac{2v_0}{g} \text{ — момент падения тела.} \quad (д)$$

Из сравнения (д) и (в) видим, что время движения тела в два раза больше времени падения.

Найдем еще скорость тела в момент падения:

$$v = v_0 - gt = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0.$$

В момент падения скорость тела равна по абсолютной величине начальной скорости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 18. С высоты $h=1000$ м падает тело без начальной скорости. Одновременно с высоты $H=1100$ м падает другое тело с некоторой начальной скоростью. Оба тела достигают земли в один и тот же момент времени. Найти начальную скорость второго тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Обозначим время падения $t=t_1=t_2$. Тогда

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

и

$$H = v_{02}t + \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) из (1) величины

$$\frac{gt^2}{2} = h \quad \text{и} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

получим $H = v_{02} \sqrt{\frac{2h}{g}} + h$, откуда находим

$$v_{02} = \frac{H-h}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{(H-h)\sqrt{2gh}}{2h},$$

$$v_{02} = \frac{(1100 \text{ м} - 1000 \text{ м})}{2 \cdot 1000 \text{ м}} \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 1000 \text{ м}} = \underline{7,0 \text{ м/с}}.$$

Задача 19*. Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью v_0 . Когда оно достигло высшей точки пути на расстоянии $H=100$ м от поверхности Земли, из того же начального пункта и с той же начальной скоростью брошено второе тело. На каком расстоянии h от поверхности Земли тела встретятся? Какие они будут иметь скорости в момент встречи? С какой начальной скоростью брошены тела?

Решение. Время подъема второго тела на высоту h , очевидно, равно времени падения первого тела с высоты H до высоты h . Так как время падения первого тела равно времени подъема второго, то время, за которое тело падает с высоты H , до той точки, из которой его бросили, вдвое больше времени падения с высоты H до высоты h , т. е. если

$$H-h = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{то} \quad H = \frac{g(2t)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{H-h}{H} = \frac{gt^2 \cdot 2}{2 \cdot g(2t)^2} = \frac{1}{4}.$$

откуда

$$h = \frac{3}{4} H = \underline{75 \text{ м.}}$$

Скорости тел в момент встречи равны по величине и противоположно направлены. Абсолютную величину скорости можно найти по формуле

$$v = \sqrt{2g(H-h)}, \quad v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 25 \text{ м}} = \underline{22,1 \text{ м/с.}}$$

Начальная скорость

$$v_0 = \sqrt{2gH}, \quad v_0 = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 100 \text{ м}} = \underline{42,0 \text{ м/с.}}$$

Задача 20*. Аэростат поднимается вертикально вверх с некоторым ускорением. Когда скорость подъема аэростата была равна $v_1 = 10$ м/с, из него выпал предмет. На какой высоте выпал предмет, если на землю он упал через $t_0 = 5$ с? Найти скорость, с которой предмет упал на землю.

Решение. Если воспользоваться формулами зависимости пройденного пути от времени, то задача распадается на два этапа: 1) определение максимальной высоты, на которую поднимается предмет, и времени подъема и 2) расчет движения предмета в свободном падении с этой высоты. Более просто задача решается, если воспользоваться формулами зависимости перемещения тела от времени.

Возьмем систему отсчета, связанную с Землей, причем ее начало находится в точке, в которой выпал предмет, а положительное направление оси Oy совпадает с направлением вектора начальной

скорости выпавшего предмета v_1 (рис. 40). Тогда координата y предмета меняется со временем по формуле

$$y = v_1 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

В момент t_0 падения на землю $y = -h$. Подставив это значение координаты в уравнение (1), получим

$$h = \frac{gt_0^2}{2} - v_1 t_0, \quad h = \frac{9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 25 \text{ с}^2}{2} - 10 \text{ м/с} \cdot 5 \text{ с} = \underline{72,5 \text{ м.}}$$

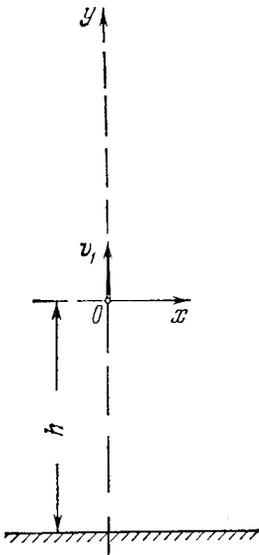


Рис. 40.

Теперь найдем скорость предмета в момент его падения на землю.

$$v = v_1 - gt, \quad v = 10 \text{ м/с} - 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 5 \text{ с} = \underline{-39 \text{ м/с}}.$$

Скорость v (точнее проекция скорости \mathbf{v} на ось Oy) отрицательна. Это означает, что вектор конечной скорости направлен вниз и по величине равен

$$v = \underline{39 \text{ м/с}}.$$

Следующие четыре задачи относятся к движению тела, брошенного горизонтально и под углом к горизонту. При изучении этого движения оно рассматривается как геометрическая сумма горизонтального и вертикального движений.

Тело, брошенное горизонтально, перемещается:

а) в горизонтальном, направлении вдоль оси Ox — по инерции с постоянной скоростью, равной скорости, с которой оно брошено:

$$v_x = v = \text{const}, \quad x = vt;$$

б) в вертикальном направлении (вдоль оси Oy) под действием силы тяжести (если пренебречь сопротивлением воздуха). Следовательно, движение в вертикальном направлении — это равноускоренное движение свободно падающего тела (ось Oy мы считаем направленной так же, как и вектор ускорения тела g , т. е. вниз):

$$v_y = gt, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

При изучении движения тела, брошенного под углом α к горизонту, вектор его начальной скорости \mathbf{v}_0 имеет две составляющие (рис. 41), — направленные по горизонтальной и вертикальной осям координат:

- 1) горизонтальную составляющую $|\mathbf{v}_{0x}| = v_0 \cos \alpha = v_x$,
- 2) вертикальную составляющую $|\mathbf{v}_{0y}| = v_0 \sin \alpha$.

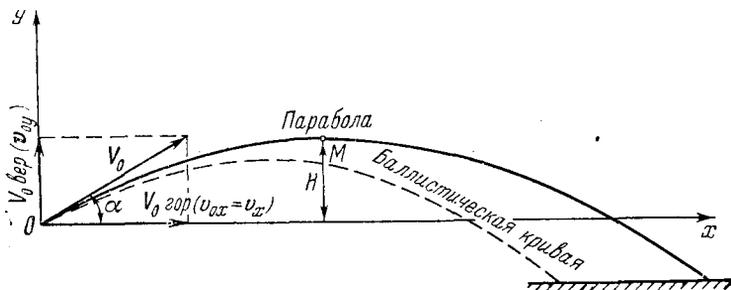


Рис. 41.

Можно сказать и иначе: вектор \mathbf{v}_0 имеет проекции как на горизонтальную, так и на вертикальную оси координат. Если вертикальная ось Oy направлена вверх, то проекция на нее вектора

начальной скорости равна

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Проекция вектора скорости \mathbf{v} на ось Ox равна

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha.$$

Направление оси Ox у нас выбрано по вектору \mathbf{v}_x .

В вертикальном направлении тело движется с постоянным отрицательным ускорением $a = -g$. Поэтому его скорость и координата меняются со временем по формулам

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

В горизонтальном направлении тело без учета сопротивления воздуха движется равномерно со скоростью $v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const}$, а координата $x = v_0 t \cos \alpha$.

Задача 21. Пуля из пружинного пистолета, установленного горизонтально на высоте $H = 80$ см от пола, вылетает со скоростью $v = 5$ м/с. Определить дальность l полета пули, а также величину и направление ее конечной скорости \mathbf{v}_k . Сопротивлением воздуха движение пули пренебречь.

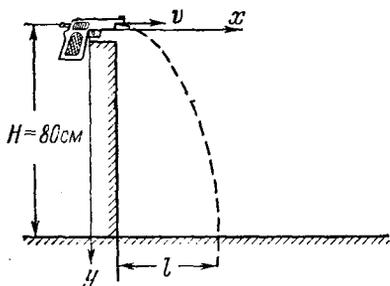


Рис. 42.

Решение. Запишем кинематические уравнения движения пули вдоль осей Ox и Oy в системе координат xOy , показанной на рис. 42:

$$x = vt, \quad y = gt^2/2.$$

В момент t_0 падения пули на землю $x = l$, а $y = H$. Подставляем эти значения координат и время t_0 в уравнения движения. Получим

$$l = vt_0; \quad H = gt_0^2/2.$$

Из второго уравнения найдем время движения t_0 и подставим его в первое уравнение:

$$t_0 = \sqrt{2H/g}, \quad l = v \sqrt{2H/g},$$

$$l = 5 \text{ м/с} \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8 \text{ м}}{9,8 \text{ м/с}^2}} \approx \underline{2,02 \text{ м}}.$$

Горизонтальная составляющая скорости пули не меняется со временем

$$v_x = v_0 = v = \text{const},$$

а вертикальная меняется по закону

$$v_y = 0 + gt = gt.$$

В момент падения пули на землю

$$v_x = v, \quad \text{а} \quad v_y = gt_0 = g \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH}.$$

Следовательно, в этот момент пуля имеет скорость

$$v_k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 + 2gH}, \quad v_k \approx \sqrt{5^2 \text{ м/с}^2 + 2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,8 \text{ м}} \approx \underline{6,4 \text{ м/с}}.$$

Вектор v_k составляет с горизонтом угол α такой, что

$$\cos \alpha = \frac{v}{v_k} = \frac{5}{6,4} = 0,8, \quad \alpha = \underline{\arccos 0,8}.$$

Задача 22. Пружинный пистолет установлен под некоторым углом к горизонту так, что конец его ствола находится на одном уровне с полом. При каком угле α наклона ствола к горизонту дальность пули при выстреле будет

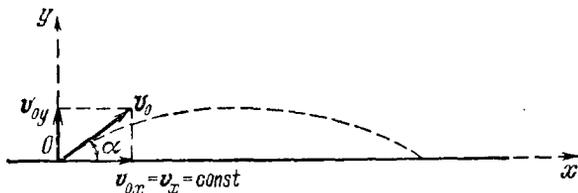


Рис. 43.

максимальной? Определить максимальную дальность полета пули при скорости вылета $v_0 = 7$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Вдоль оси Ox (рис. 43) пуля движется равномерно со скоростью

$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

где $v_0 = |\mathbf{v}_0|$ — начальная скорость пули. Поэтому ее координата x меняется со временем согласно формуле

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

В вертикальном направлении пуля движется с постоянным ускорением $a = -g$ (оно направлено вниз), начальная скорость пули в этом направлении равна

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Координату y пули в момент времени t можно найти по формуле

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Найдем вначале время t_0 движения пули. В момент t_0 падения ее на землю $y = 0$. Следовательно, мы можем записать

$$0 = v_0 \sin \alpha t_0 - \frac{gt_0^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя теперь это выражение для времени полета пули в кинематическое уравнение ее движения по оси Ox , найдем дальность ее полета

$$l = x_{\max} = v_0 \cos \alpha t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}.$$

Дальность будет максимальной, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е.

$$2\alpha = 90^\circ \quad \text{и} \quad \alpha = \underline{45^\circ}.$$

Следовательно, максимальная дальность полета

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, \quad l_{\max} = \frac{7^2 \text{ м/с}}{9,8 \text{ м/с}} = \underline{5 \text{ м}}.$$

Задача 23*. Из орудия сделан выстрел вверх по склону горы. Угол наклона горы к горизонту $\alpha=30^\circ$, угол наклона ствола орудия к горизонту $\beta=60^\circ$, скорость вылета снаряда $v=7$ м/с. Найти расстояние от орудия до точки падения снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Вдоль оси Ox (рис. 44) снаряд движется равномерно со скоростью

$$v_x = v \cos \beta,$$

а в вертикальном направлении — равноускоренно с начальной скоростью, направленной вверх и равной: $v_{0y} = v \sin \beta$, и ускорением $a = -g$.

Составляем два уравнения движения:

$$x = v_x t, \text{ или } x = vt \cos \beta, \quad (1)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}, \text{ или}$$

$$y = vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Рис. 44.

В момент t_0 падения снаряда $x = l \cos \alpha$ и $y = l \sin \alpha$. Поэтому

$$l \cos \alpha = vt_0 \cos \beta, \quad l \sin \alpha = vt_0 \sin \beta - \frac{gt_0^2}{2}.$$

Найдем из первого уравнения время t_0 полета снаряда и подставим его во второе уравнение

$$t_0 = \frac{l \cos \alpha}{v \cos \beta}, \quad l \sin \alpha = \frac{l \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} - \frac{gl^2 \cos^2 \alpha}{2v^2 \cos^2 \beta};$$

откуда

$$l = \frac{2v^2}{g} \cdot \frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \beta = \frac{2v^2 \sin(\beta - \alpha) \cos \beta}{g \cos^2 \alpha},$$

$$l = \frac{2 \cdot 7^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{9,8 \text{ м}/\text{с}^2} \cdot \frac{\sin 30^\circ \cos 60^\circ}{\cos^2 30^\circ} = 3,33 \text{ м}.$$

Задача 24. По кривому желобу, установленному на стене на высоте $h=3,0$ м от пола (рис. 45), скатывается шарик со скоростью $v_0=7,0$ м/с под

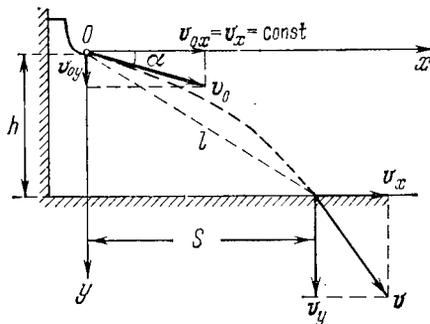


Рис. 45.

углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии l от конца желоба шарик упадет на пол? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Составляющие скорости шарика по осям координат (рис. 45) равны $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Составляем два уравнения движения:

$$x = v_x t, \quad \text{или} \quad x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_{0y} t + \frac{g t^2}{2}, \quad \text{или} \quad y = v_0 t \sin \alpha + \frac{g t^2}{2}.$$

В момент t_0 падения шарика на землю $x = s$ и $y = h$. Поэтому

$$s = v_0 t_0 \cos \alpha \quad \text{и} \quad h = v_0 t_0 \sin \alpha + \frac{g t_0^2}{2}.$$

Из первого уравнения

$$t_0 = \frac{s}{v_0 \cos \alpha}.$$

Подставим это выражение для t_0 во второе уравнение

$$h = s \operatorname{tg} \alpha + \frac{g s^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad \text{или} \quad \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} s^2 + s \operatorname{tg} \alpha - h = 0.$$

Решать это уравнение относительно s удобнее в цифрах:

$$\frac{9,8}{2 \cdot 7^2 \cos^2 30^\circ} s^2 + s \operatorname{tg} 30^\circ - 3,0 = 0, \quad s^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2} s - \frac{45}{2} = 0,$$

откуда

$$s = \frac{15\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{225 \cdot 3}{16} + \frac{45}{2}} = 6,0 \text{ м.}$$

Искомое расстояние

$$l = \sqrt{s^2 + h^2} = \sqrt{6,0^2 + 3,0^2} = \underline{6,7 \text{ м.}}$$

Задача 25. На какой высоте над поверхностью земли вес тела уменьшится на 10%? Радиус Земли принять равным $R = 6370$ км.

Решение. Вес тела на Земле

$$P = \gamma \frac{mM}{R^2}. \quad (1)$$

Вес тела на высоте H

$$P_1 = \gamma \frac{mM}{(R+H)^2} \quad (2)$$

(M — масса Земли, m — масса тела).

Делим равенство (1) на (2):

$$\frac{P}{P_1} = \frac{(R+H)^2}{R^2},$$

откуда

$$(R+H)^2 = \frac{P}{P_1} R^2, \quad R+H = R \sqrt{\frac{P}{P_1}} \quad \text{и} \quad H = R \left(\sqrt{\frac{P}{P_1}} - 1 \right),$$

$$H = 6370 \text{ км} \left(\sqrt{\frac{1}{0,9}} - 1 \right) = \underline{350 \text{ км.}}$$

Задача 26*. Определить массу и среднюю плотность Земли. Принять радиус Земли $R=6400$ км, ускорение свободного падения $g=9,8$ м/с².

Решение. Для какого-нибудь тела на Земле, имеющего массу m

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда находим массу Земли:

$$M = \frac{gR^2}{\gamma}, \quad M = \frac{9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 6,4^2 \cdot 10^{12} \text{ м}^2}{6,70 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг}^2} = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Плотность Земли

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad \rho = \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 3}{4\pi \cdot 6,4^3 \cdot 10^{18} \text{ м}^3} \approx \underline{\underline{5500 \text{ кг/м}^3}}.$$

§ 23. Механическая работа и мощность

Механической работой называется *физическая величина, равная произведению модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между ними*:

$$A = Fs \cos \alpha,$$

где A — работа силы на перемещении s ; α — угол между направлениями векторов силы F и перемещения тела s (или скорости движения точки приложения силы); $s \cos \alpha$ — проекция перемещения точки приложения силы на направление силы, т. е. перемещение точки приложения силы в направлении действия силы (рис. 46).

Частные случаи:

а) Если направление силы совпадает с направлением движения тела, т. е. при $\alpha = 0$:

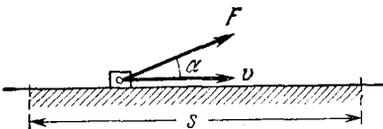


Рис. 46.

$$A = Fs.$$

б) Если сила направлена перпендикулярно к направлению движения тела, т. е. при $\alpha = 90^\circ$:

$$A = 0.$$

Следовательно, сила не производит работы, если тело перемещается в направлении, перпендикулярном к направлению действия силы.

В частности, работа силы тяжести равна произведению этой силы на величину перемещения тела по вертикали независимо от пути, по которому тело движется:

$$A_p = P(H-h).$$

в) Если угол между направлением силы и направлением движения тупой $\alpha > 90^\circ$, то

$$A < 0,$$

так как в этом случае $\cos \alpha < 0$.

г) Если перемещение происходит в сторону, противоположную направлению вектора силы, т. е. $\alpha = 180^\circ$, то $\cos \alpha = -1$, и тогда

$$A = -Fs.$$

Следовательно, работа силы сопротивления — отрицательная.

Величина работы при совпадении направления перемещения с направлением вектора силы численно равна площади под графиком зависимости между силой и перемещением (рис. 47).

Если направления векторов силы и перемещения противоположны, то величина работы равна этой же площади, но взятой со знаком «—».

Для постоянной силы, величина которой не изменяется за все время движения, это видно из графика, приведенного на рис. 47, а. Если за время перемещения величина силы изменяется по линейному закону (рис. 47, б), то, разбив перемещение на небольшие отрезки Δs и принимая при подсчете работы, что на каждом таком малом перемещении сила имела некоторую среднюю величину, получим, что полная величина работы численно равна

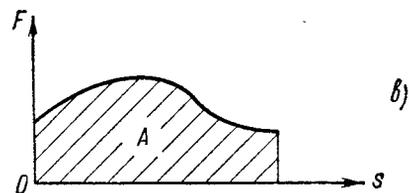
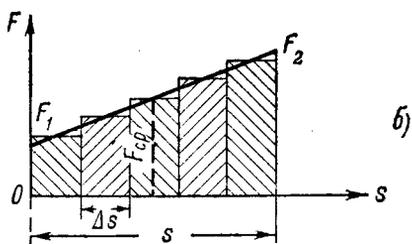
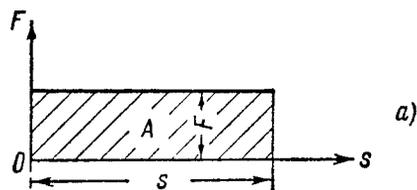


Рис. 47.

площади между осью s и ступенчатой линией. Чем меньше величина Δs , тем ступенчатая линия больше приближается к прямой, выражающей зависимость силы от перемещения, и в пределе совпадает с ней. В этом случае работа равна произведению средней силы $F_{cp} = \frac{F_1 + F_2}{2}$ на перемещение. Точно так же можно показать, что при произвольной зависимости силы от перемещения (рис. 47, в) работа численно равна площади под графиком зависимости силы от перемещения.

Важной характеристикой работы машин и механизмов является мощность.

Мощностью называется величина, равная отношению работы ко времени, в течение которого она совершается

$$N = \frac{A}{t}.$$

Так как $A = Fs \cos \alpha$, то $N = F \cos \alpha \cdot \frac{s}{t}$. Но $s/t = v_{\text{ср}}$, поэтому

$$N = Fv_{\text{ср}} \cos \alpha.$$

Единица работы в системе СИ—джоуль имеет размерность

$$[\text{Дж}] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right].$$

В системе СГС единица работы—эрг:

$$[\text{э}] = [\text{дин} \cdot \text{см}] = \left[\frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{с}^2} \right].$$

Сравнивая размерности джоуля и эрга, видим, что так как $1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$ и $1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$, то $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$.

Единицы мощности:

в системе СИ—ватт; его размерность

$$[\text{Вт}] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{с}} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3} \right];$$

в системе СГС— $\frac{\text{эрг}}{\text{с}}$; размерность:

$$\left[\frac{\text{э}}{\text{с}} \right] = \left[\frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{с}^3} \right].$$

Кроме того, иногда употребляются внесистемные единицы мощности:

киловатт	1 кВт = 1000 Вт,
гектоватт	1 гВт = 100 Вт,
лошадиная сила	1 л. с. \approx 735 Вт*).

внесистемные единицы работы:

ватт-час	1 Вт-час	= 3600 Дж, так как Дж = Вт-с
гектоватт-час	1 гВт-час	= 360 000 Дж (3600 · 100),
киловатт-час	1 кВт-час	= 3 600 000 Дж = 3600 кДж.

Работу машин и механизмов характеризует коэффициент полезного действия (обозначается η или к.п.д.). К.п.д.— это отношение полезной работы, совершенной машиной, к полной работе. Полезная работа всегда меньше полной из-за неизбежных потерь, связанных с трением и другими явлениями.

*) Точнее: $75 \cdot 9,81 = 735,5 \text{ Вт}$.

§ 24. Энергия. Кинетическая и потенциальная энергия

В соответствии с различными формами процессов говорят о различных формах энергии: *механической, внутренней, электромагнитной* и т. д.

Механической энергией тела называется *величина, равная максимальной работе, которую тело может совершить в данных условиях. Размерность механической энергии та же, что и размерность работы.*

Различаются два вида механической энергии — кинетическая и потенциальная энергия. Сумма потенциальной и кинетической энергий составляет полную механическую энергию.

Кинетической энергией называется *механическая энергия тела, обусловленная его движением* (скоростью). Кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Вывод этой формулы получается наиболее просто, если предположить, что увеличение скорости материальной точки от нуля до некоторой величины v происходит под действием постоянной силы. Работа этой силы:

$$A = F \cdot s.$$

А так как

$$F = \frac{mv}{t} \quad \text{и} \quad s = v_{\text{ср}} t = \frac{v}{2} t,$$

то

$$A = \frac{mv}{t} \cdot \frac{v}{2} t = \frac{mv^2}{2}.$$

Поскольку при $v = 0$ кинетическая энергия тела тоже равна 0, то вычисленная нами работа равна полной кинетической энергии тела, движущегося со скоростью v :

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменение кинетической энергии тела при изменении его скорости с v_1 до v_2 равно

$$\Delta W_k = W_{k_2} - W_{k_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Потенциальной энергией называется *энергия, обусловленная взаимодействием тел друг с другом. Она определяется не скоростями тел, а их взаимным расположением.*

Примеры потенциальной энергии: энергия тела, поднятого над землей; энергия воды, подпертой плотиной в верхнем бьефе,

относительно уровня неподпертой воды за плотиной (в нижнем бьефе); энергия растянутой или сжатой пружины, например часовой пружины; энергия натянутой тетивы.

Потенциальная энергия определяется только с точностью до некоторой постоянной — потенциальной энергии при некотором расположении тел, которое принято за уровень нулевого значения потенциальной энергии.

В первом примере за уровень нулевого значения потенциальной энергии обычно принимается поверхность Земли. Потенциальная энергия поднятого тела равна работе силы тяжести при перемещении тела до поверхности Земли, т. е.

$$W_{\text{п}} = mgH.$$

Во втором примере

$$W_{\text{п}} = mg(H - h),$$

где H и h — высоты уровней верхнего и нижнего бьефов над некоторым условным уровнем.

В следующих примерах потенциальная энергия деформированных тел (пружины, натянутой тетивы) измеряется той работой, которую произведет тело при возвращении его частиц в исходное положение, в котором потенциальная энергия считается равной нулю.

§ 25. Превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике

Механическая энергия изолированной системы определяется взаимным расположением тел, составляющих эту систему, и скоростями их движения. Изменение положения в пространстве и скоростей движения тел, входящих в изолированную систему, сопровождается переходом потенциальной энергии в кинетическую, или, наоборот, кинетической энергии в потенциальную, а также взаимным превращением механической и других видов энергии.

Если в каком-либо процессе не происходит взаимопревращения механической энергии с другими видами энергии, то в этом процессе убыль потенциальной энергии сопровождается приростом такого же в точности количества кинетической энергии и обратно.

Один из важнейших законов механики — закон сохранения механической энергии — гласит:

Полная механическая энергия изолированной механической системы не меняется со временем, если движение такой системы не сопровождается взаимопревращением механической и других видов энергии.

Примеры решения задач

Задача 27. Груз массой $m=3$ т поднимается лебедкой с ускорением $a=2$ м/с². Определить работу, произведенную в первые 1,5 секунды от начала подъема.

$$\begin{array}{l} m=3 \text{ т}=3 \cdot 10^3 \text{ кг} \\ a=2 \text{ м/с}^2 \\ t=1,5 \text{ с} \\ v_0=0 \\ \hline A=? \end{array}$$

Решение

Высота, на которую груз поднимается за первые t секунд,

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Силу натяжения троса лебедки найдем, записав уравнение движения груза. На груз действуют две силы—сила тяжести mg и сила T натяжения троса. Согласно второму закону Ньютона

$$T - mg = ma, \quad \text{отсюда } T = m(a + g).$$

Произведенная лебедкой работа равна

$$A = Th = m(g + a) \frac{at^2}{2},$$

$$A = 3000 \text{ кг} (9,8 \text{ м/с}^2 + 2,0 \text{ м/с}^2) \cdot \frac{2 \text{ м/с}^2 \cdot 1,5^2 \text{ с}^2}{2} = \underline{79\,650 \text{ Дж}}.$$

Задача 28. Вычислить мощность двигателя подъемного крана, поднимающего груз массой $m=3$ т с постоянной скоростью 6 м/мин, если коэффициент полезного действия крана 80%.

Решение. Мощность крана $N_{кр} = mgv$. Мощность двигателя

$$N = \frac{mgv}{\eta}. \quad N = \frac{3000 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,1 \text{ м/с}}{0,80} = 3675 \text{ Вт} \approx \underline{3,7 \text{ кВт}}.$$

Задача 29. Гидростанция рассчитана на расход воды $Q=800$ м³/с при напоре $H=15,0$ м. К.п.д. гидростанции $\eta=80\%$. Найти расчетную мощность станции.

Решение. Масса воды, протекающей в секунду: $\frac{m}{t} = Q\rho$, где $\rho = 10^3$ кг/м³—плотность воды.

Искомая мощность

$$N = Q\rho g H \eta,$$

$$N = 800 \text{ м}^3/\text{с} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 15,0 \text{ м} \cdot 0,80 = \underline{93 \cdot 10^6 \text{ Вт}} \text{ (93\,000 кВт)}.$$

Задача 30. Рассчитать мощность N водяной струи, вытекающей из отверстия диаметром $d=20$ см со скоростью $v=5$ м/с.

Решение. Мощность струи численно равна кинетической энергии массы воды, вытекающей в одну секунду:

$$N = \frac{m}{t} v^2,$$

где m —масса воды, вытекающей за t секунд: $m = Q\rho t$, где $\rho = 10^3$ кг/м³, Q —объем воды, вытекающей в одну секунду—расход воды.

Так как расход воды равен произведению площади сечения струи на скорость течения: $Q = \frac{\pi d^2}{4} v$, то $m = \frac{\pi d^2 v}{4} \rho t$, а мощность струи:

$$N = \frac{Q \rho v^2}{2} = \frac{\pi d^2 v^3 \rho}{8}, \quad N = \frac{3,14 \cdot 0,20^2 \text{ м}^2 \cdot 5^3 \text{ (м/с)}^3 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3}{8} = \underline{1960 \text{ Вт.}}$$

Задача 31*. Пружина длиной $l_0 = 30$ см сжата до $l = 22$ см. Найти потенциальную энергию сжатой пружины, если известно, что для ее сжатия на каждый сантиметр требуется сила $5 \cdot 10^5$ Н.

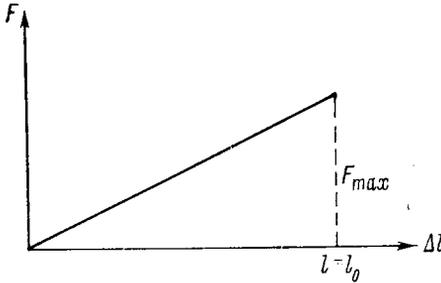


Рис. 48.

Решение. Энергия пружины равна работе, затраченной на ее сжатие. При сжатии пружины сила, действующая на нее, возрастает от нуля до максимального значения, которое будет иметь место при полном сжатии:

$$F_{\max} = \left(\frac{F}{\Delta l} \right) (l - l_0).$$

Зависимость величины силы от укорочения пружины — линейная, как показано на рис. 48. Произведенная при сжатии пружины работа равна площади под графиком, в данном случае — произведению величины сжатия пружины на среднюю величину сжимающей силы:

$$W_{\text{п}} = A = \frac{F_{\max}}{2} (l - l_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{\Delta l} \right) (l - l_0)^2,$$

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \cdot 5,10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}} (0,30 - 0,22)^2 \text{ м}^2 \approx \underline{1600 \text{ Дж.}}$$

Задача 32. Автомобиль идет по горизонтальной дороге со скоростью $v_0 = 54$ км/ч. С выключенным мотором и включенным тормозом он останавливается, пройдя $l = 50$ м. Определить коэффициент трения f между колесами автомобиля и дорогой.

Решение. Кинетическая энергия грузовика превращается во внутреннюю энергию колес и дороги вследствие трения. Мера превращения энергии — работа силы трения:

$$\frac{mv^2}{2} = F_{\text{тр}} l, \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{2} = f m g l.$$

Отсюда

$$f = \frac{v^2}{2gl}, \quad f = \frac{15^2 \text{ (м/с)}^2}{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 50 \text{ м}} = \underline{0,23}.$$

Задача 33. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела. Найти величину и направление скорости брошенного тела на высоте $h = 1,2$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. При подъеме выброшенного тела происходит частичное превращение его кинетической энергии в потенциальную. При опускании — наоборот.

Тело, брошенное под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 , обладает кинетической энергией $W_0^{(к)} = \frac{mv_0^2}{2}$. Его потенциальная энергия по отношению к уровню, с которого оно брошено, равна нулю. В верхней точке потенциальная энергия тела равна mgH , а кинетическая — равна

$mv_{\text{гор}}^2/2$, где $v_{\text{гор}}$ — скорость (горизонтальная) тела в верхней точке. Полная механическая энергия тела в верхней точке:

$$W_H = mgH + \frac{mv_{\text{гор}}^2}{2}.$$

Приравниваем $W_H = W_0$. Так как $W_0 = mv_0^2/2$, а $v_{\text{гор}} = v_0 \cos \alpha$, то

$$mgH + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Отсюда находим наибольшую высоту подъема тела:

$$H = \frac{v_0^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$H = \frac{225 \text{ (м/с)}^2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} = \underline{2,87 \text{ м}}$$

На высоте h полная механическая энергия тела равна

$$W_h = mgh + \frac{mv_h^2}{2}.$$

Приравниваем $W_h = W_0$:

$$mgh + \frac{mv_h^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$v_h = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \quad v_h = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 1,2} = \underline{14,2 \text{ м/с.}}$$

Найдем направление вектора скорости v_h . Если вектор составляет с горизонтом угол β , то

$$\cos \beta = \frac{v_{\text{гор}}}{v_h} = \frac{v_0 \cos \alpha}{v_h}, \quad \cos \beta = \frac{15 \frac{\sqrt{3}}{2}}{14,2} = 0,915,$$

$$\beta = \arccos 0,915.$$

Задача 34*. Расход воды через гидротурбину $Q = 3,0 \text{ м}^3/\text{с}$. Вода поступает в турбину со скоростью $v_1 = 6,0 \text{ м/с}$ и выходит из нее со скоростью $v_2 = 2,0 \text{ м/с}$ на уровне, находящемся на глубине $H = 1,5 \text{ м}$ ниже уровня входа. Коэффициент полезного действия турбины с двигателем $\eta = 0,8$. Определить мощность турбины N и возможную при этой мощности годовую выработку энергии $W_{\text{год}}$.

Решение. Принимаем уровень выхода воды из турбины за уровень нулевого значения потенциальной энергии. Тогда механическая энергия потока воды, протекающего через турбину за 1 с, на входе в турбину равна

$$W_1 = W_1^{(n)} + W_1^{(k)},$$

где потенциальная энергия

$$W_1^{(n)} = \frac{m}{t} gH = Q\rho gH,$$

а кинетическая энергия

$$W_1^{(k)} = \frac{m}{t} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{Q\rho v_1^2}{2}.$$

Следовательно,

$$W_1 = Q\rho gH + \frac{Q\rho v_1^2}{2} = \rho Q \left(gH + \frac{v_1^2}{2} \right).$$

При выходе из турбины полная механическая энергия этой воды равна ее кинетической энергии:

$$W_2 = W_2^{(к)} = \rho Q \frac{v_2^2}{2}.$$

Полная мощность потока равна разности $W_1 - W_2$:

$$N_{\text{полн}} = W_1 - W_2 = \rho Q \left(gH + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right).$$

Поэтому мощность турбины

$$N = \eta N_{\text{полн}} = \eta \rho Q \left(gH + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right),$$

$$N = 0,80 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 3,0 \text{ м}^3/\text{с} \left(9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 1,5 \text{ м} + \frac{6,0^2 - 2,0^2}{2} \text{ м}^2/\text{с}^2 \right)^2 = \\ = 737 \text{ 000 Вт} = \underline{737 \text{ кВт}}.$$

Возможная годовая выработка энергии:

$$W_{\text{год}} = 737 \text{ кВт} \cdot 24 \text{ ч/сут} \cdot 365 \text{ сут} = 6 \text{ 456 000 кВт} \cdot \text{ч},$$

$$W_{\text{год}} \approx \underline{6,5 \cdot 10^6 \text{ кВт} \cdot \text{ч}}.$$

Задача 35*. Веревка длиной $l = 80$ см свешивается с уступа абсолютно гладкой плоскости на $l_1 = 50$ см. Конец веревки на плоскости закреплен гвоздем. Какую скорость будет иметь веревка в момент, когда она полностью соскользнет с плоскости, если гвоздь выдернуть?

Решение. Примем за уровень нулевой потенциальной энергии уровень, на котором будет находиться нижний конец веревки в тот момент, когда вся веревка соскользнет с плоскости, т. е. уровень на $l_2 = 0,80$ м ниже уровня плоскости.

При соскальзывании веревки ее потенциальная энергия уменьшается, превращаясь частично в кинетическую энергию:

$$W_1^{(п)} = W_2^{(к)} + W_2^{(п)}. \quad (a)$$

Потенциальная энергия горизонтального участка закрепленной веревки длиной $0,30$ м

$$W_1' = \left(m \frac{l - l_1}{l} \right) gl = mg(l - l_1),$$

где $m = 2$ кг — масса веревки.

Потенциальная энергия свисающей части веревки

$$W_1'' = \left(m \frac{l_1}{l} \right) g \left(l - \frac{l_1}{2} \right),$$

где $l - \frac{l_1}{2}$ — высота свисающей части над уровнем нулевой потенциальной энергии.

Когда вся веревка соскользнет с плоскости, ее потенциальная энергия будет равна $W_2^{(п)} = mg \frac{l}{2}$, а кинетическая энергия $W_2^{(к)} = \frac{mv^2}{2}$.

Подставляя все это в выражение (a), получим

$$mg(l - l_1) + mg \frac{l_1}{l_2} \left(l - \frac{l_1}{2} \right) = mg \frac{l}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда находим искомую величину скорости веревки

$$v = \sqrt{2g \frac{l^2 - l_1^2}{2l}}, \quad v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \frac{(0,80^2 - 0,50^2) \text{ м}^2}{2 \cdot 0,80 \text{ м}}} = \underline{2,18 \text{ м/с.}}$$

Задача 36*. Сани соскальзывают с ледяной горы высотой $h = 1,5$ м и длиной $l = 2,5$ м и скользят далее по горизонтальной ледяной поверхности до остановки. Сколько времени сани будут скользить по горизонтальной льду, если коэффициент трения $f = 0,04$? На каком расстоянии от подножья ледяной горы сани остановятся?

Решение. Проще решить вторую часть задачи — найти длину горизонтального участка пути, который пройдут сани. Так как кинетическая энергия вначале и в конце пути одна и та же (нуль), то работа сил трения равна изменению потенциальной энергии саней. Принимая уровень горизонтальной ледяной поверхности за уровень нулевой потенциальной энергии, будем иметь

$$W_{\text{п}} = A_{\text{тр}}, \quad \text{где} \quad A_{\text{тр}} = A_1 + A_2.$$

Работа трения A_1 на наклонном участке

$$A_1 = fmg \cos \alpha \cdot l = fmg l \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = fmg \sqrt{l^2 - h^2}$$

(здесь α — угол наклона поверхности горы к горизонту). На горизонтальном участке

$$A_2 = fmgL.$$

Таким образом, получаем

$$mgh = fmg \sqrt{l^2 - h^2} + fmgL,$$

откуда находим

$$L = \frac{h}{f} - \sqrt{l^2 - h^2}, \quad L = \frac{1,5 \text{ м}}{0,04} - \sqrt{(2,5^2 - 1,5^2) \text{ м}^2} = \underline{35,5 \text{ м.}}$$

Для определения времени скольжения саней по горизонтальному пути сначала найдем скорость саней у подножья ледяной горы. Для этого приравняем потенциальную энергию санок наверху горы сумме их кинетической энергии у подножья горы и работы трения на наклонном участке:

$$W_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + A_1, \quad mgh = \frac{mv^2}{2} + fmg \sqrt{l^2 - h^2},$$

откуда находим

$$v = \sqrt{2g(h - f \sqrt{l^2 - h^2})}.$$

Эту величину удобнее вычислить независимо, с тем чтобы не вводить в дальнейшие формулы длинного выражения:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 (1,5 - 0,04 \sqrt{2,5^2 - 1,5^2}) \text{ м}} = \underline{5,27 \text{ м/с.}}$$

Теперь приравниваем импульс санок импульсу силы трения при скольжении санок на горизонтальной ледяной поверхности:

$$mv = fmg t.$$

Отсюда

$$t = \frac{v}{fg}, \quad t = \frac{5,27 \text{ м/с}}{0,04 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} = \underline{13,3 \text{ с.}}$$

Примечание. Зная скорость санок у подножья горы, время дальнейшего скольжения по горизонтальной поверхности можно найти проще, если

иметь в виду, что горизонтальное движение равнозамедленное, так как сила трения постоянная:

$$t = \frac{L}{v_{\text{ср}}} = \frac{2L}{v}, \quad t = \frac{2 \cdot 35,5 \text{ м}}{5,27 \text{ м/с}} = 13,3 \text{ с.}$$

Задача 37*. В маятник, имеющий массу M , ударяет пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v_1 . Определить, на какую высоту h откачнется маятник. Какая часть механической энергии летящей пули превратится в механическую энергию маятника с пулей?

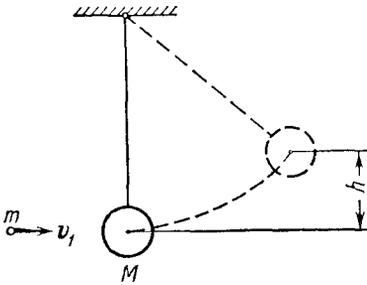


Рис. 49.

Решение. При попадании пули в тело маятника механическая энергия пули частично превращается во внутреннюю энергию из-за трения и деформации тел при проникновении пули в тело маятника, и лишь частично превращается в механическую (кинетическую) энергию маятника с пулей. Эта часть всей механической энергии пули затем, когда маятник откачнется до наибольшей высоты h (рис. 49), превращается

в потенциальную энергию маятника и пули. Закон сохранения импульса дает возможность определить, какая доля всей механической (кинетической) энергии пули превращается в механическую энергию маятника и пули.

Найдем скорость, с которой начнет двигаться маятник вместе с пулей в момент, следующий за попаданием пули. Для этого запишем закон сохранения импульса

$$mv_1 = (m + M)v_2,$$

откуда начальная скорость маятника с пулей

$$v_2 = \frac{mv_1}{m + M}.$$

Кинетическая энергия пули

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2}.$$

Механическая энергия пули с маятником

$$W_2 = \frac{(m + M)v_2^2}{2} = \frac{m + M}{2} \left(\frac{mv_1}{m + M} \right)^2 = \frac{m^2 v_1^2}{2(m + M)}.$$

Отношение этих энергий α равно

$$\alpha = \frac{W_2}{W_1} = \frac{m^2 v_1^2}{2(m + M)} : \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{m + M}.$$

Теперь кинетическую энергию маятника с пулей в начале движения приравняем их потенциальной энергии в крайнем положении, когда их скорость станет равной нулю:

$$\frac{(m + M)v_2^2}{2} = (m + M)gh.$$

Отсюда найдем максимальную высоту подъема маятника

$$h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{\left(\frac{mv_1}{m + M} \right)^2}{2g}.$$

Задача 38*. В шар массой $M=1,5$ кг, подвешенный на нерастяжимой нити длиной $l=55$ см падает и застревает в нем пуля массой $m=10$ г. Пуля летит наклонно сверху вниз под углом 30° к горизонту (рис. 50). Скорость пули $v=400$ м/с. На какой угол φ откачнется шар с пулей?

Решение. Горизонтальная составляющая импульса пули до ее попадания в шар равна импульсу шара вместе с застрявшей в нем пулей в начале их движения. (Вертикальная составляющая импульса пули лишь увеличит натяжение нити, на которой подвешен шар.)

$$mv \cos \alpha = (M + m) u$$

(u — скорость шара вместе с застрявшей в нем пулей). Отсюда начальная скорость шара

$$u = \frac{m}{M + m} v \cos \alpha.$$

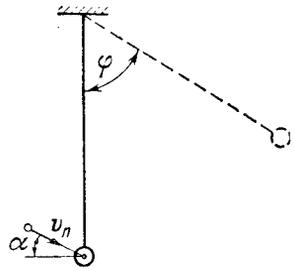


Рис. 50.

Приравняем кинетическую энергию шара с пулей в начале движения приращению их потенциальной энергии в наивысшем положении:

$$\frac{(M + m) u^2}{2} = (M + m) gh,$$

откуда находим

$$h = \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{m}{M + m} \right)^2 \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{2g}.$$

Чтобы не вводить в дальнейшие расчеты эту громоздкую формулу, вычислим

$$h = \left(\frac{0,01}{1,51} \right)^2 \cdot \frac{400^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{2 \cdot 9,8 \text{ м}/\text{с}^2} = 0,27 \text{ м}.$$

Теперь найдем угол φ :

$$\cos \varphi = \frac{l-h}{l} = \frac{0,55-0,27}{0,55} \approx 0,5, \quad \varphi = \underline{60^\circ}.$$

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 26. Равномерное вращательное движение тела. Угловая скорость.

Равномерное движение точки по окружности.

Линейная скорость

На рис. 51 показаны две схемы вращательного движения тела — вращательное движение тела вокруг оси, расположенной в этом теле (рис. 51, а), и вращательное движение плоского тела (пластинки) вокруг оси, расположенной на некотором расстоянии от пластинки и перпендикулярной к ее плоскости (к плоскости чертежа) (рис. 51, б).

В том случае, когда расстояние от тела до оси вращения велико по сравнению с размерами тела, вращающееся тело

можно принять за материальную точку и рассматривать движение этой точки по окружности соответствующего радиуса.

Мерой вращательного движения тела является угол φ , на который повернется прямая, проведенная в теле через какую-нибудь его точку и через точку, расположенную на оси вращения, — в плоскости нормальной к этой оси.

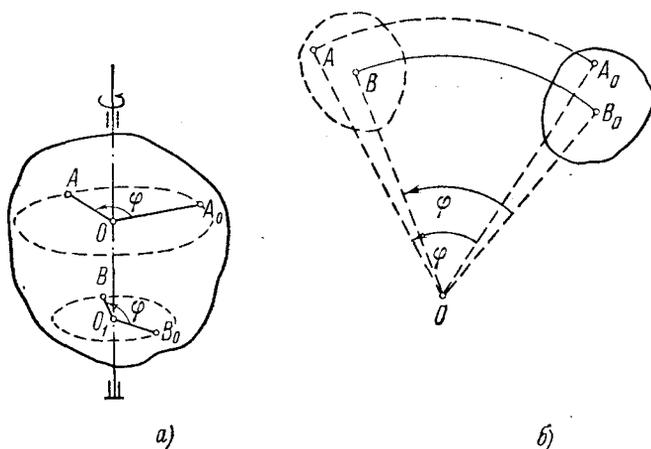


Рис. 51.

Прямая, проведенная во вращающемся теле таким образом через любую его точку, поворачивается за один и тот же промежуток времени на один и тот же угол. Этот угол φ называется углом поворота тела. Измеряется он обычно в радианах.

В дальнейшем мы будем рассматривать только *равномерное вращательное движение*, т. е. такое вращательное движение, при котором за любые равные промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы.

Основной характеристикой равномерного вращательного движения твердого тела является его угловая скорость, измеряемая отношением угла поворота тела за произвольный промежуток времени к этому промежутку:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \text{ [рад/с].}$$

Угловая скорость тела равна углу его поворота за единицу времени.

Так как радиан — величина безразмерная, то размерность угловой скорости — [1/с]. Иногда угловую скорость измеряют в «оборотах в минуту» — количеством оборотов n , которое тело делает за 1 мин. Очевидно,

$$\omega = 2\pi n \quad \text{или} \quad n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

При вращательном движении твердого тела все его точки описывают окружности (рис. 51), причем радиус круговой траектории каждой точки тела равен ее расстоянию до оси вращения и носит название радиуса-вектора этой точки. Скорость движения точки по окружности называется линейной скоростью и имеет, как и в любом криволинейном движении, направление, касательное к траектории движения в данной точке траектории. Линейная скорость точки в круговом движении равна

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2\pi R}{T},$$

где l —длина дуги, пройденной телом, t —время движения, R —радиус траектории и T —время одного полного оборота.

Установим связь между линейными скоростями точек вращающегося тела и его угловой скоростью. Из рис. 51 видно, что для любой точки вращающегося тела пройденный точкой путь l по своей круговой траектории можно выразить через угол поворота φ тела:

$$l = \varphi R,$$

где R —радиус круговой траектории этой точки.

Линейная скорость точки при равномерном движении равна

$$v = \frac{l}{t} = \frac{\varphi R}{t} = \frac{\varphi}{t} R.$$

Но $\frac{\varphi}{t} = \omega$, следовательно,

$$v = \omega R.$$

Линейная скорость кругового движения любой точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости вращения тела на радиус окружности, по которой движется точка.

§ 27. Центробежное ускорение

Хотя при равномерном вращательном движении тела скорость любой его точки не меняется по абсолютной величине, направление вектора скорости все время меняется. Это означает, что точка движется с ускорением. Найдем абсолютную величину и направление вектора ускорения точки.

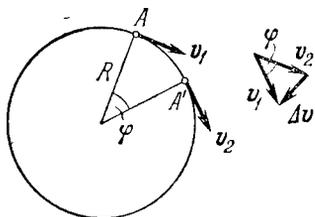
Если точка A повернулась на угол φ (рис. 52), то ее скорость \mathbf{v}_1 изменилась и стала равна \mathbf{v}_2 . Угол между векторами \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 равен φ . По абсолютной величине векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 одинаковы:

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v.$$

Изменение вектора скорости Δv за время t равно

$$\Delta v = v\varphi,$$

но $\varphi = \omega t = \frac{v}{R} t$, где R — радиус окружности, по которой движется тело. Следовательно,



$$\Delta v = v \frac{v}{R} t = \frac{v^2}{R} t,$$

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v^2}{R} \quad \text{или} \quad a = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Вектор Δv перпендикулярен линии AA' . Следовательно, ускорение a направлено к центру окружности, по которой движется тело. Это ускорение называют центростремительным ускорением.

Рис. 52.

В общем случае, при неравномерном движении, ускорение тела можно всегда представить как сумму центростремительного ускорения и ускорения по касательной к траектории движения тела. Оба эти ускорения перпендикулярны друг другу.

Материальная точка получает центростремительное ускорение в том случае, когда линия действия равнодействующей всех приложенных к ней сил не совпадает с вектором скорости. Если вектор скорости материальной точки и вектор равнодействующей всех приложенных к ней сил взаимно перпендикулярны, то точка совершает равномерное круговое движение. В этом случае равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, направлена к центру круговой траектории точки*). Приведем два примера.

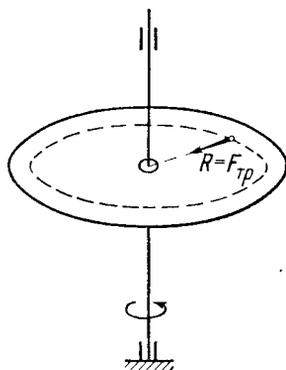


Рис. 53.

1. На горизонтальном диске, вращающемся равномерно вокруг вертикальной оси, лежит тело (рис. 53). Тело удерживается на круговой траектории (показанной на рисунке пунктиром) силой трения, представляющей собой результат действия диска на данное тело. Так как рассматривается равномерное вращение, при котором ускорение по касательной к траектории отсутствует,

*) Иногда равнодействующую, направленную к центру вращения, называют центростремительной силой. Следует, однако, помнить, что эта сила не возникает сама по себе, а представляет собой равнодействующую реально существующих сил взаимодействия данного тела с другими телами.

то сила трения направлена к центру вращения и сообщает рассматриваемому телу (материальной точке) только центростремительное ускорение.

2. Тяжелый шарик на нити равномерно вращается рукой человека так, что описывает окружность в горизонтальной плоскости (рис. 54). Равнодействующая в этом случае представляет собой результат действий двух тел: действия земли — силы тяжести P и силы T со стороны нити, к которой прикреплен шарик. Равнодействующая этих двух сил направлена горизонтально к центру окружности, по которой движется шарик (в вертикальном направлении и по направлению касательной к окружности тело движется без ускорения), и сообщает шарiku центростремительное ускорение.

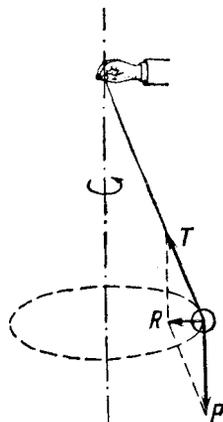


Рис. 54.

Некоторые технические примеры. В примерах 1—5 размеры вращающегося тела малы по сравнению с радиусом вращения. Поэтому вращающееся тело принято за материальную точку, а его движение рассматривается как движение материальной точки по окружности.

1. *Автомашина, движущаяся равномерно по выпуклому мосту.* Когда машина находится на середине пролета (рис. 55), на нее

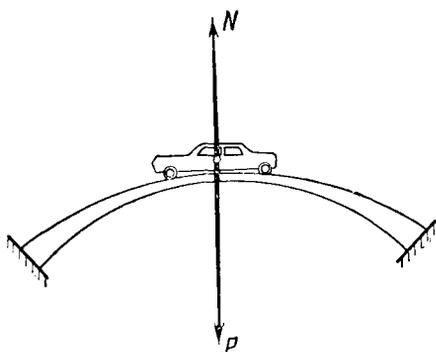


Рис. 55.

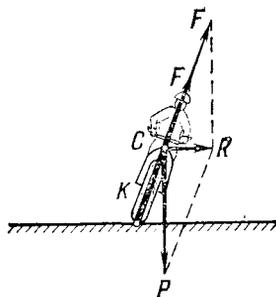


Рис. 56.

действуют следующие вертикальные силы: сила тяжести P и вертикальная реакция моста N .

Равнодействующая этих сил

$$R = P + N$$

направлена вниз и сообщает автомобилю центростремительное

ускорение. Абсолютная величина этой равнодействующей равна $R = P - N$.

2. *Велосипедист (или мотоциклист) на повороте* (рис. 56). При наклоне велосипедиста к центру закругления равнодействующая силы тяжести P и силы F , действующей на велосипед со стороны земли в точках соприкосновения колес велосипеда с землей, направлена горизонтально к центру круговой траектории велосипедиста. Эта равнодействующая сообщает велосипедисту центростремительное ускорение.

3. *Движение мотоциклиста по вертикальной цилиндрической стене* (рис. 57). Центростремительное ускорение сообщается мотоциклу равнодействующей силы тяжести и силы реакции стены.

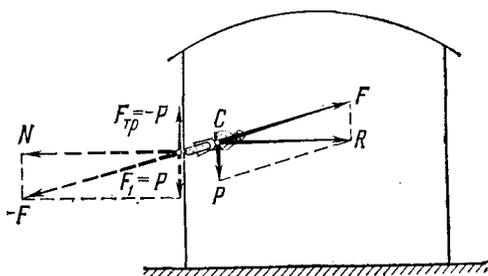


Рис. 57.

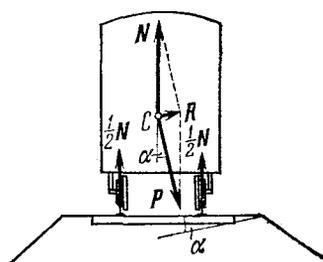


Рис. 58.

4. *Вагон поезда на закруглении* (рис. 58). На кривой наружный рельс железной дороги расположен выше внутреннего. Причем

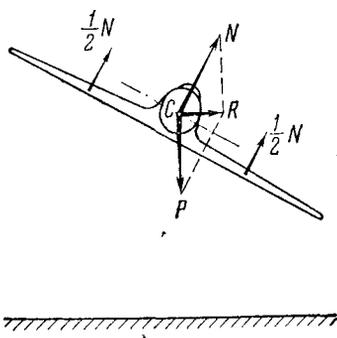


Рис. 59.

угол наклона железнодорожного полотна выбирается в зависимости от радиуса кривой и расчетной скорости движения поезда так, чтобы равнодействующая силы давления N рельсов на колеса вагона и силы тяжести вагона P была направлена горизонтально. Она сообщает вагону центростремительное ускорение, необходимое для движения вагона по окружности данного радиуса с заданной скоростью.

5. *Вираж самолета* (рис. 59). Виражом называется движение самолета по кривой некоторого радиуса в горизонтальной плоскости. Центростремительное ускорение сообщает самолету равнодействующая подъемной силы крыла N и силы тяжести самолета P .

6. *Винт самолета (пропеллер)* (рис. 60). На каждую частицу вращающегося винта действуют со стороны соседних частиц

винта силы, сообщающие ей центростремительное ускорение. Равнодействующая R этих сил тем больше, чем дальше соответствующее сечение винта от оси вращения: $R = ma_{ц.с} = m\omega^2 r$; так как угловая скорость ω одна и та же для всего пропеллера, то чем больше r , тем больше величина R .

Как видно из приведенных примеров, центростремительное ускорение материальной точки появляется либо в результате

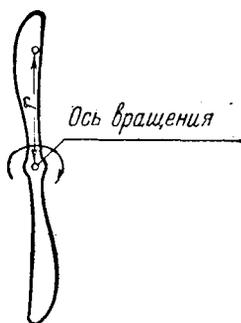


Рис. 60.

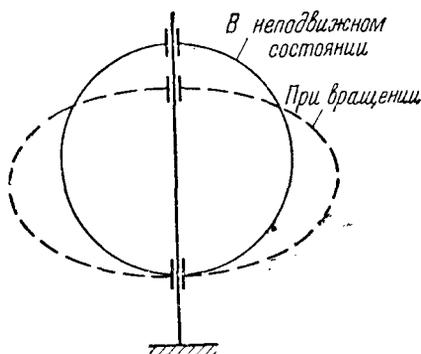


Рис. 61.

действия на нее неподвижного тела—связи, либо под действием сил тяготения и упругих сил. Центростремительное ускорение может создаваться также действием магнитного поля, электрического поля и т. д.

7. Вращение гибких прутьев кольцевой формы (рис. 61). Центростремительные силы возникают в результате упругой деформации прутьев и являются упругими силами взаимного притяжения частиц. Они приложены от внутренних частиц, т. е. от частиц, ближе расположенных к оси вращения, к наружным частицам и являются результатом притяжения их внутренними частицами.

§ 28°. Сила тяжести, вес тела и сила тяготения

Сила тяжести является результатом взаимного тяготения тела и Земли и частью этой силы тяготения. К телу, находящемуся на поверхности Земли на некоторой широте φ (рис. 62), приложены сила притяжения к Земле, или сила тяготения $F_{тяг}$, и сила N нормальной реакции земной поверхности. Их равнодействующая R_φ направлена к центру O параллели на этой широте. Она сообщает телу центростремительное ускорение и поэтому равна по величине

$$R_\varphi = m\omega^2 r,$$

где m — масса тела, ω_3 — угловая скорость вращения Земли, r — радиус параллели на широте φ . Эта сила сообщает телу центростремительное ускорение и удерживает тело на поверхности Земли. Сила, с которой тело действует на поверхность

Земли (на горизонтальную подставку или вертикальную подвеску) по третьему закону Ньютона, равна по величине силе N и направлена в противоположную сторону. Это — вес тела.

Рассмотрим отдельно действие на тело силы тяготения $F_{\text{тяг}}$. Часть этой силы — вектор R_φ сообщает телу центростремительное ускорение, направленное перпендикулярно к оси вращения Земли. Построив параллелограмм, в котором вектор $F_{\text{тяг}}$ силы тяготения является диагональю, а R_φ — одной из сторон, найдем направление и величину другой составляющей силы тяготения; эта составляющая

силы тяготения и называется силой тяжести. Именно эта составляющая силы тяготения сообщает телу ускорение свободного падения g . Из чертежа видно, что сила тяжести отличается от силы тяготения в общем случае как по величине, так и по направлению.

В частном случае, когда тело расположено на экваторе, к телу приложены две силы — $F_{\text{тяг}}$ и N , направленные по одной прямой в противоположные стороны. Центростремительное ускорение

$$a = \omega_3^2 r_3$$

(r_3 — радиус Земли на экваторе) сообщается равнодействующей этих сил

$$R_{\varphi=0} = F_{\text{тяг}} - N.$$

Поэтому

$$R_{\varphi=0} = m\omega_3^2 r_3$$

и

$$N = F_{\text{тяг}} - R = F_{\text{тяг}} - m\omega_3^2 r_3.$$

Но сила N равна по модулю весу тела. Следовательно, вес тела на экваторе меньше силы тяготения на величину $m\omega_3^2 r_3$.

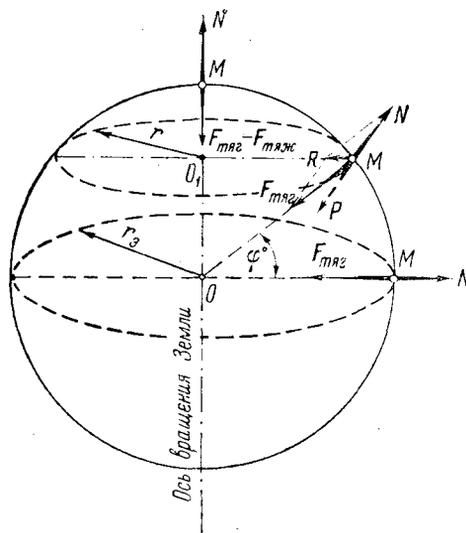


Рис. 62.

Ясно, что если телу на экваторе предоставить возможность свободно падать, то оно будет двигаться относительно Земли с ускорением

$$g = \frac{F_{\text{тяг}}}{m} - a_{\text{ц.с}} = \frac{F_{\text{тяг}}}{m} - \omega^2 R_{\text{э}}.$$

Это ускорение сообщает телу не вся сила тяготения, а только часть ее — сила тяжести

$$F_{\text{тяж}} = F_{\text{тяг}} - m\omega^2 R_{\text{э}}.$$

В другом частном случае — на полюсе тело находится в покое относительно земной оси и сила тяжести равна силе тяготения:

$$F_{\text{тяж}} = F_{\text{тяг}}.$$

Во всех случаях, как было выяснено ранее, вес тела равен силе тяжести по величине и направлению, но эти две силы приложены к разным телам, — сила тяжести приложена к телу, вес — к подставке или подвеске.

Ускорение свободного падения сообщается телу силой тяжести, — линия действия силы тяжести считается вертикалью.

§ 29°. Искусственные спутники Земли. Причины возникновения в них состояния невесомости. Первая космическая скорость

Для простоты рассмотрим равномерное движение спутника по круговой орбите.

В системе отсчета, связанной с центром Земли (рис. 63), на корабль-спутник действует только одна сила — сила тяготения F_1 , равная по величине

$$F_1 = \gamma \frac{Mm_{\text{сп}}}{R^2},$$

где M — масса Земли, $m_{\text{сп}}$ — масса корабля-спутника, R — радиус круговой орбиты спутника.

Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение, направленное к центру Земли и равное

$$a_{\text{сп}} = \frac{F_1}{m_{\text{сп}}} = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

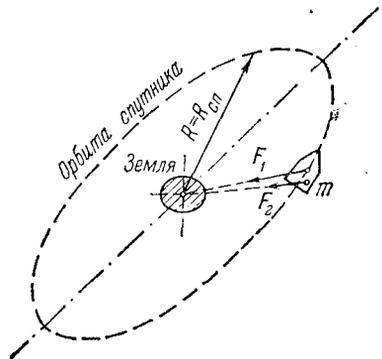


Рис. 63.

На тело, находящееся в кабине корабля, кроме силы тяготения F_2 , может действовать еще и сила N — реакция «пола»*). Равнодействующая R этих сил $R = N + F_2$ сообщает телу ускорение $a_{\text{т}}$,

*) На рисунке не показана (см. ниже).

равное

$$a_T = \frac{R}{m} = \frac{F_2}{m} + \frac{N}{m}.$$

Так как $F_T = \gamma \frac{Mm}{R^2}$, то

$$a_T = \gamma \frac{M}{R^2} + \frac{N}{m}.$$

Но спутник и тело, очевидно, движутся вместе, с одинаковым ускорением. Следовательно,

$$a_T = a_{\text{сп}} \quad \text{или} \quad \gamma \frac{M}{R^2} + \frac{N}{m} = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Отсюда находим

$$N = 0.$$

На тело, находящееся в кабине спутника, не действует никакая другая сила, кроме силы тяжести. Тело в кабине спутника не действует на опору, т. е. находится в состоянии невесомости.

Найдем теперь скорость v спутника. Центробежное ускорение $a = \frac{v^2}{R}$ сообщает спутнику сила тяготения $F_1 = \gamma \frac{Mm}{R^2}$. Следовательно, согласно второму закону Ньютона,

$$m \frac{v^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2}, \quad \text{или} \quad v^2 = \gamma \frac{M}{R}.$$

Радиус траектории спутника Земли мало отличается от радиуса Земли. Поэтому в последней формуле вместо R мы можем подставить радиус Земли R_3 :

$$v^2 = \gamma \frac{M}{R_3} = \gamma \frac{M}{R_3^2} R_3.$$

Но вблизи поверхности Земли $\gamma \frac{mM}{R_3^2} = mg$ и поэтому

$$\gamma \frac{M}{R_3^2} = g.$$

Следовательно,

$$v_{\text{сп}} = \sqrt{R_3 \cdot g} = \sqrt{(6400 \cdot 10^3) \text{ м} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 8 \text{ км/ч}.$$

Эта скорость называется первой космической скоростью. Тело любой массы, которому будет сообщена такая скорость, станет спутником Земли.

Примеры решения задач

Материальная точка движется равномерно по окружности, если равнодействующая всех сил, приложенных к этой точке, лежит в плоскости окружности и направлена к ее центру, т. е. сообщает материальной точке центростремительное ускорение. Поэтому при решении большинства задач на круговое движение материальной точки важно внимательно разобраться в си-

лах, действующих на точку. Затем можно записать уравнение второго закона Ньютона—уравнение движения для суммы радиальных составляющих всех сил.

В некоторых задачах требуется определить отношение каких-либо характеристик двух различных круговых движений. В таких задачах не следует ставить целью определение величин обеих характеристик, отношение которых требуется определить, а выводить формулу для нужного в задаче отношения.

Задача 39. Маховик диаметром $D = 1,5$ м делает $n = 600$ оборотов в минуту. Масса маховика $m = 0,5$ т. Найти: а) угловую скорость ω вращения маховика; б) линейную скорость движения точек на ободе колеса; в) кинетическую энергию маховика, считая его массу сосредоточенной на ободе; г) выразить кинетическую энергию маховика через его угловую скорость.

$$D = 1,5 \text{ м}$$

$$n = 600 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

$$m = 0,5 \text{ т} = 500 \text{ кг}$$

Найти ω , v и W_k

Решение

а) Угловая скорость вращения маховика

$$\omega = \frac{2\pi n \text{ рад}}{60 \text{ с}} = \frac{\pi n \text{ рад}}{30 \text{ с}}$$

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \text{ с}^{-1}$$

б) Линейная скорость движения точек на ободе

$$v = \omega \cdot R, \quad v = 62,8 \text{ с}^{-1} \cdot \frac{1,5}{2} \text{ м} = 47,1 \text{ м/с}$$

в) Кинетическая энергия маховика

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \quad W_k = \frac{500 \text{ кг} \cdot 47,1^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{2} = 556 \text{ 000 Дж} = 556 \text{ кДж}$$

г) Так как $v = \omega R$, то

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\omega R)^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}$$

Задача 40*. Обруч радиуса R катится по плоскости без проскальзывания со скоростью v . Найти скорость точки A обруча (рис. 64).

Решение. I способ. Найдем вначале скорость точки A в системе координат, связанной с центром обруча. Так как центр обруча движется относительно земли со скоростью v , то в системе координат, связанной с центром

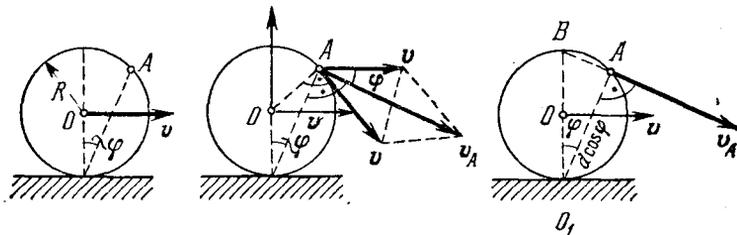


Рис. 64.

обруча, точка обруча, касающаяся земли, движется со скоростью $-v$, т. е. с той же по величине скоростью, но в направлении, противоположном направлению движения центра обруча. Но в этой системе координат скорости всех точек обруча имеют одну и ту же величину. Следовательно, и величина скорости точки A равна v ; вектор v_A направлен по касательной к окружности.

Теперь перейдем к системе координат, связанной с плоскостью. Для этого к скорости точки A в старой системе координат нужно прибавить скорость v центра обруча относительно земли. Таким образом, скорость v_A точки A — это диагональ ромба со сторонами, равными v . Следовательно,

$$v_A = 2v \cos \varphi.$$

II способ. В каждый момент времени движение обруча можно рассматривать как поворот вокруг точки O_1 — мгновенного *) центра вращения. Найдем угловую скорость этого вращения. Обозначим ее ω . Скорость точки O равна v . Но

$$v = v_0 = \omega \cdot R,$$

следовательно,

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

Теперь нетрудно найти скорость точки A . Она перпендикулярна отрезку O_1A и равна

$$v_A = \omega \cdot O_1A = \frac{v}{R} \cdot O_1A.$$

Из $\triangle O_1AB$ можно найти O_1A ,

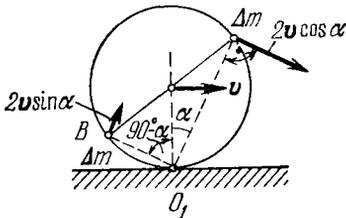
$$O_1A = 2R \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$v_A = \frac{v}{R} \cdot 2R \cos \varphi = \underline{2v \cos \varphi}.$$

Задача 41*. Обруч диаметром $d = 60$ см и массой $m = 5$ кг катится без проскальзывания со скоростью $v = 4$ м/сек. Найти его кинетическую энергию.

Решение. Воспользуемся результатом, полученным в предыдущей задаче. Скорость малого участка обруча с массой Δm у точки A (рис. 65) равна $2v \cos \alpha$, а скорость такого же участка у точки B , диаметрально противоположной точке A , равна $2v \cos (90^\circ - \alpha) = 2v \sin \alpha$. Суммарная кинетическая энергия этих участков равна



$$\begin{aligned} \frac{\Delta m (2v \cos \alpha)^2}{2} + \frac{\Delta m (2v \sin \alpha)^2}{2} &= \\ &= \frac{4\Delta m v^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2} = 2\Delta m v^2. \end{aligned}$$

Рис. 65.

Эта энергия не зависит от α . Следовательно, любая пара участков обруча, находящихся на концах одного диаметра, равна их общей массе $2\Delta m$, умноженной на v^2 . Разобьем обруч на такие пары участков. Тогда кинетическая энергия обруча равна сумме кинетических энергий этих участков

$$W_K = \sum (2\Delta m) v^2 = v^2 \sum (2\Delta m) = m v^2,$$

$$W_K = 5 \text{ кг} \cdot 4^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 = \underline{80 \text{ Дж}}.$$

Задача 42. При увеличении угловой скорости вращающегося тела втрое равнодействующая приложенных к нему сил увеличилась на 60 Н. Найти ускорения тела в первом и во втором случаях. Масса тела $m = 3$ кг.

*) Мгновенный центр вращения — точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Решение. $R_1 = m\omega_1^2 r$, $R_2 = m\omega_2^2 r$ (r — радиус круговой траектории тела). По условию задачи

$$m\omega_2^2 r - m\omega_1^2 r = \Delta R,$$

или

$$mr(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \Delta R.$$

Подставляем сюда $\omega_2 = 3\omega_1$ и находим

$$mr(9\omega_1^2 - \omega_1^2) = \Delta R,$$

или

$$8mr\omega_1^2 = \Delta R.$$

Отсюда

$$a_1 = \omega_1^2 r = \frac{\Delta R}{8m} = \frac{60\text{Н}}{8 \cdot 3 \text{ кг}} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$

$$a_2 = \omega_2^2 r = 9\omega_1^2 r = 9 \cdot 2,5 = 22,5 \text{ м/с}^2.$$

Задача 43. Конькобежец движется со скоростью $v = 10$ м/с. Под каким наибольшим углом к вертикали конькобежец может наклониться при повороте на этой скорости, если коэффициент трения может наклониться при повороте на этой скорости, если коэффициент трения $f = 0,05$? Какой при этом будет радиус закружения?

Решение. При развороте конькобежец наклоняется на некоторый угол α (рис. 66). Помимо силы тяжести P на конькобежца действует сила реакции ледяной поверхности F . Равнодействующая этих двух сил сообщает конькобежцу центростремительное ускорение $a = v^2/r$. Величина этой равнодействующей, как видно из рисунка, равна

$$R = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Конькобежец действует на лед с силой F_1 ; по третьему закону Ньютона

$$F_1 = F.$$

Вертикальная составляющая N силы F_1 равна, очевидно, силе тяжести, действующей на конькобежца,

$$N = P,$$

а горизонтальная F' равна по абсолютной величине

$$F' = N \operatorname{tg} \alpha = P \operatorname{tg} \alpha = R.$$

С другой стороны, сила F' не может превысить по величине наибольшую возможную силу трения $F_{\text{тр}} = Nf = fP$:

$$F' \leq fP.$$

Следовательно,

$$P \operatorname{tg} \alpha \leq fP,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 0,05.$$

Для малых углов $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. Следовательно, $\alpha \leq 0,05$ и наибольший угол наклона

$$\alpha_{\text{max}} = 0,05 \text{ рад} = 0,05 \cdot 57,3^\circ \approx 2,9^\circ.$$

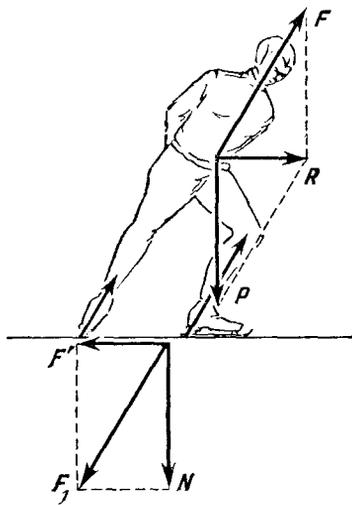


Рис. 66.

При этом равнодействующая всех сил, приложенных к конькобежцу,

$$R = P \operatorname{tg} \alpha = fP.$$

Запишем уравнение движения конькобежца:

$$R = ma_{\text{ц.с}} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{или} \quad fP = \frac{mv^2}{r}.$$

Из этого равенства находим радиус закругления

$$r = \frac{mv^2}{fP} = \frac{mv^2}{fmg} = \frac{v^2}{fg}, \quad r = \frac{10^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{9,8 \text{ м}/\text{с}^2 \cdot 0,05} \approx \underline{204 \text{ м}}.$$

Это — наименьший допустимый радиус закругления конькобежца.

Задача 44*. Мотоциклист движется по цилиндрической стене с радиусом цилиндра $r = 5$ м. Коэффициент трения между стеной и колесами мотоцикла $f = 0,3$. Найти наименьшую допустимую скорость движения мотоциклиста, при которой он не соскользнет вниз по стене.

Решение. Вертикальная составляющая силы F , действующей на мотоциклиста со стороны стены (рис. 57) равна силе тяжести; горизонтальная составляющая этой силы сообщает мотоциклисту центростремительное ускорение. Это означает, что горизонтальная составляющая N силы $-F$, действующей со стороны мотоциклиста на стену, равна по абсолютной величине

$$N = m \frac{v^2}{r},$$

где v — скорость мотоциклиста, m — масса мотоцикла с мотоциклистом.

Вертикальная составляющая силы $-F$ равна по абсолютной величине силе тяжести $F_1 = P$.

С другой стороны модуль силы F_1 не может превысить наибольшей силы трения:

$$\max F_{\text{тр}} = fN = fR = f \frac{mv^2}{r}.$$

Следовательно, чтобы мотоциклист не соскальзывал, должно выполняться условие

$$F_1 \leq F_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad mg \leq f \frac{mv^2}{r}.$$

Отсюда $v^2 \geq \frac{gr}{fk}$.

Минимальная скорость движения мотоциклиста

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{f}}, \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{9,8 \text{ м}/\text{с}^2 \cdot 10 \text{ м}}{2 \cdot 0,3}} = 12,8 \text{ м}/\text{с} = \underline{46 \text{ км}/\text{ч}}.$$

Задача 45. Открытый сосуд, наполненный водой до высоты $h = 10$ см, вращают с постоянной угловой скоростью в вертикальной плоскости на веревке такой длины, что расстояние от конца веревки до дна сосуда $l = 80$ см. С какой наименьшей скоростью ω_{\min} надо вращать этот сосуд, чтобы вода не выливалась? Во сколько раз сила натяжения веревки превысит вес сосуда с водой, когда сосуд проходит через нижнюю точку?

Решение. Вода не будет выливаться из сосуда, если центростремительное ускорение любой частицы воды с массой Δm в верхней части сосуда

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

(ω — угловая скорость вращения сосуда, r — радиус окружности, по которой движется частица воды) больше или равно ускорению силы тяжести g

$$\omega^2 r \geq g. \quad (1)$$

Веревка в этом случае будет натянута и ускорение a всему сосуду будет сообщаться равнодействующей силы тяжести и силы натяжения веревки, а частице воды — равнодействующей силы тяжести и сил, действующих на эту частицу воды со стороны окружающих частиц.

Из неравенства (1) находим

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r}}, \text{ отсюда } \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Из этого выражения видно, что скорость вращения должна быть тем больше, чем меньше r — расстояние частицы воды от оси вращения. Это расстояние наименьшее для частицы воды на поверхности, где $r = l - h$. Тогда

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l-h}}, \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{9,8 \text{ м/с}^2}{(0,80-0,10) \text{ м}}} = \underline{3,7 \text{ с}^{-1}}.$$

В нижней точке траектории сосуда центростремительное ускорение $a_1 = \omega^2 r_1$ сообщается сосуду равнодействующей R силы тяжести $P = Mg$ и силы T натяжения нити (M — масса сосуда с водой, r_1 — расстояние от оси вращения сосуда до его центра тяжести: $r_1 = l - \frac{h}{2}$). Сила тяжести направлена вниз, а сила T — вверх. По второму закону Ньютона $T - P = M\omega^2 r$. Следовательно,

$$T = Mg + M\omega^2 r_1 = Mg \left(1 + \frac{\omega^2 r_1}{g} \right).$$

Это означает, что

$$k = \frac{T}{Mg} = 1 + \frac{\omega^2 r_1}{g}.$$

Так как $\omega^2 = \frac{g}{l-h}$ и $r_1 = l - \frac{h}{2}$, то

$$k = 1 + \frac{g \left(l - \frac{h}{2} \right)}{(l-h)g} = 1 + \frac{l - \frac{h}{2}}{l-h}, \quad k = 1 + \frac{75 \text{ см}}{60 \text{ см}} = \underline{2,25}.$$

Задача 46*. Тело скользит вниз по наклонному скату, переходящему в вертикальную петлю радиусом $r = 40$ см (рис. 67). Какова должна быть высота ската h , чтобы тело не оторвалось в верхней точке петли? Трением пренебречь.

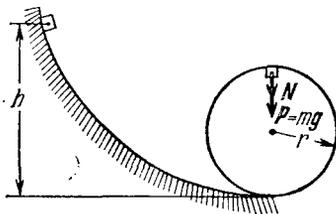


Рис. 67.

Решение. В верхней точке петли на тело действуют две силы — сила тяжести $P = mg$ и сила N реакции петли. Равнодействующая этих сил $R = N + P = N + mg$ сообщает телу центростремительное ускорение

$$a_{ц.с} = \frac{v^2}{r}.$$

где v — скорость тела.

По второму закону Ньютона

$$N + mg = m \frac{v^2}{r}.$$

Тело не оторвется от петли, если $N \geq 0$. В предельном случае $N = 0$, и тогда

$$mg = m \frac{v^2}{r} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{gr}.$$

На основании закона сохранения механической энергии

$$mg(h - 2r) = \frac{mv^2}{2}.$$

Подставляя сюда $v = \sqrt{gr}$, получим

$$mg(h - 2r) = \frac{mgr}{2}.$$

Отсюда

$$h - 2r = \frac{r}{2}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{r}{2} + 2r = 2,5r,$$

$$h = \underline{1 \text{ м.}}$$

Задача 47*. Решить предыдущую задачу, если по скату скатывается без проскальзывания цилиндрический каток, представляющий собой массивный обод с тонкими спицами, массой которых можно пренебречь.

Решение. Как показано в решении задачи 41, кинетическая энергия такого катка

$$W_k = mv^2.$$

Тогда

$$mg(h - 2r) = mgr,$$

откуда находим

$$h = 3r, \quad h = \underline{1,20 \text{ м.}}$$

Задача 48*. Определить высоту ската, о котором говорится в задаче 46, если скользящее тело отрывается от петли при $\alpha = 60^\circ$ (рис. 68).

Решение. На тело в точке А (рис. 68) действуют две силы: сила тяжести mg и сила N реакции петли. Центробежное ускорение сообщает телу равнодействующая силы N и радиальной составляющей силы тяжести. Поэтому, согласно второму закону Ньютона,

$$mg \cos \alpha + N = m \frac{v^2}{r}$$

Рис. 68.

(m — масса тела).

Тело оторвется, когда $N = 0$, т. е. когда

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \alpha,$$

откуда

$$v^2 = gr \cos \alpha.$$

Из закона сохранения механической энергии следует, что

$$mg(h-2r) = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgr \cos \alpha}{2}.$$

Отсюда

$$h = 2r + \frac{r \cos 60^\circ}{2} = 2,25r, \quad h = \underline{90 \text{ см.}}$$

Задача 49*. В потолок лифта вмонтирована вертикальная ось, к которой на нити длиной $l = 40$ см прикреплен шарик массой $m = 800$ г. Ось вращается со скоростью $n = 90$ об/мин. Найти натяжение T нити и угол α наклона нити к вертикали, когда лифт движется вверх с ускорением $a = 3,0$ м/с². Весом нити пренебречь.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити T (рис. 69). Равнодействующая R этих сил, равная их векторной сумме, сообщает шару как центростремительное ускорение (горизонтальное) $a_{ц.с} = \omega^2 r$, так и вертикальное ускорение a .

Найдя проекции силы тяжести и силы T на вертикальное и горизонтальное направления, запишем уравнения движения шарика (m — масса шарика):

$$T \cos \alpha - mg = ma$$

— по вертикали,

$$T \sin \alpha = m\omega^2 r$$

— по окружности в горизонтальной плоскости.

Из первого уравнения найдем искомое натяжение нити

$$T = \frac{m(g+a)}{\cos \alpha}$$

и подставим эту величину во второе уравнение:

$$\frac{m(g+a)}{\cos \alpha} \sin \alpha = m\omega^2 r, \quad \text{или} \quad (g+a) \operatorname{tg} \alpha = \omega^2 r;$$

но $r = l \sin \alpha$, а $\omega = 2\pi n$. Поэтому $(g+a) \operatorname{tg} \alpha = 4\pi^2 n^2 l \sin \alpha$. Отсюда находим

$$\cos \alpha = \frac{g+a}{4\pi^2 n^2 l}, \quad \cos \alpha = \frac{(9,8+3) \text{ м/с}^2}{4 \cdot (3,14)^2 \cdot 1,5^2 (1/\text{с}^2) \cdot 0,4 \text{ м}} \approx 0,36,$$

$$\alpha = \underline{\arccos 0,36}, \quad T = \frac{0,8 \text{ кг} (9,8+3) \text{ м/с}^2}{0,36} \approx \underline{28,4 \text{ Н.}}$$

Задача 50*. Найти величину скорости v , с которой нужно вывести спутник Земли на круговую орбиту на высоту $h = 1600$ км над поверхностью Земли. Радиус Земли принять $R_3 = 6400$ км, ускорение силы тяжести у поверхности Земли $g = 9,8$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. На высоте H над поверхностью Земли на спутник действует сила тяготения

$$F = \gamma = \frac{Mm}{(R_3 + H)^2}$$

(M — масса Земли, m — масса спутника).

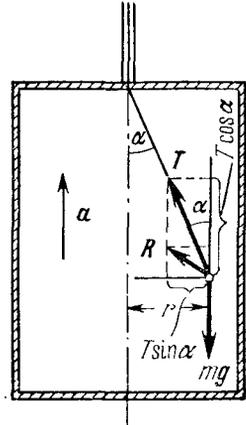


Рис. 69.

Так как спутник вращается по круговой орбите радиуса $R_3 + H$, то сила F сообщает спутнику центростремительное ускорение

$$a_{ц.с} = \frac{v^2}{R_3 + H}.$$

По второму закону Ньютона

$$\gamma \frac{Mm}{(R_3 + H)^2} = m \frac{v^2}{R_3 + H},$$

откуда

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3 + H}}.$$

У поверхности Земли сила тяжести $F_T = \gamma \frac{Mm}{R_3^2}$ сообщает телу массы m ускорение g . Поэтому $\gamma \frac{Mm}{R_3^2} = mg$, откуда $\gamma M = gR_3^2$. Учитывая это, получим

$$v = \sqrt{\frac{gR_3^2}{R_3 + H}} = R_3 \sqrt{\frac{g}{R_3 + H}},$$

$$v = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} \sqrt{\frac{9,8 \text{ м/с}^2}{8,0 \cdot 10^6 \text{ м}}} \approx \underline{\underline{7,1 \cdot 10^3 \text{ м/с (7,1 км/с)}}}.$$

СТАТИКА

§ 30. Равновесие тела при отсутствии вращения

Равновесие тела—это сохранение состояния его движения с течением времени. Всякое тело может двигаться поступательно и одновременно вращаться вокруг некоторой оси.

Рассмотрим вначале случай, когда тело по каким-либо причинам не может вращаться*). В этом случае, для того чтобы тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы величина *равнодействующей R всех сил, действующих на тело, была равна нулю.*

Если равнодействующая равна нулю, то равны нулю и ее проекции на любую ось, т. е. равны нулю суммы проекций всех сил на любую ось.

Для того чтобы тело при отсутствии вращения находилось в равновесии, необходимо чтобы сумма проекций всех сил на любую ось была равна нулю.

*) Например, движение тела по наклонной плоскости.

Это условие дает в общем случае три независимых уравнения равновесия тела для трех взаимно перпендикулярных осей координат:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0,$$

где F_x , F_y и F_z — проекции силы F на оси координат Ox , Oy и Oz .

Если все силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости (например, плоскости Oxy), то можно записать два независимых уравнения равновесия

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

Если $R = 0$ и тело находится в состоянии равновесия, то это вовсе не означает, что тело покоится. Тело или покоится, или движется прямолинейно и равномерно.

Примеры решения задач

Задача 51. Груз в форме куба массой 12 кг зажат между двумя колодками. Коэффициент трения между колодками и грузом $f = 0,3$. При каких наименьших силах F_1 , прижимающих колодки к грузу, груз не будет скользить вниз?

Если каждая из «прижимающих» сил равна 50 Н, то какая требуется дополнительная вертикальная сила F_y , чтобы удержать груз в покое?

Какая требуется сила F_T , чтобы груз тянуть равномерно вверх?

$m = 12 \text{ кг}$ } эти данные относятся ко всем трем задачам
 $f = 0,3$ }
 $F_1 = 50 \text{ Н}$ это относится к двум последним задачам

Найти F_1 , $F_{\text{доп}}$ и F_T

Так как кубик находится в равновесии, то сумма действующих на него сил равна нулю. Это означает, что

$$2F_{\text{тр}} = P$$

($P = mg$ — сила тяжести).

Но $F_{\text{тр}} \leq fF_1$, следовательно,

$$2fF_1 \geq P.$$

Отсюда находим

$$F_1 \geq \frac{P}{2f}, \quad F_1 \geq \frac{120 \text{ Н}}{2 \cdot 0,3} = 200 \text{ Н}.$$

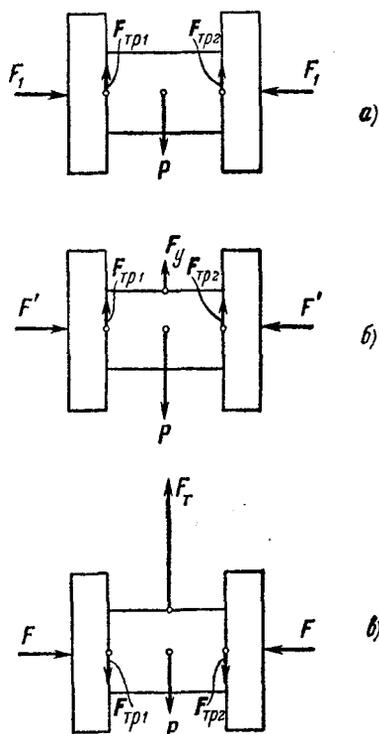


Рис. 70.

Решение

Здесь имеем в сущности три задачи.

Задача 1. Со стороны колодок на кубик (рис. 70, а) действуют одинаковые силы трения

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}} \leq fF_1.$$

Задача 2. Здесь должно быть учтено, что при отсутствии сил трения тело двигалось бы вниз. Следовательно, силы трения направлены вверх (рис. 70, б). Они помогают удержать груз. Запишем условие равновесия груза:

$$F_{\text{доп}} + 2F_{\text{тр}} = P,$$

откуда

$$F_{\text{доп}} = P - 2F_{\text{тр}} = P - 2fF_x, \quad F_{\text{доп}} = 120 \text{ Н} - 2 \cdot 0,3 \cdot 50 \text{ Н} = \underline{90 \text{ Н}}.$$

Задача 3. Из рис. 70, в следует, что

$$F_{\text{т}} = P + 2F_{\text{тр}} = P + 2fF_x, \quad F_{\text{т}} = 120 \text{ Н} + 2 \cdot 0,3 \cdot 50 \text{ Н} = \underline{150 \text{ Н}}.$$

Задача 52. Какой наибольшей высоты H можно выложить массивную кирпичную колонну постоянного по высоте поперечного сечения, чтобы под действием только сил тяжести деформация башни оставалась в пределах упругости. Каково при этом будет наибольшее относительное сжатие кирпичной кладки. Принять модуль Юнга кирпича $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, плотность кирпича $\rho = 1,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Напряжение на пределе упругости $\sigma_{\text{упр}} = 3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

Решение. Наибольшее напряжение и наибольшее относительное сжатие будет иметь место в сечении у основания колонны: $\sigma = Mg/s$, где M — масса колонны $M = \rho sH$. Следовательно:

$$\sigma = \frac{\rho g s H}{s} = \rho g H, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{\sigma}{\rho g}.$$

Наибольшая высота колонны

$$H = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{\rho g}, \quad H = \frac{3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}{1,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} \approx \underline{160 \text{ м}}.$$

Наибольшее относительное сжатие

$$\varepsilon = \frac{[\sigma_{\text{упр}}]}{E}, \quad \varepsilon = \frac{3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}{3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2} = \underline{0,001}.$$

Задача 53. Самолет тянет на буксирах два планера с постоянной скоростью. Полет самолета и планеров происходит в одной горизонтальной плоскости, причем углы между линией полета и буксирными тросами одинаковы и равны 30° . Сила натяжения каждого буксирного троса составляет 500 Н. Сопротивление воздуха движению самолета при данной скорости полета 400 Н. Найти силу тяги двигателя.

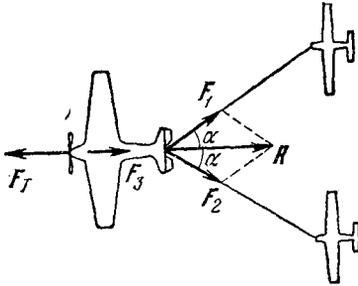


Рис. 71.

R и F_3 как силы, направленные по одной прямой, и находим общую силу сопротивления:

$$F_{\text{сопр}} = R + F_3 = 2F \cos \alpha + F_3 = 2 \cdot 500 \text{ Н} \cdot \cos 30^\circ + 400 \text{ Н} \approx 1250 \text{ Н}.$$

Сила тяги равна по абсолютной величине общей силе сопротивления

$$F_{\text{т}} = \underline{1250 \text{ Н}}.$$

Задача 54. К кронштейну BAC подвешен груз массой $m = 10 \text{ кг}$ (рис. 72). Найти усилия в стержнях кронштейна и натяжение подвески, если $\angle \alpha = 150^\circ$.

Решение. Так как груз находится в равновесии, то сумма действующих на него сил — силы тяжести $P = mg$ и силы T , действующей со стороны нити, —

должна быть равна нулю:

$$P + T = 0.$$

Отсюда следует, что

$$T = -P \quad \text{и} \quad T = mg.$$

Сила натяжения подвески равна

$$T = 10 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с} = 98 \text{ Н}.$$

Теперь найдем силы F_1 и F_2 . Так как узел, в котором закреплена подвеска, находится в равновесии, то сумма приложенных к ней сил должна быть равна нулю. Это означает, что равнодействующая сил F_1 и F_2 , действующих со стороны стержней, должна по абсолютной величине равняться $T = mg$. Поэтому

$$F_1 = \frac{T}{\cos(\alpha - 90^\circ)} = \frac{mg}{\cos 60^\circ},$$

$$F_2 = \frac{T}{\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)} = \frac{mg}{\operatorname{tg} 60^\circ} = mg \operatorname{ctg} 60^\circ,$$

$$F_1 = \frac{10 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{0,5} = 192 \text{ Н},$$

$$F_2 = 10 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 57 \text{ Н}.$$

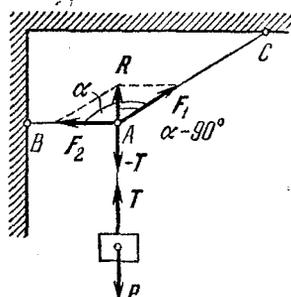


Рис. 72.

Задача 55. Груз массой $m = 5$ кг подвешен к кронштейну из двух стержней длиной $AC = 0,5$ м и $BC = 0,4$ м (рис. 73а). Расстояние $AB = 0,2$ м. Определить усилия в стержнях кронштейна.

Решение. Эта задача решается аналогично предыдущей. Так как нить с грузом находится в равновесии, то равнодействующая R сил F_1 и F_2 ,

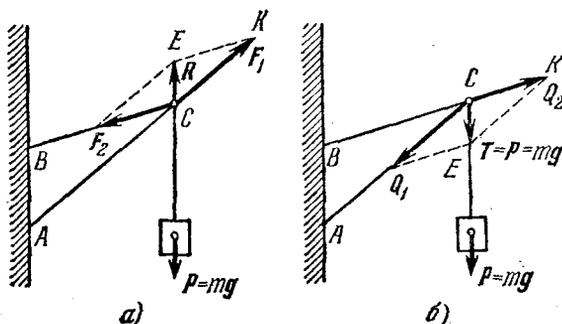


Рис. 73.

действующих со стороны стержней на нить в точке C , должна быть такой, чтобы $R + P = 0$. Отсюда $R = -P = -mg$ и $R = mg = 49$ Н.

Из подобия треугольников ABC и CEK следует, что

$$\frac{CK}{AC} = \frac{EK}{BC} = \frac{EC}{AB}, \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{AC} = \frac{F_2}{BC} = \frac{R}{AB}.$$

Отсюда

$$F_1 = R \cdot \frac{AC}{AB}; \quad F_1 = 49 \text{ Н} \cdot \frac{0,4 \text{ м}}{0,2 \text{ м}} = \underline{98 \text{ Н}}.$$

$$F_2 = R \cdot \frac{BC}{AB}; \quad F_2 = 49 \text{ Н} \cdot \frac{0,5 \text{ м}}{0,2 \text{ м}} = \underline{122,5 \text{ Н}}.$$

Стержень AC сжат, а стержень BC растянут.

Эту задачу можно решить и иначе (рис. 73, б), раскладывая силу $T=P$, действующую на стержни в точке C , на две составляющие Q_1 и Q_2 , параллельные стержням. Составляющие Q_1 и Q_2 силы T —это и есть силы, действующие на соответствующие стержни в точке C (см. рис. 73, б).

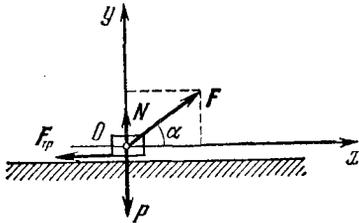


Рис. 74.

Задача 56. Груз массой $m=100$ кг перемещают равномерно по горизонтальной плоскости, прилагая силу под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Определить величину этой силы, если коэффициент трения между грузом и плоскостью $f=0,3$.

Решение. На тело действуют следующие силы: сила тяжести $P=mg$, сила F , приложенная к телу под $\angle \alpha$ к горизонту, нормальная реакция плоскости N и сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая вдоль плоскости. Так

как груз движется равномерно, т. е. находится в равновесии, то сумма этих сил (их равнодействующая) должна быть равна нулю. Должны быть равны нулю суммы проекций всех сил на любые оси, в частности на оси координат Ox и Oy (рис. 74). Поэтому $F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0$ или

$$F \cos \alpha - fN = 0 \quad (1)$$

и

$$N + F \sin \alpha - P = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что $N = P - F \sin \alpha$. Подставим эту величину N в уравнение (1):

$$F \cos \alpha - f(P - F \sin \alpha) = 0,$$

откуда находим

$$F = \frac{fP}{\cos \alpha + f \sin \alpha}, \quad F = \frac{0,3 \cdot 100 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,3 \cdot \frac{1}{2}} \approx \underline{294 \text{ Н}}.$$

Задача 57. Какой должна быть сила F , удерживающая кубик массы m на гладкой наклонной плоскости, если угол наклона плоскости к горизонту равен α и сила F параллельна наклонной плоскости? Трением кубика о плоскость пренебречь. Найти силу N реакции плоскости.

Решение. Так как кубик находится в равновесии, то сумма проекций на оси Ox и Oy всех сил, действующих на кубик, должны быть равны нулю:

$$F - P \sin \alpha = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0;$$

отсюда

$$F = P \sin \alpha = \underline{mg \sin \alpha},$$

$$N = P \cos \alpha = \underline{mg \cos \alpha}.$$

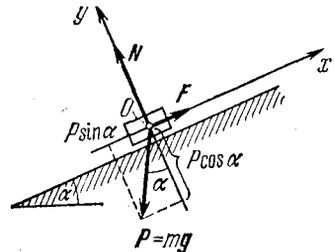


Рис. 75.

Задача 58. Решить предыдущую задачу для случая когда сила горизонтальна (рис. 76).

Решение. Так как кубик находится в равновесии, то

$$F \cos \alpha - P \sin \alpha = 0 \quad \text{и} \quad N - P \cos \alpha - F \sin \alpha = 0.$$

Отсюда $F = P \operatorname{tg} \alpha = \underline{mg \operatorname{tg} \alpha}$, $N = P \cos \alpha + F \sin \alpha = \underline{mg (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha)}$.

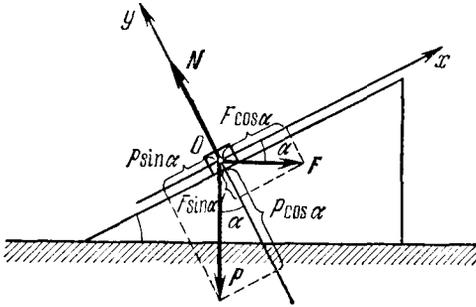


Рис. 76.

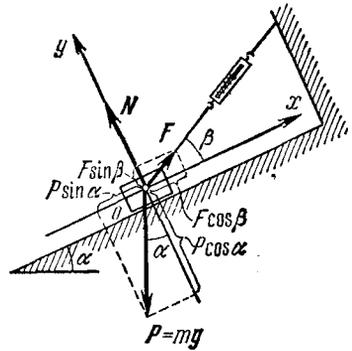


Рис. 77.

Задача 59*. Тело массой $m = 20$ кг удерживается на наклонной плоскости веревкой, которая привязана к динамометру, укрепленному над плоскостью. Показание динамометра 230 Н. Плоскость наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$. Найти угол β между направлением веревки и горизонтом, и силу N реакции наклонной плоскости. Трением пренебречь.

Решение. Так как тело находится в равновесии, то суммы проекций действующих на него сил P , F и N (рис. 77) на оси Oy и Ox должны быть равны нулю:

$$P \sin \alpha - F \cos \beta = 0, \quad (1)$$

$$P \cos \alpha - N - F \sin \beta = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим

$$\cos \beta = \frac{P}{F} \sin \alpha = \frac{mg}{F} \sin \alpha, \quad \cos \beta = \frac{20 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{230 \text{ Н}} \cdot 0,5 \approx 0,86,$$

откуда

$$\beta \approx \underline{30^\circ}.$$

Из уравнения (2)

$$N = mg \cos \alpha - F \sin \beta, \quad N \approx 20 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,86 - 230 \text{ Н} \cdot \frac{1}{2} \approx \underline{57 \text{ Н}}.$$

Задача 60*. Решить задачу 57 с учетом трения. Коэффициент трения кубика о плоскость равен f . Кроме того, найти силу тяги, которую надо приложить к кубику для равномерного его поднятия.

Решение. Сила трения направлена вверх по наклонной плоскости в сторону, противоположную той, куда тело двигалось бы при отсутствии трения (рис. 78). Так как кубик находится в равновесии, то суммы проекций сил, действующих на него, на оси Ox и Oy равны нулю:

$$F + F_{\text{тр}} - P \sin \alpha = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$N = P \cos \alpha = \underline{mg \cos \alpha}$$

и

$$F = mg \sin \alpha - F_{\text{тр.}}$$

Подставляя в последнее равенство $F_{\text{тр.}} = fN = fmg \cos \alpha$, получим

$$F = \underline{mg (\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Если тело тянут вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью,

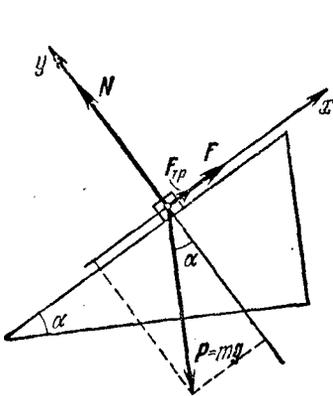


Рис. 78.

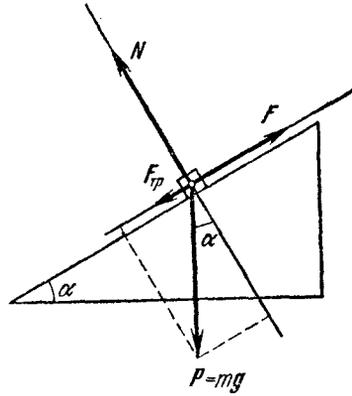


Рис. 79.

то сила трения направлена вдоль наклонной плоскости вниз (рис. 79). При равновесии (равномерном движении)

$$F_{\text{тяги}} - F_{\text{тр.}} - P \sin \alpha = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0.$$

Отсюда, учитывая что $F_{\text{тр.}} = fN$, найдем

$$F_{\text{тяги}} = P \sin \alpha + fP \cos \alpha, \quad F_{\text{тяги}} = \underline{mg (\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

§ 31. Момент силы

Моментом силы относительно какой-либо точки на плоскости называется взятое со знаком (+) или (-) произ-

$M_1 = F_1 \cdot h_1$ ведение модуля силы на ее плечо отно-
 $M_2 = -F_2 \cdot h_2$ сительно этой точки

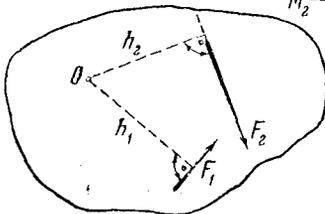


Рис. 80.

$$M_0 = \pm Fl.$$

Плечо силы относительно какой-либо точки — это расстояние линии действия силы от этой точки.

Понятие момента силы связано с вращательным движением тела. На рис. 80 показана пластинка, закрепленная на оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости пластинки. На пластинку в ее плоскости действуют силы F_1 и F_2 . Влияние каждой из этих сил на изменение вращательного движения такой пластинки тем больше, чем больше сила и чем больше ее расстояние до закрепленной точки — плечо, т. е. чем больше

произведение силы на плечо — момент силы. Следовательно, момент силы является мерой вращательного действия силы.

Моментам сил, расположенных в одной плоскости, приписывается алгебраический знак. Условимся считать моменты, вращающие тело против часовой стрелки, положительными, по часовой стрелке — отрицательными (это совпадает с принятым в математике правилом отсчета углов).

§ 32. Сложение параллельных сил. Пара сил

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, параллельна им, направлена в ту же сторону, равна их сумме и проходит через точку, которая делит прямую, соединяющую точки приложения составляющих сил, в отношении, обратном отношению величин этих сил.

На рис. 81

$$F_1 \parallel R \parallel F_2, \quad (1)$$

$$R = F_1 + F_2, \quad (2)$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (3)$$

или

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \quad (4)$$

При этом на основании равенства (2) ускорение, сообщаемое телу силой R , равно сумме ускорений, сообщаемых силами F_1 и F_2 :

$$a = a_1 + a_2.$$

Вращающее действие силы R эквивалентно вращающему действию сил F_1 и F_2 . В частности, вращающий момент силы R относительно ее точки приложения равен нулю (так как плечо равно нулю); вращающие моменты сил F_1 и F_2 вокруг этой точки равны по величине (на основании равенства (4)) и сообщают телу вращение в противоположные стороны — их действия взаимно компенсируются.

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны (их иногда называют антипараллельными силами), параллельна им, направлена в сторону большей силы и равна разности обеих сил; она проходит через точку на продолжении прямой, соединяющей точки приложения слагаемых сил, расстоя-

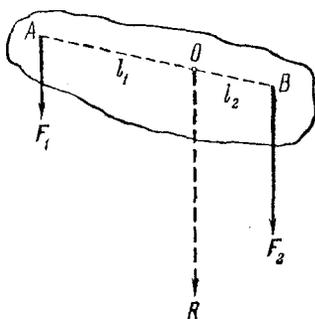


Рис. 81.

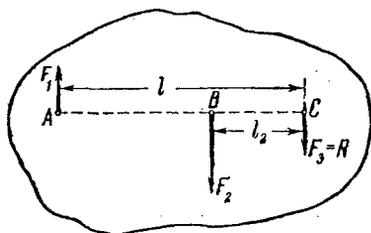


Рис. 82.

ния которой до этих точек обратно пропорциональны модулям сил.

На рис. 82:

$$F_1 \parallel R \parallel F_2, \quad R = F_1 - F_2,$$

$$\frac{l}{l_2} = \frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{F_1}$$

или

$$F_1 r_1 = F_2 r_2.$$

Если две антипараллельные силы равны по величине, то их равнодействующая равна нулю. Две равные по модулю антипараллельные силы носят название пары сил (рис. 83). Действие пары сил на твердое тело «вращательное».

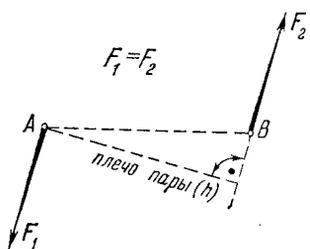


Рис. 83.

Величина момента пары равна произведению модуля одной из сил на расстояние между линиями действия сил пары, которое называется плечом пары.

Сложение нескольких параллельных сил, точки приложения которых произвольно расположены в пространстве, производится последовательно по две силы — в любом порядке. Сложение нескольких параллельных сил, расположенных в одной плоскости, можно произвести проще на основании следующих соображений.

Поскольку равнодействующая сила заменяет собой действие составляющих сил, момент равнодействующей относительно любой

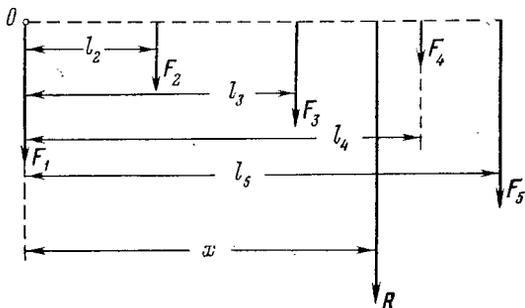


Рис. 84.

оси (или точки) вращения тела равняется сумме моментов составляющих относительно той же оси (или точки):

$$M_R = \sum M_{F_i}$$

т. е. (рис. 84)

$$Rx = F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + \dots$$

Отсюда легко находится плечо равнодействующей силы, которым и определяется ее точка приложения:

$$x = \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + \dots}{R}.$$

(В общем случае моменты сил берутся с соответствующими знаками — см. § 31.)

Разложение силы на две параллельные силы производится на основании тех же правил, что и сложение. Задача имеет однозначное решение, если, кроме данной силы, задаются еще точки приложения обеих составляющих сил либо величина одной из составляющих и точка ее приложения.

§ 33. Равновесие тела, имеющего ось вращения (правило моментов)

Если тело имеет ось вращения, то оно будет находиться в равновесии, когда линия действия равнодействующей R всех сил, приложенных к телу, будет проходить через ось вращения. В этом случае момент силы R относительно оси вращения будет равен нулю, так как нулю равно плечо этой силы.

На рис. 85 показано тело, ось вращения которого проходит через точку O (нормально к плоскости чертежа.) К телу приложены две силы F_1 и F_2 , причем их моменты относительно оси равны по величине и направлены противоположно, т. е.

$$F_1 h_1 = -F_2 h_2, \quad F_1 h_1 = F_2 h_2. \quad (1)$$

Докажем, что в этом случае равнодействующая сил F_1 и F_2 пройдет через точку O . Для этого из точки O проведем прямые Oa и Ob , параллельные векторам сил F_1 и F_2 до пересечения с линиями действия этих сил. В полученном параллелограмме площади треугольников Oac и Obc равны, т. е.

$$ac \cdot h_1 = bc \cdot h_2. \quad (2)$$

Из сопоставления (1) и (2) видно, что отрезки ac и bc пропорциональны силам F_1 и F_2 . Перенесем векторы сил в точку их пересечения c и на этих векторах, отложенных из точки c , в том же масштабе построим параллелограмм. Из чертежа видно, что стороны этого параллелограмма равны и параллельны сторонам параллелограмма $Oabc$. Следовательно диагональный вектор R является продолжением диагонали Oc , т. е. проходит через ось вращения (тело находится в равновесии).

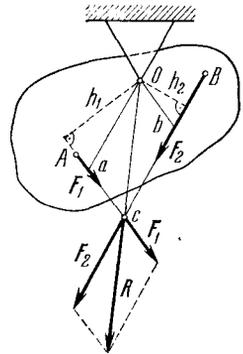


Рис. 85.

На основании доказанного можно сформулировать правило, которое называется **правилом моментов**:

Тело, имеющее ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело относительно оси вращения равна нулю.

Если алгебраическая сумма моментов сил, действующих на тело, имеющее ось вращения, равна нулю, то это не означает, что тело обязательно покоится. Тело либо покоится, либо равномерно вращается вокруг оси.

Рассмотрим условия равновесия рычагов. На рис. 86 показано два типа рычагов: слева — рычаг с осью вращения (точкой

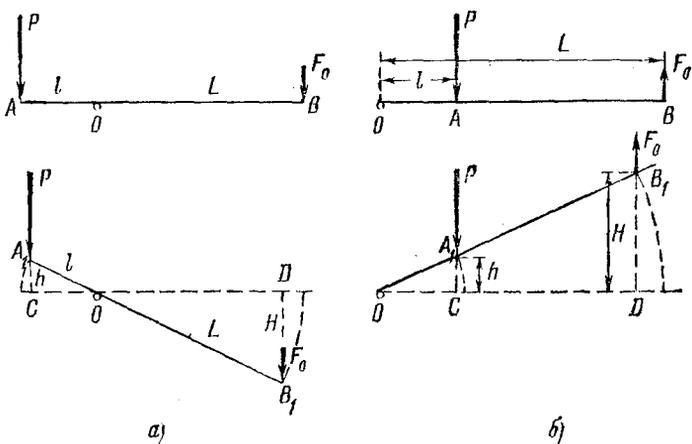


Рис. 86.

опоры) между грузом P и силой F_0 (такой рычаг обычно называют рычагом I рода); справа показан рычаг с осью вращения на конце рычага (обычно называется рычагом II рода).

При отсутствии трения для удержания рычага с грузом в равновесии необходимо, чтобы величина момента, вращающего рычаг по часовой стрелке, — в данном случае момента силы F_0 , — относительно оси вращения рычага равнялась величине момента Pl силы P относительно той же оси, вращающего рычаг в противоположном направлении:

$$F_0 L = Pl,$$

откуда находим

$$\frac{F_0}{P} = \frac{l}{L}. \quad (1)$$

Для равновесия рычага при отсутствии трения необходимо, чтобы модули сил, приложенных к концам рычага, были обратно пропорциональны расстояниям сил до оси вращения рычага.

Но из подобия треугольников $\triangle COA_1$ и $\triangle DOB_1$

$$\frac{l}{L} = \frac{h}{H},$$

следовательно, учитывая (1)

$$\frac{F_0}{P} = \frac{h}{H}.$$

Отсюда находим, что при отсутствии трения

$$F_0 = P \frac{h}{H}.$$

§ 34. Равновесие тела в общем случае. Условия равновесия

Если линии действия всех сил, приложенных к телу, пересекаются в одной точке, то для равновесия такого тела необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма всех этих сил равнялась нулю.

В самом деле, в этом случае точка пересечения прямых, по которым действуют силы, приложенные к телу, является точкой приложения равнодействующей всех этих сил, которая по условию равна нулю и не сообщает телу ускорения.

Если линии действия всех сил, приложенных к телу, не пересекаются в одной точке, то приведенное условие необходимо, но недостаточно, так как действие приложенных сил может оказаться эквивалентным действию некоторой пары. Момент этой пары сообщает телу вращательное движение, при котором отдельные части тела имеют различные центростремительные ускорения, в то же время геометрическая сумма сил пары равна нулю. На основании этого приходим к такому наиболее общему условию равновесия.

Для равновесия тела, к которому приложены силы, линии действия которых, хотя и расположены в одной плоскости, но не пересекаются в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма всех сил равнялась нулю и чтобы равнялась нулю алгебраическая сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через любую точку плоскости действия сил перпендикулярно к этой плоскости.

Таким образом, для равновесия тела необходимо, чтобы

$$R = 0 \quad \text{и} \quad \sum M = 0.$$

Если все силы лежат в одной плоскости (плоскость xOy), то для проекций всех сил F_1, F_2, \dots , действующих на тело, можно условия равновесия записать в виде трех скалярных уравнений:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M = 0.$$

Примеры решения задач

Задача 61. Однородная балка массой $m=50$ кг лежит на двух опорах (рис. 87). На расстоянии $1/4$ длины балки от левой опоры лежит груз массой $M=100$ кг. Найти силы давления балки на опоры.

$m=50$ кг
 $M=100$ кг
 Найти F_A и F_B

Решение

Обозначим длину балки l . На расстоянии $\frac{1}{4}l$ от опоры A на балку действует

сила Q , равная весу груза: $Q=Mg=100$ кг \cdot $9,8$ м/с² = 980 Н. Сила тяжести балки приложена на середине пролета и равна: $P=mg=50$ кг \cdot $9,8$ м/с² = 490 Н. Кроме этих сил, на балку действуют еще две силы реакции опор N_A и N_B . Так как балка находится в равновесии, то сумма действующих на нее сил равна нулю:

$$N_A + N_B + Q + P = 0.$$

Следовательно,

$$N_A + N_B - Q - P = 0. \quad (1)$$

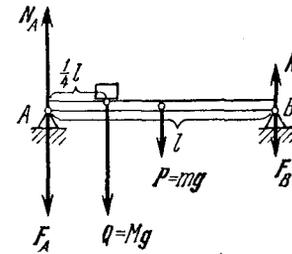


Рис. 87.

Кроме того, равна нулю сумма моментов этих сил относительно любой оси, в частности относительно горизонтальной оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости чертежа

$$Q \cdot \frac{1}{4}l + P \cdot \frac{1}{2}l - N_B \cdot l = 0. \quad (2)$$

Из этого уравнения найдем

$$N_B = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}Q, \quad N_B = \frac{1}{2} \cdot 490 \text{ Н} + \frac{1}{4} \cdot 980 \text{ Н} = 490 \text{ Н}.$$

Теперь найдем N_A из уравнения (1):

$$N_A = Q + P - N_B, \quad N_A = 980 \text{ Н} + 490 \text{ Н} - 490 \text{ Н} = 980 \text{ Н}.$$

На опоры со стороны балки по третьему закону Ньютона действуют силы $F_A = -N_A$ и $F_B = -N_B$. По величине

$$F_A = \underline{490 \text{ Н}},$$

$$F_B = \underline{980 \text{ Н}}.$$

Задача 62*. Балка заделана одним концом в стену, как показано на рис. 88. Масса свисающей части балки $M=100$ кг; ее длина $L=1,5$ м. На конце балки находится груз массой $m=50$ кг. Сила F_A давления балки на стену в точке A не должна превосходить 6000 Н. Найти наименьшее допустимое расстояние l между опорами и силу давления в точке B при этом. Показать, что найденное расстояние наименьшее. Массой заделанной части балки пренебречь. Опоры считать в точках A и B .

Решение. На балку с грузом действуют следующие силы: сила тяжести балки $P_2=Mg$, сила тяжести груза $P_1=mg$ и силы N_A и N_B реакции опор (рис. 89). Причем, по третьему закону Ньютона

$$N_A = -F_A \quad \text{и} \quad N_B = -F_B.$$

Так как балка находится в равновесии, то сумма моментов этих сил относительно любой оси равна нулю. В частности, равна нулю сумма моментов сил,

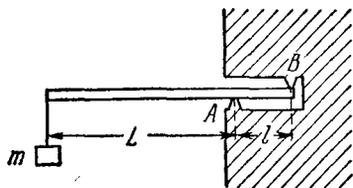


Рис. 88.

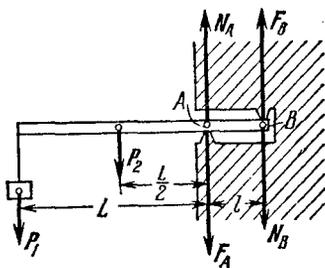


Рис. 89.

действующих на балку, относительно горизонтальной оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости чертежа

$$N_B \cdot l - P_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot P_1 \cdot L = 0. \quad (1)$$

Кроме того, равна нулю равнодействующая сил P_1 , P_2 , N_A и N_B : $P_1 + P_2 + N_A + N_B = 0$, т. е.

$$P_1 + P_2 - N_A + N_B = 0. \quad (2)$$

Из последнего уравнения найдем

$$\begin{aligned} N_B &= N_A - P_1 - P_2 = N_A - mg - Mg, \\ N_B &= 6000 \text{ Н} - 100 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 - 50 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 4030 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Следовательно, $F_B = 4030 \text{ Н}$.

Теперь из уравнения (1) найдем l :

$$l = L \frac{\frac{P_2}{2} + P_1}{N_B}, \quad l = 1,5 \text{ м} \cdot \frac{980}{6000} \approx 0,25 \text{ м}.$$

Задача 63*. Горизонтальная однородная стальная балка массой $M = 5 \text{ т}$ одним концом опирается шарнирно на массивную стену; другой ее конец поддерживается железным подкосом, прикрепленным к той же стене под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали (рис. 90). При какой площади сечения подкоса его относительное сжатие не превышает $0,001$, если модуль упругости материала подкоса

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2,$$

предел упругости

$$\sigma_{\text{упр}} = 300 \text{ МН/м}^2?$$

Решение. Сжимающее усилие $F_{\text{сж}}$ подкоса равно абсолютной величине силы F , с которой подкос действует на балку (по третьему закону Ньютона).

Так как балка находится в равновесии, то сумма моментов силы F относительно опорного шарнира A и действующей на балку силы тяжести P относительно того же шарнира равна нулю.

Так как балка однородная, то сила тяжести P приложена посередине балки. Поэтому $Fh - P \frac{l}{2} = 0$ или $F l \cos \alpha = P \frac{l}{2}$, откуда $F_{\text{сж}} = F = \frac{P}{2 \cos \alpha}$.

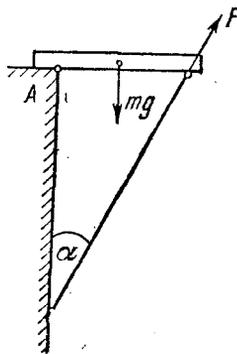


Рис. 90.

Найдем напряжение в подкосе:

$$\sigma = \frac{F_{\text{сж}}}{S},$$

откуда

$$S = \frac{F_{\text{сж}}}{\sigma} = \frac{P}{2\sigma \cos \alpha}.$$

Так как $\sigma = E\varepsilon$, то

$$S = \frac{P}{2E\varepsilon \cos \alpha} = \frac{mg}{2E\varepsilon \cos \alpha},$$

$$S = \frac{5000 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{2 \cdot (2 \cdot 10^{11}) \text{ Н/м}^2 \cdot 0,001 \cdot \frac{1}{2}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \underline{2,5 \text{ см}^2}.$$

Необходимо проверить применимость формул. Вычислим напряжение σ :

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2 < 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2,$$

σ меньше предела упругости. Следовательно, расчетные формулы применимы.

Задача 64. Вагонетка массой $M=0,4$ т имеет длину кузова $l=3$ м. Расстояние между осями колес $a=1,8$ м. Найти величину вертикальной силы F_1 , которую надо приложить к правому концу вагонетки (рис. 91), чтобы его приподнять. Какую вертикальную силу F_2 нужно приложить к правому концу вагонетки, чтобы приподнять ее левый конец?

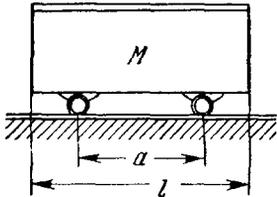


Рис. 91.

нулю суммы моментов сил

Решение. Здесь две задачи:

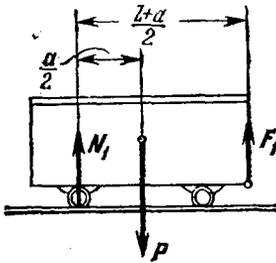
Задача 1. Для того чтобы приподнять правый конец, сила F_1 должна быть направлена вверх (рис. 92, а). Запишем условие равенства относительно оси левого конца:

$$P \frac{a}{2} - F_1 \frac{l+g}{2} = 0.$$

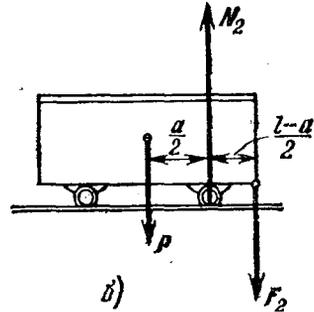
Отсюда

$$F = P \frac{a}{l+a} = Mg \frac{a}{l+a}, \quad F_1 = 400 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \frac{1,8 \text{ м}}{3,0 \text{ м} + 1,8 \text{ м}} = \underline{1440 \text{ Н}}.$$

Задача 2. Для того чтобы приподнять левый конец, сила F_2 должна быть направлена вниз (рис. 92, б). Запишем условие равенства нулю суммы



а)



б)

Рис. 92.

моментов сил относительно оси правого колеса:

$$F_2 \cdot \frac{l-a}{2} - P \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

Отсюда

$$F_2 = P \frac{a}{l-a} = Mg \frac{a}{l-a},$$

$$F_2 = 400 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot \frac{1,8 \text{ м}}{3,0 \text{ м} - 1,8 \text{ м}} = \underline{5880 \text{ Н}}.$$

Примечание. Решая задачу, мы записывали условие равновесия — условие равенства нулю моментов всех сил — так, чтобы в него не входили неизвестные силы реакции рельсов N_1 и N_2 . Это позволило не записывать еще одного условия равновесия — равенства нулю равнодействующей всех сил, действующих на вагонетку.

Задача 65*. Однородный стержень AB массой $m_1 = 40$ кг, расположенный под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, одним концом A опирается на подшипник с горизонтальной осью вращения, а другим привязан к нити, закрепленной в точке C , расположенной на одной вертикали с точкой A так, что $\triangle ABC$

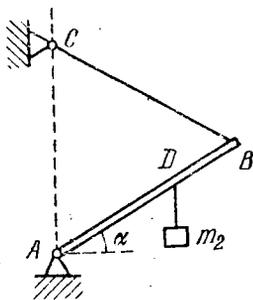


Рис. 93.

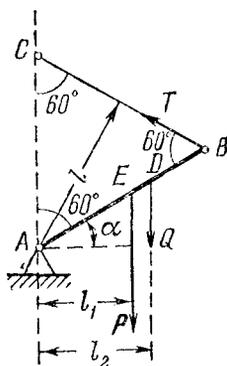


Рис. 94.

равносторонний (рис. 93). К стержню AB на расстоянии $1/3$ его длины от точки B подвешен груз массой $m_2 = 90$ кг. Найти натяжение нити T . Трением в подшипнике пренебречь.

Решение. Стержень AB — это рычаг с осью вращения A . Силы, действующие на стержень, показаны на рис. 94. $P = m_1 g$, $Q = m_2 g$, T — сила, действующая со стороны нити, F_A — сила реакции шарнира. Так как стержень находится в равновесии, сумма моментов сил относительно точки A должна быть равна нулю:

$$Pl_1 + Ql_2 - Tl = 0.$$

Обозначая $AB = BC = a$, получим:

$$l = a \sin 60^\circ, \quad l_1 = \frac{a}{2} \cos 30^\circ, \quad l_2 = \frac{2}{3} a \cos 30^\circ.$$

Поэтому

$$m_1 g \cdot \frac{a}{2} \sin 60^\circ + m_2 g \cdot \frac{2}{3} a \cos 30^\circ - Ta \sin 60^\circ = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{2} m_1 g + \frac{2}{3} m_2 g.$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 + \frac{2}{3} \cdot 90 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = \underline{784 \text{ Н}}.$$

Задача 66*. Груз массой $m=120$ кг удерживается в равновесии с помощью системы стержней $ABCD$ вертикальной нитью DE , прикрепленной к полу (рис. 95). Найти натяжение нити, если стержни имеют длину $AB=CD=3$ м; кроме того, $AK=0,6$ м, $CL=0,75$ м. Трением в подшипниках пренебречь.

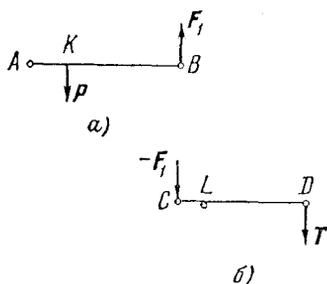
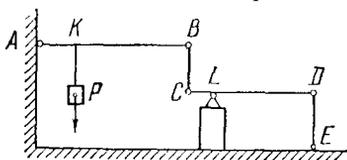


Рис. 95.

К стержню BC со стороны рычага AB приложена сила, равная по величине F_1 и противоположно направленная. Перенесем ее по линии действия в точку C и рассмотрим равновесие рычага (1 рода) CD (рис. 95, а). Составляем уравнение моментов относительно точки L :

$$F_1 \cdot CL - T \cdot DL = 0,$$

откуда

$$T = F_1 \frac{CL}{DL}, \quad T = 235,2 \text{ Н} \frac{0,75 \text{ м}}{2,25 \text{ м}} = \underline{78,4 \text{ Н}}.$$

Решение. Система стержней представляет собой два рычага AB и CD , соединенные между собой стержнем BC . AB — рычаг II рода с осью вращения, проходящей через точку A . Чтобы удержать груз в равновесии, в точке B стержня AB должна быть приложена сила F_1 , величину которой найдем из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A (рис. 95, а):

$$F_1 \cdot AB - mg \cdot AK = 0,$$

откуда

$$F_1 = mg \frac{AK}{AB},$$

$$F_1 = 120 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \frac{0,6 \text{ м}}{3,0 \text{ м}} = 235,2 \text{ Н}.$$

§ 35. Виды равновесия тел. Равновесие тела, закрепленного в одной точке, и тела, опирающегося на горизонтальную плоскость

Различают три вида равновесия тела:

1. Устойчивое равновесие, если тело, будучи выведено из положения равновесия в соседнее ближайшее положение и затем предоставлено самому себе, *вернется в это положение*.

2. Неустойчивое равновесие, если тело, будучи выведено из положения равновесия в соседнее ближайшее положение и затем предоставлено самому себе, *будет еще больше отклоняться от этого положения*.

3. Безразличное равновесие, если тело, будучи выведено из положения равновесия в ближайшее положение и затем предоставлено самому себе, *остается в новом своем положении*.

Тело, закрепленное в одной точке, будет находиться в равновесии в том случае, когда точка приложения равнодействующей сил тяжести — центр тяжести тела (см. § 38) — находится на

одной вертикали с точкой закрепления (рис. 96), так как в этом случае линия действия реакции опоры (упругая сила реакции) совпадает с линией действия силы тяжести.

Равновесие тела, закрепленного в одной точке, будет

а) устойчивым, если в положении равновесия центр тяжести тела занимает наинизшее положение из всех возможных ближайших соседних его положений (рис. 97, а и 98, а);

б) неустойчивым, если центр тяжести занимает наивысшее из всех возможных ближайших его положений (рис. 97, б и 98, б);

в) безразличным, если центр тяжести тела во всех ближайших возможных положениях этого тела находится на одном горизонтальном уровне (рис. 97, в и 98, в).

Чем выше центр тяжести тела, тем больше его потенциальная энергия. Поэтому можно сказать, что равновесие тела

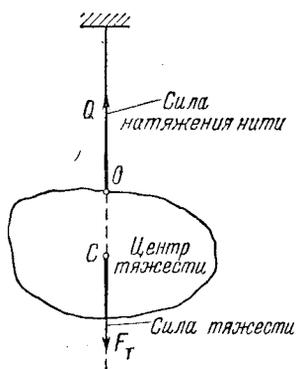


Рис. 96.

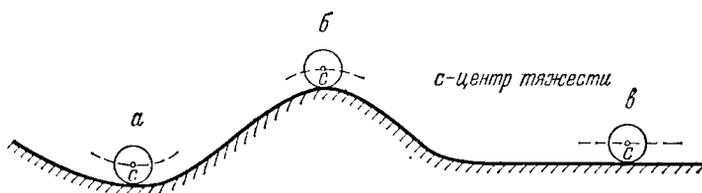


Рис. 97.

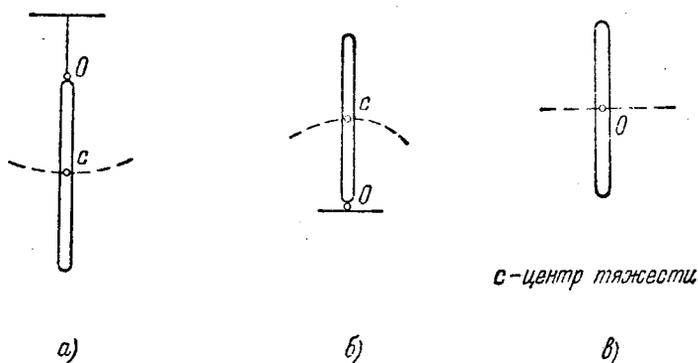


Рис. 98.

а) устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия тела имеет наименьшее значение из возможных ее значений в соседних положениях тела;

б) неустойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия тела имеет наибольшее значение;

в) безразличное, если потенциальная энергия тела не меняется при переходе из данного положения равновесия в соседние с ним.

§ 36. Центр масс и центр тяжести тела

Центром масс тела называется *точка пересечения прямых, вдоль которых должны быть направлены силы, вызывающие только поступательное движение тела.*

Опыт показывает, что в каждом теле существует такая точка, и что всякая сила, не проходящая через эту точку, вызывает поворот тела. На рис. 99, где центр масс обозначен буквой O , силы F_{1-4} вызывают только поступательное движение тела, сила же F_5 вызывает, наряду с поступательным движением, еще и вращение тела благодаря моменту силы относительно центра масс:

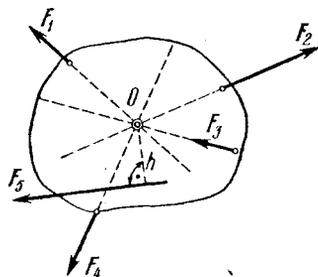


Рис. 99.

$$M_0 = F_5 \cdot l.$$

Из определения поступательного движения (см. введение) можно заключить, что при поступательном движении ускорения всех частиц тела одинаковы по величине и направлению. Поступательно, в частности, движется тело под действием силы тяжести, так как сила тяжести сообщает всем частицам тела одинаковое ускорение. Следовательно, при любом положении тела

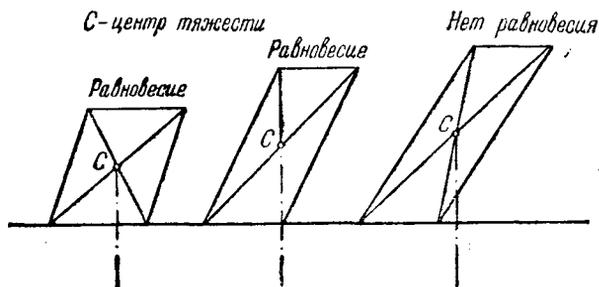


Рис. 100.

равнодействующая сил тяжести, приложенных ко всем частицам тела, проходит через его центр масс. Поэтому центр масс тела называют также центром тяжести. На совпадении центра масс с центром тяжести основан следующий способ определения центра масс тела произвольной формы. Тело подвешивается в

некоторой точке O . При этом линия подвески пройдет через центр тяжести тела. Затем тело подвешивается в другой точке O_1 . Новая линия подвески пройдет также через центр тяжести пластинки. Следовательно, центр тяжести тела находится на пересечении двух линий подвески. Если теперь тело подвесить за любую точку, то новые линии подвески пройдут через точку пересечения первых двух линий.

Тело, *опирающееся на горизонтальную плоскость*, находится в равновесии в том случае, если вертикаль, проведенная через центр тяжести тела проходит внутри (или на границах) площади опоры (рис. 100).

§ 37. Определение центров тяжести (центров масс) тел различной формы

Положение центра тяжести какого угодно тела можно найти, разбивая тело на части более простой формы и определяя центры приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на эти части.

Найдем положение центра тяжести некоторых простейших фигур.

а) Тонкая однородная пластинка — рис. 101. Разбиваем пластинку на множество малых равных между собой полосок. На каждую из них действует сила тяжести, — все эти силы

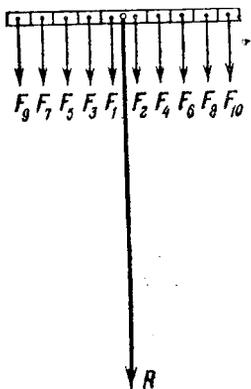


Рис. 101.

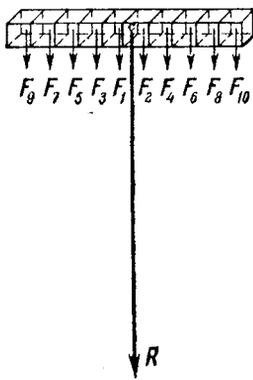


Рис. 102.

равны между собой. Складываем по две силы, равноотстоящие от середины полосок. Равнодействующие любых двух таких сил приложены в середине полоски. Следовательно, *центр тяжести однородной тонкой пластинки находится в ее середине*.

б) Однородный прямой стержень — рис. 102. Таким же образом — разбивкой стержня на маленькие части и попарным сложением весов равноотстоящих от середины стержня

сил — доказывается, что *центр тяжести однородного прямого стержня находится в его середине.*

в) Треугольник — рис. 103, а. Разобьем площадь треугольника на тонкие полоски, параллельные одной из его сторон. Так как центр тяжести каждой полоски лежит в ее середине, то центр тяжести совокупности всех полосок, т. е. центр тяжести треугольника лежит где-то на медиане, проведенной к стороне треугольника, параллельной полоскам. Теперь разобьем треугольник на полоски, параллельные другой его стороне, и

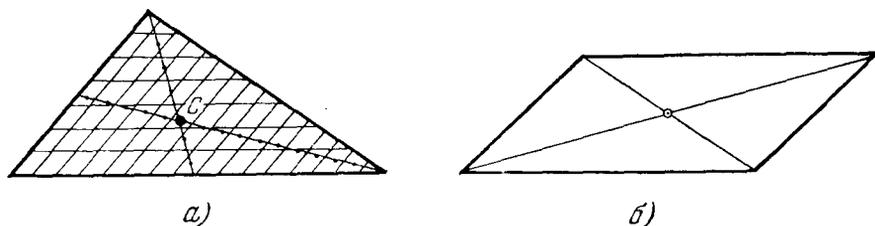


Рис. 103.

аналогично найдем, что центр тяжести площади треугольника лежит на медиане, проведенной к другой стороне треугольника. Следовательно, *центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.*

г) Параллелограмм — рис. 103, б. Разобьем параллелограмм диагональю на два треугольника. Центры тяжести каждого из полученных треугольников расположены где-то на другой диагонали, являющейся медианой обоих этих треугольников. Следовательно, и равнодействующая обеих сил, изображающих веса этих треугольников, находится на той же «другой» диагонали. Теперь разобьем параллелограмм на два треугольника другой диагональю и таким же образом покажем, что его центр тяжести лежит на первой диагонали. Следовательно, *центр тяжести площади параллелограмма лежит на пересечении его диагоналей.*

д) Однородное кольцо. Из симметрии очевидно, что *центр тяжести однородного кольца находится в его геометрическом центре.*

е) Однородный диск. Его можно разбить на множество тонких колец. На этом основании замечаем, что *центр тяжести однородного диска находится в его геометрическом центре.*

ж) Центр тяжести пластинки любой формы находится путем разбивки пластинки на площадки простейшей формы (треугольники, прямоугольники, параллелограммы), положение центров тяжести которых легко находится, и отыскания центра параллельных сил тяжести, приложенных в центрах тяжести этих простейших фигур и численно равных площадям

соответствующих фигур, так как масса однородной пластинки пропорциональна ее площади.

з) Центры тяжести некоторых простейших объемных тел. Центр тяжести параллелепипеда, в частности куба, расположен на пересечении его диагоналей. Это доказывается разбивкой параллелепипеда на тонкие пластинки, параллельные разным граням. Центр тяжести шара находится в его геометрическом центре — доказывается разбивкой шара на тонкие диски.

Приведенные примеры достаточно хорошо иллюстрируют следующее общее положение: *если тело имеет центр симметрии, то центр тяжести (ц.т.) тела совпадает с его центром симметрии. Если тело имеет ось симметрии, то его центр тяжести лежит на этой оси. Если тело имеет плоскости симметрии, то его центр тяжести лежит в этой плоскости.*

Примеры решения задач

Задача 67. Стержень цилиндрической формы длиной $L=1,2$ м состоит из трех материалов: на протяжении $l_1=0,5$ м из железа, затем на протяжении $l_2=0,3$ м из меди, остальная его часть $l_3=0,4$ м из алюминия. Найти центр тяжести стержня. (Плотность железа принять $\rho_{ж}=0,0078$ кг/м³, меди $\rho_{м}=0,0089$ кг/м³, алюминия $\rho_{а}=0,0027$ кг/м³.)

$L = 1,2$ м
 $l_1 = 0,5$ м
 $\rho_{ж} = 0,0078$ кг/м³
 $l_2 = 0,3$ м
 $\rho_{м} = 0,0089$ кг/м³
 $l_3 = 0,4$ м
 $\rho_{а} = 0,0027$ кг/м³

Найти ц.т.

правленную: $F = P_1 + P_2 + P_3 = m_1g + m_2g + m_3g$. Но так как стержень находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно любой точки, например относительно точки D , должна быть равна нулю: $P_1 \cdot BD + P_2 \cdot CD - F \cdot OD = 0$, откуда

$$OD = \frac{P_1 \cdot BD + P_2 \cdot CD}{F} = \frac{m_1 BD + m_2 CD}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Масса железной части стержня $P_1 = 7,8$ г/см³ · S см² · 50 см = 390 S г. Масса медной части $P_2 = 8,9$ г/см³ · S см² · 30 см = 267 S г. Масса алюминиевой части стержня $P_3 = 2,7$ г/см³ · S см² · 40 см = 108 S г. Следовательно,

$$OD = \frac{390S \cdot 75 + 267S \cdot 35}{(390 + 267 + 108)S} = 50,0 \text{ см.}$$

Задача 68. Найти центр тяжести квадратной однородной пластинки с вырезом, показанной на рис. 105.

Решение. Так как ось OO является осью симметрии пластинки, то центр тяжести пластинки — точка C лежит на этой оси. Найдем расстояние CO_1 центра тяжести от геометрического центра пластинки O_1 .

Решение

Центр тяжести стержня лежит на его оси, так как это ось его симметрии. Если ц.т. находится в точке O (рис. 104), то стержень будет находиться в равновесии, если к нему в этой точке приложить силу F , равную по абсолютной величине сумме сил тяжести P_1 , P_2 и P_3 , действующих на части стержня, и противоположно направленную.

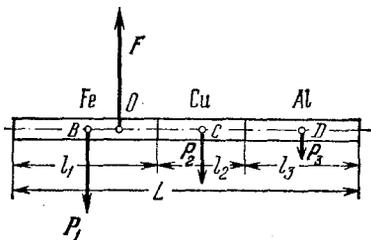


Рис. 104.

Сделаем в пластинке второй вырез, равный по площади существующему и расположенный симметрично ему относительно вертикальной оси. Обозначим массу оставшейся части пластинки M_1 , массу сделанного выреза M_2 . Тогда мы можем записать

$$M_2 g \cdot O_2 C = M_1 g \cdot O_1 C$$

или

$$M_2 \cdot O_2 C = M_1 \cdot O_1 C.$$

Так как массы частей пластинки пропорциональны площадям этих частей, то вместо масс можно взять площади $S_1 = (4a)^2 - (2a)^2 = 12a^2$ и $S_2 = a \cdot 2a = 2a^2$. Тогда получим

$$\frac{O_1 C}{O_2 C} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{или} \quad \frac{O_1 C}{\frac{a}{2} - O_1 C} = \frac{2a^2}{12a^2},$$

$$\frac{O_1 C}{\frac{a}{2} - O_1 C} = \frac{1}{6},$$

откуда

$$O_1 C = \frac{a}{14}.$$

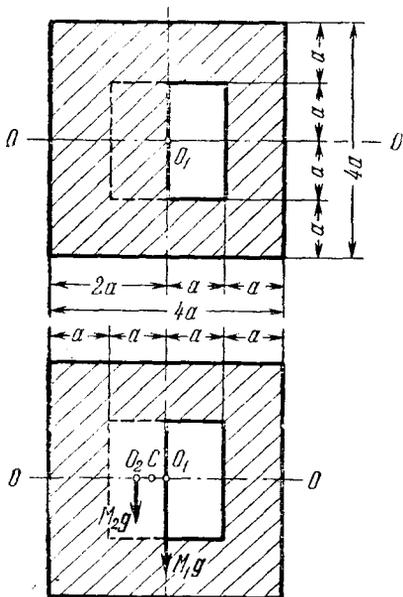


Рис. 105.

вертикальной силой. Что произойдет с цилиндром — опрокидывание или сползание вниз по доске, если коэффициент трения между цилиндром и доской $f = 0,6$?

Решение. Обозначим угол наклона доски к горизонту α , при котором начнется сползание цилиндра α_1 , а угол, при котором начнется опрокидывание цилиндра α_2 . Найдем эти углы.

По мере поднятия правого конца доски и увеличения угла α увеличивается тангенциальная сила $P_T = P \sin \alpha$, и уменьшается сила нормального давления $P_N = P \cos \alpha$; вместе с тем уменьшается максимально возможная сила трения $f P_N$ ($F_{\text{тр}} \leq f P_N$ или $F_{\text{тр}} \leq f P \cos \alpha$). Сползание начнется, когда составляющая силы тяжести, параллельная доске, чуть превысит силу трения: $P_T \geq F_{\text{тр max}}$, $P \sin \alpha \geq f P \cos \alpha$, отсюда

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha_1 &\geq f, \\ \text{tg } \alpha_1 &\geq 0,3. \end{aligned}$$

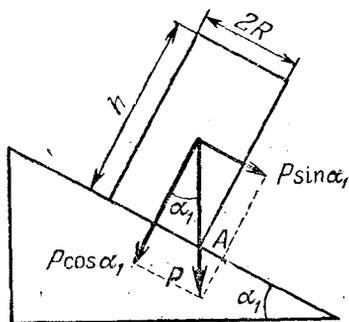


Рис. 106.

Опрокидывание цилиндра начнется когда линия действия силы тяжести пройдет через крайнюю точку опорной площади цилиндра. Как видно из рис. 106

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{0,5d}{0,5h} = 0,25.$$

Следовательно, цилиндр опрокинется.

II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ЗВУК

§ 38. Колебания. Период и частота колебаний. Амплитуда колебаний. Связь между периодом и частотой колебаний

Колебательным движением тела, или просто колебанием, называется такое движение, которое многократно повторяется через определенные промежутки времени.

Примеры механических колебательных движений:

- 1) движение маятника;
- 2) движение пружины, закрепленной одним концом, если ее сжать или растянуть и затем отпустить;
- 3) движение рессоры экипажа после толчков на неровностях дороги;
- 4) колебание фабричной трубы;
- 5) колебание звучащих тел (камертон, струна и т. д.);
- 6) колебание воздушного столба в органных трубах и трубах духовых инструментов;
- 7) движение поршня работающего поршневого двигателя.

Примеры не механических колебаний:

- 1) переменный ток;
- 2) колебание тока в колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности;
- 3) изменение напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Колебания, при которых движение повторяется через равные промежутки времени, называются периодическими колебаниями.

В данном разделе рассматриваются только *периодические механические колебания* материальной точки, т. е. такое движение материальной точки, при котором периодически повторяются траектория ее движения, а также ее скорость и ускорение в любой точке траектории. При этом материальная точка совершает колебания около положения устойчивого равновесия.

Основные величины, характеризующие периодическое колебательное движение — амплитуда, период и число колебаний в секунду (частота).

Амплитуда колебания (A, a)—наибольшее отклонение колеблющегося тела от среднего положения (положения равновесия).

Период полного колебания (T)—время (в секундах) между двумя последовательными прохождениями тела через одно и то же положение в одном и том же направлении.

Частота колебаний (f, ν)—число колебаний, совершаемых телом в секунду.

Частота колебаний связана с их периодом соотношением

$$fT = 1.$$

Отсюда

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{f}.$$

Частоту колебаний принято выражать в герцах—1 герц равен 1 колебанию в секунду:

$$1 \text{ Гц} = 1 [1/\text{с}].$$

Кроме того, употребляются единицы частоты—килогерц (кГц) и мегагерц (МГц):

$$1 \text{ кГц} = 1000 \text{ Гц} = 10^3 \text{ Гц}, \quad 1 \text{ МГц} = 1000 \text{ кГц} = 10^6 \text{ Гц}.$$

§ 39. Гармоническое колебание. Фаза колебания

Гармоническим колебанием называется периодическое колебательное движение, при котором координата тела меняется во времени по закону

$$x = A \sin \varphi = A \sin (\omega t + \varphi_0),$$

или

$$x = A \cos \varphi = A \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Величина $\varphi = \omega t + \varphi_0$, выраженная в радианах, или в градусах, носит название фазы колебания, φ_0 —начальная фаза, ω —круговая или циклическая частота.

Можно дать такое геометрическое представление гармонического колебания. Предположим, что материальная точка M движется равномерно по окружности против часовой стрелки из положения M_0 (рис. 107). По мере того как точка M будет двигаться от положения M_0 к M_1 и от M_1 к M_0 , ее проекции на оси координат, точки K и N , будут совершать колебательное движение—точка K по горизонтальному диаметру окружности (вдоль оси Ox), точка N —по вертикальному диаметру. Обе—с одинаковой амплитудой, равной радиусу окружности A .

Положение точки M в произвольный момент времени определяется углом φ . Положение ее проекции K на горизонтальную ось определяется абсциссой $OK = x$:

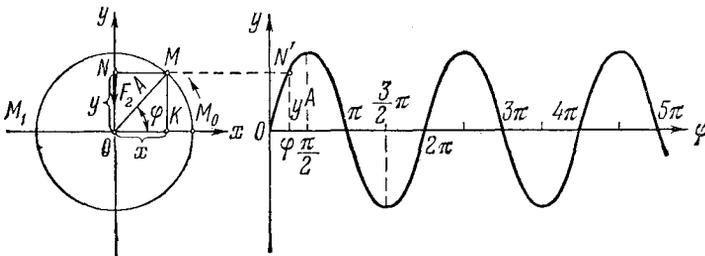
$$x = A \cos \varphi.$$

Положение проекции N точки M на вертикальную ось определяется ординатой $ON = y$:

$$y = A \sin \varphi.$$

Следовательно, точки K и N совершают гармонические колебания.

Рассмотрим движение точки N (рис. 107 справа). Если по оси абсцисс откладывать угол φ , а по оси ординат величину $y = ON$, то мы получим график зависимости y от φ . Это синусоида с периодом 2π и амплитудой A . Фаза колебания φ определяет как положение колеблющейся точки (смещение y), так и



Гармоническое колебание

Рис. 107.

направление ее движения в данный момент времени. Аналогично можно построить график зависимости от угла φ координаты x — это косинусоида.

Обозначим угловую скорость движения точки по окружности ω . Тогда угол $\varphi = \omega t$ и для координат точек K и N мы можем записать:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t.$$

А так как $\omega = 2\pi/T$, то эти уравнения гармонических колебаний можно записать и так:

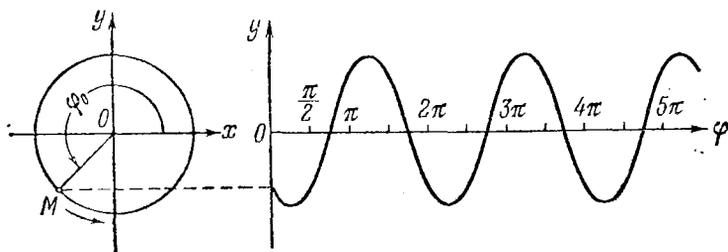
$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad y = A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Из формулы $\omega = 2\pi/T$ видно, что круговая частота равна числу полных колебаний колеблющейся точки за время 2π секунд (в то время, как частота измеряется числом колебаний в 1 секунду).

Если движение материальной точки по окружности начинается не из положения M_0 , а, например, из положения M (рис. 108), то угол φ_0 , которым определяется положение точки и ее проекции на оси координат в начальный момент — это начальная фаза. Колебательное движение точек K и N тогда описывается формулами

$$x = A \cos (\varphi_0 + \omega t), \quad y = A \sin (\varphi_0 + \omega t).$$

Из уравнений колебательного движения видно, что фазу механического колебания можно определить как



Гармоническое колебание с начальной фазой φ_0

Рис. 108.

физическую величину, определяющую положение тела и его скорость и ускорение в каждый данный момент времени.

§ 40. Маятник. Период колебаний математического маятника

Физический маятник — это твердое тело, совершающее колебание вокруг горизонтальной оси подвеса, расположенной выше его центра тяжести.

Математический маятник (рис. 109) — материальная точка, подвешенная на «нерастяжимой», «невесомой» нити с закрепленным другим концом и могущая под действием силы тяжести совершать колебания по дуге окружности.

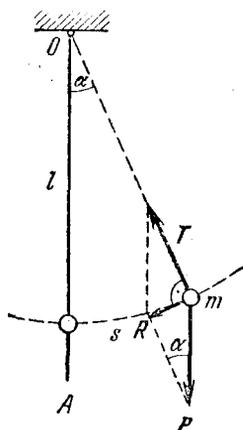


Рис. 109.

Математический маятник — идеализированная математическая схема, применяемая для упрощения математического расчета характера колебаний реально существующего физического маятника. Для всякого физического маятника можно подобрать такой математический маятник, который имеет одинаковую с ним частоту колебаний.

Длина математического маятника, имеющего одинаковую частоту колебаний с данным физическим маятником, называется приведенной длиной этого физического маятника.

Если амплитуда колебания математического маятника достаточно мала, то это колебание — гармоническое.

Период и частота (гармонических) колебаний математического маятника вычисляются по формулам $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$.

где l — длина математического маятника или приведенная длина соответствующего физического маятника, g — ускорение силы тяжести.

Период и частота гармонических колебаний математического маятника не зависят от его массы.

Колебательное движение маятника происходит под действием двух сил: силы тяжести P и силы реакции подвески T . Разложим силу тяжести на две составляющие: силу R , направленную по касательной к траектории движения маятника, и силу F — вдоль подвески маятника.

Равнодействующая сил F и T , направленная к центру круговой траектории маятника, сообщает маятнику центростремительное ускорение. Она равна

$$T - F = T - P \cos \alpha.$$

Сила же $R = P \sin \alpha$ сообщает маятнику ускорение по касательной к траектории, так называемое тангенциальное ускорение. Эта сила направлена к положению равновесия.

При достаточно малых углах отклонения маятника $\sin \alpha = \alpha$. Поэтому

$$R = P\alpha = \frac{P}{l} s.$$

При гармоническом колебании маятника сила, сообщающая ему ускорение в направлении к положению равновесия, пропорциональна отклонению маятника от положения равновесия.

§ 41°. Свободные и вынужденные колебания. Явление механического резонанса

Если колебательная система выведена из положения равновесия и затем предоставлена самой себе, то она производит колебания с частотой, зависящей от свойств этой колебательной системы.

Колебания, которые совершает система (тело) после того, как она каким-либо образом выведена из состояния устойчивого равновесия и затем предоставлена самой себе называются свободными колебаниями.

Свободные колебания — затухающие; их амплитуда непрерывно уменьшается (рис. 110) вследствие потерь энергии из-за сопротивления среды, в которой происходит колебательное движение, и других потерь.

Если свободные механические колебания тела происходят в среде без сопротивления, то они называются собственными колебаниями, а их частота — частотой собственных колебаний.

Частота собственных механических колебаний колеблющегося тела определяется геометрическими размерами и упругими свойствами тела.

Если система совершает колебания под внешним воздействием, изменяющимся периодически, то такие колебания называются вынужденными колебаниями.

Периодическая сила, вызывающая механические колебания, называется возмущающей силой.

Частота вынужденных механических колебаний определяется исключительно частотой возмущающей силы и не зависит от размеров и свойств колеблющегося

тела. Например, фундамент мотора, или кронштейн, на котором закреплен мотор, совершает вынужденные колебания с частотой, определяемой только количеством оборотов в секунду мотора, и не зависящей от размеров фундамента и кронштейна; мембрана микрофона совершает вынужденные колебания, частота которых определяется частотой передаваемого звука, и т. д.

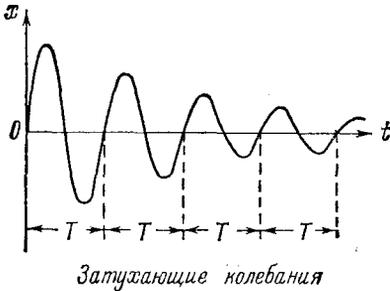


Рис. 110.

При совпадении частоты возмущающей силы и собственной частоты амплитуда вынужденных колебаний сильно возрастает. В идеализированном случае колебаний в среде без сопротивления амплитуда вынужденных колебаний при совпадении частот возрастала бы непрерывно и безгранично. В реальной среде амплитуда вынужденных колебаний возрастает не безгранично, а имеет определенный для каждого случая максимум при частоте возмущающей силы, несколько меньшей собственной частоты колеблющегося тела.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний тела под действием периодической возмущающей силы, частота которой близка к собственной частоте колеблющегося тела, называется механическим резонансом.

В технике явление механического резонанса играет в одних случаях отрицательную, в других — положительную роль.

Отрицательное действие резонанса сказывается в разрушении колеблющегося тела под действием сравнительно небольших периодических сил при совпадении периода собственных колебаний тела с периодом колебания величины действующей силы.

Например, прочный фундамент двигателя разрушается, если двигатель работает на оборотах, близких к собственной частоте колебаний фундамента. Известны случаи появления трещин и разрушения некоторых стержней подмоторной фермы самолета при работе мотора (поршневого) на некоторых определенных обо-

ротах. Известен случай обвала штукатурки потолка от действия небольшого вентиляторного мотора, подвешенного к потолку. Известен случай разрушения моста при проходе по нему воинской части «в ногу» вследствие совпадения собственной частоты колебания моста с частотой шага, хотя нагрузка на мост далеко не достигала расчетной. Поэтому в настоящее время проход по мосту «в ногу» запрещен.

Вместе с тем явление механического резонанса используется в технике, например, при конструировании частотомеров — приборов для измерения частоты колебаний. В подобных приборах «чувствительным» элементом является резонатор с легко изменяемой собственной частотой. Явление резонанса используется и в других областях техники, где оно играет положительную роль, — в акустике, в оптике, радиотехнике.

В радиотехнике благодаря настройке приемного контура в резонанс с передатчиком достигается усиление электрических колебаний в приемном контуре под действием электромагнитных волн от передатчика (см. раздел VI).

§ 42. Волны. Поперечные и продольные волны

Колебание, вызванное в одном месте среды (воздуха, воды, пружины, веревки и т. д.), не ограничивается этим местом, а распространяется в среде с некоторой определенной скоростью, зависящей от свойств среды. Распространение механических колебаний происходит в упругой среде и сопровождается передачей энергии колеблющегося тела от одной точки упругой среды к другой. Вследствие того, что колебания распространяются не мгновенно, а с конечной скоростью, в один и тот же момент времени фазы колебания в различных точках пространства будут различны.

Распространение колебаний в пространстве называется волновым движением.

Волной называется процесс распространения колебаний в среде. Каждая частица среды при этом колеблется около положения устойчивого равновесия.

Поперечными волнами называются волны, в которых колебания частиц среды совершаются в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения колебаний. (Волны на поверхности воды, по натянутой веревке и т. д.)

Продольными волнами называются волны, в которых колебания частиц среды совершаются вдоль линии распространения волны. (Волны в сжатой или растянутой и затем отпущенной спиральной пружине; звуковые волны в воздухе, в трубах духовых инструментов и т. д.) Распространение продольных колебаний в упругой среде, например, в воздухе происходит путем периодических, следующих друг за другом увеличений и уменьшений плотности среды.

§ 43. Скорость распространения колебаний. Длина волны. Зависимость между длиной волны, скоростью распространения колебаний и частотой (или периодом) колебаний

Скорость распространения колебаний (v)—это величина, равная скорости, с которой распространяется какая-либо фаза колебания. (Например, скорость, с которой перемещается область повышенной плотности в звуковой волне).

Скорость распространения колебаний называют также скоростью волны.

Длина волны (λ —греческая буква «лямбда») — это расстояние между двумя ближайшими точками волны, в которых фаза колебания одна и та же. (В частности, расстояние между соседними выступами или впадинами в поперечной волне и между соседними сгущениями или разрежениями в продольной волне.)

В течение одного периода колебательный процесс распространяется на расстояние, равное длине волны. Поэтому

$$\lambda = vT$$

(T —период колебаний—время одного полного колебания). Так как $T = 1/f$, где f —частота колебаний, то мы можем также записать

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

§ 44. Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука

Звуки, которые мы слышим, представляют собой результат восприятия нашим ухом колебаний упругой среды (в частности, воздуха), имеющих частоту примерно от 6 до 20 000 Гц.

Колебания упругой среды с частотами больше слышимых частот называются ультразвуковыми колебаниями или ультразвуком. Колебания упругой среды с частотой меньше слышимых частот называются инфразвуковыми колебаниями или инфразвуком.

Колебания «звучащего» тела передаются упругой среде, в которой находится это тело, в частности воздуху, в виде сжатий и разрежений упругой среды (воздуха), распространяющихся волнообразно во все стороны и образующих продольные звуковые волны.

Скорость распространения звуковой волны в различных средах различна. В воздухе при 15 °С $v_{зв} = 340$ м/с, в воде $v_{зв} = 1450$ м/с, в металлах еще больше; например, в железе $v_{зв} = 4900$ м/с.

Характеристиками звуковых волн (звука) являются громкость и высота.

Громкость звука определяется его силой—количеством звуковой энергии (энергии колебания), проходящей через 1 см²

упругой среды в 1 секунду. Сила звука обратно пропорциональна квадрату расстояния от уха до источника звука, так как количество звуковой энергии, проходящее через 1 см^2 сферы, окружающей источник звука, изменяется обратно пропорционально квадрату радиуса этой сферы.

Высота звука определяется частотой звуковых колебаний. Чем больше частота колебаний, т. е. чем короче звуковая волна, тем выше звук.

§ 45. Отражение звука

Отражение упругой волны, в том числе звуковой, при достижении ею границы двух сред происходит по следующему закону: **Угол отражения равен углу падения.** Отраженный звук несколько ослаблен, так как одновременно звуковая волна переходит (с преломлением) во вторую среду, унося с собой часть звуковой энергии.

В закрытом помещении происходит многократное отражение звука от стен, потолка и пола помещения, а также от находящихся в нем предметов. Так как ухо человека сохраняет ощущение воспринятого звука в течение до $0,1 \text{ с}$, то если отраженные звуки достигают уха человека с меньшими промежутками времени, они не воспринимаются как отдельные звуки, а лишь усиливают и продлевают основной звук. Если же отражающая звук поверхность находится настолько далеко, что промежутки времени между подходом к слушателю основного и отраженного звука, а также между подходом последовательно отраженных звуков превышает $0,1 \text{ с}$, то отраженные звуки воспринимаются раздельно, как эхо.

Законы механического резонанса распространяются и на звуковые колебания, представляющие собой частный случай механических колебаний. Акустический, звуковой резонанс является частным случаем механического резонанса.

Примеры решения задач

Задача 70. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $f = 0,5 \frac{1}{\text{с}}$. Амплитуда колебания $A = 80 \text{ см}$. Как зависит смещение s материальной точки от времени, если колебательное движение начато из положения равновесия.

$$f = 0,5 \frac{1}{\text{с}}$$

$$A = 80 \text{ см} = 0,80 \text{ м}$$

$$s = 0 \text{ при } t = 0$$

Найти зависимость s от t

Решение

Так как точка совершает гармонические колебания, то

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$$

(φ_0 — начальная фаза колебаний).

При $t = 0$ $s = 0$. Следовательно, $0 = A \sin(0 + \varphi_0)$.

Отсюда $\sin \varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$ (или $2\pi n$, где n — целое). Поэтому

$$s = A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Так как $T = 1/f$, то данное уравнение можно записать так:

$$s = A \sin (2\pi f t).$$

Подставляя сюда заданные величины, получим

$$s = 0,80 \sin (\pi t).$$

Задача 71. Решить предыдущую задачу при условии, что движение точки начинается из положения $s_0 = 40$ см.

Решение. $s = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right)$, где φ_0 — начальная фаза (в радианах).

Согласно решению предыдущей задачи

$$s = 0,80 \sin (\pi t + \varphi_0).$$

При $t = 0$ $s = 0,80 \sin \varphi_0 = 0,40$ м, откуда $\sin \varphi_0 = 0,5$ и $\varphi_0 = \pi/6$ (или $\varphi_0 = \pi/6 + 2kn$, где n — целое).

Уравнение движения:

$$s = 0,80 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Задача 72. Два маятника, длины которых отличаются на 22 см, совершают в одном и том же месте за некоторое время один $N_1 = 30$ колебаний, другой — $N_2 = 36$ колебаний. Найти длины маятников.

Решение. Очевидно, что маятник большей длины совершает меньшее число колебаний.

Период колебания первого маятника $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$, а второго маятника — $T_2 = 2\pi \sqrt{l_2/g}$. Отношение

$$T_1/T_2 = \sqrt{l_1/l_2}. \quad (a)$$

С другой стороны,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (б)$$

Приравниваем правые части выражений (a) и (б):

$$N_2/N_1 = \sqrt{l_1/l_2},$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = \left(\frac{36}{30} \right)^2 = \left(\frac{6}{5} \right)^2 = \frac{36}{25} = 1,44,$$

откуда

$$l_1 = 1,44 l_2 \quad (в)$$

по условию задачи, кроме того,

$$l_1 - l_2 = 22 \text{ см.} \quad (г)$$

Решая систему двух уравнений (в) и (г), находим

$$l_2 = \frac{22}{0,44} = \underline{50 \text{ см}}, \quad l_1 = 50 + 22 = \underline{72 \text{ см}}.$$

Задача 73*. Часы с математическим маятником отрегулированы в Москве. Как эти часы будут идти на экваторе? Ускорение силы тяжести в Москве $g_1 = 981,6 \text{ см/с}^2$, на экваторе $g_2 = 978,0 \text{ см/с}^2$.

Решение. Частота колебаний маятника в Москве

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g_1}{l}} \frac{1}{c},$$

а на экваторе

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g_2}{l}} \frac{1}{c}.$$

За сутки число колебаний маятника часов в Москве

$$N_1 = 24 \cdot 3600 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g_1}{l}}.$$

а на экваторе

$$N_2 = 24 \cdot 3600 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g_2}{l}}.$$

Число колебаний за сутки на экваторе меньше, чем в Москве, на

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{l}} (\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}).$$

Длительность одного колебания (период колебания) в Москве

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}.$$

Следовательно, на экваторе часы за сутки отстанут на

$$\begin{aligned} \Delta t = \Delta N T_1 &= \frac{(24 \cdot 3600) c}{2\pi \sqrt{l}} \cdot 2\pi \sqrt{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_1}} (\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}) = \\ &= (24 \cdot 3600) c \left(1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right), \end{aligned}$$

$$\Delta t = (24 \cdot 3600) c \left(1 - \frac{978,0}{981,6} \right) = 130 \text{ с.}$$

Часы будут отставать за сутки на

$$\Delta t = \underline{2 \text{ мин } 10 \text{ с.}}$$

Задача 74*. Маятник массой $m=5$ кг и длиной $l=0,80$ м совершает колебательное движение с амплитудой $A=0,40$ м. Определить скорость v движения маятника при его смещении от положения равновесия на $s=10$ см и наибольшую силу натяжения нити T .

Решение. Кинетическая энергия маятника в произвольном положении равна разности потенциальных энергий маятника в крайнем и в данном положениях:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - h_1),$$

откуда находим

$$v = \sqrt{2g(h - h_1)}.$$

Здесь

$$h = l - l \cos \alpha, \quad h_1 = l - l \cos \varphi$$

(рис. 111) и

$$h - h_1 = l \cos \varphi - l \cos \alpha = l (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

$$\sin \alpha = \frac{A}{l} = \frac{0,40}{0,80} = 0,5; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866,$$

$$\sin \varphi \approx \varphi = \frac{s}{l} = \frac{0,10}{0,80} = \frac{1}{8}; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = 0,992.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,80 \text{ м} (0,992 - 0,866)} = 1,39 \text{ м/с}.$$

В положении равновесия на маятник действуют две силы: сила тяжести $P = mg$ и сила реакции нити T . Равнодействующая этих двух сил сообщает маятнику центростремительное ускорение $a = v^2/l$. Поэтому, согласно второму закону Ньютона

$$m \frac{v^2}{l} = T - P = T - mg.$$

Отсюда найдем натяжение нити:

$$T = mg + \frac{mv^2}{l} = m \left(g + \frac{v^2}{l} \right).$$

Квадрат скорости маятника найдем из равенства потенциальной энергии маятника в крайнем отклоненном положении его кинетической энергии в положении равновесия

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v^2 = 2gh = 2gl \cos \varphi.$$

Поэтому

$$T = m \left(g + \frac{2gl \cos \varphi}{l} \right) = mg (1 + 2 \cos \varphi),$$

$$T = 5 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 (1 + \sqrt{3}) = 133,9 \text{ Н}.$$

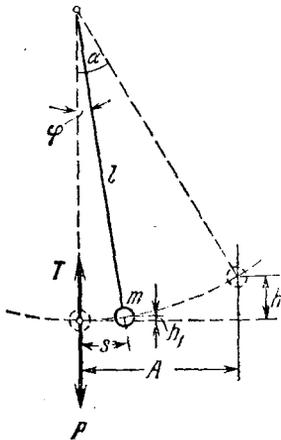


Рис. 111.

Задача 75. Колебания с частотой $f = 5$ Гц распространяются в пространстве со скоростью $v = 3$ м/с. Найти разность фаз двух точек, отстоящих друг от друга на 20 см.

Решение. Длина волны

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3}{5} = 0,60 \text{ м}.$$

Разность фаз колебаний равна

$$\frac{l}{\lambda} T = \frac{0,20}{0,60} T = \frac{1}{3} T = \frac{1}{3} \frac{1}{f} \approx 0,07 \text{ рад}$$

(T — период колебаний).

Задача 76. Человек громко произносит слово за время $\tau = 0,4$ с. Через сколько времени после произнесения слова он услышит эхо, если отражающая преграда поставлена на расстоянии $l = 100$ м. Скорость звука $v = 340$ м/с.

Решение. Путь в обе стороны, от человека до преграды и обратно, звук пройдет за время

$$t_1 = \frac{2l}{v} = \frac{2 \cdot 100}{340} = 0,6 \text{ с.}$$

Поэтому промежуток времени между произнесением слова и эха равен

$$t = t_1 - \tau = 0,6 - 0,4 = \underline{0,2 \text{ с.}}$$

Задача 77. Сирена имеет 30 отверстий и делает $n = 600$ об/мин. Определить длину звуковой волны, излучаемой сиреной, если скорость звука $v = 340$ м/с.

Решение. Скорость вращения колеса сирены составляет

$$n = \frac{600}{60} = 10 \text{ об/с.}$$

Частота звука равна числу совпадений отверстий колес сирены за 1 секунду:

$$f = kn \frac{1}{c}.$$

Длина звуковой волны

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{v}{kn}, \quad \lambda = \frac{340 \text{ м/с}}{30 \cdot 10 \frac{1}{\text{с}}} = \underline{1,13 \text{ м.}}$$

III. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

§ 46. Давление. Единицы давления. Величина нормального атмосферного давления

Если сила приложена к какой-либо поверхности, то *составляющая силы, нормальная* *) к этой поверхности, называется силой нормального давления или, чаще, силой давления. Величина силы нормального давления.

$$F_{\text{н.д}} = F \cos \alpha.$$

Давление — величина, измеряемая отношением силы нормального давления к площади плоскости, на которую действует эта сила (рис. 112):

$$p = \frac{F_{\text{н.д}}}{S} = \frac{F \cos \alpha}{S},$$

где p — давление, F — величина действующей силы, $F_{\text{н.д}}$ — величина силы нормального давления, S — площадь плоскости, на которую действует сила, α — угол между силой и перпендикуляром к плоскости, на которую действует эта сила.

Сила давления жидкости на какую-либо площадку всегда направлена перпендикулярно (нормально) к этой площадке. Следовательно, для жидкости

$$p = \frac{F}{S}.$$

Размерность давления $\left[\frac{\text{ед. силы}}{\text{ед. площади}} \right]$.

*) Нормаль — перпендикуляр.

Единицы давления следующие:

в системе СИ Паскаль: $[\text{Па}] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$,

в системе СГС $\left[\frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right]$.

В физике и технике иногда используются следующие внесистемные единицы:

а) физическая атмосфера [атм]: $1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Это — так называемое нормальное атмосферное давление, равное давлению воздуха при температуре 15°C или давлению столба воды высотой 10,33 м;

б) миллиметр ртутного столба: [мм рт. ст.] или [Тор] — по имени Торичелли: $1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.}$

в) бар: $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ дин/см}^2 = 10^5 \text{ Па}$;

$$1 \text{ атм} = 1,013 \text{ бар.}$$

Единица давления, в 1000 раз меньшая бара, называется миллибаром (мбар)

$$1 \text{ мбар} = 0,001 \text{ бар.}$$

Единица давления, в 1000 раз большая бара, называется килобаром (кбар)

$$1 \text{ кбар} = 10^3 \text{ бар.}$$

§ 47. Закон Паскаля для жидкостей и газов

Закон Паскаля: жидкости и газы передают оказываемое на них давление равномерно по всем направлениям.

На рис. 113 показан сосуд с жидкостью. На поверхности жидкости находится поршень массы M . Давление на единицу площади поверхности жидкости, вызванное наличием этого груза, будет равно

$$p = \frac{Mg}{S},$$

где S — площадь поверхности жидкости под поршнем.

В точке A , расположенной на глубине h , давление больше, чем давление на поверхности жидкости на величину давления, оказываемого вышележащим слоем жидкости. Если вес этого столба жидкости Q_1 , то

$$p_A = p + \frac{Q_1}{S}.$$

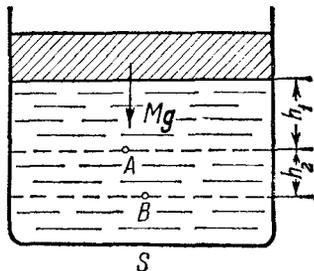


Рис. 113.

Таким будет давление на любую площадку, помещенную в точку A , независимо от того, будет ли эта площадка гори-

зонтальная, вертикальная или расположена под каким-нибудь углом к горизонту.

Давление в точке B больше давления в точке A на величину давления столба жидкости между точками A и B и т. д.

§ 48. Принцип действия гидравлического пресса

Гидравлический пресс применяется для получения больших сжимающих сил при малых перемещениях: для прессования различных материалов, для продавливания отверстий в металлических листах, для испытания материалов на прочность и т. д.

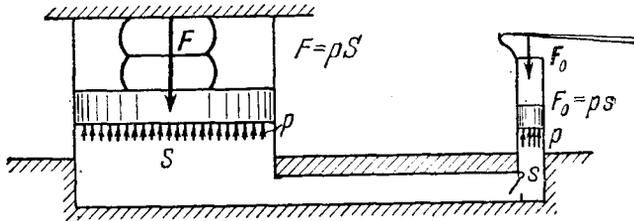


Схема действия гидравлического пресса

Рис. 114.

Схема устройства гидравлического пресса показана на рис. 114. Пресс состоит из цилиндра большого диаметра и насоса с цилиндром малого диаметра. Тело, которое надо сжать, помещается над поршнем цилиндра большого диаметра, где зажимается между верхней неподвижной плоскостью, прикрепленной обычно к опорной конструкции пресса, и поршнем. Сжатие тела производится благодаря подаче в цилиндр масла по трубке малого сечения с помощью насоса. После окончания работы пресса жидкость из цилиндра пресса поступает обратно в цилиндр насоса (на схеме это не показано).

Действие гидравлического пресса основано на законе Паскаля. На поршень насоса действует сила F_0 . Если площадь поршня s , то давление под поршнем насоса будет

$$p = \frac{F_0}{s}.$$

Таким же будет давление на любую площадку в большом цилиндре пресса. Если площадь поперечного сечения этого цилиндра S , то полная сила, действующая на поршень цилиндра пресса, будет равна

$$F = pS.$$

Выигрыш в силе, т. е. отношение сжимающей груз силы к силе, действующей на поршень насоса, равен

$$\frac{F}{F_0} = \frac{pS}{ps} = \frac{S}{s}.$$

Выигрыш в силе равен отношению площадей поршней цилиндра пресса и насоса. Во столько же раз перемещение поршня пресса и соответственно высота поднятия подвижной горизонтальной площадки пресса меньше перемещения поршня насоса.

Если насос не поршневой, а центробежный, то s — площадь сечения трубы, по которой подается масло насосом.

§ 49. Давление жидкости на дно и на стенки сосуда. Закон сообщающихся сосудов

Давление жидкости на любую площадку на какой-нибудь глубине направлено перпендикулярно к площадке, не зависит от направления площадки и равно по величине весу вертикального столба жидкости с площадью основания, равной единице площади, и высотой, равной глубине середины площадки от уровня жидкости в сосуде:

$$p = \rho gh,$$

где ρ — плотность жидкости, h — глубина середины площадки.

Давление жидкости на стенки A и B сосуда (рис. 115), и на любую площадку C внутри жидкости, расположенную на той же глубине h , одинаковое:

$$p = \rho gh.$$

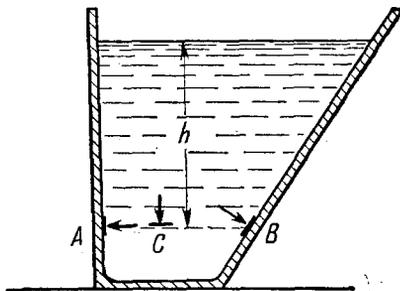


Рис. 115.

Этим объясняется так называемый «гидростатический парадокс». Давление на дно сосуда не зависит от формы сосуда и определяется уровнем жидкости в сосуде.

В состоянии покоя столбы жидкостей в сообщающихся сосудах, взаимно уравнивающие друг друга, устанавливаются так, что они производят одинаковое давление на свои основания (рис. 116):

$$p_1 = p_2 = p.$$

Докажем это. Если в соединительную трубку между двумя сообщающимися сосудами (рис. 116) вставить подвижную пробку, то так как жидкость находится в равновесии, пробка не будет передвигаться. Это возможно только в том случае, если давление с обеих сторон пробки одинаково, например p . Так как давление зависит не от направления площадки, а только от глубины, на

которой она находится, то

$$p_1 = p \quad \text{и} \quad p_2 = p.$$

Это означает, что

$$p_1 = p_2 = p.$$

Так как $p_1 = \rho_1 g h_1$ и $p_2 = \rho_2 g h_2$, то

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2,$$

откуда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

В частном случае однородной жидкости $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и $h_1 = h_2 = h$.

Последние равенства выражают закон сообщающихся сосудов: а) *однородная жидкость устанавливается на одном и*

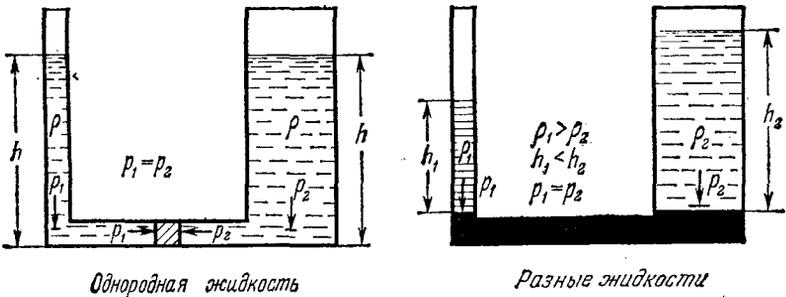


Рис. 116.

том же уровне; б) *высоты взаимно уравновешенных столбов разнородных жидкостей обратно пропорциональны плотностям жидкости.*

§ 50. Давление атмосферы. Опыт Торичелли. Ртутный и металлический барометры

Воздух оказывает на все находящиеся в нем тела давление, равное весу столба атмосферного воздуха с площадью основания, равной единице площади. Это давление, как и давление в жидкости, одинаково по всем направлениям (по закону Паскаля).

Опыт Торичелли продемонстрировал наличие атмосферного давления и впервые позволил его измерить. Состоит этот опыт в следующем: стеклянная трубка длиной около 1 метра, запаянная с одного конца, наполняется ртутью; открытый ее конец зажимается пальцем, после чего трубка переворачивается, опускается зажатый конец в сосуд с ртутью, и палец отнимается. Ртуть в трубке несколько опускается (часть ртути выливается в сосуд) и устанавливается на таком уровне, что столбик ртути в трубке

выше уровня ртути в сосуде (рис. 117). Этот уровень не зависит от того, будет ли трубка установлена строго вертикально, или под некоторым углом к вертикальному направлению. Это следует из того, что давление на некоторой глубине в жидкости зависит только от уровня жидкости и не зависит от формы сосуда.

Приборы, применяемые для измерения атмосферного давления, называются **барометрами**.

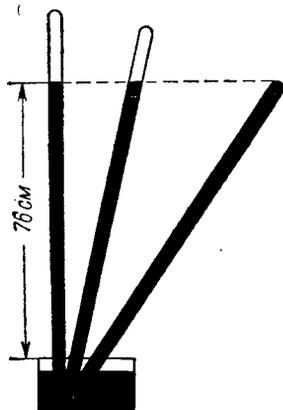


Рис. 117.

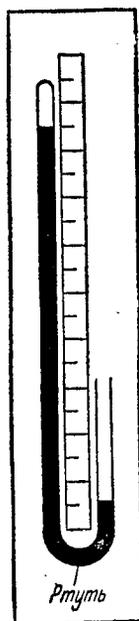


Рис. 118.

Ртутный барометр по принципу работы представляет собой трубку Торичелли с приделанной к ней шкалой для отсчета высоты столба ртути, уравновешивающего атмосферное давление.

В так называемом *сифонном барометре* (рис. 118) столб ртути, уравновешивающий атмосферное давление,

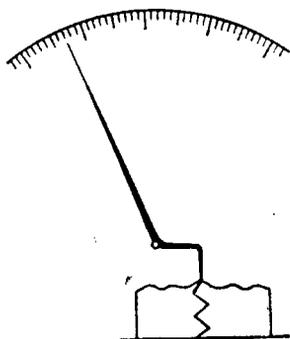


Рис. 119.

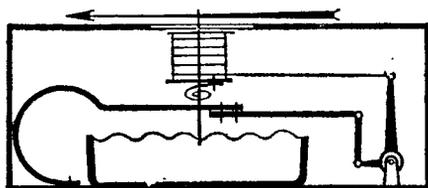


Рис. 120.

определяется разностью отсчетов уровней ртути в закрытом и открытом коленах.

Металлический барометр—анероид (рис. 119 и 120)—состоит из металлической коробки с упругой (волнистой—для увеличения

ее подвижности) крышкой, из которой выкачан воздух. Крышка при помощи системы рычагов соединена со стрелкой-указателем, которая указывает на шкале величину атмосферного давления, действующего сверху на упругую крышку.

§ 51. Закон Архимеда для жидкостей и газов. Условия плавания тел. Ареометры

Закон Архимеда (для жидкостей и газов) заключается в следующем: жидкость или газ действуют на помещенное в них тело с силой, направленной вертикально вверх и равной по величине весу жидкости или газа в объеме, равном объему погруженной части тела. Эта сила называется выталкивающей силой:

$$F_{\text{в}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{в. ж.}}$$

Здесь $F_{\text{в}}$ — выталкивающая сила, действующая вверх, $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости (или газа), $V_{\text{в. ж.}}$ — объем вытесненной жидкости (или газа). Выталкивающая, или, как ее иногда называют, архимедова сила приложена в центре тяжести объема жидкости или жидкостей, вытесненных телом.

Тело плавает в жидкости или в газе, если выталкивающая сила равна по абсолютной величине действующей на тело силе тяжести $P = mg$ (m — масса тела):

$$F_{\text{в}} = mg = \rho_{\text{т}} g V_{\text{т}}$$

($\rho_{\text{т}}$ — плотность тела, $V_{\text{т}}$ — его объем), т. е. когда

$$\rho_{\text{ж}} V_{\text{в. ж.}} = \rho_{\text{т}} V_{\text{т}},$$

или

$$\frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} = \frac{V_{\text{в. ж.}}}{V_{\text{т}}}.$$

А так как $V_{\text{в. ж.}} \leq V_{\text{т}}$, то условие плавания тела в жидкости:

$$\rho_{\text{т}} \leq \rho_{\text{ж}} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} \leq 1.$$

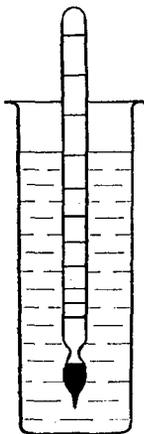


Рис. 121.

Если тело плавает в жидкости, то часть его объема, погруженная в жидкость, равна отношению плотности тела к плотности жидкости.

На этом основано применение ареометра — прибора для измерения плотности жидкости без предварительных взвешиваний.

Ареометр (рис. 121) представляет собой запаянную стеклянную трубку, плавающую в вертикальном положении благодаря помещенному в нижней части грузу (ртуть, дробь).

Глубина погружения ареометра тем больше, чем меньше плотность жидкости, в которую он погружен.

К ареометру прикреплена градуированная шкала, по которой можно узнать плотность жидкости, в которую ареометр погружен.

Примеры решения задач

Задача 78. Найти давление в озере на глубине $h = 4,5$ м. Выразить его в различных системах единиц, а также в упорядочительных внесистемных единицах.

$h = 4,5$ м

Найти p

Решение

Величина давления на глубине h :

$$p = p_0 + p_1,$$

где p_0 — атмосферное давление (давление на поверхности воды); p_1 — давление, оказываемое столбом воды высотой h .

Атмосферное давление равно

$$p_0 = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Давление p_1 столба воды высотой h равно

$$p_1 = \rho gh$$

(ρ — плотность воды).

В системе СИ:

$$p_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 4,5 \text{ м} = 4,41 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Следовательно,

$$p = 1,013 \cdot 10^5 + 4,41 \cdot 10^4 = \underline{1,454 \cdot 10^5 \text{ Па.}}$$

В системе СГС, так как $1 \text{ Па} = 10 \text{ дин/см}^2$,

$$p = \underline{1,454 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2}.$$

В физических атмосферах

$$p = \frac{1,454 \cdot 10^5}{1,013 \cdot 10^5} = \underline{1,43 \text{ атм.}}$$

В барах и миллибарах

$$p = 1,43 \cdot 1,013 = 1,45 \text{ бар} = \underline{1450 \text{ мбар.}}$$

В миллиметрах ртутного столба

$$p = 760 \cdot 1,43 = \underline{1090 \text{ мм рт. ст.}}$$

Задача 79. С помощью гидравлического пресса с отношением площадей поршней $s/S = 1/50$, имеющего коэффициент полезного действия $\eta = 75\%$, требуется в течение $t = 0,5$ минут спрессовать груз массой $8 \cdot 10^4$ кг так, что наибольшая сила давления груза на верхнюю площадку пресса достигает величины $F = 10^6$ Н. При этом груз сжимается на $\Delta h = 30$ см. Найти величину совершенной двигателем работы, считая, что деформация груза по вертикали пропорциональна величине сжимающей силы. Найти среднюю и максимальную мощности двигателя. Определить число ходов малого поршня, если известно, что за один ход малый поршень опускается на $H = 10$ см.

Решение. Так как зависимость деформации груза (по вертикали) от величины действующей на него силы линейная, то работа силы давления большого поршня равна $A = F_{\text{ср}} \Delta h$, где

$$F_{\text{ср}} = \frac{F_{\text{max}} + F_{\text{min}}}{2}$$

— средняя сила давления большого поршня.

Минимальная сила давления большого поршня $F_{\min} = mg$, а максимальная $F_{\max} = F + mg$. Поэтому

$$F_{\text{ср}} = mg + \frac{F}{2}.$$

Совершенная двигателем работа

$$W = \frac{A}{\eta} = \frac{F_{\text{ср}} \Delta h}{\eta} = \left(mg + \frac{F}{2} \right) \frac{\Delta h}{\eta},$$

$$W \approx \left(8 \cdot 10^4 \cdot 9,8 + \frac{10^6}{2} \right) \text{Н} \cdot \frac{0,30 \text{ м}}{0,75} = \underline{5,1 \cdot 10^5 \text{ Дж (510 кДж)}}.$$

Средняя мощность двигателя

$$N_{\text{ср}} = \frac{W}{t} \approx \frac{5,1 \cdot 10^5}{30} \approx \underline{1,73 \cdot 10^4 \text{ Вт (17,3 кВт)}}.$$

Так как мощность двигателя пропорциональна силе, действующей на груз, то наибольшую мощность двигателя можно найти из соотношения

$$\frac{N_{\text{max}}}{N_{\text{ср}}} = \frac{F_{\text{max}}}{F_{\text{ср}}}.$$

$$N_{\text{max}} = N_{\text{ср}} \frac{F_{\text{max}}}{F_{\text{ср}}} = N_{\text{ср}} \frac{F + mg}{mg + F/2},$$

$$N_{\text{max}} = 17,3 \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 9,8 + 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 9,8 + \frac{10^6}{2}} = \underline{24,0 \text{ кВт}}.$$

Высота, на которую поднимается большой поршень за один ход малого поршня,

$$h_1 = H \cdot \frac{s}{S}.$$

Поэтому число ходов, которое должен сделать малый поршень, равно

$$n = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{\Delta h}{H} \frac{S}{s}, \quad n = \frac{0,30 \text{ м}}{0,10 \text{ м}} \cdot \frac{50}{1} = \underline{150 \text{ ходов}}.$$

Задача 80. Два сообщающихся сосуда с одинаковым поперечным сечением соединены трубкой, сечение которой в 10 раз меньше сечения сосуда (рис. 122).

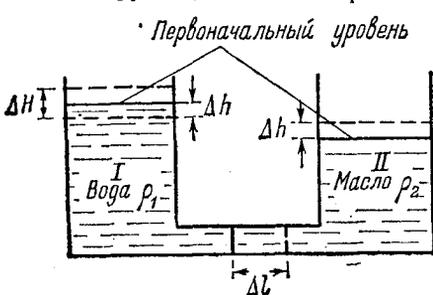


Рис. 122.

В один из сообщающихся сосудов налита вода, в другой — масло, плотность которого 1150 кг/м^3 . На какое расстояние Δl сместится граница раздела жидкостей в трубке, если на поверхности воды налить слой того же масла толщиной $\Delta H = 2,0 \text{ см}$.

Решение. После того как на поверхность воды налили слой масла, эта поверхность опустилась на Δh . Так как оба сообщающихся сосуда имеют одно и то же поперечное сечение, то поверхность масла в другом сосуде поднимается на ту же

величину. Величину Δl можно определить из условия, что увеличение давления с обеих сторон одно и то же:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2.$$

Здесь

$$\Delta\rho_1 = \Delta H\rho_2g - \Delta h\rho_1g \quad \text{и} \quad \Delta\rho_2 = \Delta h\rho_2g.$$

Поэтому $\Delta H\rho_2 - \Delta h\rho_1 = \Delta h\rho_2$, откуда находим $\Delta h = \Delta H \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$.

Так как

$$\frac{\Delta l}{\Delta h} = \frac{S}{s},$$

то

$$\Delta l = \Delta h \frac{S}{s} = \Delta H \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{S}{s},$$

$$\Delta l = 2,0 \text{ см} \frac{1150 \text{ кг}}{(1000 + 1150) \text{ кг}} \cdot 10 = \underline{10,7 \text{ см}}.$$

Задача 81. Кусок металла массой 800 г, будучи погруженным в бензин, весит $P_1 = 7,2$ Н. В некотором растворе он весит $P_2 = 7,5$ Н. Определить плотность раствора, если плотность бензина $\rho_1 = 0,7$ г/см³ и плотность металла больше плотностей бензина и раствора.

Решение. Так как в обоих случаях металл полностью погружен в жидкость и поэтому объемы вытесненных им жидкостей одинаковы, то выталкивающие силы относятся как плотности жидкостей

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Так как кусок металла в обоих случаях находится в равновесии, то

$F_2 = mg - P_2$ и $F_1 = mg - P_1$. Поэтому $\frac{mg - P_2}{mg - P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Отсюда находим

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{mg - P_2}{mg - P_1}, \quad \rho_2 \approx 700 \text{ кг/м}^3 \frac{0,8 \cdot 9,8 \text{ Н} - 7,2 \text{ Н}}{0,8 \cdot 9,8 \text{ Н} - 7,5 \text{ Н}} \approx \underline{1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2}.$$

Задача 82. Кусок пробки плавает в баке с керосином. Какая часть объема пробки погружена в керосин? Плотность пробки $\rho = 0,2$ г/см³, керосина — $\rho_0 = 0,8$ г/см³.

Решение. Выталкивающая сила, действующая на цилиндр в керосине, равна по абсолютной величине действующей на него силе тяжести

$$\rho_0 g V_0 = \rho g V.$$

Отсюда находим

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{0,2}{0,8} = \underline{0,25}.$$

Задача 83. Полый цилиндр с площадью сечения $s = 2,5$ м² плавает в керосине. Чтобы цилиндр плавал в воде с той же осадкой (глубиной погружения), в него требуется поместить груз массой $m = 100$ кг. Найти массу цилиндра M и глубину h его погружения. Плотность керосина $\rho_k = 800$ кг/м³.

Решение. Выталкивающая сила, действующая на цилиндр в керосине, равна по абсолютной величине действующей на него силе тяжести

$$\rho_k g h s = Mg,$$

а выталкивающая сила, действующая на цилиндр в воде, равна силе тяжести, действующей на цилиндр и груз:

$$\rho_B g h s = (M + m) g$$

(ρ_B — плотность воды).

Разделим второе равенство на первое:

$$\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{к}}} = \frac{M+m}{M}.$$

Отсюда находим

$$M = \frac{m}{\left(\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{к}}} - 1\right)}, \quad M = \frac{100 \text{ кг}}{\frac{1000}{800} - 1} = \underline{400 \text{ кг}}.$$

Теперь найдем глубину погружения цилиндра:

$$h = \frac{M+m}{\rho_{\text{в}} \cdot s}, \quad h = \frac{400 \text{ кг} + 100 \text{ кг}}{1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 2,5 \text{ м}^2} = \underline{0,2 \text{ м}}.$$

Задача 84. Пробковый спасательный круг имеет массу $m=3,2$ кг. Определить подъемную силу $F_{\text{п}}$ этого круга в море. Плотность пробки $\rho_{\text{п}}=200$ кг/м³; плотность морской воды $\rho_0=1,03 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. Величина выталкивающей силы должна равняться сумме подъемной силы и действующей на спасательный круг силы тяжести $P=mg$.

$$F_{\text{в}} = F_{\text{п}} + P. \quad (*)$$

Здесь $F_{\text{в}}=V_{\text{п}}\rho_0g$, где объем пробкового пояса $V_{\text{п}}=m/\rho_{\text{п}}$. Следовательно,

$$F_{\text{в}} = mg \frac{\rho_0}{\rho_{\text{п}}}.$$

Подставим это выражение для выталкивающей силы в уравнение (*)

$$mg \frac{\rho_0}{\rho_{\text{п}}} = F_{\text{п}} + mg.$$

Отсюда

$$F_{\text{п}} = mg \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{п}}} - 1 \right), \quad F_{\text{п}} = 3,2 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \left(\frac{1,03}{0,2} - 1 \right) = \underline{130 \text{ Н}}.$$

Задача 85. Надводная часть айсберга имеет объем $V_{\text{н}}=500$ м³. Определить объем айсберга. Плотность льда $\rho_{\text{л}}=920$ кг/м³; плотность морской воды $\rho_0=1,03 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. Выталкивающая сила, действующая на айсберг, равна по абсолютной величине силе тяжести P :

$$F_{\text{в}} = P.$$

С другой стороны,

$$F_{\text{в}} = (V - V_{\text{н}}) \rho_0 g, \quad \text{а} \quad P = V \rho_{\text{л}} g.$$

Следовательно,

$$(V - V_{\text{н}}) \rho_0 = V \rho_{\text{л}}.$$

Отсюда находим объем айсберга

$$V = V_{\text{н}} \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_{\text{л}}}, \quad V = 500 \text{ м}^3 \frac{1,03}{1,03 - 0,92} = \underline{4670 \text{ м}^3}.$$

Задача 86. Аэростат объемом $V=4000$ м³ наполнен гелием. Масса конструкции, оборудования и экипажа $M=3000$ кг. Гелий полностью заполняет баллоны на высоте, где плотность воздуха $\rho_{\text{в}}=0,12 \cdot 10^{-4}$ г/см³. Найти полезную грузоподъемность аэростата Q . Плотность гелия $\rho_{\text{г}}=0,18$ кг/м³.

Решение. Выталкивающая сила равна по абсолютной величине сумме сил тяжести, действующих на аэростат (с оборудованием и экипажем), гелий и полезный груз:

$$F_{\text{в}} = Mg + m_{\text{г}}g + Q.$$

Здесь $F_B = V\rho_B g$ и $m_T = v\rho_T$. Следовательно, $V\rho_B g = Mg + V\rho_T g + Q$, откуда

$$Q = g [V (\rho_B - \rho_T) - M],$$

$$Q = 9,8 \text{ м/с}^2 [4000 \text{ м}^3 (1,20 \text{ кг/м}^3 - 0,18 \text{ кг/м}^3) - 3000 \text{ кг}] = 1056 \text{ Н}.$$

Задача 87*. Воздушный шар объемом $V = 20 \text{ м}^3$, наполненный гелием, поднялся на высоту $h = 180 \text{ м}$ за $t = 1/2$ минуты. Масса шара с оборудованием и корзиной $M = 12 \text{ кг}$. Найти массу груза, поднятого шаром. Плотность воздуха до высоты 180 м считать постоянной, равной $\rho_B = 1,29 \text{ кг/м}^3$, плотность гелия $\rho_T = 0,18 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Шар движется вверх ускоренно под действием равнодействующей всех приложенных к нему вертикальных сил. Так как плотность воздуха считается постоянной на всем пути, то выталкивающая сила F_B тоже имеет постоянную величину. Постоянна и равнодействующая R всех вертикальных сил. Следовательно, движение шара равноускоренное.

Ускорение шара можно найти из формулы $h = \frac{at^2}{2}$:

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 180 \text{ м}}{30^2 \text{ с}^2} = 0,40 \text{ м/с}^2.$$

Равнодействующая всех вертикальных сил направлена вверх и равна по величине

$$R = F_B - Mg - m_T g - mg,$$

где выталкивающая сила $F_B = V\rho_B g$, и масса гелия $m_T = V\rho_T$.

По второму закону Ньютона

$$a = \frac{R}{M + m + m_T} = \frac{F_B - (M + m_T + m)g}{M + m + m_T} = \frac{V\rho_B - M - V\rho_T - m}{M + V\rho_T + m} g.$$

Отсюда найдем

$$m = V\rho_B \frac{g}{a + g} - V\rho_T - M,$$

$$m = 20 \text{ м}^3 \cdot 1,29 \text{ кг/м}^3 \cdot \frac{9,81}{0,40 + 9,81} - 20 \text{ м}^3 \cdot 0,18 \text{ кг/м}^3 - 12 \text{ кг} = 9,2 \text{ кг}.$$

Задача 88. Поверх жидкости плотностью $\rho_1 = 1,0 \text{ г/см}^3$ налита большим слоем жидкость плотностью $\rho_2 = 0,7 \text{ г/см}^3$, причем жидкости не смешиваются. Определить, какая часть объема тела плотностью $\rho_T = 0,9 \text{ г/см}^3$ будет погружена в более плотную жидкость (рис. 123).

Решение. Запишем условие равновесия плавающего тела: $F_B = P$, где $P = V\rho_T g$ ($V = V_1 + V_2$ — объем тела), выталкивающая сила $F_B = V_1\rho_1 g + (V - V_1)\rho_2 g$, где V_1 — объем части тела, погруженной в более плотную жидкость. Поэтому

$$V\rho_T = V_1\rho_1 + V\rho_2 - V_1\rho_2.$$

Отсюда

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_T - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad \frac{V_1}{V} = \frac{0,9 - 0,7}{1,0 - 0,7} = \frac{2}{3}.$$

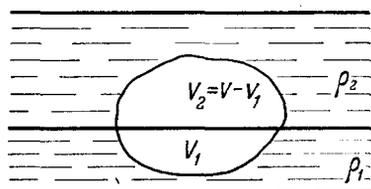


Рис. 123.

Задача 89*. Однородная палочка длиной $l = 1,2 \text{ м}$ из материала плотностью $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$ закреплена шарнирно одним концом на высоте $h = 40 \text{ см}$ над уровнем воды и опущена другим концом в воду. На какой глубине h_0 будет нахо-

даться нижний конец палочки при равновесии? Под каким углом α к горизонту наклонена палочка?

Решение. При равновесии величина момента выталкивающей силы относительно шарнира O , вращающего палочку против часовой стрелки (рис. 124), должна равняться величине момента силы тяжести палочки, вращающего палочку по часовой стрелке:

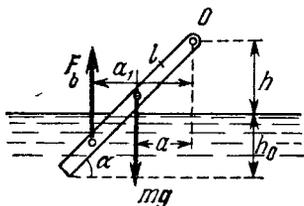


Рис. 124.

$$F_b a_1 = m g a, \quad (*)$$

где a — плечо силы тяжести палочки:

$$a = \frac{h + h_0}{2} \operatorname{ctg} \alpha;$$

a_1 — плечо выталкивающей силы:

$$a_1 = \left(h + \frac{h_0}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Величина выталкивающей силы $F_b = \rho_0 g s \frac{h_0}{\sin \alpha}$, где s — площадь поперечного сечения палочки, ρ_0 — плотность воды:

$$\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3 = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

Сила тяжести

$$P = \rho g s \frac{h + h_0}{\sin \alpha}.$$

Подставляем эти величины в основное равенство (*):

$$\rho_0 g s \frac{h_0}{\sin \alpha} \left(h + \frac{h_0}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha = \rho g s \frac{h + h_0}{\sin \alpha} \cdot \frac{h + h_0}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

или

$$\rho_0 h_0 \left(h + \frac{h_0}{2} \right) = \rho \frac{(h + h_0)^2}{2}.$$

После преобразований получим квадратное уравнение

$$h_0^2 + 2h h_0 - \frac{\rho}{\rho_0 - \rho} h^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$h_0 = -h \pm \sqrt{h^2 + \frac{\rho}{\rho_0 - \rho} h^2} = -h \pm h \sqrt{1 + \frac{\rho}{\rho_0 - \rho}}.$$

Величина h_0 не может быть отрицательной. Следовательно,

$$h_0 = h \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}} \right), \quad h_0 = 0,40 \text{ м} \left(-1 + \sqrt{\frac{1,0}{1,0 - 0,8}} \right) \approx 0,50 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = \frac{h + h_0}{l} = \frac{0,40 + 0,50}{1,2} = 0,75, \quad \alpha = \operatorname{arcsin} 0,75.$$

Задача 90*). С палубы морского теплохода, расположенной на высоте $h = 1,5$ м над водой, падает в воду тонкий алюминиевый стержень длиной $l = 50$ см. С какой скоростью v стержень упадет на дно, если глубина воды на этой стоянке теплохода $H = 3,0$ м? Плотность морской воды $\rho_0 = 1,03$ г/см³, плотность алюминия $\rho = 2,65$ г/см³. Спротивлением воздуха и воды движению стержня пренебречь. Во время падения стержень находится в вертикальном положении.

Решение. Изменение кинетической энергии стержня равно работе равнодействующей всех сил, которые действуют на стержень.

До того момента, когда стержень начинает погружаться в воду, на стержень действует только сила тяжести $P = \rho g l s$ (s — площадь поперечного сечения стержня). Работа этой силы на первом участке пути стержня (до воды) равна

$$A_1 = P \cdot H = \rho g l H s.$$

Когда стержень достигнет воды, на него будут действовать две силы: сила тяжести P и выталкивающая сила F_B . Так как эти силы направлены в разные стороны, то равнодействующая R этих сил направлена вниз и равна

$$R = P - F_B = \rho g l s - F_B.$$

При погружении стержня в воду выталкивающая сила будет изменяться по линейному закону от нуля до величины $\rho_0 g l s$. Поэтому равнодействующая R меняется на этом участке по линейному закону от $\rho g l s$ до $\rho g l s - \rho_0 g l s$. Работу силы R на этом участке можно вычислить как работу средней силы

$$R_{\text{ср}} = \frac{\rho g l s + \rho g l s - \rho_0 g l s}{2} = \left(\rho - \frac{\rho_0}{2} \right) g l s:$$

$$A_2 = R_{\text{ср}} \cdot l = \left(\rho - \frac{\rho_0}{2} \right) g l^2 s.$$

При дальнейшем движении стержня сила R не меняется и равна

$$R = \rho g l s - \rho_0 g l s = (\rho - \rho_0) g l s.$$

Работа этой силы равна

$$A_3 = R (H + h - l) = (\rho - \rho_0) g l (h - l) s.$$

Приравняем полную работу сил, действующих на стержень, изменению его кинетической энергии:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{m v^2}{2},$$

$$\rho g l H s + \left(\rho - \frac{\rho_0}{2} \right) g l^2 s + (\rho - \rho_0) g l (h - l) s = \frac{\rho g l s v^2}{2}.$$

Отсюда найдем

$$v = \sqrt{2g \left[h + H - l - \frac{\rho_0}{\rho} (H - 1,5 l) \right]},$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \left[1,5 + 3,0 - 0,5 - \frac{1,03}{2,65} (3,0 - 1,5 \cdot 0,50) \right]} \text{ м} = \underline{7,8 \text{ м/с}}.$$

IV. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

§ 52. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытные обоснования

Согласно молекулярно-кинетической теории *все вещества состоят из мельчайших частиц-молекул, находящихся в непрерывном движении и взаимодействующих между собой*. Молекула — наименьшая частица вещества, обладающая его химическими свойствами.

Молекулы состоят из атомов ограниченного числа простейших элементов. Молекулы различных веществ имеют различный атомный состав.

Молекулы обладают кинетической энергией и потенциальной энергией взаимодействия. Соотношение между средними значениями кинетической энергии W_k и энергии взаимодействия W_n молекул вещества определяет одно из трех основных его агрегатных состояний. В газообразном состоянии кинетическая энергия частиц велика по сравнению с энергией их взаимодействия ($W_k \gg \gg W_n$); в жидком состоянии кинетическая энергия частиц сравнима с энергией взаимодействия ($W_k \sim W_n$); в твердом состоянии энергия движения мала по сравнению с энергией взаимодействия ($W_k \ll W_n$).

Молекулярно-кинетическая теория вещества подтверждается многочисленными опытами и наблюдениями. Таковы опыты по смешиванию жидкостей, опыты по растворению в жидкостях твердых веществ, наблюдения над сжимаемостью различных веществ, броуновское движение, диффузия; наблюдения над газами — зависимость давления газов на стенки сосуда от плотности и температуры газов и т. д.

Современные экспериментальные методы физики — рентгеноструктурный анализ, наблюдения с помощью электронного микроскопа и другие — позволили наблюдать непосредственно микроструктуру и обогатили наши представления о строении вещества.

§ 53. Броуновское движение

Броуновское движение—*беспорядочное движение мельчайших видимых частиц вещества, находящихся в жидкости во взвешенном состоянии и нерастворимых в ней*. Это движение происходит под действием беспорядочных ударов молекул окружающей жидкости, находящихся в постоянном хаотическом движении. Вследствие беспорядочности ударов молекул движение частиц непрерывно меняется, как это видно из рис. 125. В каждый момент времени оно зависит от преобладающих направлений ударов молекул жидкости.

Интенсивность броуновского движения возрастает с уменьшением размеров помещенных в жидкости частиц. Это связано с тем, что чем больше частицы, тем больше вероятность того, что удары молекул жидкости, действующие на всю частицу, окажутся взаимноуравновешенными, и тем труднее изменить движение частицы (большая частица имеет и большую массу).

Растет также интенсивность броуновского движения с увеличением температуры жидкости, так как при этом увеличивается кинетическая энергия молекул жидкости, определяющая силу ударов.

Эксперименты с броуновским движением сыграли большую роль в развитии молекулярно-кинетической теории.

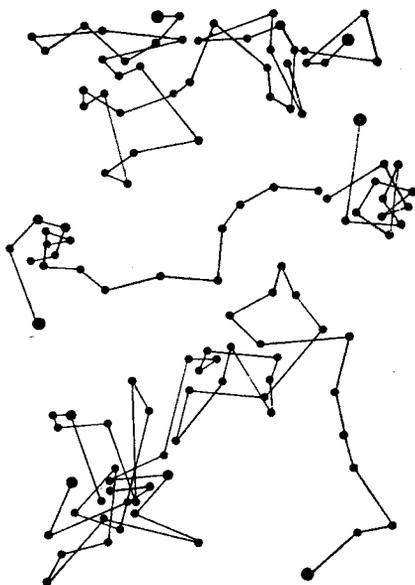


Рис. 125.

§ 54. Диффузия в газах, жидкостях, твердых телах

Диффузия—*взаимное проникновение молекул соприкасающихся веществ*. При диффузии молекулы одного тела, находясь в непрерывном движении, проникают в промежутки между молекулами другого соприкасающегося с ним тела и распределяются между ними.

Диффузия проявляется во всех телах—в газах, жидкостях и твердых телах,—но в разной степени.

Диффузию в газах можно наблюдать, если, например, сосуд с пахучим газом открыть в помещении. Через некоторое время газ распространится по всему помещению.

Диффузию можно наблюдать и в жидкостях, хотя в жидкостях она происходит значительно медленнее, чем в газах. Например, если в стакан налить сначала слой раствора медного купороса, а затем очень осторожно добавить слой воды и оставить стакан в помещении с неизменной температурой, где бы он не подвергался никаким сотрясениям, то через некоторое время исчезнет резкая граница между купоросом и водой, а через несколько дней жидкости перемешаются, несмотря на то, что плотность купороса больше плотности воды. Так же диффундируют вода со спиртом и прочие жидкости.

Диффузия в твердых телах¹ происходит еще медленнее, чем в жидкостях. Она может наблюдаться только в хорошо пришлифованных телах, когда расстояния между поверхностями пришлифованных тел близки к расстояниям между молекулами (10^{-8} см). При этом скорость диффузии увеличивается при повышении температуры и давления.

Разновидность диффузии представляет собой явление осмоса.

Осмос — *проникновение жидкостей и растворов через пористую перегородку*. Некоторые перегородки, проницаемые для одних жидкостей и растворов, не пропускают вовсе, или плохо пропускают другие. Такие перегородки называются полупроницаемыми.

Диффузия и осмос играют большую роль в природе и технике. В природе благодаря диффузии, например, осуществляется питание растений из почвы. Организм человека и животных всасывает через стенки пищеварительного тракта питательные вещества. В технике с помощью диффузии, например, поверхностный слой металлических изделий насыщается углеродом (цементация) и т. д.

§ 55. Взаимодействие молекул

Между молекулами существуют одновременно силы притяжения и силы отталкивания (рис. 126). При малых расстояниях

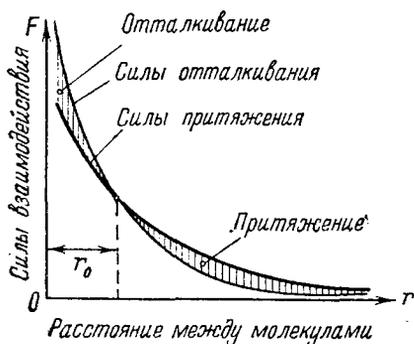


Рис. 126.

между молекулами преобладают силы отталкивания. По мере увеличения расстояния (r) между молекулами как силы притяжения, так и силы отталкивания убывают, причем силы отталкивания убывают быстрее. Поэтому при некотором значении (r_0) расстояния между молекулами силы притяжения и силы отталкивания делаются равными и взаимно уравновешиваются. При этом молекулы находятся в состоянии устойчивого равновесия, так как при увеличении по каким-либо причинам расстояния между ними преобладающие силы притяжения

(рис. 127) восстанавливают равновесное положение, а при уменьшении расстояния равновесие восстанавливается преобладающими силами отталкивания.

Расстояние r_0 между молекулами соответствует минимуму их потенциальной энергии (рис. 128). Для изменения расстояния

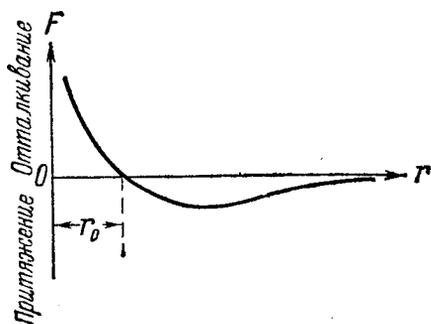


Рис. 127.

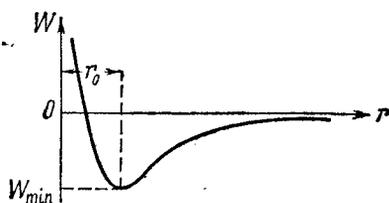


Рис. 128.

между молекулами в ту или другую сторону требуется затратить работу против преобладающих сил притяжения или отталкивания.

§ 56. Движение молекул газов, жидкостей и твердых тел

В характере движения молекул газов, жидкостей и твердых тел есть много общего, имеются и существенные различия.

Общие черты молекулярного движения:

- средняя скорость молекул тем больше, чем выше температура вещества;
- скорости различных молекул данного вещества распределяются таким образом, что количество молекул, обладающих той или иной скоростью, тем больше, чем ближе эта скорость к наиболее вероятной скорости движения молекул данного вещества при данной температуре.

Существенное различие в характере движения молекул газов, жидкостей и твердых тел объясняется различием силового взаимодействия их молекул, связанного с различием средних расстояний между молекулами.

В газах расстояния между молекулами во много раз превышают размеры самих молекул. Вследствие этого силы взаимодействия между молекулами газов малы и молекулы движутся по всему сосуду, в котором находится газ, почти независимо друг от друга, меняя направление и величину скорости при столкновениях с другими молекулами и со стенками сосуда. Путь газовой молекулы представляет собой ломаную линию, похожую на траекторию броуновского движения.

Длина свободного пробега газовых молекул, т. е. средняя длина пути молекул между двумя последовательными столкновениями, зависит от давления и температуры газа. При нормальных температуре и давлении длина свободного пробега составляет около 10^{-5} см (одной стотысячной сантиметра). Молекулы газа примерно 10^{10} раз в секунду сталкиваются друг с другом или со стенками сосуда, изменяя направление своего движения. Этим объясняется тот факт, что скорость диффузии газов мала в сравнении со скоростью поступательного движения молекул газа, которая при нормальных условиях примерно в 1,5 раза больше скорости звука в данном газе.

В жидкостях расстояния между молекулами значительно меньше, чем в газах. Силы взаимодействия каждой молекулы с соседними достаточно велики, вследствие чего молекулы жидкости совершают колебания около некоторых средних положений равновесия. Вместе с тем, поскольку средняя кинетическая энергия молекул жидкостей сравнима с их энергией взаимодействия, молекулы, обладающие случайным избытком кинетической энергии, преодолевают взаимодействие соседних частиц и меняют центр колебания. Практически колеблющиеся частицы жидкости через очень малые промежутки времени (около одной стомиллионной доли секунды) скачкообразно перемещаются в пространстве.

Таким образом, жидкость состоит из множества микроскопических областей, в которых имеется некоторая упорядоченность в расположении близлежащих частиц, меняющаяся со временем и в пространстве, т. е. не повторяющаяся во всем объеме жидкости. О такой структуре говорят, что она обладает ближним порядком.

В твердых телах расстояния между молекулами еще меньше, вследствие чего силы взаимодействия каждой молекулы с соседними настолько велики, что молекула совершает лишь малые колебания около некоторого *постоянного* положения равновесия — узла. В кристаллическом теле выделяется некоторое определенное взаимное расположение узлов, которое носит название кристаллической решетки. Характер кристаллической решетки определяется характером межмолекулярных взаимодействий данного вещества.

Сказанное относится к идеальному кристаллическому твердому телу. В реальных кристаллах имеют место различные нарушения порядка, возникающие в процессе кристаллизации вещества.

Наряду с кристаллами в природе существуют еще аморфные твердые тела, в которых аналогично жидкостям атомы колеблются около хаотически расположенных узлов. Однако перемещения частиц аморфного тела из одного центра колебаний в другой происходят через столь большие промежутки времени, что практически аморфные тела являются твердыми телами.

V. ТЕПЛОТА

§ 57. Внутренняя энергия

Внутреннюю энергию тела составляет сумма кинетических энергий движения молекул тела, потенциальной энергии их взаимодействия и внутримолекулярной энергии (т. е. энергии движения и взаимодействия атомов, ионов, ядер и т. д.). Внутренняя энергия тела не зависит от состояния движения тела как целого и его потенциальной энергии во внешнем силовом поле.

В данном разделе рассматриваются физические явления и процессы, не связанные с изменением внутримолекулярной энергии. Поэтому для удобства и простоты изложения в дальнейшем *под внутренней энергией тела будем понимать сумму кинетических энергий движения молекул вещества и потенциальной энергии их взаимодействия.*

§ 58. Изменение внутренней энергии тела. Количество теплоты. Виды теплопередачи

Существуют два вида воздействий на тело, которые приводят к изменению его внутренней энергии.

1. *Совершение работы.* Например, сжатие или растяжение тела, перемещение тела по негладкой поверхности и т. д.

2. *Нагревание тела* (без совершения над ним работы). Например, нагревание газа в закрытом сосуде, нагревание жидкости и т. д. Процесс изменения внутренней энергии тела без совершения работы носит название *теплопередачи.*

Количество внутренней энергии, сообщенной телу или отнятой от тела в процессе теплопередачи, называется *количеством теплоты.*

Количество теплоты представляет собой меру перехода внутренней энергии от одного тела к другому в процессе теплопередачи.

Существует три вида теплопередачи—конвекция, теплопроводность и лучеиспускание.

1. *Конвекция* (в газах и жидкостях)—*передача теплоты путем перемещения и перемешивания холодных и теплых слоев жидкого или газообразного вещества.*

При конвекции, следовательно, внутренняя энергия передается вместе с потоком нагретой жидкости (газа). Примеры конвекции: циркуляция воздуха в отапливаемой комнате, нагревание жидкости снизу сосуда (при нагревании сосуда сверху конвекция не происходит), тяга в трубах, центральное водяное отопление, ветры, морские течения и т. д.

II. Теплопроводность (газов, жидкостей и твердых тел)—*передача теплоты от одной, более нагретой части тела к другой, менее нагретой, не связанная с перемещением частиц тела.*

Теплопроводность различных тел различна. Некоторые твердые тела являются хорошими проводниками тепла (металлы), другие — плохими (дерево, стекло, кожа). Наиболее плохие проводники — это пористые тела (шерсть, пробка, бумага, дерево и др.). Теплопроводность всех жидкостей, кроме ртути, мала. Газы еще менее теплопроводны, чем жидкости, этим объясняется, в частности, плохая теплопроводность пористых твердых тел — их поры заполняет воздух.

III. Лучеиспускание (излучение)—*осуществляется на расстоянии с помощью электромагнитных волн.* Так, вся энергия, получаемая Землей от Солнца, передается путем лучеиспускания.

§ 59. Единицы количества теплоты

В системе СИ единица количества теплоты — джоуль (Дж) — количество теплоты, эквивалентное механической работе в 1 Дж. Кроме того, временно разрешается пользоваться старой внесистемной единицей теплоты — калорией. Эта единица была установлена раньше других и определялась так:

К а л о р и я — это количество теплоты, необходимое для нагревания 1 г дистиллированной воды на 1°C — с $19,5^{\circ}\text{C}$ до $20,5^{\circ}\text{C}$ при нормальном атмосферном давлении

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж.}$$

При решении задач элементарной физики можно принимать округленно:

$$1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж} \quad \text{и} \quad 1 \text{ Дж} = 0,24 \text{ кал} \quad (\text{точнее} — 0,239).$$

Единица, в 1000 раз большая калории, называется килокалорией или большой калорией.

§ 60. Закон сохранения и превращения энергии

Закон сохранения и превращения энергии является одним из фундаментальных законов природы и может быть сформулирован так:

Во всех процессах, происходящих в природе, энергия не исчезает и не создается, а переходит от одного тела к другому и

превращается из одного вида в другой в эквивалентных количествах.

В данном разделе мы будем рассматривать физические явления, связанные с взаимопревращением механической и внутренней энергии и передачей внутренней энергии от одного тела другому. Раздел физики, занимающийся этими вопросами, называется термодинамикой. Закон сохранения и превращения энергии в рассматриваемом случае выражается первым началом термодинамики:

$$\Delta U + A = Q.$$

Сумма приращения внутренней энергии тела и работы, совершенной телом против внешних сил, равна количеству теплоты, переданной этому телу.

В частном случае, когда изменение внутренней энергии тела происходит в процессе работы, и телу не передается теплота, то

$$\Delta U = -A.$$

В другом частном случае, если телом не совершается работа, то

$$\Delta U = Q.$$

§ 61. Соотношения между внесистемными единицами теплоты и работы

Во всех формулах внутренняя энергия, работа и количество теплоты должны быть выражены в одних и тех же единицах системы СИ, т. е. в джоулях. Соотношения между внесистемными единицами теплоты и работы следующие:

$$J = \frac{1}{860} \frac{\text{Вт}\cdot\text{ч}}{\text{кал}}, \quad B = 860 \frac{\text{кал}}{\text{Вт}\cdot\text{ч}}.$$

Первая из этих величин J носит название механического эквивалента теплоты; она равна работе, выраженной в [Вт·ч], в результате которой может быть получено изменение внутренней энергии тела, равное 1 кал. Вторая, обратная первой, величина B называется тепловым эквивалентом работы и равна количеству теплоты в [кал], эквивалентное одному ватт-часу работы.

§ 62. Разность температур. Абсолютная температурная шкала. Понятие об абсолютном нуле. Единица температуры

Если между двумя соприкасающимися телами не происходит теплопередачи, то говорят, что тела находятся в состоянии теплового равновесия, или, что эти тела находятся при одинаковой температуре. Передача внутренней энергии посредством теплопередачи происходит от тела с большей температурой телу с

меньшей температурой. Разность температур *представляет собой меру отклонения тел от состояния их взаимного теплового равновесия.*

В общепринятой в быту и в технике температурной шкале Цельсия температура измеряется в градусах Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). Величина градуса Цельсия получена из условия, что при нормальном атмосферном давлении температура таяния льда равна 0°C , а температура кипения воды равна 100°C . Этот температурный интервал разделен на 100 равных частей. Температура по шкале Цельсия обозначается t° (или t) и θ° .

В системе СИ в качестве одной из основных единиц принята единица температуры кельвин (К), по величине равный градусу Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). Принятая в этой системе температурная шкала называется термодинамической или абсолютной шкалой.

Термодинамическая температурная шкала — это шкала, в которой за нуль принята температура ($-273,15^{\circ}\text{C}$), и величина кельвина (К) равна величине одного градуса по шкале Цельсия ($^{\circ}\text{C}$).

Температура 0 К называется абсолютным нулем. Абсолютная температура обозначается T . Соотношение между абсолютной температурой и температурой по шкале Цельсия следующее:

$$\begin{aligned} T &= t + 273,15^{\circ}, \\ t &= T - 273,15^{\circ}. \end{aligned}$$

§ 63. Подсчет количества теплоты, необходимой для нагревания тела. Уравнение теплового баланса

Количество теплоты, необходимой для нагревания тела, зависит от его массы, от изменения его температуры и от так называемой теплоемкости вещества, из которого состоит тело.

Удельной теплоемкостью вещества *называется количество теплоты, необходимое для нагревания или охлаждения 1 кг вещества на 1 кельвин.*

Единица удельной теплоемкости имеет размерность в системе СИ — $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right]$. (Внесистемные единицы — $\left[\frac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}}\right]$, или $\left[\frac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot\text{град}}\right]$.)

Таким образом, количество теплоты, необходимое для нагревания тела, измеряется произведением трех величин — удельной теплоемкости (c), массы тела (m) и разности температур:

$$Q [\text{Дж}] = c \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right] \cdot m [\text{кг}] \cdot (T_2 - T_1) \text{К}.$$

Произведение $cm = C \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ (джоуль на кельвин), представляющее собой количество теплоты, полученное всем телом при его нагревании на 1 К или отданное телом при охлаждении на 1 К, называется теплоемкостью тела.

Величина теплоемкости зависит от условий, в которых происходит нагревание или охлаждение тела. Наибольший интерес представляют случаи нагревания (или охлаждения) газа при постоянном объеме и при постоянном давлении. В первом случае теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном объеме (c_V). Очевидно, что при неизменности объема газ не совершает работы и все сообщаемое газу количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа. Во втором случае теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном давлении (c_p). Газ, нагреваемый при постоянном давлении, расширяется. При этом часть сообщаемой ему теплоты идет на работу расширения: $Q_p = \Delta U + A$.

Отсюда заключаем, что $Q_p > Q_V$, и, следовательно, теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме: $C_p > C_V$; для удельных теплоемкостей

$$c_p > c_V.$$

§ 64. Определение удельной теплоемкости вещества опытным путем

Удельная теплоемкость тела определяется опытным путем при помощи калориметра и термометра. Простейший калориметр (рис. 129) состоит из отполированного металлического стакана, поставленного внутри другого металлического стакана на пробках (с целью тепловой изоляции) и наполненного водой или другой жидкостью с известной удельной теплоемкостью. Тело (твердое, или жидкое), нагретое до определенной температуры t , опускают в калориметр, температура в котором измеряется. Пусть до опускания испытуемого тела температура жидкости в калориметре была равна t_1 , а после того, как температуры воды (жидкости) и опущенного в нее тела сравняются, она станет равной θ .

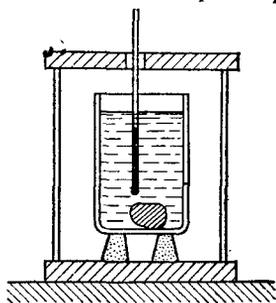


Рис. 129.

Из закона сохранения энергии следует, что теплота Q , отданная нагретым телом, равна сумме теплоты Q_1 , полученной водой, и Q_2 , полученной калориметром:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

$$\underbrace{cm(t - \theta)}_{\text{теплота, отданная испытуемым телом}} = \underbrace{c_1 m_1 (\theta - t_1)}_{\text{теплота, полученная водой}} + \underbrace{c_2 m_2 (\theta - t_1)}_{\text{теплота, полученная калориметром}}$$

Здесь c_1 и m_1 — удельная теплоемкость и масса воды в калориметре, c_2 и m_2 — удельная теплоемкость и масса материала кало-

риметра. Это уравнение, выражающее баланс тепловой энергии, называется уравнением теплового баланса. Из него найдем

$$c = \frac{Q_1 + Q_2}{m(t - \theta)} = \frac{c_1 m_1 (\theta - t_1) + c_2 m_2 (\theta - t_1)}{m(t - \theta)} = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) (\theta - t_1)}{m(t - \theta)}.$$

§ 65. Теплотворная способность различных видов топлива

Теплотворной способностью (или теплотой сгорания топлива) называется количество теплоты, которое выделяет 1 кг топлива при полном сгорании.

Обозначается теплотворная способность топлива обычно буквой q и измеряется в единицах [Дж/кг] (или [ккал/кг]).

Теплотворная способность различных топлив (округленно)

Каменный уголь	5000—8000 ккал/кг
Дрова воздушной сушки	3000 »
Нефть, керосин, бензин и другие нефтяные топлива	10 500—11 500 »
Горючие газы	8000—9000 »

Технические расчеты часто проводятся для так называемого условного топлива, имеющего теплотворную способность:

$$q = 7000 \text{ [ккал/кг]} \approx 29,4 \text{ кДж/кг.}$$

§ 66. Коэффициент полезного действия нагревателя

Топливо при сгорании выделяет количество тепла $Q = qm$ (m —масса топлива в кг).

Коэффициент полезного действия нагревателя—это отношение количества полезного тепла, поглощенного телом, которому оно сообщается от нагревателя, к полному количеству теплоты сгорания топлива

$$\eta = \frac{Q_{\text{полезн}}}{Q_{\text{полн}}},$$

где $Q_{\text{полн}} = q \cdot m$.

Причины потерь энергии в нагревателе: унос теплоты с газами—продуктами сгорания, рассеяние теплоты, нагревание стенок топки и т. д.

§ 67. Плавление. Удельная теплота плавления

Для плавления требуется передать телу некоторое количество энергии. Наоборот, отвердевающее тело отдает энергию.

Точка плавления, или температура плавления, — температура, при которой плавится (также отвердевает) кристаллическое тело при нормальном давлении.

В процессе плавления и отвердевания кристаллических тел их температура остается постоянной, равной температуре плав-

ления данного вещества. Подводимая к телу энергия в процессе его плавления идет на работу преодоления сил межмолекулярного сцепления. Это связано с увеличением средних расстояний между молекулами вещества при переходе его из твердого состояния в жидкое.

Иногда при очень осторожном ведении процесса удается «переохладить» — охладить жидкости на несколько градусов ниже точки плавления без отвердевания. В этом случае малейший толчок ведет к частичному затвердеванию с повышением температуры до точки плавления.

Аморфные тела (стекло, воск, парафин, вар) не имеют определенной точки плавления. Они размягчаются постепенно.

На рис. 130 показаны графики изменения температуры при подводе тепла к кристаллическим и аморфным телам.

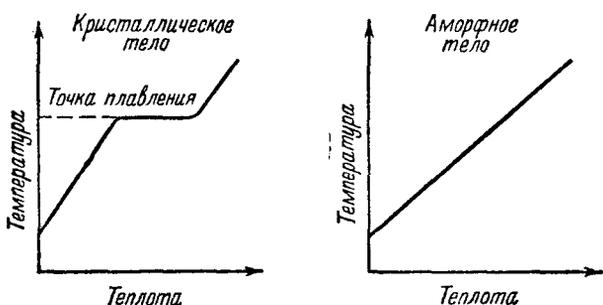


Рис. 130.

Почти все вещества при плавлении увеличиваются в объеме, при отвердевании — уменьшаются (сжимаются). При увеличении давления, под которым находятся эти вещества, их температура плавления повышается. (Давление препятствует увеличению объема.) Исключения: вода (лед), чугун и некоторые другие вещества — при отвердевании они увеличиваются в объеме, при плавлении уменьшаются. Их температура плавления понижается при увеличении давления.

Удельная теплота плавления или теплота плавления (λ) — величина, измеряемая количеством теплоты, необходимым для плавления единицы массы твердого кристаллического вещества при температуре плавления.

Ее размерность: [Дж/кг], [кал/г], или [ккал/кг].

§ 68. Парообразование. Конденсация. Испарение и кипение. Зависимость температуры кипения от давления

Парообразование происходит двумя путями — испарением и кипением.

Испарение происходит с поверхности твердых тел и жидкостей при любой температуре. Испарение с поверхности жидкостей

происходит тем интенсивнее, чем больше свободная поверхность жидкости (так как при этом увеличивается количество молекул, вылетающих из жидкости в единицу времени), чем выше температура жидкости (так как при этом увеличивается скорость движения молекул жидкости и, следовательно, их кинетическая энергия, т. е. увеличивается количество молекул, способных преодолеть молекулярное притяжение жидкости) и чем меньше внешнее давление на свободную поверхность жидкости.

Скорость испарения увеличивается также при удалении образовавшихся над жидкостью паров.

Испарение происходит интенсивнее у тех жидкостей, у которых меньше силы сцепления между молекулами (летучие жидкости).

Механизм кипения. В жидкости при ее нагревании выделяются пузырьки растворенного воздуха, содержащие внутри пар жидкости, появляющийся при повышении ее температуры. При повышении температуры давление пара увеличивается. Под действием выталкивающей силы пузырьки поднимаются вверх, и пока верхние слои жидкости холоднее нижних, частично конденсируются. Когда вся жидкость прогревается достаточно, пузырьки пара достигают поверхности жидкости, давление в них достигает атмосферного, и пар из пузырьков, поднявшихся на поверхность жидкости, вырывается наружу. *Парообразование, происходящее одновременно внутри и с поверхности жидкости, называется кипением.* Каждое вещество при данном давлении кипит при вполне определенной температуре, которая остается неизменной во все время кипения. (За температуру кипения жидкости принимается температура паров кипящей жидкости.)

Точка кипения — температура кипения жидкости при нормальном давлении.

При увеличении внешнего давления температура кипения повышается, при уменьшении — понижается.

Наличие в жидкости растворенного вещества меняет ее температуру кипения.

Парообразование как при испарении, так и при кипении характеризуется удельной теплотой парообразования, определенной для каждого вещества при данных внешних условиях, температуре и давлении.

Удельная теплота парообразования (или теплота парообразования— r) — величина, измеряемая количеством теплоты, необходимым для превращения единицы массы жидкости в пар при температуре парообразования.

Ее размерность: [Дж/кг]; [кал/г], или [ккал/кг].

Количество теплоты, потребное для обращения в пар массы жидкости, подогретой предварительно до температуры парообразования, равно

$$Q = rm.$$

Удельная теплота парообразования уменьшается с повышением температуры испаряющейся жидкости. В частности, при повышении температуры кипения (например, вследствие повышения давления) удельная теплота парообразования при кипении уменьшается.

Удельная теплота парообразования определяется опытным путем при помощи калориметра с сухопарником (рис. 131). Пар жидкости поступает из кипятильника через сухопарник в калориметр с той же жидкостью. Здесь пар конденсируется, нагревая при этом жидкость. Сухопарник служит для отделения

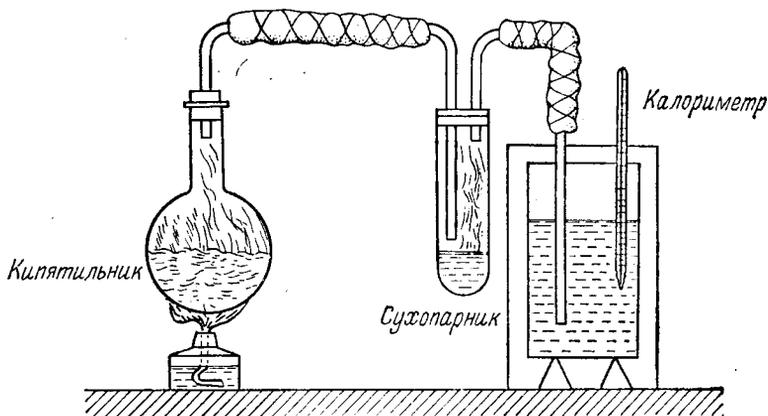


Рис. 131.

капель жидкости от пара и состоит из пробирки с двумя трубками — длинной, соединяющейся с кипятильником, и короткой, идущей к калориметру. Капельки жидкости оседают на дне пробирки, а в калориметр идет сухой пар. Измерив температуру жидкости в калориметре и записав уравнение теплового баланса, нетрудно найти удельную теплоту парообразования.

При конденсации некоторой массы пара выделяется такое количество тепла, какое необходимо для превращения той же массы жидкости в пар.

Примеры решения задач

В следующих задачах надо обращать особенное внимание на размерности различных величин.

Задача 91. Стальное изделие закалялось нагреванием до $t_1 = 800^\circ\text{C}$ с последующим опусканием в масло, взятое при температуре $t_2 = 10^\circ\text{C}$, масса которого $m = 2$ кг; при этом масло нагрелось до $\theta = 40^\circ\text{C}$. Найти массу M стального изделия, если известно, что при переносе в масло изделие охладилось на $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ и затем вынуто из масла. Удельная теплоемкость стали $c_{\text{ст}} =$

$$= 0,15 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \text{ а масла } c_{\text{м}} = 0,45 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}.$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 800^\circ\text{C} \\
 t_2 &= 10^\circ\text{C} \\
 \theta &= 40^\circ\text{C} \\
 m &= 2 \text{ кг} \\
 \Delta t &= 20^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

$$c_{\text{ст}} = 0,15 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$$

$$c_{\text{м}} = 0,45 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$$

Найти M

$$M = \frac{c_{\text{м}}}{c_{\text{ст}}} \cdot \frac{\theta - t_2}{t_1 - \Delta t - \theta} m, \quad M = \frac{0,45}{0,15} \cdot \frac{40 - 10}{800 - 20 - 40} 2 \text{ кг} = \underline{0,25 \text{ кг.}}$$

Задача 92. В цилиндрический сосуд с водой опускают тело массой m , плотность которого меньше плотности воды. Как при этом меняется уровень воды в сосуде, если площадь дна сосуда равна S и вода из сосуда не выливается?. Плотность воды ρ .

Решение. Сила давления на дно сосуда равна $F = mg$, где m — масса содержимого сосуда. При опускании в сосуд тела сила давления меняется на величину $\Delta F = mg$.

Так как плотность тела меньше плотности воды, то тело плавает в воде и не опускается на дно сосуда. Это означает, что изменение давления на дно обязано изменению уровня воды в сосуде и

$$\Delta P = \rho g \Delta h, \quad \text{а} \quad \Delta F = \frac{\Delta P}{S} = \rho g \frac{\Delta h}{S}.$$

Отсюда

$$\rho g \frac{\Delta h}{S} = mg \quad \text{и} \quad \Delta h = \frac{mS}{\rho}.$$

Задача 93. Автомобиль «Москвич» расходует $m = 5,67$ кг бензина на $S = 50$ км пути. Определить мощность N , развиваемую при этом двигателем автомобиля, если скорость движения $v = 72$ км/ч и к.п.д. двигателя $\eta = 22\%$. Теплотворная способность бензина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Решение. Энергия, которая выделяется при сгорании бензина, равна

$$W = m \cdot q.$$

Полезная работа составляет $\eta/100$ от этой энергии и равна

$$A_n = W \cdot \frac{\eta}{100} = 0,22 W.$$

А мощность двигателя равна

$$N = \frac{A_n}{t} = \frac{0,22 mq}{t},$$

где t — время, за которое расходуется масса m топлива. Это время очевидно равно

$$t = \frac{S}{v}. \quad \text{Поэтому} \quad N = \frac{0,22 mqv}{S}.$$

Подставляя числовые данные, выраженные в системе СИ, получим

$$N = \frac{0,22 \cdot 5,67 \text{ кг} \cdot 45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} \cdot 20 \text{ м/с}}{50 \cdot 10^3 \text{ м}} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ Вт.}$$

Задача 94. Двигатель расходует $m_1 = 300$ г нефтяного топлива на $W_1 = 1$ кВт мощности в час. Найти к.п.д. двигателя. Теплотворную способность топлива принять равной $q = 11\,000$ ккал/кг.

Решение. Количество теплоты при часовом расходе топлива на 1 кВт мощности $Q = m_1 q$.

Полезная энергия, которую даст двигатель в течение 1 часа,

$$W_1 = 1 \text{ кВт} \cdot 3600 \text{ с} = 3600 \text{ кДж} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{W}{m_1 q}, \quad \eta = \frac{3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}}{0,250 \text{ кг} \cdot 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}} = 0,31.$$

$$\eta = \underline{31\%}.$$

Задача 95. В латунный калориметр массой $m_k = 200$ г, содержащий $m_b = 0,5$ кг воды при 20°C опускается кусок льда массой $m_l = 50$ г, взятый при $t_l = -10^\circ\text{C}$. Определить температуру воды в калориметре после того, как лед растает. Удельная теплоемкость латуни $c_{\text{лат}} = 37,6$ Дж/кг·град, льда $c_l = 209$ Дж/кг·град; теплота плавления льда $\lambda = 320$ Дж/кг.

Решение. Количество теплоты, отданное водой:

$$Q_1 = m_b c_b (t_b - \theta).$$

Количество теплоты, отданное калориметром:

$$Q_2 = m_k c_{\text{лат}} (t_b - \theta).$$

Количество теплоты, полученное льдом при его нагревании до 0°C : $Q_3 = m_l c_l |t_l|$. То же при таянии льда при 0°C : $Q_4 = \lambda m_l$. Количество теплоты, полученное талой водой при нагревании до θ , равно $Q_5 = m_l c_b \theta$.

Составляем уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5,$$

$$m_b c_b (t_b - \theta) + m_k c_{\text{лат}} (t_b - \theta) = m_l c_l |t_l| + \lambda m_l + m_l c_b \theta,$$

$$-m_b c_b \theta - m_k c_{\text{лат}} \theta + m_l c_b \theta = m_l c_l |t_l| + \lambda m_l - m_b c_b t_b - m_k c_{\text{лат}} t_b.$$

Отсюда находим

$$\theta = \frac{m_l c_l |t_l| + \lambda m_l - m_b c_b t_b - m_k c_{\text{лат}} t_b}{m_l c_b - m_b c_b - m_k c_{\text{лат}}}.$$

Подставляем известные величины в системе СИ:

$$m_k = 0,200 \text{ кг}, \quad m_l = 0,050 \text{ кг}, \quad c_b = 1,1 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)},$$

$$\theta = \frac{0,050 \text{ кг} \cdot 209 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 10^\circ + 320 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0,050 \text{ кг} - 0,5 \text{ кг} \cdot 520 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 20^\circ}{0,050 \text{ кг} \cdot 520 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} - 0,5 \text{ кг} \cdot 520 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} - 0,200 \text{ кг} \cdot 37,6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}}$$

$$= \frac{0,200 \text{ кг} \cdot 37,6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 20^\circ}{0,050 \text{ кг} \cdot 520 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} - 0,5 \text{ кг} \cdot 520 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} - 0,200 \text{ кг} \cdot 37,6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}}$$

$$= 13,1^\circ\text{C}.$$

Задача 96. В сосуд, в котором находилось $m_b = 2$ кг воды и $m_l = 0,5$ кг льда при $t_0 = 0^\circ\text{C}$, впушен водяной пар, имеющий температуру $t_n = 150^\circ\text{C}$

(при нормальном давлении). После того как лед растаял, температура в сосуде установилась $\theta = 30^\circ\text{C}$. Какое количество пара влущено в воду, если известно, что теплоемкость сосуда $C_c = 150$ кал/град? Удельная теплоемкость пара $c_n = 0,47 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ и теплота парообразования $r = 539$ кал/г.

Решение. Количество теплоты, отданное паром при его охлаждении до температуры парообразования:

$$Q_1 = m_n c_n (t_n - 100^\circ).$$

Количество теплоты, отданное паром при его конденсации:

$$Q_2 = m_n r.$$

Количество теплоты, отданное сконденсированной водой при ее охлаждении до температуры $\theta^\circ\text{C}$:

$$Q_3 = m_n c_v (100^\circ - \theta).$$

Количество теплоты, полученное льдом при его таянии:

$$Q_4 = m_d \lambda.$$

Количество теплоты, полученное всей водой при ее нагревании до температуры $\theta^\circ\text{C}$:

$$Q_5 = (m_v + m_d) c_v \theta.$$

Количество теплоты, полученное сосудом при его нагревании до температуры $\theta^\circ\text{C}$:

$$Q_6 = m_c c_c \theta = C_c \theta.$$

Составляем уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6,$$

$$m_n c_n (t_n - 100^\circ) + m_n r + m_n c_v (100^\circ - \theta) = m_d \lambda + (m_v + m_d) c_v \theta + C_c \theta.$$

Отсюда находим

$$m_n = \frac{m_d \lambda + (m_v + m_d) c_v \theta + C_c \theta}{c_n (t_n - 100^\circ) + r + c_v (100^\circ - \theta)}.$$

Кроме известных из условия величин, подставляем

$$\lambda = 80 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}, \quad c_v = 2 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$$

$$m_n = \frac{0,5 \text{ кг} \cdot 80 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}} + (2,0 + 0,5) \text{ кг} \cdot 1 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 30^\circ + 0,150 \frac{\text{ккал}}{\text{град}} \cdot 30^\circ}{0,47 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 50^\circ + 539 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}} + 1 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 70^\circ} = 0,19 \text{ кг}.$$

Задача 97. Свинцовая дробинка, летящая со скоростью $v_1 = 100$ м/с, пробивает доску и вылетает из нее со скоростью $v_2 = 60$ м/с. На сколько градусов нагреется дробинка, если считать, что на увеличение ее внутренней энергии идет 40% потерянной кинетической энергии? Удельная теплоемкость свинца $c = 125,4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$

Решение. Уменьшение кинетической энергии пули, пробившей доску:

$$\Delta W_k = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

На нагревание пули требуется затратить энергию, равную $Q = cm\Delta t$. Приравняем $cm\Delta t = \alpha \Delta W_k$. Отсюда находим

$$\Delta t = \frac{\alpha \Delta W_k}{cm} = \frac{\alpha (v_2^2 - v_1^2)}{2c},$$

$$\Delta t = \frac{0,40 \cdot (100^2 - 60^2) \text{ м}^2/\text{с}^2}{2 \cdot 125,4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}} = 10,2 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Задача 98. На электроплитке мощностью $N = 500$ Вт, имеющей к.п.д. $\eta = 40\%$, нагрелось $V = 0,8$ л воды, взятой при $t = 15$ °С, до кипения и 10% ее обратилось в пар. Как долго длилось нагревание?

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до температуры кипения,

$$Q_1 = c_B m (100^\circ - t).$$

Для испарения 10% воды необходимо затратить количество теплоты

$$Q_2 = 0,10 mr.$$

Приравниваем полное количество теплоты величине полезной работы электроплитки, причем количество теплоты выражаем в джоулях:

$$\eta N \tau = (Q_1 + Q_2), \quad \eta N \tau = c_B m (100^\circ - t) + 0,10 mr.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{c_B (100^\circ - t) + 0,10 r}{\eta N} m,$$

где

$$r = 539 \text{ кал/г} = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}; \quad c_B = 4,18 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

Масса воды $m = 0,8 \text{ л} \cdot 1 \text{ кг/л} = 0,8 \text{ кг}$,

$$\tau = \frac{4,18 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \cdot 85^\circ + 0,10 \cdot 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}{0,40 \cdot 500 \text{ Вт}} \cdot 0,8 \text{ кг} = 2300 \text{ Дж/Вт} = 2300 \text{ с} \approx 38 \text{ минут}.$$

Задача 99*. Из сосуда, в котором находится $m = 100$ г воды при 0 °С, быстро выкачивают воздух; при этом за счет интенсивного испарения происходит замораживание неиспарившейся воды. Какое количество воды может быть обращено таким способом в лед? Удельная теплота испарения воды при 0 °С $r = 539$ кал/г; удельная теплота плавления льда $\lambda = 80$ кал/г. Сосуд считать теплоизолированным.

Решение. При замерзании m_1 г воды выделится количество теплоты $Q_1 = \lambda m_1$. При испарении $(m - m_1)$ г воды поглощается $Q_2 = r(m - m_1)$. Так как $Q_1 = Q_2$, то $\lambda m_1 = r(m - m_1)$, откуда

$$m_1 = \frac{r}{\lambda + r} m, \quad m_1 = \frac{539}{539 + 80} \cdot 100 \text{ г} = 87 \text{ г}.$$

§ 69. Коэффициенты линейного и объемного расширения, Особенности расширения воды

Опыт показывает, что большинство тел при нагревании увеличивается в объеме*). Степень теплового расширения различных тел характеризуется коэффициентом расширения. Рассматривая

*) За исключением воды при температуре $(0 - 4)$ °С и некоторых других веществ.

твердые тела, сохраняющие свою форму при изменении температуры, различают: а) изменение линейных размеров, т. е. размеров по какому-нибудь направлению—линейное расширение и б) изменение объема тела при изменении температуры—объемное расширение.

Коэффициентом линейного расширения называется величина, показывающая, на какую долю начальной длины удлиняется тело, взятое при температуре 0°C при нагревании его на 1°C :

$$\alpha = \frac{l_t - l_0}{l_0 t},$$

где α —коэффициент линейного расширения, l_0 —длина при температуре 0°C , l_t —длина при температуре $t^{\circ}\text{C}$.

Из этого выражения находим

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t).$$

Величина α имеет размерность $\left[\frac{1}{\text{град}} \right]$, или $[\text{град}^{-1}]$.

Коэффициентом объемного расширения называется величина, показывающая, на какую долю начального объема увеличивается объем тела, взятого при температуре 0°C , при нагревании его на 1°C :

$$\beta = \frac{V_t - V_0}{V_0 t},$$

где β —коэффициент объемного расширения, V_0 —объем тела при температуре 0°C , V_t —объем тела при температуре t .

Из последнего равенства находим

$$V_t = V_0 (1 + \beta t).$$

Величина β имеет размерность $\left[\frac{1}{\text{град}} \right]$, или $[\text{град}^{-1}]$.

Коэффициент объемного расширения тела равен примерно утроенному коэффициенту линейного расширения:

$$\beta \approx 3\alpha.$$

Доказательство. Если вырезать из твердого тела куб с ребром l , то его объем при 0°C равен

$$V_0 = l_0^3.$$

При $t^{\circ}\text{C}$ объем тела становится равным

$$V_t = [l_0 (1 + \alpha t)]^3 = l_0^3 (1 + \alpha t)^3 = V_0 (1 + \alpha t)^3.$$

Но

$$V_t = V_0 (1 + \beta t).$$

Следовательно,

$$1 + \beta t = (1 + \alpha t)^3.$$

Раскрываем скобки в правой части этого равенства:

$$1 + \beta t = 1 + 3\alpha t + 3(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3, \quad \text{или} \quad \beta t = 3\alpha t + 3(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3.$$

Замечаем, что так как α — величина очень малая — порядка от нескольких сотысячных до нескольких миллионных долей единицы, то и αt является малой величиной. Следовательно, квадрат $(\alpha t)^2$, а тем более куб $(\alpha t)^3$ настолько малы в сравнении с (αt) , что их можно отбросить. Тогда последнее равенство примет вид

$$\beta t \approx 3\alpha t \quad \text{или} \quad \beta \approx 3\alpha.$$

Для жидкостей коэффициенты объемного расширения β несколько выше, чем для твердых тел, — от нескольких тысячных до нескольких десятитысячных единицы.

Вода подчиняется общим законам теплового расширения только при температуре выше 4°C . Также лед при $t < 0^\circ\text{C}$. При температуре от 0°C до 4°C вода при повышении температуры не расширяется, а, наоборот, сжимается. При 4°C вода имеет наименьший объем, т. е. наибольшую плотность. Зимой на дне глубоких водоемов оказывается более плотная вода, сохраняющая температуру 4°C и после замерзания верхнего слоя.

Примеры решения задач

При решении задач на тепловое расширение тел надо иметь в виду, что в формулах § 69 l_0 и v_0 означают длину и объем тела при 0°C , а не при начальной температуре тела, отличной от нуля. Чтобы найти связь, например, между длинами при температурах t_1 и t_2 , нужно из уравнений

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1) \quad \text{и} \quad l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$$

исключить l_0 . В результате получим

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \approx l_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)].$$

Практически это приближенное равенство дает результаты, мало отличающиеся от полученных по точному выражению, и его можно применять при решении задач, однако обязательно с указанной оговоркой.

Задача 100. Тело массой $M = 100$ кг скользит вниз по плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Как изменится внутренняя

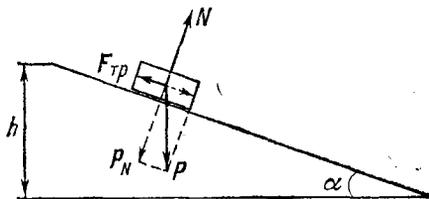


Рис. 132.

энергия тела и наклонной плоскости при перемещении тела на $h = 3,0$ м по высоте? Коэффициент трения скольжения $f = 0,2$. Выразить это изменение внутренней энергии в калориях.

$M = 100 \text{ кг}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $f = 0,2$
 $h = 3,0 \text{ м}$

Найти ΔW

Решение

При скольжении тела по плоскости (рис. 132) тело и плоскость нагреваются. Их внутренняя энергия увеличивается. Это изменение внутренней энергии равно работе силы трения

$$\Delta W = A_{\text{тр.}}$$

Величина силы трения $F_{\text{тр}} = fMg \cos \alpha$. Путь, пройденный телом при опускании на h

$$l = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Следовательно, работа силы трения

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} l = fMg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = fMgh \operatorname{ctg} \alpha.$$

Увеличение внутренней энергии:

$$\Delta W = A_{\text{тр}} = 0,2 \cdot 100 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 3,0 \text{ м} \sqrt{3} = 1020 \text{ Дж.}$$

$$\Delta W = 0,24 \text{ кал/Дж} \cdot 1020 \text{ Дж} = \underline{245,0 \text{ кал.}}$$

Задача 101. При $t_1 = 20^\circ \text{C}$ отмерено $l_{1\text{ж}} = 100 \text{ м}$ железной и $l_{1\text{м}} = 100 \text{ м}$ медной проволоки. Какова будет разница их длин при $t_2 = 60^\circ \text{C}$. Коэффициент линейного расширения железа $\alpha_{\text{ж}} = 0,000012 \text{ град}^{-1}$, меди — $\alpha_{\text{м}} = 0,000017 \text{ град}^{-1}$.

Решение. $l_{1\text{ж}} = l_{0\text{ж}}(1 + \alpha_{\text{ж}}t_1)$, $l_{2\text{ж}} = l_{0\text{ж}}(1 + \alpha_{\text{ж}}t_2)$. Удлинение железа

$$l_{2\text{ж}} - l_{1\text{ж}} = l_{0\text{ж}}\alpha_{\text{ж}}(t_2 - t_1).$$

Заменяем $l_{0\text{ж}} = \frac{l_{1\text{ж}}}{1 + \alpha_{\text{ж}}t_1}$ и находим величину удлинения железной проволоки:

$$l_{2\text{ж}} - l_{1\text{ж}} = l_{1\text{ж}} \frac{\alpha_{\text{ж}}(t_2 - t_1)}{1 + \alpha_{\text{ж}}t_1}. \quad (1)$$

Аналогично

$$l_{2\text{м}} - l_{1\text{м}} = l_{1\text{м}} \frac{\alpha_{\text{м}}(t_2 - t_1)}{1 + \alpha_{\text{м}}t_1}. \quad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1) и учитывая, что $l_{1\text{ж}} = l_{1\text{м}} = l_1$, находим

$$l_{2\text{м}} - l_{2\text{ж}} = l_1 \frac{(\alpha_{\text{м}} - \alpha_{\text{ж}})(t_2 - t_1)}{(1 + \alpha_{\text{м}}t_1)(1 - \alpha_{\text{ж}}t_1)},$$

$$l_{2\text{м}} - l_{2\text{ж}} = 100 \text{ м} \frac{(0,000017 - 0,000012) \text{ град}^{-1} (60 - 20) \text{ град}}{(1 + 0,000017 \cdot 20)(1 + 0,000012 \cdot 20)} \approx \underline{0,02 \text{ м} = 20 \text{ мм.}}$$

Задача 102. Плотность воды $\rho = 0,991 \text{ г/см}^3$. Какую температуру имеет вода? Коэффициент объемного расширения воды $0,00018 \text{ град}^{-1}$.

Решение. Плотность воды при 4°C $\rho_0 = 1,00 \text{ г/см}^3 = 1000 \text{ кг/м}^3$; при заданной температуре

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_{4^\circ} [1 + \beta(t - 4^\circ)]} = \frac{\rho_0}{1 + \beta(t - 4^\circ)},$$

откуда

$$\beta(t - 4^\circ) = \frac{\rho_0}{\rho} - 1.$$

Отсюда находим

$$t = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho\beta} + 4^\circ, \quad t = \frac{1,000 - 0,991}{0,991 \cdot 0,00018 \text{ град}^{-1}} + 4^\circ = \underline{54^\circ}.$$

Задача 103. Нефть хранится в цилиндрическом баке высотой $h = 10$ м. При температуре $t = -10^\circ\text{C}$ уровень нефти не доходит до верхнего края бака на $\Delta h = 50$ см. При какой температуре t_1 нефть начнет выливаться из бака? Коэффициент объемного расширения нефти $\beta = 0,0010$ град $^{-1}$. Расширением стенок бака при нагревании пренебречь.

Решение. Так как площадь поперечного сечения бака не изменяется по его высоте, то объем нефти в баке пропорционален высоте уровня нефти над дном бака. Поэтому в формулы объемного расширения вместо объема нефти будем вписывать глубину наполнения бака.

Высоту h_0 нефти в баке при 0°C можно найти из уравнения

$$h - \Delta h = h_0(1 + \beta t):$$

$$h_0 = \frac{h - \Delta h}{1 + \beta t} = \frac{(10 - 0,50) \text{ м}}{1 + 0,0010(-10)} = \frac{9,50}{0,99} = 9,595 \text{ м}.$$

(Хотя эта величина промежуточная, лучше найти ее численное значение, чтобы не усложнять дальнейших формул.)

При дальнейшем повышении температуры

$$h = h_0(1 + \beta t_1),$$

откуда

$$\beta t_1 = \frac{h}{h_0} - 1$$

и

$$t_1 = \frac{h - h_0}{\beta h_0}, \quad t_1 = \frac{(10,000 - 9,595) \text{ м}}{0,0010 \text{ град}^{-1} \cdot 9,595 \text{ м}} = \underline{42,2^\circ\text{C}}.$$

Задача 104*. Лист железа, имеющий при 0°C размеры $2,0 \times 3,0 \text{ м}^2$ нагревается до $t = 200^\circ\text{C}$. Найти увеличение площади листа при нагревании до этой температуры. Коэффициент линейного расширения железа $\alpha = 0,00012 \frac{1}{\text{град}}$.

Решение. Коэффициент увеличения площади листа при нагревании с достаточной точностью можно принять равным удвоенному коэффициенту линейного расширения. Докажем это для простоты на примере квадратного листа с размером стороны l :

при 0°C :

$$s_0 = l_0^2,$$

при $t^\circ\text{C}$:

$$s_t = l_t^2 = l_0^2(1 + \alpha t)^2 = l_0^2(1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2) \approx s_0(1 + 2\alpha t)$$

(при малости линейного коэффициента расширения α его квадратом можно пренебречь).

Итак,

$$s = s_0(1 + 2\alpha t), \quad \Delta s = s - s_0 = 2s_0\alpha t,$$

$$\Delta s = 2 \cdot 2,0 \cdot 3,0 \cdot 0,000012 \cdot 200 = 0,0288 \text{ м}^2, \quad \Delta s = \underline{288 \text{ см}^2}.$$

Задача 105. В сообщающихся сосудах, соединенных тонкой трубкой со скользящей в ней пробкой, находится керосин, в одном сосуде при $t_1 = 20^\circ\text{C}$, в другом — при $t_2 = 80^\circ\text{C}$. Каково отношение высот столбов керосина в сосудах, если коэффициент объемного расширения керосина $\beta = 0,0010$ град $^{-1}$?

Решение. Отношение высот столбов жидкости обратно пропорционально ее плотностям в обоих сосудах:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

А так как

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{m}{V_0(1+\beta t_1)} = \frac{\rho_0}{1+\beta t_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1+\beta t_2},$$

то

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1+\beta t_2}{1+\beta t_1}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1+0,0010 \cdot 80}{1+0,0010 \cdot 20} = 1,06.$$

Задача 106. Медная и вольфрамовая пластинки толщиной $\delta = 2$ мм каждая склепаны так, что при 0°C они образуют плоскую биметаллическую пластинку. Определить средний радиус изгиба этой биметаллической пластинки при $t = 100^\circ\text{C}$. Коэффициент линейного расширения меди $\alpha_m = 0,000017$ град $^{-1}$, вольфрама $\alpha_b = 0,000004$ град $^{-1}$.

Решение. Средняя длина медной пластинки при нагревании до 100°C : $l_m = l_0(1 + \alpha_m t)$, где l_0 — длина пластинки при 0°C ; длина вольфрамовой пластинки

$$l_b = l_0(1 + \alpha_b t).$$

При определении радиуса будем считать, что торцы пластинок при деформации не смещаются и что увеличением толщины пластинок при нагревании можно пренебречь. Из рис. 133 находим

$$l_m = \varphi \left(R + \frac{\delta}{2} \right), \quad l_b = \varphi \left(R - \frac{\delta}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\varphi \left(R + \frac{\delta}{2} \right) = l_0(1 + \alpha_m t),$$

$$\varphi \left(R - \frac{\delta}{2} \right) = l_0(1 + \alpha_b t).$$

Рис. 133.

Чтобы исключить неизвестные величины φ и l_0 , делим одно уравнение на другое:

$$\frac{R + \delta/2}{R - \delta/2} = \frac{1 + \alpha_m t}{1 + \alpha_b t}.$$

Отсюда находим

$$R = \frac{\delta}{2} \frac{2 + (\alpha_m + \alpha_b)t}{(\alpha_m - \alpha_b)t},$$

$$R = \frac{2 \text{ мм}}{2} \cdot \frac{2 + (0,000017 + 0,000004) \cdot 200}{(0,000017 - 0,000004) \cdot 200} = 0,77 \cdot 10^3 \text{ мм} = \underline{0,77 \text{ м}}.$$

ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Состояние некоторой определенной массы газа однозначно определяется объемом газа V , давлением p и температурой T . Эти величины (V, p, T) называются параметрами состояния или термодинамическими параметрами и не являются

взаимонезависимыми, а связаны между собой. Математическое выражение этой взаимосвязи называется уравнением состояния. Процессы в газе, при которых меняются его параметры состояния, называются газовыми процессами.

В технических приложениях часто приходится иметь дело с газовыми процессами при постоянном значении одного из параметров состояния. Газовые процессы, при которых величина одного из параметров состояния сохраняется неизменной, так называемые изопроцессы*) подчиняются эмпирическим газовым законам.

Газовые процессы принято изображать графически в координатах $p-V$, $V-T$ и $p-T$.

§ 70. Расширение газов при постоянном давлении. Закон Гей-Люссака

Газы, как и все тела, расширяются при нагревании, но значительно интенсивнее.

Процесс расширения и сжатия при постоянном давлении ($p = \text{const}$) называется изобарическим или изобарным процессом. Он подчиняется закону Гей-Люссака.

*Увеличение температуры газа на 1°C при постоянном давлении влечет за собой увеличение его объема на $\frac{1}{273}$ **) часть того объема, который занимает газ при 0°C ,*

$$V = V_0(1 + \alpha t),$$

где V_0 —объем газа при 0°C ; α —коэффициент объемного расширения газа, имеющий для всех идеальных***) газов одно и то же значение

$$\alpha \approx \frac{1}{273} \approx 0,00366.$$

Заменяя в предыдущем уравнении $t = T - 273,15^\circ$, получим другое выражение закона Гей-Люссака

$$V = V_0 \alpha T.$$

Объем некоторой массы газа при постоянном давлении пропорционален его абсолютной температуре.

Пусть температура газа изменяется от значения T_1 до значения T . При температуре T_1 объем газа равен

$$V_1 = V_0 \alpha T_1,$$

*) «Изо» — одинаковый, равный.

**) Точнее $\frac{1}{273,15}$.

***) Об идеальном газе см. дальше, § 76.

а при температуре T объем газа равен

$$V = V_0 \alpha T.$$

Разделив второе равенство на первое, получим

$$\frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1}, \quad \text{или} \quad V = V_1 \frac{T}{T_1}.$$

Отсюда находим

$$\frac{V}{T} = \frac{V_1}{T_1} = \text{const} \left(= \frac{V_0}{T_0} \right).$$

При изобарическом процессе отношение объема газа к его абсолютной температуре постоянно.

График изобарического процесса в координатах p — V показан на рис. 134, а, а в координатах V — T —на рис. 134, б.

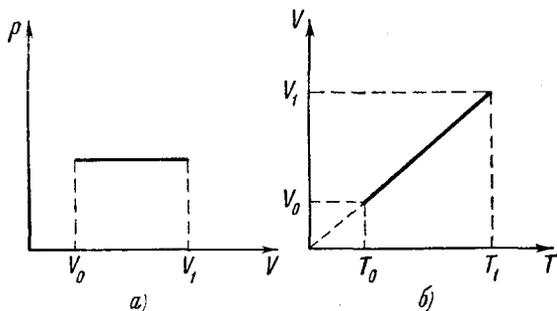


Рис. 134.

Осуществить изобарический процесс можно, например, нагревая газ в цилиндре с легко подвижным поршнем, находящимся под действием постоянной силы, например под действием веса поршня.

§ 71. Изотермический процесс. Закон Бойля—Мариотта

Закон Бойля—Мариотта устанавливает зависимость между изменением давления газа и его объема при постоянной температуре, т. е. при изотермическом расширении или сжатии газа, — при изотермическом процессе. Согласно закону Бойля—Мариотта: *при неизменной температуре давление определенной массы газа изменяется обратно пропорционально объему газа:*

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Отсюда

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Это равенство показывает, что *при изотермическом процессе произведение объема данной массы газа на его давление постоянно:*

$$V \cdot p = \text{const}.$$

Величина константы—своя для каждой температуры данного газа. Изотермический процесс для каждого газа графически изображается серией (семейством) кривых (рис. 135), называемых изотермами и выражающих зависимость между объемом и давлением этого газа,—каждая кривая для одной какой-нибудь температуры. В случае идеального газа эти кривые представляют собой гиперболы.

Закон Бойля—Мариотта объясняется молекулярно-кинетической теорией вещества, изложенной в разделе IV, следующим образом.

В своем беспорядочном движении молекулы газа ударяются о стенки сосуда. Очень большое число следующих друг за другом толчков воспринимается как непрерывно действующее давление газа на стенку сосуда. При уменьшении объема в не-

сколько раз во столько же раз увеличивается число молекул в единице объема газа, а следовательно, и число ударов молекул о стенку в единицу времени, так как, если температура не изменяется, то неизменна и средняя скорость молекул. Следовательно, и давление газа, вызванное весьма частыми ударами молекул, увеличивается во столько же раз.

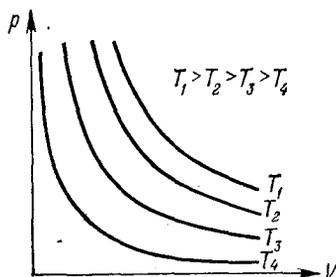


Рис. 135.

§ 72. Изохорический процесс. Закон Шарля

Закон Шарля относится к изохорическому (или изохорному) процессу. Так называется процесс при постоянном объеме: $V = \text{const}$. Согласно этому закону: *давление определенной массы газа при нагревании на 1°C при постоянном объеме увеличивается на $\frac{1}{273}$ его давления при 0°C .*

Коэффициент увеличения давления

$$\gamma = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{1}{273}.$$

Этот коэффициент γ называется термическим коэффициентом давления газа.

Давление газа при изохорическом процессе изменяется согласно формуле

$$p = p_0 (1 + \gamma t).$$

Так как $t = T - 273,15^\circ$, то $p = p_0 \gamma T$.

Отсюда следует, что если газ при температуре T находился под давлением p_1 , а при температуре T его давление равно p , то

$$p = p_1 \frac{T}{T_1}.$$

Откуда находим

$$\frac{p}{T} = \frac{p_1}{T_1} = \text{const} \left(= \frac{p_0}{T_0} \right).$$

При изохорическом процессе отношение давления газа к его абсолютной температуре постоянно.

График изохорического процесса в координатах $p-V$ показан на рис. 136, а, а $p-T$ на рис. 136, б.

Закон Шарля легко объясняется молекулярно-кинетической теорией. При увеличении температуры газа скорости его молекул

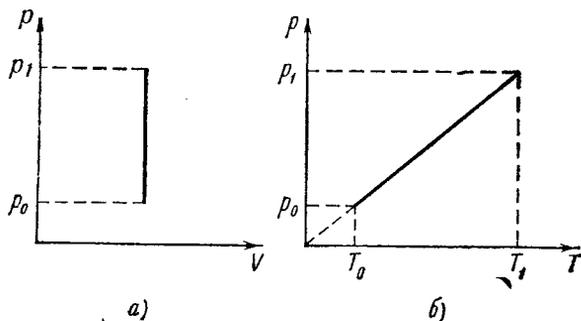


Рис. 136.

увеличиваются. Расстояние от одной стенки сосуда до другой молекула проходит в соответственно меньшее время. Поэтому молекула газа чаще сталкивается со стенками сосуда. Соответственно увеличивается и давление молекул газа на стенки сосуда.

§ 73. Адиабатический процесс

Адиабатическим или адиабатным процессом называется процесс сжатия—расширения газа без теплового обмена с внешней средой.

Кривая, изображающая адиабатический процесс в координатах $V-p$, называется адиабатой. Чтобы судить о характере адиабаты, рассмотрим, например, адиабатический процесс сжатия (рис. 137).

На рис. 137 нанесены четыре изотермы, изображающие изотермические процессы при четырех температурах. Допустим, что параметры состояния газа в начале адиабатического сжатия соответствуют точке 1 на рис. 137 лежащей на изотерме T_1 .

При адиабатическом сжатии температура газа повышается и через некоторый промежуток времени станет $T_2 > T_1$; при этом будет $V_2 < V_1$ и $p_2 > p_1$. Состояние газа в этот момент изобразится точкой 2 на изотерме T_2 . Рассуждая таким же образом, придем дальше в точку 3 на изотерме T_3 и затем в точку 4 на

изотерме T_4 , соответствующей конечной температуре адиабатического процесса.

Из рис. 137 видно, что адиабата проходит круче изотермы. Это связано с тем, что при адиабатическом сжатии газ нагревается, и давление при одном и том же уменьшении объема газа будет выше, чем при изотермическом сжатии.

В теории идеального газа выводится уравнение адиабаты

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma,$$

или

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где $\gamma > 1$ ($\gamma = c_p/c_V$, где c_p и c_V — теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме, соответственно).

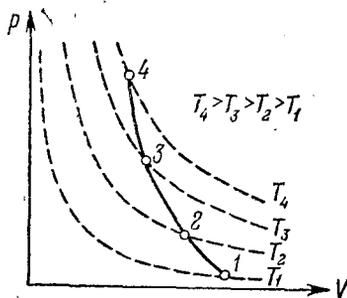


Рис. 137.

Адиабатический процесс может быть осуществлен при полной теплоизоляции газа либо когда процесс протекает настолько быстро, что теплообменом с внешней средой за короткий промежуток времени, в течение которого идет процесс, можно пренебречь.

Адиабатический процесс играет большую роль в природе и технике. Например, он осуществляется в двигателях внутреннего сгорания, где процессы протекают в малые доли секунды. Другой пример адиабатического процесса — сжатие и расширение газа, в котором распространяется звуковая волна.

§ 74. Формула объединенного закона Бойля—Мариотта—Гей-Люссака

Общая зависимость между всеми тремя параметрами состояния газа — объемом, давлением и температурой — определяется объединенным законом газового состояния Бойля—Мариотта—Гей-Люссака. Он выражается уравнением

$$\frac{Vp}{T} = C,$$

где $C = \text{const}$ — константа, которая имеет величину, постоянную для данной массы данного газа, и носит название «газовой постоянной».

Для данной массы какого-либо газа произведение давления на объем, деленное на абсолютную температуру, есть величина постоянная.

Величина газовой постоянной может быть вычислена, если взять данную массу газа при нормальных условиях:

$$T = T_0 = 273,15 \text{ К (0 } ^\circ\text{C)} \quad \text{и} \quad p = p_0 = 1 \text{ атм,}$$

$$C = \frac{V_0 p_0}{273,15} = \frac{m p_0}{\rho_0 \cdot 273,15}.$$

Здесь ρ_0 — плотность данного газа при нормальных условиях.

Вывод уравнения объединенного закона газового состояния. Пусть для двух каких-либо произвольных состояний одного и того же газа параметры газового состояния будут:

$$1) V_1, p_1, T_1; \quad 2) V_2, p_2, T_2.$$

Так как законы Бойля—Мариотта и Гей-Люссака выполняются независимо от последовательности протекания различных процессов, то можно представить, что переход от начального состояния к конечному произошел в два этапа. Пусть, например, сначала изотермическим процессом ($T = \text{const}$) доведено до величины p_2 давление, а затем изобарическим процессом доведена до величины T_2 температура. В результате изотермического процесса по закону Бойля—Мариотта газ занял бы объем

$$V'_1 = \frac{V_1 p_1}{p_2}. \quad (*)$$

Далее, на основании закона Гей-Люссака:

$$\frac{V'_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Подставляя сюда выражение (*) для V'_1 , получим уравнение объединенного закона газового состояния

$$\frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V_2 p_2}{T_2}.$$

Это означает, что для данной массы газа $\frac{Vp}{T} = \text{const}$.

Примечание. Уравнение объединенного закона газового состояния можно вывести и иначе, представив переход от начального состояния к конечному сначала изобарическим процессом, подчиняющимся закону Бойля—Мариотта, затем изотермическим. Можно также воспользоваться изохорическим процессом (по закону Шарля) и изобарическим и т. д.

§ 75. Уравнение Менделеева — Клапейрона

Уравнение, выражающее объединенный закон газового состояния, можно записать не для произвольной массы газа, а для одного кг-моля газа.

По закону Авогардо 1 кг-моль любого газа при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре

$T_0 = 273,15 \text{ К}$ занимает один и тот же объем $v = 22,4 \text{ м}^3$. Следовательно, для одного кг-моля любого газа газовая постоянная имеет одну и ту же величину, которая называется универсальной газовой постоянной, обозначается R и может быть вычислена, исходя из нормальных условий. В системе СИ

$$R = \frac{vp_0}{T_0} = \frac{(1,013 \cdot 10^5) \text{ Па} \cdot 22,4 \frac{\text{м}^3}{\text{кг-моль}}}{273,15 \text{ К}} = 8310 \frac{\text{Дж}}{\text{кг-моль} \cdot \text{К}}.$$

Во внесистемных единицах

$$R \approx 2 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{град}} *).$$

Следовательно, для одного кг-моля любого газа уравнение газового состояния записывается одинаково:

$$\frac{vp}{T} = R \quad \text{или} \quad pv = RT.$$

Это уравнение легко обобщается для любой массы газа, если объем моля v газа выразить через произвольный объем V таким образом:

$$v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu V}{m},$$

где μ — масса одного моля.

Подставив это значение v в предыдущее уравнение, получим *уравнение состояния для любой массы газа*, которое называется уравнением Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

§ 76. Понятие идеального газа. Границы применения газовых законов. Физический смысл абсолютной температуры идеального газа

Под идеальным газом понимают такой *воображаемый газ, который следовал бы точно газовым законам*. Таким мог бы быть газ, обладающий следующими свойствами:

1) газ находится в состоянии «теплового равновесия», т. е. температура и давление во всех местах сосуда, занимаемого газом, одинаковы;

2) между молекулами газа не существует сил притяжения;

3) молекулы не сталкиваются между собой.

Установление «теплового равновесия» в газе происходит настолько быстро, что в большинстве практически важных случаев

*) Более точно, $R = 1,986 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$.

им можно не интересоваться. Что касается двух других из упомянутых свойств, то только при достаточно малых давлениях и не слишком низких температурах расстояния между молекулами реальных газов настолько велики по сравнению с величиной самих молекул, что силы взаимного притяжения молекул исчезающе малы и объем, занимаемый молекулами, настолько мал по сравнению со всем объемом газа, что молекулы газа практически не сталкиваются между собой. При этих условиях реальные газы по своим свойствам близки к идеальному газу.

При больших давлениях расстояния между молекулами газов уменьшаются, силы их взаимного притяжения увеличиваются, объем молекул становится соизмеримым с общим объемом газа и изложенные в предыдущих параграфах законы становятся недостаточно точными. При очень больших давлениях в формулы, выражающие газовые законы для идеальных газов, вводятся существенные поправки.

При весьма низких температурах, близких к температурам сжижения газов, также сказываются различные свойства реальных газов, отличающие их от идеального газа. Дальнейшее понижение температуры влечет за собой сжижение, а потом и затвердевание газа.

Теория идеального газа показывает, что молекулы идеального газа совершают только хаотическое, поступательное движение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа зависит только от абсолютной температуры, притом прямо пропорциональна ей. Таким образом, температурная шкала Кельвина для идеального газа получает такой физический смысл. *Абсолютная температура есть количественная мера внутренней энергии теплового движения молекул идеального газа.*

§ 77. Работа газа в газовых процессах

Работа газа при его расширении наиболее просто рассчитывается для изобарического процесса, например, при изобарическом расширении газа в цилиндре. Если площадь поршня S , давление газа p и при расширении газа поршень отодвигается на расстояние l , то сила, действующая на поршень в процессе расширения газа $F = pS$, а работа этой силы

$$A = Fl = pSl.$$

А так как произведение Sl равно изменению объема газа ΔV , то

$$A = p\Delta V.$$

При изобарическом процессе работа газа равна по абсолютной величине площади под графиком зависимости давления от объема.

Для подсчета работы, например, изотермического расширения газа разобьем диаграмму (рис. 138) на вертикальные полоски, и

на ширине каждой из этих полосок заменим изотермический процесс изобарическим при среднем для этой полоски давлении $p_{1\text{ ср}}$, $p_{2\text{ ср}}$ и т. д. Работа расширения газа на ширине каждой полоски будет равна ее площади. При этом вся изотерма заменяется ступенчатой кривой, которая тем ближе к изотерме, чем уже полоски. В пределе суммарная площадь всех прямоугольников равна площади, ограниченной изотермой и вертикальными прямыми для начального состояния V_1 и конечного V_2 .

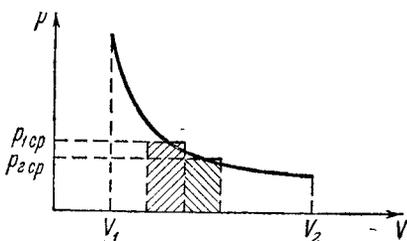


Рис. 138.

Так же и для любого другого процесса работа газа изображается площадью под диаграммой $V-p$ в соответствующем масштабе.

§ 78. Смеси газов. Закон Дальтона

Если в сосуде имеется смесь из нескольких газов, то давление в сосуде равно сумме парциальных давлений — давлений, которые были бы в сосуде, если бы его занимал только один из газов.

В этом заключается закон Дальтона для смеси газов.

Примеры решения задач

Задача 107. В баллоне емкостью $V = 200$ л находится при $t = 20^\circ\text{C}$ кислород под давлением $p = 100$ атм. Привести его объем к нормальным условиям *).

$V = 200$ л
 $t = 20^\circ\text{C}$
 $p = 100$ атм

Найти V_0

Решение

Применим формулу объединенного закона в таком виде:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}$$

Отсюда находим $V_0 = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} V$. А так как $T = t + 273,15 = 20 + 273,15 = 293,15$ К, то

$$V_0 = \frac{100}{1,033} \cdot \frac{273,15}{293,15} 200 \text{ л} \approx \underline{180 \text{ л}}$$

Задача 108. Сколько молекул воздуха находится в комнате размером $8 \times 4 \times 3$ м³ при температуре 18°C и давлении 740 мм рт. ст.?

Решение. Заданный объем приведем к нормальным условиям, как в предыдущей задаче:

$$V_0 = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} V = \frac{740}{760} \frac{273,15}{273,15 + 18} (8 \cdot 4 \cdot 3) \text{ м}^3 = 0,92 \cdot 96 \text{ м}^3 = 88 \text{ м}^3.$$

*) Нормальными условиями принято считать температуру $t_0 = 0^\circ\text{C}$ ($T_0 = 273,15$ К) и давление $p_0 = 1$ атм (760 мм рт. ст.).

Так как 1 кг-моль воздуха занимает объем $v=22,4 \text{ м}^3$ и содержит $N=6 \cdot 10^{23} \cdot 1000=6 \cdot 10^{26}$ молекул, то число молекул в комнате:

$$n = \frac{V_0}{v} N = \frac{88 \text{ м}^3}{22,4 \text{ м}^3} \cdot 6 \cdot 10^{26} = \underline{2,35 \cdot 10^{27} \text{ молекул.}}$$

Задача 109. В баллоне объемом $V=100 \text{ л}$ находится $m=25 \text{ кг}$ сжатого кислорода при температуре $t=20^\circ\text{C}$. Найти давление кислорода.

Решение. На основании уравнения Менделеева—Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{находим} \quad p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V},$$

где $\mu = 2 \cdot 16 = 32 \frac{\text{кг}}{\text{кг-моль}}$, $T = 273,15 + 20 = 293,15 \text{ К}$; $R = 8310 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг-моль}) \text{ К}}$.

Подставляем эти величины:

$$p = \frac{25 \text{ кг} \cdot 8310 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг-моль}) \text{ К}} \cdot 293,15 \text{ К}}{32 \frac{\text{кг}}{\text{кг-моль}} \cdot 0,100 \text{ м}^3} = 19 \cdot 10^6 \text{ Па} = \underline{187 \text{ атм.}}$$

Задача 110. Из баллона объемом $V=2,0 \text{ литра}$ выкачан воздух до давления $p=400 \text{ мм рт. ст.}$ при комнатной температуре, после чего горлышко баллона закрыто пробкой. Затем баллон опускается в воду той же температуры, и на глубине $h=1,2 \text{ м}$ пробка вынимается из горлышка. Какой объем $V_{\text{в}}$ воды войдет в баллон, если атмосферное давление в этот момент $p_0=750 \text{ мм рт. ст.}$?

Решение. Здесь имеет место изотермический процесс сжатия воздуха в баллоне. По закону Бойля—Мариотта $pV = p_1 V_1$, где p_1 —давление воды на глубине 1,2 м: $p_1 = \left(750 + 760 \frac{1,2}{10,33} \right) \text{ мм. рт. ст.} = 838 \text{ мм рт. ст.}$ Поэтому

$$V_{\text{в}} = V - V_1 = V - \frac{p}{p_1} V = V \left(1 - \frac{p}{p_1} \right), \quad V_{\text{в}} = 2,0 \text{ л} \left(1 - \frac{400}{838} \right) = \underline{1,044 \text{ л.}}$$

Задача 111. Два шара емкостью по $V_0=1,0 \text{ л}$ каждый соединены трубкой диаметром $d=6 \text{ мм}$ и длиной $l=1,0 \text{ м}$. В трубке находится капля ртути, которая при 0°C располагается посередине трубки (рис. 139). Насколько



Рис. 139.

передвинется капля ртути, если левый шар нагревается на 2°C , а правый охлаждается на 3°C ?

Решение. Капелька ртути будет передвигаться при изменении температуры воздуха в баллонах так, что давление с обеих сторон будет одинаковым.

Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона для левого баллона (1):

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

(m — масса газа). То же — для правого баллона (2):

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Разделив второе равенство на первое, получим

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{275,15}{272,15} = 1,011. \quad (1)$$

Общий объем баллонов и трубки

$$V_1 + V_2 = 2 \cdot V_0 + \frac{\pi d^2}{4} l,$$

$$V_1 + V_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ мм}^3 + \frac{\pi \cdot 6^2 \text{ мм}^2}{4} \cdot 1000 \text{ мм} = 2028 \cdot 10^3 \text{ мм}^3. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2): $V_1 = 1008 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$; $V_2 = 1020 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$.

Изменение объема каждого сосуда $\Delta V = 6000 \text{ мм}^3$, откуда, учитывая площадь сечения трубы 28 мм^2 , найдем

$$x = \frac{6000 \text{ мм}^3}{28 \text{ мм}^2} = \underline{\underline{210 \text{ мм}^2}}.$$

На это расстояние капелька передвинется в сторону охлажденного шара.

Задача 112. Барометр дает неверные показания из-за наличия небольшого количества воздуха над столбиком ртути. При давлении $p_1 = 755 \text{ мм рт. ст.}$ барометр показывает 748 мм рт. ст. , а при $p_2 = 740 \text{ мм рт. ст.}$ — 736 мм рт. ст. Каково будет показание барометра при давлении $p_3 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ Температура одна и та же во всех случаях. Изменением уровня ртути в чашке пренебречь.

Решение. p_1, p_2, p_3 — истинное давление; h_1, h_2, h_3 — соответствующие показания барометра в мм.

Обозначим: H — высота трубки барометра над уровнем ртути в чашке барометра, s — площадь поперечного сечения трубки, $V_{в1}, V_{в2}, V_{в3}$ — объем воздуха в трубке и $p_{в1}, p_{в2}, p_{в3}$ — давление воздуха в трубке.

Здесь имеет место изотермическое изменение объема воздуха в трубке. По закону Бойля — Мариотта

$$p_{в1} V_{в1} = p_{в2} V_{в2} = p_{в3} V_{в3}, \quad (1)$$

где

$$p_{в1} = p_1 - h_1 \text{ [мм рт.ст.]}, \quad p_{в2} = p_2 - h_2 \text{ [мм рт.ст.]}, \quad p_{в3} = p_3 - h_3 \text{ [мм рт.ст.]},$$

$$V_{в1} = (H - h_1) s, \quad V_{в2} = (H - h_2) s, \quad V_{в3} = (H - h_3) s.$$

Подставляем эти величины в выражение (1) и после деления на s получаем

$$(p_1 - h_1)(H - h_1) = (p_2 - h_2)(H - h_2) = (p_3 - h_3)(H - h_3). \quad (2)$$

Отсюда находим

$$H = \frac{h_1(p_1 - h_1) - h_2(p_2 - h_2)}{(p_1 - h_1) - (p_2 - h_2)} = \frac{748 \cdot 7 - 736 \cdot 4}{7 - 4} = 764 \text{ мм}.$$

Теперь приравниваем правую и, например, среднюю части равенства (2) $(p_2 - h_2)(H - h_2) = (p_3 - h_3)(H - h_3)$, откуда

$$h_3^2 - h_3(H + p_3) + [H p_3 - (p_2 - h_2)(H - h_3)] = 0.$$

Данное уравнение лучше решать в цифрах:

$$h_3^2 - 1524 h_3 + (764 \cdot 760 - 4 \cdot 28) = 0,$$

$$h_3 = 762 \pm \sqrt{762^2 - 764 \cdot 760 + 4 \cdot 28},$$

$$h_3 = 762 - \sqrt{4 \cdot 28} = 762 - 4 \sqrt{7},$$

(здесь знак (+) не подходит),

$$h_3 = \underline{751,4 \text{ мм.}}$$

Задача 113. Вертикальный цилиндр высотой H с поперечным сечением s сообщается с внешним воздухом с помощью крана (рис. 140). К верхней крышке цилиндра подвешен на пружине скользящий без трения поршень, который при открытом кране находится на высоте h_1 от дна цилиндра. Кран закрывается при температуре t_1 и давлении воздуха p_1 . Затем воздух в нижней части цилиндра нагревается до t_2 ; при этом поршень устанавливается на высоте h_2 от дна цилиндра. Определить коэффициент жесткости пружины c , полагая, что деформация пружины пропорциональна действующей на нее силе.

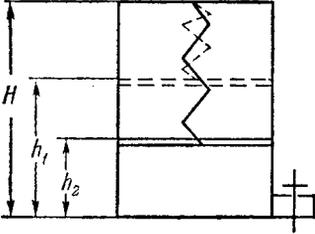


Рис. 140.

Поршень считать невесомым и теплоизолирующим. (Коэффициентом жесткости пружины называется коэффициент пропорциональности между величиной силы, действующей на пружину, и изменением длины пружины.)

Решение. Для воздуха в нижней части цилиндра

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{p_1 h_1}{T_1} = \frac{p_2 h_2}{T_2}. \quad (1)$$

Для воздуха в верхней части цилиндра (изотермический процесс)

$$p_1 (H - h_1) = p_{2в} (H - h_2), \quad (2)$$

где $p_{2в}$ — давление сжатого воздуха в верхней части цилиндра.

При этом $p_2 = p_{2в} + \frac{F_{пр}}{s}$, где сила, с которой пружина действует на поршень $F_{пр} = c(h_2 - h_1)$.

С учетом этого уравнение (2) запишется так:

$$p_1 (H - h_1) = \left[p_2 - \frac{c}{s} (h_2 - h_1) \right] (H - h_2).$$

Отсюда

$$\frac{c}{s} (h_2 - h_1) = p_2 - p_1 \frac{H - h_1}{H - h_2}. \quad (3)$$

Из уравнения (1) находим

$$p_2 = \frac{h_1 T_2}{h_2 T_1} p_1.$$

Тогда уравнение (3) запишется так:

$$\frac{c}{s} (h_2 - h_1) = p_1 \left(\frac{h_1 T_2}{h_2 T_1} - \frac{H - h_1}{H - h_2} \right).$$

Коэффициент жесткости пружины из этого уравнения

$$c = \frac{s p_1}{h_2 - h_1} \left(\frac{h_1 T_2}{h_2 T_1} - \frac{H - h_1}{H - h_2} \right).$$

Задача 114. Сколько качаний надо сделать, чтобы при помощи насоса, захватывающего при каждом качании $V_1 = 40 \text{ см}^3$ воздуха, наполнить камеру колеса велосипеда, имеющую объем $V = 2000 \text{ см}^3$, настолько, чтобы площадь ее соприкосновения с дорогой была $s = 60 \text{ см}^2$ при нагрузке на колесо $F = 350 \text{ Н}$,

если в начальный момент камера заполнена на 3/4 при атмосферном давлении? Атмосферное давление считать нормальным, равным $p_0 = 760$ мм рт.ст.

Решение. Здесь имеет место изотермический процесс, подчиняющийся закону Бойля — Мариотта:

$$p_0 V_1 n = (p_0 + p) (V - V'), \quad (1)$$

где V' — объем, который будет иметь при давлении $(p_0 + p)$ воздух, занимающий при нормальном давлении объем V_0 ; этот объем найдем из уравнения $p_0 V_0 = (p_0 + p) V'$:

$$V' = \frac{p_0}{p_0 + p} V_0 = 0,75 \frac{p_0}{p_0 + p} V.$$

Подставляем эту величину в уравнение (1):

$$p_0 V_1 n = (p_0 + p) \left(V - 0,75 \frac{p_0}{p_0 + p} V \right).$$

Отсюда находим число качаний:

$$n = \frac{V}{V_1} \left(0,25 + \frac{p}{p_0} \right).$$

А так как $p = \frac{F}{s}$, то

$$n = \frac{V}{V_1} \left(0,25 + \frac{F}{s p_0} \right).$$

Здесь объемы могут быть выражены в любых единицах, размерность же $p_0 s$ должна быть такой же, как размерность F , так как F задано в [Н] и s — в $[м^2]$, то p_0 нужно выразить в $Н/м^2$:

$$p_0 = 1,033 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Тогда

$$n = \frac{2000 \text{ см}^3}{40 \text{ см}^2} \left(0,25 + \frac{350 \text{ Н}}{6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 1,033 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2} \right) = 40,7, \quad n = \underline{41}.$$

§ 79. Насыщающие и ненасыщающие пары жидкости. Их свойства. Зависимость давления насыщающего пара от температуры

При испарении жидкости идет двойной процесс: переход молекул из жидкости в пространство над ее поверхностью и обратный.

В жидкости некоторые наиболее быстро движущиеся молекулы поверхностного слоя вырываются за сферу молекулярного действия жидкости и переходят в паровую фазу в пространстве над поверхностью жидкости. Здесь каждая молекула, испытав ряд столкновений с другими молекулами пара, может приблизиться к поверхности жидкости, попасть в сферу ее молекулярного действия и перейти в жидкость.

Вначале испарения число молекул, вылетающих из жидкости, больше, нежели возвращающихся. По мере же увеличения числа молекул над жидкостью их возвращается все больше и больше. Наконец, при достаточной плотности молекул над поверхностью жидкости количество вылетающих и возвращающихся молекул

сравнивается. Наступает насыщение — предельная концентрация пара данной жидкости в пространстве над ней при данной температуре; дальнейшее увеличение концентрации пара при этой температуре невозможно. Однако необходимо подчеркнуть, что равновесие между насыщающим паром и его жидкостью не статическое, а динамическое, так как и в состоянии насыщения испарение не прекращается, а продолжается, но одновременно происходит и процесс конденсации, причем количество возвращающихся в жидкость, т. е. конденсирующихся, молекул пара в точности равно количеству вылетающих, т. е. испаряющихся, молекул, вследствие чего концентрация пара в пространстве над жидкостью не меняется.

Насыщающим (или насыщенным) называется пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью.

При меньшей концентрации — пар ненасыщающий.

Пар, находящийся долго в замкнутом пространстве с жидкостью, становится насыщающим.

Свойства насыщающих паров.

1. Давление (упругость) насыщающего пара данной жидкости при неизменной температуре — постоянная величина и не зависит от объема пространства над испаряющейся жидкостью. Следовательно, при данной температуре и плотность насыщающего пара — величина постоянная.

2. Давление и плотность насыщающих паров различных жидкостей при одной и той же температуре разные; они больше у летучих жидкостей.

3. Давление насыщающих паров — наибольшее возможное давление паров данной жидкости при данной температуре.

4. С повышением температуры давление насыщающего пара увеличивается, так как при этом растет число испаряющихся молекул и их кинетическая энергия.

5. При температуре кипения жидкости давление насыщающего пара наибольшее и равно давлению в пространстве над жидкостью.

6. Наличие других газов над испаряющейся жидкостью не влияет на давление (и плотность) насыщающего пара данной жидкости, хотя и замедляет процесс испарения до насыщения.

7. Зависимость между массой, объемом, давлением и температурой для насыщающих паров иная, чем для газов, так как, если в каком-нибудь процессе пар остается насыщающим, то меняется его масса. Например, при изотермическом сжатии насыщающий пар частично конденсируется так, что его давление остается неизменным; при изохорическом понижении температуры насыщающий пар также частично конденсируется, его давление уменьшается и становится равным давлению насыщающего пара при новой, пониженной температуре и т. д.

Свойства ненасыщающих паров. Ненасыщающий пар, далекий от насыщения, подчиняется законам газового состояния, притом тем точнее, чем он дальше от состояния насыщения.

§ 80. Абсолютная влажность. Относительная влажность

Абсолютной влажностью воздуха называется количество паров воды в единице объема воздуха, т. е. плотность содержащихся в воздухе паров воды:

$$f = \rho = \frac{m}{v} \text{ [г/м}^3\text{]}.$$

В метеорологии влажность измеряют часто упругостью (давлением) пара в мм рт. ст., которая при температурах, близких к 15 °С, почти совпадает численно с плотностью пара в г/м³:

$$f = p \text{ [мм]} \approx D \text{ [г/м}^3\text{]}.$$

Наибольшая возможная абсолютная влажность воздуха при данной температуре равна плотности или давлению насыщающего пара при этой температуре:

$$F = \rho_{\text{нас}} \approx p_{\text{нас}}.$$

Относительная влажность — отношение плотности или давления водяного пара, находящегося в воздухе, к плотности или давлению насыщающего пара той же температуры, выраженное в процентах:

$$B = \frac{\rho}{\rho_{\text{нас}}} \cdot 100\% \approx \frac{p}{p_{\text{нас}}} \cdot 100 (\%).$$

Относительная влажность воздуха повышается при понижении его температуры, так как при этом повышается давление и плотность насыщающего пара.

Если содержание пара в воздухе мало и пар ненасыщающий, то при понижении температуры воздуха тот же пар может стать насыщающим. Температура, при которой пар, находящийся в воздухе, становится насыщающим, называется точкой росы воздуха данной влажности.

Понижение температуры ниже точки росы влечет за собой конденсацию пара.

§ 81. Приборы для определения влажности

Опишем два типа приборов для определения влажности — гигрометры и психрометры.

Один из простейших гигрометров представляет собой прибор для определения точки росы (рис. 141). В обыкновенный стакан налит эфир и опущен термометр. Если через трубку, опущенную в эфир, продувать воздух, то эфир испаряется, заимствуя теплоту испарения от сосуда и окружающего воздуха. Вследствие этого температура в стакане понижается. При понижении температуры в стакане до точки росы, т. е. до той температуры, когда пар, содержащийся в воздухе, становится насыщающим, на стенках стакана появляются капельки влаги — роса. Температура при первом появлении росы и есть точка росы.

Абсолютная влажность воздуха равна влажности насыщающего пара при температуре точки росы. Поэтому, определив

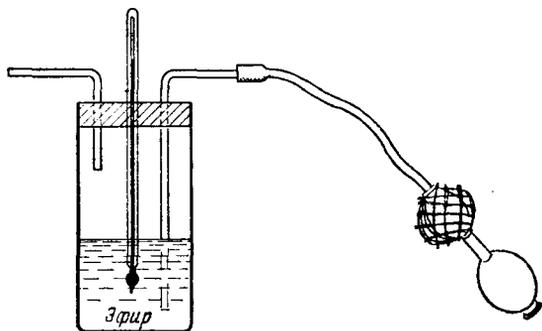


Рис. 141.

посредством гигрометра точку росы, находим по таблице соответствующую этой температуре влажность насыщающего пара. Это и есть абсолютная влажность данного воздуха.

Устройство другого простейшего гигрометра основано на свойстве

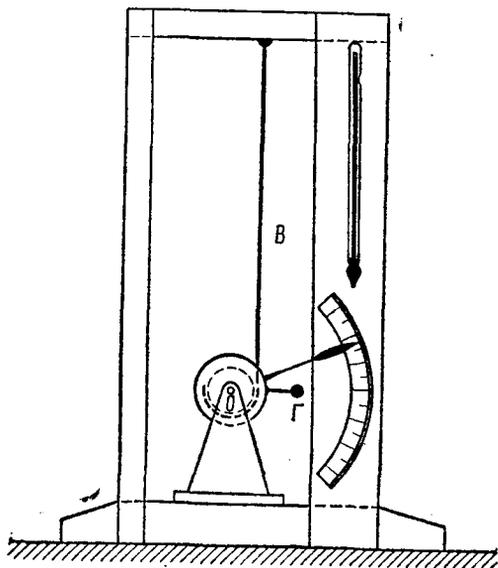


Рис. 142.

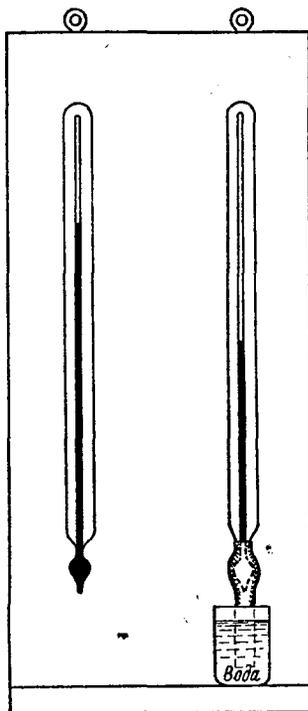


Рис. 143.

обезжиренного волоса набухать и удлиняться при увеличении влажности и укорачиваться при ее уменьшении. В волосном гигрометре (рис. 142) обезжиренный волос *В* прикреплен

верхним концом к рамке, а нижним — к блоку, который может вращаться вокруг своей оси O . К блоку на рычажке прикреплены грузик G , натягивающий волос, и стрелка указателя. При изменении влажности и соответственно длины волоса поворачиваются блок и стрелка указателя. Деления на шкале указывают относительную влажность воздуха в процентах.

Для быстрого и более точного определения влажности воздуха, например, на метеорологических станциях, употребляют психрометры. Психрометр (рис. 143) служит для определения *относительной влажности* воздуха и состоит из двух термометров, один из которых обернут материей, опущенной концом в сосуд с водой, и поэтому влажный. Вследствие испарения воды из сосуда температура в нем понижается, причем тем больше, чем сильнее испарение, т. е. чем меньше относительная влажность воздуха. Показания обоих термометров — сухого, показывающего температуру воздуха, и влажного, показывающего температуру смоченной материи, будут различаться, причем эта так называемая «психрометрическая разность» будет тем больше, чем интенсивнее происходит испарение воды, т. е. чем меньше относительная влажность воздуха.

Зависимость между показаниями обоих термометров и относительной влажностью дана в приложенных к психрометру в психрометрических таблицах, из которых и берется значение относительной влажности, соответствующее показаниям термометров.

Примеры решения задач

Задача 115. В закрытом сосуде объемом $V = 200$ л находится воздух при температуре $t = 25^\circ\text{C}$ с относительной влажностью $B_1 = 60\%$. Какое количество водяных паров сконденсируется при охлаждении сосуда до $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Давление насыщенных паров при 25°C $p_1 = 23,8$ мм рт. ст., при 10°C $p_2 = 9,2$ мм рт. ст.

$$\begin{aligned} V &= 200 \text{ л} = 0,200 \text{ м}^3 \\ t_1 &= 25^\circ\text{C} \\ B_1 &= 60\% \\ t_2 &= 10^\circ\text{C} \\ p_1 &= 23,8 \text{ мм рт. ст.} \\ p_2 &= 9,2 \text{ мм рт. ст.} \end{aligned}$$

Найти m_k

Решение

Давление водяных паров в сосуде:
 $p_c = B_1 p_1 = 0,60 \cdot 23,8 = 20,2$ мм рт. ст.

Следовательно, точка росы соответствует температуре выше 10°C .

Полагаем содержание водяных паров в г/м^3 приблизительно численно равным упругости паров в мм рт. ст. Тогда масса водяных паров в сосуде при 25°C $m_1 = p_1 \text{ г/м}^3 \cdot V \text{ м}^3$.

При 10°C в воздухе останется водяных паров

$$m_2 = p_2 \text{ г/м}^3 \cdot V \text{ м}^3.$$

Масса сконденсированной воды

$$m_k \approx m_1 - m_2 = (p_c - p_2) V,$$

$$m_k \approx (20,2 - 9,2) \text{ г/м}^3 \cdot 0,200 \text{ м}^3 = \underline{2,2 \text{ г.}}$$

Задача 116. В закрытом сосуде объемом $V = 200$ л находится воздух при температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$ с относительной влажностью $B_1 = 60\%$. Какое количество водяных паров сконденсируется при охлаждении сосуда до $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Давление насыщенных паров воды при 10°C $p_2 = 9,2$ мм рт. ст.

Решение. Давление насыщенных водяных паров при 100°C равно $p_1 = 760$ мм рт. ст. Далее, решение аналогично решению предыдущей задачи

$$p_c = 0,60 \cdot 760 = 456 \text{ мм рт. ст.},$$

$$m_k = (p_c - p_2)V, \quad m_k \approx (456 - 9,2) \cdot 0,200 = \underline{89,4 \text{ г.}}$$

Задача 117. В закрытом сосуде относительная влажность воздуха при $t_1 = 10^\circ\text{C}$ равна $B_1 = 80\%$. Какой станет относительная влажность при повышении температуры до $t_2 = 25^\circ\text{C}$. Упругость насыщающих паров при 10°C $p_1 = 9,2$ мм рт. ст.; при 25°C $p_2 = 23,8$ мм рт. ст.

Решение. Упругость паров воздуха в сосуде

$$p = p_1 \text{ нас} \cdot B_1.$$

Поэтому относительная влажность:

$$B_2 = \frac{p}{p_2 \text{ нас}} = \frac{p_1 \text{ нас}}{p_2 \text{ нас}} B_1, \quad B_2 = \frac{9,2}{23,8} 80\% = \underline{31\%}.$$

Задача 118. В сосуде объемом $V = 200$ л при $t = 25^\circ\text{C}$ находится воздух с относительной влажностью $B_1 = 40\%$. Какова станет относительная влажность B_2 , если в сосуд ввести $\Delta m = 3$ г воды? Давление насыщенных водяных паров при 25°C $p_{\text{нас}} = 23,8$ мм рт. ст.

Решение. Масса водяных паров в сосуде до дополнительного введения воды, полагая содержание паров в г/м^3 приблизительно численно равным упругости паров в мм рт. ст., $m_1 = p_1 B_1 \cdot V$.

Если вся дополнительно введенная вода испарится, то абсолютная влажность воздуха станет

$$p = \frac{m_1 + \Delta m}{V} = p_1 B_1 + \frac{\Delta m}{V} \approx 23,8 \frac{\text{г}}{\text{м}^3} \cdot 0,40 + \frac{3 \text{ г}}{0,200 \text{ м}^3} = 24,52 \frac{\text{г}}{\text{м}^3} \approx 24,52 \text{ мм рт. ст.}$$

Так как $p > p_{\text{нас}}$ ($24,52 > 23,8$), то вода испарится частично до полного насыщения;

$$B_2 = \underline{100\%}.$$

Задача 119. В сосуд объемом $V = 10$ л, наполненный сухим воздухом, вводят $m = 3$ г воды и нагревают сосуд до $t = 100^\circ\text{C}$. Определить относительную влажность водяных паров в сосуде после его нагревания. Пар считать идеальным газом.

Решение. Применим к водяному пару уравнение Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad \text{отсюда} \quad p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V},$$

$$\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 2 \cdot 1 + 16 = 18 \frac{\text{кг}}{\text{кг-моль}}, \quad R = 8310 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг-моль}) \text{ К}},$$

$$T = 273,15\text{К} + 100\text{R} = 373,15\text{К},$$

$$p = \frac{0,003 \text{ кг} \cdot 8310 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг-моль}) \text{ К}} \cdot 373,15\text{К}}{18 \frac{\text{кг}}{\text{кг-моль}} \cdot 0,010 \text{ м}^3} = 50\,500 \text{ Па} = 0,50 \text{ атм.}$$

А так как давление насыщающих водяных паров при 100°C равно 1 атм,

$$B = \frac{0,50}{1} \cdot 100\% = \underline{50\%}.$$

VI. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 82. Два рода электрических зарядов. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрических зарядов. Электрическое поле. Закон Кулона. Влияние среды на силу взаимодействия зарядов. Диэлектрическая проницаемость вещества. Единицы заряда.

В природе существуют два рода электрических зарядов, условно названные «положительными» и «отрицательными» зарядами. Носителями электрических зарядов являются элементарные частицы, входящие в состав атомов, — электрон, заряженный отрицательно, и протон с положительным зарядом. Заряды электрона и протона являются наименьшими по величине, неделимыми зарядами и носят название элементарных зарядов (e_- и e_+). Тело «электрически заряжено», если имеет неодинаковое число отрицательных и положительных элементарных зарядов, причем его заряд измеряется целым числом элементарных зарядов. В электрически нейтральных телах имеется одинаковое число элементарных зарядов противоположных знаков, действия которых взаимно компенсируются. Один из важных законов теории электричества — закон сохранения электрического заряда:

В изолированной системе полная алгебраическая сумма электрических зарядов остается постоянной; заряды могут только передаваться от одного тела данной системы другому или смещаться внутри одного тела.

Это значит, что изменение суммарного заряда электрически изолированной системы можно осуществить только путем внесения зарядов извне или перенесения их за пределы системы.

Электрические заряды взаимодействуют таким образом, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются.

Взаимодействие электростатических зарядов осуществляется с помощью электрического (точнее, электростатического) поля, которое передает действие одних наэлектризованных тел на другие. Электрическое (электростатическое) поле представляет собой *одну из форм материи, существующую в пространстве вокруг электрического заряда и проявляющую себя силами, действующими на другие заряды, расположенные в этом*

пространстве. Величина силы взаимодействия между двумя точечными зарядами подчиняется закону Кулона, установленному им опытным путем:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon_a r^2}, \quad (1)$$

где F — сила взаимодействия зарядов, q и q_1 — взаимодействующие электрические (точечные) заряды, r — расстояние между зарядами, ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, разделяющей взаимодействующие заряды, k — коэффициент пропорциональности, величина которого зависит только от выбранных единиц для величин, входящих в формулу (1).

Абсолютная диэлектрическая проницаемость среды характеризует влияние среды на силу взаимодействия зарядов; ее можно представить в виде произведения

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon. \quad (2)$$

Здесь ϵ_0 носит название «электрической постоянной», — ее величина и размерность определяются только выбранной системой единиц и не зависят, в частности, от среды; ϵ — безразмерная величина, которая называется относительной диэлектрической проницаемостью среды и показывает, во сколько раз сила взаимодействия между электрическими зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме.

Для газов и воздуха	$\epsilon = 1$
Для керосина	$\epsilon = 2$
Для стекла	$\epsilon = 7$
Для воды	$\epsilon = 81$

В системе СГСЭ (CGSE) принята такая единица заряда, что в формуле (1), выражающей закон Кулона, коэффициент пропорциональности $k = 1$ и в формуле (2) для диэлектрической проницаемости электрическая постоянная $\epsilon_0 = 1$, т. е. $\epsilon_a = \epsilon$ и в этом случае обычно обозначается ϵ . Следовательно, в системе СГСЭ закон Кулона выражается так:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (1a)$$

Из выражения (1a) видно, что: *единица заряда СГСЭ, называемая электростатической единицей заряда, равна такому заряду, который в вакууме действует на равный ему заряд, находящийся от него на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину.*

В системе СИ единица электрического заряда называется кулон (обозначается Кл):

$$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ единиц заряда СГСЭ}. \quad (3)$$

(Определение кулона как единицы заряда в системе СИ дается ниже, § 113.)

Коэффициент пропорциональности в выражении (1) для закона Кулона в системе СИ равен

$$k = \frac{1}{4\pi}.$$

Следовательно, закон Кулона в системе СИ записывается так:

$$F = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 \epsilon r^2}, \quad (16)$$

Электрическая постоянная ϵ_0 в системе СИ является величиной размерной, причем $\epsilon_0 \neq 1$. Ее величина и размерность найдутся из следующих соображений.

Два заряда $q_1 = q_2 = 1$ Кл, расположенные на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, взаимодействуют с силой, величина которой на основании (16) равна

$$F [\text{Н}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2} \right]. \quad (4)$$

С другой стороны, пользуясь выражением (1а) для закона Кулона в системе СГСЭ, найдем для тех же двух зарядов:

$$F [\text{Н}] = 10^{-5} \cdot F [\text{дин}] = 10^{-5} \frac{(3 \cdot 10^9)^2}{1 \cdot (100)^2} = 9 \cdot 10^9 [\text{Н}]. \quad (5)$$

Приравняв правые части выражений (4) и (5), находим

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \left[\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \right]^*, \quad \text{или} \quad \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \left[\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \right]^*.$$

§ 83. Равновесие зарядов в металлах. Электростатическая индукция. Распределение электрических зарядов в проводнике

В металлах наряду с электронами, связанными с ядром, существует большое количество легко подвижных свободных электронов, ядра же, заряженные положительно, «закреплены» в вершинах кристаллической решетки и совершают лишь небольшие колебания. Свободные электроны металла образуют «желе», в котором находятся положительные ионы — ядра со связанными с ними электронами. В целом проводник нейтрален и внутри проводника электрическое поле отсутствует**).

Отсутствует электрическое поле внутри полого металлического тела, например внутри полого металлического шара.

На этом основаны методы защиты (экранирования) электрических проводов и агрегатов от внешних электрических полей (там,

*) Ниже, в сноске § 90 дана более простая размерность $\epsilon_0 = [\Phi/\text{м}]$ — (фарада на метр), принятая в системе СИ.

**) Точнее, поле отсутствует в «среднем», если рассматривать объем проводника, много больший объема одного атома и находить среднее поле в этом объеме.

где внешнее электрическое поле создает вредные помехи) посредством заключения проводников и агрегатов в металлические сетки.

Если незаряженный нейтральный кусок металла внести в электрическое поле, то это поле вызывает перемещение свободных электронов проводника. При положительном индуктирующем, т. е. создающем внешнее поле заряде, электроны проводника притягиваются к нему, перемещаясь на ближайший к индуктирующему заряду конец проводника. Этот конец проводника оказывается заряженным отрицательно. Недостаток же электронов на отдаленном конце проводника создает равновеликий положительный заряд. Если индуктирующий заряд отрицательный, то электроны изолированного проводника, внесенного в поле этого заряда, скапливаются на отдаленном от заряда конце проводника, делая его заряженным отрицательно. Ближайший к заряженному телу конец проводника оказывается заряженным положительно. Перемещения зарядов прекратятся тогда, когда созданное ими поле будет в точности компенсировать внешнее поле, так что по-прежнему внутри проводника поле будет равно нулю.

После вынесения изолированного проводника из поля электроны по-прежнему распределяются по проводнику так, чтобы восстановить нейтральное состояние проводника.

Электростатической индукцией называется возникновение противоположных зарядов на концах изолированного проводника, внесенного в электрическое поле (например, при приближении к нему заряженного тела).

Если проводник зарядить, передав ему дополнительные заряды, то избыточные электрические заряды будут удаляться друг от друга под действием кулоновских сил на возможно большее расстояние. Устойчивое равновесие электрических зарядов достигается, когда они располагаются на внешней поверхности проводника. Это соответствует минимуму потенциальной энергии зарядов.

Как показывает опыт, поверхностная плотность электрических зарядов на проводнике, т. е. количество зарядов на 1 кв. ед. поверхности проводника, в состоянии равновесия больше в местах с большей кривизной поверхности и меньше в местах с меньшей кривизной. Плотность зарядов на проводниках, имеющих одну и ту же кривизну во всех точках поверхности (например, на поверхности шара), одинаковая во всех точках поверхности такого проводника.

§ 84. Устройство электроскопа

Электроскоп — это прибор, который служит для определения наличия электрического заряда на каком-нибудь теле и знака этого заряда.

Рассмотрим устройство простого электроскопа (рис. 144). Металлический стержень с шариком наверху, снабженный на другом

конце двумя очень тонкими металлическими (алюминиевыми) листочками, вставлен через изолирующую пробку в стеклянную (или металлическую со стеклянными окнами) банку с горлышком.

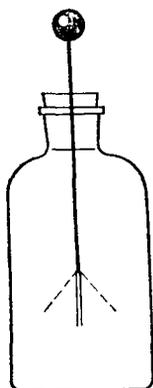


Рис. 144.

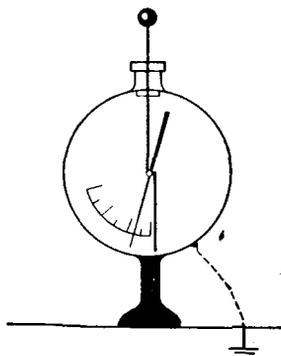


Рис. 145.

При соприкосновении заряженного тела с шариком электро­скопа листочки расходятся, так как оба они заряжаются одно­именным электричеством. Листочки расходятся тем больше, чем больше заряд, сообщенный электроскопу.

Для определения знака заряда электроскопа к нему прибли­жают заряженное тело, знак заряда которого заведомо известен. Если расхождение листочков электроскопа увеличивается, то заряд его того же знака, что заряд приближенного тела; умень­шение расхождения листочков показывает, что электроскоп зар­яжен электричеством противоположного знака.

На рис. 145 дана схема электроскопа со шкалой. металличе­ский стержень проходит внутрь металлической коробки со стек­лянными окнами. На оси, расположенной на изгибе металлического стержня, навешена легкая металлическая стрелка. При зарядке электроскопа стрелка «отталкивается» от стержня и отходит на угол, который отсчитывается по шкале. Такой электроскоп служит для измерения потенциала и называется электрометром (см. под­робнее в § 115).

§ 85. Напряженность электрического поля и ее вычисление для поля точечного заряда. Графическое изображение поля — силовые линии электрического поля. Однородное электрическое поле. Поле изолированного заряда

Напряженность E электрического поля в данной точке — это физическая величина, измеряемая силой, с которой электрическое поле действует на единственный положительный точечный заряд, помещенный в эту точку.

Если на заряд q в некоторой точке поля действует сила F , то напряженность электрического поля в этой точке равна

$$E = \frac{F}{q}.$$

Отсюда для абсолютного значения напряженности поля получим формулу

$$E = \frac{F}{q}.$$

Согласно закону Кулона два точечных электрических заряда Q и q , находящихся на расстоянии r друг от друга, взаимодействуют с силой

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{Qq}{\epsilon\epsilon_0 r^2} \quad (\text{в системе СИ})$$

(или $F = \frac{Qq}{\epsilon r^2}$ в системе СГСЭ). Поэтому сила, действующая на единичный положительный заряд, то есть напряженность поля заряда Q на расстоянии r от него равна

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0 r^2} \quad (\text{в системе СИ})$$

(или $E = \frac{Q}{\epsilon r^2}$ в системе СГСЭ).

Если заряд Q положителен, то вектор E напряженности поля этого заряда направлен от заряда, если заряд Q отрицателен, то к нему.

Электрическое поле удобно изображать графически с помощью силовых линий. Силовые линии—это линии, направление*) касательных к которым в каждой точке указывает направление вектора напряженности, а густота линий пропорциональна абсолютной величине этого вектора в этой точке электрического поля.

Картину силовых линий электрического поля можно увидеть, например, в таком опыте. В сосуд с жидким диэлектриком (касторовое масло, скипидар) насыпают манную крупу. Если в диэлектрике создать электрическое поле, то крупинки наэлектризуются, притянутся друг к другу и образуют цепочки, совпадающие с силовыми линиями этого электрического поля.

Примечание. Силовые линии не следует отождествлять с траекториями движения в электростатическом поле очень легких заряженных тел очень малых размеров (так называемых пробных зарядов). Касательная к такой траектории в некоторой точке совпадает с вектором скорости тела. Вектор же ускорения тела совпадает по направлению с вектором скорости только в

*) Направление силовой линии в какой-нибудь точке—направление касательной к ней в этой точке.

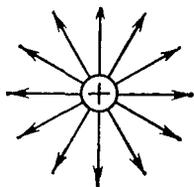
случае прямолинейного движения. В общем случае криволинейного движения вектор ускорения, а значит, и вектор силы направлены под некоторым углом к вектору скорости (например, при равномерном движении по окружности — под прямым углом).

Направление же касательной к силовой линии совпадает с направлением вектора силы, действующей на заряженное тело.

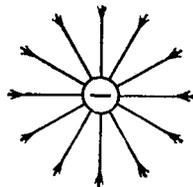
Электрическое поле, в котором напряженность во всех точках одинакова по модулю и



Рис. 146.



а)

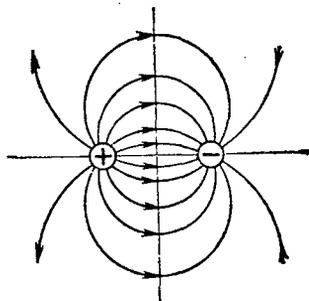


б)

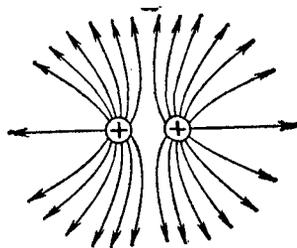
Рис. 147.

направлению, называется однородным. Направление и густота силовых линий однородного поля одинаковы во всех точках (рис. 146).

На рис. 147 изображены силовые линии поля изолированных точечных зарядов, а на рис. 148 — силовые линии поля взаимодействующих точечных зарядов. Поля — неоднородные. Напряженность электрического поля изолированного заряда убывает



а)



б)

Рис. 148.

обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда (так как площадь поверхности сферы, через которую проходят силовые линии, возрастает пропорционально квадрату расстояния от ее центра). Это и выражено формулами, которые мы получили для напряженности поля изолированного заряда.

Для графического изображения электрического поля условно принимают, что через 1 единицу площади, перпендикулярной к направлению силовых линий, проходит 1 силовая линия на 1 единицу напряженности поля. Если напряженность поля равна E , то через 1 единицу площади, перпендикулярной к направлению силовых линий, проходит E силовых линий.

Следовательно, через поверхность воображаемой сферы (шара), окружающей точечный заряд q , проходит

$$N = 4\pi r^2 E \text{ силовых линий.}$$

Или

$$N = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} q = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} \text{ силовых линий в системе СИ}$$

$$N = 4\pi \frac{q}{\epsilon} \text{ силовых линий в системе СГСЭ.}$$

На границе двух сред, обладающих различной диэлектрической проницаемостью, напряженность и, как следствие, густота силовых линий меняются скачкообразно.

Так как электрическое поле внутри проводника отсутствует, то силовые линии внешнего поля заканчиваются и начинаются на поверхности проводника. Внутри же проводника силовых линий нет.

Силовые линии реально не существуют; это только удобный способ графического изображения поля.

§ 86. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Разность потенциалов. Единица разности потенциалов

Так как электрическое поле действует на находящийся в нем заряд с некоторой силой, то при перемещении заряда в электрическом поле совершается работа. Если угол между векторами скорости заряда и силы электрического поля в данной точке острый, то работу совершает поле—работа в этом случае положительная ($\cos \alpha > 0$). Если этот угол тупой, то работа отрицательная, т. е. совершается против сил поля.

Можно показать, что *работа перемещения заряда в электрическом поле не зависит от вида траектории, по которой перемещается заряд, а определяется только положением начальной и конечной точек пути*. В этом смысле электрическое поле сходно с полем тяготения.

Разностью потенциалов двух точек электрического поля называется величина, измеряемая работой, которую совершают силы электрического поля при перемещении единичного положительного заряда из первой точки во вторую:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{A}{q};$$

Φ_1 и Φ_2 —потенциалы поля в начальной и конечной точках пути перемещения зарядов.

Разность потенциалов—величина скалярная, так как представляет собой частное от деления двух скалярных величин (A и q).

Работа перемещения заряда q в электрическом поле равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi.$$

(Здесь имеется аналогия с работой перемещения тела между двумя точками, расположенными на разных уровнях в гравитационном поле,—работа равна произведению силы тяжести на разность уровней обеих точек).

Поверхности, на которых разность потенциалов любых точек равна нулю, называются эквипотенциальными. При перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности не совершается работа ($\varphi_A - \varphi_B = 0$).

В проводниках положительные заряды перемещаются от точек поля с большим потенциалом к точкам поля, обладающим меньшим потенциалом; отрицательные—в обратную сторону. Перемещение зарядов продолжается до тех пор, пока потенциалы поля во всем проводнике сравняются, после чего перемещение зарядов прекращается. Следовательно, при равновесии электрических зарядов на проводнике поверхность проводника всегда является одной из эквипотенциальных поверхностей поля.

Единица разности потенциалов в системе СИ называется вольт. Вольт (В)—*разность потенциалов между двумя точками электрического поля, при которой работа перемещения заряда в 1 кулон из одной точки в другую равна 1 джоулю.*

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл.}$$

Единица разности потенциалов в системе СГСЭ (электростатическая единица (обозначается—СГСЭ ед. потенциала)—это разность потенциалов между двумя точками электрического поля, при которой работа перемещения электростатической единицы заряда равна 1 эргу:

$$1 \text{ СГСЭ ед. потенциала} = \frac{1 \text{ эрг}}{1 \text{ СГСЭ ед. заряда}},$$

$$1 \text{ В} = \frac{10^7 \text{ эрг}}{3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ заряда}} = \frac{1}{300} \text{ СГСЭ ед. потенциала.}$$

§ 87. О понятии потенциала. Потенциал поля точечного заряда

Потенциал электрического поля обычно определяется как величина, равная работе сил поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность. Подразумевается, очевидно, что в «бесконечности» нет электрического поля.

Из сказанного в предыдущем параграфе ясно, что физический смысл имеет разность потенциалов между двумя реально существующими точками. «Бесконечности» же, да еще такой, где нет электрического поля, не существует. Поэтому *понятие потенциала чисто условное*. Имеется в виду, очевидно, *разность потенциалов между данной точкой электрического поля и некоторой воображаемой точкой пространства, изолированной от электрических зарядов*. В реальных измерениях за «нулевую точку» при измерении «потенциалов» различных наземных тел принимают потенциал поверхности земли, так как размеры Земли настолько велики, что электрические процессы при соединении с ней различных наземных тел практически не влияют на ее потенциал. В действительности, как установлено, земля имеет некоторый избыточный отрицательный заряд. Этот заряд невелик, и для большинства практических расчетов им можно пренебречь.

Потенциал в какой-нибудь точке электрического поля, создаваемого точечным зарядом q , вычисляется по формуле

$$\varphi = k \frac{q}{\epsilon_a r},$$

где r — расстояние от этого заряда точки, в которой вычисляется потенциал.

В системе СИ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r} q,$$

а в системе СГСЭ:

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r}.$$

§ 88. Связь потенциала с напряженностью для однородного электрического поля

Работа перемещения заряда с одной эквипотенциальной поверхности (A) на другую (B) равна

$$A = q(\varphi_A - \varphi_B).$$

С другой стороны, эта работа равна произведению силы, действующей на заряд, на перемещение заряда по направлению этой силы, т. е. на расстояние d между эквипотенциальными поверхностями. Если поле однородное, то сила имеет постоянную величину. Тогда

$$A = Fd.$$

Так как

$$F = Eq,$$

то

$$A = Eqd;$$

но

$$A = q(\varphi_A - \varphi_B),$$

следовательно,

$$q(\varphi_A - \varphi_B) = Eqd,$$

откуда

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d}.$$

Это выражение дает связь между разностью потенциалов и величиной напряженности однородного электрического поля. Величина напряженности электрического поля численно равна изменению потенциала на единицу длины силовой линии. Вектор напряженности направлен по силовой линии в сторону убывающего потенциала.

Силовые линии в любой точке поля направлены нормально к эквипотенциальной поверхности в этой точке, в частности у поверхности проводника силовые линии направлены нормально к этой поверхности (рис. 149). Так как работа перемещения заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю, то угол между направлением перемещения заряда и силой должен равняться 90° . Следовательно, по силовым линиям электростатического поля можно построить эквипотенциальные поверхности (и наоборот).

Электростатическое поле можно изобразить графически не только с помощью силовых линий, но и при помощи эквипотенциальных поверхностей (рис. 149). Обычно их проводят таким образом, что разности потенциалов между любыми соседними эквипотенциальными поверхностями одинаковы.

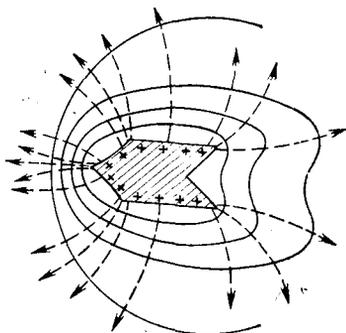


Рис. 149.

§ 89. Единицы напряженности электрического поля

В предыдущем параграфе мы установили, что напряженность однородного электрического поля связана с разностью потенциалов φ_A и φ_B точек A и B , находящихся на расстоянии d друг от друга, формулой

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d}.$$

Из этой формулы видно, что напряженность поля имеет размерность

$$[E] = [В/м].$$

В связи с этим единица напряженности электрического поля в системе СИ называется вольт на метр [В/м].

Но

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}.$$

Поэтому

$$1 \text{ В/м} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ Кл}}.$$

Единица напряженности электрического поля в системе СИ вольт на метр—это напряженность в такой точке поля, в которой поле действует на заряд в 1 кулон с силой 1 ньютон.

В системе СГСЭ для напряженности поля введена специальная единица—ед. СГСЭ напряженности.

$$1 \text{ В/м} = \frac{\frac{1}{300} \text{ ед. СГСЭ потенциала}}{100 \text{ см}} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ ед. СГСЭ напряженности}.$$

§ 90. Электроемкость. Единицы емкости. Электроемкость проводящей сферы

Электроемкостью (или емкостью) уединенного изолированного проводника называется физическая величина, измеряемая отношением изменения заряда проводника к изменению его потенциала:

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi}.$$

Если в начале заряд проводника и его потенциал равны нулю, то электроемкость—это отношение заряда проводника к его потенциалу.

Если рассматриваемый проводник окружен другими проводниками, то электрические поля их собственных и индуцированных данным проводником зарядов изменяют разность потенциалов, а следовательно, и емкость данного проводника. Вследствие этого емкость проводника зависит от наличия различных окружающих его проводников. Но если окружающие проводники достаточно удалены, то их влияние на электроемкость данного проводника мало, и в этом случае проводник можно считать уединенным.

Электроемкость уединенного проводника зависит только от его формы и размеров, а также от окружающей диэлектрической среды.

Электроемкость проводника, расположенного в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , в ϵ раз больше, чем в вакууме. Это связано с тем, что величина потенциала

в какой-либо точке электрического поля, созданного зарядом q в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , в ϵ раз меньше, нежели в вакууме.

Единица емкости в системе СИ называется фарадой.

Фарада (Ф)—это емкость такого уединенного проводника, потенциал которого повышается на 1 вольт при сообщении заряда в 1 кулон:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1 В}^*).$$

Это—очень большая емкость. На практике употребляются меньшие единицы: миллионная доля фарады—микрофарада (мкФ) и миллионная доля микрофарады—пикофарада (пФ).

В системе СГСЭ единица емкости называется сантиметром (см). Физический смысл этого наименования в том, что емкость уединенного сферического проводника (шара) в вакууме в системе СГСЭ численно равна радиусу проводника в [см].

Соотношение между единицами емкости СИ и СГСЭ такое:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ заряда}}{\frac{1}{300} \text{ ед. СГСЭ потенциала}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ ед. СГСЭ емкости},$$

$$1 \text{ Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}, \quad 1 \text{ мкФ} = 9 \cdot 10^5 \text{ см}, \quad 1 \text{ пФ} = 0,9 \text{ см}.$$

§ 91. Конденсаторы. Формула плоского конденсатора. Энергия конденсатора

Конденсатором называют систему двух разноименно заряженных проводников, разделенных диэлектриком (в частности, воздухом).

Зарядить конденсатор можно разными способами. Например, один из проводников заземлить, а к другому прикоснуться заряженным телом. Вследствие индукции на заземленном проводнике появится заряд, равный по величине заряду другого проводника, но противоположного знака.

Простейший конденсатор, состоящий из двух параллельных пластин—обкладок, разделенных тонким слоем диэлектрика, называется плоским конденсатором. Емкостью конденсатора называется физическая величина, измеряемая отношением заряда конденсатора (т. е. абсолютной величины заряда

*) В § 82 была получена размерность $[\epsilon_0] = \left[\frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \right]$. На основании того, что размерность $[\text{Н}] = \left[\frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м}} \right]$ и полученная здесь размерность $[\text{Кл}] = [\text{Ф} \cdot \text{В}]$, можно дать другую, более употребительную в системе СИ, размерность:

$$[\epsilon_0] = [\text{Ф/м}]$$

одной из его обкладок) к разности потенциалов между пластинами конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}.$$

Емкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади обкладки S , обратно пропорциональна расстоянию между пластинками d и прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости обкладки (диэлектрика).

В системе СИ

$$C = \frac{\epsilon_a S}{d},$$

где C — емкость конденсатора в [Ф], S — площадь обкладки в [м²], d — толщина диэлектрика в [м], ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость обкладки — диэлектрика ($\epsilon_a = \epsilon_0 \cdot \epsilon$).

В системе СГСЭ

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

где C в [см], S в [см²], d в [см].

Последние формулы часто называют формулами плоского конденсатора.

Вывод формулы плоского конденсатора. Однородное электростатическое поле между обкладками конденсатора изобразим параллельными силовыми линиями, проходящими на одинаковых расстояниях перпендикулярно к обкладкам, причем густоту силовых линий выберем так, что количество силовых линий на единицу площади обкладки численно равно величине напряженности. Тогда число силовых линий между пластинками конденсатора будет

$$N = ES.$$

Подставляя в это выражение величину E , вычисленную по формуле

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d},$$

получим

$$N = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d} S.$$

Но $\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C}$, следовательно, $N = \frac{qS}{Cd}$.

Так как $N = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}$ (см. § 85), то

$$\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{qS}{Cd},$$

откуда

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_a S}{d}.$$

Для увеличения емкости конденсаторы соединяются в батареи. В батареях обкладки конденсаторов соединяются параллельно

(рис. 150), т. е. положительно заряженные обкладки соединяются в одну группу, отрицательные — в другую. При таком соединении все конденсаторы имеют одну и ту же разность потенциалов между обкладками (напряжение), но их заряды или емкости ($C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$) могут быть разными. Общий заряд всех конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n)U$$

(U — разность потенциалов обкладок конденсаторов).

Отсюда получим

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n.$$

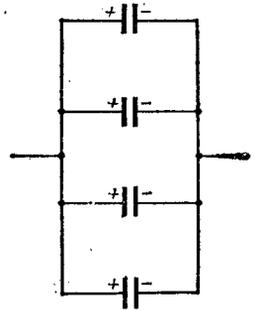


Рис. 150.

Емкость батареи соединенных параллельно конденсаторов равна сумме емкостей всех конденсаторов.

Емкость батареи из n одинаковых конденсаторов, соединенных параллельно, в n раз больше емкости одного конденсатора, так как расстояние между обкладками конденсаторов сохраняется неизменным, поверхность же в n раз больше поверхности одного конденсатора.

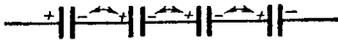


Рис. 151.

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 151) соединяются разноименно заряженные обкладки. При этом заряды на всех обкладках имеют одну и ту же величину, а суммарный заряд соединенных обкладок равен нулю. (Это следует из закона сохранения заряда). Напряжение на каждом конденсаторе определяется его электроемкостью:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2}; \quad \dots; \quad U_n = \frac{q}{C_n}.$$

Полная разность потенциалов между крайними обкладками всей системы конденсаторов

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right).$$

Следовательно, электроемкость всей системы конденсаторов:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}},$$

откуда получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные величины их емкостей.

На основании формулы для емкости плоского конденсатора заключаем, что электроемкость системы последовательно соединенных конденсаторов с одинаковыми обкладками равна электроемкости одного конденсатора с такими же обкладками, у которого толщина диэлектрика равна сумме толщин всех прокладок системы. Следовательно, емкость батареи, составленной из n одинаковых, соединенных последовательно конденсаторов, в n раз меньше емкости одного конденсатора.

Типовой конденсатор (точнее — батарея конденсаторов), применяемый в радиотехнике (рис. 152), состоит из листов станиоля (обкладки), проложенных парафинированной бумагой (диэлектрики). Нечетные листы станиоля соединяются между собой и образуют одну обкладку, четные — другую. Часто для обкладок применяется свинцово-оловянная либо алюминиевая фольга, а в качестве диэлектрика — листы слюды.



В радиотехнике применяют также керамические конденсаторы, состоящие из двух слоев серебра (обкладки), нанесенных на поверхность специальной керамики (диэлектрика), изготовленной в виде диска, цилиндра и т. п. (рис. 153) и защищенных слоем лака.

Рис. 152. Телефонный конденсатор (рис. 154) представляет собой свернутые в спираль два листа станиоля и два листа парафинированной бумаги.

Существует большое количество и других конструкций конденсаторов. В физических опытах применяется лейденская банка

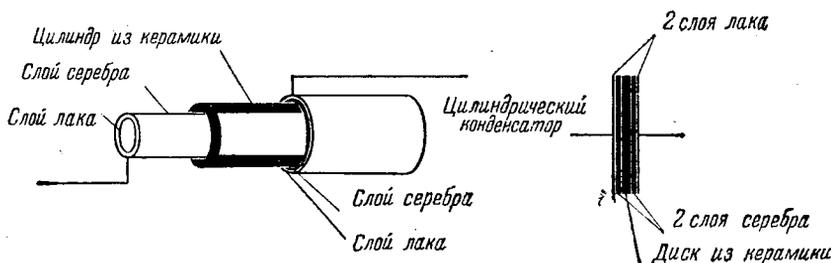


Рис. 153.

(рис. 155) — стеклянная цилиндрическая банка с двумя обкладками из станиоля — наружной, соединенной с землей, и внутренней, соединенной с металлическим шариком.

В очень многих случаях применяются конденсаторы переменной емкости (рис. 156), состоящие из одной системы неподвижных обкладок и другой — выдвигной (поворотной), разделенных воздушными промежутками (диэлектрик).

Для зарядки конденсатора необходимо совершить работу. С другой стороны, заряженный конденсатор может совершить работу. (Например, при сближении пластин плоского конденсатора с воздушным диэлектриком). Поэтому заряженный конденсатор обладает энергией.

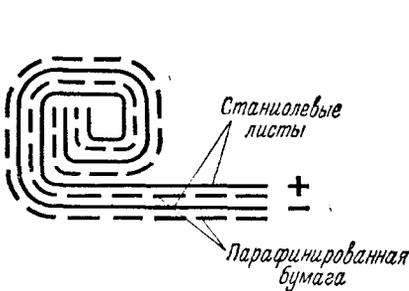


Рис. 154.

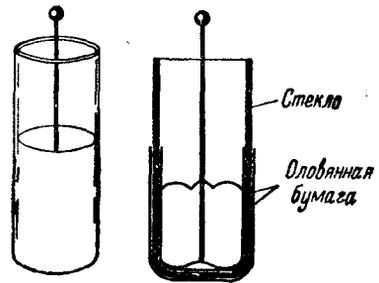


Рис. 155.

Энергия заряженного плоского конденсатора равна работе, которая была затрачена при его зарядке, или совершается при его разрядке. Она не зависит от способа зарядки или разрядки конденсатора. Можно, в частности, разрядить конденсатор сближением его пластин до их соприкосновения.

Силу F взаимодействия между пластинами конденсатора можно вычислить как силу, с которой электрическое поле напряженностью E_1 , вызванное зарядом одной пластины, действует на заряд другой: $F = E_1 q$. Векторы напряженности полей каждой из пластин, очевидно, равны между собой по абсолютной

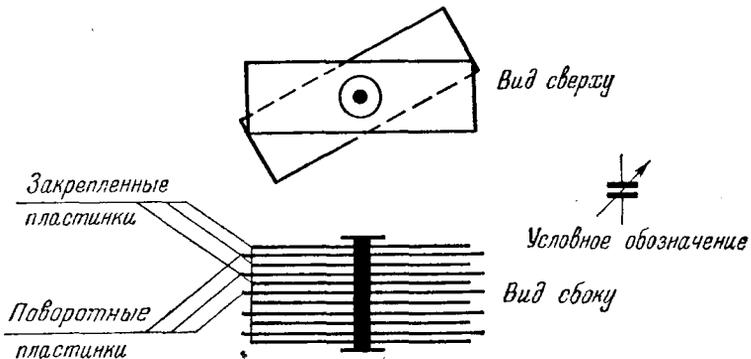


Рис. 156.

величине (так как заряды пластин равны по абсолютной величине) и направлены внутри конденсатора в одну сторону. Складываясь, они дают напряженность поля конденсатора

$$E = \frac{U}{d}$$

(U — разность потенциалов пластин, d — расстояние между ними).

Поэтому

$$E_1 = \frac{E}{2} = \frac{1}{2} \frac{U}{d}.$$

Следовательно,

$$F = E_1 q = \frac{1}{2} \frac{U}{d} q.$$

Сила F не зависит от расстояния между пластинами конденсатора (поле пластины однородно). Действительно, так как $U = \frac{q}{C}$, а $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$, то

$$F = \frac{1}{2} \frac{q}{Cd} q = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon \epsilon_0 S} \frac{d}{d} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon \epsilon_0 S}.$$

Поэтому работа силы F при сближении пластин равна

$$A = F \cdot d = \frac{1}{2} \frac{U}{d} q \cdot d = \frac{1}{2} Uq.$$

Так как $q = CU$, то

$$A = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Следовательно, энергия заряженного конденсатора

$$W_k = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

В системе СИ W_k — в [Дж]; C — в [Ф]; q — в [В].

Примеры решения задач

Предварительные указания. Силы взаимодействия пары электрических зарядов не зависят от наличия других зарядов (закон независимости действия сил), но величины этих сил зависят от среды, в которой происходит взаимодействие зарядов. Силы, с которыми на данный заряд действуют другие заряды, складываются геометрически. Геометрически складываются и напряженности электрических полей в данной точке пространства.

Потенциалы электрических полей в каждой точке пространства, как величины скалярные, складываются алгебраически.

Если тела, обладающие различными электрическими потенциалами, соединяются проводниками, то происходит перераспределение электрических зарядов до тех пор, пока потенциалы всех соединенных тел не станут одинаковыми. При этом соблюдается принцип сохранения электрического заряда.

Работа при перенесении заряда из одной точки электрического поля в другую не зависит от пути. Она определяется потенциалами начальной и конечной точек поля (и величиной переносимого заряда) и равна разности потенциалов точек, умноженной на величину заряда.

Задача 120. Два одинаковых маленьких шарика, имеющие заряды $q_1 = +10^{-3}$ Кл и $q_2 = -10^6$ ед. СГСЭ, приведены в соприкосновение и затем раздвинуты на расстояние $r = 20$ см. Найти силу взаимодействия между ними.

$$\begin{aligned} q_1 &= +10^{-3} \text{ Кл} \\ q_2 &= -10^6 \text{ ед. СГСЭ} \\ r &= 20 \text{ см} \end{aligned}$$

Найти F

Решение

Решим задачу в двух системах единиц — СИ и СГСЭ.

В системе СИ

$$q_2 = \frac{-10^6}{3 \cdot 10^9} = -\frac{1}{3 \cdot 10^3} \text{ Кл,}$$

$$r = 0,20 \text{ м.}$$

В системе СГСЭ

$$q_1 = +10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^6 \text{ ед. СГСЭ.}$$

После соприкосновения на обоих шариках заряды стали одинаковыми, причем общий заряд не изменился (на основании принципа сохранения электрического заряда). Поэтому заряд каждого из шариков после соприкосновения будет

$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2},$$

$$q_3 = \frac{\frac{1}{10^3} - \frac{1}{3 \cdot 10^3}}{2} = +\frac{1}{3} 10^{-3} \text{ Кл.}$$

$$q_3 = \frac{3 \cdot 10^6 - 10^6}{2} = 10^6 \text{ ед. СГСЭ.}$$

Сила взаимодействия между ними

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_3^2}{\epsilon_0 r^2},$$

$$F = \frac{q_3^2}{r^2},$$

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{\left(\frac{1}{3} 10^{-3}\right)^2}{\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 0,20^2} = 2500 \text{ Н.}$$

$$F = \frac{(10^6)^2}{20^2} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ дин.}$$

Задача 121. Два положительных точечных заряда находятся на расстоянии $l = 50$ см один от другого, в вакууме. Величина одного заряда вдвое больше величины другого. На прямой, их соединяющей, находится в равновесии заряженный маленький шарик. Определить расстояние этого шарика от большего заряда.

Решение. Предположим, что шарик заряжен положительно. Тогда силы отталкивания от обоих зарядов должны быть равны по величине и противоположно направлены. Значит, шарик будет расположен между зарядами ближе к меньшему заряду. Сила отталкивания от меньшего заряда

$$F_{q_1} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q}{\epsilon_0 (l - l_1)^2},$$

а от большего заряда

$$F_{q_2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2q_1 q}{\epsilon_0 l_1^2}.$$

Приравняв $F_{q_1} = F_{q_2}$, получим

$$\frac{1}{(l - l_1)^2} = \frac{2}{l_1^2}.$$

Отсюда находим

$$l_1^2 = 2(l - l_1)^2, \quad l_1 = l(2 \pm \sqrt{2}).$$

Знак (+) перед корнем не подходит по условию. Значит,

$$l_1 = l(2 - \sqrt{2}) = 0,586l, \quad l_1 = 0,586 \cdot 50 \text{ см} = 29,3 \text{ см.}$$

Если шарик заряжен отрицательно, то силы F_{q_1} и F_{q_2} поменяются местами. Остальное решение не изменится. Однако в этом случае равновесие шарика будет неустойчивым.

Задача 122. Два одинаковых маленьких шарика массой $m = 100$ г каждый подвешены в воздухе на тонких шелковых нитях длиной по $l = 2$ м. Шарикам сообщен заряд $q = -10^{-6}$ Кл. Определить, на какое расстояние r разойдутся шарики.

Решение.

В системе СИ

$$m_1 = m_2 = 0,1 \text{ кг,}$$

В системе СГСЭ

$$q = -10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^9 = -3 \cdot 10^3 \text{ ед. СГСЭ,}$$

$$l = 200 \text{ см.}$$

Так как емкости шариков одинаковы, то при соприкосновении заряд распределится между ними поровну. Заряд каждого шарика будет

$$q_1 = \frac{q}{2} = -0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}, \quad q_1 = \frac{q}{2} = -1500 \text{ ед. СГСЭ}.$$

На каждый шарик, после того как они разошлись, действуют три силы (рис. 157): сила тяжести $P = mg$, сила натяжения нити T и сила отталкивания от заряда другого шарика F_q . Так как шарики находятся в равновесии, то сумма всех сил, действующих на шарики, равна нулю. Это означает, что $F_q = F = P \operatorname{tg} \alpha$. При малом угле α можно принять

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{r}{2l}.$$

$$F = \frac{Pr}{2l}.$$

По закону Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} q_1^2, \quad F = \frac{q_1^2}{r^2},$$

то есть

$$\frac{Pr}{2l} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} q_1^2, \quad \frac{Pr}{2l} = \frac{q_1^2}{r^2}.$$

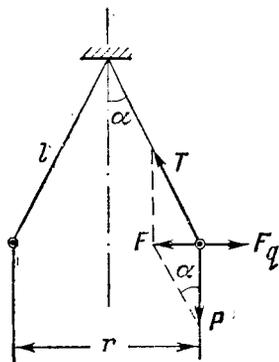


Рис. 157.

Отсюда находим для искомого расстояния r в системах СИ и СГСЭ

$$r = \sqrt[3]{\frac{2lq_1^2}{4\pi\epsilon_0 P}},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2lq_1^2}{P}},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2,0 \cdot 0,5^2 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 0,1 \cdot 9,8}} = 0,097 \text{ м.}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 200 \cdot 1500^2}{100 \cdot 98 \cdot 10^3}} = 9,7 \text{ см.}$$

Задача 123*. Два одинаковых заряженных маленьких шарика, подвешенные на тонких нитях одинаковой длины, находятся в керосине. Какова должна быть плотность шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. (Плотность керосина $\rho_k = 800 \text{ кг/м}^3$; относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_k = 2$.)

Решение. Воспользовавшись рис. 157, найдем, что в воздухе $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F}{mg}$.

В керосине (рис. 158) $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{F'}{mg - F_{\text{выт}}}$, где $F_{\text{выт}}$ — архимедова (выталкивающая) сила: $F_{\text{выт}} = V_{\text{ш}} \rho_k g = \frac{m}{\rho_{\text{ш}}} \rho_k g$ ($V_{\text{ш}}$ — объем шарика: $V_{\text{ш}} = \frac{m}{\rho_{\text{ш}}}$).

$$\text{Следовательно, } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{F}{mg \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{\text{ш}}}\right)}.$$

Приравняем $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ получим соотношение

$$\frac{F}{mg} = \frac{F'}{mg \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{\text{ш}}}\right)}, \quad \text{откуда} \quad 1 - \frac{\rho_k}{\rho_{\text{ш}}} = \frac{F'}{F} = \frac{F'_q}{F_q}.$$

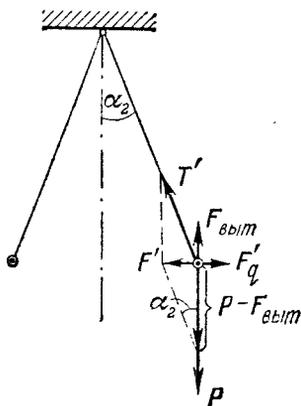


Рис. 158.

А так как $\frac{F'}{F} = \frac{1}{\epsilon_k}$, то $1 - \frac{\rho_k}{\rho_{ш}} = \frac{1}{\epsilon_k}$. Отсюда

$$\rho_{ш} = \frac{\rho_k}{1 - \frac{1}{\epsilon_k}}, \quad \rho_{ш} = \frac{800 \text{ кг/м}^3}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{1600 \text{ кг/м}^3}.$$

Задача 124. В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 0,5$ м расположены два положительных заряда q_1 и q_2 : $q_1 = q_2 = q = 3000$ СГСЭ. Найти потенциал и напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника, а также посередине между зарядами.

Решение.

В системе СИ | В системе СГСЭ

$$q_1 = q_2 = q = \frac{3000}{3 \cdot 10^9} = 10^{-6} \text{ Кл.} \quad a = 50 \text{ см.}$$

а) В третьей вершине треугольника. Направление векторов напряженности в третьей вершине треугольника показано на рис. 159. Величина напряженности поля каждого заряда в этой точке

$$E_{A1} = E_{A2} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{\epsilon_0 a^2}, \quad E_{A1} = E_{A2} = \frac{q}{a^2},$$

$$E_{A1} = E_{A2} = \frac{1}{4\pi} \frac{10^{-6}}{\frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 0,50^2} = 36 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

$$E_{A1} = E_{A2} = \frac{3000}{50^2} = 1,2 \text{ ед. СГСЭ}$$

напряженности.

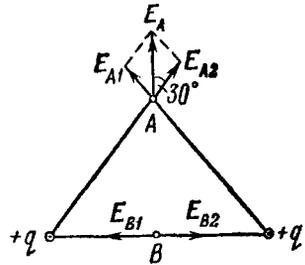


Рис. 159.

Сложив по правилу параллелограмма векторы E_{A1} и E_{A2} , найдем величину напряженности в третьей вершине треугольника:

$$E_A = 2 \cdot E_{A1} \cos 30^\circ = 2E_{A2} \cos 30^\circ,$$

$$E_A = 2 \cdot 36 \cdot 10^3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{36 \sqrt{3} \cdot 10^3 \text{ В/м.}} \quad E_A = 2 \cdot 1,2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{1,2 \cdot \sqrt{3} \text{ ед. СГСЭ}}$$

напряженности.

Потенциал поля каждого из зарядов в точке A

$$\varphi_{A1} = \varphi_{A2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{\epsilon_0 a} = 18 \cdot 10^3 \text{ В.} \quad \varphi_{A1} = \varphi_{A2} = \frac{q}{a} = 60 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}$$

Потенциал суммарного поля в этой точке вдвое больше:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = \underline{36 \cdot 10^3 \text{ В.}} \quad \varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = \underline{120 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}}$$

б) *Посередине между зарядами.* Векторы напряженности в точке B посередине между зарядами направлены в противоположные стороны и равны по абсолютной величине. Поэтому напряженность поля в этой точке равна нулю:

$$\underline{E_B = 0.}$$

Потенциал поля каждого из зарядов:

$$\varphi_{B1} = \varphi_{B2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{\epsilon_0 \frac{a}{2}}, \quad \varphi_{B1} = \varphi_{B2} = \frac{2q}{a},$$

$$\varphi_{B1} = \varphi_{B2} = \frac{1}{4\pi} \frac{10^{-6}}{\frac{1}{9 \cdot 10^9}} = 36 \cdot 10^3 \text{ В.} \quad \varphi_{B1} = \varphi_{B2} = \frac{2 \cdot 3000}{50} = 120 \text{ ед. СГСЭ}$$

потенциала.

Потенциал суммарного поля в точке B равен

$$\varphi_B = 2\varphi_{B1} = \underline{72 \cdot 10^3 \text{ В.}} \quad \varphi_B = 2\varphi_{B1} = 2 \cdot 120 = \underline{240 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}}$$

Задача 125. Заряд $q = -300$ ед. СГСЭ перемещается в однородном электрическом поле напряженностью $E = 400$ В/см на расстояние $l = 80$ см под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению поля. Какая совершается при этом работа?

Решение. Так как заряд отрицательный, то для его перемещения под углом менее 90° к направлению поля требуется совершить работу:

$$A = Fl \cos \alpha.$$

Сила, которую надо приложить к заряду для его перемещения против сил поля: $F = E \cdot |q|$.

Следовательно,

$$A = E |q| l \cos \alpha, \quad A = 4 \cdot 10^4 \text{ В/м} \cdot 10^{-7} \text{ Кл} \cdot 0,80 \text{ м} \cdot \frac{1}{2} = \underline{1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}}.$$

Задача 126. В точке 1 на расстоянии $l_1 = 1,4$ м от поверхности шара радиусом $r = 20$ см, несущего заряд с поверхностной плотностью $\sigma = +3 \cdot 10^{-5}$ Кл/м², находится точечный заряд $q = +6000$ СГСЭ (рис. 160). Определить работу, которая совершается при перенесении этого заряда в воздухе в точку 2 на расстоянии $l_2 = 40$ см от центра шара.

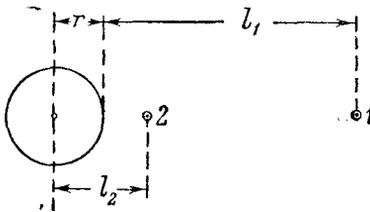


Рис. 160.

Решение. Заряд перемещается из точки с меньшим потенциалом в точку с большим потенциалом. Для такого перемещения требуется совершить против сил поля работу

$$A = q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Найдем формулы для потенциалов φ_1 и φ_2 точек 1 и 2:

$$\varphi_1 = \frac{q_{\text{ш}}}{4\pi\epsilon_0(l_1 + r)}, \quad \varphi_2 = \frac{q_{\text{ш}}}{4\pi\epsilon_0 l_2},$$

где заряд шара $q_{\text{ш}} = \sigma \cdot 4\pi r^2$.

Следовательно,

$$A = q(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{q \cdot q_{\text{ш}}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{(l_1 + r)^2} \right] = \frac{q\sigma r^2}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{(l_1 + r)^2} \right],$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2 \cdot 0,20^2 \text{ м}^2}{\frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}} \left[\frac{1}{0,40^2} - \frac{1}{(1,40 + 0,20)^2} \right] \frac{1}{\text{м}^2} = \underline{1,526 \text{ Дж}}.$$

Задача 127. Батарея конденсаторов сделана из пяти слюдяных пластинок толщиной $d = 0,1$ мм и площадью $S = 100$ см² каждая и листов станиоля. Сколько понадобилось листов станиоля при параллельном соединении конденсаторов батареи? Начертить схему соединения. Определить емкость конденсатора. Определить запас энергии конденсатора, если его подключить к сети постоянно тока с напряжением $U = 220$ В. (Относительная диэлектрическая проницаемость слюды $\epsilon = 7$.)

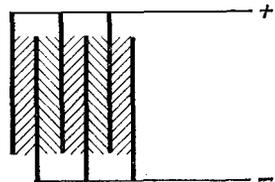


Рис. 161.

Решение. При параллельном соединении конденсаторов соединяются между собой все положительно заряженные пластинки станиоля и все отрицательно заряженные пластинки. Каждая пластинка станиоля может служить обкладкой соседних конденсаторов, как показано на рис. 161:

$$n_{\text{ст}} = 5 + 1 = \underline{6 \text{ пластинок}}.$$

Общая емкость $C = nC_1$, где C_1 — емкость одного конденсатора $C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$.

Следовательно, общая емкость

$$C = n \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$$

$$C = 5 \frac{\frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \Phi / \text{м} \cdot 7 \cdot 10^2 \text{ м}^2}{10^{-4} \text{ м}} = 0,31 \cdot 10^{-7} \Phi = \underline{0,031 \text{ мкФ}}.$$

Энергия батарей конденсаторов

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad W = \frac{0,31 \cdot 10^{-7} \Phi \cdot 220^2 \text{ В}^2}{2} = \underline{0,75 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}}.$$

Задача 128. Тысяча одинаковых и одинаково наэлектризованных дождевых капель сливаются в одну, причем их общий заряд сохраняется. Как изменится общая электрическая энергия капель, если считать, что капли сферические и что маленькие капли находятся на большом расстоянии друг от друга?

Решение. Обозначим r , C_1 , W_1 и q — радиус, емкость, энергию и заряд одной капли (до слияния); R , C , W , Q — те же величины для большой капли после слияния капель.

Приравняем объем капли после слияния объему капель до слияния:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3,$$

откуда

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{n} = \frac{C}{C_1}.$$

Электрическая энергия одной капли до слияния

$$W_1 = \frac{qq}{2} = \frac{q^2}{2C_1}.$$

Энергия n капель в n раз больше и равна

$$nW_1 = \frac{nq^2}{2C_1}.$$

Энергия капли после слияния

$$W = \frac{Q^2}{2C}.$$

Отношение

$$\frac{W}{nW_1} = \frac{Q^2}{2C} : \frac{nq^2}{2C_1} = \frac{1}{n} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 \cdot \frac{C_1}{C} = \frac{1}{n} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = n^{2/3},$$

$$\frac{W}{nW_1} = 1000^{2/3} = \underline{100}$$

(Энергия увеличилась в 100 раз.)

Задача 129. Батарея из пяти конденсаторов включена по схеме *a*, показанной на рис. 162. Емкости конденсаторов одинаковы и равны 0,003 мкФ. Найти общую емкость батареи.

Решение. На рис. 162, *b* расставлены знаки зарядов на обкладках каждого конденсатора. По знакам зарядов можно увидеть, что конденсаторы C_1 , C_2 и C_3 соединены последовательно, так же соединены конденсаторы C_4 и C_5 , а обе группы конденсаторов соединены между собой параллельно.

Таким образом, если обозначить емкость одного конденсатора C , то

$$C_{1-3} = \frac{C}{3}, \quad C_{4-5} = \frac{C}{2}.$$

Общая емкость

$$C_{\text{общ}} = \frac{C}{3} + \frac{C}{2} = \frac{5}{6} C, \quad C_{\text{общ}} = \frac{5}{6} \cdot 0,003 = \underline{0,0025 \text{ мкФ.}}$$

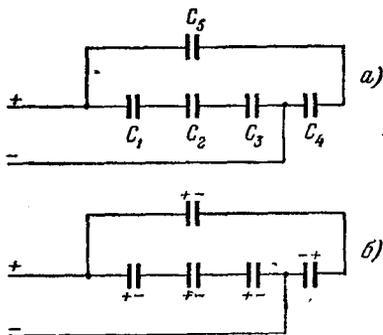


Рис. 162.

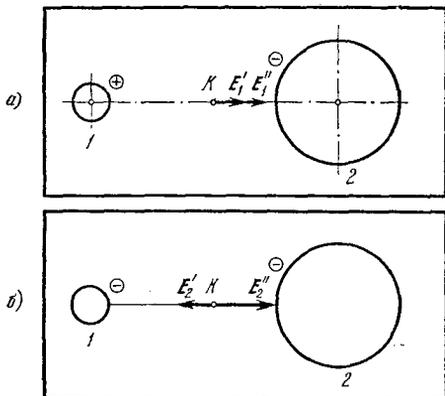


Рис. 163.

Задача 130. Два шара — диаметром $d_1 = 0,20$ м и диаметром $d_2 = 0,80$ м — находятся в сосуде с керосином на расстоянии $l = 160$ см центр от центра (рис. 163). Шары заряжены, первый до потенциала относительно Земли $\varphi_1 = 250$ В, второй до потенциала $\varphi_2 = -100$ В. Шары соединяются проводником, который затем удаляется. Определить напряженность и потенциал электрического поля относительно Земли в точке посередине между центрами шаров. (Относительная диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon = 2$.)

Решение. Емкости шаров:

$$C_1 = 10 \text{ см} = \frac{10}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Ф}, \quad C_2 = 40 \text{ см} = \frac{40}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Ф}.$$

До соединения шаров проводниками (рис. 163, а) их заряды равны

$$q_1 = \varphi_1 C_1 = 250 \text{ В} \frac{10}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Ф} = \frac{2,5}{9 \cdot 10^8} \text{ Кл},$$

$$q_2 = \varphi_2 C_2 = -100 \text{ В} \frac{40}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Ф} = -\frac{4}{9 \cdot 10^8} \text{ Кл}.$$

Напряженность в точке K поля заряда шара 1 (диаметром d_1)

$$E_1' = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1}{\epsilon_0 \epsilon l^2} = \frac{q_1}{\pi \epsilon_0 \epsilon l^2}.$$

Вектор E_1' направлен вправо.

Напряженность поля заряда шара 2

$$E_2'' = \frac{1}{4\pi} \frac{q_2}{\epsilon_0 \epsilon l^2} = \frac{|q_2|}{\pi \epsilon_0 \epsilon l^2}.$$

Вектор E_2'' направлен также вправо.

Следовательно, напряженность поля в точке K

$$E_1 = E_1' + E_1'' = \frac{q_1 + |q_2|}{\pi \varepsilon_0 \varepsilon l^2}, \quad E_1 = \frac{\frac{2,5}{9 \cdot 10^8} + \frac{4}{9 \cdot 10^8}}{\pi \cdot \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 2 \cdot 1,60^2} = 50 \text{ В/м.}$$

Вектор напряженности E_1 направлен вправо.

Потенциал в точке K относительно Земли:

а) поля заряда шара 1

$$\Phi_1' = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon l/2} = \frac{q_1}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}.$$

б) поля заряда шара 2

$$\Phi_1'' = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q_2}{\varepsilon_0 \varepsilon l/2} = \frac{q_2}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}.$$

Общий потенциал

$$\Phi_1 = \Phi_1' + \Phi_1'' = \frac{q_1 + q_2}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l} = \frac{\left(\frac{2,5}{9 \cdot 10^8} - \frac{4}{9 \cdot 10^8} \right) \text{ Кл}}{2\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot 2 \cdot 1,60 \text{ м}} = -9,4 \text{ В.} \quad (*)$$

После того, как шары были соединены проводником (рис. 163, б), их разность потенциалов стала равной нулю; заряды шаров перераспределились пропорционально их емкостям.

Общий заряд

$$q = q_1 + q_2 = \frac{2,5}{9 \cdot 10^8} - \frac{4}{9 \cdot 10^8} = -\frac{1,5}{9 \cdot 10^8} \text{ Кл.}$$

Заряд шара 1 стал

$$q_1' = \frac{q}{C_1 + C_2} C_1 = -\frac{1,5}{9 \cdot 10^8} \text{ Кл} \frac{10 \text{ см}}{(10 + 40) \text{ см}} = -\frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ Кл}$$

(так как l велико, мы пренебрегаем влиянием одного шара на распределение заряда на другом шаре).

Заряд шара 2 стал

$$q_2' = \frac{q}{C_1 + C_2} C_2 = -\frac{1,5}{9 \cdot 10^8} \cdot \frac{40}{(10 + 40)} = -\frac{4}{3 \cdot 10^9} \text{ Кл.}$$

Напряженность поля заряда шара 1 в точке K

$$E_2' = \frac{1}{4\pi} \frac{4 |q_1'|}{\varepsilon_0 \varepsilon l^2} = \frac{|q_1'|}{\pi \varepsilon_0 \varepsilon l^2}.$$

Вектор E_2' направлен влево.

Напряженность поля заряда шара 2 в этой точке

$$E_2'' = \frac{1}{4\pi} \frac{4 |q_2'|}{\varepsilon_0 \varepsilon l^2} = \frac{|q_2'|}{\pi \varepsilon_0 \varepsilon l^2}.$$

Вектор E_2'' направлен вправо.

Так как $E_2'' > E_2'$, то вектор E_2 напряженности поля в точке K направлен вправо. Его абсолютная величина

$$E_2 = \frac{|q_2'| - |q_1'|}{\pi \epsilon_0 \epsilon l^2},$$

$$E_2 = \frac{\left(\frac{4}{9 \cdot 10^8} - \frac{2,5}{9 \cdot 10^8} \right) \text{ Кл}}{\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot 1 \cdot 1,60^2 \text{ м}^2} = 23 \text{ В/м.}$$

Потенциалы в точке K полей обоих зарядов сложатся:

$$\varphi_2 = \frac{q_1' + q_2'}{4\pi \epsilon_0 \epsilon \frac{l}{2}} = \frac{q_1' + q_2'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon l},$$

т. е., как видно из сравнения с уравнением (*),

$$\varphi_2 = \varphi_1 = -9,4 \text{ В.}$$

Задача 131. Две металлические концентрические сферы, расположенные в воздухе, имеют радиусы $r_1 = 20$ см и $r_2 = 40$ см. На внутренней сфере находится заряд $q_1 = -90$ ед. СГСЭ, внешняя сфера заряжена до потенциала $\varphi_2 = 600$ В. Найти напряженность и потенциал поля в точках A , B и C (рис. 164), расположенных на расстоянии $l_A = 10$ см, $l_B = 30$ см и $l_C = 60$ см от центра сфер.

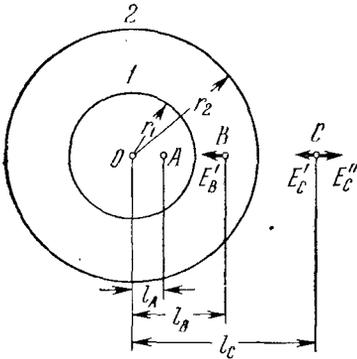


Рис. 164.

Решение. 1. От заряда внутренней сферы:

а) в точке A (внутри сферы):
напряженность

$$E'_A = 0;$$

потенциал равен потенциалу на поверхности шара

$$\varphi'_A = \varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_1}{r_1},$$

$$\varphi'_A = -\frac{90 \text{ ед. СГСЭ заряда}}{20 \text{ см}} = -4,5 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}$$

б) в точке B :

$$E'_B = \frac{|q_1|}{l_A^2},$$

$$E'_B = \frac{90 \text{ ед. СГСЭ}}{30^2 \text{ см}^2} = 0,1 \text{ ед. СГСЭ напряженности;}$$

вектор E'_B направлен к центру сферы;

$$\varphi'_B = \frac{q_1}{l_A} = -\frac{90 \text{ ед. СГСЭ}}{30 \text{ см}} = -3,0 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}$$

в) в точке C :

$$E'_C = \frac{90}{60^2} = 0,075 \text{ ед. СГСЭ напряженности;}$$

вектор E'_C направлен к центру сферы;

$$\varphi'_C = -\frac{90}{60} = -1,5 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}$$

2. От заряда внешней сферы, равного

$$q_2 = \varphi_2 C_2 = \varphi_2 \cdot r_2 = 2 \cdot 40 = 80 \text{ ед. СГСЭ заряда}$$

а) и б) В точках А и В:

$$E''_A = E''_B = 0 \text{ (внутри сферы),}$$

$$\varphi''_A = \varphi''_B = 2 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}$$

с) В точке С:

$$E''_C = \frac{80}{60^2} = 0,011 \text{ ед. СГСЭ заряда;}$$

вектор E''_C направлен от центра сферы;

$$\varphi''_C = \frac{q_2}{l_C} = \frac{80}{60} = 1,33 \text{ ед. СГСЭ потенциала.}$$

Общая напряженность и потенциал.

В точке А:

$$E_A = 0.$$

$$\varphi_A = \varphi'_A + \varphi''_A = -4,5 + 2 = -2,5 \text{ ед. СГСЭ потенциала,}$$

$$\varphi_A = -2,5 \cdot 300 = -750 \text{ В.}$$

В точке В:

$$E_B = E'_B = 0,1 \text{ ед. СГСЭ напряженности,}$$

$E_B = 0,1 \cdot 3 \cdot 10^4 = 3000 \text{ В/м;}$ вектор напряженности E_B направлен к центру сферы;

$$\varphi_B = \varphi'_B + \varphi''_B = -3,0 + 2,0 = -1,0 \text{ ед. СГСЭ потенциала} = -300 \text{ В.}$$

В точке С:

$$E_C = E'_C - E''_C = 0,075 - 0,011 = 0,064 \text{ ед. СГСЭ напряженности,}$$

$$E_C = 0,064 \cdot 3 \cdot 10^4 =$$

$= 1920 \text{ В/м;}$ вектор напряженности E_C направлен к центру сферы;

$$\varphi_C = \varphi'_C + \varphi''_C = -1,5 + 1,33 = -0,17 \text{ ед. СГСЭ потенциала} = -0,17 \cdot 300 = 50 \text{ В.}$$

Задача 132. Батарея конденсаторов, соединенных, как показано на схеме (рис. 165), подключена к батарее элементов, э. д. с. которой $\mathcal{E} = 30 \text{ В.}$ Емкости конденсаторов $C'_1 = C''_1 = C'''_1 = 100 \text{ см, } C_2 = 50 \text{ см, } C_3 = 100 \text{ см.}$ Найти заряды каждого конденсатора.

Решение. Общая емкость конденсаторов C'_1, C''_1 и C'''_1 , соединенных параллельно:

$$C_1 = 3C'_1,$$

а конденсаторов C_2 и C_3 : $C_{2-3} = C_2 + C_3$. Общую емкость батареи найдем из равенства

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2-3}} = \frac{1}{3C'_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}$$

(так как эти две группы конденсаторов соединены последовательно),

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3 \cdot 100 \text{ см}} + \frac{1}{50 \text{ см} + 100 \text{ см}} = \frac{3}{300 \text{ см}} = \frac{1}{100 \text{ см}},$$

$$C = 100 \text{ см} = 10^{-9} \text{ Ф.}$$

На внутренних обкладках зарядов нет. На внешних обкладках левой и правой групп конденсаторов заряды равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку:

$$|q_1| = |q_{2-3}| = \mathcal{E}C = 30 \text{ В} \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

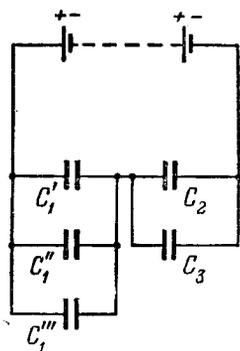


Рис. 165.

В левой группе конденсаторов, имеющих одинаковые емкости, заряды распределяются поровну:

$$q_1' = q_1'' = q_1''' = \frac{3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}}{3} = 10^{-8} \text{ Кл.}$$

В правой группе конденсаторов заряды распределяются пропорционально емкостям, так как разность потенциалов одноименных обкладок конденсаторов равна нулю:

$$\varphi_2 - \varphi_3 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} = 0,$$

откуда

$$\frac{q_2}{q_3} = \frac{C_2}{C_3} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad q_3 = 2q_2,$$

$$q_2 = 10^{-8} \text{ Кл}, \quad q_3 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

Задача 133. Над заземленным железным горизонтальным столиком на высоте $d = 40$ см расположена горизонтально железная квадратная пластинка со стороной $b = 50$ см, обладающая зарядом $q = 12$ СГСЭ ед. заряда (рис. 166).

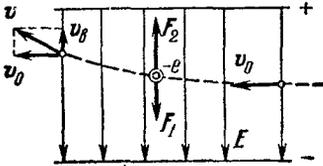


Рис. 166.

В пространство между столиком и пластинкой, посередине (между ними) влетает параллельно одной из сторон пластинки электрон, с кинетической энергией $W = 10^{-9}$ эрг. Найти величину и направление скорости, с которой электрон вылетит за пределы пластинки. На какой высоте над столиком электрон будет в этот момент? (Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг).

Решение. Найдем напряженность электрического поля между пластинкой и столиком. Для этого надо определить емкость системы пластинка—стол как конденсатора и затем потенциал пластинки:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad \varphi = \frac{q}{C} = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}.$$

Напряженность однородного электрического поля в конденсаторе

$$E = \frac{\varphi}{d} = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S d} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon b^2},$$

$$E = \frac{4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{36\pi \cdot 10^9 \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 1 \cdot 0,50^2 \text{ м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{мк Ф}} = 288 \pi \text{ В/м.}$$

Найдем величину скорости влетающего электрона. Так как

$$W_e = \frac{m_e v_0^2}{2},$$

то

$$v_0 = \sqrt{\frac{2W_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}} = 15,5 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Направление вектора v_0 горизонтальное, параллельное одной из сторон пластинки. Время полета над пластинкой

$$t = \frac{b}{v_0}.$$

На движущийся между пластинкой и столиком электрон действует гравитационное поле с силой $F_1 = m_e g$, направленной вниз, и электрическое поле, направленное сверху вниз, с силой $F_2 = eE$, направленной вверх.

Равнодействующая этих двух сил направлена вверх и равна

$$F = eE - m_0 g.$$

За время полета t электрон приобретает вертикальную составляющую скорости:

$$v_B = \frac{Ft}{m_0} = \frac{(eE - m_0 g) b}{m_0 v_0},$$

$$v_B = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 288\pi \text{ В/м} - 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2) 0,50 \text{ м}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 1,55 \cdot 10^7 \text{ м/с}} = 5,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

З а м е ч а н и е. Действие гравитационного поля пренебрежимо мало в сравнении с действием электрического поля.

Величина скорости, с которой вылетает электрон,

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_B^2} = \sqrt{(15,5 \cdot 10^6)^2 + (5,1 \cdot 10^6)^2} = 10^6 \sqrt{15,5^2 + 5,1^2} = 16,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Вектор v составляет с горизонтом угол α такой, что

$$\sin \alpha = \frac{5,1 \cdot 10^6}{16,3 \cdot 10^6} = 0,31.$$

Полагая угол в радианах приблизительно равным его синусу, найдем

$$\alpha \approx 0,31 \frac{180^\circ}{\pi} \approx 18^\circ.$$

Так как движение электрона равноускоренное, то

$$\Delta h = v_{\text{средн}} \cdot t = \frac{v_B}{2} \cdot \frac{b}{v_0}, \quad \Delta h = \frac{5,1 \cdot 10^6 \text{ м/с} \cdot 0,50 \text{ м}}{2 \cdot 15,5 \cdot 10^6 \text{ м/с}} = 0,082 \text{ м} = 8,2 \text{ см}.$$

Высота над столиком

$$h = h_0 + \Delta h = 20,0 + 8,2 = 28,2 \text{ см}.$$

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 92. Электрический ток. Сила тока. Электронная теория электрического тока. (Причины возникновения электрического тока.) Единица силы тока — ампер

Электрический ток *представляет собой направленное перемещение электрических зарядов.*

Электрический ток в металлических проводниках создается движением отрицательно заряженных частиц — электронов в направлении, противоположном направлению силовых линий поля, т. е. от точек с меньшим потенциалом к точкам с большим потенциалом. Однако в физике и технике за направление тока в металлических проводниках принимается направление движения положительных зарядов.

Это несоответствие возникло вследствие того, что электронная теория тока появилась значительно позднее открытия явления электротока. Поскольку само по себе обозначение символом (+)

и (—) условно, изменение этой условности не внесло бы никаких принципиальных изменений в технические расчеты и представления, но вызвало бы осложнения в практическом осуществлении технических расчетов.

Электронная теория электрического тока в металлических проводниках состоит в следующем. Расстояния между атомами в металлах очень малы. Благодаря этому внешние электронные орбиты атомов перекрываются, и электроны, которые были на этих орбитах, уже нельзя приписать одному атому. Эти электроны могут свободно перемещаться по проводнику. Такие электроны называют свободными электронами или электронами проводимости, а совокупность свободных электронов — электронным газом.

Если к проводнику приложено внешнее электрическое поле, то на беспорядочное движение свободных электронов накладывается направленное движение под действием сил электрического поля — так называемый «дрейф» электронов, что и обуславливает электрический ток. Так как носителями электрического тока являются электроны, то проводимость металлических проводников носит название электронной проводимости.

Идея многочисленных опытов для доказательства высказанного положения состоит в том, что поскольку электрон имеет массу, то он должен обладать соответствующей инерцией движения. Следовательно, если металлический проводник привести в движение, то при внезапной его остановке электроны по инерции будут продолжать движение, в результате чего создается эффект электрического тока, который может быть измерен соответствующими достаточно чувствительными приборами.

Под величиной, или силой, тока I понимают предел отношения величины электрического заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за малый промежуток времени Δt , к этому промежутку при Δt , стремящемуся к 0:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta t}.$$

Если за любые равные между собой промежутки времени через поперечное сечение проводника проходят одинаковые заряды, то электрический ток называется постоянным током. Сила постоянного тока измеряется зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в 1 секунду:

$$I = \frac{q}{t}.$$

В системе СИ сила тока измеряется в амперах. Ампер [А] — основная единица в системе СИ*). Единица заряда — кулон

*) Определение единицы силы тока как одной из основных единиц в системе СИ и единицы заряда как производной единицы дано ниже (§ 113).

является производной единицей и имеет размерность

$$[\text{Кл}] = [\text{А} \cdot \text{сек}].$$

Более мелкие единицы измерения силы тока:

$$\text{миллиампер } 1 \text{ мА} = \frac{1}{1000} \text{ А},$$

$$\text{микроампер } 1 \text{ мкА} = 10^{-6} \text{ А}.$$

Величина, измеряемая отношением силы тока в проводнике к площади поперечного сечения проводника, называется плотностью тока:

$$i = \frac{I}{S} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right].$$

Величина силы тока, очевидно, пропорциональна скорости дрейфа электронов под действием электрического поля. Обозначим S — площадь поперечного сечения провод-

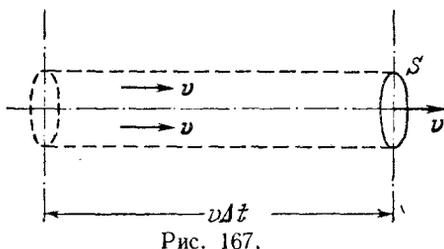


Рис. 167.

ника, n — число свободных электронов в единице объема проводника, e — заряд электрона, v — среднюю скорость дрейфа свободных электронов вдоль проводника под действием электрического поля. Тогда за время Δt через площадку S пройдет заряд, который находится в объеме $V = S v \Delta t$ (рис. 167):

$$q = nesv \Delta t.$$

Поэтому сила тока в проводнике равна

$$I = \frac{q}{\Delta t} = nesv.$$

§ 93. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников.

Единица сопротивления. Удельное сопротивление и удельная проводимость. Локальный закон Ома

Если между концами проводника имеется разность потенциалов, например, при подключении проводника к источнику тока, то по проводнику идет ток.

Для участка электрической цепи, не включающего источника тока, сила тока на этом участке пропорциональна разности потенциалов на концах участка:

$$I = \frac{1}{R} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (*)$$

Коэффициент пропорциональности $1/R$ в этой формуле различен для разных проводников. Он называется проводимостью проводника, а обратная величина R называется сопротивлением проводника.

Закон (*) выполняется с большой точностью. Он носит название Закона Ома: сила тока на участке цепи, не включающем источников тока, прямо пропорциональна разности потенциалов на концах этого участка и обратно пропорциональна сопротивлению проводника на этом участке цепи.

Согласно электронной теории сопротивление металлических проводников электрическому току возникает вследствие того, что носители тока — электроны проводимости при своем движении испытывают «соударения» с ионами кристаллической решетки. При этом движущиеся электроны передают ионам часть своей энергии, приобретенной ими при свободном пробеге в электрическом поле. Энергия, переданная ионам, превращается в энергию беспорядочного колебания ионов (увеличивается амплитуда колебания), т. е. во внутреннюю энергию. Различие в сопротивлении различных металлов объясняется различием величины среднего свободного пробега электронов и количества свободных электронов в единице объема металла.

Величину разности потенциалов на концах проводника называют падением напряжения (или напряжением) и обозначают U :

$$I = \frac{U}{R}. \quad (**)$$

Это другое выражение закона Ома для участка цепи. Сила тока на участке цепи, не включающем источников тока, прямо пропорциональна напряжению на этом участке и обратно пропорциональна сопротивлению проводника на этом участке цепи.

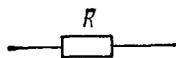


Рис. 168.

Закон Ома, установленный экспериментально в 1826 г., впоследствии проверялся тщательнейшими опытами, причем оказалось, что он выполняется весьма точно. Закон подтверждается теоретическими соображениями, основанными на электронной теории.

За единицу сопротивления в системе единиц СИ — ом (Ом) — принято сопротивление такого проводника, в котором при напряжении в 1 вольт (1 В) возникает ток в 1 ампер (1 А).

(Ом равен сопротивлению ртутного столба высотой 106,3 см и сечением 1 мм² при 0°С.)

Обозначение сопротивлений на схемах показано на рис. 168. Единица проводимости в системе СИ — сименс (См) — электрическая проводимость проводника сопротивлением в 1 Ом.

Многочисленными опытами установлено, что сопротивление проводника прямо пропорционально длине проводника и обратно пропорционально площади его поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (***)$$

Коэффициент пропорциональности в этой формуле называется удельным сопротивлением: *Удельное сопротивление материала проводника численно равно сопротивлению проводника из этого материала, имеющего длину в 1 единицу и площадь поперечного сечения в 1 кв. ед.*

Наличие примесей в металлическом проводнике увеличивает его удельное сопротивление, например примеси в меди могут увеличить удельное сопротивление медного провода в несколько раз. В тех случаях, где требуется малое сопротивление проводов, применяется химически чистая медь. Металлические сплавы имеют значительно большее удельное сопротивление, чем чистые металлы, из которых состоят сплавы. Сплавы применяются в тех случаях, где требуется большое сопротивление проводника.

Из (***) находим размерность удельного сопротивления:

$$[\rho] = \frac{[R] \cdot [S]}{[l]}.$$

В системе СИ: $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$.

Удельной проводимостью (σ) называется величина, обратная удельному сопротивлению:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Для проводника очень малой длины Δl его сопротивление можно выразить такой формулой:

$$R = \frac{\Delta l}{\sigma S}.$$

Подставляя это значение R в формулу (**) закона Ома для участка цепи и выражая силу тока через его плотность, $I = iS$, получим:

$$iS = \frac{U\sigma S}{\Delta l}, \quad \text{или} \quad i = \frac{U\sigma}{\Delta l}.$$

Величина $\frac{U}{\Delta l} = E$ — напряженность электрического поля на участке Δl , а когда Δl — бесконечно мало, т. е. $\Delta l \rightarrow 0$, то напряженность в точке. Следовательно, закон Ома для этой точки запишется так:

$$i = \sigma E.$$

В такой форме закон Ома носит локальный характер — в него входят величины, относящиеся только к одной точке.

§ 94. Зависимость сопротивления от температуры.

Понятие о полупроводниках

Сопротивление проводников изменяется при изменении их температуры. С повышением температуры сопротивление металлических проводников увеличивается. Сопротивление угля, растворов

и расплавов солей и кислот уменьшается с повышением температуры.

Обозначая R_0 —сопротивление проводника при температуре 0°C , получим для сопротивления при любой температуре формулу

$$R = R_0(1 + \alpha t),$$

или

$$R = \rho_0 \frac{l}{s} (1 + \alpha t),$$

где ρ_0 —удельное сопротивление при температуре 0°C , α —термический коэффициент сопротивления, показывающий относительное приращение удельного сопротивления при нагревании проводника на 1°C , положительный для металлов и отрицательный для угля, растворов и расплавов солей и кислот.

Очевидно,

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

откуда

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_0}{t}.$$

Многие металлы и сплавы *при глубоком охлаждении* (для температуры $1\text{--}10\text{ K}$) перестают подчиняться этому закону и скачком *полностью утрачивают сопротивление*. Это явление называется *сверхпроводимостью*.

Иная зависимость сопротивления от температуры у полупроводников.

К полупроводникам относятся вещества, у которых, в отличие от проводников, в нормальном состоянии нет свободных электронов, которые бы под действием электрического поля перемещались и таким образом создавали ток. При сообщении полупроводнику некоторой энергии (нагреванием, облучением световыми лучами, инфракрасными, ультрафиолетовыми, гамма-лучами, быстрыми частицами) часть электронов становится свободными электронами.

Вследствие этого увеличивается проводимость, т. е. уменьшается сопротивление полупроводника.

Сопротивление полупроводников при нагревании убывает резко — до $3\text{--}5\%$ на 1 K повышения температуры, в то время как сопротивление проводников повышается на $0,3\%$ при повышении температуры на 1 K .

К полупроводникам относится большинство минералов — кремний, германий, селен, теллур, бор, мышьяк, фосфор и другие; закись меди и другие окислы; сульфиды, как сернистое серебро, сернистый свинец, сернистый таллий и др.

Полупроводниковые приборы, действие которых основано на сильной зависимости сопротивления полупроводников от темпе-

ратуры, называются термисторами или термосопротивлениями. Приборы, действие которых основано на зависимости сопротивления полупроводников от освещенности, называются фотосопротивлениями.

§ 95. Последовательное соединение проводников

Последовательным называется такое соединение проводников, когда *конец одного проводника соединяется с началом другого* (рис. 169).

При последовательном соединении через все включенные в цепь проводники проходит ток одной и той же силы ($I = \text{const}$), а общее напряжение представляет собой сумму напряжений на отдельных участках

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

Общее сопротивление цепи

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \dots}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \dots + \frac{U_3}{I} + \dots = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

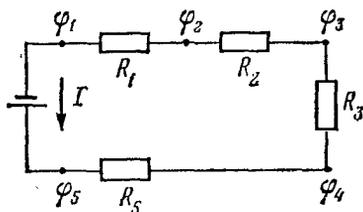


Рис. 169.

Т. е. общее сопротивление цепи при последовательном соединении проводников равно сумме сопротивлений всех отдельных проводников, включенных в цепь.

При последовательном соединении проводников падение напряжения на последовательно соединенных проводниках пропорционально сопротивлениям проводников

$$U_1 : U_2 : U_3 : \dots = R_1 : R_2 : R_3 : \dots$$

§ 96. Параллельное соединение проводников

Параллельным называется такое соединение проводников, когда *одни концы всех проводников соединяются в один узел, другие концы в другой* (рис. 170).

При параллельном соединении в узлах ток разветвляется; сумма сил токов во всех соединенных проводниках равна силе тока до и после разветвления

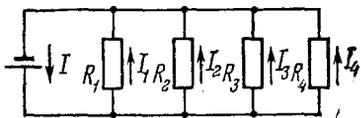


Рис. 170.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

Напряжение же во всех соединенных проводниках одно и то же, равное разности потенциалов в узлах соединения. Общая проводимость

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} + \dots = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Проводимость всех параллельно соединенных проводников равна сумме проводимостей всех отдельных проводников.

Следовательно, сопротивление всего разветвления меньше сопротивления каждого из параллельно соединенных проводников. В частности, при параллельном соединении n проводников одинакового сопротивления общее сопротивление (R) будет в n раз меньше сопротивления каждого проводника (R_1)

$$R = \frac{R_1}{n}.$$

При параллельном соединении проводников силы тока в отдельных параллельных проводниках обратно пропорциональны сопротивлениям проводников

$$I_1 : I_2 : I_3 : \dots = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$$

и произведения сил токов в отдельных параллельных проводниках на сопротивления проводников одинаковы для всех проводников и равны напряжению (разности потенциалов) между узлами соединения проводников

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \dots$$

§ 97. Реостаты

Реостаты служат для измерения сопротивления в цепи.

Изменение сопротивления при неизменном напряжении влечет за собой соответствующее изменение силы тока в цепи.

По назначению реостаты бывают регулировочные и пусковые. Пусковые реостаты предназначаются для плавного изменения

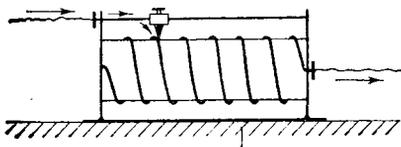


Рис. 171.

силы тока при замыкании и размыкании цепи, в частности для плавного включения и выключения электродвигателей. Регулировочные — для изменения силы тока в работающей цепи.

Конструкции реостатов чрезвычайно разнообразны.

а) Реостат со скользящим контактом (рис. 171) — провод с большим удельным сопротивлением намотан на изолятор, образуя катушку. Вдоль катушки над ней закреплен металлический стержень, по которому движется ползун с контактом. На схеме — наибольшее сопротивление, т. е. наименьшая сила тока, будет при расположении ползуна слева. При включении цепи ползун передвигается слева направо, при выключении — обратно. Такие реостаты применяются в лабораториях, в электро медицинской аппаратуре и т. д.

б) Реостат с подвижной ручкой (рис. 172)—применяется при пуске и выключении электродвигателей. На схеме—при пуске ручка движется слева направо (по часовой стрелке), при выключении—обратно.

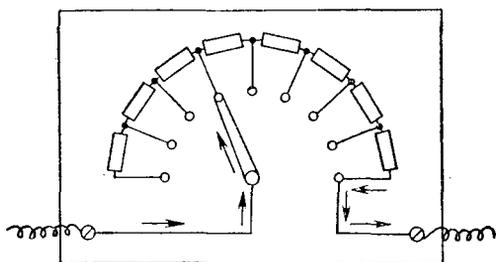


Рис. 172.

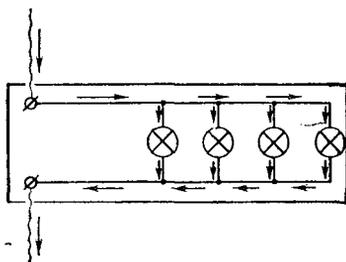


Рис. 173.

в) Ламповый реостат (рис. 173)—состоит из ряда ламп, включенных параллельно. Применяется в лабораториях. Для включения

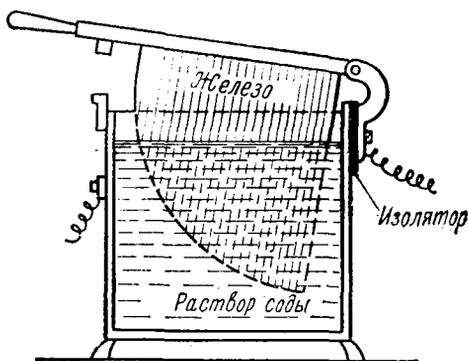


Рис. 174.

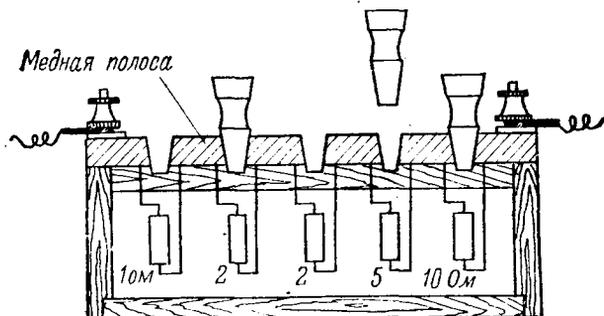


Рис. 175.

цепи достаточно включить одну лампу. При последовательном включении других ламп сопротивление цепи уменьшается постепенно, и соответственно увеличивается сила тока.

г) Жидкостный реостат (рис. 174)—чугунный сосуд, наполненный раствором соды (или подкисленной водой). К нему на шарнире прикреплена рукоятка с железным листом. При вращении рукоятки вниз увеличивается глубина погружения листа и уменьшается сопротивление.

д) Штепсельный реостат, или магазин сопротивлений (рис. 175) применяется в лабораториях и представляет собой деревянный ящик, в котором находится набор эталонных катушек, имеющих различное, но определенное сопротивление каждая. На крышке ящика смонтированы медные полосы, разделенные промежутками, в которые вставляются штепсели, выключающие соответствующие катушки. На рис. 175 выключены сопротивления в 2 и 10 Ом, включены последовательно катушки в 1, 2 и 5 Ом, общим сопротивлением 8 Ом.

§ 98. Источники тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для всей цепи

Полная замкнутая электрическая цепь представляет собой электрическую цепь, в которую включены внешние сопротивления и источник тока. На рис. 176, например, во внешнюю цепь включены сопротивления R_1 , R_2 и R_3 , источник тока составляет участок 1—2 электрической цепи. Как один из участков электрической цепи источник тока обладает сопротивлением, которое называется внутренним сопротивлением.

Обозначая полное падение напряжения во внешней цепи U и падение напряжения в источнике тока u , найдем на основании закона Ома для участков цепи, что полное падение напряжения в замкнутой цепи

$$U + u = IR + Ir = I(R + r),$$

где R —полное внешнее сопротивление (на рис. 176 $R = R_1 + R_2 + R_3$).

Во внешней цепи и в сопротивлении r источника тока ток идет по направлению поля, внутри же источника—против поля. При этом, для того чтобы переместить единичный положительный заряд внутри источника от одной клеммы к другой, необходимо совершить работу, равную разности потенциалов клемм, т. е.

$$U + u.$$

Для того чтобы ток проходил по замкнутой цепи, очевидно, необходимо, чтобы в источнике тока зарядам сообщалась дополнительная энергия, достаточная для преодоления разности потенциалов, равной полному падению напряжения $U + u$. Если источником тока является гальванический элемент, то это про-

исходит за счет химической энергии, если генератор, — то за счет механической энергии двигателя и т. д. Перемещение зарядов внутри источника тока против сил электрического поля происходит, следовательно, с помощью сил *неэлектрического* происхождения. (Эти силы иногда называют *сторонними* силами.)

Физическая величина, измеряемая работой, которая совершается источником тока (сторонними силами) при перемещении внутри источника единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой источника (обозначается: э. д. с., ЭДС, \mathcal{E}).

Следовательно, электродвижущая сила равна по величине

$$\mathcal{E} = U + u = I(R + r).$$

Отсюда получаем выражение закона Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

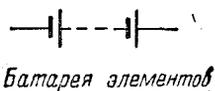
Сила тока в замкнутой цепи (включающей источник тока) прямо пропорциональна электродвижущей силе источника тока и обратно пропорциональна сопротивлению всей цепи.

Так как при разомкнутой цепи ток внутри источника тока не проходит, то падения напряжения внутри источника тока нет

$$u = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathcal{E} = U.$$

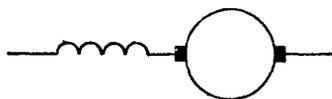
Это означает, что э. д. с. численно равна разности потенциалов полюсов источника тока (напряжению на зажимах) при разомкнутой цепи.

Как и разность потенциалов, э. д. с. измеряется в вольтах.



§ 99. Параллельное и последовательное соединение источников тока

На рис. 177 показаны условные обозначения различных источников тока на электрических схемах. Рассмотрим параллельное и последовательное соединение источников тока.



Генератор постоянного тока

Рис. 177.

Параллельное соединение элементов (рис. 178, а): положительные полюсы элементов соединяются между собой, отрицательные — между собой. При одинаковых э. д. с. отдельных элементов общая э. д. с. батареи равна э. д. с. одного элемента. Общая внутренняя проводимость равна сумме внутренних проводимостей отдельных элементов. При одинаковых внутренних сопротивлениях n отдельных элементов общая внутренняя проводимость в

n раз больше; следовательно, внутреннее сопротивление батареи в n раз меньше внутреннего сопротивления каждого элемента:

$$R_{\text{внут}} = \frac{r}{n}$$

(r — внутреннее сопротивление одного элемента).

Сила тока

$$I_{\text{парал}} = \frac{\mathcal{E}}{R + r/n}$$

(R — сопротивление внешнего участка цепи).

При последовательном соединении элементов (рис. 178, б) положительный полюс каждого элемента соединяется с отрицательным полюсом следующего. Общая э. д. с. батареи в этом

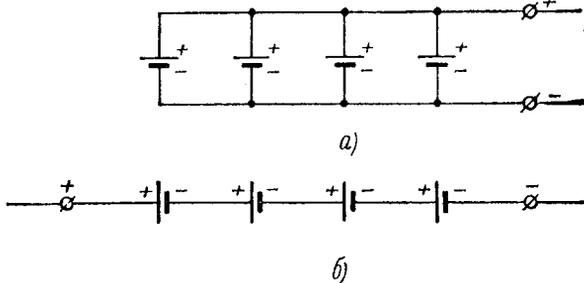


Рис. 178.

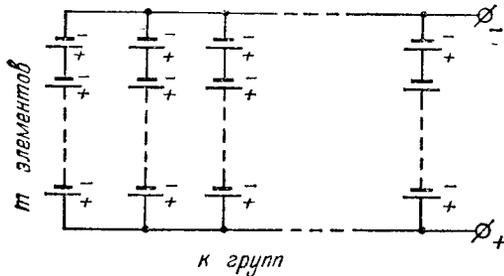


Рис. 179.

случае равна сумме э. д. с. отдельных элементов. Общее внутреннее сопротивление равно сумме внутренних сопротивлений отдельных элементов

$$R_{\text{внут}} = nr.$$

Сила тока

$$I_{\text{пос}} = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}$$

При смешанном соединении из k параллельных групп по n последовательно соединенных элементов в группе (рис. 179). Общая э. д. с. батареи равна э. д. с. одной параллельной группы, т. е. $m\mathcal{E}$, где \mathcal{E} — э. д. с. одного элемента. Внутреннее сопротивление

каждой параллельной группы mr , а общее внутреннее сопротивление k таких групп равно mr/k . Сила тока

$$I_{\text{смеш}} = \frac{m\mathcal{E}}{R + \frac{m}{k}r}.$$

§ 100. Работа и мощность тока. Единицы работы и мощности тока

Работа переноса электрического заряда в электрическом поле

$$A = qU.$$

Так как для тока $q = It$, то работа электрического тока

$$A = UI t.$$

Подставляя сюда $U = IR$ или $I = \frac{U}{R}$, получим

$$A = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (*)$$

Так как мощность $N = \frac{A}{t}$, то

$$N = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

В этих формулах R — внешнее сопротивление и, следовательно, N — полезная мощность.

Полная (затраченная) мощность

$$N_{\text{затр}} = I^2 (R + r).$$

Поэтому коэффициент полезного действия электрогенератора, когда в цепи имеются только сопротивления,

$$\eta = \frac{N}{N_{\text{затр}}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r}.$$

Единица работы электрического тока в системе единиц СИ:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ Кл} = 1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с}.$$

В технике чаще употребляются следующие единицы:

$$1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ Дж};$$

$$1 \text{ гВт} \cdot \text{ч} = 360\,000 \text{ Дж} \text{ (гектоватт-час} = 100 \text{ ватт-часов);}$$

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 360\,000 \text{ Дж} = 3600 \text{ кДж}.$$

Единица мощности электрического тока в системе единиц СИ:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}; \quad 1 \text{ кВт} = 1000 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кДж}}{\text{с}}.$$

§ 101. Энергия электрического тока и ее превращение в другие виды энергии. Закон Джоуля—Ленца

Запас энергии электрического тока равен работе переноса зарядов в электрическом поле. Эта энергия превращается в другие виды энергии в зависимости от потребителей—в механическую, если, например, в цепь включены электромоторы, в световую, если в цепь включены световые источники, во внутреннюю энергию тепловых приборов и т. д. Кроме того, энергия электрического тока расходуется на нагревание проводов, т. е. превращается во внутреннюю энергию проводов.

Если на некотором участке цепи нет потребителей энергии, то вся энергия электрического тока на этом участке идет на нагревание проводов. В этом случае, следовательно, $Q = A$, где величина A может быть вычислена по одной из формул предыдущего параграфа. По формуле (*)

$$Q = I^2 R t,$$

где все величины выражаются в системе СИ.

Эта формула выражает закон Джоуля—Ленца, установленный опытным путем в середине прошлого столетия независимо друг от друга русским ученым Ленцем и англичанином Джоулем:

При прохождении электрического тока по проводнику количество теплоты, выделяющейся в проводнике, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока.

Несколькими годами позднее этот закон был выведен теоретически Клаузиусом на основании закона сохранения энергии.

Количество теплоты в калориях

$$Q_{[\text{кал}]} = 0,24 I^2 R t = 0,24 \frac{U^2}{R} t = 0,24 U I t.$$

(Все величины, стоящие в правых частях, выражены в системе СИ.)

Примеры решения задач

При решении задач на электрические цепи постоянного тока в большинстве случаев надо прежде всего нарисовать схему цепи и выяснить, какие проводники соединены между собой последовательно, какие параллельно. Если на том или ином участке цепи включено несколько сопротивлений последовательно, их следует заменить одним сопротивлением, равным их сумме. Параллельно включенные сопротивления заменяются также одним эквивалентным сопротивлением, которое получается в результате сложения обратных величин сопротивлений (проводимостей).

В новой упрощенной схеме производятся те же операции—до тех пор, пока не получится сопротивление, эквивалентное сопротивлению всей цепи.

В более сложных случаях, когда в схеме невозможно выделить последовательно и параллельно соединенные проводники, для вычисления общего сопротивления электрической цепи следует найти точки, между которыми разность потенциалов равна нулю. Эти точки нужно или разъединить, выбросив соединяющие их проводники, или соединить в общий узел. Режим электрического тока от этого не изменится, поскольку между такими точками ток не

идет. В частности, разность потенциалов равна нулю между точками, лежащими на оси или в плоскости симметрии, если схема обладает ею. После соединения или разъединения таких точек обычно получается эквивалентная схема, состоящая из последовательно или параллельно соединенных сопротивлений.

Сложение проводимостей параллельных проводников рекомендуется производить в цифрах, так как общая формула для эквивалентного сопротивления получается громоздкой, особенно если параллельных проводников больше двух. Если сопротивление того или иного проводника определяется через его удельное сопротивление, то также удобнее найти его числовое значение.

В задачах на определение мощности и энергии электрического тока и превращения энергии (по закону Джоуля—Ленца) следует применять те из формул §§ 100 и 101, которые в данном случае быстрее приводят к цели. Если рассматривается участок с параллельным соединением проводников, у которых одинаковое напряжение, лучше применить формулу $W = \frac{U^2}{R}t$; для подсчета энергии последовательно соединенных проводников удобнее воспользоваться формулой $W = I^2Rt$, так как по такой цепи протекает ток одной и той же силы, и т. д.

Задача 134. Определить среднюю скорость v направленного движения (дрейфа) электронов в металлическом проводнике сечением $S = 0,5 \text{ см}^2$, по которому течет ток $I = 12 \text{ А}$, если в каждом кубическом сантиметре проводника содержится $n = 5 \cdot 10^{21}$ свободных электронов. (Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.)

$$\begin{aligned} S &= 0,5 \text{ см}^2 \\ I &= 12 \text{ А} \\ n &= 5 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \end{aligned}$$

Найти v

Решение

Сила тока $I = nesv$, откуда находим

$$v = \frac{I}{nes}$$

$$v = \frac{12 \text{ А}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 5 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \cdot 0,5 \text{ см}^2} = 0,03 \frac{\text{А} \cdot \text{см}}{\text{Кл}}$$

Так как $[\text{Кл}] = [\text{А} \cdot \text{с}]$, то

$$v = 0,03 \text{ см/с.}$$

Задача 135. Дюговая лампа рассчитана на напряжение $U_{\lambda} = 50 \text{ В}$ при силе тока $I_{\lambda} = 3,5 \text{ А}$. Ее надо включить в сеть с напряжением $U = 120 \text{ В}$ с помощью дополнительного сопротивления из никелиновой проволоки сечением $0,1 \text{ мм}^2$. Определить длину проволоки. (Удельное сопротивление никелина $\rho = 0,40 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$.)

Решение. Сила тока на участке $a-b$ (рис. 180), одна и та же на всем участке, равна I_{λ} . Падение напряжения на участке $a-c$ равно $U - U_{\lambda}$.

Сопротивление константанового провода должно быть равно

$$R = \frac{U - U_{\lambda}}{I_{\lambda}}$$

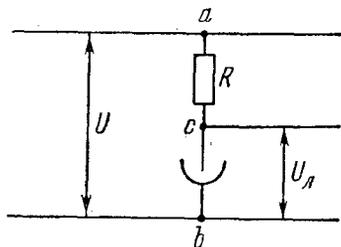


Рис. 180.

В данном случае удобно найти численное значение сопротивления

$$R = \frac{120 \text{ В} - 50 \text{ В}}{3,5 \text{ А}} = 20 \text{ Ом.}$$

Из формулы $R = \rho \frac{l}{S}$ далее находим

$$l = \frac{RS}{\rho},$$

$$l = \frac{20 \text{ Ом} \cdot 0,1 \text{ мм}^2}{0,40 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}} = 5,0 \text{ м}.$$

Задача 136. Потребитель находится на расстоянии $l = 20$ км от источника постоянного тока. Между ними двухпроводная линия связи сопротивлением $R = 400$ Ом. На линии произошло короткое замыкание, причем у источника тока вольтметр показал $U' = 10$ В, а миллиамперметр $I' = 40$ мА. На каком расстоянии от источника тока произошло короткое замыкание?

Решение. Сопротивление внешнего участка замкнутой цепи после короткого замыкания

$$R' = \frac{U'}{I'} = \frac{10 \text{ В}}{0,040 \text{ А}} = 250 \text{ Ом}.$$

Так как

$$\frac{l'}{l} = \frac{R'}{R},$$

то

$$l' = l \frac{R'}{R},$$

откуда

$$l' = 20 \text{ км} \frac{250 \text{ Ом}}{400 \text{ Ом}} = 12,5 \text{ км}.$$

Задача 137. Вольфрамовая нить электролампы имеет длину $l = 20$ см и сопротивление $R_t = 200$ Ом при температуре $t = 2500$ °С. Чему равен диаметр нити. (Удельное сопротивление вольфрама $\rho_0 = 0,056 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$; термический коэффициент сопротивления $\alpha = 0,0042$ град⁻¹.)

Решение. Из формулы $R_t = R_0(1 + \alpha t)$ найдем сопротивление нити при 0 °С:

$$R_0 = \frac{R_t}{1 + \alpha t}.$$

$$R_0 = \frac{200 \text{ Ом}}{1 + 0,0042 \cdot 2500} = 17,4 \text{ Ом}.$$

Так как $R_0 = \rho_0 \frac{l}{S} = \rho_0 \frac{4l}{\pi d^2}$, то

$$d = \sqrt{\frac{4l\rho_0}{\pi R_0}}, \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,20 \text{ м} \cdot 0,056 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}}{3,14 \cdot 17,4 \text{ Ом}}} = 0,0004 \text{ мм},$$
$$d = 0,4 \text{ мк}.$$

Задача 138. Определить сопротивление цепи, показанной на рис. 181, если $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, $r_3 = r_{11} = 1,5$ Ом, $r_4 = 2$ Ом, $r_5 = 3$ Ом, $r_6 = 4$ Ом, $r_7 = 1$ Ом, $r_8 = r_9 = r_{10} = 7,5$ Ом.

Решение. Сопротивления r_1 и r_2 заменяем эквивалентным сопротивлением R_1 : $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2}$. Получаем $R_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, $R_1 = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{3}{4} = 0,75$ Ом.

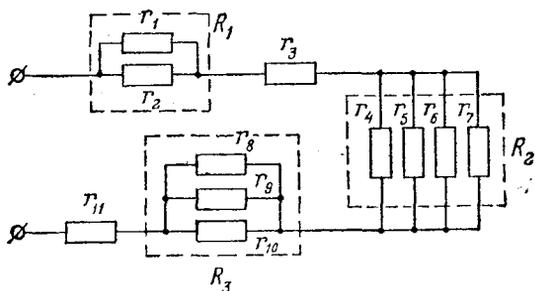


Рис. 181.

Сопротивления r_4, r_5, r_6, r_7 заменяем эквивалентным сопротивлением R_2 ;

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{6 + 4 + 3 + 12}{12} = \frac{25}{12},$$

$$R_2 = \frac{12}{25} = 0,48 \text{ Ом.}$$

Сопротивления r_8, r_9, r_{10} заменяем эквивалентным сопротивлением R_3 . Так как $r_9 = r_{10} = r_8$, то

$$R_3 = \frac{r_8}{3} = \frac{7,5}{3} = 2,5 \text{ Ом.}$$

Сопротивления $R_1 - r_3 - R_2 - R_3 - r_{11}$ соединены последовательно. Общее сопротивление

$$R = R_1 + r_3 + R_2 + R_3 + r_{11} = 0,75 + 1,5 + 0,48 + 2,5 + 1,5 = 5,73 \text{ Ом.}$$

Задача 139. Из проволоки сопротивлением $R_0 = 10$ Ом сделано кольцо. Где надо присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление равнялось $R = 1$ Ом.

Решение. После присоединения проводов (рис. 182) получится параллельное соединение двух сопротивлений, в сумме равных полному сопротивлению кольца. Имеем два уравнения

$$R_1 + R_2 = R_0, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = R.$$

Решая эту систему уравнений, найдем $R_1 = 5 - \sqrt{15}$ Ом, $R_2 = 5 + \sqrt{15}$ Ом.

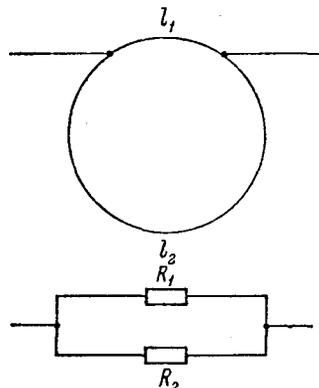


Рис. 182.

Так как сопротивление проводника пропорционально его длине, то

$$\frac{l_1}{l} = \frac{R_1}{R_0} = \frac{5 - \sqrt{15}}{10} = 0,113$$

или

$$l_1 = 0,113 l.$$

Задача 140. На сколько равных частей надо разрезать проводник сопротивлением $R=100$ Ом, чтобы при параллельном их соединении получить сопротивление $R_1=1$ Ом?

Решение. Если проводник разрезан на n частей, то сопротивление каждой части

$$r = \frac{R}{n}.$$

При параллельном соединении n частей с сопротивлением каждой части, равным r , общее сопротивление будет

$$R_1 = \frac{r}{n} = \frac{R}{n^2}.$$

Отсюда получаем

$$n = \sqrt{\frac{R}{R_1}} = \sqrt{100} = 10.$$

(Проводник надо разрезать на 10 равных частей.)

Задача 141. Вольтметр сопротивлением $R_B=900$ Ом, включенный в осветительную сеть последовательно с некоторым дополнительным сопротивлением R_1 , показал $U_1=198$ В; при включении последовательно с двойным дополнительным сопротивлением вольтметр показал $U_2=180$ В. Определить напряжение осветительной сети и величину дополнительного сопротивления.

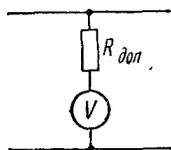


Рис. 183.

Решение. В первом случае, полагая падение напряжения на участке цепи пропорциональным сопротивлению этого участка, запишем (рис. 183)

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_B}{R_B + R_1}. \quad (1)$$

Во втором случае

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_B}{R_B + R_2}. \quad (2)$$

Имеем систему двух уравнений; делим уравнение (1) на уравнение (2):

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_B + 2R_1}{R_B + R_1}.$$

Отсюда находим

$$R_1 = \frac{U_1 - U_2}{2U_2 - U_1} R_B, \quad R_1 = \frac{198 - 180}{2 \cdot 180 - 198} \cdot 900 \text{ Ом} = 100 \text{ Ом}.$$

Из уравнения (1)

$$U = \frac{U(R_B + R_{1\text{доп}})}{R_B} = V \left(1 + \frac{R_{1\text{доп}}}{R_B} \right),$$

$$U = 198 \text{ В} \left(1 + \frac{100 \text{ Ом}}{900 \text{ Ом}} \right) = 220 \text{ В}.$$

Задача 142. Определить сопротивление цепи, изображенной на рис. 184, если $r_1=r_2=1,8$ Ом, $r_3=1$ Ом, $r_4=3$ Ом, $r_5=1,0$ Ом, $r_6=1,2$ Ом, $r_7=0,8$ Ом, $r_8=1,2$ Ом, $r_9=r_{10}=3$ Ом, $r_{11}=r_{12}=0,3$ Ом, $r_{13}=0,7$ Ом.

Решение. Данную задачу удобнее решать в цифрах, так как общая формула получилась бы громоздкой.

Сопротивления r_9 и r_{10} заменим одним эквивалентным сопротивлением

$$r_{9-10} = \frac{r_9}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ Ом}.$$

Теперь замечаем, что сопротивления r_{9-10} , r_8 и r_{11} , соединенные последовательно, и сопротивления r_6 и r_7 , также соединенные последовательно, представляют собой две группы сопротивлений, соединенных параллельно.

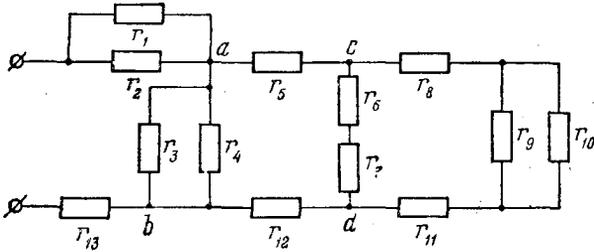


Рис. 184.

Их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением, присоединенным к точкам c и d цепи:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_{9-10} + r_8 + r_{11}} + \frac{1}{r_6 + r_7} = \frac{1}{1,5 + 1,2 + 0,3} + \frac{1}{1,2 + 0,8} = \frac{5}{6},$$

$$R_1 = \frac{6}{5} \text{ Ом} = 1,2 \text{ Ом}.$$

Далее, сопротивления R_1 , r_5 , r_{12} , соединенные последовательно, заменим эквивалентным сопротивлением R_2 :

$$R_2 = R_1 + r_5 + r_{12} = 1,2 + 1,5 + 0,3 = 3,0 \text{ Ом}.$$

Сопротивления r_3 и r_4 , соединенные параллельно, заменим эквивалентным сопротивлением

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$R_3 = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_2 и R_3 , соединенные параллельно, заменим одним эквивалентным сопротивлением R_4 , присоединенным к точкам a и b :

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3,0} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

$$R_4 = \frac{3}{5} \text{ Ом} = 0,6 \text{ Ом}.$$

Наконец, полное сопротивление цепи

$$R = R_4 + r_{13} + \frac{r_1 \text{ (или } r_2)}{2} =$$

$$= 0,6 + 0,7 + \frac{1,8}{2} = 2,2 \text{ Ом}.$$

Задача 143. Определить сопротивление цепи, изображенной на рис. 185, a .

Решение. В этой цепи только сопротивления r и $3r$ включены последовательно—их общее сопротивление $4r$. Учитывая это, нарисуем промежуточную схему (рис. 185, b). В ней нет ни параллельных, ни последовательных

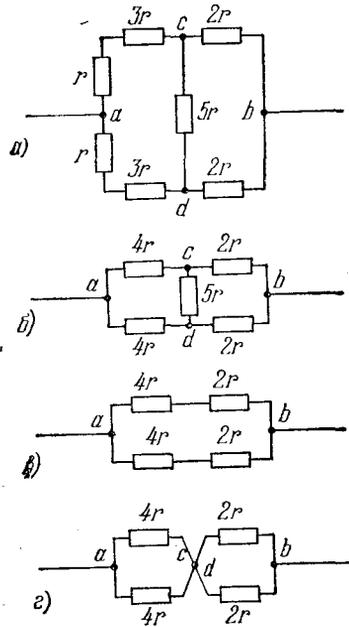


Рис. 185.

соединений. (Сопrotивления $4r$ и $2r$ нельзя считать последовательными, поскольку между ними включено сопротивление $5r$; сопротивления $4r$ и $4r$, а также $2r$ и $2r$ не являются параллельными, так как в точках c и d они соединены через то же сопротивление $2r$.)

Так как сопротивления в цепи включены симметрично относительно линии cd , то разность потенциалов между точками c и d равна нулю, и ток по сопротивлению $5r$ не идет. Эти точки можно разединить, выбросив сопротивление $5r$ (рис. 185, ϵ), либо соединить в один узел (рис. 185, ζ).

В первом случае сопротивления $4r$ и $2r$ включены последовательно, — их общее сопротивление: $R_1 = 4r + 2r = 6r$. Теперь имеем два параллельных сопротивления по $6r$. Общее сопротивление цепи

$$R = \frac{R_1}{2} = \frac{6r}{2} = 3r.$$

Во втором случае сопротивления по $4r$ включены параллельно, — эквивалентное им сопротивление $R_1 = 2r$. Аналогично сопротивление, эквивалентное двум параллельным сопротивлениям по $2r$, равно $R_2 = r$. Общее сопротивление

$$R = R_1 + R_2 = 2r + r = 3r.$$

Задача 144. Определить сопротивление цепи, изображенной на рис. 186, a .

Решение. Из рассмотрения схемы включения сопротивлений видно, что разность потенциалов между точками a , b и c равна нулю, так как падение напряжения на участках цепи Aa , Ab и Ac одинаково. Следовательно, ток по линии abc через сопротивления $3r$ и $4r$ не идет. Эти сопротивления можно выбросить и рассчитать общее сопротивление по одному из вариантов схемы, показанной на рис. 186, b и $в$.

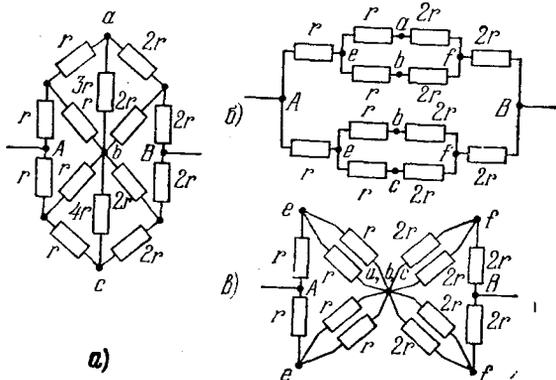


Рис. 186.

Расчет по 1-му варианту. Сопротивление между точками e и f : $R_{ef} = \frac{1}{2}(r + 2r) = 1,5r$. Общее сопротивление цепи

$$R = \frac{1}{2}(r + 1,5r + 2r) = 2,25r.$$

Расчет по 2-му варианту. Сопротивление между точками e и (abc) : $R_1 = \frac{r}{2}$; между (abc) и f : $R_2 = \frac{2r}{2} = r$. Сопротивление между точками A и (abc) : $R_3 = \frac{1}{2}\left(r + \frac{r}{2}\right) = 0,75r$; то же — между (abc) и B : $R_4 = \frac{1}{2}(r + 2r) = 1,5r$. Общее сопротивление:

$$R = R_3 + R_4 = 0,75r + 1,5r = 2,25r.$$

Задача 145. Определить сопротивление каркаса куба, составленного из проволочек с одинаковым сопротивлением.

Решение. В точках A и B (рис. 187) ток I разветвляется на три части; поскольку условия его прохождения по каждой из ветвей Aa и Ab одинаковы, по каждой из них пойдет ток $\frac{I}{3}$, и падение напряжения на них одно и то же: $\mathcal{E} = \frac{IR}{3}$. Следовательно, все точки a и все точки b эквипотенциальны и их

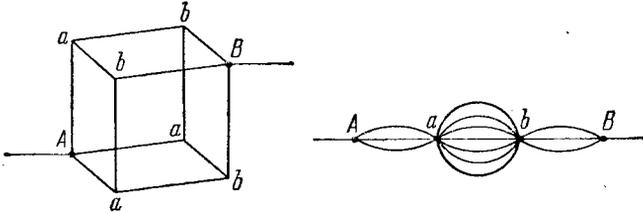


Рис. 187.

можно соединить в два узла a и b , как показано на рисунке. Между этими узлами окажутся включенными шесть одинаковых проводников ab . Общее сопротивление цепи:

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6} R.$$

Задача 146. Определить внутреннее сопротивление и напряжение на зажимах элемента, имеющего э. д. с. $\mathcal{E} = 2,1$ В, находящегося на расстоянии $l = 20$ м от потребителя электрической энергии, если при сопротивлении потребителя $R = 2$ ома ток в цепи $I = 0,7$ А. Проводка сделана из медного проводника диаметром $d = 1,2$ мм. (Удельное сопротивление меди $\rho = 0,017 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$.)

Решение. Сопротивление подводящих проводов длиной $2l$ равно

$$R_0 = \rho \frac{2l}{\pi d^2/4} = \rho \frac{8l}{\pi d^2}.$$

$$R_0 = 0,017 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}} \cdot \frac{8 \cdot 20 \text{ м}}{3,14 \cdot 1,2^2 \text{ мм}^2} = 0,6 \text{ Ом}.$$

Сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0 + r}$, откуда находим внутреннее сопротивление элемента:

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I} - (R + R_0),$$

$$r = \frac{2,1 \text{ В}}{0,7 \text{ А}} - (2 + 0,6) = \underline{0,4 \text{ Ом}}.$$

Напряжение на зажимах

$$U = (R + R_0) I, \quad U = (2 + 0,6) \text{ Ом} \cdot 0,7 \text{ А} = \underline{1,82 \text{ В}}.$$

Задача 147*. При внешнем сопротивлении R_1 по цепи идет ток I_1 . При внешнем сопротивлении R_2 сила тока будет I_2 . Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление источника тока.

Решение. Запишем систему двух уравнений:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}. \quad (2)$$

Делим уравнение (1) на (2):

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Отсюда

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}.$$

Подставляя эту величину r , например, в уравнение (1), находим э. д. с. источника тока:

$$\mathcal{E} = I_1 (R_1 + r) = I_1 \left(R_1 + \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} \right),$$

$$\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2}.$$

Задача 148*. В электрической цепи, показанной на рис. 188, э. д. с. батареи элементов равна $\mathcal{E} = 10$ В, все внешние сопротивления одинаковые и равны каждое $R = 5$ Ом, емкости всех конденсаторов тоже одинаковые и равны

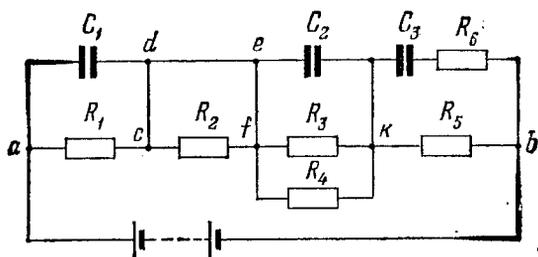


Рис. 188.

каждая $C = 900$ см. Найти величину зарядов на обкладках конденсаторов, если известно, что при коротком замыкании батареи ток через батарею увеличивается в $n = 9$ раз. Сопротивлением проводов пренебречь.

Решение. Из схемы видно, что ток не пойдет через сопротивления R_2 и R_6 . Поэтому эти сопротивления можно не учитывать. (Ток пойдет по цепи $a-c-d-e-f-k-b$.)

Эквивалентное внешнее сопротивление

$$R_0 = R_1 + \frac{R_3}{2} + R_5 = 2,5R.$$

Э. д. с. батареи

$$\mathcal{E} = I (r + 2,5R). \quad (1)$$

При коротком замыкании

$$\mathcal{E} = I_0 r \quad (2)$$

(r — внутреннее сопротивление батареи).

Приравниваем правые части равенств (1) и (2)

$$I(r + 2,5R) = I_0 r.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{2,5R}{\left(\frac{I_0}{I} - 1\right)} = \frac{2,5R}{n-1}.$$

Сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + 2,5R} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{2,5R}{n-1} + 2,5R} = \frac{\mathcal{E}(n-1)}{2,5R \cdot n}.$$

Разность потенциалов на участках $a-c$ и $k-b$:

$$V_{1,3} = IR = \frac{\mathcal{E}(n-1)}{2,5n},$$

а на участке $f-k$:

$$V_2 = I \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}(n-1)}{5n}.$$

Величины зарядов на обкладках конденсаторов C_1 и C_3 :

$$q_1 = q_3 = V_{1,3} \cdot C = \frac{\mathcal{E}C(n-1)}{2,5 \cdot n},$$

$$q_1 = q_3 = \frac{10\text{В} \cdot 10^{-9}\text{Ф} (9-1)}{2,5 \cdot 9} = \underline{3,56 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}},$$

$$q_2 = V_2 C = \frac{\mathcal{E}C(n-1)}{5n},$$

$$q_2 = \frac{10\text{В} \cdot 10^{-9}\text{Ф} (9-1)}{5 \cdot 9} = \underline{1,78 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}.$$

Задача 149. Батарея состоит из трех параллельных групп, каждая группа — из $m=20$ соединенных последовательно элементов. Э. д. с. каждого элемента $\mathcal{E}_1 = 1,5$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 0,3$ Ом. Батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 2,5$ Ом. Определить силу тока во внешней цепи и в каждом элементе, а также напряжение на зажимах батареи.

Показать, что при такой группировке элементов сила тока во внешней цепи будет наибольшей. Как следует составить батарею, чтобы получить наибольшую силу тока при вдвое большем внешнем сопротивлении?

Решение. I. Э. д. с. батареи $\mathcal{E} = m\mathcal{E}_1$. Полное внутреннее сопротивление

$$r = \frac{mr_1}{k}.$$

Сила тока во внешней цепи

$$I = \frac{m\mathcal{E}}{R + \frac{mr_1}{k}}, \quad I = \frac{20 \cdot 1,5}{2,5 + \frac{20 \cdot 0,3}{3}} = 6 \frac{2}{3} \approx \underline{6,7 \text{ А}}.$$

Этот ток разветвляется поровну на три параллельных группы сопротивлений:

$$I_{1,2,3} = \frac{I}{3} = 2 \frac{2}{9} \text{ А} \approx \underline{2,22 \text{ А}}.$$

Напряжение на зажимах батареи:

$$U = IR, \quad U = 6 \frac{2}{3} \text{ А} \cdot 2,5 \text{ Ом} = 16 \frac{2}{3} \text{ В} \approx \underline{16,7 \text{ В}}.$$

Подсчитаем внутреннее сопротивление батареи:

$$r = \frac{mr_1}{k} = \frac{20 \cdot 0,3}{3} = 2 \text{ Ом}.$$

Так как $r < R$, то следует проверить силу тока при такой группировке элементов, при которой внутреннее сопротивление несколько больше. Ближайшая такая группировка $k_1 = 2$, $m_1 = \frac{60}{2} = 30$. Внутреннее сопротивление батареи при такой группировке

$$r' = \frac{m_1 r_1}{k_1} = \frac{30 \cdot 0,3}{2} = 4,5 \text{ Ом}.$$

Так как $r' > R$, то придется вычислить силу тока:

$$I' = \frac{m_1 \mathcal{E}}{R + r'} = \frac{30 \cdot 1,5}{2,5 + 4,5} = 6 \frac{3}{7} \text{ А} \approx 6,4 \text{ А} < I.$$

II. При $R' = 2R = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ Ом}$ невыгоднейшая группировка будет из двух групп по 30 элементов, так как при этой группировке

$$r' = 4,5 \text{ Ом} \approx R'.$$

Следовательно,

$$m' = m_1 = \underline{30}, \quad k' = k_1 = \underline{2}.$$

Задача 150. Два элемента соединены параллельно (рис. 189). Один имеет э. д. с. $\mathcal{E}_1 = 2,0 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r_1 = 0,3 \text{ Ом}$, другой — $\mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$ и $r_2 = 0,2 \text{ Ом}$. Определить напряжение на зажимах элементов. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Решение. Направление результирующего тока определяется направлением большей э. д. с. (\mathcal{E}_1), а его величина разностью э. д. с. ($\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$) и общим сопротивлением замкнутой цепи ($r_1 + r_2$). Запишем закон Ома для полной цепи

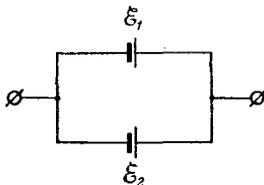


Рис. 189.

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}.$$

Напряжение на зажимах

$$U = \mathcal{E}_1 - I r_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} r_1 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2},$$

$$U = \frac{2,0 \cdot 0,2 + 1,5 \cdot 0,3}{0,3 + 0,2} = \underline{1,7 \text{ В}}.$$

Задача 151. Два элемента, имеющие э. д. с. $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$ и внутренние сопротивления, соответственно $r_1 = 0,3 \text{ Ом}$ и $r_2 = 0,2 \text{ Ом}$ включены параллельно в цепь с внешним сопротивлением $R = 2 \text{ Ом}$. Определить ток во внешней цепи и в каждом из элементов, а также напряжение на зажимах батареи. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Решение. На рис. 190 показано стрелками направление токов

$$I_1 = I + I_2. \quad (1)$$

Напряжение на зажимах батареи

$$U = IR, \quad (2)$$

или

$$U = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1. \quad (3)$$

Далее, рассматривая ветвь с элементом \mathcal{E}_2 в качестве потребителя энергии от источника с напряжением U на зажимах, находим

$$U - \mathcal{E}_2 = I_2 r_2. \quad (4)$$

Получаем систему 4 уравнений с 4 неизвестными: I, I_1, I_2 и U . Решая эту систему уравнений, найдем

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2},$$

$$I = \frac{2,0 \cdot 0,2 + 1,5 \cdot 0,3}{2(0,3 + 0,2) + 0,3 \cdot 0,2} = 0,80 \text{ А},$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1}, \quad I_1 = \frac{2,0 - 0,80 \cdot 2}{0,3} = 1,33 \text{ А},$$

$$I_2 = I_1 - I, \quad I_2 = 1,33 - 0,80 = 0,53 \text{ А}.$$

$$U = IR, \quad U = 0,80 \cdot 2,0 = 1,6 \text{ В}.$$

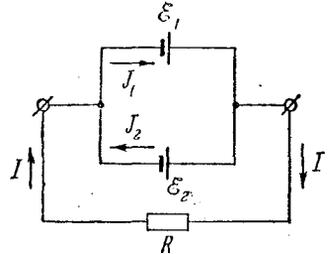


Рис. 190.

Задача 152. Лифт массой $M = 0,8$ т поднимается на высоту $h = 40$ м за полминуты. Напряжение на зажимах мотора $U = 120$ В, к. п. д. мотора $\eta = 90\%$. Определить мощность N , потребляемую мотором, силу тока в моторе I , а также стоимость одного подъема при тарифе 1,2 коп. за 1 гВт·ч.

Решение. При подъеме на h м потенциальная энергия лифта увеличивается на $W_n = mgh$.

Энергия, потребляемая мотором при одном подъеме:

$$W_I = \frac{W_n}{\eta} = \frac{mgh}{\eta}.$$

Мощность мотора

$$N = \frac{W_I}{t} = \frac{mgh}{\eta \cdot t},$$

$$N = \frac{800 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{0,90 \cdot 30 \text{ с}} = 11\,610 \text{ Вт} = \underline{11,6 \text{ кВт}}.$$

Сила тока

$$I = \frac{N}{U}, \quad I = \frac{11\,610 \text{ Вт}}{120 \text{ В}} = \underline{90,7 \text{ А}}.$$

На один подъем расходуется энергия

$$W_1 = Nt = 11\,610 \text{ Вт} \cdot 30 \text{ с} = \frac{11\,610 \text{ Вт} \cdot 30 \text{ с} \cdot 0,01 \text{ гВт/Вт}}{3600 \text{ с/ч}} = 0,97 \text{ гВт} \cdot \text{ч}.$$

Стоимость одного подъема

$$k = 1,2 \cdot 0,97 = \underline{1,16 \text{ коп.}}$$

Задача 153. Теплоэлектростанция расходует $m = 400$ г условного топлива на 1 кВт·ч электрической энергии. Определить к. п. д. электростанции. (Теплотворность условного топлива $q = 7000$ ккал/кг).

Решение. Так как 1 ккал = 4182 Дж, то в системе СИ $q = 7000 \cdot 4182 = 29,27 \cdot 10^6$ Дж/кг. При сгорании m кг условного топлива высвобождается внутренняя энергия $W_1 = mq$; полезная энергия $W = 1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3,6 \cdot 10^6$ Дж; к. п. д. станции:

$$\eta = \frac{W}{W_1} = \frac{W}{mq}, \quad \eta = \frac{3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}}{0,400 \text{ кг} \cdot 29,27 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} = 0,307, \\ \eta = 30,7 \%$$

Задача 154. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление аккумулятора, если при силе тока $I_1 = 5\text{А}$ он отдает во внешнюю цепь $N_1 = 9,5$ Вт, а при $I_2 = 7\text{А}$ $N_2 = 13,6$ Вт.

Решение. Напряжения на зажимах аккумулятора

$$U = \mathcal{E} - Ir.$$

С другой стороны,

$$U = \frac{N}{I},$$

Приравниваем левые части этих двух равенств:

$$\mathcal{E} - Ir = \frac{N}{I}.$$

На основании условия задачи составляем два уравнения:

$$\mathcal{E} - I_1 r = \frac{N_1}{I_1}, \quad \mathcal{E} - I_2 r = \frac{N_2}{I_2}.$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$r = \frac{N_1/I_1 - N_2/I_2}{I_2 - I_1}, \quad r = \frac{9,5/5 - 13,6/7}{7 - 5} (\text{Вт/А}^2) = 0,05 \text{ Ом},$$

$$\mathcal{E} = I_1 r + \frac{N_1}{I_1}, \quad \mathcal{E} = 5\text{А} \cdot 0,05 \text{ Ом} + \frac{9,5 \text{ Вт}}{5\text{А}} = 0,25 + 1,9 = 2,15 \text{ В}.$$

Задача 155. Электрический утюг, рассчитанный на напряжение $U_0 = 120$ В, имеет мощность $N = 400$ Вт. При включении утюга напряжение на розетке падает с $U = 127$ В до $U_1 = 115$ В. Определить сопротивление подводящих проводов.

Решение. Сопротивление утюга (по расчетным данным)

$$R = \frac{U_0^2}{N}.$$

Для подводящих проводов

$$U - U_1 = I \cdot R_{\text{пр}}.$$

Сила тока в цепи

$$I = \frac{U}{R + R_{\text{пр}}}.$$

Следовательно,

$$U - U_1 = \frac{UR_{\text{пр}}}{R + R_{\text{пр}}}.$$

Отсюда находим сопротивление подводящих проводов:

$$R_{\text{пр}} = \frac{U - U_1}{U_1} R = \frac{U - U_1}{U_1} \cdot \frac{U_0^2}{N},$$

$$R_{\text{пр}} = \frac{(127 - 115) \text{ В}}{115 \text{ В}} \cdot \frac{120^2 \text{ В}^2}{400 \text{ Вт}} = \underline{4,32 \text{ Ом}}.$$

Задача 156. Требуется передать электрическую энергию на расстояние $l = 10$ км с помощью медных проводов так, чтобы потеря энергии в проводах не превышала 5%. Мощность электростанции $N = 100$ кВт. Напряжение на электростанции $U_1 = 220$ В. Определить массу меди, потребной для проводов. Сколько меди потребуется при напряжении $U_2 = 440$ В? (Удельное сопротивление меди $\rho = 0,017 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$; плотность $D = 8900$ кг/м³).

Решение. Так как ток в проводке один и тот же на всем протяжении, то $\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta U \cdot I}{UI} = \frac{\Delta U}{U}$, откуда находим падение напряжения на проводах $\Delta U = \frac{\Delta W}{W} U = 0,05U$.

Так как $\Delta U = IR_1$, а $I = N/U$, то получаем

$$0,05U = \frac{N}{U} R,$$

откуда находим сопротивление проводов

$$R = \frac{0,05U^2}{N}. \quad (1)$$

Для упрощения дальнейших действий найдем численное значение сопротивления

$$R = \frac{0,05 \cdot 220^2 \text{ В}^2}{10^5 \text{ Вт}} = 0,0242 \text{ Ом}.$$

Так как $R = \rho \frac{2l}{S}$, то площадь сечения в [мм²]

$$S [\text{мм}^2] = \rho \frac{2l [\text{м}]}{R [\text{Ом}]}.$$

То же в [м²].

$$S [\text{м}^2] = \frac{2l [\text{м}] \rho}{R [\text{Ом}] 10^6 [\text{мм}^2/\text{м}^2]},$$

Объем меди:

$$V [\text{м}^3] = 2lS = \frac{4l^2 \rho}{10^6 \cdot R}.$$

Масса:

$$m \text{ кг} = V [\text{м}^3] \cdot D \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right] = \frac{4l^2 \rho \gamma}{10^6 \cdot R}, \quad (2)$$

где $D = 8900$ кг/м³. Находим

$$m_1 = \frac{4 \cdot 10^8 \text{ м}^2 \cdot 0,017 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}} \cdot 8900 \text{ кг/м}^3}{10^6 \text{ мм}^2/\text{м}^2 \cdot 0,0242 \text{ Ом}} = \underline{2500 \cdot 10^3 \text{ кг}}.$$

Из выражения (2) видно, что масса меди обратно пропорциональна сопротивлению проводов, а из выражения (1) — что сопротивление проводов прямо пропорционально квадрату величины напряжения на электростанции.

Следовательно, величина массы меди обратно пропорциональна квадрату напряжения:

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \left(\frac{220}{440}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

откуда находим

$$m_2 = \frac{m_1}{4} = \underline{625 \cdot 10^3 \text{ кг.}}$$

Задача 157. Какой длины l надо взять нихромовый проводник сечением $s = 0,1 \text{ мм}^2$, чтобы изготовить нагреватель, на котором можно за 5 минут довести до кипения $V = 1,5$ литра воды, взятой при 20°C . Напряжение в сети $U = 220 \text{ В}$. К. п. д. кипятильника $\eta = 90\%$. (Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1,10 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$.)

Решение. Масса воды $m = 1,5 \text{ кг}$. Для нагревания воды ей требуется сообщить количество теплоты $Q = cm(t_2 - t_1)$, где

$$c = 1 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}} = 1000 \frac{\text{кал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} = \frac{1000}{0,239} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

— удельная теплоемкость воды.

Расход электроэнергии для нагревания

$$W = \eta Q.$$

Мощность нагревателя

$$N = \frac{W}{T} = \frac{\eta Q}{T}. \quad (1)$$

С другой стороны, мощность нагревателя при данном напряжении в сети

$$N = \frac{U^2}{R}. \quad (2)$$

Приравниваем правые части равенств (1) и (2):

$$\frac{\eta Q}{T} = \frac{U^2}{R}.$$

Используя, что $Q = cm(t_2 - t_1)$, получим

$$R = \frac{U^2 T}{\eta Q} = \frac{U^2 T}{\eta cm(t_2 - t_1)},$$

$$R = \frac{220^2 \text{ В}^2 \cdot 300 \text{ с}}{0,90 \cdot \frac{1000}{0,239} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 1,5 \text{ кг} (100 - 20) \text{ К}} = 134,4 \text{ Ом.}$$

Так как $R = \rho \frac{l}{s}$, то потребная длина нихромового проводника

$$l = \frac{Rs}{\rho}, \quad l = \frac{134,4 \text{ Ом} \cdot 0,1 \text{ мм}^2}{1,10 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}} = \underline{12,2 \text{ м.}}$$

Примечание. Фактически — несколько меньше, так как удельное сопротивление при температуре накала нихрома: $\rho > \rho_0$.

Задача 158. В магистраль, состоящую из медного провода сечением $s_1 = 5 \text{ мм}^2$, требуется включить при температуре $t = 25^\circ\text{C}$ свинцовый предохранитель, который расплавился бы при нагревании провода на $\Delta t = 20^\circ\text{C}$. Определить сечение предохранителя. (Удельная теплоемкость меди $c_m = 0,09 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$; свинца

$c_{\text{св}} = 0,03 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$. Температура плавления свинца $\theta_{\text{св}} = 327^\circ \text{C}$, теплота плавления $\lambda = 6 \text{ кал/г}$. Удельное сопротивление меди $\rho_2 = 0,017 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$; свинца $\rho_1 = 0,21 \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$. Плотность меди $D_2 = 8,9 \text{ г/см}^3$; свинца — $D_1 = 11,4 \text{ г/см}^3$.)

Решение. В дальнейшем присвоим всем величинам, относящимся к меди, индекс 1, к свинцу — индекс 2.

По закону Джоуля — Ленца количество теплоты (в Дж), выделяемое в медном проводнике при прохождении тока:

$$Q_1 = I^2 R_1 \tau = I^2 \rho \frac{l_1}{s_1} \tau \quad (\tau \text{ время в секундах}). \quad (1)$$

Количество теплоты, нужное для нагревания медного провода на Δt_1 (в кал):

$$Q'_1 = c_1 m_1 \Delta t_1 = c_1 l_1 s_1 D_1 \Delta t_1.$$

То же в Дж:

$$Q'_1 = 4,18 \text{ Дж/кал} (c_1 l_1 s_1 D_1 \Delta t_1) \text{ кал}. \quad (2)$$

Приравниваем правые части выражений (1) и (2):

$$I^2 \rho_1 \frac{l_1}{s_1} \tau = 4,18 c_1 l_1 s_1 D_1 \Delta t_1.$$

Отсюда находим

$$I^2 \tau = 4,18 \frac{c_1 s_1^2 D_1 \Delta t_1}{\rho_1}. \quad (3)$$

Количество теплоты (в Дж), необходимое для нагревания свинцового предохранителя до температуры плавления и последующего его расплавления:

$$Q'_2 = 4,18 \text{ Дж/кал} [c_2 l_2 s_2 D_2 (t_{\text{пл}} - t) + \lambda s_2 D_2] \text{ кал} = \\ = 4,18 \text{ Дж/кал} l_2 s_2 D_2 [c_2 (t_{\text{пл}} - t) + \lambda] \text{ кал}. \quad (4)$$

Количество теплоты, выделяемое в предохранителе, по закону Джоуля — Ленца

$$Q_2 = I^2 R_2 \tau = I^2 \rho_2 \frac{l_2}{s_2} \tau. \quad (5)$$

Приравниваем правые части выражений (4) и (5) и находим

$$I^2 \rho_2 \frac{l_2}{s_2} \tau = 4,18 l_2 s_2 D_2 [c_2 (t_{\text{пл}} - t) + \lambda],$$

откуда

$$I^2 \tau = 4,18 \frac{s_2^2 D_2 [c_2 (t_{\text{пл}} - t) + \lambda]}{\rho_2}. \quad (6)$$

Так как произведение $I^2 \tau$ имеет одну и ту же величину для провода и для предохранителя, то можно приравнять правые части выражений (6) и (3):

$$4,18 \frac{s_2^2 D_2 [c_2 (t_{\text{пл}} - t) + \lambda]}{\rho_2} = 4,18 \frac{c_1 s_1^2 D_1 \Delta t_1}{\rho_1}.$$

Отсюда находим сечение предохранителя:

$$s_2 = s_1 \sqrt{\frac{\rho_2 D_1}{\rho_1 D_2} \frac{c_1 \Delta t_1}{c_2 (t_{\text{пл}} - t) + \lambda}}.$$

Так как под радикалом стоят отношения одноименных характеристик меди и свинца, то нет надобности переводить эти величины в одну систему единиц; достаточно того, чтобы одноименные величины были выражены в одних и тех же единицах:

$$s_2 = 5 \text{ мм}^2 \sqrt{\frac{0,21}{0,017} \cdot \frac{8,9}{11,4} \cdot \frac{0,09 \cdot 20}{0,03(327 - 25) + 6}} = 5,4 \text{ мм}^2.$$

Примечание. Все действия несколько проще, если удельные теплоемкости и теплота плавления заданы в системе СИ, т. е. $c \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$ и $\lambda \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right]$. Рекомендуем найти эти величины и проделать решение в системе СИ.

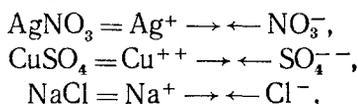
§ 102. Электролиз

Электролизом называют процесс выделения составных частей химических соединений на электродах при прохождении тока через раствор или расплав этих соединений.

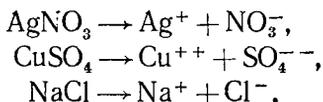
Растворы некоторых химических соединений в воде или в других растворителях, а также расплавы, проводящие электрический ток, называются электролитами. К электролитам относятся растворы многих солей, кислот и щелочей, а также расплавы солей и окислов металлов.

Проводимость растворов электролитов называется ионной проводимостью. Объясняется она так.

Молекулы многих веществ (например, солей) представляют собой положительные и отрицательные ионы, соединенные в одно целое силой взаимного притяжения. Например:

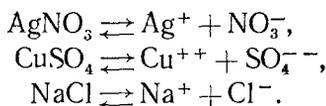


В воде, диэлектрическая проницаемость которой очень велика ($\epsilon = 81$), сила взаимного притяжения между ионами противоположных знаков уменьшается (в воде — в 81 раз). При таком ослаблении связи тепловое движение молекулы может оказаться достаточным для распада (диссоциации) ее на положительные и отрицательные ионы:



Часть ионов противоположных знаков «встречаются» при своем беспорядочном тепловом движении и вновь образуют молекулы (процесс соединения ионов в молекулы называется рекомбинацией). С течением времени наступает момент, когда скорость диссоциации и скорость рекомбинации ионов сравниваются. Наступает «динамическое» равновесие, при котором, хотя процессы распада и соединения не прекращаются, но соотношение распавшихся

и нераспавшихся молекул вещества в растворе сохраняется постоянным:



Ионы в растворе, как и молекулы, движутся хаотически. При подключении источника тока к электродам, опущенным в такой раствор, возникает направленное движение заряженных ионов (рис. 191). Положительные ионы движутся к отрицательному электроду — катоду, — поэтому они и называются катионами; отрицательные ионы — анионы движутся к положительному электроду — аноду. Достигнув поверхности катода, катион снимает с него недостающие для его нейтрализации электроны из числа подошедших от источника тока и превращается в молекулу данного вещества; в то же время анион, достигнув поверхности анода, отдает ему свои лишние электроны, также превращаясь в нейтральную молекулу. Взамен исчезнувших ионов в электролите появляются новые. Внешне явление протекает таким образом, как будто электроны от источника тока движутся по замкнутой цепи: источник — провод — электролит — провод — источник.

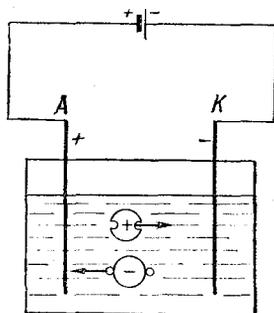


Рис. 191.

Следовательно, в отличие от электрического тока в металлических проводниках, представляющего собой движение электронов в одном направлении, электрический ток в электролитах представляет собой направленное движение ионов в растворе под действием электрического поля в обоих направлениях: положительных ионов к катоду и отрицательных — к аноду. Положительными ионами являются ионы металлов и водорода, отрицательными — ионы кислотных остатков SO_4^{--} , NO_3^- , Cl^{--} и т. д. и гидроксила $(\text{OH})^-$.

§ 103. Законы Фарадея для электролиза

Законы Фарадея для электролиза определяют массу веществ, выделяющихся на электродах при электролизе.

1-й закон. Масса выделившегося на электроде при электролизе вещества прямо пропорциональна количеству электричества (заряду), прошедшего через электролит

$$m = Kq, \quad (1)$$

где m — масса выделившегося вещества в [мг], q — заряд, прошедший через электролит в [Кл], K — коэффициент пропорцио-

нальности, который называется электрохимическим эквивалентом данного вещества.

Электрохимический эквивалент вещества численно равен массе данного вещества, выделяющегося из электролита на одном из электродов при прохождении через электролит единицы электрического заряда. Обычно электрохимический эквивалент выражается в [мг/Кл].

2-й закон. Электрохимические эквиваленты различных веществ прямо пропорциональны их химическим эквивалентам:

$$K = CX,$$

где X — химический эквивалент вещества.

Химический эквивалент — это число граммов вещества, соединяющегося при химических реакциях с одним граммом водорода или заменяющее один грамм водорода. Химический эквивалент равен атомному весу, деленному на валентность, т. е. на число, показывающее, со сколькими атомами водорода соединяется или сколько атомов водорода замещает один атом данного вещества:

$$X = \frac{A}{Z}, \quad (2)$$

где A — атомный вес вещества, Z — валентность.

Следовательно, электрохимический эквивалент

$$K = C \frac{A}{Z}.$$

В этом выражении коэффициент C пишут в виде $C = 1/F$. Величина F называется числом Фарадея. Тогда электрохимический эквивалент

$$K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z}.$$

Подставив это выражение для K в формулу (1), можно выразить оба закона Фарадея одной формулой:

$$m = \frac{A}{Z} \cdot \frac{q}{F}, \quad \text{или} \quad m = X \frac{q}{F}. \quad (3)$$

Число Фарадея F имеет следующую размерность:

$$[F] = \left[\frac{X}{m} \right] [q]. \quad (4)$$

Масса вещества в [г] или в [кг], численно равная химическому эквиваленту, называется грамм-эквивалентом (г-экв) или килограмм-эквивалентом (кг-экв) — соответственно. Следовательно, в выражении (4) размерность $\left[\frac{m}{X} \right] = [\text{г-экв}]$, если масса в [г], и

[кг-эquiv], если масса в [кг]. Значит, размерность числа Фарадея:

$$[F] = [\text{Кл/г-эquiv}] \quad \text{или} \quad [\text{Кл/кг-эquiv}].$$

Из формулы (3) видно, что число Фарадея $F = \frac{X}{m} q$ численно равно количеству электричества, которое требуется пропустить через любой электролитический раствор для получения одного г-эquiv или кг-эquiv вещества. Ясно, что это число не зависит от вещества—ни от его атомного веса, ни от валентности.

Опытами установлено, что

$$F = 96,5 \cdot 10^3 \text{ Кл/г-эquiv} = 96,5 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг-эquiv}.$$

§ 104°. Техническое применение электролиза

Техническое применение электролиза основано на том, что приблизившиеся к электродам ионы превращаются в молекулы и либо выделяются из раствора на электродах, либо вступают во вторичные реакции с веществом электродов или раствора.

Опишем некоторые из широко известных технических применений электролиза.

а) *Градуирование (и проверка) амперметров.* В электрическую цепь включают последовательно градуируемый амперметр и электрическую ванну с раствором соли серебра, например AgNO_3 . Соль серебра диссоциирует на ионы Ag^+ и NO_3^- ; при пропускании тока положительные ионы серебра идут к катоду и после нейтрализации осаждаются на нем. Количество осажденного серебра в мг, поделенное на численное значение электрохимического эквивалента серебра 1,118 и на время прохождения тока, даст силу тока в амперах.

б) *Гальванические элементы.* Устройство гальванических элементов основано на явлении взаимодействия между электролитом и электродом, при котором молекулы электрода переходят в электролит, растворяются в нем. При этом молекулы электрода переходят в электролит в виде положительных ионов, оставляя один или несколько электронов на электроде. Вследствие этого электролит заряжается положительно, электрод—отрицательно. Между электролитом и электродом возникает разность потенциалов. Совокупность электролита и двух таких электродов и представляет собой гальванический элемент.

Э. д. с. различных гальванических элементов составляет 1—2 вольта.

в) *Аккумуляторы.* Аккумуляторы представляют собой элементы, в которых необходимая для их действия химическая энергия периодически возобновляется благодаря электролизу. Этот процесс накопления (аккумуляции) энергии в аккумуляторе носит название зарядки аккумулятора и осуществляется

пропусканием тока от постороннего источника через аккумулятор в направлении, обратном току от действующего аккумулятора.

В технике употребляются два типа аккумуляторов:

1) Кислотные (свинцовые) аккумуляторы состоят из свинцовых пластин, опущенных в раствор серной кислоты. Отрицательные пластины—из чистого свинца с сильно разрыхленной поверхностью (губчатый свинец), положительные—покрыты перекисью свинца.

При разрядке аккумулятора обе пластины покрываются сернокислым свинцом. При зарядке водород, выделяющийся на катоде, вследствие электролиза восстанавливает чистый свинец из его сернокислой соли, а кислород, выделяющийся на аноде, окисляет свинец сернокислой соли и перекись свинца с образованием серной кислоты.

Напряжение кислотного аккумулятора—в самом начале разрядки 2,2—2,1 В—быстро понижается до 2 В; дальнейшее снижение напряжения происходит весьма медленно. Разрядка аккумулятора считается законченной при уменьшении напряжения до 1,8—1,7 В.

2) Щелочные аккумуляторы состоят из пластин никелевой стали с карманами. В карманы положительных пластин закладываются пластины из окиси никеля, в карманы отрицательных—из окиси железа. Электролит—раствор едкого кали.

Среднее рабочее напряжение щелочного аккумулятора 1,3 В. Аккумулятор считается разряженным, если его напряжение уменьшится до 1,1—1,0 В.

г) *Гальванопластика*—электролитическое изготовление копий с рельефных предметов (медалей, гравюр, барельефов и т. д.). С рельефного предмета делается восковой или иной слепок. Поверхность отпечатка покрывается тонким слоем графита, чтобы она стала проводящей. В таком виде слепок используется в качестве катода в электролитической ванне с раствором медного купороса. Анодом служит медная пластинка. Медный купорос CuSO_4 диссоциирует на ионы Cu^{++} и SO_4^{--} . При пропускании через электролит электрического тока положительные ионы меди оседают на поверхности слепка. Когда на слепке нарастает достаточно толстый слой меди, воск осторожно удаляется. Остается точная медная копия оригинала.

Гальванопластика изобретена русским ученым-физиком Борисом Семеновичем Якоби в первой половине XIX столетия (1838).

д) *Гальваностегия*—покрытие металлических изделий тонким слоем другого металла—никелирование, хромирование, кадмирование, серебрение и т. д.—с целью предохранения от окисления. Покрываемое изделие является катодом, анодом служит пластинка из металла покрытия, а электролитом соль металла, которым покрывается данное изделие.

е) *Рафинирование (очистка) меди*—освобождение меди, полученной при выплавке, от примесей. Массивные куски неочищен-

ной меди являются анодом, пластинки из чистой меди — катодом. Процесс ведется в больших ваннах с водным раствором медного купороса. При прохождении тока на катоде отлагается чистая медь, выделяемая из купороса, а неочищенная медь анода растворяется в купоросе. Медь, полученная электролитическим способом, называется электролитной медью.

ж) *Рафинирование других металлов* — серебра, золота, цинка и др.

з) *Получение едкого натра, водорода и хлора* из поваренной соли.

При электролизе водного раствора поваренной соли она диссоциирует на ионы Na^+ и Cl^- . Выделяющийся на катоде натрий не сохраняется в металлическом виде, а реагируя с водой, вытесняет водород и образует едкий натр NaOH . Вместе с хлором, выделяющимся на аноде, получается три продукта разложения.

и) *Получение алюминия, натрия, магния, кальция и других металлов* путем электролиза их расплавленных солей.

к) *Электрическая полировка поверхностей* металлических изделий — основана на том, что у выступов на поверхности металла напряженность электрического поля больше, чем у гладких участков поверхности металла, и поэтому, если этот металл является анодом, то растворение мелких выступов происходит быстрее, чем растворение металла на гладкой поверхности.

Примеры решения задач

Задача 159. Серебрение пластинок производится при плотности тока $= 0,5 \text{ А/дм}^2$, причем за время $t = 5 \text{ ч}$ выделяется $m = 2 \text{ кг}$ серебра.

Определить площадь пластинки. (Электрохимический эквивалент серебра $K = 1,118 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл}$.)

$$\begin{aligned} i &= 0,5 \text{ А/дм}^2 = 500 \text{ А/м}^2 \\ t &= 5 \text{ ч} = 18 \cdot 10^3 \text{ с} \\ m &= 2 \text{ кг} \\ K &= 1,118 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл} \end{aligned}$$

Найти S

Отсюда далее найдем площадь пластинки:

$$S = \frac{m}{Kit}$$

$$S = \frac{2 \text{ кг}}{1,118 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл} \cdot 500 \text{ А/м}^2 \cdot 18 \cdot 10^3 \text{ с}} = 0,20 \text{ м}^2.$$

Задача 159А. В предыдущей задаче определить напряжение на зажимах электросети, если напряжение на зажимах каждой ванны $U_0 = 5 \text{ В}$ и серебрение производится в $n = 60$ ваннах, включенных двумя параллельными группами по 30 включенных последовательно ванн в каждой группе. Определить расход энергии в кВт·часах за 1 час серебрения. К. п. д. установки $\eta = 90\%$.

Решение. Напряжение на зажимах электросети:

$$U = \frac{n}{2} U_0; \quad U = \frac{60}{2} \cdot 5 \text{ В} = \underline{150 \text{ В}}.$$

Расход энергии в джоулях

$$W = \frac{2IUt}{\eta} = \frac{2iSUt}{\eta},$$

$$W = \frac{2 \cdot 50 \text{ А/м}^2 \cdot 0,20 \text{ м}^2 \cdot 150 \text{ В} \cdot 3600 \text{ с}}{0,9} = 12 \cdot 10^6 \text{ Дж} = \underline{33,3 \text{ гВт}\cdot\text{ч}}.$$

Задача 160. Никелирование пластинки производится при плотности тока $i = 0,4 \text{ А/дм}^2$. Определить, с какой скоростью растет толщина слоя никеля. (Атомный вес никеля $A = 58,71$; валентность 2; плотность $\rho = 8,8 \text{ г/см}^3$.)

Решение. Обозначим площадь пластинки S , а толщину покрытия b . Тогда скорость нарастания слоя покрытия:

$$v = \frac{b}{t}.$$

Масса никеля — на основании 1-го закона Фарадея:

$$m = Kit = Kist.$$

С другой стороны,

$$m = Sbv.$$

Приравниваем правые части этих равенств:

$$Sbv = Kit.$$

Отсюда

$$v = \frac{b}{t} = \frac{Ki}{\rho}. \quad (1)$$

Электрохимический эквивалент никеля

$$K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n},$$

где число Фарадея $F = 96\,500 \text{ Кл/г-экв} = 96,5 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг-экв}$. Следовательно,

$$K = \frac{1}{96,5 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг-экв}} = \frac{58,71}{2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл}.$$

Подставляя полученные величины в выражение (1), найдем скорость нарастания слоя покрытия:

$$v = \frac{3 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл} \cdot 40 \text{ А/м}^2}{8800 \text{ кг/м}^3} = 1,36 \cdot 10^{-9} \text{ м/с} = \underline{1,36 \cdot 10^{-3} \text{ мк/с}}.$$

Задача 161. Электролиз воды ведется при силе тока $I = 2,6 \text{ А}$, причем в течение часа получено $V = 0,5 \text{ л}$ кислорода под давлением $p = 1000 \text{ мм рт. ст.}$ Определить температуру кислорода. (Газовая постоянная: $R = 8310 \text{ Дж/кг} \times \times \text{ моль}\cdot\text{К}$.)

Решение. Так как атомный вес кислорода $A = 16$ и валентность $n = 2$, то электрохимический эквивалент кислорода

$$K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} = \frac{1}{96\,500 \cdot 10^3 \text{ Кл/кг-экв}} \cdot \frac{16,00}{2 \text{ экв}} = 0,83 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл}.$$

Масса выделившегося кислорода

$$m = Kit = 0,83 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл} \cdot 2,6 \text{ А} \cdot 3600 \text{ с} = 78 \cdot 10^{-6} \text{ кг}.$$

Из уравнения Менделеева — Клайперона $pV = \frac{m}{\mu} RT$ находим

$$T = \frac{pV}{R} \frac{\mu}{m}.$$

Подставляем в это выражение найденные выше величины, получим

$$T = \frac{133 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 32 \text{ кг/кг} \cdot \text{моль}}{8310 \text{ Дж/кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot 78 \cdot 10^{-5} \text{ кг}} = \underline{\underline{330 \text{ К}}}.$$

§ 105. Электрический ток в газах

Электрический ток в газах представляет собой направленное движение электрических зарядов, носителями которых являются свободные электроны и ионы. Газы при нормальном давлении и невысоких температурах, хотя и содержат некоторое количество ионов, но настолько незначительное, что практически не являются проводниками. Например, в воздушных конденсаторах, воздушная прослойка «работает» как диэлектрик.

Чтобы сделать газ проводником, его надо ионизировать. Ионизация, т. е. процесс образования ионов, заключается в том, что от некоторых молекул газа отщепляются электроны. В результате этого молекула, ранее нейтральная, превращается в положительный ион. Электроны частично остаются в свободном состоянии, частично присоединяются («прилипают») к другим молекулам, образуя отрицательные ионы. Под воздействием электрического поля на ионизированный таким образом газ создаются два встречных потока заряженных частиц. Следовательно, проводимость газов ионно-электронная. В этом ее отличие от проводимости металлов и электролитов.

Для того чтобы оторвать электрон от нейтральной молекулы, необходимо затратить определенную энергию, которую называют энергией ионизации.

Ионизирующее действие оказывают следующие процессы:

а) прохождение через газ некоторых лучей — рентгеновских, ультрафиолетовых, лучей радиоактивных веществ, космических лучей (космические лучи и были открыты в результате наблюдений их ионизирующего действия) и т. д.

б) некоторые химические реакции;

в) нагревание газа до высоких температур.

Ионизирующее действие на газ оказывает также сильное электрическое поле.

Электропроводность газов в результате подведения энергии со стороны носит название *несамостоятельной проводимости*, а электропроводность под действием самого электрического поля, существующего между электродами, называют *самостоятельной проводимостью*. Прохождение тока в газах в первом случае называют *несамостоятельным разрядом*, во втором — *самостоятельным разрядом*.

Несамостоятельная проводимость газов обнаруживается многочисленными опытами. Два из них показаны на рис. 192. Составляется цепь из источника тока, чувствительного гальванометра и обкладок конденсатора, разделенных воздушным пространством. В воздушное пространство между обкладками вносится пламя свечи (рис. 192, а), либо через отверстие в диафрагме на-

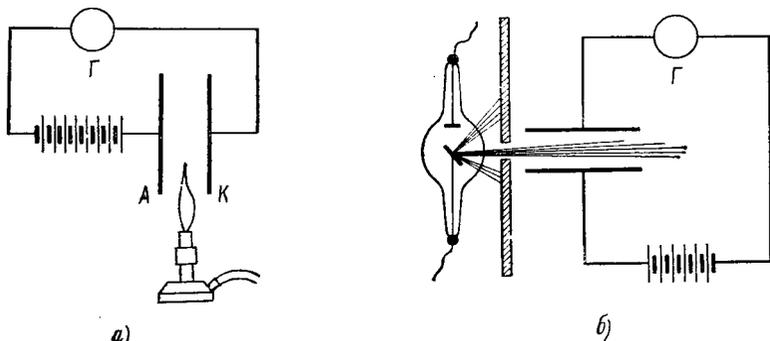


Рис. 192.

правляется поток лучей (рентгеновских, ультрафиолетовых и т. д.— рис. 192, б). При этом гальванометр показывает, что по цепи идет ток. При удалении свечи или источника ионизирующих лучей ток прекращается. Газ теряет проводимость вследствие того, что разноименно заряженные ионы воссоединяются в нейтральные молекулы (рекомбинация).

С ростом, до некоторого предела, напряженности электрического поля в газе увеличивается скорость направленного движения ионов и электронов к электродам и увеличивается число ионов и электронов, проходящих через сечение разряда в единицу времени. Это приводит к увеличению электрического тока. Зависимость между напряжением и силой тока в этом случае подчиняется закону Ома, как это показано на вольт-амперной характеристике (рис. 193)—участок *ОА*.

С увеличением напряженности поля сверх некоторого предела сила тока остается постоянной, несмотря на увеличение напряжения. Это соответствует участку *BC* вольт-амперной характеристики (рис. 193). Ток, соответствующий участку *BC* вольт-

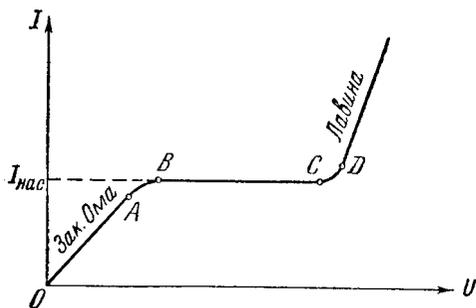


Рис. 193.

амперной характеристики (рис. 193). Ток, соответствующий участку *BC* вольт-

амперной характеристики (рис. 193). Ток, соответствующий участку *BC* вольт-

амперной характеристики, называется током насыщения. Величина тока насыщения зависит от действия ионизатора. Чем сильнее ионизирующее действие ионизатора, тем больше сила тока насыщения.

При дальнейшем увеличении напряженности поля скорости ионов и электронов достигают такой величины, что кинетической энергии иона или электрона хватает на отщепление электронов от молекулы, с которой сталкивается ион или электрон. Новообразованные ионы и электроны, ускоряемые электрическим полем, в свою очередь вызывают ионизацию других молекул. Число заряженных частиц при увеличении количества соударений возрастает в геометрической прогрессии, и целая лавина электронов и ионов устремляется к электродам. Кривая тока круто поднимается—участок справа от точки *D* на вольт-амперной характеристике (рис. 193). Это явление носит название ударной ионизации или электрического пробоя газа. Здесь имеет место самостоятельный разряд.

Так как при большой напряженности электрического поля в разрядном промежутке ионы газа приобретают большую скорость движения, т. е. большую кинетическую энергию, то ударяясь о поверхность электродов, они выбивают из них электроны. Выбитые из анода электроны тут же снова «улавливаются» анодом; электроны же, выбитые из катода, увеличивают электропроводность газа.

Самостоятельный разряд при высоком напряжении имеет место и без участия постороннего ионизатора, так как в газе всегда имеется некоторое, хотя и очень небольшое, количество ионов, которые и обуславливают возникновение лавинного разряда. Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, тем меньше, чем меньше плотность (давление) газа и чем меньше расстояние между электродами.

Самостоятельный разряд бывает разных видов. Рассмотрим несколько основных видов самостоятельного разряда—тлеющий, коронный, искровой, дуговой.

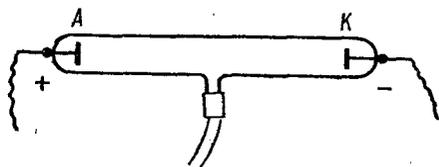


Рис. 194.

а) *Тлеющий разряд* происходит в разреженном газе, если к нему приложено электрическое поле большой напряженности.

Иллюстрация тлеющего разряда производится в разрядной трубке (рис. 194). Это—трубка с двумя электродами, анодом *A* и катодом *K*, газ из которой откачивается насосом. Электроды соединяются с источником электричества напряжением в несколько сот вольт. Кривая падения потенциала в трубке от анода к катоду во время разряда изображена на рис. 195. Вблизи катода имеет место резкое падение потенциала. Оно называется катодным

падением потенциала. Здесь электрическое поле имеет большую напряженность, в остальной части трубки напряженность поля невелика.

Катодное падение потенциала обуславливает эмиссию — вырывание электронов из металла катода. Положительные ионы,двигающиеся от анода к катоду, проходя область катодного

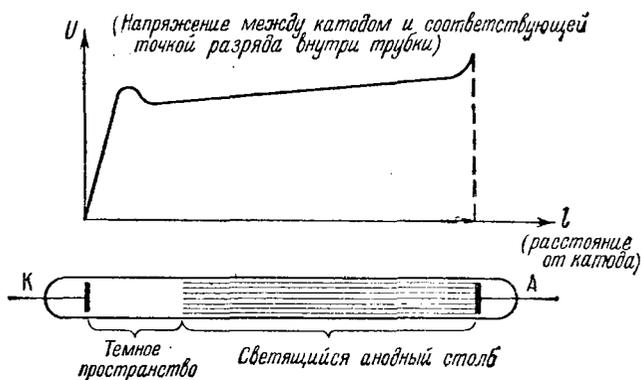


Рис. 195.

падения потенциала, приобретают вблизи катода большую кинетическую энергию и, ударяясь о катод, вырывают из него электроны. Эмитированные катодом электроны устремляются к аноду.

Глеющий разряд сопровождается свечением вследствие того, что при рекомбинации молекул газа, сопровождающей их ионизацию, энергия освобождается в виде излучения, в значительной мере светового. Это так называемое свечение рекомбинации. Газоразрядные трубки, светящиеся различными цветами, применяются для декоративных целей, для реклам.

В природе свечение разреженных газов наблюдается в виде полярного сияния, представляющего собой свечение верхних, сильно разреженных слоев атмосферы при прохождении через них потоков заряженных частиц от Солнца.

б) *Коронный разряд* — разряд, сопровождающийся слабым фиолетовым свечением в виде короны, охватывающей электрод. Возникает при нормальном и повышенном давлении у заостренных электродов. Заряд такого электрода создает неоднородное электрическое поле, напряженность которого у самого острия велика и быстро падает при удалении от него. Сильное электрическое поле в области, непосредственно примыкающей к электроду, вызывает в этой области ударную ионизацию с одновременной частичной рекомбинацией.

В природе корона возникает иногда под действием атмосферного электрического поля на ветках деревьев, верхушках мачт (так называемые огни святого Эльма) и т. д.

в) *Искровой разряд* представляет собой прерывистый самостоятельный разряд при нормальном или повышенном давлении газа в электрическом поле очень большой напряженности.

Искровой разряд представляет собой ионные и электронные лавины, вызванные ударной ионизацией. При этом в газе возникают каналы ионизированного газа—стримеры, по которым распространяется искровой разряд. Газ в стримерах сильно нагревается, давление в нем повышается. Стремясь расшириться, этот газ и создает звуковые волны, что влечет за собой известные звуковые эффекты при искровом разряде (в частности, гром, сопровождающий молнию). Искра имеет зигзагообразный характер с ответвлениями вследствие неоднородности среды, стримеры в которой образуются в меняющемся направлении наиболее легкой ионизации.

В технике явлением искрового разряда пользуются, например, в магнето для «зажигания» бензиновых двигателей. В магнето создается напряжение в 12—15 тысяч вольт. Искровой промежуток свечи меньше 1 мм.

Разновидность искрового разряда представляет собой молния—разряд между двумя заряженными облаками или между облаком и землей. Носителями зарядов в облаках являются капельки или снежинки.

г) *Дуговой разряд*—разряд между электродами, нагретыми до высокой температуры при атмосферном или повышенном давлении. Электроды, разность потенциалов которых 30—50 В, приводятся в соприкосновение, и по получившейся замкнутой цепи проходит сильный ток. Так как в месте соприкосновения электродов сопротивление сравнительно велико, то в соответствии с законом Джоуля—Ленца, здесь выделяется наибольшее количество теплоты, и концы электродов накаляются. Затем электроды постепенно раздвигаются; ток продолжает идти через раскаленный воздух в виде светящейся дуги. Концы электродов, раскаляясь до 3000—4000 °С, начинают испаряться. По мере горения дуги катод заостряется, а на аноде образуется углубление—положительный кратер дуги.

При переменном токе сгорание обоих электродов одинаковое.

Чтобы дуга не прерывалась при сгорании электродов, положение их регулируется механизмами или от руки. Это неудобство преодолевается в электрической лампе, изобретенной (в 1876 г.) русским электротехником Н. Н. Яблочковым, примененной им для уличного освещения и названной «свечой Яблочкова». В свече Яблочкова (рис. 196) угольные электроды расположены параллельно и разделены изолирующей прокладкой (например, слоем фарфоровой глины), которая испаряется по мере сгорания электродов.

Как установлено академиком В. Ф. Миткевичем в 1905 г., основным фактором, поддерживающим устойчивый дуговой разряд, является термоэлектронная эмиссия—эмиссия

электронов с поверхности разогретого катода. Второй фактор, поддерживающий электропроводность дуги,—термическая ионизация—ионизация при повышенной температуре с сопутствующими ей химическими процессами.

Некоторые применения электрической дуги:

а) В качестве источника света—в прожекторах, в киносъемочных проекционных аппаратах, в маяках и т. д.

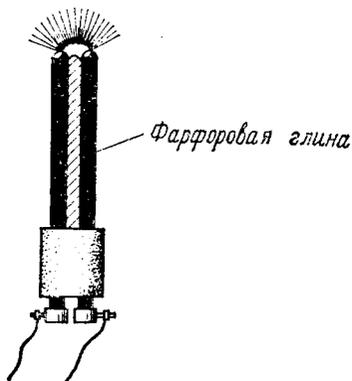


Рис. 196.

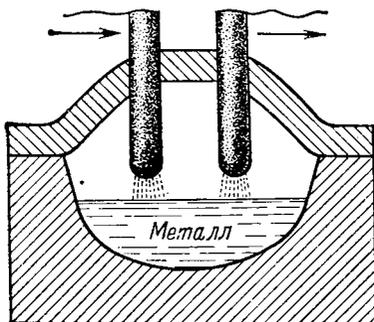


Рис. 197.

б) В электрометаллургии—в дуговых печах (рис. 197).

в) В химических производствах, в которых процессы происходят при высоких температурах. Например, для получения из

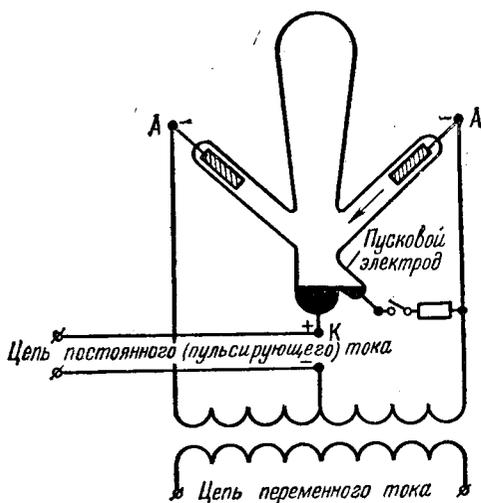


Рис. 198.

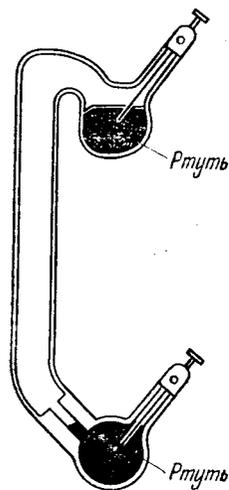


Рис. 199.

воздуха окиси азота NO с последующим окислением до NO_2 в целях производства азотной кислоты, для получения карбида кальция CaC_2 из извести и кокса и т. д.

г) В мощных ртутных выпрямителях. Ртутный выпрямитель представляет собой разрядную трубку, в которой разряд происходит в парах ртути между поверхностью жидкой ртути, являющейся катодом, и графитовым или железным анодом (рис. 198). Действие выпрямителя основано на свойстве паров ртути, испаряющейся при высокой температуре, переносить электроны только в одном направлении — от ртути к графиту. Разряд зажигается каждый раз, когда ртуть является катодом, и гаснет при обратном направлении тока.

д) В медицине — в аппаратах «искусственного горного солнца» (рис. 199), представляющих собой кварцевые баллоны с ртутными электродами. Для зажигания лампу наклоняют до появления струйки ртути, соединяющей электроды. При повороте лампы в вертикальное положение в месте разрыва струйки образуется дуга, дающая много ультрафиолетовых лучей.

е) Для дуговой сварки металлов.

Дуговой разряд открыт в 1802 г. В. В. Петровым, а позднее независимо от него итальянским ученым Вольтой, по имени которого назван вольтовой дугой.

§ 106. Электронные пучки, их свойства и применение

Электронным пучком называется *поток электронов при самостоятельном разряде*. *Электронный пучок при тлеющем разряде* носит название катодных лучей.

Электронная природа катодных лучей доказывается разнообразными опытами, в том числе опытами с разрядной (кружковой) трубкой — трубкой с электродами, в которой разрежение доведено до одной миллионной доли атмосферы (около 0,001 мм рт. ст.) Катодные лучи отклоняются электрическим полем (рис. 200).

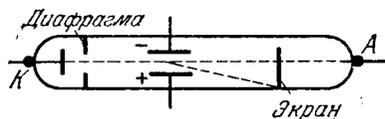


Рис. 200.

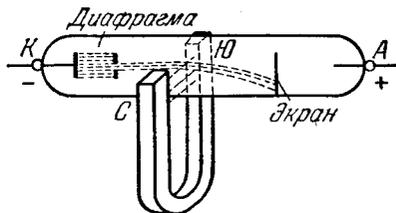


Рис. 201.

Положительно заряженная пластинка, помещенная в кружковую трубку, притягивает катодные лучи, отрицательная — отталкивает. Катодные лучи отклоняются магнитным полем (рис. 201). Направление отклонения показывает, что катодные лучи представляют собой поток отрицательно заряженных частиц. Поток катодных лучей создает магнитное поле подобно электрическому

току (рис. 202). В опыте Перрена непосредственно обнаруживаются отрицательные заряды катодных лучей (рис. 203). Внутри

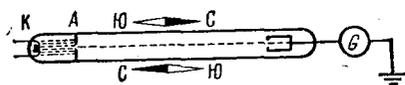


Рис. 202.

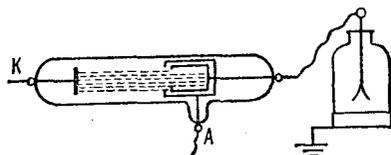


Рис. 203.

кружковой трубки помещен цилиндр, соединенный с электроскопом. Катодные лучи, направленные внутрь цилиндра, заряжают электроскоп отрицательно.

Свойства катодных лучей:

а) Катодные лучи распространяются прямолинейно, перпендикулярно к поверхности катода, независимо от положения анода (рис. 204).

Прямолинейность распространения катодных лучей объясняется тем, что эмитированные катодом электроны приобретают большую кинетическую энергию непосредственно вблизи катода —

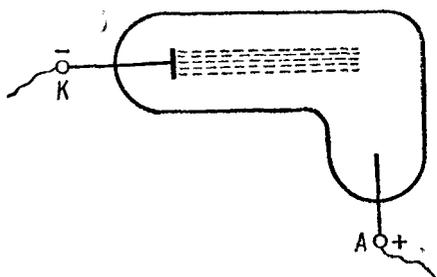


Рис. 204.

в области катодного падения потенциала, где они получают движение по направлению силовых линий, т. е. нормально к поверхности катода. Дальнейшее движение электронов происходит по инерции, причем вследствие большой их кинетической энергии отклоняющее действие поля анода оказывается незаметным.

б) При прохождении через газы катодные лучи ионизируют их и вызывают свечение газа. Сами по себе катодные лучи невидимы.

в) Падая на многие твердые тела, катодные лучи вызывают их свечение — флюоресценцию. Например, стекло и алмаз флюоресцируют ярко-зеленым цветом.

г) На фотографической пластинке катодные лучи вызывают почернение.

д) Катодные лучи обладают кинетической энергией. Падая на поверхность металла, они нагревают ее. Они приводят во вращение легкую вертушку, поставленную на пути катодных лучей и т. д.

е) При попадании на пластинку из тяжелого металла (вольфрама, платины), помещенную на пути катодных пучков, они вызывают излучение рентгеновских лучей.

ж) Скорость катодных частиц увеличивается с увеличением приложенного к трубке напряжения и может достигать скорости, близкой к скорости света. Проницаемость катодных лучей сквозь газы тем больше, чем больше их скорость.

§ 107². Ионные пучки

К ионным пучкам относятся анодные лучи — *поток положительно заряженных частиц в «закатодном» пространстве*, т. е. в пространстве за катодом со стороны, противоположной аноду.

Анодные лучи можно наблюдать, если поместить катод внутри трубки (рис. 205) и высверлить в нем отверстия. Поток положительно заряженных частиц движется так, как будто он исходит от анода и проходит сквозь отверстия в катоде. Поэтому анодные лучи называются еще каналовыми лучами и закатодными лучами.

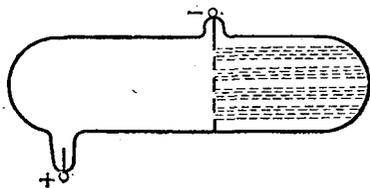


Рис. 205.

Свойства анодных лучей:

- а) анодные лучи отклоняются в электрическом и магнитном поле;
- б) вызывают свечение некоторых веществ;
- в) действуют на фотографическую пластинку;
- г) ионизируют газы;
- д) сильно поглощаются газами и другими телами.

Примеры решения задач

Задача 162. Работа выхода электрона $A_{\text{вых}} = 3 \text{ эВ}$. С какой скоростью вылетает электрон данного металла, обладающий энергией $W_{\text{э}} = 10^{-18} \text{ Дж}$. (Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.)

$$A_{\text{вых}} = 3 \text{ эВ} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$W_{\text{э}} = 10^{-18} \text{ Дж}$$

Найти v

Решение

Энергия вылетевшего электрона равна

$$\frac{m_{\text{э}} v^2}{2} = W_{\text{э}} - A.$$

Отсюда находим скорость вылетевшего электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2(W_{\text{э}} - A)}{m_{\text{э}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (10^{-18} - 4,8 \cdot 10^{-19}) \text{ Дж}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}} = 0,75 \cdot 10^6 \text{ м/с}, \quad v = \underline{750 \text{ км/с.}}$$

Задача 163. Энергия ионизации молекул воздуха $W_{\text{и}} = 15 \text{ эВ}$. Определить среднюю длину свободного пробега λ электрона в воздухе. (Заряд электрона $e = 16 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. При нормальном давлении искровой разряд в воздухе возникает при напряженности электрического поля $E_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.)

Решение. Работа сил электрического поля на длине свободного пробега: $A = e \mathcal{E} \lambda$.

Эта работа должна быть равна или больше энергии ионизации: $A \geq W_{и}$, т. е. $e\phi\lambda \geq W_{и}$, откуда находим длину свободного пробега:

$$\lambda \geq \frac{W_{и}}{e\phi}$$

Так как $W_{и} = 15 \text{ эВ} = 24 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, то

$$\lambda \geq \frac{24 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}{16 \cdot 10^{-20} \text{ Кл} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5 \text{ мк.}$$

МАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 108. Магнитное поле. Магнитное взаимодействие проводников с током

Покоящиеся заряды взаимодействуют благодаря электрическому полю. Это взаимодействие сохраняется и при движении зарядов,

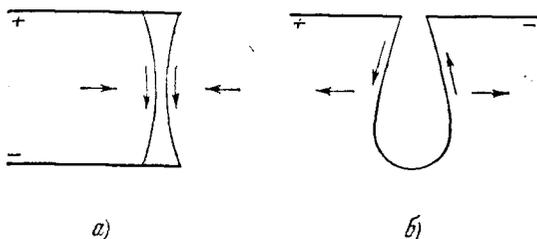


Рис. 206.

но в этом случае возникает еще и магнитное взаимодействие, которое осуществляется магнитным полем.

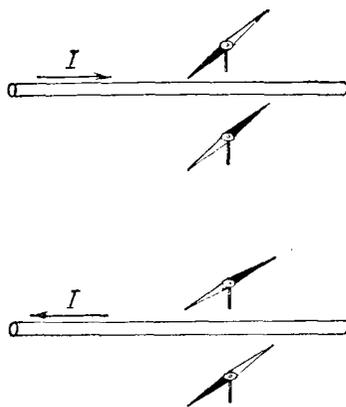


Рис. 207.

Проводники с током в целом электрически нейтральны, так что электрическое поле вне проводников практически отсутствует. Между такими проводниками имеют место только взаимодействия, осуществляемые магнитным полем, возникающим вокруг движущихся электрических зарядов. Опыт с двумя параллельными проводами (рис. 206) показывает, что одинаково направленные токи притягиваются, встречные — отталкиваются.

Еще в древности было обнаружено, что некоторые материалы, например железо, обладают свойством «на-

магничиваться» и долго сохранять это состояние, в котором они притягивают некоторые другие намагниченные и ненамагничен-

ные тела. Взаимодействие намагниченных тел объясняется наличием в них внутримолекулярных электрических зарядов, имеющих направленное движение.

На рис. 207 показана схема простейшего опыта датского ученого Эрстеда, впервые обнаружившего действие электрического тока на магнит. В этом опыте отклонялась магнитная стрелка при пропускании тока по прямолинейному проводнику, возле которого она находилась.

§ 109. Силовые линии магнитного поля

Графически магнитное поле изображается с помощью магнитных силовых линий — линий, касательные к которым в каждой точке магнитного поля указывают направление поля в этой точке. Направлением магнитного поля в данной точке условились считать направление от южного к северному полюсу магнитной стрелки, расположенной в этой точке поля, т. е. направление, в котором устанавливается северный конец магнитной стрелки.

Магнитное поле *прямого тока* (прямолинейного проводника с током) изображается окружностями с центрами на оси проводника, лежащими в плоскости, перпендикулярной к его оси (рис. 208). Направление магнитного поля прямого электрического тока можно определить следующими способами.

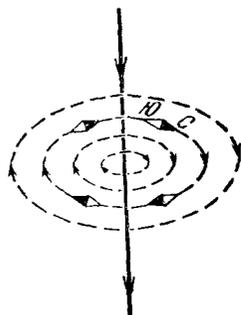


Рис. 208.

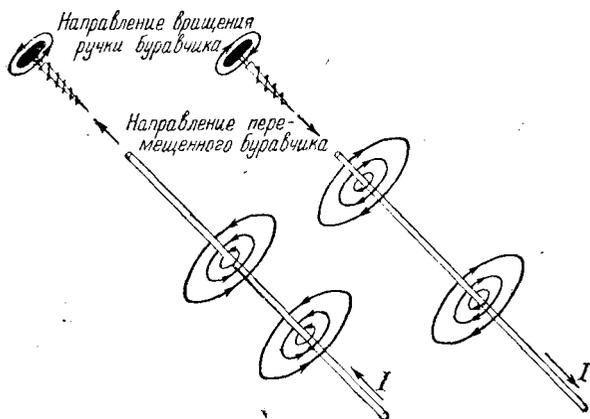


Рис. 209.

а) По «правилу буравчика» (рис. 209): если ввинчивать или вывинчивать буравчик, двигая его по направлению тока, то вращение рукоятки буравчика покажет направление магнитных силовых линий тока.

б) Если смотреть по направлению тока, то магнитные силовые линии будут направлены по часовой стрелке (рис. 210).

Для определения направления магнитного силового поля кругового тока или соленоида можно воспользоваться вторым «правилом буравчика»: если вращать ручку буравчика по направлению кругового тока, то направление перемещения буравчика покажет направление силовой линии на оси кругового проводника (рис. 211).

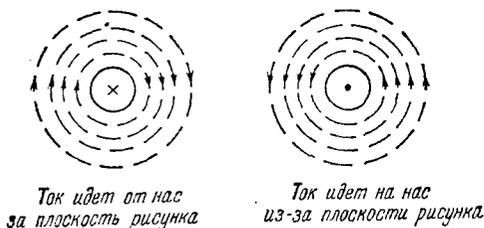


Рис. 210.

Ток идет от нас
за плоскость рисунка

Ток идет на нас
из-за плоскости рисунка

Магнитное поле катушки с током — соленоида — подобно полю постоянного магнита (рис. 212); как видно из рисунка, внутри магнита силовые линии имеют направление от южного полюса к северному.

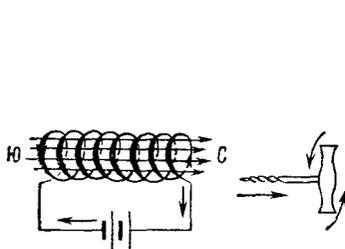


Рис. 211.

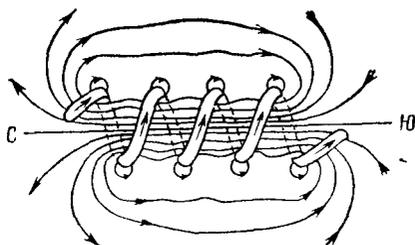


Рис. 212.

Магнитные силовые линии *всегда замкнутые*. Этим они отличаются от силовых линий электрического поля, которые начинаются и заканчиваются на электрических зарядах либо уходят в бесконечность.

§ 110. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Индукция магнитного поля

Поскольку вокруг проводника, по которому проходит электрический ток, образуется магнитное поле, между ним и магнитным полем других проводников с током (или магнитов) возникает взаимодействие. Так, при сближении двух соленоидов, по которым проходит ток, либо магнита с соленоидом происходит их взаимное притяжение или отталкивание, в зависимости от направления токов и расположения полюсов магнита.

Направление силы, действующей на проводник с током, можно определить несколькими способами. Наиболее простой из них — «правило левой руки»: рука располагается так, чтобы направление вытянутых пальцев указывало направление тока, а маг-

нитные линии «входили» в ладонь (рис. 213). Тогда отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на проводник в магнитном поле.

Закон Ампера утверждает, что величина силы, действующей на участок провода с током в магнитном поле, пропорционально этому току I , длине l участка провода с током, на который действует поле, и синусу угла α между направлением магнитного поля и направлением оси участка провода, а также зависит от среды, в которой происходит взаимодействие.

Величина, численно равная силе, действующей в данной точке магнитного поля на проводник единичной длины, расположенный перпендикулярно направлению магнитного поля, по которому идет ток в 1 ед. тока (1А), называется индукцией магнитного поля в этой точке. Обозначают индукцию магнитного поля обычно буквой B . Индукция магнитного поля — векторная величина.

На провод длиной l , по которому идет ток I , направление которого составляет угол α с направлением магнитного поля, действует сила

$$F = BIl \sin \alpha.$$

Направление вектора магнитной индукции B в каждой точке магнитного поля совпадает с направлением касательной к магнитной силовой линии в этой точке. Поэтому магнитные силовые линии называют также линиями магнитной индукции.

§ 111. Магнитная проницаемость среды. Напряженность магнитного поля

Все вещества, помещенные в магнитном поле, приобретают магнитные свойства и создают собственное магнитное поле, действие которого складывается с действием внешнего магнитного поля. Опыт показывает, что однородная среда может либо усиливать, либо ослаблять магнитное поле. Влияние среды на внешнее магнитное поле характеризуется произведением двух величин ($\mu \cdot \mu_0$), где:

μ — относительная магнитная проницаемость среды — величина, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля в данной среде больше, чем в вакууме;

μ_0 — магнитная постоянная*), зависящая от выбора системы единиц. В системе единиц СИ: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ (**). В системе

*) Иногда эту величину называют магнитной проницаемостью среды.

**) Ниже — в § 119 будет дана другая, принятая в системе СИ размерность $[\mu_0]$.

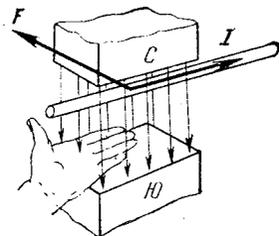


Рис. 213.

единиц CGSM (см. ниже, § 112) $\mu_0 = 1$ и является безразмерной величиной.

Вещества, ослабляющие внешнее поле, называются диамагнитными веществами или диамагнетиками. Вещества, усиливающие внешнее поле, называются парамагнетиками.

Для диамагнетиков $\mu < 1$; для парамагнетиков $\mu > 1$. При этом отличие значения μ от единицы в том и другом случае невелико — несколько десятитысячных или сотысячных.

Некоторые вещества (железо, никель, кобальт и некоторые сплавы) вызывают очень большое усиление внешнего магнитного поля. Их называют ферромагнетиками (от слова ferrum — железо). У ферромагнетиков относительная магнитная проницаемость $10^3 - 10^5$.

Для характеристики магнитного поля независимо от среды вводится величина, называемая напряженностью магнитного поля H :

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0},$$

откуда магнитная индукция

$$B = \mu\mu_0 H.$$

Следовательно, для силы, с которой магнитное поле действует на элемент тока, можно дать еще такое выражение:

$$F = \mu\mu_0 H I l \sin \alpha.$$

§ 112. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Единица CGSM тока

Величина силы взаимодействия параллельных токов вычисляется по формуле Ампера

$$F = k \frac{2\mu_a I_1 I_2 l}{r},$$

где I_1 и I_2 — силы тока в проводах, r — расстояние между проводами, l — длина участка провода, на который действует сила F , k — коэффициент, зависящий от выбранной системы единиц. $\mu_a = \mu\mu_0$ — абсолютная магнитная проницаемость среды.

Абсолютная электромагнитная система единиц CGSM (CGSM) построена таким образом, что магнитная постоянная μ_0 равна 1 (безразмерная единица) и также коэффициент пропорциональности в формуле Ампера k тоже равен 1. Тогда в системе CGSM эта формула принимает такой вид:

$$F = \frac{2\mu I_1 I_2 l}{r}.$$

Здесь $F = 1$ дин, если $l = 1$ см, $r = 1$ см и $I_1 = I_2 = 1$ ед. силы тока.

За единицу силы тока в системе СГСМ принята сила тока в 10А. Сила взаимодействия параллельных токов в вакууме в системе СГСМ равна

$$F = \frac{2I_1 I_2 l}{r}.$$

В системе СИ коэффициент пропорциональности в формулах взаимодействия магнитных полей для удобства написания практических формул электротехники принят:

$$k = \frac{1}{4\pi}.$$

Тогда сила взаимодействия параллельных токов вычисляется в системе СИ по формуле

$$F = \mu_a \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r}.$$

В вакууме ($\mu = 1$)

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r}.$$

В этих формулах сила выражается в ньютонах, l и r — в метрах, а I_1 и I_2 — в амперах.

§ 113. Определение единицы силы тока как одной из основных единиц системы СИ. Определение единицы электрического заряда как производной единицы в системе СИ

Любое действие тока — тепловое, магнитное, химическое — может быть использовано для определения единицы его измерения. До 1 января 1948 г. по международному соглашению действовало определение единицы тока по его химическому действию: «Международный ампер — такой неизменяющийся ток, который, проходя через водный раствор азотнокислого серебра, выделяет 1,118 мг серебра в 1 с». В настоящее время сила, с которой взаимодействуют токи, может быть измерена более точно, чем масса отложившегося на катоде металла. В связи с этим по международному соглашению с 1 января 1948 г. принято определение ампера, основанное на законе взаимодействия параллельных токов.

Абсолютное значение силы взаимодействия параллельных токов в системе СГСМ не изменится, если в правой части формулы длины (l и r) будут выражены в метрах, т. е. в системе СИ; если же и силу тока выразить в системе СИ, т. е. в амперах, то, очевидно, что для получения числового значения силы в динах надо ввести коэффициент, равный $(0,1)^2 = 10^{-2}$:

$$F_{\text{[дин]}} = \frac{2I_1 I_2 l}{r} \cdot 10^{-2}.$$

Так как $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$, то величина силы в ньютонах будет

$$F_{[\text{Н}]} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2 l}{r}.$$

Если $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$ и $l = r = 1 \text{ м}$, то величина силы взаимодействия будет равна

$$F_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

На этом и основано современное определение ампера как единицы силы электрического тока в системе СИ:

Ампер есть сила неизменяющегося тока, при котором два параллельных бесконечных прямолинейных проводника ничтожно малого кругового сечения, расположенные на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, взаимодействуют с силой, равной $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на метр длины.

Так как «бесконечно длинные проводники ничтожно малого сечения» практически невыполнимы, то в реальных условиях воспроизведение эталона силы тока производится по измерению силы взаимодействия катушек с током (на так называемых токовых весах), а затем вводятся теоретические поправки, учитывающие размеры и форму проводников.

Единица электрического заряда в системе СИ — кулон (Кл) — производная единица.

Кулон — электрический заряд, протекающий через поперечное сечение проводника в течение 1 с при силе постоянного тока в 1 А.

Сравнивая формулы

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2 l}{r} \quad \text{и} \quad F = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r},$$

найдем, что

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2.$$

§ 114. Магнитный поток. Единицы магнитного потока, магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Магнитным потоком или потоком магнитной индукции через какую-нибудь поверхность в магнитном поле называется произведение магнитной индукции на площадь проекции этой поверхности на плоскость, перпендикулярную к направлению линий индукции:

$$\Phi = BS, \quad (1)$$

где Φ — магнитный поток, S — площадь проекции поверхности на плоскость, перпендикулярную к направлению линий индукции.

Термин «магнитный поток» связан с графическим представлением магнитного поля с помощью линий индукции, направление

которых в каждой точке поля совпадает с направлением поля, а «густота» дает величину магнитной индукции поля. При условии, что линии индукции магнитного поля проводятся через перпендикулярную к ним площадку в количестве, численно равном отношению величины магнитной индукции к площади этой площадки, магнитный поток будет равен общему числу линий индукции, пронизывающих расположенную перпендикулярно к ним площадку.

Формула (1) относится к однородному магнитному полю, т. е. такому полю, магнитная индукция которого во всех его точках одинакова. В случае неоднородного поля для достаточно малой площадки ΔS , на которой с допустимой точностью поле можно считать однородным:

$$\Delta\Phi = B\Delta S.$$

А для всей рассматриваемой поверхности

$$\Phi = \sum \Delta\Phi = \sum B\Delta S.$$

Единица магнитной индукции в системе СИ называется тесла—обозначается [Т]. Ее размерность найдется из формулы

$$B = \frac{F}{Il \sin \alpha} \quad (\text{см. § 110}).$$

$$[B] = \frac{[F]}{[I] \cdot [l]}, \quad [T] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \right].$$

А так как $[H] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}} \right]$, то

$$[T] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right].$$

Единица магнитного потока в системе СИ называется вебер—обозначается [Вб]. Ее размерность:

$$[\Phi] = [B] \cdot [S], \quad [\text{Вб}] = [T] [\text{м}^2] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right] [\text{м}^2],$$

$$[\text{Вб}] = [\text{В} \cdot \text{с}] \text{— «вольт-секунда»}.$$

Очевидно,

$$[T] = \left[\frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right].$$

На этом основании можно дать такое определение единицы магнитной индукции в системе СИ.

Единица магнитной индукции тесла [Т]—*индукция такого однородного магнитного поля, в котором магнитный поток через площадку в 1 кв. м, перпендикулярную направлению поля, равен 1 Вб.* (Определение вебера будет дано ниже, в теории электромагнитного поля—§ 117).

Размерность единицы напряженности магнитного поля найдем из соотношения $B = \mu_0 \mu H$, с учетом того, что μ —величина

безразмерная:

$$[H] = \frac{[B]}{[\mu\mu_0]} = \frac{[T]}{[\mu_0]} = \left[\frac{H}{A \cdot м} \right] : \left[\frac{H}{A^2} \right] = \left[\frac{A}{м} \right].$$

Найдем индукцию магнитного поля прямолинейного тока. Два провода, по которым идут токи I и I_1 , взаимодействуют друг с другом с силой

$$F = \mu_0 \frac{II_1 l}{2\pi r}.$$

Из определения индукции следует, что индукция прямолинейного тока равна

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad \text{а} \quad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Отсюда видно, что единица напряженности магнитного поля в системе СИ $[A/м]$ — это напряженность магнитного поля, создаваемая длинным прямолинейным проводником, по которому течет ток в 2π [А], на расстоянии 1 метра от проводника.

Магнитные единицы в системе СГСМ.

Единица магнитной индукции — гаусс [Гс]:

$$1 \text{ Гс} = \frac{1 \text{ дин}}{1 \text{ ед. СГСМ тока} \cdot 1 \text{ см}} = \frac{10^{-5} \text{ Н}}{10 \text{ А} \cdot 0,01 \text{ м}} = 10^{-4} \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 10^{-4} \text{ Т}.$$

Единица магнитного потока — максвелл [Мкс]:

$$1 \text{ Мкс} = 1 \text{ Гс} \cdot 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ Т} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 10^{-8} \text{ Вб}.$$

Единица напряженности магнитного поля — эрстед [Э]:

$$1 \text{ Э} = \frac{1000}{4\pi} \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Последнее соотношение выводится из определения эрстеда как напряженности магнитного поля, магнитная индукция которого в вакууме равна 1 гауссу, т. е. 10^{-4} тесла. Напряженность такого поля в А/м будет

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{А}}{\text{м}} = 1 \text{ Э}.$$

§ 115. Амперметр. Вольтметр

Амперметр — прибор для измерения силы тока. Вольтметр — прибор для измерения напряжения (разности потенциалов). Основная часть амперметра и вольтметра — гальванометр — прибор для измерения малых токов.

Наиболее употребительны *магнитоэлектрические* гальванометры. Их работа основана на действии магнитного поля постоянного магнита на проводник с током. Рассмотрим действие магнитного поля на рамку, обтекаемую током в направлении, указанном на рис. 214, и расположенную в плоскости, параллельной магнитным

линиям. На стороны рамки, параллельные магнитным силовым линиям, поле не действует; на стороны же, расположенные перпендикулярно магнитным силовым линиям, поле действует с силами F_1 и F_2 , направление которых определяется, например, по

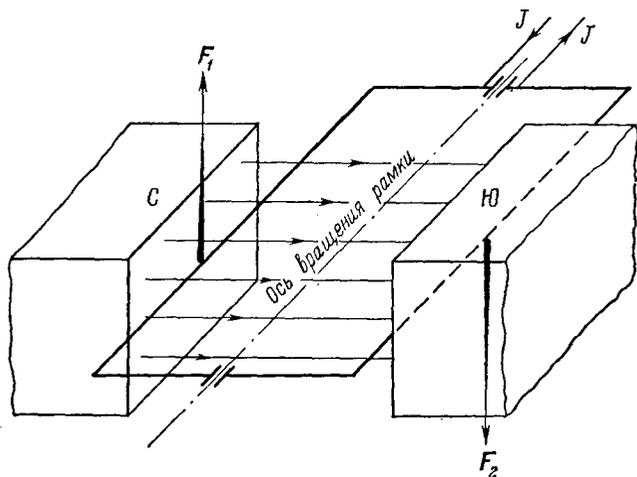


Рис. 214.

правилу левой руки (§ 110). На рамку в целом действует пара сил (F_1 , F_2), стремящаяся повернуть рамку.

В простейшем приборе (рис. 215) рамка заменяется закрепленной на вращающейся оси катушке из изолированной проволоки,

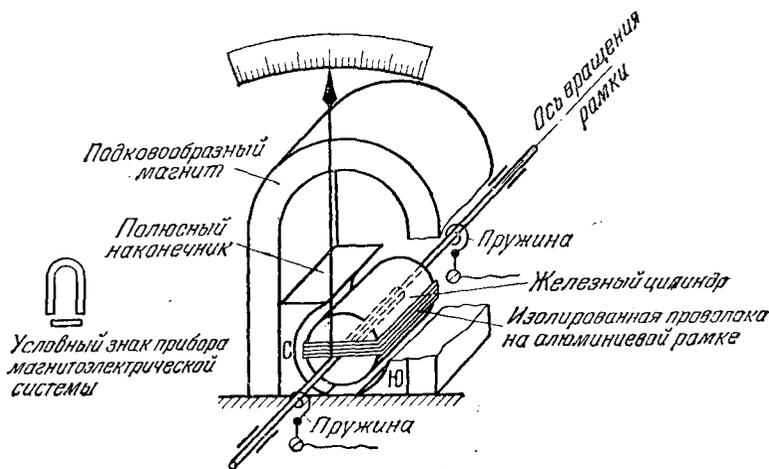


Рис. 215.

к которой по спиральным пружинкам, удерживающим катушку в определенном положении, подводится измеряемый ток.

Магнитное поле создается подковообразным магнитом с полюсными наконечниками; железный цилиндр, закрепленный между ними, служит для увеличения магнитного потока. При пропускании тока катушка поворачивается вместе с цилиндром на его продольной оси до тех пор, пока вращающий момент сил F_1 и F_2 не уравновесится противодействующим моментом закрученных пружинок. Чем сильнее ток, тем больше угол φ поворота катушки. С осью катушки скреплена стрелка, показывающая на шкале либо силу тока, либо напряжение, в зависимости от того,

как она отградуирована. Электроизмерительные приборы магнитоэлектрической системы дают большую точность, но пригодны только для постоянного тока.

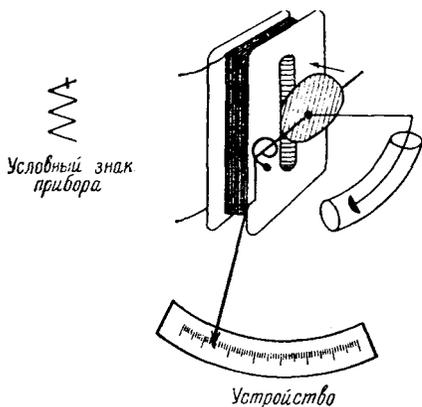


Рис. 216.

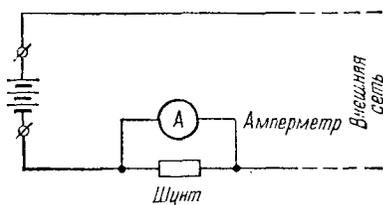


Рис. 217.

Работа гальванометра *электромагнитной системы* основана на эффекте втягивания железного сердечника катушкой, по которой проходит ток.

Такой гальванометр (рис. 216) состоит из неподвижной катушки, по которой проходит ток, и железной пластинки, вращающейся на оси, на которой закреплена удерживающая пластинку пружинка и стрелка. При пропускании по катушке электрического тока любого направления железная пластинка втягивается в катушку, поворачивается на своей оси и поворачивает стрелку. Для уменьшения колебаний стрелки применяется «успокоитель», состоящий из цилиндра, в котором движется поршень, связанный с железной пластинкой. Электромагнитный прибор менее точен, нежели магнитоэлектрический, но проще по конструкции и пригоден как для постоянного, так и для переменного тока.

Амперметр получается путем присоединения к гальванометру параллельно очень малого сопротивления—шунта. Амперметр включается в цепь последовательно (рис. 217).

Если сопротивление шунта $R_{ш}$ меньше внутреннего сопротивления гальванометра $R_{г}$, например, в 99 раз, т. е. $R_{ш} = \frac{1}{99} R_{г}$,

то общее сопротивление амперметра можно найти из соотношения

$$\frac{I}{R_A} = \frac{I}{R_r} + \frac{I}{R_{ш}} = \frac{I}{R_r} + \frac{1}{\frac{1}{99} R_r} = \frac{100}{R_r},$$

откуда $R_A = \frac{R_r}{100}$, т. е. общее сопротивление амперметра в 100 раз меньше внутреннего сопротивления гальванометра, которое само по себе невелико. Следовательно, включение амперметра не отражается заметным образом на силе тока в цепи.

При разветвлении тока в месте присоединения гальванометра силы тока в параллельных ветвях обратно пропорциональны сопротивлениям:

$$\frac{I_r}{I_{ш}} = \frac{R_{ш}}{R_r}$$

(индекс «ш» относится к шунту, «г» — к гальванометру).

Или (производная пропорция)

$$\frac{I_r}{I_{ш} + I_r} = \frac{R_r}{R_r + R_{ш}}.$$

Если по-прежнему $\frac{R_{ш}}{R_r} = 99$, то

$$\frac{I_r}{I} = \frac{R_{ш}}{99R_{ш} + R_{ш}} = \frac{1}{100},$$

т. е. через прибор пройдет $\frac{1}{100} I$.

При включении другого шунта, например $\frac{R_{ш}}{R_r} = 999$,

$$\frac{I_r}{I} = \frac{R_{ш}}{999R_{ш} + R_r} = \frac{1}{1000},$$

т. е. через прибор пройдет $\frac{1}{1000} I$.

Цена одного деления шкалы во втором случае будет в 10 раз больше, чем в первом. Если прибор отградуирован для первого шунта, то при включении второго шунта показание по шкале должно быть увеличено в 10 раз. Имея набор шунтов различного сопротивления, можно значительно увеличить диапазон силы токов, измеряемых данным прибором.

Вольтметр получается из гальванометра присоединением к нему последовательно очень большого сопротивления. Вольтметр включается в цепь параллельно (рис. 218). Из-за большого сопротивления цепи вольтметра часть тока, ответвленная от внешней цепи

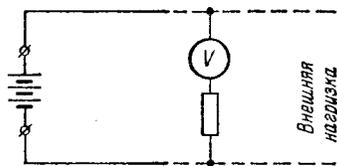


Рис. 218.

в цепь вольтметра, мала, вследствие чего разность потенциалов внешней цепи не изменяется заметно от включения вольтметра.

Вольтметр измеряет, по существу силу тока, проходящего через него, как и амперметр. Однако ввиду того, что напряжение пропорционально силе тока: $E = R_v I_v$, и коэффициент пропорциональности R_v известен (сопротивление вольтметра), то шкалу вольтметра можно отградуировать в вольтах.

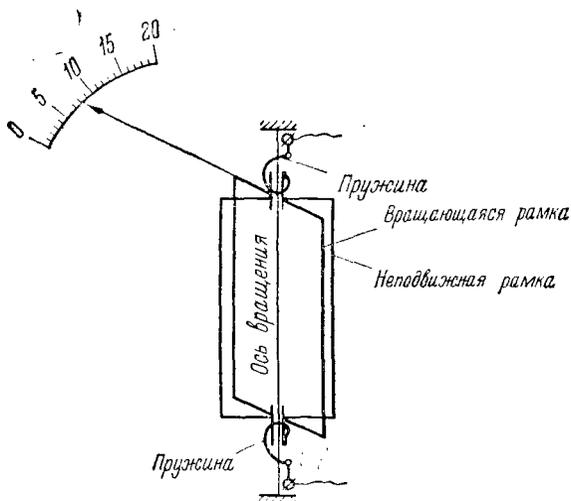


Рис. 219.

Наряду с приведенными схемами электроизмерительных приборов — амперметра и вольтметра — существует много других схем. Приводим некоторые из них, наиболее простые:

в) *Прибор электродинамической системы* (рис. 219), работа которого основана на взаимодействии проводников с током. Две

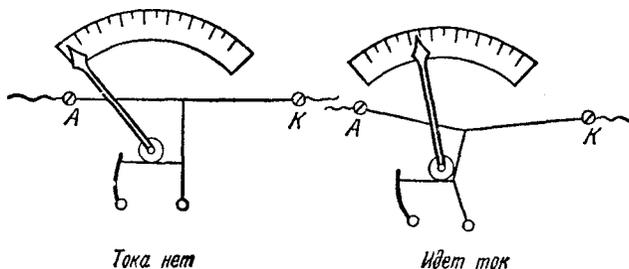


Рис. 220.

рамки с катушками, условно показанные в виде витков, подвешиваются на общей оси, одна — неподвижно, другая на подшипниках. Обе рамки связаны двумя пружинами, по которым к ним

подводится ток. При протекании тока подвижная рамка поворачивается на оси тем больше, чем больше сила тока; связанная с ней стрелка дает показание на неподвижной шкале.

г)° *Тепловой прибор* (рис. 220), работа которого основана на удлинении проводника от нагревателя при прохождении тока.

Ток проходит через проволочку AK , которая оттягивается пружинкой при помощи тонкой нити. Нить обернута вокруг колесика стрелки. Проволока при прохождении тока удлиняется тем больше, чем больше сила тока. При этом нить оттягивается пружинкой, поворачивает колесико и связанную с ним стрелку.

д)° *Струнный прибор* (рис. 221), относящийся к магнитоэлектрической системе.

В однородном магнитном поле натянута тончайшая проволока (0,001—0,005 мм), которая при пропускании через нее тока отклоняется вверх или вниз в зависимости от направления тока. (Направление отклонения проволоочки можно определить по правилу левой руки.) За ее отклонениями следят при помощи микроскопа с окулярной шкалой через каналы K и K_1 .

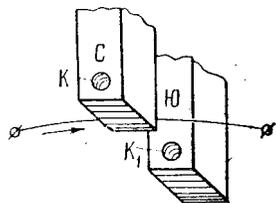


Рис. 221.

Отличительным свойством струнного прибора является быстрота реагирования на изменение тока, вследствие чего этот прибор применяется в медицине для снятия электрокардиограмм, представляющих собой диаграмму токов сердца. Колебание указателя снимается на движущуюся фотопленку.

е) *Статический вольтметр или электрометр* — для измерения потенциала проводника, заряженного статическим электричеством, представляет собой электроскоп со шкалой (рис. 145 § 84), с металлическим корпусом, заземленным, как показано на рис. 145 пунктиром.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 116. Электромагнитная индукция

Явление электромагнитной индукции состоит в следующем.

При всяком изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый контур проводника, в проводнике возникает электродвижущая сила индукции, вызывающая появление электрического тока, который называется индукционным. Э. д. с. индукции возникает также и в незамкнутом проводнике при его движении в магнитном поле, при котором проводник пересекает магнитные силовые линии поля.

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 г. опытным путем. При постановке опытов Фарадей (как и другие ученые — его современники) основывался на предполо-

жении, что если электрический ток создает магнитное поле, то, быть может, возможно и обратное, т. е. создание электрического тока с помощью магнитного поля.

Опыты Фарадея по электромагнитной индукции можно разбить на три основные схемы.

1) В катушку, замкнутую на гальванометр, вдвигается магнит (рис. 222),— стрелка гальванометра отклоняется. Движение

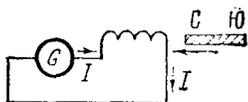


Рис. 222.

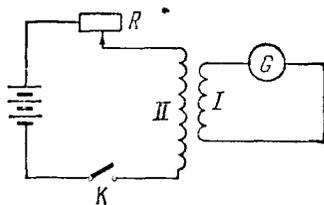


Рис. 223.

прекращается,— стрелка гальванометра показывает нуль. Можно также надвигать катушку на неподвижный магнит.

2) На катушку I , включенную в цепь источника тока, надета другая катушка II , замкнутая на гальванометр (рис. 223). При

изменении силы тока в катушке I в катушке II возникает индукционный (наведенный) ток, направление которого зависит от того, увеличивается или уменьшается сила тока в катушке I . То же происходит при замыкании и размыкании цепи катушки I , так как замыкание и размыкание—частные случаи изменения силы тока.

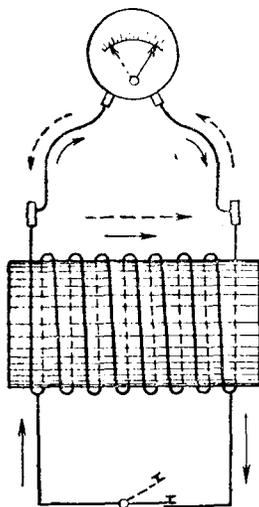


Рис. 224.

3) Эта схема опытов Фарадея (рис. 224) демонстрирует явление самоиндукции (см. ниже § 119). По катушке, соединенной с элементом и гальванометром, включенным параллельно элементу, пропускается ток в направлении, показанном сплошными стрелками. При этом стрелка гальванометра отклоняется вправо. Если разомкнуть ток, то в катушке возникает большой величины кратковременный ток того же направления, какое имел ток от элемента.

Так как часть цепи, в которой находится элемент, разомкнута, то ток пойдет через цепь гальванометра и пройдет через гальванометр в противоположном направлении, как показано пунктирными стрелками, что вызовет отклонение стрелки гальванометра влево.

§ 117. Величина электродвижущей силы индукции

Опытами Фарадея было установлено, что величина электродвижущей силы индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур проводника:

$$\mathcal{E} = -k \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Знак (—) в этой формуле означает, что э.д.с. индукции вызывает индукционный ток, магнитное поле которого противодействует изменению магнитного потока, т. е. при $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$ $\mathcal{E} < 0$ и наоборот.

В этой формуле числовое значение коэффициента пропорциональности k зависит от того, в какой системе выражены входящие в нее величины. В системе СИ $k = 1$. Тогда

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \Delta\Phi = -\mathcal{E}\Delta t.$$

Эта формула позволяет определить единицу магнитного потока в системе СИ:

Вебер (Вб) — магнитный поток, при убывании которого до нуля за 1 секунду в контуре, «сцепленном» с этим потоком, возникает э.д.с. индукции в 1 В.

1 Вб = 1 В · 1 с (ср. с формулой § 114).

Э.д.с. индукции, возникающая в прямолинейном проводе длиной $l_{[м]}$, движущемся с постоянной скоростью $v_{[м/с]}$ в однородном магнитном поле с индукцией $B_{[Т]}$ (линии магнитной индукции направлены перпендикулярно к плоскости чертежа), равна

$$\mathcal{E} = Blv.$$

Здесь все величины в системе СИ, т. е.

$$\mathcal{E}_{[В]} = B_{[Т]} l_{[м]} v_{[м/с]}.$$

Если ось проводника составляет с направлением скорости его движения угол $\alpha \neq 90^\circ$, число линий, пересекаемых проводником длиной l , пропорционально не длине l , а произведению $l \sin \alpha$. Тогда

$$\mathcal{E} = Blv \sin \alpha.$$

Если поле неоднородное, то написанные формулы применимы в том случае, если промежуток времени Δt берется настолько малым, что в течение этого промежутка можно считать: $B = \text{const}$ и $v \sin \alpha = \text{const}$, т. е. для вычисления э.д.с. индукции в данный момент времени. Следовательно, э.д.с. индукции, возникающая при движении прямолинейного проводника в магнитном поле, прямо пропорциональна индукции B магнитного поля, взаимодействующего с проводником, длине проводника и проекции скорости движения

проводника на направление, перпендикулярное к линиям индукции — $v \sin \alpha$.

Индукционные токи возбуждаются также в сплошных проводниках при изменении внутри их магнитного поля, например, в сердечниках электромагнетиков—токи Фуко. В массивных хорошо проводящих телах индукционные токи Фуко при пропускании быстропеременного тока по обмотке достигают большой силы, следствием чего является выделение большого количества тепла.

Токи Фуко используются в металлургии, для прогрева металлических частей внутри вакуумных приборов с целью обезгаживания металла и т. д. В электромагнитах индукционные токи Фуко нежелательны, так как при наличии их тратится электроэнергия на ненужное нагревание сердечника. Для уменьшения токов Фуко сердечники делаются составными из железных полос, вследствие чего уменьшается проводимость сердечника и соответственно токи Фуко в сердечнике.

§ 118. Закон Ленца

Направление индуцированного тока определяется правилом, которое было получено русским ученым академиком Ленцем.

Индукционный ток, возникающий в замкнутом проводнике, имеет такое направление, что его магнитное поле противодействует

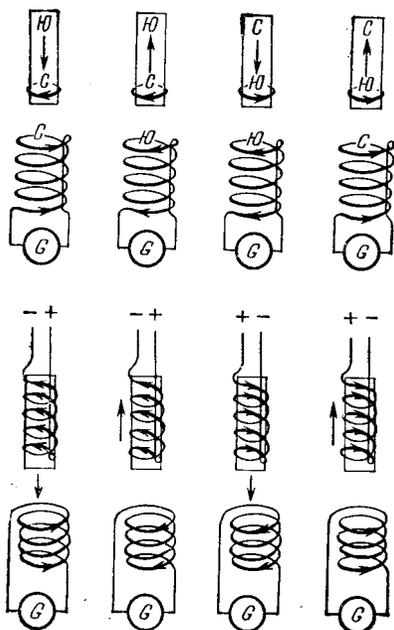


Рис. 225.

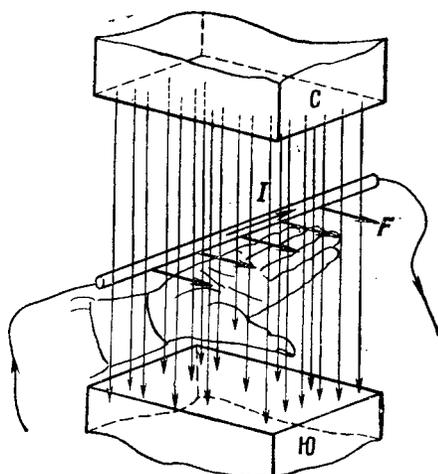


Рис. 226.

изменению индуктирующего магнитного поля. Магнитное поле индукционного тока тормозит движение, вызывающее электромаг-

нитную индукцию. При перемещении магнита или проводника с током относительно другого замкнутого проводника в последнем индуцируется ток такого направления, что этот ток препятствует тому движению, которым он наводится. Это положение иллюстрируется рис. 225.

При приближении соленоида, по которому идет ток, к соленоиду, замкнутому на гальванометр, в последнем возникает «встречный» ток, магнитное поле которого препятствует сближению соленоидов; при удалении возникает «попутный» ток, магнитное поле которого препятствует удалению. При приближении магнита к замкнутому на гальванометр соленоиду в последнем проходит ток такого направления, что на ближайшем к магниту конце соленоида возникает полюс, одноименный с приближаемым полюсом, при удалении — разноименный. При замыкании или усилении тока в одном из двух неподвижных проводников в другом наводится ток противоположного направления; при размыкании или ослаблении — наводится ток одинакового направления с наводящим.

Направление индукционного тока в движущемся проводнике можно определять по правилу, сходному с правилом определения направления движения проводника в магнитном поле, только вместо левой руки применяется правая, т. е. по «правилу правой руки» (рис. 226): отогнутый большой палец располагается по направлению движения проводника, и ладонь располагается так, чтобы силовые линии индуцирующего магнитного поля входили в ладонь. Направление вытянутых пальцев указывает направление индукционного тока (э.д.с. индукции — в незамкнутом проводнике).

§ 119. Явление самоиндукции. Индуктивность.

Зависимость индуктивности катушки от числа витков и наличия железного сердечника. Единица индуктивности — генри

При изменении магнитного поля тока, идущего по проводнику, э.д.с. индукции возникает не только в соседних проводниках, но и в нем самом, поскольку этот проводник находится в том же магнитном поле (см. схему 3 опытов Фарадея (§ 116)). *Возникновение э. д. с. в каком-либо проводнике при изменении силы тока в нем же самом, называется самоиндукцией; а ток, индуцируемый в этом проводнике, — током самоиндукции.* Вследствие самоиндукции при замыкании цепи сила тока не сразу достигает своей полной величины, а через некоторый промежуток времени; при размыкании э. д. с. исчезает не сразу, вследствие чего в месте размыкания появляется искра, а если есть другой замкнутый контур, то в нем продолжает идти слабейший ток (рис. 227).

В приборах, в которых требуется быстрое изменение тока, самоиндукция крайне нежелательна, поскольку она тормозит

изменение тока. В катушках таких приборов применяется бифилярная обмотка (рис. 228). Проволока, предназначенная для обмотки, складывается предварительно вдвое и в таком виде наматывается. Можно также произвести намотку на катушку половины проволоки в одном направлении, половины — в другом.

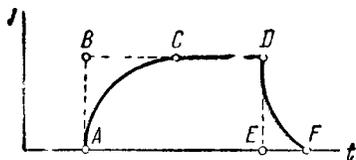


Рис. 227.

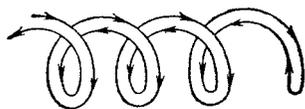


Рис. 228.

Э. д. с. самоиндукции определяется скоростью изменения магнитного потока. Так как величина магнитного потока пропорциональна силе тока, то можно записать, что для данного проводника в данной среде э. д. с. самоиндукции:

$$\mathcal{E} = K \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности K можно представить в виде произведения двух коэффициентов:

$$E = K_1 \cdot L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (2)$$

где K_1 — коэффициент, зависящий от размерности величин; L — так называемая индуктивность (цепи, контура).

Индуктивность — физическая величина, характеризующая свойство данного проводника в данной среде, обуславливающее возникновение в нем э. д. с. самоиндукции, и представляющая собой коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в этом проводнике и величиной э. д. с. самоиндукции.

Индуктивность проводника в данной среде определяется исключительно его размерами и формой. Индуктивность прямолинейного провода невелика. Индуктивность того же провода в форме витка значительно больше. Индуктивность однослойной катушки растет прямо пропорционально количеству витков при неизменном числе слоев обмотки, т. е. если рост количества витков сопровождается пропорциональным увеличением длины катушки. При одинаковых размерах катушек (длин и диаметров) их индуктивность пропорциональна квадрату числа витков. Индуктивность катушки прямо пропорциональна магнитной проницаемости μ_a сердечника.

Если в формуле (2) все величины выражаются в одной и той же системе единиц, то $K_1 = 1$, и формула принимает вид

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Знак «минус» в этом выражении означает, что направление э. д. с. самоиндукции E противоположно направлению тока I .

За единицу индуктивности в системе единиц СИ принимают генри [Г], а в системе СГСМ — сантиметр [см].

Из формулы (2) заключаем, что генри (Г) — это *индуктивность такого проводника, в котором при быстроте изменения тока в 1 ампер в секунду индуцируется э. д. с. индукции в 1 вольт.*

Чтобы получить размерность «генри» найдем L из выражения (2):

$$L = \frac{\mathcal{E} \Delta t}{\Delta I}.$$

Отсюда

$$[\Gamma] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \right].$$

Из того же выражения следует, что

Сантиметр [см] — это *индуктивность такого проводника, в котором при быстроте изменения тока в 1 СГСМ ед. тока (т. е. в 10А) в секунду индуцируется э. д. с. индукции в 1 СГСМ ед. напряжения.*

Примечание. В § 113 получена следующая размерность магнитной постоянной в системе СИ:

$$[\mu_0] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \right].$$

Учитывая, что размерность Ньютона $\left[\frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right]$ и размерность генри $\left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \right]$, получим такую, наиболее употребительную *размерность магнитной постоянной в системе СИ:*

$$[\mu_0] = \left[\frac{\Gamma}{\text{м}} \right].$$

Примеры решения задач

Задача 164. На прямой провод длиной $l = 2$ м с током $I = 50$ А, расположенный в однородном магнитном поле, под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению магнитных линий поля, действует сила $F = 5$ Н. Определить индукцию поля и напряженность этого магнитного поля в воздухе.

$$\begin{aligned} l &= 2 \text{ м} \\ I &= 50 \text{ А} \\ \alpha &= 30^\circ \\ F &= 5 \text{ Н} \end{aligned}$$

Найти B и H

Решение

Сила, действующая на проводник с током, помещенный в магнитном поле

$$F = BIl \sin \alpha.$$

Отсюда индукция этого магнитного поля

$$B = \frac{F}{Il \sin \alpha}, \quad B = \frac{5 \text{ Н}}{50 \text{ А} \cdot 2 \text{ м} \cdot \sin 30^\circ} = 0,1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \underline{0,1 \text{ Т.}}$$

Напряженность магнитного поля (в воздухе)

$$H = \frac{B}{\mu_0}, \quad H = \frac{0,1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}} \approx 78 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Задача 165. Два провода, расположенные параллельно, подвешены на расстоянии $l = 40$ см один от другого. По проводам в одном направлении протекает постоянный ток силой $I = 200$ А в каждом. Определить силу взаимодействия проводов на участке между соседними опорами, расположенными на расстоянии $l = 100$ м.

Решение. По формуле Ампера

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi l} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l};$$

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \cdot 200^2 \text{А}^2 \cdot 100 \text{ м}}{2\pi \cdot 0,40 \text{ м}} = \underline{2,0 \text{ Н}}.$$

Задача 166. Полоску с площадью $S = 200$ см², расположенную в вакууме под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению однородного магнитного поля, пронизывает магнитный поток величиной $\Phi = 0,001$ Вб. Найти индукцию и напряженность магнитного поля.

Решение. Площадь проекции заданной площадки на плоскость, перпендикулярную к направлению поля: $S_0 = S \sin \alpha$.

Магнитный поток: $\Phi = BS_0 = BS \sin \alpha$.

Отсюда находим величину индукции магнитного поля:

$$B = \frac{\Phi}{S \cdot \sin \alpha},$$

$$B = \frac{0,001 \text{ Вб}}{0,02 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ м}^2} = 0,058 \text{ Вб/м}^2 = \underline{0,058 \text{ Т}}.$$

Напряженность магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu_0}, \quad H = \frac{0,058 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2} = \underline{46 \cdot 10^3 \text{ А/м}}.$$

Задача 167. Найти разность потенциалов, возникающую на концах крыльев самолета при горизонтальном полете со скоростью $v = 1200$ км/ч, если размах крыла самолета $l = 40,0$ м. Вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H_0 = 0,5$ Э.

Решение. Разность потенциалов концов крыльев равна э. д. с. индукции:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E}_{\text{инд}}.$$

Э. д. с. индукции в воздухе с достаточной точностью можно принять равной э. д. с. в вакууме:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E}_{\text{инд}} = \mu_0 H l v \sin \alpha = \mu_0 H l v,$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \cdot \frac{125 \text{ А}}{\pi \text{ м}} \cdot 40 \text{ м} \cdot \frac{10^3 \text{ м}}{3 \text{ с}} = \frac{2}{3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \underline{0,67 \text{ В}}.$$

Задача 168. Катушка диаметром $d = 20$ см, имеющая $n = 50$ витков, находится в переменном магнитном поле. Найти мгновенную скорость изменения индукции поля в тот момент, когда величина э. д. с., индукции, возбуждаемой в обмотке, равна $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 100$ В.

Решение. Так как поток индукции $\Phi = BS$, где $S = \text{const}$ — площадь витка, то

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \cdot \frac{1}{S} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{S},$$

где $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ — э. д. с. индукции одного витка: $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{n}$. Следовательно,

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{n \cdot S} = \frac{4 \mathcal{E}_{\text{инд}}}{\pi n d^2},$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 100 \text{ В}}{\pi \cdot 50 \cdot 0,20^2 \text{ м}^2} = 63,5 \frac{\text{В}}{\text{м}^2} = 63,5 \frac{\text{Вб}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \underline{63,5 \text{ Т/с}}.$$

Задача 169. В вертикальном магнитном поле движется под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и под углом $\beta = 60^\circ$ к своей продольной оси со скоростью $v = 200$ м/с прямолинейный проводник длиной $l = 8$ м (рис. 229). При этом в проводнике возбуждается э. д. с. индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 2000$ В. Определить величину индукции магнитного поля, а также величину работы, которую совершают силы магнитного поля за 1 минуту, если сопротивление движущегося проводника $R = 100$ Ом и этот проводник замкнут другим проводником, сопротивлением которого можно пренебречь.

Решение. Э. д. с. индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bl_0 v \sin \varphi$, где $l_0 = l \sin \beta$ — проекция проводника на нормаль к вектору скорости, а φ — угол между вектором скорости и направлением магнитного поля (вертикальным). Так как $\sin \varphi = \cos \alpha$, то

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Blv \sin \beta \cos \alpha.$$

Отсюда находим индукцию магнитного поля:

$$B = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{l \cdot v \sin 60^\circ \cos 30^\circ},$$

$$B = \frac{2000 \text{ В}}{8 \text{ м} \cdot 200 \text{ м/с} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,7 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \underline{1,7 \text{ Т}}.$$

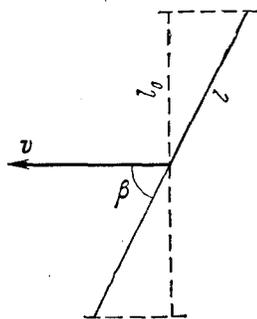


Рис. 229.

Работа магнитного поля равна потере энергии в проводах:

$$A = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}^2}{R} t, \quad A = \frac{2000^2 \text{ В}^2}{100 \text{ Ом}} 60 \text{ с} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = \underline{2400 \text{ кДж}}.$$

Задача 170. В катушке индуктивностью $L = 4 \cdot 10^8$ см возникает э. д. с. самоиндукции $\mathcal{E}_c = 20$ В. Определить среднюю скорость изменения тока в катушке.

Решение. Величина э. д. с. самоиндукции: $\mathcal{E} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, откуда

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}}{L}, \quad \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{20 \text{ В}}{0,4 \text{ Г}} = \underline{50 \text{ А/с}}.$$

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

§ 120. Получение переменного тока

Переменный ток — это ток, периодически меняющийся по величине и направлению.

Схема получения переменного тока такова (рис. 230). Виток проводника AA_1B_1B вращается в магнитном поле \mathbf{B} с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi/T$, где T — время полного оборота

витка. При этом периодически изменяется магнитный поток через виток. Скорость изменения магнитного потока пропорциональна угловой скорости вращения витка, синусу угла φ между направлением силовых линий и перпендикуляра к плоскости рамки.

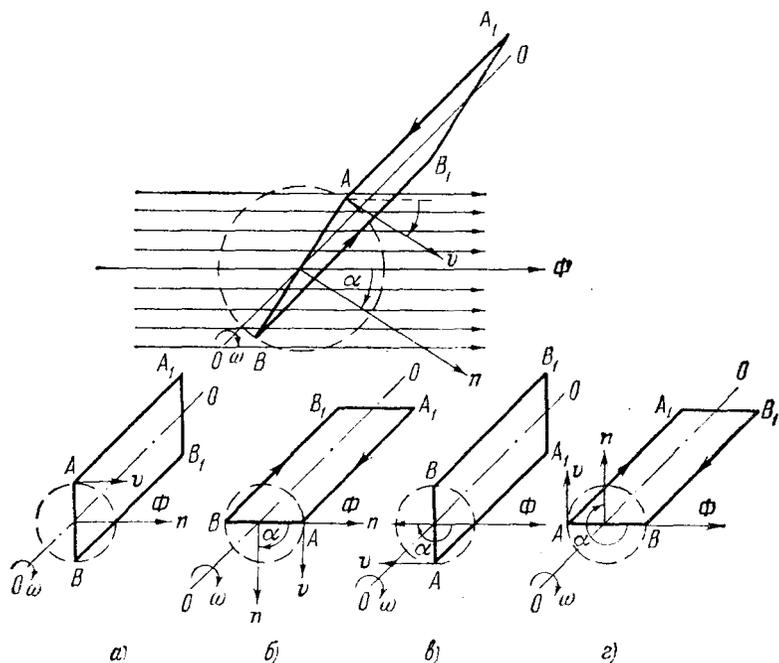


Рис. 230.

В петле возникает э. д. с. индукции и индукционный ток, меняющиеся пропорционально $\sin \varphi$.

Угол $\varphi = \omega t$. Будем отсчитывать время t от момента, в который петля находится в вертикальном положении (рис. 230, а), для которого $\varphi = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\sim \sin \omega t, \\ I &\sim \sin \omega t.\end{aligned}$$

Абсолютная величина э. д. с. индукции и индукционного тока достигает максимального значения при горизонтальном положении витка (рис. 220, з), когда $\varphi = \omega t = (2k + 1)\pi/2$ и $\sin \varphi = \sin \omega t = \pm 1$. Следовательно, при равномерном вращении витка в однородном магнитном поле в витке возникает переменная э. д. с. индукции и индукционный ток, меняющиеся по синусоидальному закону (рис. 231):

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \\ I &= I_0 \sin \omega t,\end{aligned}$$

где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{\max}$ и $I_0 = I_{\max}$ — э. д. с. и сила тока индукции при

$\varphi = \omega t = \pi/2$, т. е. при $\sin \omega t = 1$. \mathcal{E}_0 и I_0 называются амплитудными значениями э. д. с. и тока.

Переменный ток, изменяющийся по синусоидальному закону, называют синусоидальным током. Колебания э. д. с. и силы переменного тока гармонические.

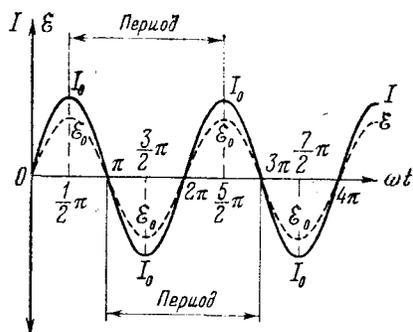


Рис. 231.

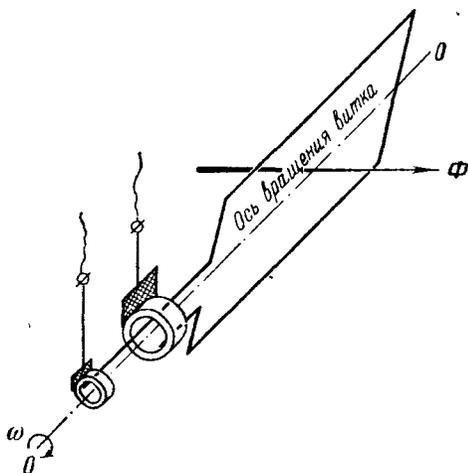


Рис. 232.

Машины для получения переменного тока называют генераторами переменного тока. В электрогенераторах механическая энергия преобразуется в электрическую. Схема простейшего генератора переменного тока получится, если виток на схеме рис. 230 разрезать, и концы его соединить с концами внешней цепи при помощи скользящих контактов, например при помощи двух изолированных друг от друга колец, по которым скользят щетки концов внешней цепи (рис. 232). Практически, в генераторах вращается очень большое количество витков с целью получения большой э. д. с. индукции.

§ 121. Период и частота переменного тока. Действующие (эффективные) значения напряжения и силы переменного тока

Периодом (T) переменного тока называется промежуток времени, в течение которого напряжение и сила тока совершают одно полное колебание:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частотой (ν) переменного тока называется число периодов переменного тока за секунду.

Частота — величина, обратная периоду колебания:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

В СССР в электротехнической промышленности обычно применяется ток с частотой 50 периодов в секунду, т. е. 50 колебаний в секунду

$$\nu = 50 \text{ Гц.}$$

Величину, равную угловой скорости вращения витка в магнитном поле, называют круговой частотой переменного тока:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Наряду с простым синусоидальным током, который создается одной э. д. с. и называется однофазным, в технике широко используется трехфазный ток,

изобретенный и впервые реализованный русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в 1890 г., построившим первые генераторы трехфазного тока и первую в мире линию передачи трехфазного тока и первые асинхронные моторы.

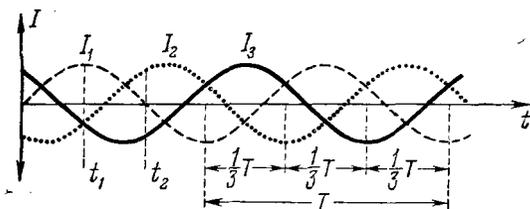


Рис. 233.

Трехфазным током называется система трех однофазных токов, одинаковой амплитуды и частоты, но сдвинутыми по фазе на $1/3$ периода (рис. 233). Сдвиг фаз трех токов достигается тем, что вместо одного вращающегося витка берутся три витка, или три обмотки, плоскости которых расположены под углом 120° одна относительно другой.

О силе переменного тока судят по его тепловому действию, так как тепловое действие тока не зависит от направления тока. По тепловому действию переменного тока определяют «эффективную» силу тока.

Эффективной силой, и эффективным напряжением переменного синусоидального тока называются сила и напряжение такого постоянного тока, который производит такое же тепловое действие, как и данный переменный ток. Эффективная сила синусоидального тока и эффективное напряжение в $\sqrt{2}$ раза меньше максимальных:

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

§ 122. Передача и распределение электроэнергии

Передача электроэнергии сопровождается потерями в проводах, — прежде всего на нагревание проводов (джоулево тепло):

$$W_{\text{потерь}} = kI^2Rt,$$

где R — сопротивление проводов.

Эта формула указывает на два возможных пути уменьшения тепловых потерь в проводах: 1) уменьшение сопротивления проводов; 2) пользование возможно менее сильными токами.

Первый путь невыгоден, так как связан с увеличением сечения проводов, т. е. с их утяжелением. В практике эффективное уменьшение потерь на нагревание проводов достигается уменьшением силы тока, так как потери пропорциональны квадрату силы тока.

При этом, для того чтобы передаваемая мощность $N = UI$ не изменилась, нужно соответ-

ственно повысить напряжение тока на линии передачи. В месте потребления его вновь приходится понижать до величины, не представляющей опасности в эксплуатации и в быту.

Повышение и понижение напряжения производятся трансформаторами (рис. 234). Электроэнергия от генератора в сеть поступает при напряжении до 1000 В. На таком напряжении может быть передана без существенных потерь электроэнергия маломощных станций (до 1000 кВт) на небольшие расстояния. Передача на большие расстояния производится на напряжении 110 и 220 кВ, которое обеспечивается повышающими трансформаторными подстанциями. Напряжение линий электропередачи от Куйбышевской и Волгоградской ГЭС до Москвы—400 кВ. В настоящее время ведутся работы по созданию единой высоковольтной передачи СССР, которая объединит все большие электростанции и сделает возможным централизованное автоматическое управление производством и распределением электроэнергии с передачей на очень большие расстояния (до нескольких тысяч километров) на напряжении до 1000 кВ.

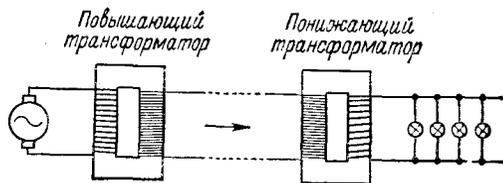


Рис. 234.

§ 123. Трансформатор

Трансформатор — прибор служащий для преобразования напряжения переменного тока. Повышающий трансформатор преобразует ток с повышением напряжения (при уменьшении силы тока), понижающий — с понижением напряжения.

Трансформатор состоит из двух катушек изолированной проволоки с общим сердечником, сделанным из отдельных пластин мягкого железа (рис. 235). По одной из обмоток — первичной — пропускается преобразуемый переменный ток, который создает в железном сердечнике переменный магнитный поток, — общий для обеих обмоток. В результате в каждом витке первичной обмотки возникает э. д. с. самоиндукции, равная $\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$; в каж-

дом витке вторичной обмотки возникает э. д. с. индукции, равная также $\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$. Следовательно, индуцируемые в обмотке электродвижущие силы относятся как числа витков в обмотках:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{w_2}{w_1} = K.$$

Отношение K называют коэффициентом трансформации. Коэффициент трансформации определяется при холостом ходе трансформатора, т. е. при разомкнутой цепи вторичной обмотки. К этому имеются следующие основания.

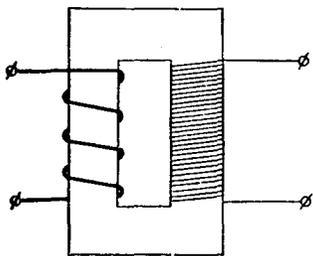


Рис. 235.

При холостом ходе, когда к концам вторичной обмотки не подключена нагрузка, в первичной обмотке проходит так называемый ток холостого хода I_0 ; сила тока I_0 холостого хода мала ($\sim 5\%$ номинальной силы тока *)), вследствие чего мало падение напряжения в первичной обмотке, и э. д. с. самоиндукции в первичной обмотке равно напряжению на зажимах ($\mathcal{E}_1 = U_{01}$). Цепь вторичной обмотки разомкнута, вследствие чего в ней нет тока, и напряжение на зажимах вторичной обмотки равно индуцированной в ней э. д. с. ($U_{02} = \mathcal{E}_2$). Поэтому

$$K = \frac{U_{01}}{U_{02}}.$$

Коэффициентом трансформации трансформатора называется отношение напряжения на зажимах первичной обмотки трансформатора к напряжению на зажимах его вторичной обмотки при холостом ходе.

В повышающем трансформаторе коэффициент трансформации $K > 1$, соответственно $w_2 > w_1$; в понижающем $K < 1$.

Один и тот же трансформатор может работать в качестве повышающего и в качестве понижающего, в зависимости от того, какая обмотка используется в качестве первичной, какая — вторичной.

При работе трансформатора имеются потери на нагревание обмоток трансформатора, на рассеивание магнитного потока в пространство, на вихревые токи в сердечнике и на его перемагничивание.

Для уменьшения потерь в трансформаторе принимаются следующие меры:

*) В случае идеального трансформатора без потерь в сердечнике из закона сохранения энергии следует, что при холостом ходе $UI = I^2R$, где UI — мощность, которая подается на первичную обмотку, и I^2R — тепловые потери в этой обмотке. Отсюда следует, что при холостом ходе $I = 0$.

а) Обмотка высокого напряжения делается большого сечения, так как по ней протекает ток большой силы.

б) Замкнутый сердечник сильно уменьшает рассеивание магнитного потока; практически весь магнитный поток первичной катушки проходит внутри сердечника и пронизывает вторичную катушку.

в) Пластинчатая конструкция сердечника уменьшает вихревые токи (токи Фуко).

Благодаря этим мерам к. п. д. современных трансформаторов достигает 95—99%.

При нагрузке трансформатора происходит передача энергии из первичной цепи во вторичную. По закону сохранения и превращения энергии мощность тока во вторичной цепи равна мощности в первичной цепи за вычетом потерь в трансформаторе:

$$N_2 = N_1 - \Delta N.$$

Так как к. п. д. близок к 1, то для приближенных расчетов можно пренебречь потерями в трансформаторе и считать:

$$N_2 \approx N_1 \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_2 I_2 \approx \mathcal{E}_1 I_1.$$

Отсюда найдем

$$\frac{I_2}{I_1} \approx \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{K}.$$

Отношение силы тока во вторичной обмотке к силе тока в первичной обмотке обратно пропорционально э. д. с. в обмотках, или количеству их витков, и равно обратной величине коэффициента трансформации.

Напряжение на зажимах обмоток трансформатора можно вычислить с достаточным приближением для многих практических задач, учитывая только падение напряжения на сопротивлении обмоток:

напряжение на зажимах вторичной обмотки

$$U_2 \approx \mathcal{E}_2 - I_2 R_2;$$

напряжение, которое подводится к зажимам первичной обмотки,

$$U_1 \approx \mathcal{E}_1 + I_1 R_1.$$

В заключение укажем, что для цепей небольших мощностей иногда применяют автотрансформаторы, в которых обмотка низкого напряжения представляет собой часть обмотки высокого напряжения (рис. 236).

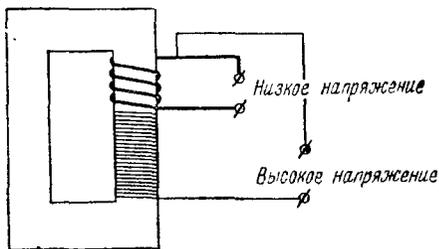


Рис. 236.

§ 124. Генератор постоянного тока

Генераторы постоянного тока, у которых магнитное поле создается постоянным магнитом, носят название магнето. Магнето имеют небольшую мощность и употребляются для зажигания в двигателях внутреннего сгорания, для вызывных звонков телефонных аппаратов в коротких телефонных линиях, вообще там, где требуется небольшая сила тока.

Генераторы постоянного тока, у которых магнитное поле создается электромагнитом, иногда называют динамомашинами. Динамомашинa состоит из неподвижного индуктора, вращающегося якоря с контактным устройством — коллектором и корпуса.

Индуктор — создающий магнитное поле, представляет собой двухполюсный (рис. 237, а), четырехполюсный (рис. 237, б) или

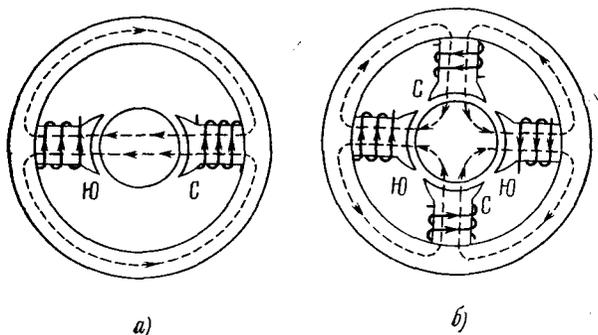


Рис. 237.

многполюсный электромагнит. Многополюсные индукторы делаются для уменьшения числа оборотов машин при сохранении достаточно высокой частоты тока в обмотке якоря, т. е. при сохранении величины э. д. с. индукции. Обмотка полюсов индуктора называется обмоткой возбуждения и в многополюсной динамомашине делается таким образом, что полюсы электромагнита чередуются.

Питание электромагнита динамомашины производится током от обмотки ее якоря, т. е. вырабатываемым самой машиной. В начальный момент пуска генератора постоянного тока, когда еще нет тока в обмотке якоря, появление его обеспечивается наличием остаточной намагниченности полюсов индуктора. Как только якорь машины приводится во вращение, его обмотка пересекает слабый поток остаточного магнетизма, и в ней индуцируется небольшая э. д. с., вызывающая появление в обмотке якоря и полюсов ток небольшой силы, который несколько увеличивает магнитное поле полюсов и его магнитный поток. Уве-

лишение магнитного потока в свою очередь вызовет увеличение э. д. с. индукции и т. д.

В зависимости от схемы присоединения обмотки возбуждения к обмотке якоря различают три типа генераторов (рис. 238).

1) Серийная машина, в которой обмотка возбуждения соединяется с обмоткой якоря последовательно (рис. 238, а). Такое

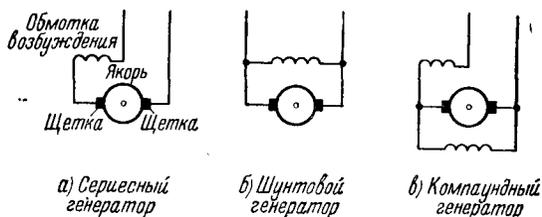


Рис. 238.

соединение употребляется сравнительно редко. Серийная машина не может работать при разомкнутой цепи.

2) Шунтовая машина—с параллельным соединением обмоток (рис. 238, б). Последовательно с обмоткой возбуждения включается реостат возбуждения для регулирования силы тока в обмотке.

3) Компаундная машина, в которой обмотка возбуждения состоит из двух частей: одна обмотка соединяется с обмоткой якоря последовательно, другая—параллельно (рис. 238, в).

Якорь—это вращающаяся обмотка. В современных динамо-машинах применяется якорь барабанного типа; он состоит из

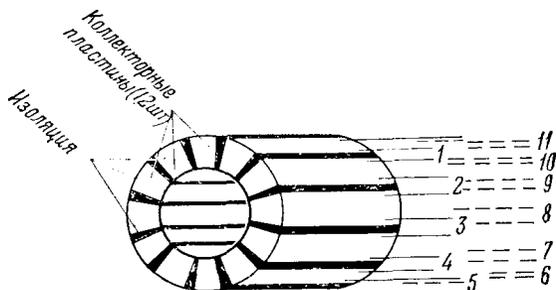


Рис. 239.

железного сердечника в форме цилиндра с пазами по образующим, в которых монтируются секции обмотки. Сердечник якоря делается из штампованных листов мягкого железа, изолированных лаком или прокладками бумаги с целью уменьшения токов Фуко.

Коллектор (рис. 239) предназначается для выпрямления тока, закреплен на одном валу с якорем и вращается вместе

с ним. Для уяснения принципа работы коллектора динамомашины вернемся к схеме генерирования переменного тока во вращающемся витке проводника (рис. 214 § 115). Если создать такой контакт витка (по схеме рис. 214) с внешней цепью, чтобы при

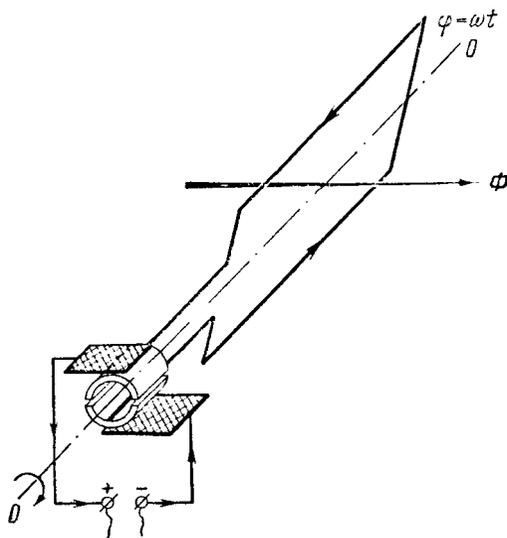


Рис. 240.

перемене направления э. д. с. индукции в витке концы витка переключались бы на другие концы внешней цепи, то ток во внешней цепи сохраняет свое направление при вращении витка, хотя и меняет непрерывно величину, это — пульсирующий ток. Переключение достигается, например, тем, что концы витка заканчиваются изолированными друг от друга полукольцами, по которым скользят щетки концов внешней цепи (рис. 240). При этом получается пульсирующий ток (рис. 241, а).

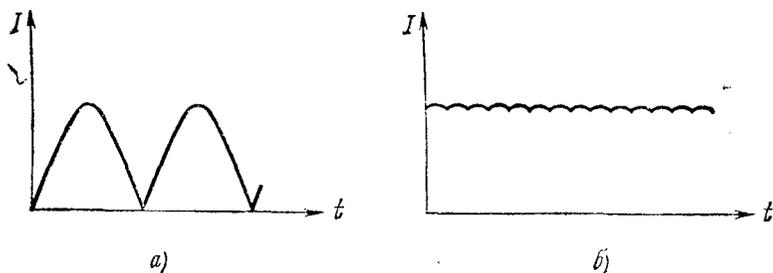


Рис. 241.

Для сглаживания пульсации тока в динамомашине постоянного тока обмотка группируется в несколько секций и даже в несколько десятков секций, расположенных под углом друг

к другу; фазы индукционного тока в разных секциях различные, и пульсация суммарного тока уменьшается тем больше, чем больше секций. При очень большом числе секций ток близок к постоянному (рис. 241, б).

Снятие тока с коллектора производится щетками, представляющими собой угольные пластины с небольшой примесью меди, укрепленные в щеткодержателях на корпусе машины. Щетки прижимаются к коллектору пружинами, находящимися в щеткодержателях, и соединены с зажимами генератора.

Примеры решения задач

Задача 171. Величина э.д.с. переменного тока задана уравнением $\mathcal{E} = 100 \sin 20\pi t$, где t — в с. Найти наибольшее и эффективное значение э.д.с., а также ее значение для фазы $\frac{\pi}{6}$. Найти частоту и период тока.

$$\mathcal{E} = 100 \sin 20\pi t$$

$$\varphi = \pi/6$$

Найти \mathcal{E}_0 , \mathcal{E}_e , E_φ , ν и T

Решение

Наибольшая э.д.с. (при $\sin 20\pi t = 1$)

$$\mathcal{E}_0 = 100 \text{ В.}$$

Эффективное значение э.д.с.

$$\mathcal{E}_e = \frac{100}{\sqrt{2}} = \frac{100 \sqrt{2}}{2} = 70,7 \text{ В.}$$

Э.д.с. при $\varphi = \pi/6$

$$\mathcal{E}_\varphi = 100 \sin \frac{\pi}{6} = 50 \text{ В.}$$

Период тока найдется из условия: $20\pi T = 2\pi$. Получим

$$T = 0,1 \text{ с.}$$

Частота тока

$$\nu = \frac{1}{T} = 10 \text{ Гц.}$$

Задача 172. Серьезная динамомашинка с сопротивлением обмотки якоря $r_{\text{я}} = 0,8$ Ом и обмотки индуктора $r_{\text{и}} = 3$ Ом дает ток $I = 10$ А при напряжении на щетках $U_{\text{щ}} = 120$ В. Найти э.д.с. генератора, напряжение на зажимах, внешнее сопротивление и к.п.д. генератора.

Решение. Э.д.с. генератора (см. рис. 238, а)

$$\mathcal{E} = U_{\text{щ}} + Ir_{\text{я}}, \quad \mathcal{E} = 120 \text{ В} + 10 \text{ А} \cdot 0,8 \text{ Ом} = 128 \text{ В.}$$

Напряжение на зажимах

$$U = U_{\text{щ}} - Ir_{\text{и}}, \quad U = 120 \text{ В} - 10 \text{ А} \cdot 3 \text{ Ом} = 90 \text{ В.}$$

Внешнее сопротивление

$$R = \frac{U}{I}, \quad R = \frac{90 \text{ В}}{10 \text{ А}} = 9 \text{ Ом.}$$

К.п.д. генератора

$$\eta = \frac{UI}{\mathcal{E}I} = \frac{U}{\mathcal{E}}, \quad \eta = \frac{90 \text{ В}}{128 \text{ В}} = 0,703 \text{ (70,3\%)}$$

Задача 173. Шунтовая динамомашинa имеет э.д.с. $\mathcal{E} = 380$ В, сопротивление обмотки якоря $R_{\text{я}} = 0,5$ Ом, сопротивление индуктора $R_{\text{и}} = 80$ Ом. При сопротивлении внешней цепи $R_1 = 20$ Ом определить величину тока во внешней цепи, напряжение на щетках, к.п.д. машины. Определить к.п.д. машины при внешнем сопротивлении $R_2 = 40$ Ом.

Решение. Так как внешняя цепь и индуктор включаются в цепь параллельно (см. рис. 233, б), то их общее сопротивление найдется из условия

$$\frac{1}{R_{01}} = \frac{1}{80} + \frac{1}{20} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16},$$

откуда

$$R_{01} = 16 \text{ Ом.}$$

При внешнем сопротивлении R_2 :

$$\frac{1}{R_{02}} = \frac{1}{80} + \frac{1}{40} = \frac{3}{80}, \quad \text{откуда} \quad R_{02} = \frac{80}{3} = 26 \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

Сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R_{\text{я}}}.$$

Напряжение на щетках

$$U = \mathcal{E} - IR_{\text{я}} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}R_{\text{я}}}{R_0 + R_{\text{я}}} = \mathcal{E} \left(1 - \frac{R_{\text{я}}}{R_0 + R_{\text{я}}} \right).$$

Сила тока во внешней цепи

$$I_R = \frac{U}{R}.$$

К.п.д. машины

$$\eta = \frac{U^2}{R} : \frac{\mathcal{E}^2}{R_0 + R_{\text{я}}} = \left(\frac{U}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{R_0 + R_{\text{я}}}{R} = \left(1 - \frac{R_{\text{я}}}{R_0 + R_{\text{я}}} \right)^2 \frac{R_0 + R_{\text{я}}}{R} = \frac{R_0^2}{R(R_0 + R_{\text{я}})}.$$

В первом случае (при $R_1 = 20$ Ом)

$$I_{R_1} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{368,5}{20} = 18,4 \text{ А,}$$

$$U_1 = 380 \text{ В} \left(1 - \frac{0,5}{16 + 0,5} \right) = 368,5 \text{ В,}$$

$$\eta_1 = \frac{16^2}{20(16 + 0,5)} = 77,6\%.$$

Во втором случае (при $R_2 = 40$ Ом)

$$\eta_2 = \left(\frac{U_2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{R_{02} + R_{\text{я}}}{R_2} = \left(1 - \frac{R_{\text{я}}}{R_{02} + R_{\text{я}}} \right)^2 \frac{R_{02} + R_{\text{я}}}{R_2} = \frac{(R_{02})^2}{(R_{02} + R_{\text{я}})R_2},$$

$$\eta_2 = \frac{\left(\frac{80}{3} \right)^2}{\left(\frac{80}{3} + 0,5 \right) \cdot 40} = 65,3\%.$$

Задача 174. Требуется понизить напряжение с $U_1 = 6000$ В до $U_2 = 120$ В автотрансформатором, имеющим всего $n_1 = 3000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 0,5$ Ом. Сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения) $R = 12$ Ом. Какое количество витков трансформатора должно быть приключено к сети пониженного напряжения. Сопротивлением обмотки, по которой проходит ток высокого напряжения, пренебречь.

Решение. Сила тока во вторичной цепи

$$I_2 = \frac{U_2}{r_2 + R}.$$

Падение напряжения во вторичной обмотке

$$\Delta \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 = \frac{U_2 r_2}{r_2 + R}.$$

Э.д.с. индукции вторичной обмотки

$$\mathcal{E}_2 = U_2 + \Delta E_2 = U_2 \left(1 + \frac{r_2}{r_2 + R} \right) = U_2 \frac{R + 2r_2}{r_2 + R}.$$

Э.д.с. первичной обмотки равна подведенному к ней напряжению, так как потери в первичной обмотке пренебрежимо малы: $\mathcal{E}_1 = U_1$. Коэффициент трансформации

$$K = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{U_2}{U_1} \left(\frac{R + 2r_2}{r_2 + R} \right) = \frac{n_2}{n_1}.$$

Отсюда находим число витков вторичной обмотки

$$n_2 = \frac{U_2 R + 2r_2}{U_1 r_2 + R} n_1.$$

$$n_2 = \frac{120}{6000} \cdot \frac{12 + 2 \cdot 0,5}{12 + 0,5} \cdot 3000 = \underline{62}.$$

§ 125. Электронные явления в вакууме. Явление термоэлектронной эмиссии

Свободные электроны в металле, в том числе в электродах вакуумной трубки, находятся в состоянии хаотического движения. Отдельные электроны при этом могут приобрести кинетическую энергию, достаточную для вылета электрона из металла, и вырываются из него. Часть электронов вылетевших из металла, вновь попадает на него. Таким образом устанавливается динамическое равновесие, при котором над поверхностью электрода образуется тонкий слой «электронной атмосферы».

При обычных температурах концентрация электронов над поверхностью катода ничтожно мала. При нагревании катода увеличивается энергия свободных электронов и усиливается их эмиссия. Эмиссия электронов катода, вызванная его нагреванием, называется термоэлектронной эмиссией.

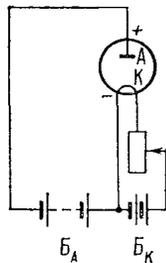


Рис. 242.

Если вакуумная трубка включена в электрическую цепь (рис. 242) так, что нагретый проводник соединен с отрицательным полюсом источника тока (на рис. 242 — батареи), т. е. является катодом, то вылетающие из него электроны притягиваются анодом, образуя постоянный термоэлектронный ток. При некотором повышении напряжения источника анодного тока все большее число электронов из облачка будет увлекаться к аноду

и меньшее их число возвращаться в металлическую нить, — сила тока будет возрастать. При дальнейшем повышении напряжения между электродами вакуумной лампы дойдем до такого момента, когда все вылетающие из нити электроны увлекаются к аноду.

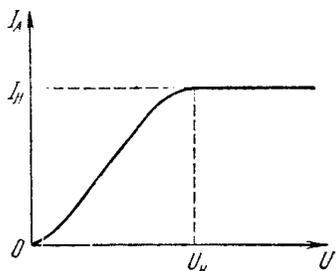


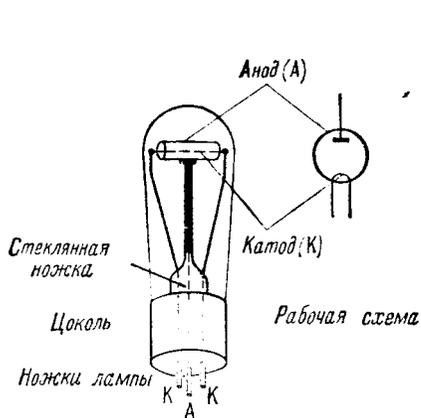
Рис. 243.

Если повышать напряжение еще больше, то это ни к чему не приведет, так как количество электронов, участвующих в создании электрического тока, не увеличится — сила тока останется постоянной. Это — так называемый ток насыщения (рис. 243) I_n — ток, соответствующий напряжению, при котором все испускаемые катодом при данной температуре накала электроны увлекаются электрическим полем к аноду. Ток насыщения тем выше, чем выше температура катода.

График (рис. 243) зависимости анодного тока I_A от напряжения U между анодом и катодом лампы называют анодной характеристикой лампы.

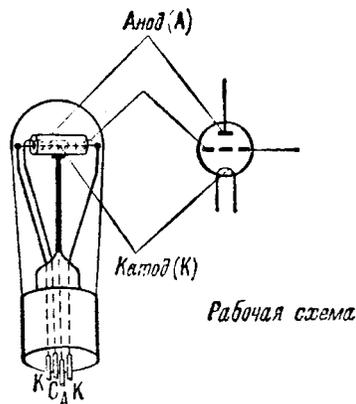
§ 126. Электронные лампы диод и триод

Электронная лампа представляет собой стеклянный или металлический баллон, в котором создан вакуум и укреплены электроды. Названия электронных ламп соответствуют числу их электродов.



Конструктивная схема

Рис. 244.



Конструктивная схема

Рис. 245.

Двухэлектродная лампа — диод (рис. 244) имеет катод и анод. Конструктивно катод выполняется в виде нити из тугоплавкого

металла, например вольфрама. Оба конца нити выведены через цоколь лампы в виде двух ножек. Анод выполняется в виде трубки кругового, овального или прямоугольного сечения, окружающей катод. Контакт анода выведен через цоколь лампы также в виде ножки.

Нить катода накаливается током от батарей накала или от низковольтного трансформатора, благодаря чему образуется термоэлектронная эмиссия.

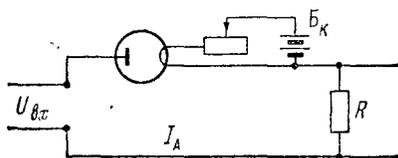
При подключении анода и катода к источнику напряжения между ними создается электрическое поле. Если потенциал анода выше потенциала катода, то эмиттированные катодом электроны будут двигаться к аноду, — в лампе и во всей цепи будет проходить ток. Когда же потенциал анода меньше потенциала катода, ток через лампу не идет, так как электрическое поле в лампе будет «отталкивать» электроны от анода.

Трехэлектродная лампа — триод (рис. 245) получается из диода, в котором между анодом и катодом вставлен третий электрод — сетка С. Сетка выполняется в виде спирали, охватывающей катодную нить, с контактом в виде ножки. Если сетку и катод подключить к источнику напряжения, то между этими электродами создается дополнительное электрическое поле, которое складывается с основным полем. Так как сетка расположена значительно ближе к катоду, чем анод, то незначительные по величине изменения потенциала сетки заметно изменяют напряженность электрического поля в лампе. Поэтому, изменяя потенциал сетки, можно управлять анодным током.

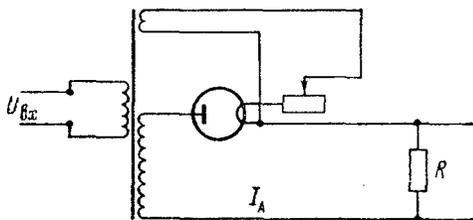
Многочелюстные лампы, т. е. лампы с несколькими сетками, представляют собой усовершенствованные триоды. Принцип их работы тот же, что и триодов.

§ 127. Использование диода для выпрямления переменного тока

Схема включения диода для выпрямления переменного тока показана на рис. 246. Источник переменного тока включается в анодную цепь лампы либо непосредственно (рис. 246, б), либо через трансформатор (рис. 246, а). В последнем случае накал катода производится от источника тока через понижающий



а)



б)

Рис. 246.

трансформатор. На рис. 246 R — нагрузка потребителя в цепи выпрямленного тока.

На рис. 247, *а* показан график переменного напряжения источника тока — $U_{вх}$ (входное напряжение). Когда потенциал анода положителен (выше потенциала катода), эмитированные катодом электроны устремляются к аноду и через лампу идет ток, как показано на рис. 247, *б*. При отрицательном потенциале анода ток в цепи отсутствует. Таким образом, через внешнюю цепь ток проходит только в течение одного полупериода переменного тока и представляет собой прерывистый пульсирующий ток постоянного направления. Показанный на рис. 246 выпрямитель носит название однополупериодного или однотактного выпрямителя.

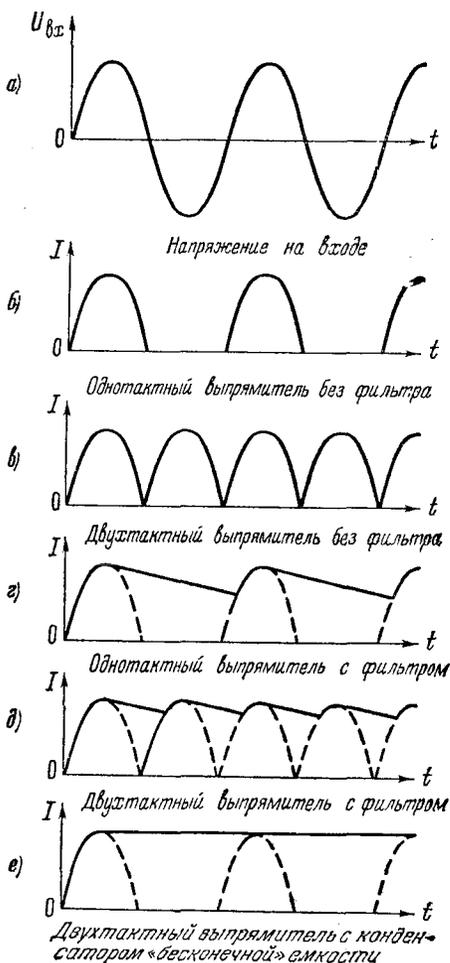


Рис. 247.

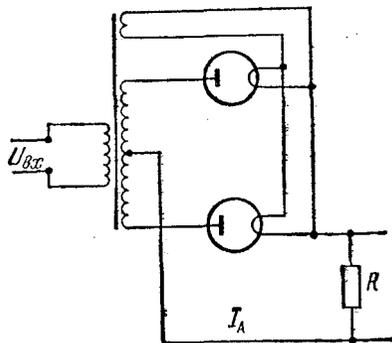


Рис. 248.

Для использования обоих полупериодов переменного тока применяется схема двухполупериодного (двухтактного) выпрямления (рис. 248) с двумя лампами. Обе лампы работают поочередно, создавая во внешней цепи ток одного направления, — одна лампа в течение первого полупериода, другая — в течение второго. При этом во внешней цепи проходит пульсирующий ток, как показано на рис. 247, *в*.

Вместо двух ламп для двухтактного выпрямления применяется одна лампа с двумя анодами (рис. 249).

Для сглаживания пульсаций тока, т. е. для более совершенного выпрямления тока применяются фильтры из конденсаторов,

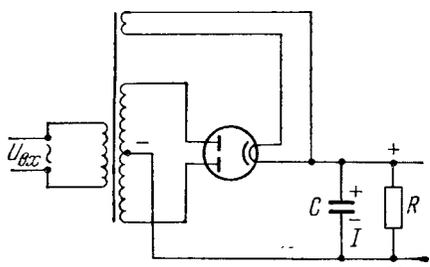


Рис. 249.

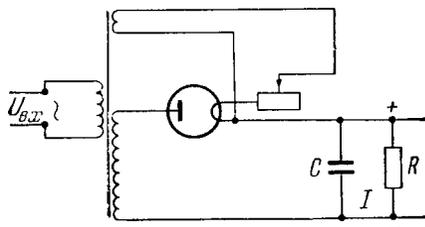


Рис. 250.

включаемых параллельно нагрузочной цепи, и дросселя — катушки с большой индуктивностью (рис. 250).

Каждый импульс тока, поступающий в цепь нагрузки одновременно, заряжает обкладки конденсатора. Когда импульс тока от внешнего источника тока ослабляется и затем прекращается, конденсатор разряжается в цепь нагрузки R , поддерживая в ней ток почти постоянной силы — рис. 247, $г$ и $д$. Если бы емкость конденсатора была бесконечно большой, ток в цепи нагрузки был бы постоянным — рис. 247 $е$.

§ 128. Электроннолучевая трубка

Электроннолучевая трубка (рис. 251) служит для получения управляемого узкого потока электронов и представляет собой стеклянный баллон, в котором создан глубокий вакуум. В узком

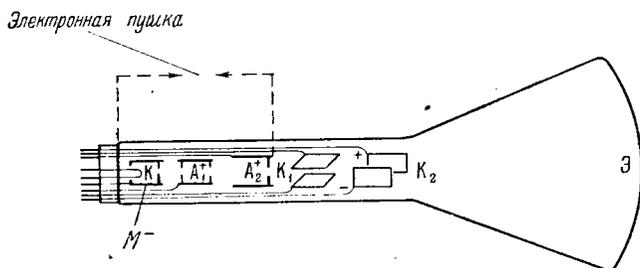


Рис. 251.

конце трубки имеется накаливаемый катод K , служащий источником электронов. Ближайший к катоду цилиндр M охватывает катод и пропускает поток электронов лишь через отвер-

стие в своем торце. Давая на этот управляющий цилиндр то или иное отрицательное напряжение, можно изменять скорость электронов. За управляющим цилиндром расположены два анода A_1 и A_2 , также цилиндрической формы, на которые подается положительное напряжение. Вся эта часть трубки называется электронной пушкой или прожектором. За прожектором пучок электронов пропускается на флуоресцирующий экран \mathcal{E} через два конденсатора: K_1 —с горизонтальными и K_2 —с вертикальными пластинками. К одному конденсатору, например K_1 , подводится излучаемый ток, отклоняющий электронный пучок в вертикальном направлении, причем по величине отклонения судят о напряжении исследуемого тока. На второй конденсатор накладывается переменное электрическое поле, прерывающееся через определенные очень малые промежутки времени. Вследствие этого по горизонтальным отклонениям электронного пучка можно судить о времени протекания процесса. Прерывистое напряжение «развертывает» по горизонтальной оси вертикальные колебания изучаемого напряжения.

Малая инерционность электронного луча позволяет при помощи электроннолучевой трубки изучать быстротекающие процессы.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ

§ 129. Электромагнитные колебания и волны

Переменные электрические и магнитные поля не могут существовать раздельно друг от друга, так как в пространстве, где существует переменное магнитное поле, возбуждается электрическое поле и наоборот. Переменные электрическое и магнитное поле

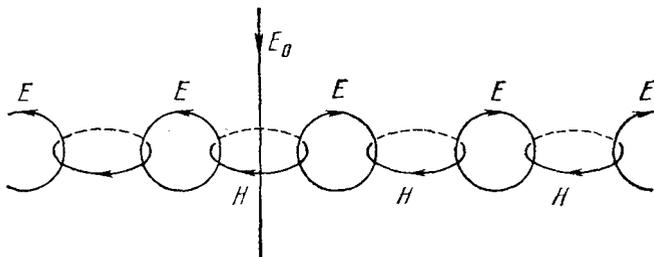


Рис. 252.

обуславливают одно другое и образуют единое электромагнитное поле.

Переменное электрическое поле, являющееся компонентом электромагнитного поля, отличается от электростатического поля тем, что его силовые линии замкнуты, как и магнитные силовые

вые линии. Поля, силовые линии которых замкнутые, называют вихревыми полями.

Одновременное периодическое изменение связанных между собой электрического и магнитного полей носит название электромагнитных колебаний.

Свойство переменных электрического и магнитного полей возбуждать одно другое обуславливает распространение электромагнитного поля в пространстве. Переменный электрический ток создает вокруг проводника переменное же магнитное поле. Переменное магнитное поле в свою очередь создает переменное электрическое поле. Последнее опять создает переменное магнитное поле и т. д. (рис. 252). В итоге электромагнитное поле распространяется в пространстве.

Распространяющееся в пространстве электромагнитное поле образует электромагнитную волну. Векторы напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения волны. Следовательно, электромагнитные волны — поперечные. Гармоническая электромагнитная волна графически изображается двумя синусоидами, лежащими во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 253). Как видно из графика, фазы волн напряженности электрического и магнитного полей совпадают.

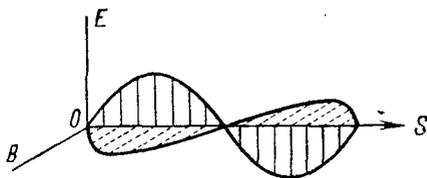


Рис. 253.

Электромагнитные волны впервые изучил теоретически и предсказал их свойства Максвелл в шестидесятых годах XIX века, а экспериментально получил и изучил Герц в восьмидесятых годах.

§ 130. Колебательный контур. Превращения энергии

в колебательном контуре. Зависимость периода колебаний в контуре от индуктивности и емкости. Электрический резонанс

Колебательный контур представляет собой замкнутую цепь, обладающую емкостью C и индуктивностью L .

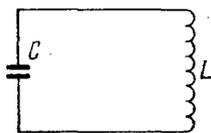


Рис. 254.

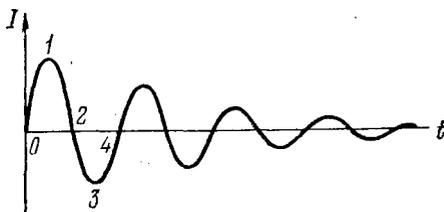


Рис. 255.

На рис. 254 показан простейший закрытый колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки самоиндукции.

Если зарядить конденсатор и затем замкнуть его на катушку индуктивности, то в контуре возникает быстропеременный ток, амплитуда колебаний которого уменьшается со временем (рис. 255) из-за сопротивления проводов этого контура. Это — затухающие свободные колебания.

Объяснение их происхождения следующее (рис. 256). В положении 0 конденсатор еще не заряжен. В положении 1 конденсатору сообщен заряд, который создает в пространстве между пластинами конденсатора электрическое поле.

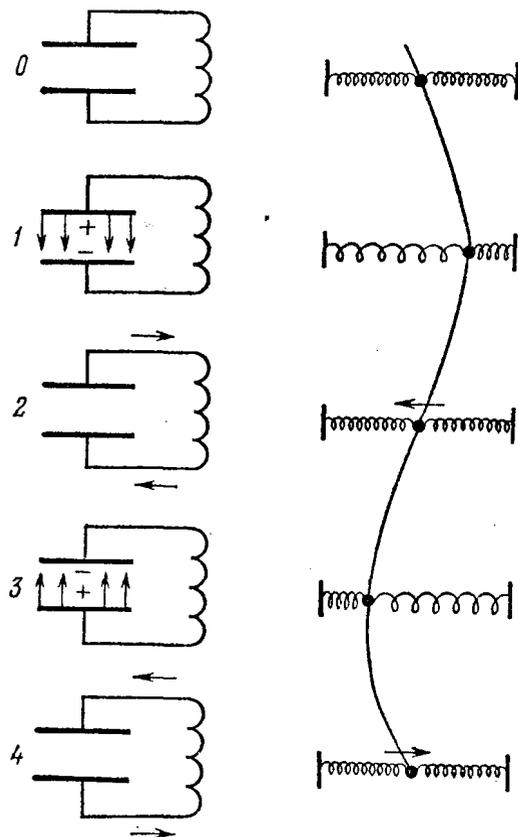


Рис. 256.

Вследствие того, что обкладки конденсатора соединены проводником, немедленно вслед за зарядкой конденсатора начнется его разрядка через катушку. Движение зарядов образует электрический ток, который сопровождается возникновением в катушке магнитного поля, препятствующего возрастанию тока, вследствие чего ток не сразу достигает максимума к моменту разрядки конденсатора — положение 2. Сейчас ток должен был бы прекратиться, но исчезающее магнитное поле катушки препятствует мгновенному прекращению тока, вследствие чего по контуру продолжает

идти убывающий по величине ток, и пластины конденсатора заряжаются противоположно начальным зарядам — положение 3. В следующий момент начинается разрядка в обратном направлении до полной разрядки — положение 4.

На рис. 255 цифрами отмечены моменты, соответствующие различным положениям на рис. 256 для первого колебания. Положение 4 является исходным положением 0 для следующего колебания и т. д.

В колебательном контуре происходит взаимное превращение энергий электрического и магнитного полей: при разрядке кон-

денсатора (промежуток 1—2) энергия электрического поля конденсатора переходит в энергию магнитного поля катушки; дальнейшая зарядка конденсатора противоположно начальным зарядам (промежуток 2—3) происходит вследствие перехода энергии магнитного поля катушки в энергию электрического поля конденсатора и т. д.

Взаимные превращения энергий электрического и магнитного полей сопровождаются энергетическими потерями на нагревание проводников и излучение энергии электромагнитной волны в окружающее пространство.

Вследствие наличия энергетических потерь колебания переменного тока в колебательном контуре при однократной его зарядке затухающие, — амплитуда каждого последующего колебания переменного тока в этом случае несколько меньше амплитуды предыдущего колебания. Время затухания тем меньше, чем больше активное (омическое) сопротивление цепи, так как в этом случае больше потери энергии на нагревание проводов.

Период собственных колебаний колебательного контура зависит от индуктивности и емкости контура и определяется по формуле Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Если к колебательному контуру подключен генератор переменного тока, то его э.д.с. будет вызывать в контуре вынужденные колебания переменного тока с частотой, равной частоте изменения э.д.с. генератора.

При вынужденных колебаниях энергия подводится к контуру непрерывно, благодаря чему эти колебания будут незатухающими.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот генератора и контура. Она резко возрастает при приближении частоты внешней э.д.с. (генератора) к частоте собственных колебаний контура. Это явление носит название резонанса.

§ 131. Электронная лампа как генератор

В качестве высокочастотного генератора незатухающих электрических колебаний в радиотехнике применяются трехэлектродные (и многоэлектродные) электронные лампы, работающие от источника постоянного тока.

Одна из простейших схем включения в цепь триода для генерирования незатухающих электромагнитных колебаний приведена на рис. 257. Когда сетка C триода заряжена положительно, источник постоянного тока (батарея анода B_A) подает ток через лампу и одновременно подзаряжает конденсатор C . Когда сетка заряжена отрицательно, ток через лампу проходить не может, и

конденсатор C заряжается через катушку L . Таким образом, колебание потенциала сетки вызывает колебания в контуре LC .

Но как только в контуре LC возникло колебание, оно передается через катушку L_1 на сетку, а колебание заряда в сетке вызывает колебание анодного тока, т. е. усиливает колебание тока в цепи LC (обратное воздействие сетки на контур LC), и т. д. Получаются незатухающие колебания в контуре LC .

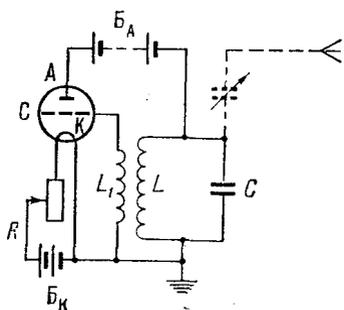


Рис. 257.

Катушка L_1 связывает работу лампы с колебательным процессом в контуре и обеспечивает автоматическую подачу энергии с частотой, равной частоте собственных колебаний контура. Таким образом, создана автоколебательная система.

§ 132. Электронная лампа как усилитель

Усилителем электромагнитных колебаний может служить триод. Схема включения триода для усиления электромагнитных колебаний, принятых антенной, показана на рис. 258. Принятые антенной слабые колебания усиливаются за счет энергии батареи B_A .

Ток от батареи B_A усиливается, когда сетка лампы заряжается положительно, и ослабляется, либо вовсе прекращается, когда сетка заряжается отрицательно. Так как сетка расположена близко к катодной нити, то незначительные изменения потенциала сетки, как результат колебания тока в антенне, создают колебания в цепи анода, синхронные колебаниям в антенне. Мощность этих колебаний зависит от мощности местного источника тока B_A .

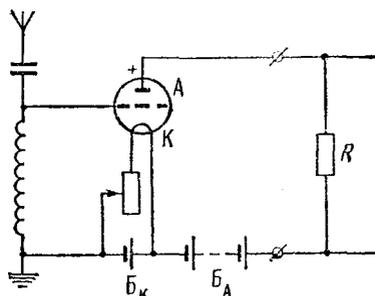


Рис. 258.

§ 133. Открытый колебательный контур. Излучение и прием электромагнитных волн. Скорость распространения электромагнитных волн

Цель превращения электроэнергии высокочастотного генератора в энергию электромагнитных колебаний контура — создание возможности передачи энергии в пространство без проводов, в виде электромагнитных волн. Однако это невозможно с по-

мощью закрытого колебательного контура, так как электрическое поле в нем сосредоточено в узком пространстве между обкладками конденсатора и излучение энергии в пространство весьма слабое.

Для увеличения излучения энергии в пространство необходимо раздвинуть обкладки конденсатора, т. е. перейти от закрытого колебательного контура к открытому—типа антенны с заземлением—рис. 259.

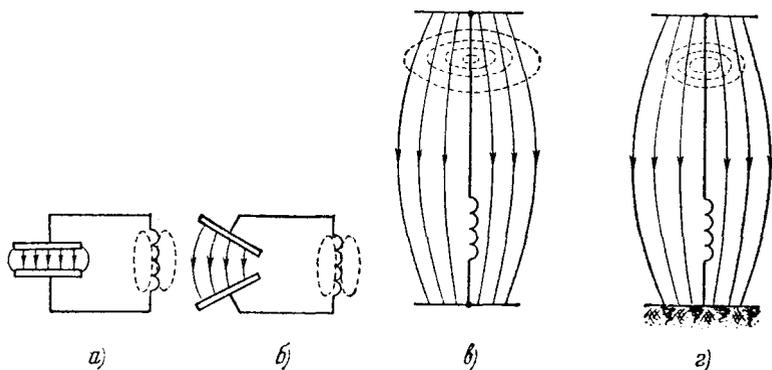


Рис. 259.

Для передачи в пространство непрерывно вырабатываемой энергии генератора с помощью незатухающих электромагнитных колебаний катушка

провода антенны индуктивно связана с высокочастотным генератором (рис. 260). Регулирование частоты собственных колебаний передающей антенны с целью излучения электромагнитных волн различной частоты производится включением в контур антенны либо конденсатора переменной емкости, либо катушки переменной индуктивности—вариометра.

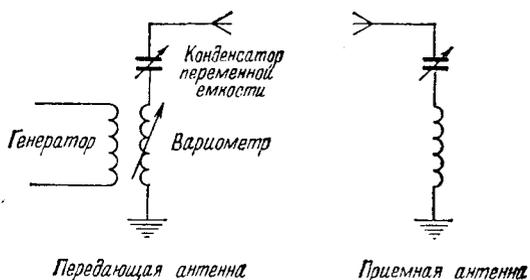


Рис. 260.

Прием электромагнитных волн также производится открытым колебательным контуром—антенной, совершенно подобным излучающему контуру (рис. 260).

Для хорошего приема необходимо, чтобы приемный колебательный контур был настроен в резонанс с передающим контуром, т. е. чтобы собственная частота колебаний контура приемной антенны была близка к частоте колебаний контура передающей антенны. Настройка производится конденсатором переменной емкости или катушкой переменной индуктивности.

§ 134. Шкала электромагнитных волн

Длина электромагнитных волн, к которым относятся радиоволны, инфракрасные, световые и ультрафиолетовые волны, рентгеновские и гамма-волны, варьируется в очень больших пределах—от ∞ до 10^{-10} мм. Укажем примерные границы для электромагнитных волн различной длины.

Радиоволны	имеют длину	30 км—0,1 мм (100 мк)
Инфракрасные волны	»	» 100 мк—0,7 мк
Световые	»	» 0,7 мк—0,4 мк
Ультрафиолетовые	»	» 0,4 мк—5 мк (50 Å)
Рентгеновские	»	» 50 Å —0,04 Å *)
Гамма-лучи	»	» 0,04 Å —1 икс-ед **)

Радиоволны имеют следующее примерное подразделение по длине:

длинные волны: $\lambda = 30—3$ км

средние волны: $\lambda = 3000—200$ м

короткие волны: $\lambda = 200—10$ м

ультракороткие волны (УКВ) $\lambda = 10$ м—1 мм. Скорость распространения электромагнитных волн, в том числе и радиоволн, в вакууме:

$$c = 300\,000 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Длина электромагнитной волны равна произведению скорости распространения волны на время одного периода:

$$\lambda = cT,$$

откуда период колебания волны

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

а частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}.$$

По этой формуле подсчитана частота колебаний радиоволн в диапазоне от 10 тысяч до 30 миллионов колебаний в секунду:

длинные волны: $\nu = 10 \div 100$ кГц ***)

средние волны: $\nu = 100 \div 1500$ кГц

короткие волны: $\nu = 1500 \div 30\,000$ кГц или $1,5 \div 30$ МГц

ультракороткие волны $\nu = 30 \div 300$ МГц

*) 1 Å (Ангстрем) = $\frac{1}{10}$ мкм = 1000 икс-ед.—допускается к применению

временно.

**) 1 икс-ед. = 10^{-13} м или одной десятичной миллимикрона (10^{-4} мкм).

***) Напоминаем, что: герц (Гц)—это одно колебание в секунду, килогерц (кГц)—тысяча колебаний в секунду, мегагерц (МГц)—миллион колебаний в секунду.

Как видно из формулы Томсона, для уменьшения периода колебаний, т. е. для увеличения частоты колебаний с целью создания высокочастотных волн, необходимо уменьшить емкость C и самоиндукцию L колебательного контура.

Уменьшение емкости достигается раздвиганием пластин конденсатора и уменьшением их площади. Уменьшение самоиндукции достигается уменьшением количества витков катушки самоиндукции. Дальнейшее увеличение частоты колебаний достигается переходом к прямолинейному проводнику (рис. 261),

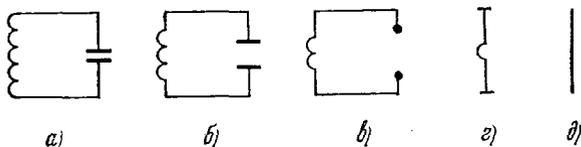


Рис. 261.

представляющему собой простейший вибратор, обладающий малыми емкостью и индуктивностью.

Скорость распространения электромагнитной волны в какой-либо среде меньше, нежели в вакууме, и равна

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с *) — скорость распространения электромагнитной волны в вакууме, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, μ — относительная магнитная проницаемость среды.

§ 135. Изобретение радио А. С. Поповым

Радио изобретено в 1895 г. профессором А. С. Поповым, первая радиограмма была им передана в 1896 г. В 1897 г. А. С. Попов ставил опыты по передаче радиосигналов на судах Балтийского флота. В 1899 г. А. С. Попов поддерживал радиосвязь при спасении севшего на камни у острова Гогланд броненосца. Тогда же впервые радио было использовано для спасения рыбаков, унесенных на льдине в море.

А. С. Попов — первый принял сигналы грозových разрядов, объяснил явление отражения радиоволн металлами и другими телами, проводящими ток, что впоследствии привело к созданию радиолокации.

*) Точнее $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с.

VII. ОПТИКА (СВЕТ)

§ 136. Источники света

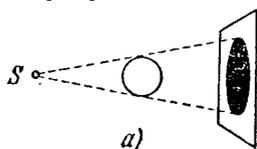
Источники света—тела, излучающие свет в окружающее пространство. Большую группу источников света составляют точечные источники света.

Точечным источником света называется источник света, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до места наблюдения.

§ 137. Прямолинейность распространения света

В однородной среде свет от светящейся точки распространяется прямолинейно*).

Прямолинейность распространения света приводит к тому, что за непрозрачными телами, освещенными одним точечным источником света, образуются тени, форма которых подобна форме тела, а размеры определяются взаимным расположением источника света, тела и экрана (рис. 262, а).



При освещении тела несколькими точечными источниками света (или источником света, обладающим конечными размерами, который можно рассматривать как ряд точечных источников света) на экране, расположенном по другую сторону тела, образуются (рис. 262, б) тени в тех местах экрана, до которых не доходят лучи ни одного точечного источника, и полутени в тех местах экрана, которые освещены не всеми, а только частью точечных источников света или частью пространственного источника света.

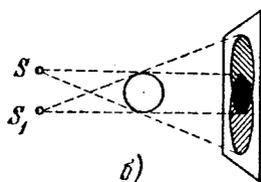


Рис. 262.

точечных источников света или частью пространственного источника света.

*) Закон прямолинейности распространения света нарушается вследствие «дифракции» света, имеющей место при его прохождении через очень малые отверстия и при встрече на пути световых лучей очень узких предметов, ширина которых соизмерима с длиной световой волны. Это явление здесь не рассматривается.

§ 138. Скорость света. Определение скорости света методом Майкельсона

Скорость распространения света в вакууме

$$c \approx 300\,000 \text{ км/с}$$

(точнее, по измерениям 1972 г. — 299 792,5 км/с). В различных прозрачных средах скорость света меньше; например, в воде 225 000 км/с, в стекле 200 000 км/с и т. д. В воздухе скорость света 299 711 км/с, т. е. немногим меньше скорости света в безвоздушном пространстве. Для практических расчетов скорость света в воздухе и в вакууме принимается:

$$c \approx 300\,000 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

При сравнении двух сред по скорости света — среда, в которой скорость света меньше, называется оптически более плотной средой.

Рассмотрим опыт Майкельсона, позволивший измерить скорость света с большой точностью. Схема измерения показана на рис. 263.

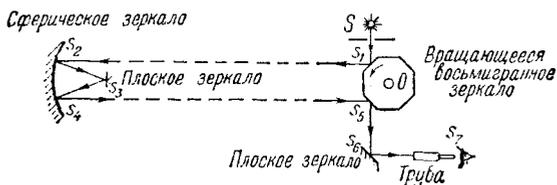


Рис. 263.

На горе I находилась восьмигранная зеркальная призма, которая при помощи моторчика приводилась во вращение вокруг оси O. Здесь же были установлены на одной линии источник света и подзорная труба.

На горе II система зеркал отражала полученный с горы I луч от источника таким образом, что он падал на другую грань зеркального восьмигранника и, отражаясь от нее, попадал в подзорную трубу и в глаз наблюдателя. Путь луча в этом положении призмы показан на рис. 263.

Наблюдатель S₇ видел через трубу свет только в том случае, если время прохождения светового луча от S₁ до S₂ в точности было равно времени, в течение которого середина грани S₁ или середина же другой грани призмы придет в точку S₅ падения луча, идущего с горы II, т. е. времени 1/8 (либо 2/8, 3/8 и т. д.) оборота зеркальной призмы. Если ко времени подхода луча в точку S₅ грань, на которую он попадает, будет расположена не под углом 45° к лучу, что будет иметь место в том

случае, когда время прохождения лучом расстояния $S_1—S_2—S_3—S_4—S_5$ не будет равно $1/8$ оборота призмы (также $2/8$, $3/8$ и т. д.), то отраженный луч пройдет не по направлению S_6 , а по какому-нибудь другому направлению, и не попадет в глаз наблюдателя.

Теоретически и в первом случае в глаз наблюдателя попадают только те лучи, которые падают на грани призмы, когда они расположены под углом 45° к падающему лучу $S—S_1$, то есть в глаз попадает прерывистый свет. Но время между подходом в точку соседних граней призмы значительно меньше времени сохранения глазом зрительного впечатления, и практически наблюдатель видит непрерывный свет.

Скорость света вычисляется, как частное от деления расстояний $S_1—S_5$ на время $1/8$ оборота зеркальной восьмигранной призмы.

Последняя установка Майкельсона была выполнена в 1926 г. В настоящее время существуют другие, более точные способы измерения скорости света.

ФОТОМЕТРИЯ

§ 139. Световой поток. Сила света

Потоком лучистой энергии называется количество лучистой энергии, проходящей через данную поверхность в одну секунду.

Одним из видов лучистой энергии является световое излучение источника. Оно характеризуется световым потоком и силой света источника.

Световым потоком (Φ) называется количество световой энергии, проходящей через данную поверхность и оцениваемой по производимому им на нормальный глаз световому ощущению.

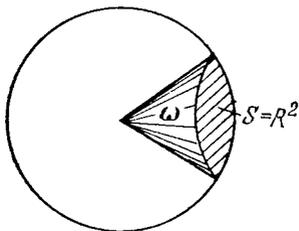


Рис. 264.

Силой света называется величина, измеряемая световым потоком, излучаемым источником в единицу телесного угла.

Единица силы света — кандела (кд)* принята за одну из шести основных единиц Международной системы единиц СИ. Системой СИ предусмотрены две дополнительные единицы: единица плоского угла — радиан (рад) и единица телесного угла — стерадиан (ср).

Радиан — угол между двумя радиусами круга, вырезающий на окружности дугу, длина которой равна радиусу.

*) Раньше называлась «свеча».

Стерadian (рис. 264)—*телесный угол, вершина которого находится в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную квадрату радиуса сферы.*

Так как поверхность шара — $4\pi R^2$, то телесный угол вокруг одной точки равен 4π стерадиан. (Подобно тому, как угол вокруг одной точки на плоскости равен 2π радиан.)

Единица светового потока люмен (лм)—*это световой поток внутри телесного угла в 1 стерадиан, испускаемый из вершины этого угла световым источником в 1 канделу, испускающим свет равномерно во все стороны.*

Световой поток связан с силой света соотношением

$$\Phi_{[\text{лм}]} = \omega I_{[\text{кд}]},$$

где I —сила света в [кд], ω —телесный угол в [ср].

Полный световой поток, т. е. световой поток при $\omega = 4\pi$:

$$\Phi_{\text{полн} [\text{лм}]} = 4\pi I_{[\text{кд}]}.$$

Одна кандела создает световой поток 4π люмен.

Физиологическое действие на глаз и, как результат, зрительное впечатление, определяющее силу света в [кд], от источников света одинаковой мощности, но различного спектрального состава—различно.

§ 140. Освещенность

Освещенностью поверхности (E) называется *световой поток, падающий на единицу площади этой поверхности.*

Единица освещенности—люкс (лк),—*освещенность такой поверхности, на квадратный метр которой падает световой поток в 1 люмен*

$$1 \text{ лк} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2}.$$

В системе СИ

$$1 \text{ лк} = 4\pi \text{ кд/м}^2.$$

Следовательно, освещенность в люксах

$$E_{[\text{лк}]} = \frac{\Phi_{[\text{лм}]}}{S_{[\text{м}^2]}} = 4\pi \frac{I_{[\text{кд}]}}{S_{[\text{м}^2]}}.$$

§ 141. Законы освещенности

Освещенность концентрических сферических поверхностей источником света, расположенным в их центре, обратно пропорциональна площадям этих поверхностей, следовательно, обратно пропорциональна квадратам их радиусов, т. е. квадратам расстояний освещаемых площадок от источника света.

При отклонении площадки на угол α от направления, перпендикулярного к направлению падающих лучей, когда угол

падения света на площадку $\alpha \neq 0$ (рис. 265), световой поток, падающий на эту площадку, уменьшается. Из рис. 258 видно, что этот поток Φ равен умноженному на $\cos \alpha$ световому потоку Φ_0 , падающему на ту же площадку, расположенную нормально к световым лучам, так как

$$AK = AC \cos \alpha = AB \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$E = E_0 \cos \alpha.$$

Из сказанного вытекают законы освещенности.

1-й закон освещенности. При освещении точечным источником света освещенность поверхности обратно пропорциональна квадрату ее расстояния от источника света (R^2).

Примечание. При освещении параллельными лучами освещенность не зависит от расстояния, если не принимать во внимание поглощение лучистой энергии средой, через которую проходит световой поток.

2-й закон освещенности. Освещенность поверхности пропорциональна косинусу угла падения лучей.

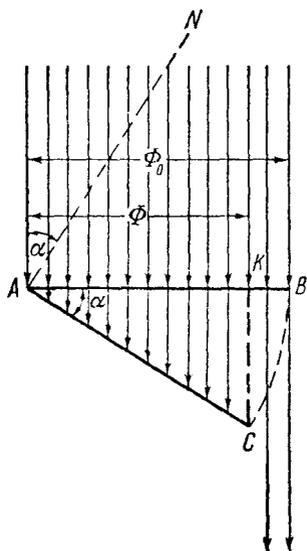


Рис. 265.

Кроме того, освещенность поверхности пропорциональна силе света I источника света (см. § 140).

Таким образом, в случае точечного источника света

$$E = \frac{I \cos \alpha}{R^2},$$

где E — освещенность поверхности, R — расстояние ее от источника света, α — угол падения (средний) световых лучей.

Освещенность является исходной величиной светотехнических расчетов, поскольку для каждого помещения, или пространства, существуют выработанные практикой нормы потребной освещенности в зависимости от назначения помещения. Например: для чтения требуется освещенность 50 лк, для очень тонких работ (гравирования, черчения), а также в цехах, где применяются мелкие режущие инструменты, — 100 лк и т. д.

По освещенности легко определяется сила света потребных световых источников:

$$I = \frac{ER^2}{\cos \alpha}.$$

§ 142. Сравнение силы света различных источников. Фотометры

Приборы для измерения силы света источника, а также для сравнения силы света различных световых источников называются фотометрами.

Сравнение силы света двух источников света производится путем создания этими источниками одинаковой освещенности

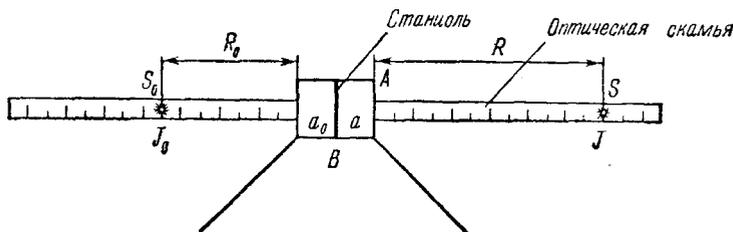


Рис. 266.

площадок, расположенных под одинаковыми углами к направлению световых лучей от обоих источников. В этом случае

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

т. е. силы света двух источников, создающих одинаковую освещенность одной и той же поверхности, прямо пропорциональны квадратам их расстояний от этой поверхности.

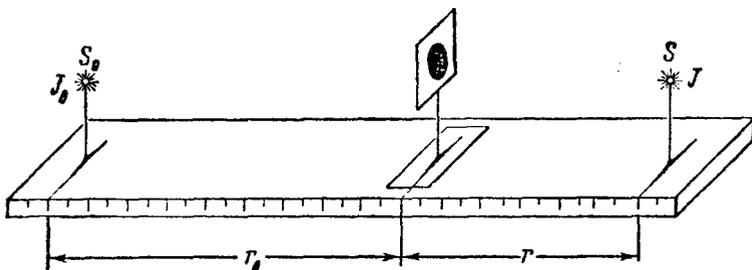


Рис. 267.

Если один из этих источников эталонный, сила света которого известна — I_0 , то сила света I сравниваемого с ним источника света

$$I = I_0 \frac{R^2}{R_0^2}.$$

Один из простейших фотометров — фотометр Жолли — схематически показан на рис. 266.

Сравниваемые источники света, испытуемый S и эталон S_0 , передвигаются по линейке с нанесенными на ней делениями до тех пор, пока парафиновые пластинки a_0 и a_1 , помещенные в светонепроницаемую коробку A и разделенные тонким листом станиоля, не окажутся освещенными одинаково. Наблюдение производится из окна B в светонепроницаемой коробке, защищающей глаз наблюдателя от непосредственного действия сравниваемых источников света.

Еще проще фотометр Бунзена (рис. 267). Бумажный экран с масляным пятном перемещают по линейке со шкалой до тех пор, пока масляное пятно, не «исчезнет». Это произойдет при одинаковой освещенности с обеих сторон экрана.

Примеры решения задач

Задача 175. Световая отдача электролампы в 100 кд составляет 15 лм/Вт. Определить мощность лампы и ее полный световой поток.

$$\eta = 15 \text{ лм/Вт}$$

$$I = 100 \text{ кд}$$

Найти N и Φ_0

Решение

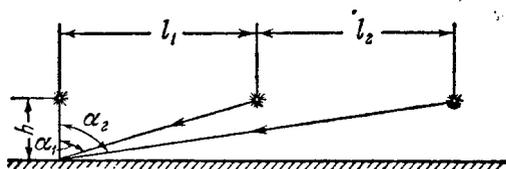
Полный световой поток:

$$\Phi_0 = 4\pi I, \quad \Phi_0 = 4\pi \cdot 100 = \underline{1256 \text{ лм.}}$$

Так как световая отдача $\eta = \frac{\Phi}{N}$, то мощность лампы

$$N = \frac{\Phi}{\eta}, \quad N = \frac{1256 \text{ лм}}{15 \text{ лм/Вт}} = \underline{83,7 \text{ Вт.}}$$

Задача 176. На трех столбах, расположенных на прямой на расстоянии $l = 50$ м один от другого, подвешены на высоте $h = 4$ м над уровнем земли



электролампы с силой света 1000 кд каждая. Определить освещенность в точке земли под крайним столбом.

Решение. Освещенность от лампы на первом столбе (рис. 268) на основании 1-го закона освещенности

Рис. 268.

$$E'_1 = \frac{I}{h^2}.$$

Освещенность от лампы на среднем столбе на основании 1-го и 2-го законов освещенности

$$E''_1 = \frac{I \cos \alpha_1}{r_1^2} = \frac{I}{r_1^2} \cdot \frac{h}{r_1} = \frac{Ih}{r_1^3} = \frac{Ih}{(l^2 + h^2)^{3/2}},$$

а от лампы на третьем столбе

$$E'''_1 = \frac{I \cos \alpha_2}{r_2^2} = \frac{Ih}{[(2l)^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{Ih}{(4l^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Полная освещенность под крайним столбом

$$E_1 = E_1' + E_1'' + E_1''' = \frac{I}{h^2} + \frac{Ih}{(l^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{Ih}{(4l^2 + h^2)^{3/2}} =$$

$$= Ih \left[\frac{1}{h^3} + \frac{1}{(l^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{1}{(4l^2 + h^2)^{3/2}} \right],$$

$$E_1 = 1000 \text{ кд} \cdot 4 \text{ м} \left[\frac{1}{4^3 \text{ м}^3} + \frac{1}{(50^2 + 4^2)^{3/2} \text{ м}^3} + \frac{1}{(4 \cdot 50^2 + 4^2)^{3/2} \text{ м}^2} \right] = \underline{64,4 \text{ лк.}}$$

Задача 177. Две электролампы — в 15 кд и 60 кд — расположены на расстоянии $l = 180$ см одна от другой. На каком расстоянии от меньшей лампы надо поместить между ними бумажный экран с масляным пятном, чтобы пятно стало невидимым?

Решение

Пятно будет невидимым, если величины освещенности с обеих сторон будут равны: $E_1 = E_2$, то есть

$$\frac{I_1}{l_1^2} = \frac{I_2}{(l - l_1)^2}.$$

Отсюда находим

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{\frac{I_2}{I_1} + 1}}, \quad l_1 = \frac{180 \text{ см}}{\sqrt{\frac{60}{15} + 1}} = \underline{60 \text{ см.}}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

При описании явлений геометрической оптики световые лучи изображаются прямыми линиями, совпадающими с осью светового пучка, которые называются световыми лучами. Это — чисто условное изображение, так как в действительности при безграничном сужении светового пучка наступает нарушение закона прямолинейного распространения света. Следовательно, световым лучом изображается хотя и достаточно узкий, но конечной ширины световой пучок.

§ 143. Законы отражения света

Все видимые тела отражают ту или иную часть падающего на них света. Законов отражения света два:

1. **Отраженный и падающий лучи лежат в плоскости, перпендикулярной к отражающей поверхности в точке падения луча.**

2. **Угол отражения равен углу падения.**

Угол падения — угол между падающим лучом и перпендикуляром (нормалью) к отражающей поверхности в точке падения луча: $\angle \alpha$ на рис. 269.

Угол отражения — угол между отраженным лучом и той же нормалью: $\angle \beta$ на рис. 269.

Следствием законов отражения света является обратимость светового луча при отражении света. Если луч, падающий по

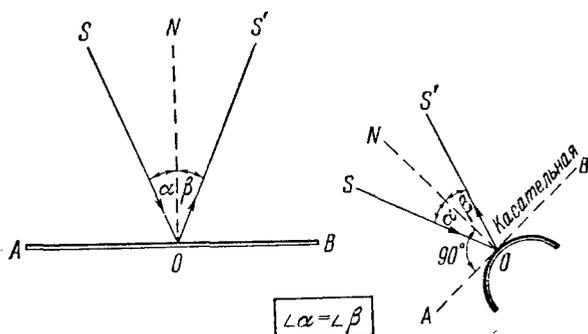


Рис. 269.

направлению SO , отражается по направлению OS' , то луч, падающий по направлению $S'O$, отразится по направлению OS .

§ 144. Построение изображения в плоском зеркале

Зеркалом называется поверхность, хорошо отражающая свет. Изображение светящейся точки в зеркале (или в линзе) находится на пересечении световых лучей или продолжений световых лучей, идущих из этой точки и попадающих в глаз наблюдателя.

Если попадающие в глаз лучи от светящейся точки не пересекаются,

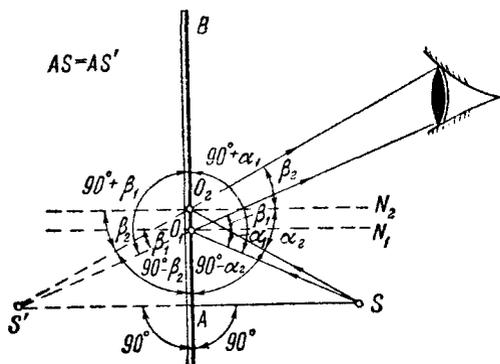


Рис. 270.

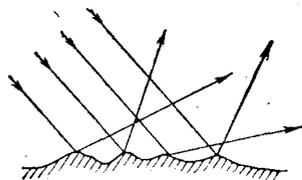


Рис. 271.

а пересекаются их продолжения, то изображение называется мнимым.

На рис. 270 построено изображение светящейся точки S в плоском зеркале AB . Для построения изображения достаточно взять, как видно из рис. 270, два луча SO_1 и SO_2 , падающие в точки O_1 и O_2 зеркала. Отраженные лучи не пересекаются, но пересекаются их продолжения в точке S' . Треугольники $\triangle SO_1O_2$ и $\triangle S'O_1O_2$ равны, так как O_1O_2 —общая их сторона,

$\angle SO_1O_2 (90^\circ + \alpha_1) = \angle S'O_1O_2 (90^\circ + \beta_1)$ и $\angle SO_2O_1 (90^\circ - \alpha_2) = \angle S'O_2O_1 (90^\circ - \beta_2)$. Следовательно, равны их высоты:

Изображение светящейся точки (предмета) в плоском зеркале мнимое и расположено симметрично светящейся точке (предмету).

Отражение от поверхности, не являющейся для данных лучей зеркалом, — рассеянное (диффузное) вследствие того, что падающие на такую поверхность лучи отражаются ее неровностями во все стороны (рис. 271).

§ 145. Построение изображения в сферических зеркалах. Фокус зеркала

Сферическое зеркало представляет собой тщательно отполированную поверхность шарового сегмента, отражающую световые лучи. Вогнутое зеркало (рис. 272) — шаровой сегмент с зеркальной внутренней поверхностью; выпуклое — с зеркальной внешней поверхностью. Назовем характерные точки, линии и плоскости сферического зеркала.

Центр сферической поверхности C называется оптическим центром зеркала. Средняя точка O зеркала называется полюсом зеркала. Нормаль к зеркальной поверхности, проведенная через полюс, называется главной оптической осью. Нормали к другим точкам зеркала называются побочными оптическими осями. Лучи, проходящие параллельно оптической оси, вблизи ее называются центральными лучами.

Точка F , в которой центральный луч SA , параллельный главной оптической оси, после отражения от зеркала пересекает главную оптическую ось, называется главным фокусом зеркала. Расстояние OF главного фокуса от полюса зеркала называется фокусным расстоянием зеркала и обозначается F .

Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно главной оптической оси, называется фокальной плоскостью.

Главный фокус вогнутого сферического зеркала лежит на середине радиуса зеркала:

$$F = \frac{1}{2} R.$$

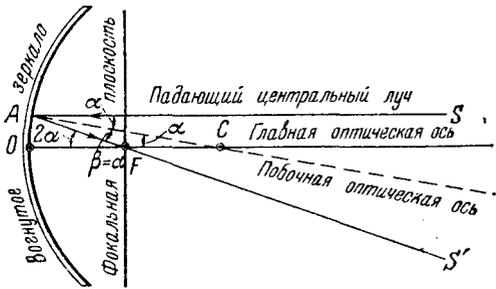


Рис. 272.

Фокус выпуклого зеркала — мнимый и лежит на главной оптической оси, за зеркалом, на расстоянии $F = \frac{R}{2}$ от полюса зеркала.

Положение светящейся точки и ее изображения в вогнутом сферическом зеркале связаны соотношением, которое носит название «формулы вогнутого сферического зеркала»:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Здесь (рис. 273) d — расстояние OS от полюса зеркала до светящейся точки, считая по главной оптической оси зеркала; f — расстояние OS' от полюса зеркала до изображения этой точки, считая также по главной оптической оси, F — фокусное расстояние OF .

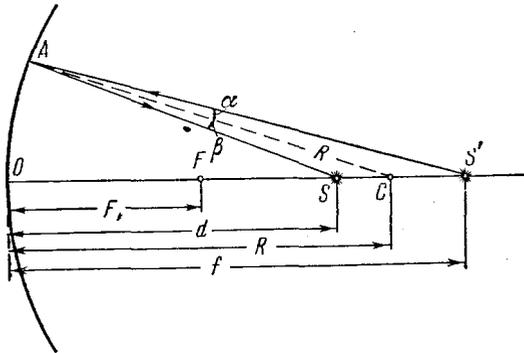


Рис. 273.

Формула выпуклого сферического зеркала имеет тот же вид (1), но расстояния, отсчитываемые от полюса зеркала за зеркало, т. е. расстояния до изображения, считаются отрицательными

$f < 0$. Из формулы зеркала следует, что в этом случае и $F < 0$: фокусное расстояние выпуклого зеркала отрицательное.

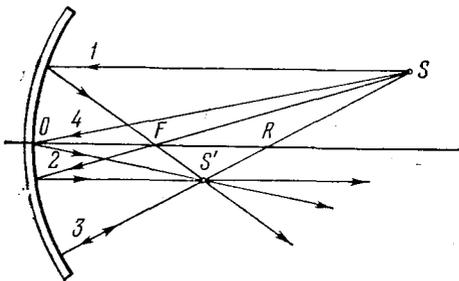


Рис. 274.

Из формулы (1) видно, что если источник света S перенести в точку S' , то его изображение перейдет в точку S .

Изображение точки в сферическом зеркале графически получается, как точка пересечения любых двух отраженных лучей либо их продолжений. В первом случае изображение действительное, во втором — мнимое. Удобно при построении изображения выбрать какие-нибудь два из следующих лучей (рис. 274):

1 — падающий луч параллелен оптической оси, отраженный проходит через главный фокус; это видно из формулы (1), в которой при $d = \infty$ $f = F$;

2 — падающий луч проходит через главный фокус; отраженный — параллельно главной оптической оси (вследствие обратимости падающего и отраженного лучей);

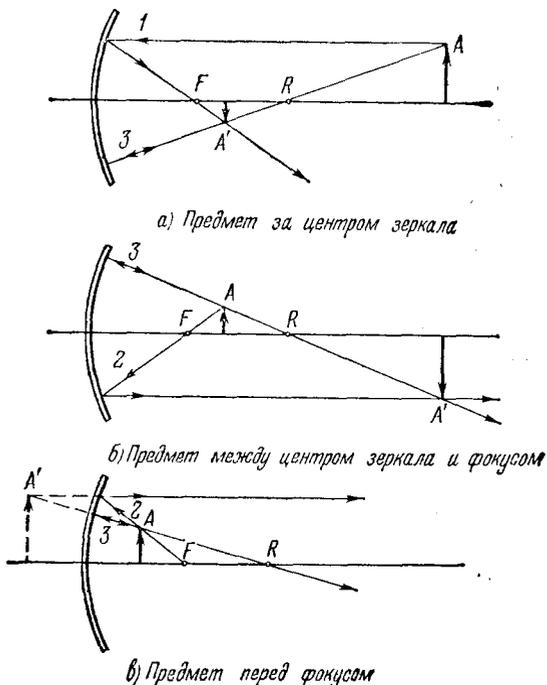


Рис. 275.

3 — падающий луч проходит через центр кривизны зеркала, т. е. по направлению побочной оптической оси; отраженный возвращается по тому же направлению, так как оптическая ось перпендикулярна к сферической поверхности зеркала (отсюда следует, что изображения светящихся точек, расположенных на оптических осях, находятся на тех же осях);

4 — падающий луч проходит через полюс зеркала; отраженный проходит симметрично относительно главной оптической оси.

Для построения изображения точки в сферическом зеркале достаточно, как сказано, любых двух из этих лучей.

Характер и положение изображения предмета в вогнутом сферическом зеркале (рис. 275):

а) Предмет — за центром зеркала ($d > 2F$); изображение — действительное, обратное и уменьшенное — находится между центром и фокусом ($F < f < 2F$).

б) Предмет — между центром кривизны зеркала и фокусом, изображение — действительное, обратное и увеличенное — находится за центром.

в) Предмет — между зеркалом и фокусом ($d < F$) изображение — мнимое, прямое и увеличенное — видно за зеркалом ($f < 0$).

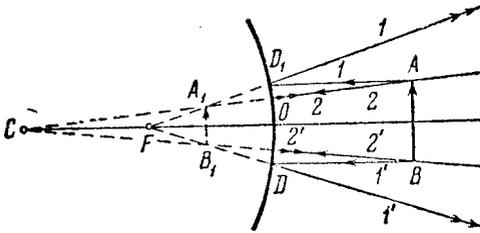


Рис. 276.

Некоторые частные случаи, которые легко обоснуются формулой (1): Предмет на очень большом расстоянии ($d \rightarrow \infty$), — лучи от предмета собираются в главном фокусе зеркала ($f = F$). Предмет в центре зеркала ($d = 2F$), изображение действительное, об-

ратное, на том же расстоянии от зеркала ($f = 2F$). Предмет в фокусе ($d = F$), — изображения не существует, оно уходит в бесконечность ($f = \infty$).

Изображение предмета в выпуклом сферическом зеркале (рис. 276) — мнимое, прямое и уменьшенное.

§ 146. Сферическая абберация

Приведенное в § 145 соотношение $F = \frac{1}{2} R$ (F — фокусное расстояние, R — радиус зеркала) не является точным. Оно тем точнее, чем ближе падающий центральный луч к главной оптической оси зеркала. В самом деле: например, для вогнутого сферического зеркала (рис. 275) в треугольнике AFC (рис. 272) $\angle \beta = \angle \alpha$ и $\gamma = \alpha$, т. е. $\beta = \gamma$; следовательно, $\triangle AFC$ равнобедренный, в нем $AF = FC$.

Фокусное расстояние: $OF \approx AF \cos \angle AFO = FC \cos 2\alpha = (R - OF) \cos 2\alpha$, т. е. $F \approx (R - F) \cos 2\alpha$, откуда

$$F = R \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = R \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha}$$

или

$$F = \frac{1}{2} R (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Сферическое зеркало, следовательно, собирает отраженные центральные лучи неточно в одну точку — фокус. Для вогнутого зеркала чем дальше падающий луч от оптической оси, тем отраженный луч дальше от фокуса; для выпуклого — наоборот.

Несхождение отраженных лучей в одну точку носит название сферической абберации зеркала. Сферическая абберация делает изображение расплывчатым. Уменьшение ее может быть достигнуто применением параболических зеркал, у которых радиус кривизны увеличивается по мере удаления точки поверх-

ности от полюса. Но так как изготовление параболических зеркал очень сложно, то сферическую aberrацию уменьшают обычно комбинированием собирательных и рассеивающих зеркал в единую оптическую систему.

Примеры решения задач

Задача 178. Предмет находился на расстоянии $d=20$ см от плоского зеркала. Затем его передвинули на $a=10$ см от зеркала и на $h=50$ см параллельно зеркалу. Каково было и каким стало расстояние между предметом и его изображением.

$d=20$ см
 $a=10$ см
 $h=50$ см

Найти l_1 и l_2

Решение

Расстояние изображения от плоского зеркала равно расстоянию предмета от зеркала. Следовательно,

$$l_1 = 2d = \underline{40 \text{ см.}}$$

Перемещение предмета параллельно зеркалу не изменяет расстояния между предметом и его изображением. Поэтому

$$l_2 = 2(d_1 + a) = 2(20 \text{ см} + 10 \text{ см}) = \underline{60 \text{ см.}}$$

Задача 179. Перед вогнутым зеркалом радиусом $R=40$ см помещен вертикальный стержень длиной $l=5$ см на расстоянии $d=30$ см от зеркала. На каком расстоянии от зеркала и какое получится изображение стержня? Какова его высота? Где надо поместить стержень, чтобы получить его мнимое изображение высотой $h_1=10$ см?

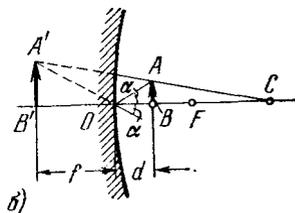
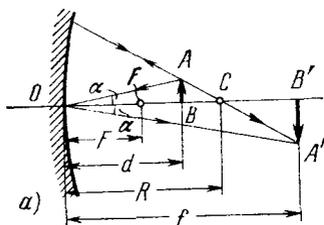


Рис. 277.

Решение. Фокусное расстояние зеркала: $F = \frac{1}{2}R = 20$ см. Подставим значения d и F в формулу вогнутого зеркала:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

Отсюда находим

$$f = \frac{Fd}{d-F}; \quad f = \frac{20 \cdot 30}{30-20} \text{ см} = \underline{60 \text{ см.}}$$

Так как стержень расположен между центром зеркала и фокусом, то (рис. 277, а) его изображение действительное ($f > 0$), прямое увеличенное.

Из подобия треугольников: $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ (рис. 277, а) находим увеличение

$$k = \frac{B'O}{BO} = \frac{f}{d} = \frac{60}{30} = 2.$$

Следовательно, высота изображения

$$h = kl = 2 \cdot 5 \text{ см} = \underline{10 \text{ см.}}$$

Теперь решим вторую часть задачи. Чтобы получить мнимое изображение, надо поместить стержень между зеркалом и фокусом. Увеличение должно быть равно

$$k_1 = \frac{h_1}{l} = \frac{10 \text{ см}}{5 \text{ см}} = 2.$$

Из подобия треугольников ($\triangle A'B'O \sim \triangle ABO$) на рис. 277, б имеем

$$k_1 = \frac{B'O}{BO} = \left| \frac{f}{d} \right| \quad (\text{где } f < 0).$$

Отсюда находим

$$f = -k_1 d = -2d.$$

Подставляем это значение f в формулу зеркала:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} = \frac{1}{2d};$$

отсюда находим

$$d = \frac{F}{2} = \underline{10 \text{ см.}}$$

Задача 180. Вертикальный стержень высотой $h=5$ см находится на расстоянии $d=60$ см от вершины выпуклого зеркала с радиусом $R=40$ см. Где будет изображение стержня и какое оно? Какова его высота?

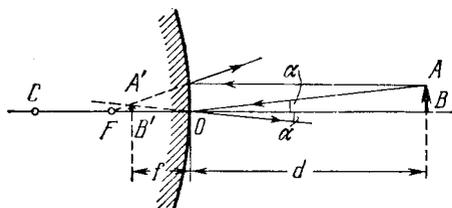


Рис. 278.

Решение. Изображение мнимое, прямое (рис. 278) Фокусное расстояние зеркала

$$F = -\frac{1}{2} R = -20 \text{ см.}$$

Из формулы зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ находим

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{60} = -\frac{1}{15}, \quad f = \underline{-15 \text{ см.}}$$

Увеличение (из подобия треугольников на рис. 278)

$$k = \left| \frac{f}{d} \right| = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

Высота изображения

$$h' = kh, \quad h' = \frac{1}{4} \cdot 5 \text{ см} = \underline{1,25 \text{ см.}}$$

Задача 181*. Точечный источник света помещен посередине между экраном и параллельным ему плоским зеркалом. Определить, во сколько раз освещенность экрана в точке, расположенной на перпендикуляре, проведенном из точечного источника света, больше, нежели она была бы при отсутствии зеркала. Потерями света при отражении от зеркала пренебречь.

Решение. При отсутствии зеркала освещенность данной точки была бы равна

$$E_1 = \frac{I}{r_2} = \frac{4I}{l^2}.$$

При наличии зеркала освещенность экрана равна сумме освещенностей E_1 и E_2 , где E_1 —освещенность светом, непосредственно падающим от источника света, E_2 —освещенность светом, отраженным от зеркала.

Расстояние мнимого изображения источника света до экрана

$$R = l + \frac{1}{2}l = \frac{3}{2}l.$$

В случае идеально отражающего зеркала световой поток источника света равен световому потоку его мнимого изображения: $\Phi_2 = \Phi_1$. Следовательно, и сила света $I' = I$, поскольку сила света представляет собой световой поток, отнесенный к единице телесного угла, а телесные углы, в которых распространяются потоки Φ_1 и Φ_2 , одинаковы. Освещенность данной точки отраженным светом

$$E_2 = \frac{I}{R^2} = \frac{I}{\frac{9}{4}l^2} = \frac{4I}{9l^2}.$$

Полная освещенность

$$E = E_1 + E_2 = \frac{4I}{l^2} + \frac{4I}{9l^2} = \frac{40I}{9l^2}.$$

Поэтому

$$\frac{E}{E_1} = \frac{40I}{9l^2} \cdot \frac{l^2}{4I} = \frac{10}{9}.$$

Задача 182*. Точечный источник света с силой света $I = 100$ кд помещен в фокусе прожектора с радиусом кривизны зеркала $R = 2$ м (рис. 279). На расстоянии 5 м от источника света расположен экран, плоскость которого перпендикулярна оптической оси прожектора.

Определить освещенность экрана в точке, лежащей на оптической оси прожектора, если потери световой энергии при отражении от зеркала оцениваются в 25% от всей падающей на зеркало световой энергии.

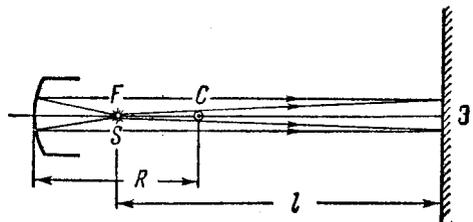


Рис. 279.

Решение. Освещенность в данной точке равна сумме двух освещенностей

$$E = E_1 + E_2,$$

где E_1 —освещенность светом, падающим непосредственно от источника света, E_2 —освещенность отраженным светом

$$E_1 = I/l^2;$$

$$E_2 = \frac{\Phi'}{\sigma} = \frac{(1-\alpha)\Phi}{\sigma},$$

где Φ' —световой поток, отраженный от зеркала прожектора, Φ —световой поток, падающий на зеркало от источника света, σ —малая площадка экрана в оптической оси прожектора.

Световой поток, падающий на соответствующую площадку прожектора:

$$\Phi = \omega I,$$

где ω — телесный угол, численно равный отношению поверхности сегмента шара радиусом, равным фокусному расстоянию $R/2$, к квадрату этого расстояния. При малой величине площадки σ площадь поверхности сегмента можно считать равной σ . Тогда

$$\omega = \frac{\sigma}{(R/2)^2} = \frac{4\sigma}{R^2}$$

и

$$E_2 = \frac{4(1-\alpha)I}{R^2}.$$

Полная освещенность

$$E = I \left[\frac{1}{l^2} + \frac{4(1-\alpha)}{R^2} \right], \quad E = 100 \left(\frac{1}{5^2} + \frac{3}{2^2} \right) = \underline{79 \text{ лк.}}$$

Задача 183*. Решить предыдущую задачу при условии, что источник света находится на расстоянии 1,5 м от прожектора.

Решение. Освещенность источником света по предыдущему

$$E_1 = \frac{I}{l^2} = \frac{100}{5^2} = 4 \text{ лк.}$$

Для определения освещенности отраженным светом надо найти расположение изображения источника света (рис. 280). Для этого воспользуемся формулой вогнутого зеркала

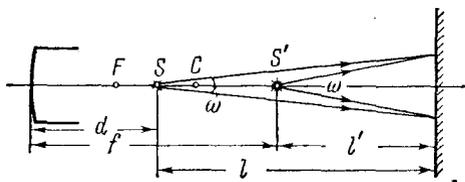


Рис. 280.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{l'}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{1}{1 \text{ м}} - \frac{1}{1,5 \text{ м}} = \frac{1}{3,0 \text{ м}}.$$

$$f = 3,0 \text{ м.}$$

Расстояние изображения источника света до экрана

$$l' = (f + d) - f = 5,0 + 1,5 - 3,0 = 3,5 \text{ м.}$$

С учетом потерь световой поток отраженного света $\Phi' = (1-\alpha)\Phi$, а сила света от изображения источника света

$$I' = \frac{(1-\alpha)\Phi}{\omega'}.$$

Учитывая малые величины телесных углов, находим

$$\frac{I'}{I} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{l}{l'}, \quad \text{откуда} \quad I' = I \frac{l}{l'}.$$

Освещенность центра экрана отраженным светом

$$E_2 = \frac{I'}{(l')^2} = \frac{Il}{(l')^3}, \quad E_2 = \frac{100 \cdot 5,0}{3,5^3} = 5,8 \text{ лк.}$$

Полная освещенность

$$E = E_1 + E_2 = 4,0 + 5,8 = \underline{9,8 \text{ лк.}}$$

§ 147. Законы преломления света. Показатель преломления

Преломление (рефракция) света имеет место при переходе светового пучка из одной среды в другую.

Световой пучок при падении на границу раздела двух сред разной оптической плотности распадается на два пучка — отраженный и преломленный. Часть световой энергии падающего света отражается от поверхности раздела с отраженным пучком, другая часть проникает через границу раздела во вторую среду с преломленным пучком. Преломление света подчиняется двум следующим законам.

1. Преломленный и падающий лучи лежат в плоскости, перпендикулярной к поверхности раздела двух сред в точке падения луча, т. е. в плоскости падения.

2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления (рис. 281) — величина постоянная для данных двух сред: оно равно относительному показателю преломления второй среды относительно первой

$$n_{2,1} = \frac{\sin \alpha}{\sin i}.$$

Угол преломления, подобно углам падения и отражения, отсчитывается от нормали (перпендикуляра) к поверхности в точке падения a луча.

Абсолютным показателем (коэффициентом) преломления, чаще — просто *показателем преломления вещества* называется *показатель преломления данного вещества (вторая среда) относительно безвоздушного пространства (первая среда), т. е. показатель преломления при переходе светового луча из вакуума в данное вещество*, — обозначается n — без индексов.

Так как абсолютный показатель преломления воздуха 1,0003 весьма близок к 1, то практически абсолютным показателем преломления вещества можно считать показатель преломления данного вещества относительно воздушной среды. Относительный показатель преломления одной среды относительно другой среды равен отношению их абсолютных показателей преломления

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

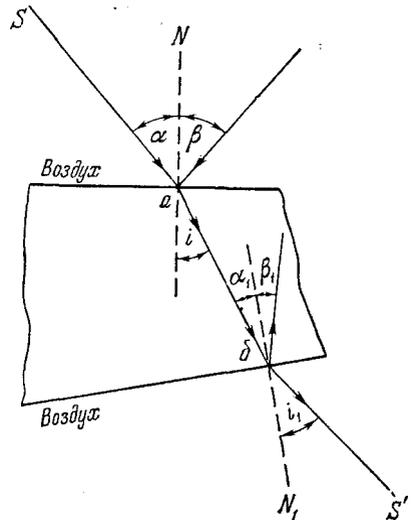


Рис. 281.

Следовательно,

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}$$

При преломлении света (как и при отражении) имеет место обратимость лучей. Свойство обратимости сохраняется и при многократных преломлениях (и отражениях), т. е. если луч Sa (рис. 281), преломившись в точке a , идет по направлению ab , затем, вторично преломившись в точке b , идет по направлению bS' , то луч, который пойдет по направлению $S'b$, пройдет весь тот же путь в обратном направлении $S'baS$. Чем среда оптически более плотная, тем ее показатель преломления больше; поскольку скорость света наибольшая в вакууме, абсолютный показатель преломления всегда больше 1.

Некоторые абсолютные показатели преломления.

Алмаз	2,4
Стекло «легкий крон», кварц, каменная соль, сахар	1,5
Стекло сорта «тяжелый флинт» (содержит примесь свинца) до	1,8*)
Вода	1,33 (лед—1,31)
Спирт	1,36

§ 148. Полное внутреннее отражение. Предельный угол

При прохождении света в различных граничащих средах доля отраженной от границы двух сред и прошедшей через эту границу энергии зависит от оптических свойств граничащих сред и от угла падения светового пучка. При угле падения 0° доля отраженной энергии — наименьшая. Она увеличивается с увеличением угла падения светового луча. Доля энергии, прошедшей через границу двух сред с преломленными лучами, уменьшается с увеличением угла падения.

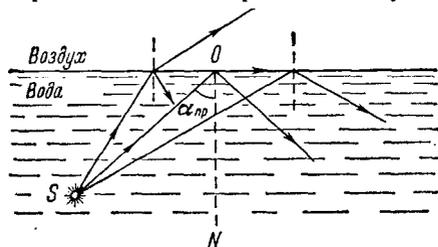


Рис. 282.

Если свет переходит из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную, например из воды в воздух (рис. 282), то угол преломления больше угла падения ($i > \alpha$) и достигает 90° , когда угол падения $\alpha < 90^\circ$. При этом угле падения преломленный луч скользит по поверхности раздела (луч SO на рис. 282). При дальнейшем увеличении угла падения α световой пучок не преломляется, а отражается от поверхности раздела внутрь оптически более плотной среды.

*) Показатель тем больше, чем большая примесь свинца в стекле.

Угол падения $\alpha_{\text{пр}}$, для которого угол преломления $i = 90^\circ$, называется предельным углом полного внутреннего отражения.

Отражение лучей, падающих на границу оптически менее плотной среды под углом, превышающим предельный угол ($\alpha_{\text{пр}}$) называется полным внутренним отражением.

Угол $\alpha_{\text{пр}}$ просто вычислить, если известен показатель преломления среды. Например, предельный угол при переходе из какой-нибудь среды в воздух получится из соотношения

$$n = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha_{\text{пр}}}, \text{ откуда } \sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n},$$

где n — показатель преломления данной среды. Следовательно, синус предельного угла — величина, обратная показателю преломления среды.

Предельные углы полного внутреннего отражения некоторых веществ.

Алмаз	$\alpha_{\text{пр}} = 24^\circ$
Вода	$\alpha_{\text{пр}} = 49^\circ$
Стекло «крон», кварц, каменная соль, сахар . . .	$\alpha_{\text{пр}} = 42^\circ$
Стекло «тяжелый флинт»	$\alpha_{\text{пр}} = 35^\circ$

Полное внутреннее отражение проявляется на границе воздушных пузырьков в воде, в блеске капель росы в солнечном свете, в блеске драгоценных камней, в образовании миражей (при переходе лучей света из более плотного слоя воздуха в менее плотный). Это явление используется при изготовлении прямоугольных призм полного внутреннего отражения (см. § 150).

§ 149. Ход лучей в плоскопараллельной пластинке

При падении на грань пластинки световой луч частично отражается, частично преломляется.

Преломленный луч выходит затем из пластинки параллельно падающему лучу с некоторым смещением (рис. 283). Предмет, рассматриваемый через такую пластинку, кажется смещенным относительно своего действительного положения (так как наблюдается на продолжении выходящего луча).

Из рис. 283 находим

$$h = AB \sin(\alpha - i),$$

где

$$AB = \frac{d}{\cos i}.$$

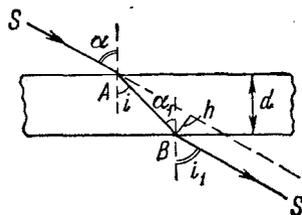


Рис. 283.

Следовательно, $h = d \cdot \frac{\sin(\alpha - i)}{\cos i} = d \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} i)$.

Из этого выражения и из рис. 283 видно, что смещение луча увеличивается с увеличением толщины пластинки d , показателя преломления вещества пластинки n и угла падения светового луча α .

§ 150. Ход лучей в призме

Луч света отклоняется треугольной призмой (рис. 284, а), состоящей из оптически более плотного вещества, нежели окружающая среда, в сторону основания призмы (рис. 284, б).

Изображение S' предмета S при рассмотрении его через такую треугольную призму — мнимое и отклонено к вершине преломляющего угла.

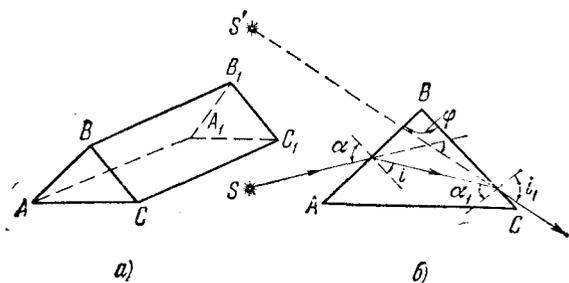
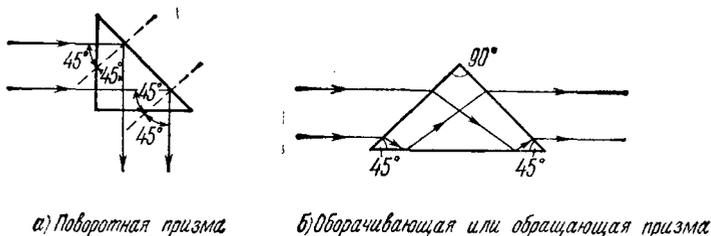


Рис. 284.



а) Поворотная призма

б) Оборачивающая или обращающая призма

Рис. 285.

Применяются прямоугольные призмы полного внутреннего отражения: а) *поворотная призма* (рис. 285, а) — для поворота луча на 90° (применяется, в частности, в призматических перископах); б) *оборачивающая, или обращающая призма* (рис. 285, б) — для переверота изображения на 180° (применяется, в частности, в полевых биноклях). Полное внутреннее отражение в этих призмах происходит вследствие того, что угол падения $\alpha = 45^\circ > \alpha_{\text{нр}} = 42^\circ$ (для стекла).

Стеклянные призмы полного внутреннего отражения по конструкции проще зеркал и имеют то преимущество, что дольше сохраняют свои отражающие свойства.

§ 151. Собирающие и рассеивающие линзы

Линза представляет собой прозрачное для света отшлифованное тело, ограниченное с двух сторон кривыми поверхностями, в частности одна из поверхностей может быть плоской.

Сферическими называются линзы, ограниченные с двух или с одной стороны шаровыми (сферическими) поверхностями.

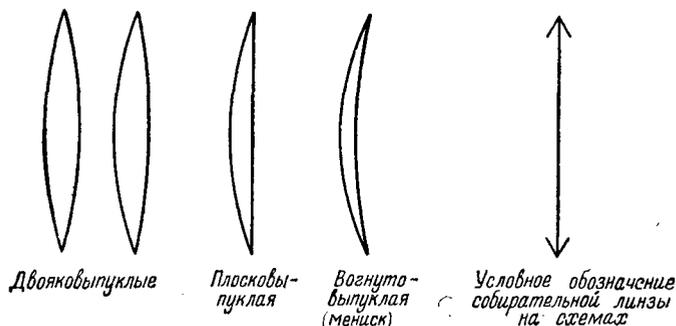


Рис. 286.

Собирающими называются линзы, превращающие падающий на них пучок параллельных лучей в пучок сходящихся лучей.

Собирающие—это выпуклые линзы, т. е. такие, у которых середина толще краев: двояковыпуклые, плосковыпуклые, вогнуто-выпуклые (рис. 286).

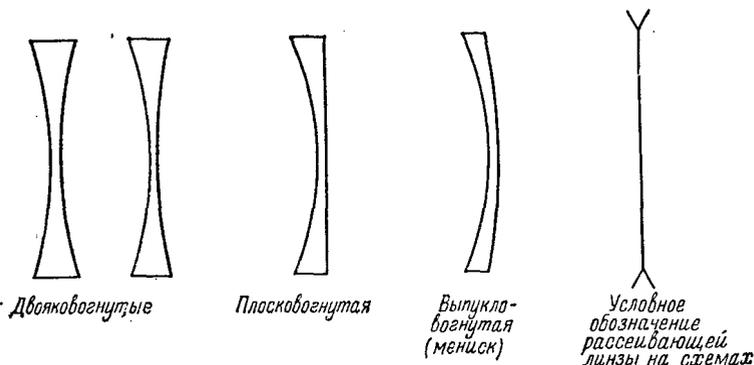


Рис. 287.

Рассеивающими называются линзы, превращающие пучок параллельных лучей в пучок расходящихся лучей.

Рассеивающие—это вогнутые линзы, т. е. такие, у которых края толще середины: двояковогнутые, плосковогнутые, выпукло-вогнутые (рис. 287).

Прямая, проходящая через центры S и S_1 сферических поверхностей линзы, называется главной оптической осью (рис. 288).

Расположенная в линзе на ее оптической оси точка O , через которую луч света проходит, не меняя своего направления, называется оптическим центром линзы.

Всякая прямая, проходящая через оптический центр линзы под углом к главной оптической оси, называется побочной оптической осью.

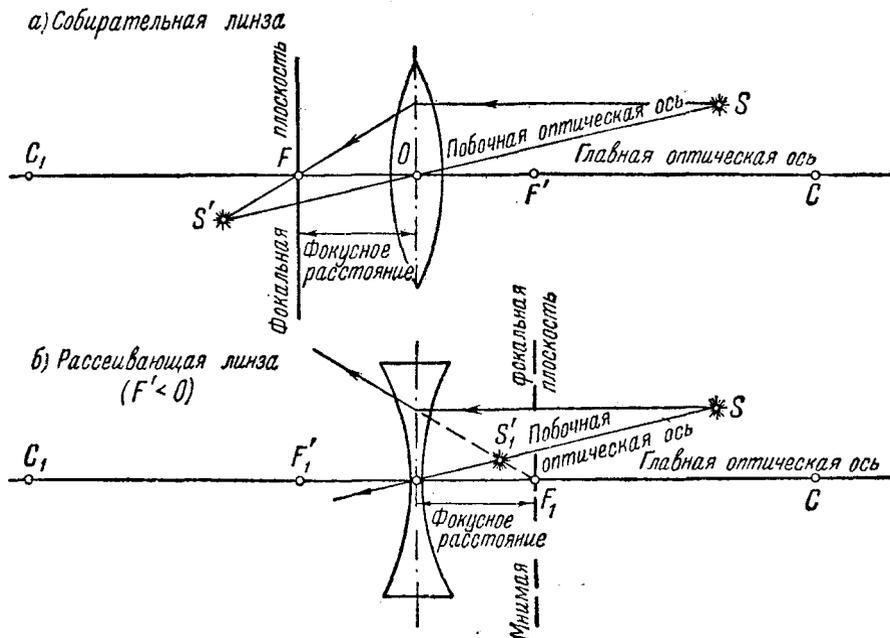


Рис. 288.

Точка F на главной оптической оси собирающей линзы, в которой собираются лучи, падающие на линзу параллельно ее главной оптической оси, называется главным фокусом.

Точка F' на главной оптической оси рассеивающей линзы, в которой пересекаются продолжения преломленных в линзе расходящихся лучей, падающих на нее параллельно главной оптической оси, называется мнимым фокусом линзы. В каждой линзе имеются два фокуса, лежащие по обе ее стороны.

Расстояние от линзы до фокуса называется фокусным расстоянием линзы. Условились фокусное расстояние собирающей линзы считать положительным, рассеивающей — отрицательным.

Плоскости, проходящие через фокусы линзы перпендикулярно к главной оптической оси, называются фокальными плоскостями.

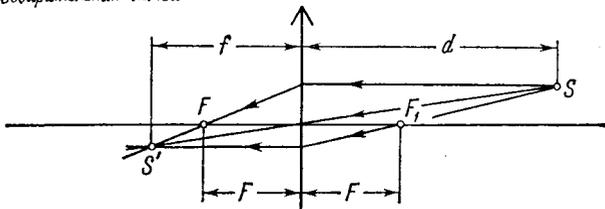
§ 152. Формула линзы *). Оптическая сила линзы

Формула линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

где (рис. 289), так же как и для зеркала: d — расстояние от светящейся точки до оптического центра линзы, считая по главной оптической оси, f — расстояние от изображения светящейся точки

а) Собирающая линза



б) Рассеивающая линза

$$F' < 0, f < 0$$

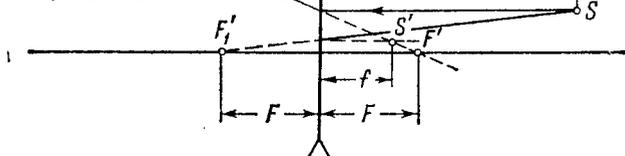


Рис. 289.

до оптического центра линзы, считая также по главной оптической оси, F — фокусное расстояние линзы — положительное для собирающей линзы и отрицательное для рассеивающей.

Из формулы линзы (1) видно, что светящаяся точка и ее изображение обладают свойством переместимости, т. е. являются сопряженными точками.

Формула (1) выпуклой линзы аналогична формуле вогнутого зеркала.

Величина, обратная фокусному расстоянию линзы, выраженному в метрах, называется оптической силой линзы и выражается в диоптриях:

$$D_{\text{диоптрий}} = \frac{1}{F_{\text{метров}}}.$$

*) Формулы и рассуждения данного и следующего параграфов не относятся к случаю, когда на линзу падает сходящийся световой лучок, но могут быть применимы и к этому случаю, если считать источник света «мнимым» источником, расположенным в точке пересечения лучей сходящегося пучка.

Единица оптической силы — диоптрия — оптическая сила такой линзы, фокусное расстояние которой $F = 1$ м.

Оптическая сила линзы вычисляется по формуле

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где n — показатель преломления вещества линзы относительно среды, в которой линза расположена, R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы, — считаются положительными для выпуклых поверхностей, отрицательными — для вогнутых.

Из этой формулы видно, что оптическая сила собирающей линзы имеет положительный знак, рассеивающей — отрицательный.

§ 153. Построение изображения в линзах

Изображение точки в линзе графически получается как точка пересечения двух преломленных лучей. Удобно для построения выбрать какие-нибудь два из следующих лучей (аналогично сферическому зеркалу) — рис. 290.

1 — падающий луч параллелен главной оптической оси; преломленный проходит через главный фокус (при $d = \infty$ $f = F$);

2 — падающий проходит через главный фокус; преломленный — параллельно главной оптической оси;

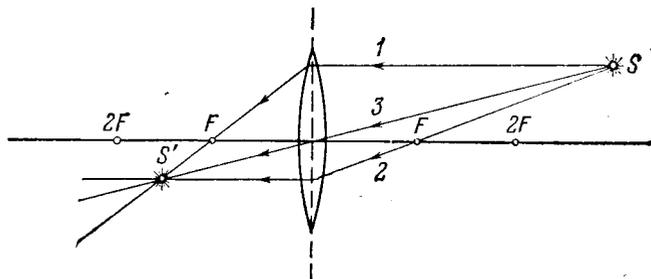


Рис. 290.

3 — луч, проходящий через оптический центр линзы, не меняет своего направления, так как у оптического центра грани линзы параллельны. Теоретически этот луч, сохраняя свое направление, как при прохождении через плоскопараллельную пластинку, несколько смещается, но при малых толщинах линз это смещение столь мало, что практически его можно не учитывать и считать, что изображения светящихся точек, расположенных на оптических осях линзы, находятся на тех же осях.

При построении изображения линза считается очень тонкой. Практически можно преломлять лучи на плоскости, проведенной через оптический центр линзы перпендикулярно к главной

оптической оси. При этом удобно пользоваться условным изображением линзы (рис. 286 и 287).

Направление третьего из показанных на рис. 290 лучей есть не что иное, как побочная оптическая ось. Светящаяся точка,

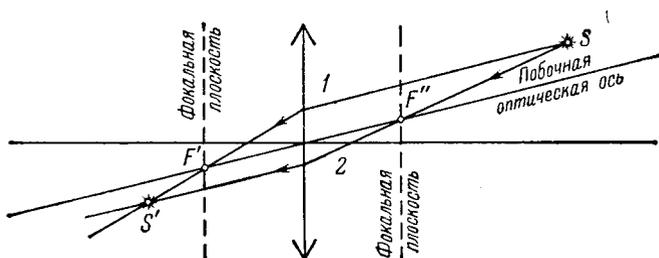


Рис. 291.

расположенная на любой оптической оси, дает изображение на этой же оси.

Показанный на рис. 291 способ построения изображения в линзах представляет собой частный случай общего способа построения с помощью побочных оптических осей, т. е. с помощью

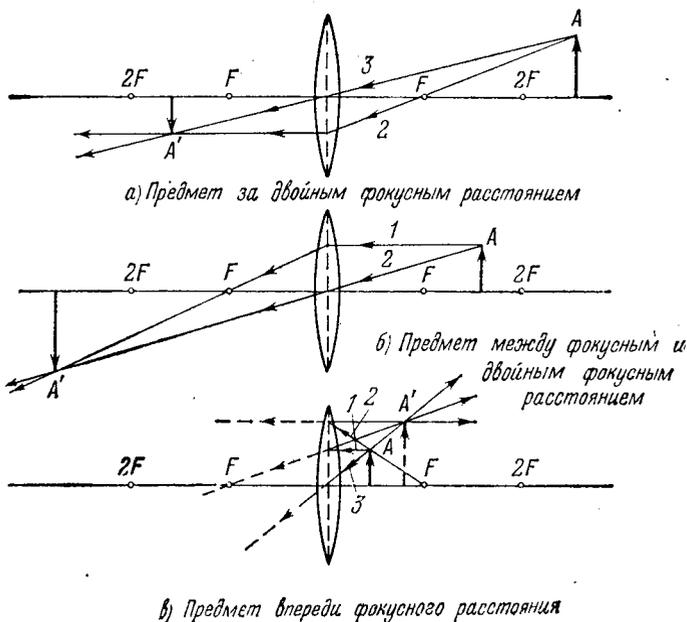


Рис. 292.

оптических осей любого направления. Проводится побочная оптическая ось любого направления. Через светящуюся точку прово-

дится луч, параллельный этой побочной оптической оси. Преломленный луч пройдет через точку пересечения F' побочной оптической оси с фокальной плоскостью. Второй луч проводится через точку F'' пересечения побочной оптической оси с другой фокальной плоскостью. Преломленный луч пойдет параллельно данной побочной оптической оси.

Этот общий способ позволяет построить изображение любой точки, в том числе точки, расположенной на главной оптической оси.

О характере и положении изображения предмета в выпуклой линзе можно судить по рис. 292.

а) Предмет — за двойным фокусным расстоянием линзы ($d > 2F$, например, при фотографировании). Изображение — действительное, обратное и уменьшенное — находится с другой стороны линзы между фокусом и точкой на двойном фокусном расстоянии ($F < f < 2F$).

б) Предмет — между точкой на двойном фокусном расстоянии и фокусом (положение в проекционном фонаре). Изображение — действительное, обратное и увеличенное — находится с другой стороны линзы за двойным фокусным расстоянием.

в) Предмет между фокусом и линзой ($d < F$). Изображение — мнимое, прямое и увеличенное — находится с той же стороны линзы, что и предмет ($f < 0$).

Некоторые частные случаи (см. формулу (1) § 152). Предмет — на очень большом расстоянии ($d \rightarrow \infty$); лучи от предмета собираются в главном фокусе линзы ($f = F$). Предмет — на двойном фокусном расстоянии ($d = 2F$), изображение действительное, обратное и равное по величине предмету, находится с другой стороны

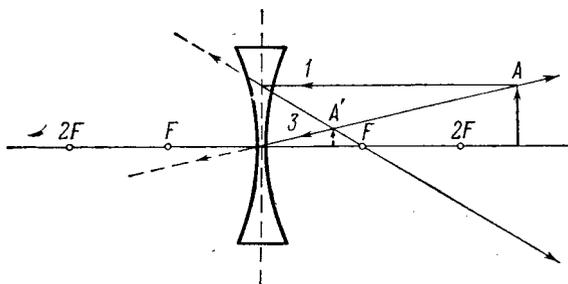


Рис. 293.

линзы на том же двойном фокусном расстоянии ($f = 2F$). Предмет — в фокусе ($d = F$), — изображения не существует, оно «уходит» в бесконечность ($f \rightarrow \infty$).

Изображение в рассеивающей линзе (рис. 293) — мнимое, прямое, уменьшенное; находится всегда с той же стороны линзы, что и предмет.

Отношение линейных размеров изображения предмета в линзе h к линейным размерам предмета H называется увеличением линзы (k):

$$k = \frac{h}{H} = \left| \frac{f}{d} \right|.$$

Эта формула просто выводится из подобия треугольников по любой из схем на рис. 292 и 293.

Примеры решения задач

Задача 184. Определить, на какой угол отклоняется узкий световой пучок от своего первоначального положения при переходе из стекла в воздух, если угол падения $\alpha_1 = 30^\circ$. То же при угле падения $\alpha_2 = 45^\circ$. (Показатель преломления стекла $n = 1,5$.)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 30^\circ \\ \alpha_2 &= 45^\circ \\ n &= 1,5 \end{aligned}$$

Найти β_1 и β_2

Решение

При переходе из стекла в воздух световой пучок отклоняется от перпендикуляра к поверхности раздела, — угол преломления больше угла падения (рис. 294, а).

Из равенства $n = \frac{\sin i}{\sin \alpha}$ находим $\sin i = n \sin \alpha$. При $\alpha_1 = 30^\circ$ (рис. 294, а).
 $\sin i_1 = 1,5 \sin \alpha_1 = 1,5 \sin 30^\circ = 0,75$. Угол $\beta_1 = i_1 - \alpha_1$; следовательно, $\sin \beta_1 =$

$$= \sin i_1 \cos \alpha_1 - \cos i_1 \sin \alpha_1 = 0,75 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} -$$

$$- \sqrt{1 - 0,75^2} \cdot \frac{1}{2} = 0,32, \text{ откуда } \beta_1 = \arcsin 0,32.$$

При сравнительно малых углах можно приблизительно считать

$$\beta_1 \approx 0,32 \text{ рад} = 0,32 \frac{180^\circ}{\pi} = \underline{18^\circ 20'}.$$

(По таблицам $\beta_1 = 18^\circ 40'$.)

При $\alpha_2 = 45^\circ$ (рис. 294, б) $\sin i_2 = 1,5 \sin \alpha_2 =$
 $= 1,5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,06$, что невозможно. Очевид-

но, заданный угол падения превышает предельный угол полного внутреннего отражения. В самом деле:

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,5} = 0,667, \text{ откуда } \alpha_{\text{пр}} = 42^\circ < 45^\circ.$$

Следовательно, в этом случае будет иметь место полное внутреннее отражение и

$$\beta_2 = 2\alpha_2 = 2 \cdot 45^\circ = \underline{90^\circ}.$$

Задача 185. Пучок параллельных лучей шириной $b = 20$ см проходит в стекле под углом $\varphi = 60^\circ$ к его плоской грани. Определить ширину пучка после перехода его в воздух через эту грань. (Показатель преломления стекла $n = 1,8$.)

Решение. $b_1 = AB \cos i$ (рис. 295). Величина $AB = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{b}{\sin \varphi}$, где α — угол падения.

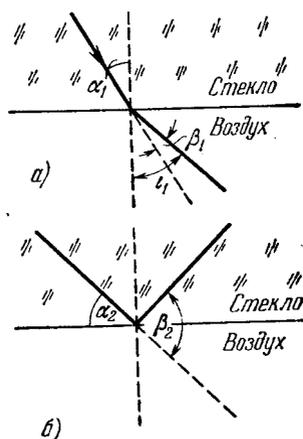


Рис. 294.

Следовательно,

$$b_1 = b \frac{\cos i}{\sin \varphi}.$$

Здесь

$$\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}, \quad \text{а} \quad \frac{\sin i}{\sin \alpha} = n,$$

т. е.

$$\sin i = n \sin \alpha = n \cos \varphi;$$

отсюда,

$$\cos i = \sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varphi}.$$

Поэтому

$$b_1 = b \frac{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi}, \quad b_1 = 20 \text{ см} \frac{1 - 1,8^2 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{3/2}} = \underline{10,1 \text{ см.}}$$

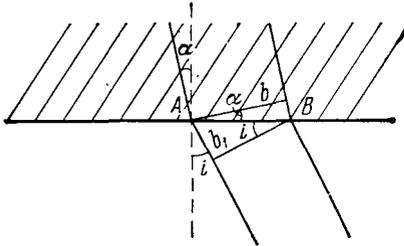


Рис. 295.

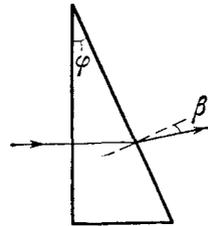


Рис. 296.

Задача 186. Монохроматический луч падает на вертикальную грань стеклянной призмы, у которой поперечное сечение прямоугольный треугольник. Преломляющий угол призмы $\varphi = 30^\circ$. Найти угол отклонения луча, вышедшего из призмы, от его первоначального направления, если луч падает перпендикулярно к грани. (Показатель преломления $n = 1,5$.)

Решение. Из рис. 296 видно, что $\beta = \alpha_1 - i_1$.

Угол преломления найдем из равенства

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin i_1}; \rightarrow \sin i_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n}.$$

Так как $\alpha_1 = \varphi$, то

$$\sin i_1 = \frac{\sin \varphi}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{1,5} = \frac{1}{3},$$

$$i_1 = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Поэтому угол отклонения

$$\beta = 30^\circ - \arcsin \frac{1}{3}.$$

Полагая $\arcsin \frac{1}{3} \approx \frac{1}{3} = \frac{180^\circ}{3\pi} = 19,1^\circ$, найдем

$$\beta \approx 30^\circ - 19,1^\circ = \underline{10,9^\circ}.$$

Задача 187. Решить предыдущую задачу, если угол падения луча на вертикальную стенку призмы $\alpha = 30^\circ$, для двух случаев: а) когда направление луча снизу вверх и б) сверху вниз.

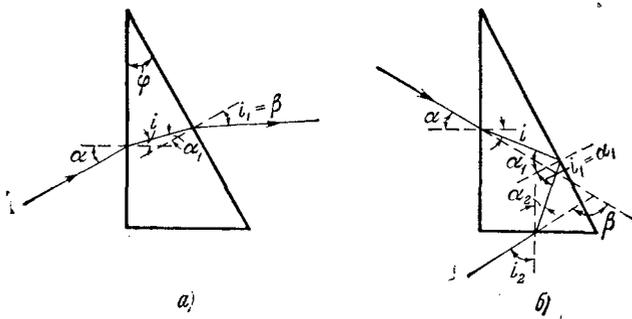


Рис. 297.

Решение. *Случай (а)* — рис. 297, а.

Угол преломления при переходе луча из воздуха в призму на ее вертикальной грани найдется из условия

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin i}; \rightarrow \sin i = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{1}{2 \cdot 1,5} = \frac{1}{3}.$$

Угол падения на наклонную грань призмы:

$$\alpha_1 = \varphi - i;$$

$$\sin \alpha_1 = \sin(\varphi - i) = \sin \varphi \cos i - \cos \varphi \sin i = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0,183.$$

Далее, из условия $n = \frac{\sin i_1}{\sin \alpha_1}$ находим

$$\sin i_1 = n \sin \alpha_1 = 1,5 \cdot 0,183 = 0,275,$$

откуда

$$i \approx 0,275 = \frac{180^\circ}{0,275\pi} = 20,8^\circ.$$

Так как перпендикуляр к наклонной грани призмы имеет направление, параллельное падающему лучу, то угол отклонения

$$\beta_a = i_1 \approx \underline{20,8^\circ}.$$

Случай (б) — рис. 297, б.

Как и в случае (а), $\sin i = 1/3$. Угол падения на наклонную грань призмы: $\alpha_1 = \varphi + i$;

$$\sin \alpha_1 = \sin \varphi \cos i + \cos \varphi \sin i = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}}{6} = 0,758.$$

Далее, как и в предыдущем случае,

$$\sin i_1 = n \sin \alpha_1 = 1,5 \cdot 0,758 > 1,$$

что невозможно.

Значит, при падении луча на наклонную грань имеет место полное внутреннее отражение

$$i_1 = \alpha_1.$$

Угол падения отраженного луча на нижнюю горизонтальную грань: $\alpha_2 = 90^\circ - (2\alpha_1 - i)$,

$$\sin \alpha_2 = \cos(2\alpha_1 - i) = \cos 2\alpha_1 \cos i + \sin 2\alpha_1 \sin i =$$

$$= (1 - 2 \cdot 0,758^2) \sqrt{1 - \frac{1}{9}} + 2 \cdot 0,758 \sqrt{1 - 0,758^2} \cdot \frac{1}{3} = 0,19.$$

Далее, из равенства $n = \frac{\sin i_2}{\sin \alpha_i}$ находим

$$\sin i_2 = n \sin \alpha_2 = 1,5 \cdot 0,19 = 0,285, \quad \text{откуда} \quad i_2 \approx 0,285 = \frac{180^\circ \cdot 0,285}{\pi} = 16,3^\circ.$$

Угол отклонения, как видно из рисунка:

$$\beta_6 = 90^\circ - \alpha + i_2 = 90^\circ - 30^\circ + 16,3^\circ = \underline{76,3^\circ}.$$

Задача 188. Светящийся предмет находится на расстоянии $l = 420$ см от экрана. Где надо поместить собирательную линзу, чтобы получить 20-кратное увеличение предмета? Какова должна быть величина оптической силы линзы?

Решение. Положение линзы будем определять ее расстоянием f до экрана.

Запишем формулу линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. Если выразить фокусное расстояние в метрах, то $\frac{1}{F} = D$ диоптрий и тогда

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \quad (1)$$

По условию задачи

$$l = d + f. \quad (2)$$

Увеличение линзы:

$$k = \frac{f}{d}. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), найдем

$$f = l \frac{k}{k+1}, \quad f = 420 \text{ см} \frac{20}{21} = 400 \text{ см}.$$

Расстояние линзы от экрана

$$\underline{f = 4 \text{ м.}}$$

Оптическая сила линзы по формуле (1):

$$D = \frac{k}{f} + \frac{1}{f} = \frac{k+1}{f}, \quad D = \frac{20+1}{4} = \underline{5,25 \text{ диоптрий.}}$$

Задача 189. Предмет высотой $h = 40$ см находится на расстоянии $d = 1$ м от вертикально расположенной рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -25$ см. Определить, где находится изображение предмета, и высоту изображения. Найти оптическую силу линзы.

Решение. Из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

найдем

$$f = \frac{Fd}{d-F}.$$

Расстояние изображения от линзы

$$f = \frac{-0,25 \cdot 1,0}{1,0 + 0,25} \text{ м} = -\frac{1}{5} \text{ м} = \underline{\underline{-20 \text{ см}}}$$

(изображение мнимое).

Высота изображения

$$h' = hk = h \left| \frac{f}{d} \right| = 0,40 \text{ м} \frac{0,20}{1,0} = \underline{\underline{0,08 \text{ м} = 8 \text{ см}}}$$

Оптическая сила линзы

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{-0,25 \text{ м}} = \underline{\underline{-4 \text{ диоптрии}}}$$

Задача 190*. Собирательная линза дает изображение предмета, увеличенное в 5 раз. Экран придвинули к предмету на 50 см; затем переместили линзу так, что предмет на экране получился в натуральную величину. Найти оптическую силу линзы и первоначальное расстояние между предметом и экраном.

Решение. Если все линейные величины выражены в метрах, то можно записать следующие равенства:

а) До перестановки экрана и линзы

$$D = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{l_1 - d_1}, \quad (1)$$

$$k_1 = \frac{l_1 - d_1}{d_1}. \quad (2)$$

б) После перестановки

$$D = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{l_1 - 0,50 - d_2}, \quad (3)$$

$$k_2 = \frac{l_1 - 0,50 - d_2}{d_2}. \quad (4)$$

Имеем 4 уравнения с 4 неизвестными: D , d_1 , d_2 и l_1 . Из этих уравнений надо исключить d_1 и d_2 . Это можно сделать, например, с помощью уравнений (2) и (4).

Из уравнения (2) $d_1 = \frac{l_1}{k_1 + 1}$.

Из уравнения (4) $d_2 = \frac{l_1 - 0,50}{k_2 + 1}$.

Подставляя эти значения d_1 и d_2 в уравнения (1) и (3), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, которые требуется определить:

$$D = \frac{(k_1 + 1)^2}{k_1 l_1}, \quad (5)$$

$$D = \frac{(k_2 + 1)^2}{(l_1 - 0,50) k_2}. \quad (6)$$

Приравняв правые части этих равенств, найдем

$$l_1 = 0,50 \frac{k_2 (k_1 + 1)^2}{k_2 (k_1 + 1)^2 - k_1 (k_2 + 1)^2}, \quad l_1 = 0,50 \frac{1 \cdot 6^2}{1 \cdot 6^2 - 5 \cdot 2^2} = \frac{9}{8} \text{ м}.$$

$$l_1 = \underline{\underline{1,125 \text{ м}}}$$

Оптическая сила линзы на основании (5):

$$D = \frac{6^2}{5l_1}, \quad D = \frac{36}{5 \cdot \frac{8}{9}} = \underline{6,4 \text{ диоптрий.}}$$

Для проверки найдем оптическую силу линзы из (6):

$$D = \frac{2^2}{\frac{9}{8} - 0,50} = \underline{6,4 \text{ диоптрии.}}$$

Задача 191*. Выпукло-вогнутая рассеивающая линза, у которой радиусы поверхностей $R_1 = 80$ см и $R_2 = 16$ см, сделана из стекла с показателем преломления $n = 1,8$. Найти оптическую силу линзы.

Решение. Так как по условию линза рассеивающая, то ее толщина от центра к краям увеличивается. Значит, вогнутая поверхность линзы имеет меньший радиус, которому надо приписать знак $(-)$, т. е. $R_2 = -0,16$ м. Тогда

$$D = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1,8-1) \left(\frac{1}{0,80} - \frac{1}{0,16} \right) = \underline{-4 \text{ диоптрии.}}$$

Задача 192. Экран освещается источником света в 100 кд, расположенным в фокусе линзы с оптической силой $D = +0,5$ диоптрии. Линза находится между источником света и экраном (рис. 298). Определить освещенность в центре экрана. Поглощением света линзой пренебречь.

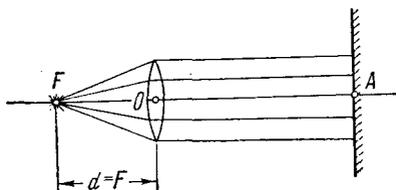


Рис. 298.

Решение. Освещенность в точке А экрана равна освещенности линзы в точке О.

Фокусное расстояние линзы

$$F = \frac{1}{D} = \frac{1}{0,5} = 2,0 \text{ м.}$$

Освещенность в центре экрана

$$E = E_0 = \frac{I}{F^2}, \quad E = \frac{100}{2,0^2} = 25 \text{ лк.}$$

Задача 193. Освещенность экрана солнечными лучами, падающими нормально к экрану, 1000 лк; перед экраном на расстоянии от него $l = 60$ см помещают линзу с оптической силой $D = +5$ диоптрий. Определить среднюю освещенность экрана в тени от линзы и в светлом кольце вокруг тени (рис. 297). Поглощением света линзой пренебречь.

Решение. Фокусное расстояние линзы

$$F = \frac{1}{D} = \frac{1}{5} \text{ м} = 20 \text{ см.}$$

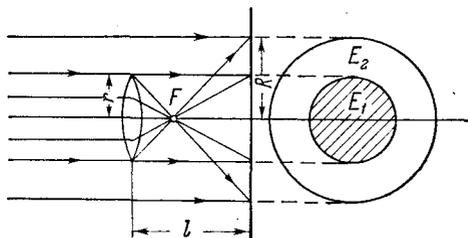


Рис. 299.

Из рис. 299 видно, что $\frac{E_1}{E_0} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{F}{l-F} \right)^2$, откуда находим освещенность экрана в тени линзы

$$E_1 = E_0 \left(\frac{F}{l-F} \right)^2, \quad E_1 = 1000 \text{ лк} \left(\frac{20}{60-20} \right)^2 = \underline{250 \text{ лк.}}$$

В светлом кольце

$$E_2 = E_1 + E_0, \quad E_2 = 250 \text{ лк} + 1000 \text{ лк} = \underline{1250 \text{ лк.}}$$

Задача 194. Источник света в 100 кд находится на расстоянии $L = 1,5$ м от экрана. Посередине между ними расположена собирательная линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см (рис. 300). Определить освещенность в центре экрана. Потерями в линзе пренебречь.

Решение. Расстояние источника света от линзы

$$d = \frac{L}{2} = \frac{150}{2} = 75 \text{ см.}$$

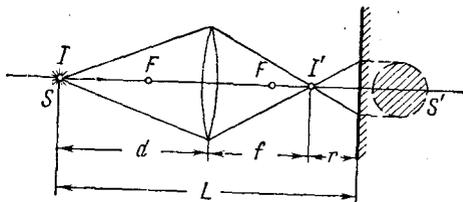


Рис. 300.

Из формулы линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$

найдем расстояние изображения источника света от линзы:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{1}{d}} = \frac{1}{\frac{1}{30} - \frac{1}{75}} = 50 \text{ см.}$$

Расстояние изображения источника света от экрана $r = 75 - 50 = 25$ см.

Освещенность в центре экрана $E = \frac{I'}{r^2} = \frac{I}{r^2} \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Так как световые потоки, попадающие в телесные углы ω_1 и ω_2 , одинаковы, то $I'\omega_2 = I\omega_1$. Но $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{S/d^2}{S/f^2} = \frac{f^2}{d^2}$. Поэтому

$$E = \frac{I}{r^2} \frac{f^2}{d^2} = \underline{400 \text{ лк.}}$$

ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

§ 154. Проектор

Проектор (рис. 301) представляет собой параболическое вогнутое зеркало, в фокусе которого помещен мощный источник света.

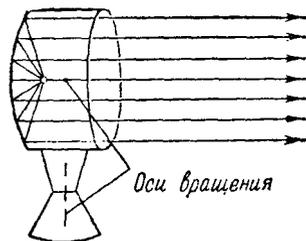


Рис. 301.

лучи от этого источника падают на зеркало и отражаются в пространство в виде центрального пучка параллельных световых лучей. Проектор имеет две оси вращения, вертикальную и горизонтальную, что позволяет придавать световому пучку любое направление.

§ 155. Проекционный аппарат

Проекционный аппарат, или проекционный фонарь, служит для получения на отдаленном экране увеличенного изображения прозрачной картины, помещаемой между главным фокусом и точкой на двойном фокусном расстоянии, и представляет собой

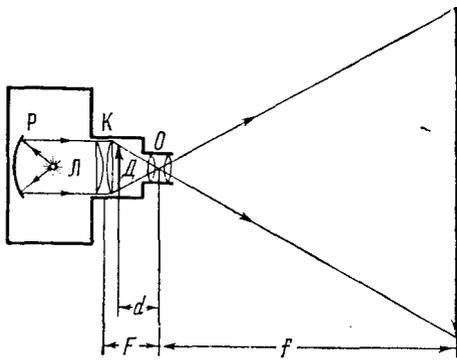


Рис. 302.

(рис. 302) ящик, в котором смонтированы: сильный источник света L (специальная проекционная лампа накаливания в 300—500—1000 Вт, или дуговая лампа) с рефлектором P , источник света помещен в фокусе рефлектора; конденсор K — короткофокусная собирающая система из двух линз, собирающая поток света в сходящийся пучок, который освещает прозрачный диапозитив D , помещенный в рамку; объектив O , расположенный

в фокусе конденсора, с тем, чтобы в них сходились световые лучи от конденсора, прошедшие через диапозитив. Положение объектива фонаря регулируется специальным механизмом.

В кинопроекционном аппарате (проекторе) вместо диапозитива перемещается кинолента со скоростью 24 кадров в секунду. Так как глаз имеет способность сохранять зрительное впечатление около 0,1 с, то изображения последовательных снимков движущихся предметов сливаются в одно движущееся изображение.

Ход лучей в проекционном фонаре показывает, что увеличение

$$k = \frac{f}{d} \approx \frac{f}{F_{\text{конденсора}}}$$

ввиду того, что диапозитив расположен рядом с конденсором и $d \approx F_{\text{конденсора}}$. Следовательно, для увеличения изображения на экране надо, с одной стороны, увеличить расстояние f экрана от проекционного фонаря и, с другой стороны, конденсор сделать короткофокусным.

Эпидиаскоп — усложненный проекционный фонарь, предназначенный для проектирования на экран как прозрачных (диапроекция), так и непрозрачных (эпипроекция) картин. Схема эпидиаскопа и ход лучей в нем даны на рис. 303, *a* и *б*. Эпидиаскоп имеет два объектива O и O_1 , откидную ширму $Ш$, отражатель и столик для непрозрачных (эпи) картин. Когда ширма $Ш$ опущена вниз, как показано на рис. 303, *a*, эпидиаскоп действует, как проекционный фонарь.

При поднятии ширмы, как показано на рис. 303, б, закрывается конденсор K и объектив O и открывается столик C , на

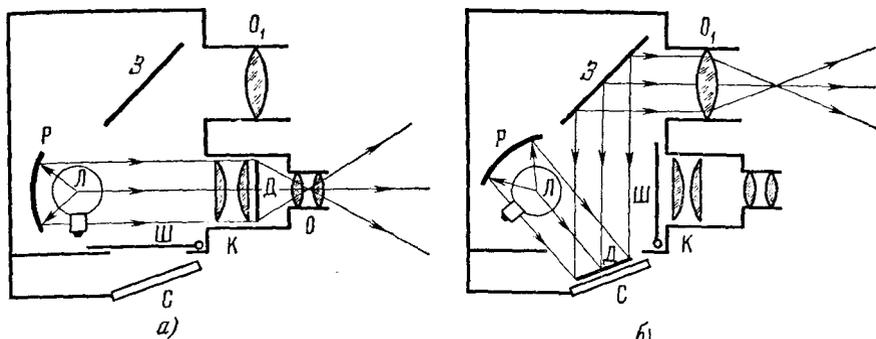


Рис. 303.

котором помещена непрозрачная картина D , освещаемая тем же, повернутым источником света L с рефлектором P . Свет, отраженный от картины, падает на зеркало $З$ и от него отражается на 2-й объектив O_1 .

§ 156. Фотоаппарат

Фотоаппарат (рис. 304) представляет собой светонепроницаемую фотокамеру с объективом в передней стенке и экраном на задней стенке. Экран в простейшем фотоаппарате представляет собой матовое стекло, заменяемое кассетой со свето-

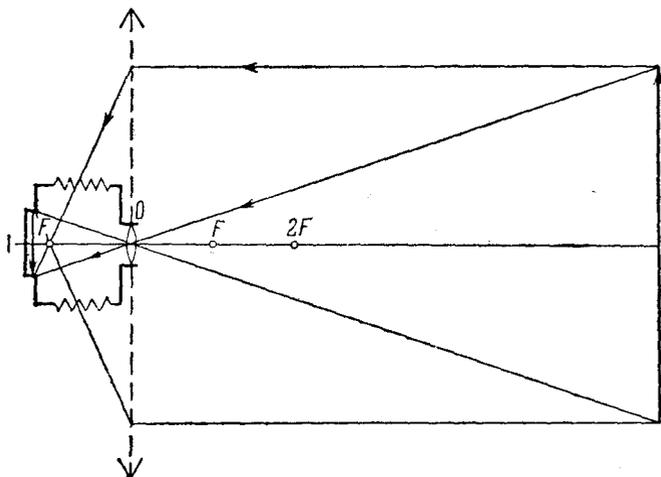


Рис. 304.

чувствительной пластинкой; на ней получается негативное изображение. В пленочных аппаратах экраном служит киноплёнка.

Фотопленка в фотоаппарате находится между главным фокусом и точкой на двойном фокусном расстоянии от объектива: при съемке отдаленных предметов — практически в фокальной плоскости.

Положение фотопластинки в этом промежутке должно меняться с изменением положения снимаемого предмета. Это достигается либо сдвиганием и раздвиганием боковых стенок фотокамеры, выполняемых для этой цели в виде гармошки, как показано на рис. 304, либо при жесткой конструкции стенок камеры выдвижением и выдвиганием объектива.

Примечание. При построении изображения на рис. 304 наряду с лучами, проходящими через оптический центр объектива, взяты лучи, параллельные главной оптической оси, которые фактически не падают на объектив, а проходят вне его. Этот формальный прием не является неверным, так как в точке на экране, представляющей собой изображение какой-нибудь светящейся точки, сходятся не только те два луча, которые проводятся при построении, а бесконечное число других лучей. Если увеличить линзу до очень больших размеров при тех же преломляющих свойствах, то точка схода на экране всех этих лучей не изменится. Поэтому при построении изображения можно считать линзу имеющей сколь угодно большой диаметр и брать любые два луча, удобные для построения.

Современный фотоаппарат имеет, кроме упомянутых основных частей, ряд других деталей, предназначенных для более четкой и качественной его работы, — диафрагму, затвор, видоискатель, дальномер и т. д.

Киносъёмочный аппарат принципиально отличается от фотоаппарата только тем, что вместо неподвижной фотопластинки в нем передвигается кинопленка, попеременно открывающаяся и закрывающаяся 24 раза в секунду.

В современных проекционных аппаратах и фотоаппаратах применяются сложные объективы, состоящие из нескольких линз, представляющих собой оптическую систему, в той или иной мере свободную от оптических недостатков единичной линзы.

Основные недостатки единичной линзы:

Наличие *сферической аберраций* (см. § 146).

Хроматическая аберрация, сущность которой заключается в том, что белый луч света, проходя через линзу, разлагается на свои составные части — лучи разных цветов, — преломляющиеся под разными углами и сходящиеся поэтому на разных расстояниях от объектива (фиолетовые лучи преломляются сильнее всех и собираются ближе к объективу, красные — наоборот), что влечет окрашивание краев изображения.

Астигматизм — линза собирает лучи наклонных пучков света на разных расстояниях.

Кривизна изображения — резкое изображение получается не на плоскости, а на сфере, так как главный фокус и фокусы

наклонных лучей располагаются в разных фокальных плоскостях.

Дисторсия—искажение прямых линий при положении диафрагмы сбоку от линзы.

§ 157. Лупа

Лупа—простейшая оптическая система, состоящая из одной, реже из нескольких линз. Рассматриваемый предмет ставится между линзой и фокусом с таким расчетом, чтобы его изображение—прямое, мнимое и увеличенное (рис. 305)—получилось на расстоянии ясного зрения для нормального глаза: $L = 25$ см.

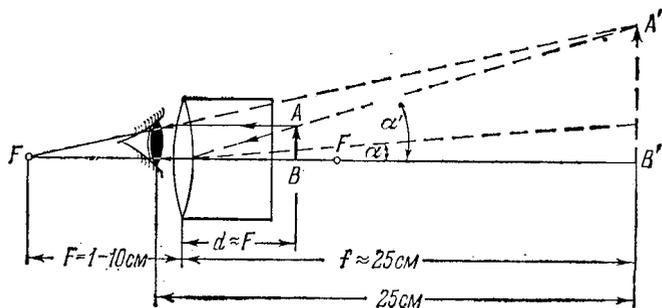


Рис. 305.

Удобнее всего рассматривать предмет через лупу ненапряженным глазом, аккомодированным на бесконечность, для чего рассматриваемый предмет помещается вблизи фокальной плоскости линзы.

Угол α' , под которым видно изображение предмета, определяется из условия

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{h}{F}$$

(h —высота предмета).

Если бы предмет наблюдался невооруженным глазом на расстоянии ясного зрения, то он был бы виден под углом α , причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L}.$$

Так как при малых углах их отношение можно заменить отношением тангенсов, то угловое увеличение, которое дает лупа, будет

$$K = \frac{\alpha_1}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{h \cdot L}{F \cdot h} = \frac{L}{F}.$$

Из рис. 305 видно, что то же значение имеет линейное увеличение

$$K = \frac{A_1 B_1}{AB} \approx \frac{L}{F}.$$

Употребляются лупы с фокусным расстоянием $F = 1-10$ см, что дает при нормальном зрении увеличение: $k = 2,5-25$.

§ 158. Глаз как оптический прибор

С точки зрения физики глаз (рис. 306) представляет собой оптическую систему, подобную фотоаппарату.

Сложная преломляющая оптическая система состоит из хрусталика в форме линзы, расположенного спереди небольшой камеры с прозрачной жидкостью—водянистой влагой, закрытой прозрачной оболочкой—роговицей, и находящегося сзади хрусталика студенистого вещества, называемого стекловидным телом.

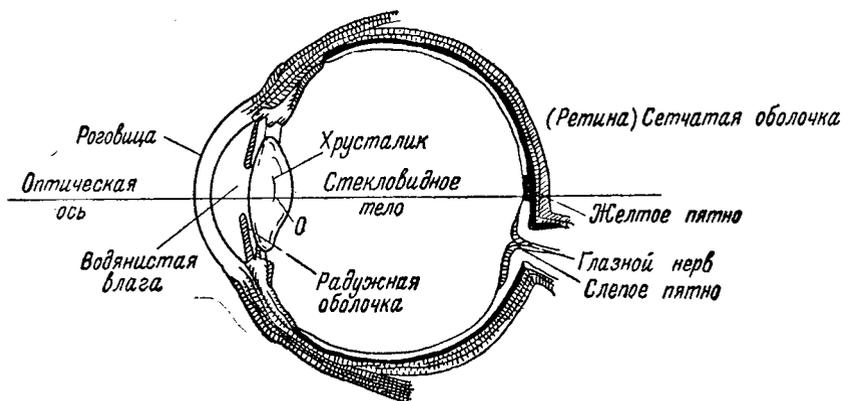


Рис. 306.

Оптический центр O этой системы лежит внутри хрусталика, у задней его поверхности. Показатель преломления системы около 1,4 (хрусталика—1,5).

Стекловидное тело ограничено сзади светочувствительной поверхностью глазного дна—сетчаткой, или роговицей с так называемым желтым пятном, являющимся наиболее чувствительной ее частью, и расположенным напротив зрачка, несколько выше слепого пятна, закрывающего выход глазного нерва, и нечувствительного к свету.

Спереди хрусталик закрыт радужной оболочкой с переменным отверстием—зрачком, играющим роль диафрагмы.

Оптическая ось системы, называемая зрительной осью глаза, проходит через центр хрусталика и слепое пятно.

На сетчатке, расположенной между главным фокусом системы и точкой на двойном фокусном расстоянии, и играющей роль экрана, получается действительное, обратное, уменьшенное изображение предмета.

Угол, образованный лучами, идущими от краев предмета в оптический центр глаза, называется углом зрения.

Угол зрения 2α , как видно из рис. 307, определяет величину изображения на сетчатке. Следовательно, чем больше угол зрения, тем больше число деталей на поверхности предмета различимо глазом.

Опыт показывает, что для нормального глаза при хорошем освещении угол разрешения равен минуте. Детали предмета, видимого под меньшим углом зрения, глазом не различаются — предмет воспринимается как одна точка. Оптические при-

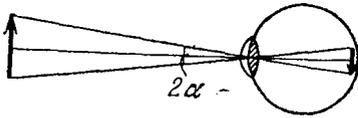


Рис. 307.

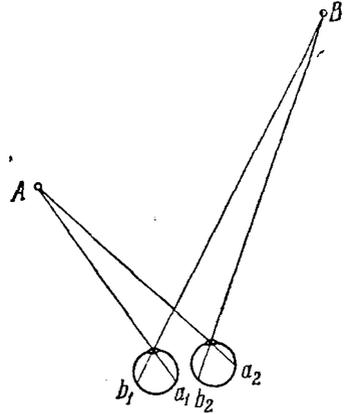


Рис. 308.

боры, увеличивающие угол зрения (лупа, микроскоп, телескоп, бинокль и т. п.), увеличивают так называемую разрешающую способность глаза.

При рассматривании предмета двумя глазами (рис. 308) на сетчатках правого и левого глаз получаются различные изображения. Разница изображений двух точек тем больше, чем дальше расположена одна точка от другой. Оба изображения сливаются в мозгу в один образ, различие же изображений вызывает ощущение расстояния между точками.

§ 159. Аккомодация глаза. Близорукость и дальнокоркость. Очки

Для того чтобы изображение предмета было расположено на сетчатке глаза, необходимо, чтобы в зависимости от расстояния рассматриваемых предметов изменялось фокусное расстояние глаза. Это достигается изменением выпуклости хрусталика глаза с помощью глазной мышцы.

Способность глаза изменять кривизну поверхностей хрусталика с изменением расстояния рассматриваемого предмета называется аккомодацией.

Глаз имеет определенные пределы аккомодации. Для нормального глаза пределы аккомодации — от бесконечности до 10 см.

Расстояние наилучшего зрения, или расстояние ясного зрения, для нормального глаза 25 см.

Близоруким называется глаз, обладающий чрезмерной оптической силой. Он собирает лучи перед сетчаткой вследствие чрезмерного преломления, стчего изображения предметов на сетчатой оболочке становятся расплывчатыми. Расстояние наилучшего зрения для близорукого глаза меньше 25 см.

Дальнорукый глаз обладает недостаточной оптической силой и соединяет лучи за сетчаткой, что также ведет к неясности изображений. Расстояние наилучшего зрения—больше 25 см.

Для частичного исправления близорукости и дальнорукости применяются очки, представляющие собой простые линзы—рассеивающие (вогнутые) для близоруких и собирательные (выпуклые) для дальнорукых.

Примеры решения задач

Задача 195. Фотоаппарат имеет объектив с главным фокусным расстоянием $F=5$ см и фотопленку с размером кадра 6×8 см. Требуется снять чертёж размерами 60×60 см. На каком расстоянии от чертежа надо поместить объектив фотоаппарата, чтобы снимок получился возможно большим? На каком расстоянии от объектива должна устанавливаться пленка?

$$\begin{aligned} F &= 5 \text{ см} \\ S &= 60 \times 60 \text{ см} \\ s &= 6 \times 8 \text{ см} \end{aligned}$$

Найти f и d

пленки на протяжении 2 см

чертежа

Решение

Так как чертёж квадратный, а кадр фотопленки прямоугольный, то заполнить весь кадр невозможно. На фотопленке получится снимок размером 6×6 см, а часть фотографии останется незаснятой. Линейное увеличение

$$k = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Кроме того, $\frac{f}{d} = k = \frac{1}{10}$.

Решая эти два уравнения, найдем расстояние объектива от чертежа

$$d = \underline{55 \text{ см}};$$

расстояние пленки от объектива

$$f = \underline{5,5 \text{ см}}.$$

Задача 196. Линзой пользуются как лупой. Первоначально изображение было в $k_1=4$ раза больше предмета. Затем лупу отодвинули от предмета на $d=0,4$ см, после чего изображение стало в $k_2=5$ раз больше предмета. Определить оптическую силу линзы.

Решение. Так как линза служит лупой, то предмет помещается между линзой и фокусом, и изображение получается мнимое; это значит, что $f < 0$.

Если все линейные величины выражены в метрах, то формула линзы запишется так:

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

В первом случае

$$k_1 = \left| \frac{f_1}{d_1} \right| = 4,$$

поэтому $f_1 = -k_1 d_1$ и

$$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{k_1 d} = \frac{k_1 - 1}{4d_1}. \quad (1)$$

Во втором случае $k_2 = \left| \frac{f_2}{d_2} \right| = 5$, откуда $f_2 = -k_2 d_2$.

Поэтому

$$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{k_2 d} = \frac{k_2 - 1}{5d_2}. \quad (2)$$

Учитывая, что $d_2 = d_1 + l$, где $l = 0,004$ м, при совместном решении уравнений (1) и (2) найдем

$$D = \underline{12,5 \text{ диоптрии.}}$$

Задача 197. Расстояние наилучшего зрения глаза $L = 100$ см. Определить оптическую силу очков, восполняющих недостаток этого глаза.

Решение. Глаз дальнозоркий — очки представляют собой собирающие линзы, через которые глаз видит на расстоянии 100 см мнимое изображение предмета, расположенного на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза (25 см). Следовательно,

$$d = 0,25 \text{ м}, \quad f = 1,00 \text{ м}.$$

По формуле линзы

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{0,25} + \frac{1}{1,00} = \underline{3,0 \text{ диоптрии.}}$$

(Фокусное расстояние линзы: $F = \frac{1}{D} = \frac{1}{3}$ м ≈ 33 см; следовательно, рассматриваемый предмет находится между линзой и фокусом, — значит, через очки глаз видит мнимое изображение.)

Задача 198. Человек с близорукими глазами читает в очках с оптической силой $D = -4$ диоптрии. Определить расстояние наилучшего зрения без очков.

Решение. Очки близорукое человека представляют собой рассеивающие линзы с [фокусным расстоянием $F = \frac{1}{D} = -\frac{1}{4}$ м $= -25$ см. По формуле рассеивающей линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_n},$$

где $F = -25$ см, $d = 25$ см. Находим

$$\frac{1}{f_n} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{1}{-25} - \frac{1}{25} = -\frac{2}{25}.$$

Расстояние до изображения — это и есть расстояние наилучшего зрения:

$$f_n = \left| -\frac{25}{2} \right| = \underline{12,5 \text{ см.}}$$

СОСТАВ СВЕТА. НЕВИДИМЫЕ ЛУЧИ

§ 160. Дисперсия света. Спектр

Дисперсией света называют зависимость оптических характеристик вещества—в частности, его показателя преломления—от длины волны проходящего света, а также явления, в которых обнаруживается эта зависимость. Волны различной длины распространяются в какой-либо среде с различными скоростями и по-разному преломляются. Так как световые лучи разных цветов имеют различную длину волны, то при прохождении через стеклянную призму они отклоняются на различные углы. Вследствие дисперсии белый свет, проходящий через преломляющую

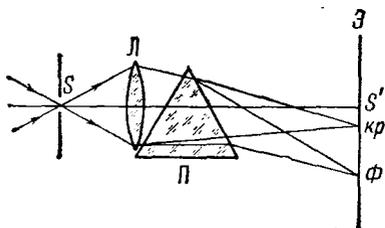


Рис. 309.

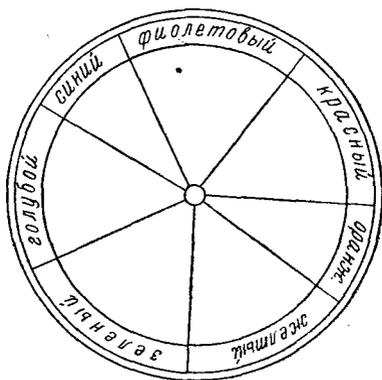


Рис. 310.

среду, оказывается разложенным на семь основных цветов, непрерывно переходящих друг в друга, называемых монохроматическими. На экране за преломляющей призмой (рис. 309) монохроматические цвета располагаются в следующем порядке: красный—ему соответствует наибольшая длина волны ($\lambda \approx 700$ мкм) и наименьший показатель преломления, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и фиолетовый—с наименьшей длиной световой волны ($\lambda \approx 400$ мкм) и наибольшим показателем преломления.

Совокупность длин волн, составляющих данное световое излучение, называют спектром.

Простейший опыт по сложению (синтезу) цветов состоит в быстром вращении круга с секторами, окрашенными в цвета спектра (рис. 310).

Так как реакция глаза составляет примерно 0,1 секунды (т. е. глаз «помнит» цвет сектора в течение 0,1 секунды), то при быстром вращении диска все цвета сливаются, и диск кажется белым.

§ 161. Спектроскоп

Спектроскоп (рис. 311)—прибор, служащий для исследования спектров (для спектрального анализа веществ).

Освещаемая источником света S щель, помещенная в фокусе линзы трубы I , посылает на эту линзу пучок расходящихся лучей, который линза обращает в пучок параллельных лучей. Эти

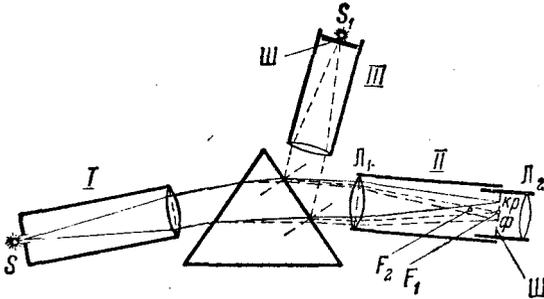


Рис. 311.

параллельные лучи, преломляясь в призме, распадаются на пучки лучей спектральных цветов, которые собираются линзой (L_1) зрительной трубы II в ее фокусе F_1 в виде спектра. Спектр наблюдается через линзу (L_2) зрительной трубы. Положение линзы L_2 регулируется таким образом, что фокус F_1 линзы L_1 оказывается между линзой L_2 и ее фокусом F_2 . Наблюдатель видит мнимое увеличенное изображение спектра на таком же изображении шкалы III , которая проектируется трубой III *), освещенной источником света S_1 на ту же фокальную плоскость F_1 . Если трубу II заменить фотокамерой с фокусом в точке F_1 , то можно получить фотоснимок спектра.

Прибор для получения фотоснимка спектра называется спектрографом.

§ 162. Невидимые лучи (инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра)

За видимыми красными лучами спектра далеко простираются невидимые лучи, т. е. лучи, не вызывающие зрительного впечатления. Эти лучи называются инфракрасными лучами и имеют длину волны в пределах приблизительно от 700 мкм до 340 000 мкм (0,34 мм). Они занимают значительно больший диапазон волн, нежели весь видимый спектр.

Инфракрасные лучи оказывают сильное тепловое действие (сравнительно с лучами видимого спектра) и могут быть

*) Отраженными от призмы лучами.

обнаружены опытом, показанным на рис. 312; лучи от нагретого тела фокусируются при помощи вогнутого зеркала на термометре, который показывает повышение температуры.

За видимыми фиолетовыми лучами спектра далеко простираются так называемые ультрафиолетовые лучи, оказывающие сильное химическое и биологическое действие (длина волны их от 400 мкм до 4 мкм).

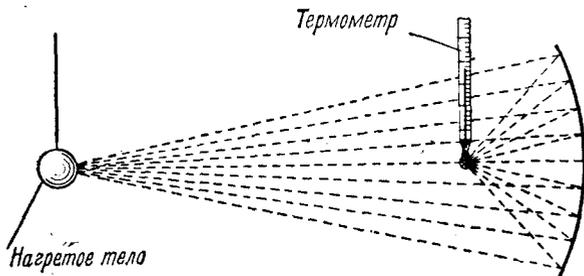


Рис. 312.

Химическое действие ультрафиолетовых лучей обнаруживается, например, при фотографировании, в явлении загара кожи под действием солнечного света и т. д.

Инфракрасные и ультрафиолетовые лучи подчиняются тем же законам отражения и преломления, что и лучи видимые.

Невидимые лучи, как и видимые, проходят, не поглощаясь, через одни среды и поглощаются другими. Однако различные среды, прозрачные для видимых лучей, могут быть непрозрачными для невидимых и наоборот.

Стекло и вода «непрозрачны» для невидимых лучей; для инфракрасных лучей «прозрачен» раствор иода в сероуглероде; ультрафиолетовые лучи пропускаются плохо даже воздухом; однако кварц «прозрачен» и для ультрафиолетовых лучей и т. д.

За ультрафиолетовыми лучами находятся невидимые рентгеновские лучи и далее гамма-лучи.

§ 163. Спектры испускания. Спектры поглощения

Спектром испускания называется *спектр, образуемый излучением светящихся тел.*

Раскаленные твердые и жидкие тела, например, раскаленные или расплавленные металлы, уголь дают сплошной спектр, состоящий из всех цветных лучей, непрерывно следующих друг за другом, и одинаковый для всех раскаленных тел независимо от их химического состава. Раскаленные газы и пары при давлениях, не сильно превосходящих нормальное, дают линейчатый спектр, состоящий из отдельных цветных линий, разделенных темными промежутками. В отличие от раскаленных твердых и жидких тел каждый химический элемент в состоянии раскален-

ных паров имеет свой собственный, ему одному лишь свойственный линейчатый спектр.

Спектром поглощения тела называется *спектр внешнего постороннего светового потока, прошедшего сквозь данное тело.*

При прохождении белого света через раскаленные пары и газы получается сплошной спектр, пересеченный темными линиями или полосками. Эти темные линии в спектре поглощения

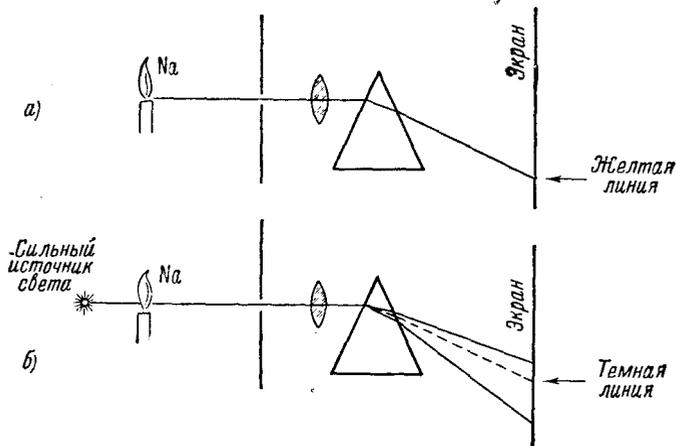


Рис. 313.

расположены в тех самых местах, где имеются линии в спектре испускания раскаленных паров того же материала. Для каждого элемента его линейчатый спектр испускания и спектр поглощения обладают обратимостью: расположение темных линий поглощения в точности соответствует расположению цветных линий испускания. Это означает, что *всякое вещество поглощает световые лучи тех длин волн, которые оно испускает в данных условиях.*

Закон обратимости спектральных линий установлен Кирхгофом. Простейший опыт, демонстрирующий этот закон, представлен на рис. 313. На рис. 313, а показан спектр испускания паров воспламененного натрия, на рис. 313, б показан их спектр поглощения. Сквозь раскаленные пары натрия пропускается свет от сильного источника света, — на том же месте экрана, где была желтая полоска, получается черная полоска спектра поглощения натрия; это значит, что натрий поглотил те самые желтые лучи, которые он сам пропускает.

§ 164°. Спектр Солнца. Фраунгоферовы линии

Спектр Солнца — сплошной спектр испускания, пересеченный почти 20 000 темных линий поглощения в видимой и невидимой части спектра. Источник сплошного спектра — поверхность Солнца, называемая фотосферой.

Линии поглощения соответствуют световым лучам, поглощенным газами и парами веществ в хромосфере—газовой оболочке Солнца и в атмосфере Земли. По ним установлено, что в хромосфере имеются водород, кальций, натрий, железо и другие вещества, встречающиеся на Земле. Линии поглощения носят название *фраунгоферовых линий*—по имени впервые описавшего их немецкого ученого Фраунгофера (1817 г.).

§ 165. Понятие о спектральном анализе

Спектральный анализ является *методом определения химического состава тел по их спектру испускания или спектру поглощения*.

Спектральный анализ—тончайшее орудие физико-химического исследования, позволяющее обнаружить миллионные доли миллиграмма вещества. В этом одно из его преимуществ перед обычными химическими методами анализа. Другое преимущество спектрального анализа то, что при его помощи можно определять состав отдаленных тел. В частности, так впервые был обнаружен элемент гелий на Солнце.

За последние десятилетия получил развитие количественный спектральный анализ, основанный на том, что от концентрации элемента в исследуемом веществе зависит интенсивность его спектральных линий. Сравнивая ее с интенсивностью спектральных линий эталонной таблицы, можно вычислить количественное содержание данного элемента в исследуемом веществе.

ТЕОРИЯ СВЕТА

§ 166. Понятие о волновой и квантовой природе света

Исторически почти одновременно были выдвинуты две теории природы света: «корпускулярная» теория Ньютона и волновая механическая теория Гюйгенса.

По «корпускулярной» теории или теории истечения, выдвинутой Ньютоном в конце XVII века, светящиеся тела испускают во все стороны мельчайшие частицы «корпускулы», которые летят в пространстве прямолинейно по всем направлениям с огромной скоростью и, попадая в глаз, вызывают соответствующее ощущение.

В волновой механической теории светящееся тело вызывает в заполняющей все мировое пространство особой среде—мировом эфире—упругие колебания, которые распространяются в эфире подобно звуковым волнам в воздухе.

Во времена Ньютона и Гюйгенса большинство ученых придерживалось «корпускулярной» теории или теории истечения

Ньютона, которая достаточно удовлетворительно объясняла все известные к тому времени световые явления. Отражение света объяснялось аналогично отражению упругих тел при ударе о плоскость. Преломление света объяснялось действием на корпускулы больших сил притяжения со стороны более плотной среды. Под действием этих сил, проявляющихся, согласно теории Ньютона, при приближении вплотную к более плотной среде, световые корпускулы получали ускорение, направленное перпендикулярно к границе этой среды, вследствие чего они меняли направление движения, приближаясь к перпендикуляру к границе среды, и одновременно увеличивали свою скорость. Аналогично объяснялись другие световые явления.

В дальнейшем появившиеся новые наблюдения не укладывались в рамки этой теории. В частности, несостоятельность этой теории обнаружилась, когда была измерена скорость распространения света в воде. Она оказалась не больше, а меньше, чем в воздухе.

В начале XIX века волновая теория Гюйгенса, предложенная им одновременно с выдвиганием корпускулярной теории Ньютона, но не признанной современниками, в частности, вследствие ее малой разработанности, была развита и усовершенствована работами Юнга и Френеля и получила всеобщее признание.

В 60-х годах прошлого столетия, после того как Максвелл разработал теорию электромагнитного поля, выяснилось, что свет представляет собой электромагнитные волны.

Таким образом, волновая механическая теория света была заменена волновой электромагнитной теорией. Световые волны (видимый спектр) занимают в шкале электромагнитных волн диапазон 0,4—0,7 мк.

Волновая теория света Максвелла, трактующая световую волну как непрерывный процесс, оказалась не в состоянии объяснить некоторые из вновь открытых оптических явлений. Ее дополнила квантовая теория света, согласно которой энергия световой волны излучается, распространяется и поглощается не непрерывно, а определенными порциями — квантами, или фотонами, величина которых зависит только от длины световой волны. Таким образом, по современным представлениям свет обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами.

Энергия кванта света — фотона зависит от частоты колебания световой волны:

$$\epsilon = h\nu,$$

или

$$\epsilon = h \frac{c}{\lambda},$$

где ν — частота колебаний световой волны, λ — длина волны, c — скорость света, h — коэффициент пропорциональности, полу-

чивший название квантовой постоянной или постоянной Планка. В системе СИ $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

В системе СГС: $h \approx 6,6 \cdot 10^{-27}$ эрг·с.

Атом источника света излучает световую энергию квантами света (или фотонами) в виде электромагнитных поперечных волн определенной частоты. Энергия кванта пропорциональна частоте световой волны.

ОБЪЯСНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЯВЛЕНИЙ ОПТИКИ ВОЛНОВОЙ ПРИРОДОЙ СВЕТА

§ 167°. Интерференция света. Когерентные источники света

Интерференцией называют усиление или ослабление волн одинаковой частоты, встречающихся в одной точке.

Устойчивая, не изменяющаяся со временем интерференционная картина—распределение максимумов и минимумов поля—возникает лишь в том случае, если налагающиеся волны имеют одинаковый период и неизменный сдвиг фаз в каждой точке. Такие волны называются когерентными, а излучающие их источники называются когерентными источниками.

Интерференция имеет место при освещении поверхностей двумя или несколькими когерентными источниками света и, в общем случае, ведет к образованию чередующихся светлых и темных полос.

Два независимых источника света, например две электролампы, не когерентны. Излучаемые ими световые волны—это результат сложения большого количества волн, излучаемых атомами и молекулами. Излучение волн атомами и молекулами происходит беспорядочно, и поэтому нет каких-либо постоянных соотношений между фазами волн, излучаемых двумя источниками.

Независимые источники света всегда не когерентны. При взаимодействии излучаемых ими световых волн имеет место сложение

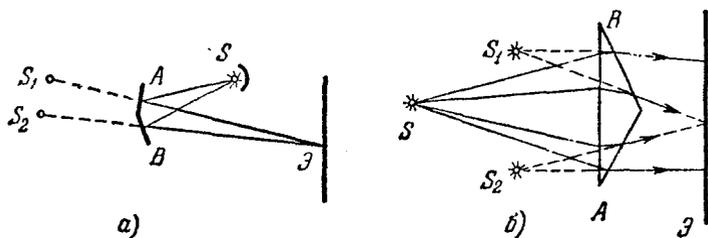


Рис. 314.

неправильно и быстро меняющихся фаз волн различных «элементарных» источников, т. е. сложение средних сил света различных источников. Благодаря этому освещенность, создаваемая двумя

источниками, равномерная. Она равна сумме освещенностей от взаимодействующих источников света.

Когерентность пучков света при исследованиях достигается расчленением пучка света от одного источника на два или несколько пучков света. На рис. 314 показаны два способа получения когерентных световых пучков.

1-й способ (рис. 314, а). Свет от точечного источника света S падает на два плоских зеркала A и B , установленные под углом, немного меньше 180° , и отражается от них двумя различно направленными когерентными световыми пучками. Картина, получающаяся на экране \mathcal{E} , будет такой же, как от освещения двумя когерентными источниками света S_1 и S_2 , положение которых определяется равенствами

$$SA = S_1A \quad \text{и} \quad SB = S_2B.$$

Если первичный источник S расположен достаточно далеко от экрана, световые пучки, отраженные от каждого зеркала, будут состоять из параллельных лучей. Показанные на рисунке зеркала носят название зеркал Френеля.

2-й способ (рис. 314, б). Свет от первичного точечного источника света S проходит через две призмы A и B и освещает экран так, как если бы у нас было два когерентных источника S_1 и S_2 .

Интерференция света можно наблюдать при освещении монохроматическими (одноцветными) лучами прозрачной пластинки переменной толщины, в частности клинообразной пластинки

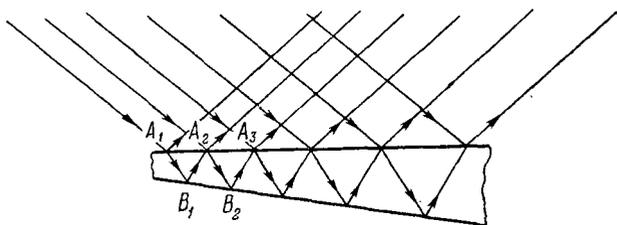


Рис. 315.

(рис. 315). В глаз наблюдателя будут попадать волны, отраженные как от передней, так и от задней поверхностей пластинки. Результат интерференции определяется разностью фаз тех и других волн, которая постепенно изменяется с изменением толщины пластинки. Соответственно изменяется освещенность:—если разность фаз обеих волн в некоторой точке поверхности пластинки равна, например, четному числу полуволн, то в этой точке поверхность будет казаться светлой, при разности фаз в нечетное число полуволн—темной, в промежуточных случаях—более или менее освещенной.

При освещении пластинки с параллельными гранями (рис. 316) разность фаз световых волн, отраженных от передней и задней

ее поверхностей, одна и та же,— пластинка будет казаться освещенной равномерно.

Вокруг точки соприкосновения слегка выпуклого стекла с плоским (рис. 317) при освещении монохроматическим же светом

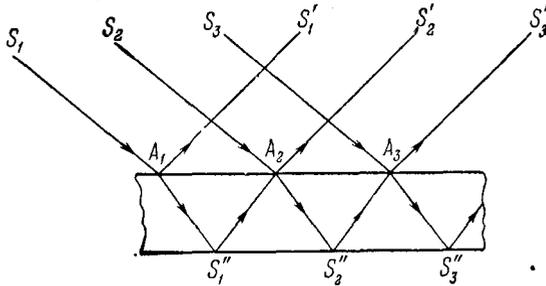


Рис. 316.

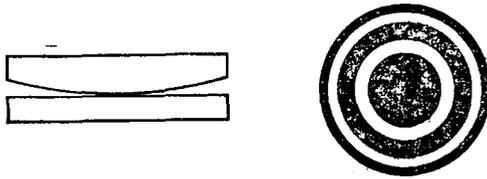


Рис. 317.

наблюдаются темные и светлые кольца—так называемые кольца Ньютона. Здесь тончайшая прослойка воздуха между обоими стеклами играет роль отражающей пленки, имеющей постоянную толщину по concentрическим окружностям.

§ 168°. Дифракция света

Дифракцией называется явление отклонения волны от прямолинейного распространения при прохождении через малые отверстия и огибания волной малых препятствий.

Дифракция волн заметно проявляется при прохождении их через отверстия, размеры которых имеют порядок длины волны, или меньше её, и при огибании ими препятствий размеры которых соизмеримы с длиной волны. На рис. 318 показано прохождение плоской волны через отверстие, диаметр которого меньше длины волны.

Для того чтобы разобраться в ходе световой волны, воспользуемся принципом Гюйгенса. Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, в которую пришла световая волна, является источником вторичной волны. Построив огибающую вторичных волн, излученных источниками в точках, в которые волна пришла в один и тот же момент времени, можно найти положение фронта волны в некоторый следующий момент времени.

Каждая точка отверстия, до которой дошла волна, в соответствии с принципом Гюйгенса становится источником вторичных

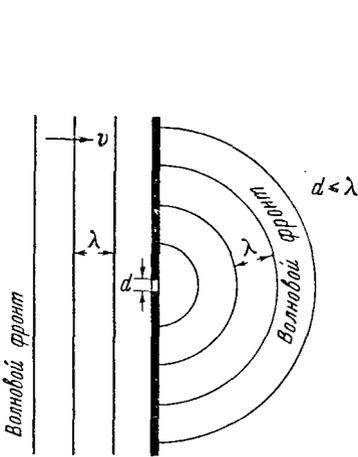


Рис. 318.

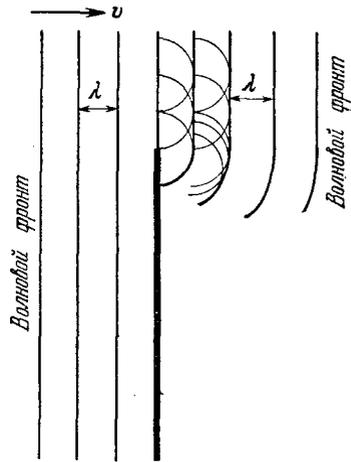


Рис. 319.

волн. Так как отверстие мало по сравнению с длиной волны, то все эти вторичные источники вместе можно с достаточной точностью считать точечным источником. Он дает круговые расходящиеся волны, заполняющие все пространство за стеной, в которой находится отверстие.

При прохождении мимо препятствия достаточно больших размеров (рис. 319) вторичные источники, расположенные непосредственно у края препятствия, дают вторичные волны, заходящие в область геометрической тени от препятствия. Интерференция вторичных волн от этих источников приводит к тому, что фронт волны слегка загибается в область геометрической тени. Если препятствие имеет размеры, соизмеримые с длиной волны: $D \sim \lambda$ (рис. 320), то огибающая его волна полностью заполняет пространство за препятствием. При прохождении же через отверстия больших размеров (рис. 321) имеет место также лишь небольшое огибание стенок у краев отверстия, как и при прохождении волны мимо двух препятствий.

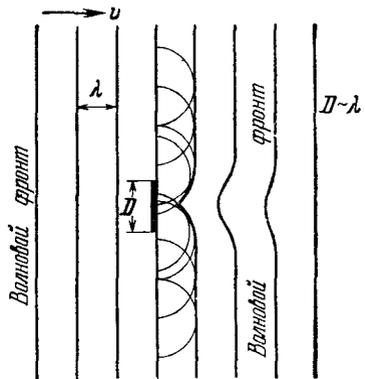


Рис. 320.

Таким образом, дифракция волн заметно проявляется при прохождении через отверстия порядка длины волны и мимо препятствий, размеры которых соизмеримы с длиной волны.

Общеизвестен, например, факт огибания звуковыми волнами стен, размеры которых соизмеримы с длиной звуковых волн (до ≈ 20 м); человек слышит звук и тогда, когда источник звука отделен от него стеной или зданием, если размеры этих препятствий порядка длины звуковых волн.

Приведем примеры опытов, подтверждающих явления дифракции света.

а) При пропускании монохроматического света через прокол в непрозрачном экране на другом экране получится освещенный круг, окруженный чередующимися темными и светлыми кольцами.

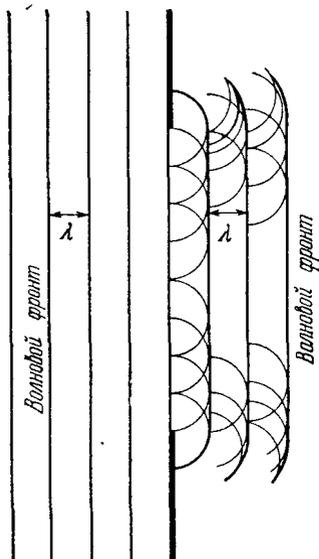


Рис. 321.

б) Тень на экране от освещенной тонкой проволоки получается в виде темной полосы, по бокам которой расположены чередующиеся более узкие темные и светлые полосы (рис. 322).



Рис. 322.

В таких же опытах с белым светом происходит разложение света, и каждая полоса окрашена в цвета спектра.

Дифракция ограничивает разрешающую силу оптических инструментов, т. е. способность инструментов различать детали. Световые пучки от двух слишком близко расположенных точек накладываются друг на друга и дают интерференционную картину, из-за которой изображение детали получается расплывчатым.

§ 169. Фотоэлектрический эффект. Работы А. Г. Столетова по фотоэлектрическому эффекту

Фотоэлектрический эффект, или фотоэффект, состоит в *испускании электронов веществом под действием света.*

Фотоэффект был исследован в конце прошлого столетия (1888 г.) профессором Московского университета А. Г. Столетовым.

Установка, с помощью которой Столетов производил экспериментальное исследование фотоэффекта, показана на рис. 323. Сплошная пластинка K (алюминиевая, медная, цинковая, серебряная, никелевая) и тонкая сетка A закреплялись на некотором расстоянии друг против друга и соединялись с полюсами источника тока. Цинковая пластинка освещалась со стороны сетки светом, который свободно проникал через неё. Когда сплошная пластинка присоединялась к отрицательному полюсу источника тока, т. е. когда она являлась катодом, появлялся ток. Естественно сделать вывод, что электрическая цепь в этом опыте замыкается отрицательно заряженными частицами, вырываемыми из освещен-

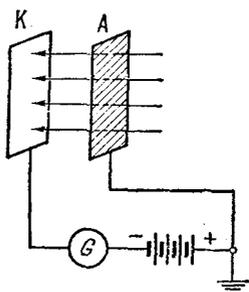


Рис. 323.

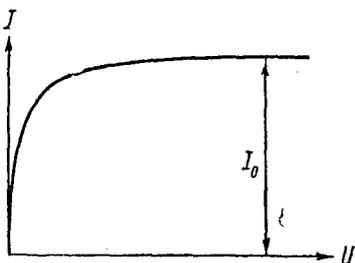


Рис. 324.

ной пластинки под действием электрического поля. Позднейшими опытами (Дж. Дж. Томсон, А. Ф. Иоффе), в которых измерялся заряд испускаемых под действием света частиц, установлено, что эти частицы являются электронами.

Поток электронов, испускаемых катодом под действием света, носит название фотоэлектрического тока или фототока. На рис. 324 показана зависимость силы фототока от приложенного напряжения. Сила фототока с увеличением напряжения, поданного к фотоэлементу, растет до известного предела I_0 , после чего при дальнейшем увеличении напряжения остается неизменной. *Предельная величина фототока называется фототок ом н а с ы щ е н и я.* При малом напряжении вылетевшие из катода электроны лишь частично летят к аноду, а частично возвращаются на катод. По мере увеличения напряжения, поданного к фотоэлементу, количество улетающих к аноду электронов увеличивается — увеличивается сила фототока. При достижении некоторой величины напряжения все вылетающие из катода электроны устремляются к аноду, и фототок достигает насыщения.

В начале этого столетия установлены опытным путем следующие **законы фотоэффекта.**

I. Сила фототока насыщения прямо пропорциональна падающему на катод фотоэлемента световому потоку, т. е. прямо пропорциональна силе света источника света.

II. Наибольшая скорость вылета освобождаемых электронов не зависит от силы света, а для данного металла катода зависит исключительно от длины волны падающего на катод света,—чем короче волна, т. е. чем больше частота колебаний, тем больше скорость вылета электронов.

Эти законы хорошо объясняются квантовой теорией света. Световой квант, для того чтобы выбить электрон из катода, должен иметь энергию, достаточную, во-первых, для «вырывания» электрона из металла,—энергию, измеряемую так называемой работой выхода электрона; во-вторых, для сообщения вылетевшему электрону кинетической энергии, соответствующей скорости его движения. Следовательно, для вылета электрона с той или иной скоростью необходимо, чтобы

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_0 v_0^2}{2},$$

где $h\nu$ —энергия светового кванта падающего света, v_0 —скорость выбитого электрона, $A_{\text{вых}}$ —работа выхода этого электрона.

Эта формула Эйнштейна (1905 г.) получила впоследствии блестящее подтверждение в опытах Милликена (1916 г.) и Лукирского (1928 г.). Из формулы Эйнштейна следует, что для того, чтобы осуществить фотоэлектронную эмиссию, частота падающего света должна удовлетворять неравенству

$$h\nu \geq A_{\text{вых}}.$$

В предельном случае нулевой скорости выбитого электрона ($v_0 \approx 0$)

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}.$$

При частоте падающего света меньше ν_0 фотоэффекта не произойдет.

Число электронов, которые вырываются из металла в единицу времени, зависит от интенсивности световой волны,—от количества квантов света частотой ν , падающих на поверхность металла в единицу времени.

§ 170. Фотоэлементы и их применение

Схема современного фотоэлемента показана на рис. 325. Светочувствительный слой (натрий, калий или цезий)—катод покрывает почти всю внутреннюю поверхность стеклянного баллона, из которого выкачан воздух. Открытым остается небольшое окошечко для доступа световых лучей. Анод представляет собой проволочное кольцо, укрепленное в баллоне. Вместе с батареей фотоэлемент составляет разомкнутую электрическую цепь, находящуюся под напряжением.

При освещении катода возникает фототок. Для его усиления баллон наполняют инертным газом (неоном или аргоном); в этом

случае фотоэлектроны, двигаясь с большой скоростью к аноду, ионизируют атомы газа. Это порождает ионный ток в 25—50 раз более сильный, чем фототок. Кроме того, для усиления фототока применяются обычные усилители на электронных лампах.

В соединении с электронными усилителями фотоэлементы входят в состав чувствительных автоматов, отзывающихся на действие света, — фотореле («электрический глаз»). В зависимости от схемы включения в управляемую сеть фотореле срабатывает либо при попадании света на элемент, либо при прекращении освещения фотоэлемента. Применяются они также в телевидении и звуковом кино, в телемеханике — управлении работой машин на расстоянии и т. д.

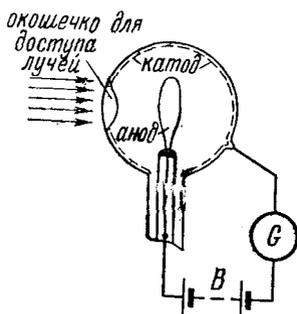


Рис. 325.

Преимущество фотоэлементов перед другими системами автоматического регулирования — их безынерционность.

Фотоэлементы применяются также в качестве объективов фотометров, действие которых основано на законе пропорциональности силы фототока насыщения силе света.

§ 171°. Действия света

1. *Тепловое действие* — нагревание тела, в той или иной мере имеющее место всегда при поглощении света, — превращение лучистой энергии света во внутреннюю энергию тела.

2. *Фотоэлектрическое действие*, или *фотоэффект* — превращение лучистой энергии в энергию электрического тока.

3. *Химическое действие* — это так называемые фотохимические реакции в результате превращения лучистой энергии в химическую (выцветание красок, расщепление растениями углекислого газа под действием солнечного света и т. д.).

4. *Люминесценция* («холодный свет») — превращение одного вида лучистой энергии в другой, а также других видов энергии в лучистую.

Различают два вида люминесценции под действием света:

1) Свечение тел во время освещения, исчезающее по прекращении освещения, — *флюоресценция*. Примеры: свечение при освещении белым светом бутылки с керосином (имеющим желтую окраску) синевато-голубоватым цветом; спиртового раствора хлорофилла — красным цветом.

2) Свечение, продолжающееся и после прекращения освещения, — *послесвечение* — называется *фосфоресценцией*. Примеры: свечение сернистого кальция, сернистых солей некоторых металлов.

Световые волны, излучаемые люминесцирующим веществом, в подавляющем большинстве случаев имеют большую длину, чем поглощаемые волны, возбуждающие люминесценцию. Этим свойством пользуются для обнаружения невидимых ультрафиолетовых лучей по цветной люминесценции под их воздействием.

Явлением люминесценции пользуются для так называемого люминесцентного анализа, имеющего целью обнаружение ничтожно малых примесей (10^{-10} г) люминесцирующих веществ по характерной для них люминесценции.

Фосфоресцирующие вещества применяются для изготовления светящихся экранов и предметов, например для светящихся в темноте приборных шкал, часовых циферблатов и т. д. Флюоресцирующие вещества применяются для изготовления газосветных люминесцентных ламп (рис. 326), представляющих собой стеклянные трубки, заполненные парами ртути или натрия.



Рис. 326.

Внутренняя поверхность трубки покрыта слоем люминофоров — веществ, ярко флюоресцирующих под действием ультрафиолетовых лучей.

К. п. д. газосветных ламп значительно выше к. п. д. ламп накаливания, главным образом благодаря отсутствию тепловых потерь.

Внедрение в технику люминесцирующих источников света и люминесцентного анализа связано с именем академика С. И. Вавилова.

5. Механическое действие — давление света.

То, что свет должен оказывать давление на поверхность, на которую он падает, следовало из электромагнитной теории света, разработанной Максвеллом, и было доказано им теоретически. Вследствие незначительности светового давления экспериментальное обнаружение и измерение его вызывало большие затруднения. Эти затруднения были блестяще преодолены русским ученым профессором Московского университета П. Н. Лебедевым, который нашел остроумные способы снизить до минимума посторонние силы, в частности силы, возникавшие в результате теплового действия лучей на пластинку, во много раз превосходящие световое давление, и тщательно учесть их.

Опыты П. Н. Лебедева показали, что сила давления света прямо пропорциональна энергии падающего луча и не зависит от цвета.

VIII. СТРОЕНИЕ АТОМА

§ 172. Явления, подтверждающие сложное строение атома

Сложное строение атома подтверждается многими физическими явлениями, относящимися к различным разделам физики. К числу таких явлений относятся:

а) электрические, магнитные и электромагнитные явления, которые объясняются наличием в атоме частиц, являющихся носителями положительных и отрицательных зарядов;

б) явления радиоактивного (самопроизвольного) распада некоторых веществ;

в) искусственное расщепление атомных ядер;

г) наличие изотопов—элементов разного атомного веса, обладающих одинаковыми химическими свойствами и т. д.

Истолкование этих явлений как признаков сложного строения атома, сыгравшее важную роль при возникновении и развитии ядерной физики, в настоящее время имеет больше историческое значение. Современные методы экспериментальной физики позволяют обнаруживать непосредственное действие составных частиц атома, фотографировать следы их движения.

§ 173. Способы наблюдения частиц

Заряженные частицы обнаруживаются по их ионизирующему действию. Приведем схемы простейших приборов для обнаружения, наблюдения и исследования заряженных частиц.

1. *Камера Вильсона* (рис. 327)—цилиндр со стеклянными боковыми стенками и крышкой, в котором перемещается поршень. Камера содержит насыщающие пары воды или спирта. При быстром выдвигании поршня воздух в камере охлаждается, пар становится перенасыщенным. Впускаемые в камеру через стеклянное окошко частицы на своем пути ионизируют воздух вдоль траекторий. Образовавшиеся ионы становятся центрами конденсации перенасыщенного пара, и образованный на ионах по пути движения частиц туман от капелек сконденсированного пара позволяет при достаточно сильном освещении сфотографировать траектории частиц — «треки».

2. *Сцинтиллятор* (рис. 328)— короткая трубка, дно которой представляет экран, покрытый сернистым цинком, флуоресцирующим под ударами сравнительно тяжелых частиц. Если на острие

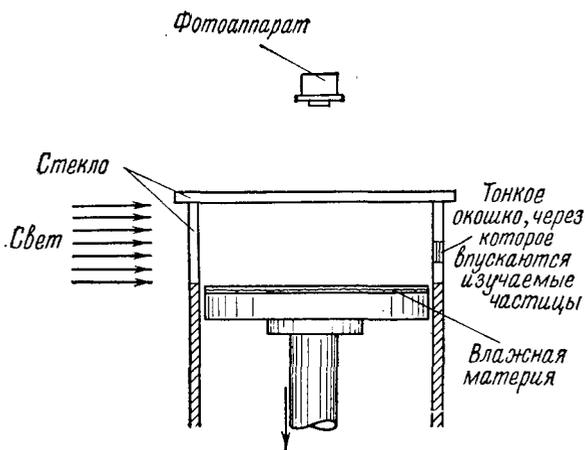


Рис. 327.

иглы, пропущенной через стенку, поместить ничтожное количество вещества, излучающего тяжелые частицы, они дают на экране вспышки, называемые сцинтилляциями, которые можно наблюдать через лупу в другом конце трубки. Легкие частицы, обладающие сравнительно малой массой, дают слабые вспышки, и наблюдать их трудно.

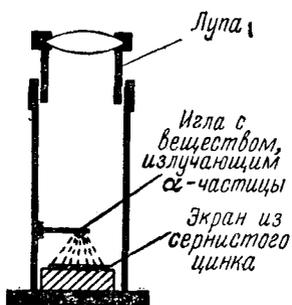


Рис. 328.

3. *Счетчик Гейгера— Мюллера* (рис. 329). Он состоит из стеклянной закрытой трубки, по оси которой натянута металлическая нить, а стенки покрыты тонким проводящим слоем. В трубке находится либо разреженный воздух, либо специальная газовая смесь. Вокруг струны образуется сильное электрическое поле благодаря большой разности потенциалов между струной и проводящим слоем (струна—анод, покрытие—катод).

Попадающая в трубку (через ее стенки) частица ионизирует разреженный воздух, или газовую смесь, вследствие чего возникает разрядный ток. Специально подобранная газовая смесь и включение в цепь большого сопротивления способствуют быстрому прекращению разряда. Таким образом, попадающая в трубку частица вызывает кратковременный импульс тока. Трубка соединена через усилитель со счетчиком, преобразующим импульс тока в механический толчок, и регистрирующим попадание внутрь трубки каждой частицы излучения.

Счетчик Гейгера—Мюллера обладает большой чувствительностью.

4. *Пузырьковая камера.* Она содержит перегретую жидкость (эфир, жидкий водород, жидкий гелий и др.). При резком уменьшении давления происходит закипание жидкости, пузырьки пара

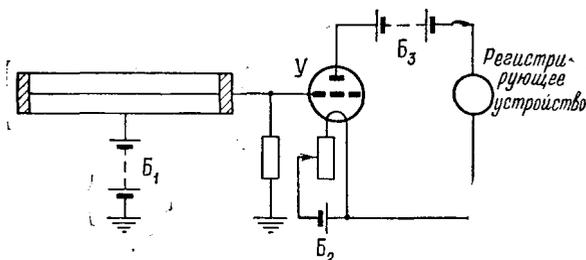


Рис. 329.

прежде всего возникают в местах, где жидкость подвергалась ионизации, т. е. где имеются заряженные частицы. Путь заряженной частицы (трек) обозначается цепочкой пузырьков жидкости, которая и фотографируется.

5. *Метод толстослойной фотоэмульсии.* Этот метод совмещает в себе простоту и большую точность исследований. Фотоэмульсия состоит из желатина и бромистого серебра и играет роль чувствительного верхнего слоя фотопластинки.

В обычной фотографии на фотоэмульсию падают кванты света — фотоны, которые «выбивают» электроны из атомов бромистого серебра фотоэмульсии. Затем фотопластинка проявляется, и скрытое изображение становится видимым. Тот же результат получится, если «заменить» фотоны заряженными частицами. После проявления те места, где частицами «выбиты» электроны из атомов бромистого серебра, образуют след — траекторию полета частицы. По характеру видимого следа — его толщине, расстоянию между «выбитыми» электронами — можно судить о свойствах пролетевшей частицы — скорости, энергии и т. д.

Пластинки отличаются от обычных большой толщиной эмульсии, достигающей 1 мм, что примерно в 100 раз больше толщины эмульсии обычной фотопластинки, и большим содержанием бромистого серебра, что делает следы более четкими.

Существуют и другие методы наблюдения заряженных частиц, непрерывно совершенствующиеся.

Нейтральные частицы, не оказывающие непосредственного ионизирующего действия, обнаруживаются по вторичным эффектам — по следам заряженных частиц, образующихся либо при распаде нейтральных частиц на заряженные, либо при их столкновении с частицами атомов фотоэмульсии.

§ 174. Строение атома — электронная оболочка и ядро

Атом состоит из ядра и электронной слоистой «оболочки».

Электронная «оболочка» — совокупность электронов, движущихся вокруг ядра. Электроны — частицы с отрицательным зарядом 10^{-19} Кл и массой $m_e \approx 10^{-27}$ кг.

Ядро имеет положительный заряд $+eZ$, где e — величина заряда электрона, Z — атомный номер элемента в периодической системе Менделеева. Другими словами, количество положительных элементарных зарядов ядра равно числу электронов атома данного элемента.

Согласно модели атома Бора и Резерфорда электроны атома могут длительно пребывать только в определенных энергетических состояниях, на определенных орбитах. Это, так называемые, стационарные состояния. Следовательно, энергия электронов относительно ядра может принимать только дискретный ряд значений. Каждому стационарному состоянию соответствует определенный энергетический уровень электрона с энергией, равной сумме кинетической и потенциальной энергий электрона относительно ядра. В каждом стационарном состоянии электрон может двигаться по нескольким эллиптическим орбитам с разной степенью их вытянутости. Согласно принципу Паули на каждой орбите может находиться не более двух электронов.

В нормальном состоянии все электроны определенным образом распределяются по слоям, которые обозначаются буквами K, L, M, N, O, P ; каждый слой соответствует определенному энергетическому уровню электронов. В ближайшем к ядру K -слое может находиться не более двух электронов; в следующем L -слое — $2 \cdot 2^2 = 8$ электронов; в M -слое $2 \cdot 3^2 = 18$ электронов и т. д.

При переходе от элементов с меньшими атомными номерами по системе Менделеева к элементам с большими атомными номерами постепенно заполняются вначале внутренние оболочки, где энергия электронов наименьшая, затем следующие. Внутренние электроны наиболее связаны с ядром. Наименьшей связью с ядром обладают внешние электроны вследствие того, что находящиеся между ними и ядром внутренние электроны ослабляют связь внешних электронов с ядром.

§ 175. Составные части ядра атома — протоны и нейтроны

Ядро атома состоит из протонов — положительно заряженных частиц и нейтронов — нейтральных, незаряженных частиц (обобщенное название протонов и нейтронов — нуклоны).

Заряд каждого протона равен $+e$. Это — заряд ядра атома водорода, которое состоит из одного протона. Число протонов ядра атома равно количеству электронов электронной оболочки, т. е. порядковому номеру в системе Менделеева.

Массы протона и нейтрона приблизительно равны 1 а. е. м.

$$m_p \approx m_n \approx 1 \text{ а.е.м. (1 а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.)}$$

Точнее, масса протона

$$m_p = 1,00756 \text{ а.е.м.,}$$

масса нейтрона

$$m_n = 1,00893 \text{ а.е.м. (протон} + \text{ электрон),}$$

Так как масса электронов оболочки составляет ничтожную долю массы протонов и нейтронов ядра атома, то масса атома приблизительно равна массе ядра.

Общее число нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре— A равно числу целых единиц атомного веса элемента.

Число A называется массовым числом.

При описании ядерных реакций ядро обозначается буквами с двумя индексами: вверху (справа) пишется массовое число A , обозначающее число нуклонов в ядре, равное числу целых единиц атомного веса, внизу слева Z — порядковый номер в системе Менделеева, т. е. количество протонов или электронов в атоме. Например: водород ${}_1\text{H}^1$, гелий ${}_2\text{He}^4$, натрий ${}_{11}\text{Na}^{23}$, алюминий ${}_{13}\text{Al}^{27}$.

Разность между верхней и нижней цифрами дает количество нейтронов в ядре атома данного элемента.

Символическое обозначение нейтрона ${}_0n^1$, протона ${}_1p^1$.

§ 176. Радиоактивность

Радиоактивность—способность атомов некоторых элементов самопроизвольно (спонтанно) распадаться, превращаясь в атомы другого элемента. Различают радиоактивность естественную, наблюдающуюся у неустойчивых природных элементов, и искусственную радиоактивность изотопов, полученных искусственным путем. Скорость распада различных радиоактивных элементов различна и характеризуется периодом полураспада.

Период полураспада — *промежуток времени, за который радиоактивное вещество распадается наполовину.*

Период полураспада для различных элементов колеблется от долей секунды до миллиардов лет. Для радия — 1600 лет, для радона — около 4 суток и т. д.

Различают два вида естественного радиоактивного процесса:

а) α -распад, связанный с излучением α -частиц, представляющих собой ядра гелия ${}_2\text{He}^4$ —тяжелые положительно заряженные частицы с массой $m_\alpha \approx 4$ а.е.м. и зарядом $q_\alpha = +2e$ (2 эл. з.); скорость их полета сравнительно невелика: $v_\alpha = \left(\frac{1}{30} \div \frac{1}{15}\right)c$, где c —скорость света;

б) β^- -распад (бета-минус-распад), связанный с излучением электронов, возникающих в момент распада.

Оба процесса сопровождаются γ -излучением, представляющим собой поток фотонов с очень малой длиной волны и, следовательно, с очень большой энергией квантов. Подобно другим электромагнитным волнам γ -лучи распространяются со скоростью света. Проникающая способность γ -лучей в 10—100 раз больше проникающей способности β -лучей, в 1000—10 000 раз больше проникающей способности α -лучей и превосходит проникающую способность рентгеновских лучей.

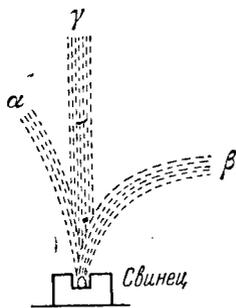


Рис. 330.

Падая в магнитное поле, α -, β - и γ -частицы разделяются на три пучка (рис. 330).

Естественная радиоактивность свойственна тяжелым элементам с большим количеством нейтронов. Все известные естественные радиоактивные вещества составляют четыре семейства тяжелых элементов, «родоначальниками» которых являются:

уран ${}_{92}\text{U}^{238}$, актиний ${}_{82}\text{AcU}^{235}$ (точнее — актино-уран), торий ${}_{90}\text{Th}^{232}$, нептуний ${}_{93}\text{Np}^{237}$ (это семейство открыто в 40-х годах).

Конечный продукт естественного радиоактивного распада во всех этих случаях свинец с порядковым номером $Z = 82$ и массовым числом $A = 206—208$: ${}_{82}\text{Pb}^{206-208}$. На нем цепь радиоактивных превращений заканчивается.

Радиоактивные процессы происходят в соответствии с законами сохранения энергии, электрического заряда и массового числа (количества нуклонов).

При α -распаде массовое число нового элемента уменьшается на 4 единицы, т. е. примерно на 4 уменьшается атомный вес элемента; заряд ядра элемента уменьшается на 2 единицы, вследствие чего из оболочки удаляются два электрона, не удерживаемые более притяжением ядра. Элемент превращается в другой элемент с порядковым номером в таблице Менделеева, меньшим на 2.

При β -распаде в ядре происходит превращение нейтрона в протон. Такое превращение нейтрального нейтрона в положительно заряженный протон обязательно должно сопровождаться освобождением отрицательного заряда — электрона, т. е. β -излучением. Ядро не выбрасывает электроны, так как электронов нет в составе ядра; электроны возникают в результате превращения нейтрона в протон. При этом массовое число элемента не изменяется, а заряд ядра элемента увеличивается на $+e$; соответственно количество электронов оболочки увеличивается на 1 электрон. Элемент превращается в другой — с порядковым номером в таблице Менделеева, большим на 1.

Искусственная радиоактивность создается в устойчивых элементах путем их бомбардировки тяжелыми частицами — α -частицами, нейтронами, реже — протонами и др. При этом ядерные превращения происходят в два различных этапа. Сначала

бомбардирующая частица, попадая в ядро, вызывает его превращение в другое, нестабильное, ядро (радиоактивное). Затем образовавшееся радиоактивное ядро самопроизвольно испускает частицу и превращается либо в стабильное ядро, либо в новое радиоактивное ядро. Искусственная радиоактивность подчиняется тем же законам, что и естественная.

§ 177. Излучение и поглощение энергии атомом

В нормальном состоянии атом находится в наименьшем возможном энергетическом состоянии, которое и является устойчивым (аналогично устойчивости положения тела над землей, когда оно занимает наименьшее из возможных положений, в котором его механическая энергия наименьшая). Для перехода атома в более высокое энергетическое состояние, т. е. для «возбуждения» атома, необходимо перевести электрон из одного слоя в другой слой, более далекий от ядра, для чего необходимо сообщить ему определенную энергию. При этом энергия атома изменяется на вполне определенную величину, равную разности энергий электрона в его новом и старом положениях.

Равновесное состояние возбужденного атома динамическое. В возбужденном атоме наряду с электронами, возбужденными внешним энергетическим источником и вследствие этого перескочившими во внешние слои, имеются другие электроны, в том числе часть ранее возбужденных электронов, движущихся во внешних слоях. Эти электроны переходят из внешних слоев во внутренние, на орбитах которых освободились «вакансии». При переходе электрона с орбиты внешнего слоя с энергией E_1 на орбиту внутреннего слоя с энергией E_2 его энергия уменьшается. Такой переход сопровождается излучением электромагнитных волн, которое всегда происходит целыми квантами. Частота излучаемых волн определяется уравнением $h\nu = E_1 - E_2$.

Излучаемые кванты могут соответствовать как световым лучам, так и другим — инфракрасным, ультрафиолетовым, рентгеновским и т. д. Если электрону сообщается энергия, достаточная для удаления его за пределы атома, атом превращается в положительный ион.

§ 178. Деление ядер урана. Цепная реакция

Ядро изотопа урана ${}_{92}\text{U}^{235}$ при облучении медленными (тепловыми) нейтронами расщепляется на ядра двух различных элементов с приблизительно равными массами. Происходит так называемая ядерная реакция деления. Деление урана может происходить на различные пары осколков с выделением 2—3 нейтронов. Например, деление ${}_{92}\text{U}^{235}$ при поглощении им одного нейтрона на ксенон и стронций может происходить с выделением двух нейтронов:



Оба возникающих ядра ${}_{54}\text{Xe}^{139}$ и ${}_{38}\text{Sr}^{95}$ обладают чрезмерным избытком нейтронов, так как наиболее тяжелыми стабильными изотопами ксенона и стронция являются ${}_{54}\text{Xe}^{136}$ и ${}_{38}\text{Sr}^{90}$. Поэтому эти ядра неустойчивы и испытывают ряд последовательных превращений путем β -распада, при котором происходит превращение избыточных нейтронов в протоны, с освобождением соответствующего количества электронов. При этом превращении массовое число элемента сохраняется.



Рис. 331.

${}_{92}\text{U}^{235}$ к делению при возбуждении его нейтроном, во-вторых, благодаря возникновению при делении ${}_{92}\text{U}^{235}$, так называемой, цепной реакции.

Цепная реакция заключается в том, что деление ${}_{92}\text{U}^{235}$ сопровождается испусканием 2—3-х вторичных нейтронов на каждое поделившееся ядро. Нейтроны частично захватываются другими ядрами, которые делятся с образованием новых нейтронов, и т. д. Схема цепной реакции при делении урана приведена на рис. 331.

Развитию цепной реакции препятствуют: а) вылет нейтронов через поверхность куска урана, что имеет место в тем большей степени, чем меньше куски урана; б) поглощение нейтронов примесями и материалом стенок сосуда, в котором происходит реакция (материалом бомбы или реактора). Вылет нейтронов за пределы куска урана тем меньше, чем больше его размеры. Для успеха цепной реакции размеры кусков урана не должны быть меньше так называемого критического объема, т. е. масса куска урана не должна быть меньше некоторой «критической» массы.

Критическая масса уранового заряда шарообразной формы около 60 кг. В случае превышения зарядом урана критической массы цепная реакция протекает чрезвычайно быстро, практически мгновенно, с выделением большого количества энергии.





$x\rho - \alpha$

75 ноп.

68098

Д4

6869